O TEOREMA DE HUREWICZ NA TEORIA
DE HOMOTOPIA DOS ESPAÇOS NILPOTENTES

PAULO FERREIRA LEITE

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA
ORIENTADOR:

Prof. Dr. PETER J. HILTON

São Paulo fevereiro de 1979

Aos meus Pais,
à Marilena,
à Cecília
e à Heloisa.

ABSTRACT

The main purpose of this work is the study of the homomorphisms induced in homology by the covering projection in the category of nilpotent spaces.

We work in the context of a Serre class C of nilpotent groups, which is a generalization of the concept of Serre class of abelian groups introduced by Hilton, Mislin and Roitberg (see [H,M,R], [H,R]₁).

Our main result is

THEOREM. Let $\bar{X} \longrightarrow X$ be a regular covering of a nilpotent space X . If X is of finite type or C is a complete class then the following conditions are equivalent:

- i) $\pi \in C$, where π is the group of covering transformations of the covering $\bar{X} \longrightarrow X$;
- ii) The homomorphism induced in homology $H_q \bar{X} \longrightarrow H_q X$ by the covering projection is a C -bijection for every q .

The main point in the proof of this theorem is the use of some algebraic results concerning the (co)homology of groups modulo a class C of nilpotent groups, (see theorems 4.1.1; 4.1.3).

As applications we get an improvement of an absolute Hurewicz theorem obtained by Hilton and Roitberg (see [H,R]₁) and proved some relative form of the same theorem.

We also prove a property modulo $\mathcal{C}$ of the $\Gamma_i K$ groups introduced by J.H.C. Whitehead (see $[W]_2$).

Í N D I C E

CAP. I - TEOREMAS DE HUREWICZ CLÁSSICOS

§0 - Introdução.	1
§1 - Teoremas de Hurewicz.	5
§2 - Sequência exata de J.H.C.Whitehead. Adendo ao teorema de Hurewicz.	15

CAP. II - TEORIA DE SERRE

§0 - Introdução.	19
§1 - Classes de Serre de grupos Abelianos.	21
§2 - Teoremas de Hurewicz e de Whitehead módulo C	26

CAP. III - GRUPOS E AÇÕES NILPOTENTES, CLASSES DE SERRE DE GRUPOS NILPOTENTES. ESPAÇOS NILPOTENTES

§0 - Introdução.	33
§1 - Grupos e ações nilpotentes.	35
§2 - Classes de Serre de grupos nilpotentes.	40
§3 - Espaços nilpotentes	46

CAP. IV - ALGUNS RESULTADOS ALGÉBRICOS RELATIVOS A (CO)HOMOLOGIA DE GRUPOS MOD. C

§0 - Introdução.	51
§1 - Homologia	53
§2 - Cohomologia	64

CAP. V - HOMOLOGIA MÓDULO C DE RECOBRIMENTOS DE ESPAÇOS NILPOTENTES

§0 - Introdução.	71
§1 - Espaços de recobrimento: Propriedades homotópicas e de levantamento	73
§2 - Espaços de recobrimento: Relação entre os grupos de homologia de um espaço e seu recobrimento. Sequência espectral de um recobrimento.	77
§3 - Recobrimentos de espaços nilpotentes: homologia mod C	81
§4 - Caso relativo.	92
§5 - Cohomologia.	94

CAP. VI - APLICAÇÕES. O TEOREMA DE HUREWICZ MÓDULO C E A SEQUÊNCIA EXATA DE J.H.C.WHITEHEAD

§0 - Introdução.	97
§1 - Aplicações.	99

BIBLIOGRAFIA.	107
-----------------------	-----

INTRODUÇÃO

Estudamos neste trabalho, no contexto das classes de Serre de grupos nilpotentes, os homomorfismos induzidos em homologia por uma projeção de recobrimento na categoria dos espaços nilpotentes.

Isso nos permitirá desenvolver, sob um ponto de vista novo, parte do programa de generalizar para os espaços nilpotentes (e também para os espaços quase-nilpotentes) técnicas e resultados de reconhecida importância e utilidade na categoria dos espaços simplesmente conexos. Em particular, pudemos, como aplicações, dar uma versão melhorada do teorema de Hurewicz módulo C obtido por Hilton e Roitberg em $[H,R]_1$; obter, para o caso relativo, uma forma fraca desse mesmo teorema e provar uma propriedade módulo C dos grupos $\Gamma_i K$ que figuram numa sequência exata introduzida em 1950 (ver $[W]_2$) por J.H.C. Whitehead.

Antes de passarmos a descrever o trabalho em si, faremos algumas considerações de caráter geral.

Até recentemente, em virtude da importância prática de resultados como os teoremas de Hurewicz e Whitehead, que só eram conhecidos para espaços simplesmente conexos, os topólogos concentraram seus esforços no estudo desses espaços. A primeira grande generalização que esses teoremas sofreram se deu no princípio da década de 1950 que, diga-se de passagem, foi uma época de grandes transformações na Topologia Algébrica. Utilizando técnicas que havia desenvolvido anteriormente em sua tese de doutoramento (veja [S]₁) sobre a homologia singular dos espaços fibrados e, introduzindo o conceito de classe de grupos abelianos, J.P.Serre pode, em 1953 (conf. [S]₂), dar uma vasta generalização desses teoremas. Permanecia porém, ainda, a restrição de que os espaços envolvidos deviam ser simplesmente conexos, ou, caso não o fossem, $\pi_1 X$ devia ser um grupo abeliano e sua ação em todos os outros grupos de homotopia devia ser trivial, como acontece, por exemplo, com os espaços de Hopf. O fato do teorema ser válido para essa categoria mais geral do que a dos espaços simplesmente conexos não foi muito enfatizado na época, mesmo porque, essa categoria não apresentava evidentes vantagens sobre a anterior.

Muito mais recentemente, com a observação feita por Sullivan em 1970, de que existe na teoria da homotopia uma construção funtorial análoga à localização em Álgebra, uma considerável quantidade de trabalho foi feita nessa direção

e se tornou evidente que a categoria dos espaços simplesmente conexos não é adequada para o pleno desenvolvimento dessas técnicas. "This is due principally to the fact that it does not respect function spaces. We know following Milnor, that if X is a (pointed) CW-complex and W a finite (pointed) CW-complex, then the function space X^W of pointed maps $W \rightarrow X$ has the homotopy type of a CW-complex. However its components will, of course, fail to be 1-connected even if X is 1-connected", escrevem Hilton, Mislin e Roitberg (confronte [H,M,R], pág. 62). "However", prosseguem eles, "it turns out that the components of X^W are nilpotent if X is nilpotent. Moreover, the category of nilpotent C.W complexes is suitable for homotopy theory (as first pointed out by E. Dror), and for localization techniques."

Muitos matemáticos contribuíram para a popularização dos espaços nilpotentes (confronte definição 3.3.0 do capítulo III). Em particular, E. Dror (veja [D]) provou, em 1971, uma generalização do teorema de Whitehead que inclui esses espaços e Hilton e Roitberg demonstraram mais recentemente (1976) uma versão do teorema de Hurewicz, no caso absoluto, e um teorema de Whitehead para essa categoria de espaços (veja, respectivamente, [H,R]₁ e [H,R]₂). Em [H,M,R], os autores desenvolvem uma teoria de localização para espaços nilpotentes e fazem diversas aplicações.

Neste trabalho, retornamos a ele, após a breve di-

gressão acima, colocamo-nos na categoria dos C.W. complexos e, portanto, a menos que se faça menção explícita em contrário, o termo espaço deve ser tomado sempre nessa acepção, isto é, um espaço para nós é sempre um C.W.-complexo. Se algumas vezes insistimos nesse ponto, no texto, é por pura ênfase.

No primeiro capítulo, fazemos um rápido apanhado dos teoremas clássicos de Hurewicz e Whitehead destacando os pontos que irão apresentar maior interesse nos capítulos futuros. Apenas com o intuito de ilustrar o ponto de vista adotado, apresentamos algumas demonstrações.

Tratamos em seguida, da generalização, dada por Serre, a esses teoremas. Para isso recordamos algumas definições e propriedades das classes de Serre de grupos abelianos. O espírito desse capítulo é o mesmo do anterior.

Concentramos, para comodidade do leitor, no capítulo III, as definições e os enunciados de teoremas que utilizaremos nos capítulos finais do trabalho.

Os capítulos quatro, cinco e seis sumarizam nossa contribuição ao estudo dos espaços nilpotentes.

O capítulo IV, de natureza puramente algébrica, contém resultados cruciais para o desenvolvimento do capítulo V que é, em essência, topológico. Abordaremos nele, questões referentes a (co)homologia dos grupos módulo uma classe de

Serre C de grupos nilpotentes.

No capítulo V, estudamos homomorfismos induzidos na homologia, por uma projeção de recobrimento na categoria dos espaços nilpotentes. O principal resultado do capítulo é o teorema 5.3.4 que, juntamente com seus corolários fornece, como exemplificamos no capítulo VI, um meio simples e eficiente de generalizar para espaços nilpotentes, resultados conhecidos no caso simplesmente conexo.

No capítulo VI fizemos as aplicações já mencionadas no início desta introdução.

É com grande prazer que agradecemos a todas pessoas que nos auxiliaram, direta ou indiretamente, na elaboração deste trabalho e, muito particularmente aos professores:

U. Seip, R. Fritsch e Nelson S. Leme, pelas formas diversas mas igualmente eficazes como nos auxiliaram.

Angelo Barone Neto, nosso antigo orientador, pelo apoio, estímulo e compreensão.

Daciberg Lima Gonçalves pela ajuda decisiva no início deste trabalho.

Elza Furtado Gomide pelo muito que aprendemos em seus seminários e pela competência com que leu os manuscritos deste trabalho. Suas sugestões foram de grande valia e sem elas o número de erros, imperfeições e obscuridades seria ainda

da maior.

Peter John Hilton, orientador deste trabalho, pelo estímulo, orientação e amparo nas horas difíceis. Graças as suas raras qualidades de caráter, o Prof. Hilton soube, apesar de nossas diferentes qualificações profissionais, transformar nosso trabalho conjunto numa atividade recompensadora e cheia de prazer.

Finalmente, queremos agradecer a Gisela pelo seu inesperado entusiasmo pela Álgebra Homológica e ao sr. João Baptista Esteves de Oliveira e Raquel de Jesus pelo excelente trabalho datilográfico.

CAPÍTULO I

TEOREMAS DE HUREWICZ CLÁSSICOS

§0 - INTRODUÇÃO

Como sabemos, Poincaré, motivado pelo desejo de classificar variedades, foi o primeiro a empregar, de forma sistemática, métodos combinatórios no estudo da topologia. Numa série de trabalhos pioneiros, iniciada em 1895 com o artigo *Analysis situs* (ver [P]), desenvolveu ele as primeiras idéias sobre a teoria de homologia e introduziu o conceito de grupo fundamental de um espaço. Era inclusive de seu conhecimento, embora não tenha deixado demonstração desse fato, a relação existente entre $\pi_1 X$ e $H_1 X$.

Os grupos de homotopia de ordem mais alta só foram, porém, introduzidos bem mais tarde, entre os anos de 1932 e 1935, com os trabalhos de E. Čech (ver [Če]) e W. Hurewicz (confronte referências abaixo). Também H. Hopf contribuiu de forma fundamental para o reconhecimento da importância des-

ses grupos.

Hurewicz, partindo de uma definição adequada dos grupos de homotopia (absolutos e relativos), estudou-os em profundidade em quatro artigos famosos (ver [Hu]). Em particular, definiu, para cada inteiro j , um homomorfismo $\pi_j X \xrightarrow{h} H_j X$ e provou que se o espaço X é simplesmente conexo então o primeiro grupo de homotopia não nulo é isomorfo ao correspondente grupo de homologia. Provou também um resultado análogo para o caso relativo.

Sendo esses resultados o tema central do nosso trabalho, cabem aqui alguns comentários.

É bem sabido que, embora os grupos de homotopia possam ser definidos de uma forma bastante simples e geométrica, o seu cálculo, salvo em conhecidas exceções, é extremamente difícil ou mesmo impossível com os métodos atualmente disponíveis. Em oposição a essa situação, encontram-se os grupos de homologia. De definição mais elaborada e com menos conteúdo geométrico, são eles, no entanto, mais simplesmente calculáveis.

Somente o fato do teorema de Hurewicz permitir, através do isomorfismo com o correspondente grupo de homologia, o cálculo do primeiro grupo de homotopia não nulo, já justifica a sua importância.

Um aspecto marcante no desenvolvimento da teoria clássica

sica de homotopia é a exigência de que os espaços envolvidos sejam simplesmente conexos. O teorema de Hurewicz, que descrevemos acima, não constitui, como é amplamente sabido, exceção para esse fato.

Nosso objetivo, no próximo parágrafo, é oferecer uma demonstração para o teorema de Hurewicz.

Entre as possíveis demonstrações, escolhemos a que utiliza a seqüência espectral de uma fibração. A razão da escolha é dupla: além de julgarmos ser essa a melhor demonstração para o teorema, ela ilustrará a técnica utilizada nos capítulos futuros. Admitimos, portanto, a familiaridade do leitor com a teoria das seqüências espectrais de uma fibração.

Entre as muitas referências existentes para esse tópico, destacamos a fonte original, a tese de doutoramento de J.P. Serre (ver [S]₁). Esse é um trabalho extraordinariamente lúcido e bem escrito, cuja leitura recomendamos. Outra excelente referência é [H,W].

No parágrafo 2, damos uma rápida descrição de uma seqüência exata descoberta e estudada por J.H.C.Whitehead ([W]₂). Essa seqüência exata nos permitirá provar um importante adendo ao teorema de Hurewicz. Provaremos, no capítulo VI, um resultado envolvendo essa seqüência exata.

Advertimos o leitor para o fato de que, sendo clássico todo o material do capítulo e dispondo-se de excelente biblio

grafia, fomos, em alguns pontos, bastante concisos. A idéia geral é apenas ilustrar técnicas e fornecer subsídios para os capítulos posteriores. Além das já mencionadas, poderíamos indicar, como referência, para o capítulo, [M,T].

§1 - TEOREMAS DE HUREWICZ

1.1.0. Recordemos, rapidamente, a definição do homomorfismo $\pi_X X \xrightarrow{h_n} H_n X$ de Hurewicz.

Seja σ_n um gerador (existem maneiras naturais de definir esse gerador) de $H_n(S^n)$. Se $[f] \in \pi_n X$ representa a classe de homotopia da função contínua $S^n \xrightarrow{f} X$, definimos

$$h_n[f] = f_*(\sigma_n)$$

No caso relativo, procedemos de maneira análoga. Um elemento de $\pi_n(X, A)$ pode ser interpretado como a classe de homotopia de uma função $(E^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, A)$. Escolhendo-se então um gerador $\bar{\sigma}_n$ de $H_n(E^n, S^{n-1})$ (por exemplo, através do isomorfismo $H_n(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(S^{n-1})$) definimos

$$h_n[f] = f_*(\bar{\sigma}_n).$$

Prova-se então que h_n é um homomorfismo para $n \geq 1$ ($n \geq 2$ no caso relativo).

Com esses preliminares, já estamos em condições de enunciar o

1.1.1. Teorema de Hurewicz. Seja X um espaço simplesmente conexo. São equivalentes as condições:

- i) $\pi_j X = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$
- ii) $H_j X = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$

No caso de uma das condições acima estar verificada, podemos afirmar que

iii) $\pi_n X \xrightarrow{h_n} H_n X$ é um isomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO

Provaremos que i) implica ii) e iii). Dessa implicação decorre imediatamente a equivalência entre i) e ii).

A demonstração é feita por indução sobre n . Provaremos inicialmente o passo da indução ($n \geq 3$) e verificamos, posteriormente, que o teorema é válido para $n = 2$.

Seja então X um espaço $(n-1)$ conexo. Nossa hipótese de indução assegura que o teorema é verdadeiro para qualquer espaço $(n-2)$ conexo.

Consideremos agora a fibração

$$\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow E$$

onde ΩX e EX são, respectivamente, os espaços dos laços e dos caminhos em X e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1} \Omega X & \xrightarrow{h_{n-1}} & H_{n-1} \Omega X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_n X & \longrightarrow & H_n X \end{array}$$

onde as flechas horizontais são os respectivos homomorfismos de Hurewicz, a flecha vertical da esquerda é um isomor-

fismo e a flecha vertical da direita é a transgressão (cuja existência está assegurada pela hipótese de indução). Uma vez que a hipótese de indução nos garante que

$$\pi_{n-1} \Omega X \xrightarrow{h_{n-1}} H_{n-1} \Omega X$$

é um isomorfismo, basta que se prove que a transgressão também é, nesse caso, um isomorfismo e teremos a tese.

Utilizaremos para isso a seqüência espectral da fibração $\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow X$.

Observemos, inicialmente, o diagrama abaixo, extraído da seqüência espectral:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1} \Omega X = E_{0,n-1}^2 & \longrightarrow & E_{0,n-1}^3 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_{0,n-1}^n \longrightarrow E_{0,n-1}^{n+1} = E_{0,n-1}^\infty \\ \uparrow d^2 & & \uparrow d^3 & & & & \uparrow d^n \\ E_{2,n-2}^2 & & E_{3,n-3}^3 & & & & E_{n,0}^n \end{array}$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $H_j X = E_{j,n-j}^2 = 0$, $2 \leq j \leq n-1$. Portanto, para os mesmos valores de j , $E_{j,n-j}^j = 0$. Isso mostra que

$$E_{0,n-1}^2 = E_{0,n-1}^n \tag{1}$$

Por outro lado, usando-se o fato que

$$E_{0,n-1}^{n+1} = E_{0,n-1}^\infty = 0, \quad E_{n,0}^{n+1} = E_{n,0}^\infty = 0$$

(o espaço EX é contractil!)

e

$$E_{-n, -2n-2}^n = 0, \quad E_{2n, -n+1}^n = 0$$

conclui-se facilmente que

$$E_{0, n-1}^n = E_{n, 0}^n \quad (2)$$

Através de (1) e (2), obtemos

$$H_{n-1} \Omega X = E_{n, 0}^n \quad (3)$$

Consideremos agora este outro diagrama também extraído da seqüência espectral:

$$\begin{array}{ccccc} H_n X = E_{n, 0}^2 & \longleftarrow & E_{n, 0}^3 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & E_{n, 0}^{n-1} & \longleftarrow & E_{n, 0}^n \\ \downarrow d^2 & & \downarrow d^3 & & & & \downarrow d^{n-1} & & \\ E_{n-2, 1}^2 & & E_{n-3, 2}^3 & & & & E_{1, n-2}^{n-1} & & \end{array}$$

Utilizando-se novamente a hipótese de indução, temos

$$H_{n-j}(X, H_{j-1} \Omega X) = E_{n-j, j-1}^2 = 0, \quad 2 \leq j \leq n-1$$

o que nos mostra que

$$E_{n-2, 1}^2 = E_{n-3, 2}^3 = \cdots = E_{1, n-2}^{n-1} = 0$$

e portanto que

$$H_n X = E_{n, 0}^n \quad (4)$$

De (3) e (4), concluímos que $H_{n-1}\Omega X \longrightarrow H_n X$ é um isomorfismo, o que demonstra o passo de indução do teorema.

Para provar o teorema no caso $n=2$, basta observar que, como $\pi_1\Omega X$ é abeliano, o homomorfismo $\pi_1\Omega X \longrightarrow H_1\Omega X$ que figura no diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1\Omega X & \longrightarrow & H_1\Omega X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_2 X & \longrightarrow & H_2 X \end{array}$$

é um isomorfismo. $\blacksquare$

Esse teorema pode ser relativizado da seguinte forma:

1.1.2 TEOREMA de Hurewicz relativo. Seja (X,A) um par de espaços tal que A e X são conexos e $\pi_1 A = \pi_1(X,A) = 0$. São equivalentes as condições:

- i) $\pi_j(X,A) = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$
- ii) $H_j(X,A) = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$

No caso de uma dessas condições estar satisfeita, temos que

- iii) $\pi_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A)$ é um isomorfismo.

É possível demonstrar-se diretamente esse teorema, sem fazermos apelo ao caso absoluto.

Na realidade, a demonstração prova ambos os casos simul-

taneamente. A exemplo do caso absoluto, é feita por indução sobre o inteiro n .

DEMONSTRAÇÃO (esboço de) do teorema 1.1.2.

Provaremos que $i) \implies ii)$ e $iii)$ início da indução ($n=2$).

Como $\pi_1 A = \pi_1(X, A) = 0$, temos também que $\pi_1 = 0$.

Portanto, no diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2 A & \longrightarrow & \pi_2 X & \longrightarrow & \pi_2(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2 A & \longrightarrow & H_2 X & \longrightarrow & H_2(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

cujas linhas são exatas, as duas flechas verticais à esquerda são isomorfismos (Hurewicz absoluto) e portanto

$$\pi_2(X, A) \longrightarrow H_2(X, A)$$

também o é.

Examinemos agora o passo de indução.

Consideremos a fibração

$$\Omega X \longrightarrow EX, \quad E(X, A) \longrightarrow X, A$$

onde ΩX e EX são, respectivamente, os espaços dos laços e, dos caminhos em X e $E(X, A)$ é o espaço dos caminhos em X com extremidade em A .

Valem, para a seqüência espectral associada a essa fibração, as igualdades (ver [S.]₂).

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, A, H_q \Omega X)$$

$$E_{n,0}^\infty = H_n(EX, E(X, A))$$

Consideremos o seguinte diagrama extraído da seqüência espectral

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X, A) = E_{n,0}^2 & \longleftarrow & E_{n,0}^3 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & E_{n,0}^n \longleftarrow E_{n,0}^{n+1} = E_{n,0}^\infty = H_n(EX, E(X, A)) \\ \downarrow d^2 & & \downarrow d^3 & & & & \downarrow d^n \\ & & E_{n-3,2}^3 & & & & E_{0,n-1}^n \\ E_{n-2,1}^2 & & & & & & \end{array}$$

Como

$$H_0(X, A; H_{n-1} \Omega X) = 0$$

e, pela hipótese de indução

$$H_{n-j}(X, A; H_{j-1} \Omega X) = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1;$$

temos que

$$E_{n-2,1}^2 = E_{n-3,2}^3 = \cdots = E_{0,n-1}^n = 0$$

e portanto

$$H_n(EX, E(X, A)) \longrightarrow H_n(X, A)$$

é um isomorfismo.

Sendo EX contrátil, as sequências exatas longas de homotopia e homologia nos fornecem os isomorfismos

$$H_n(EX, E(X, A)) \longrightarrow H_{n-1}E(X, A)$$

$$\pi_n(EX, E(X, A)) \longrightarrow \pi_{n-1}E(X, A)$$

Consideremos então o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longleftarrow & H_n(EX, E(X, A)) & \longleftarrow & H_{n-1}E(X, A) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_n(EX, E(X, A)) & \longrightarrow & \pi_{n-1}E(X, A) \end{array}$$

Todas as flechas horizontais são isomorfismos. Para a demonstração de que $\pi_n(EX, E(X, A)) \longrightarrow \pi_n(X, A)$ é um isomorfismo, o leitor pode consultar [Sl]₂, proposição 1 do capítulo II. Como $E(X, A)$ é $n-2$ conexo, a hipótese da indução nos garante que a flecha vertical da direita é um isomorfismo. Em consequência, a flecha vertical da esquerda também o é. Temos, assim, o passo da indução.

O teorema de Hurewicz relativo admite o seguinte

1.1.3 COROLÁRIO. Sejam X e Y espaços 1-conexos e $X \xrightarrow{f} Y$ uma aplicação contínua. São equivalentes as condições:

- i) $H_j X \xrightarrow{f^*} H_j Y$ é um isomorfismo para $j < n$ e um epimorfismo para $j \leq n$.
- ii) $\pi_j X \xrightarrow{f_*} \pi_j Y$ é um isomorfismo para $j < n$ e um epimorfismo para $j \leq n$.

mo para $j \leq n$.

DEMONSTRAÇÃO

Considerando a aplicação cilindro (mapping cylinder) da função $X \xrightarrow{f} Y$ temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & Y_f & \end{array}$$

onde $X \longrightarrow Y_f$ é uma inclusão e Y um retrato de deformação de Y_f .

Isso mostra que, sem perda de generalidade, podemos considerar a função $X \xrightarrow{f} Y$ como sendo uma inclusão de X em Y .

Utilizando-se, então, as seqüências exatas longas de homologia e de homotopia, respectivamente, obtemos as equivalências

$$(i) \iff H_j(X, Y) = 0 \quad j \leq n$$

$$(ii) \iff \pi_j(X, Y) = 0 \quad j \leq n$$

onde (i) e (ii) são as condições do enunciado do corolário.

Aplicando-se o teorema 1.1.2, temos a tese.

Esse corolário, que, em geral, é falso quando os espaços X e Y não são 1-conexos (no próximo capítulo daremos um exemo

plo), adquire ainda maior substância se lembrarmos que, como nossos espaços são C.W. complexos, vale a

1.1.4 PROPOSIÇÃO. Se a função contínua $X \xrightarrow{f} Y$ induz isomorfismos $\pi_j X \xrightarrow{f^*} \pi_j Y$ em todas as dimensões, então f é uma equivalência de homotopia.

As informações contidas no Corolário 1.1.3 e na proposição 1.1.4 são, habitualmente, reunidas num único enunciado, conhecido como teorema de Whitehead.

A importância prática do corolário 1.1.3, que permite detectar equivalência de homotopia pelos isomorfismos induzidos na homologia, fez com que os topólogos concentrassem seus esforços nos espaços simplesmente conexos. Todavia, sabe-se hoje que o corolário 1.1.3 é válido para espaços nilpotentes.

§2. SEQUÊNCIA EXATA DE J.H.WHITEHEAD

Adendo ao Teorema de Hurewicz

1.2.0. Em 1950, J.H.Whitehead publicou um longo artigo (ver [W]₂) cujo tema central era o estudo de uma sequência exata da qual daremos uma rápida descrição.

Indicaremos por K um C.W. complexo, que suporemos 1-conexo, e por K^p o seu p -esqueleto. $\Gamma_p K$ denotará a imagem do homomorfismo $\pi_p(K^{p-1}) \longrightarrow \pi_p(K^p)$ induzido pela inclusão $K^{p-1} \longrightarrow K^p$.

Whitehead mostrou então que, nessas condições, pode-se construir homomorfismos

$$\begin{aligned} H_{p+1}K &\xrightarrow{\gamma_{p+1}} \Gamma_p K \\ \Gamma_p K &\xrightarrow{\lambda_p} \pi_p K, \end{aligned}$$

de forma que, se $\pi_p K \xrightarrow{h_p} H_p K$ é o homomorfismo de Hurewicz, então a sequência

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}K \xrightarrow{\gamma_{p+1}} \Gamma_p K \xrightarrow{\lambda_p} \pi_p K \xrightarrow{h_p} H_p K \longrightarrow \cdots$$

é exata.

Na realidade, Whitehead não impõe, a priori, que K seja simplesmente conexo. A construção é feita no caso geral e quando K é simplesmente conexo a sequência é a que descrevemos acima.

Para as definições dos homomorfismos γ_p e λ_p , bem como para a prova da exatidão da sequência, o leitor poderá consultar [H]₁ ou [M,T]. Nesta última referência, a dedução é feita utilizando-se pares exatos (exact couples), cujas condições de convergência são asseguradas pelo teorema relativo de Hurewicz.

1.2.1. Da exatidão da sequência acima, deduz-se facilmente um adendo ao teorema de Hurewicz. De fato, suponhamos que K é $(N-1)$ conexo. Nessas condições, a inclusão $K^{N-1} \longrightarrow K^n$ é homotopicamente trivial e, portanto,

$$\Gamma_p(K) = 0 \text{ para } p \leq n.$$

É claro que isso implica então que

$$\pi_{n+1}K \longrightarrow H_{n+1}K$$

é um epimorfismo.

É oportuno chamar a atenção do leitor para um fato interessante relacionado com a demonstração do resultado acima.

Poder-se-ia pensar em fazer a demonstração do adendo da mesma forma pela qual demonstramos o teorema, isto é, através de um argumento de indução, utilizando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_2 \Omega X & \longrightarrow & H_2 \Omega X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_3 X & \longrightarrow & H_3 X \end{array}$$

Surge, porém, um problema, como mostra o seguinte

1.2.2 EXEMPLO

Se X é simplesmente conexo, já vimos que $\pi_3 X \longrightarrow H_3 X$ é um epimorfismo.

Não é verdade, porém, que X 1-conexo implique que

$$\pi_2 \Omega X \longrightarrow H_2 \Omega X$$

seja um epimorfismo.

De fato, seja $X = K(\pi, 2)$ e portanto $\Omega X = K(\pi, 1)$.

É óbvio então que $\pi_2 \Omega X = 0$.

Para que se tenha o exemplo, basta que se encontre um espaço X tal que $H_2 \Omega X \neq 0$.

Lembrando que $H_2 \Omega X = H_2 \pi$ e, usando-se resultados elementares de (co)homologia de grupos, verifica-se trivialmente que, se fizermos

$$\pi = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \text{ temos } H_2 \Omega X = \mathbb{Z}_2.$$

Complementaremos a observação dizendo que a prova do resultado em questão pode ser feita por outras vias, sem se recorrer à sequência exata de Whitehead. Contudo, uma vez que iríamos, de qualquer modo, introduzir essa sequência exata, pois, no capítulo VI, provaremos uma propriedade dos grupos $\Gamma_p K$, escolhemos percorrer o caminho acima.

Existe ainda um outro ponto para o qual queremos chamar a atenção.

A implicação

X 1-conexo $\implies \pi_3 X \longrightarrow H_3 X$ é um epimorfismo
permite, através do mesmo argumento de indução que utilizamos na prova do teorema relativo de Hurewicz, que se demonstre o adendo no caso relativo.

Para referência posterior enunciamos, então, o

1.2.3 TEOREMA de Hurewicz relativo + adendo.

Consideremos o par (X,A) onde X e A são conexos e $\pi_1 A = \pi_1(X,A) = 0$. São equivalentes as condições:

- i) $\pi_j(X,A) = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$
 - ii) $H_j(X,A) = 0 \quad 1 \leq j \leq n-1$
- $n \geq 2$

Na eventualidade de uma dessas condições estar satisfeita, podemos afirmar que

iii) $\pi_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A)$ é um isomorfismo

iv) $\pi_{n+1}(X,A) \longrightarrow H_{n+1}(X,A)$ é um epimorfismo.

CAPÍTULO II

A TEORIA DE SERRE

§0 - INTRODUÇÃO

Em 1952, J.P.Serre, num conhecido trabalho (ver [S]₂) in troduziu o conceito de classe de grupos abelianos:

"Une classe C est, par définition, une collection de groupes abéliens que vérifie certaines conditions algébriques simples. Ces conditions expriment essentiellement que C est stable vis-à-vis des opérations de l'algèbre élémentaire: sous-groupes, groupe quotient, extension. La donnée d'une classe C permet d'introduire des " C -notions" ou l'on "néglige" les groupes de la classe C (par exemple, un C -isomorphisme est un homomorphisme dont le noyau appartient à C)"

A utilização dessas classes permitiu-lhe, entre outras coisas, uma ampla generalização dos teoremas clássicos de Hurewicz e Whitehead.

Uma vez que, na parte final deste trabalho, utilizamos e damos uma forma ainda mais geral para alguns desses resultados, é sensato que se os reproduza aqui.

Como todo esse material é hoje clássico e as referências bibliográficas de que se dispõe para seu estudo muito boas, procederemos, a exemplo do capítulo anterior, de forma bastante esquemática.

Desenvolvemos, no parágrafo um, a parte da teoria das classes de Serre de grupos abelianos que iremos utilizar. O leitor interessado encontrará, ao lado de um desenvolvimento bem mais amplo da teoria, inúmeros exemplos e observações interessantes no artigo acima mencionado.

O segundo e último parágrafo é dedicado às generalizações dos teoremas de Hurewicz e Whitehead. Sem nenhuma pretensão a sermos completos, apenas tentando ilustrar as idéias e os métodos utilizados, enunciamos os resultados de que teremos necessidade e esboçamos algumas demonstrações a título de exemplo.

§1 - CLASSES DE SERRE DE GRUPOS ABELIANOS

Faremos agora um pequeno apanhado das definições e propriedades das classes de Serre de grupos abelianos que iremos utilizar no decorrer do capítulo.

Não nos preocupamos com os aspectos conjuntistas da questão, assumindo com relação a eles uma atitude totalmente ingênua. Apesar disso, queremos chamar a atenção do leitor para o fato de que o termo classe (ou coleção) é usado aqui no sentido que lhe é dado na teoria dos conjuntos não sendo portanto sinônimo de conjunto.

2.1.0. Uma classe de Serre de grupos abelianos é uma coleção, não vazia, C de grupos abelianos satisfazendo a condição

I) Se A, A', A'' são grupos abelianos e a sequência

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

é exata, então vale a equivalência

$$A', A'' \in C \iff A \in C.$$

Decorre imediatamente dessa definição que

- a) todo grupo com um único elemento está em C .
- c) todo grupo isomorfo a um subgrupo ou a um grupo quociente de um grupo de C está em C .

2.1.1. Frequentemente, para um melhor desenvolvimento da teo

ria, precisamos impor alguns axiomas suplementares à classe C .

Mencionaremos os que nos serão úteis.

$II_A)$ $A \in C, B \in C \implies A \otimes B$ e $\text{tor}(A, B) \in C$.

$II_B)$ $A \in C \implies A \otimes B \in C$ qualquer que seja o grupo abeliano B .

Prova-se, sem dificuldade que II_B implica II_A .

$III)$ $A \in C \implies H_i A \in C, i \geq 1$.

Chamaremos de acíclicas as classes verificando esse axioma.

A existência ou não de classes não verificando esse axioma é, pelo que o autor sabe, um problema aberto.

$IV)$ Qualquer soma direta (finita ou não) de grupos de C está em C .

As classes que verificam esse axioma serão chamadas de completas (confronte 3.2.0).

Prova-se (ver $[S]_2$) que esse axioma implica na validade de II_A , II_B e III .

Com frequência utiliza-se classes verificando simultaneamente os axiomas II_A e III ou II_B e III . Eis portanto alguns exemplos:

2.1.3. Classes verificando os axiomas II_A e III

- 1) A classe trivial, constituída pelos grupos com um único elemento.
- 2) A classe dos grupos abelianos finitamente gerados.
- 3) A classe dos grupos abelianos finitos.
- 4) A classe dos grupos finitos cuja ordem só é divisível por uma família dada de primos.

2.1.4. Classes verificando os axiomas II_B e III

- 1) A classe trivial.
- 2) A classe dos grupos abelianos de torção.
- 3) A classe dos grupos abelianos de torção cujas p -componentes são nulas para uma família dada de primos p .

Esses exemplos verificam também o axioma IV.

A proposição abaixo, cuja prova damos, no capítulo IV (veja lema 4.1.0) nos será de utilidade.

2.1.5. PROPOSIÇÃO - Sejam A e B grupos abelianos com B em C . Se A for finitamente gerado ou se a classe C for completa, então:

- i) $B \otimes AGC$
- ii) $Tor(B, A) \in C$.

2.1.6. As C -noções

Ao considerarmos uma classe de grupos C a idéia geral é podermos, em certo sentido, negligenciar os grupos de C , is

to é, tratá-los como grupos triviais.

Formalizamos essa idéia, com as definições abaixo.

Diremos que um homomorfismo $A \xrightarrow{\alpha} B$ de grupos abelianos é C -injetor se $\ker \alpha \in C$ e, C -sobrejetor se $\text{coker } \alpha \in C$. Quando o homomorfismo for C -injetor e C -sobrejetor diremos que ele é C -bijetor.

Nesse ponto é instrutivo darmos um exemplo.

Seja C a classe dos grupos abelianos de torção, $\mathbb{Z}$ o grupo dos inteiros e $\mathbb{Q}$ o grupo dos racionais.

Uma vez que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um grupo de torção, a inclusão $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$ é, obviamente, uma C -bição.

Prova-se, no entanto, trivialmente que o único homomorfismo de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Z}$ é o homomorfismo nulo que, obviamente, não é uma C -bição.

Contorna-se essa dificuldade com uma definição.

Dois grupos A e B são C -isomorfos se existe um grupo L e dois homomorfismos, $L \xrightarrow{f} A$ e $L \xrightarrow{g} B$, ambos C -bijetores.

Pode-se provar que essa relação é transitiva.

Terminamos observando que valem para C -bições e C -sobrejeções as mesmas propriedades das injeções e sobrejeções usuais.

Pode-se, por exemplo, provar facilmente que se

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

são homomorfismos de grupos abelianos então valem:

- a) f, g C -injeções $\implies g \circ f$ C -injeções
 - b) f, g C -sobrejetores $\implies g \circ f$ C -sobrejetor
 - c) $g \circ f$ C -injetor $\implies f$ C -injetor.
- etc.

§2 - TEOREMAS DE HUREWICZ E DE WHITEHEAD MÓDULO C

Veremos agora de que forma as classes de Serre de grupos abelianos permitem generalizar os resultados do capítulo anterior.

Em todo este parágrafo, C indicará uma classe de Serre acíclica de grupos abelianos. Quando precisarmos que a classe verifique a algum outro axioma, mencionaremos o fato explicitamente.

Começaremos examinando o caso absoluto.

2.2.0 TEOREMA. Seja C uma classe verificando o axioma II_A e X um espaço conexo e simplesmente conexo. São equivalentes

- i) $\pi_j X \in C \quad 1 \leq j \leq n-1$
- ii) $H_j X \in C \quad 1 \leq j \leq n-1.$

No caso de uma dessas condições estar verificada, podemos afirmar que:

- iii) $\pi_n X \longrightarrow H_n X$ é uma C-bijeção
- iv) $\pi_{n+1} X \longrightarrow H_{n+1} X$ é uma C-sobrejeção.

Daremos um esquema da demonstração de que i) $\implies$ ii) e iii). Como de hábito, faremos indução sobre n.

Como já provamos que se $\pi_1 X = 0$ então $\pi_2 X \longrightarrow H_2 X$ é um isomorfismo, a indução principia trivialmente.

Para provarmos o passo da indução ($n \geq 3$) introduzimos a fibração

$$\Omega X \longrightarrow EX \longrightarrow X$$

e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n-1} \Omega X & \longleftarrow & \pi_n (EX, \Omega X) & \longrightarrow & \pi_n X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-1} \Omega X & \longleftarrow & H_n (EX, \Omega X) & \longrightarrow & H_n X \end{array}$$

onde as flechas verticais são os homomorfismos de Hurewicz, $\pi_n (EX, \Omega X) \longrightarrow \pi_n X$ é o isomorfismo que se utiliza para deduzir a sequência exata de uma fibração,

$$\begin{aligned} \pi_n (EX, \Omega X) &\longrightarrow \pi_{n-1} \Omega X \\ H_n (EX, \Omega X) &\longrightarrow H_{n-1} \Omega X \end{aligned}$$

são isomorfismos deduzidos, respectivamente, das sequências exatas longas de homotopia e de homologia e,

$$H_n (EX, \Omega X) \longrightarrow H_n X$$

é um homomorfismo que se prova, usando a hipótese de indução e a sequência espectral associada a um fibrado relativo, ser um isomorfismo (confronte $[S]_2$, Teorema 1.A).

Se provarmos que $\pi_{n-1} \Omega X \longrightarrow H_{n-1} \Omega X$ é uma C -bijeção,

teremos que $\pi_n X \longrightarrow H_n X$ também o é e, portanto, estará esta belecido o passo da indução.

Não podemos concluir diretamente da hipótese de indução que $\pi_{n-1} \Omega X \longrightarrow H_{n-1} \Omega X$ é uma C-bi $\underline{e}$ ção pois, não temos garantia de que ΩX é 1-conexo.

Seja então $T \longrightarrow \Omega X$ o recobrimento universal de ΩX e, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1} T & \longrightarrow & H_{n-1} T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n-1} \Omega X & \longrightarrow & H_{n-1} \Omega X \end{array}$$

onde a flecha vertical da esquerda é, obviamente, um isomorfismo.

Como T é 1-conexo e $\pi_j T \in \mathcal{C}$, $1 \leq j \leq n-2$, a hipótese de indução, nos fornece que

$$\pi_{n-1} T \longrightarrow H_{n-1} T \text{ é uma C-bi} \underline{e} \text{ção.}$$

Basta provar então que $H_{n-1} T \longrightarrow H_{n-1} \Omega X$ é uma C-bi $\underline{e}$ ção e teremos que

$$\pi_{n-1} \Omega X \longrightarrow H_{n-1} \Omega X$$

também o será.

A prova de que $\pi_{n-1} T \longrightarrow H_{n-1} T$ é uma C-bi $\underline{e}$ ção e feita utilizando-se a seqüência espectral do recobrimento $T \longrightarrow \Omega X$ (veja o parágrafo dois do capítulo V), e envolve um

argumento análogo ao que usamos para provar a implicação i) $\implies$ ii) do teorema 5.3.4 do capítulo V.

Aqui, como $\pi_1 \Omega X$ atua trivialmente em $H_j T$ (ver [S]₁, pág. 479), a verificação de que os conúcleos relevantes estão em C é feita usando-se a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_p \pi \otimes H_q T \longrightarrow H_p(\pi, H_q T) \longrightarrow \text{Tor}(H_{p-1} \pi, H_q T) \longrightarrow 0$$

onde $\pi = \pi_1 \Omega X$

fornecida pelo teorema dos coeficientes universais e lembrando que a classe C verifica o axioma II_A . $\square$

Não é difícil ver que o teorema acima, em geral, não é verdadeiro se $\pi_1 X \neq 0$. No capítulo V fornecemos um exemplo desse tipo.

No entanto, se o espaço X for tal que $\pi_1 X$ é abeliano, pertence a C e opera trivialmente nos grupos de homologia de seu revestimento o teorema acima é verdadeiro para X , (conforme observação 2 da página 274 de [S]₂).

Esse fato é utilizado na demonstração do seguinte

2.2.1. TEOREMA. Seja C uma classe verificando o axioma II_B . Sejam X e A dois espaços conexos e 1-conexos com $A \subset X$. São e quivalentes as condições:

- i) $\pi_j(X, A) \in C \quad 1 \leq j \leq n-1$
- ii) $H_j(X, A) \in C \quad 1 \leq j \leq n-1.$

no caso de uma dessas condições estar verificada, podemos a firmar que

iii) $\pi_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$ é uma C -bijeção

iv) $\pi_{n+1}(X, A) \longrightarrow H_{n+1}(X, A)$ é uma C -sobrejeção.

Para a demonstração, que é o análogo na C -teoria da demonstração do teorema 1.12, ver $[S]_2$.

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a imposição, no enunciado dos teoremas acima, de que a classe C verifique os axiomas II_A num caso II_B no outro se deve à necessidade de nos assegurarmos de que se AGC (e, no caso da classe C verificar somente II_A , BGC) então $A \otimes B$ e $Tor(A, B)$ também estão em C .

Levando-se então em conta que a proposição 2.1.5 nos garante que se A é grupo de C então $A \otimes B$ e $Tor(A, B)$ estão em C desde que C seja completa ou B finitamente gerado, vemos que os teoremas 2.2.0 e 2.2.1 permanecem verdadeiros se trocarmos a exigência de que a classe C verifique os axiomas II_A e II_B pela condição dos espaços envolvidos serem de tipo finito ou então que a classe C seja completa.

O teorema 2.2.1 admite, como corolário, o seguinte

2.2.2 TEOREMA. Suponhamos que C verifique o axioma II_B . Sejam A e X espaços conexos 1-conexos e $A \xrightarrow{f} X$ uma aplicação contínua. São equivalentes as condições:

- i) $H_j(A) \xrightarrow{f^*} H_j(X)$ é uma C-bijectão para $1 \leq j < n$ e uma C-sobrejectão para $j = n$.
- ii) $\pi_j(A) \xrightarrow{f^*} \pi_j(X)$ é uma C-bijectão para $1 \leq j < n$ e uma C-sobrejectão para $j = n$.

DEMONSTRAÇÃO

É análoga a demonstração do corolário 1.1.3 (ver [S]₂).

Quando a hipótese de que os espaços envolvidos são simplesmente conexos não está verificada, o teorema acima pode deixar de ser verdadeiro como mostra o seguinte

2.2.3 EXEMPLO.

Consideremos a inclusão

$$S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^2 \underset{f}{\cup} e^3$$

A função $f: S^2 \longrightarrow S^1 \vee S^2$ usada para a colagem de e^3 é um representante do elemento $2[\alpha] - [\omega] \cdot [\alpha] \in \pi_2(S^1 \vee S^2)$ onde $[\alpha]$ é a imagem de um gerador de $\pi_2(S^2)$ pela inclusão

$$S^2 \longrightarrow S^1 \vee S^2$$

e $[\omega]$ é a imagem de um gerador de $\pi_1(S^1)$ pela inclusão

$$S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^2.$$

$[\omega] \cdot [\alpha]$ é o elemento obtido pela ação de $[\omega]$ em $[\alpha]$.

Não é difícil provar (confronte [Sp], página 420,

exercício F4) que a inclusão

$$S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^2 \bigcup_f e^3$$

induz isomorfismos entre os grupos fundamentais e entre todos os grupos de homologia mas não entre os grupos de homotopia em dimensão dois.

CAPÍTULO III

GRUPOS E AÇÕES NILPOTENTES. CLASSES DE SERRE E DE GRUPOS NILPOTENTES. ESPAÇOS NILPOTENTES

§0. INTRODUÇÃO

Este é um capítulo de pré-requisitos. Nele o leitor encontrará definições e enunciados mas nenhuma demonstração.

Não foi nossa intenção fazer um resumo geral dos tópicos que figuram no título mas sim, tão somente, reunir, para facilidade do leitor, num único local, as definições e resultados que nos pareceram mais especializados e que teremos oportunidade de utilizar nos capítulos subsequentes.

Iniciamos recordando, apenas com o intuito de fixar a linguagem, umas poucas noções da teoria geral dos grupos. A seguir, definimos ações nilpotentes e mencionamos algumas de suas propriedades. As melhores referências para esse tópico são $[H]_1, [H]_2, [H]_3$ e $[H, M, R]$.

No parágrafo 2 fazemos um apanhado geral da teoria das classes de Serre de grupos nilpotentes. Os resultados aí reunidos são de importância fundamental para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Indicamos como referências $[H,M,R]$ e $[H,R]_1$.

Abrimos o último parágrafo com uma pequena propaganda dos espaços nilpotentes. Uma consulta a $[H,M,R]$ ou a $[Su]$ poderá ser, nesse sentido, proveitosa. Ao lado de algumas definições e propriedades gerais enunciamos alguns resultados de cunho bem mais técnico. Devemos, com relação a isso, uma explicação. Tentando manter sob controle, para não romper o equilíbrio do trabalho, a extensão do capítulo, acabamos por pressupor do leitor, neste ponto, e, conseqüentemente na demonstração do lema 5.3.3 do capítulo V, um conhecimento especializado um pouco maior do que o pressuposto no resto do trabalho. Acreditamos, no entanto, que uma vista d'olhos em $[H]_5$ dissipará, caso existam, as dificuldades. As principais referências são $[H]_5$, $[H,M,R]$, $[H,R]_1$ e $[H,R]_2$ e, para o leitor interessado em fatos gerais, como, por exemplo, as definições das diversas ações de grupos nas fibrações, $[B]$.

§1. GRUPOS E AÇÕES NILPOTENTES

Começamos lembrando algumas definições.

3.1.0. A série central inferior de um grupo G é definida indutivamente pelas igualdades

$$\Gamma^1 G = G, \quad \Gamma^{i+1} G = [\Gamma^i G, G],$$

onde $[\Gamma^i G, G]$ indica o grupo dos comutadores de $\Gamma^i G$ e G .

Convém observar, no que se refere à definição acima, que a convenção $\Gamma^0 G = G$ é também frequente na literatura.

Quando existir um inteiro positivo c tal que

$$\Gamma^c G \neq \{1\} \quad \text{e} \quad \Gamma^{c+1} G = \{1\},$$

diremos que o grupo G é nilpotente e tem classe de nilpotência c .

Segue-se imediatamente dessa definição que todo grupo abeliano é nilpotente. É, por outro lado, bem conhecido que nem todo grupo nilpotente é abeliano. Demonstra-se, por exemplo, que todo p -grupo finito é nilpotente.

3.1.1. Seja G um grupo e H um subgrupo de G consideremos uma série de subgrupos

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_k \subset \dots \subset G_n = G$$

ligando H a G .

Diremos que essa série é normal se

$$G_k \triangleleft G \quad k=0, \dots, n-1$$

A notação $G_k \triangleleft G$ indica, como de hábito, que G_k é um subgrupo normal de G .

Se tivermos apenas que

$$G_k \triangleleft G_{k+1} \quad k=0, \dots, n-1$$

a série é chamada subnormal.

Um subgrupo H do grupo G é, por definição, um subgrupo subnormal de G se existir uma série subnormal

$$H = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$$

ligando H a G .

A noção de subgrupo subnormal generaliza a de subgrupo normal pois é óbvio que um subgrupo normal é também subnormal. A recíproca porém não é verdadeira. Também não é, em geral, verdade que todo subgrupo é subnormal.

Vale porém o seguinte resultado, que nos será de grande utilidade.

3.1.2. PROPOSIÇÃO. Se G é um grupo nilpotente e H é um subgrupo qualquer de G então H é um subgrupo subnormal de G .

O leitor encontrará uma demonstração dessa proposição bem como exemplos e demonstrações para as afirmações que fizemos

acima em [R].

3.1.3. A noção de grupo nilpotente generaliza-se através do conceito de ação nilpotente.

Sejam π e G dois grupos e suponhamos que G é um π -grupo, isto é, que esteja definida uma ação $\pi \xrightarrow{\omega} \text{Aut}(G)$ de π em G , (simplificaremos a notação escrevendo $x.a$ em vez de $\omega(x).a$).

A ação ω permite-nos construir indutivamente a série

$$\Gamma_{\omega}^1 G = G, \Gamma_{\omega}^{i+1} G = \text{gp}(x.ab a^{-1}b^{-1}), x \in \pi, a \in \Gamma_{\omega}^i G, b \in G \quad i \geq 1$$

onde $\text{gp}(x.ab a^{-1}b^{-1})$ indica o grupo gerado pelos elementos $(x.a)ba^{-1}b^{-1}$.

Se $\Gamma_{\omega}^{c+1} G = \{1\}$ para algum inteiro c , diremos que π opera nilpotentemente em G e escrevemos classe $(\omega) \leq c$. Se além disso $\Gamma_{\omega}^c G \neq \{1\}$, então classe $(\omega) = c$.

Decorre dessa definição que a ação trivial é nilpotente se e somente se o grupo G é nilpotente.

É oportuno observar que, embora a nossa definição de ação nilpotente não seja equivalente a dada em [B,K], no caso do grupo G ser nilpotente elas coincidem.

Teremos, no capítulo V, oportunidade de usar duas propriedades das ações nilpotentes que decorrem, sem dificuldade, da definição:

3.1.4. Seja H um subgrupo de π e $\pi \xrightarrow{\omega} \text{Aut}(G)$ uma ação nilpotente. A restrição de ω a H é também uma ação nilpotente.

3.1.5. Se $\pi \xrightarrow{\omega} \text{Aut}(G)$ é uma ação nilpotente e $H \xrightarrow{\epsilon} \pi$ um epimorfismo de grupos então a ação $H \xrightarrow{\omega \circ \epsilon} \text{Aut}(G)$, obtida pela composição de ω e ϵ , é também nilpotente.

Na demonstração do lema 5.3.3 utilizaremos uma outra propriedade, esta de demonstração mais elaborada, das ações nilpotentes.

3.1.6. TEOREMA. Uma ação ω de π em G induz uma ação de π nos grupos de homologia $H_n G$ de G . Se a ação ω for nilpotente então a ação induzida nos grupos de homologia também o será.

Este teorema é o lema 1.2 de [H] 5.

3.1.7. OBSERVAÇÃO

Queremos chamar a atenção do leitor para o fato de que, na maioria das vezes, (a prova do lema 5.3.3 constitui-se na principal exceção!) estaremos considerando ações de um grupo π num grupo abeliano A . Nesse caso, como vantagem adicional, temos o fato de A admitir uma estrutura de $Z[\pi]$ módulo. Isso é o que acontece, por exemplo, no capítulo IV onde π sempre age sobre um grupo abeliano. É claro que, nessas circunstâncias, usando-se a notação aditiva, temos a igualdade

$$\Gamma_{\omega}^i A = \text{gp}(x\alpha - a), \quad x \in \pi, \quad a \in \Gamma_{\omega}^{i-1} A, \quad i > 1$$

da qual decorre que

$$\Gamma_{\omega}^{i+1}A = I[\pi]_i A$$

onde $I[\pi]$ representa o ideal de augmentação do anel de grupo $Z[\pi]$. (ver [H,M,R]).

§2. CLASSES DE SERRE DE GRUPOS NILPOTENTES

Resumiremos aqui a parte que nos interessa mais de perto da teoria das classes de grupos nilpotentes.

A generalização para grupos nilpotentes da teoria desenvolvida por Serre no caso abeliano foi feita por Hilton, Mislin e Roitberg (ver [H,M,R] e [H,R]). Da mesma forma que no caso abeliano, a motivação para essa teoria algébrica surgiu da Topologia. Mais precisamente do desejo de desenvolver uma teoria de Homotopia para espaços nilpotentes nos moldes do que Serre havia feito no caso simplesmente conexo.

Vejamos agora algumas definições.

3.2.0. DEFINIÇÃO. Uma classe de Serre de grupos nilpotentes é uma coleção não vazia C de grupos nilpotentes tal que para qualquer extensão central

$$N \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow H$$

de grupos nilpotentes, vale a equivalência

$$N, HEC \iff GEC$$

Diremos que a classe C é própria se uma das condições abaixo se verifica

I) Se A é um grupo abeliano de C então A é finitamente gerado.

II) Se A é um grupo abeliano de C então $\oplus A \in C$, onde a soma direta inclui um número arbitrário de cópias de A .

Quando a condição II) está satisfeita dizemos que a classe é completa.

Chamaremos de acíclica uma classe C que satisfizer a condição

$$G \in C \implies H_n G \in C, \quad n \geq 1.$$

Na realidade, a exigência de que a condição acima esteja satisfeita apenas pelos grupos abelianos de C já é suficiente para assegurar a aciclicidade da classe C (ver proposição 5.4 de [H,M,R]).

Eis alguns exemplos de classes de Serre de grupos nilpotentes

- 1) A classe constituída pelos grupos contendo um único elemento. Essa classe é chamada de trivial ou então de classe zero.
- 2) A classe de todos os grupos nilpotentes.
- 3) A classe dos grupos nilpotentes finitamente gerados.
- 4) A classe dos grupos nilpotentes de torção.
- 5) A classe dos grupos nilpotentes finitos.
- 6) A classe dos grupos nilpotentes de P -torção onde P é uma família de primos.

Dois resultados importantes e que utilizaremos reitera-

das vezes são dados pelas proposições abaixo. As demonstrações estão em [H,M,R].

3.2.1 PROPOSIÇÃO. Seja C uma classe de Serre própria de grupos nilpotentes. Então $G \in C$ se e somente se $G_{ab} \in C$. G_{ab} indica o abelianizado de G .

3.2.2 PROPOSIÇÃO. Seja C uma classe de Serre própria de grupos nilpotentes. Dada uma sequência exata curta de grupos nilpotentes

$$G' \twoheadrightarrow G \longrightarrow G''$$

Vale a equivalência

$$G', G'' \in C \iff G \in C.$$

3.2.3. Generalizemos agora para o caso nilpotente, os conceitos de C -injeção e C -sobrejeção que introduzimos no capítulo anterior quando estudamos classes de grupos abelianos. Nas considerações seguintes estaremos supondo que a classe C é própria.

É claro que a noção de C -injetividade se adapta sem modificação ao caso nilpotente. Portanto, também neste caso, diremos que o homomorfismo $A \xrightarrow{\mu} B$ é uma C -injeção quando $\ker \mu \in C$.

A definição de C -sobrejeção é, no entanto, em consequência do fato da imagem de um homomorfismo não ser necessariamente

mente um subgrupo normal, mais delicada. Contornaremos essa dificuldade explorando o fato de que todo subgrupo de um grupo nilpotente é subnormal.

3.2.4 DEFINIÇÃO. Seja G um grupo nilpotente e H um subgrupo de G . Diremos que a inclusão de H em G é uma C -sobrejeção se existir uma série subnormal

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{k+1} = G$$

tal que $H_j / H_{j-1} \in C$, $j=1, \dots, k+1$.

Isto posto, passemos à definição geral.

3.2.5 DEFINIÇÃO. Seja $H \xrightarrow{\mu} G$ um homomorfismo de grupos nilpotentes. O homomorfismo μ é C -sobrejetor se a inclusão de $\mu(H)$ em G for uma C -sobrejeção.

Diremos que μ é C -bijetor se μ for C -injetor e C -sobrejetor.

O leitor encontrará uma justificação para essas definições bem como para as propriedades dela decorrentes que figuram na proposição abaixo em $[H, R]_1$.

3.2.5 PROPOSIÇÃO. Consideremos os homomorfismos

$$H \xrightarrow{\lambda} G \xrightarrow{\mu} K$$

de grupos nilpotentes. Valem as implicações:

i) λ, μ C -injetivas $\implies \mu \cdot \lambda$ C -injetiva.

- ii) λ, μ C -sobrejetivas $\implies \mu, \lambda$ C -sobrejetiva.
- iii) μ, λ C -injetiva $\implies \lambda$ C -injetiva.
- iv) μ, λ C -sobrejetiva $\implies \mu$ C -sobrejetiva.
- v) μ, λ C -injetiva, λ C -sobrejetiva $\implies \mu$ C -injetiva.
- vi) μ, λ C -sobrejetiva, μ C -injetiva $\implies \lambda$ C -sobrejetiva.

Um outro resultado — este central na teoria — que iremos utilizar é o seguinte

3.2.6 TEOREMA. (Lema dos cinco módulo C). Seja C uma classe de Serre própria de grupos nilpotentes. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_0 & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 & \longrightarrow & H_4 \\
 \downarrow \mu_0 & & \downarrow \mu_1 & & \downarrow \mu_2 & & \downarrow \mu_3 & & \downarrow \mu_4 \\
 G_0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4
 \end{array}$$

cujas linhas são exatas. Se μ_0 é C -sobrejetiva, μ_1 e μ_3 são C -bijetivas e μ_4 é C -injetiva então μ_2 é C -bijetiva.

Reuniremos agora, para referência posterior, algumas propriedades muito úteis das classes de Serre generalizadas. Suas demonstrações não apresentam nenhuma dificuldades e ficarão aos cuidados do leitor.

3.2.7. Se $G \in C$ e H é um subgrupo de G então $H \in C$. Utiliza-se, na demonstração, a proposição 3.2.2 e o fato de todo subgrupo de um grupo nilpotente ser subnormal.

3.2.8. $B, A/B \in C \implies A \in C$.

3.2.9. Se $A \xrightarrow{\mu} B$ é um homomorfismo de grupos e $A \in C$ então

$\text{Im } \mu \in C$.

Em particular, se μ é um epimorfismo, $B \in C$.

3.2.10. Se a sequência $A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$ é exata e $A', A'' \in C$ então $A \in C$.

Concluiremos com a

3.2.11. OBSERVAÇÃO

Consideremos uma partição do conjunto dos números primos em duas famílias P e Q . Indicaremos por C_Q a classe de Serre dos grupos nilpotentes de Q -torção.

Define-se na teoria de localização dos grupos nilpotentes os conceitos de P -injeção e de P -sobrejeção (confronte $[H, M, R]$ ou $[H]_2$).

Verifica-se, sem dificuldade, que esses conceitos coincidem com as noções de C_Q -injeção e C_Q -sobrejeção como as definimos acima. Essa coincidência, se explorada, mostra que a teoria das classes de Serre generaliza, em certo sentido, a teoria da localização.

§3. ESPAÇOS NILPOTENTES

Já tivemos oportunidade de mencionar, na introdução deste trabalho, a importância dos espaços nilpotentes. Daremos agora uma definição precisa desses espaços e mencionamos alguns exemplos que mostram ser a categoria por eles constituída bem mais ampla do que a formada pelos C.W. complexos simplesmente conexos. Fazemos, em seguida, um resumo das propriedades desses espaços que iremos utilizar no decorrer do trabalho.

3.3.0.DEFINIÇÃO. Diremos que um C.W. complexo X é nilpotente se for conexo e se a ação de $\pi_1 X$ em $\pi_j X$ for, para $j \geq 2$, nilpotente.

Decorre, imediatamente, dessa definição que todo C. W. complexo conexo e simplesmente conexo é um espaço nilpotente.

É bem conhecido que se X é um espaço de Hopf, $\pi_1 X$ é abeliano e opera trivialmente em $\pi_j X$, $j \geq 1$. Consequentemente, todo espaço de Hopf conexo é nilpotente. Em particular, os grupos de Lie conexos são espaços nilpotentes.

No capítulo V, provaremos que se X é um espaço nilpotente e $\bar{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento qualquer de X então $\bar{X}$ é nilpotente.

Uma forma muito útil de caracterizar os espaços nilpotente é dada pelo seguinte

3.3.2 TEOREMA. Seja X um C.W. complexo conexo. Uma condição necessária e suficiente para que X seja um espaço nilpotente é que $\pi_1 X$ seja um grupo nilpotente e que sua ação nos grupos de homologia do recobrimento universal de X seja nilpotente.

DEMONSTRAÇÃO

Ver páginas 70 e 71 de [H,M,R].

Exibimos agora um exemplo, que nos será útil mais tarde, de um espaço que não é nilpotente.

3.3.3 EXEMPLO. $\mathbb{R}P^2$ não é nilpotente.

Consideremos o recobrimento universal $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$. Basta, pelo teorema 3.3.2 acima, provar que a ação ω de $\pi_1 \mathbb{R}P^2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ em $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ não é nilpotente.

Utilizando-se o fato de que a aplicação antípoda em uma esfera de dimensão par tem grau -1 verifica-se imediatamente que

$$\omega(0).x = x$$

$$\omega(1).x = -x$$

e portanto

$$\Gamma_{\omega}^2 \mathbb{Z} = \text{gp}(\omega(1).x - x = -2x) = 2 \mathbb{Z}$$

Uma simples indução nos leva a

$$\Gamma_{\omega}^n \mathbb{Z} = 2^{n-1} \mathbb{Z}$$

e portanto ω não é nilpotente.

É claro que o raciocínio acima se generaliza de forma a nos permitir mostrar que se n é par $\mathbb{R}P^n$ não é nilpotente.

Na realidade a demonstração acima nos mostra que $\mathbb{R}P^2$ não é nem mesmo homologicamente nilpotente. (Para a definição de homologicamente nilpotente ver 5.3.7, comentário 1).

Embora não se vá utilizá-la neste trabalho, é oportuno alertar o leitor para o fato de que os espaços nilpotentes admitem uma caracterização mais geométrica.

3.3.4 TEOREMA. Seja X um C.W. complexo conexo. Então X é nilpotente se e somente se o seu sistema de Postnikov admite um refinamento principal.

Concluiremos o parágrafo com algumas definições e resultados que utilizaremos na demonstração do lema 5.3.3 do capítulo V. A referência para esses tópicos é $[H]_5$.

3.3.5 DEFINIÇÃO. Seja $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ uma fibração com todos os espaços conexos. Diremos que essa fibração é nilpotente se $\pi_1 E$ operar nilpotentemente nos grupos de homotopia de F (inclusive $\pi_1 F$) e que ela é quase-nilpotente se $\pi_1 B$ operar nilpotentemente nos grupos de homologia de F .

Esses dois conceitos estão relacionados pelo seguinte

3.3.6 TEOREMA. Seja $F \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow B$ uma fibração com todos os espaços conexos. Essa fibração é nilpotente se e somente se ela for quase-nilpotente e F for nilpotente.

Este teorema é o corolário 2.2 de $[H]_5$.

O próximo teorema é um resultado essencial para a demonstração do lema 5.3.3.

3.3.7 TEOREMA. Seja $F \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow B$ uma fibração quase nilpotente sobre a qual age o grupo G . Então

- (a) Se G age nilpotentemente em $H_p B$, $p \leq P$, e em $H_q F$, $q \leq Q$, então G age nilpotentemente em $H_n E$, $n \leq N = \min(P, Q)$.
- (b) Se G age nilpotentemente em $H_p B$, $p \leq P$, e em $H_n E$, $n \leq N$, então G age nilpotentemente em $H_q F$, $q \leq Q = \min(P-1, N)$.
- (c) Se G age nilpotentemente em $H_q F$, $q \leq Q$, e em $H_n E$, $n \leq N$, então G age nilpotentemente em $H_p B$, $p \leq P = \min(Q+1, N)$.

CAPÍTULO IV

ALGUNS RESULTADOS ALGÉBRICOS RELATIVOS A (CO)HOMOLOGIA DE GRUPOS MÓDULO C

§0. INTRODUÇÃO

Concentramos neste capítulo todos os resultados referentes à (co)homologia de grupos módulo C que obtivemos neste trabalho. Esses resultados, ao lado de seu interesse próprio, serão cruciais ao desenvolvimento do capítulo V.

O conceito de classe de Serre generalizada, introduzido por Hilton, Mislin e Roitberg (ver $[H,M,R]$), desempenhará um papel fundamental em tudo que faremos. Todos os nossos resultados envolverão uma classe C que será sempre suposta própria e acíclica.

É bom que se frise que não tratamos a homologia e a cohomologia em pé de igualdade. Apenas com relação à pri-

meira procuramos ser mais completos. Na realidade, um único resultado se refere explicitamente à cohomologia e para obtê-lo tivemos que nos restringir aos grupos finitamente gerados.

As principais referências para este capítulo são $[H,M,R]$ e $[H,R]$. Também são de utilidade $[H]_1$ e $[H]_2$. Embora em $[S]$ só se considere classes de grupos abelianos a sua consulta poderá ser proveitosa. No que diz respeito a questões gerais de Álgebra Homológica, $[H,S]$ e $[M]$ são boas referências.

No decorrer do capítulo utilizamos livremente as notações usuais da Álgebra Homológica. Em particular, indicamos por $\mathbb{Z}[\pi]$ o anel de grupo do grupo π e por $I[\pi]$ o seu ideal de augmentação.

§1. HOMOLOGIA

Neste parágrafo e no próximo $\mathcal{C}$ representará sempre uma classe de Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes.

4.1.0. LEMA Sejam A e B grupos abelianos com B em $\mathcal{C}$. Se A for finitamente gerado ou se a classe $\mathcal{C}$ for completa então:

- i) $B \otimes A \in \mathcal{C}$.
- ii) $\text{Tor}(B, A) \in \mathcal{C}$.

DEMONSTRAÇÃO de i)

Seja $K \xrightarrow{\mu} L \xrightarrow{\epsilon} A$ uma apresentação livre de A .

Multiplicando tensorialmente por B obtemos a sequência exata

$$B \otimes K \xrightarrow{1 \otimes \mu} B \otimes L \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} B \otimes A \longrightarrow 0$$

Como L é livre, $B \otimes L$ é isomorfo a uma soma direta de cópias de B .

Se a classe $\mathcal{C}$ for completa é então óbvio que $B \otimes L \in \mathcal{C}$. Caso contrário, teremos, por hipótese, que A e B são finitamente gerados e portanto podemos construir a apresentação

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

com L finitamente gerado o que também implica que $B \otimes L \in \mathcal{C}$.

O fato de $B \otimes L$ estar em $\mathcal{C}$ e $1 \otimes \varepsilon$ ser epimorfismo nos permite concluir que $B \otimes A \in \mathcal{C}$ o que demonstra i).

DEMONSTRAÇÃO de ii)

A demonstração é na realidade um corolário da demonstração de i). De fato, consideremos novamente a sequência exata

$$B \otimes K \xrightarrow{1 \otimes \mu} B \otimes L \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} B \otimes A \longrightarrow 0$$

O mesmo argumento que usamos acima para provar que $B \otimes L$ está em $\mathcal{C}$ mostra que $B \otimes K$ pertence a $\mathcal{C}$. É claro então que $\ker 1 \otimes \mu$ também está em $\mathcal{C}$ o que conclui a demonstração pois $\text{Tor}(A, B) = \ker 1 \otimes \mu$.

4.1.1. TEOREMA Sejam π um grupo (não necessariamente nilpotente) tal que $H_i \pi \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$, e A um grupo abeliano munido de uma estrutura de $Z[\pi]$ módulo à direita induzida por uma ação nilpotente ω de π em A . Se A for finitamente gerado (como grupo) ou $\mathcal{C}$ completa então $H_i(\pi, A) \in \mathcal{C}$ para todo inteiro $i \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Será feita por indução sobre a classe de nilpotência da ação ω .

1) Prova de que o teorema é verdadeiro quando a ação

é trivial (classe $(\omega) = 1$).

Nesse caso o teorema dos coeficientes universais nos fornece a seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_i \pi \otimes A \longrightarrow H_i(\pi, A) \longrightarrow \text{Tor}(H_{i-1}\pi, A) \longrightarrow 0$$

Para obtermos a tese resta provar então que $H_i \pi \otimes A$ e $\text{Tor}(H_{i-1}\pi, A)$ estão em C quando $i \geq 1$.

Por hipótese, para todo $i \geq 1$, $H_i \pi \in C$ e, portanto, pelo lema 4.1.0., $H_i \pi \otimes A \in C$. O mesmo argumento mostra que para $i \geq 2$ $\text{Tor}(H_{i-1}\pi, A)$ está em C . O caso $i=1$ é trivial pois $\text{Tor}(H_0\pi, A) = \text{Tor}(Z, A) = 0$.

A última igualdade decorre do fato de Z ser livre.

2) Provaremos agora que a suposição de que o teorema é verdadeiro para ações de classe menor ou igual a $n-1$ implica em sua validade para ações de classe n .

Consideramos a seqüência exata de $Z[\pi]$ módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow A \longrightarrow A/\Gamma \longrightarrow 0$$

onde $\Gamma = \Gamma_{\omega}^2 A$.

Essa seqüência induz uma seqüência exata longa de homologia da qual destacamos, para análise, o trecho

$$H_i(\pi, \Gamma) \longrightarrow H_i(\pi, A) \longrightarrow H_i(\pi, A/\Gamma)$$

onde $i \geq 1$.

Como as ações de π em Γ e A/Γ tem classe $n-1$ e 1 ,

respectivamente, a hipótese de indução nos diz que os grupos $H_1(\pi, \Gamma)$ e $H_1(\pi, A/\Gamma)$ estão em $\mathcal{C}$. Esse fato e a exatidão da sequência a que os grupos pertencem nos garantem (confronte a propriedade 3.2.10.) que $H_1(\pi, A)$ está em $\mathcal{C}$. O argumento de indução está então completo e o teorema demonstrado.

4.1.2. OBSERVAÇÕES

1) Ao lado de enfatizarmos o fato de não havermos suposto o grupo π nilpotente queremos lembrar ao leitor que, como somente consideramos classes acíclicas é claro que se $\pi \in \mathcal{C}$ então $H_i \pi \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$. Nas aplicações do teorema 4.1.1. (e dos outros resultados deste capítulo) à topologia, nos capítulos V e VI, a condição $\pi \in \mathcal{C}$ estará (para uma conveniente escolha da classe $\mathcal{C}$) sempre satisfeita por estarmos trabalhando com espaços nilpotentes. Existem, no entanto, situações importantes nas quais apenas a condição $H_i \pi \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$, se verifica (5.3.7., comentário 1).

2) Vimos acima que $\pi \in \mathcal{C} \Rightarrow H_i(\pi, A) \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$.

Será a restrição $i \geq 1$ essencial? A igualdade $H_0(\pi, A) = A$, que se verifica sempre que a ação de π em A é trivial, mostra que sim. Na realidade, prova-se (confronte teorema 5.6. de [H.M.R]) que se as hipóteses do teorema 4.1.1. estive-

rem verificadas e $\pi \in \mathcal{C}$ então $H_0(\pi, A) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow A \in \mathcal{C}$. Esse fato dá ao teorema 4.1.4. um caráter até certo ponto surpreendente.

Provaremos agora um teorema que admite um corolário (corolário 4.1.4.) que nos será de grande valia no capítulo V. As hipóteses são (a não ser pelo fato de agora exigirmos que $H_i \pi \in \mathcal{C}$ apenas para $i=1$) as mesmas do teorema 4.1.1.

4.1.3. TEOREMA Seja π um grupo (não necessariamente nilpotente) tal que o seu abelianizado π_{ab} esteja em $\mathcal{C}$ e, A um grupo abeliano munido de uma estrutura de $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo à direita induzida por uma ação nilpotente ω de π em A . Se A for finitamente gerado ou $\mathcal{C}$ completa podemos afirmar que:

- i) $A \otimes_{\pi}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[\pi] \in \mathcal{C}$
- ii) $A \cdot I[\pi]^i = \Gamma_{\omega}^{i+1} A \in \mathcal{C}$ para todo inteiro $i \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO de i)

Por indução sobre a classe de nilpotência de ω .

1) Se a ação ω for trivial sabemos que

$$A \otimes_{\pi}^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}[\pi] = H_1(\pi, A)$$

$$H_1(\pi, A) = H_1 \pi \otimes A.$$

A primeira igualdade é bastante conhecida (ver, por

exemplo, pag. 192 de [H,S]) e a segunda é, como já vimos na demonstração do teorema 4.1.1., consequência do teorema dos coeficientes universais. Para concluir a demonstração resta observar que como $H_1\pi$ está em $\mathcal{C}$ ($H_1\pi = \pi_{ab}!$), pelo lema 4.1.0., $H_1\pi \otimes A$ também está em $\mathcal{C}$.

2) Suponhamos o resultado válido para ações de classe $\leq n-1$ e consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow A \longrightarrow A/\Gamma \longrightarrow 0.$$

Multiplicando tensorialmente por $I[\pi]$ obtemos a sequência (também exata)

$$\Gamma \otimes_{\pi} I[\pi] \longrightarrow A \otimes_{\pi} I[\pi] \longrightarrow A/\Gamma \otimes_{\pi} I[\pi] \longrightarrow 0.$$

A exatidão da sequência e a hipótese de indução (que nos garante que $\Gamma \otimes_{\pi} I[\pi]$ e $A/\Gamma \otimes_{\pi} I[\pi]$ estão em $\mathcal{C}$) nos levam então a concluir que $A \otimes_{\pi} I[\pi] \in \mathcal{C}$, o que completa o argumento de indução.

DEMONSTRAÇÃO de ii)

Como para todo $j \geq 1$ $A \cdot I[\pi]^j$ é um subgrupo de $A \cdot I[\pi]$, basta mostrar que $A \cdot I[\pi]$ está em $\mathcal{C}$.

Consideremos a aplicação

$$A \times I[\pi] \xrightarrow{\mu} A \cdot I[\pi]$$

definida por $\mu(a, x) = a \cdot x$.

Podemos então construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I[\pi] & \xrightarrow{\mu} & A.I[\pi] \\
 & \searrow & \nearrow \lambda \\
 & A \otimes_{\pi} I[\pi] &
 \end{array}$$

onde $\lambda(a \otimes x) = a.x$.

O fato de λ ser um epimorfismo ($A.I[\pi]$ é gerado por elementos da forma ax) e de $A \otimes_{\pi} I[\pi] \in \mathcal{C}$ (item i) do teorema) nos mostra que $A.I[\pi] \in \mathcal{C}$. $\square$

4.1.4. COROLÁRIO Sejam π um grupo tal que $\pi_{ab} \in \mathcal{C}$ e A um grupo abeliano no qual π age nilpotentemente. Se A for finitamente gerado ou $\mathcal{C}$ for completa então a projeção $A \xrightarrow{\epsilon} (A)_{\pi}$, onde $(A)_{\pi} = A/\Gamma$ é uma $\mathcal{C}$ bijeção.

DEMONSTRAÇÃO

Como ϵ é uma sobrejeção basta observar que $\ker \epsilon = \Gamma = A.I[\pi]$ está, pelo item ii) do teorema acima, em $\mathcal{C}$. $\square$

4.1.5. COMENTÁRIOS

1) Na demonstração do teorema 4.1.1. usamos de maneira decisiva o fato da ação ω de π em A ser nilpotente. Embora essa hipótese seja aparentemente indispensável, não possuímos um contra-exemplo para o teorema no caso dela não estar satisfeita.

2) Considerando-se a classe $\mathcal{C}$ dos grupos nilpotentes de torção e um grupo π com dois elementos (que indicare-

mos por 1 e -1) consegue-se facilmente um contra-exemplo para o teorema 4.1.3. e para o corolário 4.1.4. no caso da ação não ser nilpotente. De fato, suponhamos que π opere no grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros através de uma ação ω tal que

$$\omega(-1).n = -n$$

(essa é exatamente a ação de $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ em $H_2(\mathbb{R}P^2)$ considerada no capítulo III).

As igualdades

$$I[\pi]^{n-1}.Z = \Gamma_{\omega}^n(Z) = 2^{n-1}Z$$

mostram, como já vimos em 3.3.3., que a ação ω não é nilpotente.

Como $I[\pi].Z = 2\mathbb{Z}$ não pertence a C por não ser um grupo de torção, temos um contra-exemplo para o item ii) do teorema e para seu corolário (se considerarmos a projeção $Z \xrightarrow{\epsilon} Z/I[\pi].Z$, $\ker \epsilon = I[\pi].Z \notin C$ e portanto ϵ não é C -injetora).

Por ser o homomorfismo

$$Z \otimes_{\pi} I[\pi] \longrightarrow Z.I[\pi]$$

sobrejetor, concluímos que $Z \otimes_{\pi} I[\pi]$ não pertence a C e portanto também o item i) do teorema não se verifica.

3) A hipótese de que o grupo A do corolário 4.1.3. seja abeliano é imprescindível como podemos ver pelo seguinte exemplo: Seja C a classe trivial (classe C constituída

por grupos com um único elemento), π um grupo de C e supo-
nhamos que A não seja abeliano. Nessas condições $[A, A]$ é
não trivial $A/\Gamma = A_{ab}$. Essa igualdade é consequência do
fato de π ser trivial e da própria definição de $\Gamma = \Gamma_{\omega}^2 A$
no caso de A não ser abeliano (confronte 3.1.3.). É claro
então que a projeção $A \xrightarrow{\varepsilon} A/\Gamma$ não pode ser uma C -bijeção
pois $\ker \varepsilon = [A, A] \notin C$.

Finalizamos o parágrafo com uma proposição que usamos
no capítulo V para mostrar que os resultados lá obtidos
não exigem que se utilize homologia com coeficientes in-
teiros.

4.1.6. PROPOSIÇÃO Sejam B_1, B_2, A grupos abelianos e
 $B_1 \xrightarrow{\lambda} B_2$ uma C -bijeção. Se A for finitamente gerado ou
se a classe C for completa então os homomorfismos

$$B_1 \otimes A \xrightarrow{\lambda \otimes 1} B_2 \otimes A$$

$$\text{Tor}(B_1, A) \xrightarrow{\lambda_*} \text{Tor}(B_2, A)$$

são também C -bijeções.

DEMONSTRAÇÃO

Consideramos o homomorfismo λ como composto de um epi-
morfismo com um monomorfismo como o indicado no diagrama
comutativo

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\lambda} & B_2 \\ & \searrow \lambda_1 & \nearrow \lambda_2 \\ & \text{Im } \lambda & \end{array}$$

Pelo Lema 4.1.0., $\text{Tor}(\text{coker } \lambda, A)$ e $\text{coker } \lambda \otimes A$ estão em C e, portanto, λ_{2*} e $\lambda_2 \otimes 1$ são C -bijeções. Para provar que λ_{1*} e $\lambda_1 \otimes 1$ são C -bijeções utilizamos a seqüência exata induzida por (1).

§2. COHOMOLOGIA

Examinaremos agora quais resultados podemos transportar, a partir do que fizemos no parágrafo anterior, para a cohomologia. Nossa intenção não é, como já foi dito na introdução a este capítulo, fazer um estudo aprofundado da situação cohomológica, mas, tão somente, utilizar o teorema dos coeficientes universais como ponte entre as teorias homológica e cohomológica. Essa é a razão de não tentarmos demonstrar resultados "análogos" a 4.1.3. e a 4.1.4. embora seja provável que, com as devidas adaptações eles possam ser enunciados.

Começaremos com o seguinte

4.2.0. LEMA Sejam A e B grupos abelianos finitamente gerados. Se A pertencer a $\mathcal{C}$, $\text{Hom}(A,B)$ e $\text{Ext}(A,B)$ também pertencerão a $\mathcal{C}$.

DEMONSTRAÇÃO

Sendo A um grupo abeliano e finitamente gerado demonstra-se $[H,S]$, sem dificuldade a existência dos seguintes isomorfismos:

$$\begin{aligned}\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) &\simeq LA, & \text{Hom}(A, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\simeq A/mA \\ \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) &\simeq TA, & \text{Ext}(A, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) &\simeq TA/mTA\end{aligned}$$

onde LA e TA indicam, respectivamente, as partes livre e

de torção do grupo A. É claro então que basta que A esteja em C para que qualquer dos grupos que figuram nos isomorfismos acima esteja em C.

Utilizando os isomorfismos

$$\begin{aligned}\text{Hom}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i) &\cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}(A, B_i) \\ \text{Ext}(A, \bigoplus_{i=1}^n B_i) &\cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Ext}(A, B_i),\end{aligned}$$

lembrando que B é isomorfo a uma soma direta finita de grupos cíclicos (B é finitamente gerado) levando em conta o que vimos acima concluímos que $\text{Hom}(A, B)$ e $\text{Ext}(A, B)$ são somas diretas finitas de grupos pertencentes a C e portanto também estão em C.

Existe um contra-exemplo bastante simples para o lema acima no caso do grupo A não ser finitamente gerado. Para construí-lo consideramos a classe C dos grupos nilpotentes de torção e definimos o grupo A pela igualdade $A = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_+} A_j$ onde $A_j = \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}_+$ é o conjunto dos números naturais estritamente positivos.

É claro que A é um grupo de torção e portanto está em C. Também não há dúvida que A não é finitamente gerado.

Tomamos para B o grupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros utilizando os isomorfismos

$$\text{Ext}\left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_+} A_j, \mathbb{Z}\right) \cong \prod_{j \in \mathbb{N}_+} \text{Ext}(A_j, \mathbb{Z})$$

$$\text{Ext}(A_j, \mathbb{Z}) \cong A_j$$

vemos que $\text{Ext}(A, B) \cong \prod_{j \in \mathbb{N}_+} A_j$.

Portanto $\text{Ext}(A, B)$ não está em $\mathcal{C}$ por não ser um grupo de torção. Temos assim o contra-exemplo.

Demonstraremos agora um resultado que é o análogo, para a cohomologia, do teorema 4.1.1. do parágrafo anterior.

4.2.1. TEOREMA Seja A um grupo abeliano finitamente gerado e π um grupo tal que se $i \geq 1$ $H_i \pi$ é finitamente gerado e pertence a $\mathcal{C}$. Suporemos A munido de uma estrutura de $\mathbb{Z}[\pi]$ módulo à esquerda induzida por uma ação nilpotente ω de π em A . Nessas condições $H^i(\pi, A) \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO

Por indução sobre a classe de nilpotência de ω .

1) A ação ω é trivial.

Consideramos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{i-1} \pi, A) \longrightarrow H^i(\pi, A) \longrightarrow \text{Hom}(H_i \pi, A) \longrightarrow 0$$

dada pelo teorema dos coeficientes universais.

Como o lema 4.2.0. e a igualdade $\text{Ext}(H_0 \pi, A) = \text{Ext}(\mathbb{Z}, A) = 0$ nos garantem que para $i \geq 1$ $\text{Ext}(H_{i-1} \pi, A)$ e $\text{Hom}(H_i \pi, A)$ estão em $\mathcal{C}$, temos que $H^i(\pi, A)$ também está em $\mathcal{C}$.

2) Provamos que a suposição de que o teorema é válido para ações de classe $\leq n-1$ implica na sua validade para ações de classe n .

Escreve-se a sequência exata longa de cohomologia induzida pela sequência exata de $\mathbb{Z}[\pi]$ módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow A \longrightarrow A/\Gamma \longrightarrow 0 \quad (\Gamma = \Gamma_{\omega}^2 A)$$

e argumenta-se como no final da demonstração do teorema 4.1.1.

É claro que, a exemplo do que ocorre com a homologia, aqui também não podemos pretender que, nas hipóteses do teorema, $H^0(\pi, A) \in \mathcal{C}$ (confronte 4.1.2., observação 2).

O próximo resultado, com o qual encerramos este parágrafo, mostrará a sua utilidade ao tratarmos da cohomologia no próximo capítulo.

4.2.2. PROPOSIÇÃO Sejam A_1 , A_2 e B grupos abelianos finitamente gerados e $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2$ uma $\mathcal{C}$ -bijeção. Nessas condições os homomorfismos

$$\text{Hom}(A_2, B) \longrightarrow \text{Hom}(A_1, B)$$

$$\text{Ext}(A_2, B) \longrightarrow \text{Ext}(A_1, B)$$

induzidos por ϕ , são também $\mathcal{C}$ -bijeções.

DEMONSTRAÇÃO

É, com as devidas adaptações, uma repetição da demons

tração da proposição 4.1.6. e portanto nos satisfaremos em apresentá-la esquematicamente.

A fatoração de ϕ indicada no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\phi} & A_2 \\ \phi_1 \searrow & & \nearrow \phi_2 \\ & \text{Im } \phi & \end{array}$$

nos permite construir os diagramas abaixo, também comutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(A_2, B) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{Hom}(A_1, B) \\ \phi_2^* \searrow & & \nearrow \phi_1^* \\ & \text{Hom}(\text{Im } \phi, B) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}(A_2, B) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{Ext}(A_1, B) \\ \phi_2^* \searrow & & \nearrow \phi_1^* \\ & \text{Ext}(\text{Im } \phi, B) & \end{array}$$

(Estamos aqui cometendo um abuso de notação, usual na Álgebra Homológica, dando a homomorfismos diferentes o mesmo nome!)

É claro que se provarmos que em cada um dos diagramas acima ϕ_1^* e ϕ_2^* são C -bijeções teremos a tese.

Demonstramos isso considerando as seqüências

$$1) \quad 0 \longrightarrow \ker \phi \xrightarrow{i_1} A_1 \xrightarrow{\phi_1} \text{Im } \phi \longrightarrow 0$$

$$2) \quad 0 \longrightarrow \text{Im } \phi \xrightarrow{\phi_2} A_2 \xrightarrow{p_2} \text{coker } \phi \longrightarrow 0$$

e examinando as seqüências exatas longas obtidas pela aplicação do funtor Hom a elas levando em conta o fato de,

pelo Lema 4.2.0. $\text{Hom}(\ker \phi, B)$, $\text{Hom}(\text{coker } \phi, B)$, $\text{Ext}(\ker \phi, B)$
e $\text{Ext}(\text{coker } \phi, B)$ estarem em $\mathcal{C}$.

CAPÍTULO V

HOMOLOGIA MÓDULO C DE RECOBRIMENTOS DE ESPAÇOS NILPOTENTES

§0. INTRODUÇÃO

De volta à Topologia, colheremos os frutos de nossa rápida incursão pela Álgebra. Usando métodos elementares e sem complicações técnicas obteremos informações sobre os grupos de homologia de recobrimentos de espaços nilpotentes que nos permitirão, como exemplificamos no capítulo VI, desenvolver de uma forma nova, o programa de transportar, da categoria dos espaços simplesmente conexos para a categoria dos espaços nilpotentes, técnicas e resultados de conhecida importância.

O objetivo dos parágrafos um e dois é comparar o comportamento, face a uma projeção de recobrimento, dos grupos de homotopia e homologia. Como é sabido, o que se verifica é que, apesar do comportamento dos grupos de homotopia ser

muito bom, é muito difícil prever o que acontece com a homologia.

O parágrafo três é mais longo. Começa com um estudo das propriedades mais simples dos recobrimentos de espaços nilpotentes e culmina com o teorema 5.3.4. Esse teorema e seus corolários são os principais resultados do capítulo e, provavelmente, de todo o trabalho.

No parágrafo quatro indicamos uma forma simples, mas que provavelmente não é a que dá melhores resultados, de transferir para o caso relativo o corolário 5.3.5.

Isso nos permitirá, no capítulo VI, apresentar uma forma relativa do teorema de Hurewicz módulo C para espaços nilpotentes.

O quinto e último parágrafo trata da cohomologia. O enfoque é, de certa forma, superficial. Um tratamento mais aprofundado exigiria um desenvolvimento maior da parte algébrica estudada no capítulo anterior. As referências gerais para o capítulo são $[H,M,R]$, $[H]$, $[H,R]_1$, $[H,R]_2$. Oferecemos, no texto, indicações mais precisas.

§1. ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO: PROPRIEDADES HOMOTÓPICAS E DE LEVANTAMENTO

5.1.0. Seja X um c.w.complexo conexo e $\tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento qualquer de X na categoria dos espaços topológicos. É bem sabido (ver [W]) que, nessas condições, podemos dar a $\tilde{X}$, através de uma decomposição celular conveniente, uma estrutura de c.w.complexo, de forma que a aplicação p seja celular. Também é bastante conhecido o fato de que nem todo espaço topológico admite um recobrimento universal. Como esse é um ponto básico para o desenvolvimento da teoria, é usual exigirmos que os espaços considerados satisfaçam alguma condição suplementar (por exemplo, que sejam semi-localmente simplesmente conexos) que nos assegure a existência desses recobrimentos. Se nos restringirmos a espaços que admitem uma estrutura de c.w.complexo, essa preocupação deixa de existir. A razão disso é que tais espaços são localmente contráteis. Essa é uma propriedade bastante forte e que permite um desenvolvimento completo da teoria dos recobrimentos. Um espaço localmente contrátil, além de ser localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo, possui muitas outras propriedades agradáveis do ponto de vista da teoria da homotopia.

As considerações acima devem ter convencido o leitor

de que na categoria dos c.w.complexos, na qual nos colocamos neste trabalho, a teoria dos recobrimentos se ambienta com bastante naturalidade.

Passamos agora a descrever algumas propriedades homotópicas e de levantamento dos revestimentos.

Salvo menção em contrário, estaremos supondo sempre que os espaços com que tratamos são conexos.

5.1.1. Consideremos um recobrimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ e dois pontos $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}'_0$ de $p^{-1}(x_0)$. É um fato bem conhecido que

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \quad \text{e} \quad p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$$

são subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$. Na realidade, podemos afirmar ainda mais: se π_0 é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ conjugado a $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ então existe $x'_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0) = \pi_0$.

Em face dessas propriedades ocorre-nos, naturalmente, colocar a questão de forma inversa, isto é, dado um espaço X indagamos se existe um recobrimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ tal que $p_*\pi_1\tilde{X}$ seja um subgrupo predeterminado de $\pi_1 X$.

O principal resultado nessa direção é o seguinte

5.1.2. TEOREMA Dado o espaço (X, x_0) fixemos uma classe de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ à qual pertence o grupo

G. Existe um recobrimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, e um ponto $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ tais que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = G$. O recobrimento $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ é, a menos de um homeomorfismo canônico, único.

DEMONSTRAÇÃO

A unicidade é uma consequência imediata do teorema 5.1.4. abaixo. Para a demonstração da existência ver [M].

Uma outra característica notável das projeções de recobrimento é dada pelo

5.1.3. TEOREMA Seja $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ um recobrimento qualquer. O homomorfismo $\pi_j \tilde{X} \xrightarrow{p_*} \pi_j X$ é um isomorfismo se $j > 1$ e um monomorfismo se $j = 1$.

Esse resultado vale em consequência das propriedades de levantamento (único) de caminhos e de homotopias que são características dos espaços de recobrimento. Para uma demonstração do teorema ver [M].

No que se refere às propriedades de levantamento, o seguinte teorema é de fundamental importância.

5.1.4. TEOREMA Consideremos o recobrimento $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ e uma aplicação contínua $(Y, y_0) \xrightarrow{f} (X, x_0)$. Uma condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação contínua $(Y, y_0) \xrightarrow{\tilde{f}} (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que o diagrama abaixo seja

comutativo $\tilde{e}$ que $f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

A função $\tilde{f}$, quando, existe, é única.

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO

Ver $[M]$.

Para finalizar enunciamos uma propriedade dos recobrimentos que nos será útil no próximo parágrafo.

5.1.5. Se $X_1 \xrightarrow{p_1} X$ e $X_2 \xrightarrow{p_2} X_1$ são recobrimentos então $X_2 \xrightarrow{p_1 \cdot p_2} X$ é um recobrimento.

A demonstração apoia-se no fato do espaço X possuir um recobrimento universal (confronte $[M]$ Ex. 6.5 página 161).

§2. ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO: RELAÇÃO ENTRE OS GRUPOS DE
HOMOLOGIA DE UM ESPAÇO E DO SEU RECOBRIMENTO. SEQUÊN-
CIA ESPECTRAL DE UM RECOBRIMENTO.

Um dos objetivos que tivemos em mente ao rememorar-
mos, no parágrafo anterior, alguns fatos básicos da teo-
ria dos recobrimentos foi ressaltar a maneira simples mas
profunda como se relacionam os conceitos de recobrimento
e homotopia. Um dos resultados que enunciamos (teorema
5.1.3) mostra que, do ponto de vista estrito da homotopia
(grupos de homotopia), um espaço e seu recobrimento são
quase indistinguíveis.

Neste parágrafo transferimos o nosso interesse para
a homologia, isto é, pretendemos examinar as relações en-
tre a homologia de um espaço e a do seu recobrimento.

Consideremos um recobrimento $\bar{X} \longrightarrow X$. Se $\pi_1 X$ for abe-
liano, as relações $\pi_1 \bar{X} \subset \pi_1 X$ e $H_1 X = \pi_1 X / [\pi_1 X, \pi_1 X]$ mos-
tram de imediato que, a exemplo do que acontece com os
grupos fundamentais, temos uma inclusão $H_1 \bar{X} \longrightarrow H_1 X$ na
homologia. Nas dimensões mais altas, ou mesmo em dimen-
são um quando $\pi_1 X$ não é abeliano, podem surgir complica-
ções.

Vejamos alguns casos concretos.

5.2.0. EXEMPLOS

$$1) \mathbb{R} \longrightarrow S^1.$$

Os grupos de homologia são:

$$H_0(\mathbb{R}) = H_0(S^1) = \mathbb{Z},$$

$$H_1(\mathbb{R}) = 0, \quad H_1(S^1) = \mathbb{Z} \text{ e}$$

$$H_j(\mathbb{R}) = H_j(S^1) = 0, \quad j \geq 2.$$

Neste exemplo, os grupos de homologia do espaço S^1 e de seu recobrimento $\mathbb{R}$ são, exceto em dimensão um, os mesmos. O homomorfismo $H_1(\mathbb{R}) \longrightarrow H_1(S^1)$, como já se poderia prever pelo que dissemos acima, é uma inclusão.

$$2) \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1.$$

Vejamos os grupos de homologia nesse caso:

$$H_0(\mathbb{R}^2) = H_0(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z},$$

$$H_1(\mathbb{R}^2) = 0, \quad H_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$H_2(\mathbb{R}^2) = 0, \quad H_2(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \text{ e}$$

$$H_j(\mathbb{R}^2) = H_j(S^1 \times S^1) = 0, \quad j \geq 3.$$

Apenas em dimensão 2 notamos uma discrepância de comportamento em relação a homotopia pois, ao invés de um isomorfismo, temos uma inclusão. Cabe, no entanto, observar que como o espaço $S^1 \times S^1$ é nilpotente o teorema 5.3.4. do próximo parágrafo nos permitirá explicar a forma pela qual esses grupos de homologia se relacionam.

$$3) S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad n \geq 1.$$

Distinguiremos dois casos: a) n ímpar e b) n par.

$$a) \quad n = 2k+1.$$

Também aqui o teorema 5.3.4. nos terá algo a dizer, pois, para valores ímpares de n , $\mathbb{R}P^n$ é nilpotente.

Indicamos abaixo os grupos de homologia da base e do recobrimento para que o leitor os compare.

$$H_j(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } j=0 \text{ ou } j=n \\ 0 & \text{se } j \neq 0 \text{ e } j \neq n \end{cases} \quad \begin{cases} H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z} \\ H_{2j}(\mathbb{R}P^n) = 0 & j \neq 0 \\ H_{2j-1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2 & 0 < 2j-1 < n \\ H_n(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$b) \quad n = 2k.$$

Os grupos de homologia são os fornecidos pela tabela acima com uma única alteração: $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$.

Por n ser par, $\mathbb{R}P^n$ não é nilpotente (confronte 3.3.3.) e, portanto, os resultados do próximo parágrafo não são aplicáveis (confronte 5.3.7.).

Estamos, como os exemplos acima sugerem, diante de uma situação bem mais delicada do que aquela com a qual nos defrontamos no caso da homotopia.

O instrumento algébrico que nos permite relacionar a

homologia de um espaço com a de seu recobrimento é uma sequência espectral introduzida por H. Cartan (confronte [C,S]) e que pode ser encarada como a sequência espectral de uma fibração associada ao recobrimento. Mais precisamente, seja $\bar{X} \longrightarrow X$ um recobrimento regular cujo grupo de transformações indicamos por π . A esse recobrimento associamos a fibração $\bar{X} \longrightarrow X \longrightarrow K(\pi,1)$ e, a essa fibração, sua sequência espectral. Essa sequência espectral é conhecida como sequência espectral do recobrimento $\bar{X} \rightarrow X$. Convém observar que, como $K(\pi,1)$ não é simplesmente conexo, precisamos trabalhar com coeficientes locais.

Um outro ponto para o qual chamamos a atenção do leitor é que interpretamos os grupos de homologia do espaço $K(\pi,1)$ como sendo os grupos de homologia do grupo π . Em virtude disso, escrevemos $E^2_{p,q} = H_p(\pi, H_q \bar{X})$ ao invés de $E^2_{p,q} = H_p(K(\pi,1), H_q \bar{X})$.

Finalmente, vale acrescentar que nem sempre é simples trabalhar com uma sequência espectral. Por vezes, os cálculos se tornam penosos e, em consequência, menos efetivos. No entanto, na categoria dos espaços nilpotentes a situação, como nos foi possível mostrar nesse trabalho, simplifica-se bastante. Esse, porém, é o objeto do próximo parágrafo.

§3. RECOBRIMENTOS DE ESPAÇOS NILPOTENTES: HOMOLOGIA MOD C.

A partir de agora, focalizaremos nossa atenção nos espaços nilpotentes. Nosso objetivo, como já foi anunciado no parágrafo anterior, é, utilizando o conceito de classe de Serre de grupos nilpotentes, relacionar a homologia de um espaço (nilpotente) com a homologia de seu recobrimento.

Inicialmente estudamos algumas propriedades dos recobrimentos de espaços nilpotentes que utilizaremos no decorrer do capítulo.

5.3.0. PROPOSIÇÃO Se X é um espaço nilpotente e $\bar{X} \longrightarrow X$ um recobrimento qualquer de X então $\bar{X}$ é nilpotente.

DEMONSTRAÇÃO

Como $\pi_1 \bar{X}$ é nilpotente (pois é isomorfo a um subgrupo do grupo nilpotente $\pi_1 X$) precisamos apenas mostrar que $\pi_1 \bar{X}$ opera nilpotentemente em $\pi_n \bar{X}$ ($n \geq 2$). É claro que, para isso, basta verificar que a ação (induzida pelo isomorfismo $\pi_n \bar{X} \xrightarrow{p_*} \pi_n X$, $n \geq 2$) de $\pi_1 \bar{X}$ em $\pi_n X$ é nilpotente.

Um exame do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ p_1 \downarrow & \searrow p_2 & \\ X & & \bar{X} \\ & \nearrow p & \end{array}$$

onde $\tilde{X}$ é recobrimento universal de X e de $\bar{X}$, levando em conta sua comutatividade e a unicidade dos levantamentos, nos mostra que a ação de $\pi_1 \bar{X}$ em $\pi_n X$ é a restrição da ação de $\pi_1 X$ em $\pi_n X$ que é, por hipótese, nilpotente.

Como a restrição de uma ação nilpotente é uma ação nilpotente (confronte 3.1.4.) temos a tese.

Examinaremos agora o correspondente topológico do fato de todo subgrupo de um grupo nilpotente ser subnormal.

5.3.1. PROPOSIÇÃO Seja $\bar{X} \xrightarrow{p} X$ um recobrimento qualquer do espaço nilpotente X . Existe uma sequência $X_k \xrightarrow{p_k} X_{k-1}$, $k=1, \dots, n$, de recobrimentos regulares de tal forma que

$$\bar{X} = X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{p_1} X_0 = X$$

com $p_1 \circ p_2 \dots p_n = p$.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos uma série subnormal

$$\pi_1 \bar{X} = G_n \triangleleft G_{n-1} \dots G_1 \triangleleft G_0 = \pi_1 X$$

de subgrupos de $\pi_1 X$ ligando $\pi_1 \bar{X}$ a $\pi_1 X$.

O teorema 5.1.2. nos permite construir um recobrimento $X_1 \xrightarrow{p_1} X$ do espaço X tal que $\pi_1 X_1 = G_1$ e o homomorfismo $G_1 \xrightarrow{p_1^*} G_0 = \pi_1 X$ é a inclusão. É claro, então, que um argumento de indução nos fornece a existência de reco

brimentos

$$X_k \xrightarrow{p_k} X_{k-1}$$

$$\pi_1 X_k = G_k, \quad \pi_1 X_{k-1} = G_{k-1} \quad e$$

o homomorfismo $G_k \xrightarrow{p_k^*} G_{k-1}$ é a inclusão do subgrupo normal G_k em G_{k-1} .

Nessas condições

$$X_n \longrightarrow \dots \longrightarrow X_0 = X$$

é um recobrimento no qual $\pi_1 X_n \longrightarrow \pi_1 X$ é a inclusão de G_n em $\pi_1 X$. Além disso, em virtude da unicidade estabelecida pelo teorema 5.1.2. ele é, (a menos de um isomorfismo canônico) o recobrimento $\bar{X} \xrightarrow{p} X$.

Consideremos agora uma classe de Serre C de grupos nilpotentes:

5.3.2. PROPOSIÇÃO Se supusermos que o recobrimento $\bar{X} \xrightarrow{p} X$ considerado na proposição 5.3.1. acima é tal que $\pi_1 \bar{X} \longrightarrow \pi_1 X$ é uma C -sobrejeção, a sequência de recobrimentos regulares

$$\bar{X} = X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{p_1} X_0 = X$$

pode ser construída de forma que

$$\pi_1 X_{k-1} \Big/ \substack{\pi_1 X_k \\ p_k^*} \in C \quad k=1, \dots, n.$$

DEMONSTRAÇÃO

Como $\pi_1 \bar{X} \longrightarrow \pi_1 X$ é uma $\mathcal{C}$ -sobrejeção existe (confronte 3.2.4.) uma série subnormal de subgrupos

$$\bar{X} = G_n \triangleleft G_{n-1} \dots G_1 \triangleleft G_0 = \pi_1 X$$

tal que $G_{k-1} / G_k \in \mathcal{C}$.

constrói-se então os recobrimentos como em 5.3.1.

Nosso próximo resultado é um lema de caráter técnico e que será importante para a demonstração do teorema 5.3.4. Sua demonstração pressupõe alguma familiaridade com [H]. Para facilidade do leitor incluímos, no capítulo III, os enunciados das proposições explicitamente mencionadas no decorrer da demonstração do lema.

5.3.3. LEMA Seja X um espaço nilpotente e π o grupo de transformações de recobrimento de um recobrimento regular $\bar{X} \xrightarrow{p} X$ de X . A ação de π em $H_q \bar{X}$ é nilpotente qualquer que seja o inteiro positivo q .

DEMONSTRAÇÃO

Para simplificar a notação escreveremos $\pi_1 = \pi_1 X$, $\bar{\pi}_1 = \pi_1 \bar{X}$.

Consideremos a fibração $\tilde{X} \longrightarrow \bar{X} \longrightarrow K(\bar{\pi}_1, 1)$ em cujos grupos de homologia o grupo π_1 opera de forma óbvia. $\tilde{X}$

representa aqui o recobrimento universal de X . Observe-mos, de início, que essa é uma fibração nilpotente com fibra nilpotente e, portanto, pelo teorema 3.3.6. ela é também quase-nilpotente. Por outro lado, o teorema 3.3.2. nos assegura que a ação de π_1 na homologia da fibra $\tilde{X}$ é nilpotente. Sendo π_1 um grupo nilpotente, sua ação (por conjugação) em $\bar{\pi}_1$ é nilpotente [H]. A proposição 3.1.6. nos diz então que a ação π_1 na homologia de $K(\bar{\pi}_1, 1)$ também é nilpotente. Invocamos agora o teorema 3.3.7. e concluimos que π_1 age nilpotentemente na homologia de $\bar{X}$. Para termos a tese, basta observar que a ação de π_1 na homologia de $\bar{X}$ é induzida da ação de π através do epimorfismo ϵ que figura na sequência exata

$$\bar{\pi}_1 \longrightarrow \pi_1 \longrightarrow \pi$$

Chegamos agora ao principal resultado deste capítulo.

Indicaremos por $\mathcal{C}$ uma classe de Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes.

5.3.4. TEOREMA Se $\bar{X} \xrightarrow{p} X$ é um recobrimento regular de um espaço nilpotente X e se ou X é de tipo finito ou $\mathcal{C}$ é completa então as seguintes condições são equivalentes:

i) $\pi \in \mathcal{C}$, onde π é o grupo de transformações de recobrimento do recobrimento $\bar{X} \xrightarrow{p} X$.

ii) O homomorfismo induzido na homologia $H_q \bar{X} \longrightarrow H_q X$ pela projeção do recobrimento é uma $\mathcal{C}$ -bijeção para todo inteiro q .

DEMONSTRAÇÃO

1) ii) $\Rightarrow$ i)

Como $\bar{X} \xrightarrow{p} X$ é um recobrimento regular, π é isomorfo ao quociente $\pi_1 X / p_* \pi_1 \bar{X}$ e portanto o que temos que mostrar é que $\pi_1 X / p_* \pi_1 \bar{X} \in \mathcal{C}$. Utilizando-se a propriedade u-

niversal que caracteriza o funtor abelianização e o fato de ser ele um funtor exato a direita verifica-se facilmente que o abelianizado do grupo $\pi_1 X / p_* \pi_1 \bar{X}$ é o conucleo

do homomorfismo $H_1 \bar{X} \longrightarrow H_1 X$ que, por hipótese, pertence a $\mathcal{C}$.

O teorema 3.2.1. do capítulo III, que diz que um grupo pertence a $\mathcal{C}$ se e somente se o seu abelianizado pertencer a $\mathcal{C}_1$ nos garante então que $\pi_1 X / p_* \pi_1 \bar{X} \in \mathcal{C}$.

2) i) $\Rightarrow$ ii)

Como, pelo lema 5.3.3., a ação de π em $H_q \bar{X}$ é nilpo-

tente o corolário 4.1.4. do capítulo IV nos assegura que $H_q \bar{X} \longrightarrow (H_q \bar{X})_\pi$ é uma C -bijeção.

Utilizaremos a sequência espectral do recobrimento $\bar{X} \longrightarrow X$ para provar que existe uma C -bijeção entre $(H_q \bar{X})_\pi$ e $H_q(X)$. É claro que, havendo estabelecido esta C -bijeção, teremos demonstrado o teorema.

Temos

$$\begin{array}{ccccccc}
 (H_q \bar{X})_\pi = E_{0,q}^2 & \longrightarrow & E_{0,q}^3 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_{0,q}^{q+1} \longrightarrow E_{0,q}^\infty \subseteq F^1 H_q X \subset \dots \subset F^{q-1} H_q X \subset F^q H_q X = H_q X \\
 \uparrow d^2 & & \uparrow d^3 & & & & \uparrow d^{q+1} & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_{2,q-1} & & E_{3,q-2} & & & & E_{q+1,0}^{q+1} & & E_{1,q-1}^\infty & & E_{q-1,1}^\infty
 \end{array}$$

O diagrama acima representa uma parte — a relevante para o nosso argumento — da sequência espectral do recobrimento $\bar{X} \longrightarrow X$. $F^1 H_q X, \dots, F^q H_q X$ são os termos da filtração natural de $H_q X$.

Como a ação de π em $H_q \bar{X}$ é nilpotente o teorema 4.1.1. do capítulo IV nos permite afirmar que $E_{j,q-j+1}^2 \in C$, $j=2, \dots, q+1$. É claro então que $E_{j,q-j+1}^j \in C$ para $j=2, \dots, q+1$ o que nos permite concluir ser o homomorfismo

$$E_{0,q}^2 \longrightarrow E_{0,q}^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{0,q}^{q+1} \longrightarrow E_{0,q}^\infty$$

uma C -bijeção.

Mostraremos agora que as inclusões

$$E_{0,q}^{\infty} \subset F^1 H_q X \subset \dots \subset F^{q-1} H_q X \subset F^q H_q X = H_q X$$

são C -sobrejeções.

Para isso basta verificar que os respectivos conúcleos $E_{1,q-1}^{\infty}, E_{2,q-2}^{\infty}, \dots, E_{q-1,1}^{\infty}$ estão em C .

Novamente estamos em condições de aplicar o teorema 4.1.1. do capítulo IV e dizer que $E_{j,q-j}^2 \in C$, $j=1, \dots, q-1$; conseqüentemente $E_{j,q-j}^{\infty} \in C$, $j=1, \dots, q-1$ e portanto as inclusões acima são C -sobrejeções.

Mantendo as mesmas notações e hipóteses de 5.3.4. podemos enunciar um corolário (na realidade um caso particular do teorema 5.3.4.).

5.3.5. COROLÁRIO Se $\tilde{X} \longrightarrow X$ é o recobrimento universal de X e $\pi_1 X \in C$ então $H_q \tilde{X} \longrightarrow H_q X$ é uma C -bijeção para todo inteiro q .

DEMONSTRAÇÃO

O grupo de transformações de recobrimento do recobrimento universal $\tilde{X} \longrightarrow X$ é isomorfo a $\pi_1 X$.

A propriedade de subnormalidade dos subgrupos de grupos nilpotentes nos permite estender (na direção i) $\Rightarrow$ ii)) o

teorema 5.3.4.

5.3.6. COROLÁRIO Seja $\bar{X} \longrightarrow X$ um recobrimento (não necessariamente regular) do espaço nilpotente X . Se o morfismo $\pi_1 \bar{X} \longrightarrow \pi_1 X$ é uma C -sobrejeção então os homomorfismos $H_q \bar{X} \longrightarrow H_q X$ são C -bijeções para todo inteiro q .

DEMONSTRAÇÃO

"Fatora-se" como em 5.3.2. o recobrimento $\bar{X} \longrightarrow X$ numa seqüência

$$\bar{X} \simeq X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{p_1} X_0 = X$$

de recobrimentos regulares de tal forma que $p_1 \circ p_2 \dots p_n = p$

$$\frac{\pi_1 X_{j-1}}{p_{j*} \pi_1 X_j} \in C.$$

Aplica-se então o teorema 5.3.4. a cada um dos recobrimentos $X_j \xrightarrow{p_j} X_{j-1}$, $j=1, \dots, n$ obtendo-se as C -bijeções $H_q(X_j) \longrightarrow H_q(X_{j-1})$.

Compondo-se essas C -bijeções temos a tese.

5.3.7. COMENTÁRIOS

1) Verifica-se sem dificuldade que o corolário 5.3.5. permanece válido se supusermos apenas que:

- i) $\pi_1 X$ opera nilpotentemente na homologia de X .
- ii) $H_i \pi \in C$, $i \geq 1$ onde $\pi = \pi_1 X$.

Espaços satisfazendo a condição i) estão sendo estudados com o nome de homologicamente nilpotentes.

Essa denominação é devida a Dror e Dwyer.

2) O teorema 5.3.4. e seus corolários permanecem válidos se considerarmos a homologia com coeficientes num grupo abeliano A (finitamente gerado quando a classe C não for completa). Verifica-se esse fato considerando-se o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_q(\tilde{X}) \otimes A & \longrightarrow & H_q(\tilde{X}, A) & \longrightarrow & \text{Tor}(H_{q-1}(\tilde{X}), A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_q(X) \otimes A & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & \text{Tor}(H_{q-1}(X), A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

cujas linhas são dadas pelo teorema dos coeficientes universais. Como as flechas verticais das extremidades são, pela proposição 4.1.6., C -bijeções, a flecha vertical do centro é também uma C -bijeção.

3) O leitor não terá deixado de perceber que quando a classe C é formada apenas por grupos triviais (grupos com um único elemento) o teorema 5.3.4. perde toda sua força pois afirma apenas que a aplicação identidade $X \longrightarrow X$ induz isomorfismos na homologia. Esse é o primeiro exemplo desse tipo que conhecemos, isto é, de um teorema que envolvendo a noção de classe de grupos na sua formulação torna-se genuinamente trivial quando consideramos a classe

trivial.

5.3.8. CONTRA-EXEMPLO

Examinaremos agora um exemplo que nos mostrará que alguma hipótese de nilpotência é necessária para a validade do teorema 5.3.4. e seus corolários. Mais precisamente, daremos um contra-exemplo ao corolário 5.3.5. no caso da hipótese da nilpotência do espaço não estar verificada.

Consideremos o recobrimento universal $S^2 \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^2$ de $\mathbb{R}P^2$ e seja $\mathcal{C}$ a classe dos grupos nilpotentes de torção. Deixamos aos cuidados do leitor a verificação de que essa classe é completa e acíclica. É claro que $\mathbb{R}P^2$ é um espaço de tipo finito. Por outro lado, já vimos no capítulo III (confronte 3.3.3) que $\mathbb{R}P^2$ não é um espaço nilpotente. (Na realidade, mostramos que $\mathbb{R}P^2$ não é nem mesmo homologicamente nilpotente).

Como $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \in \mathcal{C}$, a única hipótese do corolário 5.3.5. que não está satisfeita é a de nilpotência do espaço $\mathbb{R}P^2$.

Finalmente, obtemos o contra-exemplo examinando o homomorfismo

$$H_2(S^2) \xrightarrow{p_*} H_2(\mathbb{R}P^2).$$

Sendo $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ e $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$

vemos que $\ker p_* = \mathbb{Z} \notin \mathcal{C}$ e, portanto, p_* não é uma $\mathcal{C}$ -bijeção.

§4. CASO RELATIVO

Mostraremos agora uma maneira simples de transportar para o caso relativo o corolário 5.3.5. Esse resultado nos permitirá demonstrar, no próximo capítulo, uma forma relativa do teorema de Hurewicz. Devemos no entanto ressaltar que esse não é, aparentemente, o melhor resultado nessa direção. Acreditamos poder demonstrar, por métodos similares aos aqui desenvolvidos, um resultado substancialmente mais forte.

5.4.0. Seja (X,A) um par de espaços. Indicaremos por $\tilde{X} \longrightarrow X$ e $\tilde{A} \longrightarrow A$ os recobrimentos universais de X e A . É claro que podemos "levantar" a inclusão $A \xrightarrow{i} X$ obtendo uma aplicação contínua $\tilde{A} \xrightarrow{\tilde{i}} \tilde{X}$ e portanto, a menos de uma equivalência de homotopia, teremos uma inclusão de $\tilde{A}$ em $\tilde{X}$. Em virtude disso, estaremos, nas considerações abaixo, num abuso usual de linguagem, supondo $\tilde{A}$ um subespaço de $\tilde{X}$.

Diremos que (X,A) é um par nilpotente se X e A são espaços nilpotentes. Se X e A forem de tipo finito diremos que o par (X,A) é de tipo finito.

Como de costume, C indicará uma classe Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes.

5.4.1. PROPOSIÇÃO Seja (X,A) um par nilpotente e suponhamos que $\pi_1 A$ e $\pi_1 X$ estão em $\mathcal{C}$. Se o par (X,A) é de tipo finito ou a classe $\mathcal{C}$ completa, o homomorfismo $H_q(\tilde{X},\tilde{A}) \longrightarrow H_q(X,A)$ é, para todo inteiro q , uma $\mathcal{C}$ -bijectão.

DEMONSTRAÇÃO

A projeção $(\tilde{X},\tilde{A}) \longrightarrow (X,A)$ induz um homomorfismo entre as seqüências exatas longas de homologia desses pares formando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q \tilde{A} & \longrightarrow & H_q \tilde{X} & \longrightarrow & H_q(\tilde{X},\tilde{A}) & \longrightarrow & H_{q-1} \tilde{A} & \longrightarrow & H_{q-1} \tilde{X} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_q A & \longrightarrow & H_q X & \longrightarrow & H_q(X,A) & \longrightarrow & H_{q-1} A & \longrightarrow & H_{q-1} X & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Estando as hipóteses do corolário 5.3.5. verificadas, concluímos que as quatro flechas verticais laterais são $\mathcal{C}$ -bijeções. O lema dos cinco módulo $\mathcal{C}$ (teorema 3.2.6.) nos garante então que o homomorfismo

$$H_q(\tilde{X},\tilde{A}) \longrightarrow H_q(X,A)$$

é uma $\mathcal{C}$ -bijeção

§5. COHOMOLOGIA

Como já dissemos reiteradas vezes, não é nossa intenção, neste trabalho, tratar em condições de igualdade, homologia e cohomologia. Na realidade, nem teríamos, a esta altura, condições de fazê-lo pois não desenvolvemos suficientemente, no que se refere à cohomologia, o material algébrico do capítulo IV.

Nós nos restringimos à seguinte questão:

Seja $X \xrightarrow{f} Y$ uma função contínua tal que, para todo inteiro q , o homomorfismo $H_q X \longrightarrow H_q Y$ é uma $\mathbb{C}$ -bijeção. Será que nessas condições f induz $\mathbb{C}$ -bijeções também entre os grupos de homologia? A proposição abaixo dá uma condição suficiente para que isso aconteça.

5.5.0. PROPOSIÇÃO Seja B um grupo abeliano finitamente gerado e X e Y espaços nilpotentes de tipo finito. Se a função contínua $X \xrightarrow{f} Y$ for tal que $H_q X \xrightarrow{f_*} H_q Y$ é uma $\mathbb{C}$ -bijeção para $q \geq 0$, então $H^q(Y, B) \longrightarrow H^q(X, B)$ também será uma $\mathbb{C}$ -bijeção para todo inteiro q .

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{q-1}X, B) & \longrightarrow & H^q(X, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_q X, B) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{q-1}Y, B) & \longrightarrow & H^q(Y, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_q Y, B) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

construido a partir do teorema dos coeficientes universais para a cohomologia. Como as flechas verticais laterais são, em virtude da proposição 4.2.2., C -bijeções concluímos, utilizando a proposição 3.2.6., que f_* é uma C -bijeção.

A proposição acima, o corolário 5.3.6. e o fato de todo recobrimento de um espaço de tipo finito ser também um espaço de tipo finito nos permite enunciar a seguinte.

5.5.1. PROPOSIÇÃO Seja B um grupo finitamente gerado, X um espaço nilpotente de tipo finito e $\bar{X} \longrightarrow X$ um recobrimento (não necessariamente regular) de X . Se o homomorfismo $\pi_1 \bar{X} \longrightarrow \pi_1 X$ for uma C -sobrejeção, os homomorfismos $H^q(X, B) \longrightarrow H^q(\bar{X}, B)$ serão C -bijeções para todo inteiro q .

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES. O TEOREMA DE HUREWICZ MÓDULO C E A SEQUÊNCIA EXATA DE J.H.C.WHITEHEAD

§0. INTRODUÇÃO

Encerramos o trabalho mostrando como utilizar o teorema 5.3.4 e seus corolários para estabelecer na categoria dos espaços nilpotentes alguns resultados que na teoria de Homotopia clássica exigiam, para sua validade, a hipótese de que os espaços envolvidos fossem simplesmente conexos.

Na realidade, essas aplicações do teorema 5.3.4 ilustram uma nova maneira de desenvolver o programa de generalizar, para a categoria dos espaços nilpotentes, métodos que provaram ser de grande utilidade no estudo da teoria de homotopia dos espaços simplesmente conexos.

Especificamente, o que fizemos neste capítulo foi demonstrar o teorema de Hurewicz módulo C no caso absoluto e dar

uma versão (que acreditamos possa ser melhorada) desse mesmo teorema no caso relativo. Demonstramos também, no contexto das classes de Serre de grupos nilpotentes, uma propriedade relativa aos grupos $\Gamma_i X$ que comparecem na sequência exata de J.H.C.Whitehead que utilizamos no capítulo I para provar o addendum ao teorema de Hurewicz clássico.

Como de hábito, indicaremos por C uma classe de Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes.

§1. APLICAÇÕES

Ocuparemos-nos, em primeiro lugar, do caso absoluto, apresentando uma versão mais forte de um resultado obtido originalmente por Hilton e Roitberg (teorema 5.1 de [H,R]₁).

6.1.0 TEOREMA. Seja X um espaço nilpotente e C uma classe de Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes. Suponhamos que ou (a) X é de tipo finito ou (b) C é completa. Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\pi_i X \in C \quad 1 \leq i < n$
- (ii) $H_i X \in C \quad 1 \leq i < n.$

Na eventualidade de uma dessas (e portanto ambas) condições ser verdadeira podemos afirmar que

- (iii) $\pi_n X \longrightarrow H_n X$ é uma C -bijeção
- (iv) $\pi_{n+1} X \longrightarrow H_{n+1} X$ é uma C -sobrejeção.

DEMONSTRAÇÃO

Começaremos provando que as condições (i) e (ii) são equivalentes.

Observamos, de início, que

$$\pi_1 X \in C \iff H_1 X \in C$$

pois $H_1 X$ é o abelianizado de $\pi_1 X$.

Consideremos o recobrimento universal $\tilde{X} \longrightarrow X$. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, o teorema 2.2.0 nos diz que, se $1 \leq j < n$,

vale a equivalência

$$\pi_j \tilde{X} \in C \iff H_j \tilde{X} \in C. \quad (1)$$

Levando em conta que se $j \geq 2$, $\pi_j \tilde{X} = \pi_j X$, podemos garantir que para todo inteiro $j \geq 2$

$$\pi_j X \in C \iff H_j \tilde{X} \in C. \quad (2)$$

Por outro lado o corolário 5.3.5 nos assevera que para todo inteiro j o homomorfismo

$$H_j \tilde{X} \longrightarrow H_j X$$

é uma C -bijeção e portanto

$$H_j \tilde{X} \in C \iff H_j X \in C \quad (3)$$

As equivalências (1), (2) e (3) nos permitem concluir que se $j \geq 2$

$$\pi_j X \in C \iff H_j X \in C$$

Como já observamos que essa equivalência vale também para $j = 1$ temos a tese, isto é, (i) $\iff$ (ii).

Resta-nos demonstrar (iii) e (iv).

Consideraremos novamente o recobrimento universal $\tilde{X} \longrightarrow X$ e manteremos as notações utilizada acima.

Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, os itens (iii) e (iv) do teorema 2.2.0 nos garantem que

$$\pi_n \tilde{X} \longrightarrow H_n \tilde{X} \text{ é uma } C\text{-bijeção}$$

$$\pi_{n+1} \tilde{X} \longrightarrow H_{n+1} \tilde{X} \text{ é uma } C\text{-sobrejeção.}$$

Conclui-se a demonstração utilizando-se os isomorfismos, $\pi_n \tilde{X} = \pi_n X$, $\pi_{n+1} \tilde{X} = \pi_{n+1} X$ e o fato de serem os homomorfismos

$$H_j \tilde{X} \longrightarrow H_j X$$

C -bijeções. ■

Convém observar que o teorema 5.1 de $[H,R]_1$ não inclui a afirmação de que $\pi_{n+1} X \longrightarrow H_{n+1} X$ é uma C -sobrejeção e garante apenas que $\pi'_n X \longrightarrow H_n X$ é uma C -bijeção. $\pi'_n X$ indica aqui, o grupo obtido pela fatoração da ação de $\pi_1 X$ em $\pi_n X$.

Trataremos agora do caso relativo. Não queremos enfatizá-lo muito pois, como já dissemos, acreditamos poder melhorar o resultado que apresentamos aqui.

6.1.1 TEOREMA. Seja (X,A) um par nilpotente e suponhamos que $\pi_1 A$ e $\pi_1 X$ estão em C . Se o par (X,A) é do tipo finito ou a classe C é completa então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\pi_i(X,A) \in C \quad 1 \leq i \leq n-1$
- (ii) $H_i(X,A) \in C \quad 1 \leq i \leq n-1.$

Na eventualidade de uma (e portanto ambas) dessas condições estar verificada podemos garantir que:

- (iii) $\pi_n(X,A) \longrightarrow H_n(X,A)$ é uma C -bijeção
- (iv) $\pi_{n+1}(X,A) \longrightarrow H_{n+1}(X,A)$ é uma C -sobrejeção.

DEMONSTRAÇÃO

Observemos inicialmente que, em virtude de

$$\pi_1 X \longrightarrow \pi_1(X,A) \quad \text{e} \quad H_1 X \longrightarrow H_1(X,A)$$

serem epimorfismos e $\pi_1 X$ e $H_1 X$ estarem em $\mathcal{C}$ ($H_1 X$ pertence a $\mathcal{C}$ por ser o abelianizado de $\pi_1 X$), os grupos $\pi_1(X,A)$ e $H_1(X,A)$ estão em $\mathcal{C}$.

A seguir consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_2 A & \longrightarrow & \pi_2 X & \longrightarrow & \pi_2(X,A) & \longrightarrow & \pi_1 A & \longrightarrow & \pi_1 X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2 A & \longrightarrow & H_2 X & \longrightarrow & H_2(X,A) & \longrightarrow & H_1 A & \longrightarrow & H_1 X \end{array}$$

cujas linhas são exatas.

As duas flechas verticais da esquerda são, pelo teorema de Hurewicz absoluto (teorema 6.1.0) $\mathcal{C}$ -bijeções. As duas da direita são também $\mathcal{C}$ -bijeções pois seus domínios e contra-domínios são grupos pertencentes a classe $\mathcal{C}$. O lema dos cinco (teorema 3.2.6) nos garante então que $\pi_2(X,A) \rightarrow H_2(X,A)$ é uma $\mathcal{C}$ -bijeção.

As considerações acima mostram que para $j=1,2$ a equivalência $i) \iff ii)$ está automaticamente verificada.

Introduzindo-se o recobrimento universal $(\tilde{X}, \tilde{A}) \rightarrow (X,A)$ do par (X,A) , — a observação que fizemos em 5.4.0 vale tam-

bém aqui — utilizando-se o teorema 2.2.1 e a proposição 5.4.1 obtemos, argumentando da mesma forma que no caso absoluto (teorema (6.1.0), a tese. ■

É bem conhecido que do teorema de Hurewicz relativo podemos deduzir o teorema de Whitehead. Não exploraremos este fato aqui por não acreditarmos, como já dissemos reiteradas vezes, estar de posse da melhor forma do teorema de Hurewicz relativo. Queremos, no entanto, chamar a atenção do leitor para o fato de existirem versões do teorema de Whitehead para o caso nilpotente. Confronte-se, por exemplo, $[H,R]_1$, $[H,R]_2$ e $[D]$.

Esses resultados foram obtidos por outras vias uma vez que não se dispunha do teorema de Hurewicz relativo no caso nilpotente.

Em particular Hilton e Roitberg obtiveram uma forma do teorema de Whitehead (confronte corolário 3.4 de $[H,R]_2$) que admite como consequência imediata o corolário 5.3.5 do capítulo anterior. Devemos, no entanto, observar que os métodos por eles empregados são extremamente elaborados enquanto os nossos são de natureza elementar.

Concluiremos o capítulo provando uma propriedade dos grupos $\Gamma_i X$ que figuram na sequência exata de J.C.H. Whitehead. As definições e notações relevantes foram introduzidas em 1.2.0.

6.1.2 TEOREMA. Seja X um espaço nilpotente e C uma classe de Serre própria e acíclica de grupos nilpotentes. Suponha que X é de tipo finito ou que C é completa. Nessas condições, podemos afirmar que se $\pi_i X \in C$, $1 \leq i \leq n-1$, então $\Gamma_i X \in C$, $1 \leq i \leq n$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\tilde{X} \longrightarrow X$ o recobrimento universal de X e consideremos a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_{j+1} \tilde{X} \xrightarrow{h_{j+1}} H_{j+1} \tilde{X} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \Gamma_j \tilde{X} \xrightarrow{\lambda_j} \pi_j \tilde{X} \xrightarrow{h_j} H_j \tilde{X} \xrightarrow{\gamma_j} \Gamma_{j-1} \tilde{X} \longrightarrow \cdots$$

introduzida em 1.2.0.

Em virtude do isomorfismo $\pi_j \tilde{X} = \pi_j X$, $j \geq 2$, podemos reescrever essa sequência como

$$\cdots \longrightarrow \pi_{j+1} X \xrightarrow{h_{j+1}} H_{j+1} \tilde{X} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \Gamma_j X \xrightarrow{\lambda_j} \pi_j X \xrightarrow{h_j} H_j \tilde{X} \xrightarrow{\gamma_j} \Gamma_{j-1} X \longrightarrow \cdots$$

Se $j \leq n-1$, o teorema 6.1.0 nos garante que $H_j X \in C$ e, portanto, pelo corolário 5.3.5, temos, que $H_j \tilde{X} \in C$. Em vista disso, aplicando-se a proposição 3.2.10 à sequência exata acima conclui-se imediatamente que, para $j \leq n-2$, $\Gamma_j X \in C$.

Provaremos agora que $\Gamma_{n-1} X \in C$.

Os isomorfismos e igualdades abaixo

$$\text{coker } \gamma_n \xrightarrow{\sim} \Gamma_{n-1} X / \ker \lambda_{n-1} \xrightarrow{\sim} \ker \lambda_{n-1} \quad (1)$$

$$\ker \lambda_{n-1} = \text{Im } \gamma_n \xrightarrow{\sim} \text{coker } h_n \quad (2)$$

decorrem facilmente da exatidão da sequência

$$\pi_n X \xrightarrow{h_n} H_n X \xrightarrow{\gamma_n} \Gamma_{n-1} X \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \pi_{n-1} X$$

Além disso, $\text{Im } \lambda_{n-1}$ pertence a $\mathcal{C}$ por ser subgrupo do grupo $\pi_{n-1} X$ que, por hipótese, está em $\mathcal{C}$. Invocando (1) deduzimos que $\Gamma_{n-1} X / \ker \lambda_{n-1}$ pertence a $\mathcal{C}$. Como $\ker \lambda_{n-1}$ está em $\mathcal{C}$ (por (2), $\ker \lambda_{n-1} \xrightarrow{\sim} \text{coker } h_n$ e $\text{coker } h_n$ está em $\mathcal{C}$ pois, pelo item iii) do teorema 6.1.0, h_n é uma $\mathcal{C}$ -bijectão). Concluimos, utilizando a proposição 3.2.8 que $\Gamma_{n-1} X$ pertence a $\mathcal{C}$.

A prova de que $\Gamma_n X$ está em $\mathcal{C}$ utiliza os isomorfismos e igualdades abaixo

$$\Gamma_n X / \text{Im } \gamma_{n+1} \xrightarrow{\sim} \text{Im } \lambda_n = \ker h_n$$

$$\text{Im } \gamma_{n+1} \xrightarrow{\sim} \text{coker } h_{n+1}$$

(decorrentes da exatidão da sequência

$$\pi_{n+1} X \xrightarrow{h_{n+1}} H_{n+1} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \Gamma_n X \xrightarrow{\lambda_n} \pi_n X \xrightarrow{h_n} H_n X),$$

o fato de $\ker h_n$ e $\text{coker } h_{n+1}$ estarem em $\mathcal{C}$ (itens iii) e iv) do teorema 6.1.0) e a proposição 3.2.10.

Deixamos os detalhes aos cuidados do leitor. ■

BIBLIOGRAFIA

- [B] - Hans J. Baues, *Obstruction Theory*, Lectures notes in Mathematics, n° 628, Springer.
- [B,K] - A.K. Bousfield, D.M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localization*, Lectures notes in Mathematics, n° 304, Springer.
- [C,S] - H. Cartan, J.P. Serre, 'Espaces fibres et groupes d'homotopie, *I.C.R. Acad. Sci. Paris* 234, 1952, p. 288-290.
- [Ce] - E. Čech, Höherdimensional Homotopiegruppen, *Proc. Int. Congr. Mathematicians* 3, 203 (Zürich, 1932).
- [D] - E. Dror, A generalization of the Whitehead Theorem *Lecture Notes in Mathematics*, n° 249, Springer, p. 13-22.
- [H]₁ - P.J. Hilton, *An introduction to Homotopy Theory*, Cambridge University Press.
- [H]₂ - P.J. Hilton, Remarks on the localization of nilpotent groups, *Comm. Pure and App. Math.* (1974).

- [H]₃ - P.J.Hilton, Localization and cohomology of nilpotent groups, *Math. Z.* 132, p. 263-286.
- [H]₄ - P.J.Hilton, Nilpotent actions and nilpotent groups, *Proc. Logic and Math. Conference*, Springer, *Lecture notes 450*, (1975), 174-196.
- [H]₅ - P.J.Hilton, On G-spaces, *Bol. Soc. Bras. Mat.* 7, (1976), 65-73.
- [H,M,R] - P.J.Hilton, G.Mislin, J.Roitberg, Localization of nilpotent groups and spaces, *Notas de Matemática* (55) North-Holland/American Elsevier.
- [H,R]₁ - P.J.Hilton, J.Roitberg, Generalized C-theory and torsion phenomena in nilpotent spaces, *Houston Journal of Mathematics* 2 (1976), 525-559.
- [H,R]₂ - P.J.Hilton, J.Roitberg, On the Zeeman comparison theorem for the homology of quasi-nilpotent fibrations, *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 27, n° 108, (1977), 433-444.
- [H,W] - P.J.Hilton, S.Wylie, *Homology Theory*, Cambridge University Press, 1960.
- [Hu] - W.Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen, I, Höherdimensionale Homotopiegruppen, *Proc. Acad. von Wetenschappen*, Amsterdam, 38, 112-119 (1935); II, Homotopie und Homologiegruppen, 38, 521-528 (1935); III, Klassen und Homologiegruppen von Abbildungen, 39, 117-126

- (1936); IV, *Asphärische Räume*, 39, 215 - 224, (1936).
- [M] - W.S.Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harbrace College Mathematics Series, Harcourt, Brace & World, Inc.
- [M,T] - R.E.Mosher, M.C.Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory*, Harper & Row Publishers.
- [P] - H.Poincaré, *Analysis situs*, *Jour.École Polytech.*, (2) 1, 1 - 121 (1895).
- [R] - J.S.Rose *A course on group theory*, Cambridge University Press.
- [S]₁ - J.P.Serre, *Homologie Singulière des espaces fibrés*, *Annals of Math.* Vol. 54, n° 3, (1951) 425-505.
- [S]₂ - J.P.Serre, *Groupes d'Homotopie et classes de groupes Abéliens*, *Annals of Math.*, vol.58 n° 2, (1953), 258-294.
- [Sp] - Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill series in Higher Mathematics, 1966.
- [Su] - D.Sullivan, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, *Annals of Math.*, 100 (1974), 1-79.
- [W]₁ - J.H.C.Whitehead, *Combinatorial Homotopy theory*, I, II, *Bull.Am.Math.Soc.* 55 (1949), 213-245, 253-296
- [W]₂ - J.H.C.Whitehead, *A certain exact sequence*, *Ann. of Math.*, 52, (1950), 51-110.