O RESULTADO DE AX E KOCHEN
SOBRE UMA CONJECTURA DE ARTIN

STAVROS CHRISTODOULOU

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. ALFREDO ROSALIO JONES

SÃO PAULO, Setembro de 1978

P R E F Á C I O

Sabe-se que em alguns corpos, se um polinômio homogêneo sobre o corpo tiver um número de variáveis suficientemente grande em relação ao seu grau, então ele admitirá automaticamente uma raiz não trivial no corpo.

Usa-se a nomenclatura $C_i(d)$ para designar um corpo no qual todo polinômio homogêneo de grau d em $n > d^i$ variáveis admite uma raiz não trivial. E diz-se que K é C_i se for $C_i(d)$ para todo inteiro positivo d .

Chevalley demonstrou que todo corpo finito é C_1 (veja [Gr] cap.2). Juntando-se este resultado com o fato que se K é C_i , então $K((X))$ (o corpo das séries formais com coeficientes em K) é C_{i+1} , obtêm-se que os corpos $\mathbb{Z}_p((X))$ são C_2 para todo primo p (veja [Gr] teor.4.8 e corol.)

Artin conjecturou que os corpos dos números p -ádicos Q_p -que são os completados de Q com relação à valoração p -ádica (veja def. de valoração p -ádica na pag.8 e de Q_p pg. 45)- também seriam C_2 ; devido às semelhanças que estes corpos tem com os $\mathbb{Z}_p((X))$.

Sabe-se hoje que Q_p é $C_2(2)$ (Hasse) e $C_2(3)$ (Demyanov para $p \neq 3$ e Lewis para todo p) para todo p ; mas Terjanian apresentou um exemplo de um polinômio homogêneo de grau 4 em 18 variáveis que não admite raízes não triviais em Q_2 , mostrando assim que Q_2 não é $C_2(4)$. (reproduzimos este ex. na §0 do Cap.III). Posteriormente Schanuel mostrou que Q_p não é $C_2(p(p-1))$ para todo primo ímpar p . (veja o cap.7 de [Gr] para todos estes resultados).

Ax e Kochen [A.K I] mostraram que dado d o conjunto $I(d)$ de todos os primos p tais que Q_p não é $C_2(d)$ é finito (mostramos isto no corol.2 do teor.III 3.1). Este re-

sultado é um caso particular de um resultado mais geral: que se A é uma fórmula da linguagem de 1^a . ordem para corpos valorados, então o conjunto dos primos p tais que A vale em $\mathbb{Z}_p((X))$ e não vale em $\mathbb{Q}_p$ e o conjunto dos primos p tais que A vale em $\mathbb{Q}_p$ e não vale em $\mathbb{Z}_p((X))$ são ambos finitos (corol.1 do teor.III3.1). E este resultado é consequência do fato que os ultraproductos de $\mathbb{Q}_p$ e $\mathbb{Z}_p((X))$ por qualquer ultrafiltro não principal do conjunto dos primos são isomorfos (teor.III3.1). E este fato segue de um teorema de isomorfismo entre corpos valorados que eles também demonstraram (teor.II.2).

Neste trabalho apresentamos uma introdução aos corpos valorados (no 1º cap.; seguindo essencialmente [Rb] para as primeiras seções, e [Kp] e [Ko] para a 5a.); o teorema de Ax e Kochen (no 2º cap., seguindo [Ko]); e a aplicação à Conjectura de Artin (no 3º). Lá fazemos também uma breve introdução à teoria dos modelos, uma vez que esta é a forma mais natural de trabalhar com linguagens formais e ultraproductos.

Í N D I C E

CAPÍTULO I - <u>UMA INTRODUÇÃO AOS CORPOS VALORADOS</u>	1
§1 - Generalidades sobre corpos valorados	1
§2 - Comparação de valorações e construção de valora- ções mais finas	12
§3 - Extensão de valorações	24
§4 - Corpos valorados completos	35
§5 - Corpos valorados pseudocompletos	46
 CAPÍTULO II - <u>UM TEOREMA DE ISOMORFISMO ENTRE CORPOS VA-</u> <u>LORADOS</u>	 73
 CAPÍTULO III - <u>O RESULTADO DE AX E KOCHEN SOBRE UMA CON-</u> <u>JECTURA DE ARTIN</u>	 95
§0 - Um contraexemplo à conjectura de Artin	95
§1 - Uma introdução à teoria dos modelos	98
§2 - Ultraprodutos	118
§3 - O resultado de Ax e Kochen	129
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 146

CAPÍTULO I

UMA INTRODUÇÃO AOS CORPOS VALORADOS

§1. GENERALIDADES SOBRE CORPOS VALORADOS

Nesta seção começamos definindo o que é uma valoração de um corpo, para logo a seguir introduzir os conceitos de anel e de corpo das classes residuais de uma valoração, que são fundamentais no estudo de corpos valorados. Finalizamos introduzindo mais algumas definições gerais: a de seção transversal de um corpo valorado (cross-section em Inglês), e de isomorfismo entre dois corpos valorados; e apresentando alguns exemplos de corpos valorados.

DEFINIÇÃO I1.1 - Seja K um corpo. Uma aplicação v definida no conjunto K^* dos elementos não nulos de K e tomando valores num grupo aditivo ordenado Γ se diz uma *valoração* de K , se:

(i) v é um homomorfismo do grupo multiplicativo K^* no grupo aditivo Γ ; isto é se $a, b \in K^*$, então $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$.

(ii) se $a, b, a+b \in K^*$, então $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

O grupo (abeliano) ordenado $G = v(K^*)$ — que escreveremos $v(K)$ para simplificar a notação — se diz *grupo de valores* de K pela valoração v .

O par $\langle K, v \rangle$ — ou a tripla $\langle K, v, G \rangle$ conforme queiramos ou não realçar o grupo de valores G — se diz um *corpo valorado*.

Convencionando $v(0) = \infty$ e $x < \infty$, $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty$ para todo $x \in G$, extendemos v a todo K de modo que as expressões de (i) e (ii) passam a valer para todos os elementos de K .

Vamos reunir num lema algumas consequências imediatas da definição, que serão frequentemente usadas nas manipulações com valorações:

LEMA 11.1 - Seja v uma valoração. Então:

- (i) $v(1) = 0$, $v(a^{-1}) = -v(a)$ para todo $a \neq 0$.
- (ii) $v(-1) = 0$, $v(-a) = v(a)$ para todo $a \in K$.
- (iii) Se $v(a) \neq v(b)$, então $a + b \neq 0$ e $v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$ (e portanto $a+b = 0$ ou $v(a+b) > \min\{v(a), v(b)\}$ implica que $v(a) = v(b)$).
- (iv) $v(a_1 + \dots + a_n) \geq \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ e se existe i tal que $v(a_i) < v(a_j)$ para todo $j \neq i$, então $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ e $v(a_1 + \dots + a_n) = v(a_i) = \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$.
(e portanto $a_1 + \dots + a_n = 0$ ou $v(a_1 + \dots + a_n) > \min\{v(a_1), \dots, v(a_n)\}$ implica que existem $i \neq j$ tais que $v(a_i) = v(a_j)$).

OBSERVAÇÃO: Está sendo usado o 0 tanto para designar o elemento neutro do corpo K quanto o elemento neutro do grupo G, o que não deverá causar confusão.

DEMONSTRAÇÃO

As conclusões de (i) são consequências do fato de v ser um homomorfismo de grupos.

Quanto a (ii) tem-se: $0 = v(1) = v((-1) \cdot (-1)) = v(-1) + v(-1)$.

Se $v(-1) < 0$, então $v(-1) + v(-1) < 0 + 0 = 0$ e se $v(-1) > 0$, então $v(-1) + v(-1) > 0 + 0 = 0$, logo $v(-1) = 0$, do que segue também que $v(-a) = v((-1) \cdot a) = v(-1) + v(a) = 0 + v(a) = v(a)$.

(iii) Seja $v(a) \neq v(b)$. Então é imediato, pelo item (ii), que $a + b \neq 0$ (se não $a = -b$ e $v(a) = v(-b) = v(b)$).

Sem prejuízo para a generalidade, seja $v(a) < v(b)$. Então: $v(a) = v((a+b) + (-b)) \geq \min\{v(a+b), v(-b)\} = \min\{v(a+b), v(b)\} = v(a+b)$ (não se pode ter $\min\{v(a+b), v(b)\} = v(b)$ senão $v(a) \geq v(b)$ contra a suposição).

Por outro lado $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\} = v(a)$. Juntando as desigualdades segue que: $v(a) \geq v(a+b) \geq v(a)$ e portanto $v(a+b) = v(a) = \min\{v(a), v(b)\}$.

(iv) A primeira parte deste item demonstra-se, por indução finita, a partir da condição (ii) da definição de valoração.

A segunda aplicando o item (iii) deste Lema com $a = a_i$ e

$b = (a_1 + \dots + a_n) - a_i$ (e a primeira parte deste item para concluir que $v(b) = v(\sum_{j \neq i} a_j) \geq \min\{v(a_j) : j \neq i\} > v(a_i) = v(a)$).

PROPOSIÇÃO 11.1 - Seja $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado e sejam:

$$R_{\langle K, v \rangle} = \{a \in K : v(a) \geq 0\} \text{ e } I_{\langle K, v \rangle} = \{a \in K : v(a) > 0\}.$$

Então:

(i) $R_{\langle K, v \rangle}$ é um subanel unitário de K , cujo corpo de frações é K .

(ii) $I_{\langle K, v \rangle}$ é o único ideal maximal de $R_{\langle K, v \rangle}$

DEMONSTRAÇÃO

(i) Sejam $a, b \in R_{\langle K, v \rangle}$. Então:

$v(a \pm b) \geq \min\{v(a), v(b)\} \geq 0$ e $v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \geq 0 + 0 = 0$, logo $a \pm b, a \cdot b \in R_{\langle K, v \rangle}$, o que mostra que $R_{\langle K, v \rangle}$ é um subanel de K . Também, como $v(1) = 0$, segue que $1 \in R_{\langle K, v \rangle}$.

Seja agora $r \in K, r \notin R_{\langle K, v \rangle}$. Então $v(r) < 0$ e portanto $v(r^{-1}) = -v(r) > 0$, donde $r^{-1} \in R_{\langle K, v \rangle}$ e como $r = \frac{1}{r^{-1}}$ segue que resta no corpo de frações de $R_{\langle K, v \rangle}$.

(ii) Sejam $a, b \in I_{\langle K, v \rangle}$, então:

$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\} > 0$, e portanto $a \pm b \in I_{\langle K, v \rangle}$

Se $a \in R_{\langle K, v \rangle}$ e $b \in I_{\langle K, v \rangle}$, então

$v(a \cdot b) = v(a) + v(b) \geq 0 + v(b) > 0 + 0 = 0$, e portanto

$a \cdot b \in I_{\langle K, v \rangle}$. Logo $I_{\langle K, v \rangle}$ é um ideal de $R_{\langle K, v \rangle}$.

O fato que $I_{\langle K, v \rangle}$ é o único ideal maximal de $R_{\langle K, v \rangle}$ seguirá de (e é equivalente a):

$R_{<K,v>}^{-1} I_{<K,v>} = U(R_{<K,v>})$: o conjunto dos elementos inversíveis de $R_{<K,v>}$. Pois, uma vez que nenhum ideal próprio pode conter elementos inversíveis, todos os ideais próprios de $R_{<K,v>}$ estarão contidos em $R_{<K,v>}^{-1} U(R_{<K,v>}) = I_{<K,v>}$.

E de fato:

$$\begin{aligned} a \in U(R_{<K,v>}) &\iff a \in R_{<K,v>} \text{ e } a^{-1} \in R_{<K,v>} \iff v(a) \geq 0 \text{ e } v(a^{-1}) \geq 0 \\ &\iff v(a) \geq 0 \text{ e } v(a) = -v(a^{-1}) \geq 0 \iff v(a) = 0 \iff v(a) \geq 0 \\ \text{e não } v(a) > 0 &\iff a \in R_{<K,v>} \text{ e } a \in I_{<K,v>} \iff a \in R_{<K,v>}^{-1} I_{<K,v>} \end{aligned}$$

O anel $R_{<K,v>}$ é chamado *anel da valoração v*, o ideal $I_{<K,v>}$ é chamado *ideal da valoração v* e o corpo $R_{<K,v>} / I_{<K,v>} = \{a + I_{<K,v>} : a \in R_{<K,v>}\}$ (é corpo uma vez que $I_{<K,v>}$ é ideal maximal de $R_{<K,v>}$) é chamado *corpo das classes residuais da valoração v*, e será denotado por $\bar{K}_v$.

Observe que em $\bar{K}_v$ temos $a = b$ se e só se $a - b \in I_{<K,v>}$ e portanto se e só se $v(a - b) > 0$; e $a \neq b$ se e só se $a - b \in U(R_{<K,v>})$ e portanto se e só se $v(a - b) = 0$. Em particular $\bar{a} = \bar{0}$ se e só se $v(a) > 0$ e $a \neq 0$ se e só se $v(a) = 0$.

Vale também que se $\text{car } K = p \neq 0$, então $\text{car } \bar{K}_v = p$, pois: $p \cdot 1 = p(1 + I_{<K,v>}) = p \cdot 1 + I_{<K,v>} = 0 + I_{<K,v>} = \bar{0}$ em $\bar{K}_v$, donde $p \mid \text{car } \bar{K}_v$ e portanto $\text{car } \bar{K}_v = p$ (uma vez que $\bar{K}_v \neq \{0\}$). E que se $\text{car } \bar{K}_v = 0$, então $\text{car } K = 0$ (consequência lógica da anterior); mas, como veremos pelos exemplos, é possível que $\text{car } K = 0$ e

car $K_v = p \neq 0$. Neste caso é claro que $v(p) > 0$ e $v(n) = 0$ para todo inteiro $1 \leq n < p$; do que segue que se $p | n$, então $v(n) = 0$, pois: $n = q \cdot p + r$ com $0 < r < p$ e portanto $v(r) = 0$ enquanto que $v(pq) = v(p) + v(q) \geq v(p) + 0 > 0$, donde pelo Lema 11.1(iii) $v(n) = v(pq + r) = \min\{v(pq), v(r)\} = v(r) = 0$; e mais genericamente $v(n) = r \cdot v(p)$ se $n = p^r \cdot q$ com $p \nmid q$.

DEFINIÇÃO 11.2 - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado. Uma aplicação $\pi: G \longrightarrow K^*$ se diz uma *seção transversal* (ou *x-seção*) se π é um homomorfismo do grupo aditivo G no grupo multiplicativo K^* tal que $v \circ \pi: G \longrightarrow G$ é a identidade de G — isto é: $\pi(g_1 + g_2) = \pi(g_1) \cdot \pi(g_2)$ e $v(\pi(g)) = g$ para todos $g_1, g_2, g \in G$. Às vezes denotaremos por π^g o elemento $\pi(g)$, que é uma notação muito sugestiva para a igualdade: $\pi^{g_1 + g_2} = \pi^{g_1} \cdot \pi^{g_2}$.

DEFINIÇÃO 11.3 - Sejam $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G' \rangle$ dois corpos valorados, e sejam $\phi: K \longrightarrow K'$ um isomorfismo de corpos entre K e K' e $\mu: G \longrightarrow G'$ um isomorfismo de grupos ordenados (isto é um isomorfismo de grupos que também preserva a ordem) entre G e G' ; tais que $\mu \circ v = v' \circ \phi$ isto é: o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & K' \\ v \downarrow & & \downarrow v' \\ G & \xrightarrow{\mu} & G' \end{array} .$$

Nestas condições dizemos que a aplicação:

$\psi = \phi \coprod_{\mu}: K \coprod_G \rightarrow K' \coprod_{G'} \quad (\text{onde } \coprod \text{ indica reunião disjunta})$
 é um *isomorfismo de corpos valorados* entre $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G' \rangle$.

Esta é a definição geral que corresponde à definição de isomorfismo para estruturas similares (do mesmo tipo). Mas amiúde estaremos interessados mais nos isomorfismos entre os corpos K e K' , mesmo porque frequentemente teremos $G' = G$. Para esta situação definiremos:

Um isomorfismo (algébrico) $\phi: K \rightarrow K'$ se diz um *isomorfismo analítico* entre os corpos valorados $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G \rangle$ se $v = v' \circ \phi$, isto é o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & K' \\ v \searrow & & \swarrow v' \\ & G & \end{array}$$

Se os corpos $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G \rangle$ admitirem x -seções π e π' , então um isomorfismo analítico ϕ será dito um *isomorfismo x -analítico* se $\phi \circ \pi = \pi'$, isto é o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & K' \\ \pi \nearrow & & \nwarrow \pi' \\ & G & \end{array}$$

Vamos, para finalizar esta seção, ver alguns exemplos de corpos valorados.

1º $\langle Q, v_p, \mathbb{Z} \rangle$: Seja p um número inteiro primo. Dado $0 \neq \frac{a}{b} \in Q$ existe um único $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{a}{b} = p^r \frac{c}{d}$ com $p \nmid c, d$. Definindo $v_p(a/b) = r$ temos uma valoração do corpo dos racionais com grupo de valores $\mathbb{Z}$. Esta valoração chama-se valoração p -ádica dos racionais e demonstra-se que estas valorações (variando o primo p) são as únicas valorações de Q com grupo de valores $\mathbb{Z}$.

O anel $R_{\langle Q, v_p \rangle}$ é $\{ \frac{a}{b} \in Q : p \nmid b \}$ e seu ideal maximal $I_{\langle Q, v_p \rangle} = \{ \frac{a}{b} \in Q : p \mid a \}$. A aplicação: $\phi: R_{\langle Q, v_p \rangle} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ (onde $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é o corpo das classes de equivalência dos inteiros módulo p) definida por $\phi(a/b) = (a+p\mathbb{Z}) \cdot (b+p\mathbb{Z})^{-1}$ é um epimorfismo de anéis com núcleo igual a $I_{\langle Q, v_p \rangle}$. Logo $\overline{Q}_{v_p} = R_{\langle Q, v_p \rangle} / I_{\langle Q, v_p \rangle} = \mathbb{Z}_p$.

A aplicação $\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow Q$ definida por $\pi(n) = p^n$ é uma x -seção do corpo valorado $\langle Q, v_p, \mathbb{Z} \rangle$.

2º $\langle K(X), v_p, \mathbb{Z} \rangle$: Seja K um corpo, $K(X)$ seu corpo de frações racionais e $p \in K[X]$ um polinômio irreduzível sobre K . Dado $0 \neq \frac{f}{g} \in K(X)$ existe um único $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{f}{g} = p^r \cdot \frac{f'}{g'}$ com $p \nmid f' \cdot g'$. Definindo $v_p(f/g) = r$ temos uma valoração de $K(X)$ com grupo de valores $\mathbb{Z}$ que é trivial em K .

$R_{\langle K(X), v_p \rangle} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : p \mid g \right\}$ e $I_{\langle K(X), v_p \rangle} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : p \mid g, p \mid f \right\}$. Definindo $\phi: R_{\langle K(X), v_p \rangle} \rightarrow K[X]/p \cdot K[X] = \left\{ f + p \cdot K[X] : f \in K[X] \right\}$ por $\phi\left(\frac{f}{g}\right) = (f + p \cdot K[X]) \cdot (g + p \cdot K[X])^{-1}$, teremos um epimorfismo de anéis com núcleo $I_{\langle K(X), v_p \rangle}$. E portanto:

$\overline{K(X)}_{v_p} \simeq R_{\langle K(X), v_p \rangle} / I_{\langle K(X), v_p \rangle} \simeq K[X]/p \cdot K[X] \simeq K(\alpha)$ onde α é uma raiz qualquer de p (em alguma extensão de K).

A aplicação $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow K(X)$ definida por $\pi(n) = p^n$ é uma x -seção do corpo $\langle K(X), v_p, \mathbb{Z} \rangle$.

3º $\langle K(X), v_\infty, \mathbb{Z} \rangle$: Além das valorações dadas pelo exemplo anterior $K(X)$ admite (apenas) mais uma valoração com grupo de valores $\mathbb{Z}$ e trivial em K , definida por $v_\infty(f/g) = \text{gr}(g) - \text{gr}(f)$.

$R_{\langle K(X), v \rangle} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : \text{gr}f \leq \text{gr}g \right\}$, $I_{\langle K(X), v_\infty \rangle} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) : \text{gr}f < \text{gr}g \right\}$. A

aplicação $\phi: R_{\langle K(X), v_\infty \rangle} \rightarrow K$ definida por $\phi\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{a_m}{b_m}$

onde $m = \text{gr}g$, $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$ (e $a_m = 0$ se $\text{gr}f < m$) é um epi-

morfismo de anéis com núcleo $I_{\langle K(X), v_\infty \rangle}$. Logo $\overline{K(X)}_{v_\infty} \simeq K$.

A aplicação $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow K(X)$ definida por $\pi(n) = \left(\frac{1}{X}\right)^n$ é uma x -seção de $\langle K(X), v, \mathbb{Z} \rangle$.

4º $\langle K((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$: $K((X))$ é o corpo das séries formais com

coeficientes em $K = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i X^i : n \in \mathbb{Z}; a_i \in K \right\}$, e a valoração é defi-

nida por $\text{ord} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i X^i \right) = n = \min \{ i \in \mathbb{Z} : a_i \neq 0 \}$.

$$R_{\langle K((X)), \text{ord} \rangle} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i : a_i \in K \right\} = K[[X]]$$

$I_{\langle K((X)), \text{ord} \rangle} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i : a_i \in K \right\}$. A aplicação

$\phi: R_{\langle K((X)), \text{ord} \rangle} \rightarrow K$ definida por $\phi \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) = a_0$ é um epi-

morfismo de anéis com núcleo $I_{\langle K((X)), \text{ord} \rangle}$ de modo que:

$$\overline{K((X))}_{\text{ord}} \simeq K.$$

A aplicação $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow K((X))$ definida por $\pi(n) = X^n$ é uma x-seção de $\langle K((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$.

Observe que esta valoração é uma extensão da valoração v_X de $K(X)$ do 2º exemplo (com $p = X \in K[X]$), uma vez que se identifique $K(X)$ canonicamente como um subcorpo de $K((X))$.

5º $\langle K((X^G)), \text{ord}, G \rangle$: Este exemplo é uma generalização do anterior para o caso em que G é um grupo abeliano ordenado qualquer. $K((X^G))$ é o corpo das séries formais generalizadas com coeficientes em K e expoentes em G (conhecidas também como séries de potências generalizadas de Hahn):

$$K((X^G)) = \left\{ a = \sum_{\alpha \in G} a_{\alpha} X^{\alpha} : a_{\alpha} \in K \text{ e } \text{sup}(a) = \left\{ \alpha \in G : a_{\alpha} \neq 0 \right\} \text{ é um conjunto} \right\}$$

bem ordenado}.

A adição de duas tais séries se faz componente a componente e não oferece nenhum problema. A multiplicação também se faz

de forma usual: se $a = \sum_{\alpha \in G} a_{\alpha} X^{\alpha}$, $b = \sum_{\beta \in G} b_{\beta} X^{\beta} \in K((X^G))$, então de-

finimos $ab = \sum_{\gamma \in G} c_{\gamma} X^{\gamma}$ onde $c_{\gamma} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta}$. Só que agora temos

que verificar se esta definição realmente é possível (isto é se para cada $\gamma \in G$ existe um número finito de pares (α, β) com $\alpha \in \text{sup}(a)$, $\beta \in \text{sup}(b)$ tais que $\alpha+\beta=\gamma$, para que seja possível fazer $\left\{ c_{\gamma} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \right\}$ e se a série formal resultante de fa-

to pertence a $K((X^G))$ isto é se $\text{sup}(c) = \left\{ \gamma \in G : c_{\gamma} \neq 0 \right\}$ é bem ordenado:

Seja $\gamma \in G$; se existisse um número infinito de pares (α, β) com $\alpha \in \text{sup}(a)$, $\beta \in \text{sup}(b)$ tais que $\alpha+\beta=\gamma$, então poderíamos escolher uma sequência (α_n, β_n) entre estes pares tal que

$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ pois $\text{sup}(a)$ é bem ordenado. Como $\alpha_n + \beta_n = \gamma$, seguiria que $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n > \dots$ contra a boa ordem de $\text{sup}(b)$.

Para mostrar que $\text{sup}(c)$ é bem ordenado é suficiente mostrar que $S = \left\{ \alpha+\beta : \alpha \in \text{sup}(a), \beta \in \text{sup}(b) \right\}$ é bem ordenado, pois $\text{sup}(c) \subset S$.

De fato se S não fosse bem ordenado, existiria uma sequência $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ de S estritamente decrescente. Se existisse

um número infinito de índices n_k tais que $\alpha_{n_k} = \min\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, então a sequência β_{n_k} seria estritamente decrescente contra a boa ordem de $\text{sup}(b)$. Logo há um número finito de tais índices. Seja portanto $i_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k = \min\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}\}$. Seguindo o mesmo argumento podemos definir $i_{\ell+1} = \max\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k = \min\{\alpha_n : n > i_\ell\}\}$ e obter uma sequência infinita $i_0 < i_1 < \dots < i_\ell < \dots$ de índices tais que $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \dots < \alpha_{i_\ell} < \dots$ donde $\beta_{i_1} > \beta_{i_2} > \dots > \beta_{i_\ell} > \dots$ contra a boa ordem de $\text{sup}(b)$.

Com estas operações $K((X^G))$ é um corpo e definindo: $\text{ord} \left(\sum_{\alpha \in G} a_\alpha X^\alpha \right) = \min\{\alpha \in G : a_\alpha \neq 0\}$ temos que ord é uma valoração de $K((X^G))$ com grupo de valores G e corpo das classes residuais isomorfo a K .

§2. COMPARAÇÃO DE VALORAÇÕES E CONSTRUÇÃO DE VALORAÇÕES MAIS FINAS

Nesta seção definiremos uma ordem entre valorações a partir da relação de inclusão entre anéis de valoração e veremos como construir valorações cujo ideal seja um ideal primo dado do anel de alguma valoração. Isto se fará mostrando que existe uma correspondência bijetora entre os ideais primos do anel de uma valoração e os subgrupos convexos do grupo de valores daquela valoração, e associando então uma valoração

a um subgrupo convexo dado. Finalmente aplicaremos esta construção aos corpos finitamente ramificados preparando-nos para a situação que teremos no 2º Capítulo.

LEMA 12.1 - Sejam v e v' duas valorações de um corpo K . São equivalentes:

- (i) $R_{\langle K, v \rangle} \subset R_{\langle K, v' \rangle}$ (isto é se $v(a) \geq 0$, então $v'(a) \geq 0$)
- (ii) $I_{\langle K, v \rangle} \supset I_{\langle K, v' \rangle}$ (isto é se $v(a) > 0$, então $v'(a) > 0$)
- (iii) $U(R_{\langle K, v \rangle}) \subset U(R_{\langle K, v' \rangle})$ (isto é se $v(a) = 0$, então $v'(a) = 0$)

Demonstração

(i) $\Rightarrow$ (ii): Seja $a \in I_{\langle K, v' \rangle}$, isto é $v'(a) > 0$, então $v'(1/a) < 0$ e por (i) (contrapositiva de i) $v(1/a) < 0$, donde $v(a) > 0$, isto é $a \in I_{\langle K, v \rangle}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja $a \in U(R_{\langle K, v \rangle})$, isto é $v(a) = 0$ e $v(1/a) = 0$. Se $v'(a) \neq 0$, então $v'(a) > 0$ ou $v'(1/a) > 0$ e por (ii) $v(a) > 0$ ou $v(1/a) > 0$. Logo $v'(a) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seja $a \in R_{\langle K, v \rangle}$, isto é $v(a) \geq 0$. Se $v(a) = 0$, então por (iii) $v'(a) = 0$ e, portanto $a \in R_{\langle K, v' \rangle}$. Se $v(a) > 0$, então pelo Lema 11.1(iii) $v(1+a) = 0$ e por (iii) $v'(1+a) = 0$, donde $v'(a) = v'((1+a)-1) \geq \min v'(1+a), v'(1) = 0$ e portanto $a \in R_{\langle K, v' \rangle}$. Lo-

go em qualquer caso se $a \in R_{\langle K, v \rangle}$, então $a \in R_{\langle K, v' \rangle}$.

É imediato, a partir deste Lema, o seguinte:

COROLÁRIO - Sejam v e v' duas valorações de um corpo K . São equivalentes:

- (i) $R_{\langle K, v \rangle} = R_{\langle K, v' \rangle}$ (isto é $v(a) = 0$ se e só se $v'(a) = 0$)
- (ii) $I_{\langle K, v \rangle} = I_{\langle K, v' \rangle}$ (isto é $v(a) = 0$ se e só se $v'(a) = 0$)
- (iii) $U(R_{\langle K, v \rangle}) = U(R_{\langle K, v' \rangle})$ (isto é $v(a) = 0$ se e só se $v'(a) = 0$)

DEFINIÇÃO 12.1 - Sejam v e v' duas valorações de K .

(i) dizemos que v é mais fina que v' e denotamos isto por $v \leq v'$, quando $R_{\langle K, v \rangle} \supset R_{\langle K, v' \rangle}$.

(ii) dizemos que v e v' não são comparáveis se não ocorre $v \leq v'$ e nem $v' \leq v$.

(iii) dizemos que v e v' são equivalentes se $v \leq v'$ e $v' \leq v$ (isto é quando $R_{\langle K, v \rangle} = R_{\langle K, v' \rangle}$)

É claro que a relação $\leq$ é uma pre-ordem no conjunto das valorações (isto é, é reflexiva e transitiva); e a relação "ser equivalente" é de fato uma relação de equivalência. Identificando as valorações equivalentes a relação $\leq$ induzido no quociente passa a ser uma ordem.

E de fato duas valorações equivalentes são bastante parecidas, conforme pode se ver do seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 12.1 - Duas valorações v e v' são equivalentes se e só se existe um isomorfismo de grupos ordenados μ entre $v(K)$ e $v'(K)$, tal que $v' = \mu \circ v$ (isto é, comuta o diagrama

Demonstração

Se existe um tal isomorfismo μ então $v(a) \geq 0$ se e só se $v'(a) = \mu(v(a)) \geq \mu(0) = 0$ e portanto $R_{\langle K, v \rangle} = R_{\langle K, v' \rangle}$ o que mostra que v e v' são equivalentes.

Reciprocamente se v e v' são equivalentes e $v(a) = v(b)$, então $v(a/b) = v(a) - v(b) = 0$ e portanto, pelo item (iii) do Corolário, $v'(a/b) = 0$, donde $v'(a) = v'(b)$.

Isto permite que se defina uma aplicação $\mu: v(K) \rightarrow v'(K)$ que associa a $\alpha \in v(K)$, $v'(a) \in v'(K)$ onde $a \in K$ é um elemento qualquer tal que $\alpha = v(a)$.

Se $\alpha = v(a)$ e $\beta = v(b)$, então $\mu(\alpha) = v'(a)$, $\mu(\beta) = v'(b)$ e $v(ab) = v(a) + v(b) = \alpha + \beta$, donde $\mu(\alpha + \beta) = v'(ab) = v'(a) + v'(b) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$, que mostra que μ é homomorfismo de grupos.

Se $0 < \alpha = v(a)$, então pelo item (ii) do Corolário, $0 < v'(a) =$

$=\mu(\alpha)$, o que mostra que μ preserva ordem e é injetora.

Finalmente se $\alpha' \in v'(K)$, então existe $a \in K$ tal que $\alpha' = v'(a) = \mu(\alpha)$ onde $\alpha = v(a) \in v(K)$, o que mostra que μ é sobrejetora.

Se $I_{\langle K, v' \rangle} \subset I_{\langle K, v \rangle}$ (isto é $v' \leq v$), então $I_{\langle K, v' \rangle}$ é um ideal primo de $R_{\langle K, v \rangle}$. Estaremos interessados na situação contrária: dado um ideal primo P de $R_{\langle K, v \rangle}$, como construir (se possível) uma valoração v' tal que $P = I_{\langle K, v' \rangle}$. Para isto teremos que ver antes algumas definições em grupos ordenados.

DEFINIÇÃO 12.2 - Um subgrupo H de um grupo abeliano ordenado G é um *subgrupo convexo* (ou isolado) de G , se $g \in G, h \in H$ com $0 < g \leq h$ implicam $g \in H$.

LEMA 12.2 - Sejam H um subgrupo convexo de G e $g \in G$. São equivalentes:

- (i) $g > h$ para todo $h \in H$
- (ii) $0 < g$ e $g \notin H$
- (iii) $0 < g$ e $\overline{0} = 0 + H \neq g + H = \overline{g}$ em G/H .

Demonstração

- (i) $\Rightarrow$ (ii): é óbvio
- (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): pela definição de G/H
- (iii) $\Rightarrow$ (i): Se vale (ii) e $g \leq h$ para algum $h \in H$, então $0 < g \leq h$ e portanto g pertenceria a H por definição de subgrupo convexo. Logo $g > h$ para todo $h \in H$.

PROPOSIÇÃO 12.2 -

(i) Se H é um subgrupo convexo de G , então G/H é um grupo ordenado pela relação $\bar{g}_1 < \bar{g}_2 \iff \bar{g}_1 \neq \bar{g}_2$ e $g_1 < g_2$. A projeção canônica $\text{pr}_{G, G/H}: G \rightarrow G/H$ é um epimorfismo de grupos ordenados.

(ii) Reciprocamente, se $\mu: G \rightarrow M$ é um homomorfismo de grupos ordenados, então $H = \ker \mu$ é um subgrupo convexo de G e $G/H \cong \text{Im } \mu$ são isomorfos como grupos ordenados.

Demonstração -

(i) Precisamos inicialmente verificar que esta relação está bem definida; isto é se $\bar{g}'_1 = \bar{g}_1$ e $\bar{g}'_2 = \bar{g}_2$, então $g'_1 < g'_2$. De fato, sejam $\bar{g}'_1 = \bar{g}_1$ e $\bar{g}'_2 = \bar{g}_2$, então $g'_1 = g_1 + h_1$ e $g'_2 = g_2 + h_2$ com $h_1, h_2 \in H$ e $g'_2 - g'_1 = g_2 - g_1 + h_2 - h_1 = g_2 - g_1 + h$ com $h \in H$. Agora de $g_1 \neq g_2$ e $g_1 < g_2$ segue que $g_2 - g_1 \notin H$ e $0 < g_2 - g_1$ e pelo Lema anterior que $g_2 - g_1 > h$ para todo $h \in H$. Logo $g'_2 - g'_1 = g_2 - g_1 + h > 0$ (uma vez que $g_2 - g_1 > -h \in H$).

A verificação de que esta relação é de ordem total e compatível com a operação de G/H e de que preserva a ordem de G se faz agora de modo natural.

(ii) Sejam $g \in G$ e $h \in H = \ker \mu$ tais que $0 < g \leq h$. μ preserva a ordem, logo:

$0 = \mu(0) \leq \mu(g) \leq \mu(h) = 0$ e portanto $\mu(g) = 0$ e $g \in \ker \mu = H$. Isto mostra que o subgrupo H é convexo e portanto G/H é um grupo or-

denado e o isomorfismo de grupos entre G/N e $\text{Im } \mu$ (que a $\bar{g}$ associa $\mu(g) \in \text{Im } \mu$) também preserva a ordem, pois $\bar{g}_1 \leq \bar{g}_2 \Rightarrow g_1 \leq g_2 \Rightarrow \mu(g_1) \leq \mu(g_2)$.

LEMA 12.3 - Sejam $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado. H um subgrupo convexo de G e $\text{pr}_{G, G/H} : G \rightarrow G/H$ a projeção canônica. Então:

$v_H = \text{pr}_{G, G/H} \circ v$ é uma valoração de K com grupo de valores G/H , anel de valoração $R_{\langle K, v_H \rangle} = \left\{ a \in K : v(a) \in H \text{ ou } v(a) > h \text{ para todo } h \in H \right\} \supset R_{\langle K, v \rangle}$ (e portanto $v_H \leq v$), $I_{\langle K, v_H \rangle} = \{ a \in K : v(a) > h \text{ para todo } h \in H \} \subset I_{\langle K, v \rangle}$ e $U(R_{\langle K, v_H \rangle}) = \{ a \in K : v(a) \in H \} \supset U(R_{\langle K, v \rangle})$.

Demonstração -

Pela definição $v_H(a) = \text{pr}_{G, G/H}(v(a)) = v(a) + H = \overline{v(a)} \in G/H$. Como a projeção canônica $\text{pr}_{G, G/H} : G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo de grupos que preserva a ordem, tem-se:

$$\overline{v(a \cdot b)} = \overline{v(a) + v(b)} = \overline{v(a)} + \overline{v(b)} \text{ e}$$

$\overline{v(a+b)} \geq \min\{\overline{v(a)}, \overline{v(b)}\} = \min\{\overline{v(a)}, \overline{v(b)}\}$ e portanto v_H é uma valoração de K com grupo de valores G/H .

$$a \in R_{\langle K, v_H \rangle} \iff v_H(a) \geq 0_{G/H} \iff \overline{v(a)} \geq \bar{0} \iff \overline{v(a)} = \bar{0} \text{ ou } \overline{v(a)} > \bar{0}$$

$$\iff v(a) \in H \text{ ou } v(a) > h \text{ para todo } h \in H.$$

$$a \in I_{\langle K, v_H \rangle} \iff \overline{v(a)} > \bar{0} \iff v(a) > h \text{ para todo } h \in H$$

$$a \in U(R_{\langle K, v_H \rangle}) \iff \overline{v(a)} = \bar{0} \iff v(a) \in H$$

PROPOSIÇÃO 12.3 - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado e $P \subsetneq R_{\langle K, v \rangle}$ um ideal primo de $R_{\langle K, v \rangle}$. Então o conjunto $H = \{h \in G : |h| < v(a) \text{ para todo } a \in P\}$ é um subgrupo convexo de G e $P = I_{\langle K, v_H \rangle}$.

Demonstração -

Se $a \in P$ então $a \notin U(R_{\langle K, v \rangle})$ (senão $P = R_{\langle K, v \rangle}$) e portanto $v(a) > 0$. Logo $0 \in H$.

Sejam $h_1, h_2 \in H$. Se $h_1 - h_2 \notin H$, então $|h_1| + |h_2| \geq |h_1 - h_2| \geq v(a)$ para algum $a \in P$.

Sejam $a_1, a_2 \in K$ tais que $v(a_1) = |h_1|, v(a_2) = |h_2|$, então $v(a_1 \cdot a_2) = v(a_1) + v(a_2) = |h_1| + |h_2| \geq v(a)$ e portanto

$$v\left(\frac{a_1 \cdot a_2}{a}\right) = v(a_1) + v(a_2) - v(a) \geq 0, \text{ donde } \frac{a_1 \cdot a_2}{a} = r \in R_{\langle K, v \rangle}$$

e $a_1 \cdot a_2 = r \cdot a \in P$ uma vez que P é ideal.

De $v(a_1) = |h_1| \in H$ e $v(a_2) = |h_2| \in H$ segue que $a_1 \notin P$ e $a_2 \notin P$, o que contradiz o fato de ser P ideal primo de $R_{\langle K, v \rangle}$; pois $a_1, a_2 \in R_{\langle K, v \rangle}$ (uma vez que $v(a_1) = |h_1| \geq 0$ e $v(a_2) = |h_2| \geq 0$) $a_1 \cdot a_2 \in P$ mas $a_1 \notin P$ e $a_2 \notin P$.

Logo $h_1 - h_2 \in H$ e portanto H é subgrupo de G .

Seja $0 < g \leq h \in H$, então $|g| = g \leq h = |h| < v(a)$ para todo $a \in P$ e portanto $g \in H$, o que mostra que H é subgrupo convexo de G .

Se $a \in P$ e $h \in H$, então $v(a) > |h|$, logo $v(a)$ satisfaz: $v(a) > |h|$ para todo $h \in H$ e portanto $a \in I_{\langle K, v_H \rangle}$.

Reciprocamente se $a \in I_{\langle K, v_H \rangle}$, então $v(a) > |h|$ para todo $h \in H$ e

portanto $v(a) \geq v(b)$ para algum $b \in P$ (senão $|v(a)| = v(a) < v(b)$ para todo $b \in P$ e $v(a) \in H$), donde $v(\frac{a}{b}) \geq 0$ e $\frac{a}{b} = r \in R_{\langle K, v \rangle}$ e $a = r.b \in P$.
E portanto $P = I_{\langle K, v_H \rangle}$.

Vimos então que dado um ideal primo P de $R_{\langle K, v \rangle}$ existe uma valoração mais fina que v da qual P é o ideal. Pelo Corolário do Lema 11.2 e pela definição 11.2, todas as valorações que tem por ideal P são equivalentes entre si.

E portanto estabelecemos que existem correspondências bijetoras entre os ideais primos de $R_{\langle K, v \rangle}$, os subgrupos convexos de $G = v(K)$ e as classes de equivalência de valorações mais finas que v . Às vezes denota-se a valoração v_H por v_P onde P é o ideal que corresponde ao subgrupo H . (notação de [Rb]; veja Caps. C e F).

Podemos ainda prosseguir e definir uma valoração no corpo $\bar{K}_{v_H}$ das classes residuais de K pela valoração v_H . Isto se deve ao seguinte fato: Se $\bar{0} \neq \bar{a} = a + I_{\langle K, v_H \rangle} = b + I_{\langle K, v_H \rangle} = \bar{b} \in \bar{K}_{v_H}$, então $a \notin I_{\langle K, v_H \rangle}$ e $b - a \in I_{\langle K, v_H \rangle}$, donde $v(a) \in H$ e $v(b - a) > h$ para todo $h \in H$ e portanto $v(a) < v(b - a)$ e pelo Lema 11.1(iii) $v(b) = v(b - a + a) = \min\{v(b - a), v(a)\} = v(a) \in H$. O qual mostra que podemos definir uma aplicação v/H (ou v/P) em $\bar{K}_{v_H}^*$ tal que se $\bar{0} \neq \bar{a} = a + I_{\langle K, v_H \rangle} \in \bar{K}_{v_H}^*$, então $v/H(a + I_{\langle K, v_H \rangle}) = v(a) \in H$ (pois não depende do representante a). É fácil de ver agora que v/H é

uma valoração de $\bar{K}_{v_H}$ com grupo de valores H.

LEMA 12.4 - O corpo $\overline{\left(\bar{K}_{v_H}\right)_{v/H}}$ das classes residuais de $\bar{K}_{v_H}$ por v/H é isomorfo a $\bar{K}_v$.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos durante esta demonstração usar a notação $\bar{a}$ apenas para os elementos de $\bar{K}_{v_H}$ (isto é $a \in R_{\langle K, v_H \rangle}$ e $\bar{a} = a + I_{\langle K, v_H \rangle} \in \bar{K}_{v_H}$).

Para os outros dois, $\bar{K}_v$ e $\overline{\left(\bar{K}_{v_H}\right)_{v/H}}$, escreveremos "explicitamente": $a + I_{\langle K, v \rangle} \in \bar{K}_v$ onde $a \in R_{\langle K, v \rangle}$ e $\bar{a} + I_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle} \in \bar{K}_{v_H} v/H$

onde $\bar{a} \in R_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle}$

Sejam $\bar{a} + I_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle} = \bar{b} + I_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle} \in \overline{\left(\bar{K}_{v_H}\right)_{v/H}}$, então:

(i) $\bar{a} \in R_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle}$ e portanto $v/H(\bar{a}) \geq 0$; mas $v/H(\bar{a}) = v(a) \geq 0$ e portanto $a \in R_{\langle K, v \rangle}$. Analogamente $b \in R_{\langle K, v \rangle}$ e faz sentido $a + I_{\langle K, v \rangle}, b + I_{\langle K, v \rangle} \in \bar{K}_v$.

(ii) $\bar{b} - \bar{a} \in I_{\langle \bar{K}_{v_H}, v/H \rangle}$ e portanto $v/H(\bar{b} - \bar{a}) > 0$, mas $v/H(\bar{b} - \bar{a}) = v/H(\overline{b - a}) = v(b - a) > 0$ e portanto $b - a \in I_{\langle K, v \rangle}$ e $b + I_{\langle K, v \rangle} = a + I_{\langle K, v \rangle} \in \bar{K}_v$.

Isto mostrou que é possível definir-se uma aplicação de $\left[\overline{K}_{v_H} \right]_{v/H}$ em $\overline{K}_v$ que a $\bar{a} + I_{\langle \overline{K}_{v_H}, v/H \rangle}$ associa a $a + I_{\langle K, v \rangle}$. É uma questão retineira agora verificar que esta aplicação é um isomorfismo entre os dois corpos.

Costuma-se dizer que v é *composição* das valorações v_H e v/H .

Vamos agora ver esta construção aplicada à uma situação que ocorrerá no Cap. II:

DEFINIÇÃO 12.3 - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado. Definimos *índice de ramificação* (absoluto) de $\langle K, v, G \rangle$ como sendo $e = 0$ se $\text{car} \overline{K}_v = 0$ e como sendo $e =$ cardinalidade do conjunto dos $x \in G$ tais que $0 < x \leq v(p) = \# \{x \in G : 0 < x \leq v(p)\}$ se $\text{car} \overline{K}_v = p \neq 0$.

Observe que se $\text{car} K = p \neq 0$, então $v(p) = v(0) = \infty$ e $x < v(p)$ para todo $x \in G$, donde $\{x \in G : 0 < x \leq v(p)\}$ é infinito (pois não existe grupo ordenado, não trivial, finito). Logo se $\langle K, v, G \rangle$ é finitamente ramificado, então $\text{car} K = 0$. Se $e = 0$ ou $e = 1$, dizemos que $\langle K, v, G \rangle$ é *não ramificado*,

PROPOSIÇÃO 12.4 - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado com índice de ramificação $e > 0$ e finito. Então existe $\min\{x \in G : 0 < x\} = \gamma_1$, $v(p) = e \cdot \gamma_1$ $v(n) = r \cdot e \cdot \gamma_1$ onde $0 \neq n = p^r \cdot q$ com $p \nmid q$ e

$\{x \in G : 0 < x \leq v(n)\}$ é finito para todo $n \neq 0$ inteiro. O subgrupo $H = \mathbb{Z} \cdot \gamma_1$ de G , gerado por γ_1 , é um subgrupo convexo de G e $\text{car} \bar{K}_{V_H} = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

O conjunto: $\{x \in G : 0 < x \leq v(p)\}$ é finito e totalmente ordenado. Logo ele pode ser bem ordenado: $\{\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_e = v(p)\}$.

É óbvio então que γ_1 , o mínimo daquele conjunto, é o mínimo de $\{x \in G : 0 < x\}$; bem como que cada γ_{i+1} para $i=1, \dots, e-1$, que o mínimo de $\{x \in G : \gamma_i < x \leq v(p)\}$, é o mínimo de $\{x \in G : \gamma_i < x\}$.

Logo, como $\gamma_1 < \gamma_1 + \gamma_1$, tem-se $\gamma_2 = \min\{x \in G : \gamma_1 < x\} < \gamma_1 + \gamma_1$. Se $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_1 + \gamma_1$, então $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < \gamma_1$ contra a minimalidade de γ_1 . Logo $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_1 = 2\gamma_1$. Analogamente e por indução $\gamma_i = i\gamma_1$ para $i=1, \dots, e$. E portanto $v(p) = \gamma_e = e\gamma_1$.

Vamos agora mostrar que $\mathbb{Z}\gamma_1$ é um subgrupo convexo de G : Seja $g \in G$ tal que $0 < g < n \cdot \gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1$. Então $\{n \in \mathbb{N} : g < n \cdot \gamma_1\} \neq \emptyset$ e existe $m = \min\{n \in \mathbb{N} : g < n\gamma_1\}$. É claro que $m \geq 1$ e que $(m-1)\gamma_1 \leq g$. Logo $(m-1)\gamma_1 \leq g < m \cdot \gamma_1$ e $0 \leq g - (m-1)\gamma_1 < \gamma_1 - (m-1)\gamma_1 = \gamma_1$ e pela minimalidade de γ_1 , $0 = g - (m-1)\gamma_1$, ou $g = (m-1)\gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1$ o que mostra que $H = \mathbb{Z}\gamma_1$ é um subgrupo convexo de G .

Se n é um inteiro (não nulo), então $v(n) = r \cdot v(p)$ onde $n = p^r \cdot q$ com $p \nmid q$ e portanto $v(n) = r \cdot e \cdot \gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1$. Se $0 < x \leq v(n)$,

então $x \in \mathbb{Z}\gamma_1$ (pois $\mathbb{Z}\gamma_1$ é convexo) e $x = m\gamma_1$ com $0 < m \leq r.e.$
Logo $\{x \in G : 0 < x \leq v(n)\} = \{m\gamma_1 : 0 < m \leq r.e.\}$ tem $r.e$ elementos.

Finalmente, como $v(n) = r.e\gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1 = H$ (para $n \neq 0$ inteiro), segue pelo Lema 11.4 que $n \in U\left(R_{\langle K, v_H \rangle}\right)$ e portanto $\bar{0} \neq \bar{n} = n.\bar{1}$ em $\bar{K}_{v_H}$, o que mostra que $\text{car}\bar{K}_{v_H} = 0$.

§3 EXTENSÃO DE VALORAÇÕES

Seja $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado e F um corpo que estende K . Krull mostrou (veja [Rb], Cap.8, Teor.5) que é sempre possível estender v a uma valoração w de F .

Isto se faz extendendo $R_{\langle K, v \rangle}$ a um subanel de F que possa ser anel de alguma valoração de F (existem condições necessárias e suficientes para que um subanel de um corpo seja o anel de alguma valoração deste corpo, veja por exemplo [Rb], Cap.8, Teor.1) e determinando então a partir do anel uma valoração.

No caso em que F é uma extensão transcendente simples, por exemplo $K(X)$, temos uma grande liberdade de escolha para w , como se pode ver do seguinte resultado: seja Γ um grupo ordenado que contém $G = v(K)$ e $\gamma \in \Gamma$ (γ pode também ou não pertencer a G). Então w_γ definida por

$w_Y(f) = \min\{v(a_i) + iY : 0 \leq i \leq n\}$ onde $0 \neq f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ e $w_Y(f/g) = w_Y(f) - w_Y(g)$ para $f/g \in K(X)$ é uma valoração de $K(X)$ que estende v ([Rb], Cap.8, Prop.5).

Quando a extensão é algébrica não temos mais esta liberdade e logo adiante veremos (Prop. 13.1) certas restrições que uma valoração de F que estende v deve satisfazer num elemento algébrico sobre K .

Um caso de especial interesse é quando a valoração v do corpo valorado $\langle K, v \rangle$ admite um único prolongamento (a menos de equivalências) para cada extensão algébrica de K . Tais corpos são conhecidos como corpos henselianos (veja Rb, Cap.F, definição do corpo henseliano após Teor.2, e veja também o Corolário 2); e é notável de ver que esta propriedade do prolongamento único é equivalente a certos resultados sobre fatorabilidade de polinômios em $R_{\langle K, v \rangle}[X]$, que além de serem propriedades intrínsecas, são definíveis em linguagem de 1.^a ordem (veja o Cap.III para o conceito de linguagem de 1.^a ordem), como por exemplo o Lema de Hensel:

Sejam $f, g, h \in R_{\langle K, v \rangle}[X]$ tais que $\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$ em $\bar{K}v$, com g e h relativamente primos, $gr(\bar{g}) = gr(g) > 0$ e $gr(h) \leq gr(f) - gr(g)$. Então existem $g^*, h^* \in R_{\langle K, v \rangle}[X]$ tais que $f = g^* \cdot h^*$, $\bar{g}^* = \bar{g}$, $\bar{h}^* = \bar{h}$ e $gr(g^*) = gr(g)$. (Veja [Rb], Cap.F, Teor. 4).

PROPOSIÇÃO 13.1 - Seja $\langle F, w \rangle$ uma extensão de $\langle K, v \rangle$ e $0 \neq a \in F$ algébrico sobre K . Então existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $n.w(a) \in v(K)$.

DEMONSTRAÇÃO

a algébrico sobre K implica que existe $0 \neq f = \sum_{i=0}^r c_i X^i \in K[X]$ tal que $f(a) = \sum_{i=0}^r c_i a^i = 0$. Pelo Lema 11.1 (iv) existem $i \neq j$ tais que $w(c_i a^i) = w(c_j a^j)$, donde $w(c_i) + i.w(a) = w(c_j) + j.w(a)$ e portanto $(i-j)w(a) = w(c_j) - w(c_i)$.

Como $c_i, c_j \in K$ tem-se que $w(c_i) = v(c_i)$ e $w(c_j) = v(c_j)$ e portanto $w(c_j) - w(c_i) = v(c_j) - v(c_i) \in v(K)$ e como $i \neq j$, tem-se que $0 \neq n = i-j \in \mathbb{Z}$, ficando assim demonstrada a proposição.

Vamos agora, antes de apresentar algumas consequências desta - simples porém importante - proposição, introduzir algumas definições e notações.

Se K é um subcorpo de F denotaremos por $\tilde{K}_F$ o fecho algébrico de K em F , isto é o corpo de todos os elementos de F que são algébricos sobre K . Com esta notação K será algébricamente fechado em F se e só se $K = \tilde{K}_F$; e F será uma extensão algébrica de K se e só se $\tilde{K}_F = F$.

Indicaremos por $\tilde{K}$ o fecho algébrico de K , isto é um corpo algébricamente fechado que é uma extensão algébrica de K . Sa-

bemos da teoria dos corpos que não existe um único corpo com estas propriedades, mas que 2 tais corpos são sempre K -isomorfos; por isso identificaremos todos estes corpos entre si e falaremos no fecho algébrico $\tilde{K}$ de K .

Recordamos também da teoria dos grupos que um grupo G se diz *divisível* se dado $x \in G$ e $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ existe $y \in G$ tal que $n \cdot y = x$.

Dado um grupo abeliano ordenado G ; podemos construir um grupo abeliano ordenado e divisível $\tilde{G}$ contendo G , como sendo $\tilde{G} = \{ \frac{g}{n} : g \in G \text{ e } 0 \neq n \in \mathbb{Z} \}$ onde $\frac{g}{n}$ é a classe de equivalência de (g, n) pela relação $(g, n) \sim (g', n') \iff ng' = n'g$ e $\frac{g}{n} + \frac{g'}{n'} = \frac{ng' + ng''}{n \cdot n'}$, $\frac{g}{n} \leq \frac{g'}{n'} \iff n'g \leq ng'$. Este grupo satisfaz o seguinte: dado um homomorfismo $\mu: G \rightarrow \Delta$ de grupos ordenados onde Δ é divisível, existe um único homomorfismo $\tilde{\mu}: \tilde{G} \rightarrow \Delta$ tal que $\mu = \tilde{\mu} \circ i$ onde i é a inclusão de G em $\tilde{G}$; isto é o diagrama $G \xrightarrow{i} \tilde{G}$ é comutativo.

Se G' também satisfaz esta propriedade de $\tilde{G}$, então existe um único isomorfismo de grupos entre $\tilde{G}$ e G' que restrito a G é a identidade, por isso identificaremos estes grupos entre si e diremos que $\tilde{G}$ é o grupo divisível gerado por G .

De acordo com estas notações a proposição I3.1 nos diz que se w é uma valoração de $\tilde{K}$ que estende v , então $w(\tilde{K}) \subset \tilde{v(K)}$. Neste caso vale a igualdade $w(\tilde{K}) = \tilde{v(K)}$, pois, como é fácil

de ver, o grupo de valores de um corpo algebricamente fechado é sempre um grupo divisível.

Um subgrupo H de um grupo abeliano G se diz um *subgrupo puro* de G (ou que admite divisão em G) se $n.g \in H$ com $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$, implicam $g \in H$.

Indicaremos por $\tilde{H}_G$ o menor subgrupo puro de G que contém H . Neste caso (em que H já é um subgrupo de G), $\tilde{H}_G$ é dado por: $\tilde{H}_G = \{g \in G : n.g \in H \text{ para algum } 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ e a demonstração disto se faz simplesmente verificando que este conjunto é de fato um subgrupo puro de G que contém H e está contido em todos os subgrupos puros de G que contém H . (todas estas verificações são imediatas).

Com estas notações a proposição I3.1 afirma que se $\langle F, w \rangle$ é uma extensão de $\langle K, v \rangle$ então $w(\tilde{K}_F) \subset \tilde{v}(K)_{w(F)}$. Às vezes escreveremos $\tilde{v}(K)_{w(F)}$ ao invés de $\tilde{v}(K)_{w(F)}$ quando isto não causar confusões (como por exemplo quando não existir alguma valoração $\tilde{v}$). Neste caso não podemos garantir a igualdade entre $w(\tilde{K}_F)$ e $\tilde{v}(K)_{w(F)}$: por exemplo se $v(K) = \mathbb{Z}$, $F = K(X)$ e $w = w_\gamma$ com $\gamma = \frac{1}{2}$ do exemplo no início da seção, então $\tilde{K}_F = K$ e $w_\gamma(\tilde{K}_F) = \mathbb{Z}$ enquanto que $\tilde{v}(K)_{w_\gamma(F)} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z} = \{\frac{1}{2}n : n \in \mathbb{Z}\}$. Mais adiante daremos condições para a igualdade ser possível.

COROLÁRIO 1. - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado, F uma exten-

são algébrica de K e w_1 e w_2 duas extensões equivalentes de v . Então $w_1 = w_2$.

DEMONSTRAÇÃO

Pela proposição I2.1 existe um isomorfismo $\mu : w_1(F) \rightarrow w_2(F)$ tal que $w_2 = \mu w_1$. Como w_1 e w_2 estendem v tem-se também que $\mu|_G = \text{id}_G$ e como F é extensão algébrica de K segue da proposição I3.1 e dos comentários que $w_1(F)$ e $w_2(F)$ estão contidos em $\tilde{G}$. Seja então $\gamma = \frac{g}{n} \in w_1(F)$ com $g \in G$ e $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $n\gamma = g \in G$ e portanto $n \cdot \mu(\gamma) = \mu(n\gamma) = \mu(g) = g$, donde $\mu(\gamma) = \frac{g}{n} \in w_2(F)$ o que mostra que $w_1(F) = w_2(F)$ e $\mu = \text{id}_{w_1(F)}$ e portanto $\mu \circ w_1 = \text{id} \circ w_1 = w_1 = w_2$.

COROLÁRIO 2. - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado com x -seção π e E um subcorpo de K tal que $\pi|_{v(E)}$ é uma x -seção para o corpo valorado $\langle E, v|_E, v(E) \rangle$. Nestas condições $v(\tilde{E}_K) = \tilde{v}(E)_G$.

DEMONSTRAÇÃO

É claro que v é uma extensão de $v|_E$, logo pela proposição I3.1 $v(\tilde{E}_K) \subset \tilde{v}(E)_G$.

Quanto à outra inclusão observe inicialmente que $\pi|_{v(E)}$ é uma x -seção de $\langle E, v|_E, v(E) \rangle$ equivale apenas a dizer que $\pi(v(E)) \subset E$. Seja agora $g \in \tilde{v}(E)_G$. Então existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $ng \in v(E)$ e portanto $\pi^{ng} \in E$. Como $\pi^{ng} = (\pi^g)^n \in E$ segue que π^g é algébrico sobre E , isto é $\pi^g \in \tilde{E}_K$. Mas $v(\pi^g) = g$

e portanto $g \in v(\tilde{E}_K)$ o que mostra que $\tilde{v}(E)_G \subset v(\tilde{E}_K)$.

COROLÁRIO 3. - Seja $\langle F, w \rangle$ uma extensão de $\langle K, v \rangle$ tal que $v(K)$ é um subgrupo puro de $w(F)$ e seja $a \in F$ tal que $w(a) \notin v(K)$. Então a é transcendente sobre K e $w(f(a)) = \min\{v(c_i) + i.w(a) : 0 \leq i \leq n\}$ para todo $0 \neq f = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in K[X]$ e (portanto)

$w(K(a)) = \{\gamma + i.w(a) : \gamma \in v(K), i \in \mathbb{Z}\} = v(K) \oplus \mathbb{Z}w(a)$ é o subgrupo de $w(F)$ gerado por $v(K)$ e $w(a)$.

DEMONSTRAÇÃO

Se a fosse algébrico sobre K , então pela proposição I3.1 $w(a) \in w(\tilde{K}_F) \subset \tilde{v}(K)_{w(F)} = v(K)$ uma vez que $v(K)$ é puro em $w(F)$. Logo a é transcendente sobre K .

Sejam $\gamma_1 + i_1.w(a) = \gamma_2 + i_2.w(a)$ com $\gamma_1, \gamma_2 \in v(K)$ e $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$. Então $(i_1 - i_2).w(a) = \gamma_2 - \gamma_1 \in v(K)$ e se $i_1 \neq i_2$, então $w(a) \in \tilde{v}(K)_{w(F)} = v(K)$. Logo $i_1 = i_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$. Isto mostra que a soma $v(K) + \mathbb{Z}.w(a)$ é direta e que se $i \neq j$ e $c_i, c_j \in K$ não são nulos, então $v(c_i) + i.w(a) \neq v(c_j) + j.w(a)$, o que permite aplicar-se o Lema II.1 (iv) à $\sum_{i=0}^n c_i a^i$ para obter-se que $w(\sum_{i=0}^n c_i a^i) = \min\{v(c_i) + i.w(a) : 0 \leq i \leq n\}$ (pois uma vez que $w(c_i a^i) = v(c_i) + i.w(a) \neq v(c_j) + j.w(a) = w(c_j a^j)$, deve existir um índice i tal que $w(c_i a^i) < w(c_j a^j)$ para todo $j \neq i$).

E desta expressão segue imediatamente que:

$w(K(A)) = \{\gamma + i.w(a) : \gamma \in v(K), i \in \mathbb{Z}\} = v(K) \oplus \mathbb{Z}.w(a)$, e este é precisamente o subgrupo de $w(F)$ gerado por $v(K)$ e $w(a)$.

COROLÁRIO 4. - Sejam $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado, E um subcorpo de K tal que $\pi^{v(E)} \in E$ e $\beta \in G - v(E)$ tal que existe um inteiro primo p e $p.\beta \in v(E)$. Então $X^p - \pi^{p\beta} \in E[X]$ é o polinômio minimal de π^β sobre E , (donde) $E(\pi^\beta) = \{f(\pi^\beta) : f \in E[X], \text{grf} < p\}$.

Se $0 \neq f = \sum_{i=0}^r a_i X^i \in E[X]$ com $r < p$, então
 $v(f(\pi^\beta)) = v(\sum_{i=0}^r a_i \pi^{i\beta}) = \min\{v(a_i) + i.\beta : 0 \leq i \leq r\}$ e (portanto)
 $v(E(\pi^\beta)) = \{\gamma + i.\beta : \gamma \in v(E), 0 \leq i < p\}$ é o subgrupo de G gerado por $v(E)$ e β ; e $\pi^{v(E(\pi^\beta))} \in E(\pi^\beta)$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $X^p - \pi^{p\beta}$ não fosse o polinômio minimal de π^β sobre E , então existiria $0 \neq f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E[X]$ com $n < p$ e $f(\pi^\beta) = 0$ e em consequência do lema 11.1 (iv) existiriam $0 \leq i \neq j \leq n$ com $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$ e tais que $v(a_i \pi^{i\beta}) = v(a_j \pi^{j\beta})$, donde $(i-j).\beta = v(a_j) - v(a_i) \in v(E)$. Mas $i-j$ é primo com p (pois $0 < |i-j| \leq n < p$ e p é primo), logo existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $r(i-j) + s.p = 1$, donde $\beta = 1.\beta = r.(i-j)\beta + s.p.\beta \in v(E)$ contra a hipótese.

Pelo mesmo argumento, dado $0 \neq f = \sum_{i=0}^r a_i X^i \in E[X]$ com $r < p$, $v(a_i \pi^{i\beta}) \neq v(a_j \pi^{j\beta})$ sempre que $0 \leq i \neq j \leq r$ e a_i e a_j não são am-

bos nulos. E portanto, em consequência do lema 11.1 (iv),
$$v(f(\pi^\beta)) = v\left(\sum_{i=0}^r a_i \pi^{i\beta}\right) = \min\{v(a_i) + i\beta : 0 \leq i \leq r\}$$
 e disto seguem imediatamente as afirmações que restam deste Corolário.

COROLÁRIO 5. - Seja $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado e L um subcorpo de K contido em $R_{\langle K, v \rangle}$. Então v é trivial em toda extensão algébrica de L em K (isto é se $a \neq 0$, $v(a) = 0$).

DEMONSTRAÇÃO

Todo elemento não nulo de L está em $R_{\langle K, v \rangle}$ e admite um inverso em L que portanto também está em $R_{\langle K, v \rangle}$. Isto mostra que $L^* \subset U(R_{\langle K, v \rangle})$: o conjunto dos inversíveis de $R_{\langle K, v \rangle}$ e conforme se viu na demonstração da proposição 11.1 (ii) v é trivial em $U(R_{\langle K, v \rangle})$.

Se $0 \neq a \in K$ é algébrico sobre L , então pela proposição 13.1 existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $n.v(a) \in v(L) = \{0\}$, donde $n.v(a) = 0$ e portanto $v(a) = 0$.

O interesse em subcorpos de $R_{\langle K, v \rangle}$ se deve ao fato de que a projeção de L em $\bar{K}_v$ é um monomorfismo (uma vez que é um homomorfismo entre corpos e como $L \neq \{0\}$ o homomorfismo é claramente não trivial). E se esta projeção for sobre, então teremos um subcorpo de K isomorfo a $\bar{K}_v$ e teremos portan

to um conjunto de representantes para as classes de $\bar{K}_v$ num corpo. Nos exemplos 3,4,5 da seção 1. de fato $\bar{K}_v$ é isomorfo a um subcorpo de K .

É claro que para que L tenha alguma oportunidade de ser isomorfo a $\bar{K}_v$ ele deve ser pelo menos maximal em $R_{\langle K, v \rangle}$, isto é não devem existir subcorpos de K contidos em $R_{\langle K, v \rangle}$ e contendo propriamente L .

PROPOSIÇÃO I3.2 - Seja L um subcorpo maximal de $R_{K, v}$. Então:

- (i) L é algebricamente fechado em K
- (ii) $\bar{K}_v$ é uma extensão algébrica de $\bar{L}$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Pelo Corolário 5 da proposição I3.1 v é trivial em $\bar{L}_K$ e portanto $\bar{L}_K^* \subset U(R_{\langle K, v \rangle})$ (pois $U(R_{\langle K, v \rangle}) = \{a \in K : v(a) = 0\}$). Logo $L \subset \bar{L}_K \subset R_{\langle K, v \rangle}$ e pela maximalidade de L em $R_{\langle K, v \rangle}$ segue que $L = \bar{L}_K$.

(ii) Seja $\alpha \in \bar{K}_v$ e seja $a \in R_{\langle K, v \rangle}$ tal que $\alpha = \bar{a} = a + I_{\langle K, v \rangle}$. Se $a \in L$, então $\alpha \in \bar{L}$ e portanto α é algébrico sobre $\bar{L}$.

Se $a \notin L$, então $L \not\subset L(a)$ e devido à maximalidade de L em $R_{\langle K, v \rangle}$, $L(a)$ não está contido em $R_{\langle K, v \rangle}$.

Existem então $f, g \in L[X]$, $g \neq 0$ tais que $\frac{f(a)}{g(a)} \notin R_{\langle K, v \rangle}$, isto é $v(f(a)/g(a)) < 0$.

Daí segue que $v(g(a)) > v(f(a)) \geq 0$ ($v(f(a)) \geq 0$ pois $f(a) \in R_{\langle K, v \rangle}$) uma vez que $a \in R_{\langle K, v \rangle}$ e $f \in L[X] \subset R_{\langle K, v \rangle}[X]$ e portanto $g(a) \in I_{\langle K, v \rangle}$, donde:

$$\bar{0} = 0 + I_{\langle K, v \rangle} = g(a) + I_{\langle K, v \rangle} = \overline{g(a)} = \bar{g}(\bar{a}) = \bar{g}(\alpha).$$

$g \in L[X]$ é um polinômio não nulo e portanto $\bar{g} \in \bar{L}[X]$ também será um polinômio não nulo (pois se $0 \neq c \in L$, então $v(c) = 0$ e portanto $\bar{c} \neq \bar{0}$ em $\bar{K}_v$ de modo que se algum dos coeficientes de g é não nulo, então algum dos coeficientes de $\bar{g}$ também será não nulo). Foi então encontrado um polinômio $\bar{g} \in \bar{L}[X]$, $\bar{g} \neq 0$ com $\bar{g}(\alpha) = \bar{0}$ o que mostra que α é algébrico sobre $\bar{L}$.

TEOREMA 13.1 - Seja $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado que satisfaz o Lema de Hensel, $\text{car} \bar{K}_v = 0$ e L um subcorpo maximal de $R_{\langle K, v \rangle}$. Então $\bar{L} = \bar{K}_v$ e portanto L é isomorfo a $\bar{K}_v$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\alpha \in \bar{K}_v$, pela proposição anterior, α é algébrico sobre $\bar{L}$, seja então $\phi = \text{irr}(\bar{L}, \alpha) \in \bar{L}[X]$ o polinômio minimal de α em $\bar{L}[X]$. $\phi = \bar{f}$ para algum $f \in L[X]$ e em $\bar{K}_v[X]$ $\phi = (X - \alpha) \cdot \xi$, com $X - \alpha$ e ξ primos entre si, pois como $\text{car} \bar{K}_v = 0$ e ϕ é irredutível em $\bar{L}[X]$, ϕ não pode admitir raízes múltiplas, donde $\xi(\alpha) \neq \bar{0}$, $X - \alpha \nmid \xi$ e $\text{mdc}(X - \alpha, \xi) = 1$.

Pelo Lema de Hensel existem $g^*, h^* \in R_{\langle K, v \rangle}[X]$ tais que $\bar{g}^* = X - \alpha$ e $\text{gr}(g^*) = 1$. Donde $g^* = c_0 + c_1 X$ com $\bar{c}_1 = \bar{1}$, $\bar{c}_0 = -\alpha$.

Seja $a = -\frac{c_0}{c_1} \in K$ (é claro que $c_1 \neq 0$). Então a é uma raiz de g e a fortiori de f e portanto a é algébrico sobre L , donde $a \in L$ pela proposição 13.2 (i). Logo: $\alpha = -\bar{c}_0 = -\frac{\bar{c}_0}{\bar{c}_1} = \bar{a} \in \bar{L}$ o que mostra que $\bar{K}_v \subset \bar{L}$ e portanto $\bar{L} = \bar{K}_v$.

Observação: Se $\langle F, w \rangle$ é uma extensão de $\langle K, v \rangle$, então a aplicação que a $a + I_{\langle K, v \rangle} \in \bar{K}_v$ associa a $a + I_{\langle F, w \rangle} \in \bar{F}_w$ está bem definida (pois se $a + I_{\langle K, v \rangle} = b + I_{\langle K, v \rangle}$ em $\bar{K}_v$, então $v(a-b) > 0$, $w(a-b) > 0$ e $a + I_{\langle F, w \rangle} = b + I_{\langle F, w \rangle}$) e é um morfismo.

Identificaremos $\bar{K}_v$ com sua imagem em $\bar{F}_w$ de modo que podemos considerar $\bar{K}_v$ como um subcorpo de $\bar{F}_w$.

Devido a esta identificação quando for dito, por exemplo, que $\bar{K}_v = \bar{F}_w$ isto significará que dado $a \in R_{\langle F, w \rangle}$ existe $b \in R_{\langle K, v \rangle}$ tal que $w(b-a) > 0$. Na prática é suficiente encontrar $b \in K$ tal que $w(a-b) > 0$, pois então seguirá forçosamente que $b \in R_{\langle K, v \rangle}$.

§4 CORPOS VALORADOS COMPLETOS

Se o grupo de valores de um corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$ for um subgrupo - ou isomorfo a um subgrupo - de $\langle \mathbb{R}, +, 0, < \rangle$ (o grupo aditivo dos reais com a ordem usual)*, então a função $d: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $d(a, b) = e^{-v(a-b)}$ se $a \neq b$ e $d(a, a) = 0$,

(*) para isto é necessário e suficiente que G seja arquimedeano.

satisfaz: $d(a,b) \geq 0$ e $d(a,b)=0 \iff a=b$; $d(a,b) = d(b,a)$ e $d(a,b)+d(b,c) = e^{-v(a-b)} + e^{-v(b-c)} \geq e^{-\min\{v(a-b), v(b-c)\}} \geq e^{-v(a-c)} = d(a,c)$; e portanto é uma métrica de K .

Nesta métrica vale: $a_n \rightarrow a \iff v(a_n - a) \rightarrow \infty$ em $\mathbb{R}$, pois $d(a_n, a) < \varepsilon \iff v(a_n - a) > \ln(1/\varepsilon)$ e quando ε fica arbitrariamente pequeno $\ln(1/\varepsilon)$ torna-se arbitrariamente grande (e vice-versa). Também $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy $\iff v(a_m - a_n) \rightarrow \infty$ em $\mathbb{R}$ (quando $m, n \rightarrow \infty$).

Outra propriedade é: se $a_n \rightarrow a \neq 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(a_n) = v(a)$ para todo $n \geq n_0$, pois tomando-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(a_n - a) > v(a)$ ($\neq \infty$) para todo $n \geq n_0$, teremos (pelo Lema 11.1 (iii)) $v(a_n) = \min\{v(a_n - a), v(a)\} = v(a)$ para todo $n \geq n_0$. E um resultado análogo vale se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e $a_n \not\rightarrow 0$: neste caso existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(a_m) = v(a_n)$ para todos $m, n \geq n_0$, pois de $a_n \not\rightarrow 0$ segue que $v(a_n) \not\rightarrow \infty$ e portanto existe $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $v(a_n) \leq M$ e $n \geq k$. Por outro lado de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(a_m - a_n) > M$ para todos $m, n \geq n_0$. Escolhendo $n \geq n_0$ tal que $v(a_n) \leq M$ teremos (pelo Lema 11.1 (iii)) que $v(a_m) = \min\{v(a_m - a_n), v(a_n)\} = v(a_n)$ para todo $m \geq n_0$.

Se $\hat{K}$ é o completado de $\langle K, d \rangle$, então podemos definir $a+b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ e $a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ para elementos $a, b \in \hat{K}$,

onde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de K convergindo para a e b respectivamente. Com estas operações $\hat{K}$ torna-se um corpo. Podemos também definir $\hat{v}: \hat{K} \rightarrow G$ por $\hat{v}(a) = v(a_n)$, onde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de K que converge para a e n é suficientemente grande no sentido de $v(a_n) = v(a_m)$ para todo $m > n$. $\langle \hat{K}, \hat{v}, G \rangle$ será então um corpo valorado que estende $\langle K, v, G \rangle$ e cujo grupo de valores é o mesmo de $\langle K, v, G \rangle$ conforme se vê pela definição de $\hat{v}$. Ainda mais o corpo das classes residuais $\bar{\hat{K}}_{\hat{v}}$ de $\langle \hat{K}, \hat{v}, G \rangle$ é igual ao corpo das classes residuais $\bar{K}_v$ de $\langle K, v, G \rangle$; pois dado $a \in \hat{K}$, sabemos que existe alguma seqüência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de K convergindo para a e portanto $\hat{v}(a_n - a) \rightarrow \infty$, donde existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{v}(a_n - a) > 0$ o que, de acordo com a observação no fim da §3, caracteriza o fato de $\bar{\hat{K}}_{\hat{v}} = \bar{K}_v$.

Uma extensão de um corpo valorado que tem o mesmo grupo de valores e o mesmo corpo das classes residuais que o corpo se diz, de acordo com Krull, uma *extensão imediata* do corpo dado.

Nós vimos então que $\langle \hat{K}, \hat{v} \rangle$ o completado de $\langle K, v \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K, v \rangle$.

Ainda de acordo com Krull um corpo valorado se diz *maximalmente completo* se não possui extensões imediatas próprias. É claro então que um corpo valorado com grupo de valores arquimediano e maximalmente completo deverá ser completo (Cauchy-completo), uma vez que seu completado, sendo-lhe uma extensão imedia

ta, terá que coincidir com ele.

No caso em que o grupo de valores é $\mathbb{Z}$ vale a recíproca: isto é se o corpo é completo, então ele é maximalmente completo (veja o início da próxima seção). Mas o melhor modo de estudar extensões imediatas e corpos maximalmente completos é através do conceito de pseudolímite, introduzido por Ostrowski, para corpos com grupos de valores quaisquer, como veremos na próxima seção.

Para o resto desta seção restringiremos ainda mais o grupo de valores para o caso em que ele é discreto e portanto isomorfo a $\mathbb{Z}$.

PROPOSIÇÃO 14.1 - Seja $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ um corpo valorado completo e sejam $L \subset R_{\langle K, v \rangle}$ um conjunto completo de representantes para $\bar{K}_v$ com $0 \in L$ (isto é se $a \in R_{\langle K, v \rangle}$ existe um único $b \in L$ tal que $\bar{a} = \bar{b}$ em $\hat{K}_v$) e $p \in K$ um elemento tal que $v(p)=1$.

Então todo $a \in K^*$ pode ser escrito como $a = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i$, com $\ell \in \mathbb{Z}$, $c_i \in L$ e $c_\ell \neq 0$; e este ℓ e os c_i -s satisfazendo estas condições são únicos.

E (reciprocamente) dado $\ell \in \mathbb{Z}$ e $c_i \in L$ para $i \geq \ell$ a somatória $\sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i$ converge para algum elemento de K ; de modo que podemos escrever $K = \{ \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i : \ell \in \mathbb{Z}, c_i \in L \}$.

DEMOSTRAÇÃO

Seja $0 \neq a \in K$, então $v(a) = \ell \in \mathbb{Z}$ e $v(a/p^\ell) = v(a) - v(p^\ell) = \ell - \ell \cdot 1 = 0$.
Logo $a/p^\ell \in R_{<K, v>}$ e portanto existe $c_\ell \in L$ tal que $v(\frac{a}{p^\ell} - c_\ell) > 0$
ou $v(a - c_\ell p^\ell) > v(p^\ell) = \ell$ (é claro que $c_\ell \neq 0$, senão $v(\frac{a}{p^\ell} - c_\ell) = v(\frac{a}{p^\ell}) = 0$).

Supondo escolhidos $c_i \in L$ para i de ℓ até n , tais que
 $v(a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i) > n$, escolhe-se $c_{n+1} \in L$ do seguinte modo:

Se $v(a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i) > n+1$, então $c_{n+1} = 0 \in L$.

Se $v(a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i) = n+1$, então $v\left(\frac{a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i}{p^{n+1}}\right) = (n+1) - (n+1) = 0$ e

portanto $\frac{a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i}{p^{n+1}} \in R_{<K, v>}$ donde existe $c_{n+1} \in L$ tal que

$$v\left(\frac{a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i}{p^{n+1}} - c_{n+1}\right) > 0 \text{ ou } v\left(a - \sum_{i=\ell}^{n+1} c_i p^i\right) > v(p^{n+1}) = n+1.$$

Em qualquer caso foi escolhido $c_{n+1} \in L$ tal que

$$v\left(a - \sum_{i=\ell}^{n+1} c_i p^i\right) > n+1 \text{ de modo que a indução pode continuar.}$$

E a seqüência $s_n = \sum_{i=\ell}^n c_i p^i$ converge para a , pois $v(a - s_n) =$

$$= v\left(a - \sum_{i=\ell}^n c_i p^i\right) > n \rightarrow \infty. \text{ Logo } a = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i.$$

Se $a = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i = \sum_{i=\ell}^{\infty} c'_i p^i$ com $c_\ell \neq 0 \neq c'_\ell$, então de

$$v(a) = v\left(\sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i\right) = \ell \quad \text{e} \quad v(a) = v\left(\sum_{i=\ell}^{\infty} c'_i p^i\right) = \ell' \quad \text{segue} \quad \ell = \ell'.$$

$$\text{Logo} \quad \sum_{i=\ell+1}^{\infty} c_i p^i = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i - c_\ell p^\ell = \sum_{i=\ell}^{\infty} c'_i p^i - c_\ell p^\ell = (c'_\ell - c_\ell) p^\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\infty} c'_i p^i.$$

Se $c'_\ell \neq c_\ell$ então c'_ℓ e c_ℓ estão em classes distintas de K_v

(pois são elementos distintos de L) e portanto $c'_\ell - c_\ell \notin I_{<K,v>}$

ou $v(c'_\ell - c_\ell) = 0$, donde $v((c'_\ell - c_\ell) p^\ell + \sum_{i=\ell+1}^{\infty} c'_i p^i) = \ell \neq v(\sum_{i=\ell+1}^{\infty} c'_i p^i) \geq \ell+1$.

Logo $c'_\ell = c_\ell$.

Supondo demonstrado que $c_i = c'_i$ para $i = \ell, \dots, n$, se $c'_{n+1} \neq c_{n+1}$, então, pelo mesmo argumento anterior:

$$v\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} c'_i p^i - c_{n+1} p^{n+1}\right) = n+1 \neq v\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i p^i - c_{n+1} p^{n+1}\right) \geq n+2;$$

e portanto deve-se ter $c_{n+1} = c'_{n+1}$. O que mostra a unicidade de ℓ e dos c_i -S.

(Reciprocamente) dados $c_i \in L$ para $i \geq \ell$ a sequência $s_n = \sum_{i=\ell}^n c_i p^i$ é de Cauchy, pois se $m > n$, então

$$v(s_m - s_n) = v\left(\sum_{i=n+1}^m c_i p^i\right) = \min\{i : n+1 \leq i \leq m \text{ e } c_i \neq 0\} \geq n+1 \quad \text{ou}$$

$v(s_m - s_n) = \infty$ se $c_i = 0$ para todo $n+1 \leq i \leq m$. Em qualquer caso $v(s_m - s_n) > \min\{m, n\} \rightarrow \infty$ quando $m, n \rightarrow \infty$; e como $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ é completo ela admite um limite $a = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i p^i$.

TEOREMA 14.1 (Hensel) Se $K, v, \mathbb{Z}$ é completo, então ele satisfaz o Lema de Hensel.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $f, g, h \in R_{<K, v>}[X]$ tais que $\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$ em $\bar{K}_v$, $(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, $\text{gr}(\bar{g}) = \text{gr}(g) = r > 0$ e $\text{gr}(h) \leq \text{gr}(f) - \text{gr}(g) = s$.

Como $(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, então para cada $q = 0, 1, \dots, r+s (= \text{gr } f)$ existem $t_q, u_q \in R_{<K, v>}[X]$ tais que $\text{gr}(t_q) \leq s$, $\text{gr}(u_q) \leq r$ e $\bar{g} \bar{t}_q + \bar{h} \bar{u}_q = X^q$ (isto segue do Teorema de Bezout e do algoritmo da divisão euclideana válidos no anel $\bar{K}_v[X]$).

Vamos construir indutivamente uma sequência $g_n, h_n \in K[X]$:

$$g_0 = g, \quad h_0 = h$$

Construídos $g_n, h_n \in K[X]$ sejam:

$$g_{n+1} = g_n + \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} \cdot u_q, \quad h_{n+1} = h_n + \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} t_q, \quad \text{onde}$$

$$\sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} X^q = f - g_n h_n.$$

Com relação a esta sequência valem:

1. $f_n, g_n \in R_{<K, v>}[X]$, $\text{gr}(g_n) \leq r$, $\text{gr}(h_n) \leq s$, $\bar{g}_n = \bar{g}$, $\bar{h}_n = \bar{h}$
2. Se $f - g_n h_n \neq 0$, então $\gamma_n < \gamma_{n+1}$, onde $\gamma_n = \min\{v(p_{n,q}) : 0 \leq q \leq r+s\}$

Demonstração das afirmações:

1. para $n=0$ valem todas as afirmações pela escolha $g_0 = g$, $h_0 = h$.

Supondo $g_n, h_n \in R_{<K, v>}[X]$, então $f - g_n h_n = \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} X^q \in R_{<K, v>}[X]$

e portanto $p_{n,q} \in R_{<K, v>}$ donde $g_{n+1}, h_{n+1} \in R_{<K, v>}[X]$.

Supondo $gr(g_n) \leq r$, $gr(h_n) \leq s$ então

$$gr(g_{n+1}) \leq \max\{gr(g_n), gr(u_q) : 0 \leq q \leq r+s\} \leq r$$

$$gr(h_{n+1}) \leq \max\{gr(h_n), gr(t_q) : 0 \leq q \leq r+s\} \leq s$$

Supondo $\bar{g}_n = \bar{g}$ e $\bar{h}_n = \bar{h}$ então:

$$\sum_{q=0}^{r+s} \bar{p}_{n,q} X^q = \overline{f - g_n h_n} = \bar{f} - \bar{g}_n \bar{h}_n = \bar{f} - \bar{g} \bar{h} = 0, \text{ donde } \bar{p}_{n,q} = \bar{0} \text{ e}$$

$$\text{portanto } \bar{g}_{n+1} = \bar{g}_n + \sum_{q=0}^{r+s} \bar{p}_{n,q} \cdot \bar{u}_q = \bar{g}_n = \bar{g} \text{ e analogamente}$$

$$\bar{h}_{n+1} = \bar{h}_n = \bar{h}.$$

2. Seja $f - g_n h_n \neq 0$, então $\gamma_n = \min\{v(p_{n,q}) : 0 \leq q \leq r+s\} < \infty$

Seja $d_n \in K$ tal que $v(d_n) = \gamma_n$. Como $\bar{p}_{n,q} = \bar{0}$ segue que $v(p_{n,q}) > 0$ e portanto $\gamma_n > 0$ donde $d_n \in I_{<K, v>}$. Por outro lado como $v(p_{n,q}) \geq \min\{v(p_{n,q})\} = \gamma_n = v(d_n)$ segue que $v\left(\frac{p_{n,q}}{d_n}\right) \geq 0$ e portanto $p_{n,q}/d_n \in R_{<K, v>}$ ou $p_{n,q} \in d_n \cdot R_{<K, v>}$.

$$\text{Também } \overline{X^q - g_n t_q - h_n u_q} = X^q - \bar{g}_n \bar{t}_q - \bar{h}_n \bar{u}_q = X^q - \bar{g} \bar{t}_q - \bar{h} \bar{u}_q = 0,$$

donde $X^q - g_n t_q - h_n u_q \in I_{<K, v>}[X]$ e portanto existe $d \in I_{<K, v>}$

tal que $X^q - g_n t_q - h_n u_q \in d \cdot R_{<K, v>}[X]$.

Então:

$$f - g_{n+1} h_{n+1} = f - (g_n + \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} u_q) \cdot (h_n + \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} t_q) =$$

$$\begin{aligned}
 &= f - g_n h_n - g_n \cdot \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} t_q - h_n \cdot \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} u_q - \\
 &- \sum_{q=0}^{r+s} \sum_{q'=0}^{r+s} p_{n,q} p_{n,q'} u_q t_{q'}. \quad \text{Mas:} \\
 &f - g_n h_n - g_n \cdot \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} t_q - h_n \cdot \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} u_q = \\
 &= \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} (X^q - g_n t_q - h_n u_q) \in d_n \cdot d \cdot R_{\langle K, v \rangle}[X] \quad \text{e} \\
 &\sum_{q=0}^{r+s} \sum_{q'=0}^{r+s} p_{n,q} p_{n,q'} u_q t_{q'} \in d_n \cdot d_n \cdot R_{\langle K, v \rangle}[X]
 \end{aligned}$$

Seja $d_{n+1} \in K$ tal que $v(d_{n+1}) = \min\{v(d_n d), v(d_n d_n)\}$,
 então $f - g_{n+1} h_{n+1} \in d_{n+1} \cdot R_{\langle K, v \rangle}[X]$ (pois ambas as parcelas
 pertencerão a $d_{n+1} \cdot R_{\langle K, v \rangle}[X]$). Como $f - g_{n+1} h_{n+1} =$
 $\sum_{q=0}^{r+s} p_{n+1,q} X^q$, segue então que

$$\gamma_{n+1} = \min\{v(p_{n+1,q}) : 0 \leq q \leq r+s\} \geq v(d_{n+1}).$$

Mas $v(d_n d) = v(d_n) + v(d) > v(d_n) + 0 = \gamma_n$ (pois $d \in I_{\langle K, v \rangle}$)

e $v(d_n d_n) = v(d_n) + v(d_n) > v(d_n) + 0 = \gamma_n$ (pois $d_n \in I_{\langle K, v \rangle}$)

Logo $\gamma_{n+1} \geq v(d_{n+1}) = \min\{v(d_n d), v(d_n d_n)\} > \gamma_n$

(valem as desigualdades estritamente, pois $\gamma_n < \infty$).

Se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $f - g_{n_0} h_{n_0} = 0$, então g_{n_0}, h_{n_0}
 satisfazem: $f = g_{n_0} h_{n_0}$, $\overline{g_{n_0}} = \overline{g}$, $\overline{h_{n_0}} = \overline{h}$ e $\text{gr}(g_{n_0}) =$
 $\text{gr}(g) = r$ e estará assim satisfeito o Lema de Hensel.

Se não, a sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente

em $\mathbb{Z}$ e portanto $\gamma_n \rightarrow \infty$. Sejam:

$$g_n = \sum_{i=0}^r a_{n,i} X^i \quad \text{e} \quad h_n = \sum_{j=0}^s b_{n,j} X^j. \quad \text{Então:}$$

$$\sum_{i=0}^r (a_{n+1,i} - a_{n,i}) X^i = g_{n+1} - g_n = \sum_{q=0}^{r+s} p_{n,q} X^q \in d_n \cdot R_{\langle K, v \rangle}[X]$$

e portanto $v(a_{n+1,i} - a_{n,i}) \geq v(d_n) = \gamma_n$ para $i=0, \dots, r$

e analogamente $v(b_{n+1,j} - b_{n,j}) \geq \gamma_n$ para $j=0, \dots, s$.

Disto segue que se $m > n$, então:

$$v(a_{m,i} - a_{n,i}) \geq \min\{v(a_{m,i} - a_{m-1,i}), \dots, v(a_{n+1,i} - a_{n,i})\} \geq \gamma_n \rightarrow \infty$$

e portanto $\{a_{n,i}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy para $i=0, \dots, r$

analogamente $\{b_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy para $j=0, \dots, s$

Como $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ é completo, existem:

$$a_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,i} \quad \text{para } i=0, \dots, r \quad \text{e} \quad b_j^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,j} \quad \text{para } j=0, \dots, s$$

$$\text{Sejam } g^* = \sum_{i=0}^r a_i^* X^i \quad \text{e} \quad h^* = \sum_{j=0}^s b_j^* X^j, \quad \text{então } \overline{g^*} = \overline{g},$$

$$\overline{h^*} = \overline{h} \quad \text{e fazendo } \sum_{q=0}^{r+s} p_q^* X^q = f - g^* \cdot h^* \quad \text{tem-se que:}$$

dado $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n > M$, $v(a_i^* - a_{n,i}) > M$ para $i=0, \dots, r$ e $v(b_j^* - b_{n,j}) > M$ para $j=0, \dots, s$.

E portanto de:

$$\sum_{q=0}^{r+s} p_q^* X^q = f - g^* h^* = (f - g_n h_n) + (g_n - g^*) h_n + g^* (h_n - h^*),$$

segue que $v(p_q^*) > M$ para $q=0, \dots, r+s$.

Como isto vale para todo $M > 0$ segue que $v(p_q^*) = \infty$ para $q=0, \dots, r+s$ ou $p_q^* = 0$ para $q=0, \dots, r+s$ e portanto $f = g^* \cdot h^*$, donde segue em particular que $\text{gr}(g^*) = \text{gr}(g) = r$; terminando

assim a demonstração de que $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel.

O completado de $\langle Q, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ é denotado por $\langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ (observe que usa-se a mesma letra v_p para a valoração de Q_p). Pelo teorema I4.1 $\langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel e devido à proposição I4.1, Q_p pode ser escrito como:

$Q_p = \{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i p^i : \ell \in \mathbb{Z}, c_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \}$. Q_p é conhecido como o corpo dos números p -ádicos.

O completado de $\langle K(X), v_X, \mathbb{Z} \rangle$ do exemplo 2. da 1ª seção, com $p=X \in K[X]$ será pela proposição I4.1, usando $L=K$ e $p=X$: $K(X) = \{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i : \ell \in \mathbb{Z}, c_i \in K \}$ que é precisamente o corpo $K((X))$ das séries formais com coeficientes em K . A valoração $\hat{v}_X$ de $K(X)$ será também a valoração ord de $K((X))$ definida no exemplo 4. da 1ª seção. De modo que o completado de $\langle K(X), v_X, \mathbb{Z} \rangle$ é $\langle K((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$.

Em geral dado um corpo valorado $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$, se existir algum subcorpo L de K contido em $R_{\langle K, v \rangle}$ e tal que $L \simeq \bar{L} = \bar{K}_v$, então pela proposição I4.1, $\hat{K} = L((p))$ e portanto $\langle \hat{K}, \hat{v}, \mathbb{Z} \rangle$ é analiticamente isomorfo a $\langle \bar{K}_v((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ (observe que pelo corolário 4 da prop. I3.1, p é transcendente sobre L , pois $v(p) = 1 \neq 0$; de modo que $L((p)) \simeq \bar{K}_v((X))$ como corpos)

No capítulo II veremos que esta situação de fato ocorre se $\text{car}\bar{K}_v=0$ e $\langle K,v,\mathbb{Z} \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel. Logo podemos dizer (devido também ao teorema I4.1) que dado um corpo $\bar{K}$ de característica zero, existe um único (a menos de isomorfismos analíticos) corpo valorado completo $\langle K,v,\mathbb{Z} \rangle$ com $\bar{K}_v \simeq \bar{K}$ que é precisamente o corpo $\langle \bar{K}((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$.

Para o caso em que $\text{car}\bar{K}=p \neq 0$ valem os seguintes resultados:

Existe um único (a menos de isomorfismos analíticos) corpo valorado completo $\langle K,v,\mathbb{Z} \rangle$ tal que $\text{car}K=p$ e $\bar{K}_v \simeq \bar{K}$, que é precisamente $\langle \bar{K}((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ (veja [Sch], capVII, teor.12)

Existe um único (a menos de isomorfismos analíticos) corpo valorado completo $\langle K,v,\mathbb{Z} \rangle$ tal que $\text{car}K=0$, $v(p)=1$ e $\bar{K}_v \simeq \bar{K}$ (veja [Sch], cap VII, Lema 32 e teor.10 e corol.1) Se $\bar{K}$ é perfeito, então o corpo K será (isomorfo a) o corpo dos vetores de Witt de $\bar{K}$: $W(\bar{K})$ (para a construção deste corpo veja o capítulo 6 de [Grb]).

§5. CORPOS VALORADOS PSEUDOCOMPLETOS

Se $\langle F,w,G \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K,v,G \rangle$ e $a \in F$, então podemos encontrar alguma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de K tal que $w(a_n - a)$ é estritamente crescente em G (veja Prop.15.1).

Se G é $\mathbb{Z}$, então $w(a_n - a) \rightarrow \infty$ e isto, de acordo com o que vimos na seção anterior, equivale a $a_n \rightarrow a$. Disto segue também, a afirmação que fazíamos naquela seção, que se $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ é completo, então ele é maximalmente completo (pois sendo $\langle K, v, \mathbb{Z} \rangle$ completo de $a_n \rightarrow a$ segue que $a \in K$ e portanto que $F=K$).

No caso em que G é arquimediano, porém não discreto, de $w(a_n - a)$ estritamente crescente, não se pode mais concluir que $a_n \rightarrow a$; e Ostrowski encontrou exemplos de corpos completos que não eram maximalmente completos (veja os comentários iniciais da §4. de [Ko]).

Mas foi justamente esta propriedade ($w(a_n - a)$ estritamente crescente) que permitiu-lhe introduzir, para corpos com grupos de valores quaisquer, os conceitos de pseudolímite de uma sequência e de sequência pseudoconvergente (em analogia a sequência de Cauchy); de modo a obter a equivalência entre os conceitos de corpo pseudocompleto (o análogo a corpo completo) e corpo maximalmente completo, como veremos nesta seção.

DEFINIÇÃO 15.1 - Seja λ um ordinal limite e $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma sequência de elementos de um corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$:

(i) dizemos que um elemento $a \in K$ é um pseudolímite da sequência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ se, para algum ordinal $\lambda_0 < \lambda$,

$v(a - a_\rho) < v(a - a_\sigma)$ sempre que $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$.

Quando isto ocorrer diremos também que $v(a - a_\rho)$ é uma seqüência *eventualmente crescente*.

(ii) dizemos que a seqüência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é *pseudoconvergente* se, para algum ordinal $\lambda_0 < \lambda$, $v(a_\sigma - a_\rho) < v(a_\tau - a_\sigma)$ sempre que $\lambda_0 < \rho < \sigma < \tau < \lambda$.

Neste caso também, seguindo a convenção anterior, diremos que $v(a_\sigma - a_\rho)$ é *eventualmente crescente*.

DEFINIÇÃO 15.2

(i) Um corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$ se diz λ -*pseudocompleto*, onde λ é um ordinal limite, quando toda λ -seqüência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ pseudoconvergente de K admite pseudolímite em K .

(ii) Um corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$ se diz *pseudocompleto* se ele é λ -pseudocompleto para todo ordinal limite λ .

Vamos começar estabelecendo, através de alguns lemas, alguns fatos elementares -porém básicos- sobre esta nova espécie de convergência.

LEMA 15.1 - Seja $\langle K, v, G \rangle$ um corpo valorado e $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma seqüência de K .

(i) Se $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente, então $v(a_{\rho+1} - a_\rho) = v(a_\sigma - a_\rho)$ eventualmente para $\rho < \sigma$ (isto é: existe algum ordinal $\lambda_0 < \lambda$ tal que $v(a_{\rho+1} - a_\rho) = v(a_\sigma - a_\rho)$ sempre que

$\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$).

Denotaremos $v(a_{\rho+1} - a_\rho)$ por γ_ρ .

(ii) Se $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente e $a \in K$ é tal que $v(a - a_\rho) = \gamma_\rho$ event., então a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$.

(iii) Se $a \in K$ é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, então $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente e $v(a - a_\rho) = \gamma_\rho$ event.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Para $\lambda_0 < \rho < \rho+1 < \sigma < \lambda$ (onde λ_0 é o ordinal que aparece na definição de seqüência pseudoconvergente) temos:

$v(a_{\rho+1} - a_\rho) < v(a_\sigma - a_{\rho+1})$, o que permite aplicar-se o lema II.1

(iii) para $v(a_\sigma - a_\rho) = v((a_\sigma - a_{\rho+1}) - (a_{\rho+1} - a_\rho)) = v(a_{\rho+1} - a_\rho)$

(ii) A seqüência γ_ρ é eventualmente crescente, pois se $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$, então $\gamma_\rho = v(a_{\rho+1} - a_\rho) = v(a_\sigma - a_\rho) < v(a_{\sigma+1} - a_\sigma) = \gamma_\sigma$ eventualmente. Logo se $v(a - a_\rho) = \gamma_\rho$ event., então

$v(a - a_\rho) = \gamma_\rho < \gamma_\sigma = v(a - a_\sigma)$ event., o que mostra que a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$.

(iii) Reciprocamente se a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ então para $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$ tem-se $v(a - a_\rho) < v(a - a_\sigma)$ o que permite aplicar-se o lema II.1(iii) para obter-se:

$v(a_\sigma - a_\rho) = v((a_\sigma - a) + (a - a_\rho)) = v(a - a_\rho)$.

Analogamente para $\lambda_0 < \sigma < \tau < \lambda$ tem-se: $v(a_\tau - a_\sigma) = v(a - a_\sigma)$.

Juntando as expressões para $\lambda_0 < \rho < \sigma < \tau < \lambda$, tem-se:

$v(a_\sigma - a_\rho) = v(a - a_\rho) < v(a - a_\sigma) = v(a_\tau - a_\sigma)$, o que mostra que

$\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente e que $v(a-a_\rho) = v(a_\sigma - a_\rho) = \gamma_\rho \text{ ev.}$

LEMA 15.2 - Seja a um pseudolímite de uma sequência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$. Então b é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ se e só se $v(a-b) \geq \gamma_\rho \text{ event.}$

DEMONSTRAÇÃO

Se a e b são pseudolímites de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, então tem-se que: $v(a-a_\rho) = \gamma_\rho = v(b-a_\rho) \text{ event.,}$ donde:
 $v(a-b) \geq \min\{v(a-a_\rho), v(a_\rho-b)\} \geq \gamma_\rho \text{ event.},$
 de $v(a-b) \geq \gamma_\rho \text{ event.}$ segue que $v(a-b) \geq \gamma_{\rho+1} > \gamma_\rho \text{ event.}$

Reciprocamente, se $v(a-b) > \gamma_\rho \text{ event.}$ e a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, então $v(a-b) > \gamma_\rho = v(a-a_\rho) \text{ event.}$ e pelo lema 11.1(iii) tem-se $v(b-a_\rho) = v((b-a) + (a-a_\rho)) = v(a-a_\rho) = \gamma_\rho \text{ event.},$ o que mostra que b é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$.

LEMA 15.3 - Seja $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma sequência pseudoconvergente de um corpo valorado $\langle K, v \rangle$.

(i) São equivalentes:

1. zero é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$
2. $v(a_\rho) = \gamma_\rho \text{ event.}$
3. $v(a_\rho)$ é eventualmente crescente.

(ii) São equivalentes:

1. zero não é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$

2. $v(a_\rho) < \gamma_\rho$ event.
3. $v(a_\rho)$ é eventualmente constante.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Se $a_\rho \rightarrow 0$, então pelo lema I5.1(iii), $v(a_\rho) = v(0 - a_\rho) = \gamma_\rho$ event., donde segue também que $v(a_\rho)$ é eventualmente crescente. Finalmente se $v(a_\rho)$ é eventualmente crescente, então $v(0 - a_\rho) = v(a_\rho) < v(a_\sigma) = v(0 - a_\sigma)$ event. e portanto $a_\rho \rightarrow 0$. (Observação: faremos uso da notação $a_\rho \rightarrow a$ para pseudolimites sempre que isto não crie confusão como o limite comum descrito na seção anterior. Observe também que não podemos fazer uso da notação $a = \text{ps.lim } a_\rho$ pois o pseudolimite não é em geral único, como se pode ver pelo lema I5.2).

(ii) Seja $\lambda_0 < \lambda$ o ordinal que aparece na definição de sequência pseudoconvergente. Se $a_\rho \not\rightarrow 0$, então existem $\lambda_0 < \rho_0 < \sigma_0 < \lambda$ tais que: $v(0 - a_{\rho_0}) \geq v(0 - a_{\sigma_0})$. Dai segue que: para $\lambda_0 < \rho_0 < \sigma_0 < \tau < \lambda$ $\gamma_{\sigma_0} = v(a_\tau - a_{\sigma_0}) > v(a_\sigma - a_{\rho_0}) \geq \min\{v(a_{\sigma_0}), v(a_{\rho_0})\} = v(a_{\sigma_0})$ e portanto $v(a_\tau) = v((a_\tau - a_{\sigma_0}) + a_{\sigma_0}) = \min\{v(a_\tau - a_{\sigma_0}), v(a_{\sigma_0})\} = v(a_{\sigma_0})$. Com esta argumentação provou-se que: se $a_\rho \not\rightarrow 0$, então $v(a_\tau) = v(a_{\sigma_0}) < \gamma_{\sigma_0} < \gamma_\tau$ isto é que 1. $\Rightarrow$ 2.; e que 2. $\Rightarrow$ 3. uma vez que $v(a_\tau) = v(a_{\sigma_0})$ seguiu apenas de $v(a_{\sigma_0}) < \gamma_{\sigma_0}$ que é consequência de 2..

Finalmente 3. $\Rightarrow$ 1. pois se $v(a_\rho)$ é eventualmente constante, então pelo item (i) deste lema, zero não pode ser um

pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho \in \lambda}$.

Como, dada uma sequência $\{a_\rho\}_{\rho \in \lambda}$, ou $a_\rho \rightarrow 0$ ou $a_\rho \neq 0$, segue do lema que se $\{a_\rho\}_{\rho \in \lambda}$ é pseudoconvergente, então ou $v(a_\rho)$ é eventualmente crescente ou $v(a_\rho)$ é eventualmente constante.

Também juntando os lemas I5.2 e I5.3, segue facilmente que, se $a_\rho \rightarrow a$, então:

$a_\rho \rightarrow 0$ se e só se $v(a) > v(a_\rho) = \gamma_\rho$ event.

$a_\rho \neq 0$ se e só se $v(a) = v(a_\rho) < \gamma_\rho$ event.

Vamos agora demonstrar alguns dos fatos prometidos no início desta seção:

PROPOSIÇÃO I5.1 - Se $\langle F, w, G \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K, v, G \rangle$ e $a \in F - K$, então existe alguma sequência pseudoconvergente de K , da qual a é um pseudolímite e que não admite pseudolimites em K .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $S = \{w(a-z) : z \in K\}$. Como $a \notin K$, $a-z \neq 0$ para todo $z \in K$ e portanto $\infty = w(0) \notin S$.

Também S não admite máximo; pois se $\gamma = w(a-z) \in S$, então seja $b \in K$ tal que $v(b) = \gamma$ (existe um tal $b \in K$ pois $v(K) = w(F)$). $w((a-z)/b) = w(a-z) - w(b) = \gamma - v(b) = 0$ e portanto $(a-z)/b \in R_{\langle F, w \rangle}$.

Como $\bar{F}_w = \bar{K}_v$, existe $c \in R_{\langle K, v \rangle}$ tal que $w(\frac{a-z}{b} - c) > 0$ donde $w(a-z-bc) > w(b) = \gamma$ ou $\delta = w(a-z') > \gamma$, onde $z' = z+bc \in K$. E isto mostrou que dado $\gamma \in S$, existe $\delta \in S$, $\delta > \gamma$, confirmando que S não admite máximo.

A Teoria dos Conjuntos garante que dado um conjunto ordenado e não vazio S , existe algum subconjunto S' de S , bem ordenado (com a mesma ordem que S) e cofinal com S (isto é: se $s \in S$, existe $s' \in S'$ tal que $s < s'$). Para a demonstração deste fato é suficiente aplicar o Lema de Zorn à família dos subconjuntos bem ordenados de S .

Sendo S' bem ordenado, poderá ser escrito como:
 $S' = \{\gamma_\rho : \rho < \lambda\}$ onde λ será então o ordinal de S' , e $\{\gamma_\rho\}_{\rho < \lambda}$ será (estritamente) crescente.

No presente caso, como S não admite máximo, λ terá que ser um ordinal limite (senão $\gamma_{\lambda-1}$ seria o máximo de S' e concomitantemente de S).

Sejam $a_\rho \in K$ tais que $w(a-a_\rho) = \gamma_\rho$. Então a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma vez que $\{\gamma_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é crescente.

Se $b \in K$, então $w(a-b) \in S$ e como S' é cofinal com S , existe $\lambda_0 < \lambda$ tal que $w(a-b) < \gamma_{\lambda_0} < \gamma_\rho$ event. o que mostra, de acordo com o lema 15.2, que b não é pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$.

Esta proposição demonstra a metade da equivalência entre corpos pseudocompletos e maximalmente completos. Precisamente que todo corpo pseudocompleto é maximalmente completo, pois sendo pseudocompleto não possui seqüências pseudoconvergentes sem pseudolímite e portanto, devido à proposição, não pode admitir extensões imediatas próprias.

Também ve-se pela demonstração a necessidade do uso de seqüências de qualquer ordinal, uma vez que o ordinal λ é de terminado pelo fato que $\{\gamma_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é cofinal com S e este fato é fundamental para a construção de uma seqüência sem pseudolímite em K, e é isto por sua vez que garante o resultado enunciado no parágrafo acima. (é claro que pode-se construir uma seqüência enumerável com pseudolímite a - basta escolher uma subseqüência enumerável de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ - mas aí não se poderia garantir que ela não admitirá pseudolimites em K).

COROLÁRIO - Se $\langle F, w, G \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K, v, G \rangle$ G é enumerável e $a \in F - K$, então existe alguma seqüência de K enumerável $\{a_n\}_{n < \omega}$ e pseudoconvergente, da qual a é um pseudolímite e que não admite pseudolimites em K.

(observação: estamos indicando por ω o ordinal dos naturais)

DEMONSTRAÇÃO

Como G é enumerável, S será enumerável e S' também; de modo que o ordinal λ de S' será precisamente ω e portanto a seqüência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, construída para a demonstração da proposição é enumerável.

Para a outra metade da equivalência precisamos mostrar como, dada uma sequência pseudoconvergente $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ sem pseudolimite num corpo, construir uma extensão imediata deste corpo, onde a sequência tenha pseudolimites (observe que isto é suficiente para provar que todo corpo maximalmente completo é pseudocompleto).

Para isto, como se verá adiante, é importante estudar-se o comportamento de $\{f(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ quando f é um polinômio com coeficientes no corpo dado.

Recordemos que se $f \in K[X]$ é um polinômio de grau n , então existem $f_0, f_1, \dots, f_n \in K[X]$ tais que :

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= \sum_{i=0}^n f_i(X) Y^i \quad (\text{isto se vê desenvolvendo } f(X+Y) = \\ &= \sum_{i=0}^n c_i (X+Y)^i \text{ e agrupando por potências} \\ &\text{de } Y: \sum_{i=0}^n c_i (X+Y)^i = \sum_{i=0}^n f_i(X) Y^i). \end{aligned}$$

Derivando sucessivamente em relação a Y e "igualando" Y a zero, obtemos $i! f^{(i)}(X) = f^{(i)}(X)$. No caso em que $\text{car} K = 0$ podemos dividir por $i!$ para obter a familiar fórmula de

$$\text{Taylor: } f(X+Y) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(X)}{i!} Y^i ; \quad \text{mas em qualquer caso}$$

podemos obter as relações: $f_0(X) = f(X)$ e

$f_1(X) = f'(X)$ que serão as únicas de que precisaremos.

PROPOSIÇÃO 15.2 - Se $a_\rho \rightarrow a$ e f é um polinômio não constante, então $f(a_\rho) \rightarrow f(a)$.

DEMONSTRAÇÃO

Devido ao desenvolvimento de f descrito há pouco, pode-se escrever:

$$f(a_\rho) - f(a) = \sum_{i=1}^n f_i(a) \cdot (a_\rho - a)^i$$

(com $X+Y=a$ e $X=a$).

como f não é constante, $f_i(a) \neq 0$ para algum i e portanto $v(f_i(a)) < \infty$ para algum i .

Sejam $\delta_i = v(f_i(a))$ e $\gamma_\rho = v(a_\rho - a)$. γ_ρ é uma sequência eventualmente crescente, por isso fixados $i \neq j$ (com $f_i(a) \neq 0$ ou $f_j(a) \neq 0$; e isso sempre é possível) ter-se-a que:

ou $(j-i)\gamma_\rho < \delta_i - \delta_j$ event. ou $(j-i)\gamma_\rho > \delta_i - \delta_j$ event.

(uma vez que $j-i$ e $\delta_i - \delta_j$ estão fixados e só ρ varia).

Disto segue que: ou $\delta_j + j \cdot \gamma_\rho < \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ event. ou $\delta_j + j \cdot \gamma_\rho > \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ event. e portanto deve existir algum índice $1 \leq k \leq n$ tal que $\delta_k < \infty$ e $\delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ event. para todo $i \neq k$. Logo pelo lema 11.1(iv) :

$v(f(a_\rho) - f(a)) = \delta_k + k \cdot \gamma_\rho = v(f_k(a) \cdot (a_\rho - a)^k)$ event. e portanto $v(f(a_\rho) - f(a)) = \delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_k + k \cdot \gamma_\sigma = v(f(a_\sigma) - f(a))$ event. se $\rho < \sigma$. (observe que $k \neq 0$, pois $1 \leq k \leq n$, e daí segue a desigualdade $\delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_k + k \cdot \gamma_\sigma$, uma vez que a sequência γ_ρ é eventualmente crescente).

A desigualdade $v(f(a_\rho) - f(a)) < v(f(a_\sigma) - f(a))$ event. para $\rho < \sigma$ é precisamente a definição de $f(a_\rho) \rightarrow f(a)$.

PROPOSIÇÃO 15.3 - Se $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é uma seqüência pseudoconvergente de K e $f \in K[X]$ é um polinômio não constante, então $\{f(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ é uma seqüência pseudoconvergente.

DEMONSTRAÇÃO

Seja F uma extensão de K contendo todas as raízes dos f_i que aparecem no desenvolvimento de f , e $\langle F, w \rangle$ uma extensão de $\langle K, v \rangle$ que, conforme citado no início da seção 3, sempre existe.

Se $a_\rho \rightarrow a$ para algum $a \in F$, então, pela proposição anterior, $f(a_\rho) \rightarrow f(a)$ e portanto $\{f(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente.

Se não, então $a_\rho \neq a$ e $a_\rho - a \neq 0$ para todo $a \in F$ e portanto, pelo lema 15.3(ii), $w(a_\rho - a)$ é eventualmente constante.

Sejam $f_i = b_i \cdot \prod_{j=1}^{n_i} (X - r_j^i)$ para $i=1, \dots, n$, $r_j^i \in F$.

Como há um número finito de r_j^i , pode-se escolher o mesmo $\lambda_0 < \lambda$ tal que $w(a_\rho - r_j^i) = w(a_\sigma - r_j^i)$ para $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$ e para todos i, j .

Logo $v(f_i(a_\rho)) = w(b_i) + \sum_{j=1}^{n_i} w(a_\rho - r_j^i) = w(b_i) + \sum_{j=1}^{n_i} w(a_\sigma - r_j^i) = v(f_i(a_\sigma))$ para $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$. Sejam portanto $\delta_i = v(f_i(a_\rho))$ onde $\lambda < \rho$. Novamente algum $\delta_i \neq \infty$ pois f não é constante.

De $f(a_\sigma) - f(a_\rho) = \sum_{i=1}^n f_i(a_\rho) \cdot (a_\sigma - a_\rho)^i$ e de $v(f_i(a_\rho) \cdot (a_\sigma - a_\rho)^i) = \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ para $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$, segue com a mesma argumentação usada na demonstração da proposição anterior que existe $1 \leq k \leq n$ tal que $\delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ event. para $i \neq k$; e portanto $v(f(a_\sigma) - f(a_\rho)) = \delta_k + k \cdot \gamma_\rho$ event. para $\rho < \sigma$, donde $v(f(a_\sigma) - f(a_\rho)) = \delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_k + k \cdot \gamma_\sigma = v(f(a_\tau) - f(a_\sigma))$ event. se $\rho < \sigma < \tau$ o que mostra que $\{f(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente.

DEFINIÇÃO 15.3 - Uma sequência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ pseudoconvergente em K se diz:

- (i) *Algébrica* em K se existe algum $f \in K[X]$ tal que $f(a_\rho) \rightarrow 0$
- (ii) *Transcendente* em K se $f(a_\rho) \neq 0$ para todo $f \in K[X]$.

Juntando os resultados do lema 15.3 e da proposição 15.3 temos que: $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é algébrica em K se e só se existe algum $f \in K[x]$ tal que $v(f(a_\rho))$ é eventualmente crescente. E $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é transcendente em K se e só se $v(f(a_\rho))$ é eventualmente constante para todo $f \in K[X]$.

Quando $v(f(a_\rho))$ for eventualmente constante indicaremos por λ_f um ordinal tal que $v(f(a_\rho)) = v(f(a_\sigma))$ sempre que $\lambda_f < \rho < \sigma < \lambda$.

TEOREMA 15.1 - Seja $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma seqüência pseudoconvergente transcendente em K (e portanto não admite pseudolímite em K). Então:

- (i) $\langle K(X), w \rangle$, onde w é definida a partir de $w(f) = v(f(a_\rho))$ para $\lambda_f < \rho < \lambda$ e $w(f/g) = w(f) - w(g)$, é uma extensão imediata de $\langle K, v \rangle$ e $a_\rho \rightarrow X$ em $\langle K(X), w \rangle$.
- (ii) Se $\langle K(a), u \rangle$ é uma extensão de $\langle K, v \rangle$ e $a_\rho \rightarrow a$ em $\langle K(a), u \rangle$, então a é transcendente sobre K e a aplicação $\phi: K(X) \rightarrow K(a)$ definida por $\phi(f/g) = f(a)/g(a)$ é um isomorfismo analítico entre os corpos valorados $\langle K(X), w \rangle$ e $\langle K(a), u \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja $\rho > \lambda_f, \lambda_g, \lambda_{f.g}$, então $w(f.g) = v((f.g)(a_\rho)) = v(f(a_\rho).g(a_\rho)) = v(f(a_\rho)) + v(g(a_\rho)) = w(f) + w(g)$.

Seja $\rho > \lambda_f, \lambda_g, \lambda_{f+g}$, então $w(f+g) = v(f(a_\rho) + g(a_\rho)) \leq \min\{v(f(a_\rho)), v(g(a_\rho))\} = \min\{w(f), w(g)\}$. Logo w satisfaz as condições de uma valoração em $K[X]$ e a partir disso é fácil ver que é uma valoração de $K(X)$.

Se $f=c \neq 0$ é um polinômio constante, então $w(c) = w(f) = v(f(a_\rho)) = v(c)$ e portanto w estende v .

O grupo de valores $w(K(X))$ é o mesmo que $v(K)$ como se vê imediatamente da definição de w . Falta então verificar que $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v$ para se concluir que $\langle K(X), w \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K, v \rangle$.

Se $f \in K[X]$ é um polinômio não constante, então pelo lema I5.3(ii), aplicado à sequência $\{f(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$, tem-se que, para algum $\lambda_0 < \lambda$, $v(f(a_\rho)) < \gamma_\rho = v(f(a_\sigma) - f(a_\rho))$ sempre que $\lambda_0 < \rho < \sigma < \lambda$.

Tomando $\rho > \lambda_0, \lambda_f$ e $\sigma > \rho, \lambda_{f-f(a_\rho)}$ tem-se que $w(f) = v(f - f(a_\rho))$ e $w(f - f(a_\rho)) = v(f(a_\sigma) - f(a_\rho))$ e portanto $w(f) < w(f - f(a_\rho))$.

Se $f = c \neq 0$ é um polinômio constante, então também $w(f) = v(c) < \infty = v(c - c) = w(f - c)$.

De qualquer modo dado $0 \neq f \in K[X]$, existe $c_f \in K$ tal que $w(f) < w(f - c_f)$. Disto, e com um pouco de manipulação algébrica, demonstra-se que: $w(f/g) < w(f/g - c_f/c_g)$.

Logo dado $f/g \in R_{\langle K(X), w \rangle}$, existe $c = c_f/c_g \in K$ tal que $w(f/g - c) > w(f/g) \geq 0$, o que mostra que $\overline{K(X)}_w = \overline{K}_v$.

Finalmente $a_\rho \rightarrow X$, pois tomando $f = X - a_\rho$ para $\lambda_0 < \rho < \lambda$ (λ_0 o ordinal da definição de sequência pseudoconvergente) tem-se para $\sigma > \rho, \lambda_f$ que:

$$w(X - a_\rho) = w(f) = v(f(a_\sigma)) = v(a_\sigma - a_\rho) = \gamma_\rho.$$

(ii) Se a fosse algébrico sobre K , então para algum $0 \neq g \in K[X]$, $g(a) = 0$. De $a_\rho \rightarrow a$ seguiria, da proposição I5.2, que $g(a_\rho) \rightarrow g(a) = 0$; o que contradiz a definição de sequência transcendente.

Sendo a transcendente sobre K a aplicação $\phi : K(X) \rightarrow K(a)$

é um isomorfismo (algébrico) entre os dois corpos. Para que ϕ seja um isomorfismo analítico é suficiente então que mantenha as valorações, isto é: $w(f/g) = u(\phi(f/g))$. É claro também que é suficiente mostrar que $w(f) = u(\phi(f)) = u(f(a))$ para $f \in K[X]$.

De $a_\rho \rightarrow a$ segue que $f(a_\rho) \rightarrow f(a)$ e como $f(a_\rho) \neq 0$, então pelo comentário após o lema I5.3, segue que:

$u(f(a)) = u(f(a_\rho))$ event. e portanto:

$u(f(a)) = u(f(a_\rho)) = v(f(a_\rho)) = w(f)$. (observe que em particular $\langle K(a), u \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle K, v \rangle$).

TEOREMA I5.2 - Seja $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma seqüência pseudoconvergente algébrica em K .

(i) Seja $q \in K[X]$ um polinômio de grau mínimo tal que $q(a_\rho) \rightarrow 0$. Então q é irredutível em $K[X]$ e $\langle K[X]/q.K[X], w \rangle$, onde w é definida por $w(f+q.K[X]) = v(f(a_\rho))$ para $\lambda_f < \rho$ e $\text{gr}(f) < \text{gr}(q)$, é uma extensão imediata de $\langle K, v \rangle$ tal que $a_\rho \rightarrow X+q.K[X]$ em $\langle K[X]/q.K[X], w \rangle$.

(O polinômio q nestas condições se diz um polinômio *mínimal* de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$).

(ii) Se $\langle K(a), u \rangle$ é uma extensão de $\langle K, v \rangle$ e $a_\rho \rightarrow a$ em $\langle K(a), u \rangle$ e $q(a) = 0$, então $\phi : K[X]/q.K[X] \rightarrow K(a)$ definida por $\phi(f+q.K[X]) = f(a)$ é um isomorfismo analítico.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Se $q=f.g$ em $K[X]$ com $gr(f), gr(g) < gr(q)$, então $f(a_\rho) \neq 0$ e $g(a_\rho) \neq 0$, donde $v(f(a_\rho))$ e $v(g(a_\rho))$ são eventualmente constantes e portanto $v(q(a_\rho)) = v(f(a_\rho)) + v(g(a_\rho))$ também seria eventualmente constante, o que pelo lema 15.3 contradiz $q(a_\rho) \rightarrow 0$. Logo q é irredutível em $K[X]$.

$K[X]/q.K[X]$ é o quociente do anel $K[X]$ pelo seu ideal maximal gerado por q : $q.K[X]$. É portanto um corpo e sabe-se que os elementos de $K[X]/q.K[X]$ podem ser escritos de modo único como $f+q.K[X]$, onde $f=0$ ou $gr(f) < gr(q)$. Também se $gr(f) < gr(q)$, então $f(a_\rho) \neq 0$ e portanto $v(f(a_\rho))$ é eventualmente constante, o que mostra que w está bem definida.

Sejam $(f_1+q.K[X]).(f_2+q.K[X]) = f+q.K[X]$ com $gr(f_1), gr(f_2), gr(f) < gr(q)$. Então $f_1.f_2-f \in q.K[X]$ e portanto $f_1.f_2-f = p.q$ para algum $p \in K[X]$.

Se para $\rho > \lambda_{f_1}, \lambda_{f_2}, \lambda_f$ $v(f_1(a_\rho).f_2(a_\rho)) \neq v(f(a_\rho))$, então pelo lema 11.1(iii), $v(f_1(a_\rho).f_2(a_\rho) - f(a_\rho)) = \min\{v(f_1(a_\rho).f_2(a_\rho)), v(f(a_\rho))\}$ e portanto $v(f_1(a_\rho).f_2(a_\rho) - f(a_\rho))$ seria eventualmente constante. Mas $v(f_1(a_\rho).f_2(a_\rho) - f(a_\rho)) = v(p(a_\rho).q(a_\rho)) = v(p(a_\rho)) + v(q(a_\rho))$ que é eventualmente crescente, pois $v(q(a_\rho))$ é eventualmente crescente e $v(p(a_\rho))$ é event. crescente ou

event. constante. Logo deve-se ter $v(f_1(a_\rho) \cdot f_2(a_\rho)) = v(f(a_\rho))$ para $\rho > \lambda_{f_1}, \lambda_{f_2}, \lambda_f$ e portanto :

$$w(f_1 + q \cdot K[X]) + w(f_2 + q \cdot K[X]) = v(f_1(a_\rho) \cdot f_2(a_\rho)) = v(f(a_\rho)) = w(f + q \cdot K[X]) = w((f_1 + q \cdot K[X]) \cdot (f_2 + q \cdot K[X])).$$

A outra condição, $w((f_1 + q \cdot K[X]) + (f_2 + q \cdot K[X])) \geq \min\{w(f_1 + q \cdot K[X]), w(f_2 + q \cdot K[X])\}$, é imediata a partir de definição de w .

Os grupos de valores e os corpos das classes residuais coincidem; e a demonstração é análoga à do teorema anterior, pois aqui também vale que $w(f + q \cdot K[X]) < w((f + q \cdot K[X]) - f(a_\rho))$.

E da mesma forma $a_\rho \rightarrow X + q \cdot K[X]$ pois:

$$w((X + q \cdot K[X]) - a_\rho) = v(a_\sigma - a_\rho) = \gamma_\rho \text{ event.}$$

(ii) Como $q(a) = 0$ e q é irreduzível sobre K , a aplicação ϕ é um isomorfismo (algébrico) entre os corpos $K[X]/q \cdot K[X]$ e $K(a)$. É um isomorfismo analítico, pois $u(\phi(f + q \cdot K[X])) = u(f(a)) = u(f(a_\rho)) = v(f(a_\rho)) = w(f + q \cdot K[X])$ uma vez que aqui também $f(a_\rho) \rightarrow f(a)$ e $f(a_\rho) \neq 0$.

Finalmente, a proposição I5.1 e as partes (i) dos teoremas I5.1 e I5.2 demonstram o:

TEOREMA I5.3 - Um corpo valorado é maximalmente completo se e só se é pseudocompleto.

Kaplansky mostrou que se $\text{car} \bar{K}_v = 0$ ou se $\text{car} \bar{K}_v = p \neq 0$ e está satisfeita uma condição adicional que chamou de Hipótese A (que é: $p \cdot G = G$ e todo polinômio de forma $X^p^n + a X^{p^{n-1}} + \dots + a_{n-1} X^p + a_n X + a_{n+1} \in \bar{K}_v[X]$ admite raiz em $\bar{K}_v$), então as extensões imediatas maximais de $\langle K, v, G \rangle$ são analiticamente isomorfas. E apresentou contra-exemplos para o caso em que falhava a Hipótese A (veja [Kp]).

A chave desta demonstração está dada pelas partes (ii) dos teoremas I5.1 e I5.2; e a dificuldade consiste em que quando $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é algébrica, para se garantir o isomorfismo analítico entre uma extensão $\langle K(a), u \rangle$ de $\langle K, v \rangle$ onde a é um pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ e a extensão padrão $\langle K[X]/q, K[X], w \rangle$ é necessário que $q(a) = 0$. Kaplansky usou a Hipótese A para mostrar que dada uma seqüência pseudoconvergente algébrica de $\langle K, v \rangle$ e uma extensão $\langle F, w \rangle$ pseudocompleta de $\langle K, v \rangle$, então existe $a \in F$ pseudolímite da seqüência e tal que $q(a) = 0$ (onde q é um polinômio minimal da seqüência).

Ax e Kochen, para o seu teorema de isomorfismo (que apresentamos no 2º Capítulo), precisaram demonstrar o mesmo fato, porém a partir de uma outra condição que a princípio chamaram de Hipótese B ([AK, II]), que é precisamente a de corpo finitamente ramificado (Kochen em [Ko] introduz este nome); e é justamente este desenvolvimento que veremos agora, seguindo [Ko].

LEMA 15.4 - Sejam $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado finitamente ramificado, $\langle F, w \rangle$ uma extensão de $\langle K, v \rangle$, $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma sequência pseudoconvergente de K e $f \in K[X]$ um polinômio não constante, com f' também não constante e tal que $f'(a_\rho) \neq 0$. Se $a \in F$ é um pseudolimite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, então:

$$w(f(a_\rho) - f(a)) = w(f'(a)) + \gamma_\rho \text{ event.}$$

(onde $\gamma_\rho = v(a_{\rho+1} - a_\rho) = w(a - a_\rho)$ event.).

DEMONSTRAÇÃO

Pela demonstração da proposição 15.2, $w(f(a_\rho) - f(a)) = \delta_k + k \cdot \gamma_\rho$ event., onde $\delta_i = w(f_i(a))$ para $1 \leq i \leq r = \text{grf}$, $f_i(a)$ são os coeficientes do desenvolvimento de $f(a + X)$ (em particular $w(f'(a)) = w(f_1(a)) = \delta_1$) e $1 \leq k \leq r$ era tal que $\delta_k + k \cdot \gamma_\rho < \delta_i + i \cdot \gamma_\rho$ event. para todo $i \neq k$, $1 \leq i \leq r$.

O mesmo raciocínio pode-se aplicar para :

$f'(a_\rho) - f'(a) = \sum_{i=2}^r f_i(a) \cdot i \cdot (a_\rho - a)^{i-1}$, pois algum dos $f_i(a) \cdot i \neq 0$ (senão f' seria constantemente $f'(a)$); obtendo-se $w(f'(a_\rho) - f'(a)) = \delta_j + v(j) + (j-1) \cdot \gamma_\rho$ event., onde $\delta_j + v(j) + (j-1) \cdot \gamma_\rho < \delta_i + v(i) + (i-1) \cdot \gamma_\rho$ event. para todo $i \neq j$, $2 \leq i \leq r$.

Como $f'(a_\rho) \rightarrow f'(a)$ (prop. 15.2) e $f'(a_\rho) \neq 0$, segue do comentário após o lema 15.3, que $w(f'(a)) = w(f'(a_\rho))$ ev. Logo: $w(f'(a)) = \min\{w(f'(a)), w(f'(a_\rho))\} \leq w(f'(a_\rho) - f'(a)) = \delta_j + v(j) + (j-1) \gamma_\rho$ event. ou $\delta_1 \leq \delta_j + v(j) + (j-1) \gamma_\rho$ event.

e portanto $\delta_1 \leq \delta_i + v(i) + (i-1)\gamma_\rho$ event. para todo $2 \leq i \leq r$.

E como $\gamma_\rho < \gamma_{\rho+1}$ event., segue então que

$\delta_1 < \delta_i + v(i) + (i-1)\gamma_\rho$ event. para todo $2 \leq i \leq r$.

Se o índice de ramificação de $\langle K, v \rangle$ é zero, então $\text{car} \bar{K}_v = 0$ e portanto $v(i) = 0$ para todo inteiro $i \neq 0$; donde $\delta_1 < \delta_i + (i-1)\gamma_\rho$ event. para todo $2 \leq i \leq r$.

Senão, pela proposição I2.4, para cada inteiro $i \neq 0$ o conjunto: $\{g \in v(K) : 0 < g \leq v(i)\}$ é finito. Seja $n_i \geq 0$ o número de elementos daquele conjunto e seja $\lambda_0 < \lambda$ tal que $\gamma_\rho < \gamma_{\rho+1}$ para $\lambda_0 < \rho < \lambda$, então $\gamma_\rho < \gamma_{\rho+1} < \gamma_{\rho+2} < \dots < \gamma_{\rho+n_i}$ para $\lambda_0 < \rho < \lambda$ e portanto $0 < \gamma_{\rho+1} - \gamma_\rho < \gamma_{\rho+2} - \gamma_\rho < \dots < \gamma_{\rho+n_i} - \gamma_\rho$, isto é existem n_i elementos de $v(K)$ menores ou iguais a $\gamma_{\rho+n_i} - \gamma_\rho$. Logo $v(i) \leq \gamma_{\rho+n_i} - \gamma_\rho$ ou $v(i) + \gamma_\rho \leq \gamma_{\rho+n_i}$.

Se $2 \leq i \leq r$, então $i-2 \geq 0$ e portanto:

$$\begin{aligned} v(i) + (i-1)\gamma_\rho &= v(i) + \gamma_\rho + (i-2)\gamma_\rho \leq \gamma_{\rho+n_i} + (i-2)\gamma_{\rho+n_i} = \\ &= (i-1)\gamma_{\rho+n_i}. \end{aligned}$$

Escolhendo $n = \max\{n_2, \dots, n_r\}$ segue que:

$$v(i) + (i-1)\gamma_\rho \leq (i-1)\gamma_{\rho+n} \quad \text{para todo } 2 \leq i \leq r \text{ e } \lambda_0 < \rho < \lambda.$$

Seja $\lambda_1 < \lambda$ tal que $\delta_1 < \delta_i + v(i) + (i-1)\gamma_\rho$ para todo $2 \leq i \leq r$ e $\lambda_1 < \rho < \lambda$. Se $\lambda_2 = \max\{\lambda_0, \lambda_1\}$, então

$$\delta_1 < \delta_i + v(i) + (i-1)\gamma_\rho < \delta_i + (i-1)\gamma_{\rho+n} \quad \text{para todo } 2 \leq i \leq r \text{ e}$$

$\lambda_2 < \rho < \lambda$ e portanto $\delta_1 < \delta_i + (i-1)\gamma_\rho$ para todo $2 \leq i \leq r$ e $\lambda_2 + n < \rho < \lambda$, isto é $\delta_1 < \delta_i + (i-1)\gamma_\rho$ event.

Logo em qualquer caso ($e=0$ ou $0 < e < \infty$) $\delta_1 < \delta_i + (i-1)\gamma_\rho$ ev donde $\delta_1 + \gamma_\rho < \delta_i + i.\gamma_\rho$ event. para $2 \leq i \leq r$ e portanto $k=1$ na expressão $w(f(a_\rho) - f(a)) = \delta_k + k.\gamma_\rho$ event., ou seja: $w(f(a_\rho) - f(a)) = \delta_1 + 1.\gamma_\rho = w(f'(a)) + \gamma_\rho$ event.

PROPOSIÇÃO 15.4 - Sejam $\langle K, v \rangle$ um corpo valorado finitamente ramificado, $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ uma seqüência pseudoconvergente algébrica em K , com polinômio minimal $q \in K[X]$ e que não admite pseudolimites em K . Se $\langle F, w \rangle$ é uma extensão de $\langle K, v \rangle$ que satisfaz o Lema de Hensel e existe $a \in F$ pseudolimite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$, então existe $b \in F$ pseudolimite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ tal que $q(b) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

$\text{gr}(q) \geq 2$, pois se $\text{gr}(q) = 1$ ($\text{gr}(q) \neq 0$, pois q não é constante, senão $q(a_\rho) \neq 0$ e pelo mesmo motivo $q \neq 0$), então $q = c_0 + c_1 X$ com $c_1 \neq 0$ e de $q(a_\rho) \rightarrow 0$, seguiria que: $a_\rho \rightarrow -(c_0/c_1) \in K$.

Logo $\text{gr}(q') \geq 1$, pois $\text{car} K = 0$, uma vez que K é finitamente ramificado; e portanto q' não é constante. Também $q'(a_\rho) \neq 0$, senão q não seria um polinômio de grau mínimo tal que $q(a_\rho) \rightarrow 0$; e portanto $q'(a) \neq 0$, pois $q'(a_\rho) \rightarrow q'(a)$.

Se $q(a) = 0$, então $b = a$ e a proposição está demonstrada.

Se $q(a) \neq 0$, seja $f = \frac{1}{q(a)} q\left(a + \frac{q(a)}{q'(a)}X\right) \in F[X]$.

Pelo desenvolvimento de Taylor:

$$q\left(a + \frac{q(a)}{q'(a)}X\right) = \sum_{i=0}^r q_i(a) \frac{q(a)^i}{q'(a)^i} X^i = q_0(a) + q_1(a) \frac{q(a)}{q'(a)}X + \\ + \sum_{i=2}^r q_i(a) \frac{q(a)^i}{q'(a)^i} X^i,$$

e como $q_0(a) = q(a)$, $q_1(a) = q'(a)$:

$$q\left(a + \frac{q(a)}{q'(a)}X\right) = q(a) + q(a)X + \sum_{i=2}^r q_i(a) \frac{q(a)^i}{q'(a)^i} X^i \quad e$$

$$\text{portanto } f = 1 + X + \sum_{i=2}^r q_i(a) \frac{q(a)^{i-1}}{q'(a)^i} X^i = 1 + X + \sum_{i=2}^r c_i X^i$$

Como q e q' não são constantes e $q'(a_\rho) \neq 0$, pode-se aplicar o lema anterior para obter-se:

$$w(q(a_\rho) - q(a)) = \delta + \gamma_\rho = w(q'(a)) + \gamma_\rho \text{ event. (onde } \gamma_\rho = w(a - a_\rho))$$

e como $q(a_\rho) \rightarrow q(a)$ e $q(a_\rho) \rightarrow 0$, então pelos comentários após o lema 15.3, $w(q(a)) > w(q(a_\rho))$ event. e portanto, pelo lema 11.1(iii):

$$w(q(a)) > w(q(a_\rho)) = \min\{w(q(a_\rho)), w(q(a))\} = w(q(a_\rho) - q(a)) = \\ = \delta_1 + \gamma_\rho \text{ event.,} \quad \text{ou} \quad w(q(a)) > \delta_1 + \gamma_\rho \text{ event.}$$

Os coeficientes de f para $2 \leq i \leq r$ são: $c_i = q_i(a) \frac{q(a)^{i-1}}{q'(a)^i}$

$$\text{Logo } w(c_i) = w\left(q_i(a) \frac{q(a)^{i-1}}{q'(a)^i}\right) = \delta_i + (i-1)w(q(a)) - i \cdot \delta_1$$

e de $w(q(a)) > \delta_1 + \gamma_\rho$ event. segue:

$$\begin{aligned} w(c_i) &> \delta_i + (i-1)(\delta_1 + \gamma_\rho) - i\delta_1 = \delta_i + i\gamma_\rho - \delta_1 - \gamma_\rho = \\ &= (\delta_i + i\gamma_\rho) - (\delta_1 + \gamma_\rho) > 0, \end{aligned}$$

o que mostra que $c_i \in I_{<F,w>}$ e portanto $f \in R_{<F,w>}[X]$ e

$$\bar{f} = \bar{1} + X \in \bar{F}_w[X] \quad (\text{pois } \bar{c} = \bar{0} \text{ em } \bar{F}_w \text{ para } 2 \leq i \leq r).$$

$$\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h} \quad \text{com } g = 1 + X, h = 1 \in R_{<F,w>}[X] \text{ e } (\bar{g}, \bar{h}) = 1.$$

Logo pelo Lema de hensel $f = g^* \cdot h^*$ com $\text{gr}(g^*) = 1$ e

$$\bar{g}^* = \bar{1} + X, \text{ isto é: } g^* = a_0 + a_1 X \in R_{<F,w>}[X] \text{ com}$$

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \bar{1} \quad (\text{e portanto } w(a_0) = w(a_1) = 0).$$

$$\text{Sejam } c = - (a_0/a_1) \quad \text{e} \quad b = a + \frac{q(a)}{q'(a)} c. \quad \text{Então:}$$

$$g^*(c) = 0 \quad \text{e portanto } f(c) = 0, \quad \text{donde } q(b) = 0.$$

$$w(b-a) = w\left(\frac{q(a)}{q'(a)} c\right) = w(q(a)) - \delta_1 + w(c) > \gamma_\rho \text{ event.}$$

$$(\text{pois } w(c) = w(a_0) - w(a_1) = 0 - 0 = 0)$$

e portanto, pelo lema I5.2, b é pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$.

Todo corpo pseudocompleto (ou equivalentemente maximal - mente completo) satisfaz o Lema de Hensel. A demonstração disto pode ser feita de forma similar à da demonstração do teorema I4.1 (de que todo corpo completo satisfaz o Lema de Hensel) que extraímos do livro de Koppermann, onde ele na realidade demonstra que todo corpo pseudocompleto satisfaz o Lema de Hensel, usando a mais, argumentos de indução transfini

nita para ordinais quaisquer. (veja [Kop] teor.4.1.13 e exer. 4.1.9).

Uma outra demonstração pode ser vista em [Rb]: a de que todo corpo maximalmente completo é completo por etapas (cor.1 do teor.3 do cap.D) e que todo corpo completo por etapas satisfaz o Lema de Hensel (teor.4, cap.F). A definição de corpo completo por etapas (que não foi vista neste trabalho) e estes resultados, devem-se também ao Krull.

Com este resultado, podemos aplicar a proposição I5.4, para obter o

TEOREMA I5.4 - Se $\langle K, v \rangle$ é um corpo finitamente ramificado e $\langle F, w \rangle$ e $\langle F', w' \rangle$ são duas extensões imediatas maximais de $\langle K, v \rangle$, então existe um K -isomorfismo analítico entre $\langle F, w \rangle$ e $\langle F', w' \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todos os K -isomorfismos analíticos entre subcorpos de $\langle F, w \rangle$ e $\langle F', w' \rangle$

$\mathcal{D} \neq \emptyset$, pois a aplicação idêntica de K pertence a $\mathcal{D}$; e dada uma cadeia de $\mathcal{D}$ a reunião dos elementos da cadeia é um elemento de $\mathcal{D}$.

Logo pelo Lema de Zorn, existe $\phi : \langle L, u \rangle \rightarrow \langle L', u' \rangle$ elemento maximal de $\mathcal{D}$.

Se $L \neq F$, seja $a \in F - L$. Como $\langle F, w \rangle$ é extensão imedia-

ta de $\langle K, v \rangle$ e $\langle K, v \rangle \subset \langle L, u \rangle \subset \langle F, w \rangle$ é claro que $\langle F, w \rangle$ é extensão imediata de $\langle L, u \rangle$ e portanto, pela proposição I5.1, a é pseudolímite de alguma seqüência $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ pseudoconvergente em L que não admite pseudolimites em L .

Se $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é transcendente em L , então $\{\phi(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ é transcendente em L' e se $a' \in F'$ é um pseudolímite de $\{\phi(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ (existe algum $a' \in F'$, pois $\langle F', w' \rangle$ é maximalmente completo e portanto pseudocompleto), então por um argumento similar ao da parte (ii) do teorema I5.1, a aplicação $\psi : L(a) \rightarrow L'(a')$ definida por $\psi\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right) = \frac{\phi \circ f(a')}{\phi \circ g(a')}$ é um isomorfismo analítico que estende ϕ .

Se $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ é algébrica em L , então, pela proposição I5.4, existe $b \in F$ pseudolímite de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ e tal que $q(b) = 0$, onde q é um polinômio minimal de $\{a_\rho\}_{\rho < \lambda}$ em L (observe que como $\langle L, u \rangle$ é extensão imediata de $\langle K, v \rangle$, $\langle L, u \rangle$ também é finitamente ramificado). Por outro lado, como ϕ é isomorfismo analítico, a seqüência $\{\phi(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ é pseudoconvergente, algébrica, sem pseudolimites em L' e com $q' = \phi \circ q$ um polinômio minimal em L' . Logo existe $b' \in F'$ pseudolímite de $\{\phi(a_\rho)\}_{\rho < \lambda}$ tal que $q'(b') = 0$ e a aplicação $\psi : L(b) \rightarrow L'(b')$ definida por $\psi(f(b)) = \phi \circ f(b')$ para $f \in L[X]$ com $\text{gr}(f) < \text{gr}(q)$, será um isomorfismo analítico que estende ϕ .

Logo $L=F$, e por uma argumentação análoga, $L'=F'$, e por

tanto ϕ é um K -isomorfismo analítico entre os corpos valorados $\langle F, w \rangle$ e $\langle F', w' \rangle$.

CAPÍTULO II

UM TEOREMA DE ISOMORFISMO ENTRE CORPOS VALORADOS

Para este capítulo vamos fixar de uma vez por todas a seguinte situação: $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ são dois corpos valorados, finitamente ramificados, com o mesmo índice de ramificação e, admitindo x -seções normalizadas π e π' e tais que $v(K) = v'(K') = G$ e $\bar{K}_v \simeq \bar{K}'_{v'}$. Onde, dizemos que uma x -seção π de um corpo finitamente ramificado $\langle K, v \rangle$ com $e > 0$ é normalizada se $\pi(v(p)) = p$, para $p = \text{car } \bar{K}_v \neq 0$; e que toda x -seção é normalizada se $e = 0$.

Vamos também introduzir a seguinte nomenclatura:

DEFINIÇÃO II.1

(i) Uma aplicação $\phi : E \rightarrow E'$ se diz uma *aplicação x -analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$* se E e E' são subcorpos de K e K' tais que $v(E) = v'(E') = H$, $\pi(H) \subset E$, $\pi'(H) \subset E'$, $\bar{E}_v|_E = \bar{K}_v$, $\bar{E}'_{v'}|_{E'} = \bar{K}'_{v'}$ e ϕ é um isomorfismo x -analítico entre os corpos valorados $\langle E, v|_E \rangle$ e $\langle E', v'|_{E'} \rangle$ com x -seções normalizadas $\pi|_H$ e $\pi'|_H$.

(ii) Uma aplicação $\phi : E \rightarrow E'$ é uma *aplicação pura* entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ se ela é uma aplicação x-analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e $v(E) = v'(E') = H$ é um subgrupo puro e enumerável (finito ou não) de G .

PROPOSIÇÃO II.1 - Se $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ satisfazem o lema de Hensel e $e=0$ (isto é $\text{car} \bar{K}_v = \text{car} \bar{K}'_{v'} = 0$), então existe uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

DEMOSTRAÇÃO

Pelo teorema I3.1 se L e L' são subcorpos maximais de $R_{\langle K, v \rangle}$ e $R_{\langle K', v' \rangle}$, então $L \simeq \bar{K}_v$ e $L' \simeq \bar{K}'_{v'}$. Como $\bar{K}_v \simeq \bar{K}'_{v'}$, segue que $L \simeq L'$, e este isomorfismo entre L e L' é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$, pois sendo $v(L) = v'(L') = \{0\}$, todos os outros requisitos para aplicação pura são satisfeitos trivialmente.

Resta então mostrar que existem tais subcorpos maximais de $R_{\langle K, v \rangle}$ (e $R_{\langle K', v' \rangle}$). E para isto é suficiente mostrar que existe pelo menos um subcorpo de K contido em $R_{\langle K, v \rangle}$, pois então o lema de Zorn garantirá a existência de um subcorpo maximal.

De fato como $\text{car} \bar{K}_v = 0$, segue que $\overline{n \cdot 1_K} = n \cdot \bar{1}_K \neq \bar{0}$ em

$\bar{K}_v$ se $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, donde $n \cdot 1_K \in U(R_{\langle K, v \rangle})$ e $\frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K} \in R_{\langle K, v \rangle}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ ($n \neq 0$). Isto é: o subcorpo $\mathbb{Q} \cdot 1_K$ de K está contido em $R_{\langle K, v \rangle}$.

Vamos agora estudar o caso $0 < e < \infty$.

LEMA II.1 - Seja F, w um corpo valorado com índice de ramificação $0 < f < \infty$. O subgrupo $\mathbb{Z}\gamma_1$ de $w(F)$, onde $\gamma_1 = \min\{g \in w(F) : 0 < g\}$ (veja prop. I2.4) é um subgrupo puro de $w(F)$.

DEMONSTRAÇÃO

$\mathbb{Z}\gamma_1$ será um subgrupo puro de $w(F)$ se de $g \in w(F)$ e $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ com $ng \in \mathbb{Z}\gamma_1$, segue que $g \in \mathbb{Z}\gamma_1$. Não haverá prejuízo para a generalidade em se supor que $0 \leq g$ e $n > 0$, para evitar-se problemas com os sinais. Seja então $n \cdot g = m \cdot \gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1$ nestas condições.

Pelo algoritmo da divisão $m = q \cdot n + r$ com $0 \leq r < n$; onde $ng = qn\gamma_1 + r\gamma_1$, ou $n(g - q\gamma_1) = r\gamma_1$. Daí segue que :

(i) $0 \leq g - q\gamma_1$, pois se $0 > g - q\gamma_1$, então:

$$0 = n \cdot 0 > n \cdot (g - q\gamma_1) = r \cdot \gamma_1 > 0 \cdot \gamma_1 = 0. \quad E$$

(ii) $g - q\gamma_1 < \gamma_1$, pois se $g - q\gamma_1 \geq \gamma_1$, então:

$$r\gamma_1 = n(g - q\gamma_1) > r(g - q\gamma_1) \geq r\gamma_1.$$

Logo $0 \leq g - q\gamma_1 < \gamma_1$ e pela minimalidade de γ_1 em $w(F)$ segue que $0 = g - q\gamma_1$ ou $g = q \cdot \gamma_1 \in \mathbb{Z}\gamma_1$.

PROPOSIÇÃO II.2 - Se $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ tem (além das condições já impostas no início da seção) índice de ramificação $e=1$, satisfazem o lema de Hensel e são ω -pseudocompletos, então existe uma aplicação pura entre eles.

DEMONSTRAÇÃO

Na seção 2 do 1º Capítulo vimos como decompor uma valora

ção v em v_H e v/H , onde H é um subgrupo convexo de $G = v(K)$ (Lema I2.3), e que o subgrupo $\mathbb{Z}\gamma_1$ é um subgrupo convexo de G (prop. I2.4).

A aplicação que a $n \in \mathbb{Z}$ associa $n.\gamma_1 \in G$ é um monomorfismo do grupo $\mathbb{Z}$ no grupo G que preserva a ordem e além disso leva o mínimo dos elementos positivos de $\mathbb{Z}$ no mínimo dos elementos positivos de G (observe que isto não é necessariamente consequência do fato dele ser um monomorfismo que preserva ordem). Vamos então identificar $\mathbb{Z}$ com sua imagem que é precisamente $\mathbb{Z}\gamma_1$ identificando 1 com γ_1 . Como $e=1$, segue também que $v(p)=v'(p)=1$ e como π e π' são normalizadas, $\pi^1=\pi'^1=p$ ou mais genericamente $\pi^n=\pi'^n=p^n$ para $n \in \mathbb{Z}$ (lembramos que convencionalmente escrevemos π^g ao invés de $\pi(g)$, escreveremos também π^H para indicar a imagem $\pi(H)$ de um subconjunto H de G).

Temos então:

$\langle K, v_{\mathbb{Z}}, G/\mathbb{Z} \rangle$ onde $v_{\mathbb{Z}}(a) = v(a) + \mathbb{Z} \in G/\mathbb{Z}$.

e $\langle \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}, v/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$ onde $v/\mathbb{Z}(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}) = v(a) \in \mathbb{Z}$.

e sabemos que $(\bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}})_{v/\mathbb{Z}} \simeq \bar{K}_v$ (lema I2.4) e que $\text{car} \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}} = 0$ (prop. I2.4) e as mesmas coisas valendo para $\langle K', v' \rangle$.

Mostrando que:

(1) $\langle K, v_{\mathbb{Z}}, G/\mathbb{Z} \rangle$ e $\langle K', v'_{\mathbb{Z}}, G/\mathbb{Z} \rangle$ satisfazem o lema de Hensel e

(2) $\langle \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}, v/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$ e $\langle \bar{K}'_{v'_{\mathbb{Z}}}, v'/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$ são completos

teremos que de (1) seguirá que existem subcorpos L e L' de K e K'

isomorfos a $\bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}$ e $\bar{K}'_{v'_{\mathbb{Z}}}$ e cujos elementos não nulos estão em $U(R_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle})$ e $U(R_{\langle K', v'_{\mathbb{Z}} \rangle})$ e portanto tem valorações pertencentes a $\mathbb{Z}$ (lema 12.3). Enquanto que de (2) seguirá que $\langle \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}, v/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$ e $\langle \bar{K}'_{v'_{\mathbb{Z}}}, v'/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$ são analiticamente isomorfos pois são corpos valorados completos de característica zero com corpos de classes residuais isomorfas (pois $(\bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}})_{v/\mathbb{Z}} \simeq \bar{K}_v \simeq \bar{K}'_v \simeq (\bar{K}'_{v'_{\mathbb{Z}}})_{v'/\mathbb{Z}}$) de característica $p \neq 0$ e $v/\mathbb{Z}(p) = v'/\mathbb{Z}(p) = 1$. (veja os comentários do final da 4.^a seção do 1.^o Capítulo).

Temos então a seguinte situação:

$L \simeq \bar{L}_{(v_{\mathbb{Z}})} = \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}} \stackrel{\phi}{\simeq} \bar{K}'_{v'_{\mathbb{Z}}} = \bar{L}'_{(v'_{\mathbb{Z}})} \simeq L'$ e ϕ é um isomorfismo analítico, isto é: $v/\mathbb{Z}(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}) = v'/\mathbb{Z}(\phi(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}))$; e temos um isomorfismo $\psi: L \rightarrow L'$ que a $a \in L$ associa $\psi(a) \in L'$ onde $\psi(a) \in L'$ é o único elemento de L' tal que $\phi(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}) = \psi(a) + I_{\langle K', v'_{\mathbb{Z}} \rangle}$ (este isomorfismo entre os corpos L e L' é simplesmente a composição de todos os isomorfismos escritos acima).

Este isomorfismo é analítico pois:

$v(a) = v/\mathbb{Z}(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}) = v'/\mathbb{Z}(\phi(a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle})) = v'/\mathbb{Z}(\psi(a) + I_{\langle K', v'_{\mathbb{Z}} \rangle}) = v'(\psi(a))$ e como $\pi^{\mathbb{Z}} = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset Q \subset L$ e $\pi'^{\mathbb{Z}} = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset Q \subset L'$ (pois Q é o corpo primo de L e L') e $\psi|_Q$ é a identidade temos também:

$\psi(\pi^n) = \psi(p^n) = p^n = \pi'^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e portanto ψ é x -analítica

Finalmente pelo Lema anterior $v(L) = v'(L') = \mathbb{Z}$ (pois já tínhamos que $v(L) \subset \mathbb{Z}$ e $v'(L') \subset \mathbb{Z}$ uma vez que $L^* \subset U(R_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle})$ e $L'^* \subset U(R_{\langle K', v'_{\mathbb{Z}} \rangle})$ pelo Lema 12.3, e é claro que $\mathbb{Z} \subset v(L)$ e $\mathbb{Z} \subset v'(L')$ pois $p \in L$, $p \in L'$ e $v(p^n) = v'(p^n) = n$ para $n \in \mathbb{Z}$) é um subgrupo puro e enumerável de G e portanto $\psi: L \rightarrow L'$ é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

Falta então demonstrar as afirmações (1) e (2).

(1): Para demonstrar que $\langle K, v_{\mathbb{Z}}, G/\mathbb{Z} \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel teremos que recorrer a uns resultados sobre prolongamentos de valorações a extensões algébricas do Capítulo F do [Rb]. O primeiro é a equivalência entre o fato de um corpo valorado satisfazer o Lema de Hensel e o fato dele admitir um único prolongamento a cada extensão algébrica que já havíamos enunciado no início da 3.^a seção do 1.^o capítulo. O segundo é o seguinte: (proposição 4 do cap. F de [Rb]): "Se $\tilde{K}$ é uma extensão algébrica de K , P um ideal primo de $R_{\langle K, v \rangle}$, v_P a valoração associada a P (que é v_H onde H é o subgrupo convexo de G associado a P , veja prop. 12.3) e w uma extensão de v_P a $\tilde{K}$, então existe uma extensão $\tilde{v}$ de v a $\tilde{K}$ tal que w é $\tilde{v}_{\tilde{P}}$ onde $\tilde{P}$ é o único ideal primo de $R_{\langle \tilde{K}, \tilde{v} \rangle}$ tal que $\tilde{P} \cap R_{\langle K, v \rangle} = P$ ". Deste resultado segue que se v admite uma única extensão a $\tilde{K}$, então v_P (e portanto v_H) também admite uma única a $\tilde{K}$; que combinado com o primeiro resultado nos diz que se $\langle K, v, G \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel, então $\langle K, v_H, G/H \rangle$ também satisfaz o Lema de Hensel pa-

ra todo H subgrupo convexo de G .

(2) Seja $\bar{a}_n = a_n + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}$ uma seqüência de Cauchy de $\langle \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}, v/\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$. Então $v/\mathbb{Z}(\bar{a}_m - \bar{a}_n) \rightarrow \infty$ (veja o início da §4 do cap.1) ou $v(a_m - a_n) \rightarrow \infty$ e portanto $v(a_{n+1} - a_n) \rightarrow \infty$. Disto segue que podemos extrair uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ tal que $v(a_{n_{k+1}} - a_{n_k})$ seja crescente (estritamente), e portanto $\{a_{n_k}\}$ é uma seqüência pseudoconvergente em K (def. I5.1); e como $\langle K, v \rangle$ é ω -pseudocompleto $\{a_{n_k}\}$ admite um pseudolimite $a \in K$. Se zero é um pseudolimite de $\{a_{n_k}\}$ então $\bar{0} = 0 + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}$ é um limite de $\{\bar{a}_n\}$. Senão, pelo comentário após o lema I5.3, existe k_0 tal que $v(a) = v(a_{n_k})$ para $k \geq k_0$ e portanto $v(a) \in \mathbb{Z}$, donde $a \in R_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle}$ e portanto $\bar{a} = a + I_{\langle K, v_{\mathbb{Z}} \rangle} \in \bar{K}_{v_{\mathbb{Z}}}$ é um limite de $\{\bar{a}_n\}$.

Uma vez conseguidas aplicações puras entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ nosso trabalho agora será o de extendê-las até chegarmos a um isomorfismo entre os dois corpos. Num primeiro passo (até prop. II.4) extenderamos as aplicações puras a corpos com grupos de valores maiores que os dos corpos de partida; e após isso (proposição II.5) as extenderemos a extensões imediatas dos corpos iniciais, contendo algum elemento novo prefixado. Observe que se $\phi: E \rightarrow E'$ é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$, então $\bar{E}_v|_E = \bar{K}_v$ e $\bar{E}_{v'}|_{E'} = \bar{K}_{v'}$, de modo que não será necessário estender o corpo das classes residuais nas extensões das aplicações puras.

LEMA II.2 - Seja $\phi: E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$

e $\alpha \in G - v(E)$. Então existe uma aplicação x-analítica $\psi: E(\pi^\alpha) \rightarrow E'(\pi'^\alpha)$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ extendendo ϕ .

DEMONSTRAÇÃO

$v(E) = v'(E')$ é um subgrupo puro de G e $v(\pi^\alpha) = \alpha \notin v(E)$ e $v'(\pi'^\alpha) = \alpha \notin v'(E')$. Logo, pelo 3º corolário da proposição I3.1, α e α' são transcendentais sobre E e E' respectivamente. E portanto a aplicação $\psi: E(\pi^\alpha) \rightarrow E'(\pi'^\alpha)$ definida por $\psi(f(\pi^\alpha)/g(\pi^\alpha)) = \phi(f(\pi'^\alpha)/\phi(g(\pi'^\alpha)))$ para $f, g \in E[X]$ $g \neq 0$ é um isomorfismo (algébrico) entre os dois corpos que estende ϕ (onde $\phi \circ f = \sum_{i=0}^n \phi(c_i) X^i \in E'[X]$ para $f = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in E[X]$).

Seja $0 \neq f = \sum_{i=0}^n c_i X^i \in E[X]$. Pelo corolário citado acima:
 $v(f(\pi^\alpha)) = v(\sum_{i=0}^n c_i \pi^{i\alpha}) = \min\{v(c_i) + i\alpha : 0 \leq i \leq n\} = \min\{v'(\phi(c_i)) + i\alpha : 0 \leq i \leq n\} =$
 $= v'(\sum_{i=0}^n \phi(c_i) \pi'^{i\alpha}) = v'(\phi(f(\pi'^\alpha))) = v'(\psi(f(\pi^\alpha)))$ o que mostra que ψ é um isomorfismo analítico, uma vez que:
 $v(E(\pi^\alpha)) = v(E) \oplus \mathbb{Z}\alpha = v'(E') \oplus \mathbb{Z}\alpha = v'(E'(\pi'^\alpha)) = H$

Se $\gamma \in v(E)$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $\pi^{\gamma+n\alpha} = \pi^\gamma \cdot \pi^{n\alpha} = \pi^\gamma \cdot (\pi^\alpha)^n \in E(\pi^\alpha)$ pois $\pi^\gamma \in E$ e portanto $\pi^H \subset E(\pi^\alpha)$ e analogamente $\pi'^H \subset E'(\pi'^\alpha)$, donde $\pi|_H$ e $\pi'|_H$ são x-seções de $\langle E(\pi^\alpha), v|_{E(\pi^\alpha)} \rangle$ e $\langle E'(\pi'^\alpha), v'|_{E'(\pi'^\alpha)} \rangle$ respectivamente.

Finalmente se $\gamma \in v(E)$ e $n \in \mathbb{Z}$, então:

$\psi(\pi^{\gamma+n\alpha}) = \psi(\pi^\gamma \cdot (\pi^\alpha)^n) = \psi(f(\pi^\alpha)) = \phi \circ f(\pi^\alpha) = \phi(\pi^\gamma) \cdot (\pi'^\alpha)^n = \pi'^\gamma \cdot \pi'^{n\alpha} = \pi'^{\gamma+n\alpha}$
(onde $f = \pi^\gamma \cdot X^n \in E[X]$ e $\phi(\pi^\gamma) = \pi'^\gamma$ pois ϕ é x-analítica).

Logo ψ é x-analítica. E como $\overline{E}_v \subset \overline{E(\pi(\alpha))}_v \subset \overline{K}_v$, $\overline{E(\pi(\alpha))}_v = \overline{K}_v$ e analogamente $\overline{E'(\pi'^\alpha)}_v = \overline{K}'_v$, de modo que ψ satisfaz todas as condições para ser uma aplicação x-analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

LEMA II.3 - Sejam $\phi: E \rightarrow E'$ uma aplicação x-analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e $\beta \in G - v(E)$ tal que $p\beta \in v(E)$ para algum p inteiro primo. Então existe uma aplicação x-analítica $\psi: E(\pi^\beta) \rightarrow E'(\pi'^\beta)$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ estendendo ϕ .

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Corolário 4 da proposição I3.1, $X^{p-\pi^{p\beta}}$ e $X^{p-\pi'^{p\beta}}$ são os polinômios minimais de π^β e π'^β sobre E e E' respectivamente. Logo a aplicação $\psi: E(\pi^\beta) \rightarrow E'(\pi'^\beta)$ definida por $\psi(f(\pi^\beta)) = \phi f(\pi'^\beta)$ para $f \in E[X]$ com $\text{grf} f < p$, é um isomorfismo (algébrico) entre os dois corpos.

E como aqui também vale:

$v(f(\pi^\beta)) = v(\sum_{i=0}^r a_i \pi^{i\beta}) = \min\{v(a_i) + i\beta : 0 \leq i \leq r\}$, segue por uma argumentação similar a do lema anterior que ψ é uma aplicação x-analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

PROPOSIÇÃO II.3 - Seja $\phi: E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$, $\alpha \in G - v(E)$, $H = v(E(\pi^\alpha))$ e $\tilde{H} = \tilde{H}_G$.

Então existe $\psi: E(\pi^{\tilde{H}}) \rightarrow E'(\pi'^{\tilde{H}})$ aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e

e $\langle K', v' \rangle$, e $v(E(\pi^{\tilde{H}})) = v'(E'(\pi'^{\tilde{H}})) = \tilde{H}$.

DEMONSTRAÇÃO

Por definição de aplicação pura, $v(E)$ é enumerável e portanto $H = v(E(\pi^\alpha)) = v(E) \oplus \mathbb{Z}\alpha$ (cor.3 da prop. I3.1) também é enumerável.

$\tilde{H} = \{g \in G : ng \in H \text{ para algum } 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$. Para cada $h \in H$ e $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ existe no máximo um $g \in G$ tal que $n.g = h$ ($ng_1 = ng_2$ implica $g_1 = g_2$ pois G é sem torção uma vez que é ordenado). Logo para cada $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ o conjunto $A_n = \{g \in G : ng \in H\}$ é injetável em H e portanto enumerável. Como $\tilde{H} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} A_n$ segue que $\tilde{H}$ é enumerável.

Seja $\tilde{H} = \{h_1, h_2, \dots\}$ uma enumeração de $\tilde{H}$ e seja $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subgrupos de $\tilde{H}$, construída indutivamente, como segue:

$$H_0 = H = v(E(\pi^\alpha)) = v'(E'(\pi'^\alpha)).$$

Supondo construído $H \subset H_n \subset \tilde{H}$; se $H_n = \tilde{H}$, então $H_{n+1} = \tilde{H}$. Se $H_n \neq \tilde{H}$, então seja $\ell = \min\{k > 0 : h_k \notin H_n\}$. Como existe algum inteiro $m > 0$ tal que $m.h_\ell \in H \subset H_n$, seja $r = \min\{m > 0 : m.h_\ell \in H_n\}$ e seja $p > 1$ o menor primo que divide r . H_{n+1} será o subgrupo de $\tilde{H}$ (e portanto também de G) gerado por H_n e $\frac{r}{p}h_\ell = \beta_n$.

$\tilde{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$: de fato supondo que $h_k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ para todo $k < \ell$, seja $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : h_k \in H_n \text{ para todo } k < \ell\}$. Se $h_\ell \notin H_{n_0}$, então $\ell = \min\{k > 0 : h_k \notin H_{n_0}\}$ e se $\min\{m > 0 : m.h_\ell \in H_{n_0}\} = r = p_1^{v_1} \dots p_s^{v_s}$,

então após, no máximo $v_1 + \dots + v_s$ construções, $h_\ell \in H_{n_0 + v_1 + \dots + v_s}$ uma vez que após cada construção o r correspondente diminui de um fator primo. Logo da hipótese que $h_k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ para $k < \ell$ segue que

$h_\ell \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ e portanto $\tilde{H} = \{h_1, h_2, \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ (já que $\tilde{H} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$).

Logo $\tilde{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$, H_{n+1} é o subgrupo de $\tilde{H}$ gerado por H_n e β_n , onde $\beta_n \in H_n$ e $p \cdot \beta_n = p \cdot \frac{r}{p} h_\ell = r \cdot h_\ell \in H_n$ para algum primo p (ou este processo ocorre apenas até algum n_0 e $H_n = \tilde{H}$ para $n \geq n_0$).

Sejam: $E_0 = E(\pi^\alpha)$, $E'_0 = E'(\pi'^\alpha)$.

$$E_{n+1} = E_n(\pi^{\beta_n}) \quad , \quad E'_{n+1} = E'_n(\pi'^{\beta_n})$$

(ou $E_n = E_{n_0}$, $E'_n = E'_{n_0}$ para $n \geq n_0$ se $H_{n_0} = \tilde{H}$).

Então $v(E_0) = v'(E'_0) = H_0$ e para $n > 0$, pelo Corolário 4 da proposição I3.1 e por indução, $v(E_n) = v'(E'_n) = H_n$ e $\pi^{H_n} \in E_n$ e $\pi'^{H_n} \in E'_n$.

Logo existe, pelo lema II.2. $\psi_0 : E_0 \rightarrow E'_0$ aplicação x-analítica extendendo ϕ e supondo que $\psi_n : E_n \rightarrow E'_n$ é uma aplicação x-analítica de $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$, então pelo lema II.3 existe $\psi_{n+1} : E_{n+1} \rightarrow E'_{n+1}$ aplicação x-analítica extendendo ψ_n . E portanto existe uma sequência crescente $\{\psi_n : E_n \rightarrow E'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicações x-analíticas com ψ_0 extendendo ψ .

Sejam: $E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $E'_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n$, $\psi_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n$.

Então ψ_ω é um isomorfismo (algébrico) entre os corpos E_ω e E'_ω e como $v(E_\omega) = v(uE_n) = uv(E_n) = uH_n = \tilde{H} = v'(E'_\omega)$ e $\pi^{\tilde{H}} = u\pi^H_n \in E_n = E_\omega$

e $\pi^{\tilde{H}} \in E'_\omega$ segue que ψ_ω é uma aplicação x-analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e mais ainda uma aplicação para entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ pois $\tilde{H} = v(E_\omega) = v'(E'_\omega)$ é um subgrupo puro e enumerável de G.

Finalmente $E_\omega = E(\pi^{\tilde{H}})$ e $E'_\omega = E'(\pi^{\tilde{H}})$ pois de $\pi^{\tilde{H}} \in E_\omega$ segue $E(\pi^{\tilde{H}}) \subset E_\omega$ e reciprocamente, por indução, se $E_n \in E(\pi^{\tilde{H}})$ então $E_{n+1} = E_n(\pi^{\beta_n}) \subset E(\pi^{\tilde{H}})(\pi^{\beta_n}) = E(\pi^{\tilde{H}})$ (é claro que $E = E(\pi^\alpha) \subset E(\pi^{\tilde{H}})$). Logo $E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset E(\pi^{\tilde{H}})$. Analogamente $E'_\omega = E'(\pi^{\tilde{H}})$ e portanto

$\psi_\omega : E(\pi^{\tilde{H}}) \rightarrow E'(\pi^{\tilde{H}})$ é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ que estende ϕ .

PROPOSIÇÃO II.4 - Seja $\phi : E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e seja $a \in K$. Então:

(i) existe uma aplicação pura $\psi : E(\pi^{\tilde{H}}) \rightarrow E'(\pi^{\tilde{H}})$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ extendendo ϕ , onde $H = v(E(a))$ ($e\tilde{H} = \tilde{H}_G$); e $v(E(\pi^{\tilde{H}})) = v'(E'(\pi^{\tilde{H}})) = \tilde{H}$.

(ii) existe uma aplicação pura $\psi : F \rightarrow F'$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ extendendo ϕ , com $v(F(a)) = v(F)$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Se $H = v(E(a)) = v(E)$, então $\tilde{H} = v(E)$ e $\pi^{\tilde{H}} \in E$ pois ϕ é pura. Logo $E(\pi^{\tilde{H}}) = E$, $E'(\pi^{\tilde{H}}) = E'$ e $\psi = \phi$ é a aplicação procurada.

Se $H = v(E(a)) \neq v(E)$, então existe $c \in E(a)$ tal que $v(c) \notin v(E)$.

De $c \in E(a)$ e $c \notin E$ (pois $v(c) \notin v(E)$) segue que a é algébrico sobre $E(c)$. De fato: $c \in E(a)$ implica que $c = \frac{f(a)}{g(a)}$ com $f, g \in E[X]$, donde $h(a) = f(a) - c \cdot g(a) = 0$ com $h = f - c \cdot g \in E(c)[X]$ e $h \neq 0$ senão $c \in E$. Logo $E(a) \subset \widetilde{E(c)}_K$ e, pela proposição I3.1, $H = v(E(a)) \subset v(\widetilde{E(c)}_K) \subset \tilde{v}(E(c))_G$ e como $\tilde{v}(E(c))_G$ é puro em G segue que $\tilde{H} \subset \tilde{v}(E(c))_G$.

Também de $c \in E(a)$ segue $E(c) \subset E(a)$, $v(E(c)) \subset v(E(a)) = H$ e $\tilde{v}(E(c))_G \subset \tilde{H}_G = \tilde{H}$. Logo $\tilde{H} = \tilde{v}(E(c))_G$.

Por outro lado como $v(c) \notin v(E)$ e $v(E)$ é puro em G , segue pelo 3º Corolário da proposição I3.1, que $v(E(c)) = v(E) \oplus \mathbb{Z} \cdot v(c)$.

Se $\alpha = v(c)$, então $v(\pi^\alpha) = \alpha = v(c) \notin v(E)$ e pelo mesmo resultado $v(E(\pi^\alpha)) = v(E) \oplus \mathbb{Z} \cdot \alpha = v(E) \oplus \mathbb{Z} \cdot v(c) = v(E(c))$. Donde

$\tilde{H} = \tilde{v}(E(c))_G = \tilde{v}(E(\pi^\alpha))_G$ e pela proposição anterior, existe $\psi : E(\pi^{\tilde{H}}) \rightarrow E'(\pi^{\tilde{H}})$ aplicação pura extendendo ϕ ; e $v(E(\pi^{\tilde{H}})) = v'(E'(\pi^{\tilde{H}})) = \tilde{v}(E(\pi^\alpha))_G = \tilde{H}$.

(ii) Sejam $E_0 = E$, $E'_0 = E'$ e $\psi_0 = \phi$. Supondo que foram construídos indutivamente E_n , E'_n e $\psi_n : E_n \rightarrow E'_n$ aplicação pura extendendo ϕ , sejam $H_{n+1} = v(E_n(a))$, $\tilde{H}_{n+1} = (\tilde{H}_{n+1})_G$, $E_{n+1} = E_n(\pi^{\tilde{H}_{n+1}})$, $E'_{n+1} = E'_n(\pi^{\tilde{H}_{n+1}})$ e $\psi_{n+1} : E_{n+1} \rightarrow E'_{n+1}$ a aplicação pura que extende ψ_n dada pelo ítem (i) desta proposição.

A sequência $\{\psi_n : E_n \rightarrow E'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ assim construída é uma sequência crescente de aplicações puras com $v(E_n) = v'(E'_n) = \tilde{H}_n$ (fazendo $\tilde{H}_0 = H_0 = v(E) = v'(E'_0)$ vale a igualdade para todo $n \in \mathbb{N}$).

Sejam $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $F' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n$ e $\psi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n : F \rightarrow F'$. É fácil ver que ψ é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ estendendo ϕ , pois $v(F) = v(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (v(E_n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{H}_n = v'(F')$ é puro e enumerável uma vez que $\tilde{H}_n$ são puros e enumeráveis.

Finalmente seja $c \in F(a)$, então $c = \frac{f(a)}{g(a)}$ com $f, g \in F[X]$, $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j$, como $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, $a_i \in E_{n_i}$, $b_j \in E_{n_j}$, e como a sequência dos E_n é crescente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i, b_j \in E_n$, e portanto $f, g \in E_n[X]$ donde $c \in E_n(a)$. Logo $v(c) \in v(E_n(a)) = H_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{H}_n = v(F)$. Isto é $v(F(a)) \subset v(F)$ e portanto $v(F(a)) = v(F)$.

LEMA II.4 - Seja $\phi : E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$. Se $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ (além das condições impostas no início da seção) são ω -pseudocompletos e satisfazem o Lema de Hensel, então existe uma aplicação pura $\tilde{\phi} : \tilde{E}_K \rightarrow \tilde{E}'_K$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ estendendo ϕ ($\tilde{E}_K$ é o fecho algébrico de E em K).

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todos os isomorfismos analíticos de finidos entre subcorpos de $\tilde{E}_K$ e $\tilde{E}'_K$ que estendem ϕ .

$\mathcal{D} \neq \emptyset$, pois $\phi \in \mathcal{D}$; e dada uma cadeia em $\mathcal{D}$ a reunião dos elementos da cadeia é um elemento de $\mathcal{D}$ e é o máximo da cadeia.

Logo, pelo Lema de Zorn, existe $\tilde{\phi} : F \rightarrow F'$ elemento maximal em $\mathcal{D}$.

Se $F \not\subseteq \tilde{E}_K$, seja $a \in \tilde{E}_K - F$. De $\tilde{E}_v|E \subset \bar{F}_v|F \subset (\overline{\tilde{E}_K})_v|\tilde{E}_K \subset \bar{K}_v = \bar{E}_v|E$ segue que $\bar{F}_v|F = (\overline{\tilde{E}_K})_v|\tilde{E}_K$; e de $v(E) \subset v(F) \subset v(\tilde{E}_K) \subset \tilde{v}(E)_G = v(E)$ segue que $v(E) = v(F) = v(\tilde{E}_K)$. Logo $\langle \tilde{E}_K, v|\tilde{E}_K \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle F, v|F \rangle$ e como $v(F)$ é enumerável, segue pelo corolário da proposição 15.1 que $a \in \tilde{E}_K - F$ é pseudolímite de alguma sequência enumerável $\{a_n\}_{n < \omega}$ pseudoconvergente em F e sem pseudolimites em F . Como a é algébrico sobre F , $f(a) = 0$ para algum $0 \neq f \in F[X]$ e portanto $f(a_n) \rightarrow f(a) = 0$ o que mostra que $\{a_n\}_{n < \omega}$ é algébrica em F .

Seja $q \in F[X]$ o polinômio minimal de $\{a_n\}_{n < \omega}$. $\langle F, v|F \rangle$ é finitamente ramificado pois $\langle K, v \rangle$ o é; e $\langle K, v \rangle$ satisfaz o Lema de Hensel. Logo pela proposição 15.4 existe $b \in K$ pseudolímite de $\{a_n\}_{n < \omega}$ e tal que $q(b) = 0$. Em particular b é algébrico sobre F e portanto também sobre E , isto é $b \in \tilde{E}_K$.

Por outro lado, é fácil ver, que em $F'[X]$ a sequência $\{\tilde{\phi}(a_n)\}_{n < \omega}$ é pseudoconvergente, algébrica, sem pseudolimites e com polinômio minimal $q' = \tilde{\phi} \circ q \in F'[X]$; pois $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo analítico.

$\langle K', v' \rangle$ é ω -pseudocompleto, logo existe $a' \in K'$ pseudolímite de $\{\tilde{\phi}(a_n)\}_{n < \omega}$ e portanto novamente pode-se aplicar a proposição 15.4 para concluir que existe $b' \in K'$ pseudolímite de $\{\tilde{\phi}(a_n)\}_{n < \omega}$ e tal que $q'(b') = 0$, donde b' é algébrico sobre F' e portanto também sobre E' e $b' \in \tilde{E}'_K$.

Por um argumento similar ao da parte (ii) do teorema I5.2 a aplicação $\psi : F(b) \rightarrow F'(b')$ definida por $\psi(f(b)) = \tilde{\phi} \circ f(b')$ para $f \in F \setminus X$, $\text{grf} < \text{grq}$ é um isomorfismo analítico que estende $\tilde{\phi}$ e que pertence a $\mathcal{D}$, contradizendo assim a maximalidade de $\tilde{\phi}$ em $\mathcal{D}$. Logo $F = \tilde{E}_K$ e analogamente (extendendo $\tilde{\phi}^{-1}$ e depois invertendo) $F' = \tilde{E}'_{K'}$. Logo $\tilde{\phi} : \tilde{E}_K \rightarrow \tilde{E}'_{K'}$. Finalmente como $(\overline{\tilde{E}_K})_{v|E_K} = \overline{K}_v$, $(\overline{\tilde{E}'_{K'}})_{v'|E'_{K'}} = \overline{K}'_{v'}$ e $v(\tilde{E}_K) = v(E) = v'(E') = v'(\tilde{E}'_{K'})$ são subgrupos puros e enumeráveis de G e ϕ era aplicação pura, segue que $\tilde{\phi}$ é aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

LEMA II.5 - Sejam $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ como no lema anterior e seja $\phi : E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ com E algebricamente fechado em K . Se $a \in K - E$ é tal que $v(E(a)) = v(E)$, então existe $\psi : E(a) \rightarrow E'(a')$ aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ extendendo ϕ .

DEMONSTRAÇÃO

De $\overline{E}_v|_E \subset \overline{E(a)}_{v|E(a)} \subset \overline{K}_v = \overline{E}_v|_E$ segue que $\overline{E}_v|_E = \overline{E(a)}_{v|E(a)}$; e como $v(E(a)) = v(E)$, $\langle E(a), v|E(a) \rangle$ é uma extensão imediata de $\langle E, v|E \rangle$. Pelo corolário da proposição I5.1 (pois $v(E)$ é enumerável) $a \in E(a) - E$ é pseudolímite de alguma sequência enumerável $\{a_n\}_{n < \omega}$ de E pseudoconvergente e sem pseudolimites em E .

Se $\{a_n\}_{n < \omega}$ fosse algébrica em E , com polinômio minimal $q \in E[X]$, então existiria $b \in K$ pseudolímite de $\{a_n\}_{n < \omega}$ e tal que

$q(b) = 0$. Como E é algebricamente fechado em K , b pertenceria a E e $\{a_n\}_{n < \omega}$ teria um pseudolímite em E . Logo $\{a_n\}_{n < \omega}$ é transcendente em E .

ϕ é um isomorfismo analítico. Logo $\{\phi(a_n)\}_{n < \omega}$ é uma sequência pseudoconvergente transcendente em E' , e como $\langle K', v' \rangle$ é ω -pseudocompleto, existe $a' \in K'$ pseudolímite de $\{\phi(a_n)\}_{n < \omega}$.

Por um argumento similar ao da parte (ii) de teorema 15.1 a aplicação $\psi : E(a) \rightarrow E'(a')$ definida por $\psi\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right) = \frac{\phi \circ f(a')}{\phi \circ g(a')}$, $f, g \in E[X]$ é um isomorfismo analítico estendendo ϕ . Finalmente como $\overline{E(a)}_v | E(a) = \overline{K}_v$, $\overline{E'(a')}_{v'} | E'(a') = \overline{K'}_{v'}$, e $v(E(a)) = v(E) = v'(E') = v'(E'(a'))$ é subgrupo puro e enumerável de G e ϕ era aplicação pura, segue que ψ é aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

PROPOSIÇÃO II.5 - Sejam $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ como nos lemas anteriores, $\phi : E \rightarrow E'$ uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e $a \in K$. Então existe uma aplicação pura $\psi : F \rightarrow F'$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ estendendo ϕ e tal que $a \in F$.

DEMONSTRAÇÃO

Nesta demonstração vamos intercalar as construções dadas pela proposição II.4 e pelo lema II.4 para estender ϕ a uma aplicação pura $\phi_\omega : E_\omega \rightarrow E'_\omega$, onde E é algebricamente fechado em K e $v(E_\omega(a)) = v(E_\omega)$. O lema anterior então nos dará a $\psi : E_\omega(a) \rightarrow E'_\omega(a')$. Para isto vamos fixar a seguinte notação:

Se $\phi : E \rightarrow E'$ é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ e

$a \in K$, vamos indicar por $\hat{\phi} : \hat{E} \rightarrow \hat{E}'$ a aplicação pura dada pela proposição II.4 que estende ϕ e tal que $v(\hat{E}(a)) = v(\hat{E})$; e vamos indicar por $\tilde{\phi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$ a aplicação pura dada pelo lema II.4 que estende ϕ a $\tilde{E} = \tilde{E}_K$ e $\tilde{E}' = \tilde{E}'_K$.

Como estas notações, seja $\phi_n : E_n \rightarrow E'_n$ a seguinte seqüência crescente de aplicações puras, construída indutivamente:

$$\phi_0 = \phi : E_0 = E \rightarrow E'_0 = E'$$

$$\phi_{2n+1} = \tilde{\phi}_{2n} : E_{2n+1} = \tilde{E}_{2n} \rightarrow E'_{2n+1} = \tilde{E}'_{2n}$$

$$\phi_{2n+2} = \hat{\phi}_{2n+1} : E_{2n+2} = \hat{E}_{2n+1} \rightarrow E'_{2n+2} = \hat{E}'_{2n+1}$$

$$\text{e seja } \phi_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n : E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow E'_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n.$$

Como cada ϕ_n é isomorfismo de corpos, segue que ϕ_ω é isomorfismo de corpos.

$$v(E_\omega) = v\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v(E_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v'(E'_n) = v'\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n\right) = v'(E'_\omega).$$

Se $a \in E_\omega$, então $a \in E_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e portanto $v'(\phi_\omega(a)) = v'(\phi_n(a)) = v(a)$ o que mostra que ϕ_ω é isomorfismo analítico.

$$\pi^v(E_\omega) = \pi^{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} v(E_n)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\pi^{v(E_n)}) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E_\omega \text{ e analogamente } \pi^{v'(E'_\omega)} \subset E'_\omega.$$

Se $\alpha \in v(E_\omega)$, então $\alpha \in v(E_n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\phi_\omega(\pi^\alpha) = \phi_n(\pi^\alpha) = \pi'^\alpha$ o que mostra que ϕ_ω é isomorfismo x-analítico.

Finalmente como $v(E_\omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v(E_n)$ é uma reunião enumerável

de subgrupos puros e enumeráveis de G , então $v(E_\omega) = v'(E'_\omega)$ é um subgrupo puro e enumerável de G . E portanto ϕ_ω é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

Seja $\alpha \in v(E_\omega(a))$, então $\alpha = v\left(\frac{f(a)}{g(a)}\right)$ $f, g \in E_\omega[X]$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e par tal que $f, g \in E_n[X]$, donde $\frac{f(a)}{g(a)} \in E_n(a)$ e $\alpha \in v(E_n(a)) = v(E_n) \subset v(E_\omega)$. E portanto $v(E_\omega(a)) = v(E_\omega)$.

Seja $c \in K$ algébrico sobre E_ω . Então $f(c) = 0$ para algum $0 \neq f \in E_\omega[X]$ e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e ímpar tal que $f \in E_n[X]$, donde c é algébrico sobre E_n e portanto $c \in E_n \subset E_\omega$. Isto é $E_\omega = (\tilde{E}_\omega)_K$.

TEOREMA II.2 (Ax e Kochen)

Sejam $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ dois corpos valorados, não ramificados, com o mesmo índice de ramificação (zero ou um), ω -pseudocompletos, satisfazendo o Lema de Hensel e admitindo x -seções normalizadas. Se a cardinalidade de K e K' é $\aleph_1$, $v(K) = v'(K') = G$ e $\bar{K}_v \cong \bar{K}'_{v'}$, então existe um isomorfismo x -analítico entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$.

DEMONSTRAÇÃO

Como K e K' tem cardinalidade $\aleph_1$ sejam $K = \{a_\rho : \rho < \omega_1\}$ e $K' = \{a'_\rho : \rho < \omega_1\}$, onde ω_1 é o ordinal de $\aleph_1$ (isto é: ω_1 é o menor ordinal de cardinalidade $\aleph_1$ e foram escolhidas bijeções

entre ω_1 e K e entre ω_1 e K' e está sendo indicada por a_ρ e a'_ρ a imagem destas bijeções no ponto $\rho \in \omega_1$).

Agora será construída, por indução transfinita, uma sequência crescente de aplicações puras $\phi_\alpha : E_\alpha \rightarrow E'_\alpha$ entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$, para $\alpha < \omega_1$:

$\phi_0 : E_0 \rightarrow E'_0$ é a aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ dada pela proposição II.1 ou pelo teorema II.1., conforme o índice de ramificação dos corpos seja zero ou um.

Construída $\phi_{\lambda+2n} : E_{\lambda+2n} \rightarrow E'_{\lambda+2n}$, onde $\lambda < \omega_1$ é um ordinal limite e $n \in \mathbb{N}$; se $E_{\lambda+2n} = K$, então $\phi_{\lambda+2n+1} = \phi_{\lambda+2n}$. Senão seja $\mu = \min\{\rho < \omega_1 : a_\rho \notin E_{\lambda+2n}\}$, $\phi_{\lambda+2n+1} : E_{\lambda+2n+1} \rightarrow E'_{\lambda+2n+1}$ será a aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ dada pela proposição anterior que estende $\phi_{\lambda+2n}$ e tal que $a_\mu \in E_{\lambda+2n+1}$.

Construída $\phi_{\lambda+2n+1} : E_{\lambda+2n+1} \rightarrow E'_{\lambda+2n+1}$, onde $\lambda < \omega_1$ é um ordinal limite e $n \in \mathbb{N}$; se $E'_{\lambda+2n+1} = K'$, então $\phi_{\lambda+2n+2} = \phi_{\lambda+2n+1}$. Senão seja $\mu = \min\{\rho < \omega_1 : a'_\rho \notin E'_{\lambda+2n+1}\}$ e $\psi : F' \rightarrow F$ a aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ que estende $\phi_{\lambda+2n+1}^{-1}$ e tal que $a'_\mu \in F'$. A aplicação $\phi_{\lambda+2n+2}$ será então ψ^{-1} .

Construídas ϕ_α para $\alpha < \beta$, onde $\beta < \omega_1$ é um ordinal limite, $\phi_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} \phi_\alpha : E_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} E_\alpha \rightarrow E'_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} E'_\alpha$.

$v(E_\beta) = \bigcup_{\alpha < \beta} v(E_\alpha) = \bigcup_{\alpha < \beta} v'(E'_\alpha) = v'(E'_\beta)$, cada $v(E_\alpha)$ é um subgrupo puro e enumerável de G e β é enumerável pois $\beta < \omega_1$.

Logo $v(E_\beta) = v'(E'_\beta)$ é uma reunião enumerável de subgrupos puros e enumeráveis de G e portanto é um subgrupo puro e enumerável de G . E por uma argumentação similar a da proposição anterior, onde se mostrava que ϕ_ω era uma aplicação pura, segue que ϕ_β é uma aplicação pura entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ que extende ϕ_α para todo $\alpha < \beta$.

E está assim terminada a construção da sequência $\phi_\alpha : E_\alpha \rightarrow E'_\alpha$, para $\alpha < \omega_1$. Seja agora:

$$\psi = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \phi_\alpha : F = \bigcup_{\alpha < \omega_1} E_\alpha \rightarrow F' = \bigcup_{\alpha < \omega_1} E'_\alpha$$

Pela argumentação citada acima, ψ é uma aplicação x -analítica entre $\langle K, v \rangle$ e $\langle K', v' \rangle$ (neste caso não se pode garantir que ψ é uma aplicação pura, pois não se pode garantir que

$v(F) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} v(E_\alpha) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} v'(E'_\alpha) = v'(F')$ é enumerável); e mostrando que $F = K$ e $F' = K'$ estará demonstrado o teorema.

A demonstração de $F = K$ será feita mostrando-se, por indução transfinita, que $a_\rho \in F$ para todo $\rho < \omega_1$:

Supondo que $\rho < \omega_1$ (ρ pode ser ordinal limite ou ordinal sucessor) e que $a_\sigma \in F$ para todo $\sigma < \rho$, então para cada $\sigma < \rho$ existe $\alpha_\sigma < \omega_1$ tal que $a_\sigma \in E_{\alpha_\sigma}$. Seja $\beta = \bigcup_{\sigma < \rho} \alpha_\sigma$, β é reunião enumerável de ordinais enumeráveis e portanto β é um ordinal enumerável, isto é $\beta < \omega_1$ e portanto existe $E_\beta \supset E_{\alpha_\sigma}$ para todo $\sigma < \rho$. Pela construção da sequência ϕ_α , segue então que $a_\rho \in E_{\beta+2}$, e portanto que $a_\rho \in F$.

Assim $F = K$ e analogamente $F' = K'$ e $\psi : K \rightarrow K'$ é o isomorfismo x -analítico procurado.

CAPÍTULO III

O RESULTADO DE AX E KOCHEN

SOBRE UMA CONJECTURA DE ARTIN

§0 UM CONTRAEXEMPLO À CONJECTURA DE ARTIN

Conforme a notação apresentada no prefácio, um corpo K se diz $C_1(d)$ quando toda forma (polinômio homogêneo) de grau d em $n > d^1$ variáveis com coeficientes em K , admitir uma raiz não trivial em K . O corpo K se diz C_1 se for $C_1(d)$ para todo inteiro positivo d .

Artin conjecturou que os corpos Q_p seriam C_2 . Nesta seção apresentamos um contraexemplo devido a G. Terjanian, de uma forma de grau 4 em 18 variáveis que não admite raízes não triviais em Q_2 , mostrando assim que Q_2 não é $C_2(4)$. Nas próximas seções deste capítulo introduziremos os rudimentos da Teoria dos Modelos necessários para o resultado de Ax e Kochen sobre a conjectura de Artin e concluiremos o capítulo com este resultado; a saber: que para cada inteiro positivo d o conjunto $F(d)$ de todos os números primos p para os quais Q_p não é $C_2(d)$ é finito. (Veja no prefácio deste tra-

balho para maiores informações sobre a conjectura de Artin e o resultado de Ax e Kochen).

O contraexemplo de Terjanian: Seja

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - X_1^2 X_2^2 - X_1^2 X_3^2 - X_2^2 X_3^2 - X_1^2 X_2 X_3 -$
 $- X_1 X_2^2 X_3 - X_1 X_2 X_3^2$, e sejam x_1, x_2, x_3 tres
 números inteiros. Se pelo menos um dos tres números for im-
 par, então $f(x_1, x_2, x_3) \equiv 1 \pmod{4}$; e se todos forem pares,
 então $f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \pmod{4}$.

Seja $g(X_1, \dots, X_9) = f(X_1, X_2, X_3) + f(X_4, X_5, X_6) +$
 $+ f(X_7, X_8, X_9)$. Então $g(x_1, \dots, x_9) \equiv 0 \pmod{4}$ (para $x_1, \dots,$
 x_9 inteiros) se e só se todos os x_i são pares.

Finalmente seja $h(X_1, \dots, X_{18}) = g(X_1, \dots, X_9) +$
 $4g(X_{10}, \dots, X_{18})$, e sejam $x_1, \dots, x_{18}$ inteiros. Se
 $h(x_1, \dots, x_{18}) \equiv 0 \pmod{16}$, então $g(x_1, \dots, x_9) \equiv 0 \pmod{4}$,
 donde $x_i = 2y_i$ $y_i \in \mathbb{Z}$ para $i=1, \dots, 9$ e $g(x_1, \dots, x_9) =$
 $g(2y_1, \dots, 2y_9) = 2^4 g(y_1, \dots, y_9) \equiv 0 \pmod{16}$. Dai segue que
 $4g(x_{10}, \dots, x_{18}) \equiv 0 \pmod{16}$ e portanto $g(x_{10}, \dots, x_{18}) \equiv 0 \pmod{4}$
 donde x_i é par para todo $i=1, \dots, 18$.

Da proposição 14.1 sabemos que todo elemento $r \in Q_2$ se
 escreve de forma única como $r = \sum_{i=\ell}^{\infty} c_i(r) \cdot 2^i$ com $c_i(r) = 0$
 ou 1 e $c_\ell(r) \neq 0$, onde $\ell = v_2(r)$. Os elementos de $R_{\langle Q_2, v_2 \rangle}$
 poderão então ser descritos como $a = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(a) \cdot 2^i$ (onde ago-
 ra $c_0(a)$ pode ser $\neq 0$).

A aplicação $\wedge$ que a cada $a \in R_{\langle Q_2, v_2 \rangle}$ associa $\hat{a} = \{ \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a) \cdot 2^i \}_{\text{mod } 2^n} = a$ classe de equivalência de $\sum_{i=0}^{n-1} c_i(a) \cdot 2^i$ em $\mathbb{Z}_2^n$ é um epimorfismo de anéis, pois dados $a, b \in R_{\langle Q_2, v_2 \rangle}$ temos: $a = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a) \cdot 2^i + 2^n r_1$, $b = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(b) \cdot 2^i + 2^n r_2$ e $a+b = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a+b) \cdot 2^i + 2^n r_3$, com $r_1, r_2, r_3 \in R_{\langle Q_2, v_2 \rangle}$, donde $z = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a) \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(b) \cdot 2^i - \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a+b) \cdot 2^i = 2^n r$, com $r \in R_{\langle Q_2, v_2 \rangle}$ e portanto $v_2(z) = n$. Como $z \in \mathbb{Z}$ segue que $z = 2^n k$, $k \in \mathbb{Z}$ isto é $z \equiv 0 \pmod{2^n}$ ou $\sum_{i=0}^{n-1} c_i(a) \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i(b) \cdot 2^i \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a+b) \cdot 2^i \pmod{2^n}$ e portanto $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$ em $\mathbb{Z}_2^n$. Analogamente $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$. (O núcleo deste epimorfismo é $(I_{\langle Q_2, v_2 \rangle})^n$, de modo que temos: $R_{\langle Q_2, v_2 \rangle} / (I_{\langle Q_2, v_2 \rangle})^n \cong \mathbb{Z}_2^n$ resultado este que generaliza $R_{\langle Q_2, v_2 \rangle} / I_{\langle Q_2, v_2 \rangle} \cong \mathbb{Z}_2$.)

Suponhamos agora que $(r_1, \dots, r_{18}) \in Q_2$ é uma raiz não trivial de h em Q_2 . Seja j um índice tal que $v(r_j) \leq v(r_i)$ para todo $i=1, \dots, 18$. É claro que $r_j \neq 0$ (senão a 18-úpla seria trivial) e portanto $(a_1, \dots, a_{18})$, onde $a_i = r_i / r_j$ é uma raiz não trivial de h que pertence a $(R_{\langle Q_2, v_2 \rangle})^{18}$, uma vez que $v(a_i) = v(r_i) - v(r_j) \geq 0$ para todo $i=1, \dots, 18$; com $a_j = 1$.

Aplicando $\wedge$, com $n=3$, à igualdade $h(a_1, \dots, a_{18}) = 0$ teremos que: $h(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{18}) = \{0\}_{\text{mod } 16}$ e portanto $\hat{a}_i = \{x_i\}_{\text{mod } 16}$, com x_i par, contra o fato que $\hat{a}_j = \{1\}_{\text{mod } 16}$.

§1. UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS MODELOS

A teoria dos modelos é o ramo da lógica matemática que estuda as relações entre *teorias* e seus *modelos*.

Uma teoria, neste contexto, é qualquer conjunto de sentenças de uma *língua*gem *formal* dada; e um modelo de uma teoria é qualquer *estrut*ura para a linguagem que *satis*faz todas as sentenças da teoria.

Nesta seção apresentaremos definições formais para todos os conceitos grifados e daremos exemplos de descrição de teorias matemáticas familiares (grupos, corpos, etc.) neste formalismo.

DEFINIÇÃO III1.1 - Uma *língua*gem de *pr*imeira ordem L é um conjunto de tres espécies de objetos: *símbolos* de *predica*do, *símbolos* de *função* e *símbolos* de *constante*, tais que:

a cada símbolo de predicado p de L está associado um número inteiro positivo n , e costumamos designar isto dizendo que p é um símbolo de predicado de n lugares ou que p um símbolo de predicário n -ário.

a cada símbolo de função f de L está associado um número inteiro positivo m , e costumamos designar isto dizendo que f é um símbolo de *função* de m lugares ou que f é um símbolo de função m -ária.

EXEMPLOS : Conforme o assunto que se pretende estudar, escolhem-se os símbolos para a linguagem. Por exemplo:

1. uma linguagem adequada para o estudo de conjuntos

ordenados $L = \{\leq\}$, onde $\leq$ é um símbolo de predicado binário.

2. uma linguagem adequada para o estudo de grupos é $L = \{*, e\}$, onde $*$ é um símbolo de função binária e e é um símbolo de constante. Uma outra possibilidade seria: $L = \{*, f, e\}$, onde f é um símbolo de função unária (que corresponderá, num grupo, à função que a cada elemento associa o seu inverso) e uma outra possibilidade seria simplesmente $L = \{*\}$. Em todas elas nós poderemos enunciar *axiomas* para a *teoria dos grupos* mas conforme a linguagem utilizada poderemos escolher axiomas diferentes (veja em exemplos de *teorias*).

3. $L = \{\leq, *, e\}$ é uma linguagem para grupos ordenados.

4. $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ é uma linguagem para anéis com unidade ou para corpos.

DEFINIÇÃO III1.2 - Seja $L = \{p_i : i \in I\} \cup \{f_j : j \in J\} \cup \{c_k : k \in K\}$ uma linguagem de 1a. ordem. Uma *estrutura para L* (ou uma *L-estrutura*) é um par ordenado $A = \langle |A|, \bar{A} \rangle$, onde $|A|$ é um conjunto não vazio, chamado *universo* da estrutura A e $\bar{A}$ é uma função, chamada *interpretação* da estrutura A , definida em L e tal que:

Se p é símbolo de predicado n -ário de L , então $\bar{A}(p)$ é um subconjunto de $|A|^n$ (isto é $\bar{A}(p)$ é uma relação n -ária do universo da estrutura).

Se f é um símbolo de função m -ária de L , então $\bar{A}(f)$ é

uma função definida em $|A|^m$ com valores em $|A|$.

Se c é um símbolo de constante de L , então $\bar{A}(c)$ é um elemento de $|A|$.

Costuma-se designar $\bar{A}(p)$, $\bar{A}(f)$, $\bar{A}(c)$ por p^A , f^A , c^A respectivamente; dizer que p^A é a interpretação do símbolo de predicado p na estrutura A , f^A é a interpretação de f em A e c^A é a interpretação de c em A ; e escrever, por abuso de notação, $A = \langle |A|, (p_i^A)_{i \in I}, (f_j^A)_{j \in J}, (c_k^A)_{k \in K} \rangle$ para uma L -estrutura. Se L é finita $L = \{p_0, \dots, p_i, f_0, \dots, f_j, c_0, \dots, c_k\}$ então escreve-se simplesmente $A = \langle |A|, p_0^A, \dots, p_i^A, f_0^A, \dots, f_j^A, c_0^A, \dots, c_k^A \rangle$ para uma L -estrutura.

EXEMPLOS :

1. para a linguagem $L = \{\leq\}$ (do 1º exemplo de linguagens) uma L -estrutura é qualquer par $A = \langle A, R \rangle$, onde $A \neq \emptyset$ é o universo de A e $R \subset A^2$ é a relação binária $\leq^A$ do universo de A que corresponde ao símbolo de predicado binário $\leq$ de L . Observe que por enquanto não há necessidade de R satisfazer qualquer outra condição, além de $R \subset A^2$ (e $A \neq \emptyset$) para que $\langle A, R \rangle$ seja uma estrutura para a linguagem dos conjuntos ordenados. Após as definições de satisfatibilidade, veremos que para que $\langle A, R \rangle$ seja um modelo da teoria dos conjuntos ordenados é que R terá que ser uma relação de ordem de A .

2. uma estrutura para a linguagem $L = \{*, e\}$ da teoria

dos grupos é uma trinca $G = \langle G, *^G, e^G \rangle$, onde $G \neq \emptyset$, $*^G: G \times G \rightarrow G$ e $e^G \in G$. Às vezes, quando não houver perigo de confusão, escreveremos simplesmente $\langle G, *, e \rangle$ usando a mesma notação para os símbolos da linguagem e para suas interpretações na estrutura.

3. as quadruplas $\langle \mathbb{N}, \{ \langle m, n \rangle \in \mathbb{N}^2 : m|n \}, \{ \langle \langle m, n \rangle, k \rangle \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N} : m \cdot n = k \}, 1 \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}, \{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{Z}^2 : p \leq q \}, \{ \langle \langle p, q \rangle, p+q \rangle \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \}, 0 \rangle$ são ambas exemplos de estruturas para a linguagem $L = \{ \leq, *, e \}$. Com as definições adequadas a 2a. estrutura será um modelo da teoria de grupos ordenados, enquanto que a 1a. não o será por não satisfazer as sentenças daquela teoria.

4. $\langle \mathbb{Z}, \{ \langle \langle p, q \rangle, p+q \rangle \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \}, \{ \langle \langle p, q \rangle, p \cdot q \rangle \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} \}, 0, 1 \rangle$ e $\langle Q, \{ \langle \langle r, s \rangle, r+s \rangle \in Q^2 \times Q \}, \{ \langle \langle r, s \rangle, r \cdot s \rangle \in Q^2 \times Q \}, 0, 1 \rangle$ são estruturas para a linguagem $L = \{ +, \cdot, 0, 1 \}$. A 2a. será um modelo da teoria dos corpos, enquanto que a primeira será apenas um modelo da teoria de anéis com unidade.

Duas estruturas para uma mesma linguagem dizem-se estruturas *similares* ou de *mesmo tipo*. Para estruturas similares definem-se os conceitos de homomorfismo, monomorfismo, etc. que unificam as definições correspondentes de várias teorias matemáticas. Veremos aqui, a título de exemplo deste procedimento, a definição de isomorfismo.

DEFINIÇÃO III1.3 - Sejam A, B duas estruturas similares (e seja L a linguagem comum a ambas). Uma aplicação $h: |A| \rightarrow |B|$

entre os universos das estruturas se diz um *isomorfismo entre* A e B se h é bijetora e:

1. para todo símbolo de predicado n -ário p de L e para todos $a_1, \dots, a_n \in |A|$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^A$ se e só se $\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^B$.
2. para todo símbolo de função m -ária f de L e para todos $a_1, \dots, a_m \in |A|$, $h(f^A(a_1, \dots, a_m)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_m))$.
3. para todo símbolo de constante c de L , $h(c^A) = c^B$.

Os elementos de uma linguagem (símbolos de predicado, de função e de constante) são também chamados de símbolos *não lógicos* ou *parâmetros* da linguagem. Eles desempenham o papel de letras do alfabeto de uma língua que se usam na construção das palavras e frases da língua (termos e fórmulas neste contexto). Além destes símbolos (que são particulares para cada linguagem) precisaremos de mais alguns que são comuns a todas as linguagens e são chamados de símbolos *lógicos*:

1. parênteses: $)$, $($;
2. variáveis: um conjunto infinito e enumerável
 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$;
3. conectivos proposicionais: $\neg$ (não), $\wedge$ (e);
4. quantificador universal: $\forall$ (para todo);
5. símbolo de igualdade: $=$.

Justapondo símbolos de uma linguagem constroem-se va-

rias expressões, por exemplo: $\forall v_1 (v_1 = 1 \rightarrow \dots)$ ou $((0+v_2).(1+v_1))+1$ ou $\forall v_1 (0+v_2=1+v_1)$. É claro que nem todas as expressões nos interessam. Vamos então discriminar entre todas as expressões possíveis de uma linguagem dois tipos importantes: as *termos* que são expressões, como a do 2º exemplo, que descrevem objetos construídos a partir das variáveis, dos símbolos de constante e de aplicações sucessivas dos símbolos funcionais, que são como os nomes e pronomes de uma língua; e as *fórmulas* que são expressões, como a do 3º exemplo, que descrevem asserções entre termos.

DEFINIÇÃO III1.4 - Seja L uma linguagem de 1ª. ordem e seja C o conjunto dos símbolos de constante de L. Vamos construir indutivamente uma seqüência de conjuntos T_k , $k \in \mathbb{N}$, como segue:

$T_0 = V \cup C$ = conjunto de todas as variáveis e de todos os símbolos de constante de L.

$T_{k+1} = T_k \cup \{f(t_1 \dots t_m) : f \text{ é um símbolo de função m-ária de L e } t_1, \dots, t_m \in T_k\}$.

Então definimos o conjunto dos *termos* de L como sendo:

$$\text{Ter}(L) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k.$$

DEFINIÇÃO III1.5 - Seja L uma linguagem de 1ª. ordem e seja $\text{Ter}(L)$ o conjunto dos termos de L. Vamos construir indutivamente uma seqüência de conjuntos F_k , $k \in \mathbb{N}$, como segue:

$F_0 = \{(t_1=t_2) : t_1, t_2 \in \text{Ter}(L)\} \cup \{p(t_1 \dots t_n) : p \text{ é um símbolo de predicado } n\text{-ário de } L \text{ e } t_1, \dots, t_n \in \text{Ter}(L)\}.$

$$F_{k+1} = F_k \cup \{\neg A : A \in F_k\} \cup \{(A \wedge B) : A, B \in F_k\} \\ \cup \{\forall v A : v \in V, A \in F_k\}.$$

O conjunto F_0 se diz o conjunto das *fórmulas atômicas* de L e o conjunto $\text{For}(L) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ se diz o conjunto das *fórmulas* de L .

Introduziremos algumas abreviações usuais, para tornar as expressões mais comunicativas, através dos símbolos: $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (implica), $\leftrightarrow$ (equivale) e $\exists$ (existe). Assim escreveremos:

$$\begin{aligned} (A \vee B) & \text{ para } \neg(\neg A \wedge \neg B) , \\ (A \rightarrow B) & \text{ para } \neg(A \wedge \neg B) , \\ (A \leftrightarrow B) & \text{ para } ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) , \\ \exists v A & \text{ para } \neg \forall v \neg A . \end{aligned}$$

Omitiremos alguns dos parênteses quando isto não causar confusão. Para símbolos predicativos e símbolos funcionais binários u escreveremos frequentemente $(t_1 u t_2)$ ao invés de $u(t_1 t_2)$. Assim por exemplo na linguagem $L = \{\leq, +, \cdot, 0, 1\}$ escreveremos $(v_1 + 1) \cdot v_3 \leq v_1 + (1 \cdot v_3)$ ao invés de $\leq(\cdot(+ (v_1 1) v_3) + (v_1 (1 \cdot v_3)))$.

O próximo passo agora é o de definir quando que uma es-

estrutura para uma linguagem satisfaz uma fórmula daquela linguagem.

De imediato observamos (intuitivamente) que enquanto certas fórmulas, como por exemplo $0 \leq 1$ ou $\exists v_1 \forall v_2 (v_1 \leq v_2)$, ou serão verdadeiras ou falsas numa dada estrutura; existem outras, como por exemplo $v_2 \leq 1$ ou $\forall v_2 (v_1 \leq v_2)$, cuja satisfatibilidade numa dada estrutura dependerá, por assim dizer, do valor que for dado a algumas das variáveis que nelas ocorrem.

Começaremos então definindo quando que uma estrutura satisfaz uma fórmula para uma dada substituição das variáveis por elementos do universo da estrutura.

DEFINIÇÃO III.1.6 - Sejam A uma L -estrutura e $s: V \rightarrow |A|$ uma função definida no conjunto das variáveis com valores no universo da estrutura. Vamos definir o que significa dizer que uma fórmula A da linguagem L é *satisfeita* pela substituição s na estrutura A (ou que A *satisfaz* A com s), e denotar isto por $A \models A[s]$.

Inicialmente vamos estender s para $\bar{s}: \text{Ter}(L) \rightarrow |A|$ definida no conjunto dos termos da linguagem L . Informalmente isto corresponde a efetuar as operações que comparecem nos termos usando para as variáveis o valor dado pela s . Formalmente a definição é indutiva para seguir a definição indutiva dos termos.

1. para cada variável v , $\bar{s}(v) = s(v)$,
2. para cada símbolo de constante c , $\bar{s}(c) = c^A$,
3. se $t_1, \dots, t_m$ são termos e f um símbolo de função m -ária então $\bar{s}(f(t_1 \dots t_m)) = f^A(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_m))$.

Observe que os dois primeiros itens desta definição definem $\bar{s}$ em T_0 , enquanto que o terceiro define $\bar{s}$ em T_{k+1} a partir da definição de $\bar{s}$ em T_k ; de modo que esta definição é de fato uma definição indutiva. No futuro procederemos como acima (inclusive para fórmulas) sem contudo chamarmos a atenção para o processo de indução envolvido em cada caso.

Passemos agora à definição de $A \models A[s]$ que será também indutiva:

1. Se t_1 e t_2 são termos, então $A \models t_1 = t_2[s]$ se e só se $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$,
2. Se $t_1, \dots, t_n$ são termos e p um símbolo de predicado n -ário, então $A \models p(t_1 \dots t_n)[s]$ se e só se $\langle \bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n) \rangle \in p^A$,
3. Se A é $\neg B$, então $A \models A[s]$ se e só se A não satisfaz B com s (em símbolos $A \not\models B[s]$) ,
4. Se A é $B \wedge C$, então $A \models A[s]$ se e só se $A \models B[s]$ e $A \models C[s]$,
5. Se A é $\forall v B$, então $A \models A[s]$ se e só se para todo $a \in |A|$,

$A \models B[s(v|a)]$, onde estamos denotando por $s(v|a)$ a função definida em V com valores em $|A|$ que coincide com s para as variáveis distintas de v e em v toma o valor a , isto é: $s(v|a)(x) = s(x)$ se $x \neq v$ e $s(v|a)(v) = a$. (Logo $A \models \forall v B[s]$ se e só se A satisfaz B com todas as substituições que coincidem com s fora de v).

OBSERVAÇÃO - O conjunto das variáveis V já foi definido como sendo o conjunto de todos os símbolos v_i para $i \in \mathbb{N}$, de modo que quando dizemos que " v é uma variável" estamos querendo dizer que v é v_i para algum $i \in \mathbb{N}$ (e não que v é algum símbolo novo).

Da definição anterior segue facilmente que:

1. $A \models B \vee C[s]$ se e só se $A \models B[s]$ ou $A \models C[s]$
2. $A \models B \rightarrow C[s]$ se e só se $A \not\models B[s]$ ou $A \models C[s]$
(isto é se $A \models B[s]$, então $A \models C[s]$)
3. $A \models B \leftrightarrow C[s]$ se e só se A satisfaz ambas as fórmulas com s ou não satisfaz nenhuma das duas com s .
4. $A \models \exists v B[s]$ se e só se existe $a \in |A|$ tal que $A \models B[s(v|a)]$
(isto é A satisfaz B com alguma substituição que coincide com s fora de v).

Uma substituição s dá um valor a a cada variável v de V , mas para uma fórmula nunca precisaremos de todos estes va-

lores, uma vez que só pode ocorrer um número finito de variáveis em cada fórmula. Além disto também para as variáveis da fórmula que estão quantificadas não interessará o valor da substituição. Esta ideia dará origem a uma proposição assim que se defina formalmente o que são as *variáveis livres* de uma fórmula (isto é as variáveis que não estão no escopo de algum quantificador $\forall$ e $\exists$).

Para isto precisamos definir inicialmente quais as variáveis que *ocorrem* num termo, mas deixaremos esta definição (que se faz por indução de forma natural) para o leitor. Indicaremos por $\text{var}(t)$ o conjunto das variáveis que ocorrem num termo t , e iremos agora definir o conjunto $\text{vl}(A)$ das variáveis livres de uma fórmula A .

DEFINIÇÃO III1.7 -

1. Se t_1 e t_2 são termos, então $\text{vl}(t_1=t_2) = \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$,
2. Se $t_1, \dots, t_n$ são termos e p um símbolo de predicado n -ário, então $\text{vl}(p(t_1 \dots t_n)) = \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_n)$,
3. $\text{vl}(\neg A) = \text{vl}(A)$,
4. $\text{vl}(A \wedge B) = \text{vl}(A) \cup \text{vl}(B)$,
5. $\text{vl}(\forall v A) = \text{vl}(A) - \{v\}$.

PROPOSIÇÃO III1.1 - Sejam A uma L -estrutura e $s_1, s_2: V \rightarrow |A|$

- (i) Se t é um termo de L tal que s_1 e s_2 coincidem nas variáveis de t , então $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$

- (ii) Se A é uma fórmula de L tal que s_1 e s_2 coincidem nas variáveis livres de A , então $A \models A[s_1]$ se e só se $A \models A[s_2]$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) por indução sobre termos:

1. Se t é uma variável v , então $\text{var}(t) = \{v\}$ e portanto $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_1(v) = s_1(v) = s_2(v) = \bar{s}_2(v) = \bar{s}_2(t)$ pela hipótese sobre s_1 e s_2 .
2. Se t é uma constante c , então $\bar{s}_1(c) = c^A = \bar{s}_2(c)$.
3. Se t é $f(t_1 \dots t_m)$, então s_1 e s_2 coincidem nas variáveis de cada um dos t_i e, por hipótese de indução $\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$ para $i=1, \dots, m$. Logo

$$\begin{aligned} \bar{s}_1(t) &= \bar{s}_1(f(t_1 \dots t_m)) = f^A(\bar{s}_1(t_1), \dots, \bar{s}_1(t_m)) = \\ &= f^A(\bar{s}_2(t_1), \dots, \bar{s}_2(t_m)) = \bar{s}_2(f(t_1 \dots t_m)) = \bar{s}_2(t). \end{aligned}$$

(ii) por indução sobre fórmulas:

1. Se A é $t_1 = t_2$, então s_1 e s_2 coincidem em $\text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2)$ e portanto, pela parte (i), $\bar{s}_1(t_1) = \bar{s}_2(t_1)$ e $\bar{s}_1(t_2) = \bar{s}_2(t_2)$, donde $\bar{s}_1(t_1) = \bar{s}_1(t_2)$ se e só se $\bar{s}_2(t_1) = \bar{s}_2(t_2)$ ou $A \models A[s_1]$ se e só se $A \models A[s_2]$.
2. Analogamente se A é $p(t_1 \dots t_n)$.
3. Se A é $\neg B$, então s_1 e s_2 coincidem em $\text{vl}(B)$ e, por hipótese de indução, $A \models B[s_1]$ se e só se $A \models B[s_2]$, e portanto $A \not\models B[s_1]$ se e só se $A \not\models B[s_2]$, ou $A \models A[s_1]$ se e só se $A \models A[s_2]$.
4. Analogamente se A é $B \wedge C$.

5. Se A é $\forall vB$, então s_1 e s_2 coincidem em $vl(B) - \{v\}$, e portanto para todo $a \in |A|$, $s_1(v|a)$ e $s_2(v|a)$ coincidem em $vl(B)$. Logo, por hipótese de indução, para todo $a \in |A|$, $A \models B[s_1(v|a)]$ se e só se $A \models B[s_2(v|a)]$, ou $A \models A[s_1]$ se e só se $A \models A[s_2]$.

Uma fórmula da linguagem L que não possui variáveis livres será dita uma *sentença* de L . Vamos indicar por $Sent(L)$ o conjunto de todas as sentenças de L , assim

$$Sent(L) = \{A \in For(L) : vl(A) = \emptyset\}.$$

A proposição anterior aplicada às sentenças nos fornece imediatamente o seguinte:

COROLÁRIO - Sejam A uma L -estrutura e A uma sentença de L . Então para quaisquer duas substituições $s_1, s_2: V \rightarrow |A|$ tem-se: $A \models A[s_1]$ se e só se $A \models A[s_2]$.

DEFINIÇÃO III.1.8 - Sejam A uma L -estrutura e A uma fórmula de L . Diremos que A é *verdadeira* ou *válida* em A ou que A *satisfaz* ou é *modelo* de A , e denotar este fato por $A \models A$, quando ocorrer que A satisfaz A com toda substituição $s: V \rightarrow |A|$. Se A for válida em todas as L -estruturas, então diremos que A é *universalmente válida* ou simplesmente *válida* e denotaremos isto por $\models A$.

Observe que se A é uma sentença de L que não é válida em A , então $\neg A$ é válida em A ou seja: se A é sentença, então ou A é válida ou $\neg A$ é válida em A (e apenas uma das du

as, pois $|A| \neq \emptyset$); enquanto que se A é uma fórmula qualquer pode ocorrer que nem A seja válida em A nem $\neg A$ seja válida em A (por exemplo $v_1 = v_2$ numa estrutura cujo universo tenha pelo menos dois elementos).

Seja $S \subseteq \text{Sent}(L)$. Se todas as sentenças de S forem válidas em A diremos que A é *modelo* de S e denotaremos isto por $A \models S$. Se S admite algum modelo dizemos que S é *satisfatível* ou (semanticamente) *consistente*, caso contrário que ele é *contraditório* ou (semanticamente) *inconsistente*. Se uma sentença A é válida em todos os modelos de S dizemos que A é *consequência* (semântica) de S ou que S *implica* (semanticamente) A e denotamos isto por $S \models A$. No caso de $S = \{B\}$ escreveremos $B \models A$ ao invés de $\{B\} \models A$. Se $\emptyset \models A$, então $\models A$ (isto é A é universalmente válida).

Além destas definições "semânticas" existem outras "sintáticas", que lhes são equivalentes. Nos livros de teoria de modelos, após as demonstrações de equivalência, unificam-se as definições, suprimindo-se delas as palavras "semântico" e "sintático". Aqui não veremos este desenvolvimento, mas mesmo assim suprimiremos a palavra "semântico" das definições.

Se toda consequência de S pertence a S , dizemos que S é uma *teoria*. O conjunto de todas as sentenças válidas em A : $\text{Th}(A) = \{A \in \text{Sent}(L) : A \models A\}$ e o conjunto de todas as consequências de S : $\text{Cnsq}(S) = \{A \in \text{Sent}(L) : S \models A\}$ são exem

plos de teorias.

Se uma teoria Σ é consistente (isto é $\Sigma \not\subseteq \text{Sent}(L)$) e não existe nenhuma teoria consistente τ contendo propriamente (isto é não existe teoria τ tal que $\Sigma \subsetneq \tau \subseteq \text{Sent}(L)$), então dizemos que Σ é *completa*. Não é difícil de ver que as teorias $\text{Th}(A)$ são completas. É imediato também que se A é modelo de S , então A é modelo de $\text{Cnsq}(S)$. Costuma-se dizer que S é um conjunto de *axiomas* para a teoria Σ quando $\text{Cnsq}(S) = \Sigma$, de modo que podemos dizer, como era de se esperar, que se uma estrutura satisfaz todos os axiomas de uma teoria, então ela satisfaz também todas as conseqüências deles.

PROPOSIÇÃO III1.2 - Sejam A e B duas L -estruturas,

$h: |A| \rightarrow |B|$ um isomorfismo entre A e B e $s: V \rightarrow |A|$. Então:

- (i) $h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$ para todo termo $t \in \text{Ter}(L)$
- (ii) $A \models A[s]$ se e só se $B \models A[h \circ s]$, para toda $A \in \text{For}(L)$
- (iii) $A \models A$ se e só se $B \models A$, para toda $A \in \text{For}(L)$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) se faz por indução sobre os termos como na proposição III1.1

(ii) será demonstrado por indução sobre fórmulas que para toda $s: V \rightarrow |A|$ e toda fórmula $A \in \text{For}(L)$, $A \models A[s]$ se e só se $B \models A[h \circ s]$.

Quando A é atômica isto segue imediatamente do 1º item, do fato de h ser um isomorfismo e da definição de satisfatibilidade.

Quando A é $\neg B$ ou A é $B \wedge C$ o resultado segue também imediatamente da definição de satisfatibilidade.

Se A é $\forall v B$, então $A \models \forall v B[s]$ se e só se para todo $a \in |A|$ $A \models B[s(v|a)]$ que por hipótese de indução equivale a: para todo $a \in |A|$, $B \models B[h \circ (s(v|a))]$ que, como $h \circ (s(v|a)) = (h \circ s)(v|h(a))$, equivale a: para todo $a \in |A|$, $B \models B[(h \circ s)(v|h(a))]$ que, por ser h bijetora, equivale a: para todo $b \in |B|$, $B \models B[(h \circ s)(v|b)]$ ou seja $B \models \forall v B[h \circ s]$.

(iii) é consequência imediata de (ii) e do fato de h ser bijetora.

Duas estruturas similares que satisfazem as mesmas fórmulas dizem-se *elementarmente equivalentes*. Isto significa que são indistinguíveis por sentenças de 1ª. ordem. Estruturas isomorfas são elementarmente equivalentes, mas é possível que estruturas não isomorfas também sejam elementarmente equivalentes. Mais adiante apresentaremos um exemplo.

EXEMPLOS DE TEORIAS:

1. Na linguagem $L = \{<\}$ podemos enunciar axiomas para a teoria de ordem parcial, que são:

$$O_1. \quad \forall v_0 (v_0 \leq v_0)$$

$$O_2. \quad \forall v_0 v_1 (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_0 \rightarrow v_0 = v_1) \quad (\text{estamos escrevendo } \forall v_0 v_1 \text{ ao invés de } \forall v_0 \forall v_1)$$

$$O_3. \quad \forall v_0 v_1 v_2 (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_2 \rightarrow v_0 \leq v_2)$$

De acordo com a definição de satisfatibilidade, uma estrutura $A = \langle |A|, R \rangle$ para esta linguagem, será um modelo para a teoria de ordem parcial se e só se:

para todo $a \in |A|$, $\langle a, a \rangle \in R$

para todos $a, b \in |A|$, se $\langle a, b \rangle \in R$ e $\langle b, a \rangle \in R$, então $a = b$.

para todos $a, b, c \in |A|$, se $\langle a, b \rangle \in R$ e $\langle b, c \rangle \in R$, então $\langle a, c \rangle \in R$.

ou seja R é de fato uma relação de ordem parcial de $|A|$.

Colocando mais um axioma:

$$O_4. \quad \forall xy (x \leq y \vee y \leq x) \quad (\text{onde } x \text{ e } y \text{ são duas variáveis quaisquer})$$

teremos a teoria de ordem total.

Com mais os axiomas:

$$O_5. \quad \forall xy (x \leq y \wedge x \neq y \rightarrow \exists z (x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \wedge y \neq z))$$

$$O_6. \quad \exists xy (x \neq y)$$

teremos a teoria de ordem densa. Os modelos desta teoria são conjuntos totalmente ordenados com mais de um elemento e tais que entre dois elementos quaisquer sempre existe um terceiro.

Podemos também enunciar axiomas, nesta linguagem, para

a teoria de ordem densa sem extremos, acrescentando:

$$O_7. \quad \forall x \exists y (y \leq x \wedge y \neq x)$$

$$O_8. \quad \forall x \exists y (x \leq y \wedge y \neq x)$$

É um teorema de Cantor que dois modelos enumeráveis quaisquer desta teoria são sempre isomorfos. Se todos os modelos de cardinalidade α de uma teoria são isomorfos, ela se diz α -categórica. A teoria de ordem densa sem extremos é então $\aleph_0$ -categórica. É um teorema da teoria dos modelos (teste de Vaught) que se uma teoria de uma linguagem, que tem no máximo um número enumerável de símbolos não lógicos, só admite modelos infinitos e é α -categórica para algum α infinito, então ela é completa. A teoria de ordem densa sem extremos é portanto completa (uma vez que é imediato de ver que os modelos desta teoria são infinitos). Se uma teoria é completa, então dois modelos quaisquer da teoria são elementarmente equivalentes (é suficiente olhar com cuidado as duas definições). Em particular os racionais com a ordem usual e os reais com a ordem usual são modelos da teoria de ordem densa sem extremos e portanto são elementarmente equivalentes e obviamente eles não são isomorfos.

Não é possível porém enunciar nesta linguagem axiomas para uma teoria de boa ordem. Isto é: (demonstra-se que) não existe um conjunto de sentenças (finito ou infinito) desta linguagem tal que uma estrutura $A = \langle |A|, R \subset |A|^2 \rangle$

é modelo deste conjunto se e só se R é uma relação de boa ordem de $|A|$. E isto (informalmente) se deve ao fato que na definição de boa ordem quantifica-se sobre subconjuntos de $|A|$, enquanto que os quantificadores de uma sentença quando testada na estrutura percorrem apenas os elementos do universo $|A|$.

2. Na linguagem $L = \{*, e\}$ podem-se enunciar axiomas para a teoria dos grupos:

$$G_1. \quad \forall xyz((x*y)*z=x*(y*z))$$

$$G_2. \quad \forall x(x*e=x \wedge e*x=x)$$

$$G_3. \quad \forall x \exists y(x*y=e \wedge y*x=e)$$

enquanto que na linguagem $L = \{*, f, e\}$ pode-se enunciar, ao invés de G_3 , :

$$G_3^-. \quad \forall x(x*f(x)=e \wedge f(x)*x=e)$$

Nesta formulação todos os axiomas estão escritos usando-se apenas o conectivo $\wedge$ e o quantificador $\forall$, enquanto que na 1a. formulação foi necessário usar-se o quantificador $\exists$ (substituindo $\exists x A$ por $\neg \forall x \neg A$ ocorreria então o conectivo $\neg$; e de fato não se pode naquela linguagem enunciar axiomas para a teoria dos grupos usando apenas $\wedge$ e $\forall$). Existem na teoria dos modelos alguns teoremas que relacionam o tipo de axiomas de uma teoria com a preservação dos modelos daquela teoria (por extensões, homomorfismos, etc., veja as seções 3.2 e 5.2 de [C.K]). Por exemplo, se

$A = \langle |A|, *^A, f^A, e^A \rangle$ é um modelo da teoria dos grupos e $B = \langle |B|, *^B, f^B, e^B \rangle$ é uma subestrutura de A (isto é $|B| \subset |A|$, $*^B$ é a restrição de $*^A$ a $|B|^2$, f^B é a restrição de f^A a $|B|$ e $e^B = e^A$), então B também é um modelo da teoria dos grupos.

3. É fácil agora enunciar-se axiomas na linguagem $L = \{<, *, e\}$ para a teoria dos grupos ordenados, não se pode contudo enunciar axiomas para a teoria dos grupos ordenados arquimedianos. (observação.: tanto neste exemplo quanto nos outros a impossibilidade de enunciar-se um conceito em linguagem de 1a. ordem é um fato que demonstra-se na teoria dos modelos, porém a partir de resultados mais fortes do que estes que estamos vendo nesta introdução. Veja por exemplo em [C.K] o teorema da compacidade 1.3.22 e seus corolários na seção 2.1).

4. Escrevendo, de acordo com o formalismo imposto nas linguagens de 1a. ordem, os axiomas usuais de corpo, teremos axiomas na linguagem $L = \{+, ., 0, 1\}$ para a teoria dos corpos.

Dado um primo p , acrescentando-se o axioma: $p.1 = 1+(1+(\dots(1+1)\dots))=0$, onde o termo 1 ocorre p vezes, teremos axiomas para a teoria de corpos de característica p .

Se ao invés disto colocarmos, para cada primo p , a negação deste axioma, teremos a teoria de corpos de característica zero. Este é o primeiro exemplo que vemos de teo-

ria infinitamente axiomatizável. A teoria dos corpos de característica diferente de zero (porém arbitrária) é outro exemplo de conceito que não pode ser enunciado em linguagem de 1ª. ordem (veja Corolário 2.1.10 de [C.K]).

Um outro exemplo de teoria infinitamente axiomatizável é dos corpos algebricamente fechados: Aos axiomas de corpo acrescenta-se para cada inteiro positivo n o seguinte axioma:

$$\forall x_0 \dots x_n \quad y(x_0 \cdot y^n + \dots + x_0 = 0)$$

(dado o número n explicitamente pode-se escrever esta fórmula por extenso, sem o uso dos pontos, de acordo com as regras de formação de fórmulas).

§2 ULTRAPRODUTOS

Nesta seção apresentaremos um método de construção de estruturas a partir de uma família de estruturas similares dada. Este método originou-se com os trabalhos de Skolem em 1930, mas só foi largamente utilizado, após os trabalhos de Los em 1955. Para um tratamento mais completo veja [C.K] Caps. 4,5,6.

DEFINIÇÃO III2.1 - Seja I um conjunto não vazio e seja D um conjunto cujos elementos são subconjuntos de I , isto é: $D \subset P(I)$. Diremos que:

1. D satisfaz a *propriedade da interseção finita* se:

$$X_1, \dots, X_n \in D \text{ implica } X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset.$$

2. D é um *filtro* sobre I se:

(i) $I \in D$

(ii) $X, Y \in D$ implica $X \cap Y \in D$

(iii) $X \in D$ e $X \subset Y \subset I$ implicam $Y \in D$.

3. D é um *ultrafiltro* sobre I se:

(i) D é um filtro sobre I

(ii) para todo $X \subset I$, $X \in D$ se e só se $I - X \notin D$.

Um filtro sobre I será dito *próprio* se não for igual a todo $P(I)$. É imediato de ver que se D é um filtro sobre I , são equivalentes:

(i) D é um filtro próprio

(ii) $\emptyset \notin D$

(iii) D satisfaz a propriedade da interseção finita.

EXEMPLOS:

1. Dado $Y \subset I$, seja $\langle Y \rangle = \{X \subset I : Y \subset X\}$. $\langle Y \rangle$ é um filtro sobre I chamado *filtro principal gerado por Y* . $\langle Y \rangle$ será um ultrafiltro se e só se Y for unitário. Neste caso escreveremos $\langle y \rangle$ para $\langle \{y\} \rangle$.

2. O conjunto $F = \{X \subset I : I - X \text{ é finito}\}$ é um filtro sobre I conhecido como o *filtro de Fréchet de I* . Ele será próprio se e só se I é infinito.

3. Se em I está definida uma topologia então o conjunto $V(x)$ das vizinhanças de um ponto $x \in I$ é um filtro sobre I ,

que será um ultrafiltro se e só se $\{x\}$ é um aberto de I e neste caso $V(x) = \langle x \rangle$: o ultrafiltro principal gerado por $\{x\}$.

4. É fácil de ver que interseção qualquer de filtros é filtro, de modo que dado $E \subset P(I)$ o conjunto $[E] =$ interseção de todos os filtros que contem E (e esta interseção é possível pois existe pelo menos um filtro que contem E : o filtro impróprio $P(I)$) é um filtro sobre I chamado *filtro gerado por E* . O filtro $\langle Y \rangle$ é um caso particular deste quando $E = \{Y\}$.

PROPOSIÇÃO III2.1 - Seja $E \subset P(I)$ e seja $[E]$ o filtro gerado por E . Então:

- (i) $[E] = \{X \subset I : X = I \text{ ou existe } n \in \mathbb{N} \text{ e } Z_1, \dots, Z_n \in E \text{ tais que } Z_1 \cap \dots \cap Z_n \subset X\}$
- (ii) $[E]$ é um filtro próprio se e só se E satisfaz a propriedade da interseção finita.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja D o conjunto dos $X \subset I$ tais que $X = I$ ou existe $n \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \dots, Z_n \in E$ tais que $Z_1 \cap \dots \cap Z_n \subset X$. Então:

1. $I \in D$

2. Se $X, Y \in D$, então $X \supset Z_1 \cap \dots \cap Z_n$ e $Y \supset Z'_1 \cap \dots \cap Z'_m$ de modo que $X \cap Y \supset Z_1 \cap \dots \cap Z_n \cap Z'_1 \cap \dots \cap Z'_m$ e portanto $X \cap Y \in D$ (o caso em que $X = I$ ou $Y = I$ é trivial).

3. Se $X \in D$ e $X \subset Y \subset I$, então $Z_1 \cap \dots \cap Z_n \subset X \subset Y$ de modo que $Y \in D$ (idem).

Logo D é um filtro sobre I e como $E \subset D$ segue que $[E] \subset D$.

Por outro lado seja $X \in D$ e sejam $Z_1, \dots, Z_n \in E$ tais que $Z_1 \cap \dots \cap Z_n \subset X$. Como $[E]$ é um filtro que contém E segue que $Z_1, \dots, Z_n \in [E]$ e pela condição (ii) sobre filtros segue que $Z_1 \cap \dots \cap Z_n \in [E]$ e pela condição (iii) sobre filtros que $X \in [E]$. Logo $D \subset [E]$ e portanto $D = [E]$.

(ii) segue do item (i) desta proposição.

PROPOSIÇÃO III2.2 -

- (i) D é um ultrafiltro sobre I se e só se D é um filtro próprio e maximal sobre I
- (ii) Todo filtro próprio sobre I pode ser extendido a um ultrafiltro sobre I .

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja D um ultrafiltro sobre I . Então $\emptyset \notin D$ pois $I - \emptyset = I \in D$. Logo D é próprio. Seja $D' \neq D$ um filtro sobre I . Então existe $X \in D'$ tal que $X \notin D$. Como D é ultrafiltro $I - X \in D$ e como $D \subset D'$ segue que $I - X \in D'$. $X \in D'$ e $I - X \in D'$ implicam que $X \cap (I - X) = \emptyset \in D'$ pois D' é filtro e portanto $D' = P(I)$, o que mostrou que D é filtro próprio maximal.

Reciprocamente seja D um filtro próprio e maximal sobre I e seja $X \in I$. É claro que não se pode ter $X \in D$ e $I - X \in D$ senão $\emptyset = X \cap (I - X) \in D$ e D não seria próprio. Logo se $X \in D$, então $I - X \notin D$.

Por outro lado seja $I - X \notin D$, e seja $E = D \cup \{X\}$. E satisfaz a propriedade da interseção finita, pois se $Y_1, Y_2 \in E$,

então $Y_1, Y_2 \in D$ ou $Y_1 \cap Y_2 = Y \cap X$ com $Y \in D$. No primeiro caso $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ pois D é próprio e no segundo caso $Y \cap X \neq \emptyset$ senão $Y \subset I-X$ e portanto $I-X \in D$ contra a suposição. Logo E é um filtro próprio e como D é maximal segue que $D=[E]$ e portanto $X \in D$. Isto é se $I-X \notin D$, então $X \in D$; que junto com a primeira implicação nos dá: $X \in D$ se e só se $I-X \notin D$, e portanto que D é ultrafiltro.

(ii) Seja D um filtro próprio sobre I e seja C o conjunto de todos os filtros próprios sobre I que contem D . Então $C \neq \emptyset$ pois $D \in C$, e se $\{F_\lambda : \lambda \in L\}$ é uma cadeia não vazia de C (isto é um subconjunto de C totalmente ordenado por inclusão), então $F = \{F_\lambda : \lambda \in L\}$ é um elemento de C que majora $\{F_\lambda : \lambda \in L\}$, pois:

1. $D \subset F$ já que $D \subset F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$ (e $L \neq \emptyset$);
2. $\emptyset \notin F$ pois $\emptyset \notin F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$;
3. $I \in F$ já que $I \in F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$ (e $L \neq \emptyset$);
4. Se $X, Y \in F$, então $X \in F_{\lambda_1}$ $Y \in F_{\lambda_2}$ e como $\{F_\lambda : \lambda \in L\}$ é uma cadeia $F_{\lambda_1} \subset F_{\lambda_2}$ ou $F_{\lambda_2} \subset F_{\lambda_1}$, donde $X, Y \in F_\lambda$ para algum $\lambda \in L$ e portanto $X \cap Y \in F_\lambda$ donde $X \cap Y \in F$;
5. Se $X \in F$ e $X \subset Y \subset I$, então $X \in F_\lambda$ para algum $\lambda \in L$ e portanto $Y \in F_\lambda$ donde $Y \in F$.

Pode-se aplicar então o Lema de Zorn ao conjunto C para obter um elemento $M \in C$ maximal em C . M é um filtro próprio e maximal sobre I , pois se F fosse um filtro próprio contendo M , então $F \supset M \supset D$ e portanto F pertenceria a C e pela ma-

ximalidade de M em $\mathcal{C}$ seguiria que $F=M$. Pelo primeiro item desta proposição segue então que M é um ultrafiltro sobre I que contem D .

COROLÁRIO - Se I é infinito, então existem ultrafiltros não principais sobre I .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $F = \{X \subset I : I-X \text{ é finito}\}$ o filtro de Fréchet sobre I . Como I é infinito, F é um filtro próprio e pela proposição anterior existe D ultrafiltro sobre I que estende F . Se $X \in D$, então X é infinito senão $I-X$ também pertenceria a D (por pertencer a F). Logo D é não principal.

Seja D um filtro sobre um conjunto não vazio I e seja $\{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos indexados pelos elementos de I . O produto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ é o conjunto de todas as funções a definidas em I e tais que $a(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Denotaremos também por $\langle a_i : i \in I \rangle$ o elemento $a \in \prod_{i \in I} A_i$ tal que $a(i) = a_i$ para todo $i \in I$.

Vamos definir em $\prod_{i \in I} A_i$ uma relação $a =_D b$ (que se le a é igual a b módulo D) por:

$$a =_D b \quad \text{se e só se} \quad \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in D.$$

É claro que $a =_D a$ e que $a =_D b$ implica $b =_D a$. Também se $a =_D b$ e $b =_D c$, então $\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in D$ e $\{i \in I : b(i) = c(i)\} \in D$. Como:

$\{i \in I : a(i) = c(i)\} \supset \{i \in I : a(i) = b(i)\} \cap \{i \in I : b(i) = c(i)\}$ e D é um filtro segue que $\{i \in I : a(i) = c(i)\} \in D$ e portanto $a =_D c$. Logo $=_D$ é uma relação de equivalência em $\prod_{i \in I} A_i$.

Vamos denotar por a_D ou por $\langle a_i : i \in I \rangle_D$ a classe de equivalência de um elemento $a = \langle a_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} A_i$.

Assim $a_D = \{b \in \prod_{i \in I} A_i : a =_D b\}$ e vamos denotar por $\prod_{i \in I} A_i / D$ o conjunto de todas as classes de equivalência de $\prod_{i \in I} A_i$. Assim

$\prod_{i \in I} A_i / D = a_D : a \in \prod_{i \in I} A_i$. O conjunto $\prod_{i \in I} A_i / D$ será chamado o produto reduzido dos A_i módulo D e se D for um ultrafiltro ele será chamado o ultraproduto dos A_i módulo D .

DEFINIÇÃO III.2.2 - Sejam L uma linguagem de 1ª. ordem,

$\{A_i : i \in I\}$ uma família de L -estruturas indexadas pelos elementos de um conjunto não vazio I e D um filtro sobre I . Vamos definir uma estrutura $A = \prod_{i \in I} A_i / D$ que será chamada o produto reduzido das estruturas A_i módulo D :

1. O universo $|A|$ da estrutura A será o produto reduzido $\prod_{i \in I} |A_i| / D$ dos universos $|A_i|$ das estruturas A_i . Observe que como cada $|A_i| \neq \emptyset$ (por definição de estrutura) segue pelo Axioma da Escolha que $\prod_{i \in I} |A_i| \neq \emptyset$ e portanto $|A| = \prod_{i \in I} |A_i| / D \neq \emptyset$.

2. Se p é um símbolo predicativo n -ário de L , então :
 $p^A = \{ \langle a_D^1, \dots, a_D^n \rangle \in |A| : \{i \in I : \langle a^1(i), \dots, a^n(i) \rangle \in p^A\} \in D \}$.

Se $a_D^1 = b_D^1, \dots, a_D^n = b_D^n$, então:

$$\{i \in I : \langle b^1(i), \dots, b^n(i) \rangle \in p^A i\} \supset \{i \in I : \langle a^1(i), \dots, a^n(i) \rangle \in p^A i\} \cap \{i \in I : a^1(i) = b^1(i)\} \cap \dots \cap \{i \in I : a^n(i) = b^n(i)\},$$

e como todos os conjuntos do 2º membro pertencem a D segue, pelo fato de ser D um filtro, que:

$\{i \in I : \langle b^1(i), \dots, b^n(i) \rangle \in p^A i\} \in D$ o que mostra que a definição de $\langle a_D^1, \dots, a_D^n \rangle \in p^A$ independe dos representantes.

3. Se f é um símbolo funcional m-ário de L e $a_D^1, \dots, a_D^m \in |A|$, então: $f^A(a_D^1, \dots, a_D^m) = \langle f^A i(a^1(i), \dots, a^m(i)) : i \in I \rangle_D \in |A|$.

Analogamente, se $a_D^1 = b_D^1, \dots, a_D^m = b_D^m$, então:

$$\langle f^A i(a^1(i), \dots, a^m(i)) : i \in I \rangle_D = \langle f^A i(b^1(i), \dots, b^m(i)) : i \in I \rangle_D$$

e portanto a definição de $f^A(a_D^1, \dots, a_D^m)$ independe dos representantes.

4. Se c é um símbolo de constante de L, então:

$$c^A = \langle c^A i : i \in I \rangle_D \in |A|.$$

Dada uma família $\{s_i : V \rightarrow |A_i| : i \in I\}$ de substituições vamos denotar por $\langle s_i : i \in I \rangle_D$ a substituição $\langle s_i : i \in I \rangle_D : V \rightarrow |A|$ tal que $\langle s_i : i \in I \rangle_D(v_n) = \langle s_i(v_n) : i \in I \rangle_D$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se D é um ultrafiltro o produto reduzido $\prod_{i \in I} A_i / D$ se diz um *ultraproduto*. Para ultraproductos demonstraremos um resultado de Los conhecido como o "Teorema fundamental dos Ultraprodutos" que fornece condições necessárias e suficientes para que uma fórmula seja válida no ultraproducto a partir

da validade dela nas estruturas componentes:

TEOREMA III2.1 (Los) - Sejam A o ultraproduto $\prod_{i \in I} A_i / D$ das L-estruturas $\{A_i : i \in I\}$ pelo ultrafiltro D , $\{s_i : V \rightarrow |A_i| : i \in I\}$ uma família de substituições e $s = \langle s_i : i \in I \rangle_D : V \rightarrow |A|$. Então:

(i) para todo termo $t \in \text{Ter}(L)$, $\bar{s}(t) = \langle \bar{s}_i(t) : i \in I \rangle_D$ (isto é: $\overline{\langle s_i : i \in I \rangle_D}(t) = \langle \bar{s}_i(t) : i \in I \rangle_D$).

(ii) para toda fórmula $A \in \text{For}(L)$, $A \models A[s]$ se e só se $\{i \in I : A_i \models A[s_i]\} \in D$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) por indução sobre os termos:

1. se o termo t é uma variável v , vale a afirmação por definição da $s = \langle s_i : i \in I \rangle_D$

2. se o termo t é um símbolo de constante c , então

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) &= \bar{s}(c) = c^A = \langle c^A : i \in I \rangle_D = \langle \bar{s}_i(c) : i \in I \rangle_D = \\ &= \langle \bar{s}_i(t) : i \in I \rangle_D \end{aligned}$$

3. se o termo t é $f(t_1 \dots t_m)$ onde f é um símbolo funcional m -ário e $t_1, \dots, t_m$ termos, então:

$$\bar{s}(t) = \bar{s}(f(t_1 \dots t_m)) = f^A(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_m))$$

que por hipótese de indução é igual a:

$$f^A(\langle \bar{s}_i(t_1) : i \in I \rangle_D, \dots, \langle \bar{s}_i(t_m) : i \in I \rangle_D)$$

que por definição de f^A é igual a:

$$\begin{aligned} &\langle f^A(\bar{s}_i(t_1), \dots, \bar{s}_i(t_m)) : i \in I \rangle_D = \\ &= \langle \bar{s}_i(f(t_1 \dots t_m)) : i \in I \rangle_D = \langle \bar{s}_i(t) : i \in I \rangle_D. \end{aligned}$$

(ii) será demonstrado, por indução sobre fórmulas, que

para toda família $\{s_i: V \rightarrow |A_i| : i \in I\}$ de substituições vale a afirmação do item (ii).

1. $A \models t_1 = t_2[s]$ se e só se $\overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$ se e só se

$\langle \overline{s}_i(t_1) : i \in I \rangle_D = \langle \overline{s}_i(t_2) : i \in I \rangle_D$ se e só se

$\{i \in I : \overline{s}_i(t_1) = \overline{s}_i(t_2)\} \in D$ se e só se

$\{i \in I : A_i \models t_1 = t_2[s_i]\} \in D$.

2. usando a definição de p^A segue analogamente a 1. que:

$A \models p(t_1 \dots t_n)[s]$ se e só se

$\{i \in I : A_i \models p(t_1 \dots t_n)[s_i]\} \in D$.

3. $A \models \neg A[s]$ se e só se, $A \not\models A[s]$ e isto por hipótese de indução equivale a $\{i \in I : A_i \models A[s_i]\} \notin D$ que como D é

ultrafiltro equivale a $\{i \in I : A_i \not\models A[s_i]\} =$

$I - \{i \in I : A_i \models A[s_i]\} \in D$ ou seja equivale a

$\{i \in I : A_i \models \neg A[s_i]\} \in D$.

4. No caso de $A \wedge B$, para prosseguir na sequência de equivalências, precisa-se usar que $X \wedge Y \in D$ se e só se $X \in D$ e $Y \in D$; e esta é uma consequência imediata das condições (ii) e (iii) de um filtro (nem é necessário usar a condição de ultrafiltro). De resto a demonstração é análoga à de 3.

5. Se $\{i \in I : A_i \models \forall v_k A[s_i]\} \in D$, então:

Dado $a_D = \langle a_i : i \in I \rangle_D \in |A|$, tem-se que $s(v_k | a_D)$ é precisamente a substituição $\langle s_i(v_k | a_i) : i \in I \rangle_D$ e portanto,

por hipótese de indução, $A \models A[s(v_k | a_D)]$ se e só se

$\{i \in I : A_i \models A[s_i(v_k | a_i)]\} \in D$. Mas qualquer que seja

$a_D \in |A|$, $\{i \in I : A_i \models A[s_i(v_k | a_i)]\} \supset \{i \in I : A_i \models \forall v_k A[s_i]\}$ e portanto $\{i \in I : A_i \models A[s_i(v_k | a_i)]\} \in D$. Logo para todo $a_D \in |A|$, $A \models A[s(v_k | a)]$, ou seja $A \models \forall v_k A[s]$.

Reciprocamente, se $\{i \in I : A_i \models \forall v_k A[s_i]\} \notin D$, então:
 $X = \{i \in I : A_i \not\models \forall v_k A[s_i]\} = I - \{i \in I : A_i \models \forall v_k A[s_i]\} \in D$.
 Para cada $i \in X$, seja $a_i \in |A_i|$ tal que $A_i \not\models A[s_i(v_k | a_i)]$ e para cada $i \in I - X$ seja $a_i \in |A_i|$ um elemento qualquer de $|A_i|$ uma vez que $|A_i| \neq \emptyset$; e seja $a_D = \langle a_i : i \in I \rangle_D$.
 Por hipótese de indução $A \models A[s(v_k | a_D)]$ se e só se $\{i \in I : A_i \models A[s_i(v_k | a_i)]\} \in D$. Mas devido a escolha dos a_i s $\{i \in I : A_i \not\models A[s_i(v_k | a_i)]\} \supset X$ e portanto pertence a D . Logo $A \not\models A[s(v_k | a_D)]$ ou seja $A \not\models \forall v_k A[s]$.

COROLÁRIO - Com as notações do teorema:

$A \models A$ se e só se $\{i \in I : A_i \models A\} \in D$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\{i \in I : A_i \models A\} \in D$, então dada $s:V \rightarrow |A|$ existem $s_i:V \rightarrow |A_i|$ tais que $s = \langle s_i : i \in I \rangle_D$ e pelo teorema $A \models A[s]$ pois $\{i \in I : A_i \models A[s_i]\} \supset \{i \in I : A_i \models A\}$ e portanto pertence a D . Como isto vale para toda $s:V \rightarrow |A|$, segue que $A \models A$.

Reciprocamente se $\{i \in I : A_i \models A\} \notin D$, então
 $X = \{i \in I : A_i \not\models A\} = I - \{i \in I : A_i \models A\} \in D$. Para cada $i \in X$, seja $s_i:V \rightarrow |A_i|$ tal que $A_i \not\models A[s_i]$ e para $i \in I - X$, seja $s_i:V \rightarrow |A_i|$ uma substituição qualquer; e seja $s = \langle s_i : i \in I \rangle_D$.

Pelo teorema $A \not\models A[s]$ pois $\{i \in I : A_i \not\models A[s_i]\} \supset X$ e portanto pertence a D. Logo $A \not\models A$.

§3 O RESULTADO DE AX E KOCHEN

Sejam $L = \{*, e, \leq\}$ uma linguagem para grupos ordenados e $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ uma linguagem para corpos; e sejam $\langle G, *_G, e_G, \leq_G \rangle$ um grupo ordenado, $\langle K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K \rangle$ um corpo e $v: K^* \rightarrow G$ uma valoração de K com grupo de valores G . Estamos interessados em definir uma linguagem de 1ª. ordem e enunciar nesta linguagem axiomas, de modo que os modelos desta teoria sejam precisamente os corpos valorados -que nos 1ºs. capítulos denotávamos por- $\langle K, v, G \rangle$.

Definiremos a linguagem para a teoria dos corpos valorados como sendo $L = \{gr, k, *, e, \leq, +, \cdot, 0, 1, u\}$, onde gr e k são dois símbolos de predicados unários e u é um símbolo de função unária. Para uma L -estrutura tomaremos:

$A = \langle G \amalg K, G, K, *_G, e_G, \leq_G, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K, v \rangle$, onde $G \amalg K$ -a reunião disjunta de G e K - é o universo $|A|$ da estrutura, as relações unárias G e K são as interpretações gr^A e k^A dos símbolos de predicado gr e k na estrutura e a função v é a interpretação u^A do símbolo funcional u na estrutura. A rigor como v não é definido em todo $G \amalg K$ e $*_G, +_K, \cdot_K$ não são definidos em todo

$(G \amalg K)^2$, A não está de acordo com a definição III1.2 de L -estrutura. Mas isto não causará problemas, pois podemos supor $*_G, +_K, \cdot_K$ extendidas, arbitrária e artificialmente a $(G \amalg K)^2$ e v a $G \amalg K$.

AXIOMAS PARA A TEORIA DOS CORPOS VALORADOS:

1. $\forall x(\text{gr}(x) \leftrightarrow k(x))$: caracteriza o fato que o universo da estrutura é uma reunião disjunta de gr^A e k^A .

2. Axiomas para o grupo ordenado $\langle G, *_G, e_G, \leq_G \rangle$:

Formalmente na estrutura A , $*_G$ é uma função de $(G \amalg K)^2$ em $G \amalg K$, $e_G \in G \amalg K$ e $\leq_G \subset (G \amalg K)^2$. Por isto precisamos adicionar aos axiomas de grupo ordenado os fatos adicionais sobre $*_G, e_G, \leq_G$; por exemplo:

$\forall xyz(\text{gr}(x) \wedge \text{gr}(y) \wedge \text{gr}(z) \rightarrow (x*y)*z = x*(y*z))$: para a associatividade.

$\forall xy(\text{gr}(x) \wedge \text{gr}(y) \rightarrow \text{gr}(x*y))$: para garantir que G é fechado em relação a $*_G$.

$\text{gr}(e) \wedge \forall x(\text{gr}(x) \rightarrow x*e = x \wedge e*x = x)$: para o elemento neutro e_G .

$\forall xy(\text{gr}(x) \wedge \text{gr}(y) \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$: para garantir que a ordem em G seja total.

e assim por diante para todos os axiomas de grupo ordenado.

3. Axiomas para o corpo $\langle K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K \rangle$:

Escolhidos de modo análogo ao item 2., por exemplo, para a existência de inverso: $\forall x(k(x) \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y(k(y) \wedge x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1))$

4. Axiomas para a valoração $v=u^A$:

$\forall x(k(x) \wedge x \neq 0 \rightarrow gr(u(x)))$: para garantir que v é uma função de K^* com valores em G .

$\forall x(gr(x) \rightarrow \exists y(k(y) \wedge y \neq 0 \wedge x = u(y)))$: v é sobre G .

$\forall xy(k(x) \wedge k(y) \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \rightarrow u(x \cdot y) = u(x) * u(y))$: propriedade (i) das valorações.

$\forall xyz(k(x) \wedge k(y) \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x+y \neq 0 \rightarrow (u(x) \leq u(y) \rightarrow u(x) \leq u(x+y)))$: propriedade (ii) das valorações.

Definimos então uma linguagem de 1a. ordem e sentenças nesta linguagem de tal modo que uma estrutura $A = \langle G \amalg K, G, K, *_G, e_G, \leq_G, +_K, *_K, 0_K, 1_K, v \rangle$ para esta linguagem satisfaz aquelas sentenças se e só se $\langle K, v, G \rangle$ (na notação antiga) é um corpo valorado. Vimos assim que a teoria dos corpos valorados pode ser enunciada numa linguagem de 1a. ordem. Para maior comodidade e sem prejuízos para a clareza, voltaremos a escrever $\langle K, v, G \rangle$ para a estrutura A , designar por $+$ também a operação do grupo e por 0 também o elemento neutro do grupo.

Sejam $\{A_i = \langle K_i, v_i, G_i \rangle : i \in I\}$ uma família de corpos valorados, D um ultrafiltro sobre I e $A = \prod_{i \in I} A_i / D$ o ultraproduto dos A_i pelo ultrafiltro D .

Como cada A_i satisfaz os axiomas de corpo valorado segue pelo Teorema de Los que A também satisfaz tais axiomas

e portanto é um corpo valorado. Em particular o universo $|A|$ de A será a reunião disjunta do universo $G = \text{gr}^A$ de um grupo ordenado com o universo $K = k^A$ de um corpo e a função $v = u^A$ será uma valoração de K com grupo de valores G . Podemos então dizer que A é o corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$ de acordo com a convenção feita acima.

Sejam $a_i \in G_i$ para $i \in I$, o elemento $\langle a_i : i \in I \rangle$ pertence tanto a $\prod_{i \in I} G_i$ quanto a $\prod_{i \in I} G_i \amalg K_i$, e o elemento $\langle a_i : i \in I \rangle_D$ pode ser visto como um elemento de $\prod_{i \in I} G_i / D$ ou $\prod_{i \in I} (G_i \amalg K_i) / D$. E apesar que em cada caso é um objeto diferente (no 1º caso $\langle a_i : i \in I \rangle_D$ é igual a $\{ \langle b_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} G_i : \{ i \in I : a_i = b_i \} \in D \}$ e no 2º é igual a $\{ \langle b_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} G_i \amalg K_i : \{ i \in I : a_i = b_i \} \in D \}$) podemos identificar $\langle a_i : i \in I \rangle_D \in \prod_{i \in I} G_i / D$ com $\langle a_i : i \in I \rangle_D \in \prod_{i \in I} (G_i \amalg K_i) / D$ (também pois para $\langle a_i : i \in I \rangle$ e $\langle a_i' : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} G_i$, vale que: $\langle a_i : i \in I \rangle_D = \langle a_i' : i \in I \rangle_D$ no 1º caso se e só se $\langle a_i : i \in I \rangle_D = \langle a_i' : i \in I \rangle_D$ no 2º caso) e encarar $\prod_{i \in I} G_i / D$ como um subconjunto de $\prod_{i \in I} (G_i \amalg K_i) / D$. Desta forma $\prod_{i \in I} G_i / D$ será precisamente G pelo item 2, da definição de ultraproduto de estruturas (definição III2.2)

Da mesma forma "encarando" $\prod_{i \in I} K_i / D$ como subconjunto de $\prod_{i \in I} (G_i \amalg K_i) / D$, temos que $K = \prod_{i \in I} K_i / D$, e as igualdades: $G = \prod_{i \in I} G_i / D$ e $K = \prod_{i \in I} K_i / D$ valem, não apenas entre os conjun-

tos, mas também entre as estruturas de grupo ordenado e corpo de quem estes conjuntos são os universos.

Seja $a_D = \langle a_i : i \in I \rangle_D \in R_{\langle K, v \rangle} \subset K$, isto significa que $a_D \in K$ e $v(a_D) \geq 0$ e portanto que $\{i \in I : v_i(a_i) \geq 0_i\} \in D$ que equivale a $\{i \in I : a_i \in R_{\langle K_i, v_i \rangle}\} \in D$. Temos então que $R_{\langle K, v \rangle} = \prod_{i \in I} R_{\langle K_i, v_i \rangle} / D$ onde estamos mais uma vez "encarando" $\prod_{i \in I} R_{\langle K_i, v_i \rangle} / D$ como um subconjunto de $K = \prod_{i \in I} K_i / D$.

Analogamente $I_{\langle K, v \rangle} = \prod_{i \in I} I_{\langle K_i, v_i \rangle} / D$. Vale também que:

$$\begin{aligned} \bar{K}_v &= R_{\langle K, v \rangle} / I_{\langle K, v \rangle} = \left(\prod_{i \in I} R_{\langle K_i, v_i \rangle} / D \right) / \left(\prod_{i \in I} I_{\langle K_i, v_i \rangle} / D \right) \approx \\ &\approx \prod_{i \in I} (R_{\langle K_i, v_i \rangle} / I_{\langle K_i, v_i \rangle}) / D = \prod_{i \in I} (\bar{K}_i)_{v_i} / D, \end{aligned}$$

pois não é difícil de ver que, a aplicação que a $a_D + I_{\langle K, v \rangle} \in \bar{K}_v$ com $a_D \in R_{\langle K, v \rangle}$, associa $\langle a_i + I_{\langle K_i, v_i \rangle} : i \in I \rangle_D \in \prod_{i \in I} (\bar{K}_i)_{v_i} / D$, onde $a_D = \langle a_i : i \in I \rangle_D$ com $a_i \in R_{\langle K_i, v_i \rangle}$ para todo $i \in I$, está bem definida e é um isomorfismo de corpos.

Sejam agora, para cada primo positivo p , $A_p = \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ e $A'_p = \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ os completados de $\langle Q, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_p(X), v_X, \mathbb{Z} \rangle$ (veja seção I4) e seja D um ultrafiltro não principal do conjunto dos números primos positivos P . Os ultraproductos $A = \prod_{p \in P} A_p / D$ e $A' = \prod_{p \in P} A'_p / D$ são dois corpos valorados $A = \langle K, v, G \rangle$ e $A' = \langle K', v', G' \rangle$ com $G = G' = \prod_{p \in P} \mathbb{Z} / D$

(pois $G_p = G'_p = \mathbb{Z}$ para todo $p \in P$) e $\bar{K}_v \simeq \bar{K}'_{v'} \simeq \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p / D$ (pois

$$(\bar{K}_p)_{v_p} = (\bar{Q}_p)_{v_p} \simeq \mathbb{Z}_p \simeq \overline{\mathbb{Z}_p((X))}_{\text{ord}} = (\bar{K}'_p)_{v'_p})$$

Além disso $\text{car}(\bar{K}_v) = \text{car}(\bar{K}'_{v'}) = 0$, pois para todo $p' \in P$ a sentença $p'.1 = 0$ é falsa no ultraproduto $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p / D$ uma vez que $\{p \in P : \mathbb{Z}_p \mid p'.1 = 0\} = \{p'\} \notin D$ já que D é um ultrafiltro não principal. Portanto $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G' \rangle$ são ambos não ramificados, com índice de ramificação zero.

Mostrando que $\langle K, v, G \rangle$ e $\langle K', v', G' \rangle$ possuem x-seções, satisfazem o Lema de Hensel, são ω -pseudocompletos e que a cardinalidade de K e K' é $\aleph_1$, estarão satisfeitas todas as condições para o Teorema II2, e poderemos então concluir:

TEOREMA III3.1 - Existe um isomorfismo x-analítico entre os ultraproductos $A = \prod_{p \in P} \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle / D$ e $A' = \prod_{p \in P} \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle / D$, onde D é um ultrafiltro não principal de P .

DEMONSTRAÇÃO

As duas primeiras afirmações - que A e A' possuem x-seções e satisfazem o Lema de Hensel - serão conseqüências do Teorema de Łos, desde que se mostre que tais afirmações podem ser enunciadas em linguagem de 1a. ordem.

1. Seja $L' = L \cup \{\pi\}$, onde L é a linguagem para corpos valorados e π é um símbolo funcional unário; e sejam B_p

e B'_p as L' -estruturas obtidas acrescentando-se a $A_p = \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ e $A'_p = \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ as x -seções (que se sabe que estes dois corpos valorados possuem) π^{B_p} e $\pi^{B'_p}$ para a interpretação do símbolo funcional unário π em B_p e B'_p (aqui também supõe-se π^{B_p} e $\pi^{B'_p}$ extendidas arbitrária e artificialmente a todo $G_p \amalg K_p$ e $G'_p \amalg K'_p$). As estruturas B_p e B'_p satisfarão então as seguintes sentenças de L' :

$\forall x(\text{gr}(x) \rightarrow k(\pi(x)))$: para garantir que π é uma função de G em K .

$\forall xy(\text{gr}(x) \wedge \text{gr}(y) \rightarrow \pi(x*y) = \pi(x) \cdot \pi(y))$: π é homomorfismo.

$\forall x(\text{gr}(x) \rightarrow u(\pi(x)) = x)$: $v \circ \pi = \text{id}_G$.

e portanto (pelo teorema de Los) os ultraproductos:

$B = \prod_{p \in P} B_p / D$ e $B' = \prod_{p \in P} B'_p / D$ também satisfarão estas sentenças. Mas isto quer dizer que π^B e $\pi^{B'}$ -interpretações do símbolo π nas estruturas B e B' - são x -seções para os corpos valorados A e A' . E como $\text{car}(\bar{K}_v) = \text{car}(\bar{K}'_v) = 0$ estas x -seções são automaticamente normalizadas.

2. Para cada $n > 0$ e $0 < m < n$, mostraremos como escrever uma sentença na linguagem de 1ª. ordem para os corpos valorados (em notação simplificada) tal que um corpo valorado $\langle K, v, G \rangle$ satisfará esta sentença se e só se:

Qualquer que sejam $f, g, h \in R_{\langle K, v \rangle}[X]$, se $\text{gr}(f) = n$ e $\text{gr}(g) = \text{gr}(\bar{g}) = m$ e $\text{gr}(h) \leq n - m$ e $\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$ e $\bar{g}, \bar{h}$ são relativa

mente primos, então existem $g^*, h^* \in R_{<K, v>}[X]$ tais que $\text{gr}(g^*) = \text{gr}(g)$ e $\overline{g^*} = \overline{g}$ e $\overline{h^*} = \overline{h}$ e $f = g.h$.

É claro que $<K, v, G>$ satisfará todas estas sentenças quando variam n e m se e só se ele satisfizer o Lema de Hensel.

Começamos quantificando $\forall x_0 \dots x_n y_0 \dots y_m z_0 \dots z_{n-m}$ (onde $x_0, \dots, z_{n-m}$ são $2n+3$ variáveis distintas) para descrever os polinômios $f = x_0 + x_1 X + \dots + x_n X^n$, $g = y_0 + y_1 X + \dots + y_m X^m$ e $h = z_0 + \dots + z_{n-m} X^{n-m}$. Depois colocamos $v(x_0) \geq 0 \wedge \dots \wedge v(x_n) \geq 0 \wedge v(y_0) \geq 0 \wedge \dots \wedge v(z_{n-m}) \geq 0$ (onde $v(a) \geq \alpha$ abrevia a fórmula: $(a \neq 0 \wedge v(a) \geq \alpha) \vee a = 0$; e a mesma observação valendo para $v(a) > \alpha$) para descrever que $f, g, h \in R_{<K, v>}[X]$, e $x_n \neq 0 \wedge v(y_m) = 0$

para garantir que $\text{gr}(f) = n$ e $\text{gr}(g) = \text{gr}(\overline{g}) = m$. Enunciamos que $\overline{f} = \overline{g}.\overline{h}$ através de: $v(x_0 - y_0 z_0) > 0 \wedge v(x_1 - y_0 z_1 - y_1 z_0) > 0 \wedge \dots \wedge v(x_{n-1} - y_{m-1} z_{n-m} - y_m z_{n-m-1}) > 0 \wedge v(x_n - y_m z_{n-m}) > 0$ (observe que dados os inteiros n e m podemos escrever "explicitamente" -sem o uso dos pontos- esta expressão).

$\overline{g}, \overline{h}$ relativamente primos equivale a: existem $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{K}_v[X]$ tais que $\overline{a}.\overline{g} + \overline{b}.\overline{h} = 1$ e $\text{gr}(\overline{a}) < n-m$ e $\text{gr}(\overline{b}) < m$ (pois, pelo Teorema de Bezout, existem $\overline{a}_1, \overline{b}_1 \in \overline{K}_v[X]$ tais que $\overline{a}_1.\overline{g} + \overline{b}_1.\overline{h} = 1$ e portanto $(\overline{a}_1 - \overline{\lambda h})\overline{g} + (\overline{b}_1 + \overline{\lambda g})\overline{h} = 1$ para todo $\overline{\lambda} \in \overline{K}_v[X]$ Tomando para $\overline{\lambda}$ o quociente de $\overline{a}_1$ por $\overline{h}$ teremos que: $\text{gr}(\overline{a}_1 - \overline{\lambda h}) < \text{gr}(\overline{h}) \leq n-m$ e $\text{gr}(\overline{b}_1 + \overline{\lambda g}) < \text{gr}(\overline{g}) = m$). E isto pode ser escrito em linguagem de 1ª. ordem usando o mesmo tipo de procedimento que anteriormente, uma vez que os graus

de $\bar{a}$ e $\bar{b}$ estão limitados por números fixados.

E assim por diante pode-se escrever sem mais dificuldades o restante das condições para a sentença.

Os corpos valorados $\langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ são completos e portanto satisfazem o Lema de Hensel (teor. I4.1). Como o Lema de Hensel é enunciável na linguagem de 1ª. ordem para corpos valorados segue pelo Teorema de Los que os ultraprodutos $\prod_{p \in P} \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle / D$ e $\prod_{p \in P} \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle / D$ também satisfazem o Lema de Hensel.

3. Não se pode enunciar na linguagem de 1ª. ordem para corpos valorados que um corpo é ω -pseudocompleto. De modo que não se pode concluir, usando o Teorema de Los como nos casos precedentes, que um ultraproduto é ω -pseudocompleto a partir de ω -pseudocompletude dos corpos componentes.

Mas neste caso a ω -pseudocompletude dos dois ultraproductos será consequência apenas do fato de ser o ultraproduto não principal e sobre uma família enumerável de corpos valorados cujos grupos de valores admitem um mínimo positivo.

Vamos então demonstrar o seguinte:

LEMA III3.1 - Sejam $\{A_i = \langle K_i, v_i, G_i \rangle : i \in \omega\}$ uma família enumerável de corpos valorados com $G_i = \mathbb{Z}$ para todo $i \in \omega$, e seja D um ultrafiltro não principal sobre ω . Então:

$\langle K, v, G \rangle = A = \prod_{i \in \omega} A_i / D$ é ω -pseudocompleto.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\{a_D^n\}_{n < \omega}$ uma sequência pseudoconvergente de $\langle K, v, G \rangle$.

Isto significa que existe $n_0 < \omega$ tal que $v(a_D^s - a_D^r) < v(a_D^t - a_D^s)$ para todos $n_0 \leq r < s < t < \omega$ e que a sequência $\gamma_D^n = v(a_D^{n+1} - a_D^n)$ é estritamente crescente a partir de n_0 (veja definição I5.1 e a demonstração do Lema I5.1).

Sejam $\gamma_i^n = v_i(a_i^{n+1} - a_i^n) \in G_i$ para todos $n, i \in \omega$. Por definição de ultraproduto, $\gamma_D^n = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D$ e para todo $n \geq n_0$, $X_n = \{i \in \omega : \gamma_i^n < \gamma_i^{n+1}\} \in D$.

A partir destes fatos é possível construir para cada $i \in \omega$ uma sequência $\{\delta_i^n\}_{n < \omega}$ de elementos de G_i tais que:

$\delta_D^n = \langle \delta_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D = \gamma_D^n$ para todo $n < \omega$ e $\delta_i^n < \delta_i^{n+1}$ para todo $n_0 \leq n < \omega$ e para todo $i \in \omega$.

Isto será feito, fixado $i \in \omega$, indutivamente sobre $n < \omega$, da seguinte maneira:

para $n \leq n_0$, $\delta_i^n = \gamma_i^n$

para $n \geq n_0$, $\delta_i^{n+1} = \max\{\delta_i^n + 1, \gamma_i^{n+1}\}$.

É óbvio então que $\delta_i^n < \delta_i^{n+1}$ para todo $n \geq n_0$ e $i \in \omega$ e que

$\langle \delta_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D$ para todo $n \leq n_0$. Seja agora

$\langle \delta_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D$ para algum $n \geq n_0$. Então:

$Y_n = \{i \in \omega : \delta_i^n = \gamma_i^n\} \in D$ e se $i \in X_n \cap Y_n$, então

$$\delta_i^n = \gamma_i^n < \gamma_i^{n+1} \quad \text{ou} \quad \delta_i^{n+1} \leq \gamma_i^{n+1}, \quad \text{donde}$$

$$\delta_i^{n+1} = \max\{\delta_i^{n+1}, \gamma_i^{n+1}\} = \gamma_i^{n+1} \quad \text{e} \quad Y_{n+1} = \{i \in I : \delta_i^{n+1} = \gamma_i^{n+1}\} \supset$$

$\supset X_n \cap Y_n$. Como $X_n, Y_n \in D$ e D é um filtro segue que

$X_n \cap Y_n \in D$ e portanto $Y_{n+1} \in D$, donde

$$\langle \delta_i^{n+1} : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^{n+1} : i \in \omega \rangle_D. \quad \text{E assim foi demonstrado, por in-}$$

dução, que: $\delta_D^n = \langle \delta_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D = \gamma_D^n$ para todo $n \in \omega$.

Agora, para cada $i \in \omega$, será construída uma seqüência $\{b_i^n\}_{n \in \omega}$ de elementos de K_i tal que:

$$b_D^n = \langle b_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle a_i^n : i \in \omega \rangle_D = a_D^n \quad \text{para todo } n \in \omega \text{ e}$$

$$v_i(b_i^{n+1} - b_i^n) = \delta_i^n \quad \text{para todos } n_0 \leq n < \omega \text{ e } i \in \omega.$$

Isto será feito, fixado $i \in \omega$, indutivamente sobre $n < \omega$, da seguinte forma:

$$\text{para } n \leq n_0, \quad b_i^n = a_i^n$$

$$\text{para } n \geq n_0, \quad b_i^{n+1} = \begin{cases} a_i^{n+1} & \text{se } v_i(a_i^{n+1} - b_i^n) = \delta_i^n \\ b_i^n + c_i^n & \text{se } v_i(a_i^{n+1} - b_i^n) \neq \delta_i^n \end{cases}$$

onde c_i^n é um elemento de K_i tal que $v_i(c_i^n) = \delta_i^n$.

É óbvio então que $v_i(b_i^{n+1} - b_i^n) = \delta_i^n$ para todo $n \geq n_0$ e $i \in \omega$ e que $\langle b_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle a_i^n : i \in \omega \rangle_D$ para todo $n \leq n_0$.

Seja agora $\langle b_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle a_i^n : i \in \omega \rangle_D$ para algum $n \geq n_0$.

Então $Z_n = \{i \in \omega : b_i^n = a_i^n\} \in D$ e se $i \in Y_n \cap Z_n$ então:

$$v_i(a_i^{n+1} - b_i^n) = v_i(a_i^{n+1} - a_i^n) = \gamma_i^n = \delta_i^n \text{ e por construção}$$

$$b_i^{n+1} = a_i^{n+1}. \text{ Isto é } Z_{n+1} = \{i \in \omega : b_i^{n+1} = a_i^{n+1}\} \supset Y_n \cap Z_n$$

e portanto $Z_{n+1} \in D$ o que significa que:

$$\langle b_i^{n+1} : i \in \omega \rangle_D = \langle a_i^{n+1} : i \in \omega \rangle_D. \text{ E assim foi demonstrado, por in-}$$

dução que $b_D^n = \langle b_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle a_i^n : i \in \omega \rangle_D = a_D^n$ para todo $n < \omega$.

As seqüências $\{b_i^n\}_{n \in \omega}$ são pseudoconvergentes (em K_i) e para todo $n \geq n_0$ e $i \in \omega$ vale que: $\delta_i^n = v_i(b_i^{n+1} - b_i^n) = v_i(b_i^r - b_i^n)$ para todo $r > n$ (veja Lema 15.1).

Sejam então $a_i = b_i^i \in K_i$ para cada $i \in \omega$. O elemento $a_D = \langle a_i : i \in \omega \rangle_D$ é um pseudolimite de $\{a_D^n\}_{n \in \omega}$ pois: se $n \geq n_0$, então $v(a_D - a_D^n) = v(a_D - b_D^n) = \langle v_i(a_i - b_i^n) : i \in \omega \rangle_D = \langle v_i(b_i^i - b_i^n) : i \in \omega \rangle_D$. Como para $r > n$ $v_i(b_i^r - b_i^n) = \delta_i^n$, segue que para $i > n$ $v_i(b_i^i - b_i^n) = \delta_i^n$ ou que

$W_n = \{i \in \omega : v_i(b_i^i - b_i^n) = \delta_i^n\} \supset \{i \in \omega : i > n\}$. W_n é um subconjunto de ω de complementar finito, pertence portanto a D , pois D é um ultrafiltro não principal sobre ω .

(Se D é um ultrafiltro não principal sobre um conjunto I e $X = \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq I$, então $I - \{x_0\}, \dots, I - \{x_n\} \in D$ pois sendo D não principal $\{x_0\}, \dots, \{x_n\} \notin D$ e portanto $I - X = (I - \{x_0\}) \dots (I - \{x_n\}) \in D$. O que mostra que os subconjuntos

de I de complementar finito pertencem a D).

Logo $\langle v_i(b_i^i - b_i^n) : i \in \omega \rangle_D = \langle \delta_i^n : i \in \omega \rangle_D = \langle \gamma_i^n : i \in \omega \rangle_D = \gamma_D^n$,
 ou $v(a_D - \frac{n}{D}) = \gamma_D^n$ o que de acordo com o Lema I5.1 mostra
 que a_D é um pseudolímite de $\{a_D^n\}_{n \in \omega}$, e que $A = \langle K, v, G \rangle$
 é ω -pseudocompleto.

Este Lema é suficiente para demonstrar que os ultrapro-
 tos $\prod_{p \in P} \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle / D$ e $\prod_{p \in P} \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle / D$ são ω -pseudo-
 completos pois ele vale também se o conjunto de índices é enu-
 merável (só usamos, como conjunto de índices, ω no Lema pa-
 ra simplificar a notação na escolha $a_i = b_i^i$, senão tería-
 mos que tomar $a_i = b_i^{\phi(i)}$, onde ϕ seria a bijeção de I
 sobre ω , e a demonstração seguiria igual).

4. Cada um dos Q_p e $\mathbb{Z}_p((X))$ tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$
 (veja os comentários no final da seção I4. onde Q_p e
 $\mathbb{Z}_p((X))$ são dados a partir de séries como consequência da pro-
 posição I4.1) e portanto os produtos cartesianos $\prod_{p \in P} Q_p$ e
 $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p((X))$ também tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$ e os ultraproductos
 $\prod_{p \in P} Q_p / D$ e $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p((X)) / D$ terão então cardinalidade $\leq 2^{\aleph_0}$

Mostrando que eles também tem cardinalidade $\geq 2^{\aleph_0}$ segui-
 rá então que a cardinalidade de $\prod_{p \in P} Q_p / D$ e $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p((X)) / D$ é
 $2^{\aleph_0}$ e pela hipótese do contínuo que ela é igual a $\aleph_1$.

LEMA III3.2 - Sejam I um conjunto enumerável, D um ultra-filtro não principal sobre I e $\{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos infinitos. Então a cardinalidade de $\prod_{i \in I} A_i / D$ é $\geq 2^{\aleph_0}$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $I = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ uma enumeração de I e sejam $X = I$, $X_{n+1} = X_n - \{x_n\}$ uma seqüência de subconjuntos de I construída indutivamente.

Então $X_{n+1} = I - \{x_0, \dots, x_n\} \in D$ uma vez que o complementar de X_{n+1} é finito e D é não principal (isto foi visto durante a demonstração do Lema anterior) e $X_n \supset X_{n+1}$ para todo $n \in \omega$ e $\bigcap_{n \in \omega} X_n = \emptyset$.

Dado $i \in I$, existe $n \in \omega$ tal que $i \notin X_n$ (uma vez que $\bigcap_{n \in \omega} X_n = \emptyset$), como $i \in X_0 = I$ segue que existe $k(i) \in \omega$ tal que $i \in X_{k(i)} - X_{k(i)+1}$.

O conjunto $2^{k(i)}$ - que é o conjunto de todas as funções de $\{0, 1, \dots, k(i)-1\}$ em $\{0, 1\}$ - é finito (contem $2^{k(i)}$ elementos) e como A_i é infinito, existe alguma função injetora $F_i : 2^{k(i)} \rightarrow A_i$.

2^ω é o conjunto de todas as funções de ω em $\{0, 1\}$. Se for possível definir-se uma função injetora $F : 2^\omega \rightarrow \prod_{i \in I} A_i / D$, então estará demonstrado que a cardinalidade de 2^ω - que é $2^{\aleph_0}$ - é menor ou igual que a cardinalidade de $\prod_{i \in I} A_i / D$.

De fato dada $s \in 2^\omega$, s restrita a $\{0,1,\dots,k(i)-1\}$ é um elemento de $2^{k(i)}$ (vamos usar a notação $\{0,1,\dots,k(i)-1\} = k(i)$; assim $s|k(i) \in 2^{k(i)}$), e $F_i(s|k(i)) \in A_i$. Seja então:

$$F(s) = \langle F_i(s|k(i)) : i \in I \rangle_D \in \prod_{i \in I} A_i / D.$$

Sejam $s, t \in 2^\omega$, $s \neq t$. Então existe $n \in \omega$ tal que $s(n) \neq t(n)$ e se $i \in I$ é tal que $k(i) > n$, então $s|k(i) \neq t|k(i)$ (pois $n \in k(i)$ e $s|k(i)(n) \neq t|k(i)(n)$) e portanto

$F_i(s|k(i)) \neq F_i(t|k(i))$ pois F_i é injetora. Logo

$\{i \in I : F_i(s|k(i)) \neq F_i(t|k(i))\} \supset \{i \in I : k(i) > n\}$.

Mas, se $i \in X_{n+1}$, então $k(i) \geq n+1$ (por definição de $k(i)$ e pelo fato que a sequência X_n é decrescente). Logo

$X_{n+1} \subset \{i \in I : k(i) > n\}$ e portanto $\{i \in I : k(i) > n\} \in D$ e $\{i \in I : F_i(s|k(i)) \neq F_i(t|k(i))\} \in D$. E isto significa que:

$$F(s) = \langle F_i(s|k(i)) : i \in I \rangle_D \neq \langle F_i(t|k(i)) : i \in I \rangle_D = F(t)$$

o que mostra que F é injetora.

Com isto está terminada a demonstração teorema o qual nos garante a existência de um isomorfismo analítico entre os corpos valorados $A = \prod_{p \in P} \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle / D$ e $A' = \prod_{p \in P} \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle / D$ sempre que D é um ultrafiltro não principal de P , que -de acordo com as definições II.2 (de isomorfismo analítico) e III.3 (de isomorfismo entre estruturas)- é também um iso-

morfismo entre as estruturas A e A' ; e portanto A e A' são elementarmente equivalentes (proposição III1.2), isto é: se A é uma sentença da linguagem de 1a. ordem para corpos valorados, então A satisfaz A se e só se A' satisfaz A .

Voltando aos corpos $A_p = \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ e $A'_p = \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ podemos extrair o seguinte:

COROLÁRIO 1 - Seja A uma sentença da linguagem de 1a. ordem para corpos valorados e seja $I(A)$ o conjunto de todos os primos positivos $p \in P$ para os quais $A_p = \langle Q_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ satisfaz A se e só se $A'_p = \langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ satisfaz A . Então o complementar $P - I(A)$ de $I(A)$ é finito.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $I(A) = \{p \in P : A_p \models A \text{ se e só se } A'_p \models A\}$ e seja $X = P - I(A)$ o complementar de $I(A)$.

Se X fosse infinito, então X pertenceria a algum ultrafiltro não principal D de P .[®]

Pelo teorema anterior $\prod_{p \in P} A_p / D \models A$ se e só se

® Seja $F = \{Y \subset P : P - Y \text{ é finito}\}$ o filtro de Fréchet de P . O conjunto $Fu\{X\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita e portanto pela prop. III2.1 o filtro $[Fu\{X\}]$, gerado por $Fu\{X\}$, é próprio, donde pela prop. III2.2(ii) existe um ultrafiltro D contendo $[Fu\{X\}]$. O ultrafiltro D contém o filtro de Fréchet F e portanto, pela demonstração do corolário da prop. III2.2, D é não principal

$\prod_{p \in P} A'_p / D \models A$ e portanto pelo teorema de Łos e pelas propriedades dos ultrafiltros $I(A) \in D$.

O fato que $I(A) \in D$ e $X = P - I(A) \in D$ contradiz a definição de ultrafiltro, logo X deve ser finito e está demonstrado o corolário.

Dado um inteiro positivo d pode-se enunciar na linguagem de 1ª. ordem para corpos valorados uma sentença A_d tal que um corpo K satisfaz esta sentença se e só se todo polinômio homogêneo de grau d , com coeficientes em K , em d^2+1 variáveis admite uma raiz não trivial em K . É claro que um corpo satisfaz esta sentença se e só se ele é $C_2(d)$ (pois pode-se anular as $n-(d^2+1)$ variáveis restantes de um polinômio homogêneo de grau d em $n > d^2$ variáveis, para cair em um polinômio de grau d em d^2+1 variáveis). Aplicando o corolário precedente à sentença A_d , e usando o fato que $\langle \mathbb{Z}_p((X)), \text{ord}, \mathbb{Z} \rangle$ é $C_2(d)$ para todo inteiro positivo d , obtemos o seguinte

COROLÁRIO 2. - Seja d um inteiro positivo. Então o conjunto $I(d)$ dos primos p tais que $\langle \mathbb{Q}_p, v_p, \mathbb{Z} \rangle$ não é $C_2(d)$ é finito.

BIBLIOGRAFIA

- [A.K] Ax, J. and Kochen, S., Diophantine problems over local fields I, II. Am. Journ. of Math., 87 (1965), pp.605-648.
- [C.K] Chang, C.C. and Keisler, H.J., Model Theory. North-Holland, 1973.
- [End] Enderton, H., A Mathematical Introduction to Logic. Academic Press, New York, 1972.
- [Gr] Greenberg, M., Lectures on forms in many variables. Benjamin, 1969.
- [Kp] Kaplansky, I., Maximal fields with valuations. Duke Math. Journ., vol.9, (1942), pg.303-321.
- [Ko] Kochen, S., The model theory of local fields. Logic Conf. Kiel 1974. Lect. Notes in Math. 499, Berlin, Springer-Verlag 75.
- [Kop] Kopperman, ., Model Theory and its Applications. Boston, Allyn and Bacon, 1972.
- [Lg] Lang, S., Some theorems and conjectures in diophantine equations. Bull. Am. Math. Soc., vol.66, (1960), pg. 240-249.
- [Rb] Ribenboim, P., Théorie des Valuations, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal, 1964
- [Sch] Schilling, O.F.G., The theory of valuations, AMS Mathematical Survey, 1950, New York
- [ZJ] Zimbar, J., Introdução à lógica matemática. 99 Colóquio Bras. de Matemática, Poços de Caldas, 1973.