MÉDIAS DE CURVATURAS EM
VARIEDADES FOLHEADAS

FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Carlos Edgard Harle*

- SÃO PAULO, SETEMBRO DE 1981 -

A LU

Observa-se, no estudo geométrico das variedades folheadas dois pontos de vista principais. Podemos dizer que o primeiro é quantitativo e relaciona-se com o problema de saber, por exemplo, quantas classes de isotopia de folheações existem num dado espaço com características topológicas determinadas. A ferramenta principal para tal análise são as classes características de folheações.

O segundo ponto de vista é qualitativo e trata, entre outras coisas de determinar propriedades geométricas das folheações numa dada variedade riemanniana.

Os resultados apresentados neste trabalho são qualitativos.

No primeiro capítulo apresentamos uma demonstração elementar de um teorema de D. Asimov que foi generalizado por R. Langevin, H. Rosenberg e pelo autor desta tese. Trata-se de saber como variam as médias das curvaturas de uma folheação de codimensão 1 sobre uma variedade compacta, sem bordo e de curvatura seccional constante.

D. Asimov provou que se W^{n+1} é uma tal variedade folheada, então

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W K = \lambda(c, n),$$

, onde $\lambda(c, n)$ é um número que depende somente da curvatura c (constante) e da dimensão n das folhas. K representa a curvatura de Lipschitz-Killing (integrando do teorema de Gauss-Bonnet-Chern) das folhas, calculados em cada ponto de W .

Existem outras funções de curvatura definidas para as folhas que só dependem da métrica nelas induzidas (por exemplo a curvatura escalar). Provaremos que as médias de tais curvaturas também não dependem da folheação.

No segundo capítulo são consideradas folheações de codimensão 1 em espaços de curvatura não necessariamente constante.

Os resultados aí obtidos generalizam os do primeiro capítulo em duas direções principais:

1º) Fornece limitações para a média da curvatura escalar em função de limitações impostas à variação do tensor de curvatura.

Precisamente, se $c_{ij}(x)$ é a curvatura seccional de W no ponto x e na direção do plano gerado pelos vetores e_i, e_j e se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq c_{ij}(x) \leq \beta$, $\forall e_i, e_j$, $\forall x$, então

$$\lambda(\alpha, n) \leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \leq \lambda(\beta, n),$$

onde γ_2 é a curvatura escalar das folhas e $\lambda(\alpha, n)$, $\lambda(\beta, n)$ só dependem de α, β e da dimensão n das folhas.

2º) Generaliza completamente o teorema principal do 1º capítulo para o caso da curvatura escalar das folhas em espaços de Einstein, ou seja,

, se a variedade ambiente W^{n+1} é Einstein (curvatura de Ricci constante) então a média das curvaturas escalares das folhas goza da mesma propriedade de invariância que os espaços de curvatura constante.

Além disso, obtivemos uma obstrução geométrica à existência de folheações totalmente geodésicas de codimensão 1.

Isto acontece quando o espaço ambiente W^{n+1} possui uma das curvaturas seccionais generalizadas (curvatura p -seccional) não nula em todos os pontos e em todas as direções.

No capítulo 3 existem generalizações parciais dos resultados precedentes para o caso de folheações ortogonais bem como um teorema de obstrução à existência de folheações mínimas (folheações cujas folhas são subvariedades mínimas de W).

Provaremos que a soma das médias das curvaturas é invariante com relação às folheações nos seguintes casos:

- a) Quando as folheações têm codimensão 1, são duas a duas perpendiculares e são tantas quanto a dimensão de W .
- b) No caso de folheações ortogonais de dimensões complementares em espaços de curvatura constante.

Para as folheações mínimas apresentamos uma obstrução topológica à integrabilidade da distribuição normal quando o espaço ambiente tem curvatura positiva e a codimensão da folheação é dois.

O método utilizado na demonstração dos resultados dos capítulos 2 e 3 é o método do triedro móvel de Elie Cartan.

Estaremos sempre supondo que as variedades, métricas e folheações envolvidas são de classe C^∞ e sem singularidades.

As variedades onde estão definidas as folheações serão sempre variedades riemannianas compactas, conexas, orientáveis e de bordo vazio mesmo que tais condições não apareçam explicitas nos enunciados.

AGRADECIMENTOS

- A Rêmi Langevin, pelas valiosas idéias e contribuições matemáticas dele recebidas na elaboração deste trabalho. Sua cooperação e encorajamento foram cruciais para o bom termo deste manuscrito.

- Agradecimentos mais do que merecidos ao meu orientador Carlos Edgard Harle. As folheações mínimas não seriam aqui mencionadas não fosse a atividade denodada deste professor que tanto se esforça por ensinar como por aprender.

- A todos os professores do IMEUSP e em particular à Profa. Elza Gomide, que me guiou nos primeiros passos do aprendizado e da pesquisa matemática.

- A H. Rosenberg por ter dirigido o trabalho que deu origem a esta tese.

CAPÍTULO I

Sobre um Teorema devido a D.Asimov. Uma versão Geométrica

§1 - Apresentação

Seja W^{n+1} uma variedade riemanniana compacta sem bordo de dimensão $n+1$ e curvatura seccional constante igual a c .

Seja F uma folheação de codimensão 1 transversalmente orientável sobre W^{n+1} e $K: W^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a função que associa a cada ponto $x \in W$ a curvatura de Lipschitz-Killing no ponto x da folha que passa por x munida da métrica induzida pela inclusão em W^{n+1} .

D. Asimov demonstrou em [1] que $\int_W K$ não depende da folheação. Em particular,

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W K = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2^n c}{n \binom{n}{\frac{n}{2}}} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (1)$$

Por outro lado, R.Langevin, H.Rosenberg e o autor deste trabalho demonstraram em [2] que

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \eta_k = \begin{cases} c \frac{k}{2} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} & \text{se } n \text{ e } k \text{ são pares} \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (2)$$

onde η_k designa a k -ésima função simétrica de curvatura extrín

seca.

As funções η_k são definidas por

$$\det (I + tAx) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) t^i$$

onde:

I é o endomorfismo identidade $T_x M_x \rightarrow T_x M_x$

$A_x: T_x M_x \rightarrow T_x M_x$ é dada por

$$A_x(Y) = \nabla_Y(N) ,$$

, M_x é a folha que passa por x ,

, ∇ é a conexão riemanniana de W .

Suponhamos agora que $n+1$ é ímpar ($n+1$ é a dimensão de W):

A partir de (2), prova-se em [2] que o teorema de Asimov continua verdadeiro se substituirmos K (curvatura de Lipschitz-Killing das folhas) por γ_{2k} (curvatura $2k$ -escalar das folhas). Precisamente, teremos:

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_{2k} = \sum_{r=0}^k c^k \frac{\binom{k}{r} \binom{\frac{n}{2}}{r}}{\binom{n}{2r}} \quad (3)$$

A curvatura $2k$ -escalar de uma variedade riemanniana é a generalização natural da curvatura escalar quando consideramos curvaturas seccionais generalizadas (curvatura $2k$ -seccional) e ela mede em cada ponto da variedade a média das

curvaturas $2k$ -seccionais quando fazemos variar o $2k$ -plano correspondente na grassmaniana dos $2k$ -planos associada ao espaço tangente (Ver [12]).

Pode-se verificar facilmente que γ_{2k} é uma combinação linear dos η_i onde os coeficientes dependem somente das dimensões envolvidas (k e n) e da curvatura seccional (constante) do espaço ambiente, c . Daí o fato de a fórmula (3) decorrer da fórmula (2).

Apresentamos neste capítulo uma demonstração "geométrica" dos resultados acima. Tal demonstração nos foi comunicada por R. Langevin e servirá de motivação para os longos cálculos que serão feitos no capítulo II onde será estudado o caso onde a curvatura de W não é constante.

§2 - Uma Demonstração Geométrica do Teorema de Asimov .

Lembramos que uma variedade riemanniana compacta conexa e sem bordo de curvatura seccional constante c e dimensão n é um dos seguintes espaços:

- a) Quociente do toro T^n , se $c = 0$
- b) Quociente da esfera S_c^n de curvatura $c > 0$ pela ação de um subgrupo fechado e discreto do grupo de isometrias de S_c^n , se $c > 0$
- c) Idem para o espaço hiperbólico H_c^n de curvatura c , se $c < 0$.

Tais resultados podem ser vistos, por exemplo, em [14].

Em vista disso, a demonstração se dividirá em 3 partes.

2.1 - O caso $c = 0$

Seja W^{n+1} variedade riemanniana compacta conexa sem bordo de dimensão $n+1$ e curvatura seccional constante igual a zero. Seja F uma folheação de codimensão 1 sobre W . Sejam $\eta_k: W \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$, a função que associa a cada ponto $x \in W$ a k -ésima função simétrica de curvatura extrínseca no ponto x da folha que passa por x . É fácil ver que σ_k só depende da métrica induzida na folha pela métrica de W . Isto se dá porque o espaço ambiente W^{n+1} curva constantemente. (Ver [5], [6]).

Como W tem curvatura seccional nula, podemos considerar a aplicação quociente.

$$\Gamma: T^{n+1} \rightarrow W^{n+1} = \frac{T^{n+1}}{F}$$

que nos dá uma isometria local onde F representa um subgrupo finito do grupo de isometrias de T^{n+1} .

A folheação F se "levanta" naturalmente para T^{n+1} .

Seja $F^* = \Gamma^*(F)$ o levantamento de F em T^{n+1} .

Como as funções η_k só dependem da métrica das folhas e Γ é uma isometria local, temos:

$\eta_k^* = \eta_k \circ \Gamma$ onde η_k^* é a k -ésima função simétrica de curvatura extrínseca de F^* .

Assim,

$$\int_{T^{n+1}} \eta_k^* = m \int_W \eta_k$$

onde m é o número de elementos de F .

Como $\text{vol}(T^{n+1}) = m \text{vol}(W)$ temos:

$$\frac{1}{\text{vol}(T^{n+1})} \int_{T^n} \eta_k^* = \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \eta_k \quad (4)$$

Assim, basta provar a fórmula (2) para uma folheação do toro T^{n+1} de curvatura 0.

Daqui até o final do §2, F será uma folheação de codimensão 1 de $T^{n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$; $T^{n+1} = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n+1}$; $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Proposição 2.1.1

"Com as notações até aqui fixadas temos:

$$\int_{T^{n+1}} \eta_k = 0 \quad \forall k \quad "$$

Demonstração:

Seja $\psi_t: T^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ dada por

$$\psi_t(\rho(x)) = \rho(x + t\vec{n}) = \exp_x(t\vec{N})$$

onde

$$\rho: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^{n+1}}{\mathbb{Z}^{n+1}}$$

é a projeção natural de $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre T^{n+1} ; $\vec{N}(x)$ é um campo vetorial unitário normal a F definido em toda variedade T^{n+1} e determinado pela orientação transversal de F ; $\vec{n} = \rho^*(\vec{N})$ está definido em $\mathbb{R}^{n+1}$;

; $\exp$ denota a aplicação exponencial $\exp_x: U \subset T_x T^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ no

ponto x .

Para $|t| < \delta$, δ suficientemente pequeno, ψ_t é um difeomorfismo. Além disso, temos: $0 < \det \psi'_t = \sum_{i=0}^n \eta_i t^i$. Pois:

$$\det \psi'_t(x) = \det(\text{Id}_{T_x T^{n+1}} + t dN(x)) \text{ e}$$

$$\det \psi'_t(x) > 0 \text{ para } |t| < \delta$$

Então

$$\int_{T^{n+1}} \det \psi'_t = \sum_{i=0}^n t^i \int_{T^{n+1}} \sigma_i(x) = \text{vol}(T^{n+1})$$

com $|t| < \delta$

logo, por identidade de polinômios vem:

$$\int_{T^{n+1}} \sigma_i(x) = 0, \quad \forall i \neq 0$$

$$\text{e } \sigma_0(x) = \text{vol}(T^{n+1})$$

Isto nos restitui as fórmulas (1) e (2) para o caso $W^{n+1} = T^{n+1}$.

c.q.d.

2.2 - O caso $c > 0$

Dada uma variedade riemanniana W^{n+1} compacta, conexa, sem bordo de curvatura seccional constante positiva c e dimensão $n+1$, sabe-se que ela é isométrica ao quociente da esfera de dimensão $n+1$ e raio $\frac{1}{\sqrt{c}}$ (que denotamos $S^{n+1}_{1/\sqrt{c}}$) pela a-

ção de um subgrupo finito de $O(n+1)$, ($SO(n+1)$ se W^{n+1} é orientável).

Um argumento análogo ao apresentado em 2.1 nos mostra que para demonstrar as fórmulas (1), (2) e (3) basta supor $W^{n+1} = S_{\frac{1}{\sqrt{C}}}^{n+1}$

Porém, uma homotetia na esfera $S_{\frac{1}{\sqrt{C}}}^{n+1}$ nos mostra que as fórmulas (1), (2) e (3) serão válidas para $S_{\frac{1}{\sqrt{C}}}^{n+1}$ e se somente se forem válidas para $S_1^{n+1} = S^{n+1}$.

Podemos então supor $W^{n+1} = S^{n+1}$

Seja F uma folheação de codimensão 1 de S^{n+1} transversalmente orientável. A existência de uma tal folheação implica que $n+1$ é ímpar pois F não tem singularidades. A orientação transversal de F nos permite definir um campo de vetores $\vec{n}$ normal a F em cada ponto e globalmente definido em S^{n+1} .

Teremos:

$$\vec{n}(x) \in T_x S^{n+1}; \quad |\vec{n}| = 1 \text{ e } \vec{n} \perp F$$

Seja

$\psi_t: S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ a aplicação dada por

$$\psi_t(x) = x + t\vec{n}(x)$$

Para t suficientemente pequeno, ψ_t é um difeomorfismo entre S^{n+1} e $S_{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}^{n+1}$, ou seja,

se $|t| < \delta$ então ψ_t é um difeomorfismo entre a esfera de raio unitário e a esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

2.2.1 - Proposição:

$$|\det \psi'_t| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sum_{i=0}^n n_i t^i$$

Demonstração:

Recordemos inicialmente que as funções η_i são definidas por

$$\det \left(I_{T_x M_x} + t A_x \right)_{T_x M_x} = \sum_{i=0}^n \eta_i(x) t^i$$

onde:

M_x é a folha que passa pelo ponto x

$T_x M_x$ é o espaço tangente à folha no ponto x

$A_x: T_x W \rightarrow T_x W$ é definida por:

$$A_x(Y) = \nabla_Y(\vec{n}), \quad \vec{n} \perp F; Y \in T_x W; \nabla \text{ conexão riemanniana de } (W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

$$|\vec{n}| = 1$$

e

$A_x|_{T_x M_x}$ é a restrição de A_x ao espaço tangente à folha.

Note-se que um argumento de ortogonalidade mostra que A_x deixa invariante o subespaço $T_x M_x \subset T_x W$.

Passemos então ao cálculo de $\det(\psi'_t)$. Teremos:

$T_x M_x \subset T_{\psi(x)}(S^{n+1})$; pois todo vetor perpendicular ao mesmo tempo a x e $\vec{n}(x)$ será também perpendicular a $x + t\vec{n}(x)$.

Sejam então dois referenciais ortonormais B e B' locais definidos respectivamente sobre uma vizinhança U de x e $\psi_t(U)$ de $\psi_t(x)$ satisfazendo:

$$B^+ = \{e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \vec{n}(x)\}$$

$$B' = \{\bar{e}_1(\psi(x)), \bar{e}_2(\psi(x)), \dots, \bar{e}_n(\psi(x)), \vec{u}(\psi(x))\}$$

onde

$$e_i(x) \in T_x M_x, \quad \bar{e}_i(\psi_t(x)) = e_i(x) \quad ; \quad 1 \leq i \leq n$$

e

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \vec{n}(x) - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} x$$

A matriz jacobiana de ψ_t escreve-se:

[illegible]

Isto nos dá imediatamente:

$$d\psi_t(x) = \begin{bmatrix} \text{Id}_{T_x M_x} + tA_x & \begin{matrix} \langle d\psi_t(\vec{n}), e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle d\psi_t(\vec{n}), e_n \rangle \end{matrix} \\ \hline \langle d\psi_t(e_1), \vec{u} \rangle \dots \dots \dots \langle d\psi_t(\vec{n}), \vec{u} \rangle \end{bmatrix}$$

Temos então

$$\det(d\psi_t(x)) = \sqrt{1+t^2} \det \left(\text{Id}_{T_x M_x} + tA_x \begin{matrix} \\ \\ T_x M_x \end{matrix} \right)$$

Pois:

$$1) \langle d\psi_t(e_i), \vec{u} \rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\begin{aligned} 2) \langle d\psi_t(\vec{n}), \vec{u} \rangle &= \langle (1+t d\vec{n})(\vec{n}), \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \vec{n} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} x \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \langle d\vec{n}(\vec{n}), x \rangle = \end{aligned}$$

Da maneira como foram definidos os η_i , Teremos:

$$\det(d\psi_t(x)) = \sqrt{1+t^2} \sum_{i=1}^n \eta_i t^i \quad \text{c.c.d.}$$

O volume da esfera de dimensão ímpar e raio $\sqrt{1+t^2}$ é um polinômio de grau ímpar em $y = \sqrt{1+t^2}$

Pelo teorema de mudança de variáveis teremos:

$$\text{vol} \left(\frac{S^{n+1}}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \int_{S^{n+1}} \left| \det d\psi_t \right|$$

Para t suficientemente pequeno temos

$$\det d\psi_t > 0.$$

Logo, como $n+1$ é ímpar temos (Ver [9])

$$\int_{S^{n+1}} \det d\psi_t = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} (\sqrt{1+t^2})^{n+1}$$

S^{n+1}

Logo,

$$\int_{S^{n+1}} \eta_i t^i = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} (\sqrt{1+t^2})^n$$

Portanto

$$\frac{1}{\text{vol}(S^{n+1})} \left(\int_{S^{n+1}} \eta_i \right) t^i = (1+t^2)^{\frac{n}{2}}$$

Como a última igualdade é válida para qualquer $|t| < \delta$, t positivo temos, aplicando o princípio de identidade de polinômios:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\text{vol}(S^{n+1})} \int_{S^{n+1}} \eta_i = 0 \text{ se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{\text{vol}(S^{n+1})} \int_{S^{n+1}} \eta_i = \left(\frac{n}{2} \right) \frac{i}{2} \text{ se } i \text{ é par} \end{array} \right.$$

Isto também nos restituirá as fórmulas (1) e (3), uma vez que as funções γ_{2k} são combinações lineares das funções η_{2k} onde os coeficientes só dependem das dimensões envolvidas e da curvatura seccional constante $\underline{c}$ do espaço em questão.

2.3 - 0 caso $c < 0$

Seja $\langle , \rangle$ a pseudo - métrica definida em $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$

Seja $c < 0$ e

$$H^n(c) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}, p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1}); p_{n+1} > 0 ;$$

$$; \langle p, p \rangle = \frac{1}{c} \}$$

As proposições seguintes são verdadeiras:

1) A pseudo-métrica $\langle , \rangle$ torna-se uma métrica riemanniana quando restrita a $H^n(c)$.

2) A curvatura seccional de $H^n(c)$ nesta métrica é constante e igual a c .

Estes fatos podem ser vistos em [10].

$H^n(c)$ é chamado "espaço hiperbólico de dimensão n e curvatura c ", quando munido das métricas acima.

Seja $c = -1$ $n = 3$

$$H^3(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0 ; x^2 + y^2 - z^2 = -1 \}$$

$H^n = H^n(-1)$ munido da métrica hiperbólica será de nominado "espaço hiperbólico standard de dimensão n ".

Seja $\vec{n}$ um campo de vetores unitário (com a métrica hiperbólica) em H^n .

Seja $t > 0$ e

$\psi_t: H^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\psi_t(x) = x + t\vec{n}$$

2.3.1 - Proposição

" $\psi_t(x) \in H^n(-1 + t^2)$, $\forall x \in H^n$ "

Demonstração:

Queremos provar que:

$$\langle \psi_t(x), \psi_t(x) \rangle = -1 + t^2$$

Mas sabemos que $H^n = f^{-1}(-1)$ onde

$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2$$

Neste caso, como $\vec{n}$ é vetor tangente de H^n , temos:

$\vec{n}(x) \cdot \text{grad } f(x) = 0$, $\forall x \in H^n$, onde " $\cdot$ " denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Isto significa que

$$\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i(x) - x_{n+1} \lambda_{n+1}(x) = 0, \text{ ou equivalentemente,}$$

$$x_{n+1} \lambda_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i(x), \text{ onde } \vec{n} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$$

Mas agora, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \psi_t(x), \psi_t(x) \rangle &= \langle x + t\vec{n}(x), x + t\vec{n}(x) \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + t^2 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle(x) + 2t \langle x, \vec{n}(x) \rangle = \\ &= -1 + t^2 + 2t \langle x, \vec{n}(x) \rangle. \end{aligned}$$

Mas,

$$\langle x, \vec{n}(x) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i(x) - x_{n+1} \lambda_{n+1}(x) = 0$$

$$\text{logo } \langle \psi_t(x), \psi_t(x) \rangle = -1 + t^2 \quad \text{c.q.d.}$$

Seja W^{n+1} uma variedade riemanniana compacta sem bordo de curvatura seccional constante igual a -1 .

Sabe-se que W^{n+1} é isométrica ao quociente de H^{n+1} pela ação totalmente descontínua de um subgrupo de isometrias de H^{n+1} .

Seja $W_{-1+t^2}^{n+1}$ uma variedade riemanniana homotética a W^{n+1} e de curvatura seccional constante igual a $-1 + t^2$.

Sejam $\psi_1: H^{n+1} \rightarrow \frac{H^{n+1}}{F_1} = W^{n+1}$

$$\psi_2: \frac{H^{n+1}}{H(-1+t^2)} \rightarrow W_{-1+t^2}^{n+1} = \frac{H(-1+t^2)}{F_2}$$

as respectivas aplicações quocientes sendo que F_1 e F_2 são subgrupos discretos dos grupos de isometria de H^{n+1} e $H(-1+t^2)$ respectivamente. É claro que F_1 é isoformo a F_2 .

Se $\vec{N}$ é um campo vetorial unitário sobre W^{n+1} , seja $\vec{n} = \psi_1^*(N)$ o campo unitário em H^{n+1} correspondente a $\vec{N}$.

2.3.2 - Proposição

"A aplicação $\psi_t: \frac{H^{n+1}}{H(-1+t^2)}$ definida por $\psi_t(x) = x + t\vec{n}(x)$ passa ao quociente e induz uma aplicação $\bar{\psi}_t: W_{-1+t^2}^{n+1}$ definida por: $\bar{\psi}_t(\psi_1(x)) = \psi_2(\psi_t(x))$ ".

Demonstração

Sejam $x, x' \in H^n$ tais que $\psi_1(x) = \psi_1(x')$

Devemos provar que $\psi_2(\psi_t(x)) = \psi_2(\psi_t(x'))$

Sabemos que o grupo de isometrias de H^{n+1} (bem como o de $\frac{H^{n+1}}{H(-1+t^2)}$) é a restrição a H^{n+1} (respectivamente $\frac{H^{n+1}}{H(-1+t^2)}$) do subgrupo do grupo linear $GL(n+2, \mathbb{R})$ que pre

serve a pseudo métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Chamemos tal subgrupo de L . ($LcGL(n+2, \mathbb{R})$). Isto se dá pelo fato que H^{n+1} (resp $H(-1+t^2)$) são "bolas não degeneradas centradas na origem". (Com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Sendo assim, F_1 e F_2 são restrições de um mesmo subgrupo FcL respectivamente a H^{n+1} e $H(-1+t^2)$.

Seja $\sigma \in F$. Como F é um grupo de matrizes temos:

$$\sigma(\psi_t(x)) = \sigma(x + t\vec{n}(x)) = \sigma(x) + t\sigma(\vec{n}(x)).$$

Como σ é linear temos:

$$\sigma'(x) \cdot \vec{n}(x) = \sigma(\vec{n}(x)) \quad \text{pois} \quad \sigma'(x) = \sigma$$

então

$$\sigma(x) + t\sigma(\vec{n}(x)) = \sigma(x) + t\sigma'(x) \cdot \vec{n}(x).$$

Assim, para algum elemento $\sigma \in F$ teremos:

$$\begin{aligned} \Psi_2(\psi_t(x')) &= \Psi_2(\psi_t(\sigma(x))) = \Psi_2(\sigma(x) + t\sigma'(x) \cdot \vec{n}(x)) = \\ &= \Psi_2(\sigma(\psi_t(x))) = \Psi_2(\psi_t(x)) \end{aligned} \quad \text{c.q.d.}$$

2.3.3 - Proposição

"A aplicação $\bar{\psi}_t : W^{n+1} \rightarrow W_{-1+t^2}^{n+1}$ associada ao campo vetorial $\vec{N}$ em W^{n+1} satisfaz:

$$\det(\bar{\psi}'_t(x)) = \sqrt{1-t^2} \prod_{i=1}^n \eta_i t^i \quad \text{para } 0 < t < 1"$$

Demonstração:

Seja $\psi_1 : H^{n+1} \rightarrow W^{n+1} = \frac{H^{n+1}}{F}$ a aplicação quociente definida anteriormente.

ψ_1 é uma isometria local, logo, se $y \in H^{n+1}$ então

$$\det(\bar{\psi}'_t(\psi_1(y))) = \det(\psi'_t(y)).$$

Mas $\det (\psi'_t(y)) = \sqrt{1-t^2} \sum_{i=0}^n \eta_i t^i$ e

o cálculo é análogo ao explicitado na proposição 2.2.1.
c.q.d.

2.3.4 - Proposição:

A aplicação $\bar{\psi}_t: W^{n+1}_{-1+t^2} \rightarrow W^{n+1}_{-1+t^2}$ é um difeomorfismo para t suficientemente pequeno".

Demonstração:

Existe $\delta > 0$ tal que $\bar{\psi}_t$ é difeomorfismo local para $|t| < \delta$, pois $\det (\bar{\psi}'_t(x)) = \det (\psi'_t(y))$ onde $\Psi(y) = x$, $\det \Psi'(t)$ é contínua em t e $\det \psi'_0 = 1$.

Como W^{n+1} é compacto existe $\delta' < \delta$ tal que $\bar{\psi}_t$ é difeomorfismo para $|t| < \delta'$. c.q.d.

Passemos agora à demonstração do teorema principal desse capítulo para o caso onde a curvatura do espaço ambiente é constante negativa.

Seja F uma folheação de codimensão 1 sobre W^{n+1} transversalmente orientada.. W^{n+1} é uma variedade compacta conexa sem bordo e orientável. Seja $c < 0$ a curvatura (constante) de W^{n+1} .

2.3.5 - Teorema

"Com as notações até aqui introduzidas,

$$\frac{1}{\text{vol } (W^{n+1})} \int_{W^{n+1}} \eta_k = \begin{cases} c^{\frac{k}{2}} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \\ k \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} & \text{se } n \text{ e } k \text{ são pares} \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Demonstração:

Pelas proposições 2.3.3, 2.3.4, e pelo teorema de mudança de variações para integrais, teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \int_{W^{n+1}} \sum_{i=0}^n \eta_i t^i = \text{vol } (W_{-1+t^2}^{n+1})$$

Mas, como $W_{-1+t^2}^{n+1}$ é homotética a W^{n+1} com razão de homotetia $\sqrt{1-t^2}$, vale:

$$\text{vol } (W_{-1+t^2}^{n+1}) = (\sqrt{1-t^2})^{n+1} \cdot \text{vol } (W^{n+1}).$$

Então,

$$\frac{1}{\text{vol } (W^{n+1})} \int_W \sum_{i=0}^n \eta_i t^i = (\sqrt{1-t^2})^{n+1}$$

logo,

$$\frac{1}{\text{vol } (W^{n+1})} \sum_{i=0}^n \eta_i t^i = (\sqrt{1-t^2})^n$$

Como a igualdade vale $\forall t$, com $|t| < \delta'$ e o primeiro membro é um polinômio, o teorema fica demonstrado para o caso em que $c = -1$.

O caso geral segue se considerarmos uma homotetia de razão $\sqrt{-c}$. c.q.d.

CAPÍTULO II

"Uma Fórmula e Suas Consequências".

§1 - Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns resultados concernentes à geometria integral das folheações para o caso em que a curvatura do espaço ambiente não é constante.

Precisamente, seja W^{n+1} uma variedade riemanniana compacta conexa e sem bordo onde está definida uma folheação transversalmente orientada F de codimensão 1. Trataremos neste capítulo de fornecer relações entre as possíveis integrais de curvatura das folhas e a geometria do espaço ambiente.

Uma primeira questão que surge é a de saber como varia a média de curvatura das folhas em função de limites impostos à variação do tensor de curvatura de W^{n+1} .

Sobre isto, D. Asimov demonstrou o seguinte:
(ver [1]).

Teorema [A]:

"Seja W^3 variedade riemanniana compacta e sem bordo e F uma folheação de codimensão 1 sobre W^3 .

Suponhamos que existam constantes K_1, K_2 tais que:

$$K_1 \leq c(x, Q_2) \leq K_2 \quad \forall x \in W^3, \forall Q_2 \subset T_x W^3$$

Então

$$2K_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W^3)} \int_{W^3} K \leq 2K_2$$

onde, $K: W^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a curvatura de Gauss da folha que passa por x no ponto x com a métrica induzida pela inclusão da folha em W^3 ,

, $c(x, Q_2)$ a curvatura seccional de W^3 no ponto x e na direção do 2 - plano $Q_2 \subset T_x W^3$,

, $\dim W^3 = 3$ "

Este resultado será generalizado para dimensão qualquer considerando-se como integrando a curvatura escalar das folhas.

Além disso provaremos o seguinte:

- 1) Se W^{n+1} é uma variedade de Einstein (curvatura de Ricci constante), então a integral da curvatura escalar das folhas não depende da folheação.
- 2) Se existe um inteiro q , $1 \leq 2q \leq n-1$ tal que as curvaturas $2q$ - seccionais de W^{n+1} não se anulam então W^{n+1} não admite folheação totalmente geodésica de codimensão 1. Em particular os espaços de curvatura seccional sempre não nula têm esta propriedade.
- 3) Existem $(n+1)$ - formas Ξ_{2k} sobre W^{n+1} (que dependem da variação do campo de vetores unitário N que determina a orientação transversal de F e é normal a F em cada ponto) que definem classes de cohomologia em $H^{n+1}(W^{n+1}, \mathbb{R})$.

Precisamente:

$$\int_{W^{n+1}} E_{2k} = \int_{W^{n+1}} c_{2k} \quad \text{não depende da}$$

folheação F , $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right]$,

, onde c_{2k} é a curvatura $2k$ - escalar de W^{n+1} .

Tal classe de cohomologia só depende da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de W^{n+1} .

§2. Notações:

Seja $x \in W^{n+1}$, $U \ni x$ um aberto de W^{n+1} ,

, $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal adaptado sobre U :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} ; 1 \leq i, j \leq n+1 ; N = e_{n+1} \perp F .$$

O correferencial, as formas de conexão e de curvatura associados são dados por:

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij} , \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j , \delta_{ii} = 1$$

$$\omega_{ij}(u) = \langle \nabla_u(e_i), e_j \rangle , \Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ e ∇ denotam respectivamente o produto escalar e a conexão riemanniana associados a $(W^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

As fórmulas de estrutura são dadas por

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \theta_k, \quad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}$$

E a identidade de Bianchi escreve-se:

$$d\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} - \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Esta é a notação utilizada, por exemplo em [3]

§3 - As formas $\Psi_{k, 2\ell, n}$, $\phi_{k, 2\ell, n}$, $\Gamma_{2r, n}$ e um lema combinatório.

Com as notações introduzidas no §2 pode-se definir

n-formas $\Psi_{k, 2\ell, n}$

$$0 \leq k \leq n \ ; \ 0 \leq 2\ell \leq n \ ; \ k + 2\ell \leq n$$

e $(n+1)$ - formas $\phi_k, 2\ell, n$

$$0 \leq k \leq n-1 \quad ; \quad 0 \leq 2\ell \leq n-2 \quad ; \quad k+2\ell \leq n-1$$

sobre um aberto $U \subset W^{n+1}$.

Estas formas estão diretamente associadas à folheação F e são definidas através de um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ por:

$$\Psi_{k, 2\ell, n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)} \wedge \omega_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k+2\ell-1)} \wedge \omega_{\sigma(k+2\ell)} \wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{k, 2\ell, n} = & \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Lambda_{\sigma(1) \dots \sigma(k)} \Lambda_{\sigma(k+1) \dots \sigma(k+\ell)} \Lambda_{\sigma(k+\ell+1) \dots \sigma(k+2\ell)} \\ & \Lambda_{\sigma(k+2\ell+1) \dots \sigma(k+2\ell+2)} \Lambda_{\sigma(k+2\ell+2) \dots \sigma(k+2\ell+3)} \dots \Lambda_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

onde S_n denota o grupo simétrico de permutações de n elementos.

3.1 - Lema

"As formas $\psi_{k, 2\ell, n}$, $\phi_{k, 2\ell, n}$ são globais em W ".

Demonstração

Seja $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1}\}$ um outro referencial ortogonal adaptado a F . Tem-se:

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \quad ; \quad 1 < i < n \quad ;$$

$\bar{e}_{n+1} = e_{n+1}$; $\det(a_{ij}) = 1$; (a_{ij}) é uma matriz ortogonal.

As "novas" formas de conexão e curvatura relacionam-se com as "antigas" por:

$$\bar{\omega}_{i \ n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{j \ n+1}$$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \sum_{r,s=1}^n a_{ir} a_{js} \Omega_{rs}$$

$$\bar{\Omega}_{i \ n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Omega_{j \ n+1}$$

$$1 \leq i, j \leq n$$

Então,

$$\bar{\Psi}_{k, 2\ell, n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(1)r} \omega_{r \ n+1} \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(2)r} \omega_{r \ n+1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k)r} \omega_{r \ n+1} \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+1)r} a_{\sigma(k+2)s} \Omega_{rs} \right) \wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+3)r} a_{\sigma(k+4)s} \Omega_{rs} \right) \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+2\ell-1)r} a_{\sigma(k+2\ell)s} \Omega_{rs} \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k+2\ell+1)r} \theta_r \right) \wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k+2\ell+2)r} \theta_r \right) \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(n)r} \theta_r \right).$$

A simetria de S_n nos dá imediatamente:

$$\bar{\Psi}_{k, 2\ell, n} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) a_{\sigma(1) \tau(1)} \omega_{\tau(1) n+1} \wedge$$

$$\wedge a_{\sigma(2) \tau(2)} \omega_{\tau(2) \ n+1} \wedge \dots \wedge a_{\sigma(k) \tau(k)} \omega_{\tau(k) \ n+1} \wedge$$

$$\begin{aligned} & \wedge a_{\sigma(k+1)\tau(k+1)} a_{\sigma(k+2)\tau(k+2)} \cdot \Omega_{\tau(k+1)\tau(k+2)} \wedge \\ & \wedge a_{\sigma(k+3)\tau(k+3)} a_{\sigma(k+4)\tau(k+4)} \Omega_{\tau(k+3)\tau(k+4)} \wedge \dots \wedge \\ & \wedge a_{\sigma(k+2\ell-1)\tau(k+2\ell-1)} a_{\sigma(k+2\ell)\tau(k+2\ell)} \Omega_{\tau(k+2\ell-1)\tau(k+2\ell)} \wedge \\ & \wedge a_{\sigma(k+2\ell+1)\tau(k+2\ell+1)} \theta_{\tau(k+2\ell+1)} \wedge a_{\sigma(k+2\ell+2)\tau(k+2\ell+2)} \theta_{\tau(k+2\ell+2)} \wedge \\ & \wedge \dots \wedge a_{\sigma(n)\tau(n)} \theta_{\tau(n)} \end{aligned}$$

Como $\det(a_{ij}) = 1$ temos

$$\overline{\Psi}_{k,2\ell,n} = \Psi_{k,2\ell,n}$$

Analogamente mostra-se que $\overline{\phi}_{k,2\ell,n} = \phi_{k,2\ell,n}$ c.q.d.

3.2 - Lema Fundamental

$$\begin{aligned} "d\Psi_{k,2\ell,n} &= k\phi_{k-1,2\ell,n} + 2\ell\phi_{k+1,2(\ell-1),n} - \\ &- (1)^n (n-k-2\ell) \Psi_{k+1,2\ell,n} \wedge \theta_{n+1} \text{ se } k \text{ é ímpar} " \end{aligned}$$

Demonstração:

Façamos $d\Psi_{k,2\ell,n} = A + B + C$, onde:

$$\begin{aligned} A &= k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) d\omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \omega_{\sigma(2)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge \\ & \wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \\ & \wedge \theta_{\sigma(n)} . \end{aligned}$$

$$B = (-1)^k \ell \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \omega_{\sigma(2)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge$$

$$\wedge d\Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3)\sigma(k+4)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \quad .$$

$$C = (-1)^{k(n-k-2\ell)} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \dots \wedge$$

$$\Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge d\theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \quad .$$

Teremos:

$$A = A_1 + k \phi_{k-1, 2\ell, n} \quad , \quad \text{onde}$$

$$A_1 = k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\sigma(1)j} \wedge \omega_{\sigma(2)n+1} \wedge \dots \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \right)$$

A_1 decompõe-se claramente em duas partes:

$$A_1 = A_{11} + A_{12} \quad \text{onde}$$

$$A_{11} = (-1)^{k+1} 2\ell k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge$$

$$\wedge \omega_{\sigma(k+1)\sigma(1)} \wedge \Omega_{\sigma(1)\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3)\sigma(k+4)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}$$

$$A_{12} = (-1)^{k+1} (n-k-2\ell) k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge$$

$$\wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \wedge \Omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge \omega_{\sigma(k+2\ell+1)\sigma(1)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}$$

Por outro lado, temos:

$$B = -A_{11} + B_1 + 2\ell \phi_{k+1, 2(\ell-1), n} \quad \text{onde}$$

$$B_1 = -2\ell (-1)^k (n-k-2\ell) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k)n+1} \wedge$$

$$\wedge \omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k+2\ell-1)\sigma(k+2\ell)} \wedge \omega_{\sigma(k+2\ell+1)\sigma(k+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+1)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\sigma(k+2\ell+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}$$

No cálculo da parcela C encontramos:

$$C = -A_{12} - B_1 - (-1)^n (n-k-2\ell) \psi_{k+1, 2\ell, n} \wedge \theta_{n+1}$$

Logo

$$d\psi_{k, 2\ell, n} = A + B + C = k \phi_{k-1, 2\ell, n} + 2\ell \phi_{k+1, 2(\ell-1), n} -$$

$$- (-1)^n (n-k-2\ell) \psi_{k+1, 2\ell, n} \wedge \theta_{n+1} \quad \text{c.q.d.}$$

3.3 - Definição:

Pode-se associar à folheação F , $(n+1)$ -formas $\Gamma_{2r, n}$ sobre W para $r = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, definidas pela equação:

$$\Gamma_{2r, n} = \eta_{2r, n} \wedge \theta_{n+1} + (-1)^{r+1} \frac{(2r-1)(2r-3) \dots 5.3}{2.4.6 \dots (2r-4)(2r-2)} \phi_{0, 2r-2, n}$$

onde

$$\eta_{2r,n} = (n-2r+1) \left[-\Psi_{2r,0,n} + \frac{2r-1}{2} \Psi_{2r-2,2,n} - \frac{(2r-1)(2r-3)}{2 \cdot 4} \Psi_{2r-4,4,n} + \dots + (-1)^{r-1} \frac{(2r-1)(2r-3)\dots 7 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2r-6)(2r-4)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \Psi_{4,2r-4,n} + (-1)^r \frac{(2r-1)(2r-3)\dots 7 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2r-6)(2r-4)(2r-2)} \Psi_{2,2r-2,n} \right] .$$

3.4 - Corolário:

"As formas $\Gamma_{2r,n}$ são exatas" .

Demonstração:

Basta tomar

$$\tau_{2r-1,n} = \Psi_{2r-1,0,n} - \frac{2r-1}{2} \Psi_{2r-3,2,n} + \frac{(2r-1)(2r-3)}{2 \cdot 4} \Psi_{2r-5,4,n} - \dots + (-1)^{r-2} \frac{(2r-1)(2r-3)\dots 7 \cdot 5}{2 \cdot 4 \dots (2r-6)(2r-4)(2r-2)} \Psi_{2,2r-2,n}$$

e aplicar o lema fundamental para obter

$$d \tau_{2r-1,n} = \Gamma_{2r-n} \quad \text{c.q.d.}$$

§4 - Os Resultados

4.1 - Teorema:

"Se as curvaturas seccionais de W são limitadas por K_1 e K_2 , ou seja $K_1 \leq c(x, Q_2) \leq K_2$, $\forall x \in W$, $\forall Q_2 \subset T_x W$, $\dim Q_2 = 2$, então:

$$\frac{n}{n-1} K_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \leq \frac{n}{n-1} K_2$$

Além disso, se W é uma variedade de Einstein tem-se:

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1} \rho$$

onde ρ é a curvatura de Ricci de W . Neste caso a integral da curvatura escalar das folhas não depende da folheação".

Demonstração:

De acordo com o lema fundamental tem-se:

$$d\psi_{1,0,n} = \phi_{0,0,n} - (-1)^n (n-1) \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} \quad (1)$$

A expressão da curvatura escalar da folha será dada utilizando-se um referencial ortonormal adaptado da seguinte maneira:

$$\gamma_2 v = - \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \bar{\Omega}_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1},$$

onde $\bar{\Omega}_{ij}$ é a forma de curvatura da folha vista como subvariedade regular de W^{n+1} munida da métrica induzida pela inclusão da folha e v representa a $(n+1)$ - forma volume de W .

Explicitamente:

$$\bar{\omega}_{ij} = \omega_{i \ n+1}^* \wedge \omega_{n+1 \ j}^* + \Omega_{ij}^*, \quad \text{onde}$$

$$\omega_{i \ n+1}^* = \lambda^*(\omega_{i \ n+1}) \quad , \quad \Omega_{ij}^* = \lambda^*(\Omega_{ij}) \quad ,$$

sendo que $\lambda: M_x \rightarrow W$ é a inclusão da folha que passa por x .

Teremos então:

$$\begin{aligned} -\gamma_2 v &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (\omega_{\sigma(1)n+1}^* \wedge \omega_{n+1 \ \sigma(2)}^* + \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}^*) \wedge \\ &\quad \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} = \\ &= \frac{-1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \omega_{\sigma(2)n+1} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} + \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} = \\ &= -\frac{1}{n!} \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} - \left[\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j=2}^n c_{ij} \right] v \end{aligned} \quad (2)$$

sendo que c_{ij} é a curvatura seccional de W na direção do 2 - plano determinado por $\{e_i, e_j\}$.

O teorema de Stokes aplicado a (1) fornece:

$$\int_W \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = (-)^n \frac{1}{n-1} \int_W \phi_{0,0,n}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \phi_{0,0,n} &= (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)n+1} \Lambda_{\sigma(2)}^{\theta} \dots \Lambda_{\sigma(n)}^{\theta} \\
 &= \left[(n-1)! \sum_{j=1}^n c_{j \ n+1} \right] v
 \end{aligned}$$

Logo

$$\int_W \Psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = (n-2)! \sum_{j=1}^n c_{j \ n+1}$$

Integrando-se os dois membros da igualdade (2) obtem-se:

$$\int_W \gamma_2 v = \int_W \left(\frac{(n-2)!}{n!} \sum_{j=1}^n c_{j \ n+1} + \frac{\sum_{i < j=2}^n c_{ij}}{\binom{n}{2}} \right) v. \quad (3)$$

A desigualdade $K_1 \leq c_{ij} \leq K_2$ implica:

$$1 \leq i, j \leq n$$

$$\frac{n}{n-1} K_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \, v \leq \frac{n}{n-1} K_2$$

Se, além disso, W é uma variedade de Einstein, a equação (3) nos dá:

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1} \rho, \text{ posto que } \sum_{j=1}^n c_{j \, n+1} = \rho,$$

$$\text{e } \sum_{i < j=2}^n c_{ij} = \frac{n-1}{2} \rho \quad \text{c.q.d.}$$

4.2 - Teorema

"Se existir um inteiro par $p, 2 \leq p \leq n$ tal que as curvaturas p -seccionais de W sejam não nulas em todo ponto $x \in W$ e em todas as direções do espaço tangente então W não admite folheações totalmente geodésicas de codimensão 1. Em particular, sobre uma variedade riemanniana de curvatura seccional (2-seccional) não nula não existem folheações totalmente geodésicas de codimensão 1".

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que exista uma folheação totalmente geodésica F de codimensão 1. Então, as formas $\Psi_{k, 2\ell, n}$ são nulas. Assim seguindo a notação de 3.3., teremos:

$$\Gamma_{p, n} = (-1)^{\frac{p}{2} + 1} \frac{(p-1)(p-3) \dots 5.3}{2.4.6 \dots (p-4)(p-2)} \phi_{0, p-2, n}$$

mas $\Gamma_{p, n}$ é exata. Logo.

$$\int_W (-1)^{\frac{p}{2} + 1} \frac{(p-1)(p-3) \dots 5.3}{2.4.6 \dots (p-4)(p-2)} \phi_{0, p-2, n} = 0 \quad (4)$$

Por outro lado $\phi_{0, p-2, n}$ tem o seguinte significado geométrico:

$$\phi_{0, p-2, n}(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = (-1)^{\frac{p}{2} - 1} (p-1)! (n-p+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} n+1} \quad (5)$$

onde $c_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} n+1}$ é a curvatura p -seccional na direção do plano determinado por $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p-1}}, e_{n+1}\}$. Para uma defi

nição das curvaturas p-seccionais ver [7].

Logo, (4) e (5) fornecem.

$$\int_W \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{n+1} = 0$$

Isto contradiz o fato $c_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{n+1} \neq 0$ em W por

que W é conexo.

c.q.d.

4.3 - Teorema:

"Seja Ξ_{2k} ; $0 \leq 2k \leq n$ a(n+1) - forma sobre W definida por

$$\Xi_{2k} = -\Gamma_{2k, n} + (-1)^k \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 5.3}{2.4.6\dots (2k-2).2k} (n-2k+1) \psi_{0, 2k, n} \wedge^{n+1}$$

Então,

$\int_W \Xi_{2k} = \alpha \int_W c_{2k}$ onde α é um coeficiente combinatório que só depende de k e de n ; e c_{2k} designa a curvatura $2k$ -escalar de W .
Em particular $\int_W \Xi_{2k}$ só depende da métrica de W "

Demonstração:

$$\psi_{0, 2k, n} \wedge^{n+1} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} \wedge^{n-2k+1}$$

Logo, é evidente que

$$\psi_{0, 2k, n} \wedge^{n+1} = (2k)! (n-2k)! \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2k} \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \right] v.$$

Aplicando-se a fórmula (5) do teorema 4.2 obtém-se o resultado desejado.

c.q.d.

§ 5 . Conclusão

Seja $H^*(W, \mathbb{R})$ a cohomologia de Rham de W e

$\epsilon(F) \in H^n(W, \mathbb{R})$ a classe de Euler de F . Utilizando-se um referencial ortonormal adaptado local, $\epsilon(F)$ se exprime da seguinte maneira (supondo-se que n é par):

$$\epsilon(F) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n!} \text{Pf}(\tilde{\Omega}_{ij}) \quad \text{onde}$$

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \omega_{i n+1} \wedge \omega_{n+1 j} + \Omega_{ij} \quad (\text{ver } [7])$$

Logo

$$\begin{aligned} \epsilon(F) = & \frac{1}{n!} (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (\omega_{\sigma(1)n+1} \wedge \omega_{n+1\sigma(2)} + \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}) \wedge \\ & \wedge (\omega_{\sigma(3)n+1} \wedge \omega_{n+1\sigma(4)} + \Omega_{\sigma(3)\sigma(4)}) \wedge \dots \wedge \\ & \wedge (\omega_{\sigma(n-1)n+1} \wedge \omega_{n+1\sigma(n)} + \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Logo, se $n = 2p$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon(F) = & \frac{1}{n!} (\psi_{n,0,n} - \binom{p}{p-1} \psi_{n-2,2,n} + \binom{p}{p-2} \psi_{n-4,4,n} - \\ & - \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{1} \psi_{2,n-2,n} + (-1)^p \psi_{0,n,n}) \end{aligned}$$

O teorema de Asimov (ver [1]), th.1) pode ser re enunciado da seguinte maneira:

Se W^{n+1} tem curvatura seccional constante, então $\epsilon(F) \wedge \theta_{n+1} \in H^{n+1}(W, \mathbb{R})$ não depende da folheação, mas somente de n e da curvatura seccional constante igual a c .

O que fizemos no teorema 4.3 significa, para o caso em que n é par, definir uma combinação linear standard (no sentido que os coeficientes só dependem da dimensão n das folhas) $\tilde{\epsilon}_n$ das formas $\psi_{2r,n-2r,n}$ de coeficientes racionais satisfazendo:

$$\tilde{\epsilon}_n \wedge \theta_{n+1} = \epsilon \in H^{n+1}(W, \mathbb{R}) \text{ não depende da folheação } F \text{ mas só}$$

mente da métrica riemanniana de W .

Entretanto as formas E_n não são fechadas em geral como o é a classe de Euler de F , $e(F)$.

Uma propriedade interessante dos E_{2k} é a seguinte:

te:

$\int_W E_{2k}$ é o $2k$ -ésimo coeficiente do polinômio em t que fornece o volume do tubo de W se supusermos $W \subset \mathbb{R}^{n+p}$.

Para um estudo do tubo de variedades riemannianas ver [6] .

CAPÍTULO III

Folheações Ortogonais

Analisaremos neste capítulo o comportamento das integrais de curvatura de folheações duas a duas ortogonais numa dada variedade riemanniana W .

§ 1. Folheações de Codimensão Um.

Seja W^{n+1} uma variedade riemanniana compacta conexa e sem bordo de dimensão $n+1$ e sejam $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ folheações sobre W duas a duas ortogonais e transversalmente orientadas.

1.1 - Teorema:

"Sejam $\gamma_2^i: W^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n+1$ dadas por:
 $\gamma_2^i(x)$ = curvatura escalar da folha que passa por x no ponto x

Então:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_W \gamma_2^i = m \int_W K_2$$

onde K_2 é curvatura escalar de W e m é uma constante dada por

la dimensão de W.

Em particular, as integrais acima não dependem da escolha das folheações ortogonais F_i :

Demonstração:

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ um referencial global em W que satisfaz:

$e_i \perp F_i$ $i=1, 2, \dots, n+1$. Isto é possível porque as folheações F_i são duas a duas ortogonais e transversalmente orientadas.

A fórmula (3) do teorema 4.1 do capítulo 2 nos dá:

$$\int_W \gamma_2^i v = \int_W \left(\frac{(n-2)!}{n!} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} c_{ij} + \frac{\sum_{\substack{i < j \\ i, j \neq 1}}^{n+1} c_{ij}}{\binom{n}{2}} \right) v$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_W \gamma_2^i v = \int_W \left(\frac{(n-2)!}{n!} \cdot 2 \sum_{i < j=2}^{n+1} c_{ij} + \frac{2}{n} \sum_{\substack{i < j \\ i=1}}^{n+1} c_{ij} \right) v$$

logo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_W \gamma_2^i v = 2 \left(\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{1}{n} \right) \int_W K$$

$$\text{pois } \sum_{\substack{i < j \\ i=1}}^{n+1} c_{ij} = K \quad \text{c.q.d.}$$

1.2 - Corolário

"Sejam F_1, F_2, F_3 três folheações transversalmente orientadas de codimensão 1 sobre uma variedade W^3 de dimensão 3. Seja k_i , $i=1, 2, 3$, a curvatura de Gauss da folha que passa por x no ponto x correspondente à folheação F : Então

$\int_{W^3} (k_1 + k_2 + k_3) \nu$ não depende da escolha das três folheações ortogonais."

c.q.d.

§2. - Folheações Ortogonais de Dimensões Complementares.

Seja F uma folheação orientada e transversalmente orientada de codimensão p sobre uma variedade riemanniana W^{n+p} de dimensão $n+p$.

Um referencial ortonormal local adaptado a F será um referencial do tipo $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$ onde:

$e_1, e_2, \dots, e_n$ são tangentes às folhas de F ,

$e_{n+1}, \dots, e_{n+p}$ são perpendiculares a F .

Sejam $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n+p}\}$; $\omega_{ij}; \Omega_{ij}$; o correferencial, as formas de conexão e as formas de curvatura associadas a este referencial.

2.1 - Proposição

"Seja η_0 a $(n+p-1)$ - forma local em W definida por:

$$\eta_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)}.$$

onde:

S_n é o grupo de permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$

S_p é o grupo de permutações de $\{n+1, n+2, \dots, n+p\}$.

Neste caso, η_0 é uma forma global em W "

Demonstração

Seja $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_{n+1}, \bar{e}_{n+2}, \dots, \bar{e}_{n+p}\}$ um outro

referencial adaptado coerente com a orientação de F e com a orientação transversal de F .

Teremos:

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\bar{e}_\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{n+p} b_{\alpha\beta} e_\beta, \quad n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+p$$

$$\bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \theta_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\bar{\theta}_\alpha = \sum_{\beta=n+1}^{n+p} b_{\alpha\beta} \theta_\beta, \quad n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+p$$

onde (a_{ij}) e $(b_{\alpha\beta})$ são matrizes ortogonais e $\det(a_{ij})=1=\det(b_{\alpha\beta})$

Teremos também:

$$\bar{\omega}_{i\alpha}(u) = \langle \nabla_u \bar{e}_i, \bar{e}_\alpha \rangle = - \sum_{\beta=n+1}^{n+p} b_{\alpha\beta} \langle \bar{e}_i, \nabla_u e_\beta \rangle =$$

$$= \sum_{\beta=n+1}^{n+p} \sum_{j=1}^n b_{\alpha\beta} a_{ij} \langle \nabla_u e_j, e_\beta \rangle =$$

$$= \sum_{\beta=n+1}^{n+p} \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\alpha\beta} \omega_{j\beta}(u)$$

Logo

$$\bar{\eta}_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \bar{\theta}_{\sigma(1)} \wedge \bar{\theta}_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}_{\sigma(n-1)} \wedge$$

$$\wedge \bar{\theta}_{\sigma(n)} \wedge \bar{\theta}_{\tau(n+1)} \wedge \bar{\theta}_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \bar{\theta}_{\tau(n+p)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(1)j} \theta_j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(2)j} \theta_j \right) \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(n-1)j} \theta_j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n a_{\sigma(n)j} b_{\tau(n+1)\beta} \omega_{j\beta} \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} b_{\tau(n+2)\beta} \theta_\beta \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{\beta=n+1}^{n+p} b_{\tau(n+p)\beta} \theta_\beta \right).$$

Fixando-se primeiro τ e depois σ e utilizando-se os mesmos argumentos da proposição 3.1 do capítulo 2 obtemos:

$$\bar{\eta}_0 = \eta_0 \quad \text{c.q.d.}$$

2.2 - Definição

Sejam $\eta_{2,0}, \eta_{0,2}$ e μ_0 $(n+p)$ -formas locais em W de finidas por:

$$\eta_{2,0} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \omega_{\sigma(1)k} \wedge \omega_{k\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \right)$$

$$\wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{\tau(n+1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} ;$$

$$\eta_{0,2} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \left(\sum_{k=1}^n \omega_{\tau(n+1)k} \wedge \omega_{k\tau(n+2)} \right) \wedge \theta_{\tau(n+3)} \wedge$$

$$\wedge \theta_{\tau(n+4)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} ;$$

$$\mu_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\tau(1)} \wedge \theta_{\tau(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)}$$

2.3 - Proposição

" $\eta_{2,0}, \eta_{0,2}$ e μ_0 são globais "

Demonstração:

Análoga à proposição 2.1 c.q.d.

2.4 - Lema

$$d\eta_0 = (-1)^n (n-1)! (p-1)! (\eta_{2,0} + \eta_{0,2}) + (-1)^{n+1} \mu_0$$

Demonstração:

$$d\eta_0 = X + Y + Z \quad \text{onde:}$$

$$X = (n-1)! \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) d\theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \\ \wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} ;$$

$$Y = (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \\ \wedge d\omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} ;$$

$$Z = (-1)^n (p-1)! \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \\ \wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge d\theta_{\tau(n+2)} \wedge \theta_{\tau(n+3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} .$$

Desenvolvendo X obtemos:

$$X = X_1 + X_2 \quad \text{onde:}$$

$$X_1 = (-1)^n (n-1)! \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \omega_{\sigma(1)\sigma(n)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \\ \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)} ;$$

$$X_2 = (-1)^n (n-1)! (p-1)! \eta_{2,0} .$$

Por outro lado é claro que $Y = (-1)^{n+1} \mu_0 + Y_1$, onde:

$$Y_1 = (-1)^{n+1} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge \\ \wedge \left(\sum_{k=1}^{n+p} \omega_{\sigma(n)k} \wedge \omega_{k\tau(n+1)} \right) \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)}$$

Por sua vez, $Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$ onde

$$Y_{11} = -X_1 \quad \text{e}$$

$$Y_{12} = (-1)^{n+1} (p-1)! \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge$$

$$\wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \omega_{\tau(n+2)\tau(n+1)} \wedge \theta_{\tau(n+2)} \wedge \theta_{\tau(n+3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)}$$

Para Z temos:

$$Z = (-1)^n (p-1)! \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \theta_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n-1)} \wedge$$

$$\wedge \omega_{\sigma(n)\tau(n+1)} \wedge \left(\sum_{k=1}^{n+p} \omega_{\tau(n+2)k} \wedge \theta_k \right) \wedge \theta_{\tau(n+3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\tau(n+p)}$$

Logo, $Z = Z_1 + Z_2$ onde :

$$Z_1 = (-1)^n (p-1)! (n-1)! \eta_{0,2} \quad \text{e}$$

$$Z_2 = -Y_{12}$$

Assim,

$$d\eta_0 = X+Y+Z = (-1)^n (n-1)! (p-1)! \eta_{2,0} +$$

$$+ (-1)^n (p-1)! (n-1)! \eta_{0,2} + (-1)^{n+1} \mu_0 \quad \text{c.q.d.}$$

Vejamos agora uma primeira generalização do teorema de Asimov para o caso de codimensão >1 .

2.5 - Teorema

"Seja $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ vezes}}$ o toro "flat" e sejam F_1 ,

F_2 duas folheações ortogonais em T^n tais que $\dim F_1 + \dim F_2 = n$.

Suponhamos que F_1 e F_2 são transversalmente orientadas.

$$\text{Então } \int_{T^n} \gamma_2^1 \nu = - \frac{\binom{n}{2}}{\binom{p}{2}} \int_{T^n} \gamma_2^2 \nu$$

onde γ_2^1 e γ_2^2 são as curvaturas escalares das folhas de F_1 e F_2 respectivamente."

Demonstração:

As curvaturas seccionais de T^n são identicamente nulas, logo $\Omega_{ij}=0 \quad \forall_{i,j} \quad 1 \leq i,j \leq n+p$. Assim, $\mu_0=0$

Então, pelo lema 2.4,

$\eta_{2,0} + \eta_{0,2}$ é exata

Por outro lado, sabemos que:

$$\eta_{2,0} = -2(n-2)! p! \gamma_2^1 \vee \quad e$$

$$\eta_{0,2} = -2n! (p-2)! \gamma_2^2 \vee$$

onde $\vee$ é o elemento de volume de W .

Pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_W 2(n-2)! p! \gamma_2^1 \vee = - \int_W 2n! (p-2)! \gamma_2^2 \vee,$$

, ou equivalentemente

$$\int_W \gamma_2^1 \vee = - \frac{\binom{n}{2}}{\binom{p}{2}} \int_W \gamma_2^2 \vee \quad \text{c.q.d.}$$

Mais geralmente temos:

2.6 - Proposição

"Seja W^{n+1} uma variedade riemanniana compacta conexa e sem bordo e F_1, F_2 duas folheações ortogonais transversalmente orientadas e tais que

$\dim F_1 + \dim F_2 = n$. Então:

$$2(n-2) ! p ! \int_W \sigma_2^1 + 2n ! (p-2) ! \int_W \sigma_2^2 =$$

$$= \int_W \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ n+1 \leq \alpha \leq n+p}} c_{i\alpha} \quad \text{c.q.d.}$$

onde:

$c_{i\alpha}$ é a curvatura seccional de W na direção do plano determinado pelos vetores e_i, e_α pertencentes ao referencial ortonormal adaptado $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+p}\}$ coerente com as orientações.,
 σ_2^1, σ_2^2 são as curvaturas escalares extrínsecas (dadas pela 2.ª forma fundamental) das folhas de F_1 e F_2 respectivamente".

Demonstração:

Temos:

$$\eta_{2,0} = -2(n-2) ! p ! \sigma_2^1 \vee$$

$$\eta_{0,2} = -2n ! (p-2) ! \sigma_2^2 \vee$$

$$\mu_0 = -(n-1) ! (p-1) ! \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n+1 \leq \alpha \leq n+p}} c_{i\alpha} \right) \vee$$

O lema 2.4 e o teorema de Stokes nos dão:

$$\int_W \mu_0 = (n-1) ! (p-1) ! \int_W (\eta_{2,0} + \eta_{0,2})$$

Logo,

$$\int_W \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n+1 \leq \alpha \leq n+p}} c_{i\alpha} \vee = \int_W (2(n-2) ! p ! \sigma_2^1 + 2n ! (p-2) ! \sigma_2^2) \vee$$

c.q.d.

2.7 - Teorema

"Nas mesmas condições dos Teoremas precedentes ,
se W^{n+p} possui curvatura seccional constante então:

$$\frac{2(n-2) : p :}{2} \int_W \gamma_2^1 v + \frac{2n : (p-2) :}{2} \int_W \gamma_2^2 v =$$

$$= npc \text{ vol } (W)$$

Em particular,

$$\int_W \gamma_2^1 v + \frac{\binom{n}{2}}{\binom{p}{2}} \int_W \gamma_2^2 v \text{ não depende da escolha das duas}$$

folheações ortogonais F_1 e F_2 "

Demonstração

Basta observar que no caso de curvatura constante
vale:

$$c_{i\alpha} = c \quad 1 \leq i \leq n \quad n+1 \leq \alpha \leq n+p \quad e$$

$$\gamma_2^1 = \sigma_2^1 + c ,$$

$$, \gamma_2^2 = \sigma_2^2 + c$$

e utilizar a proposição 2.6. c.q.d.

O teorema que enunciaremos a seguir fornece uma
obstrução topológica à existência de folheações ortogonais de
dimensões complementares em espaços de curvatura positiva
quando uma das folheações é tal que as folhas são subvariedades
mínimas do espaço ambiente.

Tal resultado aplica-se, por exemplo, ao caso das esferas de curvatura constante. Um estudo detalhado de folheações satisfazendo condições geométricas particulares pode ser visto em [13] .

2.8 - Teorema

"Seja W^{n+2} uma variedade riemanniana de dimensão $n+2$ compacta, conexa, e sem bordo, de curvatura seccional estritamente positiva. Sejam F_1, F_2 duas folheações ortogonais transversalmente orientadas tais que $\dim F_1 = n$, $\dim F_2 = 2$. Suponhamos que F_1 é tal que as folhas são subvariedades mínimas de W . Então,

$\epsilon(F_2) \neq 0$, onde:

$\epsilon(F_2) \in H^2(W, \mathbb{R})$ é a classe de Euler da distribuição tangente a F_2 ".

Demonstração:

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ um referencial ortogonal adaptado.

Seja $v_1 = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n$ a forma característica de F_1 .

Como $F_1^\perp = F_2$ é integrável temos: (ver [4], [8], [11])

$dv_1 = 0$, logo $[v_1] \in H^n(W, \mathbb{R})$.

A classe de Euler de F_2 é representada na cohomologia

logia de Rham pela seguinte 2 - forma : (ver [7])

$$\varepsilon(F_2) = \Omega_{n+1 \ n+2} + \sum_{k=1}^n \omega_{n+1 \ k} \wedge \omega_{k \ n+2}$$

(Note-se que a orientação de F_2 está fixada).

Assim, seja

$\left[\varepsilon(F_2) \wedge v_1 \right] \in H^{n+2}(W, \mathbb{R})$ o "cup product" dessas duas formas. Pelo teorema de Rham temos:

$$\left[\varepsilon(F_2) \wedge v_1 \right] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_W \varepsilon(F_2) \wedge v_1 \neq 0$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon(F_2) \wedge v_1 &= \Omega_{n+1 \ n+2} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n + \\ &+ \sum_{k=1}^n \omega_{n+1 \ k} \wedge \omega_{k \ n+2} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1 \ n+2} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n &= \\ = - c_{n+1 \ n+2} \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n \wedge \theta_{n+1} \wedge \theta_{n+2} &= \\ = - c_{n+1 \ n+2} v &\quad \text{onde:} \end{aligned}$$

$c_{n+1 \ n+2}$ é a curvatura seccional de W na direção do plano gerado por e_{n+1} e e_{n+2} ,

, v é o elemento de volume de W .

Também,

$$\sum_{k=1}^n \omega_{n+1, k} \wedge \omega_{k, n+2} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n = \frac{1}{n!} \eta_{0,2}$$

Assim,

$$\int_W \varepsilon(F_2) \wedge v_1 = - \int_W c_{n+1, n+2} v + \frac{1}{n!} \int_W \eta_{0,2}$$

Aplicando-se o lema 2.4 e o teorema de Stokes, temos:

$$\int_W \varepsilon(F_2) \wedge v_1 = - \int_W c_{n+1, n+2} v + \frac{1}{n!} \int_W \mu_0 - \frac{1}{(n-1)!(p-1)!} \int_W \eta_{2,0}$$

Porém, sabemos que

$$\mu_0 = -(n-1)!(p-1)! \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ n+1 \leq \alpha \leq n+p}} c_{i\alpha} \right) v$$

Como $c_{i\alpha} > 0$ temos

$$\int_W \mu_0 < 0$$

Também, como F_1 é tal que as folhas são subvariedades mínimas de W , temos:

$$\sigma_2^1 \leq 0 \quad \text{Logo,}$$

$$\int_W \eta_{2,0} = - \int_W 2(n-2) : p : \sigma_2^1 v \geq 0$$

Como $c_{n+1} \quad n+2 > 0$ temos

$$\int_W \varepsilon(F) \wedge v_1 < 0$$

logo $\varepsilon(F_2) \neq 0$ em $H^2(W, \mathbb{R})$ c.c.d.

2.9 - Corolário

"Seja F uma folheação transversalmente orientada de codimensão 2 sobre a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Se F é tal que as folhas são subvariedades mínimas de S^n então sua distribuição normal $F^\perp_{CTS^n}$ não é integrável."

Demonstração:

Basta notar que

$$0 = \varepsilon(F) \in H^2(S^n, \mathbb{R}) = 0$$

e aplicar o teorema 2.8 c.c.d.

BIBLIOGRAFIA

- (1) D. Asimov: "Average Gaussian curvature of leaves of a foliation" B.A.M.S. - Jan. 1978.
- (2) F.Brito, R.Langevin e H. Rosenberg: "Integrales de courbure sur des variétés feuilletées". C.R.A.S., T. 285(oct.1977).
- (3) S.S.Chern: "A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed riemannian manifolds".
Annals of Math, vol.45, n°4 (1944).
- (4) A.Haefliger: "Some remarks on foliations with minimal leaves" Journal of Diff.Geom. vol.15 n°2 (jun.1980).
- (5) R. Langevin: "Feuilletages tendus". Bull.Soc.Math.Fr. n° 107 (1979).
- (6) R. Langevin: Thèse d'état
Publications mathématiques d'Orsay. n° 80-03 (jun.1980).
- (7) J.W.Milnor, J.Stasheff: "Lectures on characteristic classes"
Princeton University Press-1974, (Annals of Math.Studies).
- (8) H. Rummier: Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts.
Comm. Math. Helv. vol.54, Fasc.2 (1979).
- (9) L. Santaló: "Integral geometry and geometric probability"
Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Add.
Wesley Publ.Co. (1976).
- (10) M.Spivak: "Differential Geometry"
Publish or Perish, Inc. (1975).

- (11) D. Sullivan: "A homological characterization of foliations consisting of minimal leaves". Comm.Math. Helv. 54 (1979).
- (12) J. Thorpe: "Sectional curvatures and characteristic classes" Ann. of Math. vol.80 (1964).
- (13) P. Walczak: "On foliations with leaves satisfying some geometrical conditions". Inst.of Math.Polish.Acad. of Sciences. Prep. n° 210 (1980).
- (14) J.A.Wolf: "Spaces of constant curvature" Mac Graw-Hill Book Company (1976).