APLICAÇÕES DA ANÁLISE NÃO STANDARD:
ESPAÇOS UNIFORMES E LOCALMENTE CONVEXOS

NELSON ACHCAR

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. FRANCISCO MIRAGLIA NETO

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq

- SÃO PAULO, NOVEMBRO DE 1980 -

Para Sonía

INTRODUÇÃO

A formalização por ϵ 's e δ 's dos conceitos de limite, continuidade e correlatos, geralmente creditada a Weierstrass, data da segunda metade do século XIX. Entretanto, permanecem na linguagem e nas formas intuitivas de raciocinar as descrições fundadas na noção "infinitésimo" oriunda das primeiras tentativas de fundamentar o Cálculo, feitas por Leibniz, por volta de 1700. A reabilitação desta noção, ao nível das demonstrações rigorosas, é consequência e motivação do método proposto por Robinson, em 1960, sob o nome de Análise Não Standard.

Baseado nos conceitos e métodos da Lógica Matemática, Robinson criou instrumentos capazes de desenvolver a Análise por meio dos infinitamente grandes e infinitamente pequenos. Para isto ele estabeleceu a existência de um corpo não arquimediano $\mathbb{R}^*$ com as "mesmas propriedades" que $\mathbb{R}$, i.é., "elementarmente equivalente" a $\mathbb{R}$ (no sentido da definição I.3.3. que é mais abrangente do que o sentido usualmente atribuído a expressão "elementarmente equivalente").

O novo método, equivalente à clássica abordagem dos ϵ 's e δ 's, torna mais diretas e intuitivas as definições, simplifica as demonstrações e facilita, portanto, a descoberta

(ou invenção) matemática. Este é o veredito de Robinson a respeito do método não standard.

Ao longo deste trabalho experimentei algumas das virtudes acima assinaladas por Robinson: nas situações elementares as noções e demonstrações não standard significam uma sensível simplificação em relação ao método clássico, em algumas situações mais avançadas a introdução de condições de saturação sobre o alargamento M^* viabiliza demonstrações que, do ponto de vista não standard, podem ser consideradas naturais (veja, p.ex., III.7).

CONTEÚDO DESTA DISSERTAÇÃO

No capítulo I são apresentadas as noções de Teoria dos Modelos necessárias para o desenvolvimento dos subsequentes capítulos. O principal conceito introduzido é o de *alargamento* de uma estrutura M .

O capítulo II apresenta a noção de *núcleo de um filtro* e o *lema fundamental dos núcleos* que são instrumentos suficientes para desenvolver os tópicos básicos de topologia de modo não standard. Aparecem aí caracterizações notáveis dos clássicos conceitos de continuidade e compacidade.

No capítulo III a noção de estrutura uniforme é caracterizada de modo não standard como uma relação de equivalência. Conseqüentemente, a teoria dos espaços uniforme passa a ter um desenvolvimento mais intuitivo do que na versão standard. Em particular, o completamento do espaço uniforme, da-

do pelos seus *pontos aproximáveis*, significa uma clara simplificação conceitual em relação ao completamento dado por filtros de Cauchy, da versão standard.

No capítulo IV, são caracterizados os pontos aproximáveis de um espaço localmente convexo a partir do que é demonstrado um teorema de Grothendieck sobre a completude de tais espaços.

Agradeço especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Miraglia Neto pelos ensinamentos e estímulos que recebi. Suas qualidades de incentivador de espíritos, conhecidas dos amigos, foram essenciais para a realização deste trabalho. Ao sr. João Baptista Esteves de Oliveira agradeço pelo paciente trabalho de datilografia. À amiga Zara Issa Abud agradeço pela ajuda na composição final.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO.	v
CAP. I - ESTRUTURAS E LINGUAGENS DE ORDEM SUPERIOR — ALARGAMENTOS . .	1
I.1 - Relações de tipo τ -estruturas de ordem superior	1
I.2 - Uma linguagem para M	4
I.3 - O alargamento M^* de uma estrutura M	9
I.4 - Filtros	13
I.5 - Ultrapotência de M	14
I.6 - Ultrapotências que são alargamentos	22
I.7 - Propriedades e exemplos de alargamentos	25
CAP. II - O NÚCLEO DE UM FILTRO E TOPOLOGIA NÃO STANDARD	31
II.1 - O núcleo de um filtro	32
II.2 - Espaços topológicos	35
II.3 - Demonstrações não standard de alguns teoremas de topo- logia geral	42
CAP. III - ESPAÇOS UNIFORMES	45
III.1 - A definição standard de estrutura uniforme	46
III.2 - A caracterização não standard de estrutura uniforme — mônadas	47
III.3 - Os elementos aproximáveis de E'	51
III.4 - Espaços pré-compactos	57
III.5 - Funções uniformemente contínuas	58
III.6 - Redese famílias de pseudo-métricas associadas a Ω (stan- dard)	62
III.7 - A envoltória não standard e o complemento de um espa- ço uniforme	65
CAP. IV - ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS.	72
IV.1 - Dualidade	74
IV.2 - Topologia Polar — os elementos θ -finitos.	77
IV.3 - Os elementos aproximáveis na topologia fraca.	79
IV.4 - Os elementos aproximáveis num espaço localmente conve- xo — um teorema de Grothendieck	82
BIBLIOGRAFIA.	90

CAPÍTULO I

ESTRUTURAS E LINGUAGENS DE ORDEM SUPERIOR - ALARGAMENTOS

Os sistemas axiomáticos de muitas estruturas algébricas, como grupos, são formulados de modo natural numa linguagem de 1ª ordem. Todavia, partes da teoria ou mesmo dos axiomas de muitas estruturas matemáticas ultrapassam os recursos de uma tal linguagem. Para abranger estes casos nós definiremos, como em [12], as *estruturas e linguagens de ordem superior*.

O objetivo deste capítulo é estabelecer a existência do *alargamento* M^* de uma estrutura M , instrumento básico da Análise não-standard. Na realidade nós construiremos o alargamento, e para tanto, usaremos a técnica dos ultraproductos.

Seguiremos, em linhas gerais, o capítulo I de Non Standard Analysis [12] e o capítulo II de Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions [8] e a parte 1 de [9].

1.1 - RELAÇÕES DE TIPO τ - ESTRUTURAS DE ORDEM SUPERIOR

Por "estrutura" (de 1ª ordem) usualmente entende-se um conjunto A munido de relações entre os elementos de A . Nós usaremos o termo no sentido mais amplo possível posto que in-

cluiremos no seu escopo, sob o título de "relações", todos os conceitos matemáticos atinentes a A. Assim, na "estrutura plena dos números reais" estarão incluídos, como relações, os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $P(\mathbb{R})$, subconjuntos de $P(\mathbb{R})$, funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$, etc. Ela também inclui, como uma relação, o conceito de supremo: é a relação constituída pelos pares (B, s) onde B é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e s o supremo de B.

Para esclarecer o que dissemos acima precisamos definir o que são "relações definidas a partir de um conjunto A". A definição é de tipo indutivo e a hierarquização que possibilita a indução é dada pelos *tipos*.

I.1.1 DEFINIÇÃO - Define-se *tipo* indutivamente:

- (i) 0 é um tipo
- (ii) se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e se $\tau_1, \dots, \tau_n$ são tipos então

$$(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

é um tipo. O conjunto dos tipos será indicado por T.

Assim, por exemplo, 0; (0); (0,0); (0,(0)); ((0)) são tipos.

I.1.2 DEFINIÇÃO - Seja A um conjunto não vazio. Define-se indutivamente uma família $(A_\tau)_{\tau \in T}$ da seguinte maneira:

- (i) $A_0 = A$
- (ii) seja $\tau \in T - \{0\}$, $\tau = (\tau_1 \dots \tau_n)$. Se já estiverem definidos $A_{\tau_1}, \dots, A_{\tau_n}$ então

$$A_{(\tau_1, \dots, \tau_n)} = \left\{ S : S \subset A_{\tau_1} \times \dots \times A_{\tau_n} \right\} = P \left(\prod_{j=1}^n A_{\tau_j} \right).$$

Se $S \in A_\tau$ então S é chamada *relação de tipo τ* sobre A . As relações de tipo 0, i.é., os elementos de A , serão chamados *indivíduos*.

EXEMPLOS - (1) Uma relação binária $S \subset A \times A$ é uma relação de tipo (0,0).

(2) Um subconjunto B de A é uma relação de tipo (0).

(3) Se C for uma coleção de subconjuntos de A , i. é., $C \subset P(A)$, então C é uma relação de tipo ((0)).

(4) As funções, em particular as operações, são relações de algum tipo. Seja $f: A^n \rightarrow A$, olhando f como o conjunto das $n+1$ -uplas $(a_1, \dots, a_n, a)$ tais que $f(a_1, \dots, a_n) = a$, vemos que f é uma relação de tipo $(0, \dots, 0)$ ($n+1$ zeros).

A operação de adição em $\mathbb{R}$, p.ex.; é uma relação de tipo (0,0,0). Ela é constituída pelas triplas (a, b, c) tais que $a+b = c$.

Por uma *estrutura baseada em A* entenderemos uma família constituída pelo conjunto A e por relações definidas a partir de A . Assim, o corpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ é uma estrutura; como ela só tem relações entre indivíduos é chamada *estrutura de 1ª ordem*. Um exemplo de *estrutura de ordem superior* é um espaço topológico $(A, \{\emptyset\}, \{U: U \in \theta\})$ onde θ é a topologia; ela contém uma relação de tipo ((0)) — θ — e relações de tipo (0) — os vários U 's. (Incluimos os elementos de θ na estrutura porque pretendemos que quando uma relação (no caso θ) esteja na estrutura, os elementos que a satisfazem (os U 's) também estejam). Pre-

cisamente, a definição de estrutura é a seguinte

I.1.3 DEFINIÇÃO - Seja $A \neq \emptyset$. Uma *estrutura baseada em A* é uma família $M = (M_\tau : \tau \in T)$ tal que

- (0) $M_0 = A_0$
- (i) para cada $\tau \in T$: $M_\tau \subset A_\tau$
- (ii) se $\tau \neq 0$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, então

$$S \in M_\tau \text{ e } (S_1, \dots, S_n) \in S \implies S_i \in M_{\tau_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se $M_\tau = A_\tau$ para todo tipo τ , diremos que M é a *estrutura plena baseada em A*.

I.2 - UMA LINGUAGEM PARA M

Seja M uma estrutura baseada em A . Apresentaremos uma linguagem adequada para descrever as propriedades de M . Denote-mo-la por L . Ela conterá, como as linguagens de 1ª ordem, *variáveis* (um conjunto enumerável infinito), *conectivos* ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$), *quantificadores* ($\forall, \exists$) e *parênteses*. A especificidade de L está nos seus *símbolos de relação* (para cada $\tau \neq 0$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, um símbolo de relação $\phi_\tau (\dots,)$ com $n+1$ posições) e no seu conjunto de *constantes* (um conjunto C de cardinalidade maior ou igual a $\text{card}(\bigcup_\tau M_\tau)$).

Admitiremos que esteja definida uma função $I: D_I \subset C \rightarrow \bigcup_\tau M_\tau$ sobrejetora, chamada *interpretação* de L em M . Se $s \in D_I$ e se $I(s) = S$ diremos que s é o nome de S ou que s denota S . O nome da relação será freqüentemente o mesmo que usamos na metalinguagem (aque-

la que estamos usando para escrever estas notas) para indicar a relação de M . Se s é o nome de S , o tipo da constante s é o tipo de S .

As fórmulas atômicas de L são expressões do tipo

$$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_n)(t_0, t_1, \dots, t_n)$$

onde cada t_i , $i = 0, \dots, n$ ou é uma variável ou uma constante de L . Assim, na linguagem da estrutura plena dos números reais, as seguintes expressões são fórmulas atômicas:

$$\Phi_{(0)}(N, 1), \Phi_{(0,0,0)}(+, 2, 3, 5), \Phi_{(0,0)}(<, x, 1), \Phi_{(0)}(x, x), \Phi_{(0)}(1, \mathbb{R})$$

($1, 2, 3, 5, +, <, N, \mathbb{R}$ são constantes, i.é., nomes de objetos da estrutura e x uma variável). As traduções para a linguagem informal dos números reais são as seguintes (justificadas pela definição de validade que daremos a seguir):

$$1 \in N, (2, 3, 5) \in + \text{ (ou, na forma mais usual, } 2+3=5),$$

$$(x, 1) \in < \text{ (ou, } x < 1), x \in x, \mathbb{R} \in 1.$$

(Se o leitor estiver chocado com as duas últimas, saiba, desde já, que elas serão excluídas sob o estigma de *não admissíveis em M*).

Usando conectivos e quantificadores construímos, do mesmo modo que nas linguagens de 1^a ordem, as outras fórmulas de L . Assim, se X e Y forem fórmulas de L então

$$\neg X, X \vee Y, X \wedge Y, X \rightarrow Y, X \leftrightarrow Y \text{ são fórmulas de } L.$$

Se $X(x)$ for uma fórmula onde ocorre a variável x então

$$\forall x X(x) \quad \text{e} \quad \exists x X(x)$$

são fórmulas desde que em $X(x)$ não ocorra $\forall x$ nem $\exists x$. Uma *sentença* é uma fórmula onde não ocorrem variáveis livres, i.é, toda variável que ocorre na fórmula ocorre no escopo de algum qualificador.

Para evitar paradoxos, precisamos, antes de definir validade de uma sentença em M , selecionar aquelas que chamaremos de admissíveis em M . O objetivo é excluir fórmulas como $1 \in 1$, $x \in x$, $R \in 1$, etc.

No símbolo de relação $\Phi_{\tau_0}(\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n})$ correspondente ao tipo $\tau_0 = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, a i -ésima posição da esquerda para direita, $0 \leq i \leq n$, é chamada de *posição de tipo* τ_i . Se t é um termo de L (uma variável ou uma constante) com ocorrência numa fórmula atômica Φ_{τ_0} , cada ocorrência de t tem um tipo, qual seja, o tipo da posição desta ocorrência de t . Em $\Phi_{(0,0)}(a,b,c)$, a ocorrência de $\underline{a}$ é de tipo $(0,0)$, as de $\underline{b}$ e $\underline{c}$ de tipo 0 . Em $\Phi_{(0,0,(0))}(y,x,z,x)$ a ocorrência de $\underline{y}$ é de tipo $(0,0,(0))$, a de $\underline{z}$ de tipo 0 , enquanto que $\underline{x}$ tem uma ocorrência de tipo 0 e outra de tipo (0) . Temos portanto a noção de tipo de uma ocorrência de um termo numa fórmula atômica. Queremos estender este conceito para todas as fórmulas. Observamos, preliminarmente, o seguinte fato de demonstração simples.

FATO - Seja t um termo e X uma fórmula de L . Toda ocorrência de t em X que não seja imediatamente precedida por um quantificador é uma ocorrência de t em uma (única) subfórmula atômica de X .

É simples agora definir o *tipo de uma ocorrência de um termo* t

(que não seja imediatamente precedida por um quantificador) em uma fórmula X : é precisamente o tipo da ocorrência de t na subfórmula atômica de X onde se dá esta ocorrência de t em X . Por exemplo em $(\Phi_{(0,(0))}(x,y,z) \rightarrow \neg \Phi_{((0),0)}(y,z,x))$, x tem ocorrências de tipo $(0,(0))$ e 0 , y tem ocorrências de tipo 0 e $((0),0)$ e z só tem ocorrências de tipo (0) .

I.2.1 DEFINIÇÃO - Uma fórmula X é *admissível* em M se

- (i) X for *estratificada*, i.é., todas as ocorrências de um termo em X forem do mesmo tipo. Por exemplo, $\Phi_{(0)}(x,x)$ não é estratificada, ao passo que, $\Phi_{(0,0)}(=,x,x)$ é estratificada. (Na linguagem informal: $x \in x$ não é, e $x = x$ é).
- (ii) todas as constantes que ocorrem em X são nomes de objetos de M (relações ou indivíduos).
- (iii) o tipo das ocorrências de cada constante é o mesmo tipo da relação (ou indivíduo) que ela denota. Assim, por exemplo, $\Phi_{(0)}(1,R)$ (i.é., $R \in 1$) não é admissível.

I.2.2 DEFINIÇÃO - Seja X uma sentença de L *admissível* em M . Vamos definir o que significa dizer que X é *válida* em M ($M \models X$). Se X for admissível e não for válida em M diremos que ela é *falsa* em M . ($M \not\models X$)

- (i) se X for atômica, i.é., $X = \Phi_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}(S_0, S_1, \dots, S_n)$ então

$M \models X$ se, e somente se, $(S_1, \dots, S_n) \in S_0$.

- (ii) se $X = \neg Y$ então, $M \models X \iff M \not\models Y$

se $X = Y \wedge Z$ então, $M \models X \iff M \models Y$ e $M \models Z$

se $X = Y \vee Z$ então, $M \models X \iff M \models Y$ e $M \models Z$

se $X = Y \rightarrow Z$ então, $M \models X \iff M \models Y$ e $M \models Z$

se $X = Y \leftrightarrow Z$ então, $M \models X \iff (M \models Y \text{ e } M \models Z)$ ou
 $(M \not\models Y \text{ e } M \not\models Z)$.

(iii) Se $X = \forall x (Y(x))$ e se as ocorrências de x em Y são de tipo τ , então

$$M \models X \iff M \models Y(S) \text{ para todo } \underline{S \in M_\tau}$$

Se $X = \exists x (Y(x))$ e se as ocorrências de x em Y são do tipo τ , então

$$M \models X \iff \text{existir } \underline{S \in M_\tau} \text{ tal que } M \models Y(S).$$

O simbolismo dos tipos facilita as definições mas dificulta a comunicação. Assim, não usaremos as sentenças de L para descrever propriedades de M mas sim, as versões mais comunicativas da linguagem informal, observando que essas versões podem ser "traduzidas" para a linguagem L . Por exemplo, o princípio de indução finita, cuja expressão corrente é

$$\forall P (0 \in P \wedge \forall n (n \in P \rightarrow n+1 \in P) \rightarrow P = \mathbb{N})$$

ou ainda,

$$\forall P (0 \in P \wedge \forall n (n \in P \rightarrow n+1 \in P) \rightarrow \forall m (m \in \mathbb{N} \leftrightarrow m \in P)),$$

na linguagem L , da estrutura plena dos números naturais, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \forall P[\Phi_{(0)}(P,0) \wedge \forall n \forall u(\Phi_{(0)}(P,n) \wedge \Phi_{(0,0,0)}(+,n,1,u) \rightarrow \\ & \rightarrow \Phi_{(0)}(P,u)) \rightarrow \forall m(\Phi_{(0)}(N,m) \leftrightarrow \Phi_{(0)}(P,m))] \end{aligned}$$

(O prejuízo para a comunicação em L decorre, como se vê, sobretudo da ausência de símbolos para funções em L).

1.3 - O ALARGAMENTO M^* DE UMA ESTRUTURA M

1.3.1 DEFINIÇÃO - Seja M uma estrutura baseada em A e seja S uma relação binária em M , i.é., S é de tipo (τ_1, τ_2) para algum τ_1 e algum τ_2 . Então

(i) o domínio de S é o conjunto

$$\text{dom}(S) = \{a \in M_{\tau_1} : \exists b \in M_{\tau_2} \text{ tal que } (a,b) \in S\}.$$

(ii) S é *concorrente* (ou *finitamente satisfeita*) se, para cada subconjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \text{dom}(S)$, existir $b \in M_{\tau_2}$, tal que

$$(a_i, b) \in S \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

EXEMPLOS - (1) A relação $<$ (menor do que), em $\mathbb{R}$, é concorrente pois dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_i < b$ para todo $i = 1, \dots, n$.

(2) Seja F um filtro sobre um conjunto A . Então a relação S dada por $S(F,G) \iff F, G \in F \wedge G \subset F$ é concorrente. De fato, dados $F_1, \dots, F_n \in F$, o conjunto $G = F_1 \cap \dots \cap F_n$ pertence a F e $G \subset F_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Estabeleceremos agora uma terminologia ad hoc, com a finalidade de facilitar a exposição.

I.3.2 DEFINIÇÃO - Sejam $M = (M_\tau : \tau \in T)$ e $M^* = (M_\tau^* : \tau \in T)$ estruturas baseadas em A e em A^* , respectivamente. Diremos que M^* é uma extensão de M se existir uma aplicação injetora

$$S \in \bigcup_{\tau \in T} M_\tau \xrightarrow{\psi} S^* \in \bigcup_{\tau \in T} M_\tau^*$$

tal que

- (i) ψ preserva tipos, i.é, $S \in M_\tau \implies S^* \in M_\tau^*$
- (ii) se $\tau \neq 0$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ e se $S \in M_\tau$ então

$$(S_1^*, \dots, S_n^*) \in S^* \iff (S_1, \dots, S_n) \in S.$$

Seja M^* uma extensão de M . Indicaremos por L^* a linguagem de M^* . L^* é uma linguagem idêntica a L exceto nas constantes, cujo conjunto deverá conter nomes para cada objeto de M^* , em particular, para cada $S \in M$, S^* é uma constante de L^* .

Se X for uma sentença de L , X^* será a sentença de L^* obtida de X colocando o asterisco $*$ em cada constante que ocorre em X . Por exemplo, se X for $\forall x (x \in N)$ então X^* será $\forall x (x \in N^*)$. Diremos que X^* é a tradução de X . Como a inclusão $S \rightarrow S^*$ preserva tipos então é claro que: X é admissível em $M \iff X^*$ é admissível em M^* .

I.3.3 DEFINIÇÃO - Seja M^* uma extensão de M . Diremos que M^* é elementarmente equivalente a M se, e somente se, para toda senten-

ça X , admissível em M , se tiver

$$M \models X \text{ se, e só se, } M^* \models X^*.$$

I.3.4 DEFINIÇÃO - Seja M^* uma extensão de M . Diremos que M^* é um *alargamento* de M se:

- (i) M^* for elementarmente equivalente a M
- (ii) para cada relação concorrente S de tipo (τ_1, τ_2) em M , existir $b_S \in M^*_{\tau_2}$ Tal que

$$(a^*, b_S) \in S^* \text{ para todo } a \in \text{dom}(S).$$

Estabeleceremos na próxima seção a existência do alargamento M^* de uma estrutura M , admitamos, por enquanto, este resultado e vejamos algumas consequências da definição I.3.4.

Seja $M = (M_\tau : \tau \in T)$ uma estrutura baseada em A e seja M^* um alargamento de M , baseado em A^* . Em geral, M^* não será plena ainda que M o seja, i.é, existem relações de tipo $\tau \neq 0$ sobre A^* , que não estão em M^*_τ . Assim, temos a seguinte definição

I.3.5 DEFINIÇÃO - Sejam M e M^* como em I.3.4. Então:

- (i) as relações de $A^*_\tau - M^*_\tau$ são chamadas *relações externas* (a M^*).
- (ii) as relações de M^*_τ são chamadas *relações internas* (a M^*).
- (iii) as relações S^* , onde S está em M , são chamadas *relações standard* de M^* (ou *indivíduo standard*, *conjunto standard*, *função standard*, se for o caso).

Como $M_0^* = A^*$ (cf. I.3.1), a definição de relação externa só é relevante para tipos $\tau \neq 0$. Doravante, omitiremos o asterisco * dos indivíduos standard de M^* .

EXEMPLO - Seja M a estrutura plena baseada nos números naturais N , e seja M^* um alargamento de M , Vamos mostrar que N (i. é, o conjunto dos indivíduos standard de N^*) é externo a M^* .

De fato, como a relação $<$ é concorrente em N então existe ω em M^* tal que

$$n \overset{*}{<} \omega \text{ para todo } n \in N.$$

Portanto, $N^* \neq N$.

Por outra parte, o princípio da indução finita

$$VP((0 \in P \wedge \forall n (n \in P \implies n+1 \in P)) \implies \forall m (m \in P \iff m \in N))$$

(que pode ser escrito na linguagem L de M , cf. I.2), tem como tradução para L^* (omitindo asterisco dos indivíduos standard):

$$VP[(0 \in P \wedge \forall n (n \in P \implies n^*+1 \in P)) \implies \forall m (m \in P \iff m \in N^*)]$$

Portanto, esta sentença é válida em M^* . Mas isto significa, conforme I.2.2 - (iii), que para todo conjunto P de $M_{(0)}^*$ (i. é, todo P de tipo (0) , *interno* a M^*), se P satisfizer as hipóteses do princípio de indução finita, então $P = N^*$. Ora, N satisfaz estas hipóteses e no entanto $N \neq N^*$. Portanto, N não está em $M_{(0)}^*$, i. é, N não é interno ao alargamento M^* de M .

1.4 - FILTROS

Apresentaremos nesta seção um resumo das definições e teoremas sobre filtros que usaremos no resto da exposição. As demonstrações podem ser encontradas em [5].

1.4.1 DEFINIÇÃO - Seja $I \neq \emptyset$.

(1) Um *filtro* F sobre I é uma coleção de subconjuntos de I (i.é, $F \subset P(I)$) tal que

$$(i) \emptyset \notin F$$

$$(ii) A, B \in F \implies A \cap B \in F$$

$$(iii) A \subset B \subset I \text{ e } A \in F \implies B \in F$$

(2) Um *ultrafiltro* é um filtro U sobre I tal que

$$\forall A \subset I: A \in U \iff I - A \notin U$$

(3) Uma coleção L de subconjuntos de I ($L \subset P(I)$) tem a *propriedade da intersecção finita* (p.i.f.) se

$$A_1, \dots, A_n \in L \implies A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset.$$

EXEMPLOS

(1) Dado $Y \subset I$, $Y \neq \emptyset$, seja $[Y] = \{x \subset I: Y \subset x\}$. A coleção $[Y]$ é um filtro sobre I . Ele será um ultra filtro se, e somente se, Y for unitário. O filtro $[Y]$ será chamado *filtro gerado* por Y .

(2) Seja I um conjunto infinito. A coleção F constituída pelos subconjuntos *co-finitos* de I (A é co-finito $\iff I - A$ é fi-

nito), é um filtro. Ele é chamado *filtro de Fréchet* de I .

(3) Seja $L \subset P(I)$ uma coleção com a p.i.f. O conjunto

$$F = \{A \subset I : \exists n \in \mathbb{N} \text{ e } \exists A_1, \dots, A_n \in L \text{ tais que } A_1 \cap \dots \cap A_n \subset A\}$$

é um filtro sobre I . Diremos que F é *gerado por* L ou que L é *uma base de* F .

Um filtro F é *livre* se $\bigcap_{A \in F} A = \emptyset$. Se F não for livre diremos que F é *fixo*. O filtro $[Y]$ do exemplo 1 é fixo, ao passo que o filtro de Fréchet é livre.

Um filtro F é *maximal* se para todo $A \subset I$, se $F \cup \{A\}$ for filtro, então $A \in F$.

I.4.2 TEOREMA:

- (i) $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre $I \iff \mathcal{U}$ for um filtro maximal
- (ii) Todo filtro sobre I pode ser estendido a um filtro maximal
- (iii) Se $\mathcal{U}$ for um ultrafiltro livre sobre I então $\mathcal{U}$ não contém conjuntos finitos.
- (iv) Se I for infinito então existe um ultrafiltro livre sobre I .

I.4.3 COROLÁRIO - Todo ultrafiltro livre sobre I contém o filtro de Fréchet de I (cf. I.4.2.iii).

I.5 - ULTRAPOTÊNCIA DE M

Sejam B e I conjuntos não vazios, indicaremos por B^I

o conjunto de todas as funções b de I em B . Um elemento $b \in B^I$ será denotada por $\langle b(i) : i \in I \rangle$ onde $b(i)$ é o valor de b em i .

Consideremos $M = (M_\tau : \tau \in T)$ uma estrutura baseada em A e seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre I . Vamos construir uma estrutura $M^* = (M_\tau^* : \tau \in T)$ baseada em $A^* = A^I$. Precisamos, para cada tipo τ , selecionar as relações de tipo τ sobre A^I que constituirão M_τ^* . Pretendemos que essas relações possam ser identificadas com as famílias $\langle s(i) : i \in I \rangle$ de $(M_\tau)^I$ (que denotaremos por M_τ^I). Vamos proceder por indução sobre os tipos:

(i) M_0^* será $A^* = A^I$, posto que não existem indivíduos ex-

ternos [cf. I.1.3].

(ii) $M_{(0, \dots, 0)}^*$ será $\{\tilde{S} : S \in M_{(0, \dots, 0)}^I\}$ onde $\tilde{S}$ é definida a partir de $S = \langle S(i) : i \in I \rangle \in M_{(0, \dots, 0)}^I$ da seguinte forma

se $(a_1, \dots, a_n) \in A^I \times \dots \times A^I$ então

$$(a_1, \dots, a_n) \in \tilde{S} \iff \{i \in I : (a_1(i), \dots, a_n(i)) \in S(i)\} \in \mathcal{U}.$$

(iii) $M_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}^*$ será $\{\tilde{S} : S \in M_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}^I\}$ onde $\tilde{S}$ é definida a partir de $S = \langle S(i) : i \in I \rangle \in M_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}^I$ da seguinte forma: sejam $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n$ pertencentes a $M_{\tau_1}^*, \dots, M_{\tau_n}^*$ e associados a $S_1 = \langle S_1(i) : i \in I \rangle \in M_{\tau_1}^I, \dots, S_n = \langle S_n(i) : i \in I \rangle$, respectivamente. Então

$$(\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n) \in \tilde{S} \iff \{i \in I : (S_1(i), \dots, S_n(i)) \in S(i)\} \in \mathcal{U}.$$

I.5.1 DEFINIÇÃO - Seja $M = (M_\tau : \tau \in T)$ uma estrutura baseada em A

e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre I . A estrutura $M^* = (M_\tau^*: \tau \in T)$, acima construída, é chamada $\mathcal{U}$ -ultrapotência de M .

A linguagem L^* , para esta estrutura, conterá como constantes as famílias $S = \langle S(i) : i \in I \rangle \in M_\tau^I$, $\tau \in T$, e que serão os nomes das correspondentes relações $\tilde{S}$. Desta forma temos:

$$M^* \models \Phi_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}(S, S_1, \dots, S_n)$$

se, e somente se, (por definição de validade - cf. I.2.2)

$$(\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n) \in \tilde{S}$$

se, e somente se, (por definição das relações $\tilde{S}$)

$$\{i \in I : (S_1(i), \dots, S_n(i)) \in S(i)\} \in \mathcal{U}$$

se, e somente se,

$$\{i \in I : M \models \Phi_{(\tau_1, \dots, \tau_n)}(S(i), S_1(i), \dots, S_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

A aplicação $S \rightarrow S^*$ que a cada S de M associa a família constante $\langle S : i \in I \rangle$ é injetora, preserva tipos e satisfaz o seguinte:

I.5.2 TEOREMA - Se $S, S_1, \dots, S_n$ estão em M então

$$(S_1^*, \dots, S_n^*) \in S^* \iff (S_1, \dots, S_n) \in S.$$

DEMONSTRAÇÃO - Lembrando que para cada $i \in I$, $S^*(i) = S$ e $S_k^*(i) = S_k$, $k = 1, \dots, n$, segue:

$$(S_1^*, \dots, S_n^*) \in S^* \iff \{i \in I : (S_1, \dots, S_n) \in S\} \in \mathcal{U}.$$

Como o conjunto $\{i \in I : (S_1, \dots, S_n) \in S\}$ ou é I (se $(S_1, \dots, S_n) \in S$) ou é $\emptyset$ (se $(S_1, \dots, S_n) \notin S$) e como $\mathcal{U}$ é um filtro ($\therefore \emptyset \notin \mathcal{U}$) segue:

$$\{i \in I : (S_1, \dots, S_n) \in S\} \in \mathcal{U} \iff (S_1, \dots, S_n) \in S.$$

c.q.d.

Logo, M^* é uma extensão de M .

Consideremos os seguintes exemplos na estrutura plena dos números reais:

(1) a relação $\lessdot$ é tal que dados

$$a = \langle a(i) : i \in I \rangle \in \mathbb{R}^I \quad \text{e} \quad b = \langle b(i) : i \in I \rangle \in \mathbb{R}^I$$

então $a \lessdot b \iff \{i \in I : a(i) < b(i)\} \in \mathcal{U}$.

em particular, se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ ($\therefore a^* = \langle a : i \in I \rangle$, $b^* = \langle b : i \in I \rangle$) então $a \lessdot b$ pois $\{i \in I : a < b\} = I \in \mathcal{U}$ (corroborando o T.I.5.2).

$$(2) \mathbb{N}^* = \{ \langle a(i) : i \in I \rangle : \{i \in I : a(i) \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U} \}$$

$$(3) (P(\mathbb{R}))^* = \{ \langle B(i) : i \in I \rangle : \{i \in I : B(i)\} \in \mathcal{U} \}.$$

Neste caso é bom observar que cada família $\langle B(i) : i \in I \rangle$ é o nome de um conjunto $\tilde{B}$ cujos elementos são famílias $\langle b(i) : i \in I \rangle$ de elementos de $\mathbb{R}$. Portanto, $(P(\mathbb{R}))^*$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathbb{R}^*$ (não de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^*$ posto que alguns serão externos a M^* — veja I.3.5).

Para demonstrarmos a elementar equivalência entre M e a ultrapotência M^* , precisaremos do Teorema de Los e para isto, um pouco mais de notação. Se $a_1, \dots, a_n$ forem as constan-

tes que ocorrem numa sentença X de L escreveremos $X(a_1, \dots, a_n)$ em lugar de X e sendo $b_1, \dots, b_n$ constantes (de L ou de L^*), $X(b_1, \dots, b_n)$ indicará a sentença (de L ou de L^*) obtida de X substituindo $a_1, \dots, a_n$ por $b_1, \dots, b_n$, respectivamente. É claro que se $b_1, \dots, b_n$ denotarem objetos de mesmo tipo que $a_1, \dots, a_n$, respectivamente, então $X(a_1, \dots, a_n)$ é admissível em M se, e somente se, $X(b_1, \dots, b_n)$ for admissível (em M ou M^* , conforme as constantes b_i estejam em M ou M^*).

I.5.3 TEOREMA (LOS) - Seja $X = X(a_0, a_1, \dots, a_n)$ uma sentença da linguagem L (de M) admissível em M , e sejam $b_0, \dots, b_n$ constantes da linguagem L^* da $\mathcal{U}$ -ultrapotência M^* de M e tais que o tipo de cada b_k seja o mesmo que o de a_k , $k = 0, \dots, n$. Então

$$M^* \models X(b_0, b_1, \dots, b_n) \text{ se e somente se}$$

$$\{i \in I : M \models X(b_0(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

DEMONSTRAÇÃO - é feita por indução sobre o comprimento das fórmulas. O comprimento de uma fórmula X é o número de ocorrências de conectivos e quantificadores em X . A idéia subjacente à demonstração é que se o teorema fosse falso haveria uma sentença X de comprimento mínimo, para a qual não valeria o teorema. Demonstra-se que as sentenças atômicas satisfazem o teorema. Portanto, X teria o comprimento $m > 0$ e então seria: $\neg Y$ ou $Y \vee Z$ ou $Y \wedge Z$ ou $Y \rightarrow Z$ ou $Y \leftrightarrow Z$ ou $\exists x Y(x)$ ou $\forall x Y(x)$. Nos cinco primeiros casos, Y e Z , por terem comprimento menor do que m , satisfariam o teorema, e nos dois últimos, $Y(a)$, tam-

bem por ter comprimento menor do que m , satisfaria, para cada a de M (de tipo adequado). Provando que em qualquer um desses casos X satisfará o teorema, concluímos que não há X que não o satisfaça.

(1) Suponhamos X atômica. Portanto X tem a forma

$$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_n)(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

onde a_0 tem tipo $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e cada a_k tem tipo τ_k , $k=1, \dots, n$.
Sejam $b_0 = \langle b_0(i) : i \in I \rangle, \dots, b_n = \langle b_n(i) : i \in I \rangle$ em M^* (e de tipo τ_k , $k=0, \dots, n$, respectivamente). Então

$$M^* \models \Phi(\tau_1, \dots, \tau_n)(b_0, b_1, \dots, b_n) \text{ se, e somente se,}$$

$$(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n) \in \tilde{b}_0 \text{ se, e somente se}$$

$$\{i \in I : (b_1(i), \dots, b_n(i)) \in b_0(i)\} \in \mathcal{U} \text{ se, e somente se}$$

$$\{i \in I : M \models \Phi(\tau_1, \dots, \tau_n)(b_0(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

(2) Suponhamos $X = \neg Y$. Por hipótese de indução Y é tal que

$$M^* \models Y(b_0, b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \{i \in I : M \models Y(b_0(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

Temos: $M^* \models X^*(b_0, b_1, \dots, b_n)$ se, e somente se, (por definição de validade)

$$M^* \not\models Y(b_0, b_1, \dots, b_n)$$

se, e somente se, (por hipótese de indução)

$$\{i \in I : M \models Y(b_0(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \notin \mathcal{U}$$

se, e somente se, (pelo fato de $\mathcal{U}$ ser um ultrafiltro)

$$\{i \in I: M \models Y(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}$$

se, e somente se, (por definição de validade)

$$\{i \in I: M \models \neg Y(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}$$

se, e somente se,

$$\{i \in I: M \models X(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

(3) Suponhamos $X = Y \wedge Z$. Então

$$M^* \models X(b_0, \dots, b_n)$$

se, e somente se,

$$M^* \models Y(b_0, \dots, b_n) \text{ e } M^* \models Z(b_0, \dots, b_n)$$

se, e somente se (por hipótese de indução)

$$D_1 = \{i \in I: M \models Y(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}$$

e

$$D_2 = \{i \in I: M \models Z(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

Como $\mathcal{U}$ é filtro, $D = D_1 \cap D_2 \in \mathcal{U} \iff D_1 \in \mathcal{U} \text{ e } D_2 \in \mathcal{U}$.

Portanto, $M^* \models X(b_0, \dots, b_n)$ se, e somente se,

$$\{i \in I: M \models Y(b_0(i), \dots, b_n(i)) \wedge Z(b_0(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

(4) Suponhamos $X = \forall x Y(x, a_1, \dots, a_n)$ (como X é uma senten-

ça, x é a única variável livre em Y). Por hipótese de indução,

$$M^* \models Y(b, b_1, \dots, b_n)$$

se, e somente se,

$$\{i \in I: M \models Y(b(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}$$

para todo b de M^* de tipo adequado.

Suponhamos que $\{i \in I: M \models \forall x Y(x, b_1(i), \dots, b_n(i))\} \in \mathcal{U}$ e seja $b = \langle b(i): i \in I \rangle$ em M^* (de tipo adequado). Então

$$\begin{aligned} D &= \{i \in I: M \models Y(b(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \supset \\ &\supset \{i \in I: M \models \forall x Y(x, b_1(i), \dots, b_n(i))\}. \end{aligned}$$

Portanto, $D \in \mathcal{U}$. Por hipótese de indução, $M^* \models Y(b, b_1, \dots, b_n)$. Como b era um elemento genérico de M^* (de tipo adequado), então $M^* \models \forall x Y(x, b_1, \dots, b_n)$.

Reciprocamente, se

$$D = \{i \in I: M \models \forall x Y(x, b_1(i), \dots, b_n(i))\} \notin \mathcal{U}$$

então $\{i \in I: M \not\models \forall x Y(x, b_1(i), \dots, b_n(i))\} = I - D \in \mathcal{U}$. Para cada $i \in I - D$ seja $b(i)$ em M tal que $M \not\models Y(b(i), b_1(i), \dots, b_n(i))$ e para cada $i \in D$, seja $b(i)$ um elemento qualquer (mas de tipo adequado) de M ; e seja $b = \langle b(i): i \in I \rangle$. Devido a escolha dos $b(i)$, $\{i \in I: M \not\models Y(b(i), b_1(i), \dots, b_n(i))\} \supset I - D \in \mathcal{U}$. Logo, por hipótese de indução, $M^* \not\models Y(b, b_1, \dots, b_n)$. Portanto, $M^* \not\models \forall x Y(x, b_1, \dots, b_n)$.

A demonstração, para os outros conectivos e o outro

quantificador é análoga.

c.q.d.

Lembremos que se X for uma sentença da linguagem L de M , então X^* é a sentença de L^* (a linguagem da extensão M^*) colocando um asterisco em cada constante que ocorre X .

I.5.4 COROLÁRIO - (A elementar equivalência entre M e a ultrapotência M^*) - Seja M^* uma U -ultrapotência de M e seja X uma sentença de L , admissível em M . Então $M^* \models X^*$ se, e somente se, $M \models X$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $X = X(a_1, \dots, a_n)$. Portanto, $X^* = X(a_1^*, \dots, a_n^*)$ onde, para cada $i \in I$, $a_k^*(i) = a_k$, $k = 1, \dots, n$. De acordo com o Teorema de Los, $M^* \models X^*$ se, e somente se,

$$\{i \in I: M \models X(a_1^*(i), \dots, a_n^*(i))\} \in U.$$

Mas este último conjunto ou é I (se $M \models X$) ou é $\emptyset$ (se $M \not\models X$). Como U é filtro ($\therefore \emptyset \notin U$) então $\{i \in I: M \models X\} \in U$ se, e somente se, $M \models X$.

c.q.d.

I.6 - ULTRAPOTÊNCIAS QUE SÃO ALARGAMENTOS

Conforme vimos em I.5 toda ultrapotência M^* de uma estrutura M é uma extensão elementarmente equivalente a M . Veremos agora, que se U for um adequado ultrafiltro, M^* será um alargamento de M .

Consideremos a estrutura $M = (\mathbb{N}, <)$ e seja U um ultrafiltro não principal sobre o conjunto dos números naturais I . Então a U -ultrapotência de M é $M^* = (\mathbb{N}^*, <^*)$ onde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}^I$ e $<^*$ é tal

que se $a = \langle a(i) : i \in I \rangle$ e $b = \langle b(i) : i \in I \rangle$ então

$$a \leq^* b \iff \{i \in I : a(i) < b(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Em particular, sendo $\omega = \langle 1, 2, \dots \rangle$ então

$$n \leq^* \omega \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De fato, n , como elemento de $\mathbb{N}^*$, é a família constante

$$\langle n, \dots, n, \dots \rangle,$$

como $D = \{i \in I : n < i\}$ é co-finito e $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro não principal, segue que $D \in \mathcal{U}$, [cf. I.4.3]. Isto mostra que M^* é um alargamento de M .

Todavia, se M for uma estrutura plena baseada num conjunto não enumerável, a ultrapotência de M por um ultrafiltro sobre um conjunto enumerável I não será um alargamento de M . De fato, consideremos $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre um conjunto enumerável I e seja M a estrutura plena baseada em A , com A não enumerável. Seja F o filtro sobre A constituído pelos conjuntos $F \subseteq A$ tais que $A - F$ é enumerável. A relação S de M (de tipo $((0), 0)$) dada por

$$(F, a) \in S \iff F \in \mathcal{F} \text{ e } a \in F$$

é concorrente no seu domínio F , (pois F tem a p.i.f.). Entretanto, nenhum $b = \langle b(i) : i \in I \rangle$, pertencente à $\mathcal{U}$ -ultrapotência M^* , é tal que $(F^*, b) \in S^*$ para todo $F \in \mathcal{F}$. De fato,

$$(F^*, b) \in S^* \iff \{i \in I : b(i) \in F\} \in \mathcal{U},$$

e tomando $F = A - \{b(1), \dots, b(n), \dots\}$, vemos que $F \in \mathcal{F}$ mas $b \notin F^*$,

$i. \tilde{e}, (F^*, b) \notin S^*$.

I.6.1 TEOREMA - Seja $M = (M_\tau : \tau \in T)$ uma estrutura baseada em A . Então existe um ultrafiltro U sobre I tal que a U -ultrapotência M^* de M é um alargamento de M .

DEMONSTRAÇÃO - Seja $M = \bigcup_{\tau \in T} M_\tau$. O conjunto I sobre o qual definiremos o ultrafiltro U é o conjunto das partes finitas de M , i.é., $I = P_f(M)$. Para cada $i \in I$ seja $F_i = \{k \in I : k \supset i\}$. A família $(F_i)_{i \in I}$ tem a p.i.f. pois

$$i_1 \cup \dots \cup i_n \in F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$$

Consideremos F o filtro gerado pelos F_i e seja U um ultrafiltro que contenha F [cf. I.4.2]. Afirmamos que a U -ultrapotência M^* é um alargamento de M .

Seja S uma relação concorrente de M , de tipo (τ_1, τ_2) . Vamos definir um elemento $b_S = \langle b(i) : i \in I \rangle$ de M^* da seguinte forma: se $\text{dom}(S) \cap i \neq \emptyset$ então $b(i)$ é algum elemento de M_{τ_2} tal que $(a, b(i)) \in S$ para todo $a \in \text{dom}(S) \cap i$ (existe tal $b(i)$ pois S é concorrente e i é finito); se $\text{dom}(S) \cap i = \emptyset$ então $b(i)$ é um elemento qualquer de M_{τ_2} .

Seja $a \in \text{dom}(S)$, então

$$\{i \in I : (a, b(i)) \in S\} \supset \{i \in I : i \supset \{a\}\} \in F.$$

Portanto, $\{i \in I : (a, b(i)) \in S\} \in U$. Logo, $(a^*, b_S) \in S^*$ para todo $a \in \text{dom}(S)$. Posto que M^* é uma extensão elementarmente equivalente a M (cf. I.5.4), concluímos que M^* é um alargamento de M . c.q.d.

1.7 - PROPRIEDADES E EXEMPLOS DE ALARGAMENTOS

I.7.1 A IGUALDADE EM M^* - Sejam M uma estrutura plena baseada em A e M^* um alargamento de M . Entre as relações de M estão as diagonais de cada M_τ (denotadas por $=_\tau$ e que são, portanto, relações do tipo (τ, τ)). A inclusão $S \rightarrow S^*$, de M em M^* , associa a $=_\tau$ a relação $\overset{*}{=}_\tau$ que, em princípio, não tem porque ser a diagonal em M_τ^* ; em geral não é. Entretanto, ela é uma legítima "igualdade", no seguinte sentido:

- (1) $M^* \models \forall x (x \overset{*}{=}_\tau x)$
- (2) $M^* \models \forall x \forall y (x \overset{*}{=}_\tau y \rightarrow y \overset{*}{=}_\tau x)$
- (3) $M^* \models \forall x \forall y \forall z (x \overset{*}{=}_\tau y \wedge y \overset{*}{=}_\tau z \rightarrow x \overset{*}{=}_\tau z)$
- (4) $M^* \models \forall x \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n ((x_1, \dots, x_n) \in x \wedge x_1 \overset{*}{=}_\tau y_1 \wedge \dots \wedge x_n \overset{*}{=}_\tau y_n \rightarrow (y_1, \dots, y_n) \in x)$ (substitutividade);

(isto porque, estas sentenças são traduções para L^* de sentenças de L , válidas em M). Isto quer dizer que ela é uma relação de equivalência e que elementos "iguais*" satisfazem as mesmas relações. Além disso, para $\tau \neq 0$, duas relações S_1 e S_2 tais que $S_1 \overset{*}{=}_\tau S_2$, tem a mesma extensionalidade, i.é., são satisfeitas pelas mesmas relações de M^* . Portanto, cada relação $\overset{*}{=}_\tau$ satisfaz todas as propriedades formais de uma igualdade. Neste sentido, duas relações "iguais*" são, para todos os efeitos, iguais.

No caso de M^* ser uma U -ultrapotência de M , o comentário acima significa que podemos identificar famílias $\langle a(i) : i \in I \rangle$ e $\langle b(i) : i \in I \rangle$ tais que $\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in U$. Indicando por $\bar{S}$ a clas-

se de equivalência do elemento S então

$$\mathbb{N}^* = \{ \langle a(i) : i \in I \rangle : a(i) \in \mathbb{N} \text{ para todo } i \in I \}$$

$$(P(\mathbb{N}))^* = \{ \langle B(i) : i \in I \rangle : B(i) \subset \mathbb{N} \text{ para todo } i \in I \}, \text{ etc.}$$

I.7.2 PROPOSIÇÃO - Sejam B e C conjuntos (do mesmo tipo) de M.

Então:

$$(B \cap C)^* = B^* \cap C^*, (B \cup C)^* = B^* \cup C^*, (B - C)^* = B^* - C^*, (B \times C)^* = B^* \times C^*,$$

$B \subset C$ se, e somente se, $B^* \subset C^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\alpha = A \cap B$. Então,

$$M \models \forall x (x \in \alpha \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$$

logo,

$$M^* \models \forall x (x \in \alpha^* \leftrightarrow x \in A^* \wedge x \in B^*).$$

Interpretada em M^* , esta última sentença significa que

$$\alpha^* = A^* \cap B^*, \text{ i.é, } (A \cap B)^* = A^* \cap B^*.$$

As outras afirmações são verificadas de modo análogo.

c.q.d.

I.7.3 PROPOSIÇÃO - Sejam B e C conjuntos internos a M^* . Então

$B \cap C$, $B \cup C$, $B \times C$, $B - C$ também são internos a M^* .

DEMONSTRAÇÃO - A sentença

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in x \wedge t \in y \leftrightarrow t \in z)$$

é válida em M, e portanto em M^* (ela não contém constantes).

Interpretada em M^* ela significa que para todo $x \in M^*_{(\tau)}$ e todo

$y \in M^*_{(\tau)}$ (i.ê, todo x e todo y *internos* e de tipo (τ) — pelo facto de termos usado $t \in x$ em lugar de $\Phi_{(\tau)}(x, t)$ não ficou explícito o tipo de x nem o de t ; subentendeu-se) existe $z \in M^*_{(\tau)}$ (z *interno* e de tipo (τ)) tal que $z = x \cap y$. Portanto $B \cap C$ é interno. As outras afirmações são provadas de modo análogo.

c.q.d.

I.7.4 PROPOSIÇÃO - Sejam B e C conjuntos de M . Se f for uma função de B em C então f^* é uma função de B^* em C^* e f^* restrita a B coincide com f .

DEMONSTRAÇÃO - As seguintes sentenças são válidas em M :

- (i) $\forall x \forall y ((x, y) \in f \rightarrow x \in B \wedge y \in C)$ [f é uma relação de B em C]
 - (ii) $\forall x (x \in B \rightarrow \exists y ((x, y) \in f))$
 - (iii) $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow (y = z))$
- } [f é uma função]

Traduzindo estas sentenças para L^* (colocando asterisco sobre as constantes teremos sentenças válidas em M^* . Mas isto significa que f^* é uma função de B^* em C^* . Em resumo, a afirmação " f é uma função de A em B " é exprimível na linguagem L , válida em M e portanto sua tradução para L^* (que é: " f^* é uma função de A^* em B^* ") é válida em M^* .

A segunda parte da proposição é consequência da cláusula (ii) da definição de extensão [cf. I.3.2].

c.q.d.

I.7.5 - O ALARGAMENTO DA ESTRUTURA PLENA DOS NÚMEROS REAIS

Consideremos M a estrutura plena baseada nos números

reais $\mathbb{R}$ e seja M^* um alargamento de M . As operações

$$+: (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow x + y \in \mathbb{R}$$

$$\cdot: (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow xy \in \mathbb{R}$$

se estendem a operações de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$ [cf: I.7.4 e I.7.2] (são denotadas pelos mesmos símbolos $+$ e $\cdot$, omitindo-se o asterisco) e os axiomas que caracterizam $\mathbb{R}$ como corpo, sendo expressíveis em L , são, por decorrência, válidos em M^* . Portanto, $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ é um corpo. Mais do que isso, estendendo a relação $<$ (menor do que) a $\mathbb{R}^*$ temos que $(\mathbb{R}^*, +, \cdot, <)$ é um corpo ordenado. O mesmo para a função módulo que também em $\mathbb{R}^*$ satisfaz $|x| = x$ se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$ se $x < 0$.

Sendo $<$ concorrente em $\mathbb{R}$ e sendo M^* um alargamento de M , então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a < \alpha \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Como $\mathbb{R}^*$ é um corpo então:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*: 0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$

Logo, se $0 < a < \alpha$ para todo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, então

$$0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{a} \text{ para todo } a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Denotaremos por $\mathbb{R}_f^*$ e $\mathbb{R}_i^*$ os conjuntos

$$\mathbb{R}_f^* = \{x \in \mathbb{R}^*: |x| \leq a \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}_i^* = \{x \in \mathbb{R}^*: |x| \leq a \text{ para todo } a \in \mathbb{R}, a > 0\}.$$

Chamaremos de *finitos* os elementos de $\mathbb{R}_f^*$, de *infinitesimais* os elementos de $\mathbb{R}_i^*$ e de *infinitos* os elementos de $\mathbb{R}^* - \mathbb{R}_f^*$. As considerações anteriores mostram que existem elementos infinitos e elementos infinitesimais não nulos em $\mathbb{R}^*$. Escreveremos $x \sim 0$ para indicar que $x \in \mathbb{R}_i^*$. Se x e y forem tais que $|x-y| \sim 0$ diremos que x e y são *infinitesimalmente próximos* (ou, simplesmente, *próximos*) e escreveremos $x \sim y$.

Consideremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ na estrutura plena dos reais M . A sentença " $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} (x \leq n)$ " (que é esprimível na linguagem L) é válida em M . Portanto, em M^* , vale que " $\forall x \in \mathbb{R}^* \exists n \in \mathbb{N}^* (x \leq n)$ ". Isto implica que existem elementos infinitos em $\mathbb{N}^*$ (já tínhamos observado isto em I.3.5.ex.). Posto que entre dois números naturais não existe um terceiro número natural (i.é, $\forall m, n \in \mathbb{N}: n \leq m < n+1 \Rightarrow m=n$) então, concluímos que entre dois elementos n e $n+1$ de $\mathbb{N}^*$, não existe um terceiro elemento de $\mathbb{N}^*$. Daí, concluímos que $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ é o conjunto dos elementos infinitos de $\mathbb{N}^*$. Tínhamos provado no exemplo que se segue a I.3.5 que $\mathbb{N}$ é um conjunto externo ao alargamento da estrutura plena sobre $\mathbb{N}$. Do mesmo modo podemos provar que ele é externo a qualquer alargamento de qualquer estrutura que contenha $\mathbb{N}$.

I.7.5.1 PROPOSIÇÃO - Os seguintes conjuntos são externos ao alargamento M^* da estrutura plena dos reais:

- (i) $\mathbb{N}$
- (ii) $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$

(iii) R

(iv) R_f^*

(v) $R^* - R_f^*$

(iv) R_i^* .

DEMONSTRAÇÃO - (i) veja comentário acima.

(ii) se $N^* - N$ fosse interno, então $N^* - (N^* - N) = N$ também seria cf. I.7.3.

(iii) se R fosse interno, então $N = R \cap N^*$ também seria.

(iv) basta ver que $N = R_f^* \cap N^*$.

(v) $N^* - N = N^* \cap (R^* - R_f^*)$.

(vi) R_i^* é o conjunto dos inversos de $R^* - R_f^*$, portanto externo.

(Não é difícil provar que se A for interno então o conjunto dos seus inversos também é).

NOTA - Outras formas de se apresentar o conteúdo deste capítulo, não usando a noção de tipo, podem ser encontradas em [13] ou em [10].

CAPÍTULO II

O NÚCLEO DE UM FILTRO E TOPOLOGIA NÃO STANDARD

No capítulo I apresentámos os instrumentos gerais do método não standard; neste, veremos os meios específicos para a abordagem não standard dos temas topológicos.

O conceito de *núcleo de um filtro*, embora já usado por Robinson [12], tem seu estudo sistemático feito pela primeira vez por Hirschfeld Machover [10] e Luxemburg [9]. Preferimos a terminologia de Hirschfeld Machover no lugar da de Luxemburg, usando *núcleo de um filtro* ao invés de *mônada de um filtro* para não sobrecarregar o uso da palavra *mônada*, empregada aqui para designar o núcleo do filtro das vizinhanças de um ponto.

Os conceitos topológicos aqui apresentados são, com exceção dos referentes ao espaço produto, aqueles que usaremos no resto da exposição. As aplicações em demonstrações de teoremas de topologia geral, que concluem o capítulo, tiveram a única finalidade de ilustrar o uso do método não standard em topologia. Outras aplicações podem ser vistas em [3],[9],[10] e [12].

Neste capítulo M será uma estrutura plena baseada em

A e M^* um alargamento de M .

II.1 - O NÚCLEO DE UM FILTRO

II.1.1 DEFINIÇÃO - Seja F um filtro sobre um conjunto B de M .

O núcleo de F é o seguinte subconjunto de B^* .

$$\text{nuc}(F) = \bigcap_{F \in F} F^*$$

É claro que se B for uma base do filtro F então

$$\text{nuc}(F) = \bigcap_{L \in B} L^*$$

EXEMPLOS (1) Seja M a estrutura plena baseada em $\mathbb{N}$ e seja F o filtro de Frechét sobre $\mathbb{N}$. Então, como a família dos conjuntos $I_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma base de F , segue que:

$$\text{nuc } F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{k \in \mathbb{N}^* : k \geq n\} = \mathbb{N}^* - \mathbb{N}.$$

(2) Seja M a estrutura plena baseada em $\mathbb{R}$ e seja F o filtro das vizinhanças de 0. Então

$$\text{nuc}(F) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n} [^* = \{x \in \mathbb{R}^* : \forall n \in \mathbb{N} (|x| < \frac{1}{n})\} = \mathbb{R}_i^*$$

(o conjunto dos elementos infinitesimais de $\mathbb{R}^*$).

(3) Seja F o filtro principal gerado por F_0 . Então

$$F \in F \leftrightarrow F \supset F_0 \leftrightarrow F^* \supset F_0^*$$

logo,

$$\text{nuc}(F) = \bigcap_{F \in F} F^* = F_0^*.$$

Um conjunto $\beta \in A^*$ é *nuclear* se $\beta = \text{nuc}(F)$ para algum filtro F sobre A . Nem todo $\beta \in A^*$ é nuclear. Por exemplo, seja $v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ e seja $\beta = \mathbb{N}^* - \{v\}$. Se $F^* \supset \beta$ então $F^* \supset \mathbb{N}$, portanto $F \supset \mathbb{N}$ (F^* não contém mais elementos standard do que F cf. I.3.2). Logo $F^* \supset \mathbb{N}^*$. Isto mostra que β não é $\text{nuc}(F)$ para algum F sobre $\mathbb{N}$. (Este exemplo refere-se, naturalmente, à estrutura dos números naturais).

II.1.2 LEMA FUNDAMENTAL DOS NÚCLEOS (l.f.n.) - Seja F um filtro sobre $B \in M_{(\tau)}$. Então existe $\psi \in F^*$ tal que $\psi \subset \text{nuc } F$. Em particular, $\text{nuc } F \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - A relação $R \in M_{((\tau), (\tau))}$ dada por

$$R(F, G) \iff F, G \in F \text{ e } G \subset F.$$

é concorrente, pois dados $F_1, \dots, F_n \in F$ o conjunto $G = \bigcap_{i=1}^n F_i$ está em F e $G \subset F_i$ para $i = 1, \dots, n$. Como M^* é um alargamento de M então existe ψ em M^* tal que $R^*(F^*, \psi)$ para todo $F \in F$, i.é., $\psi \in F^*$ e $\psi \subset F^*$ para todo $F \in F$. Logo $\psi \subset \text{nuc } F$ e $\psi \in F^*$.

Como $\emptyset \notin F$ então $\emptyset \notin F^*$, portanto, $\text{nuc } F \neq \emptyset$.

c.q.d.

Voltando aos exemplos anteriores vemos que em (1) os conjuntos $I_v = \{n \in \mathbb{N}^* : n \geq v\}$ $v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, pertencem a F^* e estão contidos em $\text{nuc}(F)$; em (2), os conjuntos $] - \frac{1}{v}, \frac{1}{v} [$, $v \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$, são

possíveis ψ do l.f.n.

Começando de F nós definimos $\text{nuc}(F) \subset A^*$. Inversamente, dado $\beta \subset A^*$, $\beta \neq \emptyset$, nós definimos

$$\text{fil}\beta = \{F: F \subset A \text{ e } \beta \subset F^*\}.$$

É fácil verificar que $\text{fil}\beta$ é um filtro sobre A , chamado *filtro gerado por* β .

II.1.3 PROPOSIÇÃO - Sejam F e G filtros sobre A e $\alpha, \beta \subset A^*$ (α e β não vazios). Então:

- (i) $F \subset G \Rightarrow \text{nuc } F \supset \text{nuc } G$
- (ii) $\alpha \subset \beta \Rightarrow \text{fil } \alpha \supset \text{fil } \beta$
- (iii) $\text{fil } \text{nuc } F = F$
- (iv) se α for nuclear então $\alpha = \text{nuc } \text{fil } \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO - (i) e (ii) são evidentes.

(iii) ($\supset$) é clara pois $F \in F \Rightarrow F^* \supset \text{nuc } F$, e isto quer dizer, por definição, que $F \in \text{fil } \text{nuc } F$.

($\subset$) - Seja $F^* \supset \text{nuc } F$. Pelo l.f.n. existe $\psi \in F^*$ t.q. $\psi \subset \text{nuc } F$. Logo, $F^* \supset \text{nuc } F \supset \text{nuc } F \supset \psi \in F^*$. Portanto, em M^* é válido que

$$\exists x (x \in F^* \wedge x \subset F^*).$$

Logo, como a sentença sem asterisco é admissível em M , ela é válida em M . Interpretada em M ela implica que $F \in F$ (pois F é filtro).

$$\begin{aligned} \text{(iv) } \alpha = \text{nuc } F, \text{ para algum filtro } F &\Rightarrow \text{nuc } \text{fil } \alpha = \\ &= \text{nuc } \text{fil } \text{nuc } F = \text{nuc } F = \alpha. \end{aligned}$$

c.q.d.

11.2 - ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Seja (E, θ) um espaço topológico — θ é a topologia. Consideremos M , a estrutura plena baseada em E , e M^* um alargamento de M . Designaremos por F_p o filtro das vizinhanças de $p \in E$ e definiremos a *mônada* de p , $\mu(p)$, por

$$\mu(p) = \text{nuc}(F_p)$$

logo,

$$\mu(p) = \bigcap_{V \in F_p} V^*, \quad V \text{ aberto}.$$

Se $x \in \mu(p)$ diremos que " x está próximo de p " e escreveremos $x \sim p$. Esta relação não é, em geral, uma relação de equivalência. De fato, a mônada só está definida para elementos standard. Se $x \in \mu(p)$, para algum $p \in E$, diremos que x é *quase-standard*, caso contrário, diremos que x é *remoto*. O próximo teorema é devido a Robinson.

11.2.1 TEOREMA - Um conjunto $S \subset E$ é aberto se, e somente se, $\mu(p) \subset S^*$, para todo $p \in S$.

DEMONSTRAÇÃO - Se S for aberto, então $S \in F_p$ e portanto $S^* \supset \mu(p)$. Por outro lado, suponhamos $\mu(p) \subset S^*$ para todo $p \in S$.

Seja $p \in S$. Pelo l.f.n. existe $\psi \in F_p^*$, tal que $\psi \subset \mu(p)$. Portanto, $\psi \subset S^*$. Logo, em M^* é válido que

$$\exists x: x \in F_p^* \wedge x \in S^*.$$

Traduzindo para a linguagem de M concluimos que

$$\exists x: x \in F_p \wedge x \in S$$

é válida em M . Mas isto quer dizer que S é uma vizinhança de p . Portanto, S é aberto.

c.q.d.

COROLÁRIO - B é fechado se, e somente se,

$$x \in B^* \text{ e } x \sim p, p \in E \Rightarrow p \in B$$

DEMONSTRAÇÃO - Se $x \sim p$ e $p \in E - B$ então, como $E - B$ é aberto, segue que $x \in E^* - B^*$.

c.q.d.

As mônadas são completamente determinadas pela topologia. Por outro lado, se as mônadas $\mu(p)$ forem dadas para cada $p \in E$, então, pelo Teorema anterior, a topologia é determinada.

Suponhamos que se tenha uma coleção $(\theta(p): p \in E), p \in \theta(p)$, de subconjuntos de E^* . Esta coleção define uma topologia θ da seguinte forma:

$$o \in \theta \iff (p \in o \Rightarrow \theta(p) \subset o^*).$$

É claro que θ é uma topologia pois, $\emptyset$ e E estão em θ e

$$(i) \ o_1, o_2 \in \theta \text{ e } p \in o_1 \cap o_2 \Rightarrow \theta(p) \subset o_1^* \cap o_2^* = (o_1 \cap o_2)^*$$

$$(ii) \text{ se } p \in U_{o_i} \text{ então } p \in o_{i_0} \text{ e portanto } \theta(p) \subset o_{i_0}^* \subset U_{o_i}^*$$

Mas a coleção $(\theta(p):p \in E)$ não será, em geral, a coleção das mônadas de θ , pois

- (i) $\mu(p)$ é nuclear para todo p
- (ii) para todo $p \in E$ existe $\psi \in \theta^*$ com $p \in \psi \subset \mu(p)$ (l.f.n.).

II.2.1 PROPOSIÇÃO - A coleção $(\theta(p):p \in E)$ é a coleção das mônadas de θ se, e somente se,

- (i) $\theta(p)$ for nuclear para todo $p \in E$, e
- (ii) para todo $p \in E$ existe $\psi \in \theta^*$ com $p \in \psi \subset \theta(p)$.

DEMONSTRAÇÃO - $(\Rightarrow)$ é consequência dos comentários acima.

$(\Leftarrow)$ se $\theta(p)$ for nuclear então $\theta(p) = \text{nuc fil } \theta(p)$ (cf.: II.1.3, iv). Por (ii), se $F^* \supset \theta(p)$ então $F^* \supset \psi$ para algum $\psi \in \theta^*$. Passando de M^* para M (como nos argumentos anteriores) temos que existe $o \in \theta$ tal que $F \supset o$.

Logo,

$$\theta(p) = \text{nuc fil } \theta(p) = \bigcap_{\substack{o \in \theta \\ p \in o}} o^* = \theta(p).$$

Vejamos os axiomas de separação na versão não standard.

II.2.2 TEOREMA (Robinson) - Seja (E, θ) um espaço topológico.

- (i) θ é $T_0 \iff$ dados dois pontos distintos $p, q \in E$ então ou $p \notin \mu(q)$ ou $q \notin \mu(p)$
- (ii) θ é $T_1 \iff$ dados dois pontos distintos $p, q \in E$ então $p \notin \mu(q)$ e $q \notin \mu(p)$
- (iii) θ é T_2 (Hausdorff) $\iff$ dados dois pontos distintos

$p, q \in E$ então $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO - (de (iii) - as outras são análogas)

($\Rightarrow$) Se θ for T_2 então existem $V_1 \in F_p$ e $V_2 \in F_q$ tais que

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, \text{ logo } V_1^* \cap V_2^* = \emptyset.$$

Como $\mu(p) \subset V_1^*$ e $\mu(q) \subset V_2^*$ então $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $\mu(p) \cap \mu(q) = \emptyset$. Pelo l.f.n. existem ψ_1 e ψ_2 com $\psi_1 \in F_p^*$, $\psi_1 \subset \mu(p)$, $\psi_2 \in F_q^*$, $\psi_2 \subset \mu(q)$. Portanto, é válida em M^* a sentença

$$\exists x \exists y (x \in F_p^* \wedge y \in F_q^* \wedge x \cap y = \emptyset).$$

Portanto, a tradução desta sentença para a linguagem de M (omitindo as asteriscos) é admissível e válida em M . Interpretada em M ela significa que existem $V_1 \in F_p$ e $V_2 \in F_q$ tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

c.q.d.

O uso que fizemos até agora do l.f.n. ilustra a essência da técnica não standard. Usando o fato de M^* ser um alargamento de M (i.é, ter elementos "infinitos" para cada relação concorrente) descobrimos uma propriedade de M^* (por exemplo, a existência de ψ tal que $\psi \in F_p^*$ e $\psi \subset F^*$). Escrevemos uma sentença de L^* cuja interpretação em M^* é a propriedade dada. ($\exists x: x \in F_p^* \wedge x \subset F^*$). Se a tradução desta sentença para L resultar numa sentença admissível em M , será válida em M . A interpretação da sentença em M é o teorema que se desejava provar.

Vejamos a caracterização não standard de função contínua. Suporemos todos os espaços envolvidos contidos numa mesma estrutura M . Se $f: E \rightarrow F$ então f se estende a $f^*: E^* \rightarrow F^*$ e f^* coincide com f nos elementos standard. Omitiremos o asterisco de f^* sem que isso deva provocar confusões.

II.2.3 TEOREMA Seja f uma função entre os espaços topológicos E e F , e seja $p \in E$. Então f é contínua em p se, e somente se,

$$(x \sim p \Rightarrow f(x) \sim f(p)), (i.e., f(\mu(p)) \subset \mu(f(p))).$$

DEMONSTRAÇÃO - ($\Rightarrow$) Seja V uma vizinhança de $f(p)$. Precisamos mostrar que $f(\mu(p)) \subset V^*$. Como f é contínua em p existe $U \in F_p$ tal que $f(U) \subset V$ logo, $f(\mu(p)) \subset f(U^*) \subset V^*$.

($\Leftarrow$) Seja V uma vizinhança de $f(p)$. Pelo 1.f.n. existe $\psi \in F_p^*$ tal que $\psi \subset \mu(p)$. Como $f(\mu(p)) \subset \mu(f(p)) \subset V^*$ então $f(\psi) \subset V^*$. Logo, a seguinte sentença é válida em M^*

$$\exists x: x \in F_p^* \wedge f(x) \subset V^*.$$

Traduzida e interpretada em M ela significa que existe $U \in F_p$ tal que $f(U) \subset V$. Portanto, f é contínua em p .

c.q.d.

É notável como a caracterização não standard promove à condição de definição rigorosa, a descrição informal de continuidade:

$$"x \text{ próximo de } p \rightarrow f(x) \text{ próximo de } f(p)".$$

II.2.4 TEOREMA (Robinson) - Seja (E, θ) um espaço topológico e seja $K \subseteq E$. Então

$$K \text{ é compacto} \iff (x \in K^* \Rightarrow x \in \mu(p) \text{ para algum } p \in K),$$

i.é,

$$K \text{ é compacto} \iff (x \in K^* \Rightarrow x \sim p \text{ para algum } p \in K).$$

DEMONSTRAÇÃO - $(\Rightarrow)$ Suponhamos K compacto e seja $x \in E^*$. Suponhamos que $x \notin \mu(p)$, para todo $p \in K$. Vamos mostrar que $x \notin K^*$. Para cada $p \in K$ existe algum aberto o_p tal que $x \notin o_p^*$. A família $(o_p : p \in K)$ é um recobrimento de K . Portanto, existe um número finito de pontos de K , $p_1, \dots, p_n$ tais que $K \subseteq o_{p_1} \cup \dots \cup o_{p_n}$. Portanto, a sentença

$$\forall u (u \in K \rightarrow u \in o_{p_1} \vee \dots \vee u \in o_{p_n})$$

é válida em M . Traduzindo para L^* e interpretando em M^* concluímos que $x \notin K^*$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos K não compacto. Seja Ψ um recobrimento aberto de K que não admite subrecobrimento finito de K . Segue que a relação

$$R(o, y) \iff o \in \Psi \wedge y \in K \wedge y \notin o$$

é concorrente. Portanto, existe $y \in K^*$ tal que $R(o^*, y)$ para todo $o \in \Psi$, i.é, $y \in K^*$ e $y \notin o^*$, para todo $o \in \Psi$. Por outro lado, se $p \in K$ então $p \in o$ para algum $o \in \Psi$, donde $y \notin \mu(p)$, contra a hipótese. Logo, K é compacto

c.q.d.

Se (E, θ) for compacto e Hausdorff então para cada $x \in E^*$ existe um único $p \in E$ tal que $x \in \mu(p)$. Em particular, se estivermos em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), e se x for finito, i.é, $x \in \mathbb{R}_f^*$ (ou $x \in \mathbb{C}_f^*$) então existe um único $p \in \mathbb{R}$ (ou $p \in \mathbb{C}$) tal que $x \in \mu(p)$. Este p será denominado *parte standard de* x e indicado por $\text{std}(x)$. (Note que se $x \in \mathbb{R}_f^*$ então x pertence a $\{x \in \mathbb{R}: |x| \leq m\}^*$ e o conjunto $\{x \in \mathbb{R}: |x| \leq m\}$ é compacto).

É interessante notar que enquanto a definição standard de compacidade envolve famílias de conjuntos ($\therefore$ tipo $((0))$), a caracterização não standard é formulada somente em termos de elementos de E^* ($\therefore$ tipo 0).

Consideremos uma família $(E_i)_{i \in I}$ de espaços topológicos indexada num conjunto I . Suponhamos I e todos os E_i numa mesma estrutura M . O produto cartesiano $\Pi = \prod_{i \in I} E_i$ é o conjunto das funções $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i$, tais que $f(i) \in E_i$. A topologia produto em Π tem como uma base os conjuntos

$$o = \{f: f(i_k) \in o_k\}, \quad k = 1, \dots, n$$

onde $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ e o_k é um aberto em E_k .

Passando a um alargamento M^* , Π^* será um conjunto de funções g definidas em I^* e tais que $g(i) \in E_i$ para todo $i \in I$.

II.2.5 TEOREMA - Seja $\Pi = \prod_{i \in I} E_i$ com a topologia produto e sejam $f \in \Pi$ e $g \in \Pi^*$. Então, $g \sim f \iff g(i) \sim f(i)$ para cada $i \in I$.

OBS. - O Teorema não afirma nada sobre os índices $i \in I^* - I$.

DEMONSTRAÇÃO - ($\Rightarrow$) Se para algum $i_0 \in I$, $g(i_0) \notin \mu(f(i_0))$, então existe um aberto o_{i_0} contendo $f(i_0)$ tal que $g(i_0) \notin o_{i_0}^*$. Portanto, g não pertence o^* , onde $o = \{h \in \Pi: h(i_0) \in o_{i_0}\}$, enquanto $\underline{o}$ contém f .

($\Leftarrow$) seja o um aberto básico da topologia produto, i.é,

$$o = \{f: f(i_k) \in o_k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Portanto $g(i_k) \in \mu(f(i_k))$, $k=1, \dots, n$, por hipótese. Logo, $g(i_k) \in o_k^*$, $k=1, \dots, n$. Portanto, $g \in o^*$. Logo $g \in \mu(f)$, i.é, $g \sim f$.

II.3 - DEMONSTRAÇÃO NÃO STANDARD DE ALGUNS TEOREMAS DE TOPOLOGIA GERAL

Veremos em alguns exemplos elementares como funcionam os conceitos não standard nas demonstrações de teoremas da topologia geral. As demonstrações são devidas na maior parte a Robinson [12] e Hirschfeld Machover [10]. Os teoremas III.3.6 e III.3.7 estão em [3].

II.3.1 TEOREMA - Se cada E_i , $i \in I$, for Hausdorff então $\prod E_i$ é Hausdorff.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $f, g \in \Pi$, $f \neq g$. Portanto $f(i_0) \neq g(i_0)$ para algum $i_0 \in I$. Como E_{i_0} é Hausdorff então $\mu(f(i_0)) \cap \mu(g(i_0)) = \emptyset$, logo, $\mu(f) \cap \mu(g) = \emptyset$ (cf. II.2.5). Portanto Π é Hausdorff.

II.3.2 TEOREMA (Tychonoff) - Se cada E_i for compacto então $\prod E_i$ é compacto.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $g \in \Pi^*$. Precisamos mostrar que $g \sim f$ para algum $f \in \Pi$ (cf. II.2.4). Mas, para cada $i \in I$, $g(i) \sim a_i$ para algum

$a_i \in E_i$ (pois os E_i são compactos). Escolhendo, para cada $i \in I$, $f(i) = a_i$, temos que $f(i) \sim g(i)$, $i \in I$, e portanto $f \sim g$ (cf. II.2.5).

c.q.d.

OBS. - Se os E_i forem Hausdorff para cada i , o elemento a_i é único (cf. II.2.2) e portando prescinde-se do Axioma da Escolha.

II.3.3 TEOREMA - Um subconjunto fechado de um compacto é compacto.

DEMONSTRAÇÃO - Seja E o espaço topológico e $A \subset K \subset E$, A fechado e K cpc. Seja $x \in A^*$, portanto $x \sim p$ para algum $p \in K$ (K é cpc). Como $x \sim p$ e $x \in A^*$ então $p \in A$ (cf. II.2.1). Logo $x \sim p$ e $p \in A$, e portanto A é compacto.

II.3.4 TEOREMA - Se K for um subconjunto compacto de um espaço Hausdorff, então K é fechado.

DEMONSTRAÇÃO - Seja E Hausdorff e seja $K \subset E$, K compacto. Seja $p \in E$ e seja $x \in K^*$ tal que $x \sim p$. Precisamos mostrar que $p \in K$ (cf.: II.2.1). Como K é compacto, $x \sim q$ com $q \in K$. Como E é Hausdorff e $\mu(p) \cap \mu(p) \neq \emptyset$, então $p = q$.

c.q.d.

II.3.5 TEOREMA - A imagem de um compacto por uma função contínua é compacto.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam E, F espaços topológicos, $K \subset E$ compacto e $f: E \rightarrow F$ contínua. Seja $y \in (f(K))^*$. Então $y \sim f(x)$ para algum $x \in K^*$. Mas K é compacto, portanto $x \sim p$ para algum $p \in K$. Como f é contínua então $f(x) \sim f(p)$. Logo $y \sim f(p)$, $f(p) \in K$, i.é., $f(K)$ é com-

pacto (cf.: II.2.4).

c.q.d.

II.3.6 TEOREMA - Seja $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então f assume máximo e mínimo em $[a,b]$.

DEMONSTRAÇÃO - A relação $S(p,q) \leftrightarrow f(p) \leq f(q)$ é concorrente em $[a,b]$ pois dados $p_1, \dots, p_n \in [a,b]$, existe $q \in [a,b]$ tal que $f(p_i) \leq f(q)$, $i = 1, \dots, n$. Portanto existe $x \in [a,b]^*$ tal que $f(p) \leq f(x)$, $\forall p \in [a,b]$. (Estamos num alargamento da estrutura dos reais). Mas $[a,b]$ é compacto, portanto $x \sim p_0$, para algum $p_0 \in [a,b]$. Como f é contínua, então $f(x) \sim f(p_0)$. Logo

$$f(p_0) = \max\{f(p) : p \in [a,b]\}.$$

Analogamente para o mínimo.

c.q.d.

II.3.7 TEOREMA - Seja $f: E \rightarrow F$ contínua e bijetora com E compacto e F Hausdorff. Então f é homeomorfismo.

DEMONSTRAÇÃO - Obsevemos que como f é bijetora então f^* também é pois esta qualidade de f pode ser escrita na linguagem de M .

Seja $q = f(p) \in F$. Vamos mostrar que f^{-1} é contínua em q . Seja $y = f(x) \sim q$. Vamos mostrar que $x \sim p$. Como E é compacto então $x \sim a$ para algum $a \in E$. Por continuidade $f(a) \sim f(x) = y$. Logo, $f(a) \sim q = f(p)$. Portanto, $f(a) = f(p)$. (F é Hausdorff e portanto $a = p$). Isto mostra que $x \sim p$.

c.q.d.

CAPÍTULO III

ESPAÇOS UNIFORMES

O estratagema não standard para estudar os espaços uniformes consiste em olhar o núcleo da estrutura uniforme Ω como uma relação de equivalência em E^* . O primeiro teorema deste capítulo estabelece que em E está definida uma estrutura uniforme se, e somente se, em E^* estiver definida uma relação nuclear de equivalência $\sim$ (nuclear significa que o conjunto $\mu = \{(x,y): x \sim y\}$ é nuclear). Esta mudança de ponto de vista representa, pelo menos, uma vantagem de natureza heurística: os teoremas, mais do que facilmente demonstrados, são imediatamente percebidos. Outra vantagem é que o completado de E é dado por pontos de E^* : ele é constituído pelas *mônadas* dos pontos *aproximáveis* de E^* (as *mônadas* são as classes de equivalência determinadas pela relação $\sim$ e os elementos *aproximáveis* são aqueles em cuja *mônada* está contido o núcleo de algum filtro de Cauchy).

Na demonstração de que as *mônadas* dos *aproximáveis* constituem o completado de E precisaremos que M^* satisfaça condições adicionais de saturação (M^* deve ser κ -saturado para um

certo cardinal κ). Isto não deve ser entendido como um obstáculo, nem a compreensão, nem ao alcance do Teorema. Pelo contrário, como M^* não passa do "cenário" onde faremos as demonstrações, quanto mais rico ele for, mais recursos teremos para fazê-las. Não precisaremos impor restrições ao objeto da demonstração nem fazer malabarismos para alcançá-la — estamos num modelo onde as demonstrações "naturais" funcionam. Este é o motivo pelo qual preferimos a construção do completado feita por Luxemburg [9] no lugar daquela feita por Hirschfeld e Machover [10].

Seguimos, em linhas gerais, os textos [9] e [10]. Novamente preferimos a terminologia de Hirschfeld e Machover, usando aproximável no lugar de pré-quase-standard (pre near standard, em inglês), embora esta última tenha prevalecido na literatura.

III.1 - A DEFINIÇÃO STANDARD DE ESTRUTURA UNIFORME

Sejam $E \neq \emptyset$, $V \subseteq E \times E$, $A \subseteq E$ e $p \in A$. Usaremos as seguintes notações:

$$V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in V\}$$

$$V \circ V = \{(x, z) : \exists y \in E ((x, y) \in V \text{ e } (y, z) \in V)\}$$

$$V(p) = \{x \in E : (x, p) \in V\}$$

$$V(A) = \bigcup_{p \in A} V(p)$$

$$\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$$

Lembramos que Ω é uma estrutura uniforme sobre um con-

junto não vazio E se Ω for um *filtro* sobre $E \times E$ tal que:

- (i) $\Delta \subset V$ para todo $V \in \Omega$
- (ii) se $V \in \Omega$ então $V^{-1} \in \Omega$
- (iii) para cada $V \in \Omega$ existe algum $W \in \Omega$ tal que $W \circ W \subset V$.

Diremos também, que (E, Ω) é uma estrutura uniforme.

Se Ω satisfizer

$$(iv) \bigcap_{V \in \Omega} V = \Delta$$

diz-se que (E, Ω) é uma estrutura uniforme *separada* (ou *Hausdorff*).

É sabido que a estrutura uniforme Ω induz uma topologia sobre E , na qual, para cada $p \in E$, o conjunto

$$F_p = \{V(p) : V \in \Omega\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças de p (cf. Boubarki, [2]). Usando a terminologia Bourbaki, diremos que E , munido desta topologia é um *espaço topológico uniforme* ou simplesmente, um *espaço uniforme*.

Lembremos ainda que a estrutura uniforme Ω tem uma base (como filtro) de elementos simétricos, a saber, a coleção dos conjuntos $V \cap V^{-1}$, $V \in \Omega$.

III.2 - A CARACTERIZAÇÃO NÃO STANDARD DE ESTRUTURA UNIFORME — MÔNADAS

Consideremos E um conjunto não vazio, M a estrutura plena baseada em E e M^* um alargamento de M .

Seja $\sim$ uma relação binária definida em E^* . Diremos que $\sim$ é *nuclear* se, e somente se, o conjunto

$$\mu = \{(x,y) \in E^* \times E^* : x \sim y\}$$

for nuclear (cf. II.1).

Se Ω for uma estrutura uniforme sobre E então cada $V \in \Omega$ está contido em $E \times E$ e, portanto, $V^* \subset E^* \times E^*$. Logo, $\text{nuc } \Omega \subset E^* \times E^*$

III.2.1 TEOREMA - Seja Ω um filtro sobre $E \times E$. Então Ω é uma estrutura uniforme $\iff$ $\text{nuc } \Omega$ tiver as seguintes propriedades:

$$(1) (x,x) \in \text{nuc } \Omega \text{ para todo } x \in E^*$$

$$(2) (\text{nuc } \Omega)^{-1} = \text{nuc } \Omega$$

$$(3) \text{nuc } \Omega \circ \text{nuc } \Omega = \text{nuc } \Omega$$

DEMONSTRAÇÃO ($\Rightarrow$) Suponhamos Ω uma estrutura uniforme. (1) e (2) são consequências diretas da cláusula (i) da definição de estrutura uniforme e do fato de Ω ter uma base de elementos simétricos, respectivamente. (3). Seja $(x,y) \in \text{nuc } \Omega \circ \text{nuc } \Omega$, portanto existe $z \in E^*$ tal que $(x,z) \in \text{nuc } \Omega$ e $(z,y) \in \text{nuc } \Omega$. Logo,

$$(x,z) \in W^* \text{ e } (z,y) \in W^* \text{ para todo } W \in \text{nuc } \Omega.$$

Em virtude de (iii), $(x,y) \in V^*$ para todo $V \in \Omega$ e portanto

$$(x,y) \in \text{nuc } \Omega.$$

Por outra parte, se $(x,y) \in \text{nuc } \Omega$, como $(x,x) \in \text{nuc } \Omega$, segue que $(x,y) \in \text{nuc } \Omega$. Conclusão $\text{nuc } \Omega \circ \text{nuc } \Omega = \text{nuc } \Omega$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\text{nuc } \Omega$ satisfaça (1), (2) e (3). A cláusula (i) da definição de estrutura uniforme é consequência direta de (1). Para provarmos (ii) é suficiente que se prove que se $V \in \Omega$ então $(V^{-1})^* \supset \text{nuc } \Omega$. Porque se isto acontecer então,

$$(V^{-1})^* \supset \text{nuc } \Omega \supset \psi \in \Omega^* \quad (\psi \text{ do 1.f.n.})$$

e como $(V^{-1})^*$ e ψ são conjuntos internos de M^* , e Ω^* é um filtro, podemos concluir que $(V^{-1})^* \in \Omega^*$. Traduzindo para a linguagem de M , e interpretando em M concluimos que $V^{-1} \in \Omega$. Consideremos então $(x,y) \in \text{nuc } \Omega$ ($\therefore (x,y) \in V^*$), como $\text{nuc } \Omega = (\text{nuc } \Omega)^{-1}$ segue que $(y,x) \in V^*$ e portanto, $(x,y) \in (V^*)^{-1} = (V^{-1})^*$. Logo, $(V^{-1})^* \supset \text{nuc } \Omega$. Portanto, $V^{-1} \in \Omega$ verificando (ii). Usando ainda uma vez o l.f.n., prova-se de modo análogo que Ω satisfaz (iii), sendo, portanto, uma estrutura uniforme.

c.q.d.

III.2.2 COROLÁRIO - (1) Se (E, Ω) for uma estrutura uniforme então a relação " $x \sim y \iff x, y \in E^* \wedge (x,y) \in \text{nuc } \Omega$ " é uma relação nuclear de equivalência.

(2) Se $\sim$ for uma relação nuclear de equivalência em E^* então $\text{fil } \mu$ é uma estrutura uniforme em E (conforme notação anterior $\mu = \{(x,y) \in E^* \times E^* : x \sim y\}$).

DEMONSTRAÇÃO - Na verdade o corolário é uma paráfrase de III.2.1. O único ponto a observar, em (2), é que sendo μ nuclear então $\text{nuc } \text{fil } \mu = \mu$ (cf. II.1.3). c.q.d.

Seja (E, Ω) (ou, equivalentemente, $(E, \sim)$) uma estrutura uniforme. As classes de equivalência determinadas por $\text{nuc } \Omega$ (i.é, por $\sim$) em E^* são chamadas *mônadas*. Indicaremos por $\mu(x)$, $x \in E^*$, a mônada à qual x pertence. Assim,

$$y \in \mu(x) \iff (x,y) \in \text{nuc } \Omega \iff (y,x) \in V^* \text{ para todo } V \in \Omega.$$

Em particular, se p for standard, então

$$y \in \mu(p) \iff (y,p) \in V^* \text{ para todo } V \in \Omega \iff y \in \bigcap_{V \in \Omega} V^*(p) \iff y \in \text{nuc}(F_p)$$

onde F_p é o filtro das vizinhanças de p na topologia induzida por Ω em E . Isto mostra que as mônadas dos elementos standard coincidem com as mônadas (topológicas) definidas no capítulo II.

Como vimos no capítulo II, a topologia θ num conjunto E fica determinada se especificarmos as mônadas dos pontos (standard) de E . Assim, fica claro que diferentes estruturas uniformes podem ser compatíveis com a mesma topologia θ pois se Ω_1 e Ω_2 forem estruturas uniformes compatíveis com θ , então as mônadas por elas determinadas, embora devam ser as mesmas nos elementos standard, podem diferir nos elementos remotos de E^* . Em particular, se (E, θ) for compacto (portanto sem elementos remotos - (cf. II.2.4), então existe no máximo uma estrutura uniforme compatível com θ .

III.2.3 TEOREMA - Existe uma única estrutura uniforme Ω compatível com uma topologia Hausdorff e compacta θ .

DEMONSTRAÇÃO - UNICIDADE: veja comentário acima.

EXISTÊNCIA: Designemos por $\mu_\theta(p)$, $p \in E$, a mônada topológica determinada pela topologia θ . Dados $x, y \in E^*$ definimos

$$x \sim y \iff x, y \in \mu_\theta(p) \text{ para algum } p \in E.$$

Como θ é compacta então, para todo $x \in E^*$, $x \in \mu_\theta(p)$ para algum $p \in E$ e portanto, $\sim$ é reflexiva. Como θ é Hausdorff então

$$\mu_\theta(p) \cap \mu_\theta(q) = \emptyset \text{ para } p \neq q$$

(cf. II.2.2) e portanto $\sim$ é transitiva. Ela é obviamente reflexiva. Para concluirmos que μ é uma estrutura uniforme

em E só falta verificar que μ é nuclear, i.é., $\mu = \text{nuc fil } \mu$.
(Cf. II.2.2,(2)). [$\mu = \{(x,y): x \sim y\}$].

Suponhamos $(x_0, y_0) \notin \mu$, i.é., $x_0 \neq y_0$. Vamos mostrar que existe $F \subset E \times E$ tal que:

- (i) $(x_0, y_0) \notin F^*$
- (ii) $(x, y) \in \mu \Rightarrow (x, y) \in F^*$, i.é., $F^* \in \text{fil } \mu$.

Como E é cpc. então existe $p \in E$ tal que $x_0 \in \mu_\theta(p)$. Mas como $x_0 \neq y_0$ então $y_0 \notin \mu_\theta(p)$. Logo, existe um aberto V tal que $p \in V$, $x_0 \in V^*$, mas $y_0 \notin V^*$.

Como toda topologia Hausdorff compacta é regular então existe um aberto W tal que

$$p \in W \subset \bar{W} \subset V.$$

O conjunto F desejado é $F = (V \times V) \cup (E - \bar{W} \times E - \bar{W})$.

Temos que: $(x_0, y_0) \notin F^*$ pois $y_0 \notin V^*$ e $x_0 \notin (E - \bar{W})^*$. Por outro lado, se $(x, y) \in E - \bar{W}$. No primeiro caso $(x, y) \in V^* - V^*$ e no segundo $(x, y) \in (E - \bar{W})^* \times (E - \bar{W})$. Portanto, $\mu = \text{nuc fil } \mu$, $\text{fil } \mu$ é uma estrutura uniforme em E e compatível com a topologia θ pois $\mu(p) = \mu_\theta(p)$ para todo $p \in E$.

c.q.d.

III.3 - OS ELEMENTOS APROXIMÁVEIS DE E^*

Seja (E, Ω) um espaço uniforme. Lembremos que um elemento $x \in E^*$ é *quase-standard* se $x \in \mu(p)$ para algum $p \in E$ (cf. cap. II). Designaremos por $\text{qst}_\Omega(E^*)$ (ou qst_Ω ou ainda qst) o conjunto dos elementos quase-standard de E^* . Distinguiremos agora ou-

tra classe de pontos de E^* : os *aproximáveis* (ou de *Cauchy*) e que desempenham fundamental importância na teoria não standard dos espaços uniformes.

Como se sabe, um filtro F sobre um espaço topológico (E, θ) converge para $p \in E$. $(F \rightarrow p)$ se, e somente se, $F_p \subset F$, onde F_p é o filtro das vizinhanças de p ; um filtro F sobre um espaço uniforme (A, Ω) é de *Cauchy* se e somente se, para cada $V \in \Omega$ existir $F \in F$ tal que $F \times F \subset V$.

As caracterizações não standard destes conceitos são as seguintes:

III.3.1 TOEREMA - Uma condição necessária e suficiente para que $F \rightarrow p$ é que $\text{nuc } F \subset \text{nuc } F_p$.

DEMONSTRAÇÃO - A necessidade é consequência direta das definições envolvidas. A suficiência segue do l.f.n. De fato, seja $V \in F_p$. Existe $\psi \in F^*$ tal que $\psi \subset \text{nuc } F$. Logo

$$\psi \subset \text{nuc } F \subset \text{nuc } F_p \subset V^*.$$

Portanto a sentença

$$\exists v (v \in F^* \wedge v \subset V^*)$$

é válida em M^* . Logo $\exists v (v \in F \wedge v \subset V)$ é válida em M . Mas isto significa dizer que existe $F \in F$ tal que $F \subset V$. Como F é um filtro então $V \in F$. Donde $F_p \subset F$, i.é, $F \rightarrow p$.

c.q.d.

III.3.2 LEMA - Sejam (E, Ω) um espaço uniforme e F um filtro sobre E . F é *Cauchy* $\iff \text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega$

DEMONSTRAÇÃO - ($\Rightarrow$) Se F for Cauchy então para cada $V \in \Omega$ existe $F \times F$ tal que $F \times F \subset V$ e portanto $F^* \times F^* \subset V^*$. Donde $\text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega$ e consideremos $V \in \Omega$. De acordo com o l.f.n. existe $\psi \in F^*$ tal que $\psi \subset \text{nuc } F$, logo

$$\psi \times \psi \subset \text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega \subset V^*.$$

Portanto, a sentença

$$\exists v (v \in F^* \wedge v \times v \subset V^*)$$

é válida em M^* . Logo, $\exists v (v \in F \wedge v \times v \subset V)$ é válida em M . Mas isto quer dizer que existe $F \times F$ tal que $F \times F \subset V$. Como V era arbitrário, então F é de Cauchy.

c.q.d.

III.3.3 TEOREMA - Sejam (E, Ω) um espaço uniforme e F um filtro sobre E . F é de Cauchy $\iff \text{nuc } F \subset \mu(x)$ para algum $x \in E^*$.

DEMONSTRAÇÃO - ($\Rightarrow$) Se F for de Cauchy então $\text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega$. Vamos mostrar que $\text{nuc } F \subset \mu(x)$ para $x \in \text{nuc } F$. Temos:

$$\text{nuc } F = (\text{nuc } F \times \text{nuc } F)(x) \subset (\text{nuc } \Omega)(x) = \mu(x).$$

($\Leftarrow$) se $\text{nuc } F \subset \mu(x)$ para algum $x \in E^*$ então:

$$(y, z) \in \text{nuc } F \times \text{nuc } F \Rightarrow (y, z) \in \mu(x) \times \mu(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \mu(x) \text{ e } (z, x) \in \text{nuc } \Omega \Rightarrow (y, z) \in \text{nuc } \Omega$$

(a última implicação porque $\text{nuc } \Omega$ é gráfico de uma relação de equivalência em E^* - cf. II.2.1). Logo, $\text{nuc } F \times \text{nuc } F \subset \text{nuc } \Omega$ e portanto F é de Cauchy.

c.q.d.

III.3.4 DEFINIÇÃO - Seja (E, Ω) um espaço uniforme e seja $x \in E^*$. Então x é *aproximável* se, e somente se, existir um filtro F de Cauchy tal que $\text{nuc } F \subset \mu(x)$. Indicaremos por $\text{aprox}_\Omega E^*$ (ou $\text{aprox } E^*$ ou aprox) o conjunto dos elementos aproximáveis de E^* .

III.3.5 - Se $F \rightarrow p$, $p \in E$, então F é de Cauchy. Consequentemente, $\text{qst} \subset \text{aprox}$.

DEMONSTRAÇÃO - De acordo com as caracterizações não standard dos conceitos envolvidos temos:

$$F \rightarrow p \Rightarrow \text{nuc } F \subset \text{nuc } F_p = \mu(p) \Rightarrow F \text{ é de Cauchy.}$$

III.3.6 TEOREMA - Um espaço uniforme (E, Ω) é completo se, e somente se, $\text{aprox } E^* = \text{qst } E^*$.

DEMONSTRAÇÃO - $(\Rightarrow)$ Suponhamos (E, Ω) completo e seja $x \in \text{aprox } E^*$. Então existe um filtro de Cauchy F tal que $\text{nuc } F \subset \mu(x)$. Sendo (A, Ω) completo então $F \rightarrow p$ para algum $p \in E$, i.é, $\text{nuc } F \subset \mu(p)$, $p \in E$. Logo $\mu(x) \cap \mu(p) \neq \emptyset$. Como as mônadas são classes de equivalência então $\mu(x) = \mu(p)$ e portanto $x \in \text{qst } E^*$. Com $\text{qst} \subset \text{aprox}$ então $\text{qst} = \text{aprox}$.

$(\Leftarrow)$ Seja F um filtro de Cauchy sobre E . Sabemos que $\text{nuc } F \subset \mu(x)$ para algum $x \in E^*$. Como, por hipótese, $\text{qst} = \text{aprox}$, então existe um elemento standard $p \in E$ tal que $\mu(x) = \mu(p)$. Logo $\text{nuc } F \subset \mu(p)$, $p \in E$, i.é, $F \rightarrow p$. Portanto (E, Ω) é completo.

c.q.d.

Précisaremos na seqüência, das seguintes caracterizações dos elementos aproximáveis de E^* .

III.3.7 LEMA - Seja (E, Ω) um espaço uniforme e seja $x \in E^*$. São equivalentes:

- (i) $x \in \text{aprox } E^*$
- (ii) $\mu(x) = \text{nuc}(F_m)$ onde F_m é um filtro (de Cauchy minimal) sobre E
- (iii) para cada $V \in \Omega$ existe $p \in E$, i.é., p standard, tal que $x \in V^*(p)$
- (iv) para cada $V \in \Omega$ existe $p \in E$, tal que $p \in V^*(x)$.

DEMONSTRAÇÃO (iii) $\iff$ (iv) pois Ω tem uma base de elementos simétricos.

(i) $\implies$ (ii) Seja F um filtro de Cauchy tal que $\text{nuc } F \subset \mu(x)$. Vamos mostrar que o filtro F_m gerado por

$$\{V(F) : V \in \Omega \text{ e } F \in F\}$$

é tal que $\text{nuc } F_m = \mu(x)$.

Para todo $V \in \Omega$ tem-se: $\mu(x) \times \mu(x) \subset V^*$. De fato,

$$(y, z) \in \mu(x) \times \mu(x) \implies (y, x) \in \text{nuc } \Omega \text{ e } (z, x) \in \text{nuc } \Omega$$

$$\text{donde, } (x, y) \in \text{nuc } \Omega \subset V^*.$$

Logo, se $y \in \text{nuc } F$ então $\{y\} \times \mu(x) \subset V^*$ para todo $V \in \Omega$. Portanto,

$$\mu(x) \subset V^*(y) \subset V^*(F^*) \text{ para todo } V \in \Omega \text{ e todo } F \in F.$$

Donde,

$$\mu(x) \subset \bigcap_{V, F} V^*(F^*) = \text{nuc}(F_m).$$

Se, por outro lado, $y \notin \mu(x)$ então existe $V_1 \in \Omega$ tal que $y \notin V_1^*(x)$. Seja $V_2 \in \Omega$ tal que $V_2 \circ V_2 \circ V_2 \subset V_1$ e seja $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V_2$. Vamos mostrar que $y \notin V_2^*(F^*)$. Se $y \in V_2^*(F^*)$ então

$$(a)(a, y) \in V_2^* \text{ para algum } a \in F^*.$$

Seja $z \in \text{nuc}(F)$ então (b) $(z, a) \in F^* \times F^* \subset V_2^*$. Como $z \in \mu(x)$ então (c) $(x, z) \in V_2^*$. De (a), (b) e (c) concluímos que $(y, x) \in V_2^* \circ V_2^* \circ V_2^* \subset V_1^*$ e portanto $y \in V_1^*(x)$. Contra a hipótese. Logo $y \notin V_2^*(F^*)$ e portanto $y \notin \text{nuc}(F_m)$. Portanto, $\mu(x) \neq \text{nuc}(F_m)$. Disto concluímos também que F_m é de Cauchy pois seu núcleo está numa única mônada e que é minimal, pois se $F' \subsetneq F_m$, então $\mu(x) = \text{nuc } F_m \subsetneq \text{nuc } F'$ e portanto F' não estaria numa única mônada não sendo portanto de Cauchy. (Corol.III.3.3).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $V \in \Omega$. Existe $F \in \mathcal{F}_m$ tal que $F \times F \subset V$ e portanto $F^* \times F^* \subset V^*$. E ainda

$$\begin{aligned} \mu(x) = \mu(F_m) &\Rightarrow \{x\} \times F^* \subset V^* \Rightarrow F^* \subset V^*(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall p \in F: p \in V^*(x) \Rightarrow \forall p \in F: x \in V^*(p). \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja F o filtro gerado por

$$\{V(p): V \in \Omega \text{ e } x \in V^*(p)\}.$$

Dado $V \in \Omega$ seja $W \in \Omega$ tal que $W^{-1} = W$ e $W \circ W \subset V$. Existe $p \in E$ tal que $x \in W^*(p)$, logo $W(p) \in F$ e $W(p) \times W(p) \subset V$. Logo F é de Cauchy. Portanto $\text{nuc}(F)$ está contido numa única mônada que só pode ser $\mu(x)$. Portanto $x \in \text{aprox } E^*$.

c.q.d.

Vejamos algumas aplicações dos conceitos não standard em teoremas clássicos sobre espaços uniformes.

Seja (E, Ω) um espaço uniforme e seja $B \subset E$, $B \neq \emptyset$. Lembremos que o traço de Ω em $B \times B$ (traço = $\{V \cap B \times B : V \in \Omega\}$) induz uma estrutura de espaço uniforme em B e que, neste sentido, se diz que B é um sub-espaço uniforme de E . É claro que

$$\text{aprox } B^* \subset \text{aprox } E^*.$$

III.3.8 TEOREMA - Seja B um sub-espaço do espaço uniforme completo (E, Ω) . Se B for fechado em E então B é completo.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $x \in \text{aprox } B^*$. Vamos provar que $x \in \text{qts } B^*$. Ora, $x \in \text{aprox } B^* \Rightarrow x \in \text{aprox } E^* \Rightarrow x \in \text{qts } E^*$ (pois E é completo, III.3.6) Portanto $x \in \mu(p)$ para algum $p \in E$. Mas como B é fechado então $x \sim p$ e $x \in B^* \Rightarrow p \in B$. Logo $x \in \text{qst } B^*$. Portanto, B é completo.

c.q.d.

III.4 - ESPAÇOS PRÉ-COMPACTOS

Um espaço uniforme (E, Ω) é *pré-compacto* (ou *totalmente limitado*) se, para cada $V \in \Omega$, existir um número finito de pontos de E , $a_1, \dots, a_n$ tais que $E = V(a_1) \cup \dots \cup V(a_n)$.

III.4.1 TEOREMA - (E, Ω) é pré-compacto $\iff E^* = \text{aprox } E^*$.

DEMONSTRAÇÃO - $(\Rightarrow)$ Seja $x \in E^*$. Dado $V \in \Omega$ existem $a_1, \dots, a_n \in E$ tais que

$$E = V(a_1) \cup \dots \cup V(a_n).$$

Portanto, é válido em M que

$$\forall y [y \in E \Rightarrow y \in V(a_1) \cup \dots \cup V(a_n)]$$

Logo, é válido em M^* que $\forall y [y \in E^* \Rightarrow y \in V^*(a_1) \cup \dots \cup V^*(a_n)]$. Por-

tanto $x \in V^*(a_i)$ para algum $i = 1, \dots, n$. Logó, de acordo com III, 3.7, $x \in \text{aprox } E^*$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $E^* = \text{aprox } E^*$. Se E não for pré-compacto então existe $V \in \Omega$ tal que para todo conjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subset E$

$$V(a_1) \cup \dots \cup V(a_n) \neq E.$$

Assim, para todo conjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subset E$ existe $b \notin V(a_i)$, $i = 1, \dots, n$. Logo, a relação

$$S(a, b) \iff b \notin V(a)$$

é concorrente. Como M^* é um alargamento de M então em E existe $a \in E^*$ tal que $x \notin V^*(a)$ para todo $a \in E$.

De acordo com III.3.7, $x \notin \text{aprox } E^*$. Contra a hipótese. Portanto, E é pré-compacto.

III.4.2 TECREMA - Seja (E, Ω) um espaço uniforme. Então

(E, Ω) é compacto $\iff (E, \Omega)$ for completo e pré-compacto

DEMONSTRAÇÃO - É imediata observando que um espaço compacto só tem pontos quase standard. De fato,

$$E \text{ compacto} \iff E^* = qst E^* \iff \begin{cases} qts E^* = \text{aprox } E^* \\ E^* = \text{aprox } E^* \end{cases} \iff E \text{ é completo e pré-compacto.}$$

III.5 - FUNÇÕES UNIFORMEMENTE CONTÍNUAS

Sejam (E_1, Ω_1) e (E_2, Ω_2) espaços uniformes. Uma aplicação $f: E_1 \rightarrow E_2$ é uniformemente contínua se, e somente se, pa-

ra cada $U \in \Omega_2$ existir $V \in \Omega_1$ tal que $(x, y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U$.

III.5.1 - Sejam (E_1, Ω_1) e (E_2, Ω_2) espaços uniformes e $f: E_1 \rightarrow E_2$.

Então: f é uniformemente contínua $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E_1^* (x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y))$$

onde $x \sim y$ significa, conforme notação anterior $(x, y) \in \text{nuc } \Omega_1$ e

$f(x) \sim f(y)$ significa $(f(x), f(y)) \in \text{nuc } \Omega_2$.

DEMONSTRAÇÃO - $(\Rightarrow)$ Suponhamos f uniformemente contínua e sejam $x_0 \sim y_0$ em E_1^* . Seja $U \in \Omega_2$. Então existe $V \in \Omega_1$ tal que

$$\forall x, y \in E_1: (x, y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U.$$

Interpretando esta sentença em M^* e observando que $(x_0, y_0) \in V^*$, então concluímos que $(f(x_0), f(y_0)) \in U^*$. Como U é um elemento qualquer de Ω_2 concluímos que $f(x_0) \sim f(y_0)$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\forall x, y \in E_1^*: x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$ e seja $U \in \Omega_2$. Seja ψ do l.f.n. tal que $\psi \in \Omega_1^*$ e $\psi \subset \text{nuc } \Omega_1$. Se $(x, y) \in \psi$ então $x \sim y$ e portanto, $f(x) \sim f(y)$. Logo, $(f(x), f(y)) \in U^*$. Logo, é válido em M^* que

$$\exists v (v \in \Omega_1^* \wedge \forall x, y ((x, y) \in v \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U^*)).$$

Portanto, é válido em M que

$$\exists v (v \in \Omega_1 \wedge \forall x, y ((x, y) \in v \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U))$$

i.é, existe $V \in \Omega_1$ tal que $(x, y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U$. Portanto, f é uniformemente contínua.

c.q.d.

III.5.2 TEOREMA - f é uniformemente contínua $\Rightarrow f$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO - f uniformemente contínua $\Rightarrow \forall x, y \in E_1^* (x \sim y \rightarrow f(x) \sim f(y))$

Em particular, se $p \in E$, então $\forall x \in E_1^* (x \sim p \rightarrow f(x) \sim f(p))$. Logo, f é contínua.

III.5.3 TEOREMA - Sejam (E_1, Ω_1) e (E_2, Ω_2) espaços uniformes e seja $f: E_1 \rightarrow E_2$ contínua. Se E_1 for compacto então f é uniformemente contínua.

DEMONSTRAÇÃO - Sejam $x, y \in E_1^*$, com $x \sim y$. Como E_1 é compacto (e a relação $\sim$ é de equivalência) então existe $p \in E$ tal que $x \sim p \sim y$. Como f é contínua em p então $f(x) \sim f(p) \sim f(y)$ e portanto $f(x) \sim f(y)$. Logo, f é uniformemente contínua.

c.q.d.

Sejam E um conjunto não vazio e A um conjunto de funções definidas em E com valores num espaço uniforme (F, Ω) . Vamos mostrar que existe uma estrutura uniforme $\Omega(A)$, em E , que torna todas as $f \in A$ uniformemente contínuas.

III.5.4 TEOREMA - Seja A um conjunto de funções definidas em um conjunto E com valores num espaço uniforme (F, Ω) .

(a) A relação

$$"x \sim y \iff f(x) \sim f(y) \text{ para toda } f \in A"$$

é uma relação nuclear de equivalência em E^* .

Portanto $\sim$ define uma estrutura uniforme em E que será denotada por $\Omega(A)$. (cf. III.2.2), i.é, $\Omega(A) = \text{fil } \mu$, onde $\mu = \{(x, y) \in E^*: x \sim y\}$.

(b) $\Omega(A)$ é a menos fina estrutura uniforme sobre E que torna todas as $f \in A$ uniformemente contínuas.

DEMONSTRAÇÃO - (a) $x \sim y$ é uma relação de equivalência posto que $f(x) \sim f(y)$, por hipótese, também é. Vamos mostrar que $\mu = \text{nuc fil } \mu$, i.é, μ é nuclear. Se $(x_1, y_1) \notin \mu$ então existe $f \in A$ tal que $f(x_1) \not\sim f(y_1)$, i.é, para algum $V \in \Omega$, $(f(x_1), f(y_1)) \notin V^*$. Logo, o conjunto

$$B = \{(a, b) \in E \times E : ((f(a), f(b)) \in V)\}$$

é tal que $B^* \supset \mu$, i.é, $B^* \in \text{fil } \mu$, mas $(x_1, y_1) \notin B^*$. Logo $\mu = \text{nuc fil } \mu$. É claro que cada $f \in A$ é uniformemente contínua em $(E, \Omega(A))$.

(b) é claro que se Ω' for uma estrutura uniforme sobre E tal que toda $f \in A$ seja uniformemente contínua então

$$\text{nuc } \Omega' \subset \{(x, y) : x \sim y\} = \mu.$$

Portanto, $\Omega(A)$ é menos fina que Ω' (cf. II.3.1).

c.q.d.

Seja agora (E, θ) um espaço topológico e seja A um conjunto de funções definidas em E a valores reais tais que

(i) cada $f \in A$ é contínua e limitada

(ii) dados $B \subset E$ fechado e $p \in E - B$ existe $f \in A$ tal que

$$f(p) < \inf\{f(b) : b \in B\}$$

ou

$$\sup\{f(b) : b \in B\} < f(p).$$

III.5.8 TEOREMA - Sejam (E, θ) um espaço topológico e A um conjunto de funções definidas em E com valores em $\mathbb{R}$ satisfazendo

(i) e (ii) acima. Então $\Omega(A)$ (cf. III.3.13) é compatível com a topologia θ .

DEMONSTRAÇÃO - Designemos por $\mu_\theta(p)$ a mônada de $p \in E$ determinada pela topologia θ , e por $\mu(x)$, $x \in E^*$, a mônada determinada pela estrutura uniforme $\Omega(A)$. Precisamos mostrar que $\mu_\theta(p) = \mu(p)$ para todo $p \in E$, pois uma topologia fica determinada pelas suas mônadas (cf. II.2.1).

Seja $p \in E$. Para toda $f \in A$ temos $f(\mu_\theta(p)) \subset \mu(f(p))$ pois f é contínua ($\mu(f(p))$ está designando as mônadas em $\mathbb{R}$ com a estrutura uniforme habitual) (cf. II.2.3). Logo, se $x \in \mu_\theta(p)$ então $x \in \mu(p)$ (de acordo com a própria definição de $\Omega(A)$ e consequentemente de $\mu(p)$). Suponhamos agora que $x \notin \mu_\theta(p)$. Então existe um aberto $o \in \theta$ tal que $p \in o$ e $x \notin (E-o)^*$. Como $E-o$ é fechado então existe $f \in A$ tal que

$$\inf\{f(a) : a \in E-o\} > f(p)$$

portanto, $f(x) \neq f(p)$ (novamente trata-se da relação $\sim$ em $\mathbb{R}^*$ determinada pela estrutura uniforme de $\mathbb{R}$). Mas isto significa que $x \notin \mu(p)$. Logo $\mu(p) = \mu_\theta(p)$, concluindo a demonstração.

c.q.d.

III.5.9 COROLÁRIO - Todo espaço completamente regular é uniformizável.

III.6 - REDES E FAMÍLIA DE PSEUDO-MÉTRICAS ASSOCIADA A Ω (STANDARD)

Introduziremos neste parágrafo os conceitos de *rede* e de *família de pseudo-métricas associadas a uma estrutura uniforme*. O

conceito de rede, semelhante ao de seqüência, substitui, com vantagens para a intuição, o de filtro na discussão dos espaços uniformes. As demonstrações omitidas (referentes às redes) requerem, exclusivamente, uma leitura atenta das definições envolvidas. (Veja [7]).

III.6.1 DEFINIÇÃO - Um *conjunto dirigido* é um par $(D, >)$ onde D é um conjunto não vazio e $>$ é uma relação binária em D tal que

(i) $>$ é reflexiva, i.é, $m > m$ para todo $m \in D$

(ii) $>$ é transitiva, i.é, $m > n$ e $n > p \Rightarrow m > p$

(iii) quaisquer que sejam $m, n \in D$, existe $p \in D$ tal que $p > m$ e $p > n$.

III.6.2 DEFINIÇÃO - Uma *rede em F* é uma função $S: D \rightarrow E$ onde $(D, >)$ é um conjunto dirigido.

III.6.3 DEFINIÇÃO - Uma rede $S: D \rightarrow E$ converge para $a \in E$ ($S \rightarrow a$) (onde E é um espaço topológico) se para cada vizinhança V de a existir $n_0 \in D$ tal que: $m \in D$ e $m > n_0 \Rightarrow S(m) \in V$.

III.6.4 DEFINIÇÃO - Uma rede $S: D \rightarrow E$ é de Cauchy (onde (E, Ω) é um espaço uniforme) se para cada $V \in \Omega$ existir $n_0 \in D$ tal que: $m \in D, n \in D, m > n_0, n > n_0 \Rightarrow (S(m), S(n)) \in V$.

III.6.5 TEOREMA - Seja $E \neq \emptyset$.

(a) Se $S: D \rightarrow E$ for uma rede então

$$F_S = \{F \subset E: F \supset \{S_n: n > n_0\} \text{ para algum } n_0 \in D\}$$

é um filtro sobre E chamado *filtro associado à rede S*.

(b) Se F for um filtro sobre E então o par $(D, >)$ onde:

$$D = \{(x, F) : F \in \mathcal{F} \text{ e } x \in F\}$$

e

$>$ é a relação definida por " $(y, G) > (x, F) \iff G \subset F$ ",

é um conjunto dirigido. Portanto, a função

$$S_F: D \rightarrow E, S_F(x, F) = x$$

é uma rede, chamada *rede associada ao filtro F*.

(c) Seja F um filtro sobre E , e seja S uma rede em F . Então

$$F = F_{(S_F)}, S = S_{(F_S)}.$$

III.6.6 TEOREMA - Seja (E, Ω) um espaço uniforme e sejam S uma rede em E e F um filtro sobre E . Então.

$$(a) S \rightarrow a \iff F_S \rightarrow a \quad (a \in E)$$

$$(b) S \text{ é de Cauchy} \iff F_S \text{ é de Cauchy}$$

$$(c) F \rightarrow a \iff S_F \rightarrow a$$

$$(d) F \text{ é de Cauchy} \iff S_F \text{ é de Cauchy.}$$

III.6.7 COROLÁRIO - O espaço uniformte (E, Ω) é completo se e somente se, toda rede de Cauchy for convergente.

DEMONSTRAÇÃO - Combinar III.6.5 (c) com III.6.6.

III.6.8 DEFINIÇÃO - Seja E um conjunto. Uma aplicação

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

é uma *pseudo-métrica* em E , se:

- (i) $d(x,x) = 0; \forall x \in E$
- (ii) $d(x,y) = d(y,x); \forall x,y \in E$
- (iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z); \forall x,y,z \in E.$

Dados um conjunto $E \neq \emptyset$ e uma família $\{d_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ de pseudo métricas em E , a família

$$\{V(\gamma, \varepsilon): \gamma \in \Gamma \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\} \text{ onde } V(\gamma, \varepsilon) = \{(x,y): d_\gamma(x,y) < \varepsilon\},$$

é uma base de um filtro Ω sobre $E \times E$. Este filtro é uma estrutura uniforme sobre E . Ele é chamado *estrutura uniforme associada à família* $\{d_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$

Inversamente, dada uma estrutura uniforme (E, Ω) existe uma família de pseudo-métricas $\{d_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ tal que Ω é a estrutura uniforme associada à família $\{d_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$. Além disso essa família pode ser suposta tal que: quaisquer que sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tal que

$$d_{\gamma_3}(x,y) \geq \max\{d_{\gamma_1}(x,y), d_{\gamma_2}(x,y)\}, \quad \forall x,y \in E.$$

(cf. [2] ou [14])

III.7 - A ENVOLTÓRIA NÃO STANDARD E O COMPLEMENTAMENTO DE UM ESPAÇO UNIFORME

Vimos em III.3.6 que (E, Ω) é completo se, e somente se, todo ponto aproximável for quase standard. É natural esperar que os pontos aproximáveis forneçam o completamento de E . Este resultado, que demonstraremos a seguir, ilustra outra virtude do método não standard: os objetos que completam o

espaço são pontos em E^* e não filtro, como na abordagem standard.

Seja $(E, \{d_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ um espaço uniforme (cf. III.6). Em termos da família $\{d_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ o núcleo da estrutura uniforme associada, Ω , pode ser assim descrito

$$(x, y) \in \text{nuc } \Omega \iff d_\gamma^*(x, y) \sim 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Seja $E_f^* = \{x \in E^* : d_\gamma^*(x, p) \text{ é finito para todo } \gamma \in \Gamma \text{ e todo } p \in E\}$. Segue do Lema III.3.7 que $\text{apr} \Omega \subseteq E_f^*$.

Seja $E_f = E_f^* / \sim$ onde $\sim$ é a relação nuclear de equivalência determinada por $\text{nuc } \Omega$, i.é., $E_f = \{\mu(x) : x \in E_f^*\}$. Definimos:

$$\tilde{d}_\gamma(\mu(x), \mu(y)) = \text{std } d_\gamma^*(x, y), \quad \gamma \in \Gamma.$$

É fácil ver que $\tilde{d}_\gamma$ está bem definida e que é uma pseudo-métrica em E_f . Portanto, a família $\{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ define uma estrutura uniforme em E_f .

III.7.1 DEFINIÇÃO A estrutura uniforme $(E_f, \{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ é chamada *envoltória não standard de* $(E, \{d_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$.

III.7.2 TEOREMA - Consideremos a aplicação $\pi : E \rightarrow E_f$ dada por $\pi(p) = \mu(p)$. Se E for Hausdorff, π é um isomorfismo uniforme de E em $\pi(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Se E for Hausdorff então $p \neq q \rightarrow \mu(p) \neq \mu(q)$ (cf. II.2.2) e portanto π é um a um. Por outro lado,

$$\tilde{d}_\gamma(\mu(p), \mu(q)) = \text{st } d_\gamma^*(p, q) = d_\gamma(p, q) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma.$$

c.q.d.

Identificando E com sua imagem $\pi'(E)$, demonstraremos que

$$(1) \bar{E} = \text{aprox } E^*$$

$$(2) (E_f, \{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}) \text{ é completo,}$$

concluindo que $\text{aprox } E^*$ é o complemento de E.

III.7.3 TEOREMA - Seja $(E, \{d_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ um espaço uniforme e Hausdorff e seja $(E_f, \{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ sua envoltória não standard. Então

$$\mu(x) \in \bar{E} \iff x \text{ for aproximável.}$$

DEMONSTRAÇÃO - De acordo com o lema III.3.7 temos:

$$x \in \text{aprox} \iff \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varepsilon > 0 \exists p \in E: d_\gamma^*(x, p) < \varepsilon \iff$$

$$\iff \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varepsilon > 0 \exists p \in E: \tilde{d}_\gamma(\mu(x), \mu(p)) < \varepsilon \iff x \in \bar{E}.$$

c.q.d.

Pretendemos demonstrar agora que a envoltória não standard $(E_f, \{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ é completa. Para tanto, consideremos uma rede $n \in D \xrightarrow{S} \mu(a_n) \in E_f$ de Cauchy. É natural, de acordo com a intuição despertada pelo método não standard, procurar o elemento $a \in E^*$, tal que $\mu(a)$ seja o limite da rede S, na intersecção

$$\bigcap_{n \in D} \{a_r; r > n\} = \{a_r; r \in D^* - D, r \text{ "infinito"}\}.$$

Admitamos que esta intersecção seja não vazia e tentemos provar que

$$a_r \in \bigcap \Rightarrow a_r \in E_f^* \text{ e } \mu(a_n) \rightarrow \mu(a_r).$$

O fato de S ser de Cauchy significa que para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ e cada $\gamma \in \Gamma$ existe $n_0(\gamma, k) \in D$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d_{\gamma}^*(a_m, a_n) < \frac{1}{k}.$$

Como $r > n_0$ para todo $n_0 \in D$, então dados $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\gamma \in \Gamma$

$$d_{\gamma}^*(a_m, a_r) < \frac{1}{k} \text{ para todo } m > n_0(\gamma, k)$$

e isto significa que $a_r \in E_f^*$ e que $\mu(a_m) \rightarrow \mu(a_r)$.

Entretanto, o racicínio acima esbarra em alguns equívocos:

- (1) a rede $n \in D \rightarrow a_n \in E^*$ não está em M_e portanto nada indica que possa ser estendida a $n \in D^* \rightarrow a_n \in E^*$;
- (2) ainda que possa, não podemos garantir que os elementos a_r , $r \in D^* - D$, satisfazem as mesmas propriedades que os a_n , $n \in D$, pois $(a_r)_{r \in D^*}$ não é da forma S^* para alguma S *standard*. Assim, p.ex., $r \in D^*$ e $r > n_0(\gamma, k)$ não implica que $d_{\gamma}^*(a_m, a_r) < \frac{1}{k}$ para $m > n_0(\gamma, k)$.

Tais objeções são superadas fazendo os seguintes ajustes na demonstração e no alargamento M^* :

(a) Tomando uma *ultrapotência* de M . Com isto poderemos garantir que a aplicação $S: D \rightarrow E^*$ se estende a uma aplicação interna $S: D^* \rightarrow E^*$.

(b) Em lugar de tomarmos a intersecção $\bigcap_{n \in D} \{a_r: r > n\}$, consideraremos os conjuntos $A_{(\gamma, k)}$ (veja III.7.6) que serão constituídos pelos $r \in D^*$ para os quais possamos fazer a implicação

objetada em (2); então tomaremos $\bigcap_{\gamma, k} A(\gamma, k)$.

Entretanto, sobrevive a questão: $\bigcap_{k, \gamma} A(\gamma, k) \neq \emptyset$?. Novamente, como estamos tratando de conjuntos de M^* , *não necessariamente standard*, ainda que eles tenham a p.i.f, a intersecção de todos pode ser vazia. Para superar esta questão consideraremos M^* uma ultrapotência κ -saturada de M ($\kappa = \text{card } I$).

III.7.4 TEOREMA - Seja M^* uma U -ultrapotência de M onde U é um ultrafiltro não principal sobre I . Sejam A e B conjuntos de M e $f: A \rightarrow B^*$. Então existe $g: A^* \rightarrow B^*$ interna a M^* e tal que $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.

DEMONSTRAÇÃO - Lembremos que as funções de A^* em B^* que são internas a M^* são as $\tilde{\psi}: A^* \rightarrow B^*$ associadas a $\psi = \langle \psi_i: i \in I \rangle \in (B^A)^I$ e definidas por $\tilde{\psi}(\langle a_i: i \in I \rangle) = \langle b_i: i \in I \rangle \iff \{i \in I: \psi_i(a_i) = b_i\} \in U$ e que um elemento $a \in A$ é identificado com a família constante de A^* . $\langle a: i \in I \rangle$ (veja definição de U -ultrapotência no capítulo I).

Seja $f: A \rightarrow B^*$ dada por $f(a) = \langle b_i: i \in I \rangle$. Definimos $\psi = \langle \psi_i: i \in I \rangle \in (B^A)^I$ por $\psi_i(a) = b_i$. Portanto, $\{i \in I: \psi_i(a) = b_i\} = I \in U$. Logo, $\tilde{\psi}(\langle a: i \in I \rangle) = f(a)$. Assim a função g procurada é $\tilde{\psi}$.

c.q.d.

III.7.5 DEFINIÇÃO - Seja M^* uma ultrapotência de M e seja κ um cardinal infinito. M^* é κ -saturado se, e somente se, para todo tipo τ , e toda família Λ (de tipo $((\tau))$) de conjuntos internos de M^* com a p.i.f. e tal que $\text{card}(\Lambda) < \kappa$, se tenha:

$$\bigcap_{A \in \Lambda} A \neq \emptyset.$$

A existência de ultrapotências κ -saturadas está demonstrada em General Theory of Monads, pp.57,32 [9].

A semelhança entre o l.f.n. (aliás, equivalente à definição de alargamento) e a κ -saturação são evidentes. A diferença é que enquanto no alargamento (l.f.n.) os elementos de Λ são standard, na κ -saturação são internos a M^* . Em ambos os casos, Λ é externo a M^* .

III.7.6 TEOREMA - Seja $(E, \{d_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ um espaço uniforme contido numa estrutura M e seja M^* uma ultrapotência κ -saturada de M onde $\kappa \geq \text{card } \Gamma$. Então a envoltória não standard $(E_f, \{\tilde{d}_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$ é completa.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $S: n \in D \rightarrow \mu(a_n) \in E_f$ uma rede de Cauchy. A aplicação $n \in D \rightarrow a_n \in E^*$ pode ser estendida a uma aplicação $n \in D^* \rightarrow a_n \in E^*$ (cf. III.7.4). Como S é de Cauchy segue que dados $\gamma \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0(\gamma, k)$ tal que

$$\forall m, n \in D: m, n > n_0(\gamma, k) \Rightarrow d^*(a_m, a_n) < \frac{1}{k}.$$

Consideremos os conjuntos

$$A(\gamma, k) = \left\{ m \in D^*: \forall r, s \in D^*: n_0(\gamma, k) < r, s < m \Rightarrow d^*(a_r, a_s) < \frac{1}{k} \right\}$$

que são internos porque a função $n \in D^* \rightarrow a_n \in E^*$ é interna e não vazios porque a rede S é de Cauchy.

Como a família $A(\gamma, k)$ tem a p.i.f. e como M^* é κ -saturado segue que

$$A = \bigcap_{\gamma, k} A(\gamma, k) \neq \emptyset.$$

Consideremos $m_0 \in A$. Como $\{n_0(\gamma, k) : \gamma \in \Gamma \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$ pode, sem perda de generalidade, ser suposto ilimitado, então $m_0 \in D^* - D$, $m_0 > m$ para todo $m \in D$. Logo, $d_\gamma^*(a_n, a_{m_0}) < \frac{1}{k}$ para todo $n \in D$ tal que $n > n_0(\gamma, k)$. Isto significa que $a_{m_0} \in E_f^*$ e que $S \rightarrow \mu(a_{m_0})$. Logo toda rede de Cauchy em E_f converge para um elemento de E_f . Portanto, E_f é completo (cf. III.4.7).

c.q.d.

CAPÍTULO IV

ESPAÇOS LOCALMENTE CONVEXOS

Desenvolveremos neste capítulo alguns aspectos da teoria não standard dos espaços localmente convexos para caracterizar seus pontos aproximáveis. Usando o Teorema

$$E \text{ completo} \iff \text{aprox } E^* = \text{qstd } E^*$$

demonstraremos um Teorema de Grothendieck sobre a completude dos espaços localmente convexos.

Seguimos os trabalhos de C. Ward Hensen e L.C. Moore Jr. [6]. Os teoremas IV.4.1 e IV.4.2 encontram-se também demonstrados em [4].

Seja E um K -espaço vetorial onde K ou é o corpo $\mathbb{R}$, ou o corpo $\mathbb{C}$. (E, θ) é um *espaço vetorial topológico* (e.v.t.) se θ for uma topologia sobre E que torna as operações de adição, $(x, y) \in K \times E \rightarrow x + y \in E$, e multiplicação escalares, $(\lambda, x) \in K \times E \rightarrow \lambda x \in E$, contínuas, quando $E \times E$ e $K \times E$ estão munidos da topologia produto. (E, θ) é *localmente convexo* se a origem (e portanto todo ponto de E) tiver um sistema fundamental de vizinhanças convexas.

O estudo do e.v.t. (E, θ) envolve os elementos de E e

de K . Admitiremos então E e K contidos numa estrutura plena M . Passando a um alargamento M^* , as operações de adição e de multiplicação se estendem às operações

$$(x, y) \in E^* \times E^* \rightarrow x + y \in E^*$$

e

$$(\lambda, x) \in K^* \times E^* \rightarrow \lambda x \in E^*$$

respectivamente. As sentenças que caracterizam E como K -espaço vetorial são exprimíveis em L , evidentemente válidas em M e portanto válidas em M^* . Interpretadas em M^* elas significam que E^* é um K^* -espaço vetorial.

O módulo em K se estende a K^* ($\lambda \in K^* \rightarrow |\lambda| \in \mathbb{R}^*$) e sua extensão satisfaz, conseqüentemente, os axiomas que definem uma norma. Denotaremos por K_f^* e K_i^* os conjuntos

$$K_f^* = \{\lambda \in K^* : |\lambda| \leq m \text{ para algum } m \in \mathbb{R}, m > 0\}$$

$$K_i^* = \{\lambda \in K^* : |\lambda| < m \text{ para todo } m \in \mathbb{R}, m > 0\}.$$

Seja $\mathcal{V}(\theta)$ o filtro das θ -vizinhanças da origem num e.v.t. (E, θ) . Então

- (i) em virtude da continuidade da adição, para cada $p \in E$, o filtro gerado por $\{p + V : V \in \mathcal{V}(\theta)\}$ é o filtro das θ -vizinhanças de p , F_p .
- (ii) o filtro $\Omega(\theta)$, gerado por $\{U(V) : V \in \mathcal{V}(\theta)\}$ onde $U(V) = \{(x, y) : y - x \in V\}$, é uma estrutura uniforme sobre E , compatível com a topologia θ . [Cf. Robertson, T.V.S., cap.1, [11]].

Em consequência, as mônadas determinadas pelo núcleo de $\Omega(\theta)$ são translações da mônada da origem. De fato:

$$\text{nuc } \Omega(\theta) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(\theta)} (U(V))^* = \left\{ (x, y) \in E^* \times E^* : y - x \in V^* \right. \\ \left. \text{para todo } V \in \mathcal{V}(\theta) \right\}.$$

Portanto, para cada $x \in E^*$, a mônada de x é:

$$\mu(x) = \{y \in E^* : (x, y) \in \text{nuc } \Omega(\theta)\} = \{y \in E^* : y - x \in V^* \text{ para} \\ \text{todo } V \in \mathcal{V}(\theta)\} = \bigcap_V x + V^* = x + \bigcap_V V^* = x + \mu(0).$$

De acordo com as definições do Cap. III temos:

$$x \in E^* \text{ é quase-standard} \iff \exists p \in E : x \in \mu(p) \iff \exists p \in E : x - p \in \mu(0)$$

$$x \in E^* \text{ é aproximável} \iff \text{nuc } F \subset \mu(x) \text{ para algum filtro de Cauchy } F.$$

Se θ' for mais fina que θ então

$$\mu_{\theta'}(0) \subset \mu_{\theta}(0)$$

$$\text{e portanto, } \text{qstd}_{\theta'}(E^*) \subset \text{qstd}_{\theta}(E^*) \text{ e } \text{aprox}_{\theta'}(E^*) \subset \text{aprox}_{\theta}(E^*).$$

IV.1 - DUALIDADE

Sejam E, F K -espaços vetoriais ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). O par (E, F) é um *par dual* se estiver definida uma forma bilinear separante em $E \times F$, i.é, uma aplicação $(x, y) \in E \times F \rightarrow \langle x, y \rangle \in K$ que seja bilinear e tal que

$$(a) \ x \in F, x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in F : \langle x, y \rangle \neq 0$$

(b) $y \in F, y \neq 0 \Rightarrow \exists x \in E: \langle x, y \rangle \neq 0$.

Seja (E, F) um par dual. Admitiremos E, F e K contidos numa estrutura plena M . Passando a um alargamento M^* a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definida em $E \times F$, se estende a

$$E^* \times E^*: (x, y) \in E^* \times E^* \rightarrow \langle x, y \rangle \in K^*.$$

Esta extensão é bilinear e separante, posto que esses atributos de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (em M) são exprimíveis em L e válidos em M .

IV.1.1 DEFINIÇÃO - Seja (E, F) um par dual e seja A um subconjunto de E^* . (A interno ou não). Então

$$A^i = \{y \in F^*: \langle x, y \rangle \in K_i^* \text{ para todo } x \in A\}$$

$$A^0 = \{y \in F^*: |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}$$

$$A^f = \{y \in F^*: \langle x, y \rangle \in K_f^* \text{ para todo } x \in A\}$$

Trocando-se os papéis de E e F , define-se de modo análogo B^i , B^0 e B^f para um subconjunto B de F^* .

IV.1.2 PROPOSIÇÃO - Sejam (E, F) um par dual e $A, B \subset E^*$. Então

$$(i) A^i \subset A^0 \subset A^f$$

$$(ii) A \subset B \Rightarrow B^i \subset A^i, B^0 \subset A^0, B^f \subset A^f$$

(iii) A^i e A^f são fechados em relação a multiplicação por elementos de K_f^*

(iv) Se A for fechado em relação à multiplicação por elementos de N então $A^i = A^0$.

(v) Se S for um subconjunto de E e se S^0 indicar o polar de S em F (i.é, $S^0 = \{y \in F: |\langle x, y \rangle| \leq 1, \forall x \in S\}$), então:
 $(S^0)^* = (S^*)^0$.

DEMONSTRAÇÃO - (i), (ii) e (iii) são evidentes.

(iv) Em virtude de (i) é suficiente provar que $A^0 \subset A^1$. Seja $y \in A^0$, portanto $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ para todo $x \in A$. Logo $|\langle nx, y \rangle| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$ (pois $\mathbb{N} \cdot A \subset A$). Portanto, $|\langle x, y \rangle| \leq \frac{1}{n}$, $\forall x \in A$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Logo, $|\langle x, y \rangle| \sim 0$ para todo $x \in A$, i.é., $\langle x, y \rangle \in K_1^*$ para todo $x \in A$. Portanto, $y \in A^1$.

(v) A seguinte sentença é válida em M

$$\forall y (y \in S^0 \leftrightarrow y \in F \wedge \forall x (x \in S \rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq 1)).$$

Portanto, a sentença

$$\forall y (y \in (S^0)^* \leftrightarrow y \in F^* \wedge \forall x (x \in S^* \rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq 1)).$$

é válida em M^* . Mas isto quer dizer que

$$(S^0)^* = \{y \in F^* : |\langle x, y \rangle| \leq 1 \ \forall x \in S^*\} = (S^*)^0.$$

c.q.d.

IV.1.3 PROPOSIÇÃO - Seja (E, F) um par dual e seja $B \subset F^*$. Então

$$x \in B^f \iff \forall \lambda \in K_1^* : \lambda x \in B^i.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $x \in B^f$. Então $\langle x, y \rangle \in K_f^*$ para todo $y \in B$. Portanto, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \in K_1^*$ para todo $\lambda \in K_1^*$, e para todo $y \in B$. Isto quer dizer que $\lambda x \in B^i$.

Por outro lado, se $x \notin B^f$ então para algum $y \in B$,

$$\lambda = \langle x, y \rangle \notin K_f^*.$$

Portanto, $1/\lambda \in K_1^*$ e $\langle 1/\lambda x, y \rangle = 1$. Portanto $\frac{1}{\lambda} x \notin B^i$.

c.q.d.

IV.2 - TOPOLOGIA POLAR — OS ELEMENTOS θ -FINITOS

Seja (E, F) um par dual. Para cada $y \in F$, a aplicação $\hat{y}: x \in E \rightarrow \langle x, y \rangle \in K$ é um funcional linear. A topologia menos fina sobre E que torna todos os funcionais $\hat{y}$, $y \in F$, contínuos, é chamada *topologia fraca sobre E determinada por F* e denotada por $\sigma(E, F)$. $(E, \sigma(E, F))$ é um espaço localmente convexo e uma base das $\sigma(E, F)$ -vizinhanças da origem é constituída pelos polares A^0 , onde A é um conjunto finito de F . Trocando-se os papeis de E e F define-se a topologia fraca sobre F determinada por E , $\sigma(F, E)$. Um subconjunto $A \subset E$ é *fracamente limitado* ($\sigma(E, F)$ -limitado) se, para toda $\sigma(E, F)$ -vizinhança da origem V , existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $nV \supset A$.

Seja (E, F) um par dual e seja A uma família de subconjuntos de F $\sigma(F, E)$ -limitados, satisfazendo:

- (i) $\bigcup_{A \in A} A = F$
- (ii) se A_1 e A_2 estão em A então existe A_3 em A tal que $A_1 \cup A_2 \subset A_3$
- (iii) se $A \in A$ e $\lambda \in K$ então $\lambda A \in A$.

Nestas condições, a família $\{A^0: A \in A\}$ (polares tomados em E) é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma única topologia $\theta(A)$ sobre E , localmente convexa e Hausdorff. (cf Robertson - cap. III). $\theta(A)$ é chamada *topologia polar*.

É sabido que toda topologia localmente convexa e Hausdorff é uma topologia polar, a saber: é a topologia polar

determinada pela família ϵ dos conjuntos equicontínuos de $F = (E, \theta)'$ ($(E, \theta)'$ é o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em E e a forma bilinear separante em (E, F) é $\langle x, x' \rangle = x'(x)$) (cf. Robertson, cap. III). Em particular, a topologia fraca, $\sigma(E, F)$, é a topologia polar determinada pela família dos subconjuntos finitos de F .

IV.2.1 DEFINIÇÃO - Sejam A e $\theta = \theta(A)$ como acima. Um elemento $x \in E^*$ será chamado θ -finito se, e somente se, $x \in \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^f$. O conjunto dos elementos θ -finitos será denotado por $\text{fin}_\theta(E^*)$, i.é., $\text{fin}_\theta(E^*) = \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^f$.

IV.2.2 TEOREMA - Sejam A e $\theta = \theta(A)$ como acima. Então

$$(a) \mu_\theta(0) = \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^i = \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^0$$

$$(b) x \in \text{fin}_\theta E^* \iff \lambda x \in \mu_\theta(0) \text{ para todo } \lambda \in K_1^*$$

$$(c) \text{fin}_\theta E^* \supset \text{aprox } E^*.$$

DEMONSTRAÇÃO - (a) A condição (iii) sobre A garante que $\bigcup_{A \in A} A^*$ é fechada em relação à multiplicação por elementos de $\mathbb{N}$, portanto $\left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^0 = \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^i$ (cf. IV.2.1, (iv)). Por outro lado,

$$\mu_\theta(0) = \bigcap_{A \in A} (A^0)^* = \bigcap_{A \in A} (A^*)^0 = \left(\bigcup_{A \in A} A^* \right)^0.$$

(b) é consequência imediata de IV.1.3 e de (a).

(c) vamos usar o lema III.3.7:

$$"x \in \text{aprox}_\theta E^* \iff \text{para todo } V \in \mathcal{V}(\theta) \text{ existe } p \in E \text{ tal que } p \in x + V^*"$$

Seja $x \in E^* - \text{fin}_\theta(E^*)$. Portanto, para algum $A \in A$ e al-

gum $y \in A^*$, $\langle x, y \rangle \notin K_f^*$. Vamos mostrar que $x + (A^0)^* \cap E = \emptyset$ (na verdade provaremos mais ainda; $x + (A^0)^* \cap \text{fin}_\theta = \emptyset$). Seja $x' \in x + (A^0)^*$. Logo, $x' = x + u$ com $u \in (A^0)^* = (A^*)^0$. Donde, $\langle x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle u, y \rangle$. Como $\langle x, y \rangle \notin K_f^*$ e $|\langle u, y \rangle| \leq 1$, então $\langle x', y \rangle \notin K_f^*$. Logo, $x' \notin \text{fin}_\theta(E^*)$. Portanto $x + (A^0)^* \cap \text{fin}_\theta E^* = \emptyset$. Isto significa que nenhum elemento aproximável está fora de $\text{fin}_\theta E^*$.

c.q.d.

IV.2.3 EXEMPLOS - (1) Seja (E, F) um par dual e seja A a família de todos os subconjuntos finitos de F . Então $\theta(A) = \sigma(E, F)$. Como cada $A \in A$ é finito, então $A^* = A$ e portanto, $\bigcup_{A \in A} A^* = F$. Portanto

$$\mu_{\theta(E, F)}(0) = F^i \quad \text{e} \quad \text{fin}_{\sigma(E, F)}(E^*) = F^f.$$

(2) Seja (E, θ) localmente convexo e Hausdorff e seja $F = (E, \theta)'$. Consideremos $\epsilon = \{A \subset F: A \text{ é } \theta\text{-equicontínuo}\}$. Então cada $A \in \epsilon$ está contido em V^0 para algum $V \in V(\theta)$ e ainda $\theta = \theta(\epsilon)$. Portanto,

$$\mu_\theta(0) = \left(\bigcup_{A \in \epsilon} A^* \right)^i = \left(\bigcup_{V \in V(\theta)} (V^0)^* \right)^i = \left(\bigcup_{V \in V(\theta)} (V^0)^* \right)^0$$

e

$$\text{fin}_\theta(E^*) = \left(\bigcup_{A \in \epsilon} A^* \right)^f = \left(\bigcup_{V \in V(\theta)} (V^0)^* \right)^f.$$

IV.3 - OS ELEMENTOS APROXIMÁVEIS NA TOPOLOGIA FRACA

Nos seguintes teoremas usaremos o seguinte resultado algébrico "sejam E um K -espaço vetorial e $E^\#$ o dual algé-

brico de E. Dados $y_1, \dots, y_n$ em $E^\#$ linearmente independentes, e dado $\phi \in E^{\#\#}$, existe $p \in E$ tal que

$$\langle p, y_i \rangle = \langle \phi, y_i \rangle \text{ para todo } i=1, \dots, n$$

(onde $\langle p, y_i \rangle$ denota $y_i(p)$ e $\langle \phi, y_i \rangle$ denota $\phi(y_i)$)".

IV.3.1 TEOREMA - Seja (E, F) um par dual. Então

$$\text{aprox}_{\sigma(E, F)} E^* = \text{fin}_{\sigma(E, F)} E^*.$$

DEMONSTRAÇÃO - Vamos usar novamente o lema III.3.7. Seja

$$x \in \text{fin}_{\sigma(E, F)} E^* \text{ e seja } V \in \mathcal{V}(\sigma(E, F)).$$

Podemos considerar $V = \{y_1, \dots, y_n\}^0$ onde $y_1, \dots, y_n \in F$ são linearmente independentes. Sabemos que $\text{fin}_{\sigma(E, F)} E^* = F^f$. Portanto existe $p \in E$ tal que $\langle p, y_i \rangle = \text{st} \langle x, y_i \rangle$, $i=1, \dots, n$ (veja resultado acima deste teorema). Portanto $\langle p, y_i \rangle - \langle x, y_i \rangle \sim 0$, $i=1, \dots, n$, i.ê, $\langle p-x, y_i \rangle \sim 0$, $i=1, \dots, n$. Portanto, $p-x \in V^*$, i.ê, $p \in x + V^*$. Isto mostra, segundo III.3.7, que $x \in \text{aprox } E^*$. Portanto

$$\text{fin}_{\sigma(E, F)} E^* = \text{aprox}_{\sigma(E, F)} E^*$$

(posto que já tínhamos provado a outra inclusão, veja IV.2.2).

c.q.d.

IV.3.2 TEOREMA - Seja (E, F) um par dual. Então

para todo $\phi \in F^\#$ existe $x \in \text{aprox}_{\sigma(E, F)} E^*$ tal que

$$\langle x, y \rangle = \langle \phi, y \rangle \text{ para todo } y \in F.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\phi \in F^\#$ e consideremos $\{y_t, t \in T\}$ uma base (al-

gêbrica) de F sobre K . Para cada subconjunto finito $S \subset T$ seja

$$H(S) = \{p \in E: \langle p, y_t \rangle = \langle \phi, y_t \rangle \text{ para todo } t \in S\}.$$

A família $\{H(S)\}_S$ tem a p.i.f. (veja resultado no início deste parágrafo). Seja F o filtro gerado por esta família. Como M^* é um alargamento de M então $\text{nuc } F \neq \emptyset$. Portanto existe $x \in E^*$ tal que

$$\langle x, y_t \rangle = \langle \phi, y_t \rangle \text{ para todo } t \in T.$$

Logo $\langle x, y \rangle = \langle \phi, y \rangle$ para todo $y \in F$ e portanto,

$$x \in F^f = \text{fin}_{\sigma(E, F)} E^* = \text{aprox}_{\sigma(E, F)} E^*.$$

c.q.d.

IV.3.3 COROLÁRIO - Seja (E, F) um par dual. Então

$$(E, \sigma(E, F)) \text{ é completo} \iff \text{para todo } \phi \in F^\#$$

existe $p \in F$ tal que $\langle p, y \rangle = \langle \phi, y \rangle$, para todo $y \in F$.

DEMONSTRAÇÃO ($\Rightarrow$) Suponhamos $(E, \sigma(E, F))$ completo e seja $\phi \in F^\#$. Portanto existe $x \in \text{aprox } E^*$ tal que $\langle x, y \rangle = \langle \phi, y \rangle$, $\forall y \in F$. Como E é completo, então $\text{aprox } E^* = \text{qst } E^*$ e portanto existe $p \in E$ tal que $x \in p + \mu(0)$. Logo, $x = p + u$, onde $u \in \mu(0)$. Portanto, $\langle \phi, y \rangle = \langle p, y \rangle + \langle u, y \rangle$, $\forall y \in F$. Como $\mu(0) = F^\perp$ então $\langle \phi, y \rangle \sim \langle p, y \rangle$, $\forall y \in F$. Mas $\langle \phi, y \rangle$ e $\langle p, y \rangle$ são escalares standard, portanto $\langle p, y \rangle = \langle \phi, y \rangle$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in \text{aprox } E^* = \text{fin } E^* = F^f$, então $\phi(y) = st \langle x, y \rangle$ define um funcional linear sobre F . Logo existe $p \in E$ tal que $\langle p, y \rangle = \langle \phi, y \rangle$, $\forall y \in F$. Portanto, $st \langle x, y \rangle = \langle p, y \rangle$, $\forall y \in F$. Logo,

$$|\langle p, y \rangle - \langle x, y \rangle| \sim 0, \forall y \in F.$$

Donde, $|\langle p-x, y \rangle| \sim 0$, $\forall y \in F$, i.é, $p-x \in F^i = \mu_{\sigma(E,F)}(0)$. Portanto, $x \in p + \mu(0)$, i.é, x é quase standard. Logo, $\text{aprox } E^* = \text{qst } E^*$ e isto quer dizer que E é completo.

c.q.d.

IV.4 - OS ELEMENTOS APROXIMÁVEIS NUM ESPAÇO LOCALMENTE CONVEXO

- UM TEOREMA DE GROTHENDIECK

Para generalizar os resultados do parágrafo IV - 3 para um espaço localmente convexo, precisaremos que o alargamento M^* satisfaça condições mais rigorosas de saturação. Diremos que M^* é um $\aleph_0$ -alargamento de M se, e somente se, para toda relação interna S de M^* , concorrente em A , onde A tem no máximo um número finito de elementos não standard, existe y em M^* tal que $S(a, y)$ para todo $a \in A$. Luxemburg em ([9] - T.1.7.1), mostra que o ultralimite de uma família enumerável de sucessivas ultrapotências que são alargamento definidas a partir de M , é um $\aleph_0$ -alargamento de M . Nos teoremas 2.7.10 e 2.7.3 [9] ele demonstra que $\aleph_0$ -alargamento satisfaz a seguinte condição:

"dado um filtro F em M e dado A um subconjunto interno de F^* se

$$E \in F^* \text{ e } E \in \text{nuc } F \Rightarrow E \in A,$$

então existe $F \in F$ tal que $F^* \in A$ ".

Novamente destacamos que estas exigências quanto ao alargamento M^* não devem ser entendidas como um demérito do método não-standard. Pelo contrário, a possibilidade de escolher alargamentos com boas propriedades viabiliza as demons-

trações sem impor restrições ao objeto demonstrado.

Lembremos que ε designa a família dos conjuntos θ -equicontínuos de E' , onde (E, θ) é loc. convexo e Hausdorff.

IV.4.1 TEOREMA - Seja M^* um $\aleph_0$ -alargamento. Se (E, θ) for localmente convexo e Hausdorff e $F = (E, \theta)'$ então

$$\text{aprox}_\theta E^* = \left\{ \bigcup_{A \in \varepsilon} A^* \cap \mu_{\sigma(F, E)}(0) \right\}^i = \left\{ \bigcup_{A \in \varepsilon} A^* \cap \mu_{\sigma(F, E)}(0) \right\}^0.$$

DEMONSTRAÇÃO - Designaremos por G o conjunto $U A^* \cap \mu(0)$. Como G é fechado em relação à multiplicação por elementos de $\mathbb{N}$ então $G^i = G^0$ (cf. IV.1.2). Vamos mostrar que $\text{aprox } E^* \subset G^0$. Sejam $x \in \text{aprox } E^*$ e $y \in G$. Então,

$$y \in G \Rightarrow y \in (V^0)^* = (V^*)^0 \text{ para algum } V \in \mathcal{V}(\theta)$$

e

$$x \in \text{aprox } E^* \Rightarrow \exists p \in E \text{ tal que } x - p \in \frac{1}{2} V^* \text{ (cf. III.3.7).}$$

Por outro lado, $|\langle x, y \rangle| \leq |\langle x - p, y \rangle| + |\langle p, y \rangle|$. Mas

$$y \in (V^*)^0 \text{ e } x - p \in \frac{1}{2} V^* \Rightarrow |\langle x - p, y \rangle| \leq \frac{1}{2}$$

e

$$y \in \mu_{\sigma(F, E)}(0) \text{ e } p \in E \Rightarrow |\langle p, y \rangle| < \frac{1}{2} \text{ (cf. IV.2.3).}$$

Logo, $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ e portanto $x \in G^0$.

Vamos mostrar agora que $G^i \subset \text{aprox } E^*$. Seja $x \in G^i$ e seja U uma θ -vizinhança da origem absolutamente convexa e fechada. Pretendemos mostrar que $x + 2U^* \cap E \neq \emptyset$ para, usando o lema III.3.7, concluir $x \in \text{aprox } E^*$.

Definamos um conjunto Λ da seguinte forma:

$$\Lambda = \{V \in V^*(\sigma(F,E)) : |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ para todo } y \in (U^*)^0 \cap V\}$$

Como Λ é interno e

$$V \in V^*(\sigma(F,E)) \text{ e } V \subset \text{nuc}(V) = \mu_{\sigma(F,E)}(0) \Rightarrow V \in \Lambda,$$

então existe $Z \in V^*(\sigma(F,E))$ tal que $Z^* \in \Lambda$ (pois M^* é um $\aleph_0$ alargamento). Podemos supor $Z \in S^0$ para algum $S = \{x_1, \dots, x_n\}, x_i \in E$. Portanto, $x \in [(U^0 \cap S^0)^*]^0 = [(U^0 \cap S^0)^0]^*$.

Agora, $U^{00} = U$ é $\sigma(E,F)$ fechado e S^{00} é a envoltória absolutamente convexa fechada do conjunto finito S . portanto S^{00} é $\sigma(E,F)$ -compacto e também $U + S^{00}$ é fechado e absolutamente convexo.

Temos ainda: $(U^0 \cap S^0)^0$ é o $\sigma(E,F)$ -fecho absolutamente convexo de $U \cup S^{00}$ (pois $(U \cup S^{00})^{00} = (U^0 \cap S^0)^0$ e $U + S^{00} \subset U + S^{00}$). Portanto $(U^0 \cap S^0)^0 \subset U + S^{00}$.

Logo,

$$x \in (U + S^{00})^* = U^* + (S^*)^{00} = U^* + S^{00}, \text{ i. é, } x = u + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

com $u \in U^*, 0 \leq \lambda_i, i=1, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Seja $\delta_i = st(\lambda_i), i=1, \dots, n$. Então $(\lambda_i - \delta_i)x_i \in \mu_\theta(0) \subset U^*, i=1, \dots, n$ (IV.2.2). Como

$$x = u + \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \delta_i)x_i + \sum_{i=1}^n \delta_i x_i$$

então

$$\sum_{i=1}^n \delta_i x_i \in x + 2U^*.$$

Logo, $x + 2U^n E \neq \emptyset$. Portanto, $x \in \text{aprox } E^*$. Onde $G_i \subset \text{aprox } E^*$.

c.q.d.

IV.4.2 TEOREMA - Seja (E, θ) um espaço localmente convexo e Hausdorff e seja $F \cong (E, \theta)'$.

(i) Suponhamos que M^* seja um $\aleph_0$ -alargamento. Se $g \in F^*$ for $\sigma(F, E)$ -contínuo em cada subconjunto de F que seja θ -equicontínuo, então existe $x \in \text{aprox}_\theta E^*$ tal que

$$\langle x, y \rangle = \langle g, y \rangle \text{ para todo } y \in F.$$

(ii) se $x \in \text{aprox}_\theta E^*$ então x define um elemento $g \in F^{\#\#}$ dado por

$$\langle g, y \rangle = \text{st} \langle x, y \rangle \text{ para todo } y \in F.$$

e g é $\sigma(F, E)$ contínuo em cada subconjunto de F que seja θ -equicontínuo.

DEMONSTRAÇÃO - Lembremos que:

(a) $A \text{ é } \theta\text{-equicontínuo} \iff A \subset V^0$ para algum $V \in \mathcal{V}(\theta)$.

(b) $g \in F^{\#\#}$ é $\sigma(F, E)$ contínuo em $V^0 \iff$ existe um subconjunto finito $S(V)$ de E tal que $y \in V^0 \cap S(V)^0$ implica

$$|\langle g, y \rangle| \leq 1.$$

(i) Para cada $V \in \mathcal{V}(\theta)$ e cada $y \in F$ seja

$$A(V, y) = \{p \in E: p \in (V^0 \cap S(V)^0)^0 \text{ e } \langle p, y \rangle = \langle g, y \rangle\}$$

Afirmamos que a coleção $A(V, y)$ tem a p. i. f. De fato, dados $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}(\theta)$ e $y_1, \dots, y_n \in F$, consideremos H_0 o sub-espaço de F gerado por $\{y_1, \dots, y_n\}$ e H_i o sub-espaço de F gerado

por V_i^0 . Como g é $\sigma(F,E)$ -contínuo nos conjuntos θ -equicontínuos, então g é $\sigma(F,E)$ -contínuo em H_i , $i=1,\dots,n$. De acordo com o Teorema de Hahn-Banach a restrição de g a H pode ser estendida a um elemento $p \in (F, \sigma(F,E))' = E$. Portanto,

$$\langle p, y_i \rangle = \langle g, y_i \rangle, \quad i=1,\dots,n \quad \text{e} \quad p \in (V_i^0 \cap S(V_i)^0)^0,$$

$$i=1,\dots,n. \text{ Logo, } p \in \bigcap_{i=1}^n A(V_i, y_i).$$

Como M^* é um alargamento, então o núcleo do filtro F gerado pelos $A(V, y)$ é não vazio, i.é., existe $x \in E^*$ tal que

$$\begin{aligned} x \in \text{nuc } F &= \bigcap_{V, y} A^*(V, y) = \\ &= \{x \in E^*: x \in \bigcap_V [V^0 \cap S(V)^0]^0 \text{ e } \langle g, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in F\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x \in \left[\bigcup_{V \in V(\theta)} (V^0)^* \cap \bigcup_{V \in V(\theta)} (S(V)^0)^* \right]^0 = \left[\bigcup_V (V^0)^* \cap \mu_{\sigma(F,E)}(0) \right]^0$$

e

$$\langle g, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in F.$$

Usando o Teorema IV.4.1 concluímos que

$$x \in \text{aprox}_\theta E^* \quad \text{e} \quad \langle g, y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in F.$$

(ii) Seja $x \in \text{aprox}_\theta E^*$. Como $\text{aprox}_\theta E^* \subset \text{fin}_\theta E^* \subset \text{fin}_{\sigma(F,E)} E^* = F^f$, (cf. IV.2.2 e IV.2.3) então $\langle x, y \rangle \in K_f^*$, $\forall y \in F$. Portanto, a fórmula $\langle g, y \rangle = \text{st} \langle x, y \rangle$ define um elemento $g \in F^\#$. Seja $V \in V(\theta)$. Como

$x \in \text{aprox}_\theta E^*$ então existe $p \in E$ tal que $x \in p + \frac{1}{2}V^*$. Portanto

$$y \in V^0 \cap \{2p\}^0 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \langle \frac{1}{2}v, y \rangle + \langle p, y \rangle \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(onde $x = \frac{1}{2}v + p, v \in V^*$). Portanto, $|\langle g, y \rangle| \leq 1$ para todo $y \in V^0 \cap \{2p\}^0$.

Logo, g é $\sigma(F, E)$ -contínuo em V^0 para todo $V \in \mathcal{V}(\theta)$, concluindo a demonstração.

c.q.d.

IV.4.3 TOEREMA - Suponhamos que M^* seja um $\aleph_0$ -alargamento. Seja (E, θ) localmente convexo e Hausdorff e seja $F = (E, \theta)'$. Então

$$qstd_\theta E^* = \text{aprox}_\theta E^* \cap qstd_{\sigma(E, F)} E^*.$$

DEMONSTRAÇÃO - É claro que $qstd_\theta \subset \text{aprox}_\theta \cap qstd_{\sigma(E, F)}$. Seja

$$x \in \text{aprox}_\theta E^* \cap qstd_{\sigma(E, F)} E^*.$$

Temos:

$$x \in qstd_{\sigma(E, F)} \Rightarrow \text{existe } p \in E \text{ tal que } p - x \in \mu_{\sigma(E, F)}(0).$$

Vamos mostrar que $x - p \in \mu_\theta(0)$. Suponhamos que $x - p \notin \mu_\theta(0)$. Ora,

$\mu_\theta(0) = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{E}} A^* \right)^i$. Logo existe $y \in \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A^*$ tal que $\langle x - p, y \rangle \notin K_1^*$. Por outro lado $y \in \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A^*$ implica $y \in qstd_{\sigma(F, E)} F^*$. Logo existe $q \in F$ tal que $y - q \in \mu_{\sigma(F, E)}(0)$. Portanto, $y - q \in \bigcup_{A \in \mathcal{E}} A^* \cap \mu_{\sigma(F, E)}(0)$ e $x \in \text{aprox}_\theta E^*$.

De acordo com o Teorema IV.5.4 concluímos que $\langle x, y - q \rangle \in K_1^*$.

Juntando os fatos temos:

$$x-p \in \mu_{\sigma(E,F)}(0), y-q \in \mu_{\sigma(F,E)}(0) \text{ e } \langle x, y-q \rangle \in K_1^*.$$

Por outro lado,

$$\langle x-p, y \rangle = \langle x-p, q \rangle + \langle x, y-q \rangle - \langle p, y-q \rangle.$$

Como as três parcelas do 2º membro estão em K_1^* então $\langle x-p, y \rangle \in K_1^*$ o que é uma contradição. Logo $x-p \in \mu_{\theta}(0)$ e portanto, $x \in \text{qstd}_{\theta} E^*$.

$$\text{Logo, } \text{aprox}_{\theta} \cap \text{qstd}_{\sigma(E,F)} = \text{qstd}_{\theta}.$$

c.q.d.

IV.4.4 COROLÁRIO (Grothendieck) - Seja (E, θ) localmente convexo e Hausdorff e seja $F = (E, \theta)'$. Então (E, θ) é completo $\iff \iff \forall g \in F^{\#}$, se g for $\sigma(F, E)$ -contínuo em todo subconjunto de F que seja θ -equicontínuo, então $g \in E$. ($F^{\#}$: dual algébrico de F).

DEMONSTRAÇÃO - Lembremos que (E, θ) é completo $\iff \text{aprox}_{\theta} = \text{qstd}_{\theta}$.

Suponhamos M^* um $\aleph_0$ -alargamento de M .

($\Rightarrow$) Seja (E, θ) completo e consideremos $g \in F^{\#}$ fracamente contínuo nos θ -equicontínuos de F . Então existe $x \in \text{aprox}_{\theta} E^* = \text{qstd}_{\theta} E^*$ tal que $\langle g, y \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall y \in F$. (IV-4.2.(i)). Mas, para algum $p \in F$, $x-p \in \mu_{\theta}(0) \subset \mu_{\sigma(E,F)}(0) = F^i$. Portanto, $|\langle x, y \rangle - \langle p, y \rangle| \in R_1^*, \forall y \in F$. Logo, $|\langle g, y \rangle - \langle p, y \rangle| \in R_1^*, \forall y \in F$. Como $\langle g, y \rangle$ e $\langle p, y \rangle$ são standard para todo $y \in F$, então $\langle g, y \rangle = \langle p, y \rangle$, $\forall y \in F$, i.é, $g \in E$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que todo $g \in F^{\#}$ que seja fracamente contínuo nos θ -equicontínuos esteja em E . Seja $x \in \text{aprox}_{\theta} E^*$. De acordo com IV.4.2, (ii) o elemento $p \in F^{\#}$ definido por $\langle p, y \rangle = \text{st} \langle x, y \rangle$, $y \in F$, é $\sigma(F, E)$ -contínuo em cada subconjunto θ -equicontínuo de

F. Portanto $p \in E$ e $\langle x-p, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle p, y \rangle \in K_i^*$ para todo $y \in F$. Portanto, $x-p \in \mu_{\sigma(E,F)}(0)$. Logo, $x \in \text{aprox}_{\theta} E^* \cap \text{qstd}_{\sigma(E,F)}(E^*)$. De acordo com IV.4.3, isto implica que $x \in \text{qstd}_{\theta} E^*$. Portanto,

$$\text{aprox}_{\theta} E^* = \text{qstd}_{\theta} E^*,$$

isto é, (E, θ) é completo.

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BOURKAKI, N., *Topologie Générale*, Ch. II, *Structures Uniformes*, Hermann & Cia., (1940).
- [2] - BOURKAKI, N., *Topologie Générale*, Ch. IX, *Utilization des Nombres reels en Topologie Générale*, Hermann & Cia., (1948).
- [3] - BRINCKMANN, B., *Análise Não Standard*, Notas do curso ministrado no Instituto de Matemática e Estatística, USP, em 1978.
- [4] - CHADWICK, J.J.M. & CROSS, R.W., A characterization of pre-near standardness in locally convex linear topological spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, pp. 107-115, (1972).
- [5] - CHANG, C.C. & KEISLER, H.J., *Model Theory*, North Holland, (1973).
- [6] - HENSON, C.W. & MOORE, L.C. Jr., The Nonstandard Theory of Topological Vector Spaces, *Trans. of the American Mathematical Society*, vol. 172, pp. 405-435, (1972).
- [7] - KELLEY JOHN, *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., (1955).
- [8] - LIGHSTONE A.H. & ROBINSON, A., *Nonarchimedean Fields and Asymptotic Expansions*, North Holland, (1975).
- [9] - LUXEMBURG, W.A., A General Theory of Monads, In *Applications of Model Theory of Algebra, Analysis and Probability*, Holt Reinehart & Winston, pp. 18-86, (1969).
- [10] - MACHOVER, M. & HIRSCHFELD J., *Lectures on Nonstandard Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, n° 94, Springer Verlag, (1966).
- [11] - ROBERTSON, A.P. & ROBERTSON, W., *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press, 1966.

- [12] - ROBINSON, A., *Non Standard Analysis*, North Holland, (1974).
- [13] - ROBINSON, A. & ZAKON, E., A set theoretical characterization of enlargements, In W.A.J. Luxemburg, *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Reinehart and Winston, pp. 109-122, (1969).
- [14] - THRON, W.J., *Topological Structures*, Holt, Reinehart and Winston, (1966).

(B)