INTEGRAL DE RIEMANN VETORIAL E
GEOMETRIA DE ESPACOS DE BANACH

GALDINO CESAR DA ROCHA FILHO

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Chaim Samuel Hönl

- SÃO PAULO, OUTUBRO DE 1979 -

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor Chaim Samuel Hönig, minha gratidão. Em seus trabalhos se inspira esta tese. Sua enorme cultura matemática e invejável biblioteca foram imprescindíveis na elaboração das páginas que se seguem.

Ao Professor Doutor Antônio Gilioli, agradeço as inúmeras sugestões que me fez ao ler a primeira redação do manuscrito deste trabalho.

Os meus agradecimentos especiais ao Professor Doutor Léo Roberto Borges Vieira pela paciência com que me ouviu e pelas suas sugestões.

Aos colegas Amadeu Peter Hiller, Carmen Sílvia Cardassi, Dra. Elza Furtado Gomide, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz e Zara Issa Abud, por me obrigarem a terminar este trabalho.

À minha esposa, pela colaboração direta e indireta, meu muito obrigado.

Finalmente, ao sr. João Baptista Esteves de Oliveira, pelo excelente trabalho de datilografia, minha gratidão.

Í N D I C E

ABSTRACT	vii
INTRODUÇÃO	1
CAP. 1 - NOÇÕES SOBRE A INTEGRAL DE RIEMANN EM ESPAÇOS DE BANACH	5
1.a - Noções Sobre Integrabilidade Segundo Darboux e Integrabilidade Segundo Riemann	5
1.b - Funções de Intervalo e Aplicações	15
1.c - Noções Sobre Funções Regradas	27
1.d - Noções Sobre Funções de Variação Forte Limitada. Variação Fraca Limitada e Semivariação Limitada	28
1.e - Problemas e Exemplo	36
1.f - Teorema de Dvoretzky-Rogers	38
1.g - Problema Um	40
CAP. 2 - NOÇÕES SOBRE GEOMETRIA DE ESPAÇOS DE BANACH	45
2.a - Espaços de Banach que contêm Subespaço Isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$. Espaços Reflexivos e Espaços Fracamente sequencialmente Completos	45
2.b - Classes de Espaços de Banach.	65
CAP. 3 - PROBLEMAS	72
3.a - Problemas Dois, Cinco e Aplicações.	72
3.b - Problema Três	88
3.c - Aplicações dos Resultados	117
BIBLIOGRAFIA	123

ABSTRACT

X and Y denote Banach spaces. We give partial answers to the following questions:

1. Characterize the Banach spaces Y for which the elements of $SV([a,b],L(X,Y))$ and $R([a,b],Y)$ are strongly measurable.

2. Characterize the Banach spaces Y for which $D([a,b],Y) = R([a,b],Y)$.

Our main results are:

1) If, $X \neq \{0\}$, $SV([a,b],L(X,Y)) \subseteq G([a,b],L(X,Y))$ if and only if Y has no subspace isomorphic to $C_0(\mathbb{N})$ (Theorem 3.a.2).

2) There are infinite dimensional Banach spaces (even reflexive ones) such that $D([a,b],Y) = R([a,b],Y)$ (theorems 3.b.12, 3.b.13, 3.b.14 and 3.b.20).

We also solve other related questions such as:

3) $SV([a,b],L(X,Y)) \subseteq G([a,b],L(X,Y))$ does not imply that Y is weakly sequentially complete.

4) Let $f \in SV([a,b],L(X,Y))$ and $t_0 \in [a,b[$. The existence of

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} f(t) = f(t_0^+)$$

does not imply that

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} SV_{]t_0, t_0 + \varepsilon]}[f] = 0.$$

5) Classification, regarding problem 2 above, of important categories of Banach spaces such as uniformly convex, spaces $L_p(u)$, $C(K)$ (K a compact Hausdorff space), etc.

6) We characterize the Banach spaces Y which are duals and for which every element of $BW([a, b], Y)$ is strongly measurable.

7) There are compact Hausdorff spaces K such that $C(K)$ is not separable and every element of $BW([a, b], C(K))$ is strongly measurable.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é resolver questões que supomos em aberto na teoria de integração, segundo Riemann, de funções definidas num intervalo $[a,b]$ a valores num espaço de Banach.

No capítulo 1 estudamos as noções básicas de integração de que necessitamos e propomos os problemas a serem resolvidos em 1. e .1. Tais problemas são:

[P-1] - Caracterizar os espaços de Banach X para os quais $BV([a,b],X) \neq BW([a,b],X)$.

[P-2] - Dar uma condição necessária e suficiente sobre um espaço de Banach X para que $BW([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.

[P-3] - Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita, podemos afirmar que $D([a,b],X) \neq R([a,b],X)$? (Este problema está proposto em [H-2] como problema 1.1).

[P-4] - Seja X um espaço de Banach. Dar uma condição necessária e suficiente sobre X para que $f: [a,b] \longrightarrow X$ seja Riemann integrável.

[P-5] - Caracterizar os espaços de Banach Y para os quais $SV([a,b],L(X,Y)) \subset G([a,b],L(X,Y))$. (Este problema é uma generalização do problema [P-2]).

[P-6] - Se $SV([a,b],L(X,Y)) \subset G([a,b],L(X,Y))$ temos necessariamente Y francamente sequencialmente completo? (Veja [H-5], página 13, problema 5).

[P-7] - Seja $f \in SV([a,b],L(X,Y))$ e $t_0 \in [a,b[$ tal que existe $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0^+)$. Podemos concluir que $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{[t_0, t_0 + \epsilon]}[f] = 0$? (Veja [H-2], página 185, problema 7.4).

[P-8] - Dar um exemplo de $f \in CSV([a,b],L(X))$ e $d \in D$ tal que $SV_d[f] - \|f(t_1) - f(a)\| > SV[f] - SV_{[a,t_1]}[f]$. (Veja [H-2], página 186, problema 7.5).

Ainda neste capítulo 1 resolvemos o problema [P-1].

No capítulo 2 apresentamos um resumo dos elementos de geometria dos espaços de Banach, necessários para as soluções dos problemas propostos no capítulo 1.

No capítulo 3 resolvemos, em 3.a, os problemas [P-2], [P-5], [P-6], [P-7] e [P-8]. Corrigimos duas afirmações incorretas na obra de nosso orientador:

[E-1] - Se $f \in BW([a,b],X)$ e existe $f(t_0^+)$, $t_0 \in [a,b[$ então $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} BW_{[t_0, t_0 + \epsilon]}[f] = 0$. (Veja [H-2], página 185, duas linhas finais).

[E-2] - Teorema 4.1 de [H-1], página 48.

Para terminar o parágrafo 3.a, propomos dois pro-

blemas sobre mensurabilidade de funções de $BW([a,b],X)$ e enunciamos os resultados obtidos. Tais resultados são surpreendentes pois, em certas classes de espaços de Banach, mostram "porque" existem funções de $BW([a,b],X)$ (portanto, integráveis Riemann) que são não mensuráveis.

No item 3.b resolvemos o problema [P-3], mostrando a existência de espaços de Banach de dimensão infinita (e mesmo reflexivos) tais que $D([a,b],X) = R([a,b],X)$. Classificamos ainda categorias importantes de espaços de Banach quanto ao problema [P-3], tais como: Espaços uniformemente convexos, $C(K)$ (K compacto, Hausdorff), $[C(K,\mathbb{R})]'$, $L_p(u)$, etc.

Para terminar, em 3.c damos aplicações dos resultados obtidos em 3.b, resolvendo problemas propostos em seminários por nosso orientador.

Gostaríamos de comentar que o problema [P-4] continua em aberto, bem como seu caso particular: "Caracterizar os espaços de Banach X para os quais temos $D([a,b],X) = R([a,b],X)$ ". Esta última questão lembra a situação do problema de Radon-Nikodym (veja [C]), que se revelou ligado à geometria dos espaços de Banach e que deu lugar a uma literatura abundante e a uma fértil área de pesquisa, como se pode ver pelo livro de Diestel, J. & Uhl Jr., J.J., *Vector Measures*, Providence, AMS, 1977, 322 p. (Mathematical Surveys, 15).

Questões que supomos ainda com maior grau de dificuldade são as propostas em [Q-1] e [Q-2], em 3.a, que, resumidamente, são: "Porque em um espaço de Banach X existem

funções pertencentes aos espaços $BW([a,b],X)$ e $R([a,b],X)$
(portanto, integráveis Riemann) não mensuráveis?".

CAPÍTULO 1

NOÇÕES SOBRE A INTEGRAL DE RIEMANN EM ESPAÇOS DE BANACH

1.a - NOÇÕES SOBRE INTEGRABILIDADE SEGUNDO DARBOUX

E INTEGRABILIDADE SEGUNDO RIEMANN

DEFINIÇÃO 1.a.1 - Dado o intervalo $[a, b]$, subconjunto de $\mathbb{R}$, denotaremos por d uma *divisão* deste intervalo, isto é, $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$. Denotaremos $\Delta d = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}$ e $|d| = n$. $\mathcal{D}$ indica o conjunto de todas as divisões de $[a, b]$. Se d_1 e d_2 são elementos de $\mathcal{D}$, escreveremos $d_1 \geq d_2$ para indicar que $d_2 \subseteq d_1$.

DEFINIÇÃO 1.a.2 - Indicamos por Δ o conjunto de todas as sequências finitas $\delta = \{s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_n, t_n\}$ com $a \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b$.

NOTAÇÕES 1.a.3 - Seja X um espaço de Banach. Utilizaremos as seguintes notações:

$C([a, b], X)$ - Conjunto das funções $f: [a, b] \rightarrow X$ contínuas.

$B([a, b], X)$ - Conjunto das funções $f: [a, b] \rightarrow X$ limitadas.

$L(X, Y)$ - Conjunto das aplicações lineares contínuas de X em

Y. (Y espaço de Banach).

$\omega_i(f)$ - Oscilação da função f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, cujos extremos pertencem a uma divisão d de $[a, b]$.

Dados X e Z , espaços de Banach, $C^b(X, Z)$ indica o conjunto das funções $f: X \rightarrow Z$ contínuas e que levam conjuntos limitados de X em conjuntos limitados de Z .

$E([a, b], X)$ - Conjunto das funções $f: [a, b] \rightarrow X$ em escada, isto é, existe $d \in \mathcal{D}$ e $c_1, c_2, \dots, c_{|d|} \in X$, tais que $f(x) = c_i$ para $x \in]t_{i-1}, t_i[$.

DEFINIÇÃO 1.a.4 - Seja X um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow X$.

Diremos que f é integrável segundo Riemann, e escrevemos

$$f \in R([a, b], X), \text{ se existe } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}]$$

com $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

PROPOSIÇÃO 1.a.5 (Critério de Cauchy) - Dado X um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow X$, são equivalentes:

1) Existe $\int_a^b f(x) dx$.

2) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se d_1 e d_2 são divisões de $[a, b]$ com $\Delta d_1 \leq \delta$ e $\Delta d_2 \leq \delta$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d_2|} f(\epsilon'_i) [t'_i - t'_{i-1}] \right\| \leq \epsilon,$$

para toda escolha de $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\epsilon'_i \in [t'_{i-1}, t'_i]$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2). Imediata.

2) $\implies$ 1). Basta lembrar que o espaço X é completo. CQD

COROLÁRIO 1.a.6 (Critério de Cauchy modificado). Dado X espaço de Banach e $f: [a, b] \longrightarrow X$, são equivalentes:

- 1) $f \in R([a, b], X)$.
- 2) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $\bar{d}, d \in \mathcal{D}$, $\bar{d} \geq d$ e $\Delta d \leq \delta$, temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\bar{d}|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon'_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| \leq \epsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2). É consequência da proposição 1.a.5: lembrando que $\bar{d} \geq d \implies \Delta \bar{d} \leq \Delta d \leq \delta$, vem que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\bar{d}|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon'_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| \leq \epsilon.$$

2) $\implies$ 1). Dado $\epsilon > 0$, seja $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Consideremos $\delta > 0$ dado por 2) e divisões d_1 e d_2 tais que $\Delta d_1 \leq \delta$ e $\Delta d_2 \leq \delta$. Se $d = d_1 \cup d_2$, virá:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d_2|} f(\epsilon''_i) [t''_i - t''_{i-1}] \right\| \leq \\ & \leq \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon'_i) [t'_i - t'_{i-1}] \right\| + \\ & + \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon'_i) [t'_i - t'_{i-1}] - \sum_{i=1}^{|d_2|} f(\epsilon''_i) [t''_i - t''_{i-1}] \right\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Pela proposição 1.a.5, 2) $\implies$ 1) e existe $\int_a^b f(x) dx$. CQD.

PROPOSIÇÃO 1.a.7 - Sejam X e Y espaços de Banach. Então:

- 1) $R([a, b], X) \subset B([a, b], X)$.

2) Se $f \in R([a, b], X)$ e $u \in L(X, Y)$, temos:

$$u \circ f \in R([a, b], Y) \quad \text{e} \quad \int_a^b (u \circ f)(x) dx = u \left[\int_a^b f(x) dx \right].$$

3) Se $J: X \rightarrow Y$ é um isomorfismo linear, são equivalentes: a) $f \in R([a, b], X)$; b) $J \circ f \in R([a, b], Y)$.

4) $R([a, b], X)$ só depende da topologia de X .

5) Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ são espaços de Banach, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ e $P_i: X \rightarrow X_i$, $1 \leq i \leq n$ é tal que, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ então $P_i(x) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, são equivalentes a) e b) abaixo:

a) $f \in R([a, b], X)$, b) $f_i = P_i \circ f \in R([a, b], X_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Temos ainda

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \int_a^b f_i(x) dx \right\}_{i=1}^n.$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) Se $f \notin R([a, b], X)$, encontramos $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ tal que $\|f(x_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Seja $x_0 \in [a, b]$ ponto de acumulação de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Dado $\delta > 0$, tomemos uma divisão $d \in \mathcal{D}$ com $\Delta d \leq \delta$, tal que $x_0 \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ e $\{x_n\}_{n=1}^\infty \cap [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ é um conjunto infinito.

Vale que

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \int_a^b f(x) dx \right\| = \\ & = \left\| f(\epsilon_{i_0}) [t_{i_0} - t_{i_0-1}] - \left[\int_a^b f(x) dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] \right] \right\|. \end{aligned}$$

Se $\epsilon = 1$, fixando $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para todo $i \neq i_0$, vem:

$$\|f(\epsilon_{i_0})[t_{i_0} - t_{i_0-1}]\| \leq \left\| \int_a^b f(x) dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{|d|} f(\epsilon_i)[t_i - t_{i-1}] \right\| + 1 = M + 1.$$

Se fizermos ϵ_{i_0} tender a x_0 por pontos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ virá $M = \infty$: absurdo.

2) Se $u = 0$, a afirmação é evidente. Se $u \neq 0$, dado $\frac{\epsilon}{\|u\|} > 0$ tomemos $\delta > 0$ tal que, se

$$\Delta d \leq \delta, \quad \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i)[t_i - t_{i-1}] - \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \frac{\epsilon}{\|u\|}.$$

Então, se

$$\begin{aligned} \Delta d \leq \delta, \quad & \left\| \sum_{i=1}^{|d|} (u \circ f)(\epsilon_i)[t_i - t_{i-1}] - u\left(\int_a^b f(x) dx\right) \right\| \leq \\ & \leq \|u\| \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i)[t_i - t_{i-1}] - \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \epsilon; \end{aligned}$$

logo,

$$u \circ f \in R([a, b], Y) \quad \text{e} \quad \int_a^b (u \circ f)(x) dx = u\left(\int_a^b f(x) dx\right).$$

3) Consequência imediata de 2).

4) Consequência imediata de 3).

5) a) $\implies$ b). Decorrencia imediata de 2), pois P_i , $1 \leq i \leq n$, são funções lineares e contínuas.

b) $\implies$ a). Tomemos em $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\delta > 0$ tal que, se $d \in \mathcal{D}$ e $\Delta d \leq \delta$,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{i=1}^n f_i(\varepsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \int_a^b f_i(x) dx \right\| \leq \varepsilon.$$

Então,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \left\{ \int_a^b f_i(x) dx \right\}_{i=1}^n \right\| = \\ & = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \sum_{i=1}^n f_i(\varepsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - \int_a^b f_i(x) dx \right\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que demonstra que

$$f \in R([a, b], X) \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x) dx = \left\{ \int_a^b f_i(x) dx \right\}_{i=1}^n. \quad \text{CQD}$$

DEFINIÇÃO 1.a.8 - Seja X um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow X$.

Diremos que f é *integrável segundo Darboux*, e escrevemos

$$f \in D([a, b], X), \text{ se } \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] = 0.$$

PROPOSIÇÃO 1.a.9 - Dados X e Y espaços de Banach, temos:

- 1) $D([a, b], X) \subset R([a, b], X) \subset B([a, b], X)$. (Então passa a ter sentido $\int_a^b f(x) dx$, para toda $f \in D([a, b], X)$).
- 2) Se $f \in D([a, b], X)$ e $u \in L(X, Y)$ então $u \circ f \in D([a, b], Y)$.
- 3) Se $J: X \rightarrow Y$ é um isomorfismo linear, são equivalentes a) e b) abaixo:

$$\text{a) } f \in D([a, b], X); \quad \text{b) } J \circ f \in D([a, b], Y).$$

4) $D([a,b],X)$ sō depende da topologia de X .

5) Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ sō espāos de Banach, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ e $P_i: X \rightarrow X_i$, $1 \leq i \leq n$, ē tal que, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_i(x) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, sō equivalentes a) e b) abaixo:

a) $f \in D([a,b],X)$; b) $f_i = P_i \circ f \in D([a,b],X_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Temos ainda

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \int_a^b f_i(x) dx \right\}_{i=1}^n.$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) Vamos usar a proposiçāo 1.a.6 nesta demonstraçāo.

Se $f \in D([a,b])$, dado $\epsilon > 0$, consideremos $\delta > 0$ tal que se $\Delta d \leq \delta$ entāo

$$\left| \sum_{i=1}^d \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] \right| \leq \epsilon.$$

Consideremos $\bar{d} \geq d$ e teremos, efetuando um cāculo simples:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\bar{d}} f(\epsilon_i) [t'_i - t'_{i-1}] - \sum_{i=1}^d f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] \right\| \leq \sum_{i=1}^d \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] \leq \epsilon.$$

Pela proposiçāo 1.a.6, $f \in R([a,b],X)$. Portanto, $D([a,b],X) \subset R([a,b],X)$.

A segunda inclusāo foi demonstrada na proposiçāo 1.a.7, item 1.

2) Se $u = 0$ o teorema ē imediato. Se $u \neq 0$, observemos que

$$\omega_i[u \circ f] = \sup_{\epsilon_i, \epsilon'_i \in [t_{i-1}, t_i]} \|(u \circ f)(\epsilon_i) - (u \circ f)(\epsilon'_i)\| \leq \|u\| \omega_i[f].$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, se $d \in \mathcal{D}$, com $\Delta d \leq \delta$, virá

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[f][t_i - t_{i-1}] \leq \frac{\epsilon}{\|u\|}.$$

Então, se $\Delta d \leq \delta$ temos:

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[u \circ f][t_i - t_{i-1}] \leq \|u\| \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[f][t_i - t_{i-1}] \leq \epsilon_i.$$

logo $u \circ f \in D([a, b], Y)$.

3) Decorrencia imediata de 2).

4) Decorrencia imediata de 3).

5) a) $\implies$ b). Decorrencia imediata de 2).

b) $\implies$ a). Consideremos em $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$. Então,

um cálculo simples mostra que $\omega_i[f] = \sup_{1 \leq j \leq n} \omega_i[f_j]$. Portanto,

se tomarmos $\frac{\epsilon}{n} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $d \in \mathcal{D}$, com

$$\Delta d \leq \delta, \quad \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[f_i][t_i - t_{i-1}] \leq \frac{\epsilon}{n}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

e virá que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[f][t_i - t_{i-1}] &= \sum_{i=1}^{|d|} \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \omega_i[f_j] \right) [t_i - t_{i-1}] \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i[f_j][t_i - t_{i-1}] \right) \leq n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon; \end{aligned}$$

logo, $f \in D([a, b], X)$. A última parte é decorrencia imediata de

1.a.7, item 5.

CQD

PROPOSIÇÃO 1.a.10 - Seja X um espaço de Banach. Temos:

1) $C([a,b],X) \subset D([a,b],X)$.

2) Se $f \in D([a,b],X)$ e $g \in C^b(X,Z)$ então $g \circ f \in D([a,b],Z)$.

3) Se $f \in D([a,b],X)$ então $\|f\| \in D([a,b],\mathbb{R})$.

4) Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $B: X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear contínua, $f \in D([a,b],X)$ e $g \in D([a,b],Y)$. Escrevemos $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t) = B(f(t), g(t))$. Então

$$f \cdot g \in D([a,b],Z).$$

5) Se A é uma álgebra de Banach então $D([a,b],A)$ é uma álgebra de Banach.

6) Se $f_n \in D([a,b],X)$ e f_n converge uniformemente para f , então

$$f \in D([a,b],X) \quad \text{e} \quad \int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

7) Se $f \in D([a,b],X)$ e $F: [a,b] \rightarrow X$ é dada por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

então F é derivável quase sempre.

8) São equivalentes as afirmações a) e b) abaixo:

a) $f \in D([a,b],X)$.

b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $f_\epsilon \in E([a,b],X)$ tal que

$$\int_a^b \|f(t) - f_\epsilon(t)\| dt \leq \epsilon;$$

DEMONSTRAÇÃO - A demonstração do item 8 encontra-se em [H-1], página 62, B-9. As demonstrações restantes serão feitas no corolário 1.b.14.

PROPOSIÇÃO 1.a.11 - 1) $D([a,b],\mathbb{K}) = R([a,b],\mathbb{K})$, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita então $D([a,b],X) = R([a,b],X)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Faremos a demonstração para o caso real, já que o caso complexo é consequência imediata do caso real. Se $f \in R([a,b],\mathbb{R})$, vale a proposição 1.a.5 (Cauchy): dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $d \in \mathcal{D}$, se $\Delta d < \delta$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i)](t_i - t_{i-1}) \right| \leq \epsilon,$$

para quaisquer $\epsilon_i, \epsilon'_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Em particular, escolhendo ϵ_i, ϵ'_i tais que $f(\epsilon_i) \geq f(\epsilon'_i)$, para todo i , obtemos

$$\sum_{i=1}^{|d|} |f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq \epsilon,$$

e vem que

$$\sum_{i=1}^{|d|} \sup_{\epsilon_i, \epsilon'_i} |f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f) (t_i - t_{i-1}) \leq \epsilon.$$

Logo, $f \in D([a,b], \mathbb{R})$, e $R([a,b], \mathbb{R}) \subset D([a,b], \mathbb{R})$.

Da proposição 1.a.9, item 1, concluímos:

$$D([a,b], \mathbb{R}) = R([a,b], \mathbb{R}).$$

Para o caso complexo, é imediato que, se $f = f_1 + if_2$,
 $f \in D([a,b], \mathbb{C}) \iff f_i \in D([a,b], \mathbb{R}), i=1,2 \iff f_i \in R([a,b], \mathbb{R}), i=1,2 \iff$
 $\iff f = f_1 + if_2 \in R([a,b], \mathbb{C}).$

2) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita então X é isomorfo a $\mathbb{K}^n$: seja $J: X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ este isomorfismo. Nestas condições,

$$\begin{aligned} f \in R([a,b], X) &\xleftrightarrow{1.a.7.3} J \circ f \in R([a,b], \mathbb{K}^n) \xleftrightarrow{1.a.7.5} \\ &\xleftrightarrow{1.a.7.5} P_i \circ J \circ f \in R([a,b], \mathbb{K}) \xleftrightarrow{1.a.11.1} D([a,b], \mathbb{K}) \xleftrightarrow{1.a.9.5} \\ &\xleftrightarrow{1.a.9.5} J \circ f \in D([a,b], \mathbb{K}^n) \xleftrightarrow{1.a.9.3} f \in D([a,b], X). \quad \text{CQD} \end{aligned}$$

1.b - FUNÇÕES DE INTERVALO E APLICAÇÕES

No que segue, faremos um breve resumo sobre funções de intervalo, de onde tiraremos consequências que nos serão úteis. Inspiramo-nos no livro texto: [H].

NOTAÇÃO 1.b.1 - Seja X um espaço de Banach e $f: [a,b] \longrightarrow X$. Utilizaremos as seguintes notações:

$\omega(A, f)$ - Oscilação da função f no conjunto A , não vazio e não unitário, contido em $[a,b]$.

$\omega(\{t\}, f) = \inf_{\delta > 0} \{ \omega([t-\delta, t+\delta[, f) \}$ se $t \in]a, b[$,

$$\omega(\{a\}, f) = \inf_{\delta > 0} \{\omega([a, a+\delta[, f)\}; \quad \omega(\{b\}, f) = \inf_{\delta > 0} \{\omega(]b-\delta, b], f)\}.$$

$D(f)$ - Conjunto dos pontos de descontinuidade da função f .

μ - Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 1.b.2 - Fixemos um intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ e denotemos por $I = I_{[a, b]}$ o conjunto dos subintervalos $[c, d]$ de $[a, b]$. Dado um espaço de Banach X , se $P(X)$ é o conjunto de suas partes, denominaremos funções de intervalo a uma função

$$F: I \longrightarrow P(X).$$

1.b.3 - EXEMPLOS IMPORTANTES

Seja $I = [c, d] \subset [a, b]$, X espaço de Banach e $f: [a, b] \longrightarrow X$.

- 1) Considere $F: I \longrightarrow P(X)$, por $F(I) = \{f(\varepsilon_i)[d-c]/\varepsilon_i, \varepsilon_i \in [c, d]\}$.
- 2) Considere $F: I \longrightarrow P(\mathbb{R})$, dada por $F(I) = \omega(I, f)[d-c]$.

DEFINIÇÃO 1.b.4 - Dada $F: I \longrightarrow P(X)$ função de intervalo, seja $S_F(d): \mathcal{D} \longrightarrow P(X)$, definida por $S_F(d) = \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i)$, onde $I_i = [t_{i-1}, t_i]$.

Diremos que F tem integral na norma em $[a, b]$ (respectivamente σ -integral em $[a, b]$) se existe

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} S_F(d) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i) = N \int_a^b F$$

(respectivamente,

$$\lim_{d \in \mathcal{D}} S_F(d) = \lim_{d \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i) = \sigma \int_a^b F),$$

isto é, existe $N \int_a^b F \in X$ com a propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d \in \mathcal{D}$ e $\Delta d \leq \delta$ então $\|S_F(d) - N \int_a^b F\| \leq \epsilon$, onde

$$\|S_F(d) - N \int_a^b F\| = \sup\{\|x - N \int_a^b F\| / x \in S_F(d)\}$$

(respectivamente, existe $\sigma \int_a^b F \in X$ com a propriedade: para todo $\epsilon > 0$, existe d_ϵ tal que se $d \in \mathcal{D}$ e $d \geq d_\epsilon$, então

$$\|S_F(d) - \sigma \int_a^b F\| \leq \epsilon,$$

onde

$$\|S_F(d) - \sigma \int_a^b F\| = \sup\{\|x - \sigma \int_a^b F\| / x \in S_F(d)\}.$$

Aplicados os dois limites acima aos itens 1 e 2 do exemplo 1.b.3, obtemos: no item 1, dois conceitos de Integrabilidade segundo Riemann. As integrais obtidas serão denotadas, respectivamente, por $N \int_a^b f(x) dx$ e $\sigma \int_a^b f(x) dx$, sendo o primeiro conceito coincidente com o definido em 1.a.4; portanto $N \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. No item 2 se exigirmos $N \int_a^b F = 0$ e $\sigma \int_a^b F = 0$, temos dois conceitos de função integrável segundo Darboux, sendo o primeiro coincidente com o conceito definido em 1.a.8.

PROPOSIÇÃO 1.b.5 - Seja $F: I \longrightarrow P(X)$ uma função de intervalo. Temos:

- 1) Se existe $N \int_a^b F$ então existe $\sigma \int_a^b F$ e $N \int_a^b F = \sigma \int_a^b F$.
- 2) Seja X um espaço de Banach e $f: [a, b] \longrightarrow X$.

Se existe $N \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ então existe

$$\sigma \int_a^b f(x) dx \text{ e } \int_a^b f(x) dx = \sigma \int_a^b f(x) dx.$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata.

No que segue, toda vez que usarmos o conceito de norma envolvendo diferença de conjuntos A e B, o significado será: $\|A-B\| = \sup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a-b\|$.

PROPOSIÇÃO 1.b.6 - 1) Se existe $\sigma \int_a^b f(x) dx$ então $f \in B([a,b], X)$.

2) Se $\lim_{d \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] = 0$ então $f \in B([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO - Análoga à da proposição 1.a.7, item 1.

PROPOSIÇÃO 1.b.7 - Dada uma função de intervalo $F: I \rightarrow P(X)$, uma condição necessária e suficiente para que exista $N \int_a^b F$ (respectivamente $\sigma \int_a^b F$) é que: para todo $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que, se $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $\Delta d_1 \leq \delta$ e $\Delta d_2 \leq \delta$, então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i) - \sum_{i=1}^{|d_2|} F(I'_i) \right\| \leq \epsilon$$

(respectivamente, para todo $\epsilon > 0$, exista d_ϵ tal que, se $d_1 \geq d_\epsilon$ e $d_2 \geq d_\epsilon$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i) - \sum_{i=1}^{|d_2|} F(I'_i) \right\| \leq \epsilon).$$

DEMONSTRAÇÃO - Imediata nas duas direções se lembrarmos que o espaço X é completo.

DEFINIÇÃO 1.b.8 - Dada uma função de intervalo $F:I \rightarrow P(X)$, diremos que F é *pseudo-aditiva* no ponto $x \in]a, b[$ se

$$\lim_{(y', y'') \rightarrow (0, 0)} \{F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y''])\} = 0$$

com $y' \geq 0$, $y'' \geq 0$.

OBSERVAÇÃO 1.b.9 - Se, nos exemplos 1.b.3, supusermos

$$f:[a, b] \rightarrow X$$

uma função integrável no sentido das definições dadas em 1.b.4, obteremos exemplos de funções de intervalo pseudo-aditivas. De fato, no primeiro caso:

$$\begin{aligned} F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y'']) &= \\ &= f(\epsilon_i)[y''+y'] - f(\epsilon'_i)[y'] - f(\epsilon''_i)[y''], \end{aligned}$$

onde $\epsilon_i \in [x-y', x+y'']$, $\epsilon'_i \in [x-y', x]$, $\epsilon''_i \in [x, x+y'']$; como $f:[a, b] \rightarrow X$ é limitada (proposição 1.a.7, item 1 e 1.b.6, item 1),

$$\lim_{(y', y'') \rightarrow (0, 0)} \{F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y''])\} = 0.$$

No segundo caso:

$$\begin{aligned} F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y'']) &= (y''-y') \cdot \\ &\cdot \omega([x-y, x+y''], f) - y' \omega([x-y', x], f) - y'' \cdot \omega([x, x+y''], f). \end{aligned}$$

Como f é limitada (proposição 1.a.9, item 1 e 1.b.6, item 2),

$$\lim_{(y', y'') \rightarrow (0, 0)} \{F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y''])\} = 0.$$

TEOREMA 1.b.10 - Dada uma função de intervalo $F:I \longrightarrow P(X)$, são equivalentes:

1) Existe $N \int_a^b F$.

2) a) F é pseudo-aditiva em todo ponto de $]a,b[$.

b) Existe $\sigma \int_a^b F$.

Nestas condições, $\sigma \int_a^b F = N \int_a^b F$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2)

1) $\implies$ 2a) - Se existe $N \int_a^b F$ então, para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se d_1, d_2 são divisões de $[a,b]$ com $\Delta d_1 \leq \delta$ e $\Delta d_2 \leq \delta$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i) - \sum_{i=1}^{|d_2|} F(I'_i) \right\| \leq \epsilon.$$

Se $x \in]a,b[$, tomemos d_1 com os pontos $x-y', x+y''$ e $d_2 = d_1 \cup \{x\}$, cumprindo as condições $\Delta d_1 \leq \delta$, $\Delta d_2 \leq \delta$, isto é, $y' \leq \frac{\delta}{2}$ e $y'' \leq \frac{\delta}{2}$. Então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i) - \sum_{i=1}^{|d_2|} F(I'_i) \right\| = \|F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y''])\| \leq \epsilon.$$

Logo

$$\lim_{(y', y'') \rightarrow (0,0)} \{F([x-y', x+y'']) - F([x-y', x]) - F([x, x+y''])\} = 0.$$

1) $\implies$ 2b) - Se existe $N \int_a^b F$ então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $d \in \mathcal{D}$ e $\Delta d \leq \delta$ então

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i) - N \int_a^b F \right\| \leq \epsilon.$$

Seja d_ϵ uma divisão tal que $\Delta d_\epsilon \leq \delta$. Se $d \geq d_\epsilon$, virá que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i) - N \int_a^b F \right\| \leq \epsilon. \text{ Logo, existe } \sigma \int_a^b F \text{ e } \sigma \int_a^b F = N \int_a^b F.$$

2) $\implies$ 1) - Como existe $\sigma \int_a^b F$ então, dado $\epsilon > 0$ existe d_ϵ tal que, se $d \geq d_\epsilon$, tem-se

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} F(I_i) - \sigma \int_a^b F \right\| \leq \epsilon.$$

Suponhamos que $d_\epsilon = \{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b\}$. Como F é pseudo-aditiva em $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $1 \leq i \leq n$, $0 \leq y_i' \leq \delta$, $0 \leq y_i'' \leq \delta$, tem-se:

$$\|F([t_i - y_i', t_i + y_i'']) - F([t_i - y_i', t_i]) - F([t_i, t_i + y_i''])\| \leq \frac{\epsilon}{n},$$

$$1 \leq i \leq n.$$

Seja agora d_1 uma divisão com $\Delta d_1 \leq \delta$ e $d_2 = d_1 \cup d_\epsilon$.

Vamos comparar

$$\sum_{i=1}^{|d_2|} F(I_i) \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i),$$

usando o mesmo valor para F em todo intervalo de d_1 que não contém pontos de d_ϵ no seu interior. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & \times & & \times & & | \\ X_{i-1} & & t_{\epsilon_1} & & t_{\epsilon_2} & & t_{\epsilon_3} & & X_i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|d_2|} F(I_i) - \sum_{i=1}^{|d_1|} F(I_i) \right\| &\leq \sum_{i=1}^n \|F([t_i - y_i', t_i + y_i'']) - \\ &\quad - F([t_i - y_i', t_i]) - F([t_i, t_i + y_i''])\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Como $d_2 \geq d_\epsilon$ e $\Delta d_1 \leq \delta$, virã:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(\epsilon_i) - \sigma \int_a^b F \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{|d_1|} F(\epsilon_i) - \sum_{i=1}^{|d_2|} F(\epsilon_i) \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^{|d_2|} F(\epsilon_i) - \sigma \int_a^b F \right\| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Logo, existe $N \int_a^b F$ e $N \int_a^b F = \sigma \int_a^b F$. CQD

COROLÁRIO 1.b.11 - Se X é um espaço de Banach e $f:[a,b] \rightarrow X$ então são equivalentes:

- 1) Existe $\sigma \int_a^b f(x) dx$.
- 2) Existe $N \int_a^b f(x) dx$.

Temos ainda:

$$\int_a^b f(x) dx = N \int_a^b f(x) dx = \sigma \int_a^b f(x) dx.$$

DEMONSTRAÇÃO - É decorrência imediata do teorema 1.b.10 e da observação 1.b.9.

COROLÁRIO 1.b.12 - Se X é um espaço de Banach e $f:[a,b] \rightarrow X$ são equivalentes:

- 1) $\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] = 0$.
- 2) $\lim_{d \in \mathcal{D}} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] = 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata a partir do teorema 1.b.10 e da observação 1.b.9. CQD

Como decorrência do corolário 1.b.11 e do corolário

rio 1.b.12, os conceitos de integrabilidade segundo Riemann, $N \int_a^b f$ e $\sigma \int_a^b f$, são, na realidade, o conceito de $\int_a^b f(x)dx$, o mesmo ocorrendo com os conceitos de integrabilidade segundo Darboux, definidos em 1.b.4: ambos coincidem com o conceito definido em 1.a.8.

O teorema que se segue é uma caracterização das funções integráveis segundo Darboux e que será útil na solução dos problemas propostos na introdução.

TEOREMA 1.b.13 - Se X é um espaço de Banach e $f:[a,b] \rightarrow X$ são equivalentes 1) e 2) abaixo:

$$1) f \in D([a,b], X).$$

$$2) \text{ a) } f \in B([a,b], X).$$

$$\text{ b) } u(D(f)) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO - $2) \implies 1)$ - Seja $M = \sup_{t,s \in [a,b]} \|f(t) - f(s)\|$. Então $M \in \mathbb{R}$ pois, por hipótese, f é limitada. Se $M = 0$ então $f(t) = f(a)$, para todo $t \in [a,b]$ e não há nada a demonstrar. Se $M \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ tomemos

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad F_{n_0} = \{t/\omega(\{t\}, f) \geq \frac{1}{n_0}\}.$$

É claro que F_{n_0} é um conjunto compacto, e portanto, mensurável. Como $F_{n_0} \subset D(f)$, concluímos que $u(F_{n_0}) = 0$. Da compacidade de F_{n_0} e de $u(F_{n_0}) = 0$ segue que existe uma divisão de $[a,b]$, que denominaremos d_ε , tal que a soma das medidas dos intervalos cujos extremos são pontos consecutivos de d_ε e interceptam F_{n_0} é menor que $\frac{\varepsilon}{2M}$; nos restantes intervalos,

cujos extremos são pontos de d_ϵ temos que $\omega_i(f) < \frac{1}{n_0}$. Tome-
mos d , divisão de $[a,b]$ mais fina que d_ϵ , e teremos:

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] = \sum_{i \in A} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] + \sum_{i \in B} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}],$$

onde A é o conjunto dos índices dos pontos de d , extremos
superiores de intervalos que interceptam F_{n_0} , e B é o con-
junto dos índices restantes não nulos. Então:

$$\sum_{i \in A} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] \leq M \sum_{i \in A} [t_i - t_{i-1}] \leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\sum_{i \in B} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] \leq \frac{1}{n_0} \sum_{i \in B} [t_i - t_{i-1}] \leq \frac{1}{n_0} (b-a) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, se $d \geq d_\epsilon$ temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] \leq \epsilon.$$

Aplicando o corolário 1.b.12, virá que $f \in D([a,b], X)$.

1) $\implies$ 2)

1) $\implies$ 2a) - É consequência da proposição 1.b.6, item 2.

1) $\implies$ 2b) - Como

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n = \{t/\omega(\{t\}, f) \geq \frac{1}{n}\},$$

então $D(f)$ é mensurável. Se $u[D(f)] > 0$ existe um índice n_0
tal que $u(F_{n_0}) > 0$; portanto, qualquer que seja a divisão $d \in \mathcal{D}$,
temos

$$\sum_{i=1}^{|d|} \omega_i(f)[t_i - t_{i-1}] \geq \sum_{i \in A} \omega_i(f)(t_i - t_{i-1}),$$

onde A é o conjunto de índices anteriormente definido.

Mas

$$\sum_{i \in A} \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] \geq \frac{1}{n_0} u(F_{n_0}) > 0.$$

Logo, para todo $d \in \mathcal{D}$, temos

$$|d| \sum_{i=1}^n \omega_i(f) [t_i - t_{i-1}] \geq \frac{u(F_{n_0})}{n_0}$$

e $f \notin D([a, b], X)$: absurdo.

CQD

COROLÁRIO 1.b.14 - (Veja proposição 1.a.10).

1) $C([a, b], X) \subseteq D([a, b], X)$.

2) Se $f \in D([a, b], X)$ e $g \in C^b(X, Z)$ então $g \circ f \in D([a, b], Z)$.

3) Se $f \in D([a, b], X)$ então $\|f\| \in D([a, b], \mathbb{R})$.

4) Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $B: X \times Y \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear contínua, $f \in D([a, b], X)$ e $g \in D([a, b], Y)$. Escrevemos $t \xrightarrow{f \cdot g} f(t) \cdot g(t) = B(f(t), g(t))$. Então, $f \cdot g \in D([a, b], Z)$.

5) Se A é uma álgebra de Banach então $D([a, b], A)$ é uma álgebra de Banach.

6) Se $f_n \in D([a, b], X)$ e f_n converge uniformemente para f , então

$$f \in D([a, b], X) \text{ e } \int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

7) Se $f \in D([a, b], X)$ e $F: [a, b] \rightarrow X$ é dada por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

então F é derivável quase sempre.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Se $f \in C([a, b], X)$ temos que $f \in B([a, b], X)$ e $u[D(f)] = u(\phi) = 0$. Logo, $f \in D([a, b], X)$.

2) Basta observar que $g \circ f \in B([a, b], Z)$ e, como $D(g \circ f) \subset D(f)$, vem que $u[D(g \circ f)] = 0$. Logo, $f \in D([a, b], Z)$.

3) Caso particular de 2) em que $g(x) = \|x\|$.

4) É imediato, pois $f \cdot g \in B([a, b], Z)$ e $D(f \cdot g) \subset D(f) \cup D(g)$; logo, $u[D(f \cdot g)] = 0$ e então $f \cdot g \in D([a, b], Z)$.

5) É consequência imediata de 4), lembrando que a composição é bilinear contínua.

6) Limite uniforme de funções limitadas é uma função limitada; logo, $f \in B([a, b], X)$. Por outro lado, $D(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ o que implica $u[D(f)] = 0$ e $f \in D([a, b], X)$.

Já vimos que $f \in D([a, b], X)$ e é imediato que $f_n - f \in D([a, b], X)$. Logo, $\|f_n - f\| \in D([a, b], \mathbb{R})$ (corolário 1.b.14, item 3) e, pela proposição 1.a.9 item 1, $\|f_n - f\| \in R([a, b], \mathbb{R})$.

Como

$$\left\| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f_n - f\| dt$$

e, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$ temos $\|f_n(t) - f(t)\| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$, para todo $t \in [a, b]$ então:

$$n \geq n_0 \implies \left\| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \epsilon, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

CQD

1.c - NOÇÕES SOBRE FUNÇÕES REGRADAS

DEFINIÇÃO 1.c.1 - Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $G([a,b],X)$ o conjunto das funções $f: [a,b] \rightarrow X$ *regradadas*, isto é, tais que existem os limites laterais de f em todo ponto $t \in [a,b]$.

Funções regradas são descritas pela seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.c.2 - Se X é um espaço de Banach e $f: [a,b] \rightarrow X$, então são equivalentes:

- 1) $f \in G([a,b],X)$.
- 2) f é limite uniforme de funções em escada.
- 3) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\omega([t_{i-1}, t_i[, f) \leq \epsilon, \quad 1 \leq i \leq n.$$

DEMONSTRAÇÃO - Veja [H-3], página 20, teorema 3.1.

COROLÁRIO 1.c.3 - Seja X um espaço de Banach e $f: [a,b] \rightarrow X$.

- 1) Se $f \in G([a,b],X)$ então: a) $f \in B([a,b],X)$; b) $D(f)$ é enumerável.
- 2) $C([a,b],X) \subset G([a,b],X)$.
- 3) $G([a,b],X) \subset D([a,b],X)$.
- 4) Se $f \in G([a,b],X)$, existe $g \in C([a,b],X)$ derivável a menos de um conjunto enumerável $N = D(f)$, e tal que:

a) $g'(t) = f(t)$, para todo $t \in S = [a, b] - N$ e

$$g'_+(t^+) = f(t^+), \quad g'_-(t^-) = f(t^-).$$

b) Para todo $t_0 \in [a, b]$ temos

$$\|g(b) - g(a) - f(t_0)(b-a)\| \leq (b-a) \sup_{s \in S} \|f(s) - f(t_0)\|.$$

DEMONSTRAÇÃO -

1) a) Pela proposição 1.c.2, item 2, as funções regradas são limites uniformes de funções limitadas; logo, são limitadas.

b) Temos que

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \text{ com } F_n = \{t/\omega(\{t\}, f) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Pela proposição 1.c.2, item 3, cada um dos F_n é finito, e portanto, $D(f)$ é enumerável.

2) Imediata da definição de função regradada.

3) É decorrência do item 1 deste corolário e do teorema 1.b.13, item 2b, pois, se um conjunto é enumerável, tem medida nula.

4) a) Veja [D], 8.7.2. b) Veja [H-1], página 63, c8.

1.d - NOÇÕES SOBRE FUNÇÕES DE VARIAÇÃO FORTE LIMITADA,

VARIAÇÃO FRACA LIMITADA E SEMIVARIAÇÃO LIMITADA

DEFINIÇÃO 1.d.1 - Dado X um espaço de Banach, $f: [a, b] \rightarrow X$, e $d \in \mathcal{D}$, denotamos por $V_d[f] = \sum_{i=1}^{|d|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$.

Diremos que f é de *variação forte limitada*, e escrevemos

$$f \in BV([a,b],X), \text{ se } V[f] = \sup_{d \in \mathcal{D}} V_d[f] < \infty.$$

DEFINIÇÃO 1.d.2 - Dado X um espaço de Banach, $f:[a,b] \rightarrow X$ e $d \in \mathcal{D}$, denotaremos por

$$W_d[f] = \sup_{\|\lambda_i\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right\|.$$

Diremos que f é de *variação fraca limitada*, e escrevemos

$$f \in BW([a,b],X), \text{ se } W[f] = \sup_{d \in \mathcal{D}} W_d[f] < \infty.$$

DEFINIÇÃO 1.d.3 - Dados X um espaço de Banach, $f:[a,b] \rightarrow X$ e $\delta = \{a \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b\}$, denotaremos por

$$\omega_\delta[f] = \left\| \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)] \right\|.$$

Diremos que $f \in BW([a,b],X)$ se $\omega[f] = \sup_{\delta \in \Delta} \omega_\delta[f] < \infty$.

PROPOSIÇÃO 1.d.4 - Dados X e Y espaços de Banach, temos:

- 1) a) $BV([a,b],X) \subset G([a,b],X) \subset B([a,b],X)$.
 b) $BV([a,b],X) \subset BW([a,b],X) \subset B([a,b],X)$.
 c) $BV([a,b],X) \subset BW([a,b],X) \subset B([a,b],X)$.
- 2) a) Se $f \in BV([a,b],X)$ e $u \in L(X,Y)$ então
 $u \circ f \in BV([a,b],Y)$ e $V[u \circ f] \leq \|u\| V[f]$.
 b) Se $f \in BW([a,b],X)$ e $u \in L(X,Y)$ então
 $u \circ f \in BW([a,b],Y)$ e $\omega[u \circ f] \leq \|u\| \omega[f]$.

c) Se $f \in BW([a,b],X)$ e $u \in L(X,Y)$ então

$$u \circ f \in BW([a,b],X) \quad \text{e} \quad W[u \circ f] \leq \|u\| W[f].$$

3) Se $J: X \longrightarrow Y$ é um isomorfismo linear, são equivalentes: a) e a'), b) e b'), bem como c) e c').

a) $f \in BV([a,b],X)$; a') $J \circ f \in BV([a,b],Y)$.

b) $f \in BW([a,b],X)$; b') $J \circ f \in BW([a,b],Y)$.

c) $f \in BW([a,b],X)$; c') $J \circ f \in BW([a,b],Y)$.

4) a) $BV([a,b],X)$ só depende da topologia de X .

b) $BW([a,b],X)$ só depende da topologia de X .

c) $BW([a,b],X)$ só depende da topologia de X .

5) Se $\{X_i\}_{i=1}^n$ são espaços de Banach, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ e

$P_i: X \longrightarrow X_i$, $1 \leq i \leq n$, é tal que se $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$,

$P_i(x) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, são equivalentes a) e a'), b) e b') bem como c) e c').

a) $f \in BV([a,b],X)$; a') $f_i = P_i \circ f \in BV([a,b],X_i)$; $1 \leq i \leq n$.

b) $f \in BW([a,b],X)$; b') $f_i = P_i \circ f \in BW([a,b],X_i)$; $1 \leq i \leq n$.

c) $f \in BW([a,b],X)$; c') $f_i = P_i \circ f \in BW([a,b],X_i)$; $1 \leq i \leq n$.

6) $BW([a,b],X) \subset R([a,b],X)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) a) Para a prova de $BV([a,b],X) \subset G([a,b],X)$, veja [H-1], página 63, C-5.

$G([a,b],X) \subset B([a,b],X)$ está demonstrado no corolário 1.c.3,

1) a).

$$b) \quad \left\| \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)] \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(s_i)\| \leq V[f]; \text{ logo}$$

$\omega[f] \leq V[f]$. Daí segue imediatamente que, se $f \in BV([a,b],X)$ então $f \in BW([a,b],X)$.

Se $f \in BW([a,b],X)$, vem que $\|f(t)-f(a)\| \leq \omega[f]$, para todo $t \in [a,b]$. Então, $f \in B([a,b],X)$.

c) Análoga a de b).

2) a) Se $f \in BV([a,b],X)$ e $u \in L(X,Y)$, temos:

$$\sum_{i=1}^{|d|} \|(u \circ f)(t_i) - (u \circ f)(t_{i-1})\| \leq \|u\| \left(\sum_{i=1}^{|d|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \right) \leq \|u\| V[f].$$

Logo, $u \circ f \in BV([a,b],Y)$ e $V[u \circ f] \leq \|u\| V[f]$.

b) e c) Análogas à de 2) a) desta proposição.

3) Consequência imediata do item 2.

4) Consequência imediata do item 3.

5) a) $\implies$ a') Consequência imediata do item 2.a) desta proposição.

a') $\implies$ a) Tomemos em

$$X = \prod_{i=1}^n X_i, \quad \|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i.$$

Então vem imediatamente que $V[f] = \sum_{i=1}^n V[f_i]$; logo, se

$f_i \in BV([a,b],X_i)$, temos $f \in BV([a,b],X)$.

b) $\implies$ b') Consequência imediata do item 2.b) desta proposição.

b') $\implies$ b) Tomemos, em $X = \prod_{i=1}^n X_i$, a norma $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$.

Então vem imediatamente que $\omega[f] = \sup_{1 \leq i \leq n} \omega[f_i]$; logo, se

$f_i \in BW([a, b], X_i)$, vem que $f \in BW([a, b], X)$.

c) $\iff$ c') Análoga à demonstração de 5) b) $\iff$ b') desta proposição.

6) Veja [H-1], página 55, teorema A-3.

PROPOSIÇÃO 1.d.5 - 1) Se $f \in BV([a, b], \mathbb{C})$ então temos:

$$a) W_d[f] = V_d[f] \text{ e } W[f] = V[f].$$

$$b) BV([a, b], \mathbb{C}) = BW([a, b], \mathbb{C}).$$

$$2) a) \text{ Se } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ então } W[f] \leq V[f] \leq 2W[f].$$

$$b) \text{ Se } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ então } W[f] \leq V[f] \leq 4W[f].$$

$$c) BW([a, b], \mathbb{K}) = BV([a, b], \mathbb{K}) = BV([a, b], \mathbb{K}) \text{ se } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

3) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita, temos que $BV([a, b], X) = BW([a, b], X) = BW([a, b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) a)

$$V_d[f] = \sum_{i=1}^{|d|} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \leq$$

$|\lambda_i| \leq 1$
(λ_i convenientemente escolhidos)

$$\leq \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right| = W_d[f],$$

donde vem que $V_d[f] \leq W_d[f]$.

Por sua vez,

$$W_d[f] = \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{|d|} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = V_d[f];$$

logo, $W_d[f] = V_d[f]$.

Tomando o supremo quando $d \in \mathcal{D}$, virá $W[f] = V[f]$.

b) Consequência imediata do item a.

2) a) Para $W[f] \leq V[f]$, veja demonstração da proposição 1.d.4, item b).

Dada uma divisão $d = \{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b\}$, chamemos P o conjunto dos índices i tais que $f(t_i) - f(t_{i-1}) \geq 0$ e N o conjunto dos índices restantes. Temos:

$$\begin{aligned} V_d[f] &= \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \\ &= \sum_{i \in P} [f(t_i) - f(t_{i-1})] - \sum_{i \in N} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \leq 2W[f]. \end{aligned}$$

Logo, $V[f] = 2W[f]$.

b) Decorrencia imediata de 2)a) desta proposição.

c) Decorrencia de 2)a), b) e 1)b) desta proposição.

3) Se X é um espaço de Banach de dimensão finita, então existe um isomorfismo $J: X \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Então

$$\begin{aligned} f \in BW([a,b], X) &\xleftrightarrow{1.d.4.3)c) \Leftrightarrow c')} J \circ f \in BW([a,b], \mathbb{K}^n) \\ &\xleftrightarrow{1.d.4.5)c) \Leftrightarrow c')} P_i \circ J \circ f \in BW([a,b], \mathbb{K}) \xrightarrow{1.d.5.2)c)} BV([a,b], \mathbb{K}) \\ &\xleftrightarrow{1.d.4.5)a) \Leftrightarrow a')} J \circ f \in BV([a,b], \mathbb{K}^n) \xleftrightarrow{1.d.4.3)a) \Leftrightarrow a')} f \in BV([a,b], X). \end{aligned}$$

A demonstração para BW é análoga à anterior.

O teorema seguinte mostra três maneiras equivalentes de se definir funções de variação fraca limitada, e que

nos serão úteis em futuras aplicações.

TEOREMA 1.d.6 - Se X é um espaço de Banach e $f:[a,b] \longrightarrow X$, são equivalentes:

- 1) $f \in BW([a,b], X)$.
- 2) Para todo $x' \in X'$, $x' \circ f \in BV([a,b], \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- 3) $f \in W([a,b], X)$.

Além disso, $W_d[f] = \sup_{\|x'\| \leq 1} V_d[x' \circ f]$; logo, $W[f] = \sup_{\|x'\| \leq 1} V[x' \circ f]$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 3) Se $\delta = \{a \leq s_1 < t_1 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b\}$, e d é a partição induzida em $[a,b]$ por δ e

$$\lambda_j = \begin{cases} 1 & \text{se } t_{j-1} = s_i \text{ e } t_j = t_i \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases},$$

temos:

$$W_d[f] = \left\| \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)] \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_j) - f(t_{j-1})] \lambda_i \right\| \leq W_d[f] \leq W[f].$$

Logo, se $f \in BW([a,b], X)$, virá que $f \in W([a,b], X)$.

3) $\implies$ 2) Se $f \in W([a,b], X)$, pela proposição 1.d.4, 2) b),

$$x' \circ f \in W([a,b], \mathbb{K}) = BV([a,b], \mathbb{K}).$$

2) $\implies$ 1) Denotemos por $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|d|})$. Fixada f nas condições de 2), seja $A_{\lambda, d}: X' \rightarrow \mathbb{K}$ a aplicação dada por

$$A_{\lambda, d}(x') = x' \left(\sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right)$$

Tal aplicação é linear e contínua. Além disso:

$$\begin{aligned} \left| x' \left(\sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{|d|} [(x' \circ f)(t_i) - (x' \circ f)(t_{i-1})] \lambda_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{|d|} |(x' \circ f)(t_i) - (x' \circ f)(t_{i-1})| \leq V[x' \circ f], |\lambda_i| \leq 1 \end{aligned}$$

e $d \in \mathcal{D}$.

Então, pelo princípio de limitação uniforme,

$$\sup_{d \in \mathcal{D}} \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right\| \right\} < \infty$$

ou $W[f] < \infty$. Logo, $f \in BW([a, b], X)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} W_d[f] &= \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(t_i) - f(t_{i-1})] \lambda_i \right\| = \\ &\stackrel{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \sup_{\|x'\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{|d|} [(x' \circ f)(t_i) - (x' \circ f)(t_{i-1})] \lambda_i \right| = \\ &= \sup_{\|x'\| \leq 1} \sup_{|\lambda_i| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{|d|} [(x' \circ f)(t_i) - (x' \circ f)(t_{i-1})] \lambda_i \right| = \\ &= \sup_{\|x'\| \leq 1} W_d[x' \circ f] \stackrel{1.d.5.1) a)}{=} \sup_{\|x'\| \leq 1} V_d[x' \circ f]. \end{aligned}$$

Então,

$$W_d[f] = \sup_{\|x'\| \leq 1} V_d[x' \circ f] \quad \text{e} \quad W[f] = \sup_{\|x'\| \leq 1} V[x' \circ f].$$

DEFINIÇÕES 1.d.7 - a) Dada $f: [a, b] \longrightarrow L(X, Y)$, para todo $d \in \mathcal{D}$ escrevemos

$$SV_d[f] = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^d [f(t_i) - f(t_{i-1})] \cdot x_i \right\| / x_i \in X, \|x_i\| \leq 1 \right\},$$

e definimos *semivariação* de f em $[a,b]$ por $SV[f] = \sup_{d \in \mathcal{D}} SV_d[f]$.
O conjunto das funções $f: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ tais que $SV[f] < \infty$ será denotado por $SV([a,b], L(X,Y))$.

b) Dados X e Y espaços de Banach, denotaremos por:

$$CSV([a,b], L(X,Y)) = C([a,b], L(X,Y)) \cap SV([a,b], L(X,Y)).$$

c) Observemos ainda que, se $X = \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), temos:

$$SV([a,b], L(X,Y)) = BW([a,b], Y).$$

(Veja teorema 1.d.6).

1.e - PROBLEMAS E EXEMPLO

1.e.1 - PROBLEMAS

Propomo-nos agora resolver os problemas $[P-n]$, $1 \leq n \leq 8$, aos quais nos referimos na introdução. Daremos, no capítulo 1, a resolução do problema $[P-1]$. Resolveremos e discutiremos os restantes no capítulo 3.

1.e.2 - EXEMPLO

Seja

$$C_0(\mathbb{N}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} / x_i \in \mathbb{K} \text{ e } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0, \|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|\}.$$

Consideremos uma enumeração dos racionais de $[a,b]$:

$\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$. Vamos denotar

$$\ell_1 = (1, 000\dots) \dots \ell_i = (0, 0, \dots, \overset{i}{1}00\dots) \dots$$

Definimos $f: [a, b] \longrightarrow C_0(\mathbb{N})$ por

$$f(x) = \begin{cases} \ell_i & \text{se } x = r_i \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b]. \end{cases}$$

Observe-se que:

- 1) $f \in W([a, b], C_0(\mathbb{N}))$, e portanto,
- 2) $f \in R([a, b], C_0(\mathbb{N}))$.
- 3) $f \notin D([a, b], C_0(\mathbb{N}))$, e portanto,
- 4) $f \notin G([a, b], C_0(\mathbb{N}))$ e
- 5) $f \notin BV([a, b], C_0(\mathbb{N}))$.

(Logo, f mostra que tem sentido os problemas [P-1], [P-2], [P-3] e [P-5]).

DEMONSTRAÇÃO - 1) Seja $\delta = \{a \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq b\}$. É imediato que

$$\left\| \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)] \right\|_{\infty} \leq 1,$$

e ainda $W[f] = 1$.

2) Demonstraremos que $\int_a^b f(x) dx = 0$. De fato,

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) (t_i - t_{i-1}) - 0 \right\| \leq \Delta d.$$

Portanto, se $\Delta d \leq \delta = \epsilon$, virá que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i)(t_i - t_{i-1}) - 0 \right\| \leq \epsilon, \text{ e } \int_a^b f(t) dt = 0.$$

3) $f \notin D([a, b], C_0(N))$, pois f é descontínua em todo ponto do intervalo $[a, b]$, já que $\omega([x_0 - \delta, x_0 + \delta], f) \geq \|e_i\| = 1$, para todo $\delta > 0$. Logo $u[D(f)] = b - a$, e então, pelo teorema 1.b.13, item 2, $f \notin D([a, b], C_0(N))$.

4) e 5) são decorrências imediatas de 3) pois, se f pertencesse a um dos espaços $G([a, b], C_0(N))$ ou $BV([a, b], C_0(N))$, pertenceria a $D([a, b], C_0(N))$, o que contraria 3).

1.f - TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS

Neste item apresentamos um resumo dos resultados necessários para a solução do problema um.

PROPOSIÇÃO 1.f.1 - Seja X um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores em X . São equivalentes:

- 1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge, para toda permutação π de inteiros positivos.
- 2) A série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge, para toda escolha $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$.
- 3) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge, para toda escolha de sinais (isto é, $\theta_n = \pm 1$).

4) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge, para toda escolha de $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $|\theta_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$.

5) Para todo $\epsilon > 0$, existe um n tal que $\|\sum_{i \in \sigma} x_i\| \leq \epsilon$, para todo conjunto finito σ de inteiros que satisfaz

$$\min\{i \in \sigma\} > n.$$

DEMONSTRAÇÃO - Veja [L-T], página 15, proposição 1.c.1 e [M-T], página 20.

DEFINIÇÃO 1.f.2 - Num espaço de Banach X , se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ satisfaz uma das condições da proposição 1.f.1, então ela é dita incondicionalmente convergente.

DEFINIÇÃO 1.f.3 - Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ num espaço de Banach X é dita absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

PROPOSIÇÃO 1.f.4 (Riemann) - Se X é um espaço de Banach de dimensão finita, então são equivalentes:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente.
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [M-T], página 22, teorema 2.

Se X tem dimensão infinita, Dvoretzky e Rogers demonstraram:

TEOREMA 1.f.5 - Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Seja $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de reais positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Então existe uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicional-

mente convergente em X tal que $\|x_n\| = \lambda_n$, para todo n .

DEMONSTRAÇÃO - Veja [D-R].

COROLÁRIO 1.f.6 (Dvoretzky-Rogers) - Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Existe uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ que é incondicionalmente convergente e não é absolutamente convergente.

DEMONSTRAÇÃO - Basta tomar $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ e aplicar o teorema 1.f.5.

O corolário abaixo mostra uma caracterização dos espaços de dimensão finita (ou infinita), dada por meio de séries e que é consequência imediata do teorema do Dvoretzky-Rogers.

COROLÁRIO 1.f.7 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

1) A dimensão de X é finita.

2) Toda série incondicionalmente convergente em X é absolutamente convergente em X .

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Vide proposição 1.f.4.

2) $\implies$ 1) Veja corolário 1.f.6.

CQD

1.g - PROBLEMA UM

Recordemos, mais uma vez, o denominado problema um [P-1].

PROBLEMA 1 (P-1) - Caracterizar os espaços de Banach X tais que $BW([a,b],X) = BV([a,b],X)$.

O teorema que se segue esclarece completamente a questão, além de dar uma caracterização dos espaços de Banach, de dimensão finita, por intermédio das funções de variação forte e fraca limitadas.

TEOREMA 1.g.1 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

1) A dimensão de X é finita.

2) $BV([a,b],X) = BW([a,b],X)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) - Está demonstrado na proposição 1.d.5, item 3.

2) $\implies$ 1) - Faremos a demonstração para o caso $[a,b] = [0,1]$. Suponhamos X espaço de Banach de dimensão infinita. Pelo corolário 1.f.6 do teorema Dvoretzky-Rogers, existe uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ que converge incondicionalmente, mas não converge absolutamente. Como

$$[0,1] = \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right] \right\} \cup \{1\},$$

seja $f: [0,1] \longrightarrow X$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_j & \text{se } x \in \left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right]. \end{cases}$$

Afirmamos que $f \in BW([0,1], X)$. De fato: seja,

$$\delta = \{0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_k < t_k \leq 1\}.$$

Temos:

$$\left\| \sum_{i=1}^k [f(t_i) - f(s_i)] \right\| \leq \|x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_\ell}\| + \|x_1 + x_2 + \dots + x_m\|,$$

onde $n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$ e $m \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente, segue da proposição 1.f.1, item 4, que dado $\epsilon = 1$, existe n tal que, se $\min\{i \in \sigma\} > n$ então $\left\| \sum_{i \in \sigma} x_i \right\| \leq 1$. Seja $M = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \|x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_\ell}\| + \|x_1 + x_2 + \dots + x_m\| &\leq \left\| \sum_{n_i \leq n} x_{n_i} \right\| + \left\| \sum_{n_i > n} x_{n_i} \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{i \leq n} x_i \right\| + \left\| \sum_{i > n} x_i \right\| \leq 2 \sum_{i \leq n} \|x_i\| + 2 \leq 2(M+1). \end{aligned}$$

Então, para toda $\delta \in \Delta$, vale que $\left\| \sum_{i=1}^k [f(t_i) - f(s_i)] \right\| \leq 2(M+1)$.

Resulta que $W[f] \leq 2(M+1)$, ou seja, $f \in BW([0,1], X)$.

Afirmamos que $f \notin BV([0,1], X)$. De fato, seja

$$d = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, 1\right\}.$$

Calculando $\sum_{i=1}^{|d|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$, tem-se imediatamente que

$$\sum_{i=1}^{|d|} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \geq \sum_{i=2}^n \|x_i\|$$

e, como a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, não é absolutamente convergente, vem que $V[f] = +\infty$, e $f \notin BV[0,1], X$.

Para o caso do intervalo $[a,b]$, não existe dificuldade adicional e deixamos a cargo do leitor esta constatação. CQD

COROLÁRIO 1.g.2 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

- 1) $BV([a,b], X) \neq BW([a,b], X)$.
- 2) X tem dimensão infinita.

DEMONSTRAÇÃO - Imediata, a partir do teorema 1.g.1.

DEFINIÇÃO 1.g.3 - Se X é um espaço de Banach, diremos que $f: [a,b] \rightarrow X$ é localmente de variação limitada forte em $c \in [a,b]$ se existe, um intervalo $[d,f]$ contendo c no seu interior tal que f restrita a $[d,f]$ pertence ao espaço

$$BV([d,f], X).$$

Não demonstraremos a proposição que se segue para não alongar em demasia este capítulo introdutório. É um trabalho em conjunto da Professora Carmen Sílvia Cardassi e deste autor.

PROPOSIÇÃO 1.g.4 - Se X é um espaço de Banach, são equivalentes:

- 1) X tem dimensão infinita.
- 2) $BV([a,b], X) \neq BW([a,b], X)$.

3) Existe $f \in BW([a,b],X)$ que não é localmente de variação limitada forte em nenhum ponto de $[a,b]$.

4) Existe $f \in BW([a,b],X)$ tal que, para todo $M > 0$, existe uma partição $d = \{a = t_0 < t_1 \dots t_n = b\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^d w_{[t_{i-1}, t_i]}[f] \geq M,$$

(então $f \notin BV([a,b],X)$).

OBSERVAÇÃO 1.g.5 - O teorema 1.g.1 não se encontra nos livros que tratam das funções de variação fraca limitada, mas nosso orientador nos chamou a atenção que se trata de um resultado conhecido. Veja, por exemplo: Thorp, B.L.D., On the equivalence of certain notions of bounded variation, Journal of the London Mathematical Society, 43 (170): 247-252, 1968.

CAPÍTULO 2

NOÇÕES SOBRE GEOMETRIA DE ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo abordaremos rapidamente as noções que usaremos na solução dos problemas citados no capítulo 1. No item a, deste capítulo, estão os conceitos usados na discussão e solução dos problemas [P-2],[P-5],[P-6],[P-7],[P-8] e suas consequências.

No item b, estão os conceitos usados na discussão e resolução do problema 3.

2.a - ESPAÇOS DE BANACH QUE CONTÊM SUBESPAÇO ISOMORFO A $C_0(N)$.

ESPAÇOS REFLEXIVOS E ESPAÇOS FRACAMENTE SEQUENCIALMENTE COMPLETOS

DEFINIÇÃO 2.a.1 - Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é dita uma *base de Schauder* de X se, para todo vetor x pertencente a X , existe uma única sequência de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X e para todo $x \in X$, a série $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é incondicionalmente convergente, (veja definição 1.f.2) diremos que

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base incondicional de X .

DEFINIÇÃO 2.a.2 - Uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que é base de Schauder do fecho do subespaço gerado por ela é dita uma sequência básica.

PROPOSIÇÃO 2.a.3 - Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1) Para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, seja $|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$. Então $||| \cdot |||$ é uma norma.

2) A mesma $||| \cdot |||$ é equivalente à norma $\| \cdot \|$ do espaço X .

3) As projeções $P_n: X \rightarrow X$, definidas por

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

são funções lineares, contínuas e $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Imediata.

2) Em primeiro lugar, observemos que um cálculo mostra que $(X, ||| \cdot |||)$ é um espaço de Banach (veja, se necessário, [S-I], página 18, proposição 3.1). Por outro lado,

$$|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = \|x\|.$$

Logo $\|x\| \leq |||x|||$ e a função identidade $I: (X, ||| \cdot |||) \rightarrow (X, \| \cdot \|)$ é contínua. Pelo teorema da aplicação aberta, I é bicontínua, e existem constantes $K > 0$ e $K' > 0$, tais que

$$K' \|x\| \leq |||x||| \leq K \|x\|.$$

Segue que $\| \cdot \|$ é equivalente a $||| \cdot |||$.

3) $\|P_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = |||x||| \leq K\|x\|$. Assim, $\|P_n\| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde concluímos que as P_n são contínuas e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| \leq K$. CQD

DEFINIÇÃO 2.a.4 - Dado um espaço de Banach X com base de Schauder $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, sejam P_n as projeções da proposição 2.a.3. A constante $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$ é denominada *constante da base* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Se $K = 1$, então $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é dita *base monótona*.

PROPOSIÇÃO 2.a.5 - Seja X um espaço de Banach:

1) Uma base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é monótona se, e só se para toda sequência de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ a sequência de números

$$\left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \right\}_{n=1}^{\infty}$$

é não decrescente.

2) Toda base $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é monótona com relação à norma

$$|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\|.$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) Seja $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma base monótona. Se $m \geq n$, vale que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = \left\| P_n \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i \right) \right\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|.$$

Logo, se $m \geq n$, $\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|$.

$\Leftarrow$) É verdade que $\|P_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$ e, pela monotonicidade, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq \|x\| \text{ se } m \geq n.$$

Logo, $\|P_n(x)\| \leq \|x\|$, para todo $x \in X$, isto é $\|P_n\| \leq 1$. Concluímos que $\|P_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| = 1$.

2) Fixado um índice n_0 , temos que, para todo $x \in X$,

$$|||P_{n_0}(x)||| = \sup_{n \leq n_0} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = |||x|||.$$

Logo, como P_{n_0} é uma projeção, $|||P_{n_0}||| \geq 1$, e vem que

$$|||P_{n_0}||| = 1. \quad \text{CQD}$$

PROPOSIÇÃO 2.a.6 - Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores num espaço de Banach X . Então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X se, e somente se, as três condições abaixo valem simultaneamente:

1) $x_n \neq 0$, para todo n natural.

2) Existe uma constante $K > 0$, tal que, para toda escolha de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ e inteiros $n \leq m$ temos

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|.$$

3) O fecho do espaço gerado por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é X .

Mais ainda, 1) e 2) dão uma condição necessária e suficien-

te para que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência básica.

DEMONSTRAÇÃO - Necessidade:

1) Se $x_n = 0$ temos $0 = x_n$ e $0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0x_i$, o que contraria a unicidade de representação.

2) Vale $\|P_n \left(\sum_{i=1}^m a_i x_i \right)\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|$. Logo,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|,$$

onde $K = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$ (vide 2.a.3, item 3).

3) É decorrência imediata de definição de base.

Suficiência: a) Unicidade do desenvolvimento. Se

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \text{ então } \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) x_i = 0$$

ou, se denotarmos $a_i - b_i = c_i$, vem que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i = 0$. Se $c_{i_0} \neq 0$, para algum i_0 , como $x_{i_0} \neq 0$ (hipótese), vem que

$$\begin{aligned} 0 < \|c_{i_0} x_{i_0}\| &= \left\| \sum_{i=1}^{i_0} c_i x_i - \sum_{i=1}^{i_0-1} c_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{i_0} c_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{i_0-1} c_i x_i \right\| \leq \\ &\leq K \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\| + K \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\| \leq 2K \left\| \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > i_0$. Logo, $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \right\| > 0$, contradição a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i = 0$. Concluimos que $c_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ e portanto

$$a_i = b_i.$$

b) Um cálculo simples mostra (usando o item 2) que o espaço dos elementos da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é um subespaço F fechado de X (veja [S-I], página 18, proposição 3.1). Dessa forma, 1) e 2) implicam que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica. Por outro lado, 3) implica que $F = X$, o que termina a demonstração. CQD

DEFINIÇÃO 2.a.7 - Uma base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de um espaço de Banach X é dita normalizada se $\|x_n\| = 1$, para todo n .

PROPOSIÇÃO 2.a.8 - Se X é um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base de X então $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base normalizada de X .

DEMONSTRAÇÃO - Óbvio.

2.a.9 EXEMPLOS E OBSERVAÇÃO - Os vetores $e_n = (00..100..0)$ formam uma base monótona e normalizada de $C_0(N)$ e ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. É claro que, para um espaço de Banach ter base de Schauder $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é necessário que ele seja separável, pois o conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid r_i \in \mathbb{Q} \right\}$ é enumerável e denso no espaço. A questão posta por Banach: "Todo espaço de Banach separável tem uma base?" foi respondida negativamente por P. Enflo (veja [E-P]). No entanto, a técnica de trabalhar com uma base de Schauder de um subespaço é bastante útil na solução e discussões dos problemas propostos no capítulo 1. Este procedimento é possível graças ao resultado conhecido: "Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência básica", e sua variante, que envolve sequências que convergem

fracamente a zero, mas não contém nenhuma subsequência que converge em norma a zero. Vejamos estes resultados:

LEMA 2.a.10 - Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Seja $B \subset X$ um subespaço vetorial de X de dimensão finita e $\epsilon > 0$.

a) Existe $x \in X$ com $\|x\| = 1$ tal que, para todo $y \in B$ e todo escalar λ temos, $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$.

b) Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência tal que $\liminf \|x_n\| > 0$ e $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$ então existe uma subsequência

$$y_{n_k} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$$

e existe $x \in \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$, para todo $y \in B$, para todo λ escalar.

DEMONSTRAÇÃO - É claro que, se $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$, para $0 < \epsilon < 1$, então $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$ para $\epsilon \geq 1$, assim vamos nos restringir ao caso $0 < \epsilon < 1$. É também claro que se $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda x\|$ é verdadeira para $\|y\|=1$, também é verdadeira para todo y pertencente a B , pois, se

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq (1+\epsilon) \left\| \frac{y}{\|y\|} + \lambda x \right\|$$

vale para todo λ escalar, então, $\|y\| \leq (1+\epsilon)\|y+\lambda_1 x\|$ vale para todo λ_1 escalar.

Dessa forma, consideraremos apenas $\|y\| = 1$.

Pela compacidade da bola unitária de B , dado $\epsilon > 0$,

existem elementos y_i , $1 \leq i \leq m$, com $\|y_i\| = 1$ e tais que, para todo $y \in B$, com $\|y\| = 1$ existe $1 \leq i \leq m$, tal que $\|y - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos tomar $y'_i \in X'$, $1 \leq i \leq m$ tais que $\|y'_i\| = 1$ e $y'_i(y_i) = 1$.

a) Como a dimensão de X é infinita, existe $x \in X$, $\|x\| = 1$, tal que $y'_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq m$. Assim, dado $y \in B$, $\|y\| = 1$, se escolhermos y_i convenientemente, vem que, para todo escalar λ temos

$$\|y + \lambda x\| = \|y_i + \lambda x - (y_i - y)\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainda pelo teorema de Hahn-Banach, $|y'_i(y_i - \lambda x)| \leq \|y_i + \lambda x\|$ e podemos concluir, da desigualdade acima, que

$$\|y + \lambda x\| \geq |y'_i(y_i + \lambda x)| - \frac{\epsilon}{2} = |y'_i(y_i) + \lambda y'_i(x)| - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{1}{1 + \epsilon} = \frac{\|y\|}{1 + \epsilon}.$$

Daí vem que $\|y\| \leq (1 + \epsilon) \|y + \lambda x\|$.

b) Como $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$, existe $x \in \left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$|y'_i(x)| < \frac{\epsilon}{4}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m.$$

Para todo $|\lambda| \geq 2$, temos que $\|y + \lambda x\| \geq \|\lambda x\| - \|y\| \geq 2 - 1 \geq 1 = \|y\|$, isto é, $\|y\| \leq \|y + \lambda x\|$.

Para $|\lambda| < 2$, retomando parte das desigualdades do caso a) obtemos:

$$\begin{aligned} \|y + \lambda x\| &\geq \|y_i + \lambda x\| - \frac{\epsilon}{2} \geq |y'_i(y_i + \lambda x)| - \frac{\epsilon}{2} = |y'_i(y_i) + \lambda y'_i(x)| - \frac{\epsilon}{2} \geq \\ &\geq 1 - |\lambda y'_i(x)| - \frac{\epsilon}{2} > 1 - 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \epsilon = (1 - \epsilon) \|y\|, \end{aligned}$$

e portanto, $\|y\| \leq \frac{1}{1-\epsilon} \|y+\lambda x\|$.

Dessa forma, para todo escalar λ temos

$$\|y\| \leq \|y+\lambda x\| \quad \text{ou} \quad \|y\| \leq \frac{1}{1-\epsilon} \|y+\lambda x\|,$$

donde se conclui que $\|y\| \leq \frac{1}{1-\epsilon} \|y+\lambda x\|$, para todo escalar λ .
(Sendo ϵ arbitrário, é verdade que

$$\|y\| \leq (1+\delta) \|y+\lambda x\|, \quad \text{com } 1+\delta = \frac{1}{1-\epsilon}.) \quad \text{CQD}$$

TEOREMA 2.a.11 - 1) Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência básica.

2) Se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de vetores em X tal que

$$\liminf \|x_n\| > 0 \quad \text{e} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$$

então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que é uma sequência básica.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Seja $\epsilon > 0$ e $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ números positivos tais que $\prod_{n=1}^{\infty} (1+\epsilon_n) \leq 1+\epsilon$.

Seja x_1 um elemento de X de norma 1 e B_1 o espaço gerado por x_1 . Por a) do lema 2.a.10, existe $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, tal que $\|y\| \leq (1+\epsilon_1) \|y+\lambda x_2\|$, para todo y de B_1 e todo escalar λ . Por indução construímos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\|y\| \leq (1+\epsilon_n) \|y+\lambda x_{n+1}\|,$$

para todo y no espaço B_n gerado por $\{x_1 \dots x_n\}$, e λ escalar qualquer. A sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é básica com constante de ba-

se menor ou igual a $1+\epsilon$. De fato: todos os x_i são diferentes de zero, pela forma com que foram escolhidos ($\|x\| = 1$, para todo i). Além disso,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq (1+\epsilon_n) \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \right\| \leq (1+\epsilon_n)(1+\epsilon_{n+1}) \dots (1+\epsilon_{n+p}) \left\| \sum_{i=1}^{n+p+1} a_i x_i \right\|.$$

Portanto, se $m \geq n$, virá

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq (1+\epsilon) \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\|.$$

Verificamos então 1) e 2) da proposição 2.a.6, o que demonstra a parte 1) do teorema.

2) É a mesma do item 1), tomando-se o cuidado de escolher $x_1 \in \left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$, sendo B_1 o espaço gerado por x_1 , e aplicar, na indução, o lema 2.a.10, item b) CQD

TEOREMA 2.a.12 - Se X é um espaço de Banach, com base incondicional e não contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$ ou a $\ell_1(N)$ então X é reflexivo.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [R-C-2].

O teorema que se segue é devido a Bessaga-Pelczynski (veja [B-P]) e ser-nos-á útil na solução dos problemas [P-2], [P-5] e consequências.

TEOREMA 2.a.13 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes as propriedades:

- 1) X contém um subespaço isomorfo a $C_0(N)$.

2) Existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não converge mas, para todo $x' \in X'$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| \text{ converge.}$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Suponhamos que Y é subespaço de X isomorfo a $C_0(N)$, através do isomorfismo $J: C_0(N) \rightarrow Y$. Para cada $n \in N$, tomemos $e_n = (00..100..)$. Sendo $\|e_n\| = 1$, temos que $\|J(e_n)\| \geq \delta > 0$, e portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} J(e_n)$ não converge. Por outro lado, como $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(e_n)|$ converge para todo $x' \in \ell_1(N)$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |y'(J(e_n))|$ converge para todo y' pertencente a Y' (já que $y' \circ J \in [C_0(N)]' = \ell_1(N)$) e consequentemente, para todo $x' \in X'$.

2) $\implies$ 1) Suponhamos que, em X exista uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| < \infty$, para todo x' pertencente a X' . Então, pelo princípio da limitação uniforme, existe uma constante $M > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| \leq M \|x'\|$ (1).

Como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge, existe $\epsilon_0 > 0$ e inteiros $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots$ tais que

$$\left\| \sum_{n=p_k}^{q_k} x_n \right\| \geq \epsilon_0,$$

para todo k natural.

Tomemos $y_k = \sum_{n=p_k}^{q_k} x_n$; assim, $\|y_k\| \geq \epsilon_0$, para todo k natural. (2)

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)| < \infty$, para todo x' pertencente a X' , vem que

$\sum_{k=1}^{\infty} |x'(y_k)| < \infty$, para todo x' pertencente a X' , e, em consequência, $|x'(y_k)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, ou seja, $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$ (3). Usando (2) e (3) podemos aplicar 2) do teorema 2.a.11: $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ possui uma subsequência, que continuaremos denotando por $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ que é uma sequência básica em X , com constante básica que denotaremos por K .

Tomemos uma sequência de escalares $\{a_i\}_{i=1}^m$. Se $i \leq m$, temos:

$$|a_i| \|y_i\| = \left\| \sum_{j=1}^i a_j y_j - \sum_{j=1}^{i-1} a_j y_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^i a_j y_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{i-1} a_j y_j \right\| \leq 2K \left\| \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\|.$$

Logo,

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \times \varepsilon_0}{2K} \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|. \quad (4)$$

Por outro lado, pelo teorema de Hahn-Banach e por (1), tem-se que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\| &= \sup_{\|x'\| \leq 1} \left\{ \left| \sum_{j=1}^m a_j x'(y_j) \right| \right\} \leq \sup_{\|x'\| \leq 1} \left\{ \sum_{j=1}^m |a_j| |x'(y_j)| \right\} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \sup_{\|x'\| \leq 1} \left\{ \sum_{j=1}^m |x'(y_j)| \right\} \leq \left(\max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \right) M \|x'\| \leq M \max_{1 \leq j \leq m} |a_j|, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j y_j \right\| \leq M \max_{1 \leq j \leq m} |a_j| \quad (5).$$

De (4) e (5), obtemos:

$$\frac{\varepsilon_0}{2K} \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\| \leq M \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|,$$

e é decorrência imediata destas desigualdades que a função linear $J: C_0(N) \rightarrow X$ (obtida tomando-se $J(e_i) = y_i$, para todo $i \in N$) é um isomorfismo entre $C_0(N)$ e o fecho do espaço gerado por $\{y_i\}_{i=1}^\infty$. CQD

COROLÁRIO 2.a.14 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes as propriedades:

- 1) X contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$.
- 2) Existe $\delta > 0$ e uma sequência de vetores $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ com $\|x_n\| \geq \delta$ e tal que

$$\sup_{\substack{|\lambda_n| \leq 1 \\ K \in N}} \left\| \sum_{n=1}^K \lambda_n x_n \right\| \leq M < \infty.$$

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Considere o isomorfismo

$$J: C_0(N) \rightarrow Y \subset X$$

e seja $e_n = (0, 0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, 0, \dots)$. Se considerarmos $x_n = J(e_n)$ então existe $\delta > 0$ tal que $\|J(e_n)\| \geq \delta = \|J^{-1}\|^{-1}$, para todo n , e

$$\sup_{\substack{|\lambda_n| \leq 1 \\ K \in N}} \left\| \sum_{n=1}^K \lambda_n J(e_n) \right\| \leq \|J\| \sup_{\substack{|\lambda_n| \leq 1 \\ K \in N}} \left\| \sum_{n=1}^K \lambda_n e_n \right\| \leq \|J\| \cdot 1.$$

2) $\implies$ 1) Considere a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$. É imediato que ela não

converge pois $\|x_n\| \geq \delta$, para todo n . Por outro lado, se considerarmos $\lambda_n = \frac{1}{\|x_n\|} x'_n(x_n)$ teremos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^K |x'_n(x_n)| &= \sum_{n=1}^K \lambda_n x'_n(x_n) = x' \left(\sum_{n=1}^K \lambda_n x_n \right) = \\ &= \left| x' \left(\sum_{n=1}^K \lambda_n x_n \right) \right| \leq \|x'\| \left\| \sum_{n=1}^K \lambda_n x_n \right\| \leq \|x'\| M. \end{aligned}$$

Logo para $x' \in X'$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n(x_n)|$ é convergente e pelo teorema 2.a.13, X contém então subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$. CQD

No que se segue faremos um breve apanhado de resultados sobre espaços reflexivos e fracamente sequencialmente completos que precisaremos na discussão dos problemas [P-2], [P-5] e consequências.

DEFINIÇÃO 2.a.15 - Seja X um espaço normado, X' e X'' seu dual e bidual topológico, respectivamente. Seja $F: X \rightarrow X''$ dada por $F(x) = x''$ com $x''(x') = x'(x)$, para todo $x \in X$ e $x' \in X'$. Um espaço normado X é dito reflexivo se $F: X \rightarrow X''$ definida acima é sobrejetora.

DEFINIÇÃO 2.a.16 - Dado um espaço normado X , sua topologia fraca $\sigma(X, X')$ é a menos fina das topologias sobre X que torna contínuas as aplicações $x \in X \mapsto x'(x)$, onde $x' \in X'$.

PROPOSIÇÃO 2.a.17 - 1) A topologia fraca de um espaço normado é separada.

2) Todo convexo fechado em X é fracamente fechado.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [H-4].

O teorema que se segue é um apanhado sobre reflexividade. A equivalência de 5, e reflexividade será a mais usada e por este motivo damos uma demonstração que supomos de nossa autoria.

TEOREMA 2.a.18 - Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

- 1) X é reflexivo.
- 2) Toda sequência limitada contém uma subsequência fracamente convergente.
- 3) O conjunto $\overline{B_1(0)} = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ é fracamente compacto.
- 4) Todo funcional linear contínuo tem máximo na fronteira do conjunto $\overline{B_1(0)}$.
- 5) Toda sequência descendente $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ de convexos limitados, fechados e não vazios de X têm interseção não vazia.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\iff$ 2) Veja [Y], página 141.

1) $\iff$ 3) Veja [H-4], página 272.

1) $\iff$ 4) Veja [RC-5].

Para equivalência de 5) com as outras propriedades usaremos o esquema $3) \implies 5)$, $5) \implies 4)$.

$3) \implies 5)$ Se $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ são convexos, fechados e limi-

tados, segue de 2) da proposição 2.a.17 que são fracamente fechados e, de 3), do enunciado acima segue que a interseção é não vazia pois a bola que os contém é fracamente compacta.

5) $\implies$ 4) (Basta provar: (não 4) $\implies$ (não 5)). Suponhamos, por absurdo, que existisse um funcional

$x' \in X'$ tal que não existe $\overline{x \in B_1(0)}$ com $x'(x) = \|x'\|$.

Considerando a sequência de convexos fechados, limitados e não vazios definidos por

$$c_n = \overline{\{x' \in X' \mid \|x'\| - \frac{1}{n+1} \leq x'(x) \leq \|x'\| \} \cap B_1(0)},$$

é fácil verificar que $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} c_n = \emptyset$, o que contraria a hipótese. CQD

OBSERVAÇÃO 2.a.19 - Na realidade, no caso de um espaço normado, a propriedade 5) do teorema 2.a.18 é mais forte que a 4), pois esta não implica que o espaço X seja completo (veja [R-C-4]), enquanto que é uma verificação simples mostrar que 5) implica que X é de Banach.

COROLÁRIO 2.a.20 - 1) Se X e Y são espaços de Banach isomorfos e X é reflexivo, então Y é reflexivo.

2) Se Y é subespaço fechado de X , e X é reflexivo, então Y é reflexivo.

3) $C_0(N)$ não é reflexivo.

4) Se X é reflexivo, então X não contém nenhum subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Seja $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ uma sequência de convexos, limitados, fechados e não vazios em Y . Se $J: Y \longrightarrow X$ é um isomorfismo entre X e Y , é imediato que $J(c_1) \supset J(c_2) \dots$ é uma sequência de convexos, fechados, limitados e não vazios. Logo $\bigcap_{i=1}^{\infty} J(c_i) \neq \emptyset$, e então, $J^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} J(c_i) \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} c_i \neq \emptyset$, e Y é reflexivo.

2) Tomemos $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ convexos, fechados, limitados e não vazios em Y . Como Y é fechado, $c_1 \supset c_2 \supset \dots$ são convexos fechados, limitados e não vazios em X ; logo, $\bigcap_{i=1}^{\infty} c_i \neq \emptyset$, e segue que Y é reflexivo.

3) Para cada n natural, consideremos o conjunto

$$c_n = \{x \in C_0(\mathbb{N}) \mid \|x\| \leq 1, x_i = 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

É imediato que $c_1 \supset c_2 \supset c_3 \supset \dots$ e que os c_i são convexos, limitados, fechados, não vazios; para todo $n \in \mathbb{N}$, se

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \bigcap_{i=1}^n c_i$$

então $x_i = 1, 1 \leq i \leq n$. Daí vem que $x \notin C_0(\mathbb{N})$; logo, $\bigcap_{i=1}^{\infty} c_i = \emptyset$ e $C_0(\mathbb{N})$ não é reflexivo.

4) Consequência imediata das afirmações 1), 2) e 3) CQD

DEFINIÇÃO 2.a.21 - Seja X um espaço de Banach. Diremos que X é fracamente sequencialmente completo se, dada uma sequên-

cia $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de X tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x'(x_i)$ existe, para todo $x' \in X'$, então existe $x \in X$ tal que $x'(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} x'(x_i)$, para todo $x' \in X'$.

PROPOSIÇÃO 2.a.22 - 1) Se X é um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo e Y é isomorfismo a X , então, Y é fracamente sequencialmente completo.

2) Se X é um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo e Y é subespaço fechado de X então, Y é fracamente sequencialmente completo.

3) $C_0(N)$ não é fracamente sequencialmente completo.

4) Se X é fracamente sequencialmente completo então X não contém nenhum subespaço isomorfo a $C_0(N)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Imediata.

2) Imediata.

3) Tomemos $x_n = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $x' \in \ell_1(N)$, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, se $n, m \geq n_0$ então

$$|x'(x_n - x_m)| = |x'(0, 0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)| \leq \varepsilon.$$

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy fraca em $C_0(N)$.

É imediato que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ não converge fracamente em $C_0(N)$, pois converge $\sigma(X'', X')$ para

$$e = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \in C_0(N)'' = \ell_{\infty}(N).$$

4) É consequência imediata das afirmações 1), 2) e 3).

CQD

PROPOSIÇÃO 2.a.23 - Todo espaço reflexivo é fracamente sequencialmente completo.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy fraca em X . Assim, dado $\varepsilon = 1$, existe n_0 , tal que, se $n \geq n_0$,

$$|x'(x_n) - x'(x_{n_0})| \leq 1 \text{ ou, se } n \geq n_0 \quad |x'(x_n)| \leq |x'(x_{n_0})| + 1.$$

Logo, $|x'(x_n)| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo princípio da limitação uniforme, o conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é limitado na norma de X . Como o espaço é reflexivo, segue do teorema 2.a.18, item 2), que existe

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} x_0; \text{ logo, } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} x_0. \quad \text{CQD}$$

O teorema que segue será útil nas considerações que faremos após a solução dos problemas [P-2], [P-5] e consequências e é devido a Odell e Rosenthal.

TEOREMA 2.a.24 - Seja X um espaço de Banach separável. As seguintes propriedades são equivalentes:

- 1) X não contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$.
- 2) Todo elemento de X'' é $\sigma(X'', X')$ -limite de uma sequência de elementos de X .
- 3) O cardinal de X'' é igual ao cardinal de X .
- 4) Toda sequência limitada em X'' tem uma subsequência $\sigma(X'', X')$ -convergente.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [O-R] e [R].

COROLÁRIO 2.a.25 - Se X é um espaço de Banach separável, não reflexivo, que não contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$ então X não é fracamente sequencialmente completo.

DEMONSTRAÇÃO - Se X não é reflexivo então por 2) do teorema 2.a.24, existe um elemento $x'' \in X''$, $x'' \notin X$ e existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, com $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\sigma(X'', X')}$ x'' . Assim, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy fraca em X e não convergente em X : logo, X não é fracamente sequencialmente completo. CQD

PROPOSIÇÃO 2.a.26 - Se X é um espaço de Banach com bidual X'' separável, então X não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$ ou a $\ell_1(\mathbb{N})$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Se existisse um isomorfismo $T_1: \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow X$, existiria $T_2: X' \rightarrow [T(\ell_1(\mathbb{N}))]'$ definida por

$$T_2(x') = x' / T(\ell_1(\mathbb{N}))$$

com T_2 linear, $\|T_2\| = 1$, T_2 sobrejetora (Teorema de Hahn-Banach). Como X'' é separável concluímos que X' é separável. (Veja [Y], página 126). Portanto a função $T_2: X' \rightarrow \ell_{\infty}(\mathbb{N})$ é linear, contínua de um espaço separável sobre um espaço não separável; o que é um absurdo.

2) Se existisse $T: C_0(\mathbb{N}) \rightarrow X$; como anteriormente existiria $T_2: X' \rightarrow \ell_1(\mathbb{N})$ linear contínua sobrejetora $\|T_2\| = 1$. Então existiria $T_3: [\ell_1(\mathbb{N})]' \rightarrow (X')'$ definida por $T_3(x') = T_2 \circ x'$ que é linear, contínua e injetora (T_2 é sobre. Veja

[Y], página 205). Portanto $T_3: \ell_\infty(N) \rightarrow X''$ é uma função linear, contínua e injetora de um espaço não separável num espaço separável; o que é absurdo. CQD

2.b - CLASSES DE ESPAÇOS DE BANACH

Antes de abordarmos os resultados que constam neste parágrafo, convém introduzir algumas notações que serão frequentemente utilizadas:

Seja E um conjunto, $\sigma(E)$ uma σ -álgebra de subconjuntos de E e μ uma medida positiva definida em $\sigma(E)$. $L_p(\mu)$ ou $L_p(E, \sigma(E), \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, denotará a classe de todas as funções mensuráveis (identificamos as que diferem num conjunto de medida nula); $f: E \rightarrow \mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que

$$\int_E |f(t)|^p d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \|f\| = \left(\int_E |f(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L_\infty(\mu) = L_\infty(E, \sigma(E), \mu)$ é a classe de todas as funções mensuráveis $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\|f\| = \sup_{t \in E} \text{ess} |f(t)| < \infty$.

$C(K)$ designará o conjunto das funções contínuas $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, sendo K um conjunto compacto (sempre de Hausdorff).

$C(K, \mathbb{R})$ é o conjunto das funções contínuas $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, sendo K um conjunto compacto. Em $C(K)$ e $C(K, \mathbb{R})$ consideramos a norma $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$.

DEFINIÇÃO 2.b.1 - Dado um espaço de Banach X , dizemos que X

é uniformemente convexo se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$, com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ temos $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta(\epsilon)$.

As propriedades dos espaços uniformemente convexos que utilizaremos podem ser descritas resumidamente por:

TEOREMA 2.b.2 - 1) Os espaços de Hilbert são uniformemente convexos.

2) Subespaços fechados de espaços uniformemente convexos são espaços uniformemente convexos.

3) Os espaços uniformemente convexos são reflexivos.

4) Para $1 < p < \infty$, $L_p(u)$ é um espaço uniformemente convexo.

5) Se X é um espaço uniformemente convexo e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X então existem constantes A e B positivas e números reais $1 < p \leq r < \infty$ tais que:

$$B \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r \right)^{1/r} \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq A \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p},$$

para toda escolha de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Seja X um espaço de Hilbert. Vale a lei do paralelogramo: para todo $x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

e daí segue imediatamente que, se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \epsilon$ então $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - [1 - \sqrt{1 - (\epsilon/2)^2}]$.

2) É decorrência imediata da definição de espaço uniformemente convexo.

3) Veja [K-G], página 354.

4) Veja [C] e [H-S], páginas 232 e 227.

5) Veja [RC-1].

TEOREMA 2.b.3 - $L_\infty(u)$ é isométrico a $C(K)$, para algum K compacto.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [D-S], página 445, volume I.

Vamos agora introduzir as chamadas funções de Rademacher e a desigualdade de Khintchine, que ser-nos-ão úteis no desenvolvimento do problema 3. Usaremos a função $sn: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$sn(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 2.b.4 - Sejam $r_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$r_n(t) = sn\{\sin(2^n \pi t)\}, \text{ para todo } t \in [0,1],$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (denominadas *funções de Rademacher*). Para todo p , $1 \leq p < \infty$, existem números $A(p), B(p) > 0$ tais que

$$A(p) \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq B(p) \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2 \right)^{1/2},$$

para toda escolha de escalares $\{a_n\}_{n=1}^m$, e para todo m natural.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [Z].

Para as definições que seguem consulte se necessário, [L-E], páginas 9, 17, 21 e 131.

DEFINIÇÃO 2.b.5 - Seja X um reticulado de Banach (real ou complexo). Dizemos que a norma de X é p -aditiva ($1 \leq p < \infty$), se, para todo $x, y \in X$ com $x \wedge y = 0$ vale que $\|x+y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$. Um reticulado de Banach em que a norma é p -aditiva ($1 \leq p < \infty$) é chamado um espaço L_p -abstrato.

TEOREMA 2.b.6 - Seja X um espaço L_p -abstrato.

1) X é isométrico a $[\ell_p(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A} L_p([0,1]^{m_\alpha}, \mathbb{C}) \right)_p]_p$, para algum conjunto de índices Γ e algum conjunto de cardinais $\{m_\alpha\}_{\alpha \in A}$, com $m_\alpha \geq \chi_0$, para todo $\alpha \in A$.

2) Se $m \geq \chi_0$ então $L_p([0,1]^m, \mathbb{C})$ contém um subespaço isomorfo a $\ell_2(\Gamma, \mathbb{C})$, onde $\text{card } \Gamma = m$, $1 \leq p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Veja [L-E], corolário página 136.

2) Veja [L-E], página 128, teorema 12.

TEOREMA 2.b.7 - 1) Seja X um espaço de Banach sobre o corpo dos reais que contém um subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Então X tem um subespaço isomorfo a $L_1(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$.

2) Se u é uma medida positiva não atômica, então existe

um conjunto enumerável $\{m_B \mid B < \alpha\}$ de cardinais distintos; ($m_B \geq \chi_0$) tal que $L_p(u)$, $1 \leq p < \infty$ é isomorfo a

$$[\oplus_{B < \alpha} L_p([0,1]^{m_B}, \mathbb{K})]_p.$$

3) Se K é um espaço compacto (Hausdorff) são equivalentes as propriedades:

- a) K é disperso.
- b) $[C(K, \mathbb{R})]'$ é isomorfo a $\ell_1(\Gamma, \mathbb{R})$ para algum Γ .
- c) $[C(K, \mathbb{R})]'$ não contém subespaço isomorfo a $L_1([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Veja [R-H], página 316, proposição 2.2.

2) Veja [L-E], página 127, teorema 9.

3) Veja [P-S], página 214, itens 1, 12 e 13. CQD

No capítulo 3 classificamos a importante classe de espaços de Banach que passamos a definir.

DEFINIÇÃO 2.b.8 - Seja $1 \leq p < \infty$ e seja $\omega = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência não crescente de números positivos tais que

$$\omega_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \infty.$$

O espaço de Banach de todas as sequências de escalares $x = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ para as quais

$$\|x\| = \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|^{p \omega_n} \right)^{1/p} < \infty,$$

(onde π percorre todas as permutações dos inteiros) será de-

notado por $d(\omega, p)$ e é chamado *espaço de seqüências de Lorentz* (veja [L]).

EXEMPLO 2.b.9 - Seja T_0 o conjunto das seqüências quase nulas. Denotaremos por $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ os vetores

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

e, se $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in T_0$, tomemos $\|x\|_0 = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ e

$$\|x\|_{m+1} = \max\left\{\|x\|_m, \frac{1}{2} \max_{j=1}^K \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|_m\right\}$$

onde o máximo interior à chave é tomado sobre todas as escolhas de $K \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{K+1}$, $K = 1, 2, 3, \dots$.

É imediato que, se tomarmos $\|x\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x\|_m$ (que existe, pois a sucessão $\|x\|_m$ é crescente e limitada superiormente), obtemos uma norma em T_0 . Denotaremos por T o completado de T_0 .

São conhecidos os resultados seguintes:

$$1) \quad \|x\| = \max\left\{\max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \frac{1}{2} \sup_{j=1}^K \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|, \right.$$

$K \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{K+1}, K = 1, 2, 3, \dots\}$ para todo $x \in T$.

2) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base incondicional de T . (Veja definição 2.a.1).

3) T não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$ ou $\ell_1(\mathbb{N})$.

4) T é reflexivo - É decorrência imediata do 2) e 3).

(Veja teorema 2.a.12).

5) T não contém nenhum subespaço de dimensão infinita uniformemente convexo.

DEMONSTRAÇÃO - Veja [F-J].

DEFINIÇÃO 2.b.10 - Um espaço de Banach X é denominado um espaço de Schurr, se para toda sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a propriedade $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$ implica que $\|x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

PROPOSIÇÃO 2.b.11 - 1) Seja Γ um conjunto não vazio,

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}; \ell_1(\Gamma, \mathbb{K}) = \{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{K} \mid \|f\| = \sum_{x \in \Gamma} |f(x)| < \infty\}, \ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$$

é um espaço de Schurr.

2) Todo espaço de Schurr então, é um espaço de Banach, fracamente sequencialmente completo.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Veja [L-E], página 174, lema 4.

2) Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy fraca, então das quaisquer subsequências $\{x_{n_r}\}_{r=1}^{\infty}$ $\{x_{m_r}\}_{r=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ temos que $y_r = x_{n_r} - x_{m_r}$; $y_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} 0$. Como X é um espaço de Schurr $\|y_r\| \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$ logo a sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tem a propriedade: Dadas duas subsequências quaisquer

$$\left\{x_{n_r}\right\}_{r=1}^{\infty}, \left\{x_{m_r}\right\}_{r=1}^{\infty}, \|x_{n_r} - x_{m_r}\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

e então $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy na norma do espaço, logo

$$\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ e portanto } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fracamente}} x_0.$$

CQD

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS

3.a - PROBLEMAS DOIS, CINCO E APLICAÇÕES

DEFINIÇÃO 3.a.1 - Sejam X e Y espaços de Banach e

$$f \in \text{SV}([a,b], L(X,Y)).$$

Para $[c,d] \subset [a,b]$ definimos:

$$\text{SV}_{[c,d]}[f] = \lim_{\substack{t \rightarrow d \\ t < d}} \text{SV}_{[c,t]}[f] = \sup_{t < d} \text{SV}_{[c,t]}[f],$$

e analogamente,

$$\text{SV}_{[c,d]}[f] = \lim_{\substack{t \rightarrow c \\ t > c}} \text{SV}_{[t,d]}[f] = \sup_{t > c} \text{SV}_{[t,d]}[f].$$

Quando $X = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) usaremos as notações

$$w_{[c,d]}[f], w_{[c,d]}[f] \text{ em vez de } \text{SV}_{[c,d]}[f], \text{SV}_{[c,d]}[f].$$

O teorema 3.a.2 e o corolário 3.a.6 que seguem resolvem completamente os problemas [P-5] e [P-2] propostos no capítulo 1.

TEOREMA 3.a.2 - Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \neq \{0\}$.

São equivalentes as seguintes propriedades:

- 1) Y não contém um subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.
- 2) Para toda $f \in SV([a,b], L(X,Y))$, temos:
 - a) $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{[t-\epsilon, t]}[f] = 0$, para qualquer $t \in [a,b]$;
 - b) $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{[t, t+\epsilon]}[f] = 0$, para qualquer $t \in [a,b]$.
- 3) $SV([a,b], L(X,Y)) \subset G([a,b], L(X,Y))$.
- 4) $SV([a,b], L(X,Y)) \subset D([a,b], L(X,Y))$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Se não, suponhamos que exista $t_0 \in [a,b]$

tal que $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{[t_0-\epsilon, t_0]}[f] = 2\delta > 0$. Podemos então tomar

$\{q_n\}_{n=1}^\infty \subset [a,b]$, estritamente crescente, com $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = t_0$ e tal que $SV_{[q_n, q_{n+1}]}[f] > \delta$, para todo n natural. Como

$$f \in SV([a,b], L(X,Y)),$$

para todo n natural, existe

$$q_n = t_0^n < t_1^n, \dots, < t_{j(n)}^n = q_{n+1} \quad \text{e} \quad x_i \in X, \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq j(n),$$

tais que, se

$$h_n = \sum_{i=1}^{j(n)} [f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)] x_i$$

então

$$\|h_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{j(n)} [f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)] x_i \right\| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Por outro lado, como $f \in SV([a,b], L(X,Y))$ então

$$\sup_{\substack{|\lambda_i| \leq 1 \\ K \in \mathbb{N}}} \left\| \sum_{n=1}^K \lambda_n h_n \right\| \leq SV[f],$$

e aplicando o corolário 2.a.14, virá que Y contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$, o que contraria a hipótese.

2) $\implies$ 3) Considere $t_0 \in [a,b]$ e $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência estritamente crescente (ou decrescente) convergindo a t_0 . Como $\|f(t_n) - f(t_m)\| \leq SV_{[t_n, t_m]}[f]$, é imediato, aplicando 2), que $\{f(t_n)\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy; portanto, existe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

3) $\implies$ 4) Imediato pelo corolário 1.c.3, item 3.

4) $\implies$ 1) Seja H um subespaço de Y isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$, e $J: C_0(\mathbb{N}) \rightarrow H$ um isomorfismo. Em 1.e.2, mostramos que existe $f: [a,b] \rightarrow C_0(\mathbb{N})$ tal que $f \in BW([a,b], C_0(\mathbb{N}))$ e $f \notin D([a,b], C_0(\mathbb{N}))$. Portanto, para $h = J \circ f$, temos $h \in BW([a,b], Y)$ e $h \notin D([a,b], Y)$. Seja $x'_0 \in X'$ com $\|x'_0\| = 1$, e $\hat{f}: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$, definida por $\hat{f}(t)(x) = x'_0(x)h(t)$, para todo $t \in [a,b]$ e todo $x \in X$. É imediato que $\hat{f} \in SV([a,b], L(X,Y))$ e, além disto, $\hat{f} \notin D([a,b], L(X,Y))$, o que contraria a hipótese. CQD

COROLÁRIO 3.a.3 - Seja Y um espaço de Banach fracamente se-

quencialmente completo (em particular, reflexivo). São verdadeiras as afirmações equivalentes 2, 3 e 4 do teorema 3.a.2.

DEMONSTRAÇÃO - Pela proposição 2.a.22, sabemos que, se Y é fracamente sequencialmente completo então Y não contém nenhum subespaço isomorfo a $C_0(N)$; do teorema 3.a.2 segue a conclusão. CQD

EXEMPLO 3.a.4 - Considere J o espaço de James, formado por todas as seqüências $x = (a_1, a_2, \dots, a_n \dots)$ de escalares para as quais vale:

$$a) \quad \|x\| = \sup \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(a_{p_1} - a_{p_2})^2 + (a_{p_2} - a_{p_3})^2 + \dots + (a_{p_{m-1}} - a_{p_m})^2 + (a_{p_m} - a_{p_1})^2} < \infty,$$

o supremo sendo tomado sobre todas as escolhas de $m \in \mathbb{N}$ e $p_1 < p_2 < \dots < p_m$.

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Seja $e_i = (0, 0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, 0, \dots)$. Temos:

$$1) \quad J'' = \{(a_1, a_2, \dots, a_n \dots) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| < \infty\}$$

2) A imagem de J em J'' pela aplicação canônica tem co-dimensão 1 em J'' , e portanto, J não é reflexivo.

3) J'' é separável, donde decorre que J não contém $C_0(N)$ ou $\ell_1(N)$. (Veja proposição 2.a.26).

4) J e J'' são isométricos (não pela aplicação canônica).

DEMONSTRAÇÃO - Veja [R-C-2], [R-C-3].

PROPOSIÇÃO 3.a.5 - Seja J o espaço de James (exemplo 3.a.4).

Temos:

1) J não é fracamente sequencialmente completo.

2) São verdadeiras as propriedades equivalentes 2,3 e 4 do teorema 3.a.2 onde $Y = J$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Por 2 do exemplo 3.a.4, sabemos que J não é reflexivo. Por outro lado, 3, do mesmo exemplo, garante que J não contém $\ell_1(\mathbb{N})$, e aplicando o corolário 2.a.25, demonstramos 1).

2) É decorrência imediata de 3 do exemplo 3.a.4 e do teorema 3.a.2. CQD

COROLÁRIO 3.a.6 - Seja Y um espaço de Banach. São equivalentes as propriedades:

1) Y não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.

2) Para toda $f \in BW([a,b], Y)$, temos:

a) $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \omega_{[t-\epsilon, t[}[f] = 0$, para qualquer $t \in]a, b[$;

b) $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \omega_{]t, t+\epsilon]}[f] = 0$, para qualquer $t \in [a, b[$.

3) $BW([a,b], Y) \subset G([a,b], Y)$.

4) $BW([a,b], Y) \subset D([a,b], Y)$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta aplicar o teorema 3.a.2 para o caso $X = \mathbb{K}$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (Veja definição 1.d.7, item c). CQD

O corolário abaixo contém os teoremas 4.12, 4.13 e 4.14 de [H-1], páginas 49, 50 e 51.

COROLÁRIO 3.a.7 - Seja Y um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo (em particular, reflexivo). Então são verdadeiras as propriedades equivalentes 2, 3 e 4 do corolário 3.a.6.

DEMONSTRAÇÃO - Se Y é um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo, sabemos, pela proposição 2.a.22, que Y não contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$; aplicando o corolário 3.a.6, obtemos imediatamente o resultado. CQD

A proposição que se segue mostra que o corolário 3.a.6 é mais geral que o corolário 3.a.7, e portanto, mais geral que os teoremas 4.12, 4.13 e 4.14 de [H-1]

PROPOSIÇÃO 3.a.8 - Seja $Y = J$ o espaço de James (exemplo 3.a.4). Temos:

- 1) J não é fracamente sequencialmente completo.
- 2) São verdadeiras as propriedades equivalentes 2, 3 e 4 do corolário 3.a.6, onde $Y = J$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) É decorrência imediata da proposição 3.a.5.

2) É decorrência imediata de 3 do exemplo 3.a.4 e do corolário 3.a.6. CQD

3.a.9 APLICAÇÕES DOS PROBLEMAS DOIS E CINCO - Queremos agora mencionar outras questões em aberto resolvidas pelos pro-

blemas [P-2] e [P-5].

[P-6] Se $SV([a,b],L(X,Y)) \subset G([a,b],L(X,Y))$ temos necessariamente que Y é fracamente sequencialmente completo? (Veja [H-5], página 13, problema 5). A resposta é negativa, como decorrência imediata da proposição 3.a.5.

[P-7] Uma outra questão em aberto, cuja resolução foi encaminhada pelo problema [P-2] e [P-5] é:

Seja $f \in SV([a,b],L(X,Y))$ e $t_0 \in [a,b[$ tal que existe $\lim_{t \uparrow t_0} f(t) = f(t_0+)$. Podemos concluir que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{]t_0, t_0 + \epsilon]}[f] = 0?$$

(Veja [H-2], página 185, problema 7.4).

O problema [P-5] mostra que, se existe uma tal função, o contra domínio deverá conter $C_0(N)$ (a menos de isomorfismo). De fato, seja $f: [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow C_0(N)$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \\ f_n, & \text{se } x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

onde $f_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $f_2 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$, $f_3 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$, $f_4 = (0, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots)$, $f_5 = (0, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots)$, $f_6 = (0, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots)$,
Dada uma sequência $\delta = \{s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_n, t_n\}$, com $0 \leq s_1 < t_1 \leq \dots \leq s_n < t_n \leq 1$, vem imediatamente que

$$\left\| \sum_{i=1}^n [f(t_i) - f(s_i)] \right\| \leq 1,$$

e portanto, $f \in B\mathcal{W}([0,1], C_0(N))$. Por outro lado, dado $]0, \epsilon]$, é imediato que

$$\omega_{]0, \epsilon]}[f] = 1, \text{ e portanto, } \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \omega_{]0, \epsilon]} = 1.$$

Entretanto, um cálculo simples mostra que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 = f(0)$.

Seja $\hat{f}: [0,1] \longrightarrow L(X,Y)$, definida por

$$\hat{f}(t) \cdot x = x'_0(x) \cdot f(t), \text{ com } x'_0 \in X', \quad \|x'_0\| = 1.$$

É fácil ver que $\hat{f} \in \text{SV}([a,b], L(X,Y))$; $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \text{SV}_{]0, \epsilon]}(\hat{f}) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \hat{f}(t) = 0 = \hat{f}(0)$.

[P-8] É claro que podemos obter $f_1: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C_0(N)$ contínua, com as mesmas propriedades da função f definida em [P-7]. (Basta tomar f nula nos pontos médios dos intervalos $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e linearizar entre 2 pontos consecutivos de definição).

Então se $X \neq \{0\}$, a função $\hat{f}_1: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow L(X, C_0(N))$ é dada por $\hat{f}_1(t)(x) = x'_0(x) \cdot f_1(t)$, onde $x'_0 \in X'$, $\|x'_0\| = 1$ têm as seguintes propriedades:

- a) $\hat{f}_1 \in \text{CSV}([0,1], L(X,Y))$.
- b) $\text{SV}_{[0, \delta]}[\hat{f}_1] = 1, \quad 0 < \delta < 1$.
- c) $\text{SV}_{[0, 1]}[\hat{f}_1] = 1$.

o que resolve outra questão em aberto: (veja [H-2], página 186, problema 7.5).

Dar um exemplo de $f \in \text{CSV}([a,b], L(X))$ e $d \in \mathcal{D}$ tal que

$$SV_d[f] - \|f(t_1) - f(a)\| > SV[f] - SV_{[a,t_1]}[f].$$

De fato, tomando-se $f = \hat{f}_1, [a,b] = [0,1], a = 0$ e $t_1 \neq 0$, tal que $\hat{f}_1(t_1) = 0$, virá que $SV_d[\hat{f}_1] > 0$, o que é obviamente verdadeiro para toda partição d que contenha o ponto t_1 .

[E-1] Em [H-2], página 185, após o problema 7.4, Hönig afirma que, se $f \in BW([a,b], X)$ e existe $f(t_0^+)$ então

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} BW_{[t_0, t_0 + \epsilon]}[f] = 0.$$

A função $f: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow C_0(\mathbb{N})$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \\ f_n, & \text{se } x = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (\text{vide solução do problema [P-7]}).$$

mostra que a afirmação é incorreta.

[E-2] Em [H-1], página 48, Hönig demonstra que, se $f \in BW([a,b], X)$ então, para todo $t \in [a,b[, f(t^+) \in X''$ existe no sentido $X''_{\sigma}(X'', X')$. A seguir, demonstra o teorema:

Seja X um espaço de Banach e $f \in BW([a,b], X)$.

Se $t \in [a,b[$ e $f(t^+) \in X$ então $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \|f(t+\epsilon) - f(t^+)\| = 0$.

Demos o seguinte contra exemplo ao resultado acima:

seja

$$f: [0,1] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C_0(\mathbb{N}), \quad f(x) = \begin{cases} (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, 0, \dots) & \text{se } x = \frac{1}{n} \\ 0, & x \notin \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

É imediato que $f \in B\mathcal{W}([0,1], C_0(\mathbb{N}))$ e que $f(0^+) = 0 \in [C_0(\mathbb{N})]'' = \ell_{\infty}(\mathbb{N})$ (na topologia $\sigma(X'', X')$). Também temos $f(0^+) = 0 \in C_0(\mathbb{N})$, mas não existe $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \|f(\epsilon) - f(0^+)\|$.

Para terminar, queremos observar que, se Y não contém $C_0(\mathbb{N})$ e $f \in SV([a,b], L(X,Y))$ então, pelo teorema 3.a.2, temos:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} SV_{[t_0, t_0 + \epsilon]}[f] = 0 \quad \text{e} \quad f \in G([a,b], L(X,Y)).$$

Segue, como consequência deste resultado, uma resposta parcial aos problemas 7.3, 7.7 de [H-2]: Se X é um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$ então o sistema

$$(I) \quad \begin{cases} y(t) - y(s) + \int_s^t dA(\sigma)y(\sigma) = f(t) - f(s), \text{ para todo } t, s \in [a,b[\\ F(y) = c \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} & f \in G([a,b[, X), A \in \text{ECSV}^{loc}([a,b[, L(X)), [A \in \text{ECSV}^{loc}([a,b[, L(X)) = \\ & = \text{SV}^{loc}([a,b[, L(X))], F \in L(G([a,b[, X), Y) \text{ e } c \in Y_F = F[G([a,b[, X)], \end{aligned}$$

tem uma única solução (pois existe o resolvente)

$$y \in G([a, b], X).$$

Tal resultado era conhecido para a classe dos espaços X fracamente sequencialmente completos. Agora a classe foi ampliada como mostra, outra vez, o espaço J de James. Resta ainda o problema de saber se a equação (I) tem resolvente quando X contém $C_0(N)$. (Por exemplo, nos casos importantes de $X = C([a, b])$ ou $G([a, b])$).

Vamos agora mencionar rapidamente o problema da mensurabilidade das funções dos espaços

$$B\mathcal{W}([a, b], Y) \text{ e } R([a, b], Y).$$

DEFINIÇÃO 3.a.10 - Seja Y um espaço de Banach e $f: [a, b] \rightarrow Y$.

a) $f: [a, b] \rightarrow Y$ será chamada uma *função simples* se existem conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, $B_1, B_2, \dots, B_m$, de $[a, b]$, tais que $f(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{B_i}(t) \cdot x_i$, onde $x_i \in Y$ e χ_{B_i} é a função característica de B_i .

b) $f: [a, b] \rightarrow Y$ será dita *fortemente mensurável* se existe uma sequência f_n de funções simples tais que $f_n(t) \rightarrow f(t)$, para quase todo $t \in [a, b]$. Denotaremos por $M([a, b], Y)$ o espaço vetorial das funções mensuráveis.

c) $f: [a, b] \rightarrow Y$ será dita *fracamente mensurável* se $x' \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ é mensurável, para toda $x' \in X'$.

TEOREMA 3.a.11 (Pettis) - Seja Y espaço de Banach separável

$f: [a,b] \longrightarrow Y$. São equivalentes as propriedades:

- a) f é fortemente mensurável.
- b) f é fracamente mensurável.

DEMONSTRAÇÃO - Veja $[Y]$.

COROLÁRIO 3.a.12 (Pettis) - Seja Y um espaço de Banach separável. Temos:

- 1) $R([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.
- 2) $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Basta lembrar que, se $f \in R([a,b],Y)$ então $x' \circ f \in R([a,b],K)$, para toda $x' \in X'$, por 2 da proposição 1.a.7, e aplicando 3.a.11, temos que $f \in M([a,b],Y)$.

2) É imediato, pois $BW([a,b],Y) \subset R([a,b],Y)$ (por 6 do teorema 1.d.4).

CQD

Os exemplos abaixo mostram que, para espaços de Banach não separáveis, o corolário 3.a.12 não é verdadeiro.

EXEMPLOS 3.a.13 - 1) Seja H um espaço de Hilbert com uma base Hilbertiana $\{\ell_t\}_{0 \leq t \leq 1}$. Definimos $f: [0,1] \longrightarrow H$ por $f(t) = \ell_t$. É imediato que:

a) $f \in R([0,1],H)$ e $\int_0^1 f(t) dt = 0$;

b) $f \notin M([0,1],H)$.

DEMONSTRAÇÃO - a) $\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) \Delta t_i \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{|d|} (\Delta t_i)^2} \leq \sqrt{\Delta d}$.

Portanto,

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{|d|} f(\varepsilon_i) \Delta t_i = \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

b) Dado $\varepsilon > 0$, é imediato que não existe um compacto $K_\varepsilon \subset [0,1]$ tal que $u(cK_\varepsilon) \leq \varepsilon$, com f/K_ε contínua; logo, f não é mensurável. CQD

2) Sejam $I = [0,1]$, $Y = C_0(I)$ e $\ell_t: [0,1] \rightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$\ell_t(x) = \begin{cases} 0, & t \neq x \\ 1, & t = x. \end{cases}$$

A função $f: [0,1] \rightarrow C_0(I)$, dada por $f(t) = \ell_t$, tem as seguintes propriedades:

- a) $f \in BW([0,1], C_0(I))$ (e portanto, $f \in R([0,1], C_0(I))$);
- b) $f \notin M([0,1], C_0(I))$.

DEMONSTRAÇÃO - Como a) do exemplo 1.

3) Seja $f: [a,b] \rightarrow L_\infty([a,b])$, dada por $f(t) = X_{[a,t]}$. É imediato que:

- a) $f \in BW([a,b], L_\infty([a,b]))$;
- b) $f \notin M([a,b], L_\infty([a,b]))$.

DEMONSTRAÇÃO - Como a do exemplo 1.

QUESTÕES 3.a.14 - Queremos propor algumas questões sobre a mensurabilidade de funções de $BW([a,b], Y)$ e $R([a,b], Y)$.

[Q-1] - Caracterizar os espaços de Banach Y para os quais $R([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.

[Q-2] - Caracterizar os espaços de Banach Y para os quais $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.

As questões acima nos parecem muito difíceis, e por isto é natural propormos inicialmente as mesmas questões em certas classes particulares de espaços de Banach, tais como:

1) Y fracamente sequencialmente completo (em particular, reflexivo).

2) $Y = X'$ (Y um dual).

PROPOSIÇÃO 3.a.15 - Seja Y um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$. Então $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$. (A mesma demonstração mostra que

$$SV([a,b],L(X,Y)) \subset M([a,b],L(X,Y)).$$

DEMONSTRAÇÃO - Pelo corolário 3.a.6 sabemos que, se Y não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$ então $BW([a,b],Y) \subset G([a,b],Y)$, e como as funções regradas são limite uniforme de funções em escada (por 2 da proposição 1.c.2), segue que

$$G([a,b],Y) \subset M([a,b],Y),$$

e portanto, $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.

CQD

O corolário abaixo responde a questão [Q-2] no caso particular em que Y é fracamente sequencialmente completo.

COROLÁRIO 3.a.16 - Se Y é um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo (em particular, reflexivo) então

$$BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y).$$

DEMONSTRAÇÃO - É decorrência imediata da proposição 3.a.15, pois tais espaços não podem conter subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.

CQD

OBSERVAÇÃO 3.a.17 - O exemplo 3.a.13.1 mostra que [Q-1] e [Q-2] são problemas distintos pois, naquele exemplo, temos:

1) $BW([0,1],H) \subset M([0,1],H)$ (veja corolário 3.a.16).

2) $R([0,1],H) \not\subset M([0,1],H)$ (Exemplo 3.a.13).

O teorema que se segue resolve a questão [Q-2] no caso em que Y é um espaço dual. Omitimos a demonstração para não alongar em demasia este trabalho.

TEOREMA 3.a.18 - Seja Y um espaço de Banach dual (isto é $Y = X'$). São equivalentes:

1) Y não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$.

2) Y não contém subespaço isomorfo a $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

3) $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$.

COROLÁRIO 3.a.19 - 1) Se K é um espaço métrico compacto com cardinal infinito, então $C(K)$ não é dual.

2) Se K é um compacto (Hausdorff) disperso (isto é K não contém nenhum conjunto perfeito e não vazio) com cardinal

infinito então $C(K)$ não é um dual.

3) Se $X = L_p(u)$, $1 \leq p \leq \infty$, então são equivalentes:

a) $BW([a,b],X) \subset M([a,b],X)$;

b) $1 \leq p < \infty$ ou $L_\infty(u) = \mathbb{K}^n$.

Agora surge uma pergunta natural: Se Y é um espaço de Banach não separável, são equivalentes:

1) Y não contém subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$;

2) $BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y)$?

A resposta a esta questão é trivialmente negativa. Basta considerar $Y = C_0(\mathbb{N}) \times X$, onde X é não separável e não contém $C_0(\mathbb{N})$. (Exemplos: H espaço de Hilbert não separável, $L_1(u)$ não separáveis, etc.).

De fato, se $f \in BW([a,b],Y)$ então, pela proposição 1.d.4, item 5, b) $\iff$ b'), virá:

$$P_1 \circ f \in BW([a,b], C_0(\mathbb{N})) \xrightarrow{3.a.12} P_1 \circ f \in M([a,b], C_0(\mathbb{N}))$$

$$P_2 \circ f \in BW([a,b], X) \xrightarrow{3.a.15} P_2 \circ f \in M([a,b], X).$$

Logo, $f \in M([a,b], Y)$.

No entanto, a mesma questão, restrita à classe dos espaços $C(K)$ (K compacto, Hausdorff), nos parece não trivial e foi resolvida por

TEOREMA 3.a.20 - Existem espaços de Banach $C(K) = Y$ não se-

paráveis, tais que:

$$1) BW([a,b],Y) \subset M([a,b],Y).$$

$$2) Y \text{ contém subespaço isomorfo a } C_0(\mathbb{N}).$$

(Observação - A classe a que se refere o teorema 3.a.20 é constituída de espaços Y não duais).

3.b - PROBLEMA TRÊS

Vamos agora abordar o problema 3, ou seja: "Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita, podemos afirmar que $D([a,b],X)$ está contido propriamente em $R([a,b],X)$?"

No capítulo 1 demonstramos os seguintes resultados:

$$1) D([a,b],X) \subset R([a,b],X) \text{ (proposição 1.a.9, item 1);}$$

$$2) f \in D([a,b],X) \text{ se e só se } \begin{cases} 1) f \in B([a,b],X) \\ 2) u[D(f)] = 0; \end{cases} \quad (\text{teorema 1.b.13})$$

$$3) \text{ Se } f \in R([a,b],X) \text{ então } f \in B([a,b],X) \text{ (proposição 1.a.7, item 1).}$$

Os resultados 1, 2 e 3 acima motivam a seguinte

DEFINIÇÃO 3.b.1 - Diz-se que um espaço de Banach X possui a *propriedade de Lebesgue* (espaço PL) se $D([a,b],X) = R([a,b],X)$ ou, noutras palavras, se toda função $f: [a,b] \longrightarrow X$ Riemann integrável tem o conjunto de seus pontos de descontinuidade de medida nula (assim, $f \in R([a,b],X) \implies u(D(f)) = 0$). Caso

contrário, diz-se que o espaço X não tem propriedade de Lebesgue (espaço NPL).

A proposição que se segue tem por objetivo colocar, na linguagem da definição 3.b.1, alguns resultados do capítulo 1.

PROPOSIÇÃO 3.b.2 - 1) Se X é um espaço de dimensão finita então X é um espaço PL.

2) Se Y é um subespaço fechado de um espaço PL X então Y é um espaço PL.

3) Um espaço que contém um subespaço NPL é um espaço NPL.

4) Os espaços PL(NPL) são invariantes por isomorfismo, isto é: se X e Y são espaços de Banach, $J: X \rightarrow Y$ é um isomorfismo e X é PL(NPL) então Y é PL(NPL).

5) $C_0(\mathbb{N})$ é um espaço NPL de dimensão infinita.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Segue de 2 da proposição 1.a.11.

2) Caso contrário, existiria $f \in R([a,b], Y)$ com $u(D(f)) > 0$ e, como $f \in R([a,b], X)$ e $u(D(f)) > 0$, X não seria um espaço PL, o que é absurdo.

3) Demonstração análoga à de 2.

4) Segue de 3 da proposição 1.a.7, equivalência a) $\Leftrightarrow$ b), lembrando que, como J é isomorfismo, $D(J \circ f) = D(f)$.

5) Veja exemplo 1.e.2, afirmações 2) e 3). CQD

COROLÁRIO 3.b.3 - Todo espaço de Banach que contém um subespaço isomorfo a $C_0(\mathbb{N})$ é um espaço NPL.

DEMONSTRAÇÃO - É decorrência imediata de 5, 4 e 3 da proposição 3.b.2.

TEOREMA 3.b.4 - Seja X um espaço de Banach *uniformemente convexo*. São equivalentes as propriedades:

- 1) X tem dimensão finita.
- 2) $D([a,b], X) = R([a,b], X)$.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Segue de 2 da proposição 1.a.11.

2) $\implies$ 1) Suponhamos, por absurdo, que X possua dimensão infinita. Então, por 1 do teorema 2.a.11, X contém uma sequência básica $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ com $\|x_i\| = 1$. Seja Y o fecho do espaço gerado por $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Então $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma base de Y , e por 2, teorema 2.b.2, Y é uniformemente convexo.

Dado um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, seja $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma enumeração dos racionais de $[a,b]$. Definimos $f: [a,b] \rightarrow X$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty} \\ x_i & \text{se } x = r_i. \end{cases}$$

É imediato que $D(f) = [a,b]$, e portanto $f \notin D([a,b], X)$ (teorema 1.b.13).

Por outro lado, $f \in R([a,b], X)$ e $\int_a^b f(x) dx = 0$. De fato: dada uma divisão $d \in \mathcal{D}$, $d = \{a=t_0 < t_1 < \dots < t_{|d|} = b\}$, utilizando

do-se o resultado 5 do teorema 2.b.2, e efetuando-se um cálculo simples, virá, para algum p com $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - 0 \right\| &\leq A \left[\sum_{i=1}^{|d|} [t_i - t_{i-1}]^p \right]^{1/p} \leq \\ &\leq A \sqrt[p]{(\Delta d)^{p-1}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{|d|} [t_i - t_{i-1}]} = A \sqrt[p]{(\Delta d)^{p-1}} \sqrt[p]{b-a} \end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, se tomarmos $\Delta d \leq \delta = \left[\frac{\epsilon}{A \sqrt[p]{b-a}} \right]^{p/(p-1)}$, virá que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - 0 \right\| \leq \epsilon, \text{ ou seja, } \int_a^b f(x) dx = 0,$$

o que contraria a hipótese.

CQD

COROLÁRIO 3.b.5 - 1) Seja X um espaço de Hilbert. São equivalentes a) e a'):

a) X possui dimensão finita.

a') $D([a, b], X) = R([a, b], X)$.

2) Seja $X = L_p(u)$, $1 < p < \infty$. São equivalentes a e a':

a) $L_p(u)$ possui dimensão finita.

a') $D([a, b], X) = R([a, b], X)$.

3) Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo (em particular, de Hilbert) e de dimensão infinita, então X é um espaço NPL.

4) Se $1 < p < \infty$ e $L_p(u)$ tem dimensão infinita então $L_p(u)$

é um espaço NPL.

- 5) Se $1 < p < \infty$ então $L_p([a,b], \mathbb{K})$ e $\ell_p(\mathbb{N})$ são espaços NPL.
- 6) Todo espaço de Banach que contém um subespaço isomorfo a um espaço uniformemente convexo de dimensão infinita é um espaço NPL.

DEMONSTRAÇÃO - 1) e 2) São decorrência imediata de 1 e 4 do teorema 2.b.2, e do teorema 3.b.4 anterior.

- 3) Decorre imediatamente do teorema 3.b.4.
- 4) Decorre imediatamente de 2 deste corolário.
- 5) Decorre de 4) imediatamente, lembrando que $L_p([a,b], \mathbb{K})$ e $\ell_p(\mathbb{N})$ tem dimensão infinita.
- 6) Decorre de 3) deste corolário e de 4 e 3 da proposição 3.b.2. CQD

TEOREMA 3.b.6 - Seja N espaço topológico, Hausdörff e normal (mais geralmente, completamente regular). Denotaremos por $C^*(N, \mathbb{K})$ o conjunto das funções contínuas e limitadas $f: N \rightarrow \mathbb{K}$ com a norma $\|f\| = \sup_{x \in N} |f(x)|$. São equivalentes:

- 1) N é um conjunto finito ($C^*(N, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$)
- 2) $C^*(N, \mathbb{K})$ é um espaço PL.

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Proposição 1.a.11, item 2.

2) $\implies$ 1) Por absurdo, suponhamos que N tenha cardinal infinito, e vamos demonstrar que $C^*(N, \mathbb{K})$ contém um subespaço

ço isomorfo a $C_0(N)$.

Em primeiro lugar, vamos demonstrar que um espaço de Hausdorff infinito N contém uma sequência de abertos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ dois a dois disjuntos e não vazios.

De fato, como N é de Hausdorff contendo mais de um ponto, existem abertos A_1 e A_2 não vazios e disjuntos.

Se um destes abertos é um conjunto finito denotamos o mesmo por A_1 ; e passamos a trabalhar no CA_1 que é um aberto infinito (pois N é infinito).

Caso contrário, denotamos um deles por A_1 e passamos a trabalhar no aberto que restou que é também infinito.

Suponhamos construída a coleção de abertos não vazios $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, onde $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, $A_i \cap A_n = \emptyset$, $1 \leq i \leq n-1$ e A_n é um aberto infinito. Tomemos agora em A_n dois abertos A'_1 e A'_2 não vazios e disjuntos (A'_1 e A'_2 são abertos em N).

Se um deles é finito denotemô-lo por A_n e seu complementar em A_n por A_{n+1} . Se ambos são infinitos, denotamos um deles por A_n e o outro por A_{n+1} . Obtemos assim uma coleção de abertos não vazios $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}$ onde $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, $A_1 \cap A_{n+1} = \emptyset$, $1 \leq i \leq n$ e A_{n+1} é um aberto infinito. Logo, podemos construir em N a sequência de abertos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ dois a dois disjuntos e não vazios.

Consideremos os fechados $F_i = \{p_i\} \subset A_i$ e $F'_i = CA_i$. Co-

mo N é completamente regular existem $f_i: N \rightarrow [0,1]$ contínuas e tais que

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = p_i, \\ 0 \leq f_i(x) \leq 1 & \\ 0 & \text{se } x \in C A_i. \end{cases}$$

Se $e_i = (0, 0, \dots, \overset{i}{1}, 0, 0, 0, \dots) \in C_0(N)$, definimos

$$T: C_0(N) \rightarrow C^*(N, \mathbb{K})$$

como a extensão linear contínua de $T(e_i) = f_i$. Se

$$x = \sum_{i=1}^m a_i e_i, \text{ vem que } \|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\| = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i|,$$

e portanto, a função em questão tem extensão linear que é uma isometria entre $C_0(N)$ e o fecho do subespaço gerado por $\{f_i\}_{i=1}^\infty$.

Se N é um espaço de Hausdorff, completamente regular (em particular, normal), de cardinal infinito, demonstramos que $C^*(N, \mathbb{K})$ contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$, e segue do corolário 3.b.3 que $C^*(N, \mathbb{K})$ é um espaço NPL, o que contraria a hipótese. CQD

COROLÁRIO 3.b.7 - 1) Seja N um espaço de Hausdorff e normal (completamente regular). São equivalentes:

- a) N é um conjunto finito.
- a') $C^*(N, \mathbb{K})$ é um espaço PL.
- a'') $C^*(N, \mathbb{K})$ é reflexivo.

a''') $C^*(N, \mathbb{K})$ possui dimensão finita.

2) Seja K um espaço compacto. São equivalentes:

a) K é finito

a') $C(K)$ é um espaço PL.

a'') $C(K)$ é reflexivo.

a''') $C(K)$ possui dimensão finita.

3) Seja K um espaço compacto e de cardinalidade infinita. Então valem as seguintes propriedades equivalentes:

a) $C(K)$ é um espaço NPL.

b) $C(K)$ não é reflexivo.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Imediato a partir do teorema 3.b.6.

2) Imediato a partir do teorema 3.b.6, lembrando que todo compacto K é Hausdorff, normal e $C^*(K, \mathbb{K}) = C(K, \mathbb{K}) = C(K)$.

3) Consequência imediata do 2). CQD

COROLÁRIO 3.b.8 - 1) Seja $X = L_\infty(u)$. São equivalentes:

a) $L_\infty(u)$ tem dimensão finita.

a') $L_\infty(u)$ é um espaço PL.

a'') $L_\infty(u)$ é reflexivo.

2) Se $L_\infty(u)$ possui dimensão infinita então é um espaço NPL.

3) $L_\infty([a, b], \mathbb{K})$ e $\ell_\infty(N)$ são espaços NPL.

DEMONSTRAÇÃO - 1) É imediato que $a) \implies a')$ e $a) \implies a''$). Do teorema 2.b.3, sabemos que $L_\infty(u)$ é isomorfo a $C(K)$, para algum conjunto K compacto de Hausdorff. Se negamos $a)$, é claro que K será infinito: então $C(K)$ e, conseqüentemente, $L_\infty(u)$, possuirão subespaços isomorfos a $C_0(u)$. Logo, $L_\infty(u)$ não pode ser PL nem reflexivo, e fica demonstrado 1).

2) É consequência imediata de 1).

3) É consequência imediata de 2). CQD

A proposição que segue termina a classificação dos espaços $L_p([a,b],\mathbb{K})$, $1 \leq p \leq \infty$. Mais tarde (corolário 3.b.14), obtemos novamente tal resultado.

PROPOSIÇÃO 3.b.9 - $L_1([a,b],\mathbb{K})$ é um espaço NPL.

DEMONSTRAÇÃO - Basta provar que $L_1([a,b],\mathbb{K})$ contém um subespaço isomorfo a um espaço de Hilbert de dimensão infinita (veja 6 do corolário 3.b.5). Faremos a demonstração para $[0,1]$. Para isto considere-se $J: \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow L_1([0,1],\mathbb{K})$, dada por

$$J(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t),$$

onde $r_n(t)$ são as funções de Rademacher, definidas na proposição 2.b.4. Pela mesma proposição virá, para o caso de $p = 1$, que

$$A(1) \| (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots) \|_2 \leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^m a_n r_n(t) \right| dt \leq$$

$$\leq B(1) \|(a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots)\|_2,$$

ou seja, no espaço gerado pelos $e_i = (0 \dots 0 \overset{i}{1} 00 \dots)$, temos: $A(1)\|x\|_2 \leq \|J(x)\|_1 \leq B(1)\|x\|_2$, e portanto, em $\ell_2(N)$, (lembrando que $L_1([0,1],K)$ é completo), $A(1)\|x\|_2 \leq \|J(x)\| \leq B(1)\|x\|_2$. Logo, J está bem definida e é um isomorfismo linear sobre sua imagem. CQD

COROLÁRIO 3.b.10 - $L_p([a,b],K)$ é um espaço NPL, $1 \leq p \leq \infty$.

DEMONSTRAÇÃO - É consequência das proposições 3.b.9, 3 do corolário 3.b.8, e 5 do corolário 3.b.5. CQD

OBSERVAÇÃO 3.b.11 - Usando o mesmo raciocínio da proposição 3.b.9, podemos provar que, em $L_p([a,b],K)$, $1 \leq p < \infty$, existe um subespaço isomorfo a um espaço de Hilbert de dimensão infinita (precisamente o $\ell_2(N)$) e, com isto, obtemos uma outra demonstração de que estes espaços são espaços NPL (veja 5 do corolário 3.b.5).

Surge naturalmente a seguinte questão: "Todo espaço de Banach de dimensão infinita é um espaço NPL?" Antes de terminarmos a classificação dos espaços de medida $L_p(u)$, $1 \leq p \leq \infty$, vamos mostrar alguns exemplos de espaços de dimensão infinita com a propriedade de Lebesgue.

TEOREMA 3.b.12 - $\ell_1(N)$ é um espaço com a propriedade de Lebesgue (espaço PL).

DEMONSTRAÇÃO - Vamos provar que, se $f \notin D([a,b], \ell_1(N))$ então

$f \notin R([a, b], \mathcal{L}_1(N))$. Se $f \notin D([a, b], \mathcal{L}_1(N))$ então temos duas possibilidades:

- 1) $f \notin B([a, b], \mathcal{L}_1(N))$; nestas condições (proposição 1.a.7, item 1) sabemos que $f \notin R([a, b], \mathcal{L}_1(N))$.
- 2) $f \in B([a, b], \mathcal{L}_1(N))$ e $u(D(f)) > 0$. Neste caso como

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \text{ com } F_n = \left\{ t \mid \omega(t, f) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

existe um índice n_0 tal que $u[F_{n_0}] = C > 0$.

Sejam as funções $P_n: \mathcal{L}_1(N) \rightarrow \mathbb{K}$, dados por $P_n(x) = x_n$, para todo $x \in \mathcal{L}_1(N)$ (projeções). Se $f \in R([a, b], \mathcal{L}_1(N))$, podemos afirmar (por 2, proposição 1.a.7) que

$$P_n \circ f \in R([a, b], \mathbb{K}) = D([a, b], \mathbb{K}).$$

Da proposição 1.b.13, virá que $u(D(P_n \circ f)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$; logo,

$$u \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f) \right] = 0.$$

Tomemos uma divisão $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ com

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{K}, \text{ para } 1 \leq i \leq k,$$

e consideremos os intervalos desta divisão que interceptam F_{n_0} em um conjunto de medida não nula; vamos denotar estes intervalos por $I_1, I_2, \dots, I_p$. Para todo i , $1 \leq i \leq p$, existe $x \in I_i$, com

$$x \in F_{n_0} \quad \text{e} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f), \quad \text{ou seja, } x \in F_{n_0} \cap I_i^0.$$

Mas para todo n natural, $P_n \circ f$ é contínua em x . Observemos ainda que

$$\frac{p(b-a)}{K} \geq C \quad (*) \quad \text{pois } u(F_{n_0}) = C \quad \text{e} \quad F_{n_0} \subset \bigcup_{i=1}^p I_i$$

(a menos de um conjunto de medida nula). Escolhemos

$$x_1 \in I_1 \cap F_{n_0}, \quad x_1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f):$$

existe $y_1 \in I_1$ tal que $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \frac{1}{2n_0}$. Seja

$$e_1 = f(x_1) - f(y_1) = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_j^1, \dots).$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos j_1 tal que

$$\sum_{i=j_1}^{\infty} |a_i^1| < \frac{\varepsilon}{2^{20}}. \quad \text{Escolhemos } x_2 \in I_2 \cap F_{n_0}, \quad x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f) \quad \text{e} \quad y_2 \in I_2$$

com as seguintes propriedades:

$$a) \quad \|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \frac{1}{2n_0};$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^{j_1} |(P_i \circ f)(x_2) - (P_i \circ f)(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2^{21}} \quad (\text{Isto é possível, pois } x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)).$$

Seja $e_2 = f(x_2) - f(y_2) = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_j^2, \dots)$. Consideremos j_2

$$\text{tal que } j_2 > j_1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=j_2}^{\infty} |a_i^2| < \frac{\varepsilon}{2^{22}}.$$

Em I_3 , tomemos

$$x_3 \in I_3 \cap F_{n_0}, \quad x_3 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f) \quad \text{e} \quad y_3 \in I_3$$

com as seguintes propriedades:

- a) $\|f(x_3) - f(y_3)\| \geq \frac{1}{2n_0}$;
- b) $\sum_{i=1}^{j_2} |(P_i \circ f)(x_3) - (P_i \circ f)(y_3)| \leq \frac{\epsilon}{2^{23}}$.

Seja $e_3 = f(x_3) - f(y_3) = (a_1^3 \dots a_{j_3}^3 \dots)$. Escolhemos j_3 tal que

$$j_3 > j_2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=j_3}^{\infty} |a_i^3| < \frac{\epsilon}{2^{24}}.$$

Prosseguimos analogamente nos restantes intervalos, $I_4, I_5, \dots, I_p$, e encontramos vetores

$$\begin{aligned} e_1 &= f(x_1) - f(y_1) = (a_1^1, \dots, a_{j_1}^1, \dots) \\ e_2 &= f(x_2) - f(y_2) = (a_1^2, \dots, a_{j_1}^2, \dots, a_{j_2}^2, \dots) \\ e_3 &= f(x_3) - f(y_3) = (a_1^3, \dots, a_{j_1}^3, \dots, a_{j_2}^3, \dots, a_{j_3}^3, \dots) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ e_p &= f(x_p) - f(y_p) = (a_1^p, \dots, a_{j_1}^p, \dots, a_{j_2}^p, \dots, a_{j_3}^p, \dots, a_{j_p}^p, \dots) \end{aligned}$$

Então, definindo por

$$\begin{aligned} e_{1,j_1} &= (a_1^1, a_2^1, \dots, a_{j_1}^1, 0, 0, \dots) \\ e_{2,j_2} &= (0, 0, \dots, 0, a_{j_1+1}^2, a_{j_1+2}^2, \dots, a_{j_2}^2, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \\ e_{p,j_p} &= (0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, a_{j_{p-1}+1}^p, \dots, a_{j_p}^p, 0, \dots), \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p e_i \right\| &\geq \left\| \sum_{i=1}^p e_{i,j_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^p (e_i - e_{i,j_i}) \right\| \geq \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{\epsilon}{2^{20}} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{\epsilon}{2^{21}} - \frac{\epsilon}{2^{22}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n_0} - \frac{\epsilon}{2^{20+2p-3}} - \frac{\epsilon}{2^{20+2p-2}} \right) - \\ &- \left\| \sum_{i=1}^p [e_i - e_{i,j_i}] \right\| \geq \frac{p}{2n_0} - 2 \left[\frac{\epsilon}{2^{20}} + \dots + \frac{\epsilon}{2^{20+2p-2}} \right] \geq \\ &\geq \frac{p}{2n_0} - 2 \frac{\frac{\epsilon}{2^{20}}}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{p}{2n_0} - \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Retomemos a divisão $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b\}$ e façamos

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_i &= x_j \\ \epsilon'_i &= y_j \end{aligned} \right\} \text{ se } [t_{i-1}, t_i] = I_j, \quad 1 \leq j \leq p;$$

$\epsilon_i = \epsilon'_i$ se $[t_{i-1}, t_i] \neq I_j$, para todo j com $1 \leq j \leq p$.

Desta forma, obtemos, para a soma de Riemann correspondente a d e a escolha dos ϵ'_i 's, que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i)] \frac{b-a}{K} \right\| = \left\| \sum_{\epsilon'_i, \epsilon_i \in I_i, 1 \leq i \leq p} [f(\epsilon_i) - f(\epsilon'_i)] \frac{b-a}{K} \right\| =$$

$$= \left(\frac{b-a}{K}\right) \|e_1 + e_2 + \dots + e_p\| \geq \left(\frac{b-a}{K}\right) \left(\frac{p}{2n_0} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{p(b-a)}{2Kn_0} - \frac{\varepsilon}{2K}(b-a) \geq$$

$$\stackrel{(*)}{\geq} \frac{C}{2n_0} - \frac{\varepsilon(b-a)}{2}.$$

Tomando $\varepsilon < \frac{C}{2n_0(b-a)}$, virã:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] \right\| \frac{b-a}{K} \geq \frac{C}{2n_0} - \frac{C(b-a)}{4n_0(b-a)} \geq \frac{C}{4n_0} > 0.$$

Pela proposição 1.a.5, temos que $f \notin R([a,b], \mathcal{L}_1(N))$,
o que termina a demonstração. CQD

TEOREMA 3.b.13 - Seja Γ um conjunto não vazio, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O espaço de Banach $\mathcal{L}_1(\Gamma, \mathbb{K}) = \{f: \Gamma \rightarrow \mathbb{K} \mid \sum_{x \in \Gamma} |f(x)| < \infty\}$, com a norma $\|f\| = \sum_{x \in \Gamma} |f(x)|$, possui a propriedade de Lebesgue.

DEMONSTRAÇÃO - Se Γ é finito ou enumerável, o teorema é consequência de 2 da proposição 1.a.11 e do teorema 3.b.12. Resta demonstrá-lo, pois, para Γ não enumerável. A demonstração segue a mesma linha do teorema 3.b.11. Se

$$f \in R([a,b], \mathcal{L}_1(\Gamma, \mathbb{K})) \quad \text{e} \quad f \notin D([a,b], \mathcal{L}_1(\Gamma, \mathbb{K}))$$

então $u(D(f)) > 0$ e, como $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(F_{n_0}) = C > 0$.

Dada a divisão $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b\}$, com $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{K}$, $1 \leq i \leq K$, denotemos por $I_1, \dots, I_p$ os intervalos de d que interceptam F_{n_0} num conjunto de medida não nula.

Seja $x_1 \in I_1 \cap F_{n_0}$; existe $y_1 \in I_1$ tal que, para $e_1 = f(x_1) - f(y_1)$, vale que $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \frac{1}{2n_0}$. Por sua vez, $e_1 \in \ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$, e portanto e_1 possui apenas um conjunto enumerável de coordenadas diferentes de zero; denotemos por $i_1^1, i_2^1, \dots, i_n^1, \dots$ os índices onde $e_1: \Gamma \rightarrow \mathbb{K}$ possui tais coordenadas. Tomemos $i_{j_1}^1$ tal que

$$\sum_{n=j_1}^{\infty} |\ell_1(a_{i_n^1})| < \frac{\epsilon}{2^{20}}.$$

Definimos $P_j: \ell_1(\Gamma, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ por $P_j[(a_i)_{i \in \Gamma}] = a_j$, para todo $j \in \Gamma$. Se $f \in R([a, b], \ell_1(\Gamma, \mathbb{K}))$ então $P_{i_n^1} \circ f \in R([a, b], \mathbb{K})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$u\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_{i_n^1} \circ f)\right] = 0.$$

Em consequência, existe $x_2 \in I_2 \cap F_{n_0}$, $x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_{i_n^1} \circ f)$: podemos então encontrar $y_2 \in I_2$ tal que, para $e_2 = f(x_2) - f(y_2)$, temos:

$$a) \quad \|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \frac{1}{2n_0} \quad (\text{o que é possível, pois } x_2 \in F_{n_0}).$$

$$b) \quad \sum_{i_{j_1}^1} |(P_{i_n^1} \circ f)(x_2) - (P_{i_n^1} \circ f)(y_2)| \leq \frac{\epsilon}{2^{21}}.$$

Denotemos por $i_1^2, i_2^2, i_3^2, \dots, i_n^2, \dots$ os índices em que e_2 não se anula: seja $i_{j_2}^2$ tal que

$$\sum_{n=j_2}^{\infty} |a_{i_n^2}| < \frac{\epsilon}{2^{22}}, \quad j_2 > j_1$$

(se esta desigualdade tem sentido).

Em I_3 , tomemos x_3 e $F_{n_0}^0 \cap I_3$ e usando as projeções $P_{i_1}^1, P_{i_2}^1, \dots, P_{i_{j_1}}^1, P_{i_1}^2, P_{i_2}^2, \dots, P_{i_{j_2}}^2$, passemos a escolher y_3 tal que se $e_3 = f(x_3) - f(y_3)$ então:

$$a) \|f(x_3) - f(y_3)\| \geq \frac{1}{2n_0};$$

$$b) \sum_{i=1}^{J_1} |(P_{i_n}^1 \circ f)(x_3) - (P_{i_n}^1 \circ f)(y_3)| + \sum_{i=1}^{J_2} |(P_{i_n}^2 \circ f)(x_3) - (P_{i_n}^2 \circ f)(y_3)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{23}}.$$

Procedendo de modo análogo em $I_4, I_5, \dots, I_p$, e utilizando o mesmo método do teorema 3.b.12 chegamos a

$$\left| \sum_{i=1}^d [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] \frac{b-a}{K} \right| \geq \frac{C}{4n_0},$$

o que contraria a proposição 1.a.5. Logo, $f \notin R([a, b], \mathcal{L}_1(\Gamma, \mathbb{K}))$.

CQD

O teorema seguinte mostra como obter novos espaços com a propriedade de Lebesgue a partir de espaços que têm esta propriedade.

TEOREMA 3.b.14 - Seja $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de espaços com a propriedade de Lebesgue. Então:

$$X = \oplus \left(\sum_{n=1}^\infty X_n \right)_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in X_n, \|x\| = \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| < \infty\}$$

é um espaço com a propriedade de Lebesgue.

DEMONSTRAÇÃO - A demonstração segue a mesma linha dos teoremas 3.b.12 e 3.b.13. Se $f \notin D([a,b],X)$ e $f \in R([a,b],X)$ então existe F_{n_0} tal que $u[F_{n_0}] = C > 0$. Dada a divisão $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b\}$, com $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{K}$, $1 \leq i \leq K$, denotemos por $I_1, \dots, I_p$ os intervalos de d que interceptam F_{n_0} num conjunto de medida não nula. Consideremos agora $P_n: X \longrightarrow X_n$ onde $P_n(x_1, \dots, x_n, \dots) = x_n$, que são funções lineares e contínuas. Vale que (por 2 da proposição 1.a.7) $P_n \circ f \in R([a,b],X_n)$ e, como X_n é um espaço PL, temos que $u[D(P_n \circ f)] = 0$. Logo,

$$u\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)\right] = 0.$$

Seja $x_1 \in I_1 \cap F_{n_0}$; existe $y_1 \in I_1$ tal que, se $e_1 = f(x_1) - f(y_1)$ então $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \frac{1}{2n_0}$. Denotemos

$$e_1 = f(x_1) - f(y_1) = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_j^1, \dots), a_j^1 \in X_j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, e tomemos j_1 tal que

$$\sum_{i=j_1}^{\infty} \|a_i^1\| < \frac{\varepsilon}{2^{20}}.$$

Vamos agora a I_2 , e consideremos $x_2 \in I_2 \cap F_{n_0}$, $x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)$ e $y_2 \in I_2$ com as seguintes propriedades:

$$a) \quad \|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \frac{1}{2n_0};$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^{j_1} \|(P_i \circ f)(x_2) - (P_i \circ f)(y_2)\| < \frac{\varepsilon}{2^{21}} \quad (x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)).$$

Se $e_2 = f(x_2) - f(y_2) = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_j^2, \dots), a_j^2 \in X_j$, para todo j ; podemos tomar j_2 tal que $j_2 > j_1$ e

$$\sum_{i=j_2}^{\infty} \|a_i^2\| < \frac{\varepsilon}{2^{22}},$$

e assim por diante. Como no teorema 3.b.12, obtemos que

$$f \notin R([a, b], X). \quad \text{CQD}$$

Estamos prontos para terminar a classificação dos espaços de medida $L_p(u)$, $1 \leq p \leq \infty$. Esta classificação é possível devido ao teorema 3.b.13, como veremos a seguir.

TEOREMA 3.b.15 - Se X é um espaço L_p -abstrato, $1 \leq p \leq \infty$, então são equivalentes:

- 1) L_p possui a propriedade de Lebesgue.
- 2) L_p é isomorfo a $\ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$, para algum conjunto Γ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

DEMONSTRAÇÃO - 1) $\implies$ 2) Por 1 do teorema 2.b.6, X é isomorfo a $[\ell_p(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus (\oplus_{\alpha \in A} L_p([0, 1]^{m_\alpha}, \mathbb{C}))_p]_p$. Mas, por 2 do teorema 2.b.6, X não pode ter a componente $(\oplus_{\alpha \in A} L_p([0, 1]^{m_\alpha}, \mathbb{C}))_p$, pois senão seria um espaço NPL (esta componente é NPL por conter um subespaço isomorfo a um espaço de Hilbert de dimensão infinita). Concluimos que L_p é isomorfo a $\ell_p(\Gamma, \mathbb{K})$. Temos agora duas possibilidades a considerar:

- 1) Γ é finito. Neste caso, $\ell_p(\Gamma, \mathbb{K})$ é isomorfo a $\ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$.

2) Γ é infinito. Então é imediato que $p=1$, pois senão $\ell_p(\mathbb{N})$ seria isomorfo a um subespaço de $\ell_p(\Gamma, \mathbb{K})$ e, como $\ell_p(\mathbb{N})$, $1 < p \leq \infty$, é um NPL (por 5 do corolário 3.b.5, e por 3 do corolário 3.b.8), viria que X é NPL; absurdo.

2) $\implies$ 1) Se X é isomorfo a $\ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$ então, pelo teorema 3.b.13, e 4 da proposição 3.b.2, X possui a propriedade de Lebesgue. CQD

COROLÁRIO 3.b.16 - Seja $X = L_p(u)$. São equivalentes:

a) $L_p(u)$ possui a propriedade de Lebesgue.

b) $L_p(u)$ é isomorfo a $\ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$, para algum conjunto Γ .

DEMONSTRAÇÃO - Imediata a partir do teorema 3.b.15. CQD

O leitor deve observar que o corolário 3.b.16 contém, em particular, a proposição 3.b.9. Entretanto, a primeira demonstração é muito mais simples.

O teorema que se segue classifica certos duais importantes em análise.

TEOREMA 3.b.17 - 1) Seja X um espaço de Banach sobre o corpo dos reais que contém um subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. Então X' é um espaço NPL.

2) Seja K um espaço topológico compacto. São equivalentes as propriedades:

a) K é disperso.

b) $[C(K, \mathbb{R})]'$ é isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$.

c) $[C(K, \mathbb{R})]'$ é um espaço com a propriedade de Lebesgue.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Por 1 do teorema 2.b.7, sabemos que X' contém subespaço isomorfo a $L_1(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$. Aplicando 2 do teorema 2.b.7, vem que X' contém subespaço isomorfo a $L_1([0,1]^{\mathbb{N}})$, e por 2 do teorema 2.b.6, concluímos que X' contém subespaço isomorfo a $\ell_2(\mathbb{N})$; logo, é NPL.

2) a) $\implies$ b) É o 2 do teorema 2.b.7.

b) $\implies$ c) Consequência imediata do teorema 3.b.13.

c) $\implies$ a) Senão, por 3 do teorema 2.b.7, $[C(K)]'$ conterá $L_1([0,1]^{\mathbb{N}})$, e por 2 do teorema 2.b.6, seria NPL, o que contraria a hipótese. CQD

COROLÁRIO 3.b.18 - 1) Seja X um espaço de Banach que contém um subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N})$. Então X' é um espaço NPL.

2) Se K é um espaço compacto (Hausdorff) não disperso então $[C(K)]'$ é um espaço NPL.

3) $BV([a,b], \mathbb{K})$, $(\|f\| = V[f] + |f(a)|)$ é um espaço NPL.

DEMONSTRAÇÃO - 1) Consideramos o espaço real $X_{\mathbb{R}}$ subjacente a X , que conterá um subespaço isomorfo $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ e então $(X_{\mathbb{R}})'$ será NPL. Como consequência deste fato e da aplicação $g \in (X_{\mathbb{R}})' \mapsto f(x) = g(x) - ig(ix) \in (X_{\mathbb{C}})'$ ser uma isometria (embora linear somente sobre $(X_{\mathbb{C}})'_{\mathbb{R}}$), concluímos que $(X_{\mathbb{C}})'$ é NPL.

2) Se K é não disperso sabemos que $[C(K, \mathbb{R})]'$ contém subespaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (veja [L-E], corolário, página 114);

aplicando 1), temos a tese.

3) Basta observar que, pelo teorema de representação de Riesz, $BV([a,b],\mathbb{K})$ contém subespaço isomorfo a $[C([a,b],\mathbb{K})]'$ e que $[a,b]$ não é disperso. CQD

Convém observar que os espaços $\ell_1(\Gamma, \mathbb{K})$ de dimensão infinita (Γ conjunto infinito) não são reflexivos, pois contém um espaço isomorfo a $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, o qual não é reflexivo. Surge então naturalmente a questão: "Existe um espaço reflexivo com a propriedade de Lebesgue?"

Exemplos de espaços reflexivos são os espaços de Lorentz, definidos em 2.b.8; quando $p > 1$, entretanto:

PROPOSIÇÃO 3.b.19 - Os espaços de Lorentz são espaços NPL.

DEMONSTRAÇÃO - Faremos a demonstração para o caso de $[a,b] = [0,1]$. Dado $d(w,p)$ um espaço de Lorentz, consideremos uma enumeração $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos racionais de $[0,1]$. Seja

$$f: [a,b] \rightarrow d(w,p),$$

dada por

$$f(x) = \begin{cases} e_i & \text{se } x = r_i, \text{ onde } e_i = (0,0,\dots,0,\overset{i}{1},0,0,\dots) \\ 0 & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty}. \end{cases}$$

É óbvio que $D(f) = [0,1]$; decorre que $u[D(f)] = 1$, e portanto, $f \notin D([0,1], d(w,p))$. Contudo, $f \in R([0,1], d(w,p))$ pois

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\epsilon_i) [t_i - t_{i-1}] - 0 \right\| \leq (|\Delta d|^{p_{w_1}} + |\Delta d_1|^{p_{w_2}} + \dots + |\Delta d_{|d|-1}|^{p_{w_{|d|-1}}})^{\frac{1}{p}}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $w_{n_0} < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Se

$$\Delta d < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{n_0 \sum_{i=1}^2 w_i}} \text{ virá: } \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\varepsilon_i) [t_i - t_{i-1}]^{-0} \right\| \leq \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{1/p} = \varepsilon.$$

Logo, $\int_0^1 f(x) dx = 0.$

CQD

Em relação aos espaços reflexivos, gostaríamos agora de chamar atenção para o seguinte: um espaço PL reflexivo não pode conter nenhum subespaço uniformemente convexo de dimensão infinita. (Pois senão, por 6 do corolário 3.b.5, seria NPL).

Estudando os espaços reflexivos de dimensão infinita que não contêm subespaços uniformemente convexos de dimensão infinita, encontramos um exemplo bastante simples devido a T.Figiel e W.B.Johnson (veja [2.b.9]), que resolveu o problema.

TEOREMA 3.b.20 - Existe um espaço reflexivo de dimensão infinita com a propriedade de Lebesgue.

DEMONSTRAÇÃO - Seja T o espaço definido no exemplo 2.b.9. Suponhamos que exista $f \notin D([a, b], T)$, $f \in R([a, b], T)$. Como

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad F_n = \{t/w(t, f) \geq \frac{1}{n}\} \quad \text{e} \quad u(D(f)) > 0,$$

existe n_0 tal que $u(F_{n_0}) = C > 0$. Por outro lado, as funções $P_n: T \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dadas por $P_n(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = a_n$,

são lineares contínuas, e portanto $P_n \circ f \in R([a, b], \mathbb{K})$. Logo,

$$u[D(P_n \circ f)] = 0, \text{ e então, } u\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)\right] = 0.$$

Seja $d = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ uma partição de $[a, b]$, com $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{m}$, $1 \leq i \leq m$. Denotemos por $I_1, I_2, \dots, I_p$ os intervalos de d que interceptam F_{n_0} em um conjunto de medida não nula (1). É claro que $\frac{p}{m}(b-a) \geq C$ (*), pois $u[F_{n_0}] = C > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $x_1 \in I_1 \cap F_{n_0}$, $x_1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)$; então existe $y_1 \in I_1$ tal que, se $e_1 = f(x_1) - f(y_1) = (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_j^1, \dots)$, temos:

- a) $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \frac{1}{2n_0}$;
- b) $\|(a_1^1, \dots, a_{p+1}^1, 0, 0, \dots)\| \leq \frac{2}{2^{20}}$ (sendo p o número de intervalos de (1)).

Seja $j_1 > p+1$ o índice tal que

$$\|(0, 0, 0, \dots, 0, a_{j_1}^1, a_{j_1+1}^1, \dots)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{21}}.$$

Vamos agora a I_2 e tomamos $x_2 \in I_2 \cap F_{n_0}$, $x_2 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)$ e $y_2 \in I_2$ tal que, se $e_2 = f(x_2) - f(y_2) = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_{j_2}^2, \dots)$, temos:

- a) $\|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \frac{1}{2n_0}$;
- b) $\|(a_1^2, \dots, a_{j_1}^2, 0, 0, \dots)\| \geq \frac{\varepsilon}{2^{22}}.$

Seja $j_2 > j_1$ um índice tal que

$$\|(0, 0, \dots, 0, a_{j_2}^2, a_{j_2+1}^2, \dots)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{23}}.$$

Em I_3 tomamos $x_3 \in I_3 \cap F_{n_0}$, $x_3 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D(P_n \circ f)$ e $y_3 \in I_3$ tal que, se $e_3 = f(x_3) - f(y_3) = (a_1^3, \dots, a_{j_3}^3, \dots)$, temos:

$$a) \|f(x_3) - f(y_3)\| \geq \frac{1}{2n_0};$$

$$b) \|(a_1^3, a_2^3, \dots, a_{j_2}^3, 0, 0, 0, \dots)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{24}}, \text{ e seja } j_3 > j_2 \text{ um índice tal que } \|(0, 0, 0, \dots, 0, a_{j_3}^3, a_{j_3+1}^3, \dots)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{25}}.$$

Procedendo assim sucessivamente, escolhemos vetores

$$\begin{aligned} e_1 &= f(x_1) - f(y_1) = (a_1^1, a_2^1, \dots, a_{j_0}^1, a_{p+2}^1, \dots, a_{j_1}^1, a_{j_1+1}^1, \dots), \\ e_2 &= f(x_2) - f(y_2) = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_{j_1}^2, a_{j_1+1}^2, \dots, a_{j_2}^2, \dots), \\ &\vdots \\ e_p &= f(x_p) - f(y_p) = (a_1^p, a_2^p, \dots, a_{j_{p-1}}^p, a_{j_{p-1}+1}^p, \dots, a_{j_p}^p, \dots), \end{aligned}$$

onde $j_0 = p+1$.

$$\text{Fazendo } e_{ij_{i-1}} = (0, 0, 0, \dots, 0, a_{j_{i-1}+1}^i, \dots, a_{j_i-1}^i, 0, 0, \dots),$$

$1 \leq i \leq p$, vem que

$$\begin{aligned} e_1 - e_{1j_0} &= (a_1^1, \dots, a_{p+1}^1, 0, 0, \dots, 0, a_{j_1}^1, a_{j_1+1}^1, \dots), \\ e_2 - e_{2j_1} &= (a_1^2, \dots, a_{p+1}^2, \dots, a_{j_1}^2, 0, 0, \dots, 0, a_{j_2}^2, a_{j_2+1}^2, \dots), \\ &\vdots \\ e_p - e_{pj_{p-1}} &= (a_1^p, \dots, a_{p+1}^p, \dots, a_{j_{p-1}}^p, 0, 0, \dots, 0, a_{j_p}^p, a_{j_p+1}^p, \dots). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p e_i \right\| &\geq \left\| \sum_{i=1}^p e_{ij_{i-1}} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^p (e_i - e_{ij_{i-1}}) \right\| \geq \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^p e_{ij_{i-1}} \right\| - \left[\frac{\varepsilon}{2^{20}} + \frac{\varepsilon}{2^{21}} + \dots \right] \geq \left\| \sum_{i=1}^p e_{ij_{i-1}} \right\| - \frac{\varepsilon}{2^{19}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\|e_{ij_{i-1}}\| \geq \frac{1}{2n_0} - \frac{\varepsilon}{2^{19+2(i-1)}}$, e vale ainda que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p e_{ij_{i-1}} \right\| &= \max_{n \in \mathbb{N}} \{ \max |a_n|, \frac{1}{2} \sup \left(\sum_{j=1}^K \left\| \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n e_n \right\|, \right. \\ &\left. K \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{K+1}, K=1, 2, \dots \right) \}. \end{aligned}$$

Escolhendo $K = p$, obtemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^p e_{ij_{i-1}} \right\| \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p \|e_{ij_{i-1}}\| \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2n_0} - \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{2^{19+2(i-1)}} \right)$$

e então

$$\left\| \sum_{i=1}^p e_i \right\| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2n_0} - \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{2^{19+2(i-1)}} \right) - \frac{\varepsilon}{2^{19}} \geq \frac{1}{2} \left[\frac{p}{2n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Feitas estas considerações, voltemos aos intervalos da divisão d . Para cada $1 \leq i \leq m$, tomemos

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \varepsilon'_i, \text{ se } [t_{i-1}, t_i] \neq I_i, \quad 1 \leq i \leq p. \\ \varepsilon_i = x_i, \quad \varepsilon'_i = y_i, \text{ se } [t_{i-1}, t_i] = I_i, \text{ para algum } i, \quad 1 \leq i \leq p. \end{cases}$$

Temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] \frac{b-a}{m} \right\| \geq \frac{b-a}{m} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p}{2n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{p(b-a)}{2m} \times \frac{1}{n_0} - \frac{\varepsilon(b-a)}{2m} \right] \stackrel{*}{\geq} \frac{1}{2} \left[\frac{C}{2n_0} - \frac{\varepsilon(b-a)}{2} \right] =$$

$$= \frac{C}{4n_0} - \frac{\varepsilon(b-a)}{4}.$$

Tomando $\varepsilon \leq \frac{C}{2n_0(b-a)}$ resulta:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [f(\varepsilon_i) - f(\varepsilon'_i)] \frac{b-a}{m} \right\| \geq \frac{C}{8n_0},$$

e então, pela proposição 1.a.5, $f \notin R([a,b],T)$. CQD

3.b.21 - Resumo Geral

Dado um espaço de Banach X de dimensão infinita, os problemas [P-1], [P-2] e [P-3] permitem dar um quadro das situações para os conjuntos $BV([a,b],X)$, $BW([a,b],X)$, $G([a,b],X)$, $D([a,b],X)$ e $R([a,b],X)$.

1º caso - X não contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$. Temos duas possibilidades descritas pelas figuras a) e b), que correspondem aos casos de espaços NPL e espaços PL.

a) NPL

b) PL

O caso a) ocorre, por exemplo, para os espaços uniformemente convexos. O caso b) ocorre, por exemplo, para $\ell_1(N)$ e para espaços reflexivos, como o espaço T do teorema 3.b.20.

É imediato que as inclusões nos casos a) e b) são próprias, pois:

- 1) $BV([a,b],X) \neq BW([a,b],X)$ (veja problema 1).
- 2) $BW([a,b],X) \neq G([a,b],X)$. (Basta tomar uma $f:[a,b] \rightarrow Y \subset X$, onde $\dim Y = 1$, $f \in G([a,b],Y)$ e $f \notin BV([a,b],Y) = BW([a,b],Y)$.)
- 3) $G([a,b],X) \neq D([a,b],X)$. (O mesmo raciocínio que em 2).
- 4) $D([a,b],X) \neq R([a,b],X)$. (Para o caso a), imediato pela definição de espaço NPL).

2º caso - X contém subespaço isomorfo a $C_0(N)$. Temos agora uma única possibilidade descrita pela figura abaixo.

Os exemplos seguintes mostram sera configuração acima verdadeira.

1) Seja $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma enumeração dos racionais de $[a,b]$, e definimos

$$f(x) = \begin{cases} f_i, & \text{se } x = r_i \\ 0, & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty} \end{cases},$$

onde $f_i = (\frac{1}{i}, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$.

2) $f: [a,b] \rightarrow C_0(N)$, $f(x) = \chi_C(x) \cdot e$, onde $\chi_C: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é função característica do conjunto triádico de Cantor e $e \in C_0(N)$, $e \neq 0$.

3) $f: [a,b] \rightarrow C_0(N)$, $f(x) = h(x) \cdot e$, com $h: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h \notin BV([a,b], \mathbb{K})$, $h \in G([a,b], \mathbb{K})$ e $e \in C_0(N)$, $e \neq 0$.

4) Considere $f: [a,b] \rightarrow C_0(N)$ a função de demonstração do teorema 1.g.1 (problema 1).

5) Considere $f: [a,b] \rightarrow C_0(N)$, definida em 1.e.2.

6) Seja $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ um conjunto enumerável contido no conjunto de Cantor e denso neste conjunto. Seja $f: [a,b] \rightarrow C_0(N)$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e_i, & \text{se } x = r_i \\ 0, & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty} \end{cases}, \text{ onde } e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots).$$

É imediato que $D(f) = C$ (Conjunto de Cantor) e $u[D(f)] = 0$.

Logo, $f \in D([a,b], C_0(N))$, e um cálculo simples mostra que

$$f \in BW([a,b], C_0(N)) \text{ e } f \notin G([a,b], C_0(N)).$$

3.b.22 - Problemas em aberto

Vamos agora relacionar algumas questões ligadas ainda ao problema 3 e à solução do problema 4.

1) Se X é um espaço de Shurr (veja definição 2.b.10) então vale que X tem a propriedade de Lebesgue?

2) "Caracterizar" os espaços reflexivos X tais que

$$D([a,b], X) = R([a,b], X).$$

3) "Caracterizar" os espaços de Banach em que $D([a,b], X) = R([a,b], X)$.

É claro que, para começarmos a abordar o problema 4 (vide introdução), teríamos de resolver a questão 3 acima. Tais questões esclareceriam definitivamente a teoria de integração de Riemann para funções definidas em $[a,b]$ e a valores num espaço de Banach.

3.c - APLICAÇÕES DOS RESULTADOS

Vimos que $f \in BW([a,b], X)$ se e só se $x' \circ f \in BW([a,b], \mathbb{K}) = BV([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$ (teorema 1.d.6).

É natural perguntar se resultados análogos não são verdadeiros para as classes $BV([a,b], X)$, $G([a,b], X)$, $D([a,b], X)$ e $R([a,b], X)$.

A resposta a estas questões é simples e pode ser descrita pela:

PROPOSIÇÃO 3.c.1 - Seja X um espaço de Banach e $f:[a,b] \rightarrow X$.

1) São equivalentes:

a) Se $x' \circ f \in BV([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, então
 $f \in BV([a,b], X)$.

b) X tem dimensão finita.

2) São equivalentes:

a) $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, implica
 $f \in G([a,b], X)$.

b) $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, implica
 $f \in D([a,b], X)$.

c) X é um espaço de Schurr.

3) Temos as implicações: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$, onde

a) X é Schurr.

b) $x' \circ f \in R([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, implica
 $f \in R([a,b], X)$.

c) $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, implica
 $f \in R([a,b], X)$.

d) X é Schurr ou X não tem a propriedade de Lebesgue.

4) São equivalentes:

a) $x' \circ f \in R([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, implica
 $f \in D([a,b], X)$.

b) X é Schurr e tem a propriedade de Lebesgue.

5) Se X é um espaço que não tem a propriedade de Lebesgue então existe $f \notin D([a,b], X)$ tal que $x' \circ f \in D([a,b], \mathbb{K})$,

para toda $x' \in X'$.

- 6) Se X é um espaço de dimensão infinita, reflexivo, com a propriedade de Lebesgue, existe $f \in R([a,b], X)$ tal que $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K}) \subset D([a,b], \mathbb{K}) = R([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$. (O teorema 3.b.20 mostra a existência dos espaços a que se referem 6 acima).

DEMONSTRAÇÃO - 1) a) $\Rightarrow$ b) Se a dimensão de X for infinita tomemos $f \in BW([a,b], X)$, $f \notin BV([a,b], X)$ (teorema 1.g.1). Assim, $x' \circ f \in BV([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$ (teorema 1.d.6), que contraria a hipótese, e portanto, a dimensão de X é finita.

b) $\Rightarrow$ a) Demonstração imediata.

2) a) $\Rightarrow$ b) Demonstração imediata.

b) $\Rightarrow$ c) Se X não é um espaço de Schurr, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{francamente}} 0$, com x_n não convergente em norma e tal que $\|x_n\| \geq \delta > 0$.

Considere $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma enumeração dos racionais de $[a,b]$ e $f: [a,b] \rightarrow X$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x_i & \text{se } x = r_i \\ 0 & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty}. \end{cases}$$

É imediato que $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, e

$$f \notin D([a,b], X).$$

c) $\Rightarrow$ a) Por hipótese, $x' \circ f \in G([a,b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$.

Assim, se $t_n \rightarrow t$ então $(x' \circ f)(t_n)$ converge em $\mathbb{C}$, para toda $x' \in X'$. De 2 da proposição 2.b.11, sabemos que X é fracamente sequencialmente completo; logo existe $x_0 \in X$ tal que

$$(x' \circ f)(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x'(x_0)$$

e ainda, como tal espaço é de Schurr, $f(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{'' ''} x_0$. Assim,

$$f \in G([a, b], X). \quad \text{CQD}$$

3) a) $\implies$ b) Seja d_n uma sequência de divisões tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta d_n = 0$. Seja S o conjunto de sequências tomando-se

$$s_n = \sum_{i=1}^{|d_n|} f(\epsilon_i)[t_i - t_{i-1}],$$

e fixando-se $\epsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de forma arbitrária. Como

$$x' \circ f \in R([a, b], \mathbb{K}).$$

segue que, dada uma sequência $s_n \in S$, $\{x'(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge em $\mathbb{K}$; como X é Schurr (portanto, fracamente sequencialmente completo), concluímos que $s_n \rightarrow x_0 \in X$. Por outro lado, se tomarmos $s'_n \in S$, também concluímos que $s'_n \rightarrow x'_0$, e é imediato que $x_0 = x'_0$. Da mesma forma, se considerarmos d'_n com $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta d'_n = 0$, também teremos que as sequências de S' convergem a x_0 . Demonstraremos que existe

$$\int_a^b f(t) dt = x_0.$$

Caso contrário, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência da divisão d_n

com $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta d_n = 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d_n|} f(\varepsilon_i) \Delta t_i - x_0 \right\| \geq \varepsilon,$$

para uma dada escolha de $\varepsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$, em cada divisão d_n , o que contraria a afirmação anterior.

b) $\Rightarrow$ c) Imediata.

c) $\Rightarrow$ d) Se X não fosse Schurr e tivesse a propriedade de Lebesgue, a função

$$f(x) = \begin{cases} x_i & \text{se } x = r_i \\ 0 & \text{se } x \notin \{r_i\}_{i=1}^{\infty}, \end{cases}$$

definida na demonstração de 2, b) $\Rightarrow$ c), teria a propriedade de $f \notin D([a, b], X)$; logo $f \notin R([a, b], X)$ mas $x' \circ f \in G([a, b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$.

4) a) $\Rightarrow$ b) X é Schurr pois, caso contrário, f , definida na demonstração de 2 da proposição b) $\Rightarrow$ c), contraria a hipótese.

X tem a propriedade de Lebesgue senão existiria $f \in R([a, b], X)$, $f \notin D([a, b], X)$ e $x' \circ f \in R([a, b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, o que contraria novamente a hipótese.

b) $\Rightarrow$ a) Se X é Schurr e $x' \circ f \in R([a, b], \mathbb{K})$, para toda $x' \in X'$, então, por 3b), $f \in R([a, b], X)$, mas X tem a propriedade de Lebesgue; logo, $f \in D([a, b], X)$.

5) Consequência imediata de 4.

6) Consequência imediata de 4 (tomando-se o cuidado de verificar, na demonstração, que $x' \circ f \in G([a, b], K)$).

CQD

OBSERVAÇÃO 3.c.2 - Depois de terminada a elaboração desta tese tomamos conhecimento através do Mathematical Reviews do artigo: *On Riemann integrability conditions for functions with values in Banach space*, A.S. Nemirovsky M. Yu Ochan, R. Redjouani, Vesnik Moskovskogo Universiteta n° 4, 1972, onde se encontra uma outra demonstração do teorema 3.b.12.

BIBLIOGRAFIA

- [B-P] - Bessaga, C. & Pelczyński, A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Mathematica*, 17(2): 151-164, 1958.
- [C] - Clarkson, J. A., Uniformly convex spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3): 396-414, 1936.
- [D] - Dieudonné, J., *Foundations of modern analysis*, New York, Academic Press, 1960, 361p. (Pure and Applied Mathematics, 10).
- [D-S] - Dunford, N. & Schwartz, J., *Linear operators*, New York, Interscience, 1958-63, 3v., (Pure and Applied Mathematics).
- [D-R] - Dvoretzky, A. & Rogers, C. A., Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36: 192-197, 1950.
- [E-P] - Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Mathematica*, 130: 309-317, 1973.
- [F-J] - Figiel, T. & Johnson, W. B., A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p , *Compositio Mathematica*, 29(2): 179-190, 1974.
- [R-H] - Haydon, R., On Banach spaces which contain $\ell^1(\tau)$ and types of measures on compact spaces, *Israel Journal of Mathematics*, 28(4): 313-324, 1977.
- [H-S] - Hewitt, E. & Stromberg, K., *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of a real variable*, Berlin, Springer, 1969, 476p.

- [H] - Hildebrandt, T.H., *Introduction to the Theory of Integration*, New York, Academic Press, 1963, 385p. (Pure and Applied Mathematics, 13).
- [H-1] - Hönig, C.S., *The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to linear differential equations with generalized boundary conditions*, São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1973, 135p. (Notas do IME-USP).
- [H-4] - Hönig, C.S., *Análise funcional e aplicações*, São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1970, 2v.
- [H-5] - Hönig, C.S., Compactifying subspaces, In: 7º Seminário Brasileiro de Análise, Recife, 1978, *Trabalhos apresentados*, Rio de Janeiro, SBM, 1978, p.73-86.
- [H-3] - Hönig, C.S., *Functional analysis and integro-differential equations with linear constraints*, Rio de Janeiro, SBM, 1974, 204p.
- [H-2] - Hönig, C.S., *Open problems in the theory of differential equations with linear constraints*, In: *Semana de Análise Funcional Não Linear*, São Paulo, 1973, *Atas*, Rio de Janeiro, SBM, 1974, 268p. (Coleção Atas, 5).
- [RC-2] - James, R.C., Bases and reflexivity of Banach spaces, *Annals of Mathematics*, 52(3): 518-527, 1950.
- [RC-5] - James, R.C., Characterizations of reflexivity, *Studia Mathematica*, 23(3): 205-216, 1964.
- [RC-4] - James, R.C., A counterexample for a sup theorem in normed spaces, *Israel Journal of Mathematics*, 9(4): 511-512, 1971.
- [RC-3] - James, C.R., A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37: 174-177, 1951.

- [RC-1] - James, R.C., Super-reflexive spaces with bases, *Pacific Journal of Mathematics*, 41(2): 409-419, 1972.
- [K-G] - Kothe, G., *Topological vector spaces*, Berlin, Springer, 1969, v. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 159).
- [L-E] - Lacey, H.E., *The isometric theory classical Banach spaces*, Berlin, Springer, 1974, 270p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 208).
- [L-T] - Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces I*, Berlin, Springer, 1977, 190p. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 92).
- [L] - Lorentz, G.G., Some new functional spaces, *Annals of Mathematics*, 51(1): 37-55, 1950.
- [M-T] - Marti, J.T., *Introduction to the Theory of Bases*, Berlin, Springer, 1969, 149p.
- [O-R] - Odell, E. & Rosenthal, H.P., A double-dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ_1 , *Israel Journal of Mathematics*, 20(3): 375-384, 1975.
- [P-S] - Pelczynski, A. & Semadeni, Z., Spaces of continuous functions III, *Studia Mathematica*, 18(2): 211-222, 1959.
- [R] - Rosenthal, H.P., Point-wise compact subsets of the first Baire class, *American Journal of Mathematics*, 99(2): 362-378, 1977.
- [S-I] - Singer, I., *Bases in Banach spaces I*, Berlin, Springer, 1970, 668p. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 154).
- [Y] - Yosida, K., *Functional Analysis*, Berlin, Springer, 1965, 458p., (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123).
- [Z] - Zygmund, A., *Trigonometric series*, 2.ed., Cambridge, University Press, 1959, 2v.