ÓRBITAS PERIÓDICAS DE
CAMPOS EM DIMENSÃO 2

ANTÔNIO LUIZ PEREIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Profa.Dra. ALCILEA AUGUSTO HOMEM DE MELLO

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do

CNPq e FINEP

- São Paulo, setembro de 1980 -

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aqui a todas as pessoas que colaboraram, direta ou indiretamente na execução deste trabalho, e em especial às seguintes:

Professora Doutora Alcileia Augusto Homem de Mello, pela sugestão do tema e dedicada orientação, bem como pelo estímulo constante.

Grupo de Sistemas Dinâmicos e Topologia Diferencial, pelas oportunidades de discussão e apoio oferecidos.

Todos os colegas do IME - USP, pelo convívio frutífero de tantos anos.

Senhor João Baptista Esteves de Oliveira, pelo excelente trabalho de datilografia.

São Paulo, setembro de 1980

Antônio Luiz Pereira

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.	vii
CAP. 1 - SOBRE A EQUAÇÃO DE LIÉNARD	1
\$.0 - Introdução	1
\$.1 - O Espaço de Fase da Equação de Liénard	3
\$.2 - A Equação de Liénard de Grau 3	10
\$.3 - A Equação de Liénard perto do centro $\dot{x} = y$ e $\dot{y} = -x$	14
CAP. 2 - O MÉTODO DE KAZUO YAMATO.	17
\$.0 - Introdução	17
\$.1 - A Função $\text{div}_{\omega} X$	20
\$.2 - O Número e a Posição Aproximada dos Ciclos-limites	21
\$.3 - Existência da Função e^u	27
\$.4 - Aplicações à Equação de Liénard.	41
CAP. 3 - LIMITAÇÃO PARA O NÚMERO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS DE CAMPOS NO PLANO.	47
\$.0 - Introdução	47
\$.1 - Modificações de um Teorema de Yamato	47
BIBLIOGRAFIA.	53

INTRODUÇÃO

Dado um campo de vetores, o conhecimento do número e posição de suas órbitas periódicas (bem como de seus pontos singulares), é de importância fundamental para a descrição qualitativa de seu espaço de fase. Dessa maneira, o problema de localização das órbitas periódicas e determinação de seu número tem sido objeto de atenção de diversos pesquisadores, desde os trabalhos iniciais de Poincaré. Sua resolução, porém, tem se mostrado, em geral, bastante difícil.

No caso particular em que $X = (P, Q)$ é um campo polinomial no plano, foi proposto por Hilbert em 1900 o seguinte problema (16º problema de Hilbert): encontrar uma limitação para o número de ciclos-limites (órbitas fechadas isoladas) em função do grau de X , onde o grau de X é o máximo entre os graus de P e Q . Esse problema encontra-se ainda em aberto, mesmo quando o grau de X é 2. Alguns resultados parciais são os seguintes: Dulac provou em [3] que o número de ciclos-limites de X é finito. Bautin provou em [1] que se X é de grau 2 e possui um centro, então um campo polinomial de grau 2, perto de X tem no máximo 3 ciclos-limites.

Uma exposição recente de várias técnicas e resultados sobre o assunto pode ser encontrada em Cherkas [3].

Dois trabalhos que não constam dessa referência são o assunto principal dessa dissertação, cujo conteúdo passamos a resumir.

No capítulo 1, apresentamos um artigo de C.Pugh, A. Lins e W. de Melo, onde se estuda a equação polinomial de Liénard no plano. Em particular, uma resolução completa do problema de determinação do número de órbitas periódicas é dada para a equação de Liénard de grau 3.

No capítulo 2 apresentamos um método, devido a Kazuo Yamato ([11]), pelo qual o número de órbitas fechadas de um dado campo, bem como sua localização aproximada, podem ser determinados, desde que se conheça uma solução aproximada de uma certa equação a derivadas parciais. O autor mostra ainda que tal equação tem solução para um conjunto genérico de campos, embora sua demonstração não forneça um método para calcular explicitamente essa solução em termos da expressão do campo.

Finalmente, o capítulo 3 contém uma ligeira reformulação de um resultado de Yamato apresentado no capítulo 2. Fazemos então uma aplicação dessa teoria à equação de Liénard, obtendo uma parte do resultado exposto no capítulo 1.

CAPÍTULO 1

SOBRE A EQUAÇÃO DE LIÉNARD

§.0 - INTRODUÇÃO

Consideremos a equação de 2.^a ordem:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

conhecida como equação de Liénard. Em particular, se

$$f(x) = \varepsilon(x^2 - 1) \text{ e } g(x) = x,$$

tem-se a equação de Van der Pol.

Fazendo:

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad \dot{y} = -g(x),$$

obtém-se o sistema equivalente no plano:

$$(L) \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

Quando as funções F e g satisfazem determinadas condições é possível garantir a existência de órbitas periódicas

não triviais para esse sistema. Por exemplo, vale a seguinte:

0.1 PROPOSIÇÃO - conf. [6, pg. 268] - Consideremos as seguintes condições sobre a equação (L):

- i) f é par, g é ímpar, $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $f(0) < 0$;
- ii) f e g são contínuas para todo x , g satisfaz uma condição de Lipschitz para todo x ;
- iii) $x \rightarrow +\infty \implies F(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty \implies F(x) \rightarrow -\infty$;
- iv) F tem uma única raiz positiva e é monotônica crescente para $x \geq a$.

Nessas condições a equação (L) possui um único ciclo-limite (órbita fechada isolada), que é orbitalmente estável.

A. Lins, W. de Mello e C.C. Pugh estudam em [7] a equação (L), no caso em que F é um polinômio, $F(0) = 0$ e $g(x) = x$, isto é, a equação:

$$(L) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x.$$

Observe-se que, quando f é ímpar, $f'(0) < 0$ e f possui uma única raiz positiva, a proposição 0.1 garante a existência de um único ciclo limite para (L).

Usando a compactificação de Poincaré e o "blowing-up method" estuda-se em [7] o comportamento das órbitas de (L) no infinito. Como consequência obtém-se uma descrição comple-

ta do espaço de fase dessa equação, módulo número de órbitas fechadas e mostra-se que: se $f = p + q$, p é par, q é ímpar e $q(x) \neq 0$ se $x \neq 0$, então (L) não possui órbitas fechadas.

No caso particular em que f é de grau ≤ 3 , mostra-se que (L) possui no máximo um ciclo-limite e consegue-se uma descrição completa do espaço de fase dessa equação em termos dos coeficientes de f .

Finalmente, usando a aplicação de Poincaré, demonstra-se que, se $d = 2n+1$ ou $2n+2$ então existe uma equação de Liénard de grau d com exatamente K órbitas fechadas, onde $0 \leq K \leq n$.

Motivados por este último fato, os autores formulam a seguinte:

0.2 CONJECTURA - Se f tem grau $2n+1$ ou $2n+2$ então (L) possui no máximo n ciclos-limites.

Os parágrafos seguintes são um resumo dos métodos e resultados de [7].

§.1 - O ESPAÇO DE FASE DA EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Seja $X^f = (y-f(x), -x)$ o campo vetorial associado à equação (L) . Os seguintes fatos são de verificação imediata:

- i) A origem é a única singularidade de X^f , e é atratora se $a_1 > 0$ e repulsora se $a_1 < 0$.
- ii) O conjunto dos pontos onde X^f é horizontal coincide com o eixo vertical: $E^V = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$. O conjunto dos pontos onde X^f é vertical coincide com o gráfico de f .

O comportamento das trajetórias de x^f depende fortemente da paridade de d e do sinal de a_d . Em cada caso, podem ser feitas algumas observações:

Suponhamos d ímpar e $a_d > 0$.

É fácil provar nesse caso, que a órbita positiva por um ponto $p \in E^V - \{0\}$ intercepta sucessivamente o gráfico de f e novamente $E^V - \{0\}$. É possível, portanto, definir uma aplicação de Poincaré $P: E_+^V = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}^+\}$ em E_+^V . Como toda órbita periódica envolve a origem, elas correspondem aos pontos fixos de P (ver Figura 1).

Figura 1

Por outro lado, a órbita negativa por um ponto

$$p \in E_-^V = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}_-\}$$

ou intercepta E_+^V ou vai para o infinito, permanecendo nesse último caso, abaixo do gráfico de f . Como se verá adiante (Teorema 1.1), existe um único ponto $p_- \in E_-^V$ cuja órbita negativa vai

para o infinito, é assintótica ao gráfico de f e tal que toda órbita por um ponto de E_-^V acima de p_- intercepta E_+^V (ver Figura 1). Analogamente, existe um ponto $p_+ \in E_+^V$ com as mesmas propriedades (ver Figura 2).

Qualquer órbita fechada deve portanto interceptar E^V em pontos do segmento (p_-, p_+) .

Figura 2

Se d é ímpar e $a_d < 0$, valem as mesmas considerações com adaptações óbvias.

Suponhamos d par e $a_d > 0$.

Nesse caso, tanto a órbita positiva como a órbita negativa por um ponto $p \in E_+^V$ interceptam E_-^V .

Por outro lado, se $p \in E_-^V$, sua órbita positiva pode interceptar E_+^V ou permanecer abaixo do gráfico de f . O mesmo vale para sua órbita negativa. Como se verá adiante (Teor.1,1), existe um único ponto $p_+ \in E_-^V$ (respc. $p_- \in E_-^V$) cuja órbita posi-

tiva (respec. negativa), vai para o infinito e é assintótica ao gráfico de f . Se $p \in E_-^V$ está acima de p_+ (respec. p_-) então sua órbita positiva (respec. negativa), intercepta E_+^V .

Suponhamos $p_- \neq p_+$. Seja p_m o ponto mais próximo da origem em $\{p_-, p_+\}$ e $\tilde{p}_m \in E_+^V$ o primeiro ponto onde a órbita, (positiva ou negativa) de p_m intercepta E_+^V . É claro que toda órbita fechada intercepta E^V em pontos de intervalo $(p_m, \tilde{p}_m)$.

Pode-se, então, definir uma aplicação de Poincaré, no intervalo $(0, \tilde{p}_m)$. Se $p_- = p_+$, a aplicação de Poincaré pode ser definida em E_+^V , e nesse caso toda órbita fechada intercepta E^V em pontos acima de $p_- = p_+$. A figura 3 ilustra essas situações.

Figura 3

Se d é par e $a_d > 0$, valem as mesmas observações com as adaptações óbvias.

No que segue será usada uma técnica conhecida como Compactificação de Poincaré, que permite transformar o problema de estudar um campo em $\mathbb{R}^2$, para o estudo de um campo na variedade compacta S^2 . A idéia é fazer a projeção central do plano, imaginado tangente ao polo norte de S^2 . O campo X^f , multiplicado por um fator conveniente, estende-se a um campo analítico, $\pi(X^f)$ em S^2 . Uma descrição pormenorizada dessa técnica pode ser encontrada em [10]. O importante aqui é que tal construção permitirá o estudo do campo em pontos do "infinito", correspondentes a pontos do equador em S^2 , e uma descrição da estrutura das órbitas nas vizinhanças do equador.

Seja então

$$X^f = (y - f(x), -x), \quad f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x.$$

Escrevendo a expressão do campo $\pi(X^f)$ em cartas de S^2 verifica-se facilmente que $\pi(X^f)$ possui quatro singularidades no equador:

$$p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = (-1, 0, 0),$$

$$q_1 = (0, 1, 0), \quad q_2 = (0, -1, 0),$$

e que p_1 e p_2 são singularidades hiperbólicas, atratoras ou repulsoras conforme o seguinte quadro:

		p_1	p_2
$a_d > 0$	d par	repulsor	atrator
	d ímpar	repulsor	repulsor
$a_d < 0$	d par	atrator	repulsor
	d ímpar	atrator	atrator

Para descrever o comportamento de $\pi(X^f)$ no equador basta então estudar o comportamento local em torno dos pontos q_1 e q_2 . A análise nesses pontos é realizada utilizando-se o "blowing-up method". Uma exposição dessa técnica pode ser encontrada em [4]. É possível, dessa maneira, estabelecer-se a existência e unicidade das separatrizes em q_1 e q_2 . Tem-se o seguinte:

1.1 TEOREMA - A estrutura das órbitas de $\pi(X^f)$ nas vizinhanças do equador é dada pelas figuras abaixo

Figura 4

Aqui $\pi(X^f)$ é topologicamente equivalente a uma sela numa vizinhança de q_1 e q_2 e suas separatrizes são tangentes ao equador.

1.2 COROLÁRIO - Seja f um polinômio par. Então se $a_d > 0$ (resp. $a_d < 0$), existe um disco D no hemisfério norte de S^2 , contendo o polo norte cujo bordo é formado por separatrizes de q_1 (resp. q_2). Toda órbita contida no interior de D é compacta. Se γ é uma órbita contida no exterior de D , então o α -limite de γ é p_1 (resp. p_2) e o ω -limite de γ é p_2 (resp. p_1).

Figura 5

DEMONSTRAÇÃO - Se $X^f = (X_1^f, X_2^f)$ tem-se:

$$X^f(-x, y) = (X_1^f(x, y), -X_2^f(x, y)).$$

O resultado segue então do Teorema 1.1. □

1.3 PROPOSIÇÃO - Seja $f(x) = p(x) + q(x)$, onde $p(x)$ é um polinômio para e $q(x)$ é ímpar. Se 0 é a única raiz de $q(x)$ então X^f não possui órbitas fechadas.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $X^p = (y - p(x), -x)$. Pode-se então, em vista do corolário acima, definir $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fazendo, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, $V(p)$ a interseção da órbita positiva por p com o eixo vertical negativo. V é então uma integral primeira para X^p . Usando esse fato, mostra-se facilmente que V é estritamente decrescente ao longo das órbitas de X^p . Isso prova a proposição. $\square$

§.2 - A EQUAÇÃO DE LIÉNARD DE GRAU 3

Seja agora $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ e $X^f = (y - f(x), -x)$. Uma descrição completa do espaço de fase de X^f é dada pelo seguinte:

2.1 TEOREMA - Têm-se as seguintes possibilidades:

- a) Se $a_1 \cdot a_3 > 0$, então X^f não possui órbitas fechadas;
- b) se $a_1 \cdot a_3 < 0$, então X^f possui uma única órbita fechada;
- c) se $a_1 = 0$ e $a_3 \neq 0$, então X^f não possui órbitas fechadas. A origem é um atrator fraco para $a_3 > 0$ e um repulsor fraco para $a_3 < 0$;
- d) se $a_3 = 0$ e $a_1 \neq 0$, então X^f não possui órbitas fechadas. A origem é um atrator hiperbólico para $a_1 > 0$ e um repulsor hiperbólico para $a_1 < 0$;
- e) se $a_1 = a_3 = 0$, então a origem é um centro.

A estrutura de órbitas de $\pi(X^f)$ vai esquematizada abaixo:

Figura 6

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO - Os itens a), c) e d) são consequência da proposição 1.3. O item e) é consequência do corolário 1.2. Resta estudar o caso $a_1 \cdot a_3 < 0$. Por exemplo, considere-se o caso $a_3 > 0, a_1 < 0$ (os demais são análogos). A prova de que X^f possui uma única órbita fechada é então feita em 3 passos:

- 1) Toda órbita fechada de X^f intercepta as linhas

$$x = \pm \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}.$$

Seja $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V(x,y) = e^{-2a_2 y} \left(y - a_2 x^2 + \frac{1}{2a_2} \right) \text{ se } a_2 \neq 0 \text{ e}$$

$$V(x,y) = x^2 + y^2 \text{ se } a_2 = 0.$$

Então, $\dot{V}(x,y) = DV(x,y) \cdot X^f(x,y)$ tem sinal constante para

$$-\sqrt{\frac{-a_1}{a_3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}.$$

Além disso existe uma curva de nível $\mathbb{C}$ de V que tangencia as linhas

$$x = \pm \sqrt{\frac{-a_1}{a_3}}.$$

É claro então que nenhuma órbita fechada de X^f intercepta o disco limitado por $\mathbb{C}$, o que demonstra 1).

2) X^f tem pelo menos uma, e no máximo duas órbitas fechadas uma das quais é hiperbólica.

Segue do Teorema 1.1 e do Teorema de Poincaré-Bendixon, que X^f tem pelo menos uma órbita fechada. Para provar que estas são no máximo duas, utiliza-se o seguinte critério: Seja $X = (P,Q)$ um campo no plano e γ órbita periódica de X , de período T : Se

$$\int_{\gamma} \text{div}(X) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt < 0$$

(resp. > 0) então γ é um atrator (resp. repulsor) hiperbólico.

Sejam então, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ as órbitas fechadas de X^f , onde o interior de γ_{i+1} contém γ_i . Usando o critério acima e a parte 1) é possível mostrar que $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ são todas atratoras. Isso, evidentemente só pode ocorrer se $n \leq 2$.

3) X^f tem exatamente uma órbita fechada.

Suponhamos que X^f possua 2 órbitas γ_1 e γ_2 , sendo γ_1 a de menor diâmetro. Com uma pequena perturbação no coeficiente a_1 obtém-se um campo X^{f_ϵ} com pelo menos 3 órbitas fechadas, da seguinte forma: Seja $X^{f_\epsilon}(x, y) = (y - f(x) - \epsilon x, -x)$. Sendo γ_2 hiperbólica atratora, o campo X^{f_ϵ} possuirá uma órbita fechada hiperbólica atratora $\bar{\gamma}_2$ no exterior de γ_1 , se ϵ for suficientemente pequeno. Um cálculo simples mostra que X^{f_ϵ} aponta para o interior de γ_1 . Como, além disso, a origem é repulsora, e Teorema de Poincaré-Bendixon garantirá a existência de 3 órbitas periódicas para X^{f_ϵ} , contradizendo 2). (Ver Figura 7).

Figura 7

§.3 - A EQUAÇÃO DE LIÉNARD PERTO DO CENTRO: $\dot{x} = y$ E $\dot{y} = -x$

O seguinte resultado é uma motivação para a conjectura 1.2, apresentada no início.

3.1 TEOREMA - Seja $d = 2n+1$ ou $2n+2$. Dado um inteiro: $0 \leq k \leq n$, existe um polinômio $f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x$ tal que a equação de Liénard:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

possui exatamente k órbitas fechadas.

A demonstração desse teorema é baseada num método devido a Poincaré, que será descrito a seguir para o caso particular da equação de Liénard.

Considere-se a equação

$$(L_\epsilon) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \epsilon g(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases},$$

onde $g(x) = b_d x^d + \dots + b_1 x$ e ϵ e b_d positivos. Como foi visto no parágrafo 1.1, é possível definir para esta equação, uma aplicação de Poincaré: $P_\epsilon: E_+^V \longrightarrow E_+^V$, onde $E_+^V = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}^+\}$.

Se $(x(y_0, t, \epsilon), y(y_0, t, \epsilon))$ é a solução de (L_ϵ) que passa pelo ponto $(0, y_0)$ tem-se: $P_\epsilon(0, y_0) = (0, y(y_0, t(y_0, \epsilon), \epsilon))$ onde $t(y_0, \epsilon)$ é uma função analítica e $t(y_0, 0) = 2\pi$ e $P_0 = \text{Id}$.

A função $F(y_0, \epsilon)$ definida por:

$$\epsilon F(y_0, \epsilon) = y(y_0, t(y_0, \epsilon), \epsilon) - y_0$$

é analítica, e a órbita de L_ϵ por $(0, y_0)$ é fechada, se, e somente se, y_0 é uma raiz de $F(y_0, \epsilon)$.

Por outro lado considere-se o polinômio:

$$F(y_0, 0) = \frac{\partial y}{\partial \epsilon}(y_0, \epsilon) = - \int_0^{2\pi} (\sin \tau) g(y_0 \cdot \sin \tau) d\tau.$$

(Essa expressão é obtida usando-se a fórmula de variação das constantes).

Se $F(y_1(\epsilon), \epsilon) = 0$ e $y_1(\epsilon) \rightarrow y_1$, quando $\epsilon \rightarrow 0$ então y_1 é raiz de $F(y_0, 0)$. Reciprocamente, se $F(y_1, 0) = 0$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y_0}(y_1, 0) \neq 0$$

segue, como consequência do Teorema das Funções Implícitas, que existe uma única função $y_1(\epsilon)$ tal que $y_1(0) = y_1$ e $F(y_1(\epsilon), \epsilon) = 0$.

O lema seguinte pode ser demonstrado com o auxílio desse método:

3.2 LEMA - Seja d ímpar e $g'(0) \neq 0$. Suponhamos que $F(y_0, 0)$ tem k raízes positivas simples. Então se ϵ é suficientemente pequeno, a equação L_ϵ tem exatamente k órbitas fechadas.

A partir desse resultado, a prova do Teorema 3.1, pode ser feita da maneira indicada a seguir:

1) Suponhamos $d = 2n+1$. Seja $g(x) = b_d x^d + \dots + b_1 x$. Nesse caso $F(y_0, 0)$ é um polinômio ímpar de grau $2n+1$. É possível es-

colher convenientemente os coeficientes de g para que $F(y_0, 0)$ tenha $2k+1$ raízes reais simples, $(0 \leq k \leq n)$.

O teorema segue então do Lema 3.2 acima.

2) Suponhamos $d = 2n+2$. Decorre de 1) que é possível encontrar um polinômio $f_0(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_1x$ de tal forma que a equação

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_0(x) \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

possua exatamente k órbitas fechadas hiperbólicas.

Considere-se o polinômio $f_\delta(x) = \delta x^{2n+2} + f_0(x)$, e seja $X^\delta = (y - f_\delta(x), -x)$. Se δ é suficientemente pequeno, as órbitas fechadas de X^δ interceptam o eixo vertical positivo em pontos do intervalo $[0, M]$. Portanto, diminuindo eventualmente δ , o campo X^δ terá exatamente k órbitas fechadas hiperbólicas.

□

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE KAZUO YAMATO

§.0 - INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é descrever o método proposto por Kazuo Yamato em [11]. Esse método permite determinar o número e a posição aproximada dos ciclos limites (órbitas fechadas isoladas) de um sistema autônomo em dimensão 2, satisfazendo certas condições.

O conhecimento do número e posição dos elementos críticos isolados (pontos singulares e ciclos-limites) é de importância fundamental para a descrição qualitativa do espaço de fase de um tal sistema. O problema de determinação dos pontos singulares corresponde ao de resolução de equações algébricas. O mesmo problema, para o caso dos ciclos - limites, é bastante mais difícil. Uma exposição recente de várias técnicas referentes ao assunto pode ser encontrada em [2]. O método de Yamato permite determinar o número e a posição aproximada dos ciclos-limites para um conjunto "genérico de campos". Sua apresentação se fará inicialmente em variedades fe-

chadas (compactas e sem bordo) de dimensão 2. Posteriormente, serão discutidas algumas adaptações para o plano.

Uma idéia inicial do método pode entretanto, ser apresentada para o caso do plano da maneira descrita a seguir.

Seja $X = (f(x,y), g(x,y))$ um campo em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo a seguinte condição:

$$(D) \quad (X \operatorname{div} X)(x,y) = \left\{ f(\operatorname{div} X)_x + g(\operatorname{div} X)_y \right\}(x,y) < 0$$

para todo $(x,y) \in \Sigma = \{(x,y) \mid (\operatorname{div} X)(x,y) = 0\}$.

Em outras palavras: seja X tal que, quando a função $\operatorname{div} X$ se anula, sua derivada na direção de X é negativa.

Se γ é uma órbita fechada de X , decorre facilmente da condição acima que $\Sigma \cap \gamma = \emptyset$. Tem-se portanto, ou

$$\gamma \subset (\operatorname{div} X)^{-1}]-\infty, 0[\text{ ou } \gamma \subset (\operatorname{div} X)^{-1}]0, +\infty[.$$

No primeiro caso

$$\int_{\gamma} \operatorname{div} X < 0$$

e γ é hiperbólica e assintoticamente estável. No segundo

$$\int_{\gamma} \operatorname{div} X > 0$$

e γ é assintoticamente instável.

Assim, se X satisfaz (D) suas órbitas fechadas serão necessariamente ciclos-limites. Além disso, como se verá adiante (Teorema 2.2), é possível avaliar o número de órbitas

fechadas de X em termos das componentes conexas compactas de Σ .

É claro porém que um campo X em geral não satisfaz (D). Nesse caso o que se pode dizer? Observe-se aqui, que, se $e^{u(x,y)}$ é uma função positiva, as órbitas de $Y = e^u X$ são, do ponto de vista geométrico, as mesmas de X . Por outro lado o divergente de Y é dado por $\text{div} Y = e^u (Xu + \text{div} X)$. É razoável então, procurar descobrir uma função u de tal forma que o campo $Y = e^u X$ satisfaça a condição:

$$(D') \quad Y \text{ div} Y < 0 \text{ para todo } (x,y) \in \Sigma' = \left\{ (x,y) \mid (\text{div} Y)(x,y) = 0 \right\}.$$

Se for possível encontrar uma função u nessas condições, então, de acordo com as observações acima, será possível estimar o número de órbitas fechadas de Y e portanto de X .

De fato, ao invés de procurar resolver diretamente a desigualdade (D), o que se tentará é encontrar soluções aproximadas da equação a derivadas parciais:

$$(E) \quad (Y - \text{div} Y) \text{div} Y = -\lambda^2,$$

onde λ é uma constante, que é equivalente a:

$$(E') \quad (X - \text{div} X) Xu + (X - \text{div} X) \text{div} X + \lambda^2 e^{-2u} = 0.$$

É fácil ver que se v é uma solução aproximada de (E) com $\lambda \neq 0$ então o campo $e^v X$ satisfaz (D). Além disso, como se verá (Teorema 2.4) o conhecimento de uma solução aproximada de (E) permite conhecer a posição aproximada dos ciclos-limites, e esse conhecimento será tanto melhor quanto melhor for a aproximação.

§.1 - A FUNÇÃO $\text{div}_\omega X$

Nesse parágrafo e nos seguintes, M será uma variedade fechada (compacta e sem bordo) de dimensão 2 e classe C^3 e ω um elemento de área (ou seja, uma 2-forma não singular) de classe C^2 em M .

Se X é um campo em M , definindo um único grupo de transformações a 1-parâmetro $\{\phi_s\}$ pode-se definir o divergente de X com respeito a ω , $\text{div}_\omega X$ pela fórmula:

$$(\text{div}_\omega X) \cdot \omega = L_X \omega$$

onde $L_X \omega$ é a derivada de Lie de ω com respeito a X (conforme [5, p. 28]).

Define-se ainda o produto interior de X e ω , ou seja a 1-forma $\ell_X \omega$ por:

$$(\ell_X \omega)(\xi) = \omega(X, \xi).$$

Vale a seguinte fórmula (conforme [5, p. 281]):

$$\int_{M'} L_X \omega = \int_{\partial M'} [\ell_X \omega],$$

onde M' é uma subvariedade de M , de dimensão 2 e com bordo.

Observe-se que, quando $\omega = dx \wedge dy$, $X = (P, Q)$ e M' é uma região do plano, esta fórmula se reduz ao teorema clássico de Green:

$$\iint_{M'} (\text{div} X) dx \wedge dy = \int_{\partial M'} -Q dx + P dy,$$

onde $\text{div}X = P_x + Q_y$ é o divergente no sentido clássico, que corresponde a $\text{div}_\omega X$ com $\omega = dx \wedge dy$.

Seja $u: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com respeito a X , isto é, a derivada Xu existe e é contínua. O campo $Y = e^u X$ define, nessas condições um único grupo de transformações a um parâmetro $\{\psi_s\}$ em M . Usando as propriedades da derivada de Lie obtém-se a seguinte relação:

$$\text{div}_\omega Y = e^u (Xu + \text{div}_\omega X).$$

Seja agora, $\omega = e^u dx \wedge dy$ a expressão de ω numa carta local de M . Novamente usando as propriedades da derivada de Lie obtém-se

$$\text{div}_\omega X = Xu + \text{div}X$$

(onde $\text{div}X$ é o divergente de X com respeito ao elemento de área $dx \wedge dy$).

§.2 - O NÚMERO E A POSIÇÃO APROXIMADA DOS CICLOS-LIMITES

Seja X um campo de classe C^2 em M e ω uma forma de volume fixado em M . O divergente de X com respeito a ω será indicado simplesmente por $\text{div}X$, sempre que não houver possibilidade de confusão.

É possível então definir o conjunto

$$\Sigma = \{p \in M \mid \text{div}X(p) = 0\}$$

e considerar a condição (D) para X .

Tem-se inicialmente a seguinte:

2.1 PROPOSIÇÃO - Seja X um campo estruturalmente estável satisfazendo a condição (D). Então o número de órbitas periódicas de X é maior ou igual ao número de componentes conexas de $M - \Sigma$ que não contêm nem poços nem fontes.

DEMONSTRAÇÃO - Seja M_n uma componente conexa de $M - \Sigma$ nas condições do enunciado. M_n é então um conjunto positivo ou negativamente invariante. Suponhamos que M_n é positivamente invariante (no caso contrário o raciocínio é análogo).

Se M_n contém ao menos um ponto singular (que, por hipótese, é uma sela) escolhamos p pertencente à variedade instável desse ponto. Caso contrário, tomamos um ponto p qualquer em M_n . Em qualquer caso o ω -limite de p , em virtude dos Teoremas de Caracterização de Peixoto e de Poincaré-Bendixon, é uma órbita fechada. $\square$

O teorema seguinte estabelece um limite superior para o número de órbitas fechadas de X .

2.2 TEOREMA - Se X satisfaz a condição (D) então o número de órbitas fechadas de X é menor ou igual a $\#\{\Sigma\} + g - 1$ onde $\#\{\Sigma\}$ é o número de componentes conexas de Σ e g é o genus de M . Em particular, vale a igualdade no caso em que M é uma esfera e X um campo polar e no caso em que M é um toro e X é não singular.

Segue abaixo uma idéia de demonstração (conforme [5, p. 44]).

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO - Supondo que X satisfaz (D), as observações feitas em 2.0 indicam que:

- a) Σ é uma subvariedade fechada de classe C^1 de M .
- b) $\{p \in M \mid (\operatorname{div} X)(p) \leq 0\}$ e $\{p \in M \mid (\operatorname{div} X)(p) \geq 0\}$ são subvariedades de dimensão 2 de M cujos bordos coincidem com Σ .
- c) Cada ciclo-limite de X deve estar contido em uma componente conexa de

$$\{p \in M \mid (\operatorname{div} X)(p) \leq 0\} \text{ ou de } \{p \in M \mid (\operatorname{div} X)(p) \geq 0\}.$$

Seja F uma componente conexa de $\{p \in M \mid (\operatorname{div} X)(p) \leq 0\}$. F é uma subvariedade compacta de dim. 2 de M com bordo. Indiquemos por $\#\{\partial F\}$ o número de componentes conexas do bordo de F e por $g(F)$ o genus da superfície fechada obtida "colando-se" $\#\{\partial F\}$ discos ao bordo de F . Então o número de ciclos - limites contidos em F é menor ou igual a $g(F) + \#\{\partial F\} - 1$.

De fato, se existem $C_1, \dots, C_n$ ciclos-limites contidos em F , com $n \geq g(F) + \#\{\partial F\}$ existirão necessariamente ciclos $C_{j_1}, \dots, C_{j_\ell}$ formando a bordo de uma subvariedade de dim. 2 contida em F .

O lema seguinte (Lema 2.3) mostrará que isso não pode ocorrer.

Segue então imediatamente, que o número de ciclos-limites em M é menor ou igual a $\sum_F (g(F) + \#\{\partial F\} - 1)$ onde F percorre o conjunto das componentes conexas de

$$\{p \in M \mid \operatorname{div} X(p) \leq 0\} \cup \{p \in M \mid \operatorname{div} X(p) \geq 0\}.$$

Para reescrever a expressão acima lembremos que a caracterís-

tica de Euler de uma superfície fechada S é igual a $2(1-\text{genus de } S)$.

Tem-se então para cada componente conexa F :

$$\#\{\partial F\} + \sum_{p \in F} \text{ind}(p) = 2(1-g(F)),$$

onde $\text{ind}(p)$ indica o índice de X em p . Dessa relação e do fato que $\sum_F \#\{\partial F\} = 2\#\{\Sigma\}$ segue facilmente a igualdade

$$\sum_F (g(F) + \#\{\partial F\} - 1) = \#\{\Sigma\} + g - 1$$

com o que fica demonstrada a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte suponhamos que M é o toro e X é não singular (o caso da esfera é análogo). Usando novamente o Lema 2.3 pode-se ver que cada componente conexa de

$$\{p \in M \mid \text{div} X(p) \leq 0\} \cup \{p \in M \mid \text{div} X(p) \geq 0\}$$

é homeomorfa a uma coroa fechada. Portanto o número dessas componentes conexas é igual a $\#\{\Sigma\}$. Por outro lado, o teorema de Poincaré-Bendixon garante a existência de um ciclo-limite em cada uma dessas componentes. Conclui-se daí que o número de ciclos-limites é maior ou igual a $\#\{\Sigma\}$. Como este número deve ser, pela primeira parte do teorema, menor ou igual a $\#\{\Sigma\}$, fica demonstrada a igualdade desejada. $\square$

O lema prometido acima é o seguinte:

2.3 LEMA - Seja M' subvariedade compacta de dimensão 2 de M

tal que $\partial M = C_{j_1} \cup C_{j_2} \cup \dots \cup C_{j_\ell}$, onde cada C_{j_i} é uma órbita fechada de X . Então

$$\int_{M'} (\operatorname{div} X) \cdot \omega = 0.$$

Em particular a função $\operatorname{div} X$ não pode ter sinal constante em M' .

DEMONSTRAÇÃO - O lema é uma consequência imediata do "teorema de Green" (conf. §.1). De fato, tem-se:

$$\int_{M'} (\operatorname{div} X) \cdot \omega = \int_{\partial M'} \ell_X \omega = \sum_i \int_{C_{j_i}} \ell_X \omega.$$

Como $\ell_X \omega(X) = 0$, segue que:

$$\int_{M'} (\operatorname{div} X) \cdot \omega = 0.$$

O resultado seguinte dá informações sobre a posição aproximada das órbitas fechadas de X se é conhecida uma solução aproximada de (E).

2.4 TEOREMA - Seja $v: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que o campo $Y = e^v X$ satisfaça

$$-(\lambda + \epsilon)^2 < (Y - \operatorname{div} Y) \operatorname{div} Y < -(\lambda - \epsilon)^2, \text{ onde } 0 < \epsilon < \lambda$$

(ou seja, e^v é uma solução aproximada da equação (E)).

Consideremos os conjuntos:

$$M_{\lambda - \epsilon} = \{p \in M \mid \operatorname{div} Y \geq (\lambda - \epsilon)\}$$

$$M_{-(\lambda - \epsilon)} = \{p \in M \mid \operatorname{div} Y \leq -(\lambda - \epsilon)\}.$$

Vale então o seguinte:

- i) Os conjuntos $M_{\lambda-\varepsilon}$, $M_{-(\lambda-\varepsilon)}$ são subvariedades compactas com bordo de dimensão 2 de M respectivamente negativa e positivamente invariantes em relação ao fluxo de X ;
- ii) se γ é uma trajetória fechada de X então ou γ está contida em $M_{\lambda-\varepsilon}$ e é um α -ciclo-limite ou γ está contida em $M_{-(\lambda-\varepsilon)}$ e é um ω -ciclo-limite;
- iii) as áreas de $M_{\lambda-\varepsilon}$ e $M_{-(\lambda-\varepsilon)}$ são ambos menores que:

$$\frac{2}{\pi} \frac{(1+\mu)}{(1-\mu)^2} \cdot \arctg(\mu^{(1-\mu)/2(1+\mu)}) \cdot \int_M \omega,$$

onde $\mu = \varepsilon/\lambda$.

Deixamos de expor a demonstração desse teorema. Os (itens i) e ii) podem ser provados sem muita dificuldade, usando raciocínios análogos aos das demonstrações anteriores. Já o item iii) envolve uma demonstração mais técnica, na qual o autor utiliza uma nova fórmula, ligando integrais em superfície a integrais de linha, análoga ao teorema de Stokes.

A idéia básica, porém, é a seguinte: se ω é uma solução da equação (E), então os conjuntos:

$$M_{\lambda} = \{p \in M \mid \text{div} Y(p) = \lambda\}, \quad M_{-\lambda} = \{p \in M \mid \text{div} Y(p) = -\lambda\}$$

são invariantes e contêm, respectivamente, os α e os ω -ciclos limites, além dos pontos singulares e separatrizes de sela, (ver Obs. 3.8). Se, agora, v é uma solução aproximada de (E),

$M_{(\lambda-\varepsilon)}$ e $M_{-(\lambda-\varepsilon)}$ aproximam os conjuntos acima e fornecem assim a localização aproximada dos ciclos-limites de X . Observa-se que a afirmação do item (iii) implica que essa localização é tanto melhor quanto melhor for a aproximação, visto que as áreas de $M_{(\lambda-\varepsilon)}$ e $M_{-(\lambda-\varepsilon)}$ tendem a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

§.3 - EXISTÊNCIA DA FUNÇÃO e^u

O teorema seguinte afirma que para um conjunto "genérico" de campos a equação (E) admite uma solução.

3.1 TEOREMA - Seja X um campo de classe C^2 em M . Suponhamos que X é estruturalmente estável e $(\text{div}X)(p) \neq 0$ sempre que $X(p) = 0$. Então existe uma única função contínua $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ e uma única constante λ satisfazendo as seguintes condições:

- i) A função u é de classe C^2 com respeito a X , isto é, as derivadas Xu , X^2u existem e são contínuas em M .
- ii) A função u é solução da equação diferencial

$$(Y - \text{div}Y)\text{div}Y = -\lambda^2.$$

onde $Y = e^u X$, que é equivalente a

$$(X - \text{div}X)(Xu) + (X - \text{div}X)\text{div}X + \lambda^2 e^{-2u} = 0.$$

- iii) A integral de u em M é igual a zero, isto é:

$$\int_M u \cdot \omega = 0.$$

A demonstração de Yamato é bastante extensa. Procuraremos apenas indicar aqui os seus passos principais.

CONDIÇÕES GEOMÉTRICAS PARA X E UMA DECOMPOSIÇÃO DE M

3.2 DEFINIÇÃO - Um polígono de trajetórias Γ é um subconjunto fechado de M satisfazendo as seguintes condições:

i) Γ é escrito como uma união

$$\Gamma = p_1 \cup \{\gamma_1\} \cup p_2 \cup \{\gamma_2\} \cup \dots \cup p_r \cup \{\gamma_r\}$$

onde p_i é um ponto de sela e γ_i é uma trajetória com α -limite = $\{p_i\}$ e ω -limite = $\{p_{i+1}\}$, ($p_{r+1} = p_1$);

ii) existe uma função contínua $h: S^1 \times [0,1) \longrightarrow M$ tal que $h(S^1 \times 0) = \Gamma$ e a restrição $h|_1: S^1 \times (0,1) \longrightarrow h(S^1 \times (0,1))$ é um homeomorfismo cuja imagem não intercepta as variedades locais instáveis ou estáveis dos pontos p_i .

Γ é dito um α -limite-polígono de trajetórias se o α -limite de todo ponto em $h(S^1 \times (0,1))$ coincide com Γ . Analogamente define-se um ω -limite-polígono.

Considerem-se agora as seguintes condições geométricas para X:

- a) todo ponto singular de X é uma fonte, um poço ou um ponto de sela;
- b) para todo ponto singular de X, tem-se $\text{div}X(p) \neq 0$;
- c) para toda órbita periódica $\gamma(t)$ de X de período τ , tem-se:

$$\int_0^\tau (\text{div}X)(\gamma(t)) \neq 0;$$

- d) se existe uma trajetória γ "ligando dois pontos de se-

1a" (isto é, α -lim de $\gamma = \{p\}$ e ω -lim de $\gamma = \{q\}$) e $\text{div}X(p) < 0$, então $\text{div}X(q) < 0$;

e) o α e o ω -limite de toda trajetória é formado por pontos singulares, órbitas periódicas ou polígonos de trajetórias.

Observe-se que o conjunto dos campos satisfazendo as condições acima contém o conjunto dos campos estruturalmente estáveis com a condição adicional: $\text{div}X(p) \neq 0$ nos pontos singulares. Esta última condição é ainda evidentemente genérica.

De fato, permite-se ainda aqui que X apresente ligações de sela desde que satisfaçam a condição (d).

A demonstração da existência do multiplicador e^u é feita para campos satisfazendo as condições de (a) - (e), portanto para campos de um conjunto genérico.

É conveniente introduzir nesse ponto os seguintes subconjuntos de M :

Ω é a reunião dos pontos singulares e órbitas periódicas de X ;

$\Omega_+ \subset \Omega$ é o conjunto dos pontos singulares para os quais $\text{div}X(p) > 0$ e dos α -ciclos-limites;

$\Omega_- \subset \Omega$ é o conjunto dos pontos singulares para os quais $\text{div}X(p) < 0$ e dos ω -ciclos limites.

Em virtude das condições b) e c), Ω pode ser escrito como reunião disjunta $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$.

Ω_-^X é o conjunto dos pontos de sela para os quais $\text{div}X(p) < 0$;

Ω_+^X é o conjunto dos pontos de sela para os quais $\text{div}X(p) > 0$;

$E_+ = \{p \in M \mid p \notin \Omega_+^X, \omega\text{-limite de } p \in \Omega_+^X\}$;

$E_- = \{p \in M \mid p \notin \Omega_-^X, \alpha\text{-limite de } p \in \Omega_-^X\}$;

$E = E_+ \cup E_-$ (Esta reunião é disjunta em vista da condição d).

π_+ é a reunião dos α -limite-polígonos de trajetórias;

π_- é a reunião dos ω -limite-polígonos de trajetórias.

A proposição seguinte dá uma decomposição de M em termos desses conjuntos e é consequência das condições a) - e):

3.3 PROPOSIÇÃO - Suponhamos que X satisfaça as condições a) - e). Então M pode ser expresso como a reunião disjunta:

$$M = \Omega \cup E \cup M_0$$

onde:

$M_0 = \{p \in M \mid \alpha\text{-limite de } p \in \Omega_+ \cup \pi_+, \text{ e } \omega\text{-limite de } p \in \Omega_- \cup \pi_-\}$;

M_0 é um subconjunto aberto e $\Omega \cup E$ é fechado.

Além disso tem-se:

$\Omega_+ \cup E_+ = \{p \in M \mid \alpha\text{-limite de } p \in \Omega_+ \cup \pi_+, \omega\text{-limite de } p \in \Omega_+\}$

$\Omega_- \cup E_- = \{p \in M \mid \alpha\text{-limite de } p \in \Omega_-, \omega\text{-limite de } p \in \Omega_- \cup \pi_-\}$.

CAMPOS ELEMENTARES

3.4 DEFINIÇÃO - Seja λ um número positivo. Diz-se que Y é e-

elementar com expoente de estabilidade λ se e somente se Y satisfaz a equação:

$$Y \operatorname{div} Y - (\operatorname{div} Y)^2 = -\lambda^2.$$

3.5 OBSERVAÇÃO - Seja u_0 um número real. Então $e^u X$ é elementar com expoente de estabilidade 1 se e somente se $e^{u+u_0} X$ é elementar com expoente de estabilidade e^{u_0} .

A observação decorre facilmente das propriedades da função divergente, expostas no §.1.

O resultado seguinte do cálculo é bastante útil no estudo das propriedades dos campos elementares.

3.6 LEMA - Toda solução limitada da equação: $\dot{x} - x^2 = 1$ é dada por:

$$x(s) = - \frac{ce^s - (1-c)e^{-s}}{ce^s + (1-c)e^{-s}}$$

onde c é uma constante satisfazendo $0 \leq c \leq 1$. Portanto a solução é constante se e somente se $c = 0$ ou $c = 1$. Se $0 < c < 1$ a solução $x(s)$ possui as seguintes propriedades:

$$-1 < x(s) < 1 \text{ para todo } s \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} x(s) = \mp 1.$$

Segue desse lema a seguinte:

3.7 PROPOSIÇÃO - Seja Y um campo elementar com expoente de estabilidade 1. Seja $\{\psi_s\}$ o grupo de transformações a um parâmetro gerado por Y . Considerem-se os conjuntos:

$$N_{\pm} = \{p \in M \mid (\operatorname{div} Y)(p) = \pm 1\}$$

$$M_0 = \{p \in M \mid |\operatorname{div} Y(p)| < 1\}.$$

Então:

$$M = N_+ \cup N_- \cup M_0 \text{ (reunião disjunta).}$$

Os conjuntos N_+ , N_- são fechados e invariantes por $\{\psi_s\}$.

Além disso, para cada ponto $p \in M_0$ o α -limite de p está contido em N_+ e o ω -limite de p está contido em N_- .

3.8 OBSERVAÇÃO - Seja agora Z um campo elementar com expoente de estabilidade λ .

A observação 3.5 permite obter uma proposição análoga à proposição acima fazendo agora

$$N_{\pm} = \{p \in M \mid (\operatorname{div} Z)(p) = \pm \lambda\}$$

$$M_0 = \{p \in M \mid |\operatorname{div} Z|(p) < \lambda\}.$$

O autor ilustra a idéia geométrica em que se baseia a demonstração do Teorema 3.1 com o seguinte:

3.9 EXEMPLO - Suponhamos que X seja um campo não singular no toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ω o elemento de área dado por $dx \wedge dy$, com duas órbitas periódicas e ambas hiperbólicas.

O que se procura é uma função e^u tal que $e^u X$ seja elementar com expoente de estabilidade λ . Sejam A e B as regiões limitadas pelo dois ciclos-limites, α e β as áreas de A

e B respectivamente. (É claro que $\alpha + \beta = 1$).

Introduz-se um campo Y de classe C^2 como segue:

$$Y = (f(x), 1)$$

onde:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha} x\right) & \text{para } x \in [0, \alpha] \\ \frac{-\beta\lambda}{\pi} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{\beta} (x-\alpha)\right] & \text{para } x \in [\alpha, 1]. \end{cases}$$

Verifica-se facilmente que Y possui 2 ciclos-limites, $x=0$ e $x=\alpha$ e a área das regiões limitadas por estes ciclos-limites são α, β respectivamente. Além disso Y é elementar com expoente de estabilidade λ .

Para conseguir uma função e^u tal que $e^u X$ satisfaça (E), é suficiente construir um homeomorfismo $h: T^2 \rightarrow T^2$ (difeomorfismo q.s.) que preserva área e leva órbitas de X em órbitas de Y. (De fato, define-se então e^u pela fórmula $h_*(e^u X) = Y$).

Para construir h procede-se da seguinte forma: seja γ uma órbita não periódica de X. Existe um único ponto p em γ tal que para uma vizinhança infinitesimal U de p, a área de domínio $\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U)$ é igual à área do domínio $\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U)$ onde $\{\phi_t\}$ é o grupo a 1-parâmetros gerado por X. Fazendo γ percorrer o conjunto das órbitas não periódicas obtêm-se, dessa maneira dois círculos $S_A \subset A$, $S_B \subset B$. Como h deve preservar área e órbitas os círculos S_A e S_B são levados por h nos círculos $x = \alpha/2$,

$$x = \alpha + \beta/2.$$

Se a imagem de um ponto em S_A está determinada, as imagens dos demais pontos ficam determinadas pela exigência de que h preserve área e órbitas. De maneira análoga ficam determinadas as imagens dos demais pontos de T^2 . Dessa maneira a função h é construída.

CONSTRUÇÃO DA FUNÇÃO e^u

Tendo em vista a observação 3.5, para demonstrar o Teorema 3.1, basta mostrar a existência de uma única função u de classe C^2 com respeito a X , tal que $Y = e^u X$ seja elementar com expoente de estabilidade 1.

A demonstração da existência dessa função é feita por partes, usando a decomposição de M dada pela proposição 3.3. A construção de e^u é feita em cada órbita de X . Para os pontos singulares tem-se a seguinte:

3.10 OBSERVAÇÃO - Se p é ponto singular de X e v é uma função tal que $v(p) = \frac{1}{|\operatorname{div} X(p)|}$ então: $(\operatorname{div} e^v X)(p) = 1$ se

$$\operatorname{div} X(p) > 0 \text{ e } (\operatorname{div} e^v X)(p) = -1 \text{ se } \operatorname{div} X(p) < 0$$

(ver §.1).

Como se verá adiante, isso resolve o problema nos pontos singulares. O que se faz em seguida é construir e^u sucessivamente nas órbitas periódicas, estendê-la para os polígonos e daí aos demais pontos de E . Finalmente constrói-se e^u em M_0 .

Mais precisamente partindo de um campo X que satisfaça as propriedades (a) - (e), constrói-se uma função $v_1: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) v_1, Xv_1, X^2v_1 são contínuas em M ;
- ii) o campo $Z_1 = e^{v_1}X$ satisfaz a equação $(Z_1 - \text{div} Z_1)Z_1 = -1$ em Ω .

Além disso mostra-se que toda função satisfazendo as mesmas condições coincide com v_1 em Ω .

O campo Z_1 ainda satisfaz as propriedades (a) - (e) e induz a mesma decomposição em M . Partindo então de Z_1 , constrói-se agora uma função v_2 tal que:

- i) $v_2, Z_1v_2, Z_1^2v_2$ (e portanto Xv_2 e X^2v_2) são contínuas em M ;
- ii) o campo $Z_2 = e^{v_2}Z_1$ satisfaz a equação $(Z_2 - \text{div} Z_2)Z_2 = -1$ em $\Omega \cup \pi$ (e portanto $v_2 = 0$ em Ω).

Novamente, toda função satisfazendo i) e ii) coincide com v_2 em $\Omega \cup \pi$.

Finalmente, constroem-se v_3, v_4 , respectivamente em $E - \pi$ e em M_0 , satisfazendo condições análogas. O campo $Z = e^u X$, onde $u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, resulta elementar com expoente de estabilidade 1. Além disso, u fica determinada de maneira única em virtude da decomposição de M e da unicidade de cada v_i .

A técnica básica utilizada é a seguinte:

Seja $Z = e^v X$ um campo em M , $\{\xi_t\}$ o grupo a um parâmetro gerado

por $Z, w: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com respeito a Z , e $Y = e^w Z$.

Em vista da relação básica $\text{div} Y = Z(e^w) + e^w \text{div} Z$, a função $g(t) = e^{w(\xi(t,p))}$ satisfaz a equação diferencial:

$$(F) \quad \frac{dg}{dt} + d(t) \cdot g(t) = \text{div} Y(\xi(t,p)), \text{ onde } d(t) = \text{div} Z(\xi(t,p)).$$

Em cada passo, se se exige que Y seja elementar com expoente de estabilidade 1 é possível obter informações sobre as funções $\text{div} Y(\xi(t,p))$, $\text{div} Z(\xi(t,p))$ e condições de fronteira sobre as funções $g(t)$ e $d(t)$ que permitem encontrar uma solução única para (F).

Um primeiro resultado nessa direção é o seguinte:

3.11 LEMA - Para que $(Y - \text{div} Y)\text{div} Y = 1$ em $\Omega \cup E$ é necessário e suficiente que

$$\text{div} Y = \begin{cases} 1 & \text{em } \Omega_+ \cup E_+ \\ -1 & \text{em } \Omega_- \cup E_- \end{cases}.$$

Portanto a equação (F) assume a forma:

$$\frac{dg}{dt} + d(t) \cdot g(t) = 1 \quad \text{se } p \in \Omega_+ \cup E_+$$

$$\frac{dg}{dt} + d(t) \cdot g(t) = -1 \quad \text{se } p \in \Omega_- \cup E_-.$$

Usar-se-á, daqui em diante, a notação

$$\delta(t,p) = \exp \left\{ \int_0^t \text{div} Z(\xi(t,p)) dt \right\}.$$

Para as órbitas periódicas tem-se o seguinte:

3.12 LEMA - Suponha que Z possui uma órbita periódica $\gamma = \gamma(t)$ com período τ . Se γ é um α -ciclo-limite de Z então $\text{div}Y = 1$ em γ se e somente se:

$$e^w(p) = \frac{\int_0^\tau \delta(t,p) dt}{\delta(\tau,p) - 1} \text{ para } p \text{ em } \gamma.$$

A expressão obtida nesse lema é simplesmente a solução da equação (F) observando que no caso presente as funções $g(t)$ e $d(t)$ são periódicas de período τ .

A construção é feita agora nos polígonos de trajetórias.

3.13 LEMA - Suponha que $\text{div}Z = \pm 1$ em $\Omega_\pm$. Se Γ é um α -limite-polígono, então $\text{div}Y = 1$ em γ se e somente se

$$e^w(p) = \int_{-\infty}^0 \delta(t,p) dt, \text{ para todo } p \in \Gamma.$$

Analogamente se Γ é um ω -limite-polígono então $\text{div}Y = -1$ em Γ se e somente se:

$$e^w(p) = \int_0^\infty \delta(t,p) dt, \text{ para todo } p \in \Gamma.$$

Aqui as informações suplementares que permitem resolver a equação (F), por exemplo, para o caso dos pontos regulares de Γ , sendo Γ um α -limite-polígono são as seguintes:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 1.$$

Há agora uma pequena dificuldade. A partir do lema acima e do anterior é fácil construir uma $v: M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- i) v é contínua em M ;
- ii) v é de classe C^2 em $M - U$, onde U é uma vizinhança de $\pi n\{\text{pontos de sela}\}$;
- iii) Xv, X^2v existem e são contínuas em πnU ;
- iv) $\text{div}(e^V X) = \pm 1$ em $\Omega_{\pm} \cup \pi_{\pm}$.

É preciso então modificar a função v em U , de modo a torná-la de classe C^2 com respeito a X em M , sem modificá-la em $\Omega \cup \pi$. Para isso usa-se a expressão local de X em torno dos pontos de sela.

A construção de e^u nos demais pontos de E é feito de maneira análoga.

Resta demonstrar a existência de e^u nos pontos de M_0 . Tem-se o seguinte:

3.14 LEMA - Suponha que $\text{div} Z = \pm 1$ em $\Omega_{\pm} \cup \pi_{\pm}$. Seja M_0 como na proposição 3.3:

- i) As integrais

$$\Delta_+(p) = \int_0^{\infty} \delta(t, p) dt, \quad \Delta_-(p) = \int_{-\infty}^0 \delta(t, p) dt$$

convergem uniformemente quando $p \in M_0$. Portanto $\Delta_+(p), \Delta_-(p)$ são funções contínuas em M_0 .

- ii) Seja

$$\Sigma = \{p \in M_0 \mid \Delta_+(p) = \Delta_-(p)\}.$$

Se Y é elementar com expoente de estabilidade 1, então

$$\Sigma = \{p \in M \mid \operatorname{div} Y(p) = 0\}.$$

iii) Todo ponto de M_0 pode ser escrito de uma única maneira:

$$p = \xi_t(q)$$

com $q \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$.

iv) Se Y é elementar, com expoente de estabilidade 1, então tem-se

$$e^{w(\xi_t(q))} = \frac{K \cos \left(K^{-1} \int_0^t \delta(t, q) dt \right)}{\delta(t, q)}$$

para todo $q \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$, onde

$$K = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \delta(t, q) dt.$$

Reciprocamente se w satisfaz a igualdade acima para todo $q \in \Sigma$ e todo $t \in \mathbb{R}$ então:

$$(Y - \operatorname{div} Y) \operatorname{div} Y = -1 \text{ em } M_0.$$

Convém ressaltar aqui o significado geométrico do item ii). Recorde-se que a relação entre $\Delta_\tau(p)$ e $\Delta_0(p)$ onde $\Delta_0(p)$ é a área de uma vizinhança infinitesimal U de p e $\Delta_\tau(p)$ é a área de $\bigcup_{0 \leq t \leq \tau} \xi_t(U)$ (ou $\bigcup_{\tau \leq t \leq 0} \xi_t(U)$) é dada por:

$$\Delta_{\tau}(p) = \Delta_0(p) \int_0^{\tau} \operatorname{div} Z(\xi(t,p)) dt$$

$$\left\{ \text{ou } \Delta_{\tau}(p) = \Delta_0(p) \int_{\tau}^0 \operatorname{div} Z(\xi(t,p)) dt \right.$$

Numa linguagem imprecisa, o conjunto Σ é o conjunto dos pontos $p \in M$, para os quais coincidem a área dos saturados de uma "vizinhança infinitesimal" de p pelo fluxo positivo, $t \geq 0$, ou pelo fluxo negativo $t \leq 0$. A afirmação é de que Σ coincide com o conjunto dos pontos onde a função divergente se anula (ver Exemplo 3.9).

Para a demonstração do item iv) o que se precisa novamente é resolver a equação (F). As funções $g(t)$ e $d(t)$ satisfazem agora

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} d(t) = \mp 1.$$

Aqui, porém, não vale a igualdade $\operatorname{div} Y(\xi_t(p)) = 1$.

Mostra-se no entanto que

$$(\operatorname{div} Y(\xi_t(q))) = -\operatorname{sen}(e^{-w(q)} \int_0^t \delta(t,q) dt)$$

e se torna novamente possível encontrar uma solução (que é única) para a equação (F).

A função u é então, com o auxílio dos lemas e observações precedentes, construída da maneira já indicada.

§ .4 - APLICAÇÕES À EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Considere-se o seguinte sistema no plano:

$$(L) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad f(-x) = -f(x).$$

Suponha-se ainda, por simplicidade, que f é de classe C^∞ .

A teoria exposta nos parágrafos anteriores foi desenvolvida para variedades compactas e não pode, portanto, ser aplicada diretamente ao estudo desse sistema. Para fazê-lo, alguns dos resultados anteriores precisam ser reformulados.

Seja $X = [(y-f(x)), -x]$ e $\omega = e^u dx \wedge dy$ um elemento de área, digamos, de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$. Pode-se, ainda, definir o $\text{div}_\omega X$ da forma exposta no parágrafo 2.1. Tem-se

$$\text{div}_\omega X = Xu - f'(x).$$

O divergente de X com respeito a ω será indicado simplesmente por $\text{div}X$.

Como já foi observado anteriormente, se $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 vale a relação: $\text{div } e^u X = e^u (Xu + \text{div}X)$ e $Y = e^u X$ tem o mesmo comportamento qualitativo de X .

O teorema seguinte é uma modificação de 2.2.

4.1 TEOREMA - Suponhamos que existe uma função $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que o campo $Y = e^u X$ satisfaça a condição:

$$(D') \quad (Y \operatorname{div} Y)(x, y) < 0 \text{ para todo } (x, y) \in \Sigma$$

onde $\Sigma = \{(x, y) \mid (\operatorname{div} Y)(x, y) = 0\}$.

Seja n ($0 \leq n \leq \infty$) o número de componentes conexas compactas de Σ .

Então o número de órbitas fechadas de (L) é igual a $(n-1)$ ou n .

Uma avaliação mais precisa é dada pelo seguinte:

4.2 TEOREMA - Suponhamos que existe uma função $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e uma constante positiva ε tal que o campo $Y = e^u X$ satisfaça a desigualdade:

$$(I) \quad (Y - \operatorname{div} Y) \operatorname{div} Y < -\varepsilon^2$$

que é equivalente a:

$$(X - \operatorname{div} X) Xu + (X - \operatorname{div} X) \operatorname{div} X + \varepsilon^2 e^{-2u} < 0$$

(($X - \operatorname{div} X$) é encarado como um operador).

Além disso, suponhamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega = \infty.$$

Então o número de ciclos-limites de (L) é igual ao número de componentes conexas compactas de

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{div} Y(x, y) = 0\}.$$

A demonstração desses resultados é semelhante à do teorema 1.1 do capítulo 3.

Observem-se aqui as diferenças entre os dois resultados: a condição (I), estritamente mais forte que (D') influi na evolução das áreas do fluxo de Y . (Ver observações ao item ii) do Lema 3.14). Isso impõe a existência de um (único) ciclo-limite na única componente conexa não compacta de $R^2 - \{ \}$.

O resultado seguinte é uma modificação de 3.1, para o caso da equação de Liénard no plano. Sua demonstração utiliza argumentos análogos aos daquele teorema (3.1):

4.3 TEOREMA - Suponhamos que $f'(0) \neq 0$ é

$$\int_0^\tau (\operatorname{div} X)(\gamma(t)) dt \neq 0$$

para toda solução periódica não trivial de (L), de período τ . Seja λ um número positivo. Então existe uma função contínua $\mu: R^2 \rightarrow R$ tal que:

- i) as derivadas Xu , X^2u existem e são contínuas em R^2 ;
- ii) o campo $Y = e^u X$ satisfaz:

$$(Y - \operatorname{div} Y) \operatorname{div} Y = -\lambda^2.$$

Se, além disso, supusermos que (L) possui um único ciclo-limite então podemos obter uma função contínua

$$u': R^2 - \{(0,0)\} \rightarrow R$$

tal que:

- i) a derivada Xu' existe e é contínua em $R^2 - \{(0,0)\}$;
- ii) o campo $Y = e^{u'} X$ satisfaz:

$$(\operatorname{div} Y)^2 = \lambda^2 \text{ em } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

O resultado seguinte é uma reformulação de 4.2, especialmente útil no estudo, da equação de Van der Pol. Sua demonstração é análoga.

4.4 TEOREMA - Suponhamos

$$f'(0) < 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \omega = \infty$$

e que exista $u: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Y = e^u X$ (definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ satisfaça: $(\operatorname{div} Y)(x,y) < -\epsilon$).

Então existe uma única solução periódica para (L), que é assintoticamente estável.

Como aplicação da teoria aqui exposta, Yamato demonstrou os resultados enunciados em seguida, sobre a equação de Liénard. Tais resultados já eram conhecidos.

Na demonstração de 4.5 e 4.6, o autor utiliza técnicas de perturbação para encontrar soluções aproximadas da equação (E), o que permite utilizar o teorema 4.2. Para a proposição 4.7 ele lança mão novamente de técnicas de perturbação e do teorema 4.3 (com pequenas modificações). Finalmente, a proposição 4.8 é demonstrada usando o teorema 4.3.

A descrição pormenorizada dessas técnicas não faz parte dos objetivos do nosso trabalho e por isso omitiremos.

4.5 PROPOSIÇÃO - Suponhamos que f está escrita na forma

$$f(x,\mu) = \mu f_1(x),$$

onde μ é constante e f_1 é independente de μ . Façamos

$$b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta f(r \cos\theta) d\theta.$$

Suponhamos que $b = b(r)$ tem um número finito de raízes.

Sejam $b_0 = 0 < b_1 < \dots < b_m$ suas raízes não-negativas e $R > b_m$. Suponhamos ainda que $b'(b_i) \neq 0$ para cada i (ou seja b_i é raiz simples para todo i).

Então existe um número positivo μ_0 tal que $0 < |\mu| < \mu_0$.

o sistema (L) tem precisamente m ciclos-limites no disco:

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Quando $\mu \rightarrow 0$, cada ciclo-limite tende ao círculo

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = b_i^2\}$$

para algum b_i ,

4.6 PROPOSIÇÃO - Seja $\mu \neq 0$ e $f = \mu \sin x$. Então existe um compacto K tal que o sistema (L) restrito a $R^2 - K$ tem as seguintes propriedades:

- i) O sistema possui um número infinito de curvas integrais fechadas;
- ii) cada curva integral fechada é positiva ou negativamente assintoticamente estável.

4.7 PROPOSIÇÃO - Seja $f = \mu(x^3 - x)$, $0 < |\mu| < 1$. Então o sistema (L) possui uma única curva integral fechada que é positiva ou negativamente assintoticamente estável conforme $\mu > 0$ ou $\mu < 0$.

4.8 PROPOSIÇÃO (Teorema de Liénard) - Seja $f_1(x)$ uma função

ímpar de classe C^1 satisfazendo:

- a) $f_1(x)$ tem um único zero positivo x_1 ;
- b) $f_1(x) < 0$ em $(0, x_1)$;
- c) $f_1'(x) > 0$ se $|x| > x_1$.

Então o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \mu f_1(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \mu \text{ constante } \neq 0$$

possui uma única órbita fechada que é positiva ou negativamente assintoticamente estável conforme $\mu > 0$ ou $\mu < 0$.

CAPÍTULO 3

LIMITAÇÃO PARA O NÚMERO DE ÓRBITAS PERIÓDICAS

DE CAMPOS NO PLANO

§.0 - INTRODUÇÃO

Nesse capítulo exporemos um resultado que é uma ligeira modificação do Teorema 4.1, Capítulo 2, de Yamato. Nosso resultado dará uma limitação para o número máximo de órbitas fechadas de um determinado campo, dependendo também da resolução de desigualdades envolvendo derivadas parciais.

Nosso propósito inicial era aplicar esta técnica a campos polinomiais. O que conseguimos, até aqui, foi refazer uma parte do resultado obtido em [7], para a equação de Liénard de grau 3 (ver cap. 1, §.3).

§.1 - MODIFICAÇÕES DE UM TEOREMA DE YAMATO

Exporemos inicialmente uma modificação do Teorema 4.1, cap. 2. Uma comparação entre o nosso resultado e aquele Teorema é feita a seguir nas observações 1.3 a 1.6. Em 1.7, descreve-se uma aplicação à equação de Liénard de grau 3, estuda-

da no capítulo 1, §.3.

1.1 TEOREMA - Seja $X = (P, Q)$ um campo em $\mathbb{R}^2$ de classe C^2 , e $u, w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, funções de classe C^2 . Façamos:

$$F = Xu + u \operatorname{div} X + u \cdot Xw = \operatorname{div}(uX) + u \cdot Xw.$$

Suponhamos que F satisfaça a seguinte condição:

$$(\mathcal{D}) \quad (XF)(x, y) \neq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \Sigma$$

onde

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

Seja n ($0 \leq n \leq \infty$), o número de componentes conexas compactas de Σ .

Então o número de órbitas periódicas de X é $\leq n$.

Observe-se aqui que a função $F(x, y)$ não é senão o divergente de campo $u \cdot X$ em relação ao elemento de área

$$\omega = e^w dx \wedge dy.$$

Para a demonstração do Teorema, precisamos antes do seguinte:

1.2 LEMA - Seja $X = (P, Q)$ um campo no $\mathbb{R}^2$ de classe C^2 e F como no teorema acima. Seja D uma região compacta do plano cujo bordo é formado por órbitas de X . Então ou $F(x, y)$ troca de sinal em D ou $F(x, y) \equiv 0$ em D .

DEMONSTRAÇÃO - Temos, em virtude do Teorema de Green:

$$\iint_D e^w F(x, y) dx dy = \int_{\partial D} (e^w \cdot u) \cdot (-Q dx + P dy) = 0.$$

Se $F(x,y)$ não troca de sinal em D então

$$\int_D \int F(x,y) dx dy = 0$$

e portanto $F(x,y) \equiv 0$ em D . □

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.1 - Suponhamos inicialmente $\Sigma = \emptyset$. Nessas condições, $F(x,y) > 0$ ou $F(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e a inexistência de órbitas periódicas de X segue do lema precedente. Podemos então assumir que $\Sigma \neq \emptyset$.

A condição (D) implica que Σ é uma subvariedade de dimensão 1 do $\mathbb{R}^2$.

Seja I uma componente conexa de Σ . I é um subconjunto completo do $\mathbb{R}^2$ em virtude da continuidade de F . Além disso, segue do Teorema das Funções Implícitas que todo ponto de I possui uma vizinhança cuja interseção com I é difeomorfa a um intervalo aberto. Essas considerações mostram que I deve ser ou um arco completo e não compacto L_i , ou uma curva de Jordan J_k . Portanto, Σ pode ser escrito como uma reunião disjunta:

$$\Sigma = J_1 \cup \dots \cup J_n \cup L_1 \cup \dots \cup L_m, \quad 0 \leq m, n \leq \infty,$$

onde cada J_i é uma curva de Jordan (difeomorfo a S^1), e cada L_k é um arco completo e não compacto (difeomorfo a $\mathbb{R}$).

Observemos aqui que cada trajetória de X intercepta uma componente conexa de Σ no máximo em um ponto (e o faz transversalmente).

Se $n = 0$, então não existe nenhuma órbita periódica.

De fato, se γ é uma órbita periódica então, conforme o lema, $F(x,y)$ deve trocar de sinal em D , onde D é o disco limitado por γ . Mas, se isso acontece, γ deve interceptar uma componente conexa L_i de Σ , ao menos duas vezes o que não pode ocorrer, como já observamos.

Suponhamos $1 \leq n < \infty$. Resulta da condição (D) que $\text{Ind}(X, J_i) = 1$, para todo i . Como, por hipótese, a origem é a única singularidade de X , podemos ordenar os J_i de tal forma que, se D_i é o disco cujo bordo é J_i então:

$$D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n.$$

É uma consequência óbvia do lema 1.2 que D_1 não contém nenhuma órbita periódica. Seja $A_i = D_{i+1} - D_i$, $i \geq 1$ (onde $D_{n+1} = \mathbb{R}^2$) a coroa cujo bordo é formado por J_{i+1} e J_i e não contém nenhum outro J_j .

Afirmamos que qualquer órbita periódica γ deve estar contida em alguma coroa A_i .

De fato, seja γ uma tal órbita e k o mínimo dos i tais que $A_i \cap \gamma \neq \emptyset$. Se $\gamma \cap A_i \neq \emptyset$ com $i \neq k$, então $\gamma \cap J_{k+1}$ consiste de, pelo menos, dois pontos. Isso como observamos, não pode ocorrer.

Por outro lado, como consequência do lema, cada A_i contém, no máximo, uma órbita periódica. Portanto, o número de órbitas periódicas será, no máximo, igual a n .

Finalmente, se $n = \infty$, observações análogas às anteriores mostram que o número de órbitas periódicas é enumerá-

vel e são todas ciclos-limites.

1.3 OBSERVAÇÃO - Se $w \equiv 0$ ou $u \equiv 1$, obtemos respectivamente,

$$F = \operatorname{div}(uX) \quad \text{e} \quad F = \operatorname{div}_{\omega}(X)$$

onde $\omega = e^W dx \wedge dy$.

1.4 OBSERVAÇÃO - A condição (D) é usada na demonstração de duas maneiras distintas:

- a) para garantir que $\Sigma = J_1 \cup \dots \cup J_n \cup L_1 \cup \dots \cup L_m$ e os J_i envolvem a origem;
- b) para garantir que cada órbita periódica está contida numa coroa A_i .

Se já se soubesse que Σ é da forma descrita em a), então, a parte b) poderia ser obtida com uma hipótese mais fraca, por exemplo:

$$X^2 F(x,y) < 0 \quad \text{para todo } (x,y) \in \Sigma$$

tal que $XF(x,y) = 0$.

1.5 OBSERVAÇÃO - No teorema análogo de Yamato (Teorema 4.1, capítulo 2), a condição (D) é substituída por uma condição mais forte:

$$(D) \quad XF(x,y) < 0, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Sigma.$$

Essa condição permite garantir que cada coroa A_i é positiva ou negativamente invariante e, portanto, contém uma órbita periódica. Com essa hipótese mais forte é possível então, mostrar que o número de órbitas periódicas é $(n-1)$ ou n , ao invés de

simplesmente conseguir uma limitação como no presente caso.

1.6 OBSERVAÇÃO - A hipótese de que a origem seja a única singularidade de X não é essencial. De fato, se X possui um número finito de singularidades, um majorante para o número de órbitas periódicas de X pode ser ainda conseguido em termos das componentes conexas compactas de Σ . Encontrar esse majorante, conhecidos os pontos críticos de X é um problema combinatório, em cada caso particular.

Uma aplicação simples da teoria aqui exposta é o seguinte:

1.7 EXEMPLO - Consideremos a equação de Liénard:

$$(L) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

Suponhamos que $f(x) = \phi(x) + ax^2$, com

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi'(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se tomarmos $w(x, y) = -2ay$

$$(Xw + \operatorname{div} X)(x, y) = -\phi'(x)$$

e portanto (L) não possui nenhuma órbita periódica.

O resultado vale, em particular, se

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x, \quad a_3 \cdot a_1 \geq 0, \quad a_1 \neq 0, \quad \text{e} \quad g(x) = -x.$$

(É fácil ver que ele ainda vale quando $a_3 \neq 0$ e $a_1 = 0$). Isso é uma parte do resultado obtido por Lins, Melo e Pugh, para a equação de Liénard de grau 3, conforme Teorema 2.1, cap. 1.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - BAUTIN, N.N., On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type. *Amer. Math. Soc. Transl., Serie 1*, 5: 396-413, 1962
- [2] - CHERKAS, L.A. Estimation on the number of limit cycles of autonomous systems. *Differential Equations*, 13(5): 529-547, 1977.
- [3] - DULAC, M.H. Sur les cycles limites. *Bull. Soc. Math. France*, 51: 45-188, 1923.
- [4] - DUMORTIER, F. Singularities of vector fields on the plane. *J. Differential Equations*, 23(1): 53-106, 1977.
- [5] - KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. New York, Interscience, 1963. v.1. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 15).
- [6] - LEFSCHETZ, S. *Differential equations: geometric theory*. 2. ed., New York, Interscience, 1962. 390 p. (Pure and Applied Mathematics, 6).
- [7] - LINS, A.; MELO, W.de; PUGH, C.C. On Liénard's equation. In: PALIS Jr., J. & CARMO, M.P.do, eds. *Geometry and topology: proceedings of the Third Latin-American School of Mathematics, Rio de Janeiro, 1976*. Berlin, Springer, 1977, p. 335-337. (Lecture Notes in Mathematics, 597).
- [8] - PALIS Jr., J. & Melo, W.de. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro, IMPA, 1978. 190p. (Projeto Euclides).
- [9] - SEMINÁRIO DE SISTEMAS DINÂMICOS, Rio de Janeiro, 1970. [Trabalhos]. Rio de Janeiro, IMPA, 1971. 1 v. (várias paginações) (Monografias de Matemática, 4).

- [10] - GONZÁLEZ VELASCO, E.A., Generic properties of polynomial vector fields at infinity. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 143:201-222, 1969.
- [11] - YAMATO, K. An effective method of counting the number of limit cycles. *Nagoya Math. J.*, 76:35-114, 1979.