O ÍNDICE DE EQUAÇÕES INTEGRAIS
LINEARES DE VOLTERRA-STIELTJES

JOÃO BATISTA FERREIRA GOMES NETO

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. CHAIM SAMUEL HÖNIG

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

- SÃO PAULO, ABRIL DE 1980 -

À minha mulher
Rosa
e aos meus filhos
Raquel
e
Ernesto

AGRADECIMENTOS

ao meu orientador, Professor Doutor Chaím Samuel Hönig, pela sua efetiva orientação não só na colaboração deste trabalho, cujo tema me sugeriu, como também na minha iniciação ao estudo da Análise Funcional;

ao Professor Galdino Cesar da Rocha Filho minha gratidão pelo apoio durante o período em que este trabalho foi realizado;

a todos os colegas e amigos que fiz no IME durante estes anos em São Paulo;

ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pelo seu excelente e cuidadoso trabalho de datilografia.

ÍNDICE

ABSTRACT.	v
INTRODUÇÃO.	viii
NOTAÇÃO	xii
CAP. 1 - RESULTADOS AUXILIARES.	1
1. Funções Regradas e Simplesmente regradadas.	1
2. Funções de Semivariação Limitada.	3
3. A integral interior	5
4. Os teoremas do tipo de Riesz e de Helly	10
5. O operador integral	11
CAP. 2 - ANÁLISE DOS ESPAÇOS DE NÚCLEOS	22
1. Funções de semivariação limitada segundo Vitali	22
2. Núcleos de Hinton	35
3. Núcleos com $K^{\square}$ regradadas	42
CAP. 3 - A EQUAÇÃO INTEGRAL DE VOLTERRA-STIELTJES	50
1. Alguns Resultados Básicos	50
A - Os Teoremas de Hönl e Arbex.	50
B - O Lema da Serpente.	56
C - Um Lema Básico.	58
2. Existência e Unicidade de Solução	61
A - Equação com núcleo e variação limitada segundo Vitali.	67
B - Equações com núcleos de Hinton.	72
C - Equação com núcleo em $G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$	78
3. Operadores de Fredholm.	84
BIBLIOGRAFIA.	95
ÍNDICE DE NOTAÇÕES.	98

ABSTRACT

The object of our study is the Volterra-Stieltjes equation

$$(K) \quad y(t) = x + \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t) - f(a), \quad a \leq t \leq b,$$

where y and f are regulated functions (definition 1.1.1) defined on $[a, b]$ with values in a Banach space X , x is an element of X and K is such that the operator k , defined by

$$(ky)(t) = \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad a \leq t \leq b,$$

is an element of $L(G([a, b], X))$. We make use of the interior integral (definition 1.3.1).

The equation (K) has been studied by Hönig ([H-1] [H-2], [H-4], [H-6] and [H-7]). Hönig proved that if a unique resolvent of the equation (K) always exists, the operator $I_X - K(t_+, t)$ is invertible (in $L(X)$), for every $t \in [a, b[$. In the same direction, Hönig proved that if k is a compact operator (or some power of k is a compact operator) this condition is equivalent to the existence and unicity of the resolvent of equation (K) (theorem 3.4 of [H-7]). An example of a kernel K

for which the operator $I_X - K(t_+, t)$ is invertible (in $L(X)$), for every $t \in [a, b[$, but such that equation (K) does not have a resolvent, is also given by Hönig in the paper just mentioned.

Our first objective was the search for special classes of kernels, other than the compact ones, for which the condition of $I_X - K(t_+, t)$ being an invertible operator (in $L(X)$) for every $t \in [a, b[$, is equivalent to the existence and unicity of the resolvent of equation (K). Motivated by the work of Schwabik ([S-2] and [S-3]) we show that the above assertion is true for kernels of bounded variation in the sense of Vitali (definition 2.1.11). We use, however, a completely different approach.

Another important class of kernels which contains, in particular, the functions of bounded variation in the sense of Vitali was studied by Hinton [Hi]. A careful study of Hinton's paper lead us to the extension of the result mentioned in the above paragraph to this class of kernels.

Proceeding in this direction, we also studied the class of kernels K such that the application

$$K^\square: t \in [a, b] \longmapsto K^t \in \mathcal{SV}_b([a, b], L(X))$$

is regulated, and succeeded in proving the same result for this class of kernels. Since this class contains all the compact operators, we also get a partial extension of Hönig's result.

A common property of the three classes of kernels studied is the existence of a finite subset J of $[a, b[$ such

that for every $t \in [a, b[$, $t \notin J$, the operator $I_X - K(t_+, t)$ is invertible (in $L(X)$). Assuming that for every $t \in J$, $I_X - K(t_+, t)$ is a Fredholm operator (definition 3.3.1), we proved that $I+k$ is a Fredholm operator whose index is the sum of the indices of the operators $I_X - K(t_+, t)$ (theorem 3.3.7).

INTRODUÇÃO

Nosso objeto de estudo é a equação Volterra-Stieltjes

$$(K) \quad y(t) = x + \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t) - f(a), \quad a \leq t \leq b,$$

onde y e f são funções regradas (definição 1.1.1) de $[a, b]$ a valores num espaço de Banach X , $x \in X$ e K é tal que o operador k , definido por

$$(ky)(t) = \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad a \leq t \leq b,$$

é um elemento de $L(G([a, b], X))$. Trabalhamos com a integral interior (definição 1.3.1).

Esta equação é estudada por Hönig ([H-1], [H-2], [H-4], [H-6] e [H-7]). Em particular, ele demonstrou que se a equação (K) possui sempre um único resolvente (definição 3.1.7), então o operador $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$), para todo $t \in [a, b[$. Mostrou ainda que quando k é um operador compacto (ou uma potência de k é um operador compacto) esta condição é equivalente à existência e unicidade do resolvente da equação (K) (teorema 3.4 de [H-7]).

Por outro lado, nesse mesmo trabalho, Hönig deu um exemplo de um núcleo K com o operador $I_X - K(t_+, t)$ inversível (em $L(X)$), para todo $t \in [a, b[$, mas a equação (K) não possui resolvente.

Nossa primeira meta foi de procurar outras classes particulares de núcleos, além dos compactos, para as quais a condição do operador $I_X - K(t_+, t)$ ser inversível (em $L(X)$), para todo $t \in [a, b[$ fosse equivalente à existência e unicidade do resolvente da equação (K) .

Começamos nosso estudo com o espaço dos núcleos de variação limitada segundo Vitali (definição 2.1.11). Schwabik estuda a equação (K) com estes núcleos usando uma integral equivalente à de Young e considerando apenas funções y e f de variação limitadas a valores em $\mathbb{R}^n$. Ele demonstrou um resultado análogo ao que desejávamos ([S-2] e [S-3]). Como a integral interior é associada à integral de Young (teorema 2.20 de [H-4]), isto nos levava a crer que obteríamos sucesso. O que foi confirmado (teorema 3.2.6). Usamos aqui uma técnica completamente distinta da utilizada por Schwabik.

Outra classe importante de núcleos foi usada por Hinton [Hi]. Ele também estudou a equação (K) , usando a integral de Cauchy à esquerda. Mostrou para um determinado espaço de núcleos, que chamamos de núcleos de Hinton (definição 2.2.4), que a equação (K) possui sempre um único resolvente. Como este espaço de núcleos contém os núcleos de variação limitada segundo Vitali, já sabíamos que no nosso caso esse resultado

não ocorreria. Por outro lado, observando o método usado por nós na demonstração do primeiro caso e estudando detalhadamente estes núcleos, vimos que poderíamos, com algumas modificações, utilizar a mesma idéia anterior. Assim neste caso demonstramos o resultado desejado (teorema 3.2.10).

O espaço dos núcleos de Hinton bem como os núcleos de variação limitada segundo Vitali não contêm nem estão contidos no espaço dos núcleos que originam operadores compactos. Nós sabemos que estes estão contidos no espaço dos núcleos K tais que a aplicação $K^{\square}: t \in [a, b] \mapsto K^t \in SV_b([a, b], L(X))$ é regrada (teorema 11 de [H-5]). Também para estes núcleos mostramos que a equação (K) possui sempre um e um só resolvente, se e somente se, para todo $t \in [a, b[$ existe o inverso (em $L(X)$) do operador $I_X - K(t_+, t)$ (teorema 3.2.15).

Nos três espaços de núcleos que nos ocupamos há algo em comum. É o fato de que existe J um subconjunto finito de $[a, b[$, tal que, para todo $t \in [a, b[$ e $t \notin J$, o operador $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$). Supondo que para todo $t \in J$ o operador $I_X - K(t_+, t)$ é de Fredholm (definição 3.3.1), provamos que $I + k$ é um operador de Fredholm. Mais ainda, o índice do operador $I + k$ é igual a soma dos índices dos operadores $I_X - K(t_+, t)$ (teorema 3.3.7).

Por fim, resumindo os capítulos deste trabalho, diríamos: no capítulo 1 definimos os conceitos básicos (funções regradas, simplesmente regradas, de semivariação limitada, variação limitada e integral interior) que utilizamos em todo o

trabalho bem como enunciamos algumas propriedades e teoremas importantes destes conceitos; no capítulo 2 estudamos detalhadamente os três espaços de núcleos tendo por objetivo o estudo da equação (K) com estes núcleos; no capítulo 3 encontram-se os resultados principais deste trabalho (teoremas 3.2.6, 3.2.10, 3.2.15 e 3.3.7) e algumas de suas conseqüências (corolários 3.2.18, 3.2.20, 3.3.8 e 3.3.9).

NOTAÇÃO

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os conjuntos dos números naturais reais e complexos, respectivamente; $\mathbb{R}_+$ é conjuntos dos números reais não negativos.

Por χ_E notamos a função característica de E , isto é, $\chi_E(t) = 1$, se $t \in E$, e $\chi_E(t) = 0$, se $t \notin E$. Dada uma função $f: A \rightarrow B$ se $E \subset A$, $f|_E$ denota a restrição de f a E . Se A e B são espaços topológicos, $\lim_{t \rightarrow s}$ é entendido de modo habitual. $\delta \downarrow \delta_0$ [$\delta \uparrow \delta_0$] significa que a variável real δ decresce [cresce] para δ_0 .

Para intervalos usamos a notação habitual $[a, b]$, $]a, b[$, etc. Dada $f: [a, b] \rightarrow A$, onde A é um espaço topológico, $f(t_+) = \lim_{\delta \downarrow 0} f(t + \delta)$ indica o limite lateral à direita de f em $t \in [a, b[$, quando este limite existe. Analogamente definimos $f(t_-)$, para $t \in]a, b]$.

W, X, Y e Z sempre designam espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $L(X, Y)$ é o espaço de Banach de todas as aplicações lineares contínuas de X em Y . $K(X, Y)$ é o subespaço fechado de $L(X, Y)$ das aplicações lineares compactas de X em Y . Escrevemos $L(X) = L(X, X)$, $K(X) = K(X, X)$ e $X' = L(X, \mathbb{K})$. I_X denota o automorfismo idêntico de X ; em particular se X é um espaço de funções regradas (definição 1.1.1) escrevemos apenas I . Se $h \in L(X, Y)$ indicamos respectivamente por $N(h)$ e $I(h)$ o núcleo e

e imagem de h .

Um subconjunto E de X é dito *total* se o fecho do conjunto das combinações lineares finitas de E for igual a X .

Dado um conjunto J ,

$$c_0(J, X) = \left\{ f: J \longrightarrow X \mid \forall \varepsilon > 0 \{ t \in J \mid \|f(t)\| \geq \varepsilon \} \text{ é finito} \right\}$$

é um espaço de Banach quando munido da norma do supremo. Quando $X = \mathbb{K}$ escrevemos apenas $c_0(J)$.

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{D}_{[a, b]}$ ou simplesmente $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as divisões $d: a = t_0 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$. Escrevemos $|d| = n$ e $\Delta d = \max_{1 \leq i \leq |d|} |t_i - t_{i-1}|$. Sejam $d', d'' \in \mathcal{D}$, dizemos que d'' é mais fina que d' , e escrevemos $d'' \geq d'$, se todo ponto de d' for também ponto de d'' . Dado $d \in \mathcal{D} \mapsto x_d \in X$, escrevemos $x = \lim_{d \in \mathcal{D}} x_d \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $d_\varepsilon \in \mathcal{D}$ tal que $d \geq d_\varepsilon$ implica que $\|x_d - x\| < \varepsilon$. $\lim$ é entendido de modo habitual.

Sejam $f: [a, b] \longrightarrow X$ e $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$. Para cada $i \in \{1, \dots, |d|\}$ definimos

$$w_i^*(f) = \sup \{ \|f(t'') - f(t')\| \mid t_{i-1} < t', t'' < t_i \}.$$

Definimos ainda $w_d^*(f) = \sup_{1 \leq i \leq |d|} w_i^*(f)$. Dizemos que f é uma função *escada* se existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $w_d^*(f) = 0$.

Dada uma função $K: T \times S \longrightarrow X$, escrevemos $K^t(s) = K_s(t) = K(t, s)$, para todo $t \in T$ e $s \in S$. Se $T = S$, definimos $K_\Delta(t) = K(t, t)$, para todo $t \in T$. Se ainda $T = S = [a, b]$, definimos

$$\tilde{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{se } s \leq t \\ K(t, t), & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Dado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, escrevemos sempre $\Gamma = \{(t,s) \mid a \leq s \leq t \leq b\}$.

Por fim, quando nos referimos a um teorema, lema, corolário, etc., e este se encontra em outro capítulo, acrescentaremos o número do capítulo, por exemplo, o teorema 3.1.8 se encontra no capítulo 3.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo daremos as definições de funções regradas, simplesmente regradas, de semivariação limitada e de variação limitada. Definiremos também a integral interior. Além disso enunciaremos algumas propriedades e teoremas importantes destes conceitos. Tudo isto foi exhaustivamente estudado por Hönig em [H-1],[H-2] e [H-4]. Veja também [A] e [R].

1 - FUNÇÕES REGRADAS E SIMPLESMENTE REGRADAS

1.1 - DEFINIÇÕES: a) uma função $f:[a,b] \longrightarrow X$ é dita ser *regrada*, e escrevemos $f \in G([a,b],X)$, se, para todo $t \in [a,b[$ [$t \in]a,b]$], existe $f(t_+) = [f(t_-)]$; escrevemos $G([a,b])$ se $X = \mathbb{K}$.

b) dizemos que $f:[a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ é *simplesmente regrada*, e escrevemos $f \in G^0([a,b],L(X,Y))$, se, para qualquer $x \in X$, a função $f \cdot x: t \in [a,b] \longmapsto f(t)x \in Y$ for regrada. Do teorema de Banach-Steinhaus segue que, para todo $t \in [a,b[$ [$t \in]a,b]$] existe um elemento em $L(X,Y)$, que indicamos por $f(t_+) = [f(t_-)]$ tal que, para todo $x \in X$, temos $f(t_+)x = (f \cdot x)(t_+) = [f(t_-)x = (f \cdot x)(t_-)]$. $\square$

1.2 - TEOREMA: dada a função $f:[a,b] \longrightarrow X$, são equivalentes:

- a) $f \in G([a,b], X)$;
- b) f é limite uniforme de funções escadas;
- c) para cada $\varepsilon > 0$, existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $w_d^*(f) \leq \varepsilon$.

PROVA - veja [H-2], teorema 1.3.1. □

1.3 - COROLÁRIO: o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função regradada é enumerável.

PROVA - segue de c) do teorema anterior. □

1.4 - TEOREMA: $G([a,b], X) [G^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ é um espaço de Banach quando munido da norma $f \mapsto \|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|$.

PROVA - veja [H-2], teorema 1.3.6, e [A], proposição 1.11. □

1.5 - DEFINIÇÕES: a) dada $f \in G[a,b], X) [G^\sigma([a,b], L(X,Y))]$, definimos $f_-(a) = 0$ [$f_-(a) = 0$] e $f_-(t) = f(t_-)$ [$f_-(t) = f(t_-)$], se $t \in]a, b]$. Temos que $f_- \in G([a,b], X) [f_- \in G^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ e que $(f_-)_- = f_-$ [$(f_-)_- = f_-$]. Definimos ainda

$$G_-([a,b], X) = \{f \in G([a,b], X) \mid f = f_-\}$$

$$[G_-^\sigma([a,b], L(X,Y))] = \{f \in G^\sigma([a,b], L(X,Y)) \mid f = f_-\}.$$

b) Dadas $f, g \in G([a,b], X) [G^\sigma([a,b], L(X,Y))]$, dizemos que são *equivalentes* se, para todo $t \in]a, b[$, temos $f(t_+) = g(t_+)$ [$f(t_+) = g(t_+)$] e, para todo $t \in]a, b]$, temos ainda $f(t_-) = g(t_-)$ [$f(t_-) = g(t_-)$]. $\tilde{G}([a,b], X) [\tilde{G}^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ é o espaço quociente definido por esta relação de equivalência. □

1.6 - TEOREMA: $G_-([a,b], X) [G_-^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ é um subespaço fechado de $G([a,b], X) [G^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ isomorfo a $\tilde{G}([a,b], X) [\tilde{G}^\sigma([a,b], L(X,Y))]$ munido da norma quociente.

PROVA - veja [H-2], 1.3.13, e [A], proposição 1.13. $\square$

2 - FUNÇÕES DE SEMIVARIAÇÃO LIMITADA

2.1 - DEFINIÇÃO: dada uma função $\alpha: [a, b] \rightarrow L(X, Y)$ [$\alpha: [a, b] \rightarrow X$], seja $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$, definimos

$$SV_d[\alpha] = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] x_i \right\| \mid x_i \in X, \|x_i\| \leq 1 \right\}$$

$$[V_d[\alpha] = \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|]$$

e

$$SV[\alpha] = SV_{[a, b]}[\alpha] = \sup_{d \in \mathcal{D}} SV_d[\alpha]$$

$$[V[\alpha] = V_{[a, b]}[\alpha] = \sup_{d \in \mathcal{D}} [V_d[\alpha]].$$

Dizemos que α é de *semivariação* [*variação*] *limitada* se $SV[\alpha] < \infty$ [$V[\alpha] < \infty$] e escrevemos $\alpha \in SV([a, b], L(X, Y))$ [$\alpha \in BV([a, b], X)$]. Se ainda temos $\alpha(t_0) = 0$, onde $t_0 \in [a, b]$, escrevemos $\alpha \in SV_{t_0}([a, b], L(X, Y))$ [$\alpha \in BV_{t_0}([a, b], X)$]. Se $X = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $BV([a, b])$ e $BV_{t_0}([a, b])$.

Definimos também

$$SV_{[a, b]}[\alpha] = \sup_{a < c < b} SV_{[c, b]}[\alpha]$$

$$[V_{[a, b]}[\alpha] = \sup_{a < c < b} [V_{[c, b]}[\alpha]],$$

e de modo análogo $SV_{[a,b]}[\alpha]$ e $SV_{[a,b]}[\alpha] = V_{[a,b]}[\alpha]$ e $V_{[a,b]}[\alpha]$. $\square$

2.2 - PROPOSIÇÃO : para $\alpha:[a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ temos

- a) $SV[\alpha] = \sup\{V[y' \circ \alpha] \mid y' \in Y', \|y'\| \leq 1\}$;
- b) $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$ se, e só se, $y' \circ \alpha \in BV([a,b], X')$ para todo $y' \in Y'$.

PROVA: veja [H-1], 1.3.6. $\square$

2.3 - PROPOSIÇÃO:

- a) $BV([a,b], L(X,Y)) \subset SV([a,b], L(X,Y))$, com $SV[\alpha] \leq V[\alpha]$;
- b) $BV([a,b], X) \subset G([a,b], X)$.

PROVA: a) veja [H-4], 2.2.5; b) veja [H-1], teorema 1.2.7. $\square$

2.4 - PROPOSIÇÃO:

- a) se $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$, então α é limitada, e dado $t_0 \in [a,b]$, temos $\|\alpha(t)\| \leq \|\alpha(t_0)\| + SV[\alpha]$, para todo $t \in [a,b]$. Além disso

$$SV_{[c,d]}[\alpha] \leq SV_{[a,b]}[\alpha], \text{ se } [c,d] \subset [a,b],$$

$$SV_{[a,b]}[\alpha] \leq SV_{[a,c]}[\alpha] + SV_{[c,b]}[\alpha], \text{ se } a < c < b,$$

e a função $t \in [a,b] \longmapsto SV_{[a,t]}[\alpha] \in \mathbb{R}_+$ é crescente;

- b) se $\alpha \in BV([a,b], X)$, então as propriedades de a) são verdadeiras trocando-se SV por V. Mais ainda

$$V_{[a,b]}[\alpha] = V_{[a,c]}[\alpha] + V_{[c,b]}[\alpha], \text{ se } a < c < b,$$

e

$$\begin{aligned} V_{[a,b]}[\alpha] &= \|\alpha(a_+) - \alpha(a)\| + V_{]a,b]}[\alpha] \\ &= V_{[a,b]}[\alpha] + \|\alpha(b) - \alpha(b_-)\|. \end{aligned}$$

PROVA: veja [H-1], 1.1.2, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.8 e 1.3.1. $\square$

2.8 - TEOREMA: dado $t_0 \in [a,b]$, a aplicação

$$\alpha \in SV([a,b], L(X,Y)) \longmapsto \|\alpha(t_0)\| + SV[\alpha] \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma em $SV([a,b], L(X,Y))$, que o torna completo. O mesmo ocorre com $BV([a,b], X)$ se trocarmos SV por V .

PROVA: veja [H-1], 1.1.1 e observe que $SV[\alpha] = 0$ [$V[\alpha] = 0$] se, e só se, α é constante. $\square$

3 - A INTEGRAL INTERIOR

3.1 - DEFINIÇÕES: a) sejam $\alpha: [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ e $f: [a,b] \longrightarrow X$ [$f: [a,b] \longrightarrow L(W,X)$], definimos a *integral interior* de f em relação a α por

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{d \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i^*) \in Y,$$

onde $\xi_i^* \in]t_{i-1}, t_i[$,

$$\left[\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{d \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^{|d|} [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \cdot f(\xi_i^*) \in L(W,Y) \right],$$

quando este limite existe;

b) dados $\alpha: [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ e $f: [a,b] \longrightarrow L(W,X)$, dizemos

que

$$I = \sigma \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t)$$

é a *integral interior simples* de f em relação a α se existe

$$I(w) = \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) w \in Y,$$

para todo $w \in W$; temos pelo teorema de Banach - Steinhaus que $I \in L(W, Y)$;

c) sejam α e f como em a), definimos a *integral de Riemann-Stieltjes* de f em relação a α por

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \lim_{\Delta d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \circ f(\xi_i) \in Y,$$

onde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, quando este limite existe. Analogamente definimos

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \sigma \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t). \quad \square$$

3.2 - COMENTÁRIO: a existência da

$$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t)$$

obviamente implica na existência da

$$\sigma \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t) = \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t).$$

A recíproca não é verdadeira (veja [A], 1.25). Porém os dois

conceitos de integral interior definidos em a) possuem as mesmas propriedades. Por isto nos resultados válidos para ambas integrais nós escreveremos na forma habitual sem mencionar a diferença de notação.

3.3 - TEOREMA: a existência da integral de Riemann-Stieltjes [simples] implica na existência da integral interior [simples] e ambas são iguais. A recíproca é verdadeira quando f e α são funções limitadas, que não possuem ponto comum de descontinuidade.

PROVA: veja [H-2], 1.1.1 e o teorema 1.1.2; veja também [H-3], teoremas 1.2, 1.2⁻ e 1.2^o. $\square$

3.4 - PROPOSIÇÃO:

- a) a integral interior [simples] é linear em α e f ;
- b) dado $c \in]a, b[$, existe $\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$ se, e só se, existem as integrais $\int_a^c \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$ e $\int_c^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$; e temos

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) = \int_a^c \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) + \int_c^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t).$$

O mesmo ocorre com a integral interior simples.

PROVA: a) veja [H-4], 1.1.7; b) veja [H-2], teorema 1.1.4. $\square$

3.5 - TEOREMA: se $\alpha \in \text{SV}([a, b], L(X, Y))$ e $f \in G([a, b], X)$ [$f \in G^\sigma([a, b], L(W, X))$], então

- a) existe $F_\alpha(f) = \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \in Y$ $\left[\int_a^\sigma \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \in L(W, Y) \right]$;

- b) F_α só depende de f_- [f_-] e $\|F_\alpha\| \leq \text{SV}[\alpha] \|f_-\|$

$$[\|F_\alpha\| \leq SV[\alpha]\|f\|];$$

$$c) F_\alpha \in L(G([a,b], X), Y) \quad [L(G^\sigma([a,b], L(W,X)), L(W,Y))] \quad e \\ \|F_\alpha\| \leq SV[\alpha].$$

PROVA: veja [A], teorema 2.1. □

3.6 - LEMA:

a) sejam $\alpha \in BV([a,b], L(X,Y))$ e $f \in G^\sigma([a,b], L(W,X))$, então

$$\left\| \int_a^\sigma \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \right\| \leq \int_a^b \cdot dV_{[a,t]}[\alpha] \cdot \|f(t)\|;$$

b) sejam $\alpha, \beta: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f, g \in G([a,b], \mathbb{R})$ tais que
 $\beta(t) - \beta(s) \geq \alpha(t) - \alpha(s) \geq 0$, se $a \leq s \leq t \leq b$, e $g(t) \geq f(t)$,
 para todo $t \in [a,b]$, então

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \leq \min \left\{ \int_a^b \cdot d\beta(t) \cdot f(t), \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot g(t) \right\}$$

e

$$\max \left\{ \int_a^b \cdot d\beta(t) \cdot f(t), \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot g(t) \right\} \leq \int_a^b \cdot d\beta(t) \cdot g(t).$$

PROVA: segue imediatamente da definição desta integral. □

3.7 - LEMA: seja $h: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ crescente e contínua à direita. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_a^b \cdot dh(t) \cdot h(t)^n \leq \frac{h(b)^{n+1} - h(a)^{n+1}}{n+1}.$$

PROVA: veja [G], lema 2. □

3.8 - LEMA: sejam $\lambda \geq 0$, $h: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ crescente e contínua à

direita e $\rho:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\rho(t) \leq \lambda + \int_a^t \rho(s) \cdot dh(s)$, para todo $t \in [a,b]$, então

$$\rho(t) \leq \lambda \exp[h(t)-h(a)], \text{ para todo } t \in [a,b].$$

PROVA: podemos supor que $h(a) = 0$. Como por hipótese existe a $\int_a^t \rho(s) \cdot dh(s)$, para todo $t \in [a,b]$, segue da primeira desigualdade e do teorema 10.10 de [Hd], adaptado trivialmente para a integral interior, que ρ é limitada. Seja então $T > 0$ tal que para qualquer $t \in [a,b]$ $\rho(t) \leq T$. Assim

$$\rho(t) \leq \lambda + Th(t), \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Suponhamos que, para todo $t \in [a,b]$, temos

$$\rho(t) \leq \lambda + \lambda h(t) + \dots + \frac{\lambda h(t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{Th(t)^n}{n!}$$

para algum $n \geq 1$. Isto implica que, para todo $t \in [a,b]$, temos

$$\rho(t) \leq \lambda + \int_a^t \rho(s) \cdot \left[\lambda + \lambda h(s) + \dots + \frac{\lambda h(s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{Th(s)^n}{n!} \right] dh(s).$$

E do lema 3.7 segue, para todo $t \in [a,b]$, que

$$\rho(t) \leq \lambda + \lambda h(t) + \dots + \frac{\lambda h(t)^n}{n!} + \frac{Th(t)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde, para todo $t \in [a,b]$, temos

$$\rho(t) \leq \lambda \exp[h(t)].$$

□

4 - OS TEOREMAS DO TIPO DE RIESZ E DE HELLY

4.1 - TEOREMA (Riesz): a aplicação

$$\alpha \in SV_a([a,b], L(X,Y)) \longmapsto F_\alpha \in L(G_-([a,b], X), Y)$$

é uma isometria (i.e., $\|F_\alpha\| = SV[\alpha]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para todo $f \in G([a,b], X)$,

$$F_\alpha(t) = \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) \in Y.$$

Para cada $t \in [a,b]$ e $x \in X$, temos $\alpha(t)x = F_\alpha(X]_{a,t}]x$.

PROVA: veja [H-2], teorema 1.5.1. □

4.2 - COROLÁRIO: a aplicação

$$\alpha \in BV_a([a,b], X') \longmapsto F_\alpha \in G_-([a,b], X)'$$

é uma isometria (i.e., $\|F_\alpha\| = V[\alpha]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para toda $f \in G([a,b], X)$,

$$F_\alpha(f) = \int_a^b \langle f(t), d\alpha(t) \rangle = \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t).$$

Para todo $t \in [a,b]$ e $x \in X$, $\langle x, \alpha(t) \rangle = F_\alpha(X]_{a,t}]x$. □

4.3 - TEOREMA: se a sequência $\alpha_n \in SV_a([a,b], L(X,Y))$ é tal que, para toda $f \in G([a,b], X)$, existe

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cdot d\alpha_n(t) \cdot f(t),$$

então

- a) existe $M > 0$ tal que $SV[\alpha_n] \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- b) existe $\alpha \in SV_a([a,b], L(X,Y))$ satisfazendo
 - i) $F(f) = \int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$, para toda $f \in G([a,b], X)$;
 - ii) $\alpha(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t)x$, para todo $t \in [a,b]$ e $x \in X$.

PROVA: veja [H-2], teorema 1.5.7. □

4.4 - TEOREMA (Helly): seja a seqüência $\alpha_n \in SV([a,b], L(X,Y))$ satisfazendo

- i) existe $M > 0$ tal que $SV[\alpha_n] \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii) existe $\alpha: [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ tal que $\alpha(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t)x$, para todo $t \in [a,b]$ e $x \in X$.

Então

- a) $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$, com $SV[\alpha] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} SV[\alpha_n] \leq M$;
- b) para todo $f \in G([a,b], X)$, temos

$$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \cdot d\alpha_n(t) \cdot f(t).$$

Prova: veja [H-2], teorema 1.5.8. □

5 - O OPERADOR INTEGRAL

Sejam $K: [c,d] \times [a,b] \rightarrow L(X,Y)$ e $f: [a,b] \rightarrow X$. Consideremos

$$(F_K f)(t) = \int_a^b \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad c \leq t \leq d,$$

se a integral existe. Estamos interessados em saber quais as condições sobre K para que $F_K \in L(G([a,b],X), G([c,d],Y))$. É bom notar que operadores desta forma sô dependem de f_- (isto é, se anulam em $c_0([a,b],X)$ - veja teorema 1.3.12 de [H-2]).

Inicialmente observemos que para cada $t \in [a,b]$, a existência de $(F_K f)(t)$ para toda $f \in G([a,b],X)$ implica em

$$K^t \in SV([a,b], L(X,Y))$$

(veja [H-2], teorema 1.4.20). Esta condição pode ser substituída por

$$K^t \in SV_a([a,b], L(X,Y)), \text{ para todo } t \in [c,d],$$

pois

$$\int_a^b \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau) = \int_a^b \cdot d_\tau K'(t, \tau) \cdot f(\tau),$$

se $K'(t,s) = K(t,s) - K(t,a)$. Agora se, para toda $f \in G([a,b],X)$, temos $F_K f \in G([c,d],Y)$, e, para qualquer $t \in [c,d]$, temos $K(t,a) = 0$, então em particular, qualquer que sejam $s \in [a,b]$ e $x \in X$, temos que a aplicação

$$t \in [c,d] \longmapsto F_K[x]_{a,s}^x(t) = K(t,s)x \in Y$$

é regradada. Em outras palavras

$$K_s \in G^{\sigma}([c,d], L(X,Y)), \text{ para todo } s \in [a,b].$$

Por fim, supondo F_K contínuo, obtemos que

$$\sup_{c \leq t \leq d} SV[K^t] = \|F_K\| < \infty.$$

Estas considerações justificam a seguinte definição:

5.1 - DEFINIÇÃO: escrevemos $K \in G^\sigma \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ se

$$K^t \in SV([a,b], L(X,Y)), \text{ para todo } t \in [c,d],$$

com

$$SV^u[K] = \sup_{c \leq t \leq d} SV[K^t] < \infty,$$

e

$$K_s \in G^\sigma([c,d], L(X,Y)), \text{ para todo } s \in [a,b].$$

Se ainda, para qualquer $t \in [c,d]$, temos $K(t,a) = 0$, escrevemos $K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Quando $X = Y = \mathbb{K}$, escrevemos

$$G \cdot BV^u([c,d] \times [a,b]) \text{ e } G \cdot BV_a^u([c,d] \times [a,b]). \quad \square$$

5.2 - PROPOSIÇÃO: $G^\sigma \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ é um espaço vetorial e a aplicação $K \mapsto SV^u[K]$ é uma semi-norma. Em

$$G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$$

esta aplicação é uma norma que o torna completo.

PROVA: a primeira parte é imediata. A outra pode ser demonstrada diretamente, mas segue do teorema abaixo. $\square$

5.3 - TEOREMA: a aplicação

$$K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \mapsto F_K \in L(G_-([a,b], X), G([c,d], Y))$$

é uma isometria (isto é, $\|F_K\| = SV^u[K]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para toda $f \in G([a,b],X)$, definimos

$$(F_K f)(t) = \int_a^b d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad c \leq t \leq d.$$

Para todo $t \in [c,d]$, $s \in [a,b]$ e $x \in X$, temos $K(t,s)x = F_K[\chi_{[a,s]}^x](t)$.

PROVA: veja [H-2], teorema 1.5.10. $\square$

5.4 - TEOREMA: a aplicação

$$K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \longmapsto K^0 \in G^\sigma([c,d], L(G_-([a,b],X), Y))$$

é uma isometria (isto é, $\|K^0\| = SV^u[K]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para qualquer $f \in G([a,b],X)$ e $t \in [c,d]$, definimos

$$K^0(t)[f] = (F_K f)(t) = \int_a^b d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau) \in Y.$$

Para $t \in [c,d]$, $s \in [a,b]$ e $x \in X$, temos $K(t,s)x = K^0(t)[\chi_{[a,s]}^x]$.

PROVA: segue do teorema anterior e do lema 1.6.4 de [H-2]. $\square$

5.5 - COMENTÁRIO: dado $K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ definimos $K^\square: t \in [c,d] \longmapsto K^t \in SV_a([a,b], L(X,Y))$. Notando-se por θ a isometria do teorema 4.1 tem-se que $K^0 = \theta \circ K^\square$. Daí segue-se que $K^\square$ é regrada; mais ainda $\|K^\square\| = \|K^0\|$, pois, para todo $t \in [c,d]$, temos $\|K^0(t)\| = SV[K^t]$. Neste caso preferimos trabalhar com $K^\square$. $\square$

5.6 - PROPOSIÇÃO: sejam $K \in G^\sigma \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ e

$f \in G([a, b], X)$, então

$$(F_K f)(t_+) = K^0(t_+)[f] = \int_a^b \bullet d_\tau K(t_+, \tau) \cdot f(\tau), \text{ se } t \in [a, b[,$$

e

$$(F_K f)(t_-) = K^0(t_-)[f] = \int_a^b \bullet d_\tau K(t_-, \tau) \cdot f(\tau), \text{ se } t \in]a, b].$$

PROVA: segue do teorema 4.4. $\square$

5.7 - DEFINIÇÃO: dizemos que $k \in L(G([a, b], X), G([a, b], Y))$ é *causal* se $f \in G([a, b], X)$ e $f|_{[a, t]} \equiv 0$, para algum $t \in [a, b]$, implica em $(kf)|_{[a, t]} \equiv 0$ (isto é, $kf|_{[a, t]}$ só depende de $f|_{[a, t]}$, para qualquer $f \in G([a, b], X)$ e $t \in [a, b]$). $\square$

Seja k um operador de $L(G_-([a, b], X), G([a, b], Y))$ causal (isto é, $k \in L(G([a, b], X), G([a, b], Y))$ é causal e se anula em $c_0([a, b], X)$). Do teorema 5.3 existe um único núcleo $K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ tal que, para toda $f \in G([a, b], X)$, temos

$$(kf)(t) = \int_a^b \bullet d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

Como k é causal segue, para toda $f \in G([a, b], X)$, que

$$(kf)(t) = \int_a^t \bullet d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

A existência da integral garante, para toda $f \in G([a, b], X)$, que

$$(kf)(t) = \int_a^b d_\tau \bar{K}(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

Logo $\bar{K} \in G^\sigma \cdot SV_a^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ e da unicidade de K temos que $K = \bar{K}$ e isto implica em

$$K_\Delta \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$$

e

$$K(t, s) = K(t, t), \quad \text{se } t \leq s.$$

Foi com este raciocínio que Arbex motivou a seguinte definição:

5.8 - DEFINIÇÃO: dizemos que $K \in G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ se $K \in G^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ e $K_\Delta \in G^\sigma([a, b], L(X, Y))$. Se ainda $K(t, s) = K(t, t)$, quando $t \leq s$, escrevemos $K \in G_\Delta^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$. Analogamente definimos $G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ e $G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u(\Gamma, L(X, Y))$. $\square$

5.9 - PROPOSIÇÃO: $G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ é um espaço de Banach quando munido da norma $K \mapsto \|K_\Delta\| + SV^u[K]$. $G_\Delta^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$ é um subespaço fechado de $G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$. O resultado ainda é verdadeiro se acrescentarmos a condição $K(t, a) = 0$, para todo $t \in [a, b]$, em ambos os espaços. Além disso $G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ é um subespaço fechado de $G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$.

PROVA: veja [A], proposição 3.18. $\square$

5.10 - TEOREMA: todo operador causal $k \in L(G_-([a, b], X), G([a, b], Y))$ é definido por um único núcleo $K \in G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u(\Gamma, L(X, Y))$. Reciprocamente,

se $KEG_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$, então o operador definido, para toda $f \in G([a,b], X)$, por

$$(kf)(t) = \int_a^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b,$$

pertence a $L(G([a,b], X), G([a,b]))$ e é causal.

PROVA: a demonstração da primeira parte deste teorema foi feita quando motivamos a definição 5.8. Para provar a recíproca basta observarmos que $\tilde{K}EG_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$ e que, para toda $f \in G([a,b], X)$, temos

$$\int_a^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot f(\tau) = \int_a^b d_{\tau} \tilde{K}(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

Dai é só usarmos o teorema 5.3 e a definição de operador causal. □

5.11 - DEFINIÇÃO: se $KEG_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$ e, para $t \in [a,b]$, $K_{\Delta}(t) = 0$ escrevemos $KEG_0^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$. No caso particular de $X=Y$, definimos também $KEG_I^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X))$, quando $K_{\Delta}(t) = I_X$, para todo $t \in [a,b]$. Se indicarmos

$$I \in G_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X)),$$

definido, para todo $t, s \in [a,b]$, por $I(t, s) = I_X$, teremos

$$G_I^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X)) = G_0^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X)) + I.$$

De modo análogo definimos $G_0^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$ e $G_I^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$.

Temos também

$$G_I^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X)) = G_0^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X)) + I. \quad \square$$

5.12 - OBSERVAÇÃO: $G_0^\sigma \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$ é um espaço de Banach quando munido da norma $K \mapsto SV^u[K]$. É claro que $G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$ é subespaço fechado dele.

Por outro lado $G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u(\Gamma, L(X,Y))$ é também um espaço de Banach quando munido da norma $K \mapsto SV^u[K]$. E se $K \in G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u(\Gamma, L(X,Y))$, então K' , definido por $K'(t,s) = K(t,s) - K(t,t)$, pertence a $G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$; além disso esta aplicação é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Concluimos que $G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$ é isométrico ao espaço dos operadores causais de $L(G_-([a,b], X), G([a,b], Y))$. $\square$

5.13 - TEOREMA (Bray): sejam $L \in G^\sigma \cdot SV^u([e,f] \times [c,d], L(Y,Z))$ e $K \in G^\sigma \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Então M , definido por

$$M(t,r) = \int_c^\sigma \cdot d_s L(t,s) \circ K(s,r), \quad e \leq t \leq f \text{ e } a \leq r \leq b,$$

pertence a $G^\sigma \cdot SV^u([e,f] \times [a,b], L(X,Z))$, com

$$SV^u[M] \leq SV^u[L]SV^u[K].$$

Além disso $F_M = F_L \circ F_K$, isto é, para toda $g \in G([a,b], X)$ temos

$$\int_a^b \cdot d_r \left[\int_c^\sigma \cdot d_s L(t,s) \circ K(s,r) \right] \cdot g(r) = \int_c^\sigma \cdot d_s L(t,s) \cdot \left[\int_a^b \cdot d_r K(s,r) \cdot g(r) \right],$$

para todo $t \in [e,f]$.

PROVA: segue do teorema 5.3 que $M_r \in G^\sigma([e,f], L(X,Z))$, para todo $r \in [a,b]$. Tomando-se $t \in [e,f]$, $\delta: a = r_0 < \dots < r_{|\delta|} = b$, $x_i \in X$, com $\|x_i\| \leq 1$, $i = 1, \dots, |\delta|$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [M(t, r_i) - M(t, r_{i-1})] x_i \right\| &= \left\| \int_c^d \cdot d_s L(t, s) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{|\delta|} [K(s, r_i) - K(s, r_{i-1})] x_i \right\} \right\| \\ &\leq SV[L^t] \sup_{c \leq s \leq d} \left\| \sum_{i=1}^{|\delta|} [K(s, r_i) - K(s, r_{i-1})] x_i \right\| \\ &\leq SV[L^t] SV^u[K] \end{aligned}$$

$$\implies SV[M^t] \leq SV[L^t] SV^u[K], \quad t \in [e, f].$$

$$\implies SV^u[M] \leq SV^u[L] SV^u[K].$$

Finalmente para demonstrarmos que $F_M = F_L \circ F_K$ é suficiente mostrar que $F_M[\chi]_{a,r}^x(t) = (F_L \circ F_K)[\chi]_{a,r}^x(t)$, para $t \in [a, b]$, $t \in [e, f]$ e $x \in X$. E isto segue do teorema 5.3 e da definição da integral interior simples. $\square$

5.14 - COROLÁRIO: sejam $\alpha \in SV([c, d], L(Y, Z))$,

$KEG^\sigma \cdot SV^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$ e $g \in G([a, b])$, então

$$\int_a^b \cdot d_r \left[\int_c^\sigma \cdot d\alpha(s) \circ K(s, r) \right] \cdot g(r) = \int_c^\sigma \cdot d\alpha(s) \cdot \left[\int_a^b \cdot d_r K(s, r) \cdot g(r) \right],$$

isto é, $F_\alpha \circ F_K = F_\beta$, onde, para todo $r \in [a, b]$,

$$\beta(r) = \int_c^\sigma \cdot d\alpha(s) \circ K(r, s) \in L(X, Z).$$

PROVA: basta tomarmos $L(t, s) = \alpha(s)$. $\square$

5.15 - COROLÁRIO (Dirichlet): sob as hipóteses do corolário

anterior nós supomos que $[c,d] = [a,b]$. Temos que

$$\int_a^b \cdot d_r \left[\int_a^r \cdot d\alpha(s) \circ K(s,r) \right] \cdot g(r) = \int_a^b \cdot d\alpha(s) \left[\int_s^b \cdot d_r K(s,r) \cdot g(r) + K(s,s) \cdot g(s) \right]$$

e

$$\int_a^b \cdot d_r \left[\int_r^b \cdot d\alpha(s) \circ K(s,r) \right] \cdot g(r) = \int_a^b \cdot d\alpha(s) \left[\int_a^s \cdot d_r K(s,r) \cdot g(r) - K(s,s) \cdot g(s) \right].$$

PROVA: definindo-se $K_0(s,r) = \chi_{[0,+\infty[}(r-s)K(s,r)$ e substituindo-se no corolário 5.14 obtém-se a primeira fórmula. De modo análogo, tomando-se $K_1(s,r) = \chi_{[0,+\infty[}(s-r)K(s,r)$ demonstra-se a outra fórmula. $\square$

5.16 - COROLÁRIO: sejam $L, K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$, então M , definido por

$$M(t,r) = \int_r^t \cdot d_s L(t,s) \circ K(s,r), \quad (t,r) \in \Gamma,$$

pertence a $G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$. Além disso $F_M = F_L \circ F_K$, ou seja para todo $g \in G([a,b], X)$ temos

$$\int_a^t \cdot d_r \left[\int_r^t \cdot d_s L(t,s) \circ K(s,r) \right] \cdot g(r) = \int_a^t \cdot d_s L(t,s) \cdot \left[\int_a^s \cdot d_r K(s,r) \cdot g(r) \right],$$

para todo $t \in [a,b]$.

PROVA: segue imediatamente do teorema 5.13. $\square$

5.17 - DEFINIÇÃO: dado $K \in G^\sigma \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X))$ definimos para todo $t, s \in [a,b]$.

$$K^{(1)}(t,s) = K(t,s)$$

e

$$K^{(n)}(t,s) = \int_a^b d_\tau K(t,\tau) \circ K^{(n-1)}(\tau,s), \quad n=2,3,\dots \quad \square$$

5.18 - COROLÁRIO: seja $K \in G^\sigma \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X))$. Então $F_K^n = F_{K^{(n)}}$ e, para todo $t,s \in [a,b]$,

$$K^{(n)}(t,s) = \int_a^b d_\tau K^{(n-1)}(t,\tau) \circ K(\tau,s), \quad n=2,3,\dots$$

PROVA: usando-se indução segue-se do teorema 5.13 que $F_K^n = F_{K^{(n)}}$. Como $F_K^n = F_K \circ F_K^{n-1} = F_K^{n-1} \circ F_K$, o outro resultado segue-se novamente do teorema 5.13. $\square$

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DOS ESPAÇOS DE NÚCLEOS

Neste capítulo estudaremos o espaço dos núcleos de variação limitada segundo Vitali, os núcleos de Hinton e os núcleos que caracterizam operadores que levam conjuntos limitados em conjuntos equiregradados (definição 3.3).

Lembramos que quando $KEG^{\sigma} \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ definimos, para todo $f \in G([a,b], X)$, o operador F_K por

$$(F_K f)(t) = \int_a^b d_{\tau} K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad c \leq t \leq d.$$

No caso particular de $[c,d] = [a,b]$ se temos ainda que K_{Δ} é regradada, isto é, $KEG_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$, consideramos o operador causal k definido por

$$(kf)(t) = \int_a^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

1 - FUNÇÕES DE SEMIVARIAÇÃO LIMITADA SEGUNDO VITALI

Muitos destes resultados que apresentaremos se encontram nos trabalhos de Clarkson-Adams, [C-A], Schwabik [S-1], [S-T-V] e Prandini [P]. Daremos a demonstração dos outros re-

sultados.

1.1 - DEFINIÇÃO: uma função $K:[c,d] \times [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ é dita de *semivariação limitada segundo Vitali*, e escrevemos

$$K \in SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y)), \text{ se}$$

$$\begin{aligned} SV[K] &= SV_{[c,d] \times [a,b]}[K] \\ &= \sup \left\{ SV_{d'' \times d'}[K] \mid d'' \in \mathcal{D}_{[c,d]} \text{ e } d' \in \mathcal{D}_{[a,b]} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

onde $d'' : c = t_0 < \dots < t_n \mid d'' = d$, $d' : a = s_0 < \dots < s_m \mid d' = b$ e

$$SV_{d'' \times d'}[K] = \sup \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m K_{ji} x_{ji} \right\| \mid x_{ji} \in X, \|x_{ji}\| \leq 1 \right\},$$

com $K_{ji} = K(t_j, s_i) - K(t_j, s_{i-1}) - K(t_{j-1}, s_i) + K(t_{j-1}, s_{i-1})$. $\square$

Desta definição seguem imediatamente as duas seguintes proposições:

1.2 - PROPOSIÇÃO: seja $K \in SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Temos que

a) $SV_{[r,s] \times [p,q]}[K] \leq SV[K]$, se $[r,s] \subset [c,d]$ e $[p,q] \subset [a,b]$;

b) $SV_{[r,s] \times [p,q]}[K] = 0$, quando $r = s$ ou $p = q$. $\square$

1.3 - PROPOSIÇÃO: $SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ é um espaço vetorial e a aplicação $K \longmapsto SV[K]$ é uma semi-norma. Além disso $SV[K] = 0$ se, e só se, $K(t,s) = A(t) + B(s)$, onde A e B são funções quaisquer. $\square$

A última afirmação desta proposição segue também do fato de que se $K'(t,s) = K(t,s) - K(t,a) - K(c,s) + K(c,a)$, então

$$SV[K'] = SV[K].$$

Como consequência desta última proposição obtemos que K pode ser um elemento de $SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ sem que K^t ou K_s sejam de semivariação limitada.

1.4 - PROPOSIÇÃO: seja $K \in SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

a) Se existe $t_0 \in [c,d]$ tal que $SV[K^{t_0}] < \infty$, então

$$SV[K^t] \leq SV[K] + SV[K^{t_0}], \text{ para todo } t \in [c,d];$$

b) Se $SV[K_{s_0}] < \infty$, para algum $s_0 \in [a,b]$, então

$$SV[K_s] \leq SV[K] + SV[K_{s_0}], \text{ para todo } s \in [a,b].$$

PROVA: veja [P], 2.4.b). □

1.5 - DEFINIÇÃO: dado $K \in SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ satisfazendo a) e b) da proposição anterior, escrevemos $K \in SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

Se ainda $K(t,a) = K(c,s) = 0$, para todo $t \in [c,d]$ e $s \in [a,b]$, então indicamos $K \in SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. □

Prandini definiu em [P] funções regradas de duas variáveis e de modo análogo considerou o espaço $G_{--}([c,d] \times [a,b], X)$. Usando a integral interior dupla lá definida mostrou no teorema 2.15 de [P] que $SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ é isométrico e $L(G_{--}([c,d] \times [a,b], X), Y)$.

Observemos que se $K \in SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ então $K'(t,s) = K(t,s) - K(t,a) - K(c,s) + K(c,a)$ pertence a $SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, com $SV[K'] = SV[K]$

1.6 - PROPOSIÇÃO:

- a) todo elemento de $SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ é limitado;
 b) a aplicação

$$K \in SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \mapsto SV[K] + SV[K^C] + SV[K_a] + \|K(c,a)\| \in \mathbb{R}_+$$

é uma norma.

PROVA: a) segue de 1.2.a), 1.4 e de 1.2.4.

b) de 1.3 segue que se $SV[K] + SV[K^C] + SV[K_a] + \|K(c,a)\| = 0$, isto é, $SV[K] = SV[K^C] = SV[K_a] = \|K(c,a)\| = 0$, então $K(t,s) = A(t) + B(s)$. Observemos que podemos tomar $A(c) = 0$ e assim, de $SV[K_a] = 0$, temos $A \equiv 0$. Finalmente, como $K(c,a) = 0$, então $B(a) = 0$, donde, de $SV[K^C] = 0$, segue que $B \equiv 0$. Concluimos que $K \equiv 0$. As outras propriedades da norma são facilmente verificadas. $\square$

Desta proposição segue que $K \mapsto SV[K]$ é uma norma em $SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

1.7 - TEOREMA: a aplicação

$$K \in SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \mapsto K^0 \in SV_c([c,d], L(G_-([a,b], X), Y))$$

é uma isometria (isto é, $SV[K^0] = SV[K]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para qualquer $f \in G_-([a,b], X)$ e $t \in [c,d]$, definimos

$$K^0(t)[f] = \int_a^b d_\tau K(t, \tau) \cdot f(\tau) \in Y.$$

Para todo $t \in [c,d]$, $s \in [a,b]$ e $x \in X$, temos $K(t,s)x = K^0(t)[X_{[a,s]}x]$.

PROVA: de 1.4 segue que para todo $t \in [c, d]$ $K^0(t)$ está bem definido. Sejam $d'': c = t_0 < \dots < t_{|d''|} = b$ e $f_j \in G_-([a, b], X)$, com $\|f_j\| \leq 1$, $j=1, \dots, |d''|$. Pelo teorema 1.1.2 sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $d': a = s_0 < \dots < s_{|d'|} = b$ tal que

$$\|f_j - f_j^{d'}\| < \varepsilon / |d''| SV[K],$$

onde

$$f_j^{d'}(t) = \sum_{i=1}^{|d'|} \chi_{[s_{i-1}, s_i]}(t) f_j(s_i),$$

para todo $t \in [c, d]$. Assim

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} [K^0(t_j) - K^0(t_{j-1})](f_j) \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \int_c^d d_\tau [K(t_j, \tau) - K(t_{j-1}, \tau)] \cdot f_j(\tau) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \int_c^d d_\tau [K(t_j, \tau) - K(t_{j-1}, \tau)] \cdot f_j^{d'}(\tau) \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \int_c^d d_\tau [K(t_j, \tau) - K(t_{j-1}, \tau)] \cdot [f_j(\tau) - f_j^{d'}(\tau)] \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji} f_j(s_i) \right\| + \sum_{j=1}^{|d''|} SV[K] \frac{\varepsilon}{|d''| SV[K]} \leq SV[K] + \varepsilon, \end{aligned}$$

logo $SV[K^0] \leq SV[K] + \varepsilon$, e do fato de $\varepsilon > 0$ ser arbitrário temos

$$SV[K^0] \leq SV[K].$$

Assim a aplicação do teorema está bem definida e é claramente

linear e contínua.

Seja agora $\Omega \in SV_c([c,d], L(G_-([a,b], X), Y))$. Para todo $t \in [c,d]$, $s \in [a,b]$ e $x \in X$, definimos $K(t,s)x = \Omega(t)[\chi_{[a,s]}x]$. K está bem definido, e para $d'': c = t_0 < \dots < t_{|d''|} = d$, $d': a = s_0 < \dots < t_{|d'|} = b$ e $x_{ji} \in X$, com $\|x_{ji}\| \leq 1$, $j=1, \dots, |d''|$ e $i=1, \dots, |d'|$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji} x_{ji} \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} \left| \Omega(t_j) - (t_{j-1}) \right| \left(\sum_{i=1}^{|d'|} \chi_{[s_{i-1}, s_i]} x_{ji} \right) \right\| \\ &\leq SV[\Omega], \end{aligned}$$

donde $SV[K] \leq SV[\Omega]$.

Finalmente, como, para todo $t \in [c,d]$, $s \in [a,b]$ e $x \in X$, temos

$$K^0(t)[\chi_{[a,s]}x] = K(t,s)x = \Omega(t)[\chi_{[a,s]}x]$$

e como $\{\chi_{[a,s]}^s | s \in [a,b], x \in X\}$ é um subconjunto total de $G_-([a,b], X)$, concluímos que $K^0 = \Omega$. Assim $SV[K] = SV[K^0]$. $\square$

1.8 - LEMA: sejam $K \in SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ e $\alpha \in SV([a,b], L(X,Y))$. Definimos

$$\hat{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{se } s \neq \hat{s} \\ \alpha(t), & \text{se } s = \hat{s}, \end{cases}$$

onde $\hat{s} \in [a,b]$. Então $\hat{K} \in SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, com

$$SV[\hat{K}] \leq SV[K] + \eta(SV[\alpha] + SV[K_{\hat{s}}]),$$

onde $\eta = 1$, se $\hat{s} = a$ ou $\hat{s} = b$, e $\eta = 2$, se $\hat{s} \in]a, b[$.

PROVA: sejam $d'' : c = t_0 < \dots < t_{|d''|} = d$, $d' : a = s_0 < \dots < s_{|d'|} = b$ e $x_{ji} \in X$, com $\|x_{ji}\| \leq 1$, $j=1, \dots, |d''|$ e $i=1, \dots, |d'|$. Podemos supor que $\hat{s} = s_{\hat{i}}$, para algum $\hat{i} \in \{0, \dots, |d'|\}$. Se $\hat{i} \neq 0$ e $\hat{i} \neq |d'|$, então, para todo $j=1, \dots, |d''|$, temos

$$\hat{K}_{ji} = \begin{cases} K_{ji}, & \text{se } i \neq \hat{i} \text{ e } i \neq \hat{i}+1 \\ \alpha(t_j) - K(t_j, s_{\hat{i}-1}) - \alpha(t_{j-1}) + K(t_{j-1}, s_{\hat{i}-1}), & \text{se } i = \hat{i} \\ K(t_j, s_{\hat{i}+1}) - \alpha(t_j) - K(t_{j-1}, s_{\hat{i}+1}) + \alpha(t_{j-1}), & \text{se } i = \hat{i}+1. \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} \hat{K}_{ji} x_{ji} &= \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji} x_{ji} + \sum_{j=1}^{|d''|} [\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})] (x_{j\hat{i}} - x_{j\hat{i}+1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{|d''|} [K_{\hat{s}}(t_j) - K_{\hat{s}}(t_{j-1})] (x_{j\hat{i}+1} - x_{j\hat{i}}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow SV[\hat{K}] \leq SV[K] + 2(SV[\alpha] + SV[K_{\hat{s}}]).$$

De modo análogo demonstram-se os outros casos. $\square$

1.9 - PROPOSIÇÃO: seja $K \in SV([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ e considere-mos as aplicações K^a , K_a e $K_{\Delta} : [a, b] \longrightarrow L(X, Y)$. Se duas destas aplicações forem de semivariação limitada, então a terceira também o é. Temos

$$SV[K_{\Delta}] \leq SV[K] + SV[K_a] + SV[K^a],$$

$$SV[K_a] \leq SV[K] + SV[K_\Delta] + SV[K^a]$$

e

$$SV[K^a] \leq SV[K] + SV[K_\Delta] + SV[K_a].$$

PROVA: admitamos que $SV[K_a] < \infty$ e $SV[K^a] < \infty$. Sejam

$$d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b \quad \text{e} \quad x_j \in X, \text{ com } \|x_j\| \leq 1, \quad i=1, \dots, |d|,$$

é simples verificar que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|d|} [K_\Delta(t_j) - K_\Delta(t_{j-1})] x_j &= \sum_{j=1}^{|d|} \sum_{i=1}^{|d|} K_{ji} w_{ji} + \sum_{j=1}^{|d|} [K_a(t_j) - K_a(t_{j-1})] x_j \\ &+ \sum_{j=1}^{|d|} [K^a(t_j) - K^a(t_{j-1})] x_j, \end{aligned}$$

onde $w_{ji} = x_{\max\{i,j\}}$. Donde

$$SV[K_\Delta] \leq SV[K] + SV[K_a] + SV[K^a].$$

Os outros casos são provados de modo análogo. $\square$

1.10 - PROPOSIÇÃO: Se K pertence a $SV_*([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$, então $\tilde{K}$ também pertence a este espaço e $SV[\tilde{K}] \leq SV[K] + SV[K^a]$.

PROVA: tomemos $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$, $x_{ji} \in X$, com $\|x_{ji}\| \leq 1$, $i, j = 1, \dots, |d|$. Observemos que

$$\tilde{K}_{ji} = \begin{cases} K_{ji}, & \text{se } 1 \leq i < j \leq |d| \\ K(t_j, t_j) - K(t_j, t_{j-1}), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq |d|. \end{cases}$$

Assim

$$\sum_{j=1}^{|d|} \sum_{i=1}^{|d|} \bar{K}_{ji} x_{ji} = \sum_{j=1}^{|d|} \sum_{i=1}^{|d|} K_{ji} w_{ji} + \sum_{j=1}^{|d|} [K^a(t_j) - K^a(t_{j-1})] x_{jj},$$

onde $w_{ji} = x_{ji}$, se $j \geq i$, e $w_{ji} = x_{jj}$, se $j < i$. E daí

$$SV[\bar{K}] \leq SV[K] + SV[K^a]. \quad \square$$

Esta desigualdade não pode ser melhorada, pois se

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s = b \\ 0, & \text{se } a \leq s < b \end{cases},$$

para $a \leq t \leq b$, temos que

$$\bar{K}(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s = t = b \\ 0, & \text{se } (t,s) \neq (b,b) \end{cases},$$

e assim $SV[K] = 0$, $SV[\bar{K}] = 1$ e $SV[K^a] = 1$.

1.11 - DEFINIÇÃO: seja $K:[c,d] \times [a,b] \longrightarrow X$ tal que

$$V[K] = V_{[c,d] \times [a,b]}[K] = \sup \left\{ V_{d'' \times d'}[K] \mid d'' \in \mathcal{D}_{[c,d]} \text{ e } d' \in \mathcal{D}_{[a,b]} \right\} < \infty,$$

onde

$$V_{d'' \times d'}[K] = \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} \|K_{ji}\|,$$

neste caso dizemos que K é de *variação limitada segundo Vitali*, e escrevemos $K \in BV([c,d] \times [a,b], X)$. As definições de $BV_*([c,d] \times [a,b], X)$ e $BV_{c,a}([c,d] \times [a,b], X)$ são óbvias. Definimos ainda

$$V_{[c,d] \times [a,b]}[K] = \sup \left\{ V_{[c,d] \times [p,q]}[K] \mid a < p < q < b \right\}$$

e analogamente $V_{[c,d] \times [a,b]}^{[K]}$ e $V_{[c,d] \times [a,b]}^{[K]}$. Finalmente, quando $[c,d] = [a,b]$, as definições de $BV_0(\Gamma, L(X,Y))$ e $BV_I(\Gamma, L(X))$ são também óbvias. $\square$

1.12 - OBSERVAÇÕES: a) é fácil ver que $BV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ está contido em $SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

b) Todos os resultados anteriores ainda valem quando substituímos funções de semivariação limitada segundo Vitali por funções de variação limitada segundo Vitali (e trocamos SV por V). Notemos duas modificações importantes:

i) na proposição 1.2 temos ainda

c) se $c \leq r \leq d$ e $a \leq p \leq b$, então

$$V[K] = V_{[c,r] \times [a,p]}^{[K]} + V_{[c,r] \times [p,b]}^{[K]} + \\ + V_{[r,d] \times [a,p]}^{[K]} + V_{[r,d] \times [p,b]}^{[K]}.$$

ii) o teorema 2.1 pode ser enunciado neste caso como: a aplicação

$$K \in BV_{c,a}([a,b] \times [a,b], X) \longmapsto K^{\square} \in BV_c([c,d], BV_a([a,b], X))$$

é uma isometria (isto é, $V[K^{\square}] = V[K]$) do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, onde, para todo $t \in [c,d]$, definimos $K^{\square}(t) = K^t$ (veja [P], teorema 2.7).

c) segue da observação anterior e da proposição 1.4 que

$$BV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \subset G^{\sigma} \cdot SV^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$$

$$BV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) \subset G_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y)).$$

Da proposição 1.9 segue que

$$BV_*([a,b] \times [a,b], L(X,Y)) \subset G_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$$

$$BV_{a,a}([a,b] \times [a,b], L(X,Y)) \subset G_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV_a^u([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$$

$$BV_0(\Gamma, L(X,Y)) \subset G_{\Delta}^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))$$

e

$$BV_I(\Gamma, L(X)) \subset G_I^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X)).$$

d) Da observação anterior, se $K \in BV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, temos que $F_K \in L(G_-([a,b], X), G([c,d], Y))$. Além disso

$$\|F_K\| = SV^u[K] \leq SV[K].$$

Seja agora $K \in BV_*([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$, temos que o operador causal $k \in L(G_-([a,b], X), G([a,b], Y))$. Da proposição 1.10 segue que $\tilde{K} \in BV_*([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$ e $k = F_{\tilde{K}}$. Finalmente, definimos $K'(t,s) = K(t,s) - K(t,t)$, temos que $F_{\tilde{K}} = F_K$, e ainda $K' \in BV_0(\Gamma, L(X,Y))$. Concluimos que é suficiente considerarmos os núcleos em $BV_0(\Gamma, L(X,Y))$ para os operadores causais de

$$L(G_-([a,b], X), G([a,b], Y))$$

definidos por núcleos de variação limitada segundo Vitali. $\square$

1.13 - DEFINIÇÃO: dado $K \in BV([c,d] \times [a,b], X)$ definimos

$$\psi_K: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

por $\psi_K(s) = V_{[c,d] \times [a,s]}[K]$, onde $a \leq s \leq b$. É claro que ψ_K é crescente, com $\psi_K(a) = 0$ e $\psi_K(b) = V[K]$. $\square$

1.14 - LEMA: seja $K \in BV([c,d] \times [a,b], X)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $d': a = s_0 < \dots < s_{|d'|} = b$ tal que para cada $i = 1, \dots, |d|$

$$V_{[c,d] \times]s_{i-1}, s_i[} [K] < \epsilon.$$

PROVA: segue de ψ_K ser crescente e de que, para todo $i=1, \dots, |d|$, temos

$$\psi_K(s_{i-}) - \psi_K(s_{i-1}+) = V_{[c,d] \times]s_{i-1}, s_i[} [K]. \quad \square$$

1.15 - COROLÁRIO: seja $K \in BV([a,b] \times [a,b], X)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que, para cada $j, i=1, \dots, |d|$, temos

$$V_{[t_{j-1}, t_j] \times]t_{i-1}, t_i[} [K] < \epsilon.$$

PROVA: segue do lema anterior com $[c,d] = [a,b]$, observando que, para cada $j, i=1, \dots, |d|$,

$$V_{[t_{j-1}, t_j] \times]t_{i-1}, t_i[} [K] \leq V_{[a,b] \times]t_{i-1}, t_i[} [K]. \quad \square$$

1.16 - LEMA: seja $K \in BV([c,d] \times [a,b], X)$. Se para todo $t \in [c,d]$ K^t for contínua à direita [esquerda] em $\hat{S} \in [a,b[\]]a,b]$, então ψ_K é contínua à direita [esquerda] em $\hat{S}$. No caso de $K^{t_0} \equiv 0$, para algum $t_0 \in [c,d]$, a recíproca também é verdadeira.

PROVA: Schwabich em [S-1], lema 2.1, provou a primeira parte deste lema quando $\dim X < \infty$. A demonstração quando X é um espaço de Banach qualquer segue os mesmos passos.

Admitamos agora que $K^{t_0} \equiv 0$, para algum $t_0 \in [c,d]$, e

$s \in]\hat{s}, b]$, temos

$$\|K(t, s) - K(t, \hat{s})\| \leq v_{[c, d] \times [\hat{s}, s]}[K] \leq \psi_K(s) - \psi_K(\hat{s}),$$

e daí segue a recíproca. $\square$

1.17 - PROPOSIÇÃO: sejam $L \in BV_*([e, f] \times [c, d], L(Y, Z))$ e $K \in \text{MEG}^\sigma \cdot SV^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. Então M , definido por

$$M(t, r) = \int_c^\sigma d_s L(t, s) \circ K(s, r),$$

pertence a $BV_*([e, f] \times [a, b], L(X, Z))$, com

$$v[M] \leq SV^u[K]v[L].$$

PROVA: segue do teorema 1.5.13 que $\text{MEG}^\sigma \cdot SV^u([e, f] \times [a, b], L(X, Z))$.

Tomemos $d'' : e = t_0 < \dots < t_{|d''|} = f$ e $d' : a = r_0 < \dots < r_{|d'|} = b$, então

$$\sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} \|M_{ji}\| = \sum_{j=1}^{|d''|} \sum_{i=1}^{|d'|} \left\| \int_c^\sigma d_s [L(t_j, s) - L(t_{j-1}, s)] \circ [K(s, r_i) - K(s, r_{i-1})] \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|d''|} \int_c^d dV_{[c, s]}^{t_j - t_{j-1}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{|d'|} \|K(s, r_i) - K(s, r_{i-1})\| \right]$$

$$\leq SV^u[K] \sum_{j=1}^{|d''|} v_{[L]^{t_j - t_{j-1}}}$$

$$\leq SV^u[K] \sum_{j=1}^{|d''|} v_{[c, d] \times [t_{j-1}, t_j]}[L] = SV^u[K]v[L]$$

$$\Rightarrow V[M] \leq SV^u[K]V[M].$$

□

2 - NÚCLEOS DE HINTON

Trataremos agora dos núcleos usados por Hinton em [Hi]. Eles contêm as funções de variação limitada segundo Vitali. Como os núcleos de Hinton formam um espaço de Banach, teremos no espaço das funções de variação limitada duas normas: a norma da variação e a norma induzida. Estas duas normas não são equivalentes.

2.1 - DEFINIÇÃO: seja $K: T \times [a, b] \longrightarrow X$, com $T \neq \emptyset$, tal que exista $g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente, com $g(a) = 0$, satisfazendo

$$\|K(t, s_2) - K(t, s_1)\| \leq g(s_2) - g(s_1), \text{ se } t \in T \text{ e } a \leq s_1 \leq s_2 \leq b.$$

Dizemos que g é uma *superfunção* de K . Definimos ainda

$$g_K(s) = \inf\{g(s) \mid g \text{ é superfunção de } K\}, \quad a \leq s \leq b. \quad \square$$

2.2 - PROPOSIÇÃO: g_K é uma superfunção de K e

$$g_K(s) = \sup_{d \in \mathcal{D}_{[a, s]}} \sum_{i=1}^{|d|} \sup_{t \in T} \|K(t, s_i) - K(t, s_{i-1})\|,$$

para todo $s \in [a, b]$.

PROVA: denotemos por μ_K esta última expressão. É claro que $\mu_K(a) = 0$ e μ_K é crescente. Se $t \in T$ e $a \leq s_1 \leq s_2 \leq b$, então

$$\|K(t, s_2) - K(t, s_1)\| \leq \sup_{t \in T} V_{[s_1, s_2]}[K^t] = \mu_K(s_2) - \mu_K(s_1),$$

donde μ_K é uma superfunção. Finalmente se g é uma superfunção de K , então, para todo $s \in [a, b]$, temos que

$$g(s) \geq \sup_{t \in T} V_{[a, s]}[K^t] = \mu_K(s)$$

e a proposição segue. $\square$

2.3 - PROPOSIÇÃO: Para todo $t \in T$, K^t é contínua à direita [esquerda] em $s \in [a, b[[]a, b]$ se, e só se, g_K é contínua à direita [esquerda] em s . Mais ainda

- a) $\sup_{t \in T} \|K(t, s_+) - K(t, s)\| = g_K(s_+) - g_K(s)$, para todo $s \in [a, b[$;
- b) $\sup_{t \in T} \|K(t, s) - K(t, s_-)\| = g_K(s) - g_K(s_-)$, para todo $s \in]a, b]$.

PROVA: a) seja $s \in [a, b[$. É fácil provar que

$$\sup_{t \in T} \|K(t, s_+) - K(t, s)\| \leq g_K(s_+) - g_K(s).$$

Definindo-se

$$g(r) = \begin{cases} g_K(r), & \text{se } a \leq r \leq s \\ g_K(r) - (h_2 - h_1), & \text{se } s < r \leq b, \end{cases}$$

onde $h_2 = g_K(s_+) - g_K(s)$ e $h_1 = \sup_{t \in T} \|K(t, s_+) - K(t, s)\|$, prova-se que g é uma superfunção de K . Assim

$$g_K(b) \leq g(b) = g_K(b) - (h_2 - h_1) \leq g_K(b),$$

donde $h_1 = h_2$.

b) a demonstração é análoga, bastando definir neste caso

$$g(r) = \begin{cases} g_K(r), & \text{se } r \neq s \\ g_K(s) - (h'' - h'), & \text{se } r = s, \end{cases}$$

onde $h'' = g_K(s) - g_K(s_-)$ e $h' = \sup_{t \in T} \|K(t, s) - K(t, s_-)\|$. $\square$

2.4 - DEFINIÇÃO: seja $K: [c, d] \times [a, b] \longrightarrow L(X, Y)$ satisfazendo a definição 2.1 e tal que, para todo $s \in [a, b]$, $K_s \in G^\sigma([c, d], L(X, Y))$. Neste caso dizemos que K é um *núcleo de Hinton* e notamos $K \in G^\sigma \cdot BV_a^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. Se ainda temos $K(t, a) = 0$, para todo $t \in [c, d]$, escrevemos $K \in G^\sigma \cdot BV_a^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. $\square$

2.5 - PROPOSIÇÃO: $G^\sigma \cdot BV_a^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$ é um espaço vetorial e a aplicação $K \longmapsto g_K(b)$ é uma semi-norma. Além disso $g_K(b) = 0$ se, e só se, $K(t, s) = A(t)$, onde $A \in G^\sigma([c, d], L(X, Y))$.

PROVA: segue imediatamente da definição 2.4. $\square$

2.6 - PROPOSIÇÃO: a aplicação $K \longmapsto g_K(b)$ é uma norma em $G^\sigma \cdot BV_a^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$ que o torna completo.

PROVA: seja K_n uma seqüência de Cauchy em $G^\sigma \cdot BV_a^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. É fácil ver que K_n é também uma seqüência de Cauchy em $G^\sigma \cdot SV_a^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. Portanto existe $K \in G^\sigma \cdot SV_a^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} SV^u[K_n - K] = 0$. Por outro lado, para $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{a \leq s \leq b} \|g_{K_n}(s) - g_{K_m}(s)\| \leq \sup_{a \leq s \leq b} \|g_{K_n - K_m}(s)\| = g_{K_n - K_m}(b),$$

isto é, g_{K_n} é uma seqüência de Cauchy em $G([a, b], X)$, donde existe $g \in G([a, b], X)$ tal que g_{K_n} converge uniformemente para g . É claro que g é crescente e $g(a) = 0$. Tomemos agora $t \in [c, d]$ e

$a \leq s_1 < s_2 \leq b$, e seja $\epsilon > 0$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\|K(t,s) - K_n(t,s)\| \mid c \leq t \leq d \text{ e } a \leq s \leq b\} < \epsilon/2, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Portanto para $n \geq n_0$ temos que

$$\begin{aligned} \|K(t,s_2) - K(t,s_1)\| &\leq \|K(t,s_2) - K_n(t,s_2)\| + \|K_n(t,s_2) - K_n(t,s_1)\| + \\ &+ \|K_n(t,s_1) - K(t,s_1)\| < \epsilon/2 + g_{K_n}(s_2) - g_{K_n}(s_1) + \epsilon/2 \end{aligned}$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos que

$$\|K(t,s_2) - K(t,s_1)\| \leq g(s_2) - g(s_1) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue-se que g é uma superfunção de K , e portanto $K \in G^\sigma \cdot BV_a^{\leq}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

Finalmente provaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{K_n - K}(b) = 0$. Para isto usaremos a expressão de g_K dada na proposição 2.2. Seja então $\epsilon > 0$, sabemos que existe $\delta : a = s_0 < \dots < s_{|\delta|} = b$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$g_{K_n - K}(b) \leq \sum_{i=1}^{|\delta|} \sup_{c \leq t \leq d} \|K_n(t,s_i) - K(t,s_i) - K_n(t,s_{i-1}) + K(t,s_{i-1})\| + \epsilon/2.$$

Também existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\|K(t,s) - K_n(t,s)\| \mid c \leq t \leq d \text{ e } a \leq s \leq b\} < \epsilon/4|\delta|, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Daí concluímos que

$$g_{K_n - K}(b) < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

□

2.7 - LEMA: sejam $K \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ e $f \in G^{\sigma}([c,d], L(X,Y))$. Então $\hat{K}$, definido por

$$\hat{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{se } s \neq \hat{s} \\ f(t), & \text{se } s = \hat{s} \end{cases}$$

onde $\hat{s} \in [a,b]$, é um elemento de $G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

PROVA: é claro que $\hat{K}_s \in G^{\sigma}([c,d], L(X,Y))$ para todo $s \in [a,b]$. Dado $\hat{s} \in [a,b]$ definimos

$$g(s) = \begin{cases} g_K(s), & \text{se } s < \hat{s} \\ g_K(\hat{s}) + \|f - K_{\hat{s}_-}\|, & \text{se } s = \hat{s} \\ g_K(s) + \|f - K_{\hat{s}_-}\| + \|K_{\hat{s}_+} - f\|, & \text{se } s > \hat{s}. \end{cases}$$

É fácil ver que g é crescente, com $g(a) = 0$. Sejam $t \in [c,d]$ e $a \leq s_1 < s_2 \leq b$, temos

$$\|\hat{K}(t,s_2) - \hat{K}(t,s_1)\| \leq g_K(s_2) - g_K(s_1) = g(s_2) - g(s_1),$$

quando $s_1 > \hat{s}$ ou $s_2 < \hat{s}$. Se $s_2 = \hat{s}$, então

$$\begin{aligned} \|\hat{K}(t,s_2) - \hat{K}(t,s_1)\| &\leq \|f(t) - K_{\hat{s}_-}(t)\| + \|\hat{K}(t,\hat{s}_-) - K(t,s_1)\| \\ &\leq \|f - K_{\hat{s}_-}\| + g_K(\hat{s}_-) - g_K(s_1) \leq g(\hat{s}) - g(s_1). \end{aligned}$$

E se $s_1 = \hat{s}$, então

$$\|\hat{K}(t,s_2) - \hat{K}(t,s_1)\| \leq \|K(t,s_2) - K(t,\hat{s}_+)\| + \|K_{\hat{s}_+}(t) - f(t)\| \leq$$

$$\leq g_K(s_2) - g_K(\hat{s}_+) + \|K_{\hat{s}} - f\| \leq g(s_2) - g(\hat{s}).$$

Segue que g é uma superfunção de K e daí

$$K \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([c, d] \times [a, b], L(X, Y)).$$

Quando $\hat{s} = a$ ou $\hat{s} = b$ a demonstração é análoga. $\square$

2.8 - PROPOSIÇÃO: seja $K \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$. Então $K_{\Delta} \in G^{\sigma}([a, b], L(X, Y))$.

PROVA: seja $s \in [a, b[$, definimos $K_{s_+}(t) = K(t, s_+)$, se $t \in [a, b]$.

Para todo $\delta > 0$ temos que

$$\|K_{s+\delta} - K_{s_+}\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|K(t, s+\delta) - K(t, s_+)\| \leq g_K(s+\delta) - g_K(s_+),$$

donde $K_{s_+} \in G^{\sigma}([a, b], L(X, Y))$.

Provaremos agora que, para cada $t \in [a, b]$, $K_{\Delta}(t_+) = K_{t_+}(t_+)$.

Para isto seja $x \in X$, $x \neq 0$, e $\varepsilon > 0$; sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|K_{t_+}(t+h)x - K_{t_+}(t_+)x\| < \varepsilon/2$$

e

$$g_K(t+h) - g_K(t_+) < \varepsilon/2 \|x\|,$$

se $0 < h < \delta$. Isto implica que, se $0 < h < \delta$, temos

$$\|K_{\Delta}(t+h)x - K_{t_+}(t_+)x\| \leq \|K(t+h, t+h)x - K(t+h, t_+)x\| +$$

$$+ \|K_{t_+}(t+h)x - K_{t_+}(t_+)x\| \leq [g_K(t+h) - g_K(t_+)] \|x\| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Analogamente demonstra-se que $K_{\Delta}(t_-) = K_{t_-}(t_-)$, para todo

$t \in [a, b]$. □

2.9 - PROPOSIÇÃO: seja $KEG^\sigma \cdot BV^\leq([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$. Então $\tilde{K}$ pertence a este espaço, com $g_{\tilde{K}}(s) \leq g_K(s)$, se $s \in [a, b]$.

PROVA: basta observarmos que g_K é uma superfunção de $\tilde{K}$. □

2.10 - DEFINIÇÃO: escrevemos que $KEG^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X, Y))$ se $KEG^\sigma \cdot BV^\leq([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$ e, para todo $t \leq s$, $K(t, s) = K(t, t)$. Se ainda temos $K_\Delta \equiv 0$, escrevemos $KEG^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X, Y))$. No caso de $X = Y$ definimos também $KEG_I^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$, se $K_\Delta \equiv I_X$. □

2.11 - OBSERVAÇÃO: Pela definição 2.4 temos que

$$G^\sigma \cdot BV^\leq([c, d] \times [a, b], L(X, Y)) \subset G^\sigma \cdot SV^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$$

e portanto $F_K \in L(G([a, b], X), G([c, d], Y))$, se K é um núcleo de Hinton.

$$\text{Além disso } \|F_K\| = SV^u[K] \leq g_K(b).$$

Segue da proposição 2.8 que

$$G^\sigma \cdot BV^\leq([a, b] \times [a, b], L(X, Y)) \subset G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$$

$$G^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X, Y)) \subset G_\Delta^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$$

$$G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X, Y)) \subset G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$$

e

$$G_I^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X)) \subset G_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X)).$$

Assim, se $KEG^\sigma \cdot BV^\leq([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$, temos que k é um operador causal de $L(G_-([a, b], X), G([a, b], Y))$. Da proposição 2.9

sabemos que $\tilde{K} \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X, Y))$ e $k = F_{\tilde{K}}$. Finalmente definindo-se $K'(t, s) = \tilde{K}(t, s) - \tilde{K}(t, t)$, tem-se que $F_{K'} = F_{\tilde{K}}$ e ainda

$$K' \in G_0^{\sigma} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X, Y)).$$

Concluimos que é suficiente considerarmos $G_0^{\sigma} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X, Y))$ para os operadores causais de $L(G_-([a, b], X), G([a, b], Y))$ definidos por núcleos de Hinton. $\square$

2.12 - PROPOSIÇÃO: sejam $L \in G^{\sigma} \cdot SV^u([e, f] \times [c, d], L(Y, Z))$ e $K \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$. Então M , definido por

$$M(t, r) = \int_c^d \sigma_s L(t, s) \circ K(s, r),$$

pertence a $G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([e, f] \times [a, b], L(X, Z))$, com

$$g_M(r) \leq SV^u[L]g_K(r), \quad a \leq r \leq b.$$

PROVA: segue do teorema 1.5.13 que $M \in G^{\sigma} \cdot SV^u([e, f] \times [a, b], L(X, Z))$.

Sejam então $t \in [e, f]$ e $a \leq r_1 \leq r_2 \leq b$, temos que

$$\begin{aligned} \|M(t, r_2) - M(t, r_1)\| &= \left\| \int_c^d \sigma_s L(t, s) \circ [K(s, r_2) - K(s, r_1)] \right\| \\ &\leq SV[L^t] \sup_{c \leq s \leq d} \|K(s, r_2) - K(s, r_1)\| \\ &\leq SV^u[L][g_K(r_2) - g_K(r_1)]. \end{aligned}$$

isto é, $g(r) = SV^u[L]g_K(r)$, $r \in [a, b]$, é uma superfunção de M . $\square$

3 - NÚCLEOS COM $K^{\square}$ REGRADA

Os núcleos que estudaremos agora caracterizam os

operadores que levam conjuntos limitados em conjuntos equi-
grados (teorema 10 de [H-5]). Em particular este espaço de nú-
cleos contém aqueles que caracterizam os operadores compactos
(teorema 11 de [H-5]). Também esses núcleos contém as funções
de variação limitada segundo Vitali. Porém não contém nem es-
tão contidos nos núcleos de Hinton como mostram os exemplos
3.6 a) e b) e os exemplos da observação 3.9 d).

3.1 - DEFINIÇÃO: seja $K: [c,d] \times [a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ tal que para
todo $t \in [c,d]$ $K^t \in SV_b([a,b], L(X,Y))$ e $K^\square \in ([c,d], SV_b([a,b], L(X,Y)))$,
onde, para todo $t \in [c,d]$, $K^\square(t) = K^t$. Neste caso escrevemos
 $KEG^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Se ainda $[c,d] = [a,b]$ e $K(t,s) =$
 $= 0$, quando $t \leq s$, então escrevemos $KEG_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))$. Final-
mente no caso particular de $[c,d] = [a,b]$ e $X = Y$ definimos
 $KEG_I^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ quando, para todo $t \leq s$, $K(t,s) = I_X$ $\square$

3.2 - COMENTÁRIO: no comentário 1.5.5 nós tínhamos que
 $K^\square \in ([c,d], SV_a([a,b], L(X,Y)))$. Observando que $SV_a([a,b], L(X,Y))$
é isométrico a $SV_b([a,b], L(X,Y))$ não há inconveniente de con-
siderarmos $K^\square$ como uma definição anterior. Neste caso nós con-
sideramos os núcleos $KEG^\sigma \cdot SV_b^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, isto é, K
satisfaz a definição 1.5.1 com a condição $K(t,b) = 0$, se $t \in [c,d]$,
ao invés do espaço $G^\sigma \cdot SV_a^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, pois são iso-
métricos. $\square$

Daremos agora uma caracterização intrínseca dos ope-
radores obtidos pelos núcleos de $G^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$.

3.3 - DEFINIÇÃO: dizemos que um conjunto $E \subset G([a,b], X)$ é equi-

regrado se para todo $\varepsilon > 0$ existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $w_d^*(f) \leq \varepsilon$, para toda $f \in E$. $\square$

3.4 - TEOREMA: seja $K \in G^\sigma \cdot SV_b^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. O operador $F_K \in L(G([a,b],X), G([c,d],Y))$ leva subconjuntos limitados de $G([a,b],X)$ em subconjuntos equiregrados de $G([c,d],Y)$ se, e só se, $K \in G^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. $\square$

3.5 - PROPOSIÇÃO: $G^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) = [G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))]$ é um subespaço fechado de $G^\sigma \cdot SV_b^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y)) = [G^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X,Y))]$.

PROVA: segue do comentário 3.2 e do teorema 1.5.4 (veja também 1.5.5). $\square$

3.6 - EXEMPLOS: a) tomemos $[c,d] = [a,b]$ e seja $A \in BW_b([a,b],X)$ e $A \notin G([a,b],X)$ (veja [R], corolário 3.a.6). Seja $x'_0 \in X'$ e definimos $\hat{A}(t)x = \langle A(t), x'_0 \rangle x$, para todo $x \in X$ e $t \in [a,b]$. Temos que $\hat{A} \in SV_b([a,b], L(X))$ e $\hat{A} \notin G^\sigma([a,b], L(X))$ (veja [H-1], 1.4.1). Daí K definido por $K(t,s) = \hat{A}(s)$ pertence a $G^\square \cdot SV_b([a,b] \times [a,b], L(X))$, mas K_Δ não é simplesmente regradada.

b) Dados $0 \leq s, t \leq 1$, seja

$$K(t,s) = \begin{cases} -t, & 0 \leq s \leq \frac{t}{1+t} \\ \frac{1+t}{t}s - 1 - t, & \frac{t}{1+t} \leq s \leq t. \\ 0, & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se $t \in]0,1[$, tomemos $\delta_t = t - \frac{t}{1+t} > 0$, então para todo $t' \in [0,1]$

com $|t-t'| < \delta_t$ temos que

$$V[K^t - K^{t'}] = \left| 2 \frac{(1+t)t'}{(1+t')t} - 2 + t - t' \right|.$$

Daí segue que $K^\square$ é contínua em $]0,1[$. Facilmente encontra-se também a continuidade de $K^\square$ em $t=0$ e $t=1$. Portanto

$$K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(\mathbb{R})) \text{ e } K \notin G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(\mathbb{R})). \quad \square$$

3.7 - PROPOSIÇÃO: sejam $L, P \in G^\sigma \cdot SV_d^u([e,f] \times [c,d], L(Y,Z))$ e $K, N \in G^\sigma \cdot SV_b^u([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$ tais que $L^\square$ e $N^\square$ são regradas. Então M e Q definidos por

$$M(t,r) = \int_c^d \circ d_s L(t,s) \circ K(s,r)$$

e

$$Q(t,r) = \int_c^d \circ d_s P(t,s) \circ N(s,r)$$

pertencem a $G^\square \cdot SV_b([e,f] \times [a,b], L(X,Z))$, com

$$\|M^\square\| \leq SV^u[K] \|L^\square\| \text{ e } \|Q^\square\| \leq SV^u[P] \|N^\square\|.$$

PROVA: segue dos teoremas 1.5.13 e 3.3. $\square$

3.8 - LEMA: seja $K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))$ e $\hat{s} \in [a,b[$. Então $\hat{K}$ definido por

$$\hat{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & \text{se } s \neq \hat{s} \\ 0, & \text{se } s = \hat{s}. \end{cases}$$

pertence a $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))$. Além disso $\|\hat{K}^\square\| \leq \eta \|K^\square\|$, onde $\eta = 2$,

se $\hat{s} = a$, e $\eta = 3$, se $\hat{s} \in]a, b[$.

PROVA: vamos inicialmente provar que $\hat{K}^t \in SV_b([a, b], L(X, Y))$. Suponhamos que $\hat{s} \in]a, b[$. Seja $t \in [a, b]$. Se $a \leq t \leq \hat{s}$, temos $\hat{K}^t = K^t$. Se $\hat{s} < t \leq b$, tomemos $d: a = s_0 < \dots < s_{|d|} = b$. Podemos ainda supor que $\hat{s} = s_{\hat{i}}$, para algum $\hat{i} \in \{1, \dots, |d|-1\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|d|} [\hat{K}(t, s_i) - \hat{K}(t, s_{i-1})] x_i &= \sum_{i=1}^{|d|} [K(t, s_i) - K(t, s_{i-1})] x_i + \\ &+ K(t, \hat{s}) [x_{\hat{i}+1} - x_{\hat{i}}], \end{aligned}$$

e daí segue que $SV[\hat{K}^t] \leq 3SV[K^t]$. O caso $\hat{s} = a$ é análogo.

Finalmente seja $t \in [a, b[$, sabemos que existe $K^\square(t_+)$.

Provemos que

$$[\hat{K}^\square(t_+)](s) = \begin{cases} [K(t_+)](s), & \text{se } s \neq \hat{s} \\ 0, & \text{se } s = \hat{s}. \end{cases}$$

Isto segue de $\hat{K}^\square(t_+) \in SV_b([a, b], L(X, Y))$ e de

$$SV[\hat{K}^\square(t+h) - \hat{K}^\square(t_+)] \leq \eta SV[K^\square(t+h) - K^\square(t_+)].$$

Analogamente, se $t \in]a, b]$, então

$$[\hat{K}^\square(t_-)](s) = \begin{cases} [K^\square(t_-)](s), & \text{se } s \neq \hat{s} \\ 0, & \text{se } s = \hat{s}. \end{cases} \quad \square$$

3.9 - OBSERVAÇÕES: a) o fato de $K^\square$ ser regrada implica obviamente que K_s é regrada para todo s .

b) Seja $K \in BV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$, com $K(t,b) = 0$, se $t \in [c,d]$. Utilizando o teorema 1.7 e a observação 1.12 b) mostra-se facilmente que $K \in G_0^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Também temos que $BV_0(\Gamma, L(X,Y)) \subset G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))$ e que $BV_I(\Gamma, L(X)) \subset G_I^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$.

c) O teorema 11 de [H-5] mostra que o conjunto dos núcleos que definem operadores compactos está contido (estritamente) em $G_0^\square \cdot SV_b([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$. Se o operador é causal é claro que o núcleo pertence a $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X,Y))$.

d) O exemplo 3.4 a) mostra um elemento

$$K \in G_0^\square \cdot SV_b([a,b] \times [a,b], L(X,Y))$$

que não é um núcleo de Hinton, pois K_Δ não é simplesmente regrada (veja posição 2.8). Também o núcleo K do exemplo 3.4 b) pertence a $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(\mathbb{R}))$ mas K não é um núcleo de Hinton, pois se g fosse uma superfunção de K teríamos

$$g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \left| K\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - K\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) \right| = \frac{1}{n},$$

o que é impossível. Por outro lado, seja $X = G_-([a,b])$ e $Y = \mathbb{R}$. Sabemos que $X' = BV_a([a,b])$. Definamos

$$K(t,s) = \begin{cases} \chi_{[t,b[}, & \text{se } s \in [a,b[\\ 0, & \text{se } s = b. \end{cases}$$

Temos que $g \equiv 2_{\{b\}}$ é uma superfunção de K e portanto

$$K \in G^\square \cdot BV^\leq([a,b] \times [a,b], G_-([a,b])').$$

Porém, se $a < t' < t'' < b$, temos $\|K^{t''} - K^{t'}\| = SV[\chi_{[t',t'']}] = 2$, don-

de $K^{[\square]}$ não é regradada. Um exemplo deste tipo existe mesmo quando $X = Y = \mathbb{R}$; pois sejam $0 \leq s, t \leq 1$ e

$$K(t, s) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{s}{t}, & \text{se } t = \frac{1}{k\pi}, \quad k=1, 2, \dots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que

$$g(s) = \begin{cases} \pi \operatorname{sen} \pi s, & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \pi + \pi \operatorname{sen}(s+1)\pi, & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

é uma superfunção de K e portanto $K \in G^{\sigma} \cdot BV^{\leq}([a, b] \times [a, b], L(\mathbb{R}))$.

Mas $SV[K^{1/k\pi}] = 2\pi$, para todo $k=1, 2, \dots$, donde não existe $K^{[\square]}(0, \cdot)$

e portanto $K^{[\square]}$ não é regradada. $\square$

CAPÍTULO 3

A EQUAÇÃO INTEGRAL DE VOLTERRA-STIELTJES

Consideramos a equação

$$(K) \quad y(t) = x + \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t) - f(a), \quad a \leq t \leq b,$$

onde $y, f \in G([a, b], X)$, $x \in X$ e $K \in G_0^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$. Como vimos na observação 1.5.12, $G_0^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ é exatamente o espaço dos núcleos para os quais a integral da equação (K) é uma função regradada (em t), para toda $y \in G([a, b], X)$.

Em particular quando K pertence a um dos três espaços — $BV_0(\Gamma, L(X))$, $G_0^{\sigma} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$ e $G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ — damos condições sobre K que são necessárias e suficientes para a existência e unicidade de solução da equação (K). Também nestes casos particulares conseguimos dar condições suficientes sobre K para que o operador k , definido, para todo $y \in G([a, b], X)$, por

$$(ky)(t) = \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad a \leq t \leq b,$$

seja de Fredholm; e estudamos o índice deste operador.

1 - ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS

Neste parágrafo enunciaremos dois teoremas importantes para o estudo da equação. São os teoremas 1.8 e 1.13 demonstrados por Hönig e Arbex, respectivamente. Estes teoremas tratam do estudo da existência e unicidade de solução da equação (K).

Em seguida apresentamos o lema da serpente que será usado no estudo dos operadores de Fredholm.

A - OS TEOREMAS DE HÖNIG E ARBEX

1.1 - NOTAÇÃO: para $a \leq c < d \leq b$, $x \in X$, $f \in G([a, b], X)$ e $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ indicamos por (K_C^d) a equação

$$y(t) = x + \int_c^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t) - f(c), \quad t \in [c, d],$$

cuja solução y , quando existe, deve pertencer a $G([c, d], X)$. $\square$

1.2 - DEFINIÇÃO: dado $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$, se existe $R: \Gamma \rightarrow L(X)$ satisfazendo

$$(R^*) \quad R(t, s) = I_X + \int_s^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \circ R(\tau, s) = 0, \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

dizemos que R é um *quase-resolvente* de (K) ou K . $\square$

É claro que K pode não ter quase-resolvente. Hönig deu exemplo de equação (K) com mais de um quase-resolvente (veja [H-6], página 56).

1.3 - DEFINIÇÃO: se $R: \Gamma \longrightarrow L(X)$ é tal que, para todo $s \in [a, b]$, temos $K_s \in G^\sigma([s, b], L(X))$, escrevemos $REG^{(\sigma, \cdot)}(\Gamma, L(X))$. $\square$

1.4 - OBSERVAÇÃO: nas duas definições anteriores nós poderíamos ter considerado $R: [a, b] \times [a, b] \longrightarrow L(X)$ tomando-se $R(t, s) = R(t, t)$, se $s \geq t$. Como isto não faz diferença alguma, daqui por diante sempre confundiremos estas duas formas. $\square$

1.5 - TEOREMA: para $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ as seguintes propriedades são equivalentes:

a) para todo $s \in [a, b]$ e $x \in X$, a equação homogênea

$$y(t) - x + \int_s^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = 0, \quad t \in [s, b]$$

possui uma única solução regradada;

b) existe um único quase-resolvente R em $G^{(\sigma, \cdot)}(\Gamma, L(X))$.

PROVA: veja [H-7], teorema 3.2. $\square$

1.6 - TEOREMA: se $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ possui um quase-resolvente $REG^{(\sigma, \cdot)}(\Gamma, L(X))$ (não necessariamente único), então as seguintes propriedades são equivalentes:

a) para todo $x \in X$ e $f \in G([a, b], X)$, a função

$$(p) \quad y(t) = f(t) + R(t, a)[x - f(a)] - \int_a^t \cdot d_\tau R(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad t \in [a, b],$$

é uma solução regradada de (K);

b) para todo $s \in [a, b[$, $x \in X$ e $f \in G([s, b], X)$, a função

$$y(t) = f(t) + R(t, s)[x - f(s)] - \int_s^t \cdot d_\tau R(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad t \in [s, b]$$

é uma solução regradada de (K_S^b) ;

c) $\text{REG}_I^\sigma \cdot \text{SV}^u(\Gamma, L(X))$.

PROVA: veja [H-7], teorema 3.3. $\square$

1.7 - DEFINIÇÃO: um quase-resolvente R é um *resolvente* de (K) ou K se $\text{REG}_I^\sigma \cdot \text{SV}^u(\Gamma, L(X))$. $\square$

Hönig deu exemplo de uma equação (K) que não possui um quase-resolvente, mas existe $\text{REG} \cdot \text{BV}_a^u([a,b] \times [a,b])$ tal que a solução de (K) é dada por

$$y(t) = f(t) - f(a) + x - \int_a^b \cdot d_\tau R(t, \tau) \cdot [f(\tau) - f(a) + x], \quad a \leq t \leq b,$$

(veja [H-7], exemplo 2 e a observação que o segue) isto é, a equação (K) possui resolvente no sentido de Fredholm-Stieltjes (veja [H-5], teorema 16).

1.8 - TEOREMA (Hönig): seja $\text{KEG}_0^\sigma \cdot \text{SV}^u(\Gamma, L(X))$.

a) São equivalentes as propriedades:

1) para todo $g \in \text{EG}([a,b], X)$, a equação

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = g(t), \quad a \leq t \leq b,$$

tem uma e uma só solução $y_g \in \text{EG}([a,b], X)$ e o operador

$$g \in \text{EG}([a,b], X) \longmapsto y_g \in \text{EG}([a,b], X)$$

é causal;

2) para todo $d \in]a, b]$, $x \in X$ e $f \in \text{EG}([a, d], X)$ a equação (K_a^d)

tem uma e uma só solução regradada;

- 3) para todo $c \in [a, b[$, $x \in X$ e $f \in G([c, b], X)$, a equação (K_C^b) tem uma e uma só solução regradada;
- 4) para todo $[c, d] \subset [a, b]$, $x \in X$ e $f \in G([c, d], X)$, a equação (K_C^d) tem uma e uma só solução regradada;
- 5) para todo $t \in [a, b]$ existe $\varepsilon_t > 0$ tal que
 - i) para qualquer $c \in [a, b[$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_c]$, $x \in X$ e $f \in G([c, c+\varepsilon], X)$, a equação $(K_C^{c+\varepsilon})$ possui uma e uma só solução regradada;
 - ii) para qualquer $d \in]a, b]$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_d]$, $x \in X$ e $f \in G([d-\varepsilon, d], X)$, a equação $(K_{d-\varepsilon}^d)$ possui uma e uma só solução regradada;
- 6) existe um único R que é quase-resolvente de K e temos $\text{REG}_I^\sigma \cdot \text{SV}^u(\Gamma, L(X))$;
- 7) existe $\text{REG}_I^\sigma \cdot \text{SV}^u(\Gamma, L(X))$ satisfazendo

$$(R^*) \quad R(t, s) - I_X + \int_s^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \circ R(\tau, s) = 0, \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

e

$$(R_*) \quad R(t, s) - K(t, s) - I_X + \int_s^t \cdot d_\tau R(t, \tau) \circ K(\tau, s) = 0, \quad a \leq s \leq t \leq b.$$

b) Se as propriedades equivalentes de a) estão satisfeitas, então

- 8) para qualquer $[c, d] \subset [a, b]$, a solução de (K_C^d) é dada por

$$(\rho_C^d) \quad y(t) = f(t) + R(t, c)[x - f(c)] - \int_c^t \cdot d_\tau R(t, \tau) \cdot f(\tau), \quad c \leq t \leq d;$$

9) para todo $t \in [a, b[$, o operador $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$).

c) Se o operador definido por K é compacto, então a propriedade 9) é equivalente às propriedades de a).

PROVA: veja [H-7], teorema 3.4. $\square$

1.9 - COMENTÁRIO: Hönig em [H-7], página 36, deu um exemplo mostrando que a condição 9) em geral não é equivalente às propriedades de a). Com isto a pergunta natural que se faz após este teorema é para que outras classes de operadores, além dos compactos, a propriedade 9) é equivalente às propriedades de a)? Responderemos, afirmativamente para a classe dos operadores definidos por núcleos em $BV_0(\Gamma, L(X))$, $G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$ e $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ (teoremas 2.6, 2.10 e 2.15). $\square$

1.10 - DEFINIÇÃO: indicamos por S a classe de todos os núcleos $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ que satisfazem as propriedades equivalentes de a). $\square$

1.11 - TEOREMA: a) seja $K \in S$, então para qualquer $[c, d] \subset [a, b]$, a solução regrada de (K_C^d) depende continuamente de $x \in X$ e $f \in G([a, b], X)$;

b) S é um subconjunto aberto de $G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e a aplicação que a cada $K \in S$ associa ao seu resolvente R (onde $R = I \in S$ e $I(t, s) = I_X$) é bicontínua.

PROVA: veja [H-7], observações a) e m). $\square$

1.12 - DEFINIÇÃO: sejam $KEG_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$,

indicamos por

$$c(d,K) = \max_{1 \leq i \leq |d|} \sup_{t_{i-1} < t < t_i} SV_{[t_{i-1}, t]}^{t_-}[K],$$

onde $K^{t_-}(s) = K(t_-, s)$, para todo $t \in [a, b]$ e $s \in [a, b]$. Se existe $d \in \mathcal{D}_{[a, b]}$ tal que $c(d, K) < 1$, escrevemos $K \in G_0^\sigma \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$. $\square$

1.13 - TEOREMA (Arbex): se $K \in G_0^\sigma \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$, então $K \in S$. Mais ainda

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} SV^u[K^{(n)}] < \infty;$$

b) o resolvente de K é dado por

$$R(t, s) = I_X + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}(t, s), \quad a \leq s \leq t \leq b.$$

PROVA: veja [A], teorema 3.10 e corolário 3.22. $\square$

1.14 - PROPOSIÇÃO: se $K \in G_0^\sigma \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$, então, para todo $t \in [a, b]$, $\|K(t_+, t)\| < 1$.

PROVA: seja $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que $c(d, K) < 1$.

Seja $t' \in [a, b[$ e admitamos que $\|K(t'_+, t')\| \geq 1$. Temos que $t' \in [t_{i-1}, t_i[$, para algum $i \in \{1, \dots, |d|\}$. Por hipótese sabemos que para todo $x \in X$

$$K(t'_+, t')x = \lim_{t \downarrow t'} K(t, t')x = \lim_{t \downarrow t'} K(t_-, t')x,$$

donde, pelo teorema de Banach-Steinhaus, temos

$$\|K(t'_+, t')\| \leq \liminf_{t \downarrow t'} \|K(t_-, t')\|.$$

Logo existe $t'' \in]t', t_i[$ tal que $\|K(t'', t')\| \geq 1$. E assim

$$SV_{[t_{i-1}, t'']} [K^{t''}] \geq \|K(t'', t')\| \geq 1.$$

o que é um absurdo. $\square$

B - O LEMA DA SERPENTE

Neste item E , F e G são espaços vetoriais sobre um corpo C . $L(E, F)$ é o espaço vetorial das aplicações lineares de E em F . Dado $h \in L(E, F)$ continuamos indicando por $N(h)$ e $I(h)$ o núcleo e a imagem de h , respectivamente. Indicamos por $C(h) = F/I(h)$ o conúcleo de h .

1.15 - DEFINIÇÃO: sejam E_n espaços vetoriais e $h_n \in L(E_n, E_{n+1})$. Dizemos que a seqüência

$$\dots \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} E_n \xrightarrow{h_n} E_{n+1} \longrightarrow \dots$$

é exata se para todo n $I(h_{n-1}) = N(h_n)$. Em particular as seqüências

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F$$

$$F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

são exatas se, e só se, f é injetiva e g é sobrejetiva. A seqüência

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

é exata, se, e só se, f é injetiva, g é sobrejetiva e $I(f) = N(g)$, e portanto G é isomorfo ao espaço quociente F/E . $\square$

1.16 - LEMA: seja $0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$ uma seqüência exata, onde E_i são espaços vetoriais de dimensão finita. Então

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim E_i = 0.$$

PROVA: veja [A-M], proposição 2.11. □

1.17 - LEMA (da serpente): seja

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h' & & \downarrow h & & \downarrow h'' & & \\ 0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{f'} & F' & \xrightarrow{g'} & G' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

um diagrama comutativo (isto é, $f' \circ h' = h \circ f$ e $g' \circ h = h'' \circ g$) de espaços vetoriais e aplicações lineares, cujas linhas são exatas. Então existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow N(h') \xrightarrow{\bar{f}} N(h) \xrightarrow{\bar{g}} N(h'') \xrightarrow{\Delta} C(h') \xrightarrow{\bar{f}'} C(h) \xrightarrow{\bar{g}'} C(h'') \longrightarrow 0$$

onde $\bar{f}$ e $\bar{g}$ são as restrições de f e g , e $\bar{f}'$ e $\bar{g}'$ são induzidas por f' e g' .

PROVA: veja [A-M], proposição 2.10. □

1.18 - OBSERVAÇÕES: a) nas condições do lema 1.17 se h' , h e h'' são tais que as dimensões de seus núcleos e conúcleos são finitas segue do lema 1.16 que

$$\dim N(h') - \dim N(h) + \dim N(h'') - \dim C(h') + \\ + \dim C(h) - \dim C(h'') = 0,$$

isto é,

$$\dim N(h) - \dim C(h) = \dim N(h') - \dim C(h') + \\ + \dim N(h'') - \dim C(h'').$$

b) É fácil de ver que se duas dentre as aplicações h' , h e h'' tiverem seus núcleos e conúcleos com dimensões finitas, então o mesmo ocorrerá com a terceira. Isto segue da sequência exata obtida no lema 1.17. $\square$

C - UM LEMA BÁSICO

Provaremos, agora um lema puramente técnico. Ele será usado nas demonstrações dos lemas 2.1 e 3.6 e dos teoremas 2.6, 2.10, 2.15 e 3.7.

1.19 - LEMA: seja $K \in G_0^{\sigma} \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ tal que existe $\hat{K} \in S$ satisfazendo $(K - \hat{K})(t, s) = 0$, se $s \neq a$. Então

a) a aplicação

$$\mu: y \in N(I+k) \mapsto y(a_+) \in N(I_X - K(a_+, a))$$

é um isomorfismo;

b) $f \in I(I+k)$ se, e só se, $f(a_+) \in I(I_X - K(a_+, a))$;

c) $I(I+k)$ é fechado se, e só se, $I(I_X - K(a_+, a))$ é fechado;

além disso a aplicação

$$v: G([a,b],X)/I(I+k) \longrightarrow X/I(I_X - K(a_+, a))$$

$$f + I(I+k) \longmapsto f(a_+) + I(I_X - K(a_+, a))$$

é um isomorfismo.

PROVA: a) seja $y \in N(I+k)$, isto é

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

então, fazendo $t \downarrow a$, temos que

$$y(a_+) - K(a_+, a)y(a_+) = 0.$$

Assim a aplicação μ está bem definida e é obviamente linear e contínua.

Seja agora $y \in N(I+k)$ e $y(a_+) = 0$. De $y(a_+) = 0$ segue que

$$\int_a^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = \int_a^t \cdot d_\tau \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad a \leq t \leq b.$$

Assim

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau) = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

e por hipótese temos que $y = 0$. E se $x \in N(I_X - K(a_+, a))$, tomemos $y \in G([a,b],X)$ satisfazendo

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau) = (K - \hat{K})(t, a)x, \quad a \leq t \leq b.$$

Fazendo $t \downarrow a$ e usando que existe $[I_X - \hat{K}(a_+, a)]^{-1} \in L(X)$ obtemos que

$y(a_+) = x$. E daí $y \in N(I+k)$ com $y(a_+) = x$. Que a aplicação μ é um isomorfismo segue do teorema da aplicação aberta.

b) seja $f \in I(I+k)$, então existe $y \in G([a,b],X)$ satisfazendo

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau K(t,\tau) \cdot y(\tau) = f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

e fazendo $t \downarrow a$ obtemos que

$$y(a_+) - K(a_+, a)y(a_+) = f(a_+),$$

isto é, $f(a_+) \in I(I_X - K(a_+, a))$. Reciprocamente, se $f \in G([a,b],X)$ é tal que $f(a_+) \in I(I_X - K(a_+, a))$, seja $x \in X$ com $x - K(a_+, a)x = f(a_+)$. Tomemos $y \in G([a,b],X)$ satisfazendo

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau \hat{K}(t,\tau) \cdot y(\tau) = f(t) + (K - \hat{K})(t, a)x, \quad a \leq t \leq b.$$

Fazendo novamente $t \downarrow a$ segue que

$$\begin{aligned} y(a_+) - \hat{K}(a_+, a)y(a_+) &= f(a_+) + (K - \hat{K})(a_+, a)x = \\ &= x - \hat{K}(a_+, a)x, \end{aligned}$$

donde $y(a_+) = x$. E daí temos que

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_\tau K(t,\tau) \cdot y(\tau) = f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

c) Suponhamos que $I(I+k)$ é fechado e seja $x_n \in I(I_X - K(a_+, a))$ convergindo para $x \in X$. Consideremos, para todo $t \in [a,b]$, $f_n(t) = x_n$ e $f(t) = x$. Então temos que f_n e f são regradas, f_n con-

verge uniformemente para f , e por b) $f_n \in I(I+k)$. Assim $x \in I(I+k)$ e novamente usando b) temos que $x \in I(I_X - K(a_+, a))$. Reciprocamente se $I(I_X - K(a_+, a))$ é fechado, seja $f_n \in I(I+k)$ convergindo uniformemente para $f \in G([a, b], X)$. Então $f_n(a_+)$ converge em X para $f(a_+)$. Agora usando b) e a hipótese de $I(I_X - K(a_+, a))$ ser fechado em X obtemos que $f \in I(I+k)$.

Finalmente por b) a aplicação v está bem definida e é bijetiva. É obviamente linear. E temos que

$$\begin{aligned} d(f(a_+), I(I_X - K(a_+, a))) &= \inf\{\|f(a_+) - g(a_+)\| \mid g \in I(I+k)\} \\ &\leq \inf\{\|f - g\| \mid g \in I(I+k)\} \\ &= d(f, I(I+k)), \end{aligned}$$

isto é, a aplicação é contínua, e do teorema da aplicação aberta segue que v é um isomorfismo. $\square$

2 - EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Demonstraremos agora que quando K pertence a um dos três espaços $BV_0(\Gamma, L(X))$, $G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$ e $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ — então a condição necessária e suficiente para que tenhamos $K \in S$ é que para todo $t \in [a, b[$ exista $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$.

Observamos que as hipóteses do lema que segue serão justificadas nos teoremas 2.6, 2.10 e 2.15.

2.1 - LEMA: sejam $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e $\hat{K} \in S$ tais que exista $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ satisfazendo

$$(K - \hat{K})(t, s) = 0, \text{ se } s \neq t_i, i = 0, \dots, |d|.$$

Então $K \in S$, se e somente se, o operador $I_X - K(t_{i+}, t_i)$ é inversível (em $L(X)$), para todo $i = 0, \dots, |d|-1$.

Nós daremos duas provas deste lema. Na primeira usamos apenas o comportamento de K no conjunto

$$\Gamma \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{|d|} [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \right\},$$

e este é o ponto essencial para a existência do resolvente. Na outra demonstração nós damos uma forma explícita da solução da equação. Nesta nós utilizamos o comportamento de K em todo o conjunto Γ .

PRIMEIRA PROVA: seja $c \in [a, b[$, sabemos que $c \in [t_{i-1}, t_i[$ para algum $i = 1, \dots, |d|$. Tomemos $\delta_c = t_i - c$ e seja $\delta \in]0, \delta_c]$. Considerando $K' = K|_{[c, c+\delta] \times [c, c+\delta]}$ e $\hat{K}' = \hat{K}|_{[c, c+\delta] \times [c, c+\delta]}$ e utilizando o lema 1.19, observando que $I_X - K(c_+, c)$ é inversível (em $L(X)$), concluímos que $(K_c^{c+\delta})$ possui sempre uma e uma só solução em $G([c, c+\delta], X)$.

Analogamente, se $d \in [a, b]$, então $d \in]t_{i-1}, t_i]$, para algum $i = 1, \dots, |d|$. Tomamos $\delta_d = d - t_{i-1}$. Se $\delta \in]0, \delta_d]$, sejam K' e $\hat{K}'$, respectivamente, as restrições de K e $\hat{K}$ a $[d-\delta, d] \times [d-\delta, d]$; como existe $[I_X - K((d-\delta)_+, (d-\delta))]^{-1} \in L(X)$, segue do lema 1.19 que $(K_{d-\delta}^d)$ possui sempre uma e uma só solução em $G([d-\delta, d], X)$.

Logo se $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$), para todo $t \in [a, b[$, segue de 5) do teorema 1.8 que $K \in S$.

A recíproca segue de 9) do teorema 1.8. □

SEGUNDA PROVA: admitamos que, para todo $t \in [a, b[$, existe $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$. Seja $g \in G([a, b], X)$ e consideremos a equação

$$(*) \quad y(t) + \int_a^t d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Desejamos mostrar que (*) possui uma única solução y_g regrada e que o operador $g \mapsto y_g$ é causal. Para isto podemos supor que $|d| > 1$ e consideramos as seguintes equações

$$(\hat{K}_i) \quad z(t) + \int_{t_i}^t d_\tau \hat{K}(t, \tau) \cdot z(\tau) = f_i(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

para todo $i = 0, \dots, |d|-1$, onde z_i é a única solução em $G([t_i, t_{i+1}], X)$ de $(\hat{K}_i)$,

$$f_i(t) = g_i(t) + (K - \hat{K})(t, t_i) \circ [I_X - K(t_{i+}, t_i)]^{-1} g_i(t_{i+}),$$

$t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 0, \dots, |d|-1$,

$$g_0(t) = g(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

e

$$g_i(t) = g(t) - \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d_\tau K(t, \tau) \cdot z_j(\tau), \quad t \in [t_{i-1}, t_i],$$

$i = 1, \dots, |d|-1$.

Observemos que

$$z_i(t_{i+}) = [I_X - \hat{K}(t_{i+}, t_i)]^{-1} f_i(t_{i+}), \quad i = 0, \dots, |d|-1,$$

$$\begin{aligned} f_i(t_{i+}) &= \{I_X^{+}[K(t_{i+}, t_i) - \hat{K}(t_{i+}, t_i)] \circ [I_X^{-K}(t_{i+}, t_i)]^{-1} g_i(t_{i+})\} \\ &= [I_X^{-\hat{K}(t_{i+}, t_i)}] \circ [I_X^{-K}(t_{i+}, t_i)]^{-1} g_i(t_{i+}), \end{aligned}$$

$i = 0, \dots, |d|-1$, donde

$$z_i(t_{i+}) = [I_X^{-K}(t_{i+}, t_i)]^{-1} g_i(t_{i+}), \quad i=0, \dots, |d|-1.$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{|d|-1} x_{[t_i, t_{i+1}[}(t) z_i(t) + \\ &+ x_{\{b\}}(t) \left[g(t) - \sum_{i=0}^{|d|-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} d_{\tau} K(t, \tau) \cdot z_i(\tau) \right], \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

é a única solução regrada de (*). Para isto seja $a = t_0 \leq t < t_1$, então $y(t) = z_0(t)$, que satisfaz $(\hat{K}_0)$, e assim

$$y(t) + \int_a^t \cdot d_{\tau} \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau) = g(t) + (K - \hat{K})(t, a) \circ [I_X^{-K}(a_+, a)]^{-1} g(a_+)$$

$$\Rightarrow y(t) + \int_a^t \cdot d_{\tau} \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau) + \int_a^t \cdot d_{\tau} (K - \hat{K})(t, \tau) \cdot y(\tau) = g(t)$$

$$\Rightarrow y(t) + \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t),$$

e se $t = t_1$, temos

$$y(t_1) = z_1(t_1) = f_1(t_1) = g_1(t_1) = g(t_1) - \int_a^{t_1} d_{\tau} K(t_1, \tau) \cdot y(\tau).$$

Assim y é solução de (*) em $[a, t_1]$. Suponhamos que y seja solução de (*) em $[a, t_i]$, para algum $i \in \{1, \dots, |d|-1\}$, e tomemos $t_i \leq t < t_{i+1}$, então $y(t) = z_i(t)$, donde

$$y(t) + \int_{t_i}^t d_{\tau} \hat{K}(t, \tau) \cdot y(\tau) = f_i(t)$$

$$= g_i(t) + (K - \hat{K})(t, t_i) \circ [I_X - K(t_i, t_i)] g_i(t_i)$$

$$\Rightarrow y(t) + \int_{t_i}^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = g_i(t)$$

$$= g(t) - \int_a^{t_i} d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau)$$

$$\Rightarrow y(t) + \int_a^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau) = g(t).$$

E se $t = t_{i+1}$, então ou $i+1 = |d|$ e daí

$$y(b) = g(b) - \sum_{j=1}^{|d|-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d_{\tau} K(b, \tau) \cdot z_j(\tau) =$$

$$= g(b) - \int_a^b d_{\tau} K(b, \tau) \cdot y(\tau),$$

ou $i+1 < |d|$, donde $y(t_{i+1}) = z_{i+1}(t_{i+1})$ e temos

$$y(t_{i+1}) = z_{i+1}(t_{i+1}) = f_{i+1}(t_{i+1}) = g_{i+1}(t_{i+1}) =$$

$$= g(t_{i+1}) - \int_a^{t_{i+1}} d_{\tau} K(t_{i+1}, \tau) \cdot y(\tau),$$

Disto tudo obtemos que y é solução de (*). Para mostrar a unicidade suponhamos que y' e y'' sejam soluções regradas de (*), então ambas são soluções de

$$z(t) + \int_a^t \hat{K}(t, \tau) \cdot z(\tau) = f_0(t), \quad a \leq t \leq c,$$

para todo $c \in [t_0, t_1[$. Da hipótese sobre $\hat{K}$ obtemos que $y'|_{[a, t_1[} \equiv y''|_{[a, t_1[}$ e daí segue obviamente que $y'|_{[a, t_1]} \equiv y''|_{[a, t_1]}$. Se $|d| = 1$, não há mais nada a fazer. Se $|d| > 1$, suponhamos que $y'|_{[a, t_i]} \equiv y''|_{[a, t_i]}$, para algum $i \in \{1, \dots, |d|-1\}$; novamente temos que as duas soluções satisfazem

$$z(t) + \int_{t_i}^t \hat{K}(t, \tau) \cdot z(\tau) = f_i(\tau), \quad t_i \leq t \leq c,$$

para todo $c \in [t_i, t_{i+1}[$. Com o mesmo raciocínio anterior obtemos que $y'|_{[a, t_{i+1}]} \equiv y''|_{[a, t_{i+1}]}$. Logo y é a única solução regrada de (*).

Finalmente admitamos que $g|_{[a, t]} \equiv 0$, para algum $t \in [a, b]$. É claro que se $t = b$, teremos $y \equiv 0$. No outro caso $t \in [t_i, t_{i+1}[$, para algum $i \in \{0, \dots, |d|-1\}$. Se $i = 0$, temos que $y|_{[a, t]} \equiv z_0|_{[a, t]} \equiv 0$. Se $i > 0$, então $z_j \equiv 0$, para todo $j = 0, \dots, i-1$, pois $g_j \equiv 0$, para todo $j = 0, \dots, i-1$ e $g_i|_{[t_i, t]} \equiv 0$, donde $z_i|_{[t_i, t]} \equiv 0$; disto tudo concluímos que $y|_{[a, t]} \equiv 0$, isto é, o operador $g \mapsto y_g$ é causal.

A recíproca segue do teorema 1.8 b).

□

A - EQUAÇÃO COM NÚCLEO DE VARIAÇÃO LIMITADA SEGUNDO VITALI

Trataremos neste item da equação (K) quando o núcleo $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$. Schwabik em [S-2], [S-3] e [S-T-V] tratou deste problema para funções de variação limitada e $\dim X < \infty$. Ele usou uma integral equivalente a de Young. O método que utilizamos é diferente do que ele usou para resolver o problema. Apenas no caso de $K(t, s_+) = K(t, s)$ os métodos são semelhantes (veja [G]).

Nós demonstramos que a condição necessária e suficiente sobre K para que este pertença a S é que, para todo $t \in [a, b[$, $I_X - K(t_+, t)$ seja inversível (em $L(X)$). Além disso existe a série de Neumann quando $\|K(t_+, t)\| < 1$, para todo $t \in [a, b[$. Também mostramos que o resolvente é de variação limitada segundo Vitali.

2.2 -TEOREMA: seja $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$ satisfazendo $K(t, s_+) = K(t, s)$, para todo $t \in [a, b]$ e $s \in [a, b[$. Então

a) para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $K^{(n)} \in BV_0(\Gamma, L(X))$, onde para $a \leq s \leq t \leq b$, $K^{(1)}(t, s) = K(t, s)$, e para $n = 2, 3, \dots$

$$K^{(n)}(t, s) = \int_s^t d_\tau K(t, \tau) \circ K^{(n-1)}(\tau, s) = \int_s^t d_\tau K^{(n-1)}(t, \tau) \circ K(\tau, s);$$

mais ainda, para todo $n \in \mathbb{N}$; temos

$$V[K^{(n)}]^t \leq \frac{\psi_K(t)^n}{n!} = \frac{\nu_{[a, b] \times [a, t]}[K]^n}{n!}, \quad t \in [a, b],$$

e

$$V[K^{(n)}] \leq \frac{V[K]^n}{n!};$$

b) a série $\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}$ converge em $BV_0(\Gamma, L(X))$. Além disso

$$V[\Lambda] \leq e^{V[K]} - 1$$

e R , definido por $R(t,s) = I_X + \Lambda(t,s)$, satisfaz as equações (R^*) e (R_*) . Portanto $K \in S$.

PROVA: veja [G], teorema 1. □

2.3 - LEMA: seja $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$ satisfazendo

$$V_{[a,b] \times]a,b[}[K] < 1 \quad \text{e} \quad \|K(a_+, a)\| < 1.$$

Então existe $\delta > 0$ tal que

$$\max \left\{ \sup_{a < t < a+\delta} V_{[a,t]}[K^t], \sup_{a+\delta < t < b} V_{[a+\delta,t]}[K^t] \right\} < 1.$$

PROVA: sejam $\lambda = \|K(a_+, a)\|$ e $0 < \varepsilon < (1-\lambda)/3$. Sabemos que existem $\delta_0 > 0$ e $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = 0$ tais que

$$\|K(t, a) - K(a_+, a)\| < \varepsilon, \quad a < t < a + \delta_0$$

e

$$V_{[t_{j-1}, t_j] \times]t_{i-1}, t_i[}[K] < \varepsilon, \quad j, i = 1, \dots, |d|.$$

Seja $\delta = \min \{\delta_0, t_1 - t_0\}$. Se $a < t < a + \delta$, temos que

$$V_{[a,t]}[K^t] = V_{[a,t]}[K^t] + \|K(t, a) - K(t, a_+)\|.$$

Agora

$$V_{[a,t]}[K^t] \leq V_{[a,t_1] \times [a,t_1]}[K] < \epsilon,$$

$$\|K(t,s)\| \leq V_{[s,t]}[K^t] \leq V_{[a,t]}[K^t] < \epsilon, \text{ se } a < s < t,$$

o que implica em

$$\|K(a_+, a)\| \leq \epsilon$$

e como $\|K(t,a) - K(a_+,a)\| < \epsilon$, temos que

$$\|K(t,a)\| < \epsilon + \lambda.$$

Disto tudo segue-se que

$$V_{[a,t]}[K^t] < 3\epsilon + \lambda < 1, \text{ se } a < t < a+\delta$$

Finalmente, se $a+\delta < t < b$, obtemos que

$$V_{[a+\delta,t]}[K^t] \leq V_{[a,b] \times [a,b]}[K] < 1. \quad \square$$

2.4 - TEOREMA: seja $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$ tal que $\|K(t_+, t)\| < 1$, para todo $t \in [a, b[$. Então $K \in S$. Além disso

$$\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}$$

cónverge em $BV_0(\Gamma, L(X))$ e R , definido por $R(t,s) = I_X + \Lambda(t,s)$, é o resolvente de K .

PROVA: de acordo com o corolário 2.1.14 do lema 2.1.13 existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que, para todo $i = 1, \dots, |d|$,

$V_{[t_{i-1}, t_i] \times t_{i-1}, t_i}[K] < \epsilon$. Por hipótese, para todo $i=1, \dots, |d|$, $\|K(t_{i-1+}, t_{i-1})\| < 1$. Assim do lema 2.3 segue que $K \in G_0^{\sigma} \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$. O teorema 1.13 nos garante, então, que $K \in S$ e ainda

$$\sum_{n=1}^{\infty} SV^u[K^{(n)}] < \infty.$$

Como da proposição 2.1.17 temos que, para todo $n=1, 2, \dots$,

$$V[K^{(n)}] \leq V[K] SV^u[K^{(n-1)}],$$

segue-se que $\sum_{n=1}^{\infty} V[K^{(n)}] < \infty$, donde a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}$ converge em $BV_0(\Gamma, L(X))$. $\square$

2.5 - PROPOSIÇÃO: seja K como no teorema 2.2, então, $\|K(t_+, t)\| = 0$, para todo $t \in [a, b[$.

PROVA: dado $\epsilon > 0$, seja $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que

$$V_{[t_{i-1}, t_i] \times t_{i-1}, t_i}[K] < \epsilon, \text{ para todo } i=1, \dots, |d|.$$

Assim se $(t, s) \in [t_{i-1}, t_i] \times t_{i-1}, t_i[$, para algum $i \in \{1, \dots, |d|\}$, com $s \leq t$, temos que

$$\|K(t, s)\| \leq V_{[s, t]}[K^t] \leq V_{[t_{i-1}, t_i] \times t_{i-1}, t_i}[K] < \epsilon.$$

Seja $t \in [a, b[$. Se $t \in]t_{i-1}, t_i[$, para algum $i \in \{1, \dots, |d|\}$, então

$$\|K(t_+, t)\| = \lim_{h \downarrow 0} \|K(t+h, t)\| \leq \epsilon;$$

e se $t = t_i$, para algum $i \in \{0, \dots, |d|-1\}$, temos que

$$\begin{aligned} \|K(t_{i+}, t_i)\| &= \lim_{h \downarrow 0} \|K(t_i + h, t_i)\| = \lim_{h \downarrow 0} \|K(t_i + h, t_{i+})\| \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \lim_{s \downarrow t_i} \|K(t_i + h, s)\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue a proposição. $\square$

Esta proposição nos diz que os núcleos de variação limitada segundo Vitali que satisfazem as condições do teorema 2.2 também satisfazem as hipóteses do teorema 2.4.

2.6 - TEOREMA: seja $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$. Então

- a) existe apenas um subconjunto finito de pontos de $[a, b[$ para os quais $I_X - K(t_+, t)$ não é inversível;
- b) $K \in S$ se, e só se, para todo $t \in [a, b[$, o operador $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$).

PROVA: a) dado $0 < \epsilon < 1$, sabemos que existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que, para todo $i = 1, \dots, |d|$, $V_{[t_{i-1}, t_i] \times]t_{i-1}, t_i[} [K] < \epsilon$. Assim para cada $i = 1, \dots, |d|$ se $s < t$, temos

$$\|K(t, s)\| \leq V_{[t_{i-1}, t_i] \times]t_{i-1}, t_i[} [K].$$

Isto implica que, se $t \in [a, b[$ e $t \neq t_i$, para todo $i = 1, \dots, |d|$, $\|K(t_+, t)\| \leq \epsilon < 1$. Logo para todo $t \in [a, b[$ e $t \neq t_i$, para $i = 1, \dots, |d|$, existe $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$.

b) Seja $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ como em a). Definimos

$$\hat{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{se } s \neq t_i \\ 0, & \text{se } s = t_i, \end{cases}$$

temos, segundo o lema 2.1.8, que $\widehat{K} \in BV_0(\Gamma, L(X))$. E o resultado segue do lema 2.1, pois $\widehat{K}$ satisfaz as hipóteses do teorema 2.4. $\square$

2.7 - TEOREMA: seja $K \in BV_0(\Gamma, L(X)) \cap S$, então $REBV_I(\Gamma, L(X))$, onde R é o resolvente de K .

PROVA: sabemos que $REG_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e satisfaz (R^*) . Seja

$$\begin{aligned} H(t, s) &= \int_s^t \bullet d_\tau K(t, \tau) \circ R(\tau, s) = \\ &= \int_s^t \bullet d_\tau R(t, \tau) \circ [R(\tau, s) - I_X] - K(t, s), \end{aligned}$$

$a \leq s \leq t \leq b$.

Do teorema 2.1.7 temos que $V[H] \leq V[K]SV^u[R] + V[K]$. Onde, como R satisfaz (R^*) , segue-se que $REBV_I(\Gamma, L(X))$ e $V[R] \leq V[K]SV^u[R] + V[K]$. $\square$

B - EQUAÇÕES COM NÚCLEOS DE HINTON

Faremos o mesmo estudo da equação (K) , quando $K \in REG_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$. Estes núcleos foram tratados por Hinton [Hi], nesta equação usando a integral de Cauchy à esquerda. Observamos aqui que quando utilizamos a integral de Cauchy à esquerda, a desigualdade do lema 1.3.8 ainda é verdadeira sem a hipótese de h ser contínua à direita. Foi devido a este fato que Hinton mostrou que todos esses núcleos possuem um único resolvente, já que ele utilizou a integral de Cauchy à esquerda na

equação (K). Quando $K(t, s_+) = K(t, s)$ nós podemos utilizar um método semelhante ao dele, como mostra o teorema que segue.

2.8 - TEOREMA: seja $K \in G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$ satisfazendo, para todo $t \in [a, b]$ e $s \in [a, t[$, $K(t, s_+) = K(t, s)$. Então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K^{(n)}(t, s)\|$$

converge uniformemente e $\Lambda(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-)^{n+1} K^{(n)}(t, s)$ pertence

a $G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$, com $g_\Lambda(s) \leq g_K(s) \exp[g_K(b)]$, onde $s \in [a, b]$.

Além disso R, definido por $R(t, s) = I_X + \Lambda(t, s)$ satisfaz (R^*) e (R_*) . E assim $K \in S$.

PROVA: sabemos que, se $s \leq t$, $\|K(t, s)\| \leq g_K(t) - g_K(s)$. Suponhamos que para algum $n \geq 1$ tenhamos

$$\|K^{(n)}(t, s)\| \leq \frac{g_K(t)^n - g_K(s)^n}{n!}, \text{ se } s \leq t.$$

Então

$$\begin{aligned} \|K^{(n+1)}(t, s)\| &= \left\| \int_s^t \cdot d_\tau K(t, \tau) \circ K^{(n)}(\tau, s) \right\| \\ &\leq \int_s^t \cdot dV_{[s, \tau]}[K^t] \cdot \|K^{(n)}(\tau, s)\| \\ &\leq \int_s^t \cdot dg_K(\tau) \cdot \frac{g_K(\tau)^n - g_K(s)^n}{n!} \\ &\leq \frac{g_K(t)^{n+1} - g_K(s)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

(veja 1.3.7 e 2.2.3).

Daí para todo $s \leq t$, obtemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K^{(n)}(t,s)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_K(t)^n - g_K(s)^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_K(b)^n}{n!} < \infty.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \Lambda(t,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}(t,s) \\ &= K(t,s) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_s^t \cdot d_{\tau} K(t,\tau) \circ K^{(n-1)}(\tau,s) \\ &= K(t,s) - \int_s^t \cdot d_{\tau} K(t,\tau) \circ \left[\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n K^{(n-1)}(\tau,s) \right] \\ &= K(t,s) - \int_s^t \cdot d_{\tau} K(t,\tau) \circ \Lambda(\tau,s) \\ &= K(t,s) - \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t,\tau) \circ \Lambda(\tau,s), \text{ se } a \leq s \leq t \leq b. \end{aligned}$$

Donde, se $t \in [a,b]$ e $a \leq s_1 \leq s_2 \leq t$, temos que

$$\begin{aligned} \Lambda(t,s_2) - \Lambda(t,s_1) &= K(t,s_2) - K(t,s_1) + \\ &+ \int_a^t \cdot d_{\tau} K(t,\tau) \circ [\Lambda(\tau,s_2) - \Lambda(\tau,s_1)] \\ \implies \|\Lambda(t,s_2) - \Lambda(t,s_1)\| &\leq \|K(t,s_2) - K(t,s_1)\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\| \int_a^\sigma \cdot d_\tau K(t, \tau) \circ [\Lambda(\tau, s_2) - \Lambda(\tau, s_1)] \right\| \\
 & \leq \|K(t, s_2) - K(t, s_1)\| + \int_a^t dV_{[a, \tau]}[K^t] \cdot \|\Lambda(\tau, s_2) - \Lambda(\tau, s_1)\| \\
 & \leq g_K(s_2) - g_K(s_1) + \int_a^t dg_K(\tau) \cdot \|\Lambda(\tau, s_2) - \Lambda(\tau, s_1)\|
 \end{aligned}$$

e do lema 1.3.8 obtemos que

$$\begin{aligned}
 \|\Lambda(t, s_2) - \Lambda(t, s_1)\| & \leq [g_K(s_2) - g_K(s_1)] e^{g_K(t)} \\
 & \leq e^{g_K(b)} [g_K(s_2) - g_K(s_1)],
 \end{aligned}$$

Assim $\Lambda \in G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$, com $g_\Lambda(s) \leq g_K(s) \exp[g_K(b)]$, onde $s \in [a, b]$.

Observamos que, devido a convergência uniforme de $\sum_{n=1}^\infty \|K^{(n)}(t, s)\|$, temos, para todo $s \in [a, b]$, $g_{\Lambda_m}(s) \leq g_\Lambda(s)$, onde, para todo $m = 1, 2, \dots$, $\Lambda_m = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} K^{(n)}(t, s)$.

Finalmente, se $R(t, s) = I_X + \Lambda(t, s)$, temos que R satisfaz (R^*) e que também

$$\begin{aligned}
 \int_s^\sigma \cdot d_\tau R(t, \tau) \circ K(\tau, s) & = \int_s^\sigma \cdot d_\tau \Lambda(t, \tau) \circ K(\tau, s) \\
 & = \int_s^\sigma \cdot d_\tau \left[\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} K^{(n)}(t, \tau) \right] \circ K(\tau, s)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_s^t d_{\tau} K^{(n)}(t, \tau) \circ K(\tau, s)$$

$$= K(t, s) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}(t, s)$$

$$= K(t, s) - R(t, s) + I_X, \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

isto é, R também satisfaz (R_*) . □

2.9 - LEMA: seja $K \in G_0^{\sigma} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$ satisfazendo $K(t, a) = 0$, para todo $t \in [a, b]$ e $g_K(b_-) - g_K(a_+) < 1$. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$\max \left\{ \sup_{a < t < a+\delta} V_{[a, t]}[K^t], \sup_{a+\delta < t < b} V_{[a+\delta, t]}[K^t] \right\} < 1.$$

PROVA: dado $0 < \varepsilon < 1$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$g_K(a+\delta) - g_K(a_+) < \varepsilon/2.$$

Assim, se $a < t < a+\delta$, temos

$$V_{[a, t]}[K^t] = \|K(t, a_+)\| + V_{[a, t]}[K^t] \leq \|K(t, a_+)\|$$

$$+ g_K(t) - g_K(a_+) < \|K(t, s_+)\| + \varepsilon/2,$$

agora $\|K(t, s)\| \leq g_K(t) - g_K(s) < \varepsilon/2$, se $a < s < t < a+\delta$, e isto implica que $\|K(t, a)\| \leq \varepsilon/2$, se $a < t < a+\delta$. Donde

$$V_{[a, t]}[K^t] < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon < 1, \text{ se } a < t < a+\delta.$$

Finalmente, se $a+\delta < t < b$, então

$$V_{[a+\delta, t]}[K^t] \leq g_K(b_-) - g_K(a_+) < 1. \quad \square$$

2.10 - TEOREMA: seja $K \in G_0^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$. Então

a) existe apenas um subconjunto finito de pontos de $[a, b[$ para os quais $I_X - K(t_+, t)$ não é inversível;

b) $K \in S$ se, e só se, para todo $t \in [a, b[$, existe

$$[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X).$$

PROVA: dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que, para cada $i = 1, \dots, |d|$,

$$g_K(t_{i-}) - g_K(t_{i-1+}) < 1.$$

Definindo agora

$$\hat{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{se } s \neq t_i \\ 0, & \text{se } s = t_i \end{cases}$$

temos pelo lema 2.2.7 que $\hat{K} \in G_0^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$ e da sua demonstração segue que, para cada $i = 1, \dots, |d|$,

$$g_{\hat{K}}(t_{i-}) - g_{\hat{K}}(t_{i-1+}) < \varepsilon.$$

Usando agora o lema 2.9 obtemos que $\hat{K} \in G_0^\sigma \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$. Assim

a) segue do teorema 1.8 b) e b) segue do lema 2.1. $\square$

2.11 - TEOREMA: seja $K \in G_0^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X)) \cap S$, então $R \in G_I^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$, onde R é o resolvente de K .

PROVA: sabemos que $R \in G_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e satisfaz (R_*) . Seja

$$H(t,s) = \int_s^t d_\tau R(t,\tau) \circ K(\tau,s), \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

da proposição 2.2.12 segue que $H \in G_0^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X))$, com $g_H(s) \leq SV^u[R]g_K(s)$, para todo $s \in [a,b]$. E da equação (R_*) segue que $REG_I^\sigma \cdot BV^\leq(\Gamma, L(X,Y))$, com $g_R(s) \leq g_K(s) + SV^u[R]g_K(s)$, $s \in [a,b]$. $\square$

2.12 - OBSERVAÇÃO: não é difícil de demonstrar que os núcleos que satisfazem as hipóteses do teorema 2.8 são tais que $\|K(t_+, t)\| < 1$, para todo $t \in [a,b[$. E assim teríamos pelo teorema 2.10 que $K \in S$. Mas desta forma não obteríamos que

$$R(t,s) = I_X + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}(t,s),$$

nem que $g_K(s) \leq g_K(s) \exp[g_K(b)]$, $s \in [a,b]$ — observe que $g_A(s) = g_R(s)$, $s \in [a,b]$. $\square$

C - EQUAÇÃO COM NÚCLEO EM $G_0^{\Gamma} \cdot SV(\Gamma, L(X))$

Conforme os teoremas 1.5.4 e 1.5.10 temos que o espaço dos núcleos K tais que $K^0 \in G^\sigma([a,b], L(G_-([a,b], X), X))$ e $K(t,s) = 0$, se $s \geq t$, é o espaço onde tem sentido a equação (K). Obviamente este espaço contém os núcleos tais que $K^0 \in G([a,b], L(G_-([a,b], X), X))$ e $K(t,s) = 0$, se $s \geq t$, que é o espaço $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$. Como já dissemos, $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ contém todos aqueles núcleos que caracterizam os operadores integrais de Volterra-Stieltjes que são compactos. Isto justifica a importância de estudarmos a equação (K) com núcleo em

$$G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X)).$$

2.13 - LEMA: seja $K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ tal que $\|K(a_+, a)\| < 1$ e $w^\circ(K^\square) = \sup_{a < t', t < b} \|K^\square(t') - K^\square(t)\| < 1$. Então existe $\delta > 0$ tal que

$$\max \left\{ \sup_{a < t < a+\delta} SV_{[a, t]}[K^t], \sup_{a+\delta < t < b} SV_{[a+\delta, t]}[K^t] \right\} < 1.$$

PROVA: seja $\lambda = \|K(a_+, a)\| = SV[K^\square(a_+)]$. Dado $0 < \varepsilon < 1 - \lambda$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$SV[K^\square(t) - K^\square(a_+)] < \varepsilon, \text{ se } a < t < a + \delta_0$$

$$\implies SV[K^\square(t)] < \varepsilon + \lambda, \text{ se } a < t < a + \delta_0.$$

Como K é regradada temos que $K^\square(t_+) = K^\square(t)$, a menos de um conjunto enumerável. Seja, então, $a < t_0 < a + \delta_0$ tal que $K^\square(t_{0+}) = K^\square(t_0)$. Tomemos $\delta = t_0 - a > 0$. Temos que

$$\sup_{a < t < a+\delta} SV_{[a, t]}[K^t] = \sup_{a < t < a+\delta} SV[K^\square(t)] \leq \varepsilon + \lambda < 1$$

e

$$\sup_{a+\delta < t < b} SV_{[a+\delta, t]}[K^t] = \sup_{a+\delta < t < b} SV_{[t_0, t]}[K^\square(t) - K^\square(t_0)]$$

$$\leq \sup_{a+\delta < t < b} SV[K^\square(t) - K^\square(t_0)]$$

$$\leq w^\circ(K^\square) < 1. \quad \square$$

2.14 - TEOREMA: seja $K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ tal que $\|K(t_+, t)\| < 1$,

para todo $t \in [a, b[$. Então $K \in S$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|(K^{(n)})^\square\| < \infty$ e o resolvente

de K é dado por $R(t,s) = I_X + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K^{(n)}(t,s)$.

PROVA: sabemos que existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que $w^*(K^{\square}) < 1$. E como $\|K(t_{i-1}, t_i)\| < 1$, para todo $i = 1, \dots, |d|$, segue do lema 2.13 que $KEG_0^{\sigma} \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$. E o resultado segue do teorema 1.13, observando que $SV[K^{(n)}] = \|(K^{(n)})^{\square}\|$ (veja teorema 1.5.4 e o comentário que o segue, veja também a proposição 2.3.5). $\square$

Ressaltamos que o teorema que segue generaliza o item III do teorema 3.4 de [H-7]. Conforme o teorema 2.3.4, $G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ caracteriza os operadores (contínuos) causais que levam subconjuntos limitados de $G_-([a,b], X)$ em conjuntos equiregradados (teorema 10 de [H-5]). Por outro lado

$$K \in K(G_-([a,b], X), G([a,b], X))$$

se, e só se, para todo $B \subset G([a,b], X)$ limitado e $t \in [a,b]$, $k(B)$ é equiregrado e $\{(kf)(t) \mid f \in B\}$ é relativamente compacto em X (teorema 2 de [H-5]). Nossa generalização consiste em retirar esta última condição e mostrar que para os núcleos que caracterizam tais operadores, isto é, do espaço $G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ (teorema 2.3.4), então ocorre o item III do teorema 3.4 de [H-7]. Atentamos para o fato de Hönig já ter demonstrado que a equação (K) só poderia ter no máximo uma solução regrada quando $KEG_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ e existe, para todo $t \in [a,b[$, $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$ (veja a prova de III do teorema 3.4 de [H-7]). Assinalamos ainda que na prova do teorema que segue utilizamos um método di-

ferente do usado por Hönig em [H-7].

2.15 - TEOREMA: seja $K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$. Então

a) existe apenas um subconjunto finito de pontos de $[a, b]$ para os quais $I_X - K(t_+, t)$ não é inversível (em $L(X)$);

b) $K \in S$, se, e só se, para todo $t \in [a, b[$ existe

$$[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X).$$

PROVA: seja $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ tal que $w_d^*(K^\square) < 1/2$. Sabemos pelo lema 2.3.6 que

$$\hat{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{se } s \neq t_i \\ 0, & \text{se } s = t_i \end{cases}$$

pertence a $G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$. Mais ainda $w_i^*(\hat{K}_i^\square) < 1$, para todo $i = 1, \dots, |d|$, onde $\hat{K}_i = \hat{K}|_{[t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i]}$. Como $K(t_{i-1}^+, t_{i-1}) = 0$, para todo $i = 1, \dots, |d|$, segue do lema 2.13 que $\hat{K}$ satisfaz as hipóteses do teorema 1.13. Assim a) segue do teorema 1.8 b) e b) segue do lema 2.1. $\square$

2.16 - NOTAÇÃO: dado $K: \Gamma \longrightarrow L(X)$ e $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$, escrevemos para todo $i = 1, \dots, |d|$ $\Gamma_i = \{(t, s) \in \Gamma \mid t_{i-1} \leq s \leq t \leq t_i\}$ e $K_i = K|_{\Gamma_i}$. $\square$

2.17 - COROLÁRIO: seja $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ tal que exista $d \in \mathcal{D}_{[a, b]}$ para a qual $K_i \in G_0^\square \cdot SV^u(\Gamma_i, L(X))$, qualquer que seja $i = 1, \dots, |d|$. Então $K \in S$ se, e só se, existem, para todo $t \in [a, b[$, $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$.

PROVA: segue do teorema 2.15 e da propriedade 5) do teorema 1.8. $\square$

2.18 - COROLÁRIO: seja $A \in SV([a,b], L(X))$ tal que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{[t, t+\delta]}[A] = 0, \text{ para todo } t \in [a, b[,$$

e

$$\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{[t-\delta, t]}[A] = 0, \text{ para todo } t \in]a, b].$$

Então existe $REG_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ que satisfaz

$$(R^*) \quad R(t,s) = I_X + \int_s^t dA(\tau) \circ R(\tau,s), \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

e

$$(R_*) \quad R(t,s) \circ [I_X - A(s)] = R(t,a) \circ [I_X - A(a)] - \int_a^s d_\tau R(t,\tau) \circ A(\tau), \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

se, e somente se, para todo $t \in [a, b[,$ o operador $I_X - [A(t_+) - A(t)]$ é inversível (em $L(X)$).

PROVA: se definirmos

$$K(t,s) = \begin{cases} A(s) - A(t), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t \end{cases}$$

teremos que $SV[K^t] = SV_{[a,t]}[A] \leq SV[A]$ e devido às hipóteses sobre A segue que $K^\square$ é regrada. Assim $K \in S$ se, e somente se, para todo $t \in [a, b[,$ existe $[I_X - K(t_+, t)] = [I_X + [A(t_+) - A(t)]]^{-1} \in L(X)$. O resultado segue do teorema 1.8. $\square$

2.19 - COMENTÁRIOS: Hönig mostrou em [H-7], teorema 4.3, que as hipóteses feitas sobre A no corolário anterior são também necessárias para que $K^\square$ seja regrada.

b) O teorema 3.a.2 de [R] nos diz que

$$SV([a,b],L(X,Y)) \subset G([a,b],L(X,Y))$$

se, e só se, Y não contém um subespaço isomorfo a $c_0(N)$. Por outro lado demonstramos que $SV_{a,a}([a,b] \times [a,b], L(X))$ é isométrico a $SV_a([a,b], L(G_-([a,b], X), X))$ (teorema 2.1.7) e se escrevermos

$$SV_0(\Gamma, L(X)) = \{KESV_*([a,b] \times [a,b], L(X)) \mid K(t,s) = 0, s \leq t\},$$

mostra-se que temos $K^0 \in SV([a,b], L(G_-([a,b], X), X))$, quando $KESV_0(\Gamma, L(X))$, e ainda temos que $SV[K^0] = SV[K]$. A demonstração deste fato é análoga à prova do teorema 2.1.7. Se X não contiver um subespaço isomorfo a $c_0(N)$, temos que

$$K^0 \in G([a,b], L(G_-([a,b], X), X)), \text{ isto é, } KEG_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X)). \quad \square$$

2.20 - COROLÁRIO: seja X um espaço que não contém um subespaço isomorfo a $c_0(N)$ e seja $KESV_0(\Gamma, L(X))$. Então KES se, e só se, para todo $t \in [a, b[$, $I_X - K(t_+, t)$ é inversível (em $L(X)$).

PROVA: segue do comentário anterior e do teorema 2.15. $\square$

2.21 - TEOREMA: seja $KEG_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X)) \cap S$, então $REG_I^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$, onde R é o resolvente de K .

PROVA: da hipótese segue que $REG_I^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ satisfaz (R^*) .

Seja

$$H(t,s) = \int_s^\sigma d_\tau K(t,\tau) \circ R(\tau,s) = \int_a^\sigma d_\tau K(t,\tau) \circ [R(\tau,s) - I_X] - K(t,s),$$

$$a \leq s \leq t \leq b,$$

da proposição 2.3.7 temos que $H \in G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$, com $\|H^{\square}\| \leq SV^u[R]\|K^{\square}\| + \|K^{\square}\|$. Como R satisfaz (R^*) obtemos que $R \in G_0^{\square} \cdot SV_I(\Gamma, L(X))$ e ainda $\|R^{\square}\| \leq SV^u[R]\|K^{\square}\| + \|K^{\square}\|$. $\square$

3 - OPERADORES DE FREDHOLM

Quando $K \in G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ e existem $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$, para todo $t \in [a, b[$, Hönig mostrou que a equação (K) possui no máximo uma solução regradada (veja a prova de III do teorema 3.4 de [H-7]). Usando outro método, demonstramos que esta equação possui sempre uma e uma só solução regradada. Focalizando o operador $k \in L(G([a, b], X))$ definido, para todo $y \in G([a, b], X)$, por

$$(ky)(t) = \int_a^t d_{\tau} K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad a \leq t \leq b,$$

então o que Hönig mostrou foi que o $N(I+k) = \{0\}$. Nós demonstramos não somente isto como também que $I(I+k) = G([a, b], X)$. Este fato juntamente com o lema 1.19 sugere uma relação entre os operadores definidos por núcleos de $G_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ com os operadores de Fredholm. De fato vamos ver que esta relação é expressa pelo teorema 3.7.

3.1 - DEFINIÇÃO: seja $U \in L(X, Y)$ tal que

$$\dim N(U) < \infty$$

e

$$\text{codim } I(U) < \infty.$$

Dizemos neste caso que U é um operador de Fredholm e indicamos

$UEF(X,Y)$. Definimos ainda o índice deste operador por

$$\text{ind}(U) = \dim N(U) - \text{codim } I(U).$$

Escrevemos $F(X) = F(X,X)$. □

Segue da teoria de Riesz para operadores compactos que se $h \in K(X)$, então $I_X + h \in F(X)$, com $\text{ind}(I_X + h) = 0$. Para o estudo da teoria geral de operadores de Fredholm veja [Pa] e [S], capítulo V.

3.2 - OBSERVAÇÃO: quando $\text{codim } I(U) < \infty$, onde $U \in L(X,Y)$, prova-se que $I(U)$ é um subespaço fechado de Y , (veja [Pa], teorema 1 do capítulo VII). Assim $Y/I(U)$ é um espaço de Banach e $\text{codim } I(U) = \dim Y/I(U)$. Concluimos que se no lema 1.17 tivermos espaço de Banach e duas dentre as aplicações h' , h e h'' forem de Fredholm, então a terceira também o é, e temos

$$\text{ind}(h) = \text{ind}(h') + \text{ind}(h'').$$

□

Daremos agora algumas definições e fixaremos a notação que usaremos neste capítulo.

3.3 - DEFINIÇÕES: sejam $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$ e $[c,d] \subset [a,b]$

a) Dizemos que $f \in G_d([c,d[, X)$ se, e só se, para todo $\epsilon > 0$, $f \in G([c, d-\epsilon], X)$, e existe $f(d_-) = \lim_{t \uparrow d} f(t)$. Isto é equivalente a dizer que, para cada $x \in X$, f_x definida por $f_x(t) = f(t)$, se $c \leq t < d$, e $f_x(d) = x$, pertence a $G([c,d], X)$.

Não é difícil de ver que $G_d([c,d[, X)$ é isométrico ao subespaço $\{f \in G([c,d], X) \mid f(d) = 0\}$ de $G([c,d], X)$. Logo $G_d([c,d[, X)$ é um espaço de Banach quando munido da norma $f \mapsto \sup_{c \leq t < d} \|f(t)\|$.

Também, dado $c \in]a, b[$, temos que $G([a, b], X)$ é isomorfo a

$$G_c([a, c[, X) \oplus G([c, b], X).$$

b) Notamos por $k_{c,d}$ o operador de $L(G([c, d], X))$ definido, para todo $y \in G([c, d], X)$, por

$$(k_{c,d}y)(t) = \int_c^t \bullet d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad c \leq t \leq d.$$

Escrevemos apenas k ao invés de $k_{a,b}$.

Notamos ainda o operador $k_{c,d}^* \in L(G_d([c, d], X))$ definido, para todo $y \in G_d([c, d], X)$, por

$$(k_{c,d}^*y)(t) = \int_c^t \bullet d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau), \quad c \leq t < d.$$

Também escrevemos k^* no lugar de $k_{a,b}^*$. Observamos que, para todo $x', x'' \in X$, temos

$$\int_c^d \bullet d_\tau K(d, \tau) \cdot y_{x'}(\tau) = \int_c^d \bullet d_\tau K(d, \tau) \cdot y_{x''}(\tau)$$

e assim quando escrevemos $\int_c^d \bullet d_\tau K(d, \tau) \cdot y(\tau)$ estamos nos referindo a este valor.

Finalmente dado $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$, escrevemos $k_i = k_{t_i, t_{i+1}}$ e $k_i^* = k_{t_i, t_{i+1}}^*$, para todo $i = 1, \dots, |d|-1$. $\square$

3.4 - LEMA: seja $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$,

a) a aplicação

$$\mu: y \in N(I+k) \longmapsto y|_{[a, b[} \in N(I+k^*)$$

é um isomorfismo;

b) $f \in I(I+k)$ se, e só se, $f|_{[a,b[} \in I(I+k^\circ)$;

c) $I(I+k)$ é fechado se, e só se, $I(I+k^\circ)$ é fechado; mais ainda: a aplicação

$$v: G([a,b], X) / I(I+k) \longrightarrow G_b([a,b[, X) / I(I+k^\circ)$$

$$f + I(I+k) \longmapsto f|_{[a,b[} + I(I+k^\circ)$$

é um isomorfismo.

PROVA: a) segue de que $y \in N(I+k)$ se, e só se, $y|_{[a,b[} \in N(I+k^\circ)$ e $y(b) = - \int_a^b d_\tau K(b, \tau) \cdot y(\tau)$.

b) Seja $f \in G([a,b], X)$ tal que $f|_{[a,b[} \in I(I+k^\circ)$. Então existe $y \in G_b([a,b[, X)$ satisfazendo

$$y(t) + \int_a^t d_\tau K(t, \tau) \cdot y(\tau) = f(t), \quad a \leq t < b;$$

definimos $\hat{y}(t) = y(t)$, se $a \leq t < b$, e $\hat{y}(b) = f(b) - \int_a^b d_\tau K(b, \tau) \cdot y(\tau)$.

Então

$$\hat{y}(t) + \int_a^t d_\tau K(t, \tau) \cdot \hat{y}(\tau) = f(t), \quad a \leq t \leq b,$$

isto é, $f \in I(I+k)$. A recíproca é trivial.

c) a primeira parte segue imediatamente de b).

Finalmente de b) temos que a aplicação v está bem definida e é bijetiva, v é obviamente linear e temos ainda que

$$\begin{aligned} d(f|_{[a,c[}, I(I+k^*)) &= \inf \left\{ \|f|_{[a,c[} - g|_{[a,c[}\| \mid g \in I(I+k) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \|f-g\| \mid g \in I(I+k) \right\} \\ &= d(f, I(I+k)). \end{aligned}$$

O resultado segue do teorema da aplicação aberta. $\square$

3.5 - LEMA: seja $K \in G_0^\sigma \cdot SV(\Gamma, L(X))$. Se existe $c \in]a, b[$ tal que $I+k_{a,c}$ e $I+k_{c,b}$ são operadores de Fredholm, então

$$I+k \in F(G([a,b], X))$$

com

$$\text{ind}(I+k) = \text{ind}(I+k_{a,c}) + \text{ind}(I+k_{c,b}).$$

PROVA: segue do lema 3.4 que $I+k_{a,c}$ é um operador de Fredholm se, e só se, $I+k_{a,c}^*$ é um operador de Fredholm. Além disso $\text{ind}(I+k_{a,c}) = \text{ind}(I+k_{a,c}^*)$.

Observamos agora que a seqüência

$$0 \longrightarrow G([a,b], X) \xrightarrow{i} G([a,b], X) \xrightarrow{p} G_c([a,c[, X) \longrightarrow 0$$

é exata, onde

$$(if)(t) = \begin{cases} 0 & , a \leq t < c \\ f(t) & , c \leq t \leq b, \end{cases}$$

se $f \in G([c,b], X)$, e $pf = f|_{[a,c[}$, se $f \in G([a,b], X)$. Além disso o

diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & G([c,d],X) & \xrightarrow{i} & G([a,b],X) & \xrightarrow{p} & G_c([a,c],X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow I+k_{c,b} & & \downarrow I+k & & \downarrow I+k_{a,c}^* \\
 0 & \longrightarrow & G([c,b],X) & \xrightarrow{i} & G([a,b],X) & \xrightarrow{p} & G_c([a,c],X) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

comuta. E o resultado segue do lema da serpente (lema 1.17).
 Veja também a observação 3.2. $\square$

3.6 - LEMA: sejam $K \in G_0^\sigma \cdot SV^u(r, L(X))$ e $\hat{K} \in S$ tais que existe $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ satisfazendo

$$(K - \hat{K})(t, s) = 0, \text{ se } s \neq t_i, \quad i = 0, \dots, |d|.$$

Se, para todo $i = 0, \dots, |d|-1$, $I_X - K(t_i^+, t_i) \in F(X)$, então $I+k \in F(G([a,b],X))$ com

$$\text{ind}(I+k) = \sum_{i=0}^{|d|-1} \text{ind}(I_X - K(t_i^+, t_i)).$$

PROVA: dos lemas 1.17 e 3.4 temos para todo $i=0, \dots, |d|-1$ que $I+k_i$ e $I+k_i^*$ são operadores de Fredholm

$$\text{ind}(I+k_i) = \text{ind}(I_X - K(t_i^+, t_i)) = \text{ind}(I+k_i^*).$$

Usando o lema 3.5 obtemos que $I+k_{a,t_2}$ é um operador de Fredholm com

$$\text{ind}(I+k_{a,t_2}) = \text{ind}(I_X - K(t_0^+, t_0)) + \text{ind}(I_X - K(t_1^+, t_1)).$$

O resultado segue por indução usando os lemas 3.4 e 3.5. $\square$

3.7 - TEOREMA:

- a) se $KEG_0^{\square} \cdot SV(\Gamma, L(X))$ e para todo $t \in [a, b[$ $I_X^{-K}(t_+, t) \in F(X)$,
então $I+k \in F(G([a, b], X))$;
- b) se $KEG_0^{\square} \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$ e para todo $t \in [a, b[$ $I_X^{-K}(t_+, t) \in F(X)$,
então $I+k \in F(G([a, b], X))$;
- c) se $KEBV_0(\Gamma, L(X))$ e para todo $t \in [a, b[$ $I_X^{-K}(t_+, t) \in F(X)$,
então $I+k \in F(G([a, b], X))$.

Mais ainda, em todos os casos temos

$$\text{ind}(I+k) = \sum_{a \leq t < b} \text{ind}(I_X^{-K}(t_+, t)),$$

sendo esta soma finita.

PROVA: a), b) e c) seguem do lema 3.6 e dos teoremas 2.15, 2.10 e 2.6, respectivamente. $\square$

3.8 - COROLÁRIO: seja $A \in SV([a, b], L(X))$ satisfazendo

$$\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{[t, t+\delta]}[A] = 0, \text{ para todo } t \in [a, b[,$$

e

$$\lim_{\delta \downarrow 0} SV_{[t-\delta, t]}[A] = 0, \text{ para todo } t \in]a, b].$$

Se para cada $t \in [a, b[$ $I_X - [A(t_+) - A(t)] \in F(X)$, então $I+k_A \in F(G([a, b], X))$, onde k_A é o operador de $L(G([a, b], X))$ definido pelo núcleo K dado por

$$K(t,s) = \begin{cases} A(s)-A(t), & \text{se } s \leq t \\ 0 & , \text{ se } s > t \end{cases}$$

e portanto $(k_A y)(t) = \int_a^t dA(\tau) \cdot y(\tau)$. Além disso

$$\text{ind}(I+k_A) = \sum_{a \leq t < b} \text{ind}\{I_X + [A(t_+) - A(t)]\},$$

sendo esta soma finita.

PROVA: segue do teorema 3.7 e do corolário 2.18. $\square$

3.9 - COROLÁRIO: seja X um espaço que não contém um subespaço isomorfo a $c_0(N)$. Se $K \in BV_0(\Gamma, L(X))$ e $I_X - K(t_+, t) \in F(X)$, para todo $t \in [a, b[$, então $I+k \in F(G([a, b], X))$ com

$$\text{ind}(I+k) = \sum_{a \leq t < b} \text{ind}(I_X - K(t_+, t)),$$

sendo esta soma finita.

PROVA: segue do teorema 3.7 e do corolário 2.20. $\square$

3.10 - COMENTÁRIO: a) se $K \in G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$ e para qualquer $t \in [a, b[$ existe $[I_X - K(t_+, t)]^{-1} \in L(X)$, então do teorema 3.7 obtemos que para cada $c \in [a, b]$ $\text{ind}(I+k_{a,c}) = 0$. E como Hönig mostrou que para todo $c \in [a, b]$ $N(I+k_{a,c}) = \{0\}$ segue-se também que $I(I+k_{a,c}) = G([a, c], X)$. Assim para todo $c \in [a, b]$ o operador $I+k_{a,c}$ é inversível (em $G([a, c], X)$).

Finalmente usando o teorema 1.8 obtemos uma nova demonstração do teorema 2.15.

b) Sejam K e $d: a = t_0 < \dots < t_{|d|} = b$ como no lema 3.6. Ob-

servamos que o $\text{ind}(I+k)$ depende apenas do comportamento do núcleo K no conjunto

$$\Gamma \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{|d|} [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \right\}.$$

Porém para que ocorram as igualdades

$$\dim N(I+k) = \sum_{i=0}^{|d|-1} \dim N(I_X - K(t_{i+}, t_i))$$

e

$$\text{codim } L(I+k) = \sum_{i=0}^{|d|-1} \text{codim } L(I_X - K(t_{i+}, t_i))$$

é necessário um comportamento particular de K no conjunto

$$\Gamma \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^{|d|} [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \right\}$$

Daremos a seguir dois núcleos em $BV_0(\Gamma, L(\mathbb{R}))$ (e assim satisfazem as hipóteses do lema 3.6) os quais coincidem em

$$\Gamma \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^{|d|} [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \right\}$$

mas que diferem em

$$\Gamma \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^{|d|} [t_{i-1}, t_i] \times [t_{i-1}, t_i] \right\}.$$

Apenas um deles satisfaz as igualdades acima. Isto exemplifica nossa observação.

□

3.11 - EXEMPLOS: a) seja

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & (t,s) \in]0, \frac{1}{2}] \times \{0\} \cup]\frac{1}{2}, 1] \times]0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(com $0 \leq s, t \leq 1$). Temos, para toda $y \in G([a,b], X)$, que

$$(ky)(t) = \begin{cases} -y(0_+), & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -y(\frac{1}{2}_+) + y(0_+), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \text{ ou } t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dai segue que $y \in N(I+k)$ se, e só se,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Assim

$$\dim N(I+k) = \dim N(1-K(0_+, 0)) = \dim N(1-K(\frac{1}{2}_+, \frac{1}{2})) = 1.$$

Também é fácil de ver que $f \in I(I+k)$ se, e só se, $f(0_+) = 0$. Donde

$$\text{codim } I(I+k) = \text{codim } I(1-K(0_+, 0)) = \text{codim } I(1-K(\frac{1}{2}_+, \frac{1}{2})) = 1.$$

b) Seja

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & (t,s) \in]0, \frac{1}{2}] \times \{0\} \cup]\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que, para todo $y \in G([a, b], X)$,

$$(ky)(t) = \begin{cases} -y(0_+), & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -y(\frac{1}{2}_+), & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0, & t=0 \text{ ou } t=1. \end{cases}$$

Assim $y \in N(I+k)$ se, e só se,

$$y(t) = \begin{cases} x_0, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ x_1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0, & t=0 \text{ ou } t=1, \end{cases}$$

onde $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Logo

$$\dim N(I+k) = 2 = \dim N(1-K(0_+, 0)) + \dim N(1-K(\frac{1}{2}_+, \frac{1}{2})).$$

Dessa igualdade e do teorema 2.8 segue que

$$\text{codim } I(I+k) = \text{codim } I(1-K(0_+, 0)) + \text{codim } I(1-K(\frac{1}{2}_+, \frac{1}{2})). \quad \square$$

BIBLIOGRAFIA

- [A] - Arbex, S.E., *Equações integrais de Volterra-Stieltjes com núcleos descontínuos*, São Paulo, 1976, 77p., Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- [A-M] - Atiyah, M. & MacDonald, I.G., *Introduction to commutative algebra*, Reading, Addison-Wesley, 1969, 128p.
- [C-A] - Clarkson, J.R. & Adams, C.R., On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35: 824-834, 1933.
- [G] - Gomes Neto, J.B.F., Equação integral de Volterra-Stieltjes com núcleos de variação limitada segundo Vitali, in: *Seminário Brasileiro de Análise*, 89, Brasília, 1978, p. 262-276.
- [Hd] - Hildebrandt, T.H., *Introduction to the theory of integration*, New York, Academic Press, 1963, 385p. (Pure and Applied Mathematics, 13).
- [Hi] - Hinton, D.B., A Stieltjes Volterra integral equation theory, *Canad. J. Math.*, 18: 314-331, 1966.
- [H-1] - Hönl, C.S., *The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to linear differential equations with generalized boundary conditions*, São Paulo, IME-USP, 1973, 135p. (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Serie Matemática, 1).
- [H-2] - Hönl, C.S., *Volterra Stieltjes - integral equations: functional methods, linear constraints*, Amsterdam, North-Holland, 1975, 157p. (North-Holland and Mathematics Studies, 16).

- [H-3] - Hönig, C.S., The Dirichlet and substitution formulas for Riemann-Stieltjes integrals in Banach spaces, in: Figueiredo, D.G., ed. *Functional analysis: proceedings of the Brazilian Mathematical Society Symposium, Campinas, 1974*, New York, Marcel Dekker, 1976, p.135-189, (Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, 18).
- [H-4] - Hönig, C.S., *A survey on Volterra-Stieltjes integral equations*, São Paulo, IME-USP, 1977, 118 p., Trabalho apresentado à Escola de Análise, São Paulo, 1977.
- [H-5] - Hönig, C.S., Fredholm Stieltjes-integral equation I, in: ESCUELA LATINO AMERICANA DE MATEMATICA, 4^a, Lima, 1978, *Actas*, Lima, s.c.p., 1979, p. 126-160.
- [H-6] - Hönig, C.S., The resolvent of a linear Stieltjes integro-differential equation. A aparecer.
- [H-7] - Hönig, C.S., *Volterra-Stieltjes-integral equation*. A aparecer.
- [Pa] - Palais, R.S., Fredholm operators, in: *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, Princeton, University Press, 1965, p.119-124. (Annals of Mathematics Studies, 57).
- [P] - Prandini, J.C., *Funções de semi-variação limitada de mais de uma variável*, São Paulo, 1978, 42p. Dissertação de Mestrado, IME USP.
- [R] - Rocha Filho, G.C., *Integral de Riemann vetorial e geometria de espaços de Banach*, São Paulo, 1979, 125p., Tese de Doutorado, IME-USP.
- [S] - Schechter, M., *Principles of functional analysis*, New York, Academic Press, 1971, 383p.
- [S-1] - Schwabik, S., On an integral operator in the space with bounded variation, *Časopis Pěst. Mat.*, 97, p. 297-330, 1972.
- [S-2] - Schwabik, S., On Volterra-Stieltjes integral equations, *Časopis Pěst. Mat.*, 99, p. 225-278, 1974.

[S-3] - Schwabik, S., Note on Volterra-Stieltjes integral equation, *Časopis Pěst. Mat.*, 102, p. 275-279, 1977.

[S-T-V] - Schwabik, S.; Tvrđy, M. & Vejvoda, O., *Differential and integral equation*, Praha, Academic Praha, 1979.

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$[a,b],]a,b[, \text{ etc.}$	xii	F_K	11, 14, 22
$BV([a,b])$	3	$f(t_+)$	xii
$BV([a,b],X)$	3	$f(t_-)$	xii
$BV_{t_0}([a,b])$	3	$f(t_+)$	1
$BV_{t_0}([a,b],X)$	3	$f(t_-)$	1
$BV([c,d] \times [a,b],X)$	30	f_x	85
$BV_*([c,d] \times [a,b],X)$	30	$f \cdot x$	1
$BV_{c,a}([c,d] \times [a,b],X)$	30	$F(X)$	85
$BV_0(\Gamma, L(X,Y))$	31	$F(X,Y)$	85
$BV_I(\Gamma, L(X))$	31	$F _E$	xii
$\mathbb{E}$	xii	ψ_K	32
$c(d,K)$	55	g_K	35
$c_0(J)$	xiii	$G([a,b])$	1
$c_0(J,K)$	xiii	$G([a,b],X)$	1
$C(h)$	56	$\tilde{G}([a,b],X)$	2
$\mathcal{D}$	xiii	$G_-([a,b],X)$	2
$\mathcal{D}_{[a,b]}$	xiii	$G_d([c,d],X)$	85
$ d $	xiii	$G^\sigma([a,b], L(X,Y))$	1
Δd	xiii	$\tilde{G}^\sigma([a,b], L(X,Y))$	2
$d'' \geq d'$	xiii	$G_-^\sigma([a,b], L(X,Y))$	2
$\delta \uparrow \delta_0$	xii	$G^{(\sigma, \cdot)}(\Gamma, L(X))$	51
$\delta \downarrow \delta_0$	xii	$G^\sigma \cdot BV^{\leq}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$	37
f_-	2	$G^\sigma \cdot BV_a^{\leq}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$	37
f_+	2	$G^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X,Y))$	41
$\ f\ $	3	$G_0^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X,Y))$	41
F_α	7, 10	$G_I^\sigma \cdot BV^{\leq}(\Gamma, L(X))$	41

$G \cdot BV^u([c, d] \times [a, b])$	13	(K)	49
$G \cdot BV_a^u([c, d] \times [a, b])$	13	(K_c^d)	50
$G^\sigma \cdot SV^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$	13	k	17, 22, 49, 84
$G^\sigma \cdot SV_a^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$	13	k^*	86
$G^\sigma \cdot SV_b^u([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$	43	k_i	86
$G_\Delta^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$	16	k_i^*	86
$G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$	16	$k_{c, d}$	86
$G_\Delta^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$	16	$k_{c, d}^*$	86
$G_\Delta^\sigma \cdot SV_a^u(\Gamma, L(X, Y))$	16	$K(X)$	xii
$G_0^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X, Y))$	17	$K(X, Y)$	xii
$G_0^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X, Y))$	17	lim	xiii
$G_1^\sigma \cdot SV^u([a, b] \times [a, b], L(X))$	17	$d \in \mathcal{D}$	
$G_1^\sigma \cdot SV^u(\Gamma, L(X))$	17	lim	xiii
$G_0^\sigma \cdot SV^{\leq 1}(\Gamma, L(X))$	55	$\Delta d \rightarrow 0$	
$G^\square \cdot SV_b([c, d] \times [a, b], L(X, Y))$	43	lim	xii
$G_0^\square \cdot SV(\Gamma, L(X, Y))$	43	$t \rightarrow s$	
$G_1^\square \cdot SV(\Gamma, L(X))$	43	$L(X)$	xii
Γ	xiv	$L(X, Y)$	xii
Γ_i	81	$L(E, F)$	56
I	xii	$\mathbb{N}$	xii
I	17, 54	$N(h)$	xii
I_X	xii	$\mathbb{R}$	xii
$I(h)$	xii	$\mathbb{R}_+$	xii
$\text{ind}(U)$	85	(R^*)	50, 53, 82
$\mathbb{K}$	xii	(R_*)	53, 82
$\tilde{K}$	xiii	(ρ)	51
K_Δ	xiii	(ρ_c^d)	53
K_i	81	S	54
K_S	xiii	$SV[\alpha]$	3
K^t	xiii	$SV_{[a, b]}[\alpha]$	3
K^o	14, 25	$SV_{[a, b]}[\alpha]$	3
$K^\square$	14	$SV_{[a, b]}[\alpha]$	4
$K^{(n)}$	21, 67	$SV_{[a, b]}[\alpha]$	4
K_{ji}	23	$SV_d[\alpha]$	3
		$SV^u[K]$	13

$SV[K]$	23	$V_{[a,b][\alpha]}$	4
$SV_{[c,d] \times [a,b]} [K]$	23	$V_d[\alpha]$	3
$SV_{d'' \times d'} [K]$	23	$V[K]$	30
$SV([a,b], L(X,Y))$	3	$V_{[c,d] \times [a,b]} [K]$	30
$SV_{t_0}([a,b], L(X,Y))$	3	$V_{[c,d] \times [a,b]} [K]$	30
$SV([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$	23	$V_{[c,d] \times [a,b]} [K]$	31
$SV_*([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$	24	$V_{[c,d] \times [a,b]} [K]$	31
$SV_{c,a}([c,d] \times [a,b], L(X,Y))$	24	$V_{d'' \times d'} [K]$	30
$V[\alpha]$	3	$w_d^*(f)$	xiii
$V_{[a,b][\alpha]}$	3	$w_i^*(f)$	xiii
$V_{[a,b][\alpha]}$	3	X'	xii
$V_{[a,b][\alpha]}$	4	X_E	xii
$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \cdot f(t)$	5	$\int_a^b d\alpha(t) \cdot f(t)$	6
$\int_a^b \cdot d\alpha(t) \circ f(t)$	5	$\int_a^b d\alpha(t) \circ f(t)$	6
$\sigma \int_a^b \cdot d(t) \circ f(t)$	6	$\sigma \int_a^b d\alpha(t) \circ f(t)$	6