TEORIA DE MORSE EM
VARIEDADES DE BANACH

CLAUDIO POSSANI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. Mario Barone Júnior

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do
CNPq e FINEP.

- SÃO PAULO, OUTUBRO DE 1979 -

À Teresa,

com carinho

E R R A T A

Linha	Onde se lê:	Leia-se:
†7	$2 \leq r \leq \infty$	$3 \leq r \leq \infty$
†1	$= H_p f(u, DV_p(v)),$	$= H_p f(u, DV_p(v)),$
†4	$\forall q \in \emptyset,$	$\forall q \in \emptyset,$
†7	vizinhança 0 e p	vizinhança 0 de p
†1	$(H_0 f)$	$(H_p f)_\#$
†2,4,11,12	$(H_p f)$	$(H_p f)_\#$
†8	$H_p f \dots \dots \forall u \in F\}$	$H_p f \dots \dots \forall u \in F, u \neq 0\}$
†5	$Gl) \text{ df } (X_p) > 0, \dots$	$Gl) \text{ df } (X_p) \geq 0, \dots$
†7	$\dots \geq \rho v_* $	$\dots \geq \rho v_+ $
†5	$M^b \approx M^{\lambda-\varepsilon}_n (D_\eta \times D_\xi)$	$M^b \approx M^{\lambda-\varepsilon}_u (D_\eta \times D_\xi)$
†2	...de índice m com M_a^b ...	...de índice m em M_a^b ...
†3	Então o para...	Então o par...
	Acrescentar	$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mathbb{C}_m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m R_m = \chi(M^b, M^a)$
†9	...a componente de	...a componente da identidade de
†5	$= \{T \in GL(E) \mid T + (1-t)I \in GL(E), \dots$	$= \{T \in GL(E) \mid tT + (1-t)I \in GL(E), \dots$
†10	que $f^{-1}(0) \subset B^0$	que $f^{-1}(0) \subset B^0$
†6 e 13	$\forall X(p) \in GL_{\mathbb{C}}(T_p M)$	$\forall X(p) \in GL_{\mathbb{C}}(T_p M)$
†5	$\forall X(p) \in GL_{\mathbb{C}}(T_p M)$	$\forall X(p) \in GL_{\mathbb{C}}(T_p M)$
†1	Seja $\phi: U' \longrightarrow U$	Seja $\phi: U' \longrightarrow E$
†3	$\phi(U') = B_r \dots$ é a bola de raio	$B_r \subset \phi(U'), \dots,$ é bola fechada de raio
†6	$\dots \lambda \neq 1 \ (\lambda+1) \text{ é } \dots$	$\dots \lambda \neq 1 \ (\lambda-1) \text{ é } \dots$
†6	$F_i = (\lambda_i I + \mathbb{C})^{n_i}$	$F_i = \text{Ker}(\lambda_i I + \mathbb{C})^{n_i}$
†9	$\dots = (I + \mathbb{C}) _{T_p M_+} \text{ é } \dots$	$\dots = (I + t\mathbb{C}) _{T_p M_+} \text{ e } \dots$

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	vii
Cap. 1 - O TEOREMA FUNDAMENTAL	1
§1 - Teoria de Morse: Resultados Clássicos.	5
§2 - Pontos Críticos B-não-Degenerados.	15
§3 - Variedades de Finsler.	29
§4 - Campos Pseudo-Gradientes	35
§5 - Uma Norma Especial em E.	43
§6 - Teorema de Morse em Variedades de Banach	51
Cap. 2 - O TEOREMA DE EULER-HOPF	63
§1 - Preliminares de Análise Funcional.	67
§2 - O Grau de Brower de uma Aplicação de Fredholm.	75
§3 - Campos de Rothe e Campos de Palais-Smale.	83
§4 - O Teorema de Euler-Hopf.	89
BIBLIOGRAFIA	93

INTRODUÇÃO

O objetivo central deste trabalho é expor o artigo "A General Approach to Morse Theory" de A.J.Tromba [16], onde o autor generaliza para o contexto de variedades de Banach alguns resultados clássicos da Teoria de Morse em variedades de dimensão finita e em variedades de Hilbert. Esta exposição é feita no capítulo 1.

No parágrafo 1 desse capítulo expomos, de maneira resumida, os resultados clássicos da Teoria de Morse e destacamos aqueles aspectos da teoria que motivaram a generalização que exporemos neste trabalho. No parágrafo 2 abordamos uma das maiores dificuldades que se enfrenta quando se tenta generalizar esta teoria para variedades de Banach: a noção de ponto crítico não degenerado. As condições que são impostas nesta definição são motivadas por algumas propriedades do campo gradiente de uma função f definida numa variedade de Hilbert.

No parágrafo 3 se introduz a noção de variedades de Finsler que será utilizada no parágrafo seguinte no estudo da noção de campos pseudo-gradientes para uma função f . A existência de um campo pseudo-gradiente permite que se deforme variedades ao longo de suas linhas integrais.

A seguir, no parágrafo 5, é feita, no espaço de Banach E onde a variedade está modelada, a construção de uma norma especial cujas propriedades terão um papel essencial na demonstração do principal resultado desta exposição é o teorema 6.2 do parágrafo 6:

"Sejam M variedade diferenciável de Banach, com estrutura de Finsler, C^2 , completa, paracompacta, sem bordo, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 e $X: M \rightarrow TM$ um campo pseudo gradiente para f . Suponhamos que p seja o único ponto crítico de f em $f^{-1}([a, b])$ e que p seja B -não-degenerado em relação a X com índice finito K .

Então $M^b = f^{-1}([-\infty, b])$ tem mesmo tipo de homotopia que M^a com um disco de dimensão K colado pelo bordo.

A partir deste teorema obtém-se, como no caso clássico, as Desigualdades de Morse.

O capítulo 2 visa apenas mostrar uma primeira aplicação da teoria exposta no capítulo 1 que é uma generaliza-

ção do Teorema de Euler-Hopf para característica de Euler de variedades de Banach.

Não sendo este o objetivo principal do trabalho, este capítulo é bem menos detalhado que o anterior, em particular não desenvolvemos os pré-requisitos necessários e algumas demonstrações são omitidas por serem análogas às que se faz em dimensão finita.

A generalização acima se faz introduzindo uma classe de campos - os campos ZPS - obtida impondo-se certas condições sobre a derivada do campo em seus zeros.

Os resultados deste capítulo estão contidos no artigo "The Euler Characteristic of Vector Fields on Banach manifolds, and a Globalization of Leray-Schauder Degree" de A. J. Tromba.

Os agradecimentos que seguem são a expressão sincera de nossos sentimentos:

Ao orientador deste trabalho, Dr. Mário Barone Júnior, pela boa vontade e dedicação com que tem nos orientado já há tantos anos.

Ao grupo de Sistemas Dinâmicos e Topologia Diferencial do IME-USP pelo apoio constante e pelas oportunidades de desenvolvimento matemático oferecidas.

Às muitas pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos Profs. Alcilêa A. H. de Mello e Paulo Ferreira Leite e aos colegas Antonio Luiz, Cláudio e Sebastião por amizades tão fecundas.

Aos Srs. João Baptista Esteves de Oliveira e Vera Lúcia Martins pelo trabalho de datilografia.

São Paulo, outubro de 1979

Claudio Possani

§0 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a generalização da Teoria de Morse para variedades de Banach devida a A. J. Tromba [16].

§1 - TEORIA DE MORSE: RESULTADOS CLÁSSICOS

Neste parágrafo apresentaremos de forma breve (sem demonstrações) os principais resultados da Teoria de Morse em variedades de dimensão finita e em variedades de Hilbert. A exposição será feita destacando-se os pontos importantes da teoria e motivando-se a generalização que será desenvolvida neste trabalho.

A - Teoria de Morse em variedades de dimensão finita

M denotará uma variedade diferenciável, C^2 , de dimensão n .

DEFINIÇÃO 1.1. - Um ponto crítico, p , ($df(p) = 0$) de $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ diz-se não degenerado se para alguma carta (U, ϕ) ao redor de p , a matriz Hessiana de $f \circ \phi^{-1}$ em $\phi(p)$

$$H_{\phi(p)}(f \circ \phi^{-1}) = \left\{ \frac{\partial^2 (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{n \times n} \quad i, j = 1, \dots, n$$

é não-singular, isto é, $\det [H_{\phi(p)}(f \circ \phi^{-1})] \neq 0$.

A definição acima não depende da particular carta (U, ϕ) .

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$; a forma bilinear $H: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se não-degenerada se a aplicação:

$$\begin{aligned} H_{\#}: E &\rightarrow E^* \\ u &\rightarrow H_{\#}(u) = H(u, \cdot) \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre E e seu dual E^* .

A proposição seguinte dá um critério de não degenerescência que independe de coordenadas.

PROPOSIÇÃO 1.1. - Seja $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ e p um ponto crítico. p é não degenerado se e só se a forma bilinear induzida pela matriz Hessiana

$$H_p f: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

é não degenerada [3].

Seja Q a forma quadrática associada à matriz Hessiana de f .

DEFINIÇÃO 1.2. - O índice do ponto crítico p , de f , é a maior dimensão que pode ter um subespaço de $T_p M$ onde Q é definida negativa.

O índice de p pode ser definido como sendo o número de autovalores negativos da matriz Hessiana de f .

A proposição a seguir fornece uma forma padrão para uma função numa vizinhança de um ponto crítico não degenerado.

PROPOSIÇÃO 1.2. - (Lema de Morse). Seja p um ponto crítico não degenerado de índice k de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, f de classe C^r , $3 \leq r \leq \infty$. Então existe carta C^{r-2} , (U, ϕ) em p , tal que

$$f \circ \phi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = f(p) - \sum_{i=1}^k u_i^2 + \sum_{i=k+1}^n u_i^2 \quad [3]$$

Uma consequência imediata do Lema de Morse é que os pontos críticos não degenerados são isolados.

As proposições a seguir permitem reconstruir uma variedade conhecendo-se uma função de Morse definida na variedade.

TEOREMA 1.1. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, e suponhamos que $M_a^b = f^{-1}([a, b])$ é compacto e não contém pontos críticos de f .

Então:

- 1) $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ é difeomorfa a $M^b = f^{-1}((-\infty, b])$
- 2) $M_a^b = f^{-1}([a, b])$ é difeomorfo a $f^{-1}(\{a\}) \times [a, b]$
- 3) $f^{-1}(\{c\})$ é difeomorfo a $f^{-1}(\{d\})$, $\forall c, d \in [a, b]$ [8]

Vamos esclarecer o significado da expressão "colar um disco pelo bordo".

Seja D^k a esfera unitária em $\mathbb{R}^k$, S^{k-1} seu bordo e $g: S^{k-1} \rightarrow N$ um mergulho tomando valores na variedade N . Consideremos inicialmente a variedade obtida fazendo-se a união disjunta de N e D^k . Seja M a variedade quociente obtida desta identificação.

do-se $x \in S^{k-1}$ com $g(x) \in N$. M diz-se obtida de N pela colagem de um disco, de dimensão k , pelo bordo.

O Teorema central da Teoria de Morse é o

TEOREMA 1.2. - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $3 \leq r \leq \infty$, p ponto crítico de f de índice k , com $a < f(p) < b$ e $f^{-1}([a, b])$ compacto e não contendo outro ponto crítico além de p . Então M^b tem mesmo tipo de homotopia que M^a com um disco fechado de dimensão k colado pelo bordo [8].

O teorema acima estende-se de modo natural ao caso em que f possui ℓ pontos críticos não degenerados em $f^{-1}([a, b])$. Uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de Morse se todos seus pontos críticos são não degenerados.

Sejam X e Y espaços topológicos com $Y \subset X$; indicaremos com $H_j(X, Y)$ o j -ésimo grupo de homologia do par (X, Y) com coeficientes em $\mathbb{Q}$. $H_j(X, Y)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ e o número

$R_j = \dim H_j(X, Y)$ é o número de Betti do par (X, Y) . Quando o par (X, Y) é admissível ($\dim H_j(X, Y) < \infty$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists j_0 \mid \dim H_j(X, Y) = 0$, para $j \gg j_0$) então a característica de Euler do par (X, Y) é por definição:

$$\chi(X, Y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_k$$

TEOREMA 1.3. - (Desigualdades de Morse). Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse, de classe C^r , $3 \leq r \leq \infty$; suponhamos que M é compacta e f estável (isto é, se $p_1, \dots, p$ são os pontos críticos de

f então $f(p_i) \neq f(p_j)$ se $i \neq j$), e seja C_i o número de pontos críticos de f de índice i , em $f^{-1}([a, b])$, com a e b valores regulares. Então o par (M^b, M^a) é admissível e

$$i) \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} R_m \leq \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} C_m$$

$$ii) \chi(M^b, M^a) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i R_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_i \quad [3 \text{ e } 8]$$

Uma discussão extremamente clara destas idéias encontra-se em [5].

B - Teoria de Morse em variedades de Hilbert

Os resultados da Teoria de Morse, vistos acima, foram estendidos para funções $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em variedades de Hilbert (isto é, as cartas da variedade M estão modeladas num espaço de Hilbert H que podemos supor fixo quando fixamos uma variedade M [4]), no início da década de 60 simultânea e independentemente por Palais [10] e por Smale [15].

A noção de ponto crítico não degenerado não pode ser dada nos termos da definição 1.1., pois esta se vale de modo essencial do fato da dimensão da variedade ser finita; a proposição 1.1 indica que uma boa definição é:

DEFINIÇÃO 1.3. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida numa variedade de Hilbert M ; um ponto crítico p , diz-se não degenerado se a forma bilinear simétrica dada pelo $Hess$

siano de f

$$H_p f: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

for não-degenerada.

Neste contexto diremos que uma forma bilinear $Q: E \rightarrow \mathbb{R}$, definida no espaço de Banach E é negativa se $Q(u,u) < 0, \forall u \in E - \{0\}$, e diremos que é negativa definida se existir $c > 0$ tal que $Q(u,u) \leq -c \|u\|^2, \forall u \in E$. Analogamente definimos os conceitos de forma bilinear positiva e positiva definida.

DEFINIÇÃO 1.4. - Seja $p \in M$ um ponto crítico não degenerado de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. O índice de p é o supremo do conjunto das dimensões dos subespaços de $T_p M$ onde a forma quadrática associada à $H_p f$ for negativa definida

Note-se que neste contexto um ponto crítico não-degenerado pode ter índice igual a $+\infty$.

Como em dimensão finita temos também o Lema de Morse:

PROPOSIÇÃO 1.3. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^r, 2 \leq r \leq \infty$ e $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado. Então existe carta (U, ϕ) para M em p , $\phi(U) = \emptyset \subset H$, vizinhança da origem em H tal que

$$(f \circ \phi^{-1})(q) = \frac{1}{2} H_p(f)(q, q) + f(p) \quad \text{com} \quad q \in \emptyset \quad [10]$$

No teorema 1.1. aparece a hipótese de $f^{-1}([a, b])$ ser compacto, o que neste contexto deve ser abandonado pois se existe $c \in [a, b]$ valor regular com $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ então $f^{-1}(c)$ é subvarie-

dade de codimensão 1 e quando M for de dimensão infinita ocorre que $f^{-1}(c)$ também o é, e portanto $f^{-1}(c)$ e $f^{-1}([a,b])$ não são compactos.

A condição de compacidade sobre as variedades é substituída por condições de compacidade sobre a função f .

DEFINIÇÃO 1.5. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 definida na variedade diferenciável, C^1 , de Hilbert, M . Dizemos que f satisfaz a condição (C) se toda seqüência $\{S_n\}$ em M tal que $\{f(S_n) | n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em M e existe subseqüência $\{S_{n_j}\}$ com $\|df(S_{n_j})\| \rightarrow 0$ tem subseqüência convergente.

O Teorema 1.1. é substituído pelo

TEOREMA 1.4. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k+2} , $0 \leq k \leq \infty$ definida na variedade de Hilbert completa M , $\partial M = \emptyset$ e suponhamos que f satisfaz a condição (C). Se $f^{-1}([a,b])$ é formada apenas por pontos regulares então:

- i) M^a é difeomorfa a M^b .
- ii) M_a^b é difeomorfa a $f^{-1}(a) \times [a,b]$.
- iii) $f^{-1}(c)$ é difeomorfo a $f^{-1}(d) \forall c, d \in [a,b]$. [10]

A noção de "colar um disco pelo bordo, numa variedade N " estende-se naturalmente a contextos mais gerais: a construção descrita anteriormente pode ser feita se tomarmos para D^k a esfera unitária num espaço de Hilbert H (na secção 6 deste capítulo tomaremos para D^k , uma esfera num espaço de Banach E).

Neste contexto temos a seguinte versão do teorema de Morse:

TEOREMA 1.5. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^{k+2} , $1 \leq k < \infty$ definida na variedade, completa, sem bordo, de Hilbert, M , satisfazendo a condição (C). Então:

i) Para todo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ há um número finito de pontos críticos de f em $f^{-1}([a, b])$.

ii) Se $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são níveis regulares e $p_1, \dots, p_n$ são os pontos críticos de f em M_a^b de índices $k_1, \dots, k_n$ respectivamente então M^b tem o mesmo tipo de homotopia que M^a com n discos fechados de dimensões $k_1, \dots, k_n$ colados pelos bordos.

iii) Se em ii) $p_1, \dots, p_m$, $m \leq n$ são de índice infinito então M^b tem mesmo tipo de homotopia que M^a com $m-n$ discos coladas, com dimensões $k_{m+1}, \dots, k_n$ (isto é, os pontos críticos de índice infinito são homotopicamente invisíveis). (Em [10] Palais mostrou uma versão mais forte do Teorema acima).

Com as hipóteses do teorema 1.5. valem as desigualdades enunciadas no teorema 1.3. [10]

Nos parágrafos a seguir desenvolveremos uma teoria de Morse para funções definidas em variedades de Banach. Nesse contexto não poderemos definir ponto crítico não-degenerado como na definição 1.3. pois esta condição implica que o espaço de Banach E onde as cartas tomam valores seja isomorfo ao seu dual E^* , o que é uma condição muito restritiva.

A condição de não degenerescência que adotaremos é motivada pelas propriedades do campo gradiente que veremos a seguir. Mais precisamente se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e M é uma variedade de Hilbert então o gradiente de f em p é o vetor $\text{grad } f(p)$, definido pela igualdade

$$df(p)(v) = \langle \text{grad } f(p), v \rangle_p \quad \forall v \in T_p M. \quad (I)$$

O campo gradiente é o campo $\nabla f: M \rightarrow TM$ tal que

$$\nabla f(p) = \text{grad } f(p).$$

A seguir veremos as propriedades do campo gradiente que motivarão a definição da próxima secção.

Se p é um ponto crítico não degenerado de f então existe $\mathcal{O}$, vizinhança de p , tal que:

$$1) \quad df_q(\nabla f(q)) > 0 \quad \text{se } q \in \mathcal{O} \text{ e } q \neq p.$$

Isto porque $df_q(\nabla f(q)) = \|\text{grad } f(q)\|^2 > 0$ se $q \neq p, q \in \mathcal{O}$ e $\mathcal{O}$ é uma vizinhança de p que não contém outro ponto crítico.

Como $\nabla f: M \rightarrow TM$ é um campo em M que se anula em p , sua derivada em p pode ser pensada como uma aplicação.

$$D(\nabla f)(p) : T_p M \rightarrow T_p M \quad [8]$$

A igualdade (I) fornece

$$H_p f(u, v) = d^2 f(p)(u, v) = \langle D\nabla f(p)(u), v \rangle_p \quad (II)$$

Como o Hessiano é simétrico vem:

$$H_p f(D\nabla f(p)(u), v) = H_p f(v, D\nabla f(p)(u)) = \langle D\nabla f(p)(v), D\nabla f(p)(u) \rangle \quad (\text{III})$$

e portanto vale

$$2) \quad H_p f(D\nabla f(p)(u), v) = H_p f(u, D\nabla f(p)(v)) \quad \forall u, v \in T_p M$$

(II) mostra que $D\nabla f(p)$ é auto-adjunto como operador de $T_p M$ em si próprio, logo seu espectro é real e a propriedade 3) mostra que 0 não está no espectro

$$3) \quad D\nabla f(p): T_p M \rightarrow T_p M \text{ é isomorfismo.}$$

De fato : $D\nabla f(p)(u) = 0 \Rightarrow$

$$H_p f(u, v) = 0, \quad \forall v \in T_p M \quad (\text{por II})$$

$$\Rightarrow 0 = H_p f(v, u) = \langle D\nabla f(p)(v), u \rangle \quad \forall v \in T_p M$$

$$\Rightarrow u = 0$$

Logo $D\nabla f(p)$ é injetora.

Além disso se $u \in T_p M$ seja $L_u: T_p M \rightarrow T_p M$ dada por $L_u(v) = \langle u, v \rangle$, $\forall v \in T_p M$.

p ponto crítico não degenerado $\Rightarrow (H_p f)_\#$ é isomorfismo de $T_p M$ em $(T_p M)^*$.

Logo $\exists \bar{u} \in T_p M$ tal que

$$H_p f(\bar{u}, v) = L_u(v) \quad , \quad \forall v \in T_p M$$

$$\Rightarrow \langle D\nabla f(p)(\bar{u}), v \rangle = \langle u, v \rangle \quad , \quad \forall v \in T_p M$$

$$\Rightarrow D\nabla f(p)(\bar{u}) = u$$

$\Rightarrow D\nabla f(p)$ é sobrejetora, o que demonstra 3).

Além disso verifica-se que

4) $H_p f(D\nabla f(p)(u), u) > 0$ se $u \neq 0$, pois pela igualdade (III)

$$H_p f(D\nabla f(p)(u), u) = \langle D\nabla f(p)(u), D\nabla f(p)(u) \rangle > 0$$

§2 - PONTOS CRÍTICOS B-NÃO-DEGENERADOS

Neste parágrafo estudaremos uma noção de não-degenerescência que generalize, para o caso de funções definidas em variedades de Banach, a noção de ponto crítico não degenerado.

Aqui, como no resto deste capítulo, M será uma variedade diferenciável, de Banach, C^2 , completa, paracompacta, sem bordo, modelada num espaço de Banach E , que possui uma norma equivalente C^1 fora da origem, com derivada limitada numa vizinhança da origem.

DEFINIÇÃO 2.1. - Seja $f:M \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 e p um ponto crítico de f . p diz-se B-não-degenerado se existem vizinhança O e p em M e um campo $V:O \rightarrow TM|_O$ tal que

$$q \mapsto V_q$$

$$1) \quad df_q(V_q) > 0, \quad \forall q \in O, \quad q \neq p.$$

2) $V_p = 0$ e a derivada de V em p , $DV_p: T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica em relação ao Hessiano de f :

$$H_p f(DV_p(u), v) = H_p f(u, DV_p(v)), \quad \forall u, v \in T_p M$$

3) $DV_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é um isomorfismo e seu espectro não intercepta o eixo imaginário.

4) $H_p f(DV_p(u), u) > 0$ se $u \in T_p M$ e $u \neq 0$.

OBSERVAÇÃO 2.1. - Para maior clareza dizemos, às vezes, que p é B-não-degenerado em relação a V .

PROPOSIÇÃO 2.1. - Pontos críticos B-não-degenerados são isolados.

DEMONSTRAÇÃO: de 1) segue que para todo $q \in \mathcal{O}$, $q \neq p$.

$$df_q(V_q) > 0 \text{ e portanto } df_q \neq 0$$

Logo p é o único ponto crítico em $\mathcal{O}$.

PROPOSIÇÃO 2.2. - Se M é uma variedade de Hilbert e p é um ponto crítico não degenerado, então p é ponto crítico B-não-degenerado.

DEMONSTRAÇÃO: já a fizemos no parágrafo 1 quando verificamos as propriedades de 1) a 4). O campo V associado é o campo gradiente.

PROPOSIÇÃO 2.3. - Se M é uma variedade de Hilbert e p é um ponto crítico B-não-degenerado em relação ao campo gradiente então p é um ponto crítico não degenerado.

DEMONSTRAÇÃO: $(H_0 f)$ é injetora pois:

$$\begin{aligned}(H_p f)(u) = 0 &\Rightarrow H_p f(u, v) = 0, \quad \forall v \in T_p M \\ &\Rightarrow H_p f(u, D\nabla f(p)(u)) = 0 \Rightarrow u=0.\end{aligned}$$

Além disso $(H_p f)$ é sobrejetora: de fato, se $h \in (T_p M)^*$ então existe $u \in T_p M$ tal que $h(v) = \langle u, v \rangle_p$, $\forall v \in T_p M$.

Mas se p é B-não-degenerado em relação ao campo ∇f , então:

$$\begin{aligned}D\nabla f(p): T_p M &\rightarrow T_p M \text{ é isomorfismo} \\ \Rightarrow \bar{u} \in T_p M &\text{ tal que } D\nabla f(p)(\bar{u}) = u \\ \Rightarrow h(v) = \langle D\nabla f(p)(\bar{u}), v \rangle &= H_p f(\bar{u}, v) \\ \Rightarrow h = (H_p f)(\bar{u}).\end{aligned}$$

Portanto $(H_p f)$ é isomorfismo, isto é, p é ponto crítico não degenerado.

O exemplo a seguir mostra que o conceito de ponto crítico B-não-degenerado é efetivamente uma generalização do conceito clássico de ponto crítico não degenerado, no sentido de que existem pontos críticos B-não-degenerados tais que o Hessiano de f em p não induz um isomorfismo entre $T_p M$ e $T_p M^*$.

EXEMPLO 2.1. - Sejam $M = L^4[0, 1] = E$, e

$J: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(g) = \frac{1}{4} \int_0^1 |g|^4 + \frac{1}{2} \int_0^1 |g|^2.$$

Daí

$$dJ(g)(u) = \int_0^1 |g|^2 \cdot \langle g, u \rangle + \int_0^1 \langle g, u \rangle$$

$$\text{Logo } dJ(g)=0 \Rightarrow \int_0^1 |g|^4 + \int_0^1 |g|^2 = 0$$

Assim $g=0$

Portanto 0 é o único ponto crítico de j .

Além disso

$$H_g^J(u, v) = 2 \int_0^1 \langle g, u \rangle \langle g, v \rangle + \int_0^1 |g|^2 \langle u, v \rangle + \int_0^1 \langle u, v \rangle$$

e portanto

$$H_0^J(u, v) = \int_0^1 \langle u, v \rangle.$$

Estamos agora em condições de provar que 0 é ponto crítico B-não-degenerado.

Seja $V: M \rightarrow TM$ o campo $V(g)=g=Id(g)$

$$1) \quad dJ_g(V_g) = \int_0^1 |g|^4 + \int_0^1 |g|^2 > 0 \quad \text{se } g \neq 0$$

$$2) \quad V(0)=0 \text{ e como } DV(0)=Id.$$

$$H_0^J(DV(0)(u)) = \int_0^1 \langle u, v \rangle = H_0^J(u, DV(0)(v))$$

3) $DV(0)$ é isomorfismo e o único elemento de seu espectro é $\lambda=1$.

$$4) H_0^J(DV(0)(u), u) = \int_0^1 \langle u, u \rangle = \int_0^1 |u|^2 > 0 \quad \text{se } u \neq 0.$$

O dual de $L^4[0,1]$ é $L^{4/3}[0,1]$ e estes espaços não são isomorfos. Logo T_0M não é isomorfo à $(T_0M)^*$ e portanto H_0^J não induz isomorfismo entre T_0M e $(T_0M)^*$.

DEFINIÇÃO 2.2. - Seja $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ como na definição 2.1. e p um ponto crítico B-não-degenerado. O índice de p é por definição:

$$\text{ind } p = \sup\{\dim F \mid F \text{ é subespaço de } T_p M \text{ e } H_p^f(u, u) < 0, \forall u \in F\}.$$

O índice de um ponto crítico B-não-degenerado é, portanto o sup das dimensões dos espaços onde o Hessiano induz uma forma quadrática negativa.

O campo V que aparece na definição 2.1. induz uma decomposição de $T_p M$ como soma direta de dois subespaços $T_p M^+$ e $T_p M^-$ que estão diretamente ligados com o conceito de índice.

LEMA 2.1. - Seja $A:E \rightarrow E$ endomorfismo do espaço de Banach E , com espectro disjunto do eixo imaginário. Então existe decomposição de E em $E = E^+ \oplus E^-$ com E^+ e E^- invariantes sob A , $A^+ = A|_{E^+}$ tem espectro à direita do eixo imaginário e $A^- = A|_{E^-}$ tem espectro à esquerda do eixo imaginário.

Além disso existem projeções $P^+:E \rightarrow E^+$ e $P^-:E \rightarrow E^-$ tais que $P^+ + P^- = \text{Id}$ e ambas se expressam como séries de potências de $A[14]$.

PROPOSIÇÃO 2.4. - Nas condições do Lema 2.1. se A for isomorfismo então A^+ e A^- também o são.

DEMONSTRAÇÃO: $A^+:E^+ \rightarrow E^+$ é linear e injetora pois é restrição de um isomorfismo.

Além disso, dado $x^+ \in E^+$, como A é isomorfismo, $\bar{x} \in E$ tal que $A(\bar{x}) = x^+$.

Da decomposição de E vem:

$$\bar{x} = \bar{x}^+ + \bar{x}^-, \text{ com } \bar{x}^+ \in E^+ \text{ e } \bar{x}^- \in E^-$$

$$\text{Logo } x^+ = A(\bar{x}) = A(\bar{x}^+ + \bar{x}^-) = A(\bar{x}^+) + A(\bar{x}^-)$$

$$\text{Então } A(\bar{x}^-) = x^+ - A(\bar{x}^+) \in E^+$$

$$\text{Daí } A(\bar{x}^-) = 0$$

$$\text{Portanto } \bar{x}^- = 0$$

$$\text{e então } \bar{x} = \bar{x}^+ \in E^+$$

Logo $\bar{x} \in E^+$, isto é, A^+ é sobrejetora.

Analogamente prova-se que A^- é isomorfismo.

Seja $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ e p ponto crítico B-não-degenerado e $V:0 \rightarrow TM|_0$ o campo associado. Pondo $A=DV(p)$ e aplicando o Lema 2.1. obtemos uma decomposição:

$$T_p M = T_p M^+ + T_p M^-$$

LEMA 2.2. - Nas condições acima valem:

- 1) $H_p f$ é positivo em $T_p M^+$
- 2) $H_p f$ é negativo em $T_p M^-$
- 3) $\dim T_p M^+ < \infty \implies H_p f$ é positivo definido, e analogamente se $\dim T_p M^- < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO: Como os espectros de A^+ e $-A^-$ estão à direita do eixo imaginário, existem "raízes quadradas" de A^+ e $-A^-$, isto é, operadores S^+ e S^- tais que

$$S^{+2} = A^+ \text{ e } S^{-2} = A^-, \quad (I) \text{ e}$$

S^+ e S^- se escrevem como séries de potências de A^+ e $-A^-$ [14].

Como A^+ e A^- são isomorfismos S^+ e S^- também o são (por (I)). A condição de S^+ e S^- serem séries de potências de A^+ e $-A^-$ implica que $H_p f$ é simétrico em relação a eles, já que o é em relação à A (item 2) da definição 2.1).

Portanto, dado $u \in E^-, u \neq 0, \exists \bar{u} \in E^-$ tal que $S^-(\bar{u}) = u$, e

$$\begin{aligned} H_p f(u, u) &= H_p f(S^-(\bar{u}), S^-(\bar{u})) = H_p f(S^{-2}(\bar{u}), \bar{u}) \\ &= H_p f(-A^-(\bar{u}), \bar{u}) = -H_p f(A(\bar{u}), \bar{u}) < 0 \end{aligned}$$

Isto demonstra 1). De modo análogo demonstra-se 2).

- 3) seja $B \subset T_p M^+$ a bola unitária de centro na origem,

$$B = \{u \in T_p M^+ \mid \|u\| = 1\}$$

A função $u \in T_p M \mapsto H_p f(u, u) \in \mathbb{R}$ é contínua e

$$H_p f(u, u) > 0 \quad \text{se } u \in B.$$

$\dim T_p M^+ < \infty \implies B$ compacto, logo $\exists c > 0$ tal que $H_p f(u, u) > c$,
 $\forall u \in B$.

Agora dado $u \in T_p M^+$, $u \neq 0$ temos:

$$\frac{u}{\|u\|} \in B \implies H_p f\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) > c$$

$$\iff \frac{1}{\|u\|^2} H_p f(u, u) > 0$$

$$\iff H_p f(u, u) > c \|u\|^2, \quad \forall u \in T_p M^+, u \neq 0$$

Isto é, $H_p f$ é positivo definido em $T_p M^+$.

Analogamente mostramos que $\dim T_p M^- < \infty \implies H_p f$ negativo de
 finido.

PROPOSIÇÃO 2.5. - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , p ponto crítico de f B -
 não-degenerado e V o campo associado. Então

$$\text{ind } p = \dim T_p M^-$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $H_p f$ é negativo em $T_p M^-$ e $\text{ind } p = \sup\{\dim F \mid$
 $F \text{ é subespaço de } T_p M \text{ e } H_p f \text{ negativo em } F\}$ segue que $\text{ind } p \geq$
 $\dim T_p M^-$.

Por outro lado, seja F um subespaço de $T_p M$ com $H_p f$ negativa em F . Consideremos a aplicação

$$L: F \rightarrow T_p M^-, \quad L = P^-|_F,$$

onde P^- é a projeção de $T_p M$ em $T_p M^-$, dada pelo Lema 2.1.

L é linear por ser restrição de uma linear. Além disso:
 $L(u)=0 \implies P^-(u)=0 \implies u \in T_p M^+.$

Se $u \neq 0$ então $H_p f(u,u) < 0$ pois $u \in F$
 e $H_p f(u,u) > 0$ pois $u \in T_p M^+$ o que é uma con
 tradição.

Logo $u=0$ e portanto $\text{Ker } L = \{0\}$

Logo L é injetora

e $\dim F \leq \dim T_p M^-$

Como F é um subespaço qualquer onde $H_p f$ é negativo segue
 que

$$\text{ind } p \leq \dim T_p M^-$$

Assim $\text{ind } p = \dim T_p M^-.$

Em particular a proposição acima mostra que se tivermos
 V_1 e V_2 campos verificando as condições da definição 2.1., in
 duzindo decomposições

$$T_p M = (T_p M)_1^+ \oplus (T_p M)_1^- \quad e$$

$$T_p M = (T_p M)_2^+ \oplus (T_p M)_2^-, \quad \text{então}$$

$$\dim (T_p M)_2^- = \dim (T_p M)_1^-$$

PROPOSIÇÃO 2.6. - Sejam $f:M \rightarrow \mathbb{R}$ e p ponto crítico B-não-degenerado de índice finito. Seja

$$(T_p M^-)^1 = \{u \in T_p M \mid H_p f(u, v) = 0, \quad \forall v \in T_p M^-\}.$$

$$\text{Então } (T_p M^-)^1 = T_p M^+.$$

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos inicialmente que

$$T_p M = T_p M^- \oplus (T_p M^-)^1 \quad (I)$$

$$\text{Seja } Q(u, v) = -H_p f(u, v), \quad \forall u, v \in T_p M^-.$$

Q é uma forma bilinear simétrica positiva definida em $T_p M^-$, isto é, Q é um produto interno em $T_p M^-$.

Dado $w \in T_p M$ seja w o funcional linear em $T_p M^-$ dado por $w(u) = Q(u, w)$. Como $\dim T_p M^- < \infty$ segue pelo Teorema de Riesz, que existe um único $u_0 \in T_p M^-$ tal que $w(u) = Q(u, u_0)$.

$$\text{Daí } Q(u, w) = Q(u, u_0)$$

$$\text{e portanto } Q(u, w - u_0) = 0, \quad \forall u \in T_p M^-$$

$$\text{donde } w - u_0 \in (T_p M^-)^1$$

$$\text{Logo } w = (w - u_0) + u_0$$

$$\text{Assim } T_p M = T_p M^- + (T_p M^-)^1$$

Para ver que a soma é direta, observe-se que

$$u \in T_p M^- \cap (T_p M^-)^\perp \implies H_p f(u, u) = 0 \implies u = 0$$

Vejamos agora que $T_p M^+ \subset (T_p M^-)^\perp$

Seja $v \in T_p M^+$. Dado $u \in T_p M^-$ arbitrário

$$H_p f(u, v) = H_p f(P^-(u), v) = H_p f(u, P^-(v)) = H_p f(u, 0) = 0$$

$$\implies v \in (T_p M^-)^\perp$$

Finalmente mostraremos que $(T_p M^-)^\perp \subset T_p M^+$

Seja $y \in (T_p M^-)^\perp$. Como $T_p M = T_p M^- \oplus T_p M^+$

$$y = y^+ + y^- \text{ com } y^- \in T_p M^- \text{ e } y^+ \in T_p M^+ \subset (T_p M^-)^\perp$$

$$\text{Daí } y^- = y - y^+ \in (T_p M^-)^\perp$$

$$\text{donde } y^- \in T_p M^- \subset (T_p M^-)^\perp$$

$$\text{e portanto } y^- = 0$$

$$\text{Logo } y = y^+ \in T_p M^+$$

$$\text{Assim } (T_p M^-)^\perp \subset T_p M^+$$

Com isso concluímos a demonstração.

§3 - VARIEDADES DE FINSLER

DEFINIÇÃO 3.1 - Sejam X espaço topológico, E espaço de Banach e $F = X \times E$. Uma função $\| \cdot \| : F \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma estrutura de Finsler sobre F se:

1) $\forall x \in X$ a função $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em E , compatível.
 $v \rightarrow \|x, v\|$

2) Dados $x_0 \in X$ e $K > 1$, $\exists U$ vizinhança de x_0 em X tal que
 $\frac{1}{K} \|v\|_{x_0} \leq \|x, v\| \leq K \|v\|_{x_0}$, $\forall x \in U$ e $\forall v \in E$.

PROPOSIÇÃO 3.1 - Seja $\| \cdot \| : X \times E \rightarrow \mathbb{R}$ uma estrutura de Finsler em $X \times E$. Então $\| \cdot \|$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO - Vamos mostrar que a imagem inversa de conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ é aberta em $X \times E$; basta verificar esta propriedade para intervalos do tipo $I =]\alpha, \beta[$ com $\alpha \neq 0$. (Os intervalos deste tipo formam uma base de abertos da topologia usual de $\mathbb{R}$).

Sejam portanto $I =]\alpha, \beta[$, $\alpha \neq 0$

$$W = \{ \| \cdot \|^{-1} (]\alpha, \beta[) \text{ e } (x_0, v_0) \in W \}.$$

$$\|x_0, v_0\| = c \in]\alpha, \beta[.$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon < c < \beta - \varepsilon$, e $\beta - \varepsilon \neq 0$.

$V_1 = \{ \| \cdot \|_{x_0}^{-1} (]\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon[) \}$ é aberto em $X \times E$ pois $\| \cdot \|_{x_0}$ é uma norma e portanto contínua.

Sejam ainda

$$K_1 = \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha} > 1 \text{ e } K_2 = \frac{\beta}{\beta - \varepsilon} > 1$$

e U_1 e U_2 as vizinhanças de x_0 em X dadas pela condição 2) da definição acima.

$U = V_1 \cap U_1 \cap U_2$ é aberto em $X \times E$, $(x_0, v_0) \in U$

$$\|x, v\| \leq K_2 \|v\|_{x_0} < K_2 (\beta - \varepsilon) = \beta, \quad \forall (x, v) \in U \text{ e}$$

$$\|x, v\| \geq \frac{1}{K_1} \|v\|_{x_0} > \frac{1}{K_1} (\alpha + \varepsilon) = \alpha, \quad \forall (x, v) \in U$$

$$\implies (x_0, v_0) \in U \subset W \implies W \text{ é aberto.}$$

No caso do fibrado F não ser um fibrado trivial tem-se:

DEFINIÇÃO 3.2 - Seja $p: F \rightarrow X$ um fibrado de Banach sobre o

espaço topológico X , com fibra E . Uma função $\|\cdot\|: F \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma estrutura de Finsler para F se dado $x_0 \in X$ existe carta $\phi: F|_O \rightarrow O \times E$, tal que $\|\cdot\| \circ \phi^{-1}$ é uma estrutura de Finsler para $O \times E$.

PROPOSIÇÃO 3.2 - Nas condições acima $\|\cdot\|$ é contínua.

DEMONSTRAÇÃO - $\|\cdot\| \circ \phi^{-1}$ é contínua em vista da proposição anterior e ϕ é contínua; logo

$$\|\cdot\| = (\|\cdot\| \circ \phi^{-1}) \circ \phi \text{ é contínua.}$$

DEFINIÇÃO 3.3 - Uma variedade de Finsler é uma variedade de Banach, C^1 munida de uma estrutura de Finsler em TM .

Se M é uma variedade de Finsler e $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ é uma curva C^1 então a função $t \mapsto \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)}$ é uma função contínua definida em $[a, b]$, a valores reais, e portanto está bem definida a integral $\int_a^b \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt$.

DEFINIÇÃO 3.4 - Seja M uma variedade de Finsler e

$$\sigma: [a, b] \rightarrow M$$

uma curva C^1 . O comprimento de σ é o número

$$l(\sigma) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ r \rightarrow b}} \int_t^r \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt.$$

PROPOSIÇÃO 3.3 - Seja M uma variedade de Finsler; a função

$\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\rho(x, y) = \inf\{\ell(\sigma) \mid \sigma: [a, b] \rightarrow M \text{ é uma curva } C^1 \text{ em } M \text{ com } \sigma(a) = x \text{ e } \sigma(b) = y\}$ é uma métrica nas componentes de M , compatível com a topologia de M . [11]

PROPOSIÇÃO 3.4 - Seja M uma variedade de Finsler e $\sigma: [a, b] \rightarrow M$ uma curva de comprimento finito. Então a imagem de σ em M é totalmente limitada.

DEMONSTRAÇÃO - Por hipótese

$$\ell(\sigma) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ s \rightarrow b}} \int_t^s \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt < \infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja $P = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+1}\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt < \varepsilon.$$

$\sigma([a, b])$ está contido na reunião das bolas de M de centro $\sigma(t_i)$ e raio ε , $i=1, \dots, n$.

COROLÁRIO 3.1 - Se M for completa então $\sigma([a, b])$ tem fecho compacto.

Utilizaremos ao longo deste trabalho, os resultados clássicos sobre Campos de Vetores e Equações Diferenciais em variedades de Banach. Uma referência para este assunto é [4].

PROPOSIÇÃO 3.5 - Seja X um campo de classe C^1 definido numa subvariedade aberta M^* da variedade completa de Finsler C^2, M , e seja $\sigma:]a, b[\rightarrow M$ uma curva integral maximal. Se $b < \infty$ e

$$\int_0^b \|X(\sigma(t))\|_{\sigma(t)} dt < \infty,$$

então $\sigma(t)$ tem um ponto limite em $M - M^*$, quando $t \rightarrow b$. Analogamente se $a > -\infty$ e

$$\int_a^0 \|X(\sigma(t))\|_{\sigma(t)} dt < \infty,$$

então σ tem um ponto limite em $M - M^*$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $b < \infty$, σ deixa qualquer compacto de M^* , isto é, $\forall K \subset M^*$ compacto $\exists t > 0$ tal que $\sigma(t) \notin K$.

Por outro lado

$$\int_0^b \|X(\sigma(t))\|_{\sigma(t)} dt = \ell(\sigma|_0^b) < \infty$$

logo $\overline{\sigma([0, b[)}$ é um compacto de M .

Se $\overline{\sigma([0, b[)}$ estivesse contido em M^* então σ sairia de $\overline{\sigma([0, b[)}$ após um tempo finito o que é impossível.

Logo $\exists q \in \overline{\sigma([0, b[)}$ tal que $q \in M - M^*$. Este q é um ponto limite de σ em $M - M^*$.

§4 - CAMPOS PSEUDO - GRADIENTES

Agora completaremos a apresentação dos conceitos que nos permitirão reproduzir para variedades de Banach a situação já descrita em variedades de Hilbert. Dois conceitos são fundamentais: o de campo pseudo-gradiente e a condição (C.V.). Esta substitui a condição de compacidade sobre f - a condição (C) - por uma condição sobre campos. A partir de agora suporemos que M é uma variedade de Finsler (além das suposições já enumeradas no §2).

DEFINIÇÃO 4.1. - Um campo de vetores C^1 , $X: M \rightarrow TM$ satisfaz a condição (C.V.) se toda seqüência $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ limitada em M , tal que $\|X(p_i)\| \rightarrow 0$ tem subsequência convergente.

OBSERVAÇÃO 4.1. - Em vista da continuidade do campo, tem-se que se $\{p_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência convergente e

$p_{i_k} \rightarrow q$, então q é um zero de X .

PROPOSIÇÃO 4.1. - Se $X: M \rightarrow TM$ satisfaz condição (C.V.) e SCM é limitado então

$\text{Zer}(X) \cap \bar{S}$ é compacto.

$$(\text{Zer}(X) = \{p \in M \mid X(p) = 0\})$$

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\{p_i\}$ seqüência em $\text{Zer}(X) \cap \bar{S}$.

$$\|X(p_i)\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \{p_i\} \text{ é limitada,}$$

logo existe subsequência convergente em M :

$$p_{i_k} \rightarrow p \in M$$

$p \in \bar{S}$ e $\|X(p)\| = 0$ (veja-se observação acima).

Logo $p \in \text{Zer}(X) \cap \bar{S}$.

Logo, toda seqüência em $\text{Zer}(X) \cap \bar{S}$ tem subsequência convergente, isto é

$\text{Zer}(X) \cap \bar{S}$ é compacto.

COROLÁRIO 4.1. - Se os zeros de X em um conjunto fechado e limitado são isolados, então eles são em número finito.

A seguir introduziremos a noção de campo pseudo-gradiente para uma função f .

DEFINIÇÃO 4.2. - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 e $X: M \rightarrow TM$ um campo satisfazendo a condição (C.V.).

Diremos que X é pseudo-gradiente para f se, além disso, ti vermos:

G1) $df_p(X_p) > 0$, $\forall p \in M$ e $df_p(X_p) = 0$ se e só se p for simultaneamente ponto crítico de f e zero de X .

G2) Seja $p \in M$ e $\sigma_p:]\alpha, \beta[\rightarrow M$ curva integral maximal de X . Então quando $t \rightarrow \beta$

i) $f(\sigma_p(t)) \rightarrow +\infty$ ou

ii) $\|X(\sigma_p(t))\| \rightarrow 0$ e $\sigma_p([0, \beta[)$ é limitado em M .

Analogamente quando $t \rightarrow \alpha$:

i) $f(\sigma_p(t)) \rightarrow -\infty$ ou

ii) $\|X(\sigma_p(t))\| \rightarrow 0$ e $\sigma_p(]\alpha, 0])$ é limitado em M .

G3) O conjunto dos zeros de X em $f^{-1}([a, b])$ é limitado em M , onde $-\infty \leq a \leq b < +\infty$.

OBSERVAÇÕES:

1) A condição G1) implica que f cresce ao longo das trajetórias.

2) O conjunto dos zeros de X em $f^{-1}([a, b])$ será indicado por $k(a, b)$. A condição de $k(a, b)$ ser limitado juntamente com condição (C.V.) implicam que $k(a, b)$ é compacto. De fato, basta notar que $k(a, b) = \text{Zer}(X) \cap \overline{k(a, b)}$ e aplicar a proposição 4.1.

PROPOSIÇÃO 4.1. - No axioma G2) quando ocorrer $\|X(\sigma_p(t))\| \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \beta$ e $\sigma_p([0, \beta[)$ limitado, então $\beta = +\infty$ e $\sigma_p(t)$ tem um ponto crítico de f como ponto limite.

DEMONSTRAÇÃO

De fato, seja $\{t_n\}$ sequência em $[0, \beta[$:

$$\sigma_p([0, \beta[) \text{ limitado} \Rightarrow \{\sigma_p(t_n)\} \text{ limitado}$$

$$\|X(\sigma_p(t))\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|X(\sigma_p(t_n))\| \rightarrow 0$$

Pela condição (C.V.) segue que existe $q \in M$ tal que

$$\sigma_p(t_n) \rightarrow q. \text{ Isto só ocorre se } \beta = +\infty.$$

Por continuidade $\|X(q)\| = 0$ e portanto q é ponto crítico de f .

Algo análogo vale se $\|X(\sigma_p(t))\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \alpha$ e $\sigma_p(] \alpha, 0])$ for limitado.

Em [16] o autor exhibe uma função definida em uma variedade de Hilbert, que não satisfaz a condição (C) e para a qual existe um campo pseudo-gradiente.

PROPOSIÇÃO 4.2. - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, X campo pseudo-gradiente para f e $\sigma_p:] \alpha, \beta[$ curva integral maximal de X com condição inicial p e $f(p) = b$. Se $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\sigma_p(t)) = a > -\infty$ então $\sigma_p(t) \rightarrow k(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO

Pela observação 3) acima $\alpha = -\infty$.

Se, por absurdo, $\sigma_p(t) \not\rightarrow k(a,b)$, então existem U aberto de M com $k(a,b) \subset U$ e uma seqüência $\{t_n\}$ com $t_n \rightarrow -\infty$ e $\sigma_p(t_n) \notin U$.

Pela condição G2) da definição 4.2. segue que $\{\sigma_p(t_n), n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado e $\|X(\sigma_p(t_n))\| \rightarrow 0$.

Como o campo X satisfaz a condição (C.V.) então existe subseqüência convergente:

$$\sigma_p(t_{n_j}) \rightarrow q \text{ e } q \in k(a,b)$$

o que é uma contradição. Logo $\sigma_p(t) \rightarrow k(a,b)$.

NOTA: Um resultado análogo ao enunciado, acima vale quando $\lim_{t \rightarrow \beta} f(\sigma_p(t)) = b < +\infty$. Os corolários a seguir também possuem enunciados análogos para $t \rightarrow \beta$.

COROLÁRIO 4.2. - Nas condições da proposição acima se $k(a,b)$ for formado por pontos isolados e $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\sigma_p(t)) = a > -\infty$, então

$$\sigma_p(t) \rightarrow q \in k(a,b), \text{ quando } t \rightarrow \alpha.$$

COROLÁRIO 4.3. - Suponhamos que $q \in f^{-1}([a,b])$ seja o único ponto crítico de f em $f^{-1}([a,b])$. Seja $p \in f^{-1}([a,b])$ um ponto qualquer. Então

$$1) \sigma_p(t) \rightarrow q \text{ quando } t \rightarrow \alpha \text{ ou}$$

2) $\sigma_p(t)$ cruza o nível a ($\exists t_0 > \alpha$, tal que se $t < t_0$
 $f(\sigma_p(t)) < a$)

DEMONSTRAÇÃO:

Pela condição G2) $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\sigma_p(t)) = -\infty$ ou então $\alpha = -\infty$ e $\sigma_p(t)$ tem um ponto limite que é um ponto crítico de f .

Se $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\sigma_p(t)) = -\infty$ então ocorre 2). Caso contrário ou q é ponto limite de σ_p ou não. Se for, pelo corolário 4.2 $\sigma_p(t) \rightarrow q$. Se não for como q é o único ponto crítico de f em $f^{-1}([a, b])$ e f cresce ao longo das trajetórias então σ_p cruza o nível a .

COROLÁRIO 4.4. - Se $k(a, b) = \emptyset$ então σ_p cruza o nível a , qualquer que seja $p \in f^{-1}([a, b])$.

Estes resultados nos serão úteis quando demonstrarmos o teorema central deste trabalho.

A noção de campo pseudo-gradiente nos permite obter desde já, a seguinte generalização dos Teoremas 1.1 e 1.4:

TEOREMA 4.1. - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e X campo pseudo-gradiente para f , e suponhamos que $k(a, b) = \emptyset$. Então:

- 1) M_a^b é difeomorfa à $f^{-1}(a) \times [a, b]$.
- 2) $f^{-1}(c)$ é difeomorfo à $f^{-1}(a)$, $\forall c \in [a, b]$.
- 3) M^b é difeomorfo à M^a .

DEMONSTRAÇÃO:

Como $k(a, b) = \emptyset$, $df_p(X(p)) > 0$, $\forall p \in M_a^b$. Seja Y o campo em

M_a^b definido por $Y(p) = \frac{X(p)}{df_p(X(p))}$.

Então $df_p(Y(p)) = 1$; as curvas integrais de Y são as mesmas de X , reparametrizadas de modo que

$$f(\sigma_p(t)) = t + f(p).$$

1) Seja $\tilde{F}: f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M_a^b$ dada por

$$F(p, t) = \sigma_p(t-a) = \phi_{t-a}(p),$$

onde $\phi_{t-a}: M_a^b \rightarrow M_a^b$ é o difeomorfismo induzido pelo fluxo de X .

F é de classe C^1 e sua inversa é:

$$G: M_a^b \rightarrow f^{-1}(a) \times [a, b]$$

$$q \mapsto (\sigma_q(a-f(q)), f(q)) = (\phi_{a-f(q)}(q), f(q))$$

Notemos que $\sigma_q(a-f(q)) \in f^{-1}(a)$ pois

$$f(\sigma_q(a-f(q))) = a-f(q) + f(q) = a$$

Por outro lado

$$F \circ G(q) = F(\sigma_q(a-f(q))) = \sigma_{\sigma_q(a-f(q))}(f(q)-a) =$$

$$= \phi_{f(q)-a}(\sigma_q(a-f(q))) = \phi_{f(q)-a}(\phi_{a-f(q)}(q)) = q$$

e

$$\begin{aligned} G \circ F(p, t) &= G(\phi_{t-a}(p)) = (\phi_{a-f(\phi_{t-a}(p))}(\phi_{t-a}(p)), f(\phi_{t-a}(p))) \\ &= (\phi_{a-(t-a)-f(p)} \cdot \phi_{t-a}(p), t-a+f(p)) \text{ e como } f(p)=a \\ &= G.F(p, t) = (\phi_{a-t} \cdot \phi_{t-a}(p), t) = (p, t) \end{aligned}$$

Logo G é efetivamente F^{-1} e G é de classe C^1 . Isto conclui a parte 1).

2) basta notar que $F(f^{-1}(a) \times \{c\}) = f^{-1}(c)$.

De fato se $(q, c) \in f^{-1}(a) \times \{c\}$ então

$$f(F(q, c)) = f(\sigma_p(c-a)) = c-a+f(p) = c-a+a = c$$

Se $q \in f^{-1}(c)$, isto é, $f(q) = c$ então

$$(\phi_{a-c}(q), c) \in f^{-1}(a) \times \{c\} \text{ pois}$$

$$f(\phi_{a-c}(q)) = a-c+f(q) = a-c+c = a \text{ e}$$

$$F(\phi_{a-c}(q), c) = \phi_{c-a}(\phi_{a-c}(q)) = q.$$

Logo F induz difeomorfismo entre $f^{-1}(a) \times \{c\}$ e $f^{-1}(c)$.

3) 3) é consequência de 1) e do teorema da vizinhança tubular. [4].

§5 - UMA NORMA ESPECIAL EM E

Apresentaremos agora dois resultados de Análise Funcional que auxiliarão a análise de trajetórias de um campo pseudo-gradiente numa vizinhança de um ponto crítico. De um certo modo estes lemas permitem superar as dificuldades decorrentes da inexistência de um lema de Morse em nosso contexto.

LEMA 5.1 - Sejam E espaço de Banach e $A: E \rightarrow E$ isomorfismo com espectro real, com E^+ e E^- subespaços invariantes como no Lema 2.1. Então existe norma, $|\cdot|$, em E e $\rho > 0$ tais que se $v = v_+ + v_-$ então

- 1) $|v| = |v_+| + |v_-|$
- 2) $|e^{tA} v_+| \geq (1 + \rho t) |v_+|, \forall t > 0, v_+ \neq 0.$
- 3) $|e^{tA} v_-| \leq (1 - \rho t) |v_-|, \forall t < 0, v_- \neq 0.$

Além disso $|\cdot|$ tem a mesma classe de diferenciabilidade que a norma dada em E .

DEMONSTRAÇÃO - Como $E = E^+ \oplus E^-$ se tivermos definido $|\cdot|$ em E^+ e E^- bastará por

$$|v| = |v_+| + |v_-|, \quad v = v_+ + v_-$$

que teremos uma norma em E verificando 1).

Definiremos a norma em E^+ . (Em E^- a definição é análoga).

Em E^+ verifica-se a seguinte condição:

$$\exists \epsilon > 0, \quad K > 1$$

tais que

$$\|e^A v_+\| > \epsilon \cdot K \|v_+\|, \quad \forall v_+ \in E^+,$$

pois e^A é uma expansão em E^+ . [13]

Aplicando sucessivamente este resultado tem-se:

$$\|e^{nA} v_+\| > \epsilon \cdot K^n \|v_+\|, \quad \forall v_+ \in E^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon \cdot K^N > 1$. Definiremos a norma em E^+ pondo

$$|v_+| = \int_0^N \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda.$$

Note que $\lambda \mapsto \|e^{\lambda A} v_+\|$ é uma função contínua e portanto $|v_+|$ está bem definido.

A aplicação $|\cdot|: E^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida acima é uma norma:

$$i) \quad |v_+| = 0 \iff \int_0^N \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda = 0 \iff e^{\lambda A} v_+ = 0,$$

$$\forall \lambda \in [0, N] \iff v_+ = 0.$$

$$\begin{aligned} ii) \quad |\alpha v_+| &= \int_0^N \|e^{\lambda A} (\alpha v_+)\| d\lambda = \int_0^N \|\alpha \cdot e^{\lambda A} (v_+)\| d\lambda = \\ &= \int_0^N |\alpha| \cdot \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda = |\alpha| \int_0^N \|e^{\lambda A} (v_+)\| d\lambda = |\alpha| \cdot |v_+|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad |v_+^1 + v_+^2| &= \int_0^N \|e^{\lambda A} (v_+^1 + v_+^2)\| d\lambda = \int_0^N \|e^{\lambda A} (v_+^1) + e^{\lambda A} (v_+^2)\| d\lambda \leq \\ &\leq \int_0^N \|e^{\lambda A} (v_+^1)\| d\lambda + \int_0^N \|e^{\lambda A} (v_+^2)\| d\lambda = |v_+^1| + |v_+^2|. \end{aligned}$$

A seguir mostraremos que vale a propriedade 2)

$$\begin{aligned} |e^{tA} v_+| &= \int_0^N \|e^{\lambda A} (e^{tA} v_+)\| d\lambda = \int_0^N \|e^{(\lambda+t)A} v_+\| d\lambda = \\ &= \int_t^{t+N} \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda \quad (\text{mudança de variável: } \lambda+t = \lambda') = \\ &= \int_0^t \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda + \int_t^{t+N} \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda - \int_0^t \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda = \\ &= \int_0^N \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda + \int_0^{t+N} \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda - \int_0^t \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda = \\ &= |v_+| + \int_0^t \|e^{(\lambda+N)A} v_+\| d\lambda - \int_0^t \|e^{\lambda A} v_+\| d\lambda \quad (\text{mudança de} \end{aligned}$$

variável na Segunda integral: $\lambda' = \lambda - N) =$

$$\begin{aligned}
 &= |v+| + \int_0^t \left\{ \|e^{\lambda A} (e^{NA} v+)\| - \|e^{\lambda A} v+\| \right\} d\lambda \geq \\
 &\approx |v+| + \int_0^t \left\{ \varepsilon K^N \|e^{\lambda A} v+\| - \|e^{\lambda A} v+\| \right\} d\lambda = \\
 &= |v+| + \int_0^t (\varepsilon K^N - 1) \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda = |v+| + (\varepsilon K^N - 1) \cdot \int_0^t \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \quad (I)
 \end{aligned}$$

Antes de continuarmos observemos dois fatos:

a) $\| \cdot \|$ e a norma dada em E^+ , $\| \cdot \|$, são equivalentes:

$$\begin{aligned}
 |v+| &= \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \leq \int_0^N \|e^{\lambda_0 A} v+\| d\lambda = N \cdot \|e^{\lambda_0 A} v+\| \leq \\
 &\leq N \cdot \|e^{\lambda_0 A}\| \|v+\| \text{ onde } \|e^{\lambda_0 A} v+\| = \sup_{0 \leq \lambda \leq N} \|e^{\lambda A} v+\|.
 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 |v+| &= \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \geq \int_0^N \inf_{0 \leq \lambda \leq N} \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda = N \|e^{\lambda_1 A} v+\| \geq \\
 &\geq N \cdot \inf_{\|x\|=1} \|e^{\lambda_1 A} x\| \cdot \|v+\|.
 \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda_1 A}$ é isomorfismo, e portanto tem inversa con
tínua, $\inf_{\|x\|=1} \|e^{\lambda_1 A} x\| > 0$.

Pondo $B = N \|e^{\lambda_0 A}\|$ e $\mathfrak{C} = N \cdot \inf_{\|x\|=1} \|e^{\lambda_1 A} x\|$ tem-se:

$$C \cdot \|v+\| \leq |v+| \leq B\|v+\|.$$

b) Como $e^{\lambda A}$ é uma expansão em E^+ então

$$\inf_{t \geq 0} \|e^{tA} v+\| \geq \varepsilon' \|v+\| \geq \varepsilon'' |v+| = \varepsilon'' \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \quad (II)$$

já que as normas $| \cdot |$ e $\| \cdot \|$ são equivalentes.

Consideremos as funções

$$t \xrightarrow{g_1} \varepsilon'' t \cdot \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \quad \text{e} \quad t \xrightarrow{g_2} \int_0^t \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda$$

$$g_1(0) = 0 = g_2(0). \text{ Além disso}$$

$$g_1'(t) = \varepsilon'' \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda \leq \inf_{t \geq 0} \|e^{tA} v+\| \leq \|e^{tA} v+\| = g_2'(t) \quad (II)$$

Logo $g_1'(t) \leq g_2'(t)$ e portanto

$$g_1(t) \leq g_2(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Aplicando este fato em (I) obtemos:

$$\begin{aligned} |e^{tA} v+| &\geq |v+| + (\varepsilon K^N - 1) \varepsilon'' t \int_0^N \|e^{\lambda A} v+\| d\lambda = \\ &= |v+| + \rho t \cdot |v+| \end{aligned}$$

com $\rho = (\varepsilon K^N - 1) \varepsilon''$.

$$\text{Daí } |e^{tA} v+| \geq (1 + \rho t) |v+|, \quad \forall t > 0, v+ \neq 0.$$

Com isto concluímos 2). A parte 3) é análoga.

Finalmente observamos que a expressão que define a norma $||$ garante que ela tem mesma classe de diferenciabilidade que $||$. Indicaremos a derivada de $||$ por $||_*$.

LEMA 5.2 - Nas condições do Lema 5.1 vale:

- 1) $v_- \in E^- \implies |v_-|_* (Av_-) \leq -\rho |v_-|$
- 2) $v_+ \in E^+ \implies |v_+|_* (Av_+) \geq \rho |v_+|$
- 3) $|v|_* (Av) = |v_+|_* (Av_+) + |v_-|_* (Av_-)$.

DEMONSTRAÇÃO:

- 1) Do Lema 5.1 segue que $\exists \rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 & |e^{tA} v_-| > (1-\rho t) |v_-|, \forall t < 0, v_- \neq 0 \\
 \implies & |e^{tA} v_-| - |v_-| > -\rho t |v_-| \\
 \implies & \frac{1}{t} (|e^{tA} v_-| - |v_-|) < -\rho |v_-| \quad (t < 0) \\
 \implies & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (|e^{tA} v_-| - |v_-|) < -\rho |v_-| \\
 \implies & |e^0 v_-|_* (A(v_-)) = |v_-|_* (A(v_-)) < \rho |v_-|.
 \end{aligned}$$

Isto conclui 1)

- 2) Demonstra-se de modo semelhante.

- 3) Como E^+ e E^- são invariantes sob A , também o são em relação ao operador e^A . Daí

$$|e^{tA}v| = |e^{tA}(v_+ + v_-)| = |e^{tA}v_+ + e^{tA}v_-| = |e^{tA}v_+| + |e^{tA}v_-|$$

por 3) (Lema 5.1).

Daí

$$\begin{aligned} |v|_* (Av) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|e^{tA}v| - |v|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|e^{tA}v_+| - |v_+|}{t} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|e^{tA}v_-| - |v_-|}{t} = |v_+|_* A(v_+) + |v_-|_* A(v_-) \end{aligned}$$

Isto conclui 3).

§6 - TEOREMA DE MORSE EM VARIEDADES DE BANACH

Apresentaremos agora os teoremas centrais deste trabalho. O Teorema 6.2 analisa o que ocorre na variedade de Banach M ao cruzarmos um nível crítico de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ verificando certas hipóteses.

O Teorema 6.3 fornece as Desigualdades de Morse.

TEOREMA 6.1 - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, com $X: M \rightarrow TM$ um campo pseudo-gradiente para f . Suponhamos que p seja o único ponto crítico de f em $f^{-1}([a,b])$, com $a < f(p) = \lambda < b$, e que p seja B-não-degenerado em relação a X e de índice finito.

Então existem bolas D_η e D_ξ de raios η e ξ em E^- e E^+ respectivamente, e um mergulho diferenciável ψ de $D_\eta \times D_\xi$

sobre vizinhança de p em M tal que

1) $\psi(0,0) = p$

2) $X \nmid \psi(D_\eta \times \partial D_\xi)$

3) $\exists \varepsilon > 0$ com $f(\psi(\partial D_\eta \times D_\xi)) \leq \lambda - \varepsilon$, $f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ transversal a $\psi(D_\eta \times \{0\})$ e a X .

DEMONSTRAÇÃO - Seja (U, ϕ) carta em M ao redor de p , com $\phi(p) = 0$. Para maior clareza chamaremos de f a função $f \circ \phi^{-1}$. Deste modo, estamos identificando p com a origem de E . Em particular $q - p$ se escreve como q . Em $E = E^- \oplus E^+$ tomamos a norma dada pelo Lema 5.1. Seja $R > 0$ tal que as bolas de centro na origem e raios R e $\frac{R}{2}$ em $E - S_R$ e $S_{R/2}$ respectivamente - sejam contidas em $\phi(U)$:

$$S_{R/2} \subset S_R \subset \phi(U).$$

Sem perda de generalidade assumiremos que $\xi = \mu \cdot \eta$. (μ será determinado para garantir 2) e 3)) e que ξ e η são suficientemente pequenos para que

$$D_\eta \times D_\xi \subset S_{R/2}^0.$$

Uma vez determinados η e ξ tomaremos $\psi = \phi^{-1}|_{D_\eta \times D_\xi}$. $\psi(0) = \phi^{-1}(0) = p$. Isto demonstra 1). Para 2) e 3) precisamos das considerações seguintes:

i) $\|\cdot\|_*: U \rightarrow L(E, \mathbb{R})$ é limitada numa vizinhança de 0 pois é equivalente à norma $\|\cdot\|$ dada em E , que por hipótese é C^1 e limitada ao redor de 0. Logo se $m > 0$ for suficientemente pequeno, existirá $N > 0$ tal que

$$\|q\|_* < N \text{ sempre que } q \in S_m - \{0\}$$

($\| |q|_* \|$ indica a norma do funcional $|q|_* : E \rightarrow \mathbb{R}$).

ii) $H_p f$ é definido negativo em E^- , logo $\exists v > 0$, que podemos assumir < 1 tal que

$$H_p f(u, v) < -v |u|^2, \quad \forall u \in E^-.$$

Por outro lado como $H_p f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua segue que $\exists K_1 > 1$ tal que

$$H_p f(u, v) \leq K_1 \cdot |u| |v|, \quad \forall u, v \in E.$$

iii) X é de classe C^1 . Daí $X(q) = A(q) + R(q)$ com $A(q) = DX(p)(Xq)$ e $|R(q)| < w(q) |q|$ onde $w(q) \rightarrow 0$ quando $q \rightarrow p$.

iv) $q \xrightarrow{df} df(q)$ é C^1 , pois f é C^2 ; logo ao redor de p

$$df(q) = d^2 f(q, \cdot) + R_1(q) \quad \text{com}$$

$$\|R_1(q)\| < w_1(q) |q| \quad \text{onde } w_1(q) \rightarrow 0 \text{ quando } q \rightarrow p.$$

v) f é C^2 e p é ponto crítico. Logo

$$f(q) = \lambda + H_p f(q, q) + R_2(q) \quad \text{com}$$

$$|R_2(q)| < w_2(q) |q|^2 \quad \text{e } w_2(q) \rightarrow 0 \text{ quando } q \rightarrow p.$$

vi) Do Lema 5.2 segue que $\exists \rho > 0$ tal que

$$|v-|_* (A(v-)) \leq -\rho |v-| \text{ e}$$

$$|v+|_* (A(v+)) \geq \rho |v+| \text{ onde } A = DX(p).$$

vii) Seja $0 < m < \frac{1}{2}$ tal que $S_m \subset S_{R/2}$ e se $q \in S_m$ então

$$w_2(q) < \frac{1}{8} v$$

$$w_1(q) < \frac{1}{2} v$$

$$w(q) < \frac{\rho \mu}{8N \|P+\|}$$

onde $P+$ é a projeção de E em E^+ como no Lema 2.1 e μ

é tal que $\mu < \sqrt{\frac{v}{8K_1}}$ e $\xi = \mu\eta$ onde η e ξ verificam

$$0 < \eta < \frac{1}{2} m \text{ e } 0 < \xi < \frac{1}{2} m.$$

Note que:

$$\mu < \sqrt{\frac{v}{8K_1}} \implies \mu < \sqrt{v/8} < \sqrt{1/8} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(0 < \mu < 1 \implies \xi < \eta).$$

Nas condições acima $D_\xi \times D_\xi \subset S_m^0/2$, pois se

$$q = (q-, q+) \in D_\xi \times D_\xi$$

então $0 \leq |p+| \leq \xi$ $0 \leq |q-| \leq \xi = \mu\eta$. Daí

$$|(q-, q+)| = |q-| + |q+| \leq 2\xi = 2\mu\eta < 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} m$$

e portanto $|(q^-, q^+)| < \frac{1}{2}m$.

Estamos agora em condições de demonstrar 2) e 3).

2) Queremos provar que $X \in D_\eta \times \partial D_\xi$. Seja $q = (q^-, q^+) \in D_\eta \times \partial D_\xi$; o espaço tangente a $D_\eta \times \partial D_\xi$ em (q^-, q^+) é $E^- \times \text{Ker}|q^+|_*$.

X se escreve como $X(q) = X(q)_+ + X(q)_-$.

Para demonstrarmos que $X \in D_\eta \times \partial D_\xi$ basta verificarmos que $|q^+|_*(X(q)_+) > 0$ pois daí segue que $X(q) \notin E^- \times \text{Ker}|q^+|_*$.

$$|q^+|_*(X(q)_+) = |q^+|_*(A(q^+)) + |q^+|_*(P^+(R(q))).$$

Mas $|q^+|_*(A(q^+)) \geq \rho|q^+| = \rho\xi$ por iv) (I) e

$$||q^+|_*(P^+(R(q)))| \leq ||q^+|_*| \cdot \|P^+\| \cdot |R(q)| \leq N \cdot \|P^+\| w(q) |q| =$$

$$= N \|P^+\| \cdot w(q) (|q^-| + |q^+|) \leq N \cdot \|P^+\| w(q) \left(\frac{\xi}{\mu} + \xi\right) \leq$$

$$\leq N \|P^+\| \frac{\rho\mu}{8N\|P^+\|} \frac{\xi + \mu\xi}{\mu} = \frac{\rho\xi(1+\mu)}{8} < \frac{2\rho\xi}{8} = \frac{\rho\xi}{4}$$

(como $\mu < \frac{1}{\sqrt{8}}$ segue que $\mu < 1$ e portanto $1+\mu < 2$).

$$\text{Logo } ||q^+|_*(P^+(R(q)))| < \frac{\rho\xi}{4} \quad \text{(II)}.$$

De (I) e (II) segue que

$$|q^+|_*(X(q)_+) > \frac{\rho\xi}{2} > 0.$$

Isto conclui 2).

3) Temos 3 fatos a demonstrar:

a) $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f(\partial D_\eta \times D_\xi) \leq \lambda - \varepsilon$.

Seja $q \in \partial D_\eta \times D_\xi$.

$$\begin{aligned} f(q) &= H_p f(q, q) + R_2(q) + \lambda = \\ &= H_p f(q_+, q_+) + H_p f(q_-, q_-) + R_2(q) + \lambda \leq \\ &\leq K_1 |q_+|^2 - v |q_-|^2 + w_2(q) |q|^2 + \lambda \leq \\ &\leq -v \eta^2 + K_1 \xi^2 + w_2(q) (|q_+| + |q_-|)^2 + \lambda = \\ &= -v \eta^2 + K_1 \mu^2 \eta^2 + w_2(q) (|q_+|^2 + 2|q_+||q_-| + |q_-|^2) + \lambda < \\ &< -v \eta^2 + K_1 \left(\sqrt{\frac{v}{8K_1}} \right)^2 \eta^2 + w_2(q) (\mu^2 \eta^2 + 2\eta^2 \mu + \eta^2) + \lambda = \\ &= -v \eta^2 + \frac{v^2}{8} \eta^2 + w_2(q) (\mu^2 + 2\mu + 1) \eta^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Como $\mu < \sqrt{1/8}$ segue que

$$\mu^2 + 2\mu + 1 < \frac{1}{8} + 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 < 4.$$

Como $w_2(q) < \frac{1}{8} v$ segue

$$f(q) \leq -v \eta^2 + \frac{v}{8} \eta^2 + \frac{1}{2} v \eta^2 + \lambda = -\frac{3}{8} v \eta^2 + \lambda$$

Pondo $\varepsilon = \frac{3}{8} v \eta^2$ tem-se

$$f(q) \leq \lambda - \varepsilon, \quad \forall q \in \partial D_\eta \times D_\xi.$$

b) $f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ é transversal a $D_\eta \times \{0\}$.

Indiquemos por $T_0(f^{-1}(\lambda - \varepsilon))$ o espaço tangente a subvariedade $f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ no ponto c . $T_0(f^{-1}(\lambda - \varepsilon))$ tem codimensão 1.

Seja $q \in f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$, $q \neq 0$ e $q \in D_\eta \times \{0\}$. O espaço tangente a $D_\eta \times \{0\}$ em q é $E^\perp \times \{0\}$

$$q = (q^-, q^+) \text{ com } q^+ = 0; \text{ daí } |q| = |q^-|$$

q^- pertence ao espaço tangente a $D_\eta \times \{0\}$ em q

$$df_q(q^-) = H_p f(q^-, q^-) + R_1(q)(q^-)$$

$$\Rightarrow df_q(q^-) \leq -v|q^-|^2 + |R_1(q)(q^-)| \leq -v|q^-|^2 + w_1(q)|q||q^-|$$

$$\Rightarrow df_q(q^-) \leq -v|q^-|^2 + w_1(q)|q^-|^2 \leq -v|q^-|^2 + \frac{1}{2}\eta|q^-|^2$$

$$\Rightarrow df_q(q^-) \leq -\frac{1}{2}v|q^-|^2 < 0$$

$$\Rightarrow df_q(q^-) \neq 0 \Rightarrow q^- \notin T_q(f^{-1}(\lambda - \varepsilon)).$$

Logo $f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ é transversal a $D_\eta \times \{0\}$.

c) $f^{-1}(\lambda - \varepsilon) \nsubseteq X$.

Basta notar que se $q \in f^{-1}(\lambda - \varepsilon)$ então $q \neq p$ e portanto q não é ponto crítico de f nem zero de X . Daí

$$df_q(X(p)) \neq 0$$

$$e \dots f^{-1}(\lambda-\varepsilon) \nmid X.$$

Com isso concluímos o teorema 6.1.

A versão do teorema de Morse que temos neste contexto é o

TEOREMA 6.2 - Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com $X: M \rightarrow TM$ um campo pseudo-gradiente para f . Suponhamos que $p \in M$ seja o único ponto crítico de f em $f^{-1}([a, b])$ com $a < f(p) = \lambda < b$ e que p é B -não-degenerado em relação a X , e de índice finito K . Então M^b tem o mesmo tipo de homotopia de M^a com um disco fechado de dimensão K colado pelo bordo.

DEMONSTRAÇÃO - Em vista do teorema 4.1 temos que se $0 < \varepsilon < \lambda - a$ então M^a e $M^{\lambda-\varepsilon}$ têm mesmo tipo de homotopia pois não há pontos críticos de f em $M_a^{\lambda-\varepsilon}$.

Seja $\psi: D_\eta \times D_\xi \rightarrow M$ como no teorema 6.1. Mostraremos que para o ε dado por este teorema, M^b tem o mesmo tipo de homotopia que $M^{\lambda-\varepsilon} \cup D_\eta \times D_\xi$ (indicaremos por: $M^b \approx M^{\lambda-\varepsilon} \cup (D_\eta \times D_\xi)$).

Para $q \in M_{\lambda-\varepsilon}^b$ a curva integral maximal $\sigma_q:]\alpha, \beta[\rightarrow M$ tem a propriedade: quando $t \rightarrow \alpha$

$\sigma_p(t) \rightarrow p$ ou σ_p cruza o nível $\lambda-\varepsilon$ (Corolário 4.3).

Em ambos os casos após um tempo finito

$$\sigma_q(t) \in M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X D_\xi).$$

Seja

$$\gamma(q) = \sup\{t \leq 0 \mid \sigma_q(t) \in M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X D_\xi)\}, \quad q \in M^b.$$

As condições de transversalidade 2) e 3) do teorema 6.1 garantem que

$q \mapsto \gamma(q)$ é uma aplicação contínua. [16]

Seja

$$H: [0,1] \times M^b \longrightarrow M^b$$

$$(t,q) \longrightarrow \sigma_q(t\gamma(q)).$$

H é uma homotopia contínua entre

$$H_0 = H(0, \cdot) = \text{Id}_{M^b} \quad \text{e}$$

$$H_1 = H(1, \cdot): M^b \longrightarrow M^b$$

que é uma retração de M^b em $M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X D_\xi)$.

$$\text{Logo } M^b \approx M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X D_\xi).$$

Por outro lado $M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X \{0\})$ é um retrato de deformação de $M^{\lambda-\varepsilon}_U(D_\eta X D_\xi)$. Em [5] o autor mostra que

$$(D_\eta X \{0\}) \cup (\partial D_\eta X D_\xi)$$

é um retrato de deformação de $D_\eta X D_\xi$. Note também que

$$(D_\eta X\{0\}) \cup (\partial D_\eta X D_\xi)$$

é homeomorfo à $(D_\eta X\{0\}) \cup (f^{-1}(\lambda - \varepsilon) \cap D_\eta X D_\xi)$.

Assim concluímos que M^b tem mesmo tipo de homotopia que M^a com um disco de dimensão K colado pelo bordo.

O Teorema 6.2 generaliza-se de modo natural ao caso de termos n pontos críticos B-não-degenerados em relação a um campo pseudo gradiente para f : se os pontos críticos $-p_1, \dots, p_r$ - tiverem índices finitos, $K_1, \dots, K_n$ respectivamente, então

M^b tem mesmo tipo de homotopia que M^a com n discos fechados de dimensão $K_1, \dots, K_n$, colados pelo bordo.

Para completarmos este capítulo apresentaremos as Desigualdades de Morse:

TEOREMA 6.3 - Seja $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 definida na variedade de Finsler M . (As hipóteses sobre M são as mesmas já explicitadas anteriormente). Suponhamos que M possui um campo pseudo gradiente para f , em relação ao qual os pontos críticos de f sejam B-não-degenerados. Sejam a e b valores regulares de f . Então o para (M^b, M^a) é admissível e se $\mathcal{C}_m$ é o número de pontos críticos de índice m com M_a^b tem-se

$$R_0 \leq C_0, \quad R_1 - R_0 \leq \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0$$

$$\sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} R_m \leq \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \mathbb{T}_m$$

e $R_i \leq \mathbb{T}_i$, para todo i .

A demonstração deste teorema se faz como no caso clássico. Veja-se [8] ou [10].

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DE EULER-HOPF

§0 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma aplicação dos resultados obtidos no capítulo anterior. Apresentaremos a noção de característica de Euler para campos definidos em variedades de Banach. Esta teoria tem sido aplicada no estudo de problemas como o de existência de funções harmônicas entre variedades de dimensão finita, existência de geodésicas em variedades Riemannianas e o problema de Plateau.

Salientamos que, em vista da própria natureza deste capítulo, seremos mais breves e menos explícitos que no capítulo anterior.

§1 - PRELIMINARES DE ANÁLISE FUNCIONAL

Sejam E e F espaços de Banach, indicaremos por $L(E, F)$ o conjunto de todas aplicações lineares contínuas de E em F . Uma aplicação $T \in L(E, F)$ diz-se compacta se para todo conjunto limitado $B \subset E$, o conjunto $\overline{T(B)}$ for compacto em F .

O conjunto de todas as aplicações compactas de E em F é um subespaço fechado, indicado por $\mathcal{K}(E, F)$.

DEFINIÇÃO 1.1 - Uma aplicação $T \in L(E, F)$ diz-se uma aplicação linear de Fredholm se

- 1) $\dim \text{Ker } T < \infty$
- 2) $\dim F/T(E) < \infty$.

O conjunto das aplicações lineares de Fredholm é a berto em $L(E, F)$ e indica-se por $\mathcal{F}(E, F)$. O índice de uma aplicação linear T , de Fredholm é

$$\text{ind } T = \dim \text{Ker } T - \dim \text{coKer } T.$$

O índice, como função de $F(E,F)$ em $\mathbb{Z}$, é uma aplicação contínua e portanto constante nas componentes conexas de $F(E,F)$.

Indicaremos com $L_{\mathbb{T}}(E)$ o conjunto

$\{T \in L(E,F) \mid T = I + \mathbb{T}, \text{ onde } I \text{ é a identidade}$

de E e $\mathbb{T}: E \rightarrow E \text{ é compacta}\}$.

PROPOSIÇÃO 1.1 - Se $T \in L_{\mathbb{T}}(E)$ então T é linear de Fredholm e $\text{ind } T = 0$. [12]

Indicaremos por $GL(E)$ o grupo das aplicações lineares inversíveis de E . Seja $GL_{\mathbb{T}}(E) = L_{\mathbb{T}}(E) \cap GL(E)$.

Demonstra-se que $GL_{\mathbb{T}}(E)$ tem duas componentes conexas, $GL_{\mathbb{T}}^{+}(E)$ e $GL_{\mathbb{T}}^{-}(E)$ sendo a primeira delas a componente de E . [18]

DEFINIÇÃO 1.2 - Indicaremos por $S(E)$ a vizinhança máxima estrelada da origem em $GL(E)$, isto é,

$$S(E) = \{tT + (1-t)I \mid T \in GL(E), \forall t \in [0,1]\}.$$

PROPOSIÇÃO 1.2 - $S(E)$ é aberto em $GL(E)$ e $T \in S(E) \Leftrightarrow T^{-1} \in S(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Dado $T \in S(E)$ o conjunto $K = \{tT + (1-t)I \mid t \in [0,1]\}$ é compacto e está contido no aberto $GL(E)$ de $L(E)$.

Daí $d(K, \partial GL(E)) = d > 0$. Consideremos uma cobertura

finita de K com bolas de raio $\varepsilon = \frac{d}{2}$.

Se para algum $t \in [0, 1]$

$$\|A - (tT + (1-t)I)\| < \varepsilon \text{ então } A \in GL(E).$$

Vamos provar que $S(E)$ é aberto, mostrando que a bola de centro T e raio ε está contido em $S(E)$.

Seja $\tilde{T} \in GL(E)$ com $\|\tilde{T} - T\| < \varepsilon$, e $t \in [0, 1]$: afirmamos que $t\tilde{T} + (1-t)I \in GL(E)$. De fato

$$\|t\tilde{T} + (1-t)I - (tT + (1-t)I)\| = \|t(\tilde{T} - T)\| = t\|\tilde{T} - T\| \leq \|\tilde{T} - T\| < \varepsilon$$

Pelo que foi visto acima conclui-se que

$$t\tilde{T} + (1-t)I \in GL(E), \quad \forall t \in [0, 1]$$

e portanto $\tilde{T} \in S(E)$.

$$\text{Provaremos agora que } T \in S(E) \iff T^{-1} \in S(E)$$

$$T \in S(E) \iff tT + (1-t)I \in GL(E), \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\iff T(tI + (1-t)T^{-1}) \in GL(E), \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\iff T(sT^{-1} + (1-s)I) \in GL(E), \quad \forall s \in [0, 1], \quad s = 1-t.$$

$$\iff sT^{-1} + (1-s)I \in GL(E), \quad \forall s \in [0, 1] \text{ já que } T \in GL(E).$$

Assim, $TES(E) \iff T^{-1}ES(E)$.

COROLÁRIO 1.1 - $S(E)$ é contraível à identidade.

DEFINIÇÃO 1.3 - Seja E um espaço de Banach. O conjunto de the de E é o conjunto

$$R(E) = \{A \mid A = T + \mathbb{C}, TES(E), \mathbb{C} \in \mathbb{C}(E)\}.$$

Indicaremos por $GR(E)$ o conjunto $R(E) \cap GL(E)$.

Como $IES(E)$ então $L_{\mathbb{C}}(E) \subset R(E)$ e portanto

$$GL_{\mathbb{C}}(E) \subset GR(E).$$

PROPOSIÇÃO 1.3 - $R(E)$ é aberto em $L(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Seja $S \in R(E)$, $S = T + \mathbb{C}$ com $TES(E)$, $\mathbb{C} \in \mathbb{C}(E)$. Como $S(E)$ é aberto em $L(E)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\tilde{T} - T\| < \varepsilon \implies \tilde{T}ES(E)$.

Seja $S \in L(E)$ com $\|S - A\| < \varepsilon$; vamos mostrar que $S \in R(E)$.
Seja $\tilde{T} = (S - A) + T$.

$$\|\tilde{T} - T\| = \|S - A\| < \varepsilon.$$

Logo $\tilde{T}ES(E)$.

Por outro lado

$$S = (S - A) + A = \tilde{T} - T + A = \tilde{T} + \mathbb{C}, \text{ isto é, } S \in R(E).$$

Logo $R(E)$ é aberto.

Uma consequência desta proposição é que $GR(E)$ é aberto em $GL(E)$.

No espaço topológico $GR(E)$ consideramos a seguinte relação de equivalência: $A \sim B \iff A = B + \mathcal{C}$ para algum $\mathcal{C} \in \mathcal{C}(E)$. O espaço quociente será denotado por $GR(E)/\mathcal{C}(E)$.

Note-se que $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ é homeomorfo ao espaço $\pi(GR(E))$, onde π é a projeção de $L(E)$ em $L(E)/\mathcal{C}(E)$, e portanto $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ é paracompacto por ser homeomorfo a um aberto do espaço de Banach $L(E)/\mathcal{C}(E)$.

PROPOSIÇÃO 1.4 - O quociente $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ é contraível.

DEMONSTRAÇÃO - Dado $A \in GR(E)$, $A = T + \mathcal{C}$ consideremos a aplicação $t \mapsto [(tT + (1-t)I)(I + T^{-1}\mathcal{C})] \in GR(E)/\mathcal{C}(E)$, $t \in [0, 1]$.

Esta aplicação é uma homotopia entre

$$[I + T^{-1}\mathcal{C}](t=0) \quad \text{e} \quad [A] = [T + \mathcal{C}](t=1).$$

Como $T^{-1}\mathcal{C}$ é compacto

$$[I + T^{-1}\mathcal{C}] = [I].$$

Logo $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ contrai-se à identidade.

A referência sobre fibrados para as duas proposições seguintes é "Fiber Bundles" de Dale Husemoller (Springer).

PROPOSIÇÃO 1.5 - $\pi: L(E) \rightarrow L(E)/\mathcal{C}(E)$ é um fibrado trivial sobre o espaço $L(E)/\mathcal{C}(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Em [17] o autor demonstra a existência de uma aplicação contínua

$$g: L(E)/\mathcal{C}(E) \rightarrow L(E)$$

tal que $\pi \circ g = \text{Id}|_{L(E)/\mathcal{C}(E)}$. Daí segue que o fibrado acima é trivial, por ser um fibrado principal que admite uma secção.

PROPOSIÇÃO 1.6 - $(\pi, GR(E), GR(E)/\mathcal{C}(E))$ é um fibrado trivial com fibra $GL_{\mathbb{C}}(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Como $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ é aberto em $L(E)/\mathcal{C}(E)$ e $GR(E)$ é aberto em $L(E)$ segue da proposição anterior que $(\pi, GR(E), GR(E)/\mathcal{C}(E))$ admite secções locais.

Por outro lado a correspondência:

$$A + \mathcal{C}[A] \mapsto I + A^{-1} \mathcal{C} \in GL_{\mathbb{C}}(E), \quad A \in GR(E)$$

é uma bijeção entre $[A]$ em $GR(E)/\mathcal{C}(E)$ e $GL_{\mathbb{C}}(E)$; além disso $GL_{\mathbb{C}}(E)$ atua nessas fibras por translação (isto é, composição):

$$A \mapsto A + \mathcal{C} = A(I + A^{-1} \mathcal{C}).$$

Estes fatos mostram que $(\pi, GR(E), GR(E)/\mathcal{C}(E))$ é um fibrado principal com grupo estrutural $GL_{\mathbb{C}}(E)$.

Como a base $GR(E)/\mathbb{T}(E)$ é paracompacta e contraível segue que esse fibrado é principal.

COROLÁRIO 1.2 - $GR(E) \approx GR(E)/\mathbb{T}(E) \times GL_{\mathbb{C}}(E)$.

COROLÁRIO 1.3 - $GR(E)$ homotópico à $GL_{\mathbb{C}}(E)$.

DEMONSTRAÇÃO - Basta notar que $GR(E)/\mathbb{T}(E)$ é contraível.

COROLÁRIO 1.4 - $GR(E)$ tem duas componentes conexas.

Estas componentes serão designadas por $GR^+(E)$ e por $GR^-(E)$. A primeira, naturalmente, é a componente de identidade.

§2 - O GRAU DE BROWER DE UMA APLICAÇÃO DE FREDHOLM

Apresentaremos de maneira sucinta a noção de grau de Brower para aplicações de Fredholm. Algumas demonstrações serão omitidas por serem análogas às demonstrações que se fazem no caso de dimensão finita. Uma referência clássica é [9].

DEFINIÇÃO 2.1 - Uma ϕ -estrutura ou Estrutura de Fredholm, M_ϕ , modelada no espaço de Banach E , em uma variedade M é um atlas maximal $\{(U_i, \psi_i)\}$ para M , $\psi_i: U_i \rightarrow E$ de modo que

$$D(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(x) \in GL_{\mathbb{C}}(E),$$

sempre que esta derivada estiver definida.

A ϕ -estrutura M_ϕ diz-se orientável se existe um subatlas de $\{(U_i, \phi_i)\}$ com $D(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) \in GL_{\mathbb{C}}^+(E)$. Um subatlas maximal nestas condições é uma orientação em M_ϕ .

DEFINIÇÃO 2.2 - Sejam M e N variedades diferenciáveis de Ba

nach e $f \in C^1(M, N)$. f diz-se de Fredholm se

$$Df(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

é linear de Fredholm qualquer que seja $x \in M$. O índice de f é por definição o índice de $Df(x)$. (Estamos assumindo que o índice de $df(x)$ não varie com x . Isto ocorre, necessariamente, se M for conexa).

Uma aplicação de Fredholm de índice n será chamada de aplicação Φ_n .

DEFINIÇÃO 2.3 - Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ diz-se σ -própria se M é a reunião enumerável de subconjuntos fechados $M = \bigcup_j M_j$ de modo que $f|_{M_j}$ seja uma aplicação própria.

A seguinte versão do Teorema de Sard será de fundamental importância no que segue:

TEOREMA 2.1 (Smale-Sard) - Seja $f \in C^r(M, N)$, σ -própria e de Fredholm, com M e N variedades de Banach e $r > \max\{\text{ind } f, 0\}$. Então o conjunto dos valores regulares de f é um subconjunto de Baire de N . Se f é própria o conjunto dos valores regulares é aberto e denso. [1]

DEFINIÇÃO 2.4 - Sejam M e N variedades com ϕ -estruturas M_ϕ e N_ϕ modeladas em E . Uma função $C^r f: M \rightarrow N$ diz-se uma aplicação $\phi(I)$ de M_ϕ em N_ϕ se

$$D(\psi_i \circ f \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(x)) \in L_{\mathbb{C}}(E)$$

para todo $x \in M$ e todas cartas ψ_i, ϕ_j de M_ϕ e N_ϕ para as quais $\psi_i \circ f \circ \phi_j^{-1}$ esteja definida.

Toda aplicação $\phi(I)$ é uma aplicação ϕ_0 , pela própria definição e pela proposição 1.1.

Se $r \leq 2$, M_ϕ e N_ϕ estão orientadas e f é própria, então podemos obter uma noção de grau (orientado) para f com o procedimento seguinte: seja $y \in N$ um valor regular de f ; como $Df(x)$ é sobrejetora, segue que

$$\dim \text{coKer } Df(x) = \dim(T_{f(x)}N / Df(x)(T_xM)) = 0.$$

Mas f é uma aplicação ϕ_0 , logo $Df(x)$ é linear de Fredholm: $\dim \text{Ker } Df(x) = \dim \text{coKer } Df(x) = 0$.

Isto é $\text{Ker } Df(x) = \{0\}$, e portanto $Df(x)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa segue que $f^{-1}(\{y\})$ é formada por pontos isolados; finalmente como f é própria, segue que $f^{-1}(\{y\})$ é um compacto e portanto $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto finito.

Definimos o grau de f como sendo o número algébrico de pontos de $f^{-1}(\{y\})$:

$$\text{gr}(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } Df(x)$$

onde $\text{sgn } Df(x) = \pm 1$ conforme $D(\psi_i \circ f \circ \phi_j^{-1})\phi_j(x)$ pertence a

$$GL_{\mathbb{C}}^+(E) \text{ ou } GL_{\mathbb{C}}^-(E)$$

para cartas orientadas ψ_i em $f(x)$ e ϕ_j em x . Se $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ então $\text{gr}(f) = 0$.

NOTA - Para que a definição acima tenha sentido precisamos mostrar que ela não depende do valor regular y escolhido. Isto se faz como em [9].

A seguir veremos as noções de função de Rothe e de grau de um tal função.

DEFINIÇÃO 2.5 - Seja B um domínio em E e $f \in C^2(B, E)$. f diz-se uma aplicação de Rothe se para todo $x \in B$ $Df(x) \in R(E)$.

PROPOSIÇÃO 2.1 - Uma aplicação de Rothe é de Fredholm de índice 0.

A demonstração desta proposição se faz de modo análogo à da proposição 1.1.

TEOREMA 2.2 - Uma função de Rothe, $f: B \rightarrow E$ induz naturalmente uma ϕ -estrutura orientada, B_ϕ , em B^0 , tal que f é uma aplicação $\phi(I)$ em relação à ϕ -estrutura B_ϕ .

DEMONSTRAÇÃO - Vamos inicialmente construir um atlas em B^0 , em relação ao qual f será uma aplicação $\phi(I)$, depois mostra

remos que tal atlas é uma ϕ -estrutura.

Seja $x_0 \in B^0$, $Df(x_0) \in R(E) \implies Df(x_0) = T + \mathbb{C}$, com $TES(E)$ e $\mathbb{C}$ compacto.

$$TES(E) \implies TEGL(E).$$

Por outro lado $TER(E)$ (pois $T = T + 0$ e o operador nulo é compacto). Assim $TEGR(E)$.

$$\text{Seja } H: I \times B \longrightarrow E$$

$$(t, x) \longrightarrow [tT + (1-t)I](x).$$

H é uma homotopia entre T e I , tal que $H_t: B \longrightarrow E$ está em $GR(E)$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo $TEGR^+(E)$.

Portanto $Df(x_0) \in \mathbb{C} \in GR^+(E)$, $\mathbb{C}$ compacto. Seja

$$\phi: B \longrightarrow E, \quad \phi(x) = f(x) - \mathbb{C}(x).$$

$D\phi(x_0) = Df(x_0) - \mathbb{C} \in GR^+(E)$. Pelo Teorema da Função Inversa segue que existem $U \subset B$, $W \subset E$, $x_0 \in U$ tais que $\phi|_U: U \rightarrow W$ é difeo, isto é ϕ é uma carta para B^0 ao redor de x_0 . Repetindo o processo para todo $x_0 \in B^0$, obtemos um atlas para B^0 . Ainda

$$f \circ \phi^{-1}(w) = (\phi + \mathbb{C}) \circ \phi^{-1}(w) = \phi \circ \phi^{-1}(w) + \mathbb{C} \circ \phi^{-1}(w) = w + \mathbb{C} \circ \phi^{-1}(w).$$

Logo

$$D(f \circ \phi^{-1})(w) = Id + \mathbb{C} \circ D\phi^{-1}(w), \text{ onde } \mathbb{C} \circ D\phi^{-1}(w) \in \mathbb{C}(E).$$

Portanto f é uma aplicação $\phi(I)$.

Resta provar que, efetivamente, o atlas B_ϕ construído acima é uma ϕ -estrutura.

Sejam (V_0, ϕ_0) e (V_1, ϕ_1) cartas tais que esteja definida $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$.

$$f \circ \phi_i^{-1} = I + \mathbb{C}_i \phi_i^{-1} = I + K_i, \text{ com } K_i \in \mathbb{C}(E), i = 0, 1,$$

$$\implies (I + K_0) \phi_0 = f = (f \circ \phi_1^{-1}) \phi_1 = (I + K_1) \phi_1$$

$$\implies (I + K_0) \phi_0 \circ \phi_1^{-1} = I + K_1$$

$$\implies \phi_0 \circ \phi_1^{-1} = I + K_1 - K_0 \phi_0 \circ \phi_1^{-1}$$

$$\implies \phi_0 \circ \phi_1^{-1} = I + K, K = K_1 - K_0 \phi_0 \circ \phi_1^{-1} \in \mathbb{C}(E)$$

$$\implies D(\phi_0 \circ \phi_1^{-1}) \in L_{\mathbb{C}}(E).$$

Como $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$ é difeomorfismo então $D(\phi_0 \circ \phi_1^{-1}) \in GL_{\mathbb{C}}(E)$.

Logo B_ϕ é uma ϕ -estrutura.

Vejamos agora a orientação de B_ϕ : sejam ϕ_0 e ϕ_1 como acima e $w \in \phi_1(V_0 \cap V_1)$; provaremos que $D(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})(w) \in GL_{\mathbb{C}}^+(E)$, seja $x = \phi_1^{-1}(w)$

$$\begin{aligned} D(\phi_0 \circ \phi_1^{-1})w &= D\phi_0(\phi_1^{-1}(w)) \circ D\phi_1^{-1}(w) = [Df(x) - \mathbb{C}_0] \circ [Df(x) - \mathbb{C}_1]^{-1} = \\ &= T \circ T^{-1} = I. \end{aligned}$$

Logo B_ϕ está orientada.

A construção a seguir mostra como podemos obter uma noção de grau para aplicações de Rothe, a partir do teorema anterior.

Seja B um domínio em E e $f: (B, \partial B) \rightarrow (E, E - \{y\})$ uma aplicação de Rothe própria; f sendo própria, é uma aplicação fechada e portanto $f(\partial B)$ é fechado. Seja O a componente conexa (aberta) de y em $E - f(\partial B)$. Em B^0 consideremos a ϕ -estrutura induzida por f , segundo o Teorema 2.2. Sejam $M = f^{-1}(O)$ e tomemos em M a ϕ -estrutura induzida por B_ϕ (note que $f^{-1}(O) \subset B^0$).

Então $f: M_\phi \rightarrow O_\phi$ é uma aplicação $\phi(I)$, própria e portanto possui um grau de Brower, como foi construído no início desta secção. Este grau será indicado por $gr(f, B, y)$.

O grau que acabamos de definir verifica as seguintes propriedades:

- 1) Se $z \in O$ então $gr(f, B, z) = gr(f, B, y)$.
- 2) $gr(f, B, y) \neq 0 \implies \exists x \in B^0$ tal que $y = f(x)$.
- 3) Se $f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$, com $\mathcal{C}_i$ conjuntos compactos disjuntos, $\mathcal{C}_i \subset U_i^0$, $U_i \cap U_j = \emptyset$, $i \neq j$ com $1 \leq i, j \leq n$, então

$$gr(f, B, y) = \sum_i gr(f, U_i, y).$$

- 4) (Invariância do Grau por homotopias).

Se $f_t: (B, \partial B) \longrightarrow (E, E - \{y\})$, $0 \leq t \leq 1$ é uma homotopia entre as aplicações de Rothe próprias f_0 e f_1 , então

$$\text{gr}(f_0, B, y) = \text{gr}(f_1, B, y).$$

A construção acima não pressupõe que y seja um valor regular de f . Quando isto ocorrer então

$$\text{gr}(f, B, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } Df(x),$$

onde $\text{sgn } Df(x) = \pm 1$ conforme $Df(x)$ pertença a $GR^+(E)$ ou $GR^-(E)$.

§3 - CAMPOS DE ROTHE E CAMPOS DE PALAIS-SMALE

Nesta secção veremos as noções de campos de vetores de Rothe e de campos de Palais-Smale e apresentaremos uma noção de característica de Euler para os campos que forem de Palais-Smale no seu conjunto de zeros.

Assumiremos livremente a noção de conexões em fibrados, como exposta em [2]. Iniciamos com a noção de derivada covariante de uma secção.

DEFINIÇÃO 3.1 - Sejam M variedade diferenciável, de Banach, como fibrado tangente $\tau: TM \rightarrow M$, $\pi: \xi \rightarrow M$ fibrado vetorial de Banach com conexão K em $T\xi$ e $s: M \rightarrow \xi$ uma secção diferenciável de ξ . Então a derivada covariante de s é a aplicação entre fibrados $\nabla s: TM \rightarrow \xi$ tal que $\nabla s(p) = K \circ Ds(p)$, onde $Ds(p)$ é a derivada de s em p .

Note que $\nabla s(p)$ é uma aplicação linear de $T_p M$ em $\pi^{-1}(p)$.

Se p é um zero de s , isto é, $s(p) = 0 \in \pi^{-1}(p)$ então

$$\nabla s(p)(h) = Ds(p)(h).$$

DEFINIÇÃO 3.2 - Sejam M uma variedade C^r , K uma conexão C^ℓ em M e $X: M \rightarrow TM$ um campo C^1 . X diz-se um campo de Palais-Smale, ou simplesmente PS, em relação a K se

$$\nabla X(p) \in GL_{\mathbb{R}}(T_p M), \quad \forall p \in M.$$

DEFINIÇÃO 3.3 - Sejam M e K como na definição anterior. O campo C^1 $X: M \rightarrow TM$ diz-se de Rothe em relação a K se

$$\nabla X(p) \in R(T_p M), \quad \forall p \in M.$$

Das definições acima segue que os campos PS e os campos de Rothe são de Fredholm de índice zero.

DEFINIÇÃO 3.4 - Um campo C^1 $X: M \rightarrow TM$ diz-se um campo ZPS se $\nabla X(p) \in GL_{\mathbb{R}}(T_p M)$ sempre que $X(p) = 0$. Se $\nabla X(p) \in R(T_p M)$ quando $X(p) = 0$ diremos que o campo é ZR (ou Z-Rothe).

Um campo ZPS (ZR) é um campo que é PS (Rothe) no seu conjunto de zeros.

A partir de agora admitiremos que M é uma variedade diferenciável, de Banach, C^{K+1} , $K \geq 2$, completa, paracompacta modelada num espaço de Banach E que admite norma equivalente, C^2 fora da origem.

Seja $X: M \rightarrow TM$ um campo ZPS, C^2 , com um número finito de zeros $p_1, \dots, p_K$ no interior de M .

Consideremos cartas (U_i, ϕ_i) ao redor de p_i com $\phi_i(p_i) = 0 \in E$; a parte principal de X , nas coordenadas ϕ_i é uma aplicação $X^{\phi_i}: O \rightarrow E$ com $DX^{\phi_i}(0) \in GL_{\mathbb{R}}(E)$. Podemos tomar bolas fechadas B_i , $0 \in B_i \subset O$ de modo que $X^{\phi_i}: B_i \rightarrow E$ seja uma aplicação de Rothe própria.

Nestas condições temos um grau local para X , como na secção 2, que indicamos por $gr(X^{\phi_i}, B_i, 0)$. Esta construção não depende da carta ϕ_i .

DEFINIÇÃO 3.5 - Seja $X: M \rightarrow TM$ um campo ZPS, C^2 , com um número finito de zeros $p_1, \dots, p_K$. A característica de Euler de X é por definição:

$$X(X) = \sum_{i=1}^K gr(X^{\phi_i}, B_i, 0).$$

Se X é um campo ZR com um número finito de zeros a igualdade acima também pode ser tomada como uma definição da característica de Euler para X .

DEFINIÇÃO 3.6 - Um campo $X: M \rightarrow TM$ é próprio se $Zer(X)$ é um compacto em M .

DEFINIÇÃO 3.7 - Seja $X: M \rightarrow TM$ um campo C^1 e $p \in M$ um zero de

X. Dizemos que p é não-degenerado se $DX(p): T_p M \rightarrow T_p M$ é um isomorfismo.

Quando um campo ZPS (ZR) próprio tem apenas zeros não-degenerados, podemos escrever

$$\chi(X) = \sum_{p \in \text{Zer}(X)} \text{sgn } DX(p)$$

onde $\text{sgn } DX(p) = \pm 1$ conforme $DX(p)$ esteja em $GL_{\mathbb{C}}^+(T_p M)$ ou em $GL_{\mathbb{C}}^-(T_p M)$ ($GR^+(T_p M)$ ou $GR^-(T_p M)$).

TEOREMA 3.1 - Seja $X: M \rightarrow TM$ um campo ZPS, $\mathbb{C}^2$ com um número finito de zeros no interior de M. Então dada U, vizinhança de $\text{Zer}(X)$, existe um campo $Y: M \rightarrow TM$, $\mathbb{C}^2$, ZR tal que

- 1) Y tem um número finito de zeros, e estes zeros são não-degenerados.
- 2) $Y(q) = X(q)$ se $q \notin U$.
- 3) $\chi(X) = \chi(Y)$.

DEMONSTRAÇÃO - Podemos supor que $\text{Zer}(X) = \{P\}$. Seja $\phi: U' \rightarrow U$ uma carta ao redor de p com $\phi(p) = 0$, U' contido na vizinhança dada U, $\phi(U') = B_r$ onde B_r é a bola de raio r e centro 0 em E e $X^\phi: B_r \rightarrow E$ função de Rothe própria.

$$\text{Assim } X^\phi(0) = 0 \text{ e } \inf_{x \in B_r - B_{r/2}} \|X^\phi(x)\| = \eta > 0.$$

Seja $\gamma: E \rightarrow \mathbb{R}$ função C^2 , $0 \leq \gamma(x) \leq 1$, $\gamma(x) = 1$ se $x \in B_{r/2}$ e $\gamma(x) = 0$ fora de B_r . Pelo teorema 2.1 (Smale-Sard), dado ε , $0 < \varepsilon < \eta/2$, existe γ valor regular de X^ϕ com $\|\gamma\| < \varepsilon$.

Sejam $Y^\phi: B_r \rightarrow E$ definida por $Y^\phi(x) = X^\phi(x) - \gamma(x)Y$, e Y o campo C^2 em M dado por

$$Y(q) = \begin{cases} X(q) & \text{se } q \in M - U' \\ Y^\phi(x) & \text{se } q \in U' \text{ e } x = \phi(q) \end{cases}$$

Se $q \notin U'$ então $Y(q) = X(q) \neq 0$; se $q \in U'$ e $Y(q) = 0$ então $Y^\phi(x) = 0$ com $x = \phi(q)$.

Logo $X^\phi(x) = \gamma(x)Y$. Isto não pode ocorrer se $x \notin B_{r/2}$, pois $B_r - B_{r/2} \parallel \gamma(x)Y \parallel < \eta \leq \|X^\phi(x)\|$.

$$\text{Assim } Y(q) = 0 \iff x = \phi(q) \text{ e } X^\phi(x) = Y. \quad (I)$$

Como $R(E)$ é aberto em $L(E)$ se ε for suficientemente pequeno e x for um zero de Y

$$DY^\phi(x) = DX^\phi(x) \in R(E)$$

e portanto Y é ZR .

Como γ é valor regular de X^ϕ e Y^ϕ é de Fredholm de índice zero (nos seus zeros) segue que $DY^\phi(x)$ é isomorfismo, isto é, os zeros de Y^ϕ em B_r são não-degenerados, e portanto os zeros de Y em M são não-degenerados.

X^ϕ sendo uma aplicação própria, juntamente com o fato de que os zeros de Y são isolados (e portanto $\{x | x = \phi(q) \text{ e } X^\phi(x) = y\}$ é formado por pontos isolados) garantem que há um número finito de zeros de Y (em particular Y é próprio).

Como isso já provamos 1) e 2). Para 3) basta verificar que X e Y são homotópicos.

A aplicação $(t, x) \rightarrow tX^\phi(x) + (1-t)Y^\phi(x)$ é uma homotopia entre X^ϕ e Y^ϕ , que não possui zeros em ∂B_r . A propriedade de invariância por homotopias garante que

$$\text{gr}(X^\phi, B_r, 0) = \text{gr}(Y^\phi, B_r, 0)$$

e portanto $X(X) = X(Y)$.

§4 - O TEOREMA DE EULER-HOPF

Nesta secção estabeleceremos condições sob as quais a característica de Euler de um campo próprio ZPS definido na variedade M seja igual à característica de Euler de M . Assumiremos que M tem todas as propriedades já mencionadas, inclusive aquelas do capítulo 1.

TEOREMA 4.1 - Seja X um campo vetorial C^1 , ZPS, que é pseudo-gradiente para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $p \in M^0$ um ponto crítico de f , B -não-degenerado em relação a X e seja $\beta = \text{ind}$. Então $\beta < \infty$ e

$$\text{sgn } DX(p) = (-1)^\beta.$$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $A = DX(p): T_p M \rightarrow T_p M$. Como X é ZPS, A é inversível e da forma $I + \mathbb{C}$ com $\mathbb{C} \in \mathcal{C}(E)$. Como no Lema 2.1 do capítulo 1 temos: $T_p M = T_p M^+ \oplus T_p M^-$, $T_p M^-$ e $T_p M^+$ são invariantes sob A , o espectro de $A|_{T_p M^+}$ é formado por números complexos de parte real positiva enquanto que os de $A|_{T_p M^-}$ têm parte real negativa

Como $A = I + \mathbb{C}$ provaremos que o espectro de A é real. Inicialmente lembramos que os elementos do espectro de um operador compacto $\mathbb{C}$, exceto 0, são autovalores; daí se o número complexo λ pertencer ao espectro de A então $\lambda - 1$ pertence ao espectro de $\mathbb{C}$.

Logo se $\lambda \neq 1$ $(\lambda + 1)$ é autovalor de $\mathbb{C}$ e portanto λ é autovalor de A .

A condição $H_p f(Au, u) > 0$ com $u \neq 0$ da definição 2.1 do capítulo 1 acarreta que os auto-valores de A sejam reais; assim $\lambda \in \mathbb{R}$, o que demonstra que o espectro de A é real.

-1 não é autovalor de $\mathbb{C}$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ os autovalores de $\mathbb{C}$ (reais) menores que -1 e sejam $\beta_1, \dots, \beta_m$ suas multiplicidades. Lembramos que $\beta_i < \infty$, $i=1, \dots, m$, e que para cada i existe um menor inteiro $n_i < \infty$ tal que

$$\text{Ker}(\lambda_i I + \mathbb{C})^{n_i + r} = \text{Ker}(\lambda_i I + \mathbb{C})^{n_i}, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Seja } F_i = (\lambda_i I + \mathbb{C})^{n_i}.$$

Como $\lambda_i I + \mathbb{C}$ de Fredholm segue que $\dim F_i < \infty$. Ponemos $E^- = \bigoplus_{i=1}^m F_i$. Assim $\dim E^- < \infty$, e portanto E^- tem um complemento ortogonal em relação a $H_p f$, digamos E^+ . Note que E^+ e E^- são invariantes sob A , e que se λ for um elemento do espectro de $A|_{E^+}$, então $\lambda > 0$, pois se tivermos $\lambda < 0$, então

$\lambda - 1$ seria um autovalor de $\mathbb{C}$, menor que -1 em E^+ .

A mesma demonstração que fizemos do Lema 2.2 (capítulo 1) se aplica nesta situação para garantir que H_p^f é positivo em E^+ e negativo definido em E^- .

Assim $\dim T_p M^- = \dim E^-$.

Logo $\beta = \text{ind } p < +\infty$.

Mostraremos agora que $\text{sgn } DX(p) = (-1)^\beta$.

Consideremos a homotopia A_t , $0 \leq t \leq 1$ definida por

$$A_t|_{T_p M^+} = (I + \mathbb{C})|_{T_p M^+} \quad \text{e} \quad A_t|_{T_p M^-} = A.$$

A aplicação $t \rightarrow A_t$ é um caminho em $GL_{\mathbb{C}}(T_p M)$ que liga $A(t=1)$ com uma aplicação linear que é a identidade em $T_p M^+$ e A em $T_p M^-$ ($t=0$).

Portanto para analisarmos se $A \in GL_{\mathbb{C}}^+(T_p M)$ precisamos estudar A restrito à $T_p M^-$.

Olhando a forma canônica de Jordan de $A|_{T_p M^-}$ conclui-se que

$$\text{sgn}(\det A|_{T_p M^-}) = (-1)^\beta.$$

Logo se $(-1)^\beta < 0$ então $A \in GL_{\mathbb{C}}^-(T_p M)$ e se $(-1)^\beta > 0$ então $A \in GL_{\mathbb{C}}^+(T_p M)$. Em qualquer caso

$$\operatorname{sgn} DX(p) = (-1)^{\beta}.$$

Nosso último teorema é o teorema de Euler-Hopf:

TEOREMA 4.2 - Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $X: M \rightarrow TM$ um campo próprio, C^1 , ZPS, pseudo-gradiente para f , sendo que os pontos críticos de f estão em M^0 e são B-não-degenerados em relação a X . Então:

$$1) \chi(X) = \sum_i (-1)^{\beta_i} \mathfrak{C}_i \text{ onde } \mathfrak{C}_i \text{ é o número de pontos críticos de índice } \beta_i.$$

$$2) \chi(X) = \chi(M).$$

DEMONSTRAÇÃO - A igualdade 1) segue imediatamente do teorema anterior, enquanto 2) é consequência das Desigualdades de Morse (Teorema 6.3 do capítulo 1).

BIBLIOGRAFIA

- [1] - R.Abraham & J.Robin, *Transversal Mappings and Flows*, W.A.Benjamin, Inc., New York, 1967.
- [2] - H.Eliasson, "Geometry of Manifolds of Maps", *J.Differential Geometry* 1 (1967), 169-194.
- [3] - M.W.Hirsch, *Differential Topology*, GTM Springer-Verlag, New York, 1976.
- [4] - S.Lang, *Introduction to Differential Manifolds*, Interscience, New York, 1962.
- [5] - E.L.Lima, "Introdução à Teoria de Morse", *Atas do 2º Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1960, 99-124.
- [6] - A.A.H.de Mello & M.Barone Jr., *Equações Diferenciais — Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1979.
- [7] - E.Michael, "Continuous Selections I", *Ann. of Math.* 63 1956, 361-381.
- [8] - J.W.Milnor, *Morse Theory*, Annals Studies 51, Princeton University Press, 1969.
- [9] - J.W.Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [10] - R.S.Palais, "Morse Theory on Hilbert Manifolds", *Topology* 2 (1963), 299-340.
- [11] - R.S.Palais, "Lusternick-Schnirelman Theory on Banach manifolds", *Topology* 5 (1966), 115-132.
- [12] - R.S.Palais, *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem*, Princeton University, New Jersey, 1964.

- [13] - J. Palais Jr., *Seminário de Sistemas Dinâmicos*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.
- [14] - F. Riesz & B. Sz-Nagy, *Leçons D'Analyse Fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie, 1952.
- [15] - S. Smale, "Morse Theory and a Non Linear Generalization of the Dirichlet Problem", *Ann. of Math*, 80 (1964), 382-396.
- [16] - A.J. Tromba, "A General Approach to Morse Theory", *J. Differential Geometry*, 12 (1977), 47-85.
- [17] - A.J. Tromba, "The Euler Characteristic of Vector Fields on Banach manifolds and a Globalization of Leray-Schauder Degree", *Advances in Math.* 2 (1978), 148-173.
- [18] - A.J. Tromba & K.D. Elworthy, "Differential Structures and Fredholm Maps on Banach Manifolds", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. XV, AMS, 1970, 45-94.