**Sobre os P-subespaços
em uma train álgebra
de posto 3**

Roseli Arbach Fernandes de Oliveira

**Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática**

**Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa**

- São Paulo, outubro de 1997 -

Sobre os P -subespaços em uma train álgebra de posto 3

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Roseli Arbach Fernandes de Oliveira
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 15 de dezembro 1997.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Luiz Antônio Peresi - IME - USP
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández - Universidade de Oviedo
- Prof. Dr. Antônio José Engler - IMECC - UNICAMP.
- Profa. Dra. Ires Dias - ICMSC - USP

*“Não vemos o que vemos
Vemos o que somos”
Fernando Pessoa*

Para

*Meu marido Luis, com quem divido há 16 anos
todos os momentos de tristeza e de alegria.
Meus filhos, Fábio e Ricardo, cujas existências
me dão força para seguir adiante.
D. Rosa, mãe e amiga, presente em todos
os momentos de minha vida.
Meu pai Abdo (in memoriam), exemplo
de trabalho e integridade.*

Agradecimentos

Embrenhar-se numa jornada como esta exige muito sacrifício. São muitas horas de dedicação diária, por um longo período; são muitas horas de sono trocadas por muitas horas de estudo e dessa troca, diversas vezes, surgem poucos resultados. Mas tudo isso é sacrifício pessoal, do qual não podemos (ou não devemos) nos queixar, pois ele é consequência de uma opção também pessoal. Refiro-me ao sacrifício que é imposto à nossa família, aos nossos filhos, pois durante todo tempo em que estive envolvida com o doutorado, embora a escolha tivesse sido minha, o envolvimento foi de todos. Por isso agradeço à minha mãe, D. Rosa, que tomou a si a responsabilidade de cuidar de meus filhos; agradeço a meu marido, Luis, que sempre esteve ao meu lado e me incentivou nas horas em que batia um grande desânimo; aos meus filhos, Fábio e Ricardo, que desde muito pequenos tiveram que aprender a conviver com a ausência dos pais, em benefício de nosso trabalho. Durante esse período pude também contar com a ajuda de meu irmão Nelson, de minha cunhada Daisy, e de minha tia Mentaha; a todos eles deixo meus agradecimentos. Agradeço também aos meus colegas do Departamento de Matemática da FEIS-UNESP, em particular ao Prof. Aldir Chaves Brasil Júnior e Prof. Luis Antônio Fernandes de Oliveira, que sempre se dispuseram a me ouvir. À CAPES meus agradecimentos pelo financiamento parcial, em forma de bolsa de estudos, deste trabalho.

Não posso deixar de citar algumas pessoas que conheci no IME-USP, em especial Lúcia Satie Ikemoto, Juaci Picanço da Silva, Prof. Henrique Guzzo Jr. e Maria Luiza Paiva e Silva Lelis. A convivência com eles no período em que estive em São Paulo, especialmente nos últimos cinco

meses, tornou mais agradável esta fase difícil em que tive que ficar longe de minha família e por isso registro aqui minha gratidão a todos eles.

Quando pensei em estudar Álgebra, foi-me sugerido procurar pelo Prof. Roberto Costa. Foi um sábio conselho que recebi e por ele agradeço sinceramente ao meu colega de Departamento e amigo Prof. João Toledo, que além da valiosa sugestão, prontificou-se a me apresentar ao Prof. Roberto, em uma de suas visitas a Ilha Solteira.

Eu me considero uma pessoa de sorte e uma das grandes sortes que tive foi ter sido aceita como aluna pelo Prof. Roberto Costa. Ser um excelente Pesquisador e Matemático não é uma tarefa fácil. Ser um excelente Pesquisador e Matemático, além disso, conservar a humildade e ainda manter-se um ser humano íntegro é bem mais difícil. Tudo isso faz com que eu admire profundamente o Prof. Roberto Costa. Há pessoas a quem dizer apenas “muito obrigado” não traduz o quanto lhes somos gratos, o quanto lhes devemos, mas mesmo assim isso é o único que sabemos dizer. Ao Prof. Roberto Costa, meu muito obrigada.

Roseli

Abstract

In this work, we will introduce the concepts of P-monomials and P-subspaces in a train algebra A of rank 3. We study in details those of degree ≤ 4 and we will find some algebraic and numerical invariants of A . Moreover, under some determined conditions, we obtain the minimal dimension of A and it is found minimal examples. Finally, we will introduce and study the concept of relative invariance.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos os conceitos de P-monômios e P-subespaços em uma train álgebra A de posto 3. Estudamos detalhadamente aqueles de grau ≤ 4 e encontramos alguns invariantes algébricos e numéricos de A . Além disso, sob determinadas condições, obtemos a dimensão mínima de A e são encontrados exemplos minimais. Finalmente, introduzimos e estudamos o conceito de invariância relativa.

Conteúdo

1	P-subespaços em train álgebras	1
1.1	Breve histórico	1
1.2	Resultados básicos	2
1.3	Os subespaços $p(U, V)$: problemas	7
2	Sobre os subespaços $U^n \oplus U^{n+1}$	15
2.1	Invariância da dimensão de U^n	15
3	Soluções parciais do Problema 2	21
3.1	Alguns casos do Problema 2	21
4	Sobre a dimensão de A, baseada em P-monômios	27
4.1	Lemas auxiliares	27
4.2	Resultados e exemplos	33
5	Sobre a invariância dos P-subespaços	54
5.1	Os P-subespaços de grau ≤ 4	54
5.2	Proposições auxiliares: geradores de $m(U, V)$	55
5.3	Invariância: Grupos I e II	63
5.4	Sobre o Grupo II	81
6	Ideais de tipo polinomial	94
6.1	O estudo do Grupo I	94
6.2	Ideais gerados pelos monômios de Peirce	98
6.3	Propriedades de ideais	102

7	Sobre a invariância relativa dos P-subespaços	110
7.1	Invariância relativa: definição	110
7.2	Um caso particular do Problema 8	111
7.3	Problema 9: casos particulares	116
8	Apêndice	129
9	Bibliografia	133

Capítulo 1

P-subespaços em train álgebras

1.1 Breve histórico

No período de 1939 a 1951, I. M. H. Etherington escreveu uma série de artigos nos quais introduziu vários conceitos novos em álgebra não associativa, na tentativa de construir modelos para o estudo de Genética de Populações, ver [11] a [15]. Em particular, ele considerou as t -álgebras, que são álgebras não associativas, munidas de um homomorfismo não nulo no corpo de escalares, satisfazendo uma equação polinomial, que envolve também este homomorfismo. O estudo destas álgebras esteve esquecido durante muitos anos porém tem sido mais intenso nos últimos 10 anos. Agora já se conhecem os resultados fundamentais e pode-se avaliar a dificuldade para tentar uma classificação destas álgebras. As referências colocadas ao final dão uma idéia dos problemas que estão sendo estudados nesta área. Em especial, os artigos [9], [20], [21] contêm resultados recentes e significativos sobre o tema das t -álgebras. O artigo [28] contém uma análise crítica dos conceitos básicos da teoria das álgebras que são relevantes em Genética de Populações. Em especial, contém o material clássico sobre as t -álgebras, bem como a motivação para a sua introdução por Etherington. Nesta tese, fazemos um estudo bastante detalhado de algumas propriedades de subespaços de tipo polinomial que são originários de uma decomposição de Peirce de uma t -álgebra de posto 3 e têm grau não superior a 4 (ver mais detalhes no parágrafo 3 deste Capítulo). Esperamos que o conhecimento destas propriedades possa ser

utilizado quando se pensar em fazer uma classificação destas álgebras.

1.2 Resultados básicos

Nesta seção, introduziremos, sem demonstrações, os conceitos e resultados básicos já conhecidos sobre *train* álgebras de posto 3 e que são necessários para a leitura deste trabalho.

Sejam F um corpo de característica diferente de 2 e A uma F -álgebra de dimensão finita, comutativa, não necessariamente associativa. Se existir um homomorfismo de álgebras, não nulo, $\omega: A \rightarrow F$ então o par (A, ω) será chamado uma *álgebra bária* (ou *álgebra ponderada*) e ω a sua *função peso*. (Em geral, o número de homomorfismos não nulos $\omega: A \rightarrow F$ pode variar entre 0 e $\dim A$. Álgebras nilpotentes não possuem nenhum homomorfismo não nulo ω como acima; no outro extremo, $A = F^n$ possui n homomorfismos não nulos com valores em F , a saber as n projeções de F^n em F). Se a é um elemento arbitrário de A , o escalar $\omega(a)$ é chamado o *peso de a* . O núcleo N da função peso é um ideal de codimensão 1 em A . Os ideais de A , contidos em N , são ditos *ideais báricos* de A . Se I é um ideal bárico de A , então A/I é também bária, sendo a função peso $\bar{\omega}: A/I \rightarrow F$ definida por $\bar{\omega}(a + I) = \omega(a)$, $a \in A$. Se (A, ω) é uma álgebra bária e a é um elemento de A tal que $\omega(a) = 1$, então $A = Fa \oplus N$ pois, para todo x de A , tem-se $x = \omega(x)a + [x - \omega(x)a]$ e $x - \omega(x)a$ tem peso 0.

Na teoria das álgebras não associativas há várias maneiras de se definir potências de elementos. Usaremos neste trabalho apenas as *potências principais*, definidas recursivamente por $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n a$, para todo $n \geq 1$. Observemos que, em geral, $a^i a^j \neq a^{i+j}$. Quando $a^i a^j = a^{i+j}$ para todo $a \in A$, $i, j \geq 1$, dizemos que A é de *potências associativas*. As grandes classes de álgebras não associativas (Lie, Jordan, alternativas,...) são de potências associativas. As *train* álgebras não são, em geral, de potências associativas.

Para cada álgebra não associativa B , definimos $B^1 = B$, $B^2 = BB$, $B^3 = B^2 B^1 + B^1 B^2 = (BB)B + B(BB)$ e de modo geral $B^i = B^1 B^{i-1} + B^2 B^{i-2} + \dots + B^{i-2} B^2 + B^{i-1} B$. Dizemos que B é *nilpotente* se existe

k tal que $B^k = 0$. É fácil ver que a álgebra B é nilpotente se e somente se existir um inteiro positivo k tal que o produto de quaisquer k elementos de B é nulo, não importando a forma como os elementos estão associados. O menor inteiro k para o qual esta propriedade é satisfeita é chamado o *índice de nilpotência* de B .

Para cada álgebra não associativa B , definimos $B^{(0)} = B$, $B^{(1)} = BB$, ..., $B^{(i)} = B^{(i-1)}B^{(i-1)}$. Então B é *solúvel* se existe um inteiro k tal que $B^{(k)} = 0$. O menor inteiro k tal que $B^{(k)} = 0$ é chamado o *índice de solubilidade* de B . É fácil ver que se B é nilpotente então B é solúvel, mas a recíproca é falsa em geral. No caso de álgebras associativas, os conceitos de nilpotência e solubilidade coincidem.

Uma álgebra bária (A, ω) sobre o corpo F é dita uma *train álgebra* (ou, simplesmente *t-álgebra*) se existirem escalares $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ tais que todo elemento a de A satisfaz a equação $a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a = 0$. Nessas condições temos $1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$. Para ver isso, basta calcularmos o peso do elemento $a^n + \gamma_1 \omega(a) a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)^{n-1} a$, sendo a um elemento de A de peso diferente de zero.

O polinômio $f(x) = x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x$ é chamado *train polinômio* (ou *t-polinômio*) de grau n e o grau do polinômio de menor grau satisfeito por A é chamado o *posto* de A . É fácil ver que este polinômio é único. Se A é uma t-álgebra de posto n , os elementos do núcleo de ω satisfazem a identidade $x^n = 0$. Como consequência, segue-se que o homomorfismo peso de A é univocamente determinado. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [36, pag. 36] ou em [28, Proposição 3.2]. Em nosso trabalho, estaremos interessados apenas em t-álgebras de posto 3, isto é, álgebras bárias que satisfazem a equação

$$x^3 - (1 + \gamma) \omega(x) x^2 + \gamma \omega(x)^2 x = 0 \quad (1.1)$$

com $\gamma \in F$. Resultados básicos sobre t-álgebras de posto 3 podem ser vistos em [6] e [36]. Em particular, todos os resultados enunciados nesta

seção podem ser encontrados nestas referências. A teoria das t-álgebras de posto ≥ 4 é muito mais complexa, veja por exemplo [16] e [18].

Assumiremos, em todo o trabalho, que $2\gamma \neq 1$ e, como consequência, garantimos a existência em A de (pelo menos) um elemento idempotente de peso 1. De fato, é fácil ver que se $d \in A$ e $\omega(d) = 1$ então $e = (1 - 2\gamma)^{-1}(d^2 - 2\gamma d)$ é um idempotente de peso 1. Relativamente a esse idempotente, temos a decomposição de Peirce de A na soma direta

$$A = Fe \oplus U_e \oplus V_e \quad (1.2)$$

sendo

$$U_e = \{u \in N : 2eu = u\} \quad (1.3)$$

$$V_e = \{v \in N : ev = \gamma v\} \quad (1.4)$$

$$N = U_e \oplus V_e \quad (1.5)$$

Assim U_e e V_e são os subespaços próprios do operador linear $L_e: N \rightarrow N$ dado por $n \mapsto en$, correspondentes aos seus valores próprios (distintos) $\frac{1}{2}$ e γ . Para cada $x \in A$ como em (1.2) temos $x = \omega(x)e + u + v$, sendo $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Esta expressão é a decomposição de Peirce do elemento x , relativamente a e . Quando $2\gamma = 1$, a equação (1.1) torna-se $2x^3 + -3\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e a teoria torna-se mais difícil, pois não temos a decomposição (1.5) do núcleo de ω .

As linearizações da equação (1.1), dadas por (1.6) e (1.7) abaixo, são também identidades em uma t-álgebra de posto 3:

$$x^2y + 2x(xy) - (1 + \gamma)[2\omega(x)xy + \omega(y)x^2] + \gamma[\omega(x)^2y + 2\omega(xy)x] = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} [x(yz) + y(xz) + z(xy)] - (1 + \gamma)[\omega(x)yz + \omega(y)xz + \omega(z)xy] + \\ + \gamma[\omega(yz)x + \omega(xz)y + \omega(xy)z] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Usando-se essas linearizações, provam-se as seguintes relações entre os subespaços U_e e V_e :

$$U_e^2 \subseteq V_e \quad (1.8)$$

$$U_e V_e \subseteq U_e \quad (1.9)$$

$$V_e^2 = 0 \quad (1.10)$$

$$U_e^{2n+1} \subseteq U_e \quad (n \geq 0) \quad (1.11)$$

$$U_e^{2n} \subseteq V_e \quad (n \geq 1) \quad (1.12)$$

Para provar (1.8) tomamos $x = e, y, z \in U_e$ em (1.7) e obtemos $e(yz) + y(ez) + z(ey) - (1 + \gamma)yz = 0$, ou seja $e(yz) + yz - yz - \gamma yz = 0$ ou $e(yz) = \gamma yz$, o que significa que $yz \in V_e$ e assim $U_e^2 \subseteq V_e$. As identidades (1.9) e (1.10) são provadas de maneira análoga. Para provar (1.11) e (1.12), usamos indução sobre n .

Usando-se (1.7), vemos que três elementos arbitrários x, y, z de peso 0 satisfazem a identidade de Jacobi, ou seja

$$J(x, y, z) = x(yz) + y(xz) + z(xy) = 0 \quad (1.13)$$

Esta identidade desempenha um papel fundamental neste trabalho. Por exemplo, através dela provamos (por indução sobre i) que para todo subespaço X de A , vale a inclusão $X^i X^j \subseteq X^{i+j}$. De fato, se $i = 1$, para todo j temos que $X^i X^j = XX^j = X^{j+1} = X^{i+j}$. Suponhamos que $X^{i-1} X^j \subseteq X^{i+j-1}$, para todo número natural $j \geq 2$ e consideremos um gerador y de $X^i X^j$. Então $y \in X^i X^j = (XX^{i-1})X^j$, isto é, $y = (x_1 x_2)x$, sendo $x_1 \in X, x_2 \in X^{i-1}$ e $x \in X^j$. De $J(x_1, x_2, x) = 0$, obtemos $y = -x_1(x_2 x) + -x_2(x_1 x) \in X(X^{i-1} X^j) + X^{i-1}(XX^j)$. Mas, da hipótese de indução, temos que $X(X^{i-1} X^j) \subseteq XX^{i+j-1} = X^{i+j}$ e $X^{i-1}(XX^j) = X^{i-1} X^{j+1} \subseteq X^{i+j}$. Logo, $y \in X^{i+j}$ e daí concluímos que $X^i X^j \subseteq X^{i+j}$, para quaisquer números naturais i e j .

Além disso, se $u, u_1 \in U_e, v \in V_e$ são elementos quaisquer desses subespaços, a partir de (1.13), provam-se as seguintes relações:

$$u(uv) = 0 \quad (1.14)$$

$$(uv)v = 0 \quad (1.15)$$

$$u^2(uv) = 0 \quad (1.16)$$

$$(uv)^2 = 0 \quad (1.17)$$

$$u(u^2u_1) = 0 \quad (1.18)$$

Em qualquer álgebra bária (A, ω) chama-se *ideal de Etherington* de A o ideal gerado pelos elementos $a^2 - \omega(a)a$, com $a \in A$. Se A é train de posto 3 satisfazendo (1.1) com decomposição de Peirce (1.2) então este ideal exprime-se por $UV \oplus V$. Voltaremos a falar deste ideal nos capítulos seguintes. Ele servirá para motivar a formulação de problemas referentes a t-álgebras, que serão tratados neste trabalho.

Denotando-se por $I(A)$ o conjunto dos elementos idempotentes de A , (necessariamente de peso 1), é conhecido que

$$I(A) = \{e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2 : u_0 \in U_e\} \quad (1.19)$$

sendo $\lambda = (1 - 2\gamma)^{-1}$. Ou seja, $I(A)$ é parametrizado por U_e . Também com relação a e_0 é possível considerar a decomposição de Peirce de A , isto é,

$$A = Fe_0 \oplus U_0 \oplus V_0$$

sendo $U_0 = \{u \in N : 2e_0u = u\}$, $V_0 = \{v \in N : e_0v = \gamma v\}$. As relações entre os subespaços U_e e U_0 , V_e e V_0 são as seguintes:

$$U_0 = \{u + 2\lambda u_0u : u \in U_e\} \quad (1.20)$$

$$V_0 = \{v - 2\lambda u_0v : v \in V_e\} \quad (1.21)$$

Além disso, segue de (1.8), (1.9), (1.20) e (1.21) que as aplicações lineares

$$u \in U_e \mapsto u + 2\lambda u_0u \in U_0 \quad (1.22)$$

$$v \in V_e \mapsto v - 2\lambda u_0v \in V_0 \quad (1.23)$$

são bijetoras e portanto $\dim U_0 = \dim U_\epsilon$ e $\dim V_0 = \dim V_\epsilon$. Isto permite definir para t-álgebras de posto 3 o invariante numérico *tipo* de A como sendo o par ordenado de inteiros não negativos $(1 + \dim U_\epsilon, \dim V_\epsilon)$. A classe de todas as t-álgebras de posto 3 pode ser subdividida em subclasses formadas pelas álgebras de mesmo tipo. Duas álgebras pertencentes a duas subclasses distintas certamente não são isomorfas. Elas realizam portanto uma pré-classificação das t-álgebras de posto 3. Para melhor visualizar este fato, costuma-se olhar para o “triângulo de tipos” a seguir:

[illegible]

As álgebras de tipo $(1 + n, 0)$ foram omitidas do “triângulo” pois satisfazem a t-equação $x^2 - \omega(x)x = 0$ e portanto têm posto 2 e sua estrutura é bem conhecida. De fato, sua tábua de multiplicação tem a forma: $e^2 = e$, $2eu_i = u_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), sendo nulos os demais produtos. Nos artigos [6] e [7] foram descritas as t-álgebras de tipos $(1, n)$, $(n+1, 0)$, $(2, n-1)$, $(n, 1)$, $(3, n-2)$, o que garante a classificação das t-álgebras de posto 3 e dimensão < 5 .

1.3 Os subespaços $p(U, V)$: problemas

Para simplificar as notações, daqui para frente denotaremos U_e e V_e por U e V , respectivamente, sempre que isto não acarretar imprecisão de linguagem. Quando trabalharmos com dois idempotentes e e e_0 usaremos

as notações U , V , U_0 e V_0 para os correspondentes subespaços de Peirce, de acordo com (1.20) e (1.21).

Esta seção está dedicada à formulação de uma série de questões envolvendo certos subespaços de uma t -álgebra de posto 3 satisfazendo a equação (1.1) com $2\gamma \neq 1$. Estes problemas vão surgindo de uma observação cuidadosa da decomposição de Peirce (1.2) e das relações que a seguem. Acharmos que a solução destes problemas, mesmo que parcial, pode contribuir para um melhor conhecimento destas álgebras.

Seja então (A, ω) uma t -álgebra de posto 3, satisfazendo a equação (1.1) com $2\gamma \neq 1$ e seja (1.2) sua decomposição de Peirce relativa a um idempotente genérico e . Denotemos por $m(U, V)$ todo subespaço vetorial de A (em realidade, de $N = \ker \omega$) obtido multiplicando, de maneira não associativa, os subespaços U e V . Tais subespaços serão chamados de *monômios de Peirce* (ou *P-monômios*) de A . Por exemplo, U , V , U^2 , UV , U^3 , U^3V , $(UV)V$, $U[(UV)V]$, $[(UV)V]V$, etc, ... são P-monômios. O número de fatores em $m(U, V)$ é dito o *grau* de $m(U, V)$. Podemos também considerar o grau em U e em V separadamente.

Decorre facilmente das equações (1.8), (1.9) e (1.10) que todo P-monômio está contido em U ou em V (mas não em ambos, exceto se for zero). Em particular, por exemplo, se $m(U, V) \subseteq U$ e A é de tipo $(1 + r, s)$ então $\dim m(U, V) \leq r$. O primeiro problema é uma pergunta natural:

Problema 1: É possível determinar se $m(U, V)$ está contido em U ou em V , em função do grau em U e V de $m(U, V)$?

Esta questão é respondida no Lema 1.1, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que um dado P-monômio de grau arbitrário esteja contido em U .

Consideremos agora todos os P-monômios $m(U, V)$ onde fixamos a priori o número máximo de fatores U e V . Uma parte deles está contida em U e outra em V .

Problema 2: Estabelecer as relações de inclusão entre os P-monômios contidos em U (respectivamente, em V).

A título de exemplo, os P-monômios não nulos contidos em U e de grau ≤ 4 são:

$$U, UV, U^3, (UV)V, U[U(UV)], U^3V = U^2(UV), [(UV)V]V$$

Da mesma forma, os P-monômios não nulos contidos em V e de grau ≤ 4 são:

$$V, U^2, U(UV), U[(UV)V] = (UV)^2, U^4$$

As relações de inclusão entre tais subespaços, que seguem diretamente das equações (1.8) a (1.12), são dadas nos diagramas a seguir:

Por exemplo, a inclusão $U[U(UV)] \subseteq U^3$ do primeiro diagrama vem do fato de que $UV \subseteq U$. A análise destes conjuntos parcialmente ordenados de subespaços ajuda a entender a estrutura das t-álgebras de posto 3. A solução deste problema, em cada caso concreto, pode ser feita usando as equações (1.6), (1.7), as inclusões (1.8) a (1.12) e as igualdades (1.13) a (1.18). Como caso particular deste problema, aparece a questão de saber quando dois P-monômios são genericamente iguais. Já observamos que $U[(UV)V] = (UV)^2$ e também que $U^3V = U^2(UV)$. A demonstração destas igualdades será feita mais adiante, no Lema 3.1. Ao estabelecermos igualdades desta natureza estamos mostrando que as t-álgebras satisfazem formas (muito) fracas de associatividade, que são igualdades envolvendo subespaços e não elementos.

Passemos agora a subespaços mais gerais, que são obtidos por soma de P-monômios. Estes serão chamados *P-subespaços* ou *subespaços de Peirce* de A . Eles têm a forma $p(U, V) = \sum m(U, V)$. A soma poderá ser direta ou não. Por exemplo, $p(U, V) = UV \oplus V$ é um P-subespaço, o mesmo ocorrendo com $N = U \oplus V$.

Problema 3: Quais dos P-subespaços $p(U, V)$ são invariantes em relação a uma mudança arbitrária de idempotentes?

Com as notações da seção anterior, queremos que se tenha sempre $p(U, V) = p(U_0, V_0)$. Um exemplo importante deste caso é $p(U, V) = UV \oplus V$ que é o ideal de A gerado pelos elementos $a^2 - \omega(a)a$, $a \in$

$\in A$. Esta maneira de descrevê-lo já mostra que $UV \oplus V = U_0V_0 \oplus \oplus V_0$. Também temos $N = U \oplus V = U_0 \oplus V_0$ como outro exemplo desta situação.

O problema seguinte propõe uma questão um pouco mais fraca.

Problema 4: Quais dos P-subespaços $p(U, V)$ têm dimensão invariante em relação a uma mudança arbitrária de idempotentes?

Aqui queremos que $\dim p(U, V) = \dim p(U_0, V_0)$, com as notações da seção anterior. É claro que toda solução do Problema 3 é também solução do Problema 4.

Neste trabalho, restringimos nossos estudos aos P-monômios e P-subespaços de grau ≤ 4 , num total de 89 subespaços (apenas em alguns casos isolados consideramos graus arbitrários). No Capítulo 5, respondendo às questões dadas nos problemas 3 e 4, mostramos que os 89 P-subespaços de grau ≤ 4 podem ser agrupados em dois conjuntos: o Grupo I, que contém 24 subespaços que provamos serem invariantes por mudança de idempotentes e o Grupo II, contendo 65 P-subespaços que têm dimensão invariante por mudança de idempotentes

Problema 5: Sabendo que $\dim p(U, V) = \dim p(U_0, V_0)$ é possível encontrar uma aplicação linear bijetora “natural” (como ocorreu em (1.20) e (1.21)) entre $p(U, V)$ e $p(U_0, V_0)$?

Ainda no Capítulo 5, respondemos parcialmente a esta questão (veja Lemas 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13).

Observemos que $p(U, V) = UV \oplus V$ é um ideal de A e que $m(U, V) = = V$ não é um ideal de A . A pergunta natural é então a seguinte:

Problema 6: Quais dos P-subespaços $p(U, V)$ são ideais de A ?

Outros exemplos de ideais são $N = U \oplus V$, $U \oplus U^2$ e $N^i = (U \oplus V)^i$.

A questão colocada no problema 6 se desdobra naturalmente em várias outras. Por exemplo, o produto de dois ideais da forma $p(U, V)$ é ainda um ideal? Ideais que se definem naturalmente em A , em geral através de um conjunto de geradores ou alguma propriedade a ser satisfeita por seus elementos, são ideais da forma $p(U, V)$? Um exemplo importante desta questão é o caso do ideal L , definido por $L = \{u \in U : uU = 0\}$. É ele um ideal polinomial? Se um subespaço $p(U, V)$ não é um ideal de A , como exprimir o ideal gerado por $p(U, V)$?

O Teorema 1 do Capítulo 6 garante que todos os P -subespaços do Grupo I são ideais de A . Além disso, ainda neste capítulo, descrevemos 4 exemplos que mostram que, dos 65 P -subespaços que compõem o Grupo II, 61 não são ideais de A (sobre os outros 4 nada sabemos dizer até então). Ainda respondendo ao problema 6, no Lema 6.10 mostramos que o produto de dois ideais da forma $p(U, V)$ é um ideal de A . O Exemplo 31 mostra que o ideal L acima definido não é polinomial e finalmente, nos Lemas 6.1 a 6.8, calculamos os P -subespaços gerados pelos monômios de Peirce de grau ≤ 4 (que já sabemos não serem ideais de A).

Problema 7: É possível estimar a dimensão mínima da t -álgebra para a qual um determinado P -monômio é não nulo?

Conforme veremos, podemos obter respostas bem precisas neste problema, para subespaços monomiais de grau não muito elevado.

Problema 8: Fixado um subconjunto S de U , com $0 \in S$, quais são os P -subespaços $p(U, V)$ tais que $p(U, V) = p(U_0, V_0)$ para todo $u_0 \in S$? E quais são aqueles em que $\dim p(U, V) = \dim p(U_0, V_0)$ para todo $u_0 \in S$?

No capítulo 7 respondemos a essa questão para $S = F(u_0 v_0)$, sendo $u_0 \in U$ e $v_0 \in V$.

Problema 9: É o problema inverso do anterior: fixado um P-subespaço $p(U, V)$, é possível determinar o subconjunto S de U tal que $p(U, V) = p(U_0, V_0)$ para todo $u_0 \in S$?

Veremos, no capítulo 7, que é possível responder a essa questão para alguns P-subespaços.

O objetivo principal desse trabalho é estudar a invariância dos P-subespaços, ou pelo menos, a invariância de suas dimensões (Problemas 3 e 4). O trabalho desenvolve-se caso a caso, pois não pudemos encontrar métodos gerais para tratar os problemas propostos.

O Lema seguinte é uma resposta ao Problema 1.

Lema 1.1 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3 e $0 \neq m(U, V)$ um monômio de Peirce de A contendo pelo menos um fator U . Uma condição necessária e suficiente para que $m(U, V)$ esteja contido em U é que o número de fatores U 's em $m(U, V)$ seja ímpar.*

Prova: Se $m(U, V)$ tem grau 1, então $m(U, V) \subseteq U$ se e somente se $m(U, V) = U$ e neste caso o número de fatores U 's em $m(U, V)$ é ímpar. Supondo que $m(U, V)$ tenha grau 2, temos por (1.8), (1.9) e (1.10), $m(U, V) \subseteq U$ se e somente se $m(U, V) = UV$ e neste caso também o número de fatores U 's em $m(U, V)$ é ímpar. Supondo agora que o grau de $m(U, V)$ seja 3, então $m(U, V) \subseteq U$ se e somente se $m(U, V) = U^3$ ou $m(U, V) = (UV)V$, por (1.8) e (1.9), e aqui também o número de fatores U 's em $m(U, V)$ é ímpar, o que mostra que a tese é verdadeira para $n = 1, 2, 3$. Suponhamos agora por indução que a propriedade seja verdadeira para todo $3 < k < n + 1$ e consideremos $m(U, V)$ de grau $n + 1$. O subespaço $m(U, V)$ pode ser decomposto na forma $m(U, V) = (m_1 m_2) m_3$, onde $m_i = m_i(U, V)$ são subespaços monomiais de graus menores que $n + 1$. Assim $m(U, V) \subseteq U$ se e somente se ocorrer um dos dois casos (i) $m_1 \subseteq U, m_2, m_3 \subseteq V$ ou (ii) m_1, m_2 .

$m_3 \subseteq U$. Observando que em ambos os casos temos grau $m_i < \text{grau } m(U, V) < n + 1$, pela hipótese de indução no primeiro caso, temos $m_1 \subseteq U$, $m_2, m_3 \subseteq V$ se e somente se o número de U 's em m_1 é ímpar e o número de U 's em m_2, m_3 é par e isto é equivalente a dizer que o número de U 's em $m(U, V)$ é ímpar. No segundo caso, temos $m_1, m_2, m_3 \subseteq U$ se e somente se em cada um dos P -monômios m_1, m_2, m_3 o número de U 's em $m(U, V)$ é ímpar, o que é equivalente a que o número de fatores U 's em $m(U, V)$ é ímpar. Assim o resultado é válido para $n + 1$, donde segue o resultado enunciado. ■

Corolário 1.1.1 *Com as notações e hipóteses do Lema 1.1, temos que $m(U, V) \subseteq V$ se e somente se o número de fatores U 's em $m(U, V)$ é par.*

Capítulo 2

Sobre os subespaços $U^n \oplus U^{n+1}$

Neste capítulo vamos construir uma cadeia decrescente de P-subespaços da t-álgebra A , dependendo do subespaço U , todos invariantes por mudança de idempotentes. Além disso, todos são ideais de A . Esta cadeia de ideais provavelmente será importante no estudo da estrutura das t-álgebras de posto 3.

2.1 Invariância da dimensão de U^n

Consideremos A uma t-álgebra de posto 3 satisfazendo a equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0$, com $2\gamma \neq 1$ e fixemos uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, relativa a um idempotente $e \in A$. Lembremos que o subespaço U^k é definido por $U^1 = U$ e $U^{k+1} = U^k U$. Resulta de (1.11) e (1.12) que U^k está contido alternadamente em U e V . Para tornar a linguagem mais agradável, simplificamos às vezes a expressão “invariante por mudança de idempotentes” para “invariante”.

Lema 2.1 *Com as notações acima, temos $U^n \subseteq U^{n-2}$ para todo $n \geq 3$.*

Prova: Teremos dois casos a considerar, a saber n par e n ímpar. Supondo n ímpar, digamos, $n = 2k + 1$, queremos mostrar que $U^{2k+1} \subseteq U^{2k-1}$. A prova será feita por indução sobre k . Temos que $U^3 = U^2 U \subseteq VU \subseteq U$, o que mostra que o resultado é verdadeiro para $k = 1$. Supo-

nhamos, agora, que o resultado seja verdadeiro para $k - 1$, isto é. $U^{2k-1} \subseteq U^{2k-3}$, para $k \geq 2$, e provemos que vale a inclusão para k . Temos $U^{2k+1} = U^{2k}U = (U^{2k-1}U)U \subseteq (U^{2k-3}U)U = U^{2k-2}U = U^{2k-1}$ e portanto tem-se a inclusão $U^n \subseteq U^{n-2}$ para todo n ímpar. Suponhamos agora que n seja par. Nesse caso, $n = 2k$ e queremos mostrar que $U^{2k} \subseteq U^{2k-2}$. Temos $U^{2k} = U^{2k-1}U \subseteq U^{2k-3}U = U^{2k-2}$, o que mostra que $U^{2k} \subseteq U^{2k-2}$ e que, portanto, $U^n \subseteq U^{n-2}$ para todo n par, o que completa a prova do resultado enunciado. ■

Corolário 2.1.1 *As potências pares (respectivamente, ímpares), do subespaço U formam uma cadeia decrescente de subespaços de V (respectivamente, U).*

Lema 2.2 *O P -subespaço $U \oplus U^2$ é um ideal de A , que é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Provemos primeiro que $U \oplus U^2$ é um ideal de A . Para isso, seja $x = a + b \in U \oplus U^2$, com $a \in U$ e $b \in U^2$. Considerando os elementos $e, u \in U, v \in V$ temos:

$$ex = ea + eb = \frac{1}{2}a + \gamma b \in U \oplus U^2$$

$$ux = ua + ub \in U^2 + UV \subseteq U^2 \oplus U = U \oplus U^2$$

$$vx = av + bv = av \in UV \subseteq U \subseteq U \oplus U^2$$

o que mostra que o subespaço $U \oplus U^2$ é um ideal de A . Provemos agora que $U_0 \oplus U_0^2 = U \oplus U^2$, para todo idempotente e_0 de A . Sendo e_0 um idempotente de A , então por (1.19), $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, com $u_0 \in U$ e $\lambda = (1 - 2\gamma)^{-1} \in F$. Observamos de (1.20) que $U_0 = \{u + 2\lambda u_0 u : u \in U\} \subseteq U \oplus U^2$. Quanto a U_0^2 , tomemos um de seus geradores aditivos $(u_1 + 2\lambda u_0 u_1)(u_2 + 2\lambda u_0 u_2) = u_1 u_2 + 2\lambda u_1(u_0 u_2) + 2\lambda u_2(u_0 u_1) +$

$+ 4\lambda^2(u_0u_1)(u_0u_2)$. De $J(u_0, u_1, u_2) = 0$, obtemos $u_1(u_0u_2) + u_2(u_0u_1) = -u_0(u_1u_2)$. Além disso, como $(u_0u_1)(u_0u_2) \in V^2 = 0$ e $U^3 \subseteq U$, segue que $(u_1 + 2\lambda u_0u_1)(u_2 + 2\lambda u_0u_2) = u_1u_2 - 2\lambda u_0(u_1u_2) \in U^2 \oplus U^3 \subseteq U^2 \oplus U = U \oplus U^2$. Por linearidade, obtemos que $U_0^2 \subseteq U \oplus U^2$ e como já temos $U_0 \subseteq U \oplus U^2$, segue que $U_0 \oplus U_0^2 \subseteq U \oplus U^2$, para todo idempotente e_0 de A . Por simetria, obtemos a inclusão contrária. ■

Corolário 2.2.1 *A dimensão do subespaço $U \oplus U^2$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Corolário 2.2.2 *O subespaço U^2 tem dimensão invariante (isto é, $\dim U^2 = \dim U_0^2$).*

Prova: Segue do Corolário 2.2.1 e do fato que $\dim U$ é invariante. ■

Lema 2.3 *$U^n V = 0$ se n é par e $U^n V \subseteq U^n$ se n é ímpar.*

Prova: Se n é par, o resultado é óbvio pois $U^n \subseteq V$ e portanto $U^n V \subseteq V^2 = 0$. Suponhamos então que n seja ímpar: isto é, $n = 2k + 1$. Então $U^n V = U^{2k+1} V = (U^{2k} U) V$ e da identidade (1.13) segue que $U^{2k}(UV) + (U^{2k} U) V = 0$, uma vez que $U^{2k} V \subseteq V^2 = 0$. Assim, da identidade de Jacobi aplicada a elementos de U^{2k} , U e V , segue que $U^n V = (U^{2k} U) V = U^{2k}(UV) \subseteq U^{2k} U = U^{2k+1} = U^n$. ■

Lema 2.4 *Para todo $n \geq 1$, o subespaço $U^n \oplus U^{n+1}$ é um ideal de A .*

Prova: Teremos dois casos a considerar, a saber, n par e n ímpar. Supondo n ímpar, digamos $n = 2k + 1$, devemos mostrar que $U^{2k+1} \oplus U^{2k+2}$ é ideal de A . Para isso, consideremos $x = a + b$, com $a \in U^{2k+1}$ e $b \in U^{2k+2}$. Tomando os elementos $e, u \in U, v \in V$, temos:

$$(i) \quad ex = ea + eb = \frac{1}{2}a + \gamma b \in U^{2k+1} \oplus U^{2k+2}.$$

(ii) $ux = ua + ub \in u U^{2k+1} + u U^{2k+2} \subseteq U^{2k+2} \oplus U^{2k+3} \subseteq U^{2k+2} \oplus U^{2k+1}$, pelo Lema 2.1.

(iii) $vx = va + vb = va \in U^{2k+1}$, pois $vb \in VU^{2k+2} \subseteq V^2 = 0$ e, pelo Lema 2.3, $U^{2k+1}V \subseteq U^{2k+1}$.

Conclui-se, portanto, que $vx \in vU^{2k+1} \subseteq U^{2k+1} \subseteq U^{2k+1} \oplus U^{2k+2}$, o que completa a prova de que $U^n \oplus U^{n+1}$ é um ideal de A , se n é ímpar.

Suponhamos agora que n seja par. Nesse caso $n = 2k$ e queremos mostrar que $U^{2k} \oplus U^{2k+1}$ é ideal de A . Seja $x = a + b$, sendo $a \in U^{2k}$ e $b \in U^{2k+1}$. Considerando $e, u \in U, v \in V$, temos:

(i) $ex = ea + eb = \gamma a + \frac{1}{2}b \in U^{2k} \oplus U^{2k+1}$.

(ii) $ux = ua + ub \in u U^{2k} + u U^{2k+1} \subseteq U^{2k+1} \oplus uU^{2k+1} \subseteq U^{2k+1} \oplus uU^{2k-1} \subseteq U^{2k+1} \oplus U^{2k}$, pois, pelo Lema 2.1, $U^{2k+1} \subseteq U^{2k-1}$.

(iii) $vx = va + vb = vb \in U^{2k+1}$, pois $va \in VU^{2k} \subseteq V^2 = 0$ e $vU^{2k+1} \subseteq U^{2k+1}$, pelo Lema 2.3.

Logo, $vx \in U^{2k+1} \subseteq U^{2k} \oplus U^{2k+1}$, o que completa a prova de que $U^n \oplus U^{n+1}$ é ideal de A , se n é par. Portanto, $U^n \oplus U^{n+1}$ é ideal de A , para todo $n \geq 1$. ■

Lema 2.5 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V = Fe_0 \oplus U_0 \oplus V_0$ duas decomposições de Peirce de uma t -álgebra de posto 3 A , relativas aos idempotentes e e $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, respectivamente. Então, para todo $n \geq 1$, $U^n U_0 \subseteq U^{n+1} \oplus U^{n+2}$.*

Prova: Um gerador aditivo de U_0 é da forma $u_1 = u + 2\lambda u_0 u$, com $u \in U$. Logo, $U^n u_1 \subseteq U^n u \oplus U^n(u_0 u) \subseteq U^{n+1} \oplus U^n(u_0 u)$. Se n é par, pelo Lema 2.3, $U^n(u_0 u) = 0$ e portanto $U^n u_1 \subseteq U^{n+1} \subseteq U^{n+1} \oplus U^{n+2}$. Por linearidade, obtemos $U^n U_0 \subseteq U^{n+1} \oplus U^{n+2}$. Se n é ímpar, temos que $U^n(u_0 u) \subseteq U^n U^2 \subseteq U^{n+2}$ (pois, como observamos no Capítulo 1, $X^i X^j \subseteq X^{i+j}$, para todo subespaço X de A). Dessa forma, $U^n u_1 \subseteq U^{n+2} \subseteq U^{n+1} \oplus U^{n+2}$ e novamente por linearidade segue que $U^n U_0 \subseteq U^{n+1} \oplus U^{n+2}$. ■

Lema 2.6 Para todo $n \geq 1$, o ideal $U^n \oplus U^{n+1}$ é invariante por mudança de idempotentes.

Prova: Devemos mostrar que $U_0^n \oplus U_0^{n+1} = U^n \oplus U^{n+1}$ para todo $n \geq 1$ e para todo idempotente e_0 de A . A prova será feita por indução sobre n . Do Lema 2.2, temos que $U_0 \oplus U_0^2 = U \oplus U^2$, sendo portanto a afirmação verdadeira para $n = 1$. Suponhamos, agora, que o resultado seja verdadeiro para $n = k - 1$, isto é, $U_0^{k-1} \oplus U_0^k = U^{k-1} \oplus U^k$ e provemos que é verdadeiro para $n = k \geq 2$. Temos que $U_0^k \oplus U_0^{k+1} \subseteq [U_0^{k-1} \oplus U_0^k] U_0 = [U^{k-1} \oplus U^k] U_0$. Do Lema 2.5, segue que $U^{k-1} U_0 \subseteq U^k \oplus U^{k+1}$ e $U^k U_0 \subseteq U^{k+1} \oplus U^{k+2} \subseteq U^{k+1} \oplus U^k$ (sendo esta última inclusão consequência do Corolário 2.1.1). Assim provamos que $U_0^k \oplus U_0^{k-1} \subseteq U^k \oplus U^{k+1}$, para todo k . Por simetria obtém-se a inclusão contrária e portanto conclui-se que, para todo k , $U_0^k \oplus U_0^{k+1} = U^k \oplus U^{k+1}$. ■

Corolário 2.6.1 A dimensão do subespaço $U^n \oplus U^{n+1}$ é invariante, para todo $n \geq 1$.

Corolário 2.6.2 $\dim U^n$ é invariante, para todo $n \geq 1$.

Prova: A prova será feita por indução sobre n . Já sabemos que U e U^2 têm dimensões invariantes, o que prova o resultado para $n = 1$ e $n = 2$. Suponhamos, agora, que $\dim U^{k-1}$ é invariante para $k \geq 3$ e mostremos que $\dim U^k$ é invariante. Do Corolário 2.6.1, temos que $\dim (U^{k-1} \oplus U^k)$ é invariante e como pela hipótese de indução $\dim U^{k-1}$ é invariante, segue que $\dim U^k$ é invariante. ■

Corolário 2.6.3 Os subespaços $U^i \oplus U^j$, $i, j \geq 1$ têm dimensão invariante sempre que i e j forem inteiros de paridades diferentes. Todos os subespaços $U^i \oplus V$ têm dimensão invariante se i é ímpar.

Observação: A sequência decrescente de ideais $N \supseteq U \oplus U^2 \supseteq U^3 \oplus U^2 \supseteq U^3 \oplus U^1 \supseteq \dots$ chega ao ideal nulo pois o ideal N é nilpotente, de acordo com o resultado de Abraham, veja [1].

Capítulo 3

Soluções parciais do Problema 2

Neste capítulo vamos estabelecer algumas identidades envolvendo P-monômios em uma t -álgebra de posto 3, com respostas (parciais) ao segundo problema colocado na Seção 3 do Capítulo 1.

3.1 Alguns casos do Problema 2

Conforme dissemos no Capítulo 1, o Problema 2 consiste em achar P-subespaços $m_1(U, V)$ e $m_2(U, V)$ que são genericamente iguais. Observemos que não há solução deste problema para subespaços de grau < 4 . Começamos provando as igualdades entre os P-subespaços de grau 4 que aparecem em 1.3.

Lema 3.1 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3 satisfazendo (1.1) e $u, u_1, u_2 \in U, v, v_1 \in V$. Então temos as identidades $u_1[(uv)v_1] = -(uv)(u_1v_1)$ e $[(uu_1)u_2]v = -(uu_1)(u_2v)$. Como consequência, $U[(UV)V] = (UV)^2$ e $U^3V = U^2(UV)$.*

Prova: (i) Para u_1, uv, v_1 em N , temos $J(u_1, uv, v_1) = u_1[(uv)v_1] + (uv)(u_1v_1) + v_1[u_1(uv)] = 0$ e como $u_1(uv) \in U(UV) \subseteq U^2 \subseteq V$, segue que $v_1[u_1(uv)] = 0$ e portanto $u_1[(uv)v_1] = -(uv)(u_1v_1)$, o que mostra que todo gerador aditivo de cada um dos subespaços $U[(UV)V]$ e $(UV)^2$ é também um gerador aditivo do outro, e assim obtemos a igualdade

$$U[(UV)V] = (UV)^2.$$

(ii) Analogamente ao caso (i), temos $J(uu_1, u_2, v) = (uu_1)(u_2v) + v[(uu_1)u_2] + u_2[(uu_1)v] = 0$ e como $uu_1 \in U^2 \subseteq V$, segue que $(uu_1)v = 0$ e portanto $[(uu_1)u_2]v = -(uu_1)(u_2v)$, o que mostra a igualdade $U^3V = U^2(UV)$, pela mesma razão já explicada acima. ■

Observação: Decorre daí, por exemplo, que $(U^3V)V = [U^2(UV)]V$. De modo geral, $(U^3V)_m(U, V) = [U^2(UV)]_m(U, V)$. De maneira similar, $U[(UV)V]_m(U, V) = (UV)^2_m(U, V)$.

Ainda como parte do Problema 2, provamos o seguinte Lema 3.2. Para todo $k \geq 1$, indicamos por $U^kV^{(n)}$ o subespaço $[(U^kV)V]V \dots V$ com n fatores V . Analogamente, $U^{(n)}V$ indicará o subespaço $U\{U \dots [U(UV)]\}$, com n fatores U .

Lema 3.2 *Consideremos $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3 e $m(U, V)$ um P -subespaço de A . Então para todo $n \geq 1$, valem as igualdades:*

$$(i) \ U^{2n+1} m(U, V) = U[U^{2n} m(U, V)], \text{ se } m(U, V) \subseteq U.$$

$$(ii) \ U^{2n+1} m(U, V) = U^{2n}[Um(U, V)], \text{ se } m(U, V) \subseteq V.$$

$$(iii) \ U[U^{2n+1} m(U, V)] = U^{2n+1}[Um(U, V)] = U\{U^{2n}[Um(U, V)]\}, \text{ se } m(U, V) \subseteq V.$$

$$(iv) \ U(UV^{(2n+1)}) = (UV)(UV^{(2n)}).$$

Prova: (i) e (ii) Considerando $t \in U^{2n}$, $u \in U$ e $x \in m(U, V)$, segue que $(tu)x \in (U^{2n}U)_m(U, V) = U^{2n+1}_m(U, V)$. Da identidade de Jacobi, obtemos $(tu)x + (tx)u + (ux)t = 0$. No caso em que $m(U, V) \subseteq U$, $(ux)t \in U^2U^{2n} \subseteq V^2 = 0$ e portanto $(tu)x = -(tx)u$. Como $(tx)u \in$

$\in [U^{2n}m(U, V)]U = U[U^{2n}m(U, V)]$, segue a igualdade (i). Se tivermos $m(U, V) \subseteq V$, então $(tx)u \in V^2U = 0$ e portanto $(tu)x = -(ux)t$. De $(ux)t \in [Um(U, V)]U^{2n}$, segue a igualdade (ii).

(iii) Considerando $u \in U$, $u_1 \in U^{2n+1} \subseteq U$ e $v \in m(U, V)$, da identidade de Jacobi temos $u(u_1v) = -u_1(uv)$, pois $(uu_1)v \in V^2 = 0$. Como $u(u_1v) \in U[U^{2n+1}m(U, V)]$ e $u_1(uv) \in U^{2n+1}[Um(U, V)]$, obtemos a igualdade $U[U^{2n+1}m(U, V)] = U^{2n+1}[Um(U, V)]$. Tomando agora $t \in U^{2n}$, $u \in U$, $u_1 \in Um(U, V)$, temos que $(tu)u_1 \in U^{2n+1}[Um(U, V)]$. Da identidade (1.13), obtemos $(tu)u_1 = -(tu_1)u$, pois $(uu_1)t \in U^2U^{2n} \subseteq V^2 = 0$. Como $(tu_1)u \in \{U^{2n}[Um(U, V)]\}U = U\{U^{2n}[Um(U, V)]\}$, segue a última igualdade de (iii).

(iv) Finalmente, considerando $u \in U$, $u_1 \in UV^{(2n)}$ e $v \in V$, da identidade de Jacobi segue que $u(u_1v) = -u_1(uv)$ e portanto $U(UV^{(2n+1)}) = UV^{(2n)}$. ■

Corolário 3.2.1 *Nas condições do Lema 3.2, valem as igualdades:*

$$(i) U^{2m-1} U^{2m+1} = U[U^{2m-2} U^{2m+1}].$$

$$(ii) U^{2n+1} U^{2m+1} = U[U^{2n} U^{2m+1}].$$

$$(iii) U^{2n+1} U^{2m} = U^{2n} U^{2m+1}.$$

Prova: (i) Considerando $n = m - 1$ (e portanto $2n + 1 = 2m - 1$) e $m(U, V) = U^{2m+1}$ em (i) do Lema 3.2, obteremos $U^{2m-1}U^{2m+1} = U[U^{2m-2}U^{2m+1}]$.

(ii) Basta considerarmos no Lema 3.2, (i), $m(U, V) = U^{2m+1}$ e teremos a igualdade dada em (ii).

(iii) Novamente no Lema 3.2, (ii), considerando $m(U, V) = U^{2m}$, obtemos $U^{2n+1}U^{2m} = U^{2n}[UU^{2m}] = U^{2n}U^{2m+1}$. ■

Lema 3.3 *Se os P -monômios m_1 , m_2 e m_3 não estão simultaneamente contidos em U , então ocorre uma das seguintes situações:*

$$(i) \ m_1(m_2m_3) = m_2(m_1m_3) = m_3(m_1m_2) = 0.$$

(ii) *um dos três produtos de P -monômios é nulo e os outros dois produtos coincidem.*

Prova: Sejam dados três P -monômios, não todos contidos em U . Então existem três possibilidades a considerar. Na primeira, todos estão contidos em V e portanto, de (1.10), segue que $m_1(m_2m_3) = 0$. Analogamente, $(m_1m_2)m_3 = m_2(m_1m_3) = 0$. Na segunda, temos por exemplo $m_1 \subseteq U$ e m_2, m_3 contidos em V . Neste caso, ainda por (1.10), $m_1(m_2m_3) = 0$ e $m_2(m_1m_3) = (m_2m_1)m_3$. Por último, pode ocorrer dois P -monômios contidos em U e o outro em V (por exemplo, m_3). Neste caso, (novamente por (1.10)), $(m_1m_2)m_3 = 0$ e $(m_2m_3)m_1 = m_2(m_3m_1)$. ■

Corolário 3.3.1 *Nas condições do Lema 3.3, se $m_1 = U^{2n+1}$, $m_2 \subseteq U$ e $m_3 \subseteq V$, então*

$$U^{2n+1}[m_2m_3] = m_2[U^{2n+1}m_3]$$

Prova: Basta ver que m_1, m_2, m_3 nas hipóteses acima satisfazem a terceira possibilidade descrita na prova do Lema 3.3. ■

Como casos particulares do Corolário 3.3.1, obtemos os dois seguintes resultados:

Corolário 3.3.2 $(U^{2n+1})^2 = U(U^{2n}U^{2n+1})$, para todo $n \geq 1$.

Prova: Tomar $m_2 = U$ e $m_3 = U^{2n}$ no Corolário 3.3.1. ■

Corolário 3.3.3 $(U^{2n} U^{2m+1})V = U^{2n}(U^{2m+1} V)$, para todos $n, m \geq 1$.

Prova: Basta ver que $m_1 = U^{2m+1}$, $m_2 = U^{2n}$ e $m_3 = V$ satisfazem a segunda possibilidade descrita no Lema 3.3 e portanto $m_2(m_1 m_3) = (m_2 m_1)m_3$. Ou seja, $U^{2n}(U^{2m+1} V) = (U^{2n} U^{2m+1})V$. ■

Lema 3.4 *Sejam $m_1(U, V)$ e $m_2(U, V)$ subespaços monomiais de uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ de posto 3, ambos contidos em V . Então vale a igualdade $[U^{2n+1} m_1]m_2 = U^{2n}\{[U m_1]m_2\}$.*

Prova: Considerando $t \in U^{2n}$, $u \in U$, $v_1 \in m_1$ e $v_2 \in m_2$, teremos $[(tu)v_1]v_2 \in [U^{2n+1} m_1]m_2$. Mas de $J(t, u, v_1) = 0$, obtemos $(tu)v_1 = -t(uv_1)$, pois $u(tv_1) \in U[U^{2n} m_1] \subseteq UV^2 = 0$. Portanto, $[(tu)v_1]v_2 = -[(tu)v_1]v_2$. Novamente usando-se a identidade de Jacobi, agora para os elementos t, uv_1, v_2 , obtemos $[t(uv_1)]v_2 = -t[(uv_1)v_2]$, pois $(uv_1)(tv_2) \in (UV)[U^{2n} m_2] \subseteq (UV)V^2 = 0$. Como $t[(uv_1)v_2] \in U^{2n}\{[U m_1]m_2\}$, segue o resultado. ■

Corolário 3.4.1 $U^{2n+1} V^{(2)} = U^{2n}[UV^{(2)}]$, para todo $n \geq 1$.

Prova: Tomar $m_1 = m_2 = V$ no Lema 3.4. ■

Lema 3.5 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma t -álgebra de posto 3, então temos a seguinte igualdade de subespaços monomiais, para todo $n \geq 1$*

$$U^3 V^{(n)} = U^2 [UV^{(n)}].$$

Prova: A prova será feita por indução sobre n . Do Lema 3.1, temos que $U^3 V = U^2(UV)$, o que mostra que a tese é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que a igualdade acima valha para $n-1$ fatores V . Consideremos então $t \in U^2$, $v \in V$ e $u \in UV^{(n-1)}$. Usando-se a identidade (1.13) para t, v e u , obteremos $(tu)v = -t(uv)$, pois $u(tv) \in U[U^2 V] = 0$ e como $(tu)v \in$

$\in [U^2(UV^{(n-1)})]V$, pela hipótese de indução, $(tu)v \in [U^3V^{(n-1)}]V = U^3V^{(n)}$. Por outro lado, $t(uv) \in U^2[(UV^{(n-1)})V] = U^2(UV^{(n)})$, o que completa a prova. ■

Lema 3.6 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma t -álgebra de posto 3, então, para todo $n \geq 1$, temos a seguinte igualdade de P -monômios:*

$$U^2(U^{(2n+1)}V) = U^3(U^{(2n)}V).$$

Prova: Consideremos os elementos $v \in U^2$, $u \in U$ e $t \in U^{(2n)}V$. Note que $U^{(2n)}V \subseteq V$, pelo Corolário 1.1.1. Aplicando-se a v , u , t a identidade de Jacobi, obtemos $v(ut) = -t(uv)$, uma vez que $vt \in U^2V \subseteq V^2 = 0$. Como $v(ut) \in U^2[U(U^{(2n)}V)] = U^2[U^{(2n+1)}V]$ e $t(uv) \in (U^{(2n)}V)U^3 = U^3(U^{(2n)}V)$, segue o resultado. ■

Lema 3.7 *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma t -álgebra de posto 3, então, para todo $n \geq 1$, temos a seguinte igualdade de P -subespaços:*

$$(UV)(U^{2n+1}V) = U[U^{2n+1}V^{(2)}] = U^{2n+1}(UV^{(2)}).$$

Prova: Usando a identidade (1.13) para os elementos $u \in U$, $v \in V$ e $u_1 \in U^{2n+1}V$. Assim, $(uv)u_1 = -(u_1v)u$, pois $(uu_1)v \in U^{2n}V = 0$ e como $(uv)u_1 \in (UV)(U^{2n+1}V)$ e $(u_1v)u = -u(u_1v) \in U(U^{2n+1}V^{(2)})$, segue a primeira igualdade. Considerando agora os elementos $u \in UV$, $u_1 \in U^{2n+1}$ e $v \in V$, de $J(u, u_1, v) = 0$ obtemos $u(u_1v) = -u_1(uv)$, uma vez que $(uu_1)v \in U^{2n}V = 0$. Mas $u(u_1v) \in (UV)(U^{2n+1}V)$ e $u_1(uv) \in U^{2n+1}(UV^{(2)})$ e, portanto, segue a segunda igualdade. ■

Observação final: Todos os resultados deste capítulo podem ser entendidos como uma forma fraca de associatividade em A , isto é, vale associatividade para certos produtos de subespaços.

Capítulo 4

Sobre a dimensão de A , baseada em P -monômios

Neste capítulo faremos estimativas sobre a dimensão de uma t -álgebra de posto 3, sabendo-se que um dado P -monômio é não nulo. Em cada caso, exibimos um exemplo minimal que comprova a estimativa feita.

4.1 Lemas auxiliares

Consideremos $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3, de tipo $(1 + r, s)$. A fim de tornarmos a leitura mais agradável, reuniremos em dois Lemas preliminares todas as identidades que nos serão úteis neste capítulo. Tais identidades são obtidas, de um modo geral, a partir da identidade de Jacobi aplicada, sucessivamente, a convenientes elementos de $N = \ker \omega$.

Lema 4.1 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3. Para todos $u, u_1, u_2, u_3 \in U$ e $v, v_1, v_2, v_3 \in V$, valem as identidades:*

$$2u(uu_1) = -u^2u_1 \quad (4.1)$$

$$2(u_1u_2)(u_1v_1) = (u_1^2u_2)v_1 = -u_1^2(u_2v_1) \quad (4.2)$$

$$(uv)v_1 = -(uv_1)v \quad (4.3)$$

$$u(u_1v) = -u_1(uv) \quad (4.4)$$

$$(u_1v_1)(u_2v_2) = -u_1[(u_2v_2)v_1] = -u_2[(u_1v_1)v_2] \quad (4.5)$$

$$u_1[(u_1^2u_2)u_3] = -(u_1^2u_2)(u_1u_3) = u_1^2[(u_1u_3)u_2] = -u_1^2[(u_1u_2)u_3] \quad (4.6)$$

$$u_2\{u_1^2[(u_2v_2)v_1]\} = -(u_1^2u_2)[(u_2v_2)v_1] \quad (4.7)$$

$$2u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)] = -2u_1\{u_1[(u_2v_2)v_1]\} = u_1^2[(u_2v_2)v_1] \quad (4.8)$$

Prova: (4.1) Basta ver que $0 = J(u, u, u_1) = 2u(uu_1) + u^2u_1$.

(4.2) De $0 = 2J(u_1u_2, u_1, v_1)$ segue que $y = 2(u_1u_2)(u_1v_1) = -2[u_1(u_1u_2)]v_1$ (pois $(u_1u_2)v_1 \in V^2 = 0$) e por (4.1) temos que $y = (u_1^2u_2)v_1$. Usando-se agora a identidade 1.13 para os elementos u_1^2, u_2, v_1 , segue a última igualdade de (4.2) .

(4.3) Basta ver que $0 = J(u, v, v_1) = (uv)v_1 + (uv_1)v$.

(4.4) Basta ver que $0 = J(u, u_1, v) = u(u_1v) + u_1(uv)$.

(4.5) Aplicando-se a identidade de Jacobi aos elementos u_1, v_1, u_2v_2 e depois a u_2, v_2, u_1v_1 obtemos, respectivamente, $(u_1v_1)(u_2v_2) = -u_1[(u_2v_2)v_1]$ e $(u_1v_1)(u_2v_2) = -u_2[(u_1v_1)v_2]$.

(4.6) Aplicando-se a identidade (1.13) aos elementos $u_1, u_1^2u_2, u_3$ e de (1.18) segue que $u_1[(u_1^2u_2)u_3] = -(u_1^2u_2)(u_1u_3) = u_1^2[u_2(u_1u_3)]$, sendo esta última igualdade consequência de $J(u_1^2, u_2, u_1u_3) = 0$ e de $U^2U^2 \subseteq V^2 = 0$. Finalmente, como consequência de $J(u_1, u_2, u_3) = 0$ e de (1.16), segue que $u_1^2[u_2(u_1u_3)] = -u_1^2[(u_1u_2)u_3]$.

(4.7) Da identidade de Jacobi aplicada aos elementos $u_2, u_1^2, (u_2v_2)v_1$ segue que $u_2\{u_1^2[(u_2v_2)v_1]\} = -(u_1^2u_2)[(u_2v_2)v_1]$, pois $U^2\{U[(UV)V]\} \subseteq U^2U^2 \subseteq V^2 = 0$.

(4.8) Temos que $2u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)] = -2\{u_1[u_1[(u_2v_2)v_1]]\} = u_1^2[(u_2v_2)v_1]$, sendo as duas igualdades consequências de (4.5) e de (4.1), respectivamente. ■

Lema 4.2 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3. Para todos $u, u_1, u_2, u_3 \in U$ e $v, v_1, v_2, v_3 \in V$. valem as identidades:*

$$(uv)(uv_1) = 0 \quad (4.9)$$

$$(u_1v)(u_2v) = 0 \quad (4.10)$$

$$u[(uv_1)v] = u[u_1^2(uv)] = 0 \quad (4.11)$$

$$u_i[(u_1u_2)(u_1^2u_3)] = u_i\{u_1^2[u_3(u_1u_2)]\} = u_i[(u_1u_3)(u_1^2u_2)] = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.12)$$

$$u_3\{u_2[u_3(u_1^2u_2)]\} = 0 \quad (4.13)$$

$$(u_1v_2)[(u_2v_2)v_1] = 0 \quad (4.14)$$

$$\{u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)]\}(u_2v_2) = 0 \quad (4.15)$$

$$(u_1v_1)[(u_1v_1)(u_2v_2)] = 0 \quad (4.16)$$

$$u_1^2[(u_1v_1)v_2] = 0 \quad (4.17)$$

$$u_1\{[u_1^2(u_2v_1)](u_2v_2)\} = 0 \quad (4.18)$$

$$u_1\{(u_2u_1^2)[(u_2v_2)v_1]\} = 0 \quad (4.19)$$

$$u_1^2[(u_1u_2)(u_2v_2)] = 0 \quad (4.20)$$

$$u_1^2\{[u_2(u_1v_1)](u_2v_2)\} = 0 \quad (4.21)$$

$$u_2[(u_1u_2)(u_1v_1)] = 0 \quad (4.22)$$

$$u_2\{u_1\{[u_2(u_1v_1)](u_2v_2)\}\} = 0 \quad (4.23)$$

Prova: (4.9) De (1.17) temos $0 = [u(v + v_1)]^2 = (uv + uv_1)^2 = (uv)^2 + (uv_1)^2 + 2(uv)(uv_1) = 2(uv)(uv_1)$ e portanto $(uv)(uv_1) = 0$.

(4.10) Ainda de (1.17) temos $0 = [(u_1 + u_2)v]^2 = (u_1v + u_2v)^2 = (u_1v)^2 + (u_2v)^2 + 2(u_1v)(u_2v) = 2(u_1v)(u_2v)$.

(4.11) Usando-se sucessivamente as identidades (1.13) para os elementos u, v, uv_1 , (1.14) e (4.9), segue que $u[(uv_1)v] = 0$ e portanto, de (4.3) segue que também $u[(uv)v_1] = 0$. Em particular, para $v_1 = u_1^2$, obtemos $u[u_1^2(uv)] = 0$.

(4.12) Seja $y = u_i[(u_1u_2)(u_1^2u_3)]$. Como $u_1u_2, u_1^2 \in V$, de (4.3) segue que $y = -u_i\{[u_3(u_1u_2)]u_1^2\}$. De $J(u_1, u_2, u_3) = 0$ e de (1.16) obtemos $y = u_i\{[u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3)]u_1^2\} = u_i\{u_1^2[u_1(u_2u_3)]\} + u_i\{u_1^2[u_2(u_1u_3)]\} = u_i\{u_1^2[u_2(u_1u_3)]\} = -u_i[(u_2u_1^2)(u_1u_3)]$, sendo que esta última igualdade é aplicação de (4.3). Note que se $i = 1$, então $y = u_1\{u_1^2[u_2(u_1u_3)]\} = 0$ por (1.18). Se $i = 2$, então $y = u_2\{u_1^2[u_2(u_1u_3)]\} = -(u_2u_1^2)[u_2(u_1u_3)]$ (de (4.4)) e portanto $y = 0$, por (4.9). Finalmente, se $i = 3$, temos que $y = -u_3[(u_2u_1^2)(u_1u_3)]$ e da identidade de Jacobi aplicada a $u_1, u_3, u_1^2u_2$, segue que $2y = 2u_3\{u_1[u_3(u_1^2u_2)] + u_3[u_1(u_1^2u_2)]\} = 2u_3\{u_1[u_3(u_1^2u_2)]\}$, sendo esta última igualdade consequência de (1.18). Portanto, da aplicação sucessiva de (4.4), (4.1), (4.3) e (1.18) segue que $2y = -2u_1\{u_3[u_3(u_1^2u_2)]\} = u_1[u_3^2(u_1^2u_2)] = -u_1[u_1^2(u_2u_3^2)] = 0$.

(4.13) De $J(u_2, u_3, u_1^2u_2) = 0$, obtemos $y = u_3\{u_2[u_3(u_1^2u_2)]\} = -u_3\{u_3[u_2(u_1^2u_2)]\} - u_3[(u_2u_3)(u_2u_1^2)] = -u_3[(u_2u_3)(u_2u_1^2)]$, por (1.14). Da identidade de Jacobi aplicada agora aos elementos $u_3, u_2u_3, u_2u_1^2$ e de $U^2U^4 = 0$, segue que $2y = 2(u_2u_1^2)[u_3(u_2u_3)] = -(u_2u_1^2)(u_3^2u_2) = 0$, sendo estas duas últimas igualdades consequências de (4.1) e (4.9), respectivamente.

(4.14) Basta aplicar (4.3) (para $(u_2v_2)v_1$) e a seguir (4.10).

(4.15) Da identidade $J(u_1, u_1v_1, u_2v_2) = 0$ segue que $u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)] = -(u_1v_1)[u_1(u_2v_2)] - (u_2v_2)[u_1(u_1v_1)] = -(u_1v_1)[u_1(u_2v_2)]$, por (1.14) e dessa forma, obtemos $\{u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)]\}(u_2v_2) = -\{(u_1v_1)[u_1(u_2v_2)]\}(u_2v_2) = \{(u_2v_2)[u_1(u_2v_2)]\}(u_1v_1)$ (por (4.4)) e este último elemento é nulo, pois de (1.13) aplicada a u_2v_2, u_1, u_2v_2 e (1.17) segue que $2(u_2v_2)[u_1(u_2v_2)] = -(u_2v_2)^2u_1 = 0$.

(4.16) Basta aplicar a identidade de Jacobi aos elementos u_1v_1, u_1v_1, u_2v_2 e usar (1.17) para obtermos a identidade (4.16).

(4.17) Das identidades (4.3) e (1.16) temos $u_1^2[(u_1v_1)v_2] = [(u_1v_1)u_1^2]v_2 = 0$.

(4.18) Das identidades (4.3) e (4.4) temos $y = u_1\{[u_1^2(u_2v_1)](u_2v_2)\} = -u_1\{[(u_2u_1^2)v_1](u_2v_2)\} = u_1\{[(u_2v_2)v_1](u_2u_1^2)\}$. Assim, da identidade de Jacobi aplicada aos elementos u_1 , $(u_2v_2)v_1$, $u_2u_1^2$, obtemos $y = -[(u_2v_2)v_1][u_1(u_1^2u_2)] - (u_2u_1^2)\{u_1[(u_2v_2)v_1]\} = -(u_2u_1^2)\{u_1[(u_2v_2)v_1]\}$, por (1.18). Dessa forma, de (4.5) e de $J(u_2u_1^2, u_1v_1, u_2v_2) = 0$, obtemos $y = (u_2u_1^2)[(u_1v_1)(u_2v_2)] = -(u_1v_1)[(u_2u_1^2)(u_2v_2)] - (u_2v_2)[(u_2u_1^2)(u_1v_1)] = -(u_2v_2)[(u_2u_1^2)(u_1v_1)]$, sendo que esta última igualdade é consequência de (4.9). Finalmente, de (4.1) obtemos $y = 2(u_2v_2)\{[u_1(u_1u_2)](u_1v_1)\}$. O resultado segue de (4.9).

(4.19) Basta ver que da identidade (4.4) aplicada aos elementos $u_2u_1^2$, u_2v_2 , v_1 temos $(u_2u_1^2)[(u_2v_2)v_1] = -(u_2v_2)[(u_2u_1^2)v_1] = -[(u_2u_1^2)v_1](u_2v_2) = [(u_2v_1)u_1^2](u_2v_2)$, sendo esta última igualdade consequência de (4.3). O resultado segue de (4.18).

(4.20) Como $u_1u_2 \in V$, de (4.3) temos que $y = 2u_1^2[(u_1u_2)(u_2v_2)] = -2u_1^2\{[u_2(u_1u_2)]v_2\} = u_1^2[(u_2^2u_1)v_2] = -[(u_2^2u_1)u_1^2]v_2$, sendo estas duas últimas igualdades consequência de (4.1) e (4.3), respectivamente. Logo, $y = 0$, por (1.16).

(4.21) Seja $y = u_1^2\{[u_2(u_1v_1)](u_2v_2)\}$. De $J(u_2, u_1v_1, u_2v_2) = 0$ e de (1.14), obtemos $2[u_2(u_1v_1)](u_2v_2) = -2u_2[(u_1v_1)(u_2v_2)] = 2u_2\{u_2[(u_1v_1)v_2]\} = -u_2^2[(u_1v_1)v_2]$, sendo as duas últimas igualdades consequências de (4.5) e (4.1), respectivamente. Portanto, $2y = -u_1^2\{u_2^2[(u_1v_1)v_2]\}$. Usando-se, agora, a identidade (4.3) por duas vezes consecutivas, obtemos $2y = u_2^2\{u_1^2[(u_1v_1)v_2]\} = -u_2^2\{[(u_1v_1)u_1^2]v_2\} = 0$, sendo que esta última igualdade segue de (1.16).

(4.22) Das identidades (4.3), (4.1) e (4.4) temos $2u_2[(u_1u_2)(u_1v_1)] = -2u_2\{[u_1(u_1u_2)]v_1\} = u_2[(u_1^2u_2)v_1] = -(u_2u_1^2)(u_2v_1)$ e assim o resultado é consequência de (4.9).

(4.23) Sejam $y = u_2\{u_1\{[u_2(u_1v_1)](u_2v_2)\}\}$ e $t = 2[u_2(u_1v_1)](u_2v_2)$. Como em (4.21), $t = -u_2^2[(u_1v_1)v_2]$ e dessa forma obtemos $2y = u_2(u_1t) =$

$= -u_2\{u_1\{u_2^2[(u_1v_1)v_2]\}\} = u_2\{[(u_1v_1)v_2](u_1u_2^2)\}$, por (4.4). Da identidade de Jacobi aplicada aos elementos u_2 , $(u_1v_1)v_2$, $u_1u_2^2$ e de (1.18), segue que $2y = -(u_1u_2^2)\{u_2[(u_1v_1)v_2]\}$. Finalmente, de (4.5), (4.3) e (4.1), obtemos $4y = -2(u_1u_2^2)\{u_1[(u_2v_2)v_1]\} = 2\{u_1\{u_1[(u_2v_2)v_1]\}\}u_2^2 = -\{u_1^2[(u_2v_2)v_1]\}u_2^2$ e como em (4.21) segue o resultado. ■

Antes de expor os resultados deste capítulo, vamos explorar um resultado que aparece mencionado brevemente em [20]. Observemos que para cada $\gamma \in F$ fixado, $2\gamma \neq 1$, temos uma classe de t -álgebras de posto 3 satisfazendo a equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$. Se A satisfaz a equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ (isto é, o caso $\gamma = 0$), é possível passar para outra classe na qual $\gamma \neq 0$ definindo-se sobre o F -espaço vetorial A uma nova multiplicação dada por

$$x \star y = (1 - 2\gamma)xy + \gamma[x\omega(y) + y\omega(x)] \quad (4.24)$$

com $\gamma \in F$ distinto de $\frac{1}{2}$. Temos os seguintes resultados sobre esta nova álgebra (denotada por A_1):

Lema 4.3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t -álgebra de posto 3 satisfazendo a t -equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Sejam $\gamma \in F$, $2\gamma \neq 1$ e A_1 álgebra definida acima. Então*

- (a) A_1 é bária, comutativa, com função peso ω .
- (b) A e A_1 possuem os mesmos idempotentes.
- (c) A_1 satisfaz a t -equação $x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0$.
- (d) A decomposição de Peirce de A_1 , relativa ao idempotente e , é $A_1 = Fe \oplus U \oplus V$.

Prova:(a) É claro que A_1 é comutativa e $\omega(x \star y) = \omega(x)\omega(y)$, por (4.24).

(b) Se $e \in A$ é idempotente então $e \star e = (1 - 2\gamma)e^2 + \gamma[\omega(e)e + e\omega(e)] = (1 - 2\gamma)e + 2\gamma e = e$. Reciprocamente, $e \star e = e$ implica que $(1 - 2\gamma)e^2 = e \star e - 2\gamma e = e - 2\gamma e = (1 - 2\gamma)e$. Logo $e^2 = e$.

(c) Seja $x \in A_1$ de peso 1. Então $x \star x = (1 - 2\gamma)x^2 + 2\gamma x$ e portanto $(x \star x) \star x = (1 - 2\gamma)x^2 \star x + 2\gamma x \star x = (1 - 2\gamma)^2 x^3 + (1 - 2\gamma)\gamma(x^2 + x) + 2\gamma(1 - 2\gamma)x^2 + 2\gamma(2\gamma x) = (1 - 2\gamma)^2 x^2 + (1 - 2\gamma)\gamma x^2 + (1 - 2\gamma)\gamma x + 2\gamma(1 - 2\gamma)x^2 + 4\gamma^2 x = [(1 - 2\gamma)^2 + \gamma(1 - 2\gamma) + 2\gamma(1 - 2\gamma)]x^2 + \gamma[(1 - 2\gamma) + 4\gamma]x = (1 - 4\gamma + 4\gamma^2 + \gamma - 2\gamma^2 + 2\gamma - 4\gamma^2)x^2 + \gamma(1 + 2\gamma)x = (1 - \gamma - 2\gamma^2)x^2 + \gamma(1 + 2\gamma)x = (1 - 2\gamma + \gamma - 2\gamma^2)x^2 + (2\gamma + 2\gamma^2 - \gamma)x = (1 + \gamma)(1 - 2\gamma)x^2 + 2\gamma(1 + \gamma)x - \gamma x = (1 + \gamma)[(1 - 2\gamma)x^2 + 2\gamma x] - \gamma x = (1 + \gamma)x \star x - \gamma x$.

(d) Denotemos por U^* e V^* os subespaços de Peirce de A_1 relativamente a um idempotente e , isto é, $U^* = \{u \in N : 2e \star u = u\}$ e $V^* = \{v \in N : e \star v = \gamma v\}$. Dessa forma, se $u \in U^*$ então $u = u_1 + v_1$, com $u_1 \in U$ e $v_1 \in V$ é tal que $u = 2e \star u = 2e \star (u_1 + v_1) = 2e \star u_1 + 2e \star v_1 = 2[(1 - 2\gamma)eu_1 + \gamma u_1] + 2[(1 - 2\gamma)ev_1 + \gamma v_1] = (1 - 2\gamma)u_1 + 2\gamma u_1 + 2\gamma v_1 = (1 - 2\gamma)u_1 + 2\gamma u$ e portanto $(1 - 2\gamma)u = (1 - 2\gamma)u_1$, isto é, $u = u_1$. Ou seja, $U^* = U$. Por outro lado, se $v \in V^*$ então $v = u_2 + v_2$, com $u_2 \in U$ e $v_2 \in V$ e daí segue que $2\gamma v = 2e \star v = 2e \star (u_2 + v_2) = 2e \star u_2 + 2e \star v_2 = 2[(1 - 2\gamma)eu_2 + \gamma u_2] + 2[(1 - 2\gamma)ev_2 + \gamma v_2] = (1 - 2\gamma)u_2 + 2\gamma u_2 + 2\gamma v_2 = (1 - 2\gamma)u_2 + 2\gamma v$ e portanto $(1 - 2\gamma)u_2 = 0$, o que implica em $u_2 = 0$. Logo, $v = v_2$ e assim $V = V^*$. ■

4.2 Resultados e exemplos

Nesta seção estudaremos a influência dos P-monômios de grau ≤ 4 sobre a dimensão de A . Consideramos situações nas quais um determinado P-monômio é não nulo e obtivemos, em cada caso, um valor mínimo para a dimensão de A . Cada um dos resultados obtidos pode ser lido ao contrário. Por exemplo, o Lema 4.9 diz que para todas as t-álgebras de dimensão ≤ 10 temos $U^1 = 0$. Além disso, para cada caso encontramos

um exemplo minimal. A busca dos exemplos minimais é uma tarefa mais interessante do que estimar a mínima dimensão de A pois não há métodos gerais e devemos nos guiar um pouco pela intuição. Ao exibir os exemplos minimais, não provamos que a álgebra dada é efetivamente train, pois isto é uma tarefa rotineira (porém longa).

Para que o leitor possa ter uma idéia de como foram obtidos os exemplos minimais aqui apresentados, descrevemos rapidamente como encontramos o Exemplo 10, no qual queríamos $U^3V \neq 0$ (os outros exemplos foram contruídos de maneira análoga). Pelo Lema 4.10, $U^3V \neq 0$ implica na existência de elementos $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $(u_1^2 u_2)v \neq 0$ e além disso $\{u_1, u_2, u_1 v, u_2 v, u_1^2 u_2, u_1^2(u_2 v), u_1^2, u_1 u_2, u_1(u_2 v), v\}$ é livre. Consideramos $u_3 = u_1 v, u_4 = u_2 v, u_5 = u_1^2 u_2, u_6 = u_1^2(u_2 v), v_1 = u_1^2, v_2 = u_1 u_2, v_3 = u_1(u_2 v)$ e $v_4 = v$ e calculamos, usando as relações (1.8) a (1.12), a tabela de multiplicação de uma t -álgebra A de posto 3 com base $\{e, u_1, \dots, u_6, v_1, \dots, v_4\}$ (sendo e um elemento idempotente de A de peso 1). Alguns dos produtos desta tabela puderam ser determinados pelas identidades (1.13) a (1.18). Cada produto não conhecido foi escrito como combinação linear da base do subespaço a que ele pertencia e impondo que a álgebra A satisfizesse a equação (1.1) determinamos os coeficientes da referida combinação linear.

Lembremos que estamos considerando fixada uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ de posto 3, de tipo $(1 + r, s)$. Nos exemplos apresentados, a função peso é definida como valendo 1 sobre e e zero nos demais elementos da base.

Lema 4.4 *Se o P -monômio U^2 é não nulo, então $r \geq 1, s \geq 1$ e portanto $\dim A \geq 3$.*

Prova: De $U^2 \neq 0$, segue que $U \neq 0$ e portanto $r \geq 1$. Além disso, como $0 \neq U^2 \subseteq V$, temos que $s \geq 1$ e dessa forma $\dim A \geq 3$. ■

Exemplo 1: A álgebra A com base $\{e, u, v\}$ e tabela de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu = u \\ u^2 = v \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U^2 \neq 0$ e dimensão 3.

Lema 4.5 *Se o P -monômio UV é não nulo, então $r \geq 2$ e $s \geq 1$ e portanto $\dim A \geq 4$.*

Prova: Sejam $u \in U$ e $v \in V$ tais que $uv \neq 0$. Afirmando que $\{u, uv\}$ é livre. De fato, se $\alpha u + \beta uv = 0$, então $0 = \alpha uv + \beta(uv)v = \alpha uv$ (por (1.15)) e portanto $\alpha = 0$, o que implica em $\beta = 0$. Logo, $\dim U \geq 2$. Além disso, como $v \neq 0$, segue que $\dim V \geq 1$ e, conseqüentemente, $\dim A \geq 4$. ■

Exemplo 2: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, v\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, 2) \\ ev = 0 \\ u_1v = u_2 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $UV \neq 0$ e dimensão 4.

Corolário 4.5.1 *Nas condições do Lema 4.5, se existe um gerador uv de UV tal que $u \notin \text{ann}\{u\}$, então $r, s \geq 2$ e portanto $\dim A \geq 5$.*

Prova: Basta ver que, nesse caso, $\{u^2, v\}$ é livre, pois se $\alpha u^2 + \beta v = 0$, então $\beta uv = 0$ e portanto $\beta = 0$. Logo, $\alpha u^2 = 0$, o que implica em $\alpha = 0$ e assim $s \geq 2$ e $\dim A \geq 5$, uma vez que, pelo Lema 4.5, $r \geq 2$. ■

Exemplo 3: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_1^2, v\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, 2) \\ eu_1^2 = ev = 0 \\ u_1v = u_2 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

é uma t -álgebra de posto 3, satisfazendo $x^3 = \omega(x)x^2$, com $UV \neq 0$, $u_1 \notin \text{ann}\{u_1\}$ e dimensão 5.

Lema 4.6 *Se o P -monômio U^3 é não nulo, então $r \geq 3$ e $s \geq 2$ e portanto $\dim A \geq 6$.*

Prova: Afirmando que existem elementos $u_1, u_2 \in U$ tais que $u_1^2 u_2 \neq 0$. De fato, se fosse $u_1^2 u_2 = 0$ para quaisquer $u_1, u_2 \in U$, então teríamos $2(u_1 u_3)u_2 = (u_1 + u_3)^2 u_2 - u_1^2 u_2 - u_3^2 u_2 = 0$ para quaisquer $u_1, u_2, u_3 \in U$, contra a hipótese de U^3 ser não nulo. Observemos agora que se $u_1^2 u_2 \neq 0$, então $\{u_1, u_2\}$ é livre. Caso contrário teríamos $u_1 = \alpha u_2$ (ou $u_2 = \beta u_1$) e portanto $u_1^2 u_2 = \alpha^2 u_2^2 u_2 = \alpha^2 u_2^3 = 0$ (ou, equivalentemente, $u_1^2 u_2 = \beta^2 u_1^3 = 0$). Mostremos também que $\{u_1^2, u_1 u_2\}$ é livre. Se $\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 u_2 = 0$, então de (4.1) $0 = 2\alpha_2 u_1(u_1 u_2) = -\alpha_2 u_1^2 u_2$, o que significa que $\alpha_2 = 0$, e portanto $\alpha_1 = 0$. Assim, $s \geq 2$. Quanto a r , já vimos que $\{u_1, u_2\} \subseteq U$ é livre. Afirmamos agora que $u_1^2 u_2$ não depende linearmente de u_1 e u_2 , o que garantirá que $r \geq 3$. De fato, se $u_1^2 u_2 = \alpha u_1 + \beta u_2$ ($\alpha, \beta \in F$), então por (1.18), $0 = u_1(u_1^2 u_2) = u_1(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha u_1^2 + \beta u_1 u_2$ e portanto $\alpha = \beta = 0$, pois já vimos acima que $\{u_1^2, u_1 u_2\}$ é livre. Ou seja, $r \geq 3$ e $\dim A \geq 6$. ■

Exemplo 4: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, 2, 3); & ev_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ u_1^2 = v_1; & u_1u_3 = v_2; & 2u_1v_2 = -u_2 \\ u_3^2 = -v_1 + 2v_2; & u_3v_1 = u_2; & 2u_3v_2 = u_2 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, $U^3 \neq 0$ (pois $2u_1(u_1u_3) = 2u_1v_2 = -u_2$) e sua dimensão é 6.

Lema 4.7 *Se o P -monômio $U(UV)$ é não nulo, então $r \geq 4$, $s \geq 2$ (e portanto $\dim A \geq 7$).*

Prova: Tomemos $u_1, u_2 \in U$, $v_1 \in V$ tais que $u_2(u_1v_1) \neq 0$. Mostremos, inicialmente, que $\{u_1, u_2, u_1v_1, u_2v_1\} \subseteq U$ é livre. Se $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_1v_1 + \alpha_4u_2v_1 = 0$, então multiplicando por v_1 , de (1.15) obtemos $\alpha_1u_1v_1 + \alpha_2u_2v_1 = 0$ e portanto (por (1.14)) $\alpha_1u_2(u_1v_1) = 0$, o que implica em α_1 e α_2 serem ambos nulos (note que aqui ficou mostrado que $\{u_1v_1, u_2v_1\}$ é livre). Logo, $\alpha_3u_1v_1 + \alpha_4u_2v_1 = 0$, o que significa que α_3 e α_4 são nulos e $\dim U \geq 4$. Mostremos que $\{v_1, u_2(u_1v_1)\} \subseteq V$ é livre. Para isso, suponhamos que $\beta_1v_1 + \beta_2u_2(u_1v_1) = 0$. Então, multiplicando por $2u_2$ e de (4.1), $0 = 2\beta_1u_2v_1 + 2\beta_2u_2[u_2(u_1v_1)] = 2\beta_1u_2v_1 - \beta_2u_2^2(u_1v_1)$ e portanto $0 = 2\beta_1u_1(u_2v_1) - \beta_2u_1[u_2^2(u_1v_1)] = -2\beta_1u_2(u_1v_1) + \beta_2(u_1v_1)(u_1u_2^2) = -2\beta_1u_2(u_1v_1)$, sendo que as duas últimas igualdades vêm de (4.4), (4.5) e (4.9), respectivamente. Portanto $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $\dim V \geq 2$. ■

Exemplo 5: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 4); & ev_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ -u_1u_4 = u_2u_3 = v_2 \\ u_1v_1 = u_3; & u_2v_1 = u_4 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U(UV) \neq 0$ (pois $0 \neq v_2 = u_2u_3 = u_2(u_1v_1) \in U(UV)$) e dimensão 7.

Corolário 4.7.1 *Nas condições do Lema 4.7, se $U(UV)$ possui um gerador aditivo $u_2(u_1v_1)$ tal que $u_2^2 \notin \text{ann}\{u_1v_1\}$, então $r \geq 6$, $s \geq 4$ e portanto $\dim A \geq 11$.*

Prova: Nesse caso, o conjunto $\{v_1, u_2(u_1v_1), u_2^2, u_1u_2\} \subseteq V$ é livre. Supondo $\alpha_1v_1 + \alpha_2u_2(u_1v_1) + \alpha_3u_2^2 + \alpha_4u_1u_2 = 0$, multiplicando por $2u_2$, segue que $0 = 2\alpha_1u_2v_1 + 2\alpha_2u_2[u_2(u_1v_1)] + 2\alpha_4u_2(u_1u_2) = 2\alpha_1u_2v_1 + -\alpha_2u_2^2(u_1v_1) - \alpha_4u_2^2u_1$, por (4.1). Logo, $0 = -\alpha_4(u_2^2u_1)v_1 = \alpha_4u_2^2(u_1v_1)$ (por (4.3) e (1.15)) e daí segue que $\alpha_4 = 0$ e $2\alpha_1u_2v_1 - \alpha_2u_2^2(u_1v_1) = 0$. Aqui, como no Lema 4.7, teremos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e, portanto, $\alpha_3 = 0$, o que implica em $\dim V \geq 4$. Afirmamos que $\{u_1, u_2, u_1v_1, u_2v_1, u_2^2u_1, u_2^2(u_1v_1)\}$ é livre. Para simplificar nossos cálculos, comecemos provando que $\{u_1v_1, u_2v_1, u_2^2(u_1v_1)\}$ é livre. Se $\lambda_1u_1v_1 + \lambda_2u_2v_1 + \lambda_3u_2^2(u_1v_1) = 0$, multiplicando por u_2^2 e de (1.15) e (1.16), obtemos então $\lambda_1u_2^2(u_1v_1) = 0$, isto é, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2u_2v_1 + \lambda_3u_2^2(u_1v_1) = 0$. Logo, multiplicando por u_1 , segue que $0 = \lambda_2u_1(u_2v_1) + \lambda_3u_1[u_2^2(u_1v_1)] = \lambda_2u_1(u_2v_1) = -\lambda_2u_2(u_1v_1)$, pois, por (4.4) e (4.9), $u_1[u_2^2(u_1v_1)] = 0$ e a última igualdade segue de (4.4). Isto implica em $\lambda_2 = 0$, uma vez que $0 \neq u_2^2(u_1v_1) = -2u_2[u_2(u_1v_1)]$. Portanto, $\lambda_3 = 0$, o que completa a prova de que $\{u_1v_1, u_2v_1, u_2^2(u_1v_1)\}$ é livre. Finalmente, se $\beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_1v_1 + \beta_4u_2v_1 + \beta_5u_2^2u_1 + \beta_6u_2^2(u_1v_1) = 0$, então, multiplicando por v_1 e de (1.15), obtemos $0 = \beta_1u_1v_1 + \beta_2u_2v_1 + \beta_5(u_2^2u_1)v_1 = \beta_1u_1v_1 + \beta_2u_2v_1 - \beta_5u_2^2(u_1v_1)$ (por (4.3)) e portanto $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = 0$. Ficamos então com $\beta_3u_1v_1 + \beta_4u_2v_1 + \beta_6u_2^2(u_1v_1) = 0$ e isto implica em $\beta_3 = \beta_4 = \beta_6 = 0$. Dessa forma, $\dim U \geq 6$ e portanto $\dim A \geq 11$. ■

Exemplo 6: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 6); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1u_2 = v_4; \quad -u_1u_4 = u_2u_3 = v_2; \quad u_2^2 = v_3 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_2v_1 = u_4; \quad u_1v_3 = -2u_2v_4 = u_5 \\ -2u_2v_2 = u_3v_3 = -2u_4v_4 = -u_5v_1 = u_6 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U(UV) \neq 0$ (pois $u_2(u_1v_1) = u_2u_3 = v_2$), $u_2^2 \notin \text{ann}\{u_1v_1\}$ (pois $u_2^2(u_1v_1) = v_3u_3 = u_6$) e dimensão 11.

Lema 4.8 *Se o P -monômio $(UV)V$ é não nulo, então $r \geq 4$, $s \geq 2$ e portanto $\dim A \geq 7$.*

Prova: Consideremos um gerador aditivo $(uv)v_1$ de $(UV)V$. Os elementos v e v_1 são livres pois, caso contrário, teríamos $(uv)v_1 = 0$ por (1.15); ou seja, $\dim V \geq 2$. Mostremos que o subconjunto $\{u, uv, uv_1, (uv)v_1\}$ de U é livre. Se $\alpha_1u + \alpha_2uv + \alpha_3uv_1 + \alpha_4(uv)v_1 = 0$ então, multiplicando por v e de (1.15), segue que $0 = \alpha_1uv + \alpha_3(uv_1)v = \alpha_1uv - \alpha_3(uv)v_1$ (por (4.3)) e portanto $\alpha_1(uv)v_1 = 0$. Daí segue que $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e portanto $\alpha_2uv + \alpha_4(uv)v_1 = 0$. Logo, $\alpha_2(uv)v_1 = 0$, o que implica em α_2 e α_4 serem ambos nulos. Ou seja, $\dim U \geq 4$ e $\dim A \geq 7$. ■

Exemplo 7: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 4); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ u_1v_1 = u_2; \quad u_1v_2 = u_3; \quad u_2v_2 = u_4; \quad u_3v_1 = -u_4 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $(UV)V \neq 0$ (pois $0 \neq -u_4 = u_3v_1 = (u_1v_2)v_1$) e dimensão 7.

Corolário 4.8.1 *Nas condições do Lema 4.8, se o subespaço $(UV)V$ possui um gerador aditivo $(uv)v_1$ tal que $u \notin \text{ann}\{u\}$, então $s \geq 3$ e portanto $\dim A \geq 8$.*

Prova: Se $\alpha_1 u^2 + \alpha_2 v + \alpha_3 v_1 = 0$, então $\alpha_2 uv + \alpha_3 uv_1 = 0$ e como, pelo Lema anterior, $\{uv, uv_1\}$ é livre, segue que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e consequentemente $\alpha_1 = 0$. Assim, $\dim V \geq 3$ e como, pelo Lema 4.7, $\dim U \geq 4$, segue o resultado. ■

Exemplo 8: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, u_1^2\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 4,) \\ eu_1^2 = ev_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ u_1v_1 = u_2; \quad u_1v_2 = u_3 \\ u_2v_2 = u_4; \quad u_3v_1 = -u_4 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $(UV)V \neq 0$ (pois $0 \neq -u_4 = u_3v_1 = (u_1v_2)v_1$), $u_1^2 \neq 0$ e dimensão 8.

Lema 4.9 *Se o P -monômio U^4 é não nulo, então $r \geq 6$, $s \geq 4$ e portanto $\dim A \geq 11$.*

Prova: Afirmando que se $U^4 \neq 0$, então existem $u_1, u_2, u_3 \in U$ tais que $(u_1^2 u_2)u_3 \neq 0$. De fato, se fosse $(u_1^2 u_2)u_3 = 0$ para todos $u_1, u_2, u_3 \in U$, então $2u_4[u_5(u_6 u_7)] = u_4[u_5(u_6 + u_7)^2] - u_4(u_5 u_6^2) - u_4(u_5 u_7^2) = 0$, contra a hipótese de $U^4 \neq 0$. Sejam $u_1, u_2, u_3 \in U$ tais que $0 \neq (u_1^2 u_2)u_3 = -(u_1^2 u_3)u_2$ (por (4.4)) e mostremos que o subconjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_1^2 u_2, u_1^2 u_3, (u_1 u_2)u_3\}$ de U é livre. Para isso, suponhamos $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_1^2 u_2 + \alpha_5 u_1^2 u_3 + \alpha_6 (u_1 u_2)u_3 = 0$. Dessa forma, multiplicando por u_1^2 , temos $\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1^2 u_3 + \alpha_6 u_1^2 [(u_1 u_2)u_3] = 0$, por (1.15).

e portanto de (1.14), $0 = \alpha_2(u_1^2 u_2)u_3 + \alpha_6\{u_1^2[(u_1 u_2)u_3]\}u_3 = \alpha_2(u_1^2 u_2)u_3$ (sendo esta última igualdade consequência de (4.12)), o que implica em $\alpha_2 = 0$. Daí segue que $\alpha_3 u_1^2 u_3 + \alpha_6 u_1^2[(u_1 u_2)u_3] = 0$ e portanto $0 = \alpha_3(u_1^2 u_3)u_2 + \alpha_6\{u_1^2[(u_1 u_2)u_3]\}u_2 = \alpha_3(u_1^2 u_3)u_2$, novamente de (4.12). Logo $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_1 u_1 + \alpha_4 u_1^2 u_2 + \alpha_5 u_1^2 u_3 + \alpha_6(u_1 u_2)u_3 = 0$. Assim $\alpha_1 u_1 u_3 + \alpha_4(u_1^2 u_2)u_3 = 0$ (por (1.14)) e daí $0 = 2\alpha_1 u_1(u_1 u_3) + 2\alpha_4 u_1[(u_1^2 u_2)u_3] = -\alpha_1 u_1^2 u_3 - 2\alpha_4(u_1^2 u_2)(u_1 u_3)$, de (4.1) e (4.6). Multiplicando por u_2 , segue que $0 = \alpha_1(u_1^2 u_3)u_2 + 2\alpha_4 u_2[(u_1^2 u_2)(u_1 u_3)] = \alpha_1(u_1^2 u_3)u_2$ (por (4.12)) e portanto $\alpha_1 = 0$, o que implica em $\alpha_4 = 0$. Temos então que $\alpha_5 u_1^2 u_3 + \alpha_6(u_1 u_2)u_3 = 0$ e assim $0 = 2\alpha_6 u_1[(u_1 u_2)u_3] = -2\alpha_6 u_3[(u_1 u_2)u_1] = \alpha_6(u_1^2 u_2)u_3$, por (4.4) e (4.1), respectivamente; ou seja, α_6 e portanto α_5 são ambos nulos e $\dim U \geq 6$. Afirmo agora que $\{u_1^2, u_1 u_2, u_1 u_3, (u_1^2 u_2)u_3\} \subseteq V$ é livre. De fato, se $\beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_1 u_2 + \beta_3 u_1 u_3 + \beta_4(u_1^2 u_2)u_3 = 0$, então $0 = 2\beta_2 u_1(u_1 u_2) + 2\beta_3 u_1(u_1 u_3) + 2\beta_4 u_1[(u_1^2 u_2)u_3] = -\beta_2 u_1^2 u_2 + \beta_3 u_1^2 u_3 - 2\beta_4 u_1^2[u_3(u_1 u_2)]$ (por (4.1) e (4.4)) e portanto, de (1.14) e (4.12), segue que $0 = \beta_2(u_1^2 u_2)u_3 + 2\beta_4\{u_1^2[u_3(u_1 u_2)]\}u_3 = \beta_2(u_1^2 u_2)u_3$. Dessa forma, $\beta_2 = 0$ e $\beta_3 u_1^2 u_3 + 2\beta_4 u_1^2[u_3(u_1 u_2)] = 0$. Multiplicando por u_2 , segue que $0 = \beta_3(u_1^2 u_3)u_2 + 2\beta_4 u_2\{u_1^2[u_3(u_1 u_2)]\} = \beta_3(u_1^2 u_3)u_2$, por (4.12). Daí segue que $\beta_3 = 0$ e assim $\beta_1 u_1^2 + \beta_4(u_1^2 u_2)u_3 = 0$. Logo, $0 = \beta_1 u_1^2 u_2 + \beta_4[(u_1^2 u_2)u_3]u_2$; isto é, $0 = \beta_1(u_1^2 u_2)u_3 + \beta_4\{[(u_1^2 u_2)u_3]u_2\}u_3 = \beta_1(u_1^2 u_2)u_3$ (por (4.13)). Dessa forma, β_1 e β_4 são ambos nulos e portanto $\dim V \geq 4$. Assim $\dim A \geq 11$. ■

Exemplo 9: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 6); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1^2 = v_1; \quad u_1 u_2 = v_2; \quad u_1 u_3 = v_3 \\ 2u_1 u_6 = -u_2 u_5 = u_3 u_4 = v_4 \\ -2u_1 v_2 = u_2 v_1 = u_4; \quad -2u_1 v_3 = u_3 v_1 = u_5; \quad -u_2 v_3 = u_3 v_2 = u_6 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U^4 \neq 0$ (pois $u_3(u_1^2u_2) = u_3(u_2v_1) = u_3u_4 = v_4$) e dimensão 11.

Lema 4.10 *Se o P -monômio U^3V é não nulo, então $r \geq 6$, $s \geq 4$ e assim $\dim A \geq 11$.*

Prova: Nessas condições, afirmo que existem $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $(u_1^2u_2)v \neq 0$. De fato, se $(u_1^2u_2)v = 0$ para todos $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$, então teríamos $2[u_3(u_4u_5)]v_1 = [(u_4 + u_5)^2u_3]v_1 - (u_4^2u_3)v_1 - (u_5^2u_3)v_1 = 0$, o que contraria o fato de $U^3V \neq 0$. Consideremos, então, $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $(u_1^2u_2)v \neq 0$. Note que $(u_1^2u_2)v = -u_1^2(u_2v) = 2u_1[u_1(u_2v)] = -2u_1[u_2(u_1v)] \neq 0$, por (4.3), (4.1) e (4.4), respectivamente. Afirmamos que $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v, u_1^2u_2, u_1^2(u_2v)\}$ é livre. De fato, se tivermos $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_1v + \alpha_4u_2v + \alpha_5u_1^2u_2 + \alpha_6u_1^2(u_2v) = 0$, então, multiplicando por u_2v , obtemos $\alpha_1u_1(u_2v) = 0$ (por (1.14), (4.10), (1.17), (4.9) e (1.14)) e portanto $\alpha_1 = 0$. Assim, $\alpha_2u_2 + \alpha_3u_1v + \alpha_4u_2v + \alpha_5u_1^2u_2 + \alpha_6u_1^2(u_2v) = 0$. Logo, multiplicando por u_1^2 , de (1.16) e (1.14), $\alpha_2u_1^2u_2 + \alpha_4u_1^2(u_2v) = 0$, o que implica em $\alpha_2(u_1^2u_2)v = 0$ (por (4.3) e (1.15)). Dessa forma, α_2 e α_4 são ambos nulos e $\alpha_3u_1v + \alpha_5u_1^2u_2 + \alpha_6u_1^2(u_2v) = 0$. Logo, novamente por (1.15), $\alpha_5(u_1^2u_2)v = 0$; ou seja, $\alpha_5 = 0$. Segue então que $\alpha_3u_1v + \alpha_6u_1^2(u_2v) = 0$, o que implica em $0 = \alpha_3u_2(u_1v) + \alpha_6u_2[u_1^2(u_2v)] = \alpha_3u_2(u_1v)$ (por (4.11)) e portanto α_3 e α_6 são ambos nulos. Concluimos então que $\dim U \geq 6$. Mostremos, agora, que $\{u_1^2, u_1u_2, u_1(u_2v), v\}$ é livre e, portanto, $\dim V \geq 4$. Para isso, suponhamos $\beta_1u_1^2 + \beta_2u_1u_2 + \beta_3u_1(u_2v) + \beta_4v = 0$. Multiplicando por $2u_1$, temos $0 = 2\beta_2u_1(u_1u_2) + 2\beta_3u_1[u_1(u_2v)] + 2\beta_4u_1v = -\beta_2u_1^2u_2 - \beta_3u_1^2(u_2v) + 2\beta_4u_1v$ (por (4.1)) e como já vimos que $\{u_1v, u_1^2u_2, u_1^2(u_2v)\} \subseteq U$ é livre, segue que $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Logo, $\beta_1u_1^2 = 0$, o que implica em $\beta_1 = 0$; ou seja, $\dim V \geq 4$ e $\dim A \geq 11$. ■

Exemplo 10: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 6); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1^2 = v_1; \quad u_2^2 = 4v_3 \\ u_1u_2 = v_2; \quad u_1u_4 = -u_2u_3 = v_3 \\ -2u_1v_2 = u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = -2u_3v_2 = u_6 \\ -2u_1v_3 = u_4v_1 = -u_5v_4 = u_6 \\ u_1v_4 = u_3; \quad u_2v_4 = u_4 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U^3V \neq 0$ (pois $(u_1^2u_2)v_4 = (u_2v_1)v_4 = u_5v_4 = -u_6$) e dimensão 11.

Observação: Nesse exemplo, temos que $2u_1[u_2(u_1v_4)] = 2u_1(u_2u_3) = -2u_1v_3 = -u_6$, isto é, $U[U(UV)] \neq 0$.

Lema 4.11 *Se o P -monômio $U[U(UV)]$ é não nulo, então*

(i) *se $U^3V \neq 0$, então $\dim A \geq 11$.*

(ii) *se $U^3V = 0$, então $r \geq 7$, $s \geq 4$ e portanto $\dim A \geq 12$.*

Prova: Se ocorrer (i), o resultado segue do Lema 4.10. Suponhamos, então, que ocorra (ii), isto é, $0 = U^3V = U^2(UV)$ (veja Lema 3.1)). Como $U[U(UV)] \neq 0$, existem $u_1, u_2, u_3 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1[u_2(u_3v)] \neq 0$. Note que, como $U^3V = 0$, de $J(u_1, u_2, u_3v) = 0$, temos $0 \neq u_1[u_2(u_3v)] = -u_2[u_1(u_3v)]$. Além disso, $u_1J(u_2, u_3, v) = u_1[u_2(u_3v)] + u_1[u_3(u_2v)] = 0$, o que implica em $u_1[u_3(u_2v)] \neq 0$ e portanto $u_3[u_1(u_2v)] \neq 0$. Ou seja, $u_2(u_1v) = -u_1(u_2v) \neq 0$. Afirmando que $\{u_1, u_2, u_3, u_1v, u_2v, u_3v, u_1[u_2(u_3v)]\}$ é livre. De fato, supondo $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3 + \alpha_4u_1v + \alpha_5u_2v + \alpha_6u_3v + \alpha_7u_1[u_2(u_3v)] = 0$, então por (1.15) e de $U^3V = 0$, $\alpha_1u_1v + \alpha_2u_2v + \alpha_3u_3v = 0$ e assim multiplicando por u_2 e de (1.14), temos $\alpha_1u_2(u_1v) + \alpha_3u_2(u_3v) = 0$. Logo, multiplicando por u_1 e de $J(u_1, u_2, u_1v) = 0$, temos $\alpha_1u_1[u_2(u_1v)] + \alpha_3u_1[u_2(u_3v)] = -\alpha_1(u_1u_2)(u_1v) + \alpha_3u_1[u_2(u_3v)] =$

$= \alpha_3 u_1[u_2(u_3v)] = 0$ (pois $U^2(UV) = 0$). Dessa forma, $\alpha_3 = 0$ e isto implica em α_1 e α_2 , serem também nulos (note que aqui ficou mostrado que $\{u_1v, u_2v, u_3v\}$ é livre). Assim, de $u_1[u_2(u_3v)] = -u_2[u_1(u_3v)]$ (pois $(u_1u_2)(u_3v) \in U^2V$), temos $\alpha_4u_1v + \alpha_5u_2v + \alpha_6u_3v - \alpha_7u_2[u_1(u_3v)] = 0$, ou seja, $\alpha_4u_2(u_1v) + \alpha_6u_2(u_3v) - \alpha_7u_2\{u_2[u_1(u_3v)]\} = \alpha_4u_2(u_1v) + \alpha_6u_2(u_3v) = 0$, por (1.14). Logo, multiplicando por u_1 , $\alpha_6u_1[u_2(u_3v)] = 0$, uma vez que $u_1[u_2(u_1v)] = -u_2[u_1(u_1v)] - (u_1u_2)(u_1v) = 0$, respectivamente por (1.14) e $U^2(UV) = U^3V = 0$. Isto implica em α_6 e α_4 serem ambos nulos. Ficamos então com $\alpha_5u_2v + \alpha_7u_1[u_2(u_3v)] = 0$ e assim $0 = \alpha_5u_1(u_2v) + \alpha_7u_1\{u_1[u_2(u_3v)]\} = \alpha_5u_1(u_2v)$, por (1.14). Desse modo, $\alpha_5 = \alpha_7 = 0$ e $\dim U \geq 7$. Mostremos que $\{u_1(u_2v), u_1(u_3v), u_2(u_3v), v\} \subseteq V$ é livre. Para isso, suponhamos $\beta_1u_1(u_2v) + \beta_2u_1(u_3v) + \beta_3u_2(u_3v) + \beta_4v = 0$. Então, multiplicando por u_1 , segue que $\beta_1u_1[u_1(u_2v)] + \beta_2u_1[u_1(u_3v)] + \beta_3u_1[u_2(u_3v)] + \beta_4u_1v = \beta_3u_1[u_2(u_3v)] + \beta_4u_1v = 0$, pois por (4.1) $u_1[u_1(u_i v)] \in U^2(UV) = 0$ e portanto, de $J(u_1, u_2, u_3v) = 0$ e de $U^2(UV) = 0$, obtemos $-\beta_3u_2[u_1(u_3v)] + \beta_4u_1v = 0$. Multiplicando por u_2 , segue que $0 = -\beta_3u_2\{u_2[u_1(u_3v)]\} + \beta_4u_2(u_1v) = \beta_4u_2(u_1v) = 0$ (de (1.14)) e portanto $\beta_4 = 0$, o que implica em $\beta_3 = 0$. Logo, $\beta_1u_1(u_2v) + \beta_2u_1(u_3v)$. Multiplicando novamente por u_2 , temos $0 = \beta_1u_2[u_1(u_2v)] + \beta_2u_2[u_1(u_3v)] = \beta_2u_2[u_1(u_3v)]$, sendo que esta última igualdade é consequência da identidade de Jacobi aplicada aos elementos u_1, u_2, u_2v e de $U^2(UV) = 0$. Portanto, β_2 e β_1 são ambos nulos e assim $\dim V \geq 4$ e $\dim A \geq 12$. ■

Exemplo 11: O Exemplo 10 confirma o resultado da parte (i) do Lema anterior. Quanto à parte (ii), a álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 7); & ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1u_5 = -u_2u_4 = -v_2; & u_1u_6 = -u_3u_4 = -v_3; & u_2u_6 = -u_3u_5 = v_1 \\ u_1v_1 = u_2v_3 = -u_3v_2 = u_7; & u_1v_4 = u_4; & u_2v_4 = u_5; & u_3v_4 = u_6 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U[U(UV)] \neq 0$ (pois $u_1[u_2(u_3v_4)] = u_1(u_2u_6) = u_1v_1 = u_7$), $U^3V = 0$ (pois $U^3 = Fu_7$ e $u_7V = 0$) e dimensão 12.

Lema 4.12 *Se o P -monômio $U[(UV)V]$ é não nulo, então $r \geq 8$, $s \geq 3$ e portanto $\dim A \geq 12$.*

Prova: Existem $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in V$ tais que $u_2[(u_1v_1)v_2] = -(u_1v_1)(u_2v_2) \neq 0$. Afirmando que $\{u_1, u_2, u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2, (u_1v_1)v_2, (u_2v_2)v_1\}$ é livre. De fato, se tivermos $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_1v_1 + \alpha_4u_1v_2 + \alpha_5u_2v_1 + \alpha_6u_2v_2 + \alpha_7(u_1v_1)v_2 + \alpha_8(u_2v_2)v_1 = 0$ então multiplicando por $(u_2v_2)v_1$ e usando as identidades (4.5) e (4.9), (4.10), (4.3) e (4.10), (4.10), (1.14), (4.3) e (4.10), (1.17), temos $\alpha_1u_1[(u_2v_2)v_1] = 0$, o que implica em $\alpha_1 = 0$. Logo $\alpha_2u_2 + \alpha_3u_1v_1 + \alpha_4u_1v_2 + \alpha_5u_2v_1 + \alpha_6u_2v_2 + \alpha_7(u_1v_1)v_2 + \alpha_8(u_2v_2)v_1 = 0$. Daí, multiplicando agora por v_1 e de (1.15) e (4.3), vem que $\alpha_2u_2v_1 + \alpha_4(u_1v_2)v_1 + \alpha_6(u_2v_2)v_1 = 0$ e portanto $\alpha_2(u_2v_1)v_2 = 0$ (novamente de (1.15) e (4.3)); ou seja, $\alpha_2 = 0$ e também $\alpha_4(u_1v_2)v_1 + \alpha_6(u_2v_2)v_1 = 0$. Logo, multiplicando por u_1 e utilizando (4.5) e (4.9), obtemos $\alpha_6u_1[(u_2v_2)v_1] = 0$; isto é, α_6 e α_4 são ambos nulos. Note que aqui ficou mostrado que $\{u_2v_1, (u_1v_2)v_1, (u_2v_2)v_1\}$ é livre. Ficamos então com $\alpha_3u_1v_1 + \alpha_5u_2v_1 + \alpha_7(u_1v_1)v_2 + \alpha_8(u_2v_2)v_1 = 0$ e portanto (multiplicando por u_2v_2), $\alpha_3(u_1v_1)(u_2v_2) = 0$ (por (4.9), (4.10) e (1.14)). Isto implica em $\alpha_3 = 0$ e $0 = \alpha_5u_2v_1 + \alpha_7(u_1v_1)v_2 + \alpha_8(u_2v_2)v_1 = \alpha_5u_2v_1 - \alpha_7(u_1v_2)v_1 + \alpha_8(u_2v_2)v_1$, sendo esta última igualdade consequência de (4.3). Logo, $\alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$ pois, como observamos acima, $\{u_2v_1, (u_1v_2)v_1, (u_2v_2)v_1\}$ é livre. Segue que $r \geq 8$. Além disso, temos que $s \geq 3$ pois $\{v_1, v_2, (u_1v_1)(u_2v_2)\}$ é livre, uma vez que se $\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \beta_3(u_1v_1)(u_2v_2) = 0$ então, multiplicando por u_1 , segue que $\beta_1u_1v_1 + \beta_2u_1v_2 + \beta_3u_1[(u_1v_1)(u_2v_2)] = 0$ e, multiplicando agora por u_2v_2 e usando as identidades (4.10) e (4.15), temos $\beta_1(u_1v_1)(u_2v_2) = 0$; isto é, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2v_2 + \beta_3(u_1v_1)(u_2v_2) = 0$. Finalmente, multiplicando por u_1v_1 , de (4.16) vem que $\beta_2(u_1v_1)v_2 = 0$. Portanto, β_2 e β_3 são ambos nulos. Ou seja, $\dim V \geq 4$ e $\dim A \geq 12$. ■

Exemplo 12: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, v_1, v_2, v_3\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 8); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ u_1u_4 = u_1u_5 = u_3u_4 = v_3 \\ u_1u_7 = u_2u_3 = u_2u_6 = u_2u_8 = u_5u_6 = -v_3 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_6 \\ u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_4 \\ u_4v_1 = -u_5v_2 = u_7 \\ u_3v_2 = -u_6v_1 = u_8 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U[(UV)V] \neq 0$ (pois $u_2[(u_1v_2)v_1] = u_2(u_6v_1) = -u_2u_8 = v_3$) e dimensão 12.

Antes de passarmos ao próximo resultado, faremos três observações que serão úteis à sua demonstração. Para isso, suponhamos que na t -álgebra A fixada exista um elemento não nulo $u_2[(u_1v_1)v_2]$ tal que $u_1^2 \notin \text{ann}\{(u_2v_2)v_1\}$.

Observação 1: Afirmamos que, nas condições acima, o subconjunto $\{u_1^2(u_2v_2), u_1^2[(u_2v_2)v_1]\}$ de U é livre. De fato, notemos, inicialmente, que $0 \neq u_1^2[(u_2v_2)v_1] = -[(u_2v_2)u_1^2]v_1$ (por (4.3)) e portanto $(u_2v_2)u_1^2 \neq 0$. Suponhamos, agora, que $\alpha u_1^2(u_2v_2) + \beta u_1^2[(u_2v_2)v_1] = 0$. Então, multiplicando por v_1 e de (4.3) e (1.15), obtemos $0 = \alpha[u_1^2(u_2v_2)]v_1 = -\alpha u_1^2[(u_2v_2)v_1]$. Logo $\alpha = \beta = 0$ e o conjunto dado é livre.

Observação 2: Nas condições acima, o subconjunto $\{u_1^2u_2, u_1^2(u_2v_1), u_1^2(u_2v_2), u_1^2[(u_2v_2)v_1]\}$ de U é livre. De fato, inicialmente notemos que, de (4.3), $0 \neq u_1^2(u_2v_2) = -(u_1^2u_2)v_2$ e portanto $u_1^2u_2 \neq 0$. Além disso, ainda de (4.3), $0 \neq u_1^2[(u_2v_2)v_1] = -[u_1^2(u_2v_2)]v_1 = [(u_1^2u_2)v_2]v_1 = -[(u_1^2u_2)v_1]v_2$ e portanto $u_1^2(u_2v_1) \neq 0$. Suponhamos, agora, que $\lambda_1 u_1^2u_2 + \lambda_2 u_1^2(u_2v_1) +$

$+ \lambda_3 u_1^2(u_2 v_2) + \lambda_4 u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$. Multiplicando por v_2 , de (4.3) e (1.15) obtemos $0 = \lambda_1(u_1^2 u_2)v_2 + \lambda_2[u_1^2(u_2 v_1)]v_2 = -\lambda_1 u_1^2(u_2 v_2) - \lambda_2 u_1^2[(u_2 v_1)v_2] = -\lambda_1 u_1^2(u_2 v_2) + \lambda_2 u_1^2[(u_2 v_2)v_1]$ e assim, da observação 1, segue que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Logo, $\lambda_3 u_1^2(u_2 v_2) + \lambda_4 u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$ e novamente pela observação 1, obtemos $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Ou seja, o conjunto dado é livre.

Observação 3: Mostremos que, nas condições acima, o subconjunto $\{(u_1 v_1)v_2, u_1^2[(u_2 v_2)v_1]\}$ de U é livre. Para isso, suponhamos $\alpha(u_1 v_1)v_2 + \beta u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$, multiplicando por u_2 , temos $0 = \alpha u_2[(u_1 v_1)v_2] + \beta u_2\{u_1^2[(u_2 v_2)v_1]\} = \alpha u_1[(u_2 v_2)v_1] - \beta(u_1^2 u_2)[(u_2 v_2)v_1]$ (por (4.5) e (4.7)). Finalmente, multiplicando agora por $2u_1$, de (4.19) e (4.1) obtemos $0 = 2\alpha u_1\{u_1[(u_2 v_2)v_1]\} = -\alpha u_1^2[(u_2 v_2)v_1]$ e portanto $\alpha = \beta = 0$, o que mostra que o conjunto dado é livre.

Corolário 4.12.1 *Nas condições do Lema 4.12, se o monômio de Peirce $U[(UV)V]$ admite um gerador aditivo $u_2[(u_1 v_1)v_2]$ tal que $u_1^2 \notin \text{ann}\{(u_2 v_2)v_1\}$, então $r \geq 12$ e $s \geq 7$ e portanto $\dim A \geq 20$.*

Prova: Começemos mostrando que o subconjunto $\{u_1, u_2, u_1 v_1, u_1 v_2, u_2 v_1, u_2 v_2, (u_1 v_1)v_2, (u_2 v_2)v_1, u_1^2 u_2, u_1^2(u_2 v_1), u_1^2(u_2 v_2), u_1^2[(u_2 v_2)v_1]\}$ de U é livre. Para isso, suponhamos $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_1 v_1 + \alpha_4 u_1 v_2 + \alpha_5 u_2 v_1 + \alpha_6 u_2 v_2 + \alpha_7 (u_1 v_1)v_2 + \alpha_8 (u_2 v_2)v_1 + \alpha_9 u_1^2 u_2 + \alpha_{10} u_1^2(u_2 v_1) + \alpha_{11} u_1^2(u_2 v_2) + \alpha_{12} u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$. Multiplicando por u_1^2 , obtemos $\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_5 u_1^2(u_2 v_1) + \alpha_6 u_1^2(u_2 v_2) + \alpha_8 u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$ (de (1.15), (1.16) e (4.17)) e portanto, pela observação 2 acima, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0$. Dessa forma, $\alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_1 v_1 + \alpha_4 u_1 v_2 + \alpha_7 (u_1 v_1)v_2 + \alpha_9 u_1^2 u_2 + \alpha_{10} u_1^2(u_2 v_1) + \alpha_{11} u_1^2(u_2 v_2) + \alpha_{12} u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$. Multiplicando agora por u_1 , de (1.14), (4.11) e (1.18) segue que $\alpha_1 u_1^2 = 0$; ou seja, $\alpha_1 = 0$ e portanto $\alpha_3 u_1 v_1 + \alpha_4 u_1 v_2 + \alpha_7 (u_1 v_1)v_2 + \alpha_9 u_1^2 u_2 + \alpha_{10} u_1^2(u_2 v_1) + \alpha_{11} u_1^2(u_2 v_2) + \alpha_{12} u_1^2[(u_2 v_2)v_1] = 0$. Multiplicando por $u_2 v_2$, de (4.9), (4.10), (1.14), obtemos $\alpha_3 (u_1 v_1)(u_2 v_2) + \alpha_{10} [u_1^2(u_2 v_1)](u_2 v_2) = 0$. Decorre daí, multiplicando por $2u_1$, que $0 = 2\alpha_3 u_1[(u_1 v_1)(u_2 v_2)] = \alpha_3 u_1^2[(u_2 v_2)v_1]$

(por (4.8) e (4.18)) e portanto $\alpha_3 = 0$. Logo, $\alpha_4 u_1 v_2 + \alpha_7 (u_1 v_1) v_2 + \alpha_9 u_1^2 u_2 + \alpha_{10} u_1^2 (u_2 v_1) + \alpha_{11} u_1^2 (u_2 v_2) + \alpha_{12} u_1^2 [(u_2 v_2) v_1] = 0$ e portanto, multiplicando por v_2 , de (1.15) e (4.3) vem que $0 = \alpha_9 (u_1^2 u_2) v_2 + \alpha_{10} [u_1^2 (u_2 v_1)] v_2$. Dessa forma, multiplicando agora por v_1 , obtemos $\alpha_9 [(u_1^2 u_2) v_2] v_1 = 0$ (por (4.3) e (1.15)). Logo, de $[(u_1^2 u_2) v_2] v_1 \neq 0$ (vide Observação 2), segue que $\alpha_9 = \alpha_{10} = 0$, o que implica em $\alpha_4 u_1 v_2 + \alpha_7 (u_1 v_1) v_2 + \alpha_{11} u_1^2 (u_2 v_2) + \alpha_{12} u_1^2 [(u_2 v_2) v_1] = 0$. Multiplicando por v_1 , de (4.3) e (1.15) ficamos com $0 = \alpha_4 (u_1 v_2) v_1 + \alpha_{11} [u_1^2 (u_2 v_2)] v_1 = -\alpha_4 (u_1 v_1) v_2 - \alpha_{11} u_1^2 [(u_2 v_2) v_1]$ e, pela observação 3, $\alpha_4 = \alpha_{11} = 0$. Dessa forma, novamente pela observação 3, $\alpha_7 = \alpha_{12} = 0$, o que completa a prova de que $\dim U \geq 12$. Afirmamos agora que $\{v_1, v_2, u_1^2, u_1 u_2, u_1 (u_2 v_2), u_2 (u_1 v_1), (u_1 v_1) (u_2 v_2)\} \subseteq V$ é livre. De fato, se $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 u_1^2 + \beta_4 u_1 u_2 + \beta_5 u_1 (u_2 v_2) + \beta_6 u_2 (u_1 v_1) + \beta_7 (u_1 v_1) (u_2 v_2) = 0$, então multiplicando por $u_2 v_2$, de (1.15), (4.1), (1.17) e (4.16) segue que $\beta_1 (u_2 v_2) v_1 + \beta_3 u_1^2 (u_2 v_2) + \beta_4 (u_1 u_2) (u_2 v_2) + \beta_6 [u_2 (u_1 v_1)] (u_2 v_2) = 0$ e assim (multiplicando por u_1^2), $\beta_1 u_1^2 [(u_2 v_2) v_1] = 0$ (por (1.15), (4.20) e (4.21)) e portanto $\beta_1 = 0$. Ficamos então com $\beta_2 v_2 + \beta_3 u_1^2 + \beta_4 u_1 u_2 + \beta_5 u_1 (u_2 v_2) + \beta_6 u_2 (u_1 v_1) + \beta_7 (u_1 v_1) (u_2 v_2) = 0$, o que implica em $\beta_2 (u_1 v_1) v_2 + \beta_4 (u_1 u_2) (u_1 v_1) + \beta_5 [u_1 (u_2 v_2)] (u_1 v_1) = 0$ (da multiplicação por $u_1 v_1$ e de (1.16), (4.1), (1.17) e (4.16)). Portanto, multiplicando por u_2 , obtemos $\beta_2 u_2 [(u_1 v_1) v_2] + \beta_5 u_2 \{[u_1 (u_2 v_2)] (u_1 v_1)\} = 0$ (por (4.22)). Assim, multiplicando por $2u_1$ e usando as identidades (4.23), (4.5) e (4.1), segue que $2\beta_2 u_1 \{u_1 [(u_2 v_2) v_1]\} = -\beta_2 u_1^2 [(u_2 v_2) v_1] = 0$ e portanto $\beta_2 = 0$. Daí obtemos $\beta_3 u_1^2 + \beta_4 u_1 u_2 + \beta_5 u_1 (u_2 v_2) + \beta_6 u_2 (u_1 v_1) + \beta_7 (u_1 v_1) (u_2 v_2) = 0$. Logo, se multiplicarmos por $2u_1 v_1$, usando as identidades (1.16), (4.1) e (1.17), (4.16), teremos $0 = 2\beta_4 (u_1 u_2) (u_1 v_1) + 2\beta_5 [u_1 (u_2 v_2)] (u_1 v_1) = -\beta_4 u_1^2 (u_2 v_1) - \beta_5 u_1^2 [(u_2 v_2) v_1]$ (sendo esta última igualdade consequência de (4.2)). Como, pela observação 2, $\{u_1^2 (u_2 v_1), u_1^2 [(u_2 v_2) v_1]\}$ é livre, obtemos $\beta_4 = \beta_5 = 0$ e $\beta_3 u_1^2 + \beta_6 u_2 (u_1 v_1) + \beta_7 (u_1 v_1) (u_2 v_2) = 0$. Finalmente, de uma nova multiplicação por $2u_1$, de (4.4), (4.5) e (4.1), respectivamente, temos $2\beta_6 u_1 [u_2 (u_1 v_1)] + 2\beta_7 u_1 [(u_1 v_1) (u_2 v_2)] = -2\beta_6 u_1 [u_1 (u_2 v_1)] + -2\beta_7 u_1 \{u_1 [(u_2 v_2) v_1]\} = \beta_6 u_1^2 (u_2 v_1) + \beta_7 u_1^2 [(u_2 v_2) v_1] = 0$ e como acima, $\beta_6 = \beta_7 = 0$. Logo, $\beta_3 = 0$. Portanto, $\dim V \geq 7$ e $\dim A \geq 20$. ■

Exemplo 13: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 12); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \\ u_2^2 = v_3; \quad u_1u_2 = v_4; \quad -u_1u_5 = u_2u_3 = v_5 \\ u_1u_4 = -u_2u_6 = v_6; \quad u_1u_7 = u_2u_8 = -u_3u_4 = u_5u_6 = -v_7 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_6; \quad u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_4 \\ u_4v_1 = -u_5v_2 = u_7; \quad u_3v_2 = -u_6v_1 = u_8 \\ u_1v_3 = -2u_2v_4 = u_9; \quad -2u_2v_5 = u_3v_3 = -2u_5v_4 = -u_9v_1 = u_{10} \\ 2u_2v_6 = -2u_4v_4 = u_6v_3 = -u_9v_2 = u_{11} \\ 2u_2v_7 = -2u_4v_5 = -2u_5v_6 = 2u_7v_4 = u_8v_3 = -u_{10}v_2 = u_{11}v_1 = u_{12} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $U[(UV)V] \neq 0$ (uma vez que $u_2[(u_1v_2)v_1] = u_2(u_6v_1) = -u_2u_8 = v_7$), $u_2^2 \notin \text{ann}\{(u_1v_2)v_1\}$ (pois $u_2^2[(u_1v_2)v_1] = v_3(u_6v_1) = -v_3u_8 = -u_{12}$) e dimensão 20.

Lema 4.13 *Se o P -monômio $[(UV)V]V$ é não nulo, então $r \geq 8$, $s \geq 3$ e portanto $\dim A \geq 12$.*

Prova: Existem $u_1 \in U$ e $v_1, v_2, v_3 \in V$ tais que $[(u_1v_1)v_2]v_3 \neq 0$. Note que $[(u_1v_1)v_2]v_3 = -[(u_1v_1)v_3]v_2 = [(u_1v_3)v_1]v_2 = [(u_1v_2)v_3]v_1 = -[(u_1v_2)v_3]v_1$, sendo todas igualdades consequência de (4.3). Segue então que $(u_1v_1)v_2 \neq 0$, $(u_1v_2)v_3 \neq 0$, $(u_1v_1)v_3 \neq 0$. Mostremos que $\{u_1, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, (u_1v_1)v_2, (u_1v_1)v_3, (u_1v_2)v_3, [(u_1v_1)v_2]v_3\}$ é livre. Suponhamos que $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_1v_1 + \alpha_3u_1v_2 + \alpha_4u_1v_3 + \alpha_5(u_1v_1)v_2 + \alpha_6(u_1v_1)v_3 + \alpha_7(u_1v_2)v_3 + \alpha_8[(u_1v_1)v_2]v_3 = 0$. Dessa forma, ao multiplicarmos por v_1 , de (1.15) e (4.3) obtemos $\alpha_1u_1v_1 + \alpha_3(u_1v_2)v_1 + \alpha_4(u_1v_3)v_1 + \alpha_7[(u_1v_2)v_3]v_1 = 0$ e portanto, multiplicando agora por v_2 e novamente de (1.15) e (4.3), $\alpha_1(u_1v_1)v_2 + \alpha_4[(u_1v_3)v_1]v_2 = 0$. Assim, multiplicando por v_3 e como nos casos anteriores, $\alpha_1[(u_1v_1)v_2]v_3 = 0$: ou seja, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ e isto mostra que $\{(u_1v_1)v_2, [(u_1v_1)v_2]v_3\}$ é livre. Segue

então que $\alpha_3(u_1v_2)v_1 + \alpha_7[(u_1v_2)v_3]v_1 = 0$ e, pela observação acima, como (por (4.3)) $(u_1v_2)v_1 = -(u_1v_1)v_2$, obtemos $\alpha_3 = \alpha_7 = 0$. Logo, $\alpha_2u_1v_1 + \alpha_5(u_1v_1)v_2 + \alpha_6(u_1v_1)v_3 + \alpha_8[(u_1v_1)v_2]v_3 = 0$ e assim, multiplicando finalmente por v_2 , $\alpha_2(u_1v_1)v_2 + \alpha_6[(u_1v_1)v_3]v_2 = 0$; ou seja, $\alpha_2 = \alpha_6 = 0$ e $\alpha_5(u_1v_1)v_2 + \alpha_8[(u_1v_1)v_2]v_3 = 0$, o que implica em $\alpha_5 = \alpha_8 = 0$ e portanto $\dim U \geq 8$. Por outro lado, $\dim V \geq 3$, uma vez que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é livre, pois sua imagem pelo operador L_{u_1} é livre, conforme provamos acima. ■

Exemplo 14: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, v_1, v_2, v_3\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 8); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ u_1v_1 = u_2; \quad u_1v_2 = u_3; \quad u_1v_3 = u_4 \\ u_2v_2 = u_5; \quad u_2v_3 = u_6 \\ u_3v_1 = -u_5; \quad u_3v_3 = u_7 \\ u_4v_1 = -u_6; \quad u_4v_2 = -u_7 \\ u_5v_3 = -u_6v_2 = u_7v_1 = u_8 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $[(UV)V]V \neq 0$ (pois $[(u_1v_1)v_2]v_3 = (u_2v_2)v_3 = u_5v_3 = u_8$) e dimensão 12.

Corolário 4.13.1 *Nas condições do Lema 4.13, se $[(UV)V]V$ tem um gerador aditivo $[(u_1v_1)v_2]v_3$ tal que $u_1^2 \neq 0$, então $r \geq 8$, $s \geq 4$ e portanto $\dim A \geq 13$.*

Prova: Mostremos que $\dim V \geq 4$. Para isto basta observar que, neste caso, u_1^2 não depende linearmente de v_1, v_2, v_3 . De fato, se $u_1^2 = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3$ então, da multiplicação por u_1 obtemos $0 = u_1^3 = \alpha_1u_1v_1 + \alpha_2u_1v_2 + \alpha_3u_1v_3$ e daí $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (pelo que provamos acima),

e isto acarreta $u_1^2 = 0$, o que é um absurdo. ■

Exemplo 15: A álgebra A com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 8); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1^2 = v_4 \\ u_1v_1 = u_2; \quad u_1v_2 = u_3; \quad u_1v_3 = u_4 \\ u_2v_2 = u_5; \quad u_2v_3 = u_6 \\ u_3v_1 = -u_5; \quad u_3v_3 = u_7 \\ u_4v_1 = -u_6; \quad u_4v_2 = -u_7 \\ u_5v_3 = -u_6v_2 = u_7v_1 = u_8 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$, com $[(UV)V]V \neq 0$ (pois $[(u_1v_1)v_2]v_3 = (u_2v_2)v_3 = u_5v_3 = u_8$), $u_1^2 \neq 0$ e dimensão 13.

Os lemas acima, bem como os exemplos apresentados, resolvem o problema de estimar a mínima dimensão de uma t -álgebra de posto 3, conhecendo um P -monômio não nulo de grau ≤ 4 .

O Lema seguinte é uma generalização do Lema 4.13.

Lema 4.14 *Se o P -monômio $UV^{(n)}$ é não nulo, então $r \geq 2^n$, $s \geq n$ e portanto $\dim A \geq 2^n + n + 1$.*

Prova: A prova será feita por indução sobre n . Para $n = 1, 2, 3$, o resultado é verdadeiro pelos Lemas 4.5, 4.8 e 4.13, respectivamente. Suponhamos, agora, que se $UV^{(n-1)} \neq 0$ então $\dim U \geq 2^{n-1}$ e $\dim V \geq n-1$. Se $\{[(uv_1)v_2] \dots v_{n-1}\}v_n \neq 0$, então $\{[(uv_1)v_2] \dots v_{n-1}\} \neq 0$ e portanto, pela hipótese de indução, existem em U pelo menos 2^{n-1} elementos linearmente

independentes. Esses elementos envolvem $u, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. São eles: $u, u_2, u_3, \dots, u_{2^{n-1}}$. Afirmando que $\{u, u_2, u_3, \dots, u_{2^{n-1}}, uv_n, u_2v_n, u_3v_n, \dots, u_{2^{n-1}}v_n\}$ é livre. De fato, se $\alpha u + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_{2^{n-1}} u_{2^{n-1}} + \beta uv_n + \beta_2 u_2 v_n + \dots + \beta_{2^{n-1}} u_{2^{n-1}} v_n = 0$, então, multiplicando-se por v_n , obtemos

$$\alpha uv_n + \alpha_2 u_2 v_n + \alpha_3 u_3 v_n + \dots + \alpha_{2^{n-1}} u_{2^{n-1}} v_n = 0 \quad (i)$$

Multiplicando-se (i) sucessivamente por $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$, obteremos $\alpha \{[(uv_n)v_1]v_2 \dots\} v_{n-1} = 0$ e portanto $\alpha = 0$. Logo $\alpha_2 u_2 v_n + \alpha_3 u_3 v_n + \dots + \alpha_{2^{n-1}} u_{2^{n-1}} v_n = 0$ e como $u_2 \neq u_j$ para todo $j \neq 2$ (pois $\{u_2, u_j\}$ é livre), para cada $i = 3, 4, \dots, 2^{n-1}$ existe j tal que $[(u_i v_n)] \dots v_j = 0$ e $[(u_2 v_n)] \dots v_j \neq 0$. Daí $\alpha_2 = 0$ e analogamente $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_{2^{n-1}} = 0$. Portanto $\beta uv_n + \beta_2 u_2 v_n + \dots + \beta_{2^{n-1}} u_{2^{n-1}} v_n = 0$, isto é, recaímos em (i) e portanto $\beta = \beta_2 = \dots = \beta_{2^{n-1}} = 0$. Dessa forma, $\{u, u_2, u_3, \dots, u_{2^{n-1}}, uv_n, u_2 v_n, u_3 v_n, \dots, u_{2^{n-1}} v_n\}$ é livre e assim $\dim U \geq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2(2^{n-1}) = 2^n$. Mostremos agora que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é livre. De fato, se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, então $\alpha_1 uv_1 + \alpha_2 uv_2 + \dots + \alpha_n uv_n = 0$. Multiplicando-se sucessivamente por $v_2, v_3, \dots, v_n$ segue que $\alpha_1 \{[(uv_1)v_2] \dots\} v_n = 0$ e portanto $\alpha_1 = 0$. Logo, $\alpha_2 uv_2 + \alpha_3 uv_3 + \dots + \alpha_n uv_n = 0$. Multiplicando-se sucessivamente por $v_3, v_4, \dots, v_n$ obteremos $\alpha_2 = 0$ e repetindo-se o processo chegaremos em $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_n = 0$. Logo, $\dim V \geq n$ e portanto $\dim A \geq 2^n + n + 1$. ■

Corolário 4.14.1 *Nas condições do Lema 4.14, se $UV^{(n)}$ tem um gerador aditivo $\{[(uv_1)v_2] \dots\} v_n \neq 0$ tal que $u^2 \neq 0$, então $s \geq n+1$ e portanto $\dim A \geq 2^n + n + 2$.*

Prova: O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, u^2\}$ é livre pois se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta u^2 = 0$ então $\alpha_1 uv_1 + \alpha_2 uv_2 + \dots + \alpha_n uv_n = 0$. Se multiplicarmos essa última igualdade sucessivamente por $v_2, v_3, \dots, v_n$, obtemos $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 uv_2 + \alpha_3 uv_3 + \dots + \alpha_n uv_n = 0$. Multiplicando-se agora essa última igualdade sucessivamente por $v_3, \dots, v_n$, obtemos $\alpha_2 = 0$.

Repetindo o processo, teremos $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e portanto $\beta u^2 = 0$. Logo, $\beta = 0$ e $\dim V \geq n+1$. Como já vimos que $\dim U \geq 2^n$, segue que $\dim A \geq 2^n + n + 2$. ■

Conforme vimos acima, se a t -álgebra A possui um P -monômio não nulo $m(U, V)$ então sua dimensão está acima de um certo valor mínimo, isto é, podemos ter certeza de que A está em uma certa região do triângulo dos tipos da página 7. Em geral, concluimos que A está mais à esquerda do triângulo. Um problema mais difícil é estimar a dimensão de A a partir de uma informação sobre a dimensão de $m(U, V)$. Por exemplo, como fica o Lema 4.13 se sabemos que $\dim [(UV)V]V = 2$.

Capítulo 5

Sobre a invariância dos P-subespaços

Neste capítulo, vamos estudar o problema da invariância da dimensão para todos os subespaços $p(U, V)$ de grau ≤ 4 . Porém estudamos também o problema da invariância para algumas famílias de P-subespaços de grau arbitrário.

5.1 Os P-subespaços de grau ≤ 4

Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$, uma t-álgebra de posto 3 decomposta segundo um idempotente e . Considerando que $V^2 = 0$, os P-monômios não nulos de A de graus 2, 3, 4 são em número de 10:

grau 2: U^2 e UV

grau 3: U^3 , $U(UV)$ e $(UV)V$

grau 4: U^4 , $U[U(UV)]$, $U[(UV)V] = (UV)^2$, $U^3V = U^2(UV)$ e $[(UV)V]V$

A partir deles, mais U e V , formamos uma lista de 89 P-subespaços $p(U, V)$ de grau ≤ 4 , que aparecem listados no Apêndice. Para cada um deles, vamos tentar verificar se é invariante ou, pelo menos, se tem dimensão invariante. A demonstração é feita caso a caso, por isso temos um grande número de lemas.

Observamos que, se $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$ é um outro idempotente de A

e a correspondente decomposição de Peirce é $A = Fe_0 \oplus U_0 \oplus V_0$, então temos dois P-subespaços $p(U, V)$ e $p(U_0, V_0)$, sobre os quais queremos trabalhar. Em geral, existe aqui um “princípio de simetria” no sentido de que se desejamos, por exemplo, provar que $p(U, V) = p(U_0, V_0)$, basta mostrar que $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$, a outra inclusão sendo obtida “por simetria”.

5.2 Proposições auxiliares: geradores de $m(U, V)$

Para começar a estudar o problema de invariância, vamos calcular um conjunto conveniente de geradores aditivos para os 10 P-monômios $m(U_0, V_0)$ de graus 2, 3 ou 4 listados no início da seção. Isto será feito nas Proposições 1 a 10 que seguem. Para isso, consideremos a decomposição de Peirce de A relativamente ao idempotente e , $A = Fe \oplus U \oplus V$ e $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$ um outro idempotente fixado de A , sendo $\lambda = (1 - 2\gamma)^{-1}$. Como já vimos em (1.20) e (1.21),

$$\begin{aligned} U_0 &= \{u + 2\lambda u_0 u : u \in U\} \\ V_0 &= \{v - 2\lambda u_0 v : v \in V\} \end{aligned}$$

e se $u, u_1 \in U$ e $v \in V$ valem as igualdades $u(uv) = u^2(uv) = u(u^2 u_1) = 0$. Usamos o símbolo $\oplus$ para indicar uma soma de um elemento de U e um elemento de V . Cremos que isto facilita a leitura do texto.

Proposição 1 *O subespaço vetorial $U_0 V_0$ é gerado aditivamente pelos elementos da forma $[uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv)] \oplus 2\lambda u_0(uv)$, com $u \in U$ e $v \in V$.*

Prova: De fato, um elemento gerador aditivo y de $U_0 V_0$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u + 2\lambda u_0 u)(v - 2\lambda u_0 v) = \\ &= uv - 2\lambda u(u_0 v) + 2\lambda(u_0 u)v - 4\lambda^2(u_0 u)(u_0 v) = \\ &= uv - 2\lambda u(u_0 v) - 4\lambda^2(u_0 u)(u_0 v) = uv + 2\lambda u_0(uv) + 2\lambda^2 u_0^2(uv), \end{aligned}$$

sendo esta última igualdade consequência de (4.4) e (4.2). Daí segue o resultado. ■

Proposição 2 *O subespaço vetorial $U_0(U_0V_0)$ é gerado pelos elementos do tipo $\{-2\lambda u_0[u_1(uv)] + 4\lambda^3 u_0[(u_1 u_0^2)(uv)]\} \oplus \{u_1(uv) - 2\lambda^2(u_1 u_0^2)(uv)\}$, com $u, u_1 \in U$ e $v \in V$.*

Prova: De acordo com a Proposição 1, U_0V_0 é gerado pelos elementos da forma $[uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv)] + 2\lambda u_0(uv)$, e portanto um gerador aditivo y de $U_0(U_0V_0)$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u_1 + 2\lambda u_0 u_1)[uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv) + 2\lambda u_0(uv)] = \\ &= u_1(uv) + 2\lambda^2 u_1[u_0^2(uv)] + 2\lambda u_1[u_0(uv)] + 2\lambda(u_0 u_1)(uv) + \\ &\quad + 4\lambda^3(u_0 u_1)[u_0^2(uv)], \end{aligned}$$

pois $(u_0 u_1)[u_0(uv)] \in U^2[U(UV)] \subseteq V U^2 \subseteq V^2 = 0$. Vamos agora analisar o termo $2\lambda u_1[u_0(uv)] + 2\lambda(u_0 u_1)(uv)$. Usando-se a identidade (1.13) para os elementos u_1, u_0, uv , obtemos $u_1[u_0(uv)] + u_0[u_1(uv)] + (u_0 u_1)(uv) = 0$ e portanto

$$2\lambda u_1[u_0(uv)] + 2\lambda(u_0 u_1)(uv) = -2\lambda u_0[u_1(uv)] \quad (i)$$

Além disso, de (4.4) segue que

$$u_1[u_0^2(uv)] = -(u_1 u_0^2)(uv) \quad (ii)$$

Finalmente, da aplicação sucessiva de (4.3), (4.1), (4.4) e novamente (4.1) segue que $(u_0 u_1)[u_0^2(uv)] = -u_0^2[(u_0 u_1)(uv)] = 2u_0\{u_0[(u_0 u_1)(uv)]\} = -2u_0\{(uv)[u_0(u_0 u_1)]\} = u_0[(uv)(u_0^2 u_1)]$, ou seja,

$$(u_0 u_1)[u_0^2(uv)] = u_0[(u_1 u_0^2)(uv)] \quad (iii)$$

Desse modo, de (i), (ii), (iii) segue o resultado. ■

Proposição 3 *O subespaço vetorial $(U_0V_0)V_0$ é gerado aditivamente pelos elementos da forma $(uv)v_1 \oplus 2\lambda u_0[(uv)v_1]$, com $u \in U$ e $v, v_1 \in V$.*

Prova: De acordo com a Proposição 1, U_0V_0 é gerado pelos elementos da forma $[uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv)] + 2\lambda u_0(uv)$, e portanto um gerador aditivo y

de $(U_0V_0)V_0$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= [uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv) + 2\lambda u_0(uv)](v_1 - 2\lambda u_0 v_1) = \\ &= (uv)v_1 - 2\lambda(uv)(u_0 v_1) + 2\lambda^2[u_0^2(uv)]v_1 - 4\lambda^3[u_0^2(uv)](u_0 v_1) + \\ &\quad - 4\lambda^2[u_0(uv)](u_0 v_1), \end{aligned}$$

pois $[u_0(uv)]v_1 \in [U(UV)]V \subseteq V^2 = 0$. Além disso, de (4.1) segue que $[u_0^2(uv)](u_0 v_1) = -2\{u_0[u_0(uv)]\}(u_0 v_1) = 0$, sendo esta última igualdade consequência da identidade (4.9). Por outro lado, $[u_0^2(uv)]v_1 = -2\{u_0[u_0(uv)]\}v_1 = 2(u_0 v_1)[u_0(uv)]$, por (4.1) e (4.3), respectivamente. Portanto, $2\lambda^2[u_0^2(uv)]v_1 - 4\lambda^2[u_0(uv)](u_0 v_1) = 0$. Finalmente, de (4.5) segue que $(uv)(u_0 v_1) = -u_0[(uv)v_1]$ e portanto o gerador y se reduz a $(uv)v_1 \oplus 2\lambda u_0[(uv)v_1]$. $\blacksquare$

Proposição 4 *O subespaço vetorial U_0^2 é gerado pelos elementos da forma $-2\lambda u_0(uu_1) \oplus uu_1$, com $u, u_1 \in U$.*

Prova: De acordo com (1.20), um gerador aditivo y de U_0^2 é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u + 2\lambda u_0 u)(u_1 + 2\lambda u_0 u_1) = \\ &= uu_1 + 2\lambda u(u_0 u_1) + 2\lambda u_1(u_0 u) + 4\lambda^2(u_0 u)(u_0 u_1) = \\ &= uu_1 + 2\lambda u(u_0 u_1) + 2\lambda u_1(u_0 u), \end{aligned}$$

pois $(u_0 u)(u_0 u_1) \in U^2 U^2 \subseteq V^2 = 0$. Além disso, como $J(u, u_0, u_1) = 0$, obtemos $u(u_0 u_1) + u_1(u_0 u) = -u_0(uu_1)$ e portanto segue que $y = -2\lambda u_0(uu_1) \oplus uu_1$. $\blacksquare$

Proposição 5 *O subespaço vetorial U_0^3 é gerado aditivamente pelos elementos da forma $\{u_2(uu_1) + 2\lambda^2 u_0^2[u_2(uu_1)]\} \oplus \{2\lambda u_0[u_2(uu_1)]\}$, com $u, u_1, u_2 \in U$.*

Prova: Por (1.20) e pela Proposição 4 acima, um gerador aditivo y de U_0^3 é da forma

$$\begin{aligned} y &= [uu_1 - 2\lambda u_0(uu_1)](u_2 + 2\lambda u_0 u_2) = \\ &= u_2(uu_1) - 2\lambda u_2[u_0(uu_1)] - 4\lambda^2(u_0 u_2)[u_0(uu_1)], \end{aligned}$$

pois $(uu_1)(u_0 u_2) \in U^2 U^2 \subseteq V^2 = 0$. Além disso, da identidade (4.4) obte-

mos $-u_2[u_0(uu_1)] = u_0[u_2(uu_1)]$. Finalmente, da aplicação sucessiva das identidades (4.3), (4.1) e novamente de (4.3), vem que $-2(u_0u_2)[u_0(uu_1)] = 2(uu_1)[u_0(u_0u_2)] = -(uu_1)(u_0^2u_2) = u_0^2[u_2(uu_1)]$ e dessa forma segue o resultado. ■

Proposição 6 *O subespaço vetorial U_0^4 é gerado pelos elementos da forma $4\lambda^3(u_0u_3)\{u_0^2[u_2(uu_1)]\} - 2\lambda u_0\{u_3[u_2(uu_1)]\} \oplus u_3[u_2(uu_1)] + 2\lambda^2u_3\{u_0^2[u_2(uu_1)]\}$, com $u, u_1, u_2, u_3 \in U$.*

Prova: De (1.20) e pela Proposição 5 acima, um elemento y gerador de U_0^4 é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u_3 + 2\lambda u_0u_3)\{u_2(uu_1) + 2\lambda^2u_0^2[u_2(uu_1)] + 2\lambda u_0[u_2(uu_1)]\} = \\ &= u_3[u_2(uu_1)] + 2\lambda^2u_3\{u_0^2[u_2(uu_1)]\} + 2\lambda u_3\{u_0[u_2(uu_1)]\} + \\ &\quad + 2\lambda(u_0u_3)[u_2(uu_1)] + 4\lambda^3(u_0u_3)\{u_0^2[u_2(uu_1)]\}, \end{aligned}$$

pois $(u_0u_3)\{u_0[u_2(uu_1)]\} \in U^2U^4 \subseteq V^2 = 0$. Usando-se a identidade de Jacobi para os elementos $u_3, u_0, u_2(uu_1)$ obtemos $u_3\{u_0[u_2(uu_1)]\} + u_0\{u_3[u_2(uu_1)]\} + (u_0u_3)[u_2(uu_1)] = 0$ e portanto $2\lambda u_3\{u_0[u_2(uu_1)]\} + 2\lambda(u_0u_3)[u_2(uu_1)] = -2\lambda u_0\{u_3[u_2(uu_1)]\}$. Assim segue o resultado. ■

Proposição 7 *O subespaço vetorial $U_0^3V_0$ é gerado pelos elementos da forma $[u_2(uu_1)]v \oplus 2\lambda u_0\{[u_2(uu_1)]v\}$, com $u, u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$.*

Prova: Pela Proposição 5 e por (1.21), um elemento y gerador de $U_0^3V_0$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= \{u_2(uu_1) + 2\lambda^2u_0^2[u_2(uu_1)] + 2\lambda u_0[u_2(uu_1)]\}(v - 2\lambda u_0v) = \\ &= [u_2(uu_1)]v + 2\lambda^2\{u_0^2[u_2(uu_1)]\}v - 2\lambda(u_0v)[u_2(uu_1)] + \\ &\quad - 4\lambda^3(u_0v)\{u_0^2[u_2(uu_1)]\} - 4\lambda^2(u_0v)\{u_0[u_2(uu_1)]\}, \end{aligned}$$

pois $\{u_0[u_2(uu_1)]\}v \subseteq U^4V \subseteq V^2 = 0$. Além disso, como $u_2(uu_1), u_0v \in U$, de (4.4) e (1.16), respectivamente, segue que $(u_0v)\{u_0^2[u_2(uu_1)]\} = -[u_2(uu_1)][u_0^2(u_0v)] = 0$. Finalmente, da aplicação sucessiva das identidades (4.1) e (4.3) temos que $\{u_0^2[u_2(uu_1)]\}v = -2\{u_0\{u_0[u_2(uu_1)]\}\}v = 2(u_0v)\{u_0[u_2(uu_1)]\}$, pois $u_0[u_2(uu_1)], v \in V$. Logo, $2\lambda^2\{u_0^2[u_2(uu_1)]\}v =$

$= 4 \lambda^2(u_0v)\{u_0[u_2(uu_1)]\}$ e daí segue o resultado. ■

Proposição 8 *O subespaço vetorial $U_0[U_0(U_0V_0)]$ é gerado pelos elementos do tipo $u_2[u_1(uv)] - 4\lambda^2u_2\{u_0[(u_0u_1)(uv)]\} + 2\lambda^2u_0^2\{u_2[u_1(uv)]\} + 8\lambda^4(u_0u_2)\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \oplus 2\lambda u_0\{u_2[u_1(uv)]\} - 4\lambda^3u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\}$, com $u_1, u_2, u \in U$ e $v \in V$.*

Prova: Pela Proposição 2 e por (1.20), um elemento y gerador de $U_0[U_0(U_0V_0)]$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u_2 + 2\lambda u_0u_2)\{-2\lambda u_0[u_1(uv)] + 4\lambda^3u_0[(u_1u_0^2)(uv)] + u_1(uv) + \\ &\quad - 2\lambda^2(u_1u_0^2)(uv)\} = \\ &= -2\lambda u_2\{u_0[u_1(uv)]\} + 4\lambda^3u_2\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} + u_2[u_1(uv)] + \\ &\quad - 2\lambda^2u_2[(u_1u_0^2)(uv)] - 4\lambda^2(u_0u_2)\{u_0[u_1(uv)]\} + \\ &\quad + 8\lambda^4(u_0u_2)\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\}, \end{aligned}$$

pois $(u_0u_2)[u_1(uv)] = (u_0u_2)[(u_1u_0^2)(uv)] = 0$, uma vez que ambos pertencem a V^2 . Além disso, da identidade (4.4), segue que $-u_2\{u_0[u_1(uv)]\} = u_0\{u_2[u_1(uv)]\}$ e $u_2\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} = -u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\}$ e assim

$$\begin{aligned} y &= u_2[u_1(uv)] + 2\lambda u_0\{u_2[u_1(uv)]\} - 4\lambda^3u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\} + \\ &\quad - 2\lambda^2u_2[(u_1u_0^2)(uv)] - 4\lambda^2(u_0u_2)\{u_0[u_1(uv)]\} + \\ &\quad + 8\lambda^4(u_0u_2)\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \end{aligned} \quad (iv)$$

Analisemos agora o termo $t_1 = u_2[(u_1u_0^2)(uv)]$. De (4.1) e (4.4), respectivamente, segue que $t_1 = -2u_2\{u_0[(u_0u_1)(uv)]\} = 2u_2\{u_0[(u_0u_1)(uv)]\}$. Finalmente, se $t_2 = 2(u_0u_2)\{u_0[u_1(uv)]\}$, então de (4.3), (4.1) e novamente (4.3), temos $t_2 = -2[u_1(uv)][u_0(u_0u_2)] = [u_1(uv)](u_0^2u_2) = -u_0^2\{u_2[u_1(uv)]\}$. Substituindo-se agora as expressões de t_1 e t_2 em (iv), segue o resultado enunciado. ■

Proposição 9 *O subespaço vetorial $U_0[(U_0V_0)V_0]$ é gerado pelos elementos da forma $-2\lambda u_0\{u_1[(uv)v_1]\} \oplus u_1[(uv)v_1]$, com $u, u_1 \in U$ e $v, v_1 \in V$.*

Prova: Pela Proposição 3 e por (1.20), um elemento y gerador de $U_0[(U_0V_0)V_0]$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= (u_1 + 2\lambda u_0 u_1) \{ (uv)v_1 + 2\lambda u_0 [(uv)v_1] \} = \\ &= u_1 [(uv)v_1] + 2\lambda u_1 \{ u_0 [(uv)v_1] \} + 2\lambda (u_0 u_1) [(uv)v_1], \end{aligned}$$

pois $(u_0 u_1) \{ u_0 [(uv)v_1] \} \in U^2 \{ U[(UV)V] \} \subseteq V^2 = 0$. Da identidade (1.13) aplicada aos elementos u_1 , u_0 , $(uv)v_1$, vem $u_1 \{ u_0 [(uv)v_1] \} + u_0 \{ u_1 [(uv)v_1] \} + (u_0 u_1) [(uv)v_1] = 0$. Portanto $2\lambda u_1 \{ u_0 [(uv)v_1] \} + 2\lambda (u_0 u_1) [(uv)v_1] = -2\lambda u_0 \{ u_1 [(uv)v_1] \}$ e assim segue o resultado. ■

Proposição 10 *O subespaço vetorial $[(U_0V_0)V_0]V_0$ é gerado pelos elementos da forma $[(uv)v_1]v_2 + 2\lambda^2 u_0^2 \{ [(uv)v_1]v_2 \} \oplus 2\lambda u_0 \{ [(uv)v_1]v_2 \}$, com $u \in U$ e $v, v_1, v_2 \in V$.*

Prova: Pela Proposição 3 e por (1.21), um elemento y do subespaço $[(U_0V_0)V_0]V_0$ é da forma

$$\begin{aligned} y &= \{ (uv)v_1 + 2\lambda u_0 [(uv)v_1] \} (v_2 - 2\lambda u_0 v_2) = \\ &= [(uv)v_1]v_2 - 2\lambda (u_0 v_2) [(uv)v_1] - 4\lambda^2 (u_0 v_2) \{ u_0 [(uv)v_1] \}, \end{aligned}$$

pois $\{ u_0 [(uv)v_1] \} v_2 \in \{ U[(UV)V] \} V \subseteq V^2 = 0$. Da identidade (4.4) e de $u_0, (uv)v_1 \in U$, segue que $(u_0 v_2) [(uv)v_1] = -u_0 \{ [(uv)v_1]v_2 \}$. Além disso, como $v_2, u_0 [(uv)v_1] \in V$, aplicando sucessivamente as identidades (4.3), (4.1) e (4.3), temos $2(u_0 v_2) \{ u_0 [(uv)v_1] \} = -2 \{ u_0 \{ u_0 [(uv)v_1] \} \} v_2 = \{ u_0^2 [(uv)v_1] \} v_2 = -u_0^2 \{ [(uv)v_1]v_2 \}$. Substituindo na expressão de y , obtemos o resultado enunciado. ■

O próximo lema será utilizado repetidas vezes na continuação deste trabalho. Na sua demonstração, precisaremos utilizar os geradores dos P-monômios $m(U_0, V_0)$ calculados nas Proposições 1 a 10 acima.

Lema 5.1 *Com as notações anteriores, temos as seguintes inclusões:*

$$U_0V_0 \subseteq UV \oplus U(UV) \tag{5.1}$$

$$U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV) \tag{5.2}$$

$$(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V] \quad (5.3)$$

$$U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus U(U^3V) \quad (5.4)$$

$$U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U\{U[U(UV)]\} \quad (5.5)$$

$$U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V] \quad (5.6)$$

$$[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\} \quad (5.7)$$

Prova: Antes de iniciarmos as demonstrações, observemos que é suficiente provar que os geradores dos subespaços à esquerda em (5.1), (5.2), ... (5.7) estão nos subespaços da direita.

(5.1) Como foi estabelecido na Proposição 1, um gerador y de U_0V_0 é da forma $y = [uv + 2\lambda^2u_0^2(uv)] \oplus 2\lambda u_0(uv) \in [UV + U^2(UV)] \oplus \oplus U(UV)$ e como $UV \subseteq U$, $U^2 \subseteq V$, segue que $U^2(UV) \subseteq VU = UV$ logo $y \in UV \oplus U(UV)$.

(5.2) Vimos na Proposição 2 que um gerador de $U_0(U_0V_0)$ é da forma $y = \{-2\lambda u_0[u_1(uv)] + 4\lambda^3u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \oplus \{u_1(uv) - 2\lambda^2(u_1u_0^2)(uv)\} \in \in U[U(UV)] + U[U^3(UV)] \oplus \{U(UV) + U^3(UV)\} \subseteq \{U[U(UV)] + + U[U(UV)]\} \oplus \{U(UV) + U(UV)\} = U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e assim segue que $y \in U[U(UV)] \oplus U(UV)$.

(5.3) Pela Proposição 3, um gerador y de $(U_0V_0)V_0$ é da forma $y = (uv)v_1 \oplus 2\lambda u_0[(uv)v_1] \in (UV)V \oplus U[(UV)V]$.

(5.4) Na Proposição 7 vimos que um gerador y de $U_0^3V_0$ é da forma $y = [u_2(uu_1)]v \oplus 2\lambda u_0\{[u_2(uu_1)]v\} \in U^3V \oplus U(U^3V)$.

(5.5) Vimos na Proposição 8 que um gerador do subespaço $U_0[U_0(U_0V_0)]$ é da forma $y = u_2[u_1(uv)] - 4\lambda^2u_2\{u_0[(u_0u_1)(uv)]\} + 2\lambda^2u_0^2\{u_2[u_1(uv)]\} + + 8\lambda^4(u_0u_2)\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \oplus 2\lambda u_0\{u_2[u_1(uv)]\} - 4\lambda^3u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\} \in \in U[U(UV)] + U\{U[U^2(UV)]\} + U^2\{U[U(UV)]\} + U^2\{U[U^3(UV)]\} \oplus \oplus U\{U[U(UV)]\} + U\{U[U^3(UV)]\} \subseteq U[U(UV)] + U\{U[U^2(UV)]\} + + U^2\{U[U(UV)]\} \oplus U\{U[U(UV)]\}$, pois $U^3 \subseteq U$. Mas:

$$U\{U[U^2(UV)]\} \subseteq U\{U[V(UV)]\} \subseteq U[U(UV)]:$$

$$U^2\{U[U(UV)]\} \subseteq U^2[UU^2] \subseteq U^2(UV) = U^3V \subseteq U[U(UV)];$$

Portanto, $y \in U[U(UV)] \oplus U\{U[U(UV)]\}$.

(5.6) Como foi estabelecido pela Proposição 9, um gerador y do subespaço $U_0[(U_0V_0)V_0]$ é da forma $-2\lambda u_0\{u_1[(uv)v_1]\} \oplus u_1[(uv)v_1] \in U\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V]$ e como pelo Lema 3.1 $U[(UV)V] = (UV)^2$, segue que $y \in U(UV)^2 \oplus U[(UV)V]$.

(5.7) Finalmente, pela Proposição 10, um gerador y de $[(U_0V_0)V_0]V_0$ é da forma $y = [(uv)v_1]v_2 + 2\lambda^2 u_0^2\{[(uv)v_1]v_2\} \oplus 2\lambda u_0\{[(uv)v_1]v_2\} \in [(UV)V]V + U^2\{[(UV)V]V\} \oplus U\{[(UV)V]V\}$. Mas $U^2\{[(UV)V]V\} \subseteq V\{[(UV)V]V\} = \{[(UV)V]V\}V \subseteq [(UV)V]V$, pois $UV \subseteq U$, e isto mostra que $y \in [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\}$. ■

Outro lema que será útil é o seguinte:

Lema 5.2 Para a decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, temos

$$U^5 \subseteq U[U(UV)] \quad (5.8)$$

$$U(U^3V) = U^3(UV) \subseteq U[(UV)V] \quad (5.9)$$

$$U(UV)^2 \subseteq U^3V \subseteq U[U(UV)] \quad (5.10)$$

Prova: (5.8) Um gerador de U^5 é da forma $y = u\{u_1[u_2(u_3u_4)]\} \in U\{U[U^2U]\}$ e como $U^2 \subseteq V$, segue que $y \in U[U(UV)]$.

(5.9) Um gerador y do P-monômio $U^3(UV)$ é do tipo $y = [(u_1u_2)u_3](uv) = -u\{[(u_1u_2)u_3]v\}$, sendo esta última igualdade consequência da identidade (4.4). Logo, $y \in U[(U^2U)V] \subseteq U[(UV)V]$. A igualdade dada em (5.9) é um caso particular do Lema 3.2, considerando em (ii) $m(U, V) = V$ e $n = 1$.

(5.10) Um elemento gerador y de $U(UV)^2$ é da forma $y = u[(u_1v_1)(u_2v_2)]$. De $J(u, u_1v_1, u_2v_2) = 0$, obtemos $y + (u_1v_1)[u(u_2v_2)] + (u_2v_2)[u(u_1v_1)] =$

$= 0$. Usando-se a identidade de Jacobi para os elementos $u_1, v_1, u(u_2v_2)$ temos que $\{[u(u_2v_2)]v_1\}u_1 + \{u_1[u(u_2v_2)]\}v_1 + (u_1v_1)[u(u_2v_2)] = 0$ e como $[u(u_2v_2)]v_1 = 0$, segue que $(u_1v_1)[u(u_2v_2)] = -\{u_1[u(u_2v_2)]\}v_1 \in \{U[U(UV)]\}V \subseteq U^3V$. Analogamente, prova-se que $(u_2v_2)[u(u_1v_1)] \in U^3V$, o que mostra que $y \in U^3V$. Finalmente, se $t = [(u_1u_2)u_3]v$ é um gerador de U^3V , então de (4.3) e de $J(u_1, u_2, u_3v) = 0$, segue que $t = -(u_3v)(u_1u_2) = u_1[u_2(u_3v)] + u_2[u_1(u_3v)] \in U[U(UV)]$. ■

5.3 Invariância: Grupos I e II

Podemos agora começar a estudar a invariância de P-subespaços em uma t-álgebra de posto 3. O primeiro caso é:

Lema 5.3 *O subespaço $\{U^3 + (UV)V\} \oplus U^2$ é invariante por mudança de idempotentes, isto é, $\{U^3 + (UV)V\} \oplus U^2 = \{U_0^3 + (U_0V_0)V_0\} \oplus U_0^2$.*

Prova: Pelo Lema 2.6, temos a igualdade de ideais $U_0^3 \oplus U_0^2 = U^3 \oplus U^2$ e de (5.3) segue que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V] \subseteq (UV)V \oplus U(UV) \subseteq (UV)V \oplus U^2$. Assim $\{U_0^3 + (U_0V_0)V_0\} \oplus U_0^2 = [U_0^3 \oplus U_0^2] + (U_0V_0)V_0 \subseteq [U^3 \oplus U^2] + [(UV)V \oplus U^2] = [U^3 + (UV)V] \oplus U^2$. Por simetria obtém-se a inclusão contrária. ■

Corolário 5.3.1 *Para toda t-álgebra de posto 3, $A = Fe \oplus U \oplus V$, a dimensão do subespaço $U^3 + (UV)V$, contido em U , é invariante.*

Prova: Segue de que $\dim U^2$ é invariante por mudança de idempotentes. ■

Corolário 5.3.2 *Os subespaços vetoriais $\{U^3 + (UV)V\} \oplus V$ e $\{U^3 + (UV)V\} \oplus U^{2n}$ têm dimensão invariante.*

Prova: Segue do Corolário 5.3.1, de (1.23) e do Corolário 2.6.2. ■

Lema 5.4 *O subespaço $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$ da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Pelo Lema 2.6, temos $U_0^3 \oplus U_0^2 = U^3 \oplus U^2$ e de (5.7) segue que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\} \subseteq [(UV)V]V \oplus U^2$, pois $[(UV)V]V \subseteq U$. Dessa forma, $\{U_0^3 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0^2 \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$ e por simetria obtemos a inclusão contrária. ■

Corolário 5.4.1 *A dimensão do subespaço vetorial $U^3 + [(UV)V]V$, contido em U , de uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Segue do fato que $\dim U^2$ é invariante e do Lema 5.4. ■

Corolário 5.4.2 *Os subespaços $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V$ e $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^{2n}$ têm dimensão invariante.*

Prova: Segue do Corolário 5.4.1, de (1.23) e do Corolário 2.6.2. ■

Corolário 5.4.3 *O subespaço $\{U^3 + (UV)V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Como, pelo Lema 2.6, $U^3 \oplus U^4$ é invariante por mudança de idempotentes, basta mostrarmos que $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \{U^3 + (UV)V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas de (5.3), segue que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V]$ e de (5.6), temos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V]$. Como de (5.10), $U(UV)^2 \subseteq U^3V = (U^2U)V \subseteq (UV)V$, obtemos a inclusão acima. Por simetria segue a inclusão contrária. ■

Corolário 5.4.4 *Para toda t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$, a dimensão do subespaço $U^4 + U[(UV)V]$, que está contido em V , é invariante.*

Prova: Segue do fato que $\dim [U^3 + (UV)V]$ é invariante por mudança de idempotentes e do Corolário 5.4.3. ■

Corolário 5.4.5 *O subespaço $U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Como no Corolário 5.4.4, basta mostrarmos que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas de (5.6) segue que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq U^3 \oplus U[(UV)V]$. A inclusão contrária é obtida por simetria. ■

Corolário 5.4.6 *O subespaço $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Usando-se o Corolário 5.4.5, resta apenas mostrarmos a inclusão $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas de (5.7), temos $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\}$ e como $UV \subseteq U$, segue a inclusão acima. Por simetria segue a inclusão contrária. ■

Corolário 5.4.7 *Para toda t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$, a dimensão do subespaço $U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é invariante.*

Prova: Segue do Corolário 5.4.4 e de (1.22). ■

Lema 5.5 *Os seguintes subespaços da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ são invariantes por mudança de idempotentes:*

$$(i) \ N^2 = UV \oplus U^2$$

$$(ii) \ N^3 = [U^3 + (UV)V] \oplus U(UV)$$

$$(iii) \ N^4 = \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$$

Prova: As igualdades acima são óbvias, pois $N = \ker \omega$ independe da escolha de idempotentes. ■

Corolário 5.5.1 *Com as mesmas hipóteses, os subespaços*

$$\begin{aligned} & UV \\ & U(UV) \\ & U[U(UV)] + [(UV)V]V \end{aligned}$$

têm dimensão invariante.

Prova: Os resultados seguem, respectivamente, do fato que as dimensões dos subespaços U^2 , $U^3 + (UV)V$ e $U^4 + U[(UV)V]$ são invariantes por mudança de idempotentes. ■

Observação: A invariância da dimensão de UV pode ser provada também observando que o ideal de Etherington de A é dado por $UV \oplus V$. Ver Corolário 5.5.3.

Corolário 5.5.2 *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante:*

$$\begin{aligned} & UV \oplus U^4 \\ & UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} \\ & U \oplus U(UV) \\ & \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V \\ & \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^{2n} \end{aligned}$$

Prova: Cada um dos resultados segue do Corolário 5.5.1 e respectivamente de: Corolário 2.6.2, Corolário 5.4.4, (1.22), (1.23) e novamente Corolário 2.6.2. ■

Corolário 5.5.3 *Os seguintes subespaços são invariantes por mudança*

de idempotentes:

- (i) $UV \oplus V$ (ideal de Etherington de A)
- (ii) $UV \oplus U(UV)$
- (iii) $U^3 \oplus U(UV)$
- (iv) $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
- (v) $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$

Prova: (i) É conhecido que o ideal gerado pelos elementos $a^2 - \omega(a)a$, com $a \in A$, exprime-se por $UV \oplus V$. Ver, por exemplo, [6].

(ii) De (5.1) temos $U_0V_0 \subseteq UV \oplus U(UV)$ e de (5.2) temos $U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV) \subseteq UU^2 \oplus U(UV) \subseteq UV \oplus U(UV)$ e portanto obtemos a inclusão $U_0V_0 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq UV \oplus U(UV)$. A inclusão contrária vem por simetria.

(iii) Usando-se (5.2) e o Lema 2.6, respectivamente, temos $U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e $U_0^3 \subseteq U^3 \oplus U^4$ e como $U^4 \subseteq U(UV)$, segue que $U_0^3 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq \{U^3 + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U(UV)\} \subseteq U^3 \oplus U(UV)$. A inclusão contrária é obtida por simetria.

(iv) Usando-se o item (iii), resta apenas mostrarmos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$. Mas como $(UV)V \subseteq U$, de (5.7) temos $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\} \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$, pois $(UV)V \subseteq U$. Por simetria segue a inclusão contrária.

(v) De (5.5), temos $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U\{U[U(UV)]\}$ e como $U(UV) \subseteq V$, segue que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$. De (5.7), temos $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\}$ e como $(UV)V \subseteq U$, segue que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$. Finalmente, de (5.2) temos $U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e com isso completamos a prova de que $\{U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq \{U[U(UV)] + U[(UV)V]\} \oplus U(UV)$. A inclusão contrária vem por simetria. ■

Lema 5.6 *O subespaço $U[U(UV)] \oplus U(UV)$ da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: De (5.2) e da prova do item (v) do Corolário 5.5.3, respectivamente, temos que $U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e portanto $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$. A inclusão contrária é obtida por simetria. ■

Corolário 5.6.1 *A dimensão do subespaço vetorial $U[U(UV)]$, contido em U , da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante.*

Prova: Segue de que $\dim U(UV)$ é invariante, de acordo com Corolário 5.5.1. ■

Corolário 5.6.2 *Os subespaços vetoriais*

$$\begin{aligned} &U[U(UV)] \oplus V \\ &U[U(UV)] \oplus U^{2n} \end{aligned}$$

têm dimensão invariante por mudança de idempotentes.

Pova: Os resultados seguem, respectivamente, do Corolário 5.6.1 e de (1.23) e Corolários 5.6.1 e 2.6.2. ■

Corolário 5.6.3 *O subespaço vetorial $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Usando-se o resultado do Lema 5.6, resta apenas mostrarmos que $(U_0V_0)V_0 \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)] \oplus U(UV)\}$. Mas de (5.3) e de $UV \subseteq U$, temos $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V] \subseteq (UV)V \oplus U(UV)$, e daí segue o resultado. ■

Corolário 5.6.4 *O subespaço $(UV)V + U[U(UV)]$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

$\oplus V$ tem dimensão invariante.

Prova: Segue do Corolário 5.6.3 e de que $\dim U(UV)$ é invariante por mudança de idempotentes. ■

Corolário 5.6.5 *Os subespaços vetoriais*

$$\begin{aligned} & \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V \\ & \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^{2n} \end{aligned}$$

têm dimensão invariante.

Prova: Os resultados seguem do Corolário 5.6.4 e respectivamente de (1.23) e Corolário 2.6.2. ■

Lema 5.7 *O subespaço $U[U(UV)] \oplus U^4$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Do Lema 2.6 e de (5.8), temos $U_0^4 \subseteq U^5 \oplus U^4 \subseteq U[U(UV)] \oplus U^4$ e de (5.5), obtemos $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U\{U[U(UV)]\} \subseteq U[U(UV)] \oplus U^4$. Portanto $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0^4$ e por simetria segue a inclusão contrária. ■

Corolário 5.7.1 *O subespaço $U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Usando-se o resultado do Lema 5.7, resta apenas mostrarmos que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. De (5.6), temos que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V]$ e como de (5.10), $U(UV)^2 \subseteq U^3V \subseteq U[U(UV)]$, segue que $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Por simetria obtemos a inclusão contrária. ■

Lema 5.8 *O subespaço $(UV)V \oplus U[(UV)V]$ da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante.*

Prova: Das inclusões (5.6) e (5.10), temos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq U^3V \oplus U[(UV)V] = (UU^2)V \oplus U[(UV)V] \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V]$. Além disso, de (5.3), obtemos $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V]$ e assim segue que $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V]$. Por simetria obtemos a inclusão contrária. ■

Corolário 5.8.1 *O subespaço vetorial $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ da t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante.*

Prova: Usando-se o resultado do Corolário 5.7.1, resta apenas mostrarmos que $(U_0V_0)V_0 \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas de (5.3) temos que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U[(UV)V]$, e daí segue que $\{(U_0V_0)V_0 + U_0[U_0(U_0V_0)]\} \oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Por simetria obtemos a inclusão contrária. ■

Lema 5.9 *O subespaço vetorial $U^3V \oplus U[(UV)V]$ da t -álgebra de posto 3 $A = Fe \oplus U \oplus V$ é invariante.*

Prova: De (5.4) e (5.9), temos $U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus U[(UV)V]$. De (5.6) e (5.10), temos que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U(UV)^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq U^3V \oplus U[(UV)V]$ e portanto $U_0^3V_0 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U^3V \oplus U[(UV)V]$ e por simetria obtemos a inclusão contrária. ■

Corolário 5.9.1 *O subespaço vetorial $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$ é invariante.*

Prova: Usando-se o resultado do Lema 5.9, resta apenas mostrarmos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$. Mas de (5.7),

temos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\} \subseteq [(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$, uma vez que $UV \subseteq U$. Portanto, $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$ e por simetria segue a inclusão contrária. ■

Lema 5.10 *O subespaço vetorial $(UV)V$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ tem dimensão invariante em relação às mudanças de idempotentes em A .*

Prova: Tomemos o idempotente $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, com $u_0 \in U$. Observemos antes que se $x \in (UV)V$ então $x + 2\lambda u_0 x \in (U_0V_0)V_0$. De fato, se $x \in (UV)V$ então x é uma soma finita de produtos $(u^i v^i) v_1^i$, com $u^i \in U$ e $v^i, v_1^i \in V$, isto é, $x = \sum_i (u^i v^i) v_1^i$. Então

$$\begin{aligned} x + 2\lambda u_0 x &= \sum_i (u^i v^i) v_1^i + 2\lambda \sum_i (u^i v^i) v_1^i = \\ &= \sum_i \{(u^i v^i) v_1^i + 2\lambda u_0 [(u^i v^i) v_1^i]\} \in (U_0V_0)V_0, \end{aligned}$$

pois $(U_0V_0)V_0$ é gerado pelos elementos da forma $(uv)v' \oplus 2\lambda u_0[(uv)v']$, de acordo com a Proposição 3.

Consideremos $\varphi : x \in (UV)V \mapsto \varphi(x) = x \oplus 2\lambda u_0 x \in (U_0V_0)V_0$. Ela é claramente linear, injetiva (pois a variável x é “somando direto” em $\varphi(x)$) e sobrejetora, ainda pela Proposição 3. Assim φ é bijetora e resulta que $(UV)V$ e $(U_0V_0)V_0$ têm a mesma dimensão. ■

Corolário 5.10.1 *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante por mudança de idempotentes:*

$$\begin{aligned} &(UV)V \oplus V \\ &(UV)V \oplus U(UV) \\ &(UV)V \oplus U^{2n} \\ &(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} \end{aligned}$$

Prova: Os resultados são consequência do Lema 5.10 e respectivamente de (1.23), Corolário 5.5.1, Corolário 2.6.2 e Corolário 5.4.4. ■

Lema 5.11 *O subespaço vetorial $U[(UV)V]$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ tem dimensão invariante por mudança de idempotentes em A .*

Prova: Fixemos o idempotente $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, com $u_0 \in U$. Se $x \in U[(UV)V]$ então $x - 2\lambda u_0 x \in U_0[(U_0 V_0)V_0]$, pois nesse caso x é uma soma finita de produtos $u_1^i[(u^i v^i)v_1^i]$, sendo $u^i, u_1^i \in U$ e $v^i, v_1^i \in V$, isto é, $x = \sum_i u_1^i[(u^i v^i)v_1^i]$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} x - 2\lambda u_0 x &= \sum_i u_1^i[(u^i v^i)v_1^i] - 2\lambda u_0 \{ \sum_i u_1^i[(u^i v^i)v_1^i] \} = \\ &= \sum_i u_1^i[(u^i v^i)v_1^i] - 2\lambda u_0 \{ u_1^i[(u^i v^i)v_1^i] \} \in U_0[(U_0 V_0)V_0], \end{aligned}$$

pois pela Proposição 9, $U_0[(U_0 V_0)V_0]$ é gerado pelos elementos da forma $-2\lambda u_0 \{ u_1[(uv)v_1] \} \oplus u_1[(uv)v_1]$.

Consideremos a função $\varphi : x \in U[(UV)V] \mapsto \varphi(x) = x - 2\lambda u_0 x \in U_0[(U_0 V_0)V_0]$. A função φ é obviamente linear, injetora (pelo mesmo argumento usado no Corolário 5.10) e sobrejetora (pela Proposição 9). Assim φ é bijetora, portanto concluímos que $U[(UV)V]$ e $U_0[(U_0 V_0)V_0]$ têm a mesma dimensão. ■

Corolário 5.11.1 *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante por mudança de idempotentes:*

$$\begin{aligned} &U \oplus U[(UV)V] \\ &UV \oplus U[(UV)V] \\ &U^3 \oplus U[(UV)V] \\ &U[U(UV)] \oplus U[(UV)V] \\ &[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V] \\ &\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V] \\ &\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U[(UV)V] \\ &\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V] \end{aligned}$$

Prova: Os resultados acima são consequência do Lema 5.11 combinado, respectivamente, com (1.22) e Corolários 5.5.1, 2.6.2, 5.6.1, 5.3.1, 5.4.1.

5.6.4 e 5.5.1. ■

Corolário 5.11.2 *O subespaço $U^3V + [(UV)V]V$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ tem dimensão invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Do Corolário 5.9.1, o subespaço $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$ é invariante por mudança de idempotentes e portanto sua dimensão é invariante. O resultado segue do Lema 5.11. ■

Corolário 5.11.3: *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante por mudança de idempotentes:*

$$\begin{aligned} & \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V \\ & \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV) \\ & \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^{2n} \\ & \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} \end{aligned}$$

Prova: Os resultados acima seguem do Corolário 5.11.2 combinado, respectivamente, com (1.23) e Corolários 5.5.1, 2.6.2 e 5.4.4. ■

Lema 5.12 *O subespaço vetorial U^3V de $A = Fe \oplus U \oplus V$ tem dimensão invariante por mudanças de idempotentes de A .*

Prova: Fixados um idempotente $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, com $u_0 \in U$ e $x \in U^3V$, o elemento $x + 2\lambda u_0 x \in U_0^3V_0$, pois x é uma soma finita de produtos da forma $[u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i$, sendo $u^i, u_1^i, u_2^i \in U$ e $v_1^i \in V$; isto é, $x = \sum_i [u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i$. Então:

$$\begin{aligned} x + 2\lambda u_0 x &= \sum_i [u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i + 2\lambda u_0 \{ \sum_i [u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i \} = \\ &= \sum_i \{ [u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i + 2\lambda u_0 \{ [u_2^i(u^i u_1^i)]v_1^i \} \} \in U_0^3V_0, \end{aligned}$$

pois, de acordo com a Proposição 7, $U_0^3V_0$ é gerado pelos elementos da forma $[u_2(uu_1)]v \oplus 2\lambda u_0 \{ [u_2(uu_1)]v \}$.

Consideremos a função $\varphi : x \in U^3V \mapsto \varphi(x) = x + 2\lambda u_0 x \in U_0^3V_0$. Esta função é claramente linear, injetora (pelo mesmo motivo visto no Lema 5.10) e sobrejetora (pela Proposição 7). Assim, φ é bijetora e, portanto, U^3V e $U_0^3V_0$ têm a mesma dimensão. ■

Corolário 5.12.1 *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante por mudança de idempotentes:*

$$\begin{aligned} & U^3V \oplus V \\ & U^3V \oplus U(UV) \\ & U^3V \oplus U^{2n} \\ & U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} \end{aligned}$$

Prova: Os resultados acima são consequência do Lema 5.12 combinado, respectivamente, com (1.23) os Corolários 5.5.1, 2.6.2 e 5.4.4. ■

Lema 5.13 *O subespaço vetorial $[(UV)V]V$ de $A = Fe \oplus U \oplus V$ tem dimensão invariante por mudança de idempotentes em A .*

Prova: Tomemos o idempotente $e_0 = e + u_0 + \lambda u_0^2$, com $u_0 \in U$. Se $x \in [(UV)V]V$, então $x + 2\lambda^2 u_0^2 x + 2\lambda u_0 x \in [(U_0 V_0)V_0]V_0$ pois, nesse caso, x é uma soma finita de produtos $[(u^i v^i) v_1^i] v_2^i$, com $u^i \in U$ e $v^i, v_1^i, v_2^i \in V$; isto é $x = \sum_i [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i$. Então:

$$\begin{aligned} x + 2\lambda^2 u_0^2 x + 2\lambda u_0 x &= \sum_i [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i + 2\lambda^2 u_0^2 \{ \sum_i [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i \} + \\ &\quad + 2\lambda u_0 \{ \sum_i [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i \} = \\ &= \sum_i \{ [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i + 2\lambda^2 u_0^2 [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i + 2\lambda u_0 [(u^i v^i) v_1^i] v_2^i \} \end{aligned}$$

é um elemento de $[(U_0 V_0)V_0]V_0$, pois, pela Proposição 10, este subespaço é gerado pelos elementos da forma $[(uv) v_1] v_2 + 2\lambda^2 u_0^2 \{ [(uv) v_1] v_2 \} \oplus 2\lambda u_0 \{ [(uv) v_1] v_2 \}$.

Consideremos a função $\varphi : x \in [(UV)V]V \mapsto x + 2\lambda^2 u_0^2 x + 2\lambda u_0 x \in [(U_0 V_0)V_0]V_0$. A função φ é obviamente linear e, pela Proposição 10,

ela é sobrejetora. Afirmamos que φ é injetora. De fato, se $x + 2\lambda^2 u_0^2 x + 2\lambda u_0 x = y + 2\lambda^2 u_0^2 y + 2\lambda u_0 y$ então $(x - y) + 2\lambda^2 u_0^2 (x - y) = 2\lambda u_0 (x - y)$ e como $x, y \in [(UV)V]V \subseteq U$, segue que $u_0^2 (x - y) \in U$ e $u_0 (x - y) \in V$ e portanto $(x - y) + 2\lambda^2 u_0^2 (x - y) = 2\lambda u_0 (x - y) \in U \cap V = 0$. Ou seja, $u_0 (x - y) = 0$ e portanto $x - y = -2\lambda^2 u_0^2 (x - y) = 4\lambda^2 u_0 [u_0 (x - y)]$, sendo esta última igualdade consequência de (4.1). Logo, $x - y = 0$ e assim $x = y$. Dessa forma, φ é uma bijeção e daí concluímos que $[(UV)V]V$ e $[(U_0 V_0)V_0]V_0$ têm a mesma dimensão. ■

Corolário 5.13.1 *Os seguintes subespaços de $A = Fe \oplus U \oplus V$ têm dimensão invariante por mudança de idempotentes:*

$$\begin{aligned} & [(UV)V]V \oplus V \\ & [(UV)V]V \oplus U(UV) \\ & [(UV)V]V \oplus U^{2n} \\ & [(UV)V]V \oplus U[(UV)V] \\ & [(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} \end{aligned}$$

Prova: Os resultados acima seguem do Lema 5.13 combinado, respectivamente, com (1.23), Corolário 5.5.1, Corolário 2.6.2, Lema 5.11 e Corolário 5.4.4. ■

Lema 5.14 *O subespaço $U^3 V \oplus U^3(UV)$, de uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ de posto 3, é invariante por mudança de idempotentes.*

Prova: Devemos mostrar que $U_0^3 V_0 \oplus U_0^3(U_0 V_0) = U^3 V \oplus U^3(UV)$. De (5.4) e de (5.9), temos $U_0^3 V_0 \subseteq U^3 V \oplus U(U^3 V) = U^3 V \oplus U^3(UV)$. Por outro lado, de (5.1) e de $U_0^3 \subseteq U^3 \oplus U^2$ segue que $U_0^3(U_0 V_0) \subseteq (U^3 \oplus U^2)[UV \oplus U(UV)] \subseteq U^3(UV) + U^3[U(UV)] + U^2(UV) + U^2[U(UV)] = \{U^3[U(UV)] + U^2(UV)\} \oplus U^3(UV) = \{U^3[U(UV)] + U^3 V\} \oplus U^3(UV)$, pois pelo Lema 3.1, $U^2(UV) = U^3 V$. Além disso, $U^3[U(UV)] \subseteq U^3 U^2 \subseteq U^3 V$ e portanto $U_0^3(U_0 V_0) \subseteq U^3 V \oplus U^3(UV)$. A inclusão contrária segue por simetria. ■

Corolário 5.14.1 *Em uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$, de posto 3, a dimensão do subespaço $U^3(UV)$ contido em V , é invariante.*

Prova: Segue do fato de que $\dim(U^3V)$ é invariante por mudança de idempotentes e do Lema 5.14. ■

Lema 5.15 *O subespaço $U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$, de uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ de posto 3, é invariante por mudança de idempotentes, para todo $n \geq 0$.*

Prova: O Corolário 5.5.3 e o Lema 5.14 garantem que o resultado é verdadeiro para $n = 0, 1$, respectivamente. Para $n \geq 2$, devemos mostrar que $U_0^{2n+1}V_0 \oplus U_0^{2n+1}(U_0V_0) = U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$. Um elemento gerador de $U_0^{2n+1}V_0$ é da forma $y = [t(u + 2\lambda u_0u)](v - 2\lambda u_0v)$, com $t \in U_0^{2n}$. Logo

$$\begin{aligned} y &= [tu + 2\lambda t(u_0u)](v - 2\lambda u_0v) = \\ &= (tu)v - 2\lambda(tu)(u_0v) + 2\lambda[t(u_0u)]v - 4\lambda^2[t(u_0u)](u_0v). \end{aligned}$$

Portanto, $y \in (U_0^{2n}U)V + (U_0^{2n}U)(UV) + (U_0^{2n}U^2)V + (U_0^{2n}U^2)(UV)$. Mas pelo Lema 2.6, $U_0^{2n}U \subseteq (U^{2n} \oplus U^{2n-1})U = U^{2n+1} \oplus U^{2n}$. Além disso, ainda pelo Lema 2.6, $U_0^{2n}U^2 \subseteq (U^{2n} \oplus U^{2n+1})U^2 \subseteq U^{2n}U^2 \oplus U^{2n-1}U^2 = U^{2n-1}U^2$, pois $U^{2n}U^2 \subseteq V^2 = 0$. Usando-se a identidade de Jacobi para os elementos $u_1 \in U^{2n-1}$, $u_2, u_3 \in U$, obtemos $u_1(u_2u_3) = -u_2(u_1u_3) + -u_3(u_1u_2)$, o que mostra que $U^{2n-1}U^2 \subseteq UU^{2n} = U^{2n+1}$ e portanto $U_0^{2n}U^2 \subseteq U^{2n+1}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} y &\in (U^{2n+1} \oplus U^{2n})V + (U^{2n+1} \oplus U^{2n})(UV) + U^{2n+1}V + U^{2n+1}(UV) = \\ &= U^{2n+1}V + U^{2n}V + U^{2n+1}(UV) + U^{2n}(UV) = \\ &= U^{2n+1}V + U^{2n+1}(UV) + U^{2n}(UV) = \\ &= [U^{2n}(UV) + U^{2n+1}V] \oplus U^{2n+1}(UV), \end{aligned}$$

pois $U^{2n}V \subseteq V^2 = 0$. Do Lema 3.2, (ii), temos $U^{2n}(UV) = U^{2n+1}V$ e assim $U_0^{2n+1}V_0 \subseteq U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$. Consideremos, agora, um gerador y

do subespaço $U_0^{2n+1}(U_0V_0)$. Então temos que $y = x[uv + 2\lambda^2u_0^2(uv) + 2\lambda u_0(uv)]$, com $x \in U_0^{2n+1}$. Logo, $y \in U_0^{2n+1}[UV + U^2(UV) + U(UV)] \subseteq \subseteq (U^{2n+1} \oplus U^{2n})[UV + V] \subseteq U^{2n+1}(UV) + U^{2n+1}V + U^{2n}(UV)$, sendo a primeira inclusão consequência do Lema 2.6 e de $U^2 \subseteq V$ e $UV \subseteq U$ e a última segue de $U^{2n}V \subseteq V^2 = 0$. Novamente do Lema 3.2, (ii), temos $U^{2n}(UV) = U^{2n+1}V$, e portanto $U_0^{2n+1}(U_0V_0) \subseteq U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$, o que completa a prova de que $U_0^{2n+1}V_0 \oplus U_0^{2n+1}(U_0V_0) = U^{2n+1}V \oplus \oplus U^{2n+1}(UV)$. A inclusão contrária é obtida por simetria. ■

Corolário 5.15.1 *O subespaço $U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$ tem dimensão invariante, para todo $n \geq 0$.*

Corolário 5.15.2 *Em uma t -álgebra de posto 3 $A = Fe \oplus U \oplus V$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *o subespaço $U^{2n+1}V$ tem dimensão invariante;*
- (ii) *o subespaço $U^{2n+1}(UV)$ tem dimensão invariante.*

Após a demonstração de todos os resultados sobre a invariância que conseguimos, podemos dividir o conjunto dos 89 P-subespaços de grau ≤ 4 que aparecem no Apêndice nos Grupos I e II abaixo. Observemos que todos os 89 subespaços têm dimensão invariante.

GRUPO I: Neste Grupo listamos todos os subespaços $p(U, V)$ de grau ≤ 4 que sabemos serem genericamente invariantes por mudança de idempotentes, isto é, aqueles para os quais temos $p(U, V) = p(U_0, V_0)$ para todo idempotente e_0 e para toda t -álgebra, de posto 3, $A = Fe \oplus U \oplus V$. Observemos que nenhum subespaço monomial aparece no Grupo I.

- 13. $U \oplus U^2$
- 17. $UV \oplus V$
- 23. $UV \oplus U^2 = N^2$
- 24. $U^3 \oplus U^2$
- 29. $UV \oplus U(UV)$
- 32. $U^3 \oplus U(UV)$
- 34. $U^3 \oplus U^4$
- 38. $U[U(UV)] \oplus U(UV)$
- 43. $(UV)V \oplus U[(UV)V]$
- 44. $U[U(UV)] \oplus U^4$
- 50. $U^3V \oplus U[(UV)V]$
- 59. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^2$
- 60. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
- 65. $[U^3 + (UV)V] \oplus U(UV) = N^3$
- 66. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
- 69. $U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 72. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$
- 73. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
- 78. $U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 84. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
- 85. $[U^3 + (UV)V] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 86. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 87. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 88. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = N^4$

GRUPO II: Neste Grupo, listamos todos os subespaços $p(U, V)$ cujas dimensões são genericamente invariantes por mudança de idempotentes, isto é, aqueles para os quais $\dim p(U, V) = \dim p(U_0, V_0)$, para todo idempotente e_0 de toda t -álgebra de posto 3, $A = Fe \oplus U \oplus V$. É claro que os subespaços que compõem o Grupo I deveriam estar no Grupo II, mas não vamos reescrevê-los neste grupo. Resta aqui uma questão

importante: saber se um subespaço do Grupo II deve permanecer aí ou pode ir para o Grupo I. Na seção 5.4, vamos tratar um pouco desta questão.

1. U
2. V
3. U^2
4. UV
5. U^3
6. $U(UV)$
7. $(UV)V$
8. U^4
9. $U[U(UV)]$
10. $U[(UV)V]$
11. U^3V
12. $[(UV)V]V$
14. $U \oplus U(UV)$
15. $U \oplus U^4$
16. $U \oplus U[(UV)V]$
18. $U^3 \oplus V$
19. $(UV)V \oplus V$
20. $U[U(UV)] \oplus V$
21. $U^3V \oplus V$
22. $[(UV)V]V \oplus V$
25. $(UV)V \oplus U^2$
26. $U[U(UV)] \oplus U^2$
27. $U^3V \oplus U^2$
28. $[(UV)V]V \oplus U^2$
30. $UV \oplus U^4$
31. $UV \oplus U[(UV)V]$
33. $U^3 + (UV)V$
35. $U^3 \oplus U[(UV)V]$
36. $U^3 + [(UV)V]V$

37. $(UV)V \oplus U(UV)$
39. $U^3V \oplus U(UV)$
40. $[(UV)V]V \oplus U(UV)$
41. $(UV)V \oplus U^4$
42. $(UV)V + U[U(UV)]$
45. $U^4 + U[(UV)V]$
46. $U^3V \oplus U^4$
47. $[(UV)V]V \oplus U^4$
48. $U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$
49. $U[U(UV)] + [(UV)V]V$
51. $[(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$
52. $U^3V + [(UV)V]V$
53. $U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
54. $[U^3 + (UV)V] \oplus V$
55. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V$
56. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V$
57. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V$
58. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus V$
61. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2$
62. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
63. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
64. $UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
67. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^4$
68. $[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V]$
70. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
71. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
74. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
75. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^4$
76. $(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
77. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U[(UV)V]$
79. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
81. $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

82. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
 83. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
 89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

5.4 Sobre o Grupo II

Vamos dedicar algum tempo à questão colocada no final da seção anterior. Para mostrar que um P-subespaço que compõe o Grupo II efetivamente não pertence ao Grupo I, precisamos encontrar um exemplo de uma t-álgebra de posto 3 mostrando que os subespaços $p(U, V)$ e $p(U_0, V_0)$, embora tenham mesma dimensão, são distintos para algum idempotente e_0 . Para alguns casos, já conseguimos encontrar este exemplo, como veremos a seguir.

Exemplo 16: Consideremos a família $\{A_r\}$ de t-álgebras de posto 3 na qual, para cada A_r , tem-se $\dim A_r = 2r + 1$ sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, \dots, u_r, u_1^2, u_2^2, \dots, u_r^2\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i, & eu_i^2 = u_i^2, (i = 1, \dots, r) \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

A função peso ω de A_r vale 1 em e e 0 nos demais elementos da base e A_r satisfaz a t-equação $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e nesse caso, $\gamma = 1$. Não vamos repetir aqui a prova de que A_r satisfaz esta equação pois é um simples cálculo. Portanto o conjunto dos elementos idempotentes de peso 1 de A_r é dado por $I(A_r) = \{e + u - u^2 : u \in U\}$. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_2 - u_2^2$ de A_r , temos que $U_0 = \{u - 2u_2u : u \in U\}$, $V_0 = V$ e, dessa forma, o elemento $u_2 - 2u_2^2$ é um elemento de U_0 que não pertence a U , o que mostra que U não é invariante por mudança de idempotentes. Portanto U efetivamente não pertence ao Grupo I. Além disso, temos que $U^2 = Fu_1^2 \oplus Fu_2^2 \oplus \dots \oplus Fu_r^2$ e os subespaços monomiais $UV, U^3, U(UV), (UV)V, U^4, U[U(UV)]$.

$U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$ são todos nulos. Dessa forma, obtemos, neste exemplo, a seguinte simplificação para alguns dos subespaços do Grupo II:

- 1. U
- 14. $U \oplus U(UV) = U$
- 15. $U \oplus U^4 = U$
- 16. $U \oplus U[(UV)V] = U$
- 53. $U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U$

o que mostra que estes 5 subespaços de números 1, 14, 15, 16, 53 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 17: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, v_1, v_2\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_1 = u_1; & 2eu_2 = u_2 \\ ev_1 = v_1; & ev_2 = v_2; & u_1v_2 = u_2 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

e função peso definida por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos demais vetores. Então A satisfaz $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e nesse caso, $\gamma = 1$. Como $U^2 = 0$, o conjunto dos elementos idempotentes de peso 1 de A é dado por $I(A) = \{e + u : u \in U\}$, que é uma família a 2 parâmetros de idempotentes. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_1$ de A , temos que $U_0 = U$ e $V_0 = \{2bu_2 + av_1 + bv_2 : a, b \in F\}$ e, dessa forma, o elemento $2u_2 + v_1 + v_2$ é um elemento de V_0 que não pertence a V , o que mostra que V não é invariante por mudança de idempotentes e , portanto, não pertence ao Grupo I. Além disso, temos que $UV = Fu_2$ e os subespaços monomiais U^2 , U^3 , $U(UV)$, $(UV)V$, U^4 , $U[U(UV)]$, $U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$ são todos nulos. Portanto obtemos a seguinte simplificação, neste exemplo, para alguns subespaços do Grupo II:

- 2. V
- 18. $U^3 \oplus V = V$
- 19. $(UV)V \oplus V = V$
- 20. $U[U(UV)] \oplus V = V$
- 21. $U^3V \oplus V = V$
- 22. $[(UV)V]V \oplus V = V$
- 54. $[U^3 + (UV)V] \oplus V = V$
- 55. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V = V$
- 56. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V = V$
- 57. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V = V$
- 58. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus V = V$

o que mostra que também estes subespaços de números 2, 18, 19, 20, 21, 22, 54, 55, 56, 57, 58 devem efetivamente pertencer ao Grupo II.

Exemplo 18: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 e dimensão 8 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 4); & ev_i = v_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ u_1v_1 = u_4; & u_2v_2 = u_4; & u_3v_3 = -2u_4 \\ 2u_1u_2 = v_3; & 2u_1u_3 = v_2; & 2u_2u_3 = v_1 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

A função peso é definida na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos demais elementos. Nesse caso $\gamma = 1$, a álgebra A satisfaz a t-equação $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e é fácil ver que $U^2 = V$. O conjunto dos elementos idempotentes de peso 1 de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando $e_0 = e + u_1$ um elemento de $I(A)$, obtemos $U_0 = Fu_1 \oplus F(u_2 - v_3) \oplus F(u_3 - v_2) \oplus Fu_4$ e portanto $2(u_2 - v_3)(u_3 - v_2) = 2u_2u_3 - 2u_2v_2 + 2u_3v_3 + 2v_2v_3 = v_1 + 2u_4$ é um elemento de U_0^2 que não pertence a U^2 , o que mostra que U^2 não é invariante por mudança

de idempotentes e, dessa forma, não pertence ao Grupo I. Além disso, temos que $UV = U^3 = Fu_1$ e os subespaços monomiais $U(UV)$, $(UV)V$, U^4 , $U[U(UV)]$, $U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$ são todos nulos. Portanto, com este exemplo, obtemos a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 3. U^2
- 25. $(UV)V \oplus U^2 = U^2$
- 26. $U[(UV)V] \oplus U^2 = U^2$
- 27. $U^3V \oplus U^2 = U^2$
- 28. $[(UV)V]V \oplus U^2 = U^2$
- 61. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2 = U^2$
- 62. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2 = U^2$
- 63. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2 = U^2$

e isto mostra que também estes subespaços de números 3, 25, 26, 27, 28, 61, 62, 63 devem efetivamente pertencer ao Grupo II.

Exemplo 19: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 e dimensão 8 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 4); & ev_i = v_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ 2u_1v_1 = u_4; & 2u_2v_1 = u_3 \\ 2u_1u_2 = v_2; & u_1u_3 = v_3; & u_2u_4 = -v_3 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

Definimos a função peso na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos demais vetores. Também nesse caso $\gamma = 1$, a álgebra A satisfaz a t-equação $x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x = 0$ e o conjunto dos elementos idempotentes de peso 1 de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 - u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_1$ de A , teremos $U_0 = Fu_1 \oplus$

$\oplus F(u_2 - v_2) \oplus F(u_3 - 2v_3) \oplus Fu_4$ e $V_0 = F(v_1 + u_4) \oplus Fv_2 \oplus Fv_3$. Portanto $2(u_2 - v_2)(v_1 + u_4) = 2u_2v_1 + 2u_2u_4 = u_3 - 2v_3$ é um elemento de U_0V_0 que não pertence a UV , uma vez que $UV = Fu_3 \oplus Fu_4$. Com isso, fica mostrado que UV não é invariante por mudança de idempotentes e portanto não pertence ao Grupo I. Além disso, temos que $U^2 = Fv_2 \oplus \oplus Fv_3$, $U(UV) = Fv_3$ e os subespaços monomiais U^3 , $(UV)V$, U^4 , $U[U(UV)]$, $U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$ são todos nulos, o que acarreta seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 4. UV
- 30. $UV \oplus U^4 = UV$
- 31. $UV \oplus U[(UV)V] = UV$
- 64. $UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = UV$

Dessa forma, fica mostrado que também estes subespaços de números 4, 30, 31, 64 devem efetivamente pertencer ao Grupo II.

Exemplo 20: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 7); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ -u_1u_5 = u_2u_4 = v_2; \quad -u_1u_6 = u_3u_4 = v_3; \quad u_2u_6 = -u_3u_5 = v_1 \\ u_1v_1 = u_2v_3 = -u_3v_2 = u_7; \quad u_1v_4 = u_4; \quad u_2v_4 = u_5; \quad u_3v_4 = u_6 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Como nos exemplos anteriores, a função peso é definida na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos outros vetores. Nesse caso $\gamma = 0$ (e portanto $\lambda = 1$), A satisfaz a equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ e o conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2: u_0 \in U\}$. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_3$, pela Proposição 2 um gerador do P-subespaço $U_0(U_0V_0)$ é $y = -2u_3[u_2(u_1v_4)] \ominus u_2(u_1v_4) = -2u_3(u_2u_4) \ominus$

$\oplus u_2u_4 = -2u_3v_2 \oplus v_2 = 2u_7 \oplus v_2$, o que mostra que $y \in U_0(U_0V_0)$, porém $y \notin U(UV)$. Ou seja, $U(UV)$ não é invariante. Da tábua de multiplicação, é fácil ver que $U^2 = U(UV) = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3$, $UV = Fu_4 \oplus Fu_5 \oplus Fu_6 \oplus Fu_7$, $U^3 = U[U(UV)] = Fu_7$ e os P-subespaços $(UV)V$, U^4 , $U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$ são todos nulos. Obtemos, dessa forma, a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 6. $U(UV)$
- 37. $(UV)V \oplus U(UV) = U(UV)$
- 39. $U^3V \oplus U(UV) = U(UV)$
- 40. $[(UV)V]V \oplus U(UV) = U(UV)$
- 74. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV) = U(UV)$

o que mostra que estes 5 subespaços de números 6, 37, 39, 40 e 74 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 21: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, v_1, v_2, v_3\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 8); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ u_1u_4 = u_1u_5 = u_3u_4 = v_3 \\ u_1u_7 = u_2u_3 = u_2u_6 = u_2u_8 = u_5u_6 = -v_3 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_6; \quad u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_4 \\ u_4v_1 = -u_5v_2 = u_7; \quad u_3v_2 = -u_6v_1 = u_8 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Novamente aqui definimos a função peso na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω é nula para os outros vetores. Dessa forma, $\gamma = 0$, A satisfaz a t-equação $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ e o conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_2$, pela Proposição 3 um gerador do P-subespaço $(U_0V_0)V_0$ é

$y = (u_1v_2)v_1 \oplus 2u_2[(u_1v_2)v_1] = u_6v_1 \oplus 2u_2(u_6v_1) = -u_8 \oplus 2v_3$. Ou seja, $y \in (U_0V_0)V_0$ mas $y \notin (UV)V$, o que mostra que $(UV)V$ não é invariante por mudança de idempotentes. Além disso, é fácil ver que $UV = Fu_3 \oplus \dots \oplus Fu_8$, $(UV)V = Fu_7 \oplus Fu_8$, $U^2 = U(UV) = U[(UV)V] = Fv_3$ e os P-subespaços U^3 , U^4 , $U[U(UV)]$, U^3V e $[(UV)V]V$ são todos nulos. Dessa forma, temos a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 7. $(UV)V$
- 33. $U^3 + (UV)V = (UV)V$
- 41. $(UV)V \oplus U^4 = (UV)V$
- 42. $(UV)V + U[U(UV)] = (UV)V$
- 67. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^4 = (UV)V$
- 75. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^4 = (UV)V$

o que mostra que mais estes 6 subespaços de números 7, 33, 41, 42, 67 e 75 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 22: Consideremos agora a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e tábua de multiplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 12); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \\ u_2^2 = v_3; \quad u_1u_2 = v_4; \quad -u_1u_5 = u_2u_3 = v_5 \\ u_1u_4 = -u_2u_6 = v_6; \quad u_1u_7 = u_2u_8 = -u_3u_4 = u_5u_6 = -v_7 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_6; \quad u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_4; \quad u_4v_1 = -u_5v_2 = u_7 \\ u_3v_2 = -u_6v_1 = u_8; \quad u_1v_3 = -2u_2v_4 = u_9 \\ -2u_2v_5 = u_3v_3 = -2u_5v_4 = -u_9v_1 = u_{10} \\ 2u_2v_6 = -2u_4v_4 = u_6v_3 = -u_9v_2 = u_{11} \\ 2u_2v_7 = -2u_4v_5 = -2u_5v_6 = 2u_7v_4 = u_8v_3 = -u_{10}v_2 = u_{11}v_1 = u_{12} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

A função peso é definida na base de A como nos casos anteriores: $\omega(e) =$

$= 1$ e ω se anula nos outros vetores. Como $\gamma = 0$, segue que a t-equação satisfeita por A é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ e o conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando $u_0 = u_2$, pela Proposição 9 um gerador do P-subespaço $U_0[(U_0V_0)V_0]$ é dado por $y = -2u_2\{u_2[(u_1v_2)v_1]\} \oplus u_2[(u_1v_2)v_1] = -2u_2[u_2(u_6v_1)] \oplus u_2(u_6v_1) = -2u_2[u_2(-u_8)] \oplus u_2(-u_8) = 2u_2(-v_7) \oplus v_7 = -u_{12} \oplus v_7$. Portanto, $y \in U_0[(U_0V_0)V_0]$ mas $y \notin U[(UV)V]$, o que significa que o P-subespaço $U[(UV)V]$ não é invariante por mudança de idempotentes. Além disso, temos que $U^2 = Fv_3 \oplus \dots \oplus Fv_7$, $UV = Fu_3 \oplus \dots \oplus Fu_{12}$, $U^3 = Fu_9 \oplus \dots \oplus Fu_{12}$, $U(UV) = Fv_5 \oplus Fv_6 \oplus Fv_7$, $(UV)V = Fu_7 \oplus Fu_8 \oplus Fu_{10} \oplus Fu_{11} \oplus Fu_{12}$ (isto é, $u_9 \notin (UV)V$), $U[U(UV)] = U^3V = Fu_{10} \oplus Fu_{11} \oplus Fu_{12}$, $U[(UV)V] = Fv_7$, $[(UV)V]V = Fu_{12}$ e $U^4 = 0$. Temos, assim, a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 10. $U[(UV)V]$
- 45. $U^4 + U[(UV)V] = U[(UV)V]$

Isto mostra que os subespaços de números 10 e 45 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 23: Consideremos agora a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e tábua de multiplicação

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 6); & ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ u_1^2 = v_1; & u_1u_2 = v_2; & u_1u_3 = v_3; & 2u_1u_6 = -u_2u_5 = u_3u_4 = v_4 \\ -2u_1v_2 = u_2v_1 = u_4; & -2u_1v_3 = u_3v_1 = u_5; & -u_2v_3 = u_3v_2 = u_6 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

A função peso é definida na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos outros vetores. Temos que $\gamma = 0$ e portanto t-equação satisfeita por A é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. O conjunto dos elementos idempotentes de A novamente

é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Se tomarmos $u_0 = u_3$, então pela Proposição 5 um gerador do P-subespaço U_0^3 é $y = u_1^2 u_2 \oplus 2u_3(u_1^2 u_2) = u_2 v_1 \oplus 2u_3(u_2 v_1) = u_4 \oplus 2v_4$. Assim, $y \in U_0^3$ mas $y \notin U^3$, o que significa que o P-subespaço U^3 não é invariante. Além disso, temos que $U^2 = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3 \oplus Fv_4$, $UV = U^3 = Fu_4 \oplus Fu_5 \oplus Fu_6$, $U(UV) = U^4 = Fv_4$ e os P-subespaços $(UV)V$, $U[U(UV)]$, $U[(UV)V]$, $U^3 V$, $[(UV)V]V$ são todos nulos. Obtemos, dessa forma, a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 5. U^3
- 35. $U^3 \oplus U[(UV)V] = U^3$
- 36. $U^3 + [(UV)V]V = U^3$
- 68. $[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V] = U^3$
- 71. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V] = U^3$

Com isto, fica mostrado que os subespaços de números 5, 35, 36, 68 e 71 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 24: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, \dots, u_{11}, v_1, \dots, v_8\}$ e tabela de multiplicação dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 11); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 8) \\ u_1^2 = v_1; \quad u_3^2 = -v_1 + 2v_3; \quad u_1 u_2 = u_2 u_3 = v_2; \quad u_1 u_3 = v_3 \\ 2u_2 u_{10} = -v_6 + 2v_8; \quad u_1 u_4 = u_3 u_4 = v_4; \quad -u_3 u_9 = u_4 u_8 = v_8 \\ 2u_1 u_{10} = -u_3 u_7 = -2u_3 u_{10} = u_4 u_6 = v_7 \\ 2u_1 u_8 = -u_2 u_6 = u_3 u_5 = v_5; \quad 2u_1 u_9 = -u_2 u_7 = u_4 u_5 = v_6 \\ -2u_1 v_2 = u_2 v_1 = u_5; \quad -2u_1 v_4 = u_4 v_1 = u_7 \\ -2u_1 v_3 = u_3 v_1 = 2u_3 v_3 = u_6 \\ u_3 v_2 = u_8; \quad -u_2 v_4 = u_4 v_2 = u_9; \quad u_4 v_3 = u_{10} \\ -2u_1 v_8 = u_2 v_7 = -u_3 v_6 = u_4 v_5 = u_{11} \\ 2u_2 v_3 = u_5 - 2u_8; \quad 2u_3 v_4 = u_7 - 2u_{10} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Definimos a função peso na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos outros vetores. Além disso, $\gamma = 0$ e a t -equação satisfeita por A é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Novamente conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando agora o idempotente $e_0 = e + u_4$, pela Proposição 6 um gerador do P -subespaço U_0^4 é $y = -2u_4[u_3(u_2u_1^2)] \oplus u_3(u_2u_1^2) = -2u_4[u_3(u_2v_1)] \oplus u_3(u_2v_1) = -2u_4(u_3u_5) \oplus u_3u_5 = -2u_4v_5 \oplus v_5 = -2u_{11} \oplus v_5$. Ou seja, $y \in U_0^4$ mas $y \notin U^4$, o que mostra que U^4 não é um P -subespaço invariante. Da tábua de multiplicação, vemos que $U^2 = V$, $UV = U^3 = Fu_5 \oplus \dots \oplus Fu_{11}$, $U(UV) = U^4 = Fv_5 \oplus \dots \oplus Fv_8$, $U^5 = U[U(UV)] = Fu_{11}$, $(UV)V = U[(UV)V] = [(UV)V]V = U^3V = 0$. Com isto, obtemos a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 8. U^4
- 46. $U^3V \oplus U^4 = U^4$
- 47. $[(UV)V]V \oplus U^4 = U^4$
- 76. $(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
- 80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
- 81. $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
- 82. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^4 = U^4$
- 89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$

e dessa forma temos que estes 8 subespaços de números 8, 46, 47, 76, 80, 81, 82 e 89 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

Exemplo 25: Consideremos a t -álgebra A de posto 3 sobre o corpo F , com base $\{e, u_1, \dots, u_{16}, v_1, \dots, v_{10}\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 16); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 10) \\ u_1u_6 = -u_2u_3 = v_4; \quad u_1u_7 = -u_2u_4 = v_5; \quad u_1u_8 = -u_2u_5 = v_6 \\ u_1u_{12} = -u_2u_9 = u_3u_7 = -u_4u_6 = v_7 \\ u_1u_{13} = -u_2u_{10} = u_3u_8 = -u_5u_6 = v_8 \\ u_1u_{14} = -u_2u_{11} = u_4u_8 = -u_5u_7 = -v_9 \\ u_1u_{16} = u_3u_{14} = u_5u_{12} = u_6u_{11} = u_8u_9 = v_{10} \\ u_2u_{15} = u_4u_{13} = u_7u_{10} = -v_{10} \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_4; \quad u_1v_3 = u_5; \quad u_2v_1 = u_6; \quad u_2v_2 = u_7; \quad u_2v_3 = u_8 \\ u_3v_2 = -u_4v_1 = u_9; \quad u_3v_3 = -u_5v_1 = u_{10}; \quad u_4v_3 = -u_5v_2 = u_{11} \\ u_6v_2 = -u_7v_1 = u_{12}; \quad u_6v_3 = -u_8v_1 = u_{13}; \quad u_7v_3 = -u_8v_2 = u_{14} \\ u_9v_3 = -u_{10}v_2 = u_{11}v_1 = u_{15}; \quad u_{12}v_3 = -u_{13}v_2 = u_{14}v_1 = -u_{16} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Assim como nos exemplos anteriores, definimos a função peso na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos outros vetores, $\gamma = 0$ e a t -equação satisfeita por A é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$. Novamente o conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2: u_0 \in U\}$. Considerando agora o idempotente $e_0 = e + u_2$, pela Proposição 10 um gerador do subespaço $[(U_0 \vee_0)V_0]V_0$ é $y = [(u_1v_1)v_2]v_3 \oplus 2u_2\{[(u_1v_1)v_2]v_3\} = (u_3v_2)v_3 \oplus 2u_2[(u_3v_2)v_3] = u_9v_3 \oplus u_2(u_9v_3) = u_{15} \oplus (-2v_{10})$ e portanto $y \in [(U_0 \vee_0)V_0]V_0$ mas $y \notin [(UV)V]V$, o que mostra que $[(UV)V]V$ não é invariante. Além disso, é fácil ver que $U^2 = U(UV) = Fv_4 \oplus \dots \oplus Fv_{10}$, $UV = Fu_3 \oplus \dots \oplus Fu_{16}$, $(UV)V = Fu_9 \oplus \dots \oplus Fu_{16}$, $U[(UV)V] = Fv_7 \oplus \dots \oplus Fv_{10}$, $[(UV)V]V = Fu_{15} \oplus F_{16}$, $U^3 = U^4 = U^3V = U[U(UV)] = 0$. Isto acarreta a seguinte simplificação para alguns subespaços do Grupo II:

- 12. $[(UV)V]V$
- 49. $U[U(UV)] + [(UV)V]V = [(UV)V]V$
- 52. $U^3V + [(UV)V]V = [(UV)V]V$
- 70. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \ominus U^4 = [(UV)V]V$
- 79. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \ominus U^4 = [(UV)V]V$

e dessa forma temos que estes 5 subespaços de números 12, 49, 52, 70 e 79 efetivamente devem permanecer no Grupo II.

O próximo exemplo é encontrado em [10, pag. 99].

Exemplo 26: Consideremos a t-álgebra A de posto 3 sobre o corpo F, com base $\{e, u_1, \dots, u_{16}, v_1, \dots, v_9\}$ e tábua de multiplicação dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 16); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 9) \\ u_1^2 = v_3; \quad u_2^2 = v_4; \quad u_1u_2 = v_5 \\ u_1u_5 = -u_2u_3 = -v_6; \quad u_1u_6 = -u_2u_4 = v_7 \\ u_1u_9 = u_2u_{10} = u_3u_6 = -u_4u_5 = -v_8 \\ u_1u_{16} = u_2u_{15} = u_3u_{14} = u_7u_9 = v_9 \\ u_4u_{11} = u_5u_{12} = u_6u_{13} = u_8u_{10} = -v_9 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_4; \quad u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_6 \\ 2u_1v_5 = -u_2v_3 = -u_7; \quad u_1v_4 = 2u_2v_5 = -u_8 \\ u_5v_2 = -u_6v_1 = u_9; \quad u_3v_2 = -u_4v_1 = -u_{10} \\ 2u_2v_6 = -u_3v_4 = 2u_5v_5 = u_8v_1 = -u_{11} \\ 2u_1v_7 = 2u_4v_5 = -u_6v_3 = u_7v_2 = u_{12} \\ 2u_1v_6 = -2u_3v_5 = u_5v_3 = -u_7v_1 = u_{13} \\ 2u_2v_7 = u_4v_4 = -2u_6v_5 = -u_8v_2 = u_{14} \\ 2u_1v_8 = 2u_3v_7 = 2u_4v_6 = u_9v_3 = 2u_{10}v_5 = -u_{12}v_1 = -u_{13}v_2 = -u_{15} \\ 2u_2v_8 = 2u_5v_7 = 2u_6v_6 = 2u_9v_5 = u_{10}v_4 = u_{11}v_2 = -u_{14}v_1 = u_{16} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Definimos a função peso na base de A por $\omega(e) = 1$ e ω se anula nos demais vetores. Aqui também temos $\gamma = 0$, a t-equação satisfeita por A é $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ e o conjunto dos elementos idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_0 = e + u_0 + u_0^2 : u_0 \in U\}$. Considerando o idempotente $e_0 = e + u_1 + v_3$, da Proposição 7, o elemento $y = (u_3u_2^2)v_2 \oplus 2u_1[(u_3u_2^2)v_2] = (u_3v_4)v_2 \oplus 2u_1[(u_3v_4)v_2] = u_{11}v_2 \oplus 2u_1(u_{11}v_2) = u_{16} \oplus 2u_1u_{16} =$

$= u_{16} \oplus 2v_9$ é um gerador de $U_0^3V_0$ e daí segue que $y \in U_0^3V_0$, embora $y \notin U^3V$, o que mostra que U^3V não é invariante. Além disso, pela Proposição 8, segue que o mesmo elemento y acima considerado é um gerador de $U_0[U_0(U_0V_0)]$ (omitiremos aqui os cálculos) e dessa forma $y \in U_0[U_0(U_0V_0)]$ mas $y \notin U[U(UV)]$ e com isso mostramos que $U[U(UV)]$ não é invariante por mudança de idempotentes. Logo, os seguintes subespaços do Grupo II

- 12. $U[U(UV)]$
- 49. U^3V

devem efetivamente permanecer no Grupo II.

Restam ainda pendentes quatro casos: 48, 51, 77 e 83. Para decidir se eles ficam mesmo no Grupo II devemos encontrar exemplos análogos aos de acima.

Capítulo 6

Ideais de tipo polinomial

Neste capítulo vamos procurar determinar quais dos P -subespaços de grau ≤ 4 são ideais da t -álgebra A .

6.1 O estudo do Grupo I

Tomemos uma t -álgebra, de posto 3, $A = Fe \oplus U \oplus V$. Inicialmente observamos que se $m(U, V)$ é um subespaço monomial então $m(U, V) \subseteq U$ ou $m(U, V) \subseteq V$. Assim se $x \in m(U, V)$ então ex é múltiplo de x (pois $2ex = x$ ou $ex = \gamma x$) e portanto $ex \in m(U, V)$; ou seja, $em(U, V) \subseteq m(U, V)$ e dessa forma para determinar se $m(U, V)$ é um ideal de A basta ver se $m(U, V)$ é um ideal de $N = U \oplus V$. Em outras palavras, devemos apenas mostrar que $U[m(U, V)]$ e $V[m(U, V)]$ estão ambos em $m(U, V)$.

Para facilitar a leitura do próximo teorema, reestabelecemos aqui relações de inclusão que já apareceram anteriormente, entre alguns subespaços monomiais. São elas:

$$U(UV)^2 \subseteq U^3V \subseteq U[U(UV)] \subseteq U^3 \subseteq UV \quad (i)$$

$$U[(UV)V] = (UV)^2 \subseteq U(UV) \subseteq U^2 \quad (ii)$$

$$[(UV)V]V \subseteq (UV)V \subseteq UV \subseteq U \quad (iii)$$

$$U^5 \subseteq U[U(UV)] \quad (iv)$$

Teorema 1 *Todos os P -subespaços pertencentes ao Grupo I são ideais de A .*

Prova: Como já vimos, $eM \subseteq M$ para todo subespaço monomial M de A . Resta então, mostrarmos para cada subespaço polinomial $p(U, V)$ do Grupo I, que $(u + v)p(U, V) \subseteq p(U, V)$, com $u \in U$ e $v \in V$. Cada caso será identificado por seu correspondente número listado no Grupo I. Omitiremos os casos já conhecidos como, por exemplo, $U^n \oplus U^{n+1}$, $UV \oplus V$, N^k .

29. De (i), segue que $(u + v)[UV \oplus U(UV)] = \{u(UV) + u[U(UV)]\} + \{v(UV) + v[U(UV)]\} \subseteq [U(UV) + UV] + UV \subseteq UV \oplus U(UV)$ e isto mostra que $UV \oplus U(UV)$ é um ideal de A .

32. Usando-se novamente (i), obtemos $(u + v)[U^3 \oplus U(UV)] = \{uU^3 + u[U(UV)]\} + \{vU^3 + v[U(UV)]\} \subseteq [U(UV) + U^3] + U^3V \subseteq [U(UV) + U^3] + U^3 \subseteq U^3 \oplus U(UV)$ (pois $v[U(UV)] \subseteq V^2 = 0$) e portanto $U^3 \oplus U(UV)$ é um ideal de A .

38. De (i) temos $(u + v)\{U[U(UV)] \oplus U(UV)\} = \{u\{U[U(UV)]\} + u[U(UV)]\} + \{v\{U[U(UV)]\} + v[U(UV)]\} \subseteq \{U(UV) + U[U(UV)]\} + \{U[U(UV)]\}V \subseteq \{U(UV) + U[U(UV)]\} + U^3V \subseteq U[U(UV)] \oplus U(UV)$ e portanto $U[U(UV)] \oplus U(UV)$ é um ideal de A .

43. Basta ver que $(UV)V \oplus U[(UV)V] = (UV \oplus V)^2$ e portanto, de [6, Proposição 5], segue o resultado.

44. Usando-se agora (iv) e (i), temos $(u + v)\{U[U(UV)] \oplus U^4\} = u\{U[U(UV)] + uU^4\} + v\{U[U(UV)]\} + vU^4 \subseteq U^4 + U^5 + U^3V \subseteq U[U(UV)] \oplus U^4$ e isto mostra que $U[U(UV)] \oplus U^4$ é um ideal de A .

50. De $U^3V = (U^2U)V \subseteq (UV)V$ e (i), segue que $(u + v)\{U^3V \oplus U[(UV)V]\} = u(U^3V) + u\{U[(UV)V]\} + v(U^3V) + v\{U[(UV)V]\} \subseteq \{U[(UV)V] + U(UV)^2\} + U^3V \subseteq U^3V \oplus U[(UV)V]$, logo o subespaço $U^3V \oplus U[(UV)V]$ é um ideal de A .

59. Como já sabemos que $U^3 \oplus U^2$ é ideal de A , basta mostrarmos que $(u + v)[(UV)V] \subseteq [U^3 + (UV)V] \oplus U^2$. Mas de (ii) e (iii), segue que $(u + v)[(UV)V] = u[(UV)V] + v[(UV)V] \subseteq U^2 + (UV)V \subseteq [U^3 + (UV)V] \oplus U^2$ e isto mostra que $[U^3 + (UV)V] \oplus U^2$ é um ideal de A .

60. Novamente usando-se que $U^3 \oplus U^2$ é ideal de A , basta mostrarmos que $(u + v)\{[(UV)V]V\} \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$. Mas, usando (iii), segue que $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U^2 + [(UV)V]V \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$ e portanto $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$ é um ideal de A .

66. Como já vimos que $U^3 \oplus U(UV)$ é um ideal de A , resta apenas mostrarmos que $(u + v)\{[(UV)V]V\} \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$. Mas $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U(UV) \oplus [(UV)V]V \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$. Portanto $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$ é um ideal de A .

69. Já sabemos que $U^3 \oplus U^4$ é um ideal de A e portanto resta apenas mostrarmos que $(u + v)\{U[(UV)V]\} \subseteq U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas $(u + v)\{U[(UV)V]\} = u\{U[(UV)V]\} + v\{U[(UV)V]\} = u\{U[(UV)V]\} \subseteq U^3 \subseteq U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ o que completa a prova de que $U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A .

72. Como já sabemos que $U[U(UV)] \oplus U(UV)$ é um ideal de A , resta apenas mostrarmos que $(u + v)[(UV)V] \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$. Mas, de (iii), temos $(u + v)[(UV)V] = u[(UV)V] + v[(UV)V] \subseteq U(UV) + (UV)V \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$ e dessa forma $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$ é um ideal de A .

73. Como já vimos que $U[U(UV)] \oplus U(UV)$ é um ideal de A , basta mostrarmos que $(u + v)\{[(UV)V]V\} \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$. Mas de (iii), segue que $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U(UV) + [(UV)V]V \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$.

$\oplus U(UV)$ e dessa forma segue que $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$ também é um ideal de A .

78. Já sabemos que $U[U(UV)] \oplus U^4$ é um ideal de A e portanto resta mostrarmos que $(u + v)\{U[(UV)V]\} \subseteq U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Como temos $(u + v)\{U[(UV)V]\} = u\{U[(UV)V]\} + v\{U[(UV)V]\} = u\{U[(UV)V]\} \subseteq U[U(UV)] \subseteq U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ segue que $U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A .

84. Como já vimos que $U^3V \oplus U[(UV)V]$ é um ideal de A , resta apenas mostrarmos que $(u + v)\{[(UV)V]V\} \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$. Mas de (iii), temos $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U[(UV)V] + [(UV)V]V \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$ e daí concluimos que $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$ é um ideal de A .

85. Como $U^3 \oplus U^4$ e $(UV)V \oplus U[(UV)V]$ são ideais de A , segue que o subespaço $[U^3 + (UV)V] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A , como soma de dois ideais.

86. Já vimos que $U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A e portanto resta apenas mostrarmos que $(u + v)\{[(UV)V]V\} \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas, de (iii), segue que $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U[(UV)V] + [(UV)V]V \subseteq U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ e isto mostra que $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A .

87. Como $(UV)V \oplus U[(UV)V]$ e $U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ são ideais de A , segue que o subespaço $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é um ideal de A , como soma de dois ideais.

Dessa forma, ficou provado que todos os subespaços do Grupo I são ideais de A . ■

6.2 Ideais gerados pelos monômios de Peirce

Procuraremos agora, fixada uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$, de posto 3, descrever os ideais gerados pelos P -monômios não nulos de grau ≤ 4 (numerados de 1 a 12 no Apêndice) e por alguns outros P -monômios, de grau não necessariamente 4. Em [20] os autores provaram que os ideais gerados por U e V são $U \oplus U^2$ e $UV \oplus V$, respectivamente.

Lema 6.1 *Para todo $n \geq 1$, o ideal gerado por U^n é o P -subespaço $U^n \oplus U^{n+1}$.*

Prova: O subespaço vetorial $U^n \oplus U^{n+1}$, que contém U^n , é ideal de A para todo $n \geq 1$ (vide Lema 2.4). Se J é um outro ideal de A contendo U^n , então $U^{n+1} = U^n U \subseteq J U \subseteq J$, pois J é ideal de A e portanto $U^n \oplus U^{n+1} \subseteq J$, o que prova o resultado acima. ■

Lema 6.2 *O subespaço vetorial $UV \oplus U(UV)$ é o ideal gerado por UV .*

Prova: Como $UV \oplus U(UV)$ pertence ao Grupo I, do Teorema 1 sabemos que é um ideal de A e além disso contém UV . Considerando J um outro ideal de A contendo UV , temos que $U(UV) \subseteq U J \subseteq J$. Portanto $UV \oplus U(UV) \subseteq J$ e dessa forma conclui-se o resultado enunciado. ■

Lema 6.3 *O ideal gerado por $U(UV)$ é o P -subespaço $U[U(UV)] \oplus U(UV)$.*

Prova: O subespaço vetorial $U[U(UV)] \oplus U(UV)$, que contém $U[U(UV)]$, pertence ao Grupo I e portanto, pelo Teorema 1, é um ideal de A . Além disso, se J é um outro ideal de A tal que $U(UV) \subseteq J$, então $U[U(UV)] \subseteq U J \subseteq J$. Logo $U[U(UV)] \oplus U(UV) \subseteq J$, sendo, portanto, o ideal gerado por $U(UV)$. ■

Lema 6.4 *O ideal gerado por $(UV)V$ é o P -subespaço $(UV)V \oplus U[(UV)V]$.*

Prova: $(UV)V \oplus U[(UV)V]$ é ideal de A (contendo $(UV)V$) pois pertence ao Grupo I. Se J é um outro ideal de A que contém $(UV)V$, então $U[(UV)V] \subseteq UJ \subseteq J$ e isto completa a prova de que $(UV)V \oplus U[(UV)V]$ é gerado por $(UV)V$. ■

Lema 6.5 *O subespaço vetorial $p(U, V) = U[U(UV)] \oplus U\{U[U(UV)]\}$ é o ideal de A gerado por $U[U(UV)]$.*

Prova: Mostremos, inicialmente, que $p(U, V)$ é um ideal de A . Como vimos no Teorema 1, basta mostrarmos que $(u + v)p(U, V) \subseteq p(U, V)$, com $u \in U$ e $v \in V$. Como

$$\begin{aligned} u\{U[U(UV)]\} &\subseteq U\{U[U(UV)]\} \subseteq p(U, V); \\ u\{U\{U[U(UV)]\}\} &\subseteq u\{U[(UU^2)]\} \subseteq U[U(UV)] \subseteq p(U, V); \\ v\{U\{U[U(UV)]\}\} &\subseteq vU^4 \subseteq V^2 = 0, \end{aligned}$$

resta apenas estudarmos $v\{U[U(UV)]\}$. Para isso, considerando $u_3[u_2(u_1v_1)]$ um gerador de $U[U(UV)]$ e de $J(v, u_3, u_2(u_1v_1)) = 0$, obtemos $v\{u_3[u_2(u_1v_1)]\} = -(u_3v)[u_2(u_1v_1)] \in (UV)[U(UV)] \subseteq U[U(UV)] \subseteq p(U, V)$, pois $u_3\{v[u_2(u_1v_1)]\} = 0$. Portanto, por linearidade, segue que $v\{U[U(UV)]\} \subseteq p(U, V)$ e assim conclui-se que $p(U, V)$ é um ideal de A que, obviamente, contém $U[U(UV)]$. Consideremos agora J um outro ideal de A , contendo $U[U(UV)]$. Então $U\{U[U(UV)]\} \subseteq UJ \subseteq J$, o que mostra o resultado enunciado. ■

Lema 6.6 *O P -subespaço $p(U, V) = U\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V]$ é o ideal gerado por $U[(UV)V]$.*

Prova: Afirmamos que $p(U, V)$ é um ideal de A . De fato, se $u \in U$ e $v \in V$, então $u\{U[(UV)V]\} \subseteq U\{U[(UV)V]\} \subseteq p(U, V)$ e $v\{U[(UV)V]\} \subseteq VU^2 = 0 \subseteq p(U, V)$. Resta, portanto, analisarmos os termos $u\{U\{U[(UV)V]\}\}$ e $v\{U\{U[(UV)V]\}\}$. Como $U[(UV)V] = (UV)^2$ (Lema 3.1), um gerador

de $U\{U[(UV)V]\}$ é da forma $u_3[(u_1v_1)(u_2v_2)]$. Considerando então os elementos u_3, u_1v_1 e u_2v_2 , obtemos $J(u_3, u_1v_1, u_2v_2) = u_3[(u_1v_1)(u_2v_2)] + (u_1v_1)[u_3(u_2v_2)] + (u_2v_2)[u_3(u_1v_1)] = 0$. Portanto $u\{u_3[(u_1v_1)(u_2v_2)]\} = -u\{(u_1v_1)[u_3(u_2v_2)]\} - u\{(u_2v_2)[u_3(u_1v_1)]\} \in U\{(UV)[U(UV)]\} \subseteq U[(UV)U^2] \subseteq U[(UV)V] \subseteq p(U, V)$ e assim $u\{U\{U[(UV)V]\}\} \subseteq p(U, V)$. Além disso, da identidade (1.13) aplicada aos elementos $v, u_3, (u_1v_1)(u_2v_2)$, temos $v\{u_3[(u_1v_1)(u_2v_2)]\} = -(u_3v)[(u_1v_1)(u_2v_2)] \in (UV)(UV)^2 \subseteq U(UV)^2 = U\{U[(UV)V]\} \subseteq p(U, V)$, e dessa forma o P-subespaço $p(U, V)$ é um ideal de A que, obviamente, contém o subespaço monomial $U[(UV)V]$. Consideremos agora J um ideal de A contendo $U[(UV)V]$. Então $U\{U[(UV)V]\} \subseteq UJ \subseteq J$ e portanto $p(U, V) \subseteq J$, o que mostra que $U\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V$ é o ideal de A gerado por $U[(UV)V]$. ■

Lema 6.7 *O subespaço polinomial $U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV) = U^{2n+1}V \oplus U(U^{2n+1}V)$ é o ideal gerado por $U^{2n+1}V$, para todo $n \geq 1$.*

Prova: Inicialmente, mostremos que $U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$ é um ideal de A , para todo $n \geq 1$. Tomemos $x = u + v \in U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$ e consideremos $u' \in U$ e $v' \in V$. Temos então que $(u' + v')x = u'u + u'v + uv' + vv' = u'u + u'v + uv'$. Como $u'u \in U(U^{2n+1}V) = U^{2n+1}(UV)$ (pelo Lema 3.2, (iii)); $v'x = uv' \in (U^{2n+1}V)V = [U^{2n}(UV)]V \subseteq U^{2n+1}V$, (pelo Lema 3.2(ii)), resta apenas analisarmos o termo $u'v$. Mas $u'v = u'[(tu_2)(u_1v_1)]$, sendo $t \in U^{2n}$, $u_1, u_2 \in U$ e $v_1 \in V$ já que $v \in U^{2n+1}(UV)$. De $J(u', tu_2, u_1v_1) = 0$ temos $u'v = -(tu_2)[u'(u_1v_1)] + (u_1v_1)[u'(tu_2)]$ e como $(tu_2)[u'(u_1v_1)] \in U^{2n+1}[U(UV)] \subseteq U^{2n+1}U^2 \subseteq U^{2n+1}V$, basta agora analisarmos o termo $(u_1v_1)[u'(tu_2)]$. Usando-se agora a identidade (1.13) para os elementos $u_1, v_1, u'(tu_2)$, obtemos $u_1\{v_1[u'(tu_2)]\} + v_1\{u_1[u'(tu_2)]\} + (u_1v_1)[u'(tu_2)] = 0$ e como $u_1\{v_1[u'(tu_2)]\} \in U\{V[U(UV)]\} \subseteq U[VU^2] = 0$, temos $(u_1v_1)[u'(tu_2)] = -\{u_1[u'(tu_2)]\}v_1 \in \{U[U(U^{2n}U)]\}V = U^{2n+3}V \subseteq U^{2n+1}V$, pelo Lema 2.1. Ou seja, $u'v \in U^{2n+1}V$ e portanto $(u' + v')x \in U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$, donde obtemos que $U^{2n+1}V \oplus U^{2n+1}(UV)$ é um ideal de A , para todo

$n \geq 1$ e é claro que contém $U^{2n+1}V$. Além disso, se J é um outro ideal de A contendo $U^{2n+1}V$, então $U(U^{2n+1}V) \subseteq UJ \subseteq J$ e portanto obtemos o resultado enunciado. ■

Lema 6.8 *O subespaço $UV^{(3)} \oplus U(UV^{(3)})$ é o ideal gerado por $UV^{(3)}$.*

Prova: Começemos mostrando que $p(U, V) = [(UV)V]V \oplus U\{[(UV)V]V\}$ é um ideal de A . Para isso, observemos que, se $u + v \in N$, então $(u + v)\{[(UV)V]V\} = u\{[(UV)V]V\} + v\{[(UV)V]V\} \subseteq U\{[(UV)V]V\} \oplus \{[(UV)V]V\}V \subseteq U\{[(UV)V]V\} \oplus [(UV)V]V = p(U, V)$. Além disso, $v\{U\{[(UV)V]V\}\} \subseteq VU^2 \subseteq V^2 = 0$ e portanto resta apenas analisarmos o termo $u\{U\{[(UV)V]V\}\}$. Do Lema 3.2, (iv), segue que $U\{[(UV)V]V\} = (UV)[(UV)V]$ e assim um gerador de $U\{[(UV)V]V\}$ pode ser escrito na forma $(u_1v_1)[(u_2v_2)v]$. Assim, como $J(u, u_1v_1, (u_2v_2)v) = 0$, segue que $u\{(u_1v_1)[(u_2v_2)v]\} = - (u_1v_1)\{u[(u_2v_2)v]\} - [(u_2v_2)v][u(u_1v_1)]$. Desse modo, $[(u_2v_2)v][u(u_1v_1)] \in [(UV)V][U(UV)] \subseteq [(UV)V]U^2 \subseteq [(UV)V]V \subseteq p(U, V)$, e portanto resta analisarmos o termo $x = (u_1v_1)\{u[(u_2v_2)v]\}$. Aplicando-se a identidade de Jacobi aos elementos $u_1, v_1, u[(u_2v_2)v]$, obtemos $x = - \{u_1\{u[(u_2v_2)v]\}\}v_1$, pois $u_1\{u[(u_2v_2)v]\}v_1 \in U[U^2V] = 0$. Da identidade (4.4) aplicada aos elementos u, u_2v_2, v , segue que $u[(u_2v_2)v] = - (u_2v_2)(uv)$ e assim $x = \{u_1[(u_2v_2)(uv)]\}v_1$. Finalmente, da identidade (1.13) aplicada aos termos u_1, u_2v_2, uv , segue que $u_1[(u_2v_2)(uv)] = - (u_2v_2)[u_1(uv)] - (uv)[u_1(u_2v_2)] \in (UV)[U(UV)] \subseteq (UV)U^2 \subseteq (UV)V$. Logo, $x \in [(UV)V]v_1 \subseteq [(UV)V]V$ e portanto $u\{U\{[(UV)V]V\}\} \subseteq p(U, V)$, o que mostra que $p(U, V)$ é um ideal de A . Além disso, se J é outro ideal de A contendo o subespaço monomial $[(UV)V]V$, então $U\{[(UV)V]V\} \subseteq UJ \subseteq J$ e com isto completamos a prova do resultado enunciado. ■

Observemos agora que se B e C são subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial A que geram, respectivamente, os ideais I_B e I_C , então o ideal gerado por $B + C$ é $I_B + I_C$. Dessa forma, obteremos o seguinte resultado:

Corolário 6.8.1 *Os ideais gerados pelos P -subespaços $U^3 + (UV)V$, $U^3 + [(UV)V]V$, $(UV)V + U[U(UV)]$, $U^4 + U[(UV)V]$, $U[U(UV)] + [(UV)V]V$, $U^3V + [(UV)V]V$ são respectivamente dados por:*

$$\begin{aligned} & [U^3 + (UV)V] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}; \\ & \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U\{[(UV)V]V\}\}; \\ & \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U[(UV)V] + U\{[U(UV)]\}\}; \\ & \{U^5 + U\{U[(UV)V]\}\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}; \\ & \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \{U\{U[U(UV)]\} + U\{[(UV)V]V\}\}; \\ & \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^3(UV) + U\{[(UV)V]V\}\}. \end{aligned}$$

6.3 Propriedades de ideais

Lema 6.9 *Se I é um ideal de uma t -álgebra de posto 3 $A = Fe \oplus U \oplus V$, contido em N , então $I = (I \cap U) \oplus (I \cap V)$.*

Prova: Consideremos $x \in I$ um elemento arbitrário de I . Como $I \subseteq N$, segue que $x = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$. Portanto, $2ex = 2eu + 2ev = u + 2\gamma v \in I$, pois I é ideal de A . Da mesma forma, $2ex - x = (2\gamma - 1)v \in I$ e como $2\gamma \neq 1$, segue que $v \in I$. Assim obtemos que $v \in I \cap V$. Finalmente, $u = x - v \in I$ e portanto $u \in I \cap U$, o que conclui a demonstração do resultado enunciado. ■

Lema 6.10 *Se I e J são ideais de uma t -álgebra $A = Fe \oplus U \oplus V$, de posto 3, contidos em N , então $IJ = \{\sum_i a_i b_i : a_i \in I, b_i \in J\}$ também é um ideal de A .*

Prova: É claro que IJ é um subespaço vetorial de A . Consideremos agora ij , $i \in I$, $j \in J$, um gerador de IJ . Pelo Lema 6.9, $i = u_1 + v_1$, $j = u_2 + v_2$, com $u_1 \in I \cap U$, $u_2 \in J \cap U$, $v_1 \in I \cap V$ e $v_2 \in J \cap V$ e portanto $ij = u_1v_2 + u_2v_1 + u_1u_2$, donde segue que $2e(ij) = u_1v_2 + u_2v_1 + 2\gamma u_1u_2 \in IJ$, pois cada parcela dessa soma está em IJ . Além disso, dado $x \in N$, usando-se a identidade de Jacobi para os elementos x .

i, j , obtemos $x(ij) = -i(xj) - j(xi) \in I(NJ) + J(NI) \subseteq IJ$, pois I, J são ideais de A e isto completa a prova de que IJ é um ideal de A . ■

Corolário 6.10.1 *O produto de dois subespaços do Grupo I é um ideal de A .*

Prova: De acordo com o Teorema 1, cada subespaço do Grupo I é um ideal de A e portanto, pelo Lema 6.10, segue o resultado. ■

Observação: A recíproca do lema anterior não é verdadeira, pois $NU = (U \oplus V)U = UV \oplus U^2 = N^2$, que é ideal de A . Além disso, U não é ideal de A , por (1.8).

Queremos, agora, saber quais dos 65 subespaços do Grupo II são ideais de A . Nesse caso, acreditamos que, genericamente, nenhum dos subespaços seja ideal de A , mas para podermos afirmar que isto ocorre, devemos dar contra-exemplos que mostrem que a afirmação é verdadeira.

Exemplo 27: Retomemos a álgebra A do Exemplo 22 do Capítulo anterior, cuja tabela de multiplicação é:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 12); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 7) \\ u_2^2 = v_3; \quad u_1u_2 = v_4; \quad -u_1u_5 = u_2u_3 = v_5; \quad u_1u_4 = -u_2u_6 = v_6 \\ u_1u_7 = u_2u_8 = -u_3u_4 = u_5u_6 = -v_7; \quad u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_6 \\ u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_4; \quad u_4v_1 = -u_5v_2 = u_7; \quad u_3v_2 = -u_6v_1 = u_8 \\ u_1v_3 = -2u_2v_4 = u_9; \quad -2u_2v_5 = u_3v_3 = -2u_5v_4 = -u_9v_1 = u_{10} \\ 2u_2v_6 = -2u_4v_4 = u_6v_3 = -u_9v_2 = u_{11} \\ 2u_2v_7 = -2u_4v_5 = -2u_5v_6 = 2u_7v_4 = u_8v_3 = -u_{10}v_2 = u_{11}v_1 = u_{12} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

É fácil ver que os P -monômios $U, UV = Fu_3 \oplus \dots \oplus Fu_{12}, (UV)V =$

$= Fu_7 \oplus Fu_8 \oplus Fu_{10} \oplus Fu_{11} \oplus Fu_{12}$ não são ideais de A , uma vez que $u_2u_8 = -v_7$. Por outro lado, V , $U^2 = Fv_4 \oplus \dots \oplus Fv_7$, $U(UV) = Fv_5 \oplus Fv_6 \oplus Fv_7$ e $U[(UV)V] = Fv_7$ não são ideais de A pois $2u_2v_7 = u_{12}$. Além disso, os P-monômios $U^3 = Fu_9 \oplus \dots \oplus Fu_{12}$, $U[U(UV)] = U^3V = Fu_{10} \oplus Fu_{11} \oplus Fu_{12}$, $[(UV)V]V = Fu_{12}$ e $U^4 = 0$ são ideais de A . Assim, o seguinte P-subespaço do Grupo II não é ideal de A :

$$10. \quad U^4 + U[(UV)V] = U[(UV)V]$$

Exemplo 28: Consideremos a t-álgebra A dada no Exemplo 26 do Capítulo 5. Sua tabela de multiplicação é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 16); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 9) \\ u_1^2 = v_3; \quad u_2^2 = v_4; \quad u_1u_2 = v_5 \\ u_1u_5 = -u_2u_3 = -v_6; \quad u_1u_6 = -u_2u_4 = v_7 \\ u_1u_9 = u_2u_{10} = u_3u_6 = -u_4u_5 = -v_8 \\ u_1u_{16} = u_2u_{15} = u_3u_{14} = u_7u_9 = v_9 \\ u_4u_{11} = u_5u_{12} = u_6u_{13} = u_8u_{10} = -v_9 \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_4; \quad u_2v_1 = u_5; \quad u_2v_2 = u_6 \\ 2u_1v_5 = -u_2v_3 = -u_7; \quad u_1v_4 = 2u_2v_5 = -u_8 \\ u_5v_2 = -u_6v_1 = u_9; \quad u_3v_2 = -u_4v_1 = -u_{10} \\ 2u_2v_6 = -u_3v_4 = 2u_5v_5 = u_8v_1 = -u_{11} \\ 2u_1v_7 = 2u_4v_5 = -u_6v_3 = u_7v_2 = u_{12} \\ 2u_1v_6 = -2u_3v_5 = u_5v_3 = -u_7v_1 = u_{13} \\ 2u_2v_7 = u_4v_4 = -2u_6v_5 = -u_8v_2 = u_{14} \\ 2u_1v_8 = 2u_3v_7 = 2u_4v_6 = u_9v_3 = 2u_{10}v_5 = -u_{12}v_1 = -u_{13}v_2 = -u_{15} \\ 2u_2v_8 = 2u_5v_7 = 2u_6v_6 = 2u_9v_5 = u_{10}v_4 = u_{11}v_2 = -u_{14}v_1 = u_{16} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

É fácil ver que $U[U(UV)] = U^3V = F_{11} \oplus \dots \oplus F_{16}$. Além disso, como $u_1u_{16} = v_9 \notin U[U(UV)] = U^3V$, segue que estes dois P-monômios não são ideais de A .

Exemplo 29: Retomemos a t -álgebra A de posto 3 dada no Exemplo 24 do Capítulo 5, cuja tabela de multiplicação é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 11); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 8) \\ u_1^2 = v_1; \quad u_3^2 = -v_1 + 2v_3; \quad u_1u_2 = u_2u_3 = v_2; \quad u_1u_3 = v_3 \\ 2u_2u_{10} = -v_6 + 2v_8; \quad u_1u_4 = u_3u_4 = v_4; \quad -u_3u_9 = u_4u_8 = v_8 \\ 2u_1u_8 = -u_2u_6 = u_3u_5 = v_5; \quad 2u_1u_9 = -u_2u_7 = u_4u_5 = v_6 \\ -2u_1v_2 = u_2v_1 = u_5; \quad -2u_1v_4 = u_4v_1 = u_7 \\ 2u_1u_{10} = -u_3u_7 = -2u_3u_{10} = u_4u_6 = v_7 \\ -2u_1v_3 = u_3v_1 = 2u_3v_3 = u_6; \quad u_3v_2 = u_8; \quad -u_2v_4 = u_4v_2 = u_9 \\ u_4v_3 = u_{10}; \quad -2u_1v_8 = u_2v_7 = -u_3v_6 = u_4v_5 = u_{11} \\ 2u_2v_3 = u_5 - 2u_8; \quad 2u_3v_4 = u_7 - 2u_{10} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

Da tabela de multiplicação, vemos que os seguintes P -monômios não são ideais de A : $U^2 = V$ e $U(UV) = U^4 = Fv_5 \oplus \dots \oplus Fv_8$ (pois $u_2v_7 = u_{11}$); U e $UV = U^3 = Fu_5 \oplus \dots \oplus Fu_{11}$ (pois $u_4u_5 = u_{11}$). Além disso, os P -monômios $U[U(UV)] = Fu_{11}$, $(UV)V = U[(UV)V] = [(UV)V]V = U^3V = 0$ são ideais de A . Com isto, fica mostrado que os seguintes P -subespaços do Grupo II não são ideais de A :

1. U
2. V
3. U^2
4. UV
5. U^3
6. $U(UV)$
8. U^4
14. $U \oplus U(UV)$, pois $u_1u_4 \notin U(UV)$
15. $U \oplus U^4 = U \oplus U(UV)$
16. $U \oplus U[(UV)V] = U$
19. $(UV)V \oplus V = V$
20. $U[U(UV)] \oplus V$, pois $u_2v_1 \notin U[U(UV)]$

21. $U^3V \oplus V = V$
22. $[(UV)V]V \oplus V = V$
25. $(UV)V \oplus U^2 = U^2 = V$
26. $U[U(UV)] \oplus U^2 = U[U(UV)] \oplus V$ (vide 20)
27. $U^3V \oplus U^2 = U^2 = V$
28. $[(UV)V]V \oplus U^2 = U^2 = V$
31. $UV \oplus U[(UV)V] = UV$
33. $U^3 + (UV)V = U^3$
35. $U^3 \oplus U[(UV)V] = U^3$
36. $U^3 + [(UV)V]V = U^3$
37. $(UV)V \oplus U(UV) = U(UV)$
39. $U^3V \oplus U(UV) = U(UV)$
40. $[(UV)V]V \oplus U(UV) = U(UV)$
41. $(UV)V \oplus U^4 = U^4$
45. $U^4 + U[(UV)V] = U^4$
46. $U^3V \oplus U^4 = U^4$
47. $[(UV)V]V \oplus U^4 = U^4$
53. $U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U \oplus U^4$ (veja 15)
56. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V = U[U(UV)] \oplus V$ (veja 20)
57. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V = U[U(UV)] \oplus V$ (veja 20)
58. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus V = V$
61. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2 = U[U(UV)] \oplus U^2$ (veja 26)
62. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2 = U[U(UV)] \oplus U^2$ (veja 26)
63. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2 = U^2$
68. $[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V] = U^3$
71. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V] = U^3$
74. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV) = U(UV)$
76. $(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
81. $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$
82. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^4 = U^4$
89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = U^4$

Exemplo 30: Consideremos a t-álgebra A dada no Exemplo 25 do Capítulo 5. Sua tabela de multiplicação é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 = e; \quad 2eu_i = u_i \quad (i = 1, \dots, 16); \quad ev_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 10) \\ u_1u_6 = -u_2u_3 = v_4; \quad u_1u_7 = -u_2u_4 = v_5; \quad u_1u_8 = -u_2u_5 = v_6 \\ u_1u_{12} = -u_2u_9 = u_3u_7 = -u_4u_6 = v_7 \\ u_1u_{13} = -u_2u_{10} = u_3u_8 = -u_5u_6 = v_8 \\ u_1u_{14} = -u_2u_{11} = u_4u_8 = -u_5u_7 = -v_9 \\ u_1u_{16} = u_3u_{14} = u_5u_{12} = u_6u_{11} = u_8u_9 = v_{10} \\ u_2u_{15} = u_4u_{13} = u_7u_{10} = -v_{10} \\ u_1v_1 = u_3; \quad u_1v_2 = u_4; \quad u_1v_3 = u_5; \quad u_2v_1 = u_6; \quad u_2v_2 = u_7; \quad u_2v_3 = u_8 \\ u_3v_2 = -u_4v_1 = u_9; \quad u_3v_3 = -u_5v_1 = u_{10}; \quad u_4v_3 = -u_5v_2 = u_{11} \\ u_6v_2 = -u_7v_1 = u_{12}; \quad u_6v_3 = -u_8v_1 = u_{13}; \quad u_7v_3 = -u_8v_2 = u_{14} \\ u_9v_3 = -u_{10}v_2 = u_{11}v_1 = u_{15}; \quad u_{12}v_3 = -u_{13}v_2 = u_{14}v_1 = -u_{16} \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{array} \right.$$

É fácil ver que os P-monômios U , $UV = Fu_3 \oplus \dots \oplus Fu_{16}$, $(UV)V = Fu_9 \oplus \dots \oplus Fu_{16}$ e $[(UV)V]V = Fu_{15} \oplus Fu_{16}$ não são ideais de A , pois $u_1u_{16} = v_{10}$. O P-monômio V não é ideal de A pois $u_1v_1 = u_3 \notin V$. Além disso, os P-monômios $U^2 = U(UV) = Fv_4 \oplus \dots \oplus Fv_{10}$, $U[(UV)V] = Fv_7 \oplus \dots \oplus Fv_{10}$, $U^3 = U^4 = U^3V = U[U(UV)] = 0$ são ideais de A . Isto mostra que os seguintes P-subespaços do Grupo II não são ideais de A :

- 7. $(UV)V$
- 12. $[(UV)V]V$
- 18. $U^3 \oplus V = V$
- 30. $UV \oplus U^4 = UV$
- 42. $(UV)V + U[U(UV)] = (UV)V$
- 49. $U[U(UV)] + [(UV)V]V = [(UV)V]V$
- 52. $U^3V + [(UV)V]V = [(UV)V]V$
- 54. $[U^3 + (UV)V] \ominus V = (UV)V \ominus V$ (pois $u_1v_1 \notin (UV)V$)
- 55. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V = [(UV)V]V \oplus V$ (pois $u_1v_1 \notin [(UV)V]V$)

64. $UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = UV \oplus U[(UV)V]$ (pois $u_2u_4 \notin U[(UV)V]$)
67. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^4 = (UV)V$
70. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^4 = [(UV)V]V$
75. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^4 = (UV)V$
79. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^4 = [(UV)V]V$

Observação: Nos exemplos 27 a 30 obtivemos uma lista de P-subespaços do Grupo II que não são ideais de A. Se compararmos com a lista de P-subespaços que sabemos que efetivamente pertencem ao Grupo II, veremos que tais listas coincidem.

Daremos agora um exemplo de um ideal que não é polinomial.

Exemplo 31: Consideremos A a t-álgebra de posto 3 e dimensão 5 com base $\{e, u_1, u_2, u_1^2, v\}$ e tábua de multiplicação:

$$\begin{cases} e^2 = e; & 2eu_1 = u_1; & 2eu_2 = u_2 \\ u_i u_j = u_1^2 \\ \text{os outros produtos são nulos} \end{cases}$$

O ideal $L = \{u \in U : uU = 0\}$ não é polinomial. De fato, temos que U é gerado por $\{u_1, u_2\}$, V é gerado por $\{u_1^2, v\}$, $U^2 = Fu_1^2$ e todos os outros P-subespaços (como, por exemplo, UV, U^3 , $U(UV)$, $(UV)V$, U^4 , $U[U(UV)]$, $U[(UV)V]$, U^3V , $[(UV)V]V$) são nulos. Dado um elemento arbitrário de U, digamos $au_1 + bu_2 \in U$, $a, b \in F$, temos que $(u_1 - u_2)(au_1 + bu_2) = au_1^2 + bu_1^2 - au_1^2 - bu_1^2 = 0$ e, portanto, $0 \neq u_1 - u_2 \in L$, o que mostra que $\dim L > 0$. Além disso, como $u_1^2 \neq 0$ por ser um elemento da base de A, segue que $u_1 \notin L$ e portanto $\dim L < 2$. Logo, $\dim L = 1$ donde concluímos que $L = F(u_1 - u_2)$ e que portanto L não é polinomial.

Observação: O Exemplo 31 acima serve também como resposta negativa a um dos desdobramentos do Problema 6 colocado no Capítulo 1.

Capítulo 7

Sobre a invariância relativa dos P-subespaços

Neste capítulo, introduziremos a noção de “invariância relativa” de um P-subespaço. Para um caso particular, estudaremos a migração de P-subespaços do Grupo II para o Grupo I.

7.1 Invariância relativa: definição

Fixemos $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma t-álgebra de posto 3 sobre o corpo F e $S \subseteq U$ um subconjunto arbitrário do P-monômio U , contendo a origem. Os cálculos que fizemos no Capítulo 5 correspondem a tomar $S = U$ na definição que segue.

Definição: Dizemos que um P-subespaço $p(U, V)$ é *S-invariante* se $p(U, V)$ é um P-subespaço invariante por mudança de idempotentes quando fazemos u_0 variar em S ; em outras palavras, $p(U, V)$ é S-invariante se e somente se $p(U, V) = p(U_0, V_0)$ para todo $u_0 \in S$.

Observação 1: É claro que todo P-subespaço invariante é também S-invariante, para todo $S \subseteq U$.

Observação 2: Se $u_0 \in \text{ann}_U N = \{u \in U : uN = 0\}$, então todos os P-subespaços do Grupo II migram para o Grupo I.

7.2 Um caso particular do Problema 8

No capítulo 1, colocamos a seguinte questão: fixado um subconjunto S de U , com $0 \in S$, quais são os P-subespaços $p(U, V)$ tais que $p(U, V) = p(U_0, V_0)$ para todo $u_0 \in S$? Nesta seção, estudamos o caso em que $S = Fu_0v_0$, sendo $u_0 \in U$ e $v_0 \in V$; isto é, S é uma reta de U , passando pela origem e na direção do vetor u_0v_0 . Lembrando que $(u_0v_0)^2 = 0$ (por (1.17)), consideremos um idempotente $e_0 = e + u_0v_0$; isto é, fixamos $\alpha = 1$ (pois isto facilita os cálculos sem afetar os resultados). A partir de (1.20), (1.21) e das Proposições 1 a 10 do Capítulo 5, obtemos as seguintes inclusões para os P-monômios de graus 1 até 4:

$$U_0 \subseteq U \oplus U(UV) \quad (7.1)$$

$$V_0 \subseteq (UV)V \oplus V \quad (7.2)$$

$$U_0V_0 \subseteq UV \oplus (UV)^2 \quad (7.3)$$

$$U_0(U_0V_0) \subseteq (UV)[U(UV)] \oplus U(UV) \quad (7.4)$$

$$(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus (UV)[(UV)V] \quad (7.5)$$

$$U_0^2 \subseteq (UV)U^2 \oplus U^2 \quad (7.6)$$

$$U_0^3 \subseteq U^3 \oplus (UV)U^3 \quad (7.7)$$

$$U_0^4 \subseteq (UV)U^4 \oplus U^4 \quad (7.8)$$

$$U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus (UV)(U^3V) \quad (7.9)$$

$$U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus (UV)\{U[U(UV)]\} \quad (7.10)$$

$$U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq (UV)\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V] \quad (7.11)$$

$$[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus (UV)\{[(UV)V]V\} \quad (7.12)$$

Lema 7.1 *Nas condições acima descritas, os seguintes P -subespaços do Grupo II são S -invariantes:*

14. $U \oplus U(UV)$
19. $(UV)V \oplus V$
25. $(UV)V \oplus U^2$
26. $U[U(UV)] \oplus U^2$
27. $U^3V \oplus U^2$
31. $UV \oplus U[(UV)V]$
35. $U^3 \oplus U[(UV)V]$
37. $(UV)V \oplus U(UV)$
39. $U^3V \oplus U(UV)$
46. $U^3V \oplus U^4$
48. $U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$
54. $[U^3 + (UV)V] \oplus V$
56. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V$
61. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2$
62. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
63. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
64. $UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
68. $[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V]$
71. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
74. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
76. $(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
77. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U[(UV)V]$
80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
83. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

Prova: Como já vimos no Capítulo 5, basta mostrarmos, em cada caso, que $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$, pois a inclusão contrária é obtida por simetria. Cada caso será identificado por seu correspondente número acima listado.

14. De (7.1) e (7.4), respectivamente, temos que $U_0 \subseteq U \oplus U(UV)$ e

$U_0(U_0V_0) \subseteq (UV)[U(UV)] \oplus U(UV) \subseteq U \oplus U(UV)$. Portanto, $U_0 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq U \oplus U(UV)$.

19. A inclusão $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus V$ segue de (7.5). Além disso, $V_0 \subseteq (UV)V \oplus V$ (por (7.2)) e assim $(U_0V_0)V_0 \oplus V_0 \subseteq (UV)V \oplus V$.

25. Novamente de (7.5), obtemos $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus U^2$ e de (7.6) segue que $U_0^2 \subseteq (UV)V \oplus U^2$, pois $U^2 \subseteq V$. Logo, $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0^2 \subseteq (UV)V \oplus U^2$.

26. De (7.10), segue que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus U^2$ e de (7.6) obtemos $U_0^2 \subseteq (UV)U^2 \oplus U^2 \subseteq U[U(UV)] \oplus U^2$, sendo esta última inclusão dada no diagrama da página 9. Dessa forma, $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0^2 \subseteq U[U(UV)] \oplus U^2$.

27. A inclusão $U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus U^2$ é consequência de (7.9). Por outro lado, de (7.6) segue que $U_0^2 \subseteq (UV)U^2 \oplus U^2 = U^3V \oplus U^2$, pelo Lema 3.1. Logo, $U_0^3V_0 \oplus U_0^2 \subseteq U^3V \oplus U^2$.

31. De (7.3) e do Lema 3.1 obtemos $U_0V_0 \subseteq UV \oplus (UV)^2 = UV \oplus U[(UV)V]$. Além disso, a inclusão $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq (UV)\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V] \subseteq UU^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq UV \oplus U[(UV)V]$ segue de (7.11) e de $U[(UV)V] \subseteq U^2 \subseteq V$. Portanto, $U_0V_0 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq UV \oplus U[(UV)V]$.

35. Como $U_0^3 \subseteq U^3 \oplus (UV)U^3$ (por (7.7)) e além disso $U^3 \subseteq UV$, segue que $(UV)U^3 \subseteq (UV)^2 = U[(UV)V]$ e portanto $U_0^3 \subseteq U^3 \oplus U[(UV)V]$. Por outro lado, de (7.11) obtemos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq (UV)U^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq U^3 \oplus U[(UV)V]$. Logo, $U_0^3 \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U^3 \oplus U[(UV)V]$.

37. A inclusão $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq (UV)V \oplus U(UV)$ segue de (7.4), (7.5) e de $U(UV) \subseteq V$ e $UV \subseteq U$.

39. De (7.9) e $U^3 \subseteq UV \subseteq U$ temos que $U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus U(UV)$. Por outro lado, $(UV)[U(UV)] \subseteq (UV)U^2 = U^3V$ e portanto, de (7.4), segue que $U_0(U_0V_0) \subseteq U^3V \oplus U(UV)$. Logo, $U_0^3V_0 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq U^3V \oplus U(UV)$.

46. Da identidade de Jacobi é fácil ver que $(UV)U^4 = U^5V$ e como $U^5 \subseteq U^3$, segue que $(UV)U^4 \subseteq U^3V$. Assim, de (7.8) e (7.9) temos que $U_0^3V_0 \oplus U_0^4 \subseteq [U^3V \oplus (UV)(U^3V)] + [U^3V \oplus U^4] \subseteq U^3V \oplus U^4$, sendo esta última inclusão consequência de $(UV)(U^3V) \subseteq UU^3 = U^4$.

48. De (7.10) e de $U[U(UV)] \subseteq U^3 \subseteq UV$ segue que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus (UV)U^3 \subseteq U[U(UV)] \oplus (UV)^2 = U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$, uma vez que $(UV)^2 = U[(UV)V]$. Por outro lado, de (7.11) e de $UV \subseteq U$, segue que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$. Dessa forma, $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$.

54. A inclusão $[U_0^3 + (U_0V_0)V_0] \oplus V_0 \subseteq [U^3 + (UV)V] \oplus V$ segue de (7.2), (7.5), (7.7) e de $(UV)[(UV)V] \subseteq U^2 \subseteq V$, $(UV)U^3 \subseteq U^4 \subseteq V$.

Nos próximas demonstrações, usaremos os casos provados acima. Faremos referência a eles usando o seu número (entre parêntesis).

56. Em (19) mostramos que $(U_0V_0)V_0 \oplus V_0 \subseteq (UV)V \oplus V$. Resta portanto analisarmos apenas $U_0[U_0(U_0V_0)]$. Mas de (7.10) segue que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus V$ e portanto $\{(U_0V_0)V_0 + U_0[U_0(U_0V_0)]\} \oplus V_0 \subseteq \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V$.

61. Basta usarmos (25) e (26).

62. Novamente usando (26), resta apenas estudarmos o P-monômio $[(U_0V_0)V_0]V_0$. Mas de (7.12), temos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^2$, e portanto $\{U_0[U_0(U_0V_0)] + (U_0V_0)V_0\} \oplus U_0^2 \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$.

63. Já vimos em (27) que $U_0^3V_0 \oplus U_0^2 \subseteq U^3V \oplus U^2$. Em (62) ficou mostrado que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^2$ e com isto obtemos a inclusão $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0^2 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$.

64. Usando (31), resta apenas analisarmos o P-monômio U_0^4 . De (7.8), segue que $U_0^4 \subseteq UV \oplus U^4$ (pois $UV \subseteq U$ e $U^4 \subseteq V$) e portanto $U_0V_0 \oplus$

$$\oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}.$$

68. De (7.5) segue que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus (UV)^2 = (UV)V \oplus U[(UV)V]$. Logo, de (35), temos $[U_0^3 + (U_0V_0)V_0] \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \subseteq [U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V]$.

71. Como $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus (UV)^2 = [(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$ (por (7.12)), de (35) obtemos $\{U_0^3 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$.

74. Já vimos, em (39), que $U_0^3V_0 \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq U^3V \oplus U(UV)$. Por outro lado, de (7.12), $[(U_0V_0)V_0]U_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$, uma vez que $(UV)V \subseteq UV \subseteq U$. Logo, $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq \{U^3V + + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$.

76. De (7.5) segue que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus (UV)^2 = (UV)V \oplus U[(UV)V]$. De (7.8), temos $U_0^4 \subseteq (UV)V \oplus U^4$ e finalmente, de (7.11), obtemos $U_0[(U_0V_0)V_0] \oplus (UV)V \oplus U[(UV)V]$. Portanto, $(U_0V_0)V_0 \oplus \oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq (UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$.

77. Em (48) vimos que $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus \oplus U[(UV)V]$. Além disso, de (7.5) segue que $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus (UV)^2$ e portanto $\{(U_0V_0)V_0 + U_0[U_0(U_0V_0)]\} \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \{(UV)V + + U[U(UV)]\} \oplus U[(UV)V]$.

80. Por (46), $U_0^3V_0 \oplus U_0^4 \subseteq U^3V \oplus U^4$. Por outro lado, de (7.11) obtemos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq (UV)U^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$.

83. Da demonstração de (71) segue que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus \oplus U[(UV)V]$ e em (48) mostramos que $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \subseteq U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$. Logo, $\{U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$.

89. Em (80) vimos que $U_0^3V_0 \oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq U^3V \oplus \{U^4 + + U[(UV)V]\}$. Resta analisarmos $[(U_0V_0)V_0]V_0$. Mas, novamente de (71).

temos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$ e portanto $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus \{U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0]\} \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. ■

Observemos que quando definimos os Grupos I e II, no Capítulo 5, dos 89 P-subespaços de grau ≤ 4 , 24 pertenciam ao Grupo I e 65 ao Grupo II. No caso particular que acabamos de estudar, no Grupo I há 49 P-subespaços e no Grupo II há 40 P-subespaços.

7.3 Problema 9: casos particulares

Mais complexo do que a questão anterior é o problema inverso: fixado um determinado P-subespaço, encontrar um subconjunto S_P do P-monômio U , com $0 \in S_P$, de modo que o P-subespaço $p(U, V)$ seja S_P -invariante. Aqui, para cada um dos P-subespaços do Grupo II, encontramos um subconjunto S de S_P para o qual $p(U, V)$ é S -invariante e em alguns casos foi possível determinar exatamente o conjunto S_P .

Lema 7.2 *Se $p(U, V) = U$, então $S_P = \text{ann}_U\{U\}$.*

Prova: De fato, temos $U_0 = \{u \oplus 2\lambda u_0u : u \in U\}$ e portanto $U_0 \subseteq U$ se e somente se $u_0u \in U \cap V = \{0\}$ para todo $u \in U$ e isto ocorre se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U\}$. ■

Lema 7.3 *Se $p(U, V) = V$, então $S_P = \text{ann}_U\{V\}$.*

Prova: Como $V_0 = \{-2\lambda u_0v \oplus v : v \in V\}$, temos que $V_0 \subseteq UV \oplus V$ e portanto $V_0 \subseteq V$ se e somente se $u_0v = 0$ para todo $v \in V$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{V\}$. ■

Lema 7.4 Se $p(U, V) = U^2$, então $S_P = \text{ann}_U\{U^2\}$.

Prova: Da Proposição 4, sabemos que o P-monômio U_0^2 é gerado pelos elementos da forma $y = -2\lambda u_0(uu_1) \oplus uu_1$ e portanto $y \in U^2$ se e somente se $u_0(uu_1) = 0$, para todos $u, u_1 \in U$, o que ocorre se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^2\}$. ■

Lema 7.5 Se $p(U, V) = UV$, então $S_P = \text{ann}_U\{UV\}$.

Prova: Um gerador de U_0V_0 é do tipo $y = [uv + 2\lambda^2 u_0^2(uv)] \oplus \oplus 2\lambda u_0(uv)$. Logo, $y \in UV$ se e somente se $u_0(uv) \in UV$, para todos $u \in U, v \in V$ e isto ocorre se e somente se $u_0(uv) = 0$, para todos $u \in U, v \in V$; ou seja, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{UV\}$. ■

Lema 7.6 Se $p(U, V) = U^3$, então $S_P = \text{ann}_U\{U^3\}$.

Prova: De fato, pela Proposição 5, temos que U_0^3 é gerado por elementos da forma $y = \{u_2(uu_1) + 2\lambda^2 u_0^2[u_2(uu_1)]\} \oplus 2\lambda u_0[u_2(uu_1)]$ e portanto $U_0^3 \subseteq U^3$ se e somente se $u_0[u_2(uu_1)] \in U^3 \cap V = 0$, para todos $u, u_1, u_2 \in U$, isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3\}$. ■

Lema 7.7 Se $S \subseteq \text{ann}_U\{U(UV)\}$, então $U(UV)$ é S -invariante.

Prova: Consideremos $u_0 \in S$ e mostremos que $U_0(U_0V_0) \subseteq U(UV)$. Um gerador de $U_0(U_0V_0)$ é do tipo $y = \{-2\lambda u_0[u_1(uv)] + 4\lambda^3 u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \oplus \oplus \{u_1(uv) - 2\lambda^2(u_1u_0^2)(uv)\}$ (pela Proposição 2) e de $u_0 \in \text{ann}_U\{U(UV)\}$, segue que $u_0[u_1(uv)] = u_0[(u_1u_0^2)(uv)] = 0$, uma vez que $(u_1u_0^2)(uv) \in U^3(UV) \subseteq U(UV)$. Portanto, $y = u_1(uv) - 2\lambda^2(u_1u_0^2)(uv) \in U(UV)$, o que mostra que $U(UV)$ é S -invariante. ■

Lema 7.8 Se $p(U, V) = (UV)V$, então $S_P = \text{ann}_U\{(UV)V\}$.

Prova: Seja y um gerador do P -subespaço $(U_0V_0)V_0$. Então, pela Proposição 3, $y = (uv)v_1 \oplus 2\lambda u_0[(uv)v_1]$ e portanto $y \in (UV)V$ se e somente se $u_0[(uv)v_1] \in (UV)V$ para todos $u \in U, v, v_1 \in V$. Dessa forma, $y \in (UV)V$ se e somente se $u_0[(uv)v_1] = 0$, para todos $u \in U, v, v_1 \in V$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{(UV)V\}$. ■

Lema 7.9 *Se $S \subseteq \text{ann}_U\{U^4\}$, então U^4 é S -invariante.*

Prova: Considerando $u_0 \in S$, teremos $u_0^2[u_2(uu_1)] = u_0\{u_0[u_2(uu_1)]\} = u_0\{u_3[u_2(uu_1)]\} = 0$. Dessa forma, da Proposição 6, segue que um gerador de U_0^4 é da forma $u_3[u_2(uu_1)]$, que obviamente é um elemento de U^4 e portanto $U_0^4 \subseteq U^4$, o que mostra que U^4 é S -invariante. ■

Lema 7.10 *Se $S \subseteq \text{ann}_U\{U[U(UV)]\}$, então $U[U(UV)]$ é S -invariante.*

Prova: Consideremos $u_0 \in S$ e y um gerador de $U_0[U_0(U_0V_0)]$. Então $u_0\{u_2[u_1(uv)]\} = u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\} = 0$ e como, além disso, $U^2(UV) = U^3V \subseteq U[U(UV)]$, segue que $u_0[(u_0u_1)(uv)] = 0$. Por outro lado, $u_0^2\{u_2[u_1(uv)]\} = -2u_0\{u_0\{u_2[u_1(uv)]\}\} = 0$ e de $J(u_0, u_2, u_0[(u_1u_0^2)(uv)]) = 0$, temos que $t = (u_0u_2)\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} = -u_0\{u_2\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\}\}$, uma vez que $u_0\{u_0[(u_1u_0^2)(uv)]\} \in u_0(u_0V) = 0$. Da identidade (4.4) aplicada aos elementos $u_2, u_0 \in U$ e $(u_1u_0^2)(uv) \in V$, segue que $t = u_0\{u_0\{u_2[(u_1u_0^2)(uv)]\}\} = 0$. Assim, pela Proposição 8, $y = u_2[u_1(uv)] \in U[U(UV)]$ e dessa forma $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)]$; ou seja, $U[U(UV)]$ é S -invariante. ■

Lema 7.11 *Se $p(U, V) = U[(UV)V]$, então $S_P = \text{ann}_U\{U[(UV)V]\}$.*

Prova: De fato, pela Proposição 9, um gerador de $U_0[(U_0V_0)V_0]$ é da forma $y = -2\lambda u_0\{u_1[(uv)v_1]\} \oplus u_1[(uv)v_1]$ e assim temos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[(UV)V]$ se e somente se $u_0\{u_1[(uv)v_1]\} \in U[(UV)V]$, para todos $u, u_1 \in U, v, v_1 \in V$, ou seja, se e somente se $u_0\{u_1[(uv)v_1]\} = 0$, para todos

$u, u_1 \in U, v, v_1 \in V$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U[(UV)V]\}$. ■

Lema 7.12 Se $p(U, V) = U^3V$, então $S_P = \text{ann}_U\{U^3V\}$.

Prova: Consideremos um gerador y do P -monômio $U_0^3V_0$. Então $y = [u_2(uu_1)]v \oplus 2\lambda u_0\{[u_2(uu_1)]v\}$ e daí segue que $U_0^3V_0 \subseteq U^3V$ se e somente se $u_0\{[u_2(uu_1)]v\} = 0$, para todos $u, u_1, u_2 \in U, v \in V$, o que ocorre se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3V\}$. ■

Lema 7.13 Se $p(U, V) = [(UV)V]V$, então $S_P = \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$.

Prova: Pela Proposição 10, um gerador de $[(U_0V_0)V_0]V_0$ é da forma $y = \{[(uv)v_1]v_2 + 2\lambda^2 u_0^2\{[(uv)v_1]v_2\}\} \oplus 2\lambda u_0\{[(uv)v_1]v_2\}$, e portanto segue que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V$ se e somente se $u_0\{[(uv)v_1]v_2\} \in [(UV)V]V$ para todos $u \in U, v, v_1, v_2 \in V$ e isto ocorre se e somente se $u_0\{[(uv)v_1]v_2\} = 0$, para todos $u \in U, v, v_1, v_2 \in V$; em outras palavras, $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V$ se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$. ■

Observação 3: Das Proposições 1 a 10, é fácil ver que para todo P -monômio $m(U, V)$, vale a inclusão $m(U_0, V_0) \subseteq m(U, V) \oplus p(U, V)$, para conveniente $p(U, V)$.

Observação 4: Consideremos três subespaços vetoriais A, B e C de uma mesma F -álgebra V . Afirmamos que $\text{ann}_A\{B + C\} = \text{ann}_A\{B\} \cap \text{ann}_A\{C\}$. De fato, denotando por 0_B e 0_C o vetor nulo de V visto como elemento de B e de C , respectivamente, e considerando elementos arbitrários $b \in B, c \in C$ e $x \in \text{ann}_A\{B + C\}$, teremos $xb = x(b + 0_C) = 0$, pois $b + 0_C \in B + C$. Logo, $x \in \text{ann}_A\{B\}$. Analogamente, mostra-se que $x \in \text{ann}_A\{C\}$ e portanto $x \in \text{ann}_A\{B\} \cap \text{ann}_A\{C\}$. Reciprocamente, se $y \in \text{ann}_A\{B\} \cap \text{ann}_A\{C\}$, considerando $x = b + c$ um elemento qualquer de $B + C$, teremos $yx = y(b + c) = yb + yc = 0$ e daí concluímos que

$$y \in \text{ann}_A\{B + C\}.$$

Observação 5: Para facilitar a leitura do texto, nos lemas a seguir manteremos para cada P-subespaço a correspondente numeração com a qual ele foi listado no Grupo II (Capítulo 5, página 78).

Observação 6: É claro que se $S \subseteq UV$, então os P-subespaços listados no Lema 7.1 são S-invariantes.

Lema 7.14 *Se $S \subseteq U^3$, então os seguintes P-subespaços do Grupo II são S-invariantes:*

$$15. U \oplus U^4$$

$$18. U^3 \oplus V$$

$$20. U[U(UV)] \oplus V$$

$$21. U^3V \oplus V$$

$$30. UV \oplus U^4$$

$$39. U^3V \oplus U(UV)$$

$$41. (UV)V \oplus U^4$$

$$46. U^3V \oplus U^4$$

$$56. \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V$$

$$61. \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2$$

$$67. [U^3 + (UV)V] \oplus U^4$$

$$70. \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^4$$

$$75. \{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^4$$

79. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
 80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
 82. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
 89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

Prova: Começemos observando que $U^3 \subseteq UV$ e portanto, se $u_0 \in U^3$, pelo Lema 7.1, os P-subespaços de números 39, 46, 56, 61, 80 e 89 são invariantes.

15. Seja $u_0 \in S$. Mostremos que $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$. De fato, se y é um gerador de U_0^4 , pela Proposição 6, $y \in U \oplus U^4$. Além disso, um gerador de U_0 é da forma $u \oplus 2\lambda u_0 u$ e como $u_0 \in U^3$, segue que $u \oplus 2\lambda u_0 u \in U \oplus U^4$ e portanto $U_0 \oplus U_0^4 \subseteq U \oplus U^4$. Ou seja, $U \oplus U^4$ é S-invariante.

18. De fato, da Proposição 5 é fácil ver que $U_0^3 \subseteq U^3 \oplus V$, para todo $u_0 \in U$. Assim, $U_0^3 \oplus V_0 \subseteq U^3 \oplus V$ se e somente se $V_0 \subseteq U^3 \oplus V$. Sejam, então, $u_0 \in S$ e y um gerador de V_0 . Então, por (1.21), $y = -2\lambda u_0 v \oplus v \in U^3V \oplus V \subseteq U^3 \oplus V$, o que mostra que $U^3 \oplus V$ é um P-subespaço S-invariante.

20. A inclusão $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus V$ é verdadeira para todo $u_0 \in U$, pela Proposição 8. Consideremos agora $u_0 \in S$ e $y = -2\lambda u_0 v \oplus v$ um gerador de V_0 . Então $y \in U^3V \oplus V \subseteq U[U(UV)] \oplus V$, uma vez que $U^3V \subseteq U[U(UV)]$. Dessa forma, $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$, para todo $u_0 \in S$ e portanto $U[U(UV)] \oplus V$ é S-invariante.

21. Seja $u_0 \in S$. Da Proposição 7 obtemos a inclusão $U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus V$. Por outro lado, se $y \in V_0$, então $y = -2\lambda u_0 v \oplus v \in U^3V \oplus V$ (pois $u_0 \in U^3$) e portanto $U^3V \oplus V$ é um P-subespaço S-invariante.

30. Analisando os geradores de U_0^4 dados pela Proposição 6, concluímos que $U_0^4 \subseteq UV \oplus U^4$. Por outro lado, da Proposição 1 segue que $U_0V_0 \subseteq$

$\subseteq UV \oplus u_0(UV)$ e portanto se $u_0 \in S \subseteq U^3$, teremos $u_0(UV) \subseteq U^4$ e daí obtemos $U_0V_0 \subseteq UV \oplus U^4$: ou seja, $UV \oplus U^4$ é S-invariante.

41. Consideremos $u_0 \in S$ e y_1, y_2 geradores de $(U_0V_0)V_0$ e U_0^4 , respectivamente. Pela Proposição 3, $y_1 \in (UV)V \oplus u_0[(UV)V] \subseteq (UV)V \oplus U^4$, pois $u_0 \in U^3$. Por outro lado, pela Proposição 6, $y_2 \in [(UV)V + u_0U^4] \oplus \oplus U^4$ e como $u_0 \in U^3 = U^2U \subseteq UV$, segue que $u_0U^4 \subseteq (UV)V$ e portanto $y_2 \in (UV)V \oplus U^4$. Logo, $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0^4 \subseteq (UV)V \oplus U^4$ e segue daí que o P-subespaço $(UV)V \oplus U^4$ é S-invariante.

67. Do Lema 2.6 sabemos que $U^3 \oplus U^4$ é um P-subespaço invariante sendo, portanto, S-invariante para todo S. Por outro lado, se $u_0 \in S$ e y é um gerador de $(U_0V_0)V_0$, da Proposição 3 segue que $y \in (UV)V \oplus \oplus u_0[(UV)V] \subseteq (UV)V \oplus U^4$, pois $u_0 \in U^3$. Assim, $[U_0^3 + (U_0V_0)V_0] \oplus \oplus U_0^4 \subseteq [(U^3 + (UV)V] \oplus U^4$ e isto mostra que este último P-subespaço é S-invariante.

70. Como no caso anterior, resta analisarmos apenas o P-monômio $[(U_0V_0)V_0]V_0$. Sejam $u_0 \in S$ e y um gerador de $[(U_0V_0)V_0]V_0$. Pela Proposição 10, $y \in [(UV)V]V \oplus u_0\{[(UV)V]V\} \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$, uma vez que $u_0 \in U^3$. Logo, $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$ e portanto $p(U, V)$ é S-invariante.

75. Já vimos que $(U_0V_0)V_0 \oplus U_0^4$ é S-invariante (vide (41)). Consideremos agora $u_0 \in S$ e y um gerador de $U_0[U_0(U_0V_0)]$. Da Proposição 8 temos que $y \in U[U(UV)] \oplus u_0\{U[U(UV)]\} \subseteq U[U(UV)] \oplus U^4$, pois $u_0 \in U^3$. Dessa forma, $\{(U_0V_0)V_0 + U_0[U_0(U_0V_0)]\} \oplus U_0^4 \subseteq \{(UV)V + + U[U(UV)]\} \oplus U^4$, e portanto este último subespaço é S-invariante.

79. Seja $u_0 \in S$. No caso anterior ficou mostrado que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq \subseteq U[U(UV)] \oplus U^4$. Já em (70) mostramos a inclusão $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$. Finalmente, se y é um gerador de U_0^4 , pela Proposição 6 e de $u_0 \in U^3$, temos que $y \in u_0U^4 \oplus U^4 \subseteq U^3V \oplus U^4 \subseteq U[U(UV)] \oplus \oplus U^4$ (sendo esta inclusão consequência do diagrama da página 9). Logo,

$p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$ e portanto $p(U, V)$ é S -invariante.

82. Consideremos $u_0 \in S$. De (46), temos que $U_0^3 V_0 \oplus U_0^4 \subseteq U^3 V \oplus U^4$. Basta, então, analisarmos o P -monômio $[(U_0 V_0) V_0] V_0$. Mas em (70) já vimos que $[(U_0 V_0) V_0] V_0 \subseteq [(UV) V] V \oplus U^4$, o que implica em $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$ e portanto $p(U, V)$ é S -invariante. ■

Lema 7.15 *Se $S \subseteq (UV)V$, então os seguintes P -subespaços do Grupo II são S -invariantes:*

- 16. $U \oplus U[(UV)V]$
- 22. $[(UV)V]V \oplus V$
- 28. $[(UV)V]V \oplus U^2$
- 40. $[(UV)V]V \oplus U(UV)$
- 51. $[(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$
- 81. $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

Prova: 16. Da Proposição 9 segue que $U_0[(U_0 V_0) V_0] \subseteq U \oplus U[(UV)V]$. Resta analisarmos o P -monômio U_0 . Mas se $u_0 \in (UV)V$ e y é um gerador de U_0 , então $y = u \oplus 2\lambda u_0 u \in U \oplus U[(UV)V]$ e portanto $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$, o que implica em $p(U, V)$ ser S -invariante.

22. Temos que $[(U_0 V_0) V_0] V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus V$, para todo $u_0 \in U$ (pela Proposição 10). Além disso, se $u_0 \in S$ e y é um gerador de V_0 , então $y = -2\lambda u_0 v \oplus v \in [(UV)V]V \oplus V$, o que implica em $[(U_0 V_0) V_0] V_0 \oplus U_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus V$ e portanto $[(UV)V]V \oplus V$ é S -invariante.

28. A inclusão $[(U_0 V_0) V_0] V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^2$ é sempre verdadeira, pela Proposição 10. Por outro lado, dado $u_0 \in S$, pela Proposição 4, um gerador de U_0^2 é da forma $y = -2\lambda u_0(uu_1) \oplus uu_1$. Como $u_0 \in (UV)V$,

segue que $u_0(uu_1) \in [(UV)V]U^2 \subseteq [(UV)V]V$ e assim $y \in [(UV)V]V \oplus \oplus U^2$, o que mostra que $[(UV)V]V \oplus U^2$ é um P -subespaço S -invariante.

40. Pela Proposição 10, a inclusão $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$ vale sempre. Consideremos agora $u_0 \in S$ e y um gerador de $U_0(U_0V_0)$. Então, pela Proposição 2, $y \in u_0[U(UV)] \oplus U(UV) \subseteq u_0V \oplus U(UV) \subseteq \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$, pois $u_0 \in (UV)V$. Dessa forma, $[(U_0V_0)V_0]V_0 \oplus \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq [(UV)V]V \oplus U(UV)$, ou seja, $p(U, V)$ é S -invariante.

51. A inclusão $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$ é sempre verdadeira, pela Proposição 10. Por outro lado, consideremos $u_0 \in S$. Pela Proposição 9 segue que $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq u_0\{U[(UV)V]\} \oplus U[(UV)V] \subseteq \subseteq [(UV)V]U^2 \oplus U[(UV)V] \subseteq [(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$, uma vez que $u_0 \in \in (UV)V$. Logo, $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$ e portanto $p(U, V)$ é S -invariante.

81. Usando o resultado do item anterior, basta mostrarmos que se $u_0 \in S$, então $U_0^4 \subseteq [(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$. Mas da Proposição 6 segue que $U_0^4 \subseteq \{[(UV)V]V + u_0U^4\} \oplus U^4 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$, pois $u_0U^4 \subseteq [(UV)V]U^4 \subseteq [(UV)V]V$ e isto mostra que também o P -subespaço $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ é S -invariante. ■

Lema 7.16 *Se $S \subseteq U^3 \cup (UV)V$, então os seguintes P -subespaços do Grupo II são S -invariantes:*

$$53. U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$$

$$55. \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V$$

$$57. \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V$$

$$58. \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus V$$

$$62. \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$$

$$63. \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$$

$$74. \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$$

Prova: 53. É claro que $U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$ (veja Observação 3, página 116). Por outro lado, dado um gerador y do P -monômio U_0 , de (1.20) segue que $y \in U \oplus u_0U$. Dessa forma, se $u_0 \in U^3$, então $u_0U \subseteq U^4$ e se $u_0 \in (UV)V$ teremos $u_0U \in U[(UV)V]$. Logo, para todo $u_0 \in S$, temos $U_0 \subseteq U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$, o que mostra que este último P -subespaço é S -invariante.

55, 57 e 58. Novamente pela Observação 3 acima citada, obtemos as três seguintes inclusões: $U_0^3 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$; $U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$ e $U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$. Considerando, agora, $u_0 \in S$ e y um gerador de V_0 , de (1.21) segue que $y \in u_0V \oplus \oplus V$. Dessa forma, se $u_0 \in U^3$ então $u_0V \subseteq U^3V \subseteq U[U(UV)] \subseteq U^3$. Por outro lado, se $u_0 \in (UV)V$, teremos $u_0V \subseteq [(UV)V]V$ e daí concluimos que $\{U_0^3 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus \oplus V_0 \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$; $\{U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus \oplus V_0 \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$ e $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus \oplus V_0 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \oplus V$, o que mostra que os P -subespaços de números 55, 57 e 58 são S -invariantes.

62 e 63. Das Proposições 8 e 10, obtemos a inclusão $U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$. Por outro lado, das Proposições 7 e 10, segue a inclusão $U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$. Consideremos, agora, $u_0 \in S$ e y um gerador de U_0^2 . Então, pela Proposição 4, $y \in u_0U^2 \oplus U^2$. Assim, se $u_0 \in U^3$, teremos $u_0U^2 \subseteq U^3U^2 \subseteq U^3V \subseteq U[U(UV)]$. Além disso, se $u_0 \in (UV)V$, então $u_0U^2 \subseteq [(UV)V]U^2 \subseteq [(UV)V]V$. Em outras palavras, $\{U_0[U_0(U_0V_0)] + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0^2 \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \oplus U^2$ e $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0^2 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$, o que mostra que os P -subespaços de números 62 e 63 são S -invariantes.

74. Novamente das Proposições 7 e 10, obtemos $U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$. Sejam, agora, $u_0 \in S$ e y um gerador de $U_0(U_0V_0)$. Da Proposição 2 segue que $y \in u_0[U(UV)] \oplus U(UV)$. Assim, se $u_0 \in U^3$, teremos $u_0[U(UV)] \subseteq U^3[U(UV)] \subseteq U^3V$ e se por outro lado

$u_0 \in (UV)V$, então $u_0[U(UV)] \subseteq [(UV)V][U(UV)] \subseteq [(UV)V]V$. Logo, $\{U_0^3V_0 + [(U_0V_0)V_0]V_0\} \oplus U_0(U_0V_0) \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$, o que mostra que este último subespaço é S -invariante. ■

Lema 7.17 *Se $p(U, V) = U^3 + (UV)V$ então $S_p = \text{ann}_U\{U^3\} \cap \text{ann}_U\{(UV)V\}$.*

Prova: De fato, pelas Proposições 3 e 5, obtemos $U_0^3 + (U_0V_0)V_0 \subseteq (U^3 \oplus u_0U^3) + \{(UV)V \oplus u_0[(UV)V]\} \subseteq U^3 + (UV)V$ se e somente se $0 = u_0[U^3 + (UV)V]$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3 + (UV)V\} = \text{ann}_U\{U^3\} \cap \text{ann}_U\{(UV)V\}$. ■

Lema 7.18 *Se $p(U, V) = U^3 + [(UV)V]V$ então $S_p = \text{ann}_U\{U^3\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$.*

Prova: De fato, pelas Proposições 5 e 10, obtemos $U_0^3 + [(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq (U^3 \oplus u_0U^3) + \{[(UV)V]V \oplus u_0\{[(UV)V]V\}\} \subseteq \{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus u_0\{U^3 + [(UV)V]V\} \subseteq U^3 + [(UV)V]V$ se e somente se $0 = u_0\{U^3 + [(UV)V]V\}$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3 + [(UV)V]V\}$ ou seja, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$. ■

Lema 7.19 *Se $p(U, V) = (UV)V + U[U(UV)]$ então $S_p = \text{ann}_U\{(UV)V\} \cap \text{ann}_U\{U[U(UV)]\}$.*

Prova: Inicialmente observemos que, pelas Proposições 3 e 8, respectivamente, temos $(U_0V_0)V_0 \subseteq (UV)V \oplus u_0[(UV)V]$ e $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus u_0\{U[U(UV)]\}$. Dessa forma, $u_0 \in S_p$ se e somente se $(U_0V_0)V_0 + U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq (UV)V + U[U(UV)]$ e isto ocorre se e somente se $u_0[(UV)V] + u_0\{U[U(UV)]\} = u_0\{(UV)V + U[U(UV)]\} = 0$; isto é, se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{(UV)V + U[U(UV)]\} = \text{ann}_U\{(UV)V\} \cap \text{ann}_U\{U[U(UV)]\}$. ■

Lema 7.20 Se $S \subseteq (UV)V \cap U^3$ então $p(U, V) = [(UV)V]V \oplus U^4$ é S -invariante.

Prova: Seja $u_0 \in S$. Da Proposição 10, temos que $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus u_0\{[(UV)V]V\} \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$, uma vez que $u_0 \in U^3$. Por outro lado, da Proposição 6 segue que $U_0^4 \subseteq \{[(UV)V]V + u_0U^4\} \oplus U^4 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$, pois $u_0 \in (UV)V$ e $U^4 \subseteq V$. Logo, $[(U_0V_0)V_0]V_0 \oplus U_0^4 \subseteq [(UV)V]V \oplus U^4$, o que mostra que este último P -subespaço é S -invariante. ■

Lema 7.21 Se $S \subseteq \text{ann}_U\{U(UV)\} \cup UV$, então $p(U, V) = U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$ é S -invariante.

Prova: De fato, pela Proposição 9 temos $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$. Por outro lado, segue da Proposição 8 que $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus u_0\{U[U(UV)]\}$. Mostremos que, se $u_0 \in \text{ann}_U\{U(UV)\} \cup UV$, então $u_0\{U[U(UV)]\} \subseteq U[(UV)V]$. Para isso, consideremos $u_0 \in \text{ann}_U\{U(UV)\}$ e $u_1[u_2(uv)]$ um gerador de $U[U(UV)]$. Da identidade (4.4) aplicada a u_0 , $u_1 \in U$ e $u_2(uv) \in V$, temos $u_0\{u_1[u_2(uv)]\} = -u_1\{u_0[u_2(uv)]\} = 0$, pois $u_0[u_2(uv)] = 0$ e assim, $0 = u_0\{u_1[u_2(uv)]\} \in U[(UV)V]$. Finalmente, tomando $u_0 \in UV$, segue que $u_0\{U[U(UV)]\} \subseteq (UV)(UV) = (UV)^2 = U[(UV)V]$. Portanto, se $S \subseteq \text{ann}_U\{U(UV)\} \cup UV$, então $U_0[U_0(U_0V_0)] \oplus U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$, o que mostra que este último P -subespaço é S -invariante. ■

Lema 7.22 Se $p(U, V) = U[U(UV)] + [(UV)V]V$, então $S_p = \text{ann}_U\{U[U(UV)]\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$.

Prova: De fato, das Proposições 8 e 10, respectivamente, obtemos as inclusões $U_0[U_0(U_0V_0)] \subseteq U[U(UV)] \oplus u_0\{U[U(UV)]\}$ e $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus u_0\{[(UV)V]V\}$. Dessa forma, $u_0 \in S_p$ se e somente se $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$; isto é, se e somente se $u_0\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \subseteq \{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \cap V$, ou seja, se e somente se $u_0\{U[U(UV)] +$

$+ [(UV)V]V\} = 0$, o que ocorre se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} = \text{ann}_U\{U[U(UV)]\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$. ■

Lema 7.23 *Se $p(U, V) = U^3V + [(UV)V]V$, então $S_P = \text{ann}_U\{U^3V\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$.*

Prova: Das Proposições 7 e 10, respectivamente, obtemos as inclusões $U_0^3V_0 \subseteq U^3V \oplus u_0(U^3V)$ e $[(U_0V_0)V_0]V_0 \subseteq [(UV)V]V \oplus u_0\{[(UV)V]V\}$. Portanto, $u_0 \in S_P$ se e somente se $p(U_0, V_0) \subseteq p(U, V)$ e isto ocorre se e somente se $u_0\{U^3V + [(UV)V]V\} \subseteq \{U^3V + [(UV)V]V\} \cap V$; ou seja, se e somente se $u_0\{U^3V + [(UV)V]V\} = 0$, o que ocorre se e somente se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^3V + [(UV)V]V\} = \text{ann}_U\{U^3V\} \cap \text{ann}_U\{[(UV)V]V\}$. ■

Lema 7.24 *Se $S \subseteq \text{ann}_U\{U^4\} \cap \text{ann}_U\{U[(UV)V]\}$, então $p(U, V) = U^4 + U[(UV)V]$ é S -invariante.*

Prova: Das Proposições 6 e 9, respectivamente, obtemos as inclusões $U_0^4 \subseteq u_0U^4 \oplus U^4$ e $U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq u_0U[(UV)V] \oplus U[(UV)V]$. Logo, se $u_0 \in \text{ann}_U\{U^4\} \cap \text{ann}_U\{U[(UV)V]\}$, segue que $U_0^4 + U_0[(U_0V_0)V_0] \subseteq U^4 + U[(UV)V]$, e portanto este último P -subespaço é S -invariante. ■

Apêndice

Neste apêndice, colocamos a lista completa dos 89 subespaços polinomiais que obtivemos considerando os P-subespaços obtidos a partir dos P-monômios de graus menores ou iguais a 4. São eles:

1. U
2. V
3. U^2
4. UV
5. U^3
6. $U(UV)$
7. $(UV)V$
8. U^4
9. $U[U(UV)]$
10. $U[(UV)V]$
11. U^3V
12. $[(UV)V]V$
13. $U \oplus U^2$
14. $U \oplus U(UV)$
15. $U \oplus U^4$
16. $U \oplus U[(UV)V]$
17. $UV \oplus V$
18. $U^3 \oplus V$
19. $(UV)V \oplus V$

20. $U[U(UV)] \oplus V$
21. $U^3V \oplus V$
22. $[(UV)V]V \oplus V$
23. $UV \oplus U^2 = N^2$
24. $U^3 \oplus U^2$
25. $(UV)V \oplus U^2$
26. $U[U(UV)] \oplus U^2$
27. $U^3V \oplus U^2$
28. $[(UV)V]V \oplus U^2$
29. $UV \oplus U(UV)$
30. $UV \oplus U^4$
31. $UV \oplus U[(UV)V]$
32. $U^3 \oplus U(UV)$
33. $U^3 + (UV)V$
34. $U^3 \oplus U^4$
35. $U^3 \oplus U[(UV)V]$
36. $U^3 + [(UV)V]V$
37. $(UV)V \oplus U(UV)$
38. $U[U(UV)] \oplus U(UV)$
39. $U^3V \oplus U(UV)$
40. $[(UV)V]V \oplus U(UV)$
41. $(UV)V \oplus U^4$
42. $(UV)V + U[U(UV)]$
43. $(UV)V \oplus U[(UV)V]$
44. $U[U(UV)] \oplus U^4$
45. $U^4 + U[(UV)V]$
46. $U^3V \oplus U^4$
47. $[(UV)V]V \oplus U^4$
48. $U[U(UV)] \oplus U[(UV)V]$
49. $U[U(UV)] + [(UV)V]V$
50. $U^3V \oplus U[(UV)V]$
51. $[(UV)V]V \oplus U[(UV)V]$
52. $U^3V + [(UV)V]V$

53. $U \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
54. $[U^3 + (UV)V] \oplus V$
55. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus V$
56. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus V$
57. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus V$
58. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus V$
59. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^2$
60. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
61. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^2$
62. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
63. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^2$
64. $UV \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
65. $[U^3 + (UV)V] \oplus U(UV) = N^3$
66. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
67. $[U^3 + (UV)V] \oplus U^4$
68. $[U^3 + (UV)V] \oplus U[(UV)V]$
69. $U^3 \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
70. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
71. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
72. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U(UV)$
73. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
74. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U(UV)$
75. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U^4$
76. $(UV)V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
77. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus U[(UV)V]$
78. $U[U(UV)] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
79. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
80. $U^3V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
81. $[(UV)V]V \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
82. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U^4$
83. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
84. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus U[(UV)V]$
85. $[U^3 + (UV)V] \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

- 86. $\{U^3 + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 87. $\{(UV)V + U[U(UV)]\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$
- 88. $\{U[U(UV)] + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\} = N^4$
- 89. $\{U^3V + [(UV)V]V\} \oplus \{U^4 + U[(UV)V]\}$

Bibliografia

- [1] ABRAHAM, V. M., *A note on train algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2) **20** 53-58 (1976).
- [2] BENAVIDES, R., *Associative bilinear forms in T-algebras of rank 3*. (preprint).
- [3] BENAVIDES, R., *Sobre as t-álgebras de posto 3 e questões correlatas*, Tese de Doutorado, IME-USP, 1995.
- [4] BENAVIDES, R., COSTA, R. and MALLOL, C., *Weak isotopy in train algebras*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra (to appear)
- [5] BENAVIDES, R., MALLOL, C., *Peirce transformations in train algebras of rank 3*. (preprint).
- [6] COSTA, R., *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* , Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **33** 61-70 (1990).
- [7] COSTA, R., *On train algebras of rank 3*, Linear Algebra and its Applications **148** 1-12 (1991).
- [8] COSTA, R., GUZZO, Jr H. and VICENTE, P., *Shape identities in train algebras of rank 3*. (submetido).
- [9] COSTA, R., SUAZO, A., *The multiplication algebra of a train algebra of rank 3*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra, vol. **5**, n.3, 287-298 (1996).

- [10] Díaz, M. C. L., *Superálgebras de Bernstein y sus supermódulos*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, 1997.
- [11] ETHERINGTON, I. M. H., *On non-associative combinations*, Proceedings Royal Society Edinburgh. **59** 153-162 (1939).
- [12] ETHERINGTON, I. M. H., *Genetic algebras*, Proceedings Royal Society Edinburgh **59** 242-258 (1939).
- [13] ETHERINGTON, I. M. H., *Special train algebras*, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford), vol **12** 1-8 (1941).
- [14] ETHERINGTON, I. M. H., *Commutative train algebras of ranks 2 and 3*, Journal of London Mathematical Society **15** 136-149 (1940) Corrigendum ibid **20** 238 (1945).
- [15] ETHERINGTON, I. M. H., *Non-commutative train algebras of ranks 2 and 3*, Proceedings of the London Mathematical Society (2) **52** 241-252 (1951).
- [16] GUZZO, Jr H., *The Peirce decomposition for commutative train algebras*, Communications in Algebra **22** (14) 5745-5757 (1994).
- [17] GUZZO, Jr H., *The bar radical of baric algebras*, Archives of Mathematics vol. **67** 106-118 (1996).
- [18] GUZZO, Jr H., *Embedding nil algebras in train algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **37** 463-470 (1994).
- [19] GUZZO, Jr H., *On normal and composition series for baric algebras*, Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra 4(1) 25-38 (1995).
- [20] GUZZO, Jr H., VICENTE P., *Some properties of commutative train algebras of rank 3*, Communications in Algebra (to appear).

- [21] GUZZO, Jr H., VICENTE, P., *Train algebras of rank n which are Bernstein or power-associative algebras*. Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra (to appear).
- [22] HOLGATE, Ph., *Free non-associative principal train algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **27** 313-319 (1984).
- [23] HOLGATE, Ph., *Some train algebras that are special triangular*, The Mathematics Student **55** (2-4) 135-139 (1987).
- [24] HOLGATE, Ph., *A train algebra that is not special triangular*, Archives of Mathematics **50** 122-124 (1988).
- [25] LYUBICH, Yu. I., *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics **22**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [26] OUATTARA, M., *Sur les T -algèbres de Jordan*, Linear Algebra and its Applications **144** 11-21 (1991).
- [27] OUATTARA, M., *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T -algèbres*, Linear Algebra and its Applications **148** 171-178 (1991).
- [28] REED, M. L., *Algebraic Structure of Genetic Inheritance*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society vol. **34**, n. 2, April 1997, 107-130
- [29] SCHAFER, R. D., *Structure of genetic algebras*, American Journal of Mathematics **71** 121-135 (1949).
- [30] SCHAFER, R. D., *Introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, (1966).
- [31] SUAZO, A., *Train algebras de rango 3*. (preprint).
- [32] WALCHER, S., *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers*, Archives of Mathematics **56** 547-551 (1991).
- [33] WALCHER, S., *On Bernstein algebras which are train algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **35** 159-166 (1992).

- [34] WALCHER, S., *Algebras of rank three*. S. Gonzalez (ed.): Nonassociative algebra and its applications. Mathematics and its Applications **303**, Kluwer, Dordrecht (1994).
- [35] WALKHOFF, A., *Algèbres de Composition Faible*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier, 1996.
- [36] WÖRZ, A., *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomathematics **36**, Berlin-Heidelberg-New York (1980).
- [37] ZHEVLAKOV, K. A., SLINKO A. M., SHESTAKOV I. P., SHIRSKOV A. I., *Rings that are nearly associative*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press (1982).