**Unidades Hipercentrais em
Anéis de Grupo**

Edson Ryoji Okamoto Iwaki

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

-São Paulo, 5 de Julho de 2000-

Unidades Hipercentrais em Anéis de Grupo

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida
defendida por Edson Ryoji Okamoto Iwaki
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 5 de Julho de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies - IME - USP
- Prof. Dr. Nivaldo Nunes de Medeiros Junior - UFF

Aos meus pais e irmãos
e em memória do meu avô Tsuneyasu Okamoto

Agradecimentos

A Deus que me fortaleceu e me animou nos momentos de dificuldade.

Inicialmente gostaria de dizer que somente tenho palavras de elogios e agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans, o qual além de nos orientar, sempre nos incentivou a ver mais além. Agradeço a sua paciência e incentivo durante este período.

Aos meus pais, Mituko e Tatu; irmãos Leonardo, Yurika e Erika e parentes, agradeço por tudo o que fizeram até aqui.

Ao Gláucio, Clézio, Walter, Nelson pela amizade e aos colegas de graduação, mestrado e doutorado, gostaria de expressar os meus agradecimentos.

Ao amigo Antônio Calixto pelos seminários e pelas discussões sempre proveitosas.

Aos professores Profa. Dra. Carmen Silvia Cardassi, Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa e Profa. Maria Lúcia Sobral Singer pelas oportunidades de Iniciação Científica. Em particular à saudosa Profa. Dra. Carmen Silvia Cardassi pela sua extrema dedicação e atenção durante o período em que me orientou.

Aos professores do IME por sua dedicação.

Gostaria de expressar também o meu agradecimento a profa. Eliane Hosokawa Imayuki pela leitura do manuscrito.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Grande parte dos problemas em Anéis de Grupo centraliza-se em torno do estudo do seu grupo de unidades. Torna-se importante então conhecermos a estrutura do grupo de unidades de um anel de grupo $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. No entanto, salvo raras exceções, pouco se conhece acerca da estrutura de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Uma das idéias para se conhecer um pouco mais sobre a estrutura do grupo de unidades seria estudarmos a sua série central superior.

No caso em que o grupo G é finito, um resultado de Gruenberg pode ser usado para mostrar que a série central superior de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ estaciona. Este fato nos possibilita estudarmos o hipercentro de $\mathcal{U}$.

A fim de obter mais informações sobre as unidades hipercenrais de $\mathcal{U}$, nós necessitamos de uma descrição dos subgrupos de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$, o qual obtemos através dos resultados de Bovdi sobre os subgrupos normais periódicos de $\mathcal{U}$.

Neste momento, surgem algumas perguntas, as quais procuraremos expor neste trabalho. Entre elas: O limitante superior para a série central superior de $\mathcal{U}$ depende do grupo G ? Como determinar a altura central superior de $\mathcal{U}$? Neste momento é interessante salientarmos como a Conjectura do Normalizador nos possibilita obtermos uma estimativa para a altura central de $\mathcal{U}$. Todas estas perguntas são respondidas no capítulo 4, como resultado dos trabalhos de Arora, Hales, Passi que nos garantem que neste caso a altura central de $\mathcal{U}$ é no máximo 2. Embora a demonstração original deste fato, devido a Arora, Hales e Passi, não tenha utilizado a Conjectura do Normalizador, tomamos neste trabalho a idéia de supormos um provável caminho que levasse a este resultado obtendo estimativas para a altura central de $\mathcal{U}$ utilizando a Conjectura do Normalizador e um teorema de Gross. Nosso intuito com isso foi o de conectarmos a resolução do problema em questão com um problema de pesquisa intensa atual na área, ou seja, a Conjectura do Normalizador.

Nesse caso, surge mais uma pergunta: Quais os grupos G tais que $\mathcal{U}$ admite altura central exatamente 0, 1 ou 2? Pergunta que é respondida por Arora, Hales e Passi também.

Finalmente, mais um resultado de Arora, Hales e Passi nos mostram uma caracterização do hipercentro de $\mathcal{U}$ que surpreendentemente bate com a estimativa dada pela Conjectura do Normalizador.

É interessante notar aqui o aparecimento da Conjectura do Normalizador tanto para obtermos uma estimativa da altura central de $\mathcal{U}$ como na caracterização do hipercentro de $\mathcal{U}$.

No capítulo 5 apresentamos a generalização dos resultados de Arora, Hales e Passi para o caso em que o grupo G é periódico, cujos resultados se devem basicamente a Y.Li.

No caso em que o grupo G é periódico, Li mostrou que a altura central de $\mathcal{U}$ é no máximo 2. E introduzindo o conceito de n –centro de um grupo, obtém-se uma caracterização do n –centro de $\mathcal{U}$ em função dos resultados sobre o hipercentro do grupo de unidades.

Abstract

A great deal of problems in Group Rings centralize around the study of its group of units. Hence it becomes important to know the structure of the group of units $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. But with a few exceptions, we do not have much information about its structure. Trying to obtain more information about the structure of $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, we could, for example, study the upper central series of $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

In case G is finite, a result of Gruenberg implies that $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ has finite central height. This fact allow us to study the hypercenter of $\mathcal{U}$.

In order to obtain more information about the hypercentral units of $\mathcal{U}$ we need a description of the torsion subgroup of the hypercenter of $\mathcal{U}$ which is provided by results of Bovdi on periodic normal subgroups of $\mathcal{U}$.

Gruenberg's result suscites some questions which we will try to answer in this work. Among them: The upper bound for the upper central serie of $\mathcal{U}$ depends on of the group G ? How could we determine the central height of $\mathcal{U}$? It is interesting to see how we could obtain an estimative for the central height of $\mathcal{U}$ using the Normalizer Conjecture. All these questions are answered in chapter 4, as a consequence of Arora, Hales and Passi's work which guarantees us that in this case the central height of $\mathcal{U}$ is at most 2. Nevertheless this result of Arora, Hales and Passi doesn't use the Normalizer Conjecture, we suppose here that the Normalizer Conjecture holds and used a result of Gross to obtain estimatives to the central height of $\mathcal{U}$. Our aim was to connect the question discussed ahead with a intensive research problem, the Normalizer Conjecture.

This arises the following question: For which groups does $\mathcal{U}$ have central height exactly 0, 1 or 2? This question is also answered by Arora, Hales and Passi.

Finally, another result of Arora, Hales and Passi present us a characterization of the hypercenter of $\mathcal{U}$, which surprisingly satisfies the condition presented in the Normalizer Conjecture.

It is interesting to observe here the appearing of Normalizer Conjecture to obtain an estimative for the central height of $\mathcal{U}$ and to obtain a characterization of the hypercenter of $\mathcal{U}$.

In chapter 5 we present a result of Li which generalizes the result of Arora, Hales and Passi to the case when G is a periodic group. He proves that the central height of $\mathcal{U}$ is also at most 2. Introducing the concept of n -center he was able to use the results about the hypercenter of $\mathcal{U}$ to obtain a characterization of the n -center of $\mathcal{U}$.

Notação

$ G $	ordem do grupo G
$o(h)$	ordem do elemento h
$H < G$	H subgrupo de G
$H \triangleleft G$	H subgrupo normal de G
$A \times B$	produto direto dos grupos A e B
$Z(G), \mathcal{Z}(G)$	centro do grupo G
$N_G(H), \mathcal{N}_G(H)$	normalizador de H em G
$Aut(X)$	o conjunto dos automorfismos de X , onde X denota um grupo ou anel
$Inn(X)$	o conjunto dos automorfismos internos de X , onde X denota um grupo ou anel
$Out(X)$	o conjunto dos automorfismos externos de X , onde X denota um grupo ou anel
$C_G(H)$	o centralizador de H em G
$H^1(Y, G)$	primeiro grupo de cohomologia de Y com coeficientes em G
$S_p(G), Syl_p(G)$	p -subgrupo de Sylow de G
$GL(n, F)$	grupo linear geral de grau n sobre o corpo F
$SL(n, F)$	grupo linear especial = $\{g \in GL(n, F) \mid \det(g) = 1\}$
$Tri(n, F)$	grupo triangular = $\{(g_{ij}) \in GL(n, F) \mid g_{ij} = 0 \text{ para } i < j\}$
$Tri_1(n, F)$	grupo unitriangular = $\{(g_{ij}) \in Tri(n, F) \mid g_{ii} = 1 \text{ para } i \neq j\}$
$diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$	matriz diagonal de ordem n com elementos $a_{11}, \dots, a_{nn}$
$D(n, F)$	o grupo diagonal = $\{(g_{ij}) \in GL(n, F) \mid g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j\}$
π	conjunto de inteiros primos
$O_\pi(G)$	o único π -subgrupo normal maximal de G , e $\{e\}$ caso G seja um grupo simples
$O_{\pi, \pi'}(G)$	a imagem inversa em G do único π' -subgrupo normal maximal $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$
em $G/O_\pi(G)$	
$T(G)$	subgrupo dos elementos de torção do grupo G
G'	grupo derivado de G
$[h, k]$	comutador dos elementos h e k
$[H, K]$	grupo gerado pelos comutadores $[h, k]$, $h \in H, k \in K$
$R(G)$	intersecção dos subgrupos não-normais do grupo G
$tr(g)$	traço da matriz g
$car(K)$	característica do corpo K
$\bar{F}$	fecho algébrico do corpo K
F^*	grupo multiplicativo do corpo K
$[h, {}_s g]$	s -Engel elemento à direita
$R_m(G)$	conjunto dos m -Engel elementos à direita

RG	anel de grupo RG
$supp(\alpha)$	suporte do elemento $\alpha \in RG$
ϵ	homomorfismo de aumento do anel de grupo RG
$\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$	grupo de unidades do anel de grupo $\mathbb{Z}G$
$\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	grupo de unidades com aumento 1 do anel de grupo $\mathbb{Z}G$
$\tilde{Z}(G)$	hipercentro do grupo G
$[x, y]$	produto de Lie dos elementos x e y
$[\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$	grupo aditivo de $\mathbb{Z}G$ formado pelos produtos de Lie $[x, y], x, y \in \mathbb{Z}G$
$Z(G, n)$	n -centro do grupo G
$I_S(R)$	o conjunto dos elementos de S que são inteiros sobre R

Sumário

1	Preliminares	13
1.1	Alguns resultados sobre Anéis de Grupo	13
1.2	Alguns resultados sobre Teoria dos Anéis, Módulos e Álgebras	19
1.2.1	Tópicos em teoria de representação de grupos	20
2	Um resultado de Gruenberg	21
2.1	Notação, alguns resultados e definições	21
2.2	Alguns resultados e definições	22
2.3	O teorema de Gruenberg	26
3	Caracterização dos subgrupos normais de torção de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico G	29
3.1	Alguns resultados iniciais	29
3.2	Subgrupos Normais Periódicos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	31
3.2.1	Subgrupos Normais Periódicos Não-Abelianos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	32
3.2.2	Subgrupos Normais Periódicos Abelianos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	35
3.2.3	Estrutura dos grupos periódicos G tais que $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ contém um subgrupo normal periódico abeliano não-central	45
3.3	Um teorema de Bovdi	47
4	A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo finito	49
4.1	A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é finita	49

4.2	Uma estimativa para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ utilizando a Conjectura do Normalizador	51
4.2.1	Notação e algumas definições	51
4.2.2	A estimativa para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	52
4.3	A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2	54
4.4	Uma caracterização do segundo centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	60
4.4.1	O teorema de classificação de p -grupos de Blackburn	60
4.4.2	A Conjectura do Normalizador para grupos G tais que $R(G)$ não é trivial	61
4.4.3	O resultado principal	66
4.5	Caracterização dos grupos finitos G em função da altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	68
4.5.1	Alguns Exemplos	69
5	A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico	71
5.1	A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2	71
5.2	O n -centro do grupo de unidades de um anel de grupo inteiro	75
5.2.1	Alguns resultados básicos e notações	75
5.2.2	Uma caracterização do n -centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$	78
A	Um resultado de Borel-Chandra	91

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apenas procuramos apresentar alguns resultados que consideramos serem bem conhecidos em Anéis de Grupo e em teoria de Anéis e Grupos, respectivamente. Estes resultados estão indicados nas referências: [30], [31], [28].

1.1 Alguns resultados sobre Anéis de Grupo

Definição 1.1. *O anel de grupo RG de um grupo G sobre um anel R com identidade, é definido como o conjunto de todas as combinações lineares formais da forma*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g, a_g \in R$$

tais que:

$$\text{supp}(\alpha) = \{g \mid a_g \neq 0\},$$

o suporte de α , é finito; com as operações definidas por:

$$(1) \sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

$$(2) \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g, h \in G} a_g b_h gh = \sum_{u \in G} c_u u, \text{ onde } c_u = \sum_{gh=u} a_g b_h.$$

Podemos definir ainda o produto de um elemento de RG por um escalar $\lambda \in R$ por:

$$\lambda \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g.$$

É fácil de verificar que com a soma e a multiplicação por escalares definida acima, define-se em RG uma estrutura de R -módulo.

Observação 1.2. Observamos que se o anel R for comutativo, então o anel de grupo RG , com as operações indicadas acima é também chamada a álgebra de grupo de G sobre R .

Definição 1.3. O homomorfismo $\varepsilon : RG \mapsto R$ dado por:

$$\varepsilon\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g$$

é chamado o homomorfismo de aumento de RG e seu kernel, denotado por $\Delta(G)$ é chamado o ideal de aumento de RG .

Proposição 1.4. O conjunto $\{g - 1 \mid g \in G, g \neq 1\}$ é uma base de $\Delta(G)$ sobre R .

Da proposição acima podemos concluir que $\Delta(G)$ é um ideal de RG gerado por $\{g - 1 \mid g \in G, g \neq 1\}$, isto é, $\Delta(G) = \langle \{g - 1 \mid g \in G, g \neq 1\} \rangle$.

Suponha agora que $H \triangleleft G$, então o epimorfismo natural $\omega : G \mapsto G/H$ pode ser estendido a um epimorfismo $\omega^* : RG \mapsto R(G/H)$ tal que:

$$\omega^*\left(\sum_{g \in G} a_g(g)\right) = \sum_{g \in G} a_g \omega(g)$$

Proposição 1.5. Nas condições acima, temos que: $\text{Ker}(\omega^*) = \Delta_R(G, H) = \langle h - 1 \mid h \in H \rangle$ como ideal de RG .

Proposição 1.6. Seja R um anel comutativo. A aplicação $*$: $RG \longrightarrow RG$ definida por:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)^* = \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$$

satisfaz:

$$(i) \quad (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*;$$

$$(ii) \quad (\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*;$$

$$(iii) \quad \alpha^{**} = \alpha.$$

Definição 1.7. Seja X um subconjunto de um anel de grupo RG . O anulador à esquerda de X é o conjunto:

$$\text{Ann}_l(X) = \{\alpha \in RG \mid \alpha x = 0, \forall x \in X\}.$$

E de maneira análoga, definimos o anulador à direita de X por:

$$\text{Ann}_r(X) = \{\alpha \in RG \mid x\alpha = 0, \forall x \in X\}.$$

Definição 1.8. Dado um anel de grupo RG e um subconjunto finito X de um grupo G . Denotaremos por $\hat{X}$ o seguinte elemento de RG :

$$\hat{X} = \sum_{x \in X} x$$

Lema 1.9. Seja H subgrupo de G e seja R um anel. Então: $\text{Ann}_r(\Delta(G, H)) \neq 0$ se e somente se H é finito. Neste caso, temos que:

$$\text{Ann}_r(\Delta(G, H)) = \hat{H}.RG.$$

Além disso, se $H \triangleleft G$ o elemento $\hat{H}$ é central em RG e temos que:

$$\text{Ann}_r(\Delta(G, H)) = \text{Ann}_l(\Delta(G, H)) = RG.\hat{H}.$$

Lema 1.10. Sejam R um anel com unidade e H um subgrupo de um grupo G . Se $|H|$ é invertível em R então $e_H = \frac{1}{|H|}\hat{H}$ é um idempotente de RG . Além disso, se $H \triangleleft G$ então e_H é central.

Proposição 1.11. Sejam R um anel com unidade e H um subgrupo normal do grupo G . Se $|H|$ é invertível em R , considerando $e_H = \frac{1}{|H|}\hat{H}$, nós temos que:

$$RG = RGe_H \oplus RG(1 - e_H)$$

onde

$$RGe_H \cong R(G/H) \quad \text{e} \quad RG(1 - e_H) = \Delta(G, H).$$

Definição 1.12. Um elemento r de um anel R é chamada uma unidade se existe um elemento $s \in R$ tal que $rs = sr = 1$. O conjunto de todas as unidades de R forma um grupo $\mathcal{U}(R)$. Denominado o grupo de unidades do anel R .

Alguns exemplos de unidades em $\mathbb{Z}G$:

- (1) Os elementos $\pm g, g \in G$ são claramente unidades, sendo os inversos dados por $\pm g^{-1}$. E são chamadas de **unidades triviais**.
- (2) Para $b \in G$ de ordem finita, denotaremos por $\hat{b}$ a soma:

$$\hat{b} = \sum_1^{o(b)} b^i.$$

Então $(1 - b)\hat{b} = 0$ e para qualquer $a \in G$, $((1 - b)a\hat{b})^2 = 0$. Portanto, $u_{b,a} = 1 + (1 - b)a\hat{b}$ possui um inverso $1 - (1 - b)a\hat{b}$. As unidades $u_{b,a}$ são chamadas unidades bicíclicas de $\mathbb{Z}G$.

Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$. Então $\varepsilon(u) = \pm 1$. Portanto, podemos escrever $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ onde $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ consiste de todas as unidades com aumento 1. Enumeramos a seguir alguns fatos básicos

em Anéis de Grupo:

Definição 1.13. Denotaremos por $[\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$ o subgrupo aditivo de $\mathbb{Z}G$ gerado por todos os produtos de Lie $[x, y]$, onde $[x, y] = xy - yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}G$.

Lema 1.14. Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, $u = \sum_{g \in G} u(g)g$. Então definimos $\tilde{u}(g) = \sum_{h \sim g} u(h)$, onde $\sim$ denota a conjugação em G . Nessas condições temos que:

$$[\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G] = \left\{ \sum_{x \in G} \alpha(x)x \mid \tilde{\alpha}(g) = 0 \text{ para todo } g \in G \right\}.$$

Teorema 1.15. (Berman) Seja R um domínio de integridade de característica 0 tal que nenhum primo racional é uma unidade de R . Então:

$$\alpha \in RG; \alpha^n = 1, \alpha(1) \neq 0 \Rightarrow \alpha = \alpha(1)$$

Lema 1.16. ([30], corolário 1.7) Qualquer unidade central de ordem finita em $\mathbb{Z}G$ é da forma $\pm t$, onde t é um elemento central em G .

Lema 1.17. ([31], proposição 1.3) Se $\gamma \in \mathbb{Z}G$ então $\gamma\gamma^* = 1 \Leftrightarrow \gamma = \pm g, g \in G$.

Lema 1.18. (Higman) Seja G o grupo dos quatérnions de ordem 8. Então $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm G$.

Lema 1.19. ([31], corolário 2.3) Seja $G = A \times B$, onde A é um 2-grupo abeliano elementar e B é o grupo dos quatérnions de ordem 8. Então todas as unidades de $\mathbb{Z}G$ são triviais.

Lema 1.20. Seja $u \in \mathcal{U}$. Então: $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) \Leftrightarrow u^*u \in \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mathbb{Z}G)$, onde $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) = \{u \in \mathcal{U} \mid u^{-1}Gu \subseteq G\}$.

Teorema 1.21. ([30], teorema 2.18) Seja G um grupo finito. Então:

$$\begin{aligned} T(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)) = \pm G &\Leftrightarrow G \triangleleft \mathcal{U}(\mathbb{Z}G) \Leftrightarrow (\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))^n \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)) \text{ para algum } n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow G \text{ é Abeliano ou um 2-grupo Hamiltoniano} \end{aligned}$$

Teorema 1.22. (Ritter-Sehgal) Seja G um grupo finito. Todas as unidades centrais de $\mathbb{Z}G$ são triviais se e somente se para todo $x \in G$ e todo número natural j relativamente primo com $|G|$, vale que $x^j \sim x$ ou $x^j \sim x^{-1}$, onde $\sim$ representa a conjugação em G .

Lema 1.23. (Krempa) Seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Então φ_u^2 é interno, isto é, $u^2 \in G\mathcal{Z}$, onde φ_u é o automorfismo de G definido por $\varphi_u(g) = u^{-1}gu$, para $g \in G$.

Lema 1.24. (Coleman) Seja G um grupo finito. Então para qualquer p -subgrupo $P \leq G$ temos que $N_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)}(P) = N_G(P)C_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)}(P)$, onde $C_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)}(P)$ denota o centralizador de P em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, ou seja, $C_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)}(P) = \{u \in \mathcal{U} \mid u^{-1}xu = x, \text{ para todo } x \in P\}$.

Proposição 1.25. *Seja R um subanel de $\mathbb{Q}G$ contendo $\mathbb{Z}G$. Além disso, suponha que R seja um $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente gerado. Então $[\mathcal{U}(R), \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)]$ é finito.*

Proposição 1.26. *Seja $G = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ um grupo cíclico de ordem finita n . Então tem-se que:*

$$\mathbb{Q}G \cong \bigoplus_{d|n} \frac{\mathbb{Q}[X]}{\phi_d(X)} \cong \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d).$$

onde ζ_d indica uma raiz primitiva d -ésima da unidade, para cada divisor d de n . Neste isomorfismo, o elemento a corresponde ao elemento $\{\xi_d\}_{d|n} \in \bigoplus_{d|n} \mathbb{Q}(\zeta_d)$.

Proposição 1.27. *Seja A um grupo abeliano finito. Então*

$$\mathbb{Q}A \cong \bigoplus_d a_d \mathbb{Q}(\zeta_d)$$

onde ζ_d é uma raiz primitiva d -ésima da unidade e $\varphi(d)a_d = n_d$, o número de elementos de ordem d em A . Aqui, $a_d \mathbb{Q}(\zeta_d)$ denota a soma de a_d cópias de $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ e φ denota a função de Euler.

Lema 1.28. *Sejam K corpo, G, H grupos. Então $KG \otimes_K KH \cong K[G \times H]$.*

Definição 1.29. *Diremos que um grupo G é um grupo de Dedekind se todo subgrupo de G é normal em G , em particular, se G for um grupo de Dedekind não abeliano então G será denominado um grupo Hamiltoniano.*

Proposição 1.30. (Dedekind, Baer) *([28], Proposição 5.3.7) Todos os subgrupos de um grupo G são normais se e somente se G é abeliano ou é o produto direto de um grupo quaternion de ordem 8, um 2-grupo abeliano elementar e um grupo abeliano de ordem ímpar.*

Observação 1.31. *Em particular, se G for um 2-grupo Hamiltoniano, então G possui a forma $G = Q \times A$, onde Q é o grupo dos quaternions de ordem 8 e A denota um 2-grupo abeliano elementar.*

Se H e K são subconjuntos não vazios de um grupo G , então denotaremos por $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$, o subgrupo de G gerado pelos comutadores $[h, k]$, onde $[h, k] = h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}h^k, h \in H, k \in K$ e $h^k = k^{-1}hk$. Quando $H = K = G$, costumamos designar $[G, G]$ por G' , o grupo derivado de G .

Mais genericamente, se $x_1, \dots, x_{n-1}$ são elementos do grupo G um comutador simples de peso $n \geq 2$ é definido recursivamente pela regra:

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n],$$

onde convencionamos que $[x_1] = x_1$.

A seguir listamos algumas propriedades básicas dos comutadores:

Proposição 1.32. *Sejam x, y, z elementos de um grupo G . Então:*

- (i) $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
- (ii) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ e $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$;
- (iii) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ e $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$;
- (iv) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ (Identidade de Hall-Witt).

Lema 1.33. *Seja G um grupo. Se x e y são elementos de G , tais que x e y comutam com $[x, y]$ então: $[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Suponha que $c = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Então por hipótese temos que $cx = xc$ e $yc = cy$. Segue então que $y(x^{-1}y^{-1}x) = y(x^{-1}y^{-1}x)yy^{-1} = ycy^{-1} = c$. Conseqüentemente, $y(x^{-1}y^{-1}x) = (x^{-1}y^{-1}x)y$. Logo, $[x, y]^n = c^n = (x^{-1}y^{-1}x)^n y^n = x^{-1}(y^n)^{-1}xy^n = [x, y^n]$.

De maneira análoga, mostramos que $c^n = (x^{-1}(y^{-1}xy))^n = x^{-n}(y^{-1}x^n y) = [x^n, y]$. Concluindo a demonstração. $\square$

Definição 1.34. *Seja G um grupo qualquer. Uma série ascendente:*

$$(1) = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_\alpha \leq \dots$$

num grupo G é chamada central se $G_\alpha \triangleleft G$ e cada fator $G_{\alpha+1}/G_\alpha$ está contido no centro de G/G_α para todo α .

Definição 1.35. *Seja G um grupo qualquer e α um ordinal. A série central ascendente de G é definida por:*

$$(1) = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots \leq Z_\alpha(G) \leq \dots$$

onde os termos $Z_\alpha(G)$ são definidos indutivamente pelas regras:

$$Z_0(G) = 1 \quad \text{e} \quad Z_{\alpha+1}(G)/Z_\alpha(G) = \mathcal{Z}(G/Z_\alpha(G)),$$

isto é, $Z_{\alpha+1}(G)$ é a imagem inversa em G de $\mathcal{Z}(G/Z_\alpha(G))$.

Junto com a condição:

$$Z_\lambda(G) = \bigcup_{\alpha < \lambda} Z_\alpha(G)$$

onde λ é um ordinal limite, é denominada de série central superior do grupo G .

Observamos que como a cardinalidade de G não pode ser excedida, existe um ordinal β tal que $Z_\beta(G) = Z_{\beta+1}(G) = \dots$, e chamaremos de hipercentro ao subgrupo terminal de G .

Lema 1.36. (*Mal'cev*)([28]) *Se o centro de um grupo G é livre de torção então cada fator central superior é livre de torção.*

1.2 Alguns resultados sobre Teoria dos Anéis, Módulos e Álgebras

Definição 1.37. *Seja R anel. Diremos que um R -módulo é completamente redutível se ele for a soma direta de módulos simples.*

Teorema 1.38. (*Artin, Wedderburn*) *Um anel R é semisimples de comprimento finito se e somente se é da forma:*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s);$$

onde os D_i 's são anéis de divisão, ou seja, se o anel R é isomorfo a uma soma direta de álgebras de matrizes sobre anéis de divisão.

Proposição 1.39. *Seja R um anel semisimples de comprimento finito. Então existe uma família $\{e_1, \dots, e_s\}$ de elementos de R tais que:*

- (1) $e_i \neq 0$ é um idempotente central, isto é, $e_i a = a e_i$, $e_i^2 = e_i$, para todo $a \in R$ e todo i , $1 \leq i \leq s$;
- (2) Se $i \neq j$, então $e_i e_j = 0$;
- (3) $1 = e_1 + \cdots + e_s$;
- (4) e_i não pode ser escrito como $e_i = e_i' + e_i''$, onde e_i', e_i'' são idempotentes centrais tais que $e_i', e_i'' \neq 0$ e $e_i' e_i'' = 0$, $1 \leq i \leq s$.

Proposição 1.40. (*Maschke*) *Seja G um grupo finito e seja K um corpo tal que $\text{car}(K) \nmid |G|$. Então:*

- (1) KG é a soma direta de um número finito de ideais bilaterais $\{B_i\}_{1 \leq i \leq r}$, chamadas as componentes simples de KG . Cada B_i é um anel simples.
- (2) Qualquer ideal bilateral de KG é uma soma direta de alguns dos membros da família $\{B_i\}_{1 \leq i \leq r}$.
- (3) Cada componente simples é isomorfa a um anel de matrizes da forma $M_{n_i}(D_i)$ onde D_i é um anel de divisão contendo uma cópia isomorfa de K em seu centro, e o isomorfismo

$$KG \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$$

é um isomorfismo de K -álgebras.

Lema 1.41. (*Schur*) *Sejam R um anel, U, V são R -módulos irredutíveis. Então qualquer R -homomorfismo de U em V é um isomorfismo ou o homomorfismo nulo. $\text{End}_R(U)$ é um anel de divisão.*

1.2.1 Tópicos em teoria de representação de grupos

Definição 1.42. *Sejam G um grupo, F corpo e V um F -espaço vetorial.*

Um homomorfismo ρ de G em $GL(V)$, o grupo de todas as transformações lineares não-singulares de V é denominada uma representação linear de G sobre F , ou simplesmente uma F -representação de G . Onde aqui assumiremos que V possui dimensão finita n . O inteiro n é denominado o grau de ρ . Se $\text{Ker}(\rho) = 1$, diremos que ρ é fiel.

Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ seja uma base (ordenada) de V . Então se g pertence a G existe uma matriz $\rho^(g)$ a qual representa a transformação linear $\rho(g)$ com respeito a base. A aplicação $\rho^* : G \longrightarrow GL(n, F)$ é um homomorfismo o qual será chamado a representação matricial associada com respeito a base dada.*

Definição 1.43. *Seja G um grupo e suponha que $\rho : G \longrightarrow GL(M)$ seja uma F -representação de G de grau n . Então podemos dar uma estrutura de FG -módulo a M por meio da seguinte relação:*

$$a\left(\sum_{x \in G} f_x x\right) = \sum_{x \in G} f_x (a\rho(x)); (a \in M).$$

A verificação dos axiomas de módulo é simples.

Reciprocamente, se M é qualquer FG -módulo à direita com F -dimensão finita n então existe uma F -representação $\rho : G \longrightarrow GL(M)$ de grau n associada dada por:

$$a\rho(g) = ag \quad (a \in M).$$

O que nos mostra que existe uma bijeção entre F -representações de G com grau n e FG -módulos à direita de F -dimensão n .

Definição 1.44. *Sejam G um grupo, F corpo e M como na definição anterior. Diremos que uma F -representação ρ de G é irredutível se M não possuir nenhum submódulo não-nulo próprio e ele próprio não ser trivial. Nessas condições diremos que ρ é chamada uma representação irredutível.*

Definição 1.45. *Sejam G um grupo, F corpo. Diremos que uma F -representação do grupo G será chamada completamente redutível se ela provém de um FG -módulo completamente redutível.*

Capítulo 2

Um resultado de Gruenberg

Ao iniciarmos o estudo do grupo de unidades de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ o primeiro caso que consideraremos será o caso em que o grupo G é finito.

Neste caso ao estudarmos a série central superior de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ veremos que o teorema de Gruenberg desempenha um papel fundamental ao nos garantir que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é finita, resultado que justifica plenamente os nossos esforços no estudo da série central superior de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ e em particular, do hipercentro de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Como este teorema desempenhará um papel fundamental no nosso estudo, nosso objetivo principal neste capítulo será o de apresentarmos as idéias principais necessárias a compreensão da sua demonstração, deixando o estudo mais específico da série central superior de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ para os capítulos 4 e 5.

Os resultados que serão apresentados a seguir estão relacionados nas referências [18], [19] e [32].

2.1 Notação, alguns resultados e definições

Iniciamos nosso estudo, relembrando alguma notação; que é a mesma utilizada nos capítulos anteriores e definida no início da dissertação; e definindo alguns conceitos de teoria de grupos.

Seja G um grupo.

Denotaremos por:

$$1 \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots$$

a série central superior de G .

- $\tilde{Z}(G)$ o hipercentro do grupo G ,
- 1_n a matriz identidade de ordem n .
- $Tri(n, F)$ denotará o grupo triangular $= \{(g_{ij}) \in GL(n, F) \mid g_{ij} = 0 \text{ para } i < j\}$,
- $Tri_1(n, F)$ grupo unitriangular $= \{(g_{ij}) \in Tri(n, F) \mid g_{ii} = 1 \text{ para } i \neq j\}$,
- $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$ matriz diagonal de ordem n com elementos $a_{11}, \dots, a_{nn}$,
- $D(n, F)$ o grupo diagonal $= \{(g_{ij}) \in GL(n, F) \mid g_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j\}$.

2.2 Alguns resultados e definições

Nesta subseção pretendemos apresentar alguns resultados e definições que serão utilizados para apresentarmos a idéia da demonstração do teorema de Gruenberg que será enunciado mais adiante.

Relembramos que a notação deste capítulo segue a fixada no início da dissertação.

Definição 2.1. Diremos que um grupo abeliano A é um G -módulo se existir um homomorfismo de grupos $\phi : G \mapsto Hom_{\mathbb{Z}}(A, A)$.

Lema 2.2. Existe uma função a valores inteiros $\mu(n)$ dependendo somente de n tais que:

- Se $n_1, \dots, n_t$ são inteiros positivos satisfazendo $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ então

$$\mu(n) \geq \prod_{i=1}^t \mu(n_i).$$

- Todo grupo linear completamente redutível de grau n contém um subgrupo normal abeliano de índice finito no máximo $\mu(n)$.

Definição 2.3. Sejam G um grupo e V um FG -módulo. Suponha que V contenha r subespaços não-triviais $V_1, \dots, V_r$ tais que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ e para cada i e cada g em G , $V_i g = V_k$, onde $k = k(i, g)$. Denote por $k = \sigma(i)$, onde $\sigma \in S_r$ e $\pi : g \mapsto \sigma$ é um homomorfismo de G em S_r , o grupo simétrico de r elementos. Então o conjunto $\{V_1, \dots, V_r\}$ é chamado um sistema de imprimitividade de G em V .

Lema 2.4. Sejam G grupo, H um subgrupo normal de G e V um FG -módulo irredutível de F -dimensão finita. Então V pode expresso como a soma direta de FH -módulos irredutíveis de F -dimensão igual. Se $W_1, \dots, W_r$ são componentes homogêneas não triviais de V como FH -módulos, então $\{W_1, \dots, W_r\}$ é um sistema de imprimitividade de G em V .

Lema 2.5. (Zassenhaus) *Um grupo linear localmente solúvel é solúvel. Em particular, grupos lineares hipercenrais e grupos lineares localmente nilpotentes são solúveis.*

Teorema 2.6. (Gruenberg) *Sejam G um grupo linear de grau n e H um subgrupo normal solúvel de G . Então H contém um subgrupo triangularizável de índice finito o qual é normal em G .*

Demonstração: Claramente nós podemos supor que F é algebricamente fechado. Seja H subgrupo solúvel de $GL(n, F)$. Existem inteiros $r, n_1, \dots, n_r, x$ em $GL(n, F)$ e representações irredutíveis ρ_i de H em $GL(n_i, F)$, $i = 1, \dots, r$ satisfazendo

$$n = n_1 + \dots + n_r \quad \text{e} \quad g^x = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \rho_r(g) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } g \text{ em } H.$$

Pelo lema 2.2 temos que $\rho_i(H)$ contém um subgrupo normal abeliano A_i de índice finito no máximo $\mu(n_i)$. Considere $T = \cap_{i=1}^r \rho_i^{-1}(A_i)$. T é um subgrupo normal de índice finito no máximo $\mu(n)$ em H pelo lema 2.2. Pelos lemas 2.4 e 1.41, concluímos que A_i é um subgrupo diagonalizável de $GL(n_i, F)$. Portanto, T é um subgrupo triangularizável de $GL(n, F)$. $\square$

Definição 2.7. *Diremos que um elemento $g \in GL(n, F)$ é unipotente se $(g - 1_n)^n = 0$. Por outro lado, diremos que um subgrupo G de $GL(n, F)$ é unipotente se todos os elementos de G são unipotentes.*

Definição 2.8. *Um subgrupo G de $GL(n, F)$ é dito ser triangularizável sobre F se existe um elemento x de $GL(n, F)$ tal que $G^x \subseteq Tri(n, F)$, onde $G^x = x^{-1}Gx$. Diremos que G é triangularizável se ele for triangularizável sobre $\bar{F}$.*

Definição 2.9. *Um subgrupo G de $GL(n, F)$ é dito ser unitriangularizável sobre F se existe um elemento x de $GL(n, F)$ tal que $G^x \subseteq Tri_1(n, F)$, onde $G^x = x^{-1}Gx$. Diremos que G é unitriangularizável se ele for unitriangularizável sobre $\bar{F}$.*

Definição 2.10. *Se G é um subgrupo qualquer de $GL(n, F)$ então a inclusão $G \hookrightarrow GL(n, F)$ é uma representação de G sobre F , nesse caso G será chamado irredutível (completamente redutível) se a correspondente representação for irredutível (completamente redutível).*

Lema 2.11. (Burnside) *([32], lema 1.20) Seja G um subgrupo irredutível de $GL(n, \bar{F})$ e suponha que $\{tr(g) \mid g \in G\}$ é um conjunto finito de ordem m . Então G é um grupo finito de ordem no máximo m^{n^2} . Onde $tr(g)$ denota o traço da matriz g e $\bar{F}$ o fecho algébrico do corpo F .*

Corolário 2.12. ([32], corolário 1.21)

Seja G subgrupo unipotente de $GL(n, F)$. Então G é unitriangularizável sobre F .

Lema 2.13. Sejam $n, r, d_1, \dots, d_r$ inteiros positivos tais que $d_1 + d_2 + \dots + d_r = n$. Então $y = \sum_{i=1}^r d_i(n - d_1 - d_2 - \dots - d_i)$ é menor ou igual a $\frac{1}{2}n(n-1)$ e a igualdade ocorre se $r = n$ e $d_1 = d_2 = \dots = d_r = 1$.

Demonstração: Se $d_1 = d_2 = \dots = d_r = 1$ então é imediato que $y = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Vamos mostrar agora que $y \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.

Se $r = 1$ e $d_1 = n$ temos imediatamente que $y = 0 \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para $r = k$ e mostremos que ela é válida para $r = k + 1$.

Então pela hipótese de indução podemos supor que $y \leq d_1(n - d_1) + \frac{1}{2}(n - d_1)(n - d_1 - 1) = \frac{1}{2}(n^2 - (d_1)^2 - n - d_1) = z$. Calculando o valor máximo de z no intervalo $[1, n]$ obtemos que z admite máximo para $d_1 = 1$. Conseqüentemente, obtemos que $z \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.

□

Lema 2.14. Seja G um grupo, V um FG -módulo fiel de dimensão finita sobre F , W um FG -submódulo de V e H um subgrupo normal de G estabilizando a série $\{0\} \subseteq W \subseteq V$. Então $H \leq G$ implica que $H \subseteq Z_t(G)$, onde $t \leq \dim_F W(\dim_F V - \dim_F W)$. $H \leq G$ significa que para cada h em H e cada g em G existe um inteiro positivo $s = s(h, g)$ tal que $[h, \underbrace{g, \dots, g}_s] = [h, {}_s g] = 1$.

Demonstração: Sejam $n = \dim_F V$ e $d = \dim_F W$. Se h é um elemento de H então

$$h' : a + W \mapsto a(h - 1);$$

é uma aplicação linear de V/W em W , ou seja, $h' \in \text{Hom}_F(V/W, W)$. Nessas condições a aplicação $\phi : h \mapsto h'$ é um homomorfismo de grupos, do grupo H no grupo aditivo $\text{Hom}_F(V/W, W)^+$. Se h' é a aplicação nula então temos que $ah = a$, para todo a em V . Onde ϕ é injetora e em particular, H é abeliano.

H é um G -módulo, via conjugação e $\text{Hom}_F(V/W)$ é um FG -módulo, onde a ação de G é dada por $\lambda^g = g^{-1}\lambda g, \lambda \in \text{Hom}_F(V/W, W)$. Agora

$$\phi(h^g) : a + W \mapsto a(h^g - 1) \quad \text{e} \quad (\phi(h))^g : a + W \mapsto ag^{-1}(h - 1)g.$$

Portanto, ϕ é um G -homomorfismo e conseqüentemente,

$$\phi([h, {}_r g]) = \phi(h^{(g^{-1})^r}) = h'^{(g^{-1})^r}.$$

Denotemos por M o F -submódulo de $\text{Hom}_F(V/W, W)$ gerado por $\phi(H)$. Como $H \in G$ e $\dim_F M = t$ é finita, cada g em G age de modo unipotente sobre M . Pelo corolário 2.12, G age de modo unitriangularizável relativa a alguma base de M . Portanto, se $g_1, \dots, g_t$ são t elementos genéricos de G temos que:

$$\phi([h, g_1, \dots, g_t]) = h^{(g_1-1)\dots(g_t-1)} = 0.$$

Mas sendo ϕ injetora implica que $[h, g_1, \dots, g_t] = 1$. O que nos diz que $h \in Z_t(G)$.

Apontando que:

$$t = \dim_F M \leq \dim_F \text{Hom}_F(V/W, W) = d(n-d).$$

Concluimos a demonstração do lema. □

Corolário 2.15. *Sejam G um subgrupo de $GL(n, F)$ e U um subgrupo normal unipotente de G . Se $U \in G$ então $U \subseteq Z_t(G)$ onde $t \leq \frac{1}{2}n(n-1)$.*

Demonstração: Seja V o espaço gerado pelas linhas de G sobre F considerado como FG -módulo a direita.

Pelo corolário 2.12, como U é unipotente, U é unitriangularizável sobre F . Logo existe um elemento w em V , não-nulo, tal que $wx = w$, para todo x em U .

Se $g \in G$ então como U é um subgrupo normal de G temos que $gxg^{-1} \in U$ e conseqüentemente temos que $wgx = wxg^{-1}g = wg$.

Seja W o FG -submódulo de V gerado pelo elemento w . Nesse caso temos então que $vx = v$, para todo $x \in U$ e $v \in W$.

A seguir, denotemos por ρ a representação do grupo G induzida por V/W . Suponha que saibamos que $\rho(U) \subseteq Z_k(\rho(G))$, ou seja que, $[U, {}_k G] \subseteq K = U \cap \text{Ker}(\rho(U))$. Pelo lema 2.14 segue que $K \subseteq Z_{d_1(n-d_1)}(G)$, onde $d_1 = \dim_F W$. Conseqüentemente temos que $U \subseteq Z_t(G)$ onde $t = k + d_1(n - d_1)$. Por indução em n segue que existem inteiros $r, d_1, \dots, d_r$ tais que $d_1 + d_2 + \dots + d_r = n$ e $U \subseteq Z_t(G)$, onde $t = \sum_{i=1}^r d_i(n - d_1 - d_2 - \dots - d_i)$.

Utilizando o lema 2.13 concluimos a demonstração do corolário. □

Teorema 2.16. (Samuel) ([29], teo. 1) *Seja A uma $\mathbb{Z}$ -álgebra comutativa finitamente gerada. Então o grupo de unidades de A é finitamente gerado.*

Definição 2.17. *Diremos que K , o subanel do corpo F gerado por 1_F será denominado o anel primo do corpo F .*

Lema 2.18. (Wehrfritz) *Sejam R um subanel finitamente gerado sobre o anel primo do corpo F e T um subgrupo triangularizável de $GL(n, F)$ contido em $GL(n, R)$. Se U é um subgrupo maximal unipotente de T então T/U é um grupo abeliano finitamente gerado.*

Demonstração: Podemos supor que o corpo F é algebricamente fechado. Então existe x em $GL(n, F)$ tal que $T^x \subseteq Tri(n, F)$, onde $Tri(n, F)$ denota o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n com entradas em F .

Sejam $x = (x_{ij})$ e $x^{-1} = (y_{ij})$ e consideremos $S = R[x_{ij}, y_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n] \subseteq F$. Pelo teorema 2.16 concluímos que o grupo de unidades de S é finitamente gerado, visto que S é um domínio de integridade finitamente gerado.

Considere a seguir a aplicação $\theta : T^x \longrightarrow D(n, S)$, definida por $\theta(a_{ij}) = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, onde $D(n, S)$ denota o conjunto das matrizes diagonais com entradas em S de ordem n e $\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ representa a matriz diagonal com elementos $a_{11}, \dots, a_{nn}$.

Podemos observar que θ é um homomorfismo e que $\text{Ker}(\theta)$ é igual a U^x .

Como $D(n, S)$ é isomorfo ao produto direto de n cópias do grupo de unidades de S podemos concluir que $D(n, S)$ é finitamente gerado, pois como vimos anteriormente o grupo de unidades de S é finitamente gerado.

Como $D(n, S) \cong T/U \cong T^x/U^x$, segue que o grupo T/U é abeliano finitamente gerado.

□

2.3 O teorema de Gruenberg

Finalmente nesta subseção apresentamos o resultado principal do capítulo. Utilizando os resultados anteriores apresentamos a demonstração do teorema de Gruenberg.

Teorema 2.19. (Gruenberg) ([19], teorema 4)

Se G é um grupo linear finitamente gerado sobre um anel comutativo R então G possui altura central finita.

Demonstração: Empregando a notação que fixamos na subseção anterior, seja $\tilde{Z}(G)$ o hipercentro de G .

Pelo lema 2.5 concluímos que $\tilde{Z}(G)$ é um subgrupo solúvel de G . Como $\tilde{Z}(G)$ também é normal em G , nas hipóteses do teorema 2.6 concluímos que $\tilde{Z}(G)$ contém um subgrupo triangularizável T de índice finito, normal em G .

Consideremos agora U um subgrupo maximal unipotente de T . Então pelo corolário 2.15 concluiríamos que $U \subseteq Z_{\frac{1}{2}n(n-1)}(G)$.

Pela escolha de T e o lema 2.18 temos que $\tilde{Z}(G)/U$ é uma extensão finita de um grupo abeliano finitamente gerado. Segue daí que o quociente $\tilde{Z}(G)/U$ satisfaz a condição maximal para subgrupos e portanto, podemos concluir que G possui altura central finita. $\square$

Capítulo 3

Caracterização dos subgrupos normais de torção de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico G

Iniciamos este capítulo estudando a estrutura dos subgrupos normais periódicos de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ quando G é um grupo periódico. O objetivo é procurarmos mais informações sobre a estrutura de $\mathcal{U}$.

Nosso estudo dos subgrupos normais de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ se justifica ao observarmos que o conjunto dos elementos de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$ forma um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}$. Esse resultado será mostrado na última seção do capítulo.

Com essa motivação passamos a procurar uma caracterização dos subgrupos normais periódicos de $\mathcal{U}$.

Apresentamos o objetivo principal deste capítulo que será o de demonstrarmos o teorema de Bovdi, que caracteriza os grupos G em função das informações sobre o subgrupo de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$.

3.1 Alguns resultados iniciais

Começamos então o nosso estudo com o seguinte:

Lema 3.1. [*Zassenhaus*]/([31], Teorema 2.1) *Suponha que R é um domínio de integridade de característica 0 no qual nenhum primo racional é invertível. Se $\mathcal{U}_1(RG)$ possui um elemento $\sum_{g \in G} u(g)g$ de ordem p^α , p primo, então G possui um elemento g_0 de ordem p^α com $u(g_0) \neq 0$.*

Teorema 3.2. (*Bovdi, [30]*) *Seja I um domínio de integridade de característica 0 tal que nenhum primo racional seja uma unidade de I . Então todo subgrupo normal periódico N de $\mathcal{U}_1(IG)$ está contido em G . Todo subgrupo de N é normal em G . Além disso, N é abeliano ou um 2-grupo Hamiltoniano.*

Demonstração: Seja $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)g \in N \triangleleft \mathcal{U}(IG)$. Desejamos mostrar que $\alpha \in G$. Sem perda de generalidade, podemos supor que α possui ordem p^m . De fato, se $o(\alpha) = n = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i}$, p_j primos distintos, α pode expresso como $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$, $o(\alpha_i) = p_i^{r_i}$. Nesse caso, $\langle \alpha \rangle = \prod_i \langle \alpha_i \rangle$. Se mostrarmos que $\alpha_i \in G, \forall i$ então $\alpha \in G$.

Pelo lema 3.1;

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)g \in IG, o(\alpha) = p^m \quad \text{e} \quad \alpha(g_0) \neq 0.$$

Então considere $\beta = \alpha g_0^{-1} = \sum_{g \in G} \beta(g)g$ o qual satisfaz $\beta(1) \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \beta^s &= (\alpha g_0^{-1})^s = \\ &= \alpha g_0^{-1} \alpha g_0^{-1} \cdots \alpha g_0^{-1} = \\ &= \alpha \alpha^{g_0} \alpha^{g_0^2} \cdots \alpha^{g_0^{s-1}} g_0^{-s} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tomando $s = p^m$ nós obtemos que $\beta^s \in N$.

Como N é subgrupo normal de torção, segue que β é um elemento de ordem finita do anel de grupo IG .

Segue, pelo lema 1.15, que $\beta = 1$ e portanto, $\alpha = g_0 \in G$.

Mostraremos a seguir que todo subgrupo cíclico $\langle h \rangle$ de ordem n de N é normal em G .

Para $g \in G$ consideremos: $\mu = \widehat{h}g(1-h)$.

Então: $\mu^2 = 0$ e $(1+\mu)(1-\mu) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} (1+\mu)^{-1}h(1+\mu) &= h - \mu h + h\mu = \mu h\mu \\ &= h - \mu h + \mu \\ &= h + \widehat{h}g(1-h)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

é um elemento de N . Isso implica uma relação do tipo:

$$h^s g = h^t g h \text{ para algum } s \geq 0 \text{ e } t \leq n-1.$$

Portanto, $ghg^{-1} \in \langle h \rangle$ e $\langle h \rangle$ é normal em G . Logo, pela proposição 1.30, N é abeliano ou Hamiltoniano.

Suponha que N é Hamiltoniano. Então afirmamos que:

$$\gamma = \sum_{g \in G} \gamma(g)g \in \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}N), \gamma^m = 1, \text{ para algum } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \gamma = g \in N.$$

Suponha que $\gamma(g_1) \neq 0$. Então N é normal em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}N)$, γg_1^{-1} é um elemento de torção de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}N)$ e é portanto, 1 pelo teorema 1.15. Portanto, $\gamma = g_1$. Provamos que todas as unidades de torção de $\mathbb{Z}N$ são triviais. Segue do teorema 1.21 que N é um 2-grupo, completando a demonstração. □

Lema 3.3. (*Bovdi, [15], lema 3*) *Seja G um grupo periódico. Então são equivalentes:*

- (1) G é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$;
- (2) G é abeliano ou um 2-grupo Hamiltoniano

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) :

Segue do teorema 3.2;

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Se G é abeliano então $G \triangleleft \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Suponhamos agora que G seja um 2-grupo Hamiltoniano.

Logo pelo lema 1.19, todas as unidades de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ são triviais. Concluindo a demonstração do lema. □

3.2 Subgrupos Normais Periódicos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Ao tomarmos em consideração o teorema 3.2, surgem algumas perguntas que motivaram o estudo inicial dos subgrupos normais periódicos de $\mathcal{U}$. Entre elas citamos: Como a existência de um subgrupo normal periódico H de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico G se reflete na estrutura do grupo G e do anel $\mathbb{Z}$? Qual o posicionamento desse subgrupo normal no grupo G ?

Ao procurar responder essas perguntas, Bovdi notou que se esse subgrupo normal periódico H for não abeliano então os elementos de torção de H estão contidos no conjunto dos elementos de torção do grupo G . Enquanto que se H fosse abeliano então a estrutura de H dependeria do posicionamento do grupo dos quatérnions no grupo G .

Tendo em vista essas considerações, provamos o seguinte teorema sobre os subgrupos normais periódicos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Definição 3.4. Diremos que um group basis do anel de grupo $\mathbb{Z}G$ é um subgrupo H de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ tal que os elementos de H são linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}H$.

Teorema 3.5. (*Bovdi, [15], teorema 2*) Sejam G um grupo qualquer e N um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Então todo subgrupo de N é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Além disso, N é abeliano ou um 2-grupo Hamiltoniano.

Demonstração: Podemos considerar N como subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}N)$ e pelo teorema 3.2 segue que N é abeliano ou um 2-grupo Hamiltoniano.

Mostraremos agora que todo subgrupo cíclico $\langle h \rangle$ de ordem m em N é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Suponha que $h' = xhx^{-1} \notin \langle h \rangle$.

Nesse caso $y = 1 + \widehat{nh}x(1 - h)$ é uma unidade não-trivial do grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ para todo inteiro não-nulo n e temos que

$$y^{-1}hy = (1 - \widehat{nh}x(1 - h))h(1 + \widehat{nh}x(1 - h)) = h + \widehat{nh}x(1 - h)^2$$

é um elemento de N . Escolhido o inteiro n , sempre é possível obtermos os coeficientes de h diferentes de zero na expansão de $y^{-1}hy \in \mathbb{Z}N$ em termos do group basis N , donde concluímos que $y^{-1}hy = h$ e $\widehat{hx}(1 - h')^2 = 0$, onde h' é um elemento de N . Segue imediatamente que $xhx^{-1} = h' \in \langle h \rangle$. Contradição. $\square$

3.2.1 Subgrupos Normais Periódicos Não-Abelianos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Passamos a obter mais informações sobre os grupos periódicos G para os quais o grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui um subgrupo normal periódico não-abeliano.

Proposição 3.6. Sejam G um grupo arbitrário e H um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Se g é um elemento de torção de G com a propriedade que $\langle g \rangle \cap H = \{1\}$ então g pertence ao centralizador de H em G .

Demonstração: Suponha que g seja um elemento de ordem m e que $\langle g \rangle \cap H = \{1\}$, e sejam $B = \langle g, h \rangle$, $h \in H$, e $1, b_1, \dots, b_s$ os elementos de B e suponhamos que:

$$\widehat{gh}(1 - g)h - h\widehat{gh}(1 - g) = \gamma_0.1 + \gamma_1b_1 + \dots + \gamma_sb_s \text{ e que:}$$

$$-\widehat{gh}(1 - g)h\widehat{gh}(1 - g) = \beta_0.1 + \beta_1b_1 + \dots + \beta_sb_s.$$

Então para todo inteiro k o elemento $y = 1 + k\widehat{g}h(1 - g) \in \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ e $yhy^{-1} = h + k[(\gamma_0 + k\beta_0).1 + \dots + (\gamma_s + k\beta_s)b_s]$ pertence a $\langle h \rangle$ (o qual é um subgrupo de torção de G), mas isso somente ocorre se $\gamma_i = \beta_i = 0$, para todo i , $0 \leq i \leq s$. Portanto, se $hg = gh^p$, para algum p temos então que:

$$\widehat{g}h(1 - g)h - h\widehat{g}h(1 - g) = \widehat{g}(h - h^p)h - h\widehat{g}(h - h^p) = 0.$$

Logo, se $h \neq h^p$, então concluímos que vale a relação $gh^2 = hgh$, o qual mostra que g e h comutam. Concluindo a demonstração do lema. □

Lema 3.7. (*Bovdi, [15], lema 2*) *Seja G um grupo finito que contém dois elementos g, h tais que G é da forma $G = \langle g \rangle \langle h \rangle$, $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{1\}$. Se $\langle h \rangle \triangleleft \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ então G é um grupo abeliano.*

Demonstração: Segue da demonstração da proposição 3.6. □

Teorema 3.8. (*Bovdi, [15], teorema 3*) *Se um 2-grupo Hamiltoniano H de G é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ então o conjunto dos elementos de ordem finita em G formam um 2-grupo Hamiltoniano S e todo subgrupo de S é um subgrupo normal de G .*

Demonstração: Desejamos mostrar que todo subgrupo cíclico finito de G é normal em G .

Afirmamos inicialmente que G não possui elementos g de ordem finita $n(n \neq 2)$ tais que $\langle g \rangle \cap H = 1$.

Suponha que exista algum elemento $g \in G$ de ordem finita $n(n \neq 2)$ tal que $\langle g \rangle \cap H = 1$. Segue do lema 3.7 que $g \in C_G(H)$ e o grupo $P = \langle g \rangle \times H$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}P)$ pois g é um elemento central de P . Pelo lema 3.3, P é um 2-grupo Hamiltoniano o que é uma contradição, pois os elementos centrais de um 2-grupo Hamiltoniano possuem ordem 2. Portanto, qualquer elemento g de ordem finita possui ordem 2^s e se $s > 1$ então $\langle g \rangle \cap H \neq 1$. Além disso, se $s \geq 3$ então $g^2 \in C_G(H)$.

Se $g \notin C_G(H)$ então como todo subgrupo cíclico de H é normal em G (pelo teorema 3.5), φ_g induz um automorfismo de ordem dois em H , onde φ_g denota o automorfismo interno de G induzido pelo elemento g . Então o subgrupo $P = H\langle g^2 \rangle$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}P)$. Contradição com o lema 3.3, pois nesse caso P seria um 2-grupo Hamiltoniano, g^2 seria um elemento central em P de ordem maior ou igual a 4. Portanto, podemos concluir que $s \leq 2$.

Pela proposição 1.30, podemos representar H como $H = Q \times W$, onde Q representa o grupo dos quatérnions de ordem 8 e W é um 2-grupo abeliano elementar.

Suponhamos que $s = 2$ e $g \in C_G(H)$ então $P = H\langle g \rangle$ seria um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}P)$. Pelo lema 3.3, P seria um 2-grupo Hamiltoniano, g seria um elemento central em P de ordem

4. Contradição. Logo, $g \notin C_G(H)$. Além disso, com base no teorema 3.5 os seguintes casos são possíveis:

- (1) $g^{-1}ag = a, g^{-1}bg = a^2b$;
- (2) $g^{-1}ag = a^3, g^{-1}bg = b$;
- (3) $g^{-1}ag = a^3, g^{-1}bg = a^2b$.

Afirmamos agora que o subgrupo $\langle g \rangle H$ de G , onde g é um elemento de ordem 2^s ($s = 1$ ou 2), pode ser representado como o produto direto do subgrupo H e um subgrupo cíclico $\langle v \rangle$ de ordem 2.

Suponha que g seja um elemento de ordem 4 e consideremos o caso (1) acima. Tomando $v = ag$, temos que $bv = vb$ e φ_v induz o automorfismo identidade em H .

O grupo $P = \langle v \rangle H$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}P)$ e pelo lema 3.3, v possui ordem 2, pois é um elemento central em P .

Os casos 2 e 3 são tratados de maneira análoga, com a única ressalva que tomamos $v = abg$ no caso 3.

Se g é um elemento de ordem 2 então: $\langle g \rangle H = \langle g \rangle \times H$

Afirmamos que o grupo cíclico $\langle v \rangle$ é um subgrupo normal de G .

De fato, se $[v, g] \neq 1, g \in G$ então sempre podemos escolher um elemento $g \in G$ tal que $\langle g \rangle \cap H = 1$; caso contrário, g é um elemento de ordem finita e pelo que vimos anteriormente, g pode ser representado na forma $g = hv'$, com $h \in H, \langle v' \rangle \cap H = 1$ e $[v, g] = [v, v']$.

Então o elemento $y = (1 - v)g(1 + v)$ é um elemento nilpotente não-nulo e $y^2 = 0$. Pelo teorema 3.5, φ_g induz o automorfismo identidade no subgrupo W , enquanto a sua ação no subgrupo Q é determinada de uma das seguintes maneiras:

- (1) $g^{-1}ag = a, g^{-1}bg = b$;
- (2) $g^{-1}ag = a^3, g^{-1}bg = b$;
- (3) $g^{-1}ag = a, g^{-1}bg = b^3$;
- (4) $g^{-1}ag = a^3, g^{-1}bg = b^3$.

Então, para os casos correspondentes, construímos elementos invertíveis:

- (1) $(1 - by)a(1 + by) = a + (ab - a^3b)y$,
- (2) $(1 - y)a(1 + y) = a + (a - a^3)y$,

$$(3) - (4) \quad (1 - y)b(1 + y) = b + (b - b^3)y,$$

os quais pertencem a H . Mas esses elementos somente pertencem a H se $y = 0$, pois $g \notin H$ e $v \notin H$. Portanto, pelo teorema 3.5, nós concluímos que todo subgrupo cíclico finito de G é um subgrupo normal de G . Completando a demonstração. $\square$

3.2.2 Subgrupos Normais Periódicos Abelianos de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Em toda esta subseção, com exceção do lema 3.15, G é um grupo não abeliano tal que $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ contém um subgrupo normal periódico abeliano.

Suponha que H seja um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Passamos então a estudar os seguintes subcasos:

- (1) Suponha que o grupo G não possua um subgrupo quatérnion Q tal que $Q \cap H$ seja um grupo cíclico de ordem 4.

Então temos o seguinte teorema:

Teorema 3.9. (Bovdi,[15], teorema 6) *Seja H um subgrupo abeliano periódico de G , o qual é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Se G não contém um grupo quatérnion Q tal que $Q \cap H$ é um grupo cíclico de ordem 4, então o centralizador de H contém todos os elementos de ordem finita de G .*

Demonstração: Suponha que o centralizador do subgrupo H não contenha algum elemento de ordem finita em G . Então existem elementos $h \in H$ e $g_1 \in G$, onde h é um p -elemento e g_1 é um q -elemento, tais que o subgrupo $A_1 = \langle h, g_1 \rangle$ não é abeliano. Pelo lema 3.7 concluímos que $p = q$ e $\langle h \rangle \cap \langle g_1 \rangle \neq 1$, caso contrário, A_1 seria abeliano, pois o subgrupo $\langle h \rangle$ é normal em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A_1)$. Existe um subgrupo não-abeliano A de A_1 , A gerado pelos elementos h e $g \in \langle g_1 \rangle$, tais que g induz um automorfismo de ordem p no subgrupo $\langle h \rangle$. Concluímos então que g^p é um elemento central em A e o subgrupo $B = \langle h \rangle \langle g^p \rangle$ é normal em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$.

Sejam p^m e p^{m_1} as ordens, respectivamente, dos elementos h e g . A é dado pelas seguintes relações:

$$h^{p^m} = 1; g^{p^{m_1}} = h^t; ghg^{-1} = h^r; g^p h = hg^p \quad \text{para algum } r.$$

Passemos a análise dos casos possíveis:

- (a) $p^{m_1} > p^m$.

Nesse caso podemos representar B como o produto direto do grupo cíclico $\langle g^p \rangle$ e um grupo cíclico $\langle h' \rangle$. A é a extensão de $\langle h' \rangle$ por $\langle g \rangle$, onde $\langle h' \rangle$ é um subgrupo normal

de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$ pelo teorema 3.5. Contradição com o lema 3.7. Portanto, os elementos g e h comutam.

(b) $p^m \geq p^{m_1}$, p ímpar.

Então: $h = g^p h g^{-p} = h^{r^p}$ e $r^p \equiv 1 \pmod{p^m}$. Destas relações segue que $r = 1 + kp^{m_1} \pmod{p^m}$, onde $k \not\equiv 0 \pmod{p}$, pois $r \not\equiv 1 \pmod{p^m}$. Portanto, existe i tal que $ik \equiv 1 \pmod{p}$. Seja $g_1 = g^i$, então nessas condições temos que $g_1 h g_1^{-1} = h^{1+p^{m-1}}$.

Donde:

$$(h^j g_1)^p = h^j h^{j(1+p^{m-1})} \dots h^{j(1+p^{m-1})^{p-1}} g_1^p = h^{jp} g_1^p$$

Como g_1^p comuta com h , temos que: $(h^j g_1)^{p^n} = h^{jp^n} g_1^{p^n}$. Além disso, da relação $1 = g_1^{p^m} = (g^{p^n})^{ip^{m-n}} = h^{itp^{m-n}}$, nós temos $t = p^n \alpha$ e pelas relações precedentes que: $(h^{-i\alpha} g_1)^{p^n} = h^{-i\alpha p^n} g_1^{p^n} = h^{-it} g^{ip^n} = 1$.

Então a intersecção dos grupos cíclicos $\langle h \rangle$ e $\langle h^{-i\alpha} g_1 \rangle$ é igual a 1 e $\langle h \rangle$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$. Contradição com o lema 3.7, pois os elementos h e $h^{-i\alpha} g_1$ não comutam.

Portanto, se $p \neq 2$ então o centralizador do p -subgrupo de Sylow de H contém todos os elementos de ordem finita em G .

(c) $2^m \geq 2^{m_1}$.

Da relação $hg^2 = g^2h$ segue que $r^2 \equiv 1 \pmod{2^m}$ e $r \not\equiv 1 \pmod{2^m}$. Temos então três possibilidades para r : $r \equiv -1 \pmod{2^m}$, $r \equiv 1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}$, $r \equiv -1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}$. Além disso, da igualdade $gh^t g^{-1} = h^{tr} = h^t$ temos que $tr \equiv t \pmod{2^m}$.

Consideremos os subcasos:

(i) $r \equiv -1 \pmod{2^m}$ e A não é um grupo quatérnion. Então: $2t \equiv 0 \pmod{2^m}$, logo $t = 0$ ou $t = 2^{m-1}$. Consequentemente A deve ser de um dos seguintes tipos:

$$h^{2^m} = 1, g^{2^n} = 1, ghg^{-1} = h^{-1} \quad (3.3)$$

$$h^{2^m} = 1, g^{2^n} = h^{2^{m-1}}, ghg^{-1} = h^{-1} \quad (3.4)$$

No caso 3.3, o subgrupo cíclico $\langle h \rangle$ não é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$, pelo lema 3.7. Contradição. Portanto, A só pode ser um grupo do tipo 3.4.

O elemento

$$\begin{aligned} y &= 1 + (1 + g + \dots + g^{2^{m_1}-1})h(1 - g) \\ &= 1 + (1 + g + \dots + g^{2^n-1})(1 + h^{2^{m-1}})(h - h^{-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

pertence a $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$. Então $y^{-1}hy = h^i$ e $i \not\equiv 0 \pmod{2}$. Além disso, da igualdade $hy = yh^i$ e comparando os elementos da base que pertencem as classes laterais

$g\langle h \rangle$ e $\langle h \rangle$ obtemos que:

$$(1 + h^{2^{m-1}})(1 - h^{-2}) = (1 + h^{2^{m-1}})(h^{i+1} - h^{i-1}) \quad (3.6)$$

$$(1 + h^{2^{m-1}})(h^2 - 1) + h = (1 + h^{2^{m-1}})(h^{i+1} - h^{i-1}) + h^i \quad (3.7)$$

Como A não é um grupo quatérnion, $h^{2^{m-1}-2} \neq 1$ e comparando os elementos da base na equação 3.14 nós concluímos que: $h^{i+1+2^{m-1}} = 1$ ou $h^{i+1} = 1$. Suponhamos que $h^{i+1} = 1$. Nesse caso, $h^{2^{m-1}} = h^{2^{m-1}+1-i}$ e $h^{2^{m-1}-2} = h^{2^{m-1}+i-1}$. Portanto, $i \equiv -1 \pmod{2^m}$. Substituindo o valor de i na equação 3.11 concluiríamos que $h^{2^{m-1}-2} = 1$ o que é impossível. Além disso, se $h^{2^{m-1}+i+1} = 1$ então concluiríamos da equação 3.14 que $h^{2^{m-1}} = h^{i+1}$, o que implicaria que $2^{m-1} - 1 \equiv i \pmod{2^m}$ e novamente substituindo o valor de i na equação 3.11, obteríamos que $h^{2^{m-1}-2} = h^{2^{m-1}+2} = 1$, contradizendo a hipótese.

- (ii) $r \equiv 1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}$ e $m > 2$

Nesse caso $1 = g^{2^m} = h^{2^{m-n}}$ e $t = 2^n t_1$. Tomando $g_1 = h^j g$, nós obtemos que:

$$g_1^2 = h^j (gh^j g^{-1}) g^2 = h^{2j+2^{m-1}} g^2$$

a qual implica que:

$$g_1^{2^n} = h^{2^n j(1+2^{m-2})+2^n t_1},$$

pois g^2 é um elemento central de A . Se j for uma solução da congruência $j(1 + 2^{m-2}) + t_1 \equiv 0 \pmod{2^{m-n}}$ então $\langle g_1 \rangle \cap \langle h \rangle = 1$ e os elementos g e h não comutam. Contradição com o lema 3.7.

- (iii) $r \equiv -1 + 2^{m-1} \pmod{2^m}$ e $m > 2$

Então como no caso 1(c)ii, tome $t = 2^n t_1$ e $(-2 + 2^{m-1})t \equiv 0 \pmod{2^m}$. Portanto, obteríamos que $t \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$ e $g^{2^n} = h^{2^{m-1}t_2} = 1$ se 2 divide t_2 , onde $t = t_2 2^{m-1}$, o que é impossível.

Por outro lado, se 2 não divide t_2 , então:

$$g^{2^n} = h^{2^{m-1}} \quad e \quad y = 1 + (1 + g + g^2 + \cdots + g^{2^n-1})(1 + h^{2^{m-1}})h(1 - g)$$

é um elemento de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$. É claro que este elemento pode ser representado como:

$$y = 1 + (1 + g + g^2 + \cdots + g^{2^n-1})(1 + h^{2^{m-1}})(h - h^{-1}).$$

Portanto, $yhy^{-1} = h^i$ e repetindo o raciocínio do caso 1(c)i nós obtemos uma contradição.

□

Teorema 3.10. (*Bovdi, [15], teorema 7*) *Seja H um subgrupo periódico normal abeliano de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico G . Se G não contém um subgrupo quatérnion Q tal que $Q \cap H$ é um grupo cíclico de ordem 4, então H pertence ao centro de G .*

Demonstração: É uma consequência direta do teorema 3.2 e do teorema 3.9. $\square$

- (2) Suponha agora que G possua um subgrupo quatérnion Q tal que $Q \cap H$ seja um grupo cíclico de ordem 4.

Sem perda de generalidade vamos supor então que $H \triangleleft \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ e que G possua uma subgrupo quatérnion Q tal que $Q \cap H = \langle a \rangle$, onde Q é dado pelas seguintes relações: $Q = \{ \langle a, b \rangle \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \}$.

Vamos estudar, a seguir, algumas propriedades sobre $\mathcal{N}_G(Q)$ o normalizador de Q em G . Nos lemas que se seguem suponhamos que g seja um elemento de ordem 2^s que pertence a $\mathcal{N}_G(Q) \setminus Q$.

Lema 3.11. (*Bovdi, [15], lema 9*) *O elemento b pertence ao normalizador de qualquer subgrupo cíclico $\langle c \rangle$ tal que $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = \{1\}$.*

Demonstração: Como G é um grupo de torção, podemos supor que c possua ordem t . A seguir suponha que $bc b^{-1} \notin \langle c \rangle$. Então $y = \widehat{c}b(1 - c) \neq 0$. Como a e c são comutativos pelo lema 2, temos que:

$(1 - ny)a(1 + ny) = a + n(ay - ya) = a + n(a - a^3)y$ que é um elemento trivial e pertence a $\langle a \rangle$ para todo inteiro n , o qual implica que $(a - a^3)y = 0$. Consequentemente:

$$(1 - a^2) \sum_{i=1}^{t-1} c^i b = (1 - a^2) \sum_{i=1}^{t-1} c^i bc.$$

Como por hipótese, $\langle a \rangle \cap \langle c \rangle = \{1\}$, concluímos que os todos os elementos nos lados esquerdo e direito da igualdade são distintos entre si dois a dois. Segue então que $cb = c^i bc$ para algum i e $c^{-i+1} = bcb^{-1}$. Contradição. $\square$

Relembremos que os três lemas a seguir não se encontram nas hipóteses da seção:

Definição 3.12. *Seja G um grupo arbitrário. Um elemento $u \in \mathbb{Q}G$ é dito ser algébrico se ele for a raiz de algum polinômio $p(X)$ com coeficientes inteiros.*

Lema 3.13. (*Higman*) *Sejam G grupo abeliano finito de ordem n , $\mathbb{Q}G = I_1 \oplus \cdots \oplus I_k$, a decomposição do anel de grupo $\mathbb{Q}G$ como soma direta de corpos ciclotômicos, m_i o número de classes de resíduos módulo n em I_i relativamente primos com n , m o mínimo múltiplo comum de $m_1, \dots, m_k$. Então para qualquer inteiro algébrico $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Q}G)$ temos que $u^m \in \mathbb{Z}G$.*

Demonstração: Considere $A = \mathbb{Q}G$ e I_A o anel dos inteiros algébricos em A . Então temos que $\mathbb{Z}G \subseteq A$. Sendo G um grupo finito temos que I_A é um $\mathbb{Z}$ -módulo finitamente gerado, donde segue pela proposição 1.25 que $[\mathcal{U}(I_A), \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)] = m$ é finito. Desse fato segue imediatamente a tese. $\square$

Lema 3.14. *Sejam G um grupo finito e $e = \alpha_0 1 + \cdots + \alpha_n a_n$ um elemento idempotente não-nulo de $\mathbb{C}G$, I o ideal a esquerda gerado por $e \in \mathbb{C}G$, p o número de autovalores iguais a 1 da matriz correspondente ao idempotente e através da representação regular de $\mathbb{C}G$. Então a dimensão da álgebra I sobre $\mathbb{C}(\dim_{\mathbb{C}} I)$ é igual a p e $\alpha_0 = \frac{p}{n}$.*

Demonstração: Considere a decomposição de $\mathbb{C}G = I \oplus I_1$ em ideais a esquerda. Onde I e I_1 são gerados, respectivamente, pelos idempotentes correspondentes e e $1 - e$.

Vamos escolher uma base de $\mathbb{C}G$ formada pelos vetores $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_r$ de tal forma que os vetores $u_1, \dots, u_s$ formem uma base de I e os vetores $v_1, \dots, v_r$ formem uma base de I_1 .

Como $e_1 e = 0$ ($e_1 = 1 - e$), $e^2 = e$ então temos que $u_i e = u_i$ ($i = 1, \dots, s$), $v_j e = 0$ ($j = 1, \dots, r$). O que significa que ao elemento e na base $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_r$ corresponde uma matriz

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dos autovalores que são iguais a 1. Calculando o traço de α de duas maneiras obtemos por um lado que o traço de α é igual a $\alpha_0 n$ e por outro lado, temos que traço de α (= traço de E') é igual a p . Desta forma $s = p$ e $\alpha_0 = \frac{p}{n}$. Concluindo a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.15. *Seja G um grupo que pode ser representado como o produto direto dos grupos cíclico T_1 e T_2 de ordens, respectivamente, 4 e p , onde p é um inteiro primo maior que 3, T_1 e T_2 gerados, respectivamente, pelos elementos c e a . Sejam ξ uma raiz primitiva $4p$ -ésima da unidade, s o número de classes de resíduos módulo $4p$ no corpo $\mathbb{Q}(\xi)$, relativamente primas com $4p$. Então existe um inteiro s tal que:*

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{2q}(1 - c^2)[p - \hat{a}] + \frac{1}{2q}(1 + ac + a^2c^2)^s(1 - c^2)[p - \hat{a}] = \\ &= \Lambda_0 + \Lambda_1c + \Lambda_2c^2 + \Lambda_3c^3 \quad (\Lambda_i \in \mathbb{Q}T_2; 0 \leq i \leq 3) \end{aligned}$$

é um elemento invertível no anel de grupo $\mathbb{Z}G$, além disso, valem as relações:

$$\Lambda_i \neq 0 (i = 0, 1, 3), \Lambda_3 = -\Lambda_1 \quad e \quad \Lambda_j \neq \pm \Lambda_0 (j = 1, 2, 3).$$

Demonstração: Por hipótese temos que $G = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$. Conseqüentemente temos pelo lema 1.28:

$$\mathbb{Q}G = \mathbb{Q}(\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \cong \mathbb{Q}(\langle c \rangle) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\langle a \rangle). \quad (3.8)$$

Pela proposição 1.26 temos que:

$$\mathbb{Q}(\langle c \rangle) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \quad (3.9)$$

e que

$$\mathbb{Q}(\langle a \rangle) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\zeta_p), \quad (3.10)$$

onde i representa a unidade imaginária e ζ_p uma raiz primitiva p -ésima da unidade.

Observe que de 3.9 e 3.10 em 3.8, obtemos que:

$$\mathbb{Q}G \cong 2\mathbb{Q} \oplus 2(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_p)) \oplus \mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_p) \cong 2\mathbb{Q} \oplus 2\mathbb{Q}(\zeta_p) \oplus \mathbb{Q}(i) \oplus \mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_p). \quad (3.11)$$

Considere a seguir a álgebra de grupo $\mathbb{Q}(\langle a \rangle)$. Logo utilizando a proposição 1.11 e o lema 1.10 temos que:

$$\mathbb{Q}(\langle a \rangle) \cong \mathbb{Q}(\langle a \rangle) \left(\frac{\hat{a}}{p} \right) \oplus \mathbb{Q}(\langle a \rangle) \left(1 - \frac{\hat{a}}{p} \right), \quad (3.12)$$

onde $g_1 = \frac{\hat{a}}{p}$ e $g_2 = 1 - \frac{\hat{a}}{p}$ são os idempotentes centrais primitivos da álgebra de grupo $\mathbb{Q}(\langle a \rangle)$.

Considere a seguir a álgebra de grupo $\mathbb{Q}(\langle c \rangle)$. Temos pelo teorema do isomorfismo para anéis e pela proposição 1.26 que:

$$\frac{\mathbb{Q}(\langle c \rangle)}{\Delta(\langle c \rangle, \langle c^2 \rangle)} \cong \mathbb{Q} \left(\frac{\langle c \rangle}{\langle c^2 \rangle} \right) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}. \quad (3.13)$$

Pela proposição 1.11 e pelo lema 1.10 temos que

$$\Delta(\langle c \rangle, \langle c^2 \rangle) = \mathbb{Q}(\langle c \rangle) \left(\frac{1 - c^2}{2} \right).$$

Além disso, obtemos que:

$$\mathbb{Q}(\langle c \rangle) \left(\frac{1 + c^2}{2} \right) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}.$$

Donde obtemos os idempotentes

$$f_1 = \frac{\widehat{c}}{4} \quad \text{e} \quad f_2 = \left(\frac{1 + c^2}{2} - f_1 \right) = \frac{1 - c + c^2 - c^3}{4}. \quad (3.14)$$

Podemos concluir daí que f_1, f_2 e $f_3 = \frac{1 - c^2}{2}$ são os idempotentes centrais primitivos da álgebra de grupo $\mathbb{Q}(\langle c \rangle)$.

De 3.11 e utilizando os idempotentes das álgebras de grupo $\mathbb{Q}(\langle c \rangle)$ e $\mathbb{Q}(\langle a \rangle)$ obtidos em 3.12 e 3.14 podemos obter os idempotentes da álgebra de grupo $\mathbb{Q}G$, os quais são dados por:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{4p} \widehat{c} \widehat{a}; \\ e_2 &= \frac{1}{4p} (1 - c + c^2 - c^3) \widehat{a}; \\ e_3 &= \frac{1}{2p} (1 - c^2) \widehat{a}; \\ e_4 &= \frac{1}{4p} \widehat{c} (p - \widehat{a}); \\ e_5 &= \frac{1}{4p} (1 - c + c^2 - c^3) (p - \widehat{a}); \\ e_6 &= \frac{1}{2p} (1 - c^2) (p - \widehat{a}). \end{aligned}$$

O que implica que $\mathbb{Q}G$ possui uma decomposição em soma direta de corpos ciclotômicos da forma:

$$\mathbb{Q}G = I_1 \oplus \cdots \oplus I_6.$$

O elemento ace_6 em I_6 é uma raiz primitiva $4p$ -ésima da unidade. Na verdade, é claro que $(ace_6)^m = a^m c^m e_6 = e_6$ se e somente se $m \equiv 0 \pmod{4p}$.

Pelo lema 3.14 temos que a dimensão de I_6 sobre $\mathbb{Q}$ (observe que $\{\alpha e_6 \mid \alpha \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}e_6 \cong \mathbb{Q}$) é igual a $2(p-1) = \varphi(4p)$, onde φ denota a função de Euler. Isso implica que I_6 é isomorfo a $\mathbb{Q}(\xi)$. É claro que $\frac{1-\xi^3}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2$ é uma unidade em $\mathbb{Z}(\xi)$ pois a equação $3x \equiv 1 \pmod{4p}$ admite solução (visto que $p > 3$).

Conseqüentemente temos que $(1 + ac + a^2c^2)e_6$ é uma unidade inteira em I_6 . O que por sua vez implica que $y = e_1 + \cdots + e_5 + (1 + ac + a^2c^2)e_6$ é uma unidade inteira de $\mathbb{Q}G$. Segue pelo lema 3.13 que existe um inteiro s tal que:

$$\begin{aligned} u &= y^s = e_1 + \cdots + e_5 + (1 + ac + a^2c^2)^s e_6 = \\ &= 1 - \frac{1}{2p}(1 - c^2)((p - \widehat{a}) + \\ &+ \frac{1}{2p}(1 + ac + a^2c^2)^s(1 - c^2)(p - \widehat{a}) \end{aligned}$$

é uma unidade em $\mathbb{Z}G$.

Consideremos

$$\frac{1}{2p}((p - 1) - a - \cdots - a^{p-1}) = A; (1 + ac + a^2c^2)^s = B_0 + B_1c + B_2c^2 + B_3c^3$$

$$(B_i \in \mathbb{C}T_2, i = 0, \dots, 3).$$

Então:

$$u = \Lambda_0 + \Lambda_1c + \Lambda_2c^2 + \Lambda_3c^3,$$

onde,

$$\Lambda_0 = (B_0 - B_2 + 1)A + 1; \Lambda_1 = (B_1 + B_3)A; \quad (3.15)$$

$$\Lambda_2 = (B_2 - B_0 + 1)A; \Lambda_3 = (B_3 - B_1)A. \quad (3.16)$$

De 3.15 segue imediatamente que $\Lambda_0 \neq 0$; $\Lambda_i \neq \pm\Lambda_0 (i = 1, 2, 3)$, caso contrário a unidade do anel de grupo $\mathbb{Q}T_2$ pertenceria ao ideal gerado pelo idempotente $\frac{1}{p}(p - \widehat{a})$, o que é uma contradição. O fato que $\Lambda_3 = -\Lambda_1$ é trivial.

Suponhamos agora que $\Lambda_1 = 0$ então teríamos que $\Lambda_3 = 0$ e $u = \Lambda_0 + \Lambda_2c^2$. Elevando o elemento $1 + \xi + \xi^2$ a potência s (e tomando os graus módulo $4p$) obtemos que:

$$(1 + \xi + \xi^2)^s = \xi^{2s} + \cdots \quad (3.17)$$

Ou seja, concluímos que não existem termos ξ com grau ímpar no lado direito da igualdade acima, o que implica que

$$(1 + \xi + \xi^2)^s = (1 - \xi + \xi^2)^s. \quad (3.18)$$

Segue de 3.18 que:

$$|1 + \xi + \xi^2| = |1 - \xi + \xi^2|. \quad (3.19)$$

No entanto, isso não pode ocorrer, visto que os vetores ξ e $1 + \xi^2$ são linearmente dependentes sobre $\mathbb{C}$. Obtemos uma contradição, concluindo a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.16. (*Bovdi, [15], lema 10*) *O normalizador $\mathcal{N}_G(Q)$ do subgrupo dos quatérnions de ordem 8 não possui elementos de ordem ímpar.*

Demonstração: Suponha que $g \in \mathcal{N}_G(Q)$ e g seja um elemento de ordem prima q .

Os únicos casos possíveis são:

(a) $gb = bg$ e $q = 3$.

Nesse caso seja $L = \langle g \rangle \times \langle b \rangle$. Então $x = 1 + [225(2 - g - g^2) + 390(bg^2 - bg)](1 - b^2)$ é um elemento invertível do anel de grupo $\mathbb{Z}L$, sendo seu inverso dado por: $x^{-1} = 1 + [225(2 - g - g^2) - 390(bg^2 - bg)](1 - b^2)$. Pelo teorema 3.5, $x^{-1}ax \in \langle a \rangle$, no entanto, verificando diretamente concluímos que $ax \neq xa$ e $ax \neq xa^3$. Contradição.

(b) $gb = bg$ e $q > 3$. Sejam ξ uma raiz primitiva $4q$ -ésima da unidade e s o número de classes de restos módulo $4q$ no corpo $\mathbb{Q}(\xi)$ as quais são relativamente primas com $4q$. Então, pelo lema 3.15 temos que existe um inteiro s tal que:

$$x = 1 - \frac{1}{2q}(1 - b^2)[q - \widehat{g}] + \frac{1}{2q}(1 + gb + g^2b^2)^s(1 - b^2)[q - \widehat{g}]$$

é um elemento invertível no anel de grupo $\mathbb{Z}L$.

Podemos escrever x na forma:

$$x = \Lambda_0 + \Lambda_1b + \Lambda_2b^2 + \Lambda_3b^3,$$

onde os Λ_i são elementos do anel de grupo inteiro do grupo cíclico $\langle g \rangle$, satisfazendo as relações: $\Lambda_i \neq 0 (i = 0, 1, 3)$, $\Lambda_3 = -\Lambda_1$ e $\Lambda_j \neq \pm\Lambda_0 (j = 1, 2, 3)$.

Pelo teorema 3.5 temos que $ax = xa$ ou $xa = a^3x$. Se $ax = xa$ então $\Lambda_1 = \Lambda_3$, e se $xa = a^3x$ então obtemos que $\Lambda_0 = \Lambda_2$, as quais contradizem a relação anterior.

(c) $gb \neq bg$.

Pelo lema 3.11, temos que $gb = bg^j (j > 0)$ e como $b^2 = a^2$, temos que:

$$g = b^{-2}gb^2 = g^{j^2}.$$

Portanto, $j^2 \equiv 1 \pmod{q}$ donde $j \equiv q - 1 \pmod{q}$ ou $j \equiv 1 \pmod{q}$.

Se $j \equiv 1 \pmod{q}$ então concluiríamos que g e b comutam. Contradição. Suponhamos agora que $j \equiv q - 1 \pmod{q}$. Nesse caso, obteríamos que:

$$gb = bg^{q-1}. \quad (3.20)$$

Por outro lado, temos que $g \in \mathcal{N}_G(Q)$, o qual implica que $gb = ba^i g$ e comparando com 3.20, obtemos que $bg^{-1} = ba^i g$, donde $g^2 = a^{-i}$. O que é impossível.

□

Lema 3.17. (*Bovdi*, [15], lema 12) *Os elementos de ordem ímpar em G formam um subgrupo normal abeliano L , $b^{-1}gb = g^{-1}$, para qualquer $g \in L$; e em particular, todo subgrupo de L é normal em G .*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que todo subgrupo cíclico $\langle c \rangle$ de ordem ímpar k de G é normal em G .

Suponhamos que $c' = d^{-1}cd \notin \langle c \rangle$, para algum $c' \in G$ e que c possua ordem $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, onde $p_i, 1 \leq i \leq s$, primos distintos. Pelo lema 3.7, os elementos a e c comutam, e pelo lema 3.11, $b \in \mathcal{N}_G(\langle c \rangle)$. Podemos representar c na forma $c = c_1 c_2 \cdots c_s$, onde cada c_i possui ordem $p_i^{\alpha_i}$. Pelo lema 3.11, $b \in \mathcal{N}_G(\langle c_i \rangle)$ e da equação $bc_i b^{-1} = c_i^e$ (observe que $b\hat{c} = \hat{c}b$) segue que $e^2 \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ e pelo lema 3.16 obtemos que $e = -1$. Logo $b^{-1}cb = c^{-1}$.

Aplicando o teorema 3.5 ao subgrupo cíclico $\langle a \rangle$, temos as seguintes possibilidades:

(a) $d^{-1}ad = a$

Nesse caso, $y = b\hat{c}d(1 - c)$ é um elemento nilpotente não-nulo, $y^2 = 0$ (pois $b\hat{c} = \hat{c}b$). Além disso, $(1 + ny)a(1 + ny) = a + (a^3 - a)yn$ pertence a $\langle a \rangle$ para qualquer inteiro n , o que é possível se $(a^3 - a)y = 0$. Segue daí que: $a^2\hat{c}(1 - c') = \hat{c}(1 - c')$ e comparando os dois lados da igualdade concluímos que $a^2 = c^i$ para algum i . Contradição.

(b) $d^{-1}ad = a^3$

Nesse caso, considerando $y = \hat{c}d(1 - c)$ e repetindo o raciocínio anterior, obtemos uma contradição.

□

Teorema 3.18. (*Bovdi*, [15], teorema 10) *Suponha que o subgrupo abeliano periódico H de G é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, e G contém um subgrupo quatérnion Q tal que $Q \cap H = \langle a \rangle$ seja um grupo cíclico de ordem 4. Então:*

- (a) *O centralizador $C_{S_2}(\langle a \rangle)$ do subgrupo normal cíclico $\langle a \rangle$ num 2-subgrupo de Sylow $S_2 \subseteq G$, o qual contém o subgrupo dos quatérnions Q , é um subgrupo normal abeliano de índice 2, e para qualquer $x \in S_2, x \notin C_{S_2}(\langle a \rangle), x^2 = a^2$ e $x^{-1}yx = y^{-1}, (y \in C_{S_2}(\langle a \rangle))$.*
- (b) *Os elementos de ordem ímpar em G formam um subgrupo abeliano normal L , todo subgrupo de L é um subgrupo normal de G , e $x^{-1}yx = y^{-1} (y \in L)$ para qualquer 2-elemento x que não pertença a $C_{S_2}(\langle a \rangle)$.*
- (c) *O subgrupo normal H coincide com o grupo cíclico $\langle a \rangle$ de ordem 4 ou pode ser representado como o produto direto de $\langle a \rangle$ e um grupo com expoente dois.*

Demonstração: Seja S_2 um 2-subgrupo de Sylow de G que contém um subgrupo quatérnion Q tal que o grupo $Q \cap H$ seja cíclico de ordem 4. Então tomando $N = C_{S_2}(\langle a \rangle)$, temos que N é um subgrupo normal de S_2 de índice 2 pelo teorema 3.5, visto que $b \notin N$.

Afirmamos inicialmente que se h é um elemento de ordem 2^s em S_2 então $h^2 = a^2$.

Pelo lema 3.7, temos que $\langle a \rangle \cap \langle h \rangle$ é um grupo cíclico de ordem 2. Se $s > 2$ então considere $A = \langle a, h \rangle$. Como o elemento h^2 é central em A , temos que o subgrupo $B = \langle a \rangle \langle h^2 \rangle$ é um subgrupo normal abeliano de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$. Nesse caso podemos decompor B como $B = \langle h^2 \rangle \times \langle h' \rangle$, onde $\langle h' \rangle$ é cíclico de ordem 2. Pelo teorema 3.5 concluímos que $\langle h' \rangle$ é normal em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$. Contradição, pois os elementos a' e h não comutam. Portanto, concluímos que $s = 2$. E se $g \in N$ e $h \in S_2 \setminus N$ temos que $(hg)^2 = a^2$ ou seja, $hgh^{-1} = g^{-1}$.

Afirmamos a seguir que o grupo N é abeliano.

Sejam c e d elementos de N . Da relação que vimos anteriormente temos que:

$$cd = b^{-1}(cd)^{-1}b = b^{-1}d^{-1}c^{-1}b = (db)^{-1}c^{-1}d^{-1}(db) = dc.$$

Seja

$$H = W_2 \times W_{p_1} \times \cdots \times W_{p_t},$$

a decomposição do grupo H no produto direto dos seus p -subgrupos de Sylow. W_{p_i} é um subgrupo normal de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ e o centralizador W_p ($p \neq 2$) contém todos os elementos de ordem finita em G conforme a demonstração do teorema 3.9. Contradição com o lema 3.17, donde concluímos que $H = W_2$.

Consideremos agora $A = \langle b, h \rangle$, $h \in H$, $b^{-1}hb = h^{-1}$. Segue pelo teorema 2 que o subgrupo $\langle h \rangle$ é normal em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}A)$, o que é possível, somente se $h^2 = 1$ ou $h^2 = a^2$ conforme a demonstração do teorema 3.9.

□

3.2.3 Estrutura dos grupos periódicos G tais que $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ contém um subgrupo normal periódico abeliano não-central

Definição 3.19. Diremos que G é um Q^* -grupo se G possuir um subgrupo normal abeliano L de índice 2 com um elemento a de ordem 4 tal que para todo $g \notin L$, $g^2 = a^2$ e $g^{-1}hg = h^{-1}$, para todo h em L .

Teorema 3.20. (Bovdi,[15], teorema 11) Seja G um grupo periódico. $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ contém um subgrupo periódico normal abeliano não central se e somente se G for um Q^* -grupo.

Demonstração: Suponha que $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ contém um subgrupo periódico normal abeliano não central. Então o resultado é uma consequência dos teoremas 3.2, 3.10 e 3.18.

Reciprocamente, mostraremos que $\langle a \rangle \triangleleft \mathcal{U}$.

Qualquer que seja $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, x pode ser escrito como $x = x_1 + x_2b$, onde x_1 e $x_2 \in \mathbb{Z}L$, $b \notin L$.

Utilizando as propriedades de involução, temos que:

$$\begin{aligned} axx^* &= a(x_1 + x_2b)(x_1 + x_2b)^* = a(x_1 + x_2b)(x_1^* + b^*x_2^*) = a(x_1 + x_2b)(x_1^* + b^{-1}x_2^*) = \\ &= a(x_1 + x_2b)(x_1^* + x_2b^{-1}) = a(x_1x_1^* + x_1x_2b^{-1} + x_2bx_1^* + x_2bx_2b^{-1}) = a(x_1x_1^* + x_1x_2b^3 + bb^{-1}x_2bx_1^* + \\ &+ x_2bx_2b^{-1}) = a(x_1x_1^* + x_1x_2b^3 + bx_2^*x_1^* + x_2x_2^*) = a(x_1x_1^* + x_1x_2b^3 + b(x_1x_2)^* + x_2x_2^*) = a(x_1x_1^* + \\ &+ x_1x_2b^3 + x_1x_2b + x_2x_2^*) = a(x_1x_1^* + x_2x_2^* + x_1x_2(1 + a^2)b) = xx^*a, \text{ pois } bxb^{-1} = x^*, \text{ para todo } \\ &x \in \mathbb{Z}L. \end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que: $axx^* = xx^*a$.

Utilizando a relação acima temos:

$$(x^{-1}ax)(x^{-1}ax)^* = x^{-1}axx^*a^*(x^{-1})^* = x^{-1}axx^*a^3(x^*)^{-1} = x^{-1}xx^*\underbrace{aa^3}_{=1}(x^*)^{-1} = 1.$$

Pelo lema 1.17, aplicada a igualdade acima concluímos que

$$x^{-1}ax = g \in G. \quad (3.21)$$

Afirmamos que $g \in L$.

Suponhamos, por absurdo, que $g \notin L$. Como L é um subgrupo de G de índice 2, g pode expresso na forma $g = hb$, para algum $h \in L$.

$$\text{E da igualdade } a(x_1 + x_2b) \underbrace{=}_{5.12} (x_1 + x_2b)g = x_1g + x_2bg = x_1hb + x_2h^{-1}a^2.$$

Nós obtemos então:

$$a(x_1 + x_2b) = x_1hb + x_2h^{-1}a^2$$

$$x_1 + x_2b = a^{-1}x_1hb + a^{-1}x_2h^{-1}a^2$$

$$\text{Donde concluímos que: } x_1 = a^{-1}x_2h^{-1}a^2.$$

Aplicando o homomorfismo de aumento ε a unidade x , nós obtemos:

$$1 = \varepsilon(x) = \varepsilon(a^{-1}x_2h^{-1}a^2) + \varepsilon(x_2b) = \varepsilon(a^{-1})\varepsilon(x_2)\varepsilon(h^{-1})\varepsilon(a^2) + \varepsilon(x_2)\varepsilon(b) = 2\varepsilon(x_2)$$

O que é absurdo pois $\varepsilon(x_2) \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $g \in L$ e $g^2 = a^2$.

É fácil de observar que o subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ é normal em G .

Seja $\psi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/\langle a \rangle)$, epimorfismo canônico. Obtemos então que $\psi(g) = \psi(x^{-1}ax) = \bar{1}$. Logo $g \in \text{Ker}\psi \cap G = \langle a \rangle$. Assim temos que $g \in \{a, a^{-1}\}$, pois a é um elemento de ordem 4. Portanto, podemos concluir daí que $x^{-1}ax = a$ ou $x^{-1}ax = a^3$ e a tese segue.

□

3.3 Um teorema de Bovdi

Sejam G um grupo periódico e $\mathcal{U}$ o respectivo grupo de unidades de $\mathbb{Z}G$. Nessa seção utilizaremos os resultados obtidos nas seções anteriores com o objetivo de obtermos uma caracterização dos grupos periódicos G em função do subgrupo dos elementos de torção do hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Seja G um grupo periódico e seja

$$(1) = Z_0(\mathcal{U}) \leq Z_1(\mathcal{U}) \leq \cdots \leq Z_n(\mathcal{U}) \leq \dots$$

a série central superior do grupo de unidades $\mathcal{U}$.

Denotaremos por $\tilde{Z}(\mathcal{U})$ o hipercentro de $\mathcal{U}$. Relembramos também que $\tilde{Z}(\mathcal{U})$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}$, além disso, se $T = T(\tilde{Z}(\mathcal{U}))$ denotar o conjunto de todas as unidades de torção em $\tilde{Z}(\mathcal{U})$ com aumento 1, então T é um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}$.

Passamos então a enunciar o resultado principal desse capítulo.

Teorema 3.21. ([Bovdi][14] e [15]) *Seja G um grupo periódico. Então ocorre exatamente um dos seguintes casos:*

- (1) G é um 2-grupo Hamiltoniano e $T = G$;
- (2) $T = Z_1(G)$;
- (3) G possui um subgrupo normal H de índice 2 contendo um elemento a de ordem 4 tal que para cada $g \in G \setminus H$, $g^2 = a^2$ e $ghg^{-1} = h^{-1}$ para todo $h \in H$, e $T = \langle a \rangle \oplus E = Z_2(\mathcal{U}) \cap Z_2(G)$ onde E é um 2-grupo abeliano elementar.

Observação 3.22. *Ressaltamos que se G é um Q^* -grupo então $Z_1(G) = \{y \in G \mid y^2 = 1\}$ e o expoente de T é 4, onde T denota o subgrupo dos elementos de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$.*

Observação 3.23. *Utilizando a proposição 1.30, concluímos que no caso (1) do Teorema 3.21, $G = Q \times E$, onde Q é o grupo dos quatérnions de ordem 8 e E é um 2-grupo abeliano elementar. Além disso, o lema 1.19 nos diz que $\mathcal{U} = \pm G$.*

Vamos agora provar o teorema 3.21.

Demonstração: Já vimos que T é um subgrupo normal periódico de $\mathcal{U}$. Pelo teorema 3.2 concluímos que todo subgrupo de T é normal em G , em particular, o próprio T .

Se T não for abeliano e sendo G um grupo periódico, segue do teorema 3.8 que G deve ser um 2-grupo Hamiltoniano.

Suponhamos, agora, que T seja abeliano. Nesse caso, podem ocorrer dois fatos:

- $T \leq Z_1(G)$, e nesse caso a condição (2) do teorema 3.21 é satisfeita, ou
- Pelo teorema 3.20, T deve ser um grupo do tipo mostrado em (3) no enunciado do teorema 3.21, e neste caso $\langle a \rangle \triangleleft \mathcal{U}$, (conforme a recíproca na demonstração do teorema 3.20), e portanto, $a \in Z_2(\mathcal{U})$. De fato, considere a projeção natural $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}/\mathcal{Z}(\mathcal{U}) := \bar{\mathcal{U}}$, onde $\varphi(a) = \bar{a}$. Como $\langle a \rangle \triangleleft \mathcal{U}$, então $\langle \bar{a} \rangle \triangleleft \bar{\mathcal{U}}$ e como $a^2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{U})$ segue que $o(\bar{a}) = 2$ logo, $\bar{a} \in \mathcal{Z}(\bar{\mathcal{U}})$. Portanto, $\langle a \rangle \subseteq \varphi^{-1}(\langle \bar{a} \rangle) \subseteq \varphi^{-1}(\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{U}})) =: Z_2(\mathcal{U})$. Onde $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{U}}))$ indica a imagem inversa de $\mathcal{Z}(\bar{\mathcal{U}})$ em $\mathcal{U}$. Logo $a \in Z_2(\mathcal{U})$.

A estrutura de T segue do teorema 3.18(c) e é claro que $T \leq Z_2(G)$. Como todos os elementos de G possuindo ordem 2 são centrais em $\mathcal{U}$, concluímos que $T \leq Z_2(\mathcal{U})$ e portanto, $T = Z_2(\mathcal{U}) \cap Z_2(G)$.

□

Capítulo 4

A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo finito

Ressaltamos que neste capítulo, salvo menção em contrário, o grupo G será sempre um grupo finito.

Neste capítulo passamos a estudar a série central superior de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$, de um grupo finito G , com o objetivo de obtermos mais informações sobre a estrutura de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Já vimos no capítulo 2 que o teorema de Gruenberg desempenha um papel fundamental em nosso estudo pois nos garantirá que a altura central de $\mathcal{U}$ é finita. Esse resultado é crucial e justifica o estudo do hipercentro de $\mathcal{U}$.

No entanto, ainda surgem algumas questões que desejamos discutir neste capítulo. A altura central de $\mathcal{U}$ sendo finita, dependeria do grupo G em questão? Seria possível, caracterizarmos os grupos G em função da altura central de $\mathcal{U}$?

Tendo em mente essas questões, nossos objetivos principais nesse capítulo serão: Mostrar que a altura central de $\mathcal{U}$ é finita; obter uma caracterização para o hipercentro de $\mathcal{U}$ em função do subgrupo de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$; caracterizarmos os grupos G em função da altura central de $\mathcal{U}$; além de procurarmos mostrar a relação entre a Conjectura do Normalizador e as unidades hipercenrais.

4.1 A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é finita

Demonstraremos aqui o resultado do Capítulo 2 quando enunciamos o teorema de Gruenberg. Veremos então como o teorema de Gruenberg e o teorema de Borel-Chandra nos garantirão que a série central superior de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ estaciona.

Antes de mais nada introduzimos algumas definições:

Definição 4.1. *Sejam R um domínio de integridade noetheriano com corpo de quocientes K .*

Para qualquer K -espaço V de dimensão finita, um R -lattice em V é um R -módulo M finitamente gerado tal que $KM = V$, onde

$$KM = \left\{ \sum \alpha_i m_i (\text{somas finitas}) \mid \alpha_i \in K, m_i \in M \right\}.$$

Definição 4.2. *Sejam R um domínio de integridade noetheriano com corpo de quocientes K , A uma K -álgebra de dimensão finita.*

Uma R -ordem numa K -álgebra A é um subanel Λ de A , possuindo o mesmo elemento unidade de A , tal que Λ é um R -lattice em A .

Vamos supor, até o momento, o teorema conhecido de Borel-Chandra e apresentaremos uma idéia não rigorosa da demonstração desse teorema no apêndice da dissertação.

Teorema 4.3. (Borel-Chandra) *Sejam A um $\mathbb{Q}$ -álgebra de dimensão finita e O uma $\mathbb{Z}$ -ordem em A . Então o grupo de unidades de O é finitamente gerado.*

Teorema 4.4. *Seja G um grupo finito então $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ pode ser considerado como grupo linear finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que, via representação regular, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é um grupo linear sobre $\mathbb{Z}$.

Seja $T : \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) \mapsto M_n(\mathbb{Z})$ definida por $T(\alpha) = T_\alpha$, onde $T_\alpha : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}G$ é definida por $T_\alpha(x) = \alpha x$, a representação regular de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ e n é a ordem do grupo G . Se $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ então observamos que $T_\alpha(x) = (\sum_{g \in G} \alpha_g g)(x) = \sum_{g \in G} \alpha_g (gx) = \sum_{g \in G} \alpha_g T_g(x)$, ou seja observamos que a representação regular de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é totalmente caracterizada pela representação regular do grupo G .

Enumerando os elementos de G de alguma maneira: $\{1, g_1, \dots, g_n\}$ é fácil de observarmos que $T_g(g_i) \neq g_i$ para todo $g \neq 1$, o que nos mostra que a matriz de T é uma matriz de permutação com traço zero. No caso em que $g = 1$, obtemos que a matriz de T é a matriz identidade de ordem $|G|$.

Não é difícil de observar que a representação regular é um monomorfismo. Segue desse fato e dos fatos mencionados anteriormente que podemos considerar $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ como grupo linear sobre $\mathbb{Z}$. Observe que neste caso, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G) \cong T(\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G))$.

Sendo G um grupo finito, temos que $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}$ -uma ordem em $\mathbb{Q}G$. Consequentemente, pelo teorema 4.3 temos que o grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é finitamente gerado.

Dos fatos acima, segue imediatamente a tese.

□

Provaremos agora o resultado principal dessa seção.

Teorema 4.5. *Seja G um grupo finito então $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui altura central finita.*

Demonstração: Seja G grupo finito. Então pelo teorema 4.4 podemos considerar o grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ como grupo linear finitamente gerado sobre $\mathbb{Z}$.

Sendo $\mathbb{Z}$ um anel comutativo, temos pelo teorema de Gruenberg (teorema 2.19) que o grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui altura central finita, o que conclui a demonstração do teorema.

□

4.2 Uma estimativa para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ utilizando a Conjectura do Normalizador

Enunciamos, primeiramente, a Conjectura do Normalizador:

(NC) Seja $N_{\mathcal{U}}(G)$, o normalizador de G em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ então $N_{\mathcal{U}}(G) = GZ_1(\mathcal{U})$.

Essa Conjectura surgiu quando Jackowski e Marciniak estudavam os grupos de automorfismos de grupos topológicos que induziam a aplicação identidade em Cohomologia entre outros temas. Ou seja ela tem origem num problema topológico. Ao estudarem esses grupos de automorfismos de grupos topológicos e a sua relação com outros grupos de automorfismos mais conhecidos, eles obtiveram uma série de resultados que originaram a Conjectura do Normalizador.

Já vimos na seção anterior que a altura central de $\mathcal{U}$ é finita. É natural perguntar como podemos determinar um limitante superior para a altura central de $\mathcal{U}$. Nesse contexto, nos propomos a utilizar a Conjectura do Normalizador para obtermos uma estimativa para o limitante superior da altura central de $\mathcal{U}$, o qual será o nosso objetivo principal nesta seção.

4.2.1 Notação e algumas definições

Introduzimos algumas definições básicas e a notação que será empregada no restante do capítulo.

Definição 4.6. *Seja π um conjunto de inteiros primos. Então diremos que G é um π -grupo se a ordem de G for divisível somente por primos de π e G será um π' -grupo se $|G|$ não for divisível por nenhum primo p em π .*

Definição 4.7. Diremos que G é um grupo p -constrained se ele satisfaz a seguinte propriedade: Se P é um S_p -subgrupo de $O_{p,p'}(G)$ então $C_G(P) \subseteq O_{p,p'}(G)$.

4.2.2 A estimativa para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Procuramos obter uma estimativa para o limitante superior para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. No caso em que o grupo G é finito e não solúvel, usaremos um resultado de Gross para mostrar que nesse caso a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2. Por outro lado, ao estudarmos os grupos finitos G tais que vale NC veremos que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ também é no máximo 2. Logo, seria razoável conjecturarmos que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é menor ou igual a 2.

Lema 4.8. Seja G um grupo finito e suponha que vale NC para G . Então $Z_n(\mathcal{U}) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Demonstraremos por indução em n . É suficiente mostrarmos que $Z_n(\mathcal{U}) \subseteq N_{\mathcal{U}}(G)$, para todo $n \geq 2$.

O caso $n = 1$ é imediato.

Suponhamos agora que a afirmação é válida para $n = k - 1 \geq 3$ e iremos mostrar que ela é válida para k .

Sejam $u_k \in Z_k(\mathcal{U})$, $g \in G$. Então temos que $[u_k, g] = u_{k-1} \in Z_{k-1}(\mathcal{U})$. Pela hipótese de indução, temos que $Z_{k-1}(\mathcal{U}) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$, portanto, $u_{k-1} = g_1w$ para algum $g_1 \in G$, $w \in Z_1(\mathcal{U})$. Segue daí que $[u_k, g] = u_{k-1} = g_1w$. Donde temos que $u_k^{-1}g^{-1}u_k = g_2w$, onde $g_2 = g_1g$. Elevando ambos os membros da igualdade a ordem do grupo G , obtemos que w é uma unidade central de ordem finita. Segue pelo lema 1.16 que c é uma unidade trivial. Logo $u_k \in N_{\mathcal{U}}(G)$. Como vale NC para G temos que $u_k \in GZ_1(\mathcal{U})$. Assim, $Z_n(\mathcal{U}) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$.

□

Teorema 4.9. (Gross, [25]) Sejam G um grupo finito e p um inteiro primo. Se $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ então todo automorfismo de G , que induza a identidade sobre um p -subgrupo de Sylow P , é interno.

Demonstração: Seja $\rho|_P = id$ um automorfismo nas hipóteses do teorema. Então temos que $\rho|_P$ é a identidade em $O_p(G) \leq G$. Seja $g \in O_p(G)$. Segue que para todo $x \in G$ temos que $x^{-1}gx \in O_p(G)$. Logo $\rho(x)^{-1}g\rho(x) = \rho(x^{-1}gx) = x^{-1}gx$. O que implica que $x^{-1}\rho(x) \in C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$, para todo $x \in G$. Segue daí que $x^{-1}\rho(x)$ é central em $O_p(G)$. Construimos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/A \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \rho & & \downarrow = \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/A \longrightarrow 1 \end{array}$$

Consideremos agora o cociclo $\delta : G/A \rightarrow A$, $\delta([x]) = x^{-1}\rho(x)$, onde $A = Z(O_p(G))$. Como A é um p -grupo, temos que a aplicação restrição $res : H^1(G/A, A) \rightarrow H^1(P/A, A)$ é injetiva (pois, $H^1(P/A, A)$ é um p -grupo). Mas por outro lado temos que $res[\delta] = 0$, pois $\delta([x]) = 0$ para $x \in P$. Donde concluímos que $[\delta] = 0$ e ρ é um automorfismo interno.

□

Considere a seguir o homomorfismo $\Phi_0 : Aut(G) \rightarrow Aut(\mathbb{Z}G)$, onde $\Phi_0(\varphi)$ é definido como $\Phi_0(\varphi)(\alpha) = \Phi_0(\varphi)(\sum_{g \in G} \alpha_g g) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varphi(g)$.

Como $\Phi_0(Inn(G)) \subseteq Inn(Aut(\mathbb{Z}G))$ concluímos que Φ_0 induz um homomorfismo $\Phi = \Phi_{\mathbb{Z}}(G) : Out(G) \rightarrow Out(\mathbb{Z}G)$. Observe que se $\varphi \in Out(G)$ então $\varphi \in Ker((\Phi_{\mathbb{Z}}(G)))$ se e somente se $Inn(Aut(\mathbb{Z}G))$, ou seja, $\varphi = \varphi_u$, para alguma unidade $u \in \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$; onde $\varphi_u(g) = u^{-1}gu, g \in G$. O que nos mostra que vale NC se e somente se $Ker((\Phi_{\mathbb{Z}}(G))) = 1$.

Corolário 4.10. *Sejam G um grupo finito e p um inteiro primo. Se $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ então $Ker(\Phi_{\mathbb{Z}}(G)) = 1$. Em particular, temos que nessas condições vale NC para o grupo G .*

Demonstração: Seja $\rho \in Ker(\Phi)$. Então pelo lema 1.24 nós podemos supor que ρ centraliza P , onde P é um subgrupo de Sylow de G fixado. Utilizando um raciocínio análogo ao que empregamos acima, concluímos que $Ker(\Phi_{\mathbb{Z}}(G)) = 1$.

□

Antes de demonstrarmos o próximo corolário do teorema de Gross, lembremos do seguinte:

Lema 4.11. *([17]) Seja G um grupo p -constrained. Nesse caso se $\overline{G} = G/O_{p'}(G)$. Então $C_G(O_p(\overline{G})) \subseteq O_p(\overline{G})$. Em particular, se $O_{p'}(G) = 1$ então $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$.*

Corolário 4.12. *Seja G um grupo finito não solúvel. Então $Z_2(\mathcal{U}) = Z_1(\mathcal{U})$.*

Demonstração: Suponha que G seja um contraexemplo minimal e seja F o subgrupo de Fitting de G . Afirmamos inicialmente que podemos supor que F seja um p -grupo para algum primo p . Sejam $u \in Z_2(\mathcal{U}), g \in G$. Sabemos que $[u, g] = \rho(g)$ para algum $\rho(g) \in Z_1(G)$. Consequentemente temos que $u^{-1}gu = \rho(g)g$. Se $\rho(g)$ não for trivial segue que $Z(G)$ é não trivial, o que implica que F não é trivial, visto que $Z(G) \subseteq F$.

Suponha que p e q sejam primos distintos que dividem a ordem de F e que $Z_2(\mathcal{U}) \not\subseteq Z_1(\mathcal{U})$. Seja $u \in Z_2(\mathcal{U}) \setminus Z_1(\mathcal{U})$. Então existe $g \in G$ tal que $[u, g] \neq 1$.

Como F é nilpotente (pois o grupo G é finito), temos então que $Syl_p(F) \triangleleft G$ e $Syl_q(F) \triangleleft G$.

Considere o epimorfismo canônico $\pi : \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}(G/Syl_p(F))$. Aplicando π a $[u, g]$ obtemos que $\overline{[u, g]} = \bar{1}$ visto G ser um contraexemplo minimal. Concluimos daí que $[u, g] \in Syl_p(F)$. Com raciocínio análogo tomando $\pi_1 : \mathbb{Z}G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}(G/Syl_q(F))$ obtemos que $[u, g] \in Syl_q(F)$. Consequentemente temos que $[u, g] \in Syl_p(F) \cap Syl_q(F) = (1)$. Contradição. Logo podemos supor que F seja um p -grupo para algum primo p e logo, $F = O_p(G)$.

Afirmamos que $O_{p'}(G) = 1$.

Suponha que $O_{p'}(G)$ fosse diferente de 1. Então, empregando o mesmo raciocínio acima e utilizando o fato que $O_p(G) \cap O_{p'}(G) = 1$, obteríamos uma contradição. Donde $O_{p'}(G) = 1$. Logo, pelo lema 4.11 segue que $C_G(F) = C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ e portanto, G satisfaz as hipóteses do teorema de Gross.

Assim, se $u \in Z_2(\mathcal{U}) \setminus Z_1(\mathcal{U})$. Então, pelo corolário 4.10 (do teorema de Gross) segue que $u = gw$ para algum $g \in G$ e algum $w \in Z_1(\mathcal{U})$, onde $g \notin Z_1(\mathcal{U})$. Como g é um elemento de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$ segue pelo teorema 3.21 que G é um 2-grupo Hamiltoniano ou G é um Q^* -grupo, os quais são ambos grupos solúveis, contradição. Logo $u \in Z_1(\mathcal{U})$, o que implica que $Z_2(\mathcal{U}) = Z_1(\mathcal{U})$. $\square$

Finalmente, podemos obter uma estimativa para a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ através do seguinte lema:

Lema 4.13. *Seja G um grupo finito e suponha que vale NC para G . Então a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2.*

Demonstração: Suponha que $u \in \tilde{Z}(\mathcal{U}) \setminus Z_1(\mathcal{U})$, onde $\tilde{Z}(\mathcal{U})$ denota o hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Como a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é finita (pelo lema 4.5) temos que $u \in Z_n(\mathcal{U})$ para algum n . Como vale NC para G segue pelo lema 4.8 que $u = gw$ para algum $g \in G$ e algum $w \in Z_1(\mathcal{U})$. Sendo g um elemento de torção de $\tilde{Z}(\mathcal{U}) \setminus Z(G)$ segue pelo teorema 3.21 que $g \in Z_2(\mathcal{U}) \setminus Z(G)$, o que implica que $u \in Z_2(\mathcal{U})$. Consequentemente temos que $\tilde{Z}(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$.

Donde podemos concluir que se vale NC então em qualquer caso a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2. $\square$

4.3 A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2

Na seção anterior, notamos que em vários casos a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ seria no máximo 2. Então é razoável conjecturarmos que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2.

Nesta seção, apresentaremos o resultado de Arora, Hales e Passi de que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo finito G qualquer é no máximo 2.

Lema 4.14. ([7]) *Sejam G um grupo finito e K um corpo de característica zero. Todo elemento $\alpha \in KG$ possui uma única decomposição de Jordan $\alpha = \alpha_s + \alpha_n$, $\alpha_s, \alpha_n \in KG$, α_s semisimples (ou seja, o seu polinômio minimal sobre K não possui raízes múltiplas no fecho algébrico $\bar{K}$ de K), α_n nilpotente e $\alpha_s \alpha_n = \alpha_n \alpha_s$.*

Lema 4.15. ([7]) *Se $\alpha \in \mathcal{U}_1(KG)$ então temos uma única decomposição de Jordan multiplicativa $\alpha = \beta \delta$, $\beta, \delta \in \mathcal{U}_1(KG)$, β semisimples e δ unipotente. De fato, $\beta = \alpha_s$ e $\delta = 1 + \alpha_s^{-1} \alpha_n$.*

Nas condições do Teorema 3.21 segue que:

Corolário 4.16. *Todas as unidades hipercenrais de torção de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ estão contidas em $\pm Z_2(G)$.*

Proposição 4.17. *Sejam G um grupo finito e e o expoente de $Z_1(G)$. Então:*

- (1) $[Z_2(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \leq Z_1(G)$;
- (2) $Z_{n+1}^e(\mathcal{U}) \leq Z_n(\mathcal{U})$, para todo $n \geq 1$;
- (3) *Toda unidade hipercenral em $\mathcal{U}$ é semisimples e comuta com todo elemento unipotente de $\mathcal{U}$.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq Z_1(G)$.

Sejam $u_2 \in Z_2(\mathcal{U})$, $g \in G$. Então temos que $[u_2, g] = c$, para algum $c \in Z_1(\mathcal{U})$. Elevando ambos os lados da igualdade a $|G|$ e utilizando a proposição 1.33 obtemos que $1 = [u_2, g]^{|G|} = [u_2, g^{|G|}] = c^{|G|}$. Donde concluímos que c é uma unidade central de ordem finita. Segue pelo lema 1.16 que c é uma unidade trivial. Demonstrando a afirmação.

Seja agora e o expoente de $Z_1(G)$. Como $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq Z_1(G)$, obtemos utilizando a proposição 1.33 que $[Z_2^e(\mathcal{U}), G] = 1$, donde concluímos que $Z_2^e(\mathcal{U}) \leq Z_1(\mathcal{U})$. Segue desse fato que $[Z_2(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \leq Z_1(G)$ e por indução em n que $Z_{n+1}^e(\mathcal{U}) \leq Z_n(\mathcal{U})$, para todo $n \geq 1$.

De fato, seja $u_2 \in Z_2(\mathcal{U})$, $u \in \mathcal{U}$. Então $[u_2, u] = c_1$, para algum $c_1 \in Z_1(\mathcal{U})$. Utilizando o lema 1.33 temos que $c_1^e = [u_2, u]^e = [u_2^e, u] = 1$. Logo c_1 é uma unidade central de ordem finita. Segue pelo lema 1.16 que c_1 é uma unidade trivial. Mostrando que $[Z_2(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \leq Z_1(G)$.

A seguir mostraremos que $Z_{n+1}^e(\mathcal{U}) \leq Z_n(\mathcal{U})$, para todo $n \geq 1$.

Já demonstramos a afirmação para $n = 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para $n = k - 1 \geq 2$. Devemos mostrar que ela é válida para $n = k$.

Sejam $u_{k+1} \in Z_{k+1}(\mathcal{U})$, $u \in \mathcal{U}$. Então temos que $[u_{k+1}, u] = u_k \in Z_k(\mathcal{U})$.

Temos que: $[u_{k+1}^e, u] = [u_{k+1}, u]^{u_{k+1}^{e-1}} [u_{k+1}, u]^{u_{k+1}^{e-2}} \cdots [u_{k+1}, u]^{u_{k+1}^{e-(e-1)}} [u_{k+1}, u]^{u_{k+1}^{e-e}}$.

Desenvolvendo o primeiro fator da expressão acima obtemos:

$$[u_{k+1}, u]^{u_{k+1}^{e-1}} = u_{k+1}^{-(e-1)} [u_{k+1}, u] u_{k+1}^{e-1} = u_{k+1}^{-(e-1)} [u_{k+1}, u] u_{k+1}^{e-1} u_k^{-1} u_k = [u_{k+1}^{e-1}, u_k^{-1}] u_k.$$

Conseqüentemente temos que:

$$[u_{k+1}^e, u] = \underbrace{[u_{k+1}^{e-1}, u_k^{-1}]}_{\in Z_{k-1}(\mathcal{U})} u_k \underbrace{[u_{k+1}^{e-2}, u_k^{-1}]}_{\in Z_{k-1}(\mathcal{U})} u_k \cdots \underbrace{[u_{k+1}, u_k^{-1}]}_{\in Z_{k-1}(\mathcal{U})} u_k u_k.$$

Considere o epimorfismo $\psi : Z_{k+1}(\mathcal{U}) \longrightarrow Z_{k+1}(\mathcal{U})/Z_k(\mathcal{U})$. Temos então que:

$\psi([u_{k+1}^e, u]) = \bar{1} u_k^{-1} \bar{1} u_k^{-1} \cdots \bar{1} u_k^{-1} u_k^{-1} = \bar{u}_k^e$. Segue da hipótese de indução que $Z_k^e(\mathcal{U}) \leq Z_{k-1}(\mathcal{U})$, o que implica que $[u_{k+1}^e, u] \in Z_{k-1}(\mathcal{U})$, concluindo a demonstração da afirmação.

Afirmamos que todo elemento central de $\mathcal{U}$ é semisimples.

Para observar este fato, note inicialmente que qualquer representação complexa irredutível de G leva qualquer elemento central de $\mathcal{U}$ numa matriz escalar. Por outro lado, sabemos que $Z_{n+1}^e(\mathcal{U}) \leq Z_n(\mathcal{U})$, para todo $n \geq 1$, o que implica diretamente que o quociente $\tilde{Z}(\mathcal{U})/Z_1(\mathcal{U})$ é periódico.

Observando agora que se $\alpha \in \mathcal{U}$, e uma potência de α é semisimples então α é semisimples, podemos concluir utilizando os fatos acima que todo elemento central de $\mathcal{U}$ é semisimples.

Afirmamos que se $\alpha \in \mathcal{U}$ e uma potência de α é semisimples então α é semisimples.

De fato, se $\alpha \in \mathcal{U}$ então pelo lema 4.15, α possui uma única decomposição de Jordan multiplicativa, ou seja, podemos expressar α na forma $\alpha = \beta\delta$, $\beta\delta = \delta\beta$ com β semisimples e δ unipotente. Se α^k é semisimples, para algum $k \in \mathbb{Z}$ então como β e γ comutam, temos que $\alpha^k = \beta^k \delta^k$, donde concluímos que δ^k é um elemento semisimples. Sendo δ um elemento semisimples e nilpotente concluímos que δ é igual a $1_{|G|}$, a matriz identidade de ordem $|G|$. Conseqüentemente, $\alpha = \beta$ e portanto, α é semisimples, provando a afirmação.

A seguir utilizando a unicidade da decomposição multiplicativa de Jordan e indução em n , obtemos facilmente que todo elemento de $Z_n(\mathcal{U})$, $n \geq 1$, comuta com todo elemento unipotente de $\mathcal{U}$. Concluindo a demonstração da proposição.

□

Corolário 4.18. Se $Z_1(G) = (1)$ então $Z_1(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$.

A seguir enunciaremos alguns lemas:

Lema 4.19. *Seja G um Q^* -grupo. Então $[Z_3(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \subseteq T$.*

Demonstração: Sejam $u_3 \in Z_3(\mathcal{U})$ e $u \in \mathcal{U}$ e considerando a identidade $[u_3, u]^2 = [u_3, [u_3, u]]^{-1}[u_3^2, u]$ nós obtemos pela proposição 4.17 (1) e (2) que $[u_3, u]^2 \in Z_1(G)$. Conseqüentemente obtemos que $[Z_3(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \subseteq T$. $\square$

Lema 4.20. *Seja G um Q^* -grupo. Então: $[Z_3(\mathcal{U}), G] \subseteq \langle a^2 \rangle$.*

Demonstração: Seja H o subgrupo abeliano de índice 2 dado na definição de Q^* -grupo. Observamos inicialmente que qualquer elemento $g \in G \setminus H$ possui ordem 4.

Sejam $x \in Z_3(\mathcal{U})$, $g \in G$.

Observamos inicialmente que para qualquer $h \in H$ para o qual $h^{-1}gh \in \langle g \rangle$ então $h^2 = 1$ ou $(ah)^2 = 1$. Para verificar este fato observe que:

$$gh^2 = gg^{-1}h^{-1}gh = h^{-1}gh \in \langle g \rangle. \text{ Logo, } h^2 \in \langle g \rangle.$$

Se $h^2 = g$ ou $h^2 = g^3$ então $[g, h] = 1$. Absurdo, pois g não é um elemento central de G . Caso contrário, $h^2 = 1$ ou $h^2 = g^2 = a^2$. No caso em que $h^2 = g^2 = a^2$ obtemos que $(ah)^2 = ahah = a^2h^2 = a^2a^2 = a^4 = 1$, pois pelo teorema 3.20, $\langle a \rangle \subseteq H$.

Conseqüentemente obtemos que $h \in \mathcal{Z}(G)$ ou $ah \in \mathcal{Z}(G)$.

Afirmamos agora que $[x, h] \equiv [x, ah] \pmod{\langle a^2 \rangle}$.

Como $\langle a \rangle \triangleleft \mathcal{U}$ pela demonstração do teorema 3.21 ((2) $\Rightarrow$ (1)). Então $a \in Z_2(\mathcal{U})$. (Conforme a demonstração do teorema 3.21). A seguir, utilizando a proposição 1.32(ii), temos que:

$$[x, ah] = [x, h] \underbrace{[x, a]^h}_{\in Z_1(G)} = [x, h][x, a] \Rightarrow [x, ah] \equiv [x, h] \pmod{\langle a^2 \rangle}.$$

O que por sua vez implica que $[x, h] \in \langle a^2 \rangle$.

Suponhamos agora que $h \in H, h^{-1}gh \notin \langle g \rangle$.

Então a unidade $1 + \hat{g}h(1 - g)$ é um elemento unipotente não-idêntico de $\mathcal{U}$. (Um elemento δ se diz unipotente se $1 - \delta$ for um elemento nilpotente).

Pela proposição 4.17(3) temos que:

$$\hat{g}h(1 - g)x = x\hat{g}h(1 - g)$$

o que implica que:

$$\hat{g}hx - \hat{g}hgx = x\hat{g}h - x\hat{g}hg. \quad (4.1)$$

Pelo lema 4.19 segue que $x^{-1}gx \in G$ e $x^{-1}hx \in G$, pois $[x, g^{-1}] \in G$ e $[x, h^{-1}] \in G$.

Como $h \in H$, $h^{-1}gh \notin \langle g \rangle$, nós concluímos de 4.1 que:

$$\widehat{g}hx = x\widehat{g}h, \text{ e portanto,}$$

$$x^{-1}\widehat{g}hx = \widehat{g}h.$$

Conseqüentemente,

$$x^{-1}hx \in \langle g \rangle h.$$

O qual mostra que: $[x, h^{-1}] \in \langle g \rangle \cap T = \langle a^2 \rangle$.

Portanto, $[x, h] \in \langle a^2 \rangle$.

Além disso, 4.1 também implica que: $x^{-1}\widehat{g}x = \widehat{g}$, pois de 4.1 e do lema 4.19 obtemos que $x^{-1}\widehat{g}hx = x^{-1}\widehat{g}x \underbrace{x^{-1}h x h^{-1}}_{\in \langle g \rangle} = x^{-1}\widehat{g}x g^i = \widehat{g}$ para algum $i \Rightarrow x^{-1}\widehat{g}x = g^{-i}\widehat{g} = \widehat{g}$.

Logo, $x^{-1}\widehat{g}x \in \langle g \rangle$, donde concluímos que: $[x, g] \in \langle a^2 \rangle$.

Observe que como G não é um 2-grupo Hamiltoniano então existe um $h \in H$ tal que $h^{-1}gh \notin \langle a^2 \rangle$. Concluindo a demonstração do lema. □

Uma conseqüência imediata do lema é o:

Corolário 4.21. *Seja G um Q^* -grupo então $[Z_3^2(\mathcal{U}), G] = 1$, donde $Z_3^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$.*

Podemos finalmente enunciar o resultado principal da seção e um dos principais resultados da nossa dissertação.

Teorema 4.22. *(Arora, Hales, Passi) Seja G um grupo finito. Então a altura central do grupo de unidades $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2.*

Demonstração: De acordo com o teorema 3.21 temos de considerar três casos:

- (1) Suponhamos que G seja um 2-grupo Hamiltoniano. Então pela proposição 1.30 e pelo lema 1.19, $\mathcal{U} = \pm G = \pm T = Z_2(\mathcal{U})$.
- (2) Suponhamos que T seja um subgrupo central de $\mathcal{U}$. Nesse caso pela proposição 4.17(1) concluímos que $Z_1(\mathcal{U}/T) = Z_2(\mathcal{U})/T$ (o qual é livre de torção). Segue pela proposição 2.2 que os fatores da série central superior de $\mathcal{U}/T$ são livres de torção, donde concluímos que o quociente $Z_3(\mathcal{U})/Z_2(\mathcal{U})$ é livre de torção. Finalmente pela proposição 4.17(2) decorre que $Z_2(\mathcal{U}) = Z_3(\mathcal{U})$.

- (3) Suponhamos agora que T é abeliano, mas não seja um subgrupo central. Nesse caso, $G = \langle H, b \rangle$ é um grupo do tipo (3) no teorema 3.21, ou seja, G é um Q^* -grupo, portanto, $T = \langle a \rangle \oplus E = Z_2(\mathcal{U}) \cap Z_2(G)$.

Suponhamos por absurdo que exista $x \in Z_3(\mathcal{U}) \setminus Z_2(\mathcal{U})$. Então para algum $u \in \mathcal{U}$, $[x, u] = t \in T$ é um elemento de ordem 4. Afirmamos que $t \in G'$. Para observarmos esse fato, considere a projeção natural $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/G')$, aplicando φ a t obtemos que $\varphi(t) = \bar{t}$, decorre daí que: $[\bar{x}, \bar{u}] = \bar{t} = \bar{1}$, pois $\mathbb{Z}(G/G')$ é um anel de grupo comutativo. Portanto, $t - 1 \in \Delta(G')\mathbb{Z}G$ o que implica que $t \in G'$. Pelo lema 4.20 $[x, h] \in \langle a^2 \rangle \subseteq Z_1(\mathcal{U})$ para todo $h \in H$, logo $[x, h]^2 = 1$. Portanto para algum $h \in H$ temos que: $[x, t] = [x, h^2] = [x, h]h[x, h]h^{-1} = [x, h]^2 = 1$. Conseqüentemente $[x^2, u] = x[x, u]x^{-1}[x, u] = [x, t]t^2 = t^2 \neq 1$. Mas pelo corolário 4.21 nós obtemos que $[x^2, u] = 1$. Contradição. Logo $Z_2(\mathcal{U}) = Z_3(\mathcal{U})$.

□

Corolário 4.23. *Se todas as unidades centrais em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ são triviais então todas as unidades hipercenrais são triviais também.*

Demonstração: Pelo teorema 4.22 e utilizando o fato que $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq Z_1(G)$ pelo lema 4.17(1) temos que $\tilde{Z}(\mathcal{U}) \subseteq N_{\mathcal{U}}(G)$. Seja $u \in \tilde{Z}(\mathcal{U})$. Então temos que $u \in N_{\mathcal{U}}(G)$. Além disso, como $\tilde{Z}(\mathcal{U})/Z_1(\mathcal{U})$ é periódico concluímos que existe um $n = n(u)$ tal que $u^n \in G$. Como $u \in N_{\mathcal{U}}(G)$ temos pelo lema 1.23 que $u^*u = uu^*$. Além disso, como $u^n = g$ para algum $g \in G$ temos que $(u^*u)^n = (u^*)^n(u)^n = g^{-1}g = 1$. Segue daí que u^*u é uma unidade central de ordem finita. Conseqüentemente, pelo lema 1.16 concluímos que $u^*u \in Z_1(G)$. Afirmamos que $u \in G$.

De fato, seja $u = \sum_{g \in G} u_g g$. Então temos que $u^*u(1) = \sum_{g \in G} u_g^2 \neq 0$. Onde temos pelo lema 1.15 que $u^*u = 1$ e conseqüentemente pelo lema 1.17 temos que $u \in G$.

□

Relembremos do teorema de Ritter-Sehgal:

Teorema 4.24. (Ritter-Sehgal) *Seja G um grupo finito. Todas as unidades centrais de $\mathbb{Z}G$ são triviais se e somente se para todo $x \in G$ e todo número natural j relativamente primo com $|G|$, nós tivermos $x^j \sim x$ ou $x^j \sim x^{-1}$, onde $\sim$ representa a conjugação em G .*

Como uma conseqüência do teorema de Ritter-Sehgal temos o seguinte corolário:

Corolário 4.25. *Seja G um grupo finito. Todas as unidades hipercenrais de $\mathbb{Z}G$ são triviais se e somente se para todo $x \in G$ e todo número natural j relativamente primo a $|G|$, x^j é conjugado a x ou a x^{-1} .*

4.4 Uma caracterização do segundo centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Pelos resultados da seção anterior, concluímos que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo finito G é sempre menor ou igual a 2. Com base neste resultado nosso objetivo nesta seção será o de procurarmos uma caracterização para o hipercentro de $\mathcal{U}$ utilizando os resultados do capítulo 3, o teorema de Bovdi.

Com esse objetivo em vista, nas duas subseções seguintes apresentamos o teorema de Blackburn e a demonstração de que a Conjectura do Normalizador é satisfeita para os grupos finitos G tais que $R(G) \neq 1$, onde $R(G)$ indica a intersecção dos subgrupos não-normais de G .

Após desenvolvermos estes pré-requisitos, finalmente caracterizamos o hipercentro de $\mathcal{U}$ em função do centro de $\mathcal{U}$ e do subgrupo de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$. Esse resultado será o objetivo principal desta seção e será apresentado na última subseção deste capítulo.

Após obtermos esta caracterização do hipercentro de $\mathcal{U}$ concluiremos que a Conjectura do Normalizador é satisfeita para as unidades hipercentrais; isto é, $\tilde{Z}(\mathcal{U}) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$.

Os resultados desta seção estão relacionados nas referências [3], [6], [20] e [23].

4.4.1 O teorema de classificação de p -grupos de Blackburn

A seguir $R(G)$ indicará a intersecção dos subgrupos não-normais de G .

Apresentamos sem demonstração um teorema bem conhecido de Blackburn que utilizaremos nas subseções seguintes:

Teorema 4.26. (Blackburn) *Seja G um grupo finito, $R(G)$ não trivial, G não Dedekind e tal que G não possui ordem potência de um primo. Então ocorre uma das seguintes situações:*

- (a) *G possui um subgrupo abeliano A de expoente kp^n onde $n \geq 1$, p primo e $(k, p) = 1$. G/A é cíclico de ordem p^r e se Au gera G/A , u pode ser escolhido de maneira que u^{p^r} possua ordem p^n . Existe um inteiro $\xi \equiv 1(p^n)$ tal que $x^u = x^\xi$ para todo a em A .*
- (b) *G é o produto direto de um grupo abeliano de ordem ímpar e um dos seguintes grupos:*
 - (1) *O produto direto de um grupo quatérnion de ordem 8, um grupo cíclico de ordem 4 e um 2-grupo abeliano elementar.*
 - (2) *O produto direto de dois grupos quatérnions de ordem 8 e um 2-grupo abeliano elementar.*
- (c) *G possui um subgrupo H do tipo descrito em (a) com $p = 2, r = 1$. H é de índice 2 e se G é gerado por H e t , então t pode ser escolhido de maneira que $u^t = u^{-1}$, $t^2 = u^{2^n}$ e $x^t = x^\eta$ para algum $\eta \equiv -1(2^n)$.*

- (d) G possui um subgrupo abeliano A de índice 2. G é gerado por A e t onde t^2 é um elemento de A de ordem 2. Se x é um elemento de A , $x^t = x^\zeta$ para algum $\zeta \equiv -1(2^n)$.
- (e) G é o produto direto de H , um grupo quatérnion de ordem 8, e um 2-grupo abeliano elementar, onde H possui ordem ímpar e é do tipo descrito em (a).

4.4.2 A Conjectura do Normalizador para grupos G tais que $R(G)$ não é trivial

Iremos denotar por NC a Conjectura do Normalizador. Nosso objetivo nesta subseção será o de apresentarmos o seguinte resultado:

Teorema 4.27. *Seja G um grupo finito. Se $R(G)$ não é trivial então vale NC para G .*

Com o objetivo acima apresentado, enunciamos os bem conhecidos teoremas de Coleman e de Jacowski-Marciniak e provamos alguns teoremas.

Teorema 4.28. (Coleman) *Seja G um grupo nilpotente finito. Então vale NC para G .*

Teorema 4.29 (Jacowski-Marciniak). *Se G é um grupo de ordem ímpar. Então vale NC para G .*

Teorema 4.30. *Seja $G = \langle H, g \rangle$ onde H é um subgrupo abeliano de índice 2. Então vale NC para G .*

Demonstração: Basta mostrarmos que $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$. Seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, podemos expressar u na forma $u = \alpha_1 + \alpha_2 g$, onde α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{Z}H$. Observamos inicialmente que como H é um subgrupo de índice 2, o anel de grupo $\mathbb{Z}(G/H)$ possui somente unidades triviais. Aplicando o epimorfismo canônico $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/H)$, temos que: $\bar{u} = \epsilon(\alpha_1) + \epsilon(\alpha_2)\bar{g}$, onde ϵ denota o homomorfismo de aumento. Como $\bar{u}$ deve ser uma unidade trivial de $\mathbb{Z}(G/H)$, concluímos que $\epsilon(\alpha_1) = \pm 1$ e $\epsilon(\alpha_2) = 0$ ou $\epsilon(\alpha_1) = 0$ e $\epsilon(\alpha_2) = \pm 1$. Multiplicando se necessário por $\pm g$ ou -1 podemos supor que $\epsilon(\alpha_1) = 1$ e $\epsilon(\alpha_2) = 0$.

Afirmamos inicialmente que $[u, h] \in H$ para todo $h \in H$.

Como $H \triangleleft G$ e $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$, segue que $t = [u, h] \in G$. Aplicando o epimorfismo canônico $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/H)$ obtemos que $\bar{t} = \bar{1}$. O que nos mostra que $[u, h] \in H$ para todo $h \in H$.

Segue do fato anterior que existe algum $h_0 \in H$ tal que $[u, h] = h_0$, ou seja, $hu = uhh_0$. Consequentemente temos que $h\alpha_1 = \alpha_1 h h_0$, donde concluímos que $\alpha_1(1 - h_0) = 0$.

Afirmamos que h_0 possui ordem finita.

De fato, como $\alpha_1(1 - h_0) = 0$ temos que $\alpha_1 = \alpha_1 h_0$ o que implica que $\alpha_1 = \alpha_1 h_0^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g g$. Então teríamos que $\alpha_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \alpha_g g h_0^k$, para todo

$k \in \mathbb{N}$. Se h_0 tivesse ordem infinita deveríamos ter infinitas possibilidades para os elementos do suporte no lado esquerdo da igualdade. Contradição com o fato do suporte de α_1 ser finito.

Afirmamos que $h_0 = 1$ e que $[u, h] = 1$ para todo $h \in H$.

Já observamos que h_0 possui ordem finita. Suponha agora que $\alpha_1(1 - h_0) = 0$, ou seja, temos que $\alpha_1 = \alpha_1 h_0$, o que por sua vez implica que $\alpha_1 = \alpha_1 h_0^k$, para todo inteiro k . Sejam $X = \text{supp}(\alpha_1)$ e $\alpha_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g g$. Então $\alpha_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \alpha_g g h_0$. A seguir, considere a ação de $\langle h_0 \rangle$ sobre X , dada por:

$$\begin{aligned} X \times \langle h_0 \rangle &\longmapsto X \\ (g, h_0^k) &\longmapsto g h_0^k \end{aligned}$$

Observe a seguir que se $x \in X$ então a órbita $\mathcal{O}_x$ de x satisfaz $|\mathcal{O}_x| = o(h_0)$ visto que $\mathcal{O}_x = \{x, x h_0, \dots, x h_0^{o(h_0)-1}\}$. Além disso, temos que $\alpha_g = \alpha_x$, para todo $g \in \mathcal{O}_x$.

A seguir expresse X como $X = \dot{\bigcup} \mathcal{O}_{x_j}$, união disjunta de órbitas. Então temos que $\alpha_1 = \sum_j \sum_{g \in \mathcal{O}_{x_j}} \alpha_g g$. Segue daí que:

$1 = \epsilon(\alpha_1) = \sum_j \alpha_{x_j} |\mathcal{O}_{x_j}| = (\sum_j \alpha_{x_j}) o(h_0) = m(o(h_0))$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. O que por sua vez implica que $o(h_0) = 1$ e portanto, $h_0 = 1$.

Como $h_0 = 1$ segue que $[u, h] = 1$ para todo $h \in H$.

Observamos agora que $[u, g] \in G'$.

De fato, tomando o epimorfismo canônico $\pi : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}(G/G')$, segue imediatamente que $\overline{[u, g]} = \bar{1}$, visto $\mathbb{Z}(G/G')$ ser um anel de grupo comutativo. Concluimos daí que $[u, g] \in G'$, para todo $g \in G$.

A seguir, como H é um subgrupo de índice 2, concluimos que G' é formado por todos os comutadores da forma $[g, h]$, $h \in H$.

Portanto temos que $[u, g] = [g, h]$ para algum $h \in H$. O que por sua vez implica que $u^{-1}g^{-1}u = h^{-1}gh$, donde tiramos que $[uh^{-1}, g] = 1$.

Se mostrarmos que uh^{-1} é central em $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ então a tese segue diretamente. De fato, seja $h' \in H$, então temos que $[uh^{-1}, h'] = h[u, h'](h')^{-1}h^{-1}h' = 1$, visto que $[u, h'] = 1$ como vimos anteriormente. Donde concluimos que $u \in GZ_1(\mathcal{U})$.

□

O seguinte teorema é devido a Jespers e Juriaans.

Teorema 4.31. ([20]) *Seja G o produto direto dos grupos G_1 e G_2 , $G = G_1 \times G_2$. Então a propriedade do Normalizador vale para G se e somente se ela vale para ambos G_1 e G_2 .*

Demonstração: Seja $\phi_i : G \rightarrow G_i$ a projeção natural de G em G_i e nós também denotaremos por ϕ_i a sua extensão aos anéis de grupo inteiro. Observe também que se $i \neq j$ então $\text{Ker}(\phi_j) = G_i$ ou $\Delta(G, G_i)$ dependendo do significado de ϕ_i .

Suponha que vale NC para G e seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G_i)}(G_i)$. Então naturalmente u pertence ao normalizador de G . Portanto, pela hipótese, existem $g \in G$ e $w \in Z_1(\mathcal{U}(\mathbb{Z}G))$ tais que $u = gw$. O que por sua vez implica que $u = \phi_i(u) = \phi_i(w)\phi_i(g)$, o que nos mostra que NC vale para G_i .

Reciprocamente, suponhamos que NC vale para os grupos G_1 e G_2 e seja $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Denotemos por $u_i = \phi_i(u)$. Portanto, temos que $u_i \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G_i)}(G_i)$, conseqüentemente existem $g_i \in G$ e w_i central em G_i . No entanto, temos que w_i é central em G , pois G é o produto direto de G_1 e G_2 . Defina: $w = uu_1^{-1}u_2^{-1}$. Afirmamos agora que w é um elemento central em $\mathbb{Z}G$. Observe que se w for central em $\mathbb{Z}G$ então $u = u_2u_1w = g_2g_1w_1w_2 \in GZ_1(\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G))$.

Afirmamos que w é um elemento central em $\mathbb{Z}G$.

Sejam $g_i \in G_i$ e $g = w^{-1}g_iw$. Então como w normaliza G temos que $g \in G$. Como $g - g_i = w^{-1}g_iw - g_i = [w^{-1}g_i, w^{-1}] \in [\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$. Segue pelo lema 1.14 que g e g_i são conjugados em G . No entanto, como G_i é normal em G , temos que $g \in G_i$. Portanto, $w^{-1}G_iw = G_i$. Conseqüentemente temos que $w^{-1}g_iw = \phi_i(w^{-1}g_iw) = g_i$, para todo g_i em G_i . Concluindo a demonstração.

□

Passamos então a demonstração do resultado principal desta subseção.

Demonstração: (do teorema 4.27):

Suponha que G seja um grupo finito, $R(G)$ não trivial. Se G possuir ordem potência de um primo então o resultado segue do teorema 4.28. Então podemos supor $R(G)$ não trivial e que G não possua ordem potência de um primo. Passamos ao estudo dos casos indicados no teorema de Blackburn (teorema 4.26):

- (1) Os casos (b) e (e).

Pelos teoremas 4.28 e 4.29 sabemos que NC vale para os p -grupos finitos e os grupos de ordem ímpar. Conseqüentemente a tese segue diretamente do teorema 4.31.

(2) O caso (d):

O resultado segue diretamente do teorema 4.30.

(3) O caso (a):

Suponha que G seja um grupo do tipo (a). Nesse caso como A é um grupo abeliano finito ele pode ser representado na forma $A = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \cdots \times \langle g_m \rangle$. Seja $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$ então temos que $v^{-1}g_1g_2\cdots g_mv = g_0$ para algum $g_0 \in G$. Além disso, como $g_0 = g_1g_2\cdots g_m = v^{-1}g_1g_2\cdots g_mv - g_1g_2\cdots g_m = [v^{-1}g_0, v] \in [\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G]$. Segue pelo lema 1.14 que g_0 é conjugado a $g_1g_2\cdots g_m$ em G . Portanto, existe um elemento au^r em G tal que $v^{-1}g_1g_2\cdots g_mv = (au^r)^{-1}g_1g_2\cdots g_m(au^r) = u^{-r}g_1g_2\cdots g_mu^r$. O que implica que $u^rv^{-1}g_1g_2\cdots g_mv u^{-r} = g_1g_2\cdots g_m$. Considere agora $v_1 = vu^{-r}$, então temos que $v_1^{-1}g_1v_1v_1^{-1}g_2v_1\cdots v_1^{-1}g_mv_1 = g_1g_2\cdots g_m$.

Afirmamos que $v_1^{-1}g_iv_1 = g_i$, para todo i , $1 \leq i \leq m$.

Mostraremos inicialmente que $v_1^{-1}g_iv_1 \in \langle g_i \rangle$.

Como $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Então temos que $v_1^{-1}g_iv_1 = \tilde{g}_1$, para algum $\tilde{g}_1 \in G$. Repetindo o raciocínio acima, concluímos que $\tilde{g}_1$ é conjugado a g_i em G . Portanto, existe um elemento $a'u^r$ em G tal que $v^{-1}g_iv = (a'u^r)^{-1}g_ia'u^r = u^{-r}g_iu^r \in \langle g_i \rangle$, pois sabemos que o subgrupo $\langle g_i \rangle$ é um subgrupo normal de G . Conseqüentemente, obtemos que $v_1^{-1}g_iv_1 = u^rv^{-1}g_iv u^{-r} \in \langle g_i \rangle$. Além disso, como $\langle g_i \rangle \cap \langle g_j \rangle = 1$ se $i \neq j$ concluímos que $v_1^{-1}g_iv_1 = g_i$. Segue daí, que $[v_1, g_i] = 1$, o que por sua vez implica que $[v_1, a] = 1$ para todo $a \in A$.

De modo análogo, pelo lema 1.14 temos então que $v_1^{-1}uv_1 = a_0^{-1}u^{-r}uu^ra_0 = a_0^{-1}ua_0$ para algum $a_0 \in A$.

Considere $v_2 = v_1a_0^{-1}$. Afirmamos que v_2 é uma unidade central. De fato, segue que $[v_2, u] = 1$. Além disso, como $[v_2, a] = 1$ concluímos que v_2 é uma unidade central. Conseqüentemente $v = v_2a_0u^r \in GZ_1(\mathcal{U})$.

(4) O caso (c):

Nesse caso, o grupo G é da forma $\langle A, u, t \rangle$, onde A é um grupo abeliano de expoente $k2^n$, $u^2 \in A$, $t^2 = u^{2^n}$ com $o(t) = 4$ e $u^t = u^{-1}$. Além disso, para todo elemento $x \in A$, $x^t = x^\eta$ e $x^u = x^\xi$ onde $\eta = -1 + k_1(2^n)$ e $\xi = 1 + k_2(2^n)$.

É fácil de observar que se $a \in A$ tal que $o(a) | 2^n$ então $a^u = a$ e $a^t = a^{-1}$.

Afirmamos agora que para todo $a \in A$ tal que $o(a) | p^i$ onde p é um inteiro primo ímpar então $a^u = a$ ou $a^u = a^{-1}$ e de modo análogo, $a^t = a$ ou $a^t = a^{-1}$.

Como $u^2 \in A$, A abeliano temos que $a = a^{u^2} = a^{(1+k_22^n)^2}$ o que implica que:

$$a^{2^n k_2(2+k_22^n)} = 1.$$

Observamos que se k_2 for divisível por p então $2 + k_2 2^n$ não pode ser divisível por p . Logo temos que k_2 é divisível por p^i ou $2 + k_2 2^n$ é divisível por p^i . No primeiro caso, se k_2 é divisível por p^i então $a^u = a$ e no caso em $2 + k_2 2^n$ é divisível por p^i obtemos que $a^u = a^{-1}$.

Com raciocínio análogo, temos que $t^2 \in A$, donde segue que $a = a^{t^2} = a^{(-1+k_1 2^n)^2}$ o que implica que $a^{2^n k_1 (-2+k_1 2^n)} = 1$. Conseqüentemente, k_1 é divisível por p^i ou $-2 + k_1 2^n$ é divisível por p^i . Ou seja, $a^t = a^{-1}$ ou $a^t = a$.

Para todo $a \in A$ existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $a = a_1 a_2, a_1^u = a_1, a_2^u = a_2^{-1}$. De maneira análoga existem $a'_1, a'_2 \in A$ tais que $a = a'_1 a'_2, (a'_1)^t = a'_1, (a'_2)^t = (a'_2)^{-1}$.

Considere agora $v \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Então podemos expressar v na forma $v = \alpha_1 + \alpha_2 u + (\beta_1 + \beta_2 u)t$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}A$. Aplicando o epimorfismo canônico $\phi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/A)$ obtemos que $\bar{v} = \epsilon(\alpha_1) + \epsilon(\alpha_2)\bar{u} + \epsilon(\beta_1)\bar{t} + \epsilon(\beta_2)\bar{u}\bar{t}$.

Como o anel de grupo $\mathbb{Z}(G/A)$ possui somente unidades triviais, concluímos que um dos aumentos na expressão de v é igual a ± 1 e os restantes são iguais a zero. Multiplicando por ± 1 um elemento do grupo se necessário podemos supor que $\epsilon(\alpha_1) = 1$ e $\epsilon(\alpha_2) = \epsilon(\beta_1) = \epsilon(\beta_2) = 0$.

Afirmamos inicialmente que $[v, a] = 1$ para todo $a \in A$. De fato, como $A \triangleleft G$, temos que $[v, a] = a_1 \in A$. Portanto, $va = av a_1$, o que implica que $\alpha_1 a = a \alpha_1 a_1 = \alpha_1 a a_1$. Donde tiramos que $\alpha_1(1 - a_1) = 0$. Conseqüentemente temos que $\epsilon(\alpha_1)$ é divisível pela ordem de a_1 , o que força $a_1 = 1$. Concluimos daí que $[v, a] = 1$ para todo $a \in A$.

Consideremos agora $[v, u]$. Como $\langle A, u \rangle \triangleleft G$ temos que $[v, u] = g \in \langle A, u \rangle$. Logo temos que $vu = uv g$ ou $\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \beta_1 t u + \beta_2 u t u = u \alpha_1 g + u \alpha_2 u g + u \beta_1 t g + u \beta_2 u t g$. Além disso, como $t \notin \langle A, u \rangle$, concluímos que:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 = u \alpha_1 g + u \alpha_2 u g. \quad (4.2)$$

Suponha agora que $g \notin A$. Então por 4.2 teríamos que $\alpha_1 u = u \alpha_2 u g$. Por outro lado sabemos que $\epsilon(\alpha_1 u) = 1$ e $\epsilon(u \alpha_2 u g) = 0$. Contradição. Logo temos que $g \in A$ e $[v, u] = g \in A$.

No entanto, pelo lema 1.14 sabemos que $g = [h, u]$ para algum $h \in G$.

Afirmamos a seguir que $g = [a, u]$ para algum $a \in A$.

Por 4.2 temos que:

$$\alpha_1 u = u \alpha_1 g. \quad (4.3)$$

Seja $\alpha_1 = \sum \gamma_a a$. Por 4.3 temos que $\sum \gamma_a a u = u \sum \gamma_a a g$. Logo :

$$\sum \gamma_a a g^{-\xi} = \sum \gamma_a a^{\xi}. \quad (4.4)$$

Se $a g^{-\xi} = a_1^{\xi}$ então $a_1 = a^{\xi} g^{-1}$ e por 4.4 teríamos que $\gamma_a = \gamma_{a^{\xi} g^{-1}}$ para todo $a \in A$.

Afirmamos que $u g^{-1} u^{-1} g^{-1} = 1$. De fato, como $[v, u] = g$ segue que

$$u g^{-1} u^{-1} g^{-1} = u[v, u]^{-1} u^{-1} [v, u]^{-1} = v^{-1} u v u^{-2} v^{-1} u v. \quad (4.5)$$

Como $[v, a] = 1$, para todo $a \in A$ e $u^2 \in A$ temos que $vu^{-2} = u^{-2}v$. Segue por 4.5 que $ug^{-1}u^{-1}g^{-1} = 1$. Como $\gamma_a = \gamma_{a^\xi g^{-1}}$, e $(a^\xi g^{-1})^\xi g^{-1} = a^{\xi^2} g^{-\xi} g^{-1} = aug^{-1}u^{-1}g^{-1} = a$, o que contradiz o fato de $\epsilon(\alpha_1) = 1$ a menos que $a = a^\xi g^{-1}$ para algum $a \in A$ tal que $\gamma_a \neq 0$. Agora mostramos que $g = [a, u]$ para algum $a \in A$. Considere $v_1 = va^{-1}$. Como v e a comutam com todo elemento de A o mesmo ocorre com v_1 . Além disso, $[v_1, u] = [va^{-1}, u] = a[v, u]u^{-1}a^{-1}u = 1$.

Desde que v e v_1 possuem o mesmo aumento, podemos considerar v como v_1 . Vamos considerar agora $[v, t]$. Seja $g_0 = [v, t], g_0 \in G$. Então temos que $vt = tvg_0$ o qual nos mostra que $\alpha_1 t + \alpha_2 ut + \beta_1 t^2 + \beta_2 ut^2 = t\alpha_1 g_0 + t\alpha_2 ug_0 + t\beta_1 tg_0 + t\beta_2 utg_0$. Repetindo o argumento com o aumento que fizemos anteriormente obtemos que

$$\alpha_1 t = t\alpha_1 g_0 \quad (4.6)$$

forçando $g_0 \in A$. A seguir, afirmamos que g_0 é um comutador dos elementos do grupo e que $g_0 = [a_0, t]$ para algum $a_0 \in A$. (A demonstração é análoga a usada anteriormente quando mostramos que $(g = [a, u])$ quando $\alpha_1 u = u\alpha_1 g$).

Como anteriormente vimos que para todo $a_0 \in A$, existem $a'_1, a'_2 \in A$ tais que $a_0 = a'_1 a'_2$, $(a'_1)^t = a'_1$, $(a'_2)^t = (a'_2)^{-1}$. Podemos assumir que $a_0^t = a_0^{-1}$ e que $a_0 = a_1 a_2$ tais que $a_1^u = a_1$, $a_2^u = a_2^{-1}$, onde a ordem de a_2 não é igual a 2. Por 4.6 segue que

$$\alpha_1 t = t\alpha_1 g_0 = t\alpha_1 a_0^{-2} = t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^{-2}. \quad (4.7)$$

Relembrando também que $[v, u] = 1$, e portanto, $\alpha_1 u = u\alpha_1$. Por 4.7 temos que $\alpha_1 t u^{-1} = \alpha_1 u t = u\alpha_1 t = u(t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^{-2}) = t u^{-1} \alpha_1 a_1^{-2} a_2^{-2} = t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^2 u^{-1}$. O que implica que

$$\alpha_1 t = t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^2. \quad (4.8)$$

Agora combinando os resultados de 4.7 e 4.8 obtemos que $t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^{-2} = t\alpha_1 a_1^{-2} a_2^2$. Portanto, $\alpha_1(1 - a_2^4) = 0$. O que significa que $\epsilon(\alpha_1)$ é divisível pela ordem de a_2^4 , o que força $a_2^4 = 1$. Como todos os 2-elementos de A comutam com u , temos que a_2 não pode ser um 2-elemento, donde concluímos que $a_2 = 1$. Isso nos diz que $a_0^u = a_0$ ou $[a_0, u] = 1$. Consideremos $v_2 = va_0^{-1}$. Como v e a_0 comutam com todos os elementos de A e com u , segue que o mesmo ocorre com v_2 . Além disso, $[v_2, t] = [va_0^{-1}, t] = a_0[v, t]t^{-1}a_0^{-1}t = a_0[a_0, t]t^{-1}a_0^{-1}t = 1$. O que mostra que v_2 é uma unidade central de $\mathbb{Z}G$. Completando a demonstração.

□

4.4.3 O resultado principal

Finalmente, após utilizarmos os resultados das subseções anteriores procuraremos dar uma caracterização do hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo finito G .

Antes de demonstrarmos o resultado principal desta subseção, apresentaremos alguns lemas e teoremas:

Lema 4.32. *Se G é um grupo finito e vale NC para G então $Z_2(\mathcal{U}) = T_1 Z_1(\mathcal{U})$, onde $T_1 = G \cap Z_2(\mathcal{U})$.*

Demonstração: Idêntica a demonstração do lema 4.8. □

Proposição 4.33. *Seja G um grupo finito. Então:*

- (1) *Se H é um subgrupo normal de G então $[Z_2(\mathcal{U}), H] \leq Z_1(H)$.*
- (2) *Se G não é um grupo de Dedekind, então: $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq R(G) \cap G'$.*

Em particular, se $R(G) \cap G' = (1)$, então $Z_1(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$.

Demonstração: (1) Pelo lema 4.17(1) temos que $[Z_2(\mathcal{U}), H] \leq Z_1(G)$. Considere o epimorfismo canônico $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/H)$. Do qual temos que $\varphi([Z_2(\mathcal{U}), H]) = \overline{[Z_2(\mathcal{U}), H]} = \bar{1}$ o que implica que $[Z_2(\mathcal{U}), H] - 1 \in \text{Ker}(\varphi)$, donde concluímos que $[Z_2(\mathcal{U}), H] \leq Z_1(H)$.

- (2) Com raciocínio análogo utilizando o epimorfismo canônico $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/G')$, obtemos que $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq G'$.

Sejam g, h, k , elementos de G tais que $h^{-1}gh \notin \langle g \rangle$, $k^{-1}gk \in \langle g \rangle$, $o(g) = n$. Então: $1 + k\hat{g}h^{-1}(1 - g)$ é um elemento unipotente não-trivial de $\mathcal{U}$. Portanto, pela proposição 4.17(3) segue que para todo $x \in Z_2(\mathcal{U})$ temos que:

$$(1 + k\hat{g}h^{-1}(1 - g))x = x(1 + k\hat{g}h^{-1}(1 - g)).$$

Além disso, como $x^{-1}Gx \leq G$ e $h^{-1}gh \notin \langle g \rangle$, temos que:

$$x^{-1}k\hat{g}h^{-1}x = k\hat{g}h^{-1} \tag{4.9}$$

Em particular, obtemos que: $x^{-1}\hat{g}h^{-1}x = \hat{g}h^{-1}$. O qual implica que $[x, h] \in \langle g \rangle$. Consequentemente, $x^{-1}k\hat{g}x = k\hat{g}$.

Segue daí que $[x, k] \in \langle g \rangle$ e $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq R(G)$.

Concluímos então que: $[Z_2(\mathcal{U}), G] \leq R(G) \cap G'$. □

Finalmente estamos prontos para demonstrar o teorema:

Teorema 4.34. *Seja G um grupo finito. Então $Z_2(\mathcal{U}) = T(Z_2(\mathcal{U}))Z_1(\mathcal{U}) = T(Z_2(G))Z_1(\mathcal{U})$.*

Demonstração: Passemos a analisar os casos possíveis:

Se G for um p -grupo então pelo teorema de Coleman (teorema 4.28) vale NC para G .

Suponhamos agora que G não seja um p -grupo.

Se G fosse um grupo de Dedekind abeliano então vale NC para G .

Se G fosse um grupo de Dedekind não abeliano, então utilizando a proposição 1.30 e os teoremas de Coleman (teorema 4.28) e de Marciniak (teorema 4.29) concluímos que vale NC para G .

Suponha agora que G não seja um grupo de Dedekind e que não tenha ordem potência de um primo.

Nessas condições, se G for um grupo tal que $R(G) = 1$ então pela proposição 4.33 segue a tese.

Finalmente se G for um grupo finito, $R(G) \neq 1$ então o resultado segue pelo resultado da seção anterior (teorema 4.27) que vale NC para G .

Da análise dos casos possíveis, a tese segue imediatamente do lema 4.32. $\square$

4.5 Caracterização dos grupos finitos G em função da altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Nesta seção intentamos responder a seguinte questão proposta no início do capítulo: Se a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2. Então quais são os grupos finitos G que possuem altura central exatamente 0, 1 e 2?

Pelo resultado da seção anterior podemos concluir que $Z_2^2(\mathcal{U}) \leq Z_1(\mathcal{U})$ e que $[Z_2(\mathcal{U}) : Z_1(\mathcal{U})] \leq 4$. Unindo os resultados dos teorema 3.21 que nos fornece a estrutura do subgrupo de torção $T(Z_2(\mathcal{U}))$ e combinando esse resultado com o teorema 4.24 que nos dá uma descrição dos grupos finitos cujo grupo de unidades do anel de grupo inteiro possuem unidades centrais triviais, obtemos a resposta à pergunta proposta nesta seção através do seguinte:

Corolário 4.35. *Sejam G um grupo finito e $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ o grupo de unidades de aumento 1 do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}G$. Então:*

- (1) $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 2 se e somente se G é um Q^* -grupo;

(2) $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 0 se e somente se G possui a propriedade que para todo $g \in G$ e todo número natural j , relativamente primo com $|G|$, g^j é conjugado a g ou a g^{-1} e $Z_1(G) = (1)$;

(3) Se nenhum dos casos acima ocorrer, $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 1.

4.5.1 Alguns Exemplos

Apresentaremos nesta subseção alguns exemplos concretos de grupos finitos G satisfazendo as condições do corolário 4.35 citado acima:

Pelo corolário 4.35 concluímos que $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 2 se e somente se G é um Q^* -grupo.

Considere a seguir o grupo $G = S_n$, $n \geq 3$, o grupo simétrico com n elementos. Não é difícil de observar que neste caso, S_n satisfaz as condições do teorema de Ritter-Sehgal (teorema 4.24), o que implica que as unidades centrais de $\mathbb{Z}S_n$ são triviais. Utilizando o fato bem conhecido que se $n \geq 3$, $Z(S_n) = 1$, podemos concluir pelo corolário 4.35 que nestas condições S_n possui altura central 0.

Pelo corolário 4.12 (do teorema de Gross) segue que se G é um grupo finito, não-solúvel então a altura central de $\mathcal{U}$ é no máximo 1. Considere a seguir os grupos A_5 e A_6 , onde A_n indica o grupo alternado de n elementos. Em [1], Aleev afirma e demonstra que o centro de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A_5)$ é gerado por um elemento u de ordem infinita, apresentando uma descrição explícita deste gerador (ele demonstra também que o centro de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A_6)$ é um grupo cíclico de ordem infinita, explicitando o gerador u). Conseqüentemente, podemos concluir pelo corolário 4.12 que a altura central de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A_5)$ (idem para $\mathcal{U}(\mathbb{Z}A_6)$) é 1.

Consideremos a seguir um grupo G de ordem 27. Como G satisfaz as condições do teorema de Ritter-Sehgal (veja [27] ou [31], p.23) e sendo G um grupo nilpotente finito, concluímos que $Z(G)$ não é trivial, o que implica pelo corolário 4.35 que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 1.

A seguir, temos G definido pelas seguintes relações: $G = \langle x, y \mid x^7 = 1 = y^3, x^y = x^2 \rangle$. Como G satisfaz as condições do teorema de Ritter-Sehgal (veja [27] ou [31], p.23) e $Z(G)$ não é trivial, segue pelo corolário 4.35 que $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ possui altura central 1.

Para concluirmos, observamos que se G for um grupo arbitrário então não é necessariamente verdade, que a altura central de $\mathcal{U}$ é no máximo 2. Consideremos o seguinte lema:

Lema 4.36. *Seja G grupo nilpotente livre de torção. Então $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G) = \pm G$.*

Pelo lema 4.36 temos que cada termo $Z_\alpha(\mathcal{U})$ da série central superior de $\mathcal{U}$ é igual a $Z_\alpha(G)$. A seguir, utilizando o fato de que existem grupos G com classe de nilpotência prescrita concluímos

que podemos obter infinitos exemplos de grupos G tais que a altura central de $\mathcal{U}$ é maior ou igual a 2.

Capítulo 5

A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ de um grupo periódico

Ao introduzir o conceito de n -centro de um grupo, Baer percebeu que este conceito compartilhava de uma série de propriedades com o centro de um grupo. Ao estudarem mais profundamente estas semelhanças com o centro, Newell e Kappe obtiveram algumas caracterizações sobre o n -centro cujos resultados possuem conexão com uma conjectura de Hall sobre margens.

Neste capítulo introduzindo o conceito de n -centro de um grupo, apresentaremos a generalização do resultado do capítulo anterior para o caso de um grupo periódico G de que a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2 e utilizando os resultados sobre o hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ obtemos uma caracterização para o n -centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

É interessante notar aqui a relação como um conceito que teve conexões com uma conjectura sobre margens, é utilizado para obtermos uma caracterização sobre o hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$.

Nas condições do Teorema 3.21 segue que:

Corolário 5.1. *Seja G um grupo periódico então $T \leq Z_2(G)$, onde T denota o subgrupo dos elementos de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$.*

5.1 A altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2

Da mesma maneira que no caso finito, nosso objetivo nesta seção é o de mostrarmos que se G for um grupo periódico, então a altura central de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ é no máximo 2 (teorema 5.10).

Lema 5.2. *Seja G um grupo periódico. Então $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq N_{\mathcal{U}}(G)$.*

Demonstração: Sejam $v \in Z_2(\mathcal{U})$ e $g \in G$. Então $[v, g] = v^{-1}g^{-1}vg = c$ para algum $c \in Z_1(\mathcal{U})$.

Sendo G um grupo periódico concluímos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m = 1$. Portanto, utilizando a proposição 1.33 obtemos que $1 = [v, g]^m = [v, g^m] = c^m$. Concluimos que c é um elemento de ordem finita e pelo lema 1.16, temos que c é uma unidade trivial. Conseqüentemente, $vgv^{-1} = cg$ e isso nos leva ao resultado desejado. $\square$

Lema 5.3. *Seja G um grupo periódico. Então $[Z_2(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \subseteq Z_1(G)$.*

Demonstração: Sejam $u_2 \in Z_2(\mathcal{U}), u \in \mathcal{U}$. Então pelo lema 1.23 temos que $u_2^2 = ag$ para algum $a \in Z_1(\mathcal{U})$ e algum $g \in G$. Conseqüentemente sendo G periódico temos que existe um inteiro $n(u_2)$ tal que $u_2^{n(u_2)} \in Z_1(\mathcal{U})$. No entanto, temos que $[u_2, u] = c$ para algum $c \in Z_1(\mathcal{U})$. Novamente utilizando a proposição 1.33 e elevando ambos os membros da igualdade a $n(u_2)$ -ésima potência, obtemos que: $1 = [u_2, u]^{n(u_2)} = [u_2^{n(u_2)}, u] = c^{n(u_2)}$. Donde concluímos pelo lema 1.16 que c é uma unidade trivial. Concluindo a demonstração. $\square$

Lema 5.4. *Seja G um grupo periódico. Então $Z_{n+1}^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_n(\mathcal{U})$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que $Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$. Suponha que $Z_2^2(\mathcal{U}) \not\subseteq Z_1(\mathcal{U})$. Pelo lema 5.3 e pelo lema 1.23 concluímos que $Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq N_{\mathcal{U}}^2(G) \subseteq GZ_1(\mathcal{U})$. Segue daí que existe um elemento $g \in Z_2(\mathcal{U}) \setminus Z_1(\mathcal{U})$. Seja $u \in \mathcal{U}$. Então pelo lema 5.3, $[u, g] = g_0 \in Z_1(G)$. Pelo lema 1.33, concluímos que existe um inteiro $n = n(u)$ tal que $[u, g]^n = [u^n, g] = g_0^n = 1$ e conseqüentemente que $u^n g u^{-n} = g$. Como $g \in Z_2(\mathcal{U}) \setminus Z_1(\mathcal{U})$, o grupo G é um Q^* -grupo e pelo teorema 5.16 segue que o expoente de $Z_1(G)$ é igual a 2. Portanto, para todo $u_2 \in Z_2(\mathcal{U})$ e para todo $g' \in G$, nós temos que $[u_2^2, g'] = [u_2, g']^2 = g_0'^2 = 1$. Concluimos que u_2^2 é uma unidade central e portanto que, $Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$. Contradição. Portanto, $Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$.

A demonstração continua por indução em n . No parágrafo anterior mostramos o caso para $n = 1$. Suponha agora que o resultado seja válido para $n = k - 1 \geq 1$ e consideremos o caso para $n = k$. Seja $u \in \mathcal{U}$ e $u_{k+1} \in Z_{k+1}(\mathcal{U})$. Então $[u_{k+1}, u] = u_k \in Z_k(\mathcal{U})$. Além disso, como $[u_{k+1}, u_k] \in Z_{k-1}(\mathcal{U})$ e utilizando a identidade $[u_{k+1}^2, u] = [u_{k+1}, u_k]u_k^2$, concluímos pela hipótese de indução que $[u_{k+1}^2, u] = [u_{k+1}, u_k]u_k^2 \in Z_{k-1}(\mathcal{U})$, e portanto concluímos que $u_{k+1}^2 \in Z_k(\mathcal{U})$. Completando a demonstração. $\square$

Lema 5.5. *Seja G um grupo periódico. Então $[Z_3(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \subseteq T$.*

Demonstração: Para qualquer $u_3 \in Z_3(\mathcal{U})$ e $u \in \mathcal{U}$ e utilizando os lemas 5.3 e 5.4 concluímos que $[u_3, u]^2 = [u_3, [u_3, u]]^{-1}[u_3^2, u] \in Z_1(G)$. De fato, pelo lema 5.4 temos que $u_3^2 \in Z_2(\mathcal{U})$ e pelo lema 5.3 concluímos que $[u_3, [u_3, u]]^{-1} \in Z_1(G)$ e $[u_3^2, u] \in Z_1(G)$. Segue imediatamente que $[Z_3(\mathcal{U}), \mathcal{U}] \subseteq T$. $\square$

Lema 5.6. *Seja G um grupo periódico e denotemos por $\mathcal{B}_1$ o subgrupo de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ gerado por todas as unidades bicíclicas. Então $[Z_3(\mathcal{U}), \mathcal{B}_1] = 1$.*

Demonstração: Mostraremos inicialmente que $[Z_2(\mathcal{U}), \mathcal{B}_1] = 1$.

Sejam $u_2 \in Z_2(\mathcal{U})$ e $u_{b,a} = 1 + (1-b)a\hat{b}$ uma unidade bicíclica. Pelo lema 5.3 então $[u_2, u_{b,a}] = c_0 \in Z_1(G)$. Logo existe um inteiro positivo n tal que $[u_2, u_{b,a}]^n = c_0^n = 1$ e pelo lema 1.33 segue que $[u_2, u_{b,a}^n] = 1$. Observando o fato que $u_{b,a}^n = 1 + n(1-b)a\hat{b}$ nós concluímos que $[u_2, u_{b,a}] = 1$. De fato, $[u_2, u_{b,a}^n] = 1 \Rightarrow u_2 u_{b,a}^n = u_{b,a}^n u_2 \Rightarrow u_2(1 + n(1-b)a\hat{b}) = (1 + n(1-b)a\hat{b})u_2 \Rightarrow n(u_2(1-b)a\hat{b} - (1-b)a\hat{b}u_2) = 0 \Rightarrow u_2(1-b)a\hat{b} = (1-b)a\hat{b}u_2 \Rightarrow u_2 + u_2(1-b)a\hat{b} = u_2 + (1-b)a\hat{b}u_2 \Rightarrow [u_2, u_{b,a}] = 1$.

A seguir sejam $u_3 \in Z_3(\mathcal{U})$ e b uma unidade bicíclica. Então pelo lema 5.5, $[u_3, b] \in T$ e portanto, $[u_3, b]^n = 1$ para algum inteiro positivo n . Observando que $[u_3, b^n] = [u_3, b^{n-1}]b^{n-1}[u_3, b]b^{-(n-1)} = [u_3, b^{n-1}][b^{n-1}, [u_3, b]][u_3, b]$ e utilizando o fato que $[b^{n-1}, [u_3, b]] = 1$, pois $[u_3, b] \in Z_2(\mathcal{U})$, nós concluímos por indução, que $[u_3, b^n] = [u_3, b^{n-1}][u_3, b] = [u_3, b]^{n-1}[u_3, b] = [u_3, b]^n = 1$. Portanto, $[u_3, b] = 1$ como vimos anteriormente.

□

Relembramos a definição de Q^* -grupo.

Definição 5.7. *Diremos que G é um Q^* -grupo se G possuir um subgrupo normal abeliano L de índice 2 com um elemento a de ordem 4 tal que para todo $g \notin L$, $g^2 = a^2$ e $g^{-1}hg = h^{-1}$, para todo h em L .*

Lema 5.8. *Seja G um Q^* -grupo. Então: $[Z_3(\mathcal{U}), G] \subseteq \langle a^2 \rangle$.*

Demonstração: A demonstração é idêntica ao lema 4.20, com a única diferença que aqui empregamos o lema 5.6 no lugar da proposição 4.17(3).

□

Uma consequência imediata do lema é o:

Corolário 5.9. *Seja G um Q^* -grupo então $[Z_3^2(\mathcal{U}), G] = 1$ e $Z_3^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$.*

Estamos prontos para demonstrar o teorema 5.10.

Teorema 5.10. *Seja G um grupo periódico. Então: $Z_3(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$.*

Demonstração: De acordo com o teorema 3.21 temos de considerar três casos:

- (1) Suponhamos que G seja um 2-grupo Hamiltoniano. Então pela proposição 1.30 e pelo lema 1.19, $\mathcal{U} = \pm G = \pm T = Z_2(\mathcal{U})$.
- (2) Suponha que T é um subgrupo central de $\mathcal{U}$. Então o resultado decorre diretamente do lema 5.5.
- (3) Suponhamos agora que T é abeliano, mas não seja um subgrupo central. Nesse caso, $G = \langle H, b \rangle$ é um grupo do tipo (3) no teorema 3.21, ou seja, G é um Q^* -grupo, portanto, $T = \langle a \rangle \oplus E = Z_2(\mathcal{U}) \cap Z_2(G)$. Neste caso, relembramos que $Z_1(G) = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$ e o expoente de T é igual a 4.

Suponha por absurdo que exista $x \in Z_3(\mathcal{U}) \setminus Z_2(\mathcal{U})$. Então para algum $u \in \mathcal{U}$, $[x, u] = t \in T$ é um elemento de ordem 4. Claramente $t \in G'$ o grupo derivado de G . Além disso, não é difícil de verificarmos neste caso que $G' = \{h^2 \mid h \in H\}$. Para observarmos o primeiro fato, considere a projeção natural $\varphi : \mathbb{Z}G \mapsto \mathbb{Z}(G/G')$, aplicando φ a t obtemos que $\varphi(t) = \bar{t}$, decorre daí que: $[\bar{x}, \bar{u}] = \bar{t} = \bar{1}$, pois $\mathbb{Z}(G/G')$ é um anel de grupo comutativo. Portanto, $t - 1 \in \Delta(G')\mathbb{Z}G$ o que implica que $t \in G'$.

Já vimos anteriormente que $\langle a \rangle \triangleleft \mathcal{U}$, (teorema 3.20), $o(a) = 4$, então $a^2 \in Z(\mathcal{U})$.

Mostraremos agora que $G' = \{h^2 \mid h \in H\}$. Para isto mostraremos que para quaisquer $g_1 \in G, g_2 \in G$, existe $h \in H$ tal que $[g_1, g_2] = h^2$.

- (a) Se $g_1 \in H, g_2 \in H$ então nada há a demonstrar.
- (b) Suponha agora que $g_1 \in G \setminus H, g_2 \in G \setminus H$.

Como H é um subgrupo de G de índice 2, todo $g \in G \setminus H$ pode ser expresso na forma $g = hb$, para algum $h \in H$.

Nesse caso, pela proposição 1.32(ii), temos que:

$$[g_1, g_2] = [h_1, h_2b] = [h_1, h_2]^b[h_1, b] = h_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-2}.$$

- (c) Se $g_1 \in G \setminus H, g_2 \in G \setminus H$ então:

$$\begin{aligned}
 [g_1, g_2] &= [h_1b, h_2b] \\
 &= [h_1, h_2b]^b[b, h_2b] \\
 &= [[h_1, h_2b]^b[h_1b]]^b[b, h_2]^b \\
 &= [h_1b]^b[b, h_2]^b \\
 &= [h_1^{-2}]^b[h_2^{-2}]^b \\
 &= (h_2^{-2})(h_1^2) \\
 &= (h_2^{-1}h_1)^2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, podemos observar que para quaisquer $g_1 \in G, g_2 \in G$, existe $h \in H$ tal que $[g_1, g_2] = h^2$.

Logo, $G' = \{h^2 \mid h \in H\}$.

Perceba que pelo lema 5.8 $[x, h] \in \langle a^2 \rangle \subseteq Z_1(\mathcal{U})$, para todo $h \in H$. Logo, $[x, h]^2 = 1$. Segue que $[x, t] = [x, h^2]$ (para algum $h \in H$) $= [x, h]h[x, h]h^{-1} = [x, h]^2 = 1$.

Portanto, $[x^2, u] = x[x, u]x^{-1}[x, u] = [x, t]t^2 = t^2 \neq 1$. No entanto, pelo corolário 5.9, nós temos que $[x^2, u] = 1$. Contradição. Donde concluímos que: $Z_3(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$ sempre.

□

Corolário 5.11. *Seja G um grupo periódico. Se todas as unidades centrais são triviais, então todas as unidades hipercenrais são triviais também.*

Demonstração: Seja $u \in \tilde{Z}(\mathcal{U})$. Então pelo teorema 5.10 e pelo lema 5.2 temos que $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}}(G)$. Pelo lema 1.20 segue que $uu^* = g \in Z_1(G)$ o que implica que $uu^* = 1$. Donde u é uma unidade trivial pelo lema 1.17, finalizando a demonstração. □

5.2 O n -centro do grupo de unidades de um anel de grupo inteiro

Introduzimos o conceito de n -centro de um grupo e nosso objetivo principal é o de obtermos uma caracterização do n -centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ em função dos resultados que obtivemos acerca do hipercentro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$. Em particular, apresentamos uma caracterização dos Q^* -grupos, como aqueles grupos periódicos que possuem um elemento não-central que pertence ao 4-centro de $\mathcal{U}$. Além de estudarmos algumas relações entre o grupo das unidades de torção do n -centro de $\mathcal{U}$ e o grupo das unidades de torção do hipercentro de $\mathcal{U}$.

5.2.1 Alguns resultados básicos e notações

Sejam

$$S_1(G, n) = \{a \in G \mid (ax)^n = a^n x^n, \forall x \in G\}$$

e

$$S_2(G, n) = \{a \in G \mid (xa)^n = x^n a^n, \forall x \in G\}.$$

Em [4] Baer definiu o n -centro como

$$Z(G, n) = S_1(G, n) \cap S_2(G, n).$$

No entanto, veremos que apenas uma das condições de n -comutatividade é suficiente para definirmos o n -centro devido ao seguinte teorema.

Teorema 5.12. *Para um inteiro n e um grupo G qualquer*

$$Z(G, n) = S_1(G, n) = S_2(G, n).$$

Demonstração: Afirmamos inicialmente que $S_1(G, n) \subseteq S_2(G, n)$.

Seja $a \in S_1(G, n)$ então tomando inversos obtemos que $(x^{-1}a^{-1})^n = x^{-n}a^{-n}$, para todo x em G e $(ya^{-1})^n = y^na^{-n}$, para todo y em G .

Segue daí que:

$$(ax^na^{-1} = (axa^{-1})^n = a^n(xa^{-1})^n = a^nx^na^{-n}) \Rightarrow (ax^na^{-1} = a^nx^na^{-n}) \Rightarrow (x^na^{-1} = a^{n-1}x^na^{-n}) \Rightarrow (x^n = a^{n-1}x^na^{-(n-1)}) \Rightarrow (1 = a^{n-1}x^na^{-(n-1)}x^{-n}).$$

Donde obtemos que $[a^{n-1}, x^n] = 1$, para todo x em G .

Por outro lado temos que: $a^nx^n = (ax)^n = a(xa)^{n-1}x$. Portanto, $(xa)^{n-1} = a^{n-1}x^{n-1}$. Segue daí que: $(xa)^n = (xa)^{n-1}(xa) = a^{n-1}x^{n-1}xa = a^{n-1}x^na = x^na^{n-1}a = x^na^n$.

Mostramos que $S_1(G, n) \subseteq S_2(G, n)$. A outra inclusão é totalmente análoga.

□

Note que $Z(G, 1) = Z(G, 0) = G$.

Proposição 5.13. *Seja $a \in Z(G, n)$. Então:*

- (1) $[a^{n-1}, x^n] = 1$ para todo x em G ;
- (2) $a \in Z(G, 1-n)$ (Portanto, $Z(G, n) = Z(G, 1-n)$ sempre);
- (3) $[a^n, x] = [a, x]^n = [a, x^n]$ para todo x em G ;
- (4) $1 = [a, x^{n(1-n)}] = [a^{n(1-n)}, x] = [a^n, x^{1-n}]$ para todo x em G ;
- (5) $a^n \in Z(G, n-1)$.

Demonstração: (1) Decorre da demonstração do teorema 5.12; pois $S_1(G, n) = Z(G, n)$.

- (2) Da demonstração do teorema 5.12 temos que $(xa)^{n-1} = a^{n-1}x^{n-1}$ para $a \in S_1(G, n)$. Tomando inversos, $(xa)^{1-n} = x^{1-n}a^{1-n}$ e o resultado segue do teorema 5.12.

(3) Observando que $[a, x]^n = (a^{-1}a^x)^n = a^{-n}a^{nx} = [a^n, x]$ a primeira igualdade está demonstrada. Para mostrarmos a segunda igualdade, observamos que $a^n x^{-n}$ comuta com ax^{-1} pois $a^n x^{-n} = (ax^{-1})^n$. Portanto, $a^{n+1}[a, x^n]x^{-(n+1)} = a^n x^{-n} ax^{-1} = ax^{-1} a^n x^{-n} = a^{n+1}[a^n, x]x^{-(n+1)}$ e a segunda igualdade segue.

(4) Por (1), (2) e (3) obtemos que

$$1 = [a^{1-n}, x^n] = [a^{1-n}, x]^n = [a, x]^{n(1-n)} = [a^n(1-n), x]; \text{ e de maneira análoga, obtemos que: } 1 = [a^{1-n}, x^n] = [a, x^{n(1-n)}] = [a^n, x^{1-n}].$$

(5) Por (4) nós observamos que a^n e x^{n-1} comutam. Portanto,

$$(a^n x)^{n-1} = (a^n x)^n x^{-1} a^{-n} = a^{n^2} x^{n-1} a^{-n} = a^{n(n-1)} x^{n-1}.$$

□

Podemos facilmente ver que o 2-centro de um grupo coincide com o seu centro.

Proposição 5.14. *Seja G um grupo. Então:*

$$Z(G, 3) = \{a \in R_2(G) \mid a^3 \in Z_1(G)\} \quad e \quad Z(G, 3) \subseteq Z_3(G).$$

Aqui $Z_m(G)$ é o m -ésimo centro de G e $R_m(G) = \{a \in G \mid [a, {}_m x] = 1, \forall x \in G\}$ denota o conjunto dos m -Engel elementos à direita, onde

$$[x, {}_m y] = [[x, {}_{m-1} y], y] \quad e \quad [x, {}_1 y] = [x, y]$$

Demonstração: Seja $a \in Z(G, 3)$, então temos que:

$$(xa^{-1})^3 = x^{1+a+a^2} a^{-3} = x^{-3} a^{-3},$$

onde $x^g = g^{-1}xg$. De fato, a primeira igualdade resulta do fato que $(xa^{-1})^3 = xx^a x^{a^2} a^{-3}$ e a segunda igualdade decorre da definição de 3-centro de um grupo, comparando o primeiro e o último fator da igualdade.

Segue-se do fato acima que: $x^{a+a^2} = x^2$. Substituindo x por x^{-1} na igualdade anterior obtemos que $(x^{-1})^a (x^{-1})^{-2} = x^{-2}$ e invertendo obtemos que: $x^{a^2} x^a = x^{a^2+a} = x^2$. Portanto,

$$x^{a+a^2} = x^{a^2+a}.$$

Conjugando com a^{-1} decorre que: $[x^a, x] = 1$. De fato, temos que: $a(x^{a^2} x^a) a^{-1} = a(x^a x^{a^2}) a^{-1} \Rightarrow x^a x = x x^a \Rightarrow [x^a, x] = 1$. E portanto, como $[x^a, x] = 1$, concluímos que $a \in R_2(G)$. A última afirmação provém do fato que: $[x^a, x] = (x^{-1})^a x^{-1} x^a x = [a, x] x^{-1} [a, x]^{-1} x = [[a, x], x] = 1$.

Pela proposição 5.13(5) sabemos que $a^3 \in Z(G, 2) = Z(G)$. Portanto, $Z(G, 3) \subseteq Y$, onde $Y = \{a \in R_2(G) \mid a^3 \in Z(G)\}$.

Mostraremos agora que: $Y \subseteq Z(G, 3)$.

Seja $a \in Y$. Então:

$$[a, x, x] = 1 = [a, x, a] \quad (5.2)$$

e

$$[a^3, x] = [a, x]^3. \quad (5.3)$$

Portanto,

$$(ax^{-1})^3 = a^3[a, x]^3x^{-3} = a^3x^{-3}, \forall x \in G, \quad (5.4)$$

logo concluímos que $Y \subseteq Z(G, 3)$. Para justificarmos a primeira igualdade na equação 5.4, observe que pela equação 5.2 concluímos que: $[a, x, x] = [[a, x], x] = 1 = [a, x, a] = [[a, x], a]$, ou seja $[a, x]$ comuta com x e com a , além disso, segue que $[[a, x], x^{-1}] = 1$ pois $[[a, x], x^{-1}] = [x, a]x[a, x]x^{-1} = [x, a][a, x]xx^{-1} = [a, x]^{-1}[a, x] = 1$, pois $[a, x]$ comuta com x . Logo,

$$(ax^{-1})^3 = a^2[a, x]x^{-2}ax^{-1} = a^2[a, x]a[a, x]x^{-1}[a, x]x^{-2} = a^3[a, x]^3x^{-3}.$$

Agora $a^3 \in Z(G)$ implica que $[a, x, y, z]^3 = 1$, pois $1 = [a^3, x, y, z] = [[a^3, x, y], z] = [[\underbrace{[a^3, x]}_1, y], z] = [\underbrace{[a, x]^3}_1, y], z] = [\underbrace{[a, x, y]^3}_1, z] = [a, x, y, z]^3 = 1$.

Segue de [22] que $[a, x, y, z]^4 = 1$. Portanto, $[a, x, y, z] = 1, \forall x, y, z \in G$, e $Z(G, 3) \subseteq Z_3(G)$. □

Teorema 5.15. *Seja G um grupo periódico. Então:*

$$Z(\mathcal{U}, 3) = Z(\mathcal{U}, 2) = Z_1(\mathcal{U}).$$

Demonstração: Pela proposição 5.14 temos que $Z(\mathcal{U}, 3) \subseteq Z_3(\mathcal{U})$, pelo teorema 5.10, $Z_3(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U})$ e do lema 5.4 temos que $Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_3(\mathcal{U})$. Segue daí que, para todo $u \in Z(\mathcal{U}, 3)$, $u^2 \in Z_1(\mathcal{U})$. Pela proposição 5.14 concluímos que $u^3 \in Z_1(\mathcal{U})$. Portanto, $u \in Z_1(\mathcal{U})$ e $Z(\mathcal{U}, 3) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$. □

5.2.2 Uma caracterização do n -centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$

Empregando a notação definida na seção anterior, pretendemos nos concentrar em atingir alguns objetivos principais: Caracterizar o n -centro de $\mathcal{U}_1(\mathbb{Z}G)$ para $n \geq 4$; caracterizar os Q^* -grupos como aqueles grupos periódicos que contém um elemento não-central que pertence ao 4-centro de $\mathcal{U}$.

Com esse intuito, inicialmente apresentamos um teorema de caracterização dos Q^* -grupos. Logo a seguir, estudamos algumas relações entre o hipercentro de $\mathcal{U}$ de um grupo periódico e

o n -centro de $\mathcal{U}$; e entre o n -centro de $\mathcal{U}$ e os Q^* -grupos. Fatos estes que nos permitirão atingirmos os propósitos estabelecidos nesta subseção.

Teorema 5.16. *Seja G um grupo periódico. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) G contém um elemento não-central a com a propriedade que dada qualquer unidade $u \in \mathcal{U}$, existe um inteiro positivo $n = n(u)$ tal que $u^n a u^{-n}$ pertence a G .
- (2) G é um Q^* -grupo.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2):

Afirmamos inicialmente que $\langle a \rangle \triangleleft G$.

Seja $y \in G$ e consideremos a unidade bicíclica $u = 1 + (1 - a)y\hat{a}$.

Calculando $u^n a u^{-n}$, $n \geq 1$, obtemos que:

$$\begin{aligned} u^n a u^{-n} &= (1 + n(1 - a)y\hat{a})a(1 - n(1 - a)y\hat{a}) = (1 + n(1 - a)y\hat{a})(a - an(1 - a)y\hat{a}) = a - an(1 - a)y\hat{a} + n(1 - a)y\hat{a} - \underbrace{n(1 - a)y\hat{a}an(1 - a)y\hat{a}}_{=0, \text{ pois } (1 - a)\hat{a} = 0} \\ &= a + n(1 - 2a + a^2)y\hat{a}. \end{aligned}$$

Por hipótese temos que $u^n a u^{-n} \in G$, portanto, $u^n a u^{-n}$ é um elemento de ordem finita, o que implica que $(1 - 2a + a^2)y\hat{a} = 0$, portanto, $y = aya^i$ para algum i . O que nos mostra que $y^{-1}ay \in \langle a \rangle$.

Afirmamos agora que se $y \in G$ então a normaliza $\langle y \rangle$.

Consideremos então a unidade bicíclica $v = 1 + (1 - y)a\hat{y}$. Se $n \geq 1$ então efetuando cálculos similares aos efetuados anteriormente, obtemos que $v^n a v^{-n} = a + n(1 - y)a\hat{y}a - na(1 - y)a\hat{y} - n^2(1 - y)a\hat{y}a(1 - y)a\hat{y}$. Novamente, empregando a hipótese, decorre que: $(1 - y)a\hat{y}a = a(1 - y)a\hat{y}$. Portanto, ou $aya = a^2y^i$ para algum i ou $aya = yay^j a$ para algum j . No primeiro caso, obtemos que $a^{-1}ya = y^i$ e no segundo caso, obtemos que $a^{-1}ya = y^{1-j}$. Em qualquer um dos dois casos, concluímos que a normaliza G .

Mostraremos a seguir que se $z \in \langle a, y \rangle$ então $\langle z \rangle \triangleleft \langle a, y \rangle$ e conseqüentemente concluiremos que o grupo $\langle a, y \rangle$ é um grupo de Dedekind.

É suficiente provarmos que y normaliza $\langle z \rangle$, pois já vimos anteriormente que a normaliza $\langle z \rangle$.

Consideremos, agora, a unidade bicíclica $f = 1 + (1 - z)y\hat{z}$. Como anteriormente nós obtemos que $f^n a f^{-n} = a + n(1 - z)y\hat{z}a - na(1 - z)y\hat{z} - n^2(1 - z)y\hat{z}a(1 - z)y\hat{z}$. Novamente a hipótese nos diz que $(1 - z)y\hat{z}a = a(1 - z)y\hat{z}$. Portanto, $ay = yz^i a$ para algum i ou $ay = azyz^j$ para algum j . No segundo caso, obtemos que $y = zyz^j$, logo $y^{-1}zy = z^{-j}$ e $y^{-1}zy \in \langle z \rangle$. No primeiro caso,

obtemos que: $a^{-1}y^{-1}ay = a^{-1}z^i a \in \langle z \rangle$, pois como vimos anteriormente, a normaliza $\langle z \rangle$. Mas também sabemos que $a^{-1}y^{-1}ay \in \langle a \rangle$, pois $\langle a \rangle \triangleleft G$. Segue então que $\langle a^{-1}y^{-1}ay \rangle \triangleleft G$.

Utilizando a proposição 1.32(ii) concluímos que para quaisquer elementos $r, s \in \langle a, y \rangle$ o elemento $r^{-1}s^{-1}rs \in \langle a^{-1}y^{-1}ay \rangle$. Conseqüentemente $\langle a, y \rangle' = \langle a^{-1}y^{-1}ay \rangle \subseteq \langle z \rangle$, donde podemos concluir que $\langle z \rangle \triangleleft \langle a, y \rangle$.

Afirmamos, agora, que $y \in G$ então $\langle a, y \rangle$ é abeliano ou $\langle a, y \rangle \cong Q$, onde Q aqui representa o grupo dos quatérnions.

Considerando os resultados anteriores e pela proposição 1.30, a única possibilidade distinta que poderia ocorrer seria que $\langle a, y \rangle \cong Q \times A$, onde A é um grupo abeliano de ordem ímpar.

Suponha que $G = \langle a, y \rangle \cong Q \times A$, onde Q é um grupo quatérnion de ordem 8 e A é um grupo abeliano de ordem ímpar.

Nesse caso podemos expressar a na forma $a = tv$, $t \in Q$, $v \in A$, $o(v) = m$, ímpar. Observamos que $A \subseteq Z(G)$. Como $a \notin Z(G)$, t é um elemento de ordem 4, caso contrário, $o(t) = 2 \Rightarrow t \in Z(Q) \subseteq Z(Q \times A)$. Contradição. Portanto, $o(a) = o(t)o(v) = 4m$, pois os elementos t e v são co-primos.

Sendo t um elemento de ordem 4 em Q , t não é um elemento central. Logo existe $u \in Q$ tal que $[u, t] \neq 1$, logo $o(u) = 4$.

Tome um elemento g_0 distinto de 1, $g_0 \in A \subseteq Z(G)$, $o(g_0) = p$, p primo ímpar, o qual sempre existe pelo teorema de Cauchy.

Defina $x := ug_0$, $o(x) = o(u)o(g_0) = 4p$. Além disso, sabemos que $[x, a] = [z, u] \neq 1$. Donde,

$$a^{-1}xa = (tv)^{-1}ug_0tv = t^{-1}utg_0 = u^{-1}g_0 = u^3g_0. \quad (5.5)$$

Por outro lado: $x^{2p+1} = (ug_0)^{2p+1} = (u)^{2p+1}(g_0)^{2p+1} = (u)^{2p+1}(g_0)^{2p}(g_0) = uu^{2p}g_0 = u(u^2)^p g_0 =^{**} uu^2g_0 = u^3g_0$.

(**) Se $u \in Q$, $o(u) = 4$ então $(u^2)^p = 1$ ou $(u^2)^p = u^2$. Se $(u^2)^p = 1$ então p dividiria 2. Contradição, pois p é ímpar. Logo $(u^2)^p = u^2$. Donde, concluímos que $x^{2p+1} = u^3g_0$ (***)

Comparando (**) e 5.5 decorre que:

$$a^{-1}xa = x^{2p+1}. \quad (5.6)$$

Seja ϕ a função de Euler, $o(x) = 4p$, $\phi(4p) = 2(p-1)$, considere a unidade cíclica de Bass não-trivial:

$$\omega = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2p-2})^{2(p-1)} + \frac{1 - (2p-1)^{2(p-1)}}{4p} \hat{x}.$$

Afirmamos que: $a^{-1}\omega a \neq \omega$.

Suponha que $a^{-1}\omega a = \omega$, e utilizando 5.6, concluímos que:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{2p-2})^{2(p-1)} = (1 + x^{2p+1} + x^{2(2p+1)} + \dots + x^{(2p-2)(2p+1)})^{2(p-1)}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por: $(1 - x)^{2(p-1)}(1 - x^{-1})^{2(p-1)}$, nós obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - x^{2(p-1)})^{2(p-1)}(1 - x^{2(p+1)})^{2(p-1)} &= (1 - x)^{2(p-1)}(1 - x^{-1})^{2(p-1)} \\ (2 - x^{2p-1} - x^{2p+1})^{2(p-1)} &= (2 - x - x^{-1})^{2(p-1)} \\ (2x^{2p} - x^{-1} - x)^{2(p-1)} &= (2 - x - x^{-1})^{2(p-1)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

No entanto, comparando os coeficientes de x^{2p-1} em ambos os lados da igualdade acima, obtemos que o coeficiente de x^{2p-1} no lado esquerdo da igualdade é não-nulo e negativo enquanto que o coeficiente de x^{2p-1} no lado direito é nulo. Contradição. Logo, $a^{-1}\omega a \neq \omega$.

A seguir observamos que

$$\omega = x^2 + (1 - x^{2p})t, \text{ para algum } t \in \mathbb{Z}\langle x \rangle. \quad (5.8)$$

De fato, considere a projeção natural $\phi : \mathbb{Z}\langle x \rangle \mapsto \mathbb{Z}\langle x \rangle / \langle x^{2p} \rangle$. Aplicando ϕ a ω obtemos que $\phi(\omega) = \bar{\omega} = (\hat{x} - \bar{x}^{2p-1})^{2(p-1)} + \frac{1-(2p-1)^{2(p-1)}}{2p}\hat{x}$.

E calculando diretamente obtemos que $\bar{\omega} = \bar{x}^2$.

Afirmamos que os conjugados da forma $\omega^n a \omega^{-n}$ não pertencem a G .

Consideremos inicialmente $\omega a \omega^{-1}$ e expressamos ω como $\omega = \omega_1 + \omega_2$, onde ω_1 é a soma dos termos de ω envolvendo potências ímpares de x e ω_2 é a soma dos termos de ω envolvendo potências pares de x . De maneira análoga, expressamos ω^{-1} como $\omega^{-1} = \omega_1^1 + \omega_2^1$.

Observando agora a caracterização dada em 5.8, concluímos diretamente que $\omega_2 a = a \omega_2$ e que $\omega_1 a = -a \omega_1$. Relações que nos permitem concluir que:

$$\begin{aligned} \omega a \omega^{-1} &= (\omega_1 + \omega_2) a (\omega_1^1 + \omega_2^1) \\ &= a (\omega_2 - \omega_1) (\omega_1^1 + \omega_2^1) \\ &= a (1 + 2(\omega_2 \omega_1^1 - \omega_1 \omega_1^1)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Anteriormente observamos que $\omega a \omega^{-1} \neq a$, o que implica que a unidade $m = 1 + 2(\omega_2 \omega_1^1 - \omega_1 \omega_1^1)$ não está em $\pm \langle x \rangle$ e portanto, pelo lema 1.17, m é uma unidade de ordem infinita. Observando agora que para todo $n \geq 1$, $\omega^n a \omega^{-n} = a m^n$, chegamos a uma contradição, pois $m^n \notin G$.

Para concluir, mostraremos que se $y \in G$ então $\langle a, y \rangle$ é um grupo abeliano ou é isomorfo a Q . Como a não é um elemento central, podemos escolher $g \in G$ tal que $\langle a, g \rangle \cong Q$. Onde

concluimos que a é um elemento de ordem 4. Consideremos $A = C_G(a)$ e note que $g \notin A$. Temos então para todo $h \in A$, $hg \notin A$, logo $\langle a, hg \rangle \cong Q$. Segue daí que $g^2 = a^2 = hghg$, o qual implica que $g^{-1}hg = h^{-1}$. Notemos também que se $k \notin A$ então $gag^{-1} = a^{-1} = kak^{-1}$. Do qual resulta que $g^{-1}k \in A$, e portanto, A é um subgrupo de índice 2 de G . Além disso, A é abeliano pois se $h_1, h_2 \in A$ então $g^{-1}h_1h_2g = (h_1h_2)^{-1}$ o que nos mostra que $g^{-1}h_1h_2g = (g^{-1}h_1g)(g^{-1}h_2g) = h_1^{-1}h_2^{-2}$, concluindo a demonstração.

(2) $\Rightarrow$ (1):

Decorre da demonstração do teorema 3.21 ((2) $\Rightarrow$ (1)).

□

Mostramos uma relação entre o 4-centro e segundo centro do grupo de unidades de um anel de grupo inteiro de um grupo periódico.

Proposição 5.17. *Seja G um grupo periódico. Então $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4)$.*

Demonstração: Sejam $u \in Z_2(\mathcal{U})$ e $v \in \mathcal{U}$. Então nós temos que $[u, v] \in Z_1(\mathcal{U})$ e $u^2 \in Z_2^2(\mathcal{U}) \subseteq Z_1(\mathcal{U})$ pelo lema 5.4. Segue-se então que:

$$[u, v]^{-2} = [u, v]^{-1}uvu^{-1}v^{-1} = u[u, v]^{-1}vuv^{-1} = u^2vu^{-2}v^{-1} = 1.$$

Portanto,

$$uvuv = uvu^{-1}v^{-1}vu^2v = [u, v]^{-1}v^2u^2 \quad \text{pois} \quad u^2 \in Z_1(\mathcal{U}).$$

Conseqüentemente,

$$(uv)^4 = (uvuv)(uvuv) = ([u, v]^{-1}v^2u^2)([u, v]^{-1}v^2u^2) = [u, v]^{-2}u^4v^4 = u^4v^4.$$

O que nos mostra que $u \in Z(\mathcal{U}, 4)$.

□

Definição 5.18. *Seja $\mathbb{Z}G$ o anel de grupo inteiro de um grupo G arbitrário. Um homomorfismo:*

$$f : G \longmapsto \mathcal{U}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\} \quad \text{é dito um homomorfismo de orientação.}$$

Se $x \in \mathbb{Z}G$. Então definimos x^f :

$$x = \sum_{g \in G} \alpha_g g \longmapsto x^f = \sum_{g \in G} \alpha_g f(g)g^{-1}.$$

Em particular, se a f é trivial, então f coincide com a involução $*$ usual.

Lema 5.19. *Seja $f : G \mapsto \{\pm 1\}$, homomorfismo de orientação, $\text{Ker}(f) = A$, $f(b) = -1$, onde $G = \langle A, b \rangle$, $a^2 = b^2$, $a^4 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Ou seja, G é um Q^* -grupo.*

Se u for uma unidade central em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$ então $u \in \mathbb{Z}A$.

Demonstração: Qualquer unidade $u \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}G)$, pode ser representada na forma $u = x + yb$, onde $x, y \in \mathbb{Z}A$. Suponhamos que u seja uma unidade central em $\mathbb{Z}G$ e que $y \neq 0$.

Pelas proposições 1.40 e 1.39 temos que $\mathbb{Q}G \cong \oplus_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$; e seja e_i o idempotente central associado à i -ésima componente da decomposição de $\mathbb{Q}G$.

Como u é uma unidade central, segue que $ue_i = (x + yb)e_i$ é central. Denotando por Id_{n_i} a matriz identidade de ordem n_i , concluímos que $(x + yb)e_i = \lambda_i Id_{n_i}$, para algum $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.

Sejam $xe_i = x_i Id_{n_i}$ e $ye_i = y_i Id_{n_i} \neq (0)$. Nessas condições temos que:

$$0 \neq (yb)e_i = (ye_i)(be_i) = (\lambda_i - x_i)Id_{n_i}$$

donde,

$$b_i = be_i = y_i^{-1} Id(\lambda_i - x_i) Id, \quad b_i \text{ central para todo } i, \quad 1 \leq i \leq r, n_i \geq 2.$$

Como b_i e e_i são centrais para todo i , concluímos que b é central, contradição. Logo, $y = 0$ e $u \in \mathbb{Z}A$.

□

Teorema 5.20. *Seja G um grupo periódico. Então são equivalentes:*

- (1) G é um Q^* -grupo;
- (2) G contém um elemento não-central a tal que $a \in Z(\mathcal{U}, 4)$;
- (3) G contém um elemento não-central a tal que $a \in Z(\mathcal{U}, n)$ para algum $n \geq 4$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Se G é um Q^* -grupo então G possui um subgrupo abeliano A de índice 2 o qual possui um elemento de ordem 4 tal que para todo $h \in A$ e todo $g \in G \setminus A$, $g^2 = a^2$ e $g^{-1}hg = h^{-1}$. Afirmamos que a não é um elemento central e pertence a $Z_2(\mathcal{U})$ e pela proposição 5.17 segue (2).

Seja $f : G \mapsto \{\pm 1\}$, homomorfismo de orientação, onde $G = \langle A, b \rangle$, $\text{Ker}(f) = A$, $f(b) = -1$, $b^2 = a^2$.

Seja $u = a_1 + a_2b, \in \mathcal{U} - 1(\mathbb{Z}G), a_i \in \mathbb{Z}A, i \in \{1, 2\}$ e considere a unidade $u^f = a_1^* - a_2a^2b$ dada pelo homomorfismo de orientação f .

Afirmamos inicialmente que $u^{-1} = u^f c'$, onde c' é uma unidade central. Seja $v = uu^f$. Então:

$$\begin{aligned}
 v^* = (uu^f)^* &= (u^f)^*(u)^* \\
 &= (a_1 - a^2b^*a_2^*)(a_1^* + b^*a_2^*) \\
 &= (a_1 - a^2b^{-1}a_2^*)(a_1^* + b^{-1}a_2^*) \\
 &= a_1a_1^* + a_1a_2b^3 - a_1a_2b - a_2a_2^* \\
 &= a_1a_1^* - a_2a_2^* - a_1a_2b(1 - b^2).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Calculando vv^* temos que:

$$\begin{aligned}
 vv^* &= (a_1a_1^* - a_2a_2^* + a_1a_2b(1 - b^2))(a_1a_1^* - a_2a_2^* - a_1a_2b(1 - b^2)) \\
 &= (a_1a_1^*)^2 + (a_2a_2^*)^2 - 2(a_1a_1^*a_2a_2^*)b^2 \\
 &= (a_1a_1^* - a_2a_2^*b^2)^2 = c^2,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde $c = (a_1a_1^* - a_2a_2^*b^2) = c^* = c^f \in Z_1(\mathcal{U})$.

Considere $v_1 = vc^{-1}$, logo:

$$v_1v_1^* = vc^{-1}(c^{-1})^*v^* = vv^*c^{-1}(c^{-1})^* = 1.$$

Pelo lema 1.17 concluímos que $v_1 = \pm g_0$ para algum $g_0 \in G$ e $v = \pm cg_0$.

Consideremos $g_0 = a_0b^i, a_0 \in A, i = 0$ ou 1 .

Suponhamos inicialmente que $i = 1$. Então obteríamos que $g_0 = a_0b$ e $v = \pm ca_0b$, portanto:

$$\pm c = a_0^{-1}vb^3 = a_0^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*)^2b^3 + a_0^{-1}(a_1a_2(1 - b^2)) \in Z_1(\mathcal{U}).$$

Pelo lema 5.19 $c \in \mathbb{Z}A$, logo temos que $a_0^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*)^2b^3 = 0$. Contradição, pois o aumento de $(a_1a_1^* - a_2a_2^*)$ é igual a ± 1 . Logo concluímos que $i = 0$ e $g_0 = a_0$. Do qual obtemos que:

$$a_0^{-1}(a_1a_1^* - a_2a_2^*) + a_0^{-1}(a_1a_2(1 - b^2)b) = a_0^{-1}v = \pm c \in \mathbb{Z}A.$$

Concluimos que $a_0^{-1}(a_1a_2(1-b^2)b) = 0$, logo $(a_1a_2(1-b^2)b) = 0$. Portanto, $v = uu^f = a_1a_1^* - a_2a_2^* \in Z_1(\mathcal{U})$. Completando a demonstração.

(2) $\Rightarrow$ (3): É imediato.

(3) $\Rightarrow$ (1):

Suponha que $g \in Z(\mathcal{U}, n) \setminus Z_1(\mathcal{U})$. Para todo $u \in \mathcal{U}$ e utilizando a proposição 5.13(4) obtemos que:

$$[g, u^{n(1-n)}] = [g, u]^{n(1-n)} = [g^{n(1-n)}, u] = 1.$$

Portanto, $u^{n(n-1)}gu^{-n(n-1)} = g \in G$ para todo $u \in \mathcal{U}$ e utilizando o teorema 5.16 concluimos que G é um Q^* -grupo, o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 5.21. *Seja G um grupo periódico. Então as seguintes informações são equivalentes:*

(1) G é um Q^* -grupo;

(2) G contém um elemento não-central a tal que para qualquer unidade $u \in \mathcal{U}$, $u^4au^{-4} = a$.

Demonstração: (2) $\Rightarrow$ (1):

É uma consequência imediata do teorema 4.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Seja $u \in \mathcal{U}$. Pelo teorema 5.20, G contém um elemento não central a tal que $a \in Z(\mathcal{U}, 4)$. E pela proposição 5.13(3) temos que:

$$[a, u^4] = [a, u]^4 = [a^4, u] = 1.$$

Além disso, pelo teorema 5.15 e pela proposição 5.13(5) concluimos que $a^4 \in Z(\mathcal{U}, 3) = Z_1(\mathcal{U})$. Portanto, $u^4au^{-4} = a \in G$ para todo $u \in \mathcal{U}$. $\square$

Proposição 5.22. *Seja G um grupo periódico e $T_n = T(Z(\mathcal{U}, n)) = \{x \in Z(\mathcal{U}, n) \mid x \text{ possui ordem finita e } \varepsilon(x) = 1\}$, onde ε denota o homomorfismo de aumento do anel de grupo inteiro $\mathbb{Z}G$. Então para todo $n \geq 2$,*

(1) T_n é um subgrupo característico de $Z(\mathcal{U}, n)$. Além disso,

$$T_n = Z(\mathcal{U}, n) \cap G,$$

(2) Se $u \in Z(\mathcal{U}, n)$, então $[u, v] \in T_n$ para todo $v \in \mathcal{U}$,

- (3) $Z(\mathcal{U}, n) \subseteq N_{\mathcal{U}}(G)$ e $Z^2(\mathcal{U}, n) \subseteq T_n Z_1(\mathcal{U})$,
- (4) $T_n \subseteq T(Z_2(\mathcal{U}))$. Além disso, $T_4 = T(Z_2(\mathcal{U}))$,
- (5) $Z(\mathcal{U}, n) \subseteq Z_2(\mathcal{U})$. Além disso, $Z(\mathcal{U}, 4) = Z_2(\mathcal{U})$.

Demonstração: (1) Pelo lema 1.16 sabemos que as unidades centrais de ordem finita são triviais. Logo, pelo teorema 5.15 é suficiente considerarmos os casos em que $n \geq 4$.

Devemos mostrar que T_n é subgrupo de $Z(\mathcal{U}, n)$ para todo $n \geq 4$. Observe inicialmente que se $a \in T_n$ então $a^{-1} \in T_n$, pois $o(a^{-1}) = o(a) < \infty$ e $a^{-1} \in Z(\mathcal{U})$, onde $o(a)$ denota a ordem do elemento a . Logo é suficiente mostrarmos que se $a, b \in T_n$ então o produto $ab \in T_n$, ou seja, que $o(ab) < \infty$. Mostraremos isso por indução em n .

Sejam $n = 4$ e $a, b \in T_4$. Suponha que $o(a) = l, o(b) = m$. Portanto,

$$(ab)^{4lm} = (a^4 b^4)^{lm} = a^{4lm} b^{4lm} = 1, \text{ pois pelo teorema 5.15, } a^4, b^4 \in Z(\mathcal{U}, 3) = Z(\mathcal{U}).$$

O que nos mostra que o produto $ab \in T_4$ e conseqüentemente T_4 é um subgrupo.

Suponha agora que para $n = k > 3$, T_k seja um subgrupo de $Z(\mathcal{U}, k)$. Devemos mostrar que T_{k+1} é um subgrupo de $Z(\mathcal{U}, k+1)$.

Considere agora $n = k+1$. Sejam $a, b \in T_{k+1} \subseteq Z(\mathcal{U}, k+1)$, então, $(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^{k+1}$. Pela proposição 5.13(5), a^{k+1} e b^{k+1} pertencem a $Z(\mathcal{U}, k)$ e ambos possuem ordem finita. Pela hipótese de indução para T_k , concluímos que $a^{k+1} b^{k+1} \in T_k$. Segue que $o((ab)^{k+1}) = o(a^{k+1}) o(b^{k+1}) < \infty$, logo $o(ab) < \infty$. O que nos mostra que T_{k+1} forma um subgrupo. Portanto, T_n é um subgrupo de $Z(\mathcal{U}, n)$ para todo inteiro $n \geq 2$.

Podemos facilmente ver que $\pm T_n$ é um subgrupo característico de $Z(\mathcal{U}, n)$. Além disso, como $Z(\mathcal{U}, n)$ é um subgrupo normal do grupo de unidades $\mathcal{U}$ e como $\pm T_n$ é um subgrupo característico de $Z(\mathcal{U}, n)$, concluímos que T_n é um subgrupo normal do grupo de unidades $\mathcal{U}$. Para observarmos o fato de que $Z(\mathcal{U}, n)$ é um subgrupo normal do grupo de unidades $\mathcal{U}$ perceba que:

Sejam $u \in \mathcal{U}, v \in Z(\mathcal{U}, n)$ segue que $[u, v]^n = (u^{-1} v^{-1} u v)^n = (u^{-1} v^{-1} u)^n v^n$ (pois $v \in Z(\mathcal{U}, n)$). O que mostra que $(u^{-1} v^{-1} u) \in Z(\mathcal{U}, n)$, e portanto $Z(\mathcal{U}, n) \triangleleft \mathcal{U}$.

Segue do teorema 3.2 e do teorema 3.8, que $T_n \triangleleft G$. Portanto, $T_n = Z(\mathcal{U}, n) \cap G$.

(2) Sejam $u \in Z(\mathcal{U}, n), v \in \mathcal{U}$. Como $Z(\mathcal{U}, n)$ é um subgrupo normal de $\mathcal{U}$, temos que $v^{-1} u v \in Z(\mathcal{U}, n)$; portanto, $[u, v] = u^{-1} v^{-1} u v \in Z(\mathcal{U}, n)$. Além disso,

$$[u, v]^{n(n-1)} = ([u, v]^{n(1-n)})^{-1} = 1, \text{ pela proposição 5.13(4).}$$

Concluímos então que $[u, v] \in T_n$.

(3) Sejam $u \in Z(\mathcal{U}, n)$, $g \in G$. Então por (2) temos que $[u, g] \in T_n \subseteq G$ (por (1)). Donde concluímos que $u^{-1}gu \in G$ e conseqüentemente, $Z(\mathcal{U}, n) \subseteq N_{\mathcal{U}}(G)$.

Pelo lema 1.23 temos que:

$$Z^2(\mathcal{U}, n) \subseteq N_{\mathcal{U}}^2(G) \subseteq GZ_1(\mathcal{U}).$$

Do qual segue facilmente que $Z^2(\mathcal{U}, n) \subseteq T_n Z_1(\mathcal{U})$.

(4) Suponhamos por absurdo que para algum $n \geq 2$, exista um elemento $a \in T_n$ tal que $a \notin T(Z_2(\mathcal{U}))$, portanto a é um elemento não central. O teorema 5.20 nos diz que G é um Q^* -grupo. A seguir mostraremos que esse elemento, é um elemento especial de ordem 4, como o dado na definição de Q^* -grupo.

Pela demonstração do teorema 5.16, observamos que se $g \in G$ então:

(a) $\langle a, g \rangle$ é abeliano

ou

(b) $\langle a, g \rangle \cong Q$, o grupo dos quatérnions.

Considerando $A = C_G(A) \subseteq G$ e $g \notin A$, nós obtemos que $\langle a, g \rangle \cong Q$, e portanto, $g^2 = a^2$ o que implica que a é um elemento de ordem 4. Para qualquer $h \in A$, $g \notin A$, temos que $hg \notin A$. Portanto, $\langle a, hg \rangle \cong Q$. Segue daí que $g^2 = a^2 = hghg$, o qual por sua vez implica que $ghg^{-1} = h^{-1}$ (*). Observe também que se $k \notin A$, então repetindo o raciocínio que empregamos anteriormente $gag^{-1} = a^{-1} = kak^{-1}$. O que implica que $ag^{-1}k = g^{-1}ka$ e $g^{-1}k \in C_G(a) = A$, o que nos mostra que A é um subgrupo de G de índice 2. Pela condição (*), A é um grupo abeliano; portanto, o elemento a é um elemento especial como afirmamos anteriormente. No entanto, pela demonstração do teorema 5.20, $a \in T(Z_2(\mathcal{U}))$. Contradição. Logo $T_n \subseteq T(Z_2(\mathcal{U}))$. Pela proposição 5.17, segue que $T(Z_2(\mathcal{U})) \subseteq T_4$, donde concluímos que $T(Z_2(\mathcal{U})) = T_4$.

(5) Sejam $u \in Z(\mathcal{U}, n)$ e $v \in \mathcal{U}$. Então por (2), $[u, v] \in T_n$ e por (4), $[u, v] \in T(Z_2(\mathcal{U}))$. Logo $u \in Z_3(\mathcal{U})$ e $Z(\mathcal{U}, n) \subseteq Z_3(\mathcal{U})$. Como $Z_3 = Z_2$, pelo teorema 5.10, concluímos que $Z(\mathcal{U}, n) \subseteq Z_2(\mathcal{U})$. Em particular, temos que $Z(\mathcal{U}, 4) \subseteq Z_2(\mathcal{U})$ e pela proposição 5.17, segue o resultado desejado.

□

Lema 5.23. *Seja G um grupo qualquer e a um elemento genérico de G . Se a pertencer a três n -centros consecutivos então a é um elemento central de G .*

Demonstração: Suponha que $a \in (Z(G, n) \cap Z(G, n+1) \cap Z(G, n+2))$. Então para todo $x \in G$ valem as seguintes relações:

$$(ax)^n = a^n x^n, \tag{5.12}$$

$$(ax)^{n+1} = a^{n+1}x^{n+1}, \quad (5.13)$$

$$(ax)^{n+2} = a^{n+2}x^{n+2}. \quad (5.14)$$

De 5.12 e 5.13 obtemos:

$$a^{n+1}x^{n+1} = (ax)^{n+1} = a(xa)^nx,$$

que implica que:

$$a^nx^n = (xa)^n,$$

e portanto:

$$(ax)^n = (xa)^n. \quad (5.15)$$

Empregando um raciocínio análogo com 5.13 e 5.14, obtemos:

$$(ax)^{n+1} = (xa)^{n+1}. \quad (5.16)$$

Finalmente de 5.12 e 5.14, obtemos que:

$$a^{n+2}x^{n+2} = (ax)^{n+2} = a(xa)^{n+1}x = a(xa)^n(xa)x \underbrace{=}_{5.15} a(ax)^n(xa)x, \text{ o que nos permite concluir que:}$$

$$a^{n+1}x^{n+1} = (ax)^n(xa). \quad (5.17)$$

Substituindo 5.16 em 5.17, obtemos que $a^{n+1}x^{n+1} = (ax)^{n+1} = (ax)^n(xa)$.

Do qual resulta imediatamente que:

$$ax = xa, \quad \text{para todo } x \in G.$$

□

Finalmente podemos dar a caracterização mencionada ao início da seção:

Teorema 5.24. *Seja G um grupo periódico. Então:*

$$Z(\mathcal{U}, n) = \begin{cases} \mathcal{U} & \text{para } n = 0 \text{ ou } 1 \\ Z_2(\mathcal{U}) & \text{para } n = 4k \text{ ou } 4k + 1, k \geq 1 \\ Z_1(\mathcal{U}) & \text{para } n = 4k + 2 \text{ ou } 4k + 3, k \geq 0 \end{cases}$$

Demonstração: A primeira igualdade é óbvia.

Para provarmos a segunda igualdade, mostraremos que $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k)$ e que $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k + 1)$ para todo $k \geq 1$. Junto com a proposição 5.22(5) isso nos dará o resultado desejado.

Sejam $u \in Z_2(\mathcal{U})$ e $v \in \mathcal{U}$. Então pela proposição 5.17, $u \in Z(\mathcal{U}, 4)$, além disso, pelo teorema 5.15 e pela proposição 5.13(5), $u^4 \in Z_1(\mathcal{U})$. Disso segue-se que

$$(uv)^{4k} = ((uv)^4)^k = (u^4v^4)^k = u^{4k}v^{4k}.$$

O que mostra que $u \in Z(\mathcal{U}, 4k)$, portanto, $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k)$.

De maneira totalmente análoga,

$$(uv)^{4k+1} = (uv)(uv)^{4k} = uvu^{4k}v^{4k} = u^{4k+1}v^{4k+1}.$$

O que significa que $Z_2(\mathcal{U}) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k+1)$.

Suponha agora que $n = 4k+2$ ou $4k+3$, $k \geq 1$. Suponhamos inicialmente que $n = 4k+2$. Pela proposição 5.22(5), obtemos que $Z(\mathcal{U}, 4k+2) \subseteq Z_2$, e portanto, $Z(\mathcal{U}, 4k+2) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k) \cap Z(\mathcal{U}, 4k+1)$ pelo que acabamos de ver nos parágrafos anteriores. Se um elemento pertence a três n -centros consecutivos, segue pelo lema 5.23 que esse elemento é central.

O caso para $n = 4k+3$ é totalmente análogo ao caso para $n = 4k+2$, de fato, pela proposição 5.22(5) temos que $Z(\mathcal{U}, 4k+3) \subseteq Z_2$, mas pelo que acabamos de ver acima, concluímos que $Z(\mathcal{U}, 4k+3) \subseteq Z(\mathcal{U}, 4k+1) \cap Z(\mathcal{U}, 4k+2)$. Novamente se um elemento pertence a três n -centros consecutivos ele deve ser central, devido ao lema 5.23. O que completa a demonstração do teorema.

□

Corolário 5.25. ([3], teorema 3.1) *Seja G um grupo finito. Então:*

$$Z(\mathcal{U}, n) = \begin{cases} \mathcal{U} & \text{para } n = 0 \text{ ou } 1 \\ T(Z_2(\mathcal{U}))Z_1(\mathcal{U}) = Z_2(\mathcal{U}) & \text{para } n = 4k \text{ ou } 4k+1, k \geq 1 \\ Z_1(\mathcal{U}) & \text{para } n = 4k+2 \text{ ou } 4k+3, k \geq 0 \end{cases}$$

Apêndice A

Um resultado de Borel-Chandra

Nosso objetivo neste apêndice será o de esboçarmos uma idéia não rigorosa da demonstração do teorema de Borel-Chandra, o qual já foi apresentado no capítulo 4 e que enunciaremos mais adiante.

Ao apresentarmos a idéia da demonstração deste resultado, podemos perceber a forte relação entre as diversas áreas da matemática. Em particular, veremos que ele decorre do estudo de propriedades aritméticas de grupos algébricos lineares.

Nos concentraremos nos chamados grupos aritméticos (os quais formam uma classe de subgrupos discretos de grupos algébricos reais). O estudo desses grupos aritméticos surge como consequência de uma tentativa de encontrar um tratamento unificado dos diferentes pontos de vista no estudo dos grupos de Lie. Um deles envolvendo subgrupos compactos maximais, espaços simétricos de Riemann (os quais envolvem, Álgebras de Lie, Geometria Diferencial e Topologia) e o outro envolvendo a Geometria Algébrica.

Em ambos os pontos de vista podemos perceber a importância do estudo de domínios fundamentais de grupos aritméticos. Como consequência desse estudo, podemos tirar o teorema de Borel-Chandra. (O qual poderia de certo modo ser considerado como consequência de um resultado da Geometria!).

Os fatos deste capítulo e informações adicionais estão relacionados nas referências [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [33].

Nosso objetivo principal neste capítulo será o de apresentarmos uma idéia da demonstração do seguinte:

Teorema A.1. (*Borel-Chandra*) *Sejam A um $\mathbb{Q}$ -álgebra de dimensão finita e O uma $\mathbb{Z}$ -ordem em A . Então o grupo de unidades de O é finitamente gerado.*

Introduziremos a seguir alguns fatos e definições que serão utilizados no restante do capítulo.

Sejam k um subcorpo de $\mathbb{C}$ e V um $\mathbb{C}$ –espaço vetorial de dimensão finita. Diremos que V possui uma k –estrutura se ela provém por extensão dos escalares de um k –espaço vetorial V_k , ou equivalentemente, que nós estamos dando um subespaço vetorial V_k sobre k de V tal que $V = V_k \otimes_k \mathbb{C}$.

Neste capítulo V designará um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, munido de uma $\mathbb{Q}$ –estrutura.

Definição A.2. Diremos que um subgrupo G de $GL(n, \mathbb{C})$ é algébrico se ele é o conjunto de todas as matrizes invertíveis cujos coeficientes anulam alguma coleção de polinômios em n^2 variáveis, com coeficientes complexos. Ele é dito ser definido sobre um subcorpo k de $\mathbb{C}$, se aqueles polinômios puderem ser escolhidos de maneira a possuírem seus coeficientes em k . Neste caso diremos que G é um subgrupo algébrico definido sobre k ou que G é um k –grupo.

Se B é um subanel de $\mathbb{C}$ então G_B denotará o grupo dos elementos de G que possuem coeficientes em B e cujo determinante é uma unidade de B , ou seja, ele é invertível em B . Neste caso, $G_B = G \cap GL(n, B)$.

Definição A.3. Um subgrupo G de $GL(V)$ é então definido sobre k se existe uma base de V_k tal que o isomorfismo correspondente $\beta : GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ mapeia G sobre um k –grupo (ou grupo algébrico definido sobre k).

Definição A.4. Sejam G um $\mathbb{Q}$ –grupo e k um corpo de números algébricos. Um toro algébrico (ou simplesmente, um toro) é um subgrupo abeliano de G que é diagonalizável sobre k e ambos, k –fechado e conexo na topologia de Zariski.

Definição A.5. Uma representação racional $\pi : G \rightarrow GL(V)$ é um homomorfismo de G em $GL(V)$, (onde V é um $\mathbb{C}$ –espaço vetorial de dimensão finita), cuja restrição a cada componente conexa de G é uma aplicação racional de G em $End(V)$, o espaço dos endomorfismos de V .

Definição A.6. Se G é um subgrupo algébrico de $GL(V)$ definido sobre $\mathbb{Q}$ e L um lattice de $V_{\mathbb{Q}}$, definimos G_L , denominado o grupo de L –unidades de G , o subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}$ que estabiliza $L : G_L = \{g \in G_{\mathbb{Q}} \mid g(L) = L\}$.

Definição A.7. Diremos que dois subgrupos A e B de um grupo H são ditos comensuráveis se $A \cap B$ possuir índice finito em A e em B .

Exemplo de grupo algébrico definido sobre $\mathbb{Q}$:

Seja $G = \text{Tri}(2, \mathbb{C}) \subseteq GL(2, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes triangulares superiores invertíveis com coeficientes complexos. Então claramente G é um subgrupo multiplicativo de $GL(2, \mathbb{C})$. Afirmamos que G é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Consideraremos inicialmente que um elemento genérico de $GL(2, \mathbb{C})$ pode ser expresso na forma: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, obedecida a ordem dos elementos na matriz.

Apresentada a caracterização acima de $GL(2, \mathbb{C})$, e considerando o polinômio $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ temos que qualquer elemento do grupo G satisfaz a condição $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3 = 0$. Considerando o polinômio $q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ acima, temos que G é um grupo algébrico definido sobre $\mathbb{Q}$.

Definição A.8. *Seja G um $\mathbb{Q}$ -subgrupo de $GL(V)$. Um subgrupo Γ de $G_{\mathbb{Q}}$ é dito ser aritmético se existe um lattice L de $V_{\mathbb{Q}}$ tal que Γ seja comensurável a G_L .*

Observamos que se identificarmos V com $\mathbb{C}^n$ por meio de uma base de L , então G se identifica a um $\mathbb{Q}$ -subgrupo H de $GL(n, \mathbb{C})$ e G_L a $H_{\mathbb{Z}}$. Isso equivale a dizer que Γ é aritmético se existe uma inclusão $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ definida sobre $\mathbb{Q}$, que aplique Γ sobre um subgrupo de $\rho(G)_{\mathbb{Q}}$ comensurável à $\rho(G)_{\mathbb{Z}}$. Onde $\rho : G \mapsto GL(n, \mathbb{C})$ denota uma representação racional do grupo G .

Nesse sentido, a definição acima pode ser expressa na forma:

Definição A.9. *Seja G um $\mathbb{Q}$ -grupo algébrico. Um subgrupo Γ de $G_{\mathbb{Q}}$ é chamado um grupo aritmético (ou subgrupo aritmético de G) se existe uma representação racional fiel $\rho : G \mapsto GL_n$ definida sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\rho(\Gamma)$ seja comensurável com $\rho(G) \cap GL(n, \mathbb{Z})$. (A mesma condição então é verificada para toda $\mathbb{Q}$ -representação fiel de G).*

Definição A.10. *Um subcorpo L de $\mathbb{C}$ será chamado de corpo de números algébricos se for uma extensão finita de $\mathbb{Q}$ ou equivalentemente, se $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, para algum número algébrico α ; neste caso, todo elemento de L é um número algébrico.*

Sejam S um anel e R um subanel de S , então denotaremos por $I_S(R)$ o conjunto dos elementos de S que são inteiros sobre R . Além disso, se L for um corpo de números algébricos, I_L denotará o anel de inteiros algébricos de L .

Seja R um subanel de um corpo L . Nesse caso $Q(R)$ denotará o corpo de frações do anel R .

Definição A.11. *Seja M um subconjunto multiplicativo do anel R . Definimos o anel de frações de R em relação a M , denotado por R_M . Onde $R_M = \{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in M\}$.*

Teorema A.12. *([16], teorema 1.6) Todo domínio fatorial R é integralmente fechado no seu corpo de frações.*

Corolário A.13. *Se $L = \mathbb{Q}$ temos então que $I_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.*

Teorema A.14. *Seja R um subanel do corpo de números algébricos L . Então $Q(I_L(R)) = (I_L(R))_{R \setminus \{0\}} = I_L(Q(R))$. Em particular, $Q(I_L(R)) = L$ se e somente se L é algébrico sobre $Q(R)$.*

Demonstração: Seja $\gamma \in Q(I_L(R))$. Então γ pode ser expresso na forma $\frac{\alpha}{\beta}$, onde α e β são elementos de $Q(I_L(R))$, $\beta \neq 0$. Sabemos que $I_L(Q(R))$ é um subcorpo de L contendo $I_L(R)$ (veja, por exemplo, [16], p.13). Logo temos que $\gamma \in I_L(R)$. Para todo $\gamma \in I_L(Q(R))$, existem elementos $a_1, \dots, a_m, d, d \neq 0$ de R tais que $\gamma^m + \frac{a_1}{d}\gamma^{m-1} + \dots + \frac{a_m}{d} = 0$. Multiplicando agora ambos os lados da igualdade por d^m obtemos que $\gamma d \in I_L(R)$. Logo $\gamma \in (I_L(R))_{R \setminus \{0\}}$. É imediato que $(I_L(R))_{R \setminus \{0\}} \subseteq Q(I_L(R))$. A última afirmação segue ao utilizarmos o fato de que $Q(I_L(R)) = L$ se e somente se L é algébrico sobre $Q(R)$. $\square$

Corolário A.15. *Seja L um corpo de números algébricos. Então $Q(I_L) = (I_L)_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} = L$. Em particular, se $L = \mathbb{Q}$ temos então que $I_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$.*

Sejam k um corpo de números de base $\{w_1, \dots, w_d\}$ sobre $\mathbb{Q}$ e k^* o grupo multiplicativo do corpo k .

Consideremos então a aplicação $T : k^* \mapsto GL(d, \mathbb{C})$, a aplicação definida por $T(\alpha) = T_\alpha$, onde T_α é definida por $T_\alpha(x) = \alpha x$, a representação regular do grupo k^* .

Podemos considerar, via representação regular, o grupo k^* incluído em $GL(d, \mathbb{Q})$. Nessas condições, $T(k^*)$, a imagem de k^* em $GL(d, \mathbb{Q})$ se torna o conjunto dos pontos racionais sobre $\mathbb{Q}$ de um grupo G , o qual é um toro de dimensão d definido sobre $\mathbb{Q}$. Ou seja, G é diagonalizável e conexo.

De fato, como $\mathbb{Q}$ é um corpo perfeito e a extensão $k|\mathbb{Q}$ é algébrica concluímos que ela é uma extensão separável. Logo ela admite um elemento primitivo $\omega \in k$. Por outro lado, sendo uma extensão normal segue que o polinômio $P_{\omega, \mathbb{Q}}$ se fatora num produto de fatores lineares em $k[X]$, onde $P_{\omega, \mathbb{Q}}$ denota o polinômio minimal de ω sobre $\mathbb{Q}$. O que nos mostra que G é diagonalizável.

Logo, se a base $\{w_i\}$ é formada por inteiros, temos então que $G \cap M_d(\mathbb{Z})$ se identifica com o conjunto dos inteiros algébricos não-nulos sobre k .

Para observar esse fato, considere a seguir o lattice $\mathcal{L}$ dado por $\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}w_i$ e observamos que qualquer elemento de k pode ser expresso na forma $\alpha = \sum_{i=1}^d \alpha_i w_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Não é difícil de observar $\alpha \in k \cap I_k$ se e somente se cada $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Conseqüentemente, se a base $\{w_i\}$ é formada por inteiros através do comentário acima podemos concluir neste caso que $G \cap M_d(\mathbb{Z})$ se identifica com o conjunto dos inteiros algébricos não-nulos do corpo k .

Nessas condições, o grupo aritmético $G_{\mathbb{Z}}$ se identifica com o grupo de unidades do anel de inteiros algébricos do corpo k .

Introduziremos a seguir alguns fatos que serão necessários ao considerarmos o caso mais geral de uma $\mathbb{Q}$ -álgebra A de dimensão finita.

Definição A.16. *Sejam A e B anéis e $\phi : A \rightarrow B$, homomorfismo injetor de anéis. A aplicação definida por $(a, x) \mapsto x\phi(a)$ de $A \times B$ em B define em B uma estrutura de A -módulo à direita. Em particular, se tomamos ϕ a aplicação identidade sobre A , A obtém uma estrutura canônica de A -módulo à direita, a qual denotaremos por A_d .*

Definição A.17. *Sejam A, B anéis e $\rho : B \rightarrow A$, um homomorfismo injetor de anéis. Para todo A -módulo E , a lei externa $(\beta, x) \mapsto \rho(\beta)x$, define (aditivamente) uma estrutura de B -módulo em E , a qual denotaremos por $\rho_*(E)$.*

Definição A.18. *Sejam A, B anéis e $\rho : A \rightarrow B$, homomorfismo de anéis. Considere a seguir o A -módulo à direita $\rho_*(B_d)$ definido por este homomorfismo. Este A -módulo também possui uma estrutura de B -módulo à esquerda, a qual será denotada por B_s e como $b'(\rho(a)) = (b'b)\rho(a)$, para $a \in A, b, b' \in B$, estas duas estruturas são compatíveis.*

Isso nos permite que possamos definir para todo A -módulo E à esquerda, uma estrutura de B -módulo à esquerda no produto tensorial $\rho_*(B_d) \otimes_A E$ tal que $\beta'(\beta \otimes x) = (\beta'\beta) \otimes x$, para $\beta, \beta' \in B$ e $x \in E$.

Este B -módulo à esquerda é dito ser o derivado de E por extensão do anel de escalares de B por meio de ρ e será denotado por $\rho^*(E)$ ou $E_{(B)}$.

Proposição A.19. *([13], II.5.1, proposição 4) Seja E um A -módulo admitindo uma A -base $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$. Se $\phi : x \mapsto 1 \otimes x$ é a aplicação canônica de E em $\rho^*(E)$, então $(\phi(a_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma base de $\rho^*(E)$. Se ρ é injetiva então ϕ é injetiva.*

Proposição A.20. *Sejam A um anel, D um corpo e $\rho : A \rightarrow D$, homomorfismo de anéis. Então para qualquer A -módulo livre E , duas bases quaisquer de E são equipotentes.*

Demonstração: Considere o espaço vetorial $E_{(D)} = \rho^*(E) = D \otimes_A E$ sobre D obtido por extensão do anel de escalares para D e seja $\phi : x \mapsto 1 \otimes x$ a aplicação canônica de E em $\rho^*(E)$; se $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma base de E então pela proposição A.19 temos que $(\phi(a_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma base de $\rho^*(E)$. Utilizando o fato de que duas bases do mesmo espaço vetorial sobre um corpo são equipotentes a tese segue. $\square$

Proposição A.21. *Seja K um corpo e L uma extensão de corpos de K . Então para todo espaço vetorial E sobre K , $\dim_L(E_{(L)}) = \dim_K(E)$, onde $E_{(L)} = L \otimes_K E$.*

Demonstração: De fato, se $(a_i)_{i \in I}$ é uma base de E sobre K , pela proposição A.19 segue que $(1 \otimes a_i)_{i \in I}$ é uma base de $E_{(L)}$. $\square$

Consideraremos agora o caso mais geral de uma $\mathbb{Q}$ -álgebra A de dimensão finita.

Logo A possui uma base $\{v_1, \dots, v_d\}$ sobre $\mathbb{Q}$. Tomando $k = \mathbb{Q}$ e $L = \mathbb{C}$ na proposição A.21 podemos estender os escalares da $\mathbb{Q}$ -álgebra A . Conseqüentemente designaremos por $A_{\mathbb{C}}$, a álgebra A (vista como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$) munida de uma $\mathbb{Q}$ -estrutura, a qual é obtida por extensão dos escalares da $\mathbb{Q}$ -álgebra A , ou seja, $A_{\mathbb{C}}$ pode ser expressa na forma $A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, $A_{\mathbb{Q}}$ denotará a álgebra A , vista como $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial.

Considere a seguir o grupo G dos elementos invertíveis de $A_{\mathbb{C}}$, o qual é um grupo algébrico definido sobre $\mathbb{Q}$.

A seguir, sejam $O \subseteq A$, uma $\mathbb{Z}$ -ordem em $A_{\mathbb{Q}}$ e $\{w_1, \dots, w_d\}$ uma $\mathbb{Z}$ -base de O . Considere o lattice L de $A_{\mathbb{Q}}$ dado por $L = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}w_i$.

Seja G_L o grupo aritmético das unidades do lattice L de $A_{\mathbb{Q}}$: $G_L = \{g \in A \mid gL = L\}$.

Identificando a base $\{v_i\}$ com $\mathbb{C}^d$ através de uma base do lattice L , temos então que G se identifica a um $\mathbb{Q}$ -subgrupo H de $GL(d, \mathbb{C})$ e G_L a $H_{\mathbb{Z}}$.

Com as considerações feitas, observamos que o problema de mostrar que o grupo de unidades de uma $\mathbb{Z}$ -ordem O de uma $\mathbb{Q}$ -álgebra finita A é finitamente gerado se reduz a mostrarmos que o grupo de unidades $G_{\mathbb{Z}}$ de um $\mathbb{Q}$ -grupo G é finitamente gerado.

Teorema A.22. (Borel-Chandra) *Seja $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ um grupo algébrico definido sobre $\mathbb{Q}$. Existe um conjunto aberto U em $G_{\mathbb{R}}$ tal que $U \cdot G_{\mathbb{Z}} = G_{\mathbb{R}}$, e que para quaisquer $x, y \in G_{\mathbb{Q}}$, a intersecção $U^{-1} \cdot U \cap x \cdot G_{\mathbb{Z}} \cdot y$ é finita. O grupo $G_{\mathbb{Z}}$ é finitamente gerado.*

Teorema A.23. (Borel-Chandra) *Sejam A uma $\mathbb{Q}$ -álgebra de dimensão finita e O uma $\mathbb{Z}$ -ordem em A . Então o grupo de unidades de O é finitamente gerado.*

Demonstração: Segue pelas considerações acima e observando pelo teorema A.22 que $G_{\mathbb{Z}}$ é finitamente gerado. $\square$

O leitor atento poderá constatar que aparentemente poderíamos generalizar a definição de grupo aritmético tomando inicialmente um corpo numérico k , um grupo algébrico G definido sobre k , uma k -representação fiel $\rho : G \rightarrow GL_n$ e tomando como grupo aritmético um subgrupo de G_k comensurável com $G_{\nu_k} = GL(n, \nu_k) \cap \rho(G)$, onde ν_k designa o anel de inteiros de k .

No entanto, a classe de grupos aritméticos acima é a mesma que foi descrita anteriormente quando tomamos $k = \mathbb{Q}$. Na realidade utilizando o functor de “restrição de escalares” (uma descrição deste functor e a sua construção pode ser encontrada em [33], cap.1), observamos que se $G' = R_{k|\mathbb{Q}}G$ é obtido a partir de G por “restrição dos escalares” do corpo k a $\mathbb{Q}$ e utilizando uma base de ν_k sobre $\mathbb{Z}$, temos que $G'_{\mathbb{Z}} \cong G_{\nu_k}$.

Considere a seguir k um corpo de números e B o anel de inteiros algébricos do corpo k . Então utilizando o functor de “restrição dos escalares” e utilizando os comentários feito no parágrafo anterior, observamos que G_B se torna o grupo de unidades do anel de inteiros algébricos do corpo k . Esses fatos nos permitem reescrever o teorema de Borel-Chandra na seguinte forma mais geral.

Teorema A.24. (*Borel-Chandra*) *Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita e O uma B -ordem em A , onde B denota o anel de inteiros algébricos do corpo k . Então o grupo de unidades de O é finitamente gerado.*

Demonstração: Utilizando o functor de “restrição dos escalares” reduzimos o caso descrito no teorema ao caso descrito anteriormente tomando $k = \mathbb{Q}$. E o resultado segue do teorema de Borel-Chandra com $k = \mathbb{Q}$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Aleev, R. Z., *Higman's Central Unit Theory, Units of Integral Group Rings of Finite Cyclic Groups and Fibonacci Numbers*, International Journal of Algebra and Computation 4(1993), number 3, 309-358;
- [2] Arora, Satya R., Hales, A.W. and Passi, I.B., *Jordan decomposition and hypercentral units in integral group rings*, Comm. Alg 21(1993), 25-35;
- [3] Arora, Satya R. , Passi, I.B., *Central height of the unit group of an integral group ring*, Comm. Algebra 21(1993), 3673-3683.
- [4] Baer, R., *Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen*, Math. Ann. 124(1952), 161-177.
- [5] Berman, S.D., *On the equation $x^m = 1$ in an integral group ring*, Ukrainsk Mathem. Zh., 7(1955), 253-261.
- [6] Blackburn, Norman., *Finite groups in which the nonnormal subgroups have nontrivial intersection*, J.Algebra 3(1966), 30-37,
- [7] Borel, Armand., *Linear Algebraic Groups*, Second Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1991.
- [8] Borel, Armand., *Arithmetic Properties of Linear Algebraic Groups*, Proc. Intern. Congress Math. Stockholm, 1962.Uppsala, 1963.
- [9] Borel, Armand., *Linear Algebraic Groups*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.IX, AMS - Providence - USA.
- [10] Borel, Armand., *Reduction Theory for Arithmetic Groups*, Proc. Sympos. Pure Math., vol.IX, AMS - Providence - USA.
- [11] Borel, Armand., *Introduction Aux Groupes Arithmétiques*, Paris - Hermann, 1968.
- [12] Borel, A. , Chandra, H., *Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups*, Annals of Mathematics, 75(3), 1962.
- [13] Bourbaki., *Algebra I* chap. 1 – 3, Springer-Verlag,1989.

- [14] Bovdi, A.A., *The periodic normal divisors of the multiplicative group of a group ring I*, Sibirsk Mat. Z. 9(1968), 495-498.
- [15] Bovdi, A.A., *The periodic normal divisors of the multiplicative group of a group ring II*, Sibirsk Mat. Z. 11(1970), 492-511.
- [16] Endler, Otto., *Teoria dos Números Algébricos*, Projeto Euclides, IMPA.
- [17] Gorenstein, *Finite Groups*, Chelsea, 1980, reprinted by American Mathematical Society.
- [18] Gruenberg, K.W., *The Engel Structure of Linear Groups*, J.Algebra 3(1966), 291-303.
- [19] Gruenberg, K.W., *The Hypercenter of Linear Groups*, J.Algebra 8(1968), 34-40.
- [20] Jespers, E., Juriaans, S. O., *Isomorphisms of Integral Group Rings of Infinite Rings* - J.Algebra 233(2000), 171-189;
- [21] Kaplansky, I., *An introduction to differential algebra*, second edition, Hermann, 1976;
- [22] Kappe, L.C. and Newell, M.L., *On the n -centre of a group*. Groups St. Andrews 2, 1989, 339-352, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 160, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [23] Li, YuanLin, Parmenter, M.M., Sehgal, S.K., *On the Normalizer Property for Integral Group Rings*, Comm. Algebra 27(1999), 4217-4223.
- [24] Li, YuanLin, *The hypercenter and the n -centre of the unit group of an integral group ring*, Can.J.Math. vol.50(2), 1998, 401-411.
- [25] Marciniak, Z.S., Roggenkamp, K.W., *The normalizer of a finite group in its integral group ring and Čech cohomology*, pre-print, 1999.
- [26] Parmenter, M.M., *Conjugates of units in integral group rings*, Comm. Algebra 23(1995), 5503-5507.
- [27] Ritter, Jürgen, Sehgal, S.K., *Integral group rings with trivial central units*. Proc. Amer. Math. Soc. 108(1990), 327-329;
- [28] Robinson, Derek J.S., *A course in the theory of groups*, second edition, Springer Verlag, 1995.
- [29] Samuel, Pierre., *A propos du théorème des unités*. Bull. Sci. Math., 90(1966), 89-96;
- [30] Sehgal, S.K., *Topics in Group Rings*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1978.
- [31] Sehgal, S. K., *Units in Integral Group Rings*, Longman, 1993.

-
- [32] Wehrfritz, B.A.F., *Infinite Linear Groups*, Springer-Verlag, 1973.
- [33] Weil, A., *Adeles and Algebraic Groups*, Notes by M. Demazure & T. Ono. The Institute for Advanced Study, Princeton, 1961.