**Módulos de Gelfand-Tsetlin
singulares de $\mathfrak{gl}(n)$**

Carlos Alexandre Gomes da Silva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Programa: **Doutorado em Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Vyacheslav Futorny**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e da UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

São Paulo, 05 Outubro de 2017

Módulos de Gelfand-Tsetlin singulares de $\mathfrak{gl}(n)$

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 08/12/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Raul Antônio Ferraz - IME-USP
- Prof. Dr. Adriano Adrega Moura - UNICAMP
- Prof. Dr. Luís Enrique Ramirez - UFABC
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

Subitamente passaram 4 anos daquele mês de outubro de 2013, quando o então chefe do Departamento de Matemática da UFRN, o prof. David Armando Villanueva, me fez um pedido para ir ao aeroporto buscar um ilustre convidado que iria dar uma palestra na tradicional Semana da Matemática da UFRN (um evento que já ocorre a cerca de 30 anos em Natal/RN no DMAT-UFRN). O convidado ilustre, que eu não conhecia, era o prof. Vyacheslav Futorny. Com a simpatia e bom trato que lhe é peculiar, logo nos primeiros minutos a nossa conversa já fluia naturalmente. Durante a semana desse evento, em meio a tantas outras conversas, falei ao professor Futorny, que por coincidência havia me inscrito para a seleção do programa de doutorado em Matemática do IME-USP. Eu estava inscrito para seleção na área de Geometria Diferencial, pois eu já vinha seguindo mais ou menos esse caminho desde a época que migrei da Engenharia Elétrica para o Bacharelado em Matemática na UFRN, onde eu conheci os professores Rubens Leão de Andrade, Cláudio Carlos Dias e Ronaldo Freire de Lima (aos quais sou muito grato e tenho profunda admiração), que são geômetras vindos do IMPA e com um sabor muito especial da Geometria diferencial clássica, formados na escola do eminente prof. Manfredo Perdigão do Carmo. Apesar de ter feito um mestrado com uma dissertação em Teoria da Probabilidade (Cadeias de Markov) com o prof. André Gustavo Campos Pereira, que também me ensinou muitas coisas e a quem também sou bastante grato, aquela base dada pelos professores Rubens, Cláudio e Ronaldo, falou mais alto e entre os anos de 2009-2010 iniciei o Doutorado em Geometria diferencial na UFC-Universidade Federal do Ceará. Após um período inicial por lá, regressei a Natal pois fui aprovado para o quadro efetivo de professores do DMAT-UFRN. Foram mais ou menos essas as palavras que falei ao professor Futorny naquelas nossas conversas iniciais. Em meio às nossas primeiras conversas, o professor Futorny me falou do seu trabalho sobre Teoria de Lie (a qual eu nunca havia ouvido ao menos falar até então) e me propôs o desafio de vir me juntar ao seu grupo no IME-USP para o doutoramento. De início isso me causou um certo desconforto pois eu tinha que deixar de lado o meu já iniciado projeto de estudar Geometria Diferencial, sem falar que eu iria migrar para um terreno totalmente novo, que eu nem sequer tinha ouvido falar; A teoria de representações das álgebras de Lie. O fato é que essa foi a decisão mais acertada que tomei até então na minha vida acadêmica. Ao chegar aqui na USP, um novo mundo se descortinou para mim. Nos primeiros momentos não foi nada fácil entrar nesse novo mundo, principalmente pela ausência de uma formação básica adequada em álgebra (realidade que infelizmente era bastante comum nas universidades do nordeste no nosso país, mas que felizmente já mostra pequenos sinais de progresso com mais pessoas qualificadas na área se fixando nas maiores universidades da região). Aqui consegui, com bastante esforço, preencher muitas dessas lacunas anteriores e também avançar em direção à fronteira do conhecimento da área. Para isso, além do apoio e encorajamento constante do prof. Futorny, foram essenciais os seminários semanais sobre álgebra de Lie do grande grupo de alunos de doutorado e pós-doutorado vinculados ao prof. Futorny. Toda a base adquirida nesses seminários foi fundamental para tudo que veio em seguida e no trabalho que continuo a desenvolver junto a esse grupo de pesquisa.

No meio do caminho, outros desafios cada vez maiores foram surgindo. Do dia para noite quando me vi em Los Angeles nos EUA apresentando meu trabalho de tese numa conferência Internacional onde estavam grandes nomes da teoria de representações na University of Southern California. Na sequência fiz uma visita de 60 dias na Stanford-University, sob orientação do simpático professor indiano Apoorva Khare (ao qual sou muito grato pela orientação e por ter me recebido nessa

fantástica universidade, na bela cidade da Palo-Alto), discutindo seus recentes trabalhos sobre Polytopes de Gelfand-Tselin e ouvindo as ideias que eu estava desenvolvendo na minha pesquisa para a tese. Ainda nessa mesma viagem, tive a oportunidade de Visitar a Berkeley University por uma semana e assistir um minicursos sobre representações de grupos finitos com o professor Martin Isaacs. Após os 90 dias na Califórnia, voltei ao Brasil e bem pouco tempo depois do meu regresso, com meu projeto inicial de tese já bem encaminhado, o prof. Futorny, me propôs um novo problema que veio junto com um agradável desafio; visitar por 6 meses o Instituto Camille-Jordan na Universidade de Lyon - França, sob orientação do eminente prof. Olivier Mathieu, ao qual também deixo registrada aqui a minha profunda gratidão por todos os ensinamentos sobre álgebras de Lie e a sua teoria sobre os módulos cuspidais, assim como pela sua recepção muitíssimo acolhedora no seu belo país, particularmente na belíssima cidade de Lyon, onde aprendi muito mais que Matemática. Realmente foi uma experiência incrível. Aproveito também para agradecer a CAPES pelo apoio financeiro nesse período.

Deixo aqui registrados meus agradecimentos especiais a algumas pessoas que contribuíram, cada um ao seu modo, para que eu realizasse, depois de tanto tempo, esse sonho de cursar um doutoramento em matemática numa grande instituição como o IME-USP. Agradeço profundamente ao meu grande amigo prof. Iesus Carvalho Diniz, que foi sem dúvida um dos grandes responsáveis por eu ter vindo fazer essa formação nessa fantástica instituição, além de todo o trabalho que desenvolveu, me substituindo como coordenador regional das olimpíadas de matemática: OBM, OMBU e OMRN durante esses meus 4 anos de ausência, sem falar no seu apoio amigo sempre que precisei. Aos meus amigos pessoais de longa data, Lionaldo Duarte, Augusto Macêdo, João Mesquita, Mauro Melo, Eduardo César e Paulo de Sousa Sobrinho (o grande Paulinho), que mesmo de longe sempre me deram força para continuar. Às minhas amigas Lídia Mortera e Sandra Mortera, que foram fundamentais durante a minha estadia na França. A Nadja Camila e Júlia Kamilly, pelo grande apoio na fase inicial aqui em São Paulo. Aos meus amigos aqui na USP: German Benito, Wilson Mutis, André Oliveira, André Zaidan, Marcela Aguerri, Jailson Calado, Edite Taufer, Yuri Sampaio, Jadevilson Cruz, Vitor Hugo, Oscar Armando, Pablo Zadunaisky, Jian Zhang e ao meu grande amigo e parceiro Eurípedes Carvalho da Silva, cujas conversas diárias sobre a sua tese me fizeram aprender muitas coisas, entre elas muita matemática, especialmente Geometria Riemanniana e ideias sobre Teoria de Folheações.

Também agradeço aos meus pais Geraldo Alexandre da Silva e Juliêta Gomes da Silva e aos meus irmãos Sandro, Giuliana, Priscila e Júnior pelo apoio constante, mesmo na minha longa ausência. Aos colegas do DMAT-UFRN pelo apoio, sem o qual eu não poderia ter participado dessa fantástica aventura e um obrigado muito especial ao meu orientador prof. Vyacheslav Futorny, por ter me aceito no seu grupo, por ter me resgatado da minha mais completa ignorância algébrica quando eu cheguei e ter me levado à visitar a fronteira do conhecimento da Teoria de Lie, pela orientação e paciência constante, pela execução desse projeto sempre me motivando e estimulando a progredir e por todas as portas e oportunidades que abriu para mim ao longo desses 4 anos.

Por fim, aos meus professores do IME-USP, que foram tantos, dado o enorme número de disciplinas, seminários, cursos e minicursos que frequentei nesses 4 anos. Particularmente aos professores Kostyatyn Yousenko, Cristian Ortiz, Oswaldo Rio Branco e Odilon Luciano do IME-USP pelas conversas sempre esclarecedoras e ao prof. Luis Enrique Ramirez (UFABC) pela enorme paciência em esclarecer e discutir, por repetidas vezes, muitas das minhas dúvidas sobre os módulos de Gelfand-Tsetlin. Registro aqui a minha enorme gratidão a todos!

Carlos A. Gomes
São Paulo, 02 de Outubro de 2017.

Resumo

da Silva, Carlos. A. Gomes. **Módulos de Gelfand-Tsetlin singulares de $\mathfrak{gl}(n)$** . 2017. 66 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2017.

Neste trabalho estudamos os módulos de Gelfand-Tsetlin 1-singulares para $\mathfrak{gl}(n)$. Em particular, descrevemos bases explícitas para certos subquocientes dos mesmos e estabelecemos um critério que garante a sua irredutibilidade.

Palavras-chave: Módulos de Gelfand-Tsetlin, bases de Gelfand-Tsetlin, Módulos de pesos.

Abstract

da Silva, Carlos A. Gomes. **Singular Gelfand-Tsetlin Modules of $\mathfrak{gl}(n)$** . 2017. 66 p. Phd. Thesis
- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

In this work we study the Gelfand-Tsetlin 1-singular modules for $\mathfrak{gl}(n)$. In particular, we describe explicit bases for certain subquotients of the same and establish a criterion that guarantees its irreducibility.

Keywords: Gelfand-Tselin modules, Gelfand-Tsetlin basis, Weight modules.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Panorama histórico	1
1.2	Objetivos	4
1.3	Prólogo	4
2	Preliminares	5
2.1	Álgebras de Lie	5
2.1.1	Constantes de estrutura	6
2.1.2	Subálgebras e ideais	6
2.2	Módulos e Representações	7
2.2.1	Módulos sobre álgebras de Lie	7
2.2.2	Decomposição de Cartan	9
2.2.3	Forma de Killing	12
2.2.4	O grupo de Weyl	12
2.3	Classificação das álgebras de Lie simples	13
2.3.1	A álgebra envolvente universal	14
3	Módulos de Gelfand-Tsetlin	15
3.1	Módulos de peso	15
3.2	Módulos de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}(n)$	17
3.3	$\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de dimensão finita	19
3.4	Módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos	20
3.4.1	Fórmulas de Gelfand-Tsetlin em termos de permutações	21
3.5	Módulos de Gelfand-Tsetlin singulares	22
4	Reticulados de Tabelas em $V(T(\bar{v}))$	27
4.1	A ação de Γ sobre $V(T(\bar{v}))$	27
4.2	Tabelas relacionadas	34
4.3	Relação de pré-ordem em $V(T(\bar{v}))$	35
5	Submódulos irredutíveis em $V(T(\bar{v}))$	37
5.1	Algumas noções preliminares	37
5.2	Submódulos irredutíveis em $V(T(\bar{v}))$	38
6	A irredutibilidade de $V(T(\bar{v}))$	43
6.1	Alguns resultados auxiliares	43
6.2	O resultado principal	49
	Referências Bibliográficas	51

Lista de Símbolos

$\mathbb{Z}$	- Anel dos números inteiros.
$\mathbb{Z}_{>0}$	- Conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{R}$	- Corpo dos números reais.
$\mathbb{C}$	- Corpo dos números complexos.
$\mathfrak{g}$	- Álgebra de Lie.
$\mathfrak{h}$	- Subálgebra de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{h}^*$	- Dual da subálgebra de Cartan da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
$U(\mathfrak{g})$	- Álgebra envolvente universal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
$M(n \times n, \mathbb{C})$	- Conjunto das matrizes de ordem n com entradas complexas.
$\mathfrak{gl}(n)$	- Álgebra de Lie das matrizes complexas de ordem n .
$\mathfrak{sl}(n)$	- Álgebra de Lie das matrizes complexas de ordem n com traço nulo.
v	- Vetor no espaço $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
$\bar{v}$	- Vetor 1-singular no espaço $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
$V(T(v))$	- Módulo gerado pelas das tabelas genéricas de Gelfand-Tsetlin.
$V(T(\bar{v}))$	- Módulo gerado pelas das tabelas 1-singulares de Gelfand-Tsetlin.
V	- Espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.
$\dim_{\mathbb{C}} V$	- Dimensão do $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.
$End(V)$	- Espaço vetorial dos operadores lineares em V .
$I(\mathfrak{h})$	- Normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$.
ad	- Aplicação adjunta.
Φ	- Sistema de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Φ^+	- Conjunto das raízes positivas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Φ^-	- Conjunto das raízes negativas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Δ	- Base de um sistema de raízes Φ .
λ	- Raiz ou peso da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
W	- Grupo de Weyl.
M	- Módulo de peso ou de Gelfand-Tsetlin.
$\text{Supp } M$	- Suporte do módulo M .
Γ	- Subálgebra de Gelfand-Tsetlin.
Γ^*	- Dual da subálgebra de Gelfand-Tsetlin.
c_{mk}	- Gerador de Γ .
γ_{mk}	- Autovalor da ação do centro de Γ sobre tabelas de Gelfand-Tsetlin.
$\text{Specm}\Gamma$	- Espectro maximal de Γ .
Φ^+	- Conjunto das raízes positivas da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
χ	- Carácter de Gelfand-Tsetlin.
$\text{Ker}(\chi)$	- Kernel do carácter χ .
$M(\chi)$	- Submódulo do módulo M .
$T(v+z)$	- Tabela regular de Gelfand-Tsetlin.
$\mathcal{DT}(v+z)$	- Tabela derivada de Gelfand-Tsetlin.
$\mathcal{B}(T(v))$	- Base de tabelas de Gelfand-Tsetlin.
S_n	- Grupo simétrico de ordem $n!$.
Id	- Identidade.
$ A $	- Cardinalidade do conjunto A .
$d(z, w)$	- Distância entre os vetores z e w .

$Tab(w)$	- Tabela regular ou derivada de Gelfand-Tsetlin.
E_{ij}	- Matriz elementar.
$\Omega^+(T(v))$	- Parte positiva de uma tabela de Gelfand-Tsetlin.
$\mathcal{N}(T(v))$	- Base para o submódulo gerado pela tabela $T(v)$.
$\mathcal{I}(T(v))$	- Base para o submódulo irredutível gerado pela tabela $T(v)$.
$\mathbb{C}_{gem}^{\frac{n(n+1)}{2}}$	- Conjunto dos vetores genéricos em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Panorama histórico

A teoria de representações das álgebras de Lie de dimensão finita e suas generalizações é uma das áreas mais importantes e ativas da teoria de representações com uma ampla variedade de resultados e numerosas aplicações na ciência moderna. Nessa teoria, um dos principais problemas é a classificação dos módulos irredutíveis para álgebras de Lie simples de dimensão finita. Esse problema foi resolvido somente no caso da álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ por R. Block [1]. O problema está em aberto nos outros casos.

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan fixa, Φ o sistema de raízes correspondente e Q reticulado de raízes. Um módulo M sobre $\mathfrak{g}$ é um *módulo de pesos*, quando a ação de $\mathfrak{h}$ é diagonalizável no M . Em outras palavras, M admite uma decomposição em subespaços de pesos $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$, onde $M_\lambda = \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$. O conjunto de pesos $Supp M$ consiste de tais $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ para os quais $M_\lambda \neq 0$. Os $\mathfrak{g}$ -módulos de dimensão finita são módulos de pesos. Estes módulos de dimensão finita são muito bem entendidos. Por outro lado, os novos desenvolvimentos da física-matemática e da geometria não-comutativa sugeriram a necessidade de estudar os $\mathfrak{g}$ -módulos de dimensão infinita tais como *módulos de Gelfand-Tsetlin* (que definiremos mais adiante).

Um módulo de pesos M é dito *denso* se $Supp M = \lambda + Q$ para algum $\lambda \in Supp M$. No caso em que M é um módulo de pesos irredutível e denso com subespaços de pesos de dimensão finita, o módulo M é dito *cuspidal*. Neste caso, qualquer elemento não nulo $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ age injetivamente em M para todo $\alpha \in \Phi$.

Em 1987, na sua tese de doutorado [9], V. Futorny mostrou que todos os módulos irredutíveis de peso com subespaços de pesos de dimensão arbitrária para álgebras de Lie do tipo A_n, B_n, C_n e D_n , ou são densos ou são quocientes de módulos induzidos a partir de módulos densos. S. Fernando [8], mostrou que todos os módulos irredutíveis de peso, cujos subespaços de pesos tem dimensão finita, ou são cuspidais ou são quocientes de módulos induzidos a partir de módulos cuspidais. Neste caso (subespaços de pesos de dimensão finita) os módulos cuspidais só existem para as álgebras de Lie do tipo A_n ou C_n . Em 1996, A. Cylke, V. Futorny e S. Ovsienko em [2], estenderam o resultado de [9] para todas álgebras de Lie simples de dimensão finita, exceto E_8 . Em 2000, I. Dimitrov, O. Mathieu e I. Penkov, em [3], estabeleceram um resultado análogo mas que contempla todas as álgebras de Lie simples de dimensão finita. Por fim, também no ano 2000, o famoso trabalho de O. Mathieu [20]

forneceu uma realização para os módulos irredutíveis cuspidais para as álgebras de Lie de dimensão finita e do tipo A_n ou C_n . Como já mencionamos, esses módulos cuspidais tem papel crucial na classificação dos módulos irredutíveis de peso com subespaços de pesos de dimensões finitas. Assim, o estudo de módulos cuspidais se tornou um dos problemas principais em teoria de representações das álgebras de Lie.

Por outro lado, a classificação dos módulos irredutíveis de pesos com a possibilidade dos seus respectivos subespaços de pesos serem de dimensão infinita continua sendo um problema em aberto em caso geral. Um primeiro passo natural na direção da solução geral é olhar para a subcategoria dos módulos de pesos constituída pelos módulos de Gelfand-Tsetlin no caso de $\mathfrak{g}$ ser do tipo A (para conveniência, vamos trabalhar com a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$ em vez de $\mathfrak{sl}(n)$). A definição geral dos módulos de Gelfand-Tsetlin foi dada por Drozd, Futorny e Ovsienko em [4], [5]. Esses módulos tem a propriedade que a subálgebra de Gelfand-Tsetlin possui um autovetor comum nesse módulo. Os $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos de pesos (em relação à subálgebra de Cartan contida na subálgebra de Gelfand-Tsetlin) cujas dimensões dos subespaços de pesos são finitas, em particular os módulos da categoria $\mathcal{O}$, são exemplos de módulos de Gelfand-Tsetlin. Isso justifica porque o estudo da categoria dos módulos de Gelfand-Tsetlin é extremamente importante. Em muitos casos, a descrição dos módulos de Gelfand-Tsetlin pode ser obtida através de uma base explícita e com ação explícita dos geradores da álgebra de Lie, como veremos ao longo das próximas seções desse trabalho.

Vamos apresentar agora um breve panorama histórico sobre o surgimento e desenvolvimento da teoria dos módulos de Gelfand-Tsetlin, assim como o contexto atual do desenvolvimento da pesquisa referente a esse tema.

Na metade do século passado, I. Gelfand e M. Tsetlin, em [15], descreveram bases explícitas para os $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de dimensão finita, conforme explicaremos nas primeiras páginas desse trabalho. Tais bases são parametrizadas pelas, desde então, chamadas tabelas de Gelfand-Tsetlin, cujos elementos (entradas) são números complexos que satisfazem certas condições (que descreveremos precisamente mais adiante). Observando que os coeficientes presentes nas fórmulas de Gelfand-Tsetlin (que descrevem explicitamente a ação dos elementos da base de $\mathfrak{gl}(n)$ sobre essas tabelas) são funções racionais das entradas das tabelas, surgiu naturalmente a pergunta se não seria possível estender a construção feita por I. Gelfand e M. Tsetlin no referido trabalho para construir módulos mais gerais, incluindo o caso dos módulos de dimensão infinita. Essas ideias foram implementadas por Y. Drozd, S. Ovsienko e V. Futorny em [5], onde foram definidos os chamados $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos de Gelfand-Tsetlin *genéricos* (que são de dimensão infinita) e foram estabelecidas muitas propriedades relevantes desses módulos. Recentemente, a classificação completa dos módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis foi obtida por V. Futorny, D. Grantcharov e L. E. Ramirez em [11] para $\mathfrak{sl}(3)$, mas o problema continua em aberto em geral.

Observamos que cada tabela na base de Gelfand-Tsetlin é um autovetor da subálgebra de Gelfand-Tsetlin. Além disso, cada gerador desta subálgebra age na tabela por um escalar que o é valor de certo polinômio simétrico nas entradas da tabela. Assim, cada tabela de Gelfand-Tsetlin define um caráter da subálgebra de Gelfand-Tsetlin. Esta correspondência não é biunívoca pois a cada caráter está associado número finito de tabelas.

Nesse contexto um dos principais problemas é: dada qualquer tabela de Gelfand-Tsetlin (e por-

tanto um caráter da subálgebra de Gelfand-Tsetlin), podemos construir um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo contendo essa tabela como um elemento da base desse módulo? Aparentemente o principal obstáculo para resolver esse problema são as possíveis relações inteiras entre as entradas de uma mesma linha da tabela.

Esse problema foi resolvido por V. Futorny, D. Grantcharov e L. E. Ramirez, em [10], no caso de tabelas 1-*singulares* de Gelfand-Tsetlin (quando existe exatamente uma linha da tabela tal que nessa linha exista apenas um par de entradas v_{ki}, v_{kj} tais que $v_{ki} - v_{kj} \in \mathbb{Z}$), assim como um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo cujos elementos da base são essas tabelas sujeitas a certas relações. Este trabalho estendeu o resultado de [12], onde foram explicitamente construídos novos módulos irredutíveis para $\mathfrak{gl}(n)$ a partir de tabelas *genéricas* (quando não existe exatamente nenhuma linha da tabela tal que nessa linha exista par de entradas v_{ki}, v_{kj} com $v_{ki} - v_{kj} \in \mathbb{Z}$).

Particularmente no caso dos módulos de Gelfand-Tsetlin 1-singulares um novo tipo de tabelas de Gelfand-Tsetlin foi introduzido; as desde então chamadas de *tabelas derivadas*, que podem ser definidas a partir das tabelas regulares através de um processo de limite formal, conforme é mostrado em [10]. O espaço vetorial gerado por essas tabelas regulares e derivadas tem uma estrutura de $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo, cujas ações dos elementos da base de $\mathfrak{gl}(n)$ são dadas explicitamente em [10]. Tais módulos são chamados de módulos de Gelfand-Tsetlin 1-singulares. Nesse mesmo trabalho, foi exibida uma condição suficiente para a irredutibilidade de tais módulos e foi proposta a seguinte conjectura:

Conjectura 1.1.1 *Para qualquer n , se o $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo de Gelfand-Tsetlin 1-singular associado a uma tabela $T(\bar{v})$ for irredutível, então as diferenças entre os elementos entre linhas consecutivas da tabela $T(\bar{v})$ não são inteiras.*

A conjectura foi demonstrada no caso $n = 3$ [11]. A classificação completa dos $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin 1-singulares foi obtida em [13]. Já em 2017, um novo ponto de vista para os módulos de Gelfand-Tsetlin 1-singulares foi introduzido independentemente por P. Zadunaisky em [25] e por E. Vishnyakova em [23]. Para os casos t -singulares com $t > 1$, E. Vishnyakova em [24] e L. E. Ramirez e P. Zadunaisky em [21] forneceram novas maneiras de construir esses módulos. N. Early, E. Vishnyakova e V. Mazorchuk estabeleceram condições suficientes (vide Teorema 1.1 em [6]) para a irredutibilidade dos módulos de Gelfand-Tsetlin para os casos t -singulares com $t > 1$, mas a pergunta de que essas mesmas condições também são necessárias para $t > 1$ continua não respondida.

O resultado principal dessa Tese é a demonstração desta conjectura da condição necessária para a irredutibilidade dos módulos 1-singulares de Gelfand-Tsetlin. Será apresentada uma generalização da construção feita em [12] de um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo irredutível contendo uma dada tabela, no caso 1-singular. Esse resultado nos levou a uma nova prova das condições suficientes para a irredutibilidade do módulo $V(T(\bar{v}))$, associado a uma tabela $T(\bar{v})$ no caso 1-singular.

1.2 Objetivos

Nesta Tese damos uma resposta positiva a conjectura acima demonstrando o seguinte:

Teorema:

Para qualquer tabela 1-singular $T(\bar{v})$, o correspondente módulo de Gelfand-Tsetlin é irredutível se e somente se $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq s \leq r \leq n$ e $1 \leq t \leq r - 1$.

Além disso, descrevemos alguns submódulos irredutíveis para certas famílias de $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos $V(T(\bar{v}))$, no caso 1-singular.

1.3 Prólogo

O texto está organizado da seguinte forma: No capítulo 2, introduziremos as definições que serão necessárias ao longo do trabalho, alguns resultados clássicos sobre a teoria das álgebras de Lie, assim como as notações que serão utilizadas ao longo do texto. No capítulo 3 vamos relembrar a definição da subálgebra de Gelfand-Tsetlin assim como os conceitos relacionados com os módulos de Gelfand-Tsetlin. Nesse mesmo capítulo apresentaremos o Teorema de Gelfand-Tsetlin (ver [15]) sobre as realizações dos módulos irredutíveis de dimensão finita utilizando as tabelas de Gelfand-Tsetlin, que é uma das principais fontes de inspiração para essa teoria. Para finalizar esse capítulo, apresentaremos a construção dos módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos estabelecida em [12], assim como as principais definições e os fatos mais relevantes sobre a construção dos módulos de Gelfand-Tsetlin 1-singulares, seguindo diretamente o que foi estabelecido em [10]. No capítulo 4, vamos definir uma relação de pré-ordem sobre o conjunto de todas as tabelas (regulares e derivadas) e estabelecer muitas propriedades importantes dessa relação que serão utilizadas em resultados dos capítulos seguintes. Finalmente, nos dois últimos capítulos, estabelecemos os principais resultados dessa tese. A saber; exibir uma base explícita para um subquociente irredutível que contém uma dada tabela de um módulo de Gelfand-Tsetlin 1-singular, e dar uma demonstração alternativa para o Teorema 4.14 em [10], que estabelece uma condição suficiente para a irredutibilidade do módulo de Gelfand-Tsetlin associado a uma dada tabela 1-singular $T(\bar{v})$ e por fim, no capítulo 6, vamos estabelecer o nosso mais importante resultado: dar uma resposta positiva para a conjectura citada anteriormente.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Álgebras de Lie

Ao longo do texto vamos utilizar como corpo base o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, dado $a \in \mathbb{Z}$, vamos denotar por $\mathbb{Z}_{\geq a}$ o conjunto de todos os inteiros m tais que $m \geq a$.

Lembrando que uma *álgebra associativa* A é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$, munido de uma multiplicação bilinear $a, b \mapsto ab$, com $a, b \in A$ tal que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in A$. Vamos sempre considerar álgebras associativas com unidade, isto é, com um elemento $1 \in A$ tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in A$. Um importante exemplo de uma álgebra associativa é a álgebra $End(V)$, dos operadores lineares de um espaço vetorial V com operação da composição de operadores.

Definição 2.1.1 *Uma álgebra de Lie é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido com uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ que goza das seguintes propriedades:*

$$(L1) [x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g};$$

$$(L2) [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \text{ (identidade de Jacobi)}.$$

A aplicação $[\cdot, \cdot]$ é chamada de colchete de Lie.

Como a característica do corpo $\mathbb{C}$ é diferente de 2, a condição **(L1)** é equivalente a $[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in \mathfrak{g}$ (anti-comutatividade).

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita abeliana se $[x, y] = 0$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathfrak{g}$.

Vale a pena lembrar que pode-se dar a qualquer álgebra associativa A uma estrutura de álgebra de Lie definindo-se sobre o espaço A um colchete dado pelo comutador $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$, onde $\cdot$ é a multiplicação definida originalmente sobre A .

Para cada espaço vetorial V , consideremos o espaço vetorial $End(V)$ dos operadores lineares $T : V \rightarrow V$. Vamos representar por $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie associada a $End(V)$ quando munido do comutador $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. No caso em que V é de dimensão finita e $\dim V = n$, vamos denotar $\mathfrak{gl}(V)$ simplesmente por $\mathfrak{gl}(n)$. Nesse caso, fixada uma base do espaço vetorial V , há uma

identificação natural de $\mathfrak{gl}(n)$ com a álgebra de Lie das matrizes quadradas de ordem n , cujo colchete de Lie é dado pelo comutador $[A, B] := AB - BA$. O conjunto $\{E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ que é constituída pelas matrizes elementares, isto é, E_{ij} é a matriz de ordem n que tem entrada igual a 1 na posição (i, j) e 0 em todas as demais posições. Note que $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

2.1.1 Constantes de estrutura

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{C}$ com base $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$, então o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ para quaisquer dois elementos de $\mathfrak{g}$ fica completamente determinado pelos colchetes $[x_i, x_j]$, $i, j = 1, \dots, n$. Definimos os escalares $a_{ij}^k \in \mathbb{C}$ tais que

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k x_k.$$

Os escalares a_{ij}^k são chamados de *constantes de estrutura* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com relação à base $\mathcal{B}$. A partir dos axiomas que definem uma álgebra de Lie, podemos verificar que

$$a_{ii}^k = 0, \quad a_{ij}^k + a_{ji}^k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k \left(a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m \right) = 0.$$

2.1.2 Subálgebras e ideais

Uma noção importante para o estudo das álgebras de Lie é a noção de subálgebra, particularmente a noção de subálgebra de Cartan, que é essencial para descrevermos a decomposição de uma álgebra de Lie de dimensão finita semissimples como uma soma direta de seus subespaços de raízes e a *decomposição de Cartan*.

Definição 2.1.2 *Um subespaço $\mathfrak{a}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamado de uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ quando para quaisquer $x, y \in \mathfrak{a}$ temos que $[x, y] \in \mathfrak{a}$, ou seja, $\mathfrak{a}$ é fechado com respeito ao colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 2.1.3 *Em $\mathfrak{gl}(n)$, o subespaço vetorial $\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$, visto que se $X, Y \in \mathfrak{sl}(n)$, segue que*

$$\text{tr}([X, Y]) = \text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0,$$

o que revela que $[X, Y] \in \mathfrak{sl}(n)$.

A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ desempenha um papel importante na teoria das representações das álgebras de Lie, como vamos ver mais adiante.

Um outro importante conceito no estudo da teoria é o de ideal, cuja definição vem a seguir.

Definição 2.1.4 *Um subespaço $\mathfrak{i}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamado de ideal se para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $y \in \mathfrak{i}$ temos que $[x, y] \in \mathfrak{i}$.*

Por exemplo, a subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ é um ideal de $\mathfrak{gl}(n)$. Um outro exemplo importante de ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o seu centro, que é definido por:

$$Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\},$$

ou seja, é o conjunto dos elementos de $\mathfrak{g}$ que comutam com todos os elementos de $\mathfrak{g}$.

De acordo com a definição acima pode-se notar que todo ideal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra, mas o contrário não é verdadeiro.

Quando uma álgebra de Lie não abeliana $\mathfrak{g}$ não possui ideais próprios e não triviais, isto é, ideais diferentes do ideal nulo e da própria álgebra $\mathfrak{g}$, diz-se que $\mathfrak{g}$ é uma *álgebra de Lie simples*. A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ é um exemplo de álgebra de Lie simples.

Vamos dizer que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é *soma direta* de suas subálgebras $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{l}$, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{l}$ é soma direta de espaços vetoriais e $[\mathfrak{n}, \mathfrak{l}] = 0$. Por exemplo, $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{sl}(n) \oplus \mathbb{C}I$, onde $\mathbb{C}I$ é a subálgebra de Lie abeliana de matrizes escalares.

Caso uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ seja uma soma direta de subálgebras de Lie simples, vamos dizer que a álgebra $\mathfrak{g}$ é *semisimples* (referimos a [22] para detalhes e para outra definição equivalente de álgebras de Lie semisimples).

Por fim, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita *reductiva* quando ela pode ser escrita como soma direta de uma subálgebra de Lie semisimples com outra subálgebra de Lie abeliana.

Outra noção relevante é a de morfismo entre duas álgebras de Lie, cuja definição é:

Definição 2.1.5 *Dadas duas álgebras de Lie $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_1)$ e $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_2)$, um homomorfismo (ou mais simplesmente um morfismo) entre essas álgebras de Lie é uma aplicação linear $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ que preserva os colchetes de Lie dessas duas álgebras, ou seja, $\varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2$ para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}_1$.*

Duas álgebras de Lie $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_1)$ e $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_2)$ são *isomorfas* se existe um morfismo inversível entre $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$.

2.2 Módulos e Representações

Nesse ponto vamos recordar algumas noções básicas sobre módulos e representações que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho.

2.2.1 Módulos sobre álgebras de Lie

Um módulo sobre uma álgebra de Lie é uma extensão natural do conceito de espaço vetorial, como mostra a definição a seguir:

Definição 2.2.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um $\mathfrak{g}$ -módulo é um espaço vetorial V (sobre o corpo $\mathbb{C}$) juntamente com uma operação de multiplicação $\cdot : \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ tal que para quaisquer $x, y \in \mathfrak{g}$, $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ são satisfeitas as seguintes condições:*

1. $(x + y) \cdot v = x \cdot v + y \cdot v;$
2. $x \cdot (u + v) = x \cdot u + x \cdot v;$
3. $\alpha x \cdot v = x \cdot (\alpha v);$
4. $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$

Além disso, definimos como sendo a dimensão do $\mathfrak{g}$ -módulo V a sua dimensão como $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Dados dois $\mathfrak{g}$ -módulos V_1 e V_2 , um *homomorfismo* $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ é uma transformação linear que comuta com a ação de $\mathfrak{g}$, i.e., $\phi(xv) = x\phi(v)$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Caso ϕ seja inversível os módulos V_1 e V_2 são ditos *isomorfos*.

Para uma fixada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, um importante exemplo de homomorfismo é a aplicação chamada de *adjunta* que é definida da seguinte forma: $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ tal que $x \mapsto ad_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, onde $ad_x(y) := [x, y]$. Desta maneira $\mathfrak{g}$ torna-se um $\mathfrak{g}$ -módulo.

Para finalizar essa subseção, vamos relembrar o conceito de representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ assim como a sua equivalência com o conceito de $\mathfrak{g}$ -módulo.

Definição 2.2.2 *Uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um par (V, ρ) , onde V é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Explicitamente,*

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End}(V) \\ x &\mapsto \rho_x : V \rightarrow V \\ v &\mapsto \rho_x(v), \end{aligned}$$

ou seja, a cada elemento $x \in \mathfrak{g}$ associamos uma aplicação linear $\rho_x : V \rightarrow V$ tal que

$$\rho_{[x,y]} = [\rho_x, \rho_y] = \rho_x \rho_y - \rho_y \rho_x.$$

A dimensão do $\mathbb{C}$ -espaço vetorial V é denominada de dimensão da representação.

Como vimos anteriormente, para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a aplicação adjunta $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Em particular, $(ad, \mathfrak{g})$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, chamada de *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$.

Para finalizar essa seção, observamos que, fixada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e uma representação dessa álgebra de Lie (ρ, V) , podemos enxergar V como sendo um $\mathfrak{g}$ -módulo, cuja ação de $\mathfrak{g}$ sobre V é dada por $x \cdot v := \rho_x(v)$ para cada $x \in \mathfrak{g}$ e cada $v \in V$. Por outro lado, dado um $\mathfrak{g}$ -módulo V , podemos enxergar o par (ρ, V) como uma representação de $\mathfrak{g}$, onde para cada $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$ definimos $\rho_x : V \rightarrow V$ dada por $\rho_x(v) := x \cdot v$, onde $\cdot$ representa a ação de $\mathfrak{g}$ sobre V . Assim, as representações de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e os $\mathfrak{g}$ -módulos podem ser usados indistintamente conforme a linguagem que seja mais conveniente em um dado ponto da teoria.

Uma pergunta natural é se para uma dada representação (V, ρ) de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe um subespaço vetorial $W \subset V$ tal que $(W, \rho|_W)$ ainda seja uma representação de $\mathfrak{g}$, i.e. $\rho_x(W) \subset W$,

para todo $x \in \mathfrak{g}$. Nesse ponto surge então uma outra noção importante que é a de *submódulo* ou de *subrepresentação*, cuja definição é apresentada a seguir:

Definição 2.2.3 *Uma subrepresentação de uma representação (V, ρ) de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um subespaço $W \subset V$ que é ρ_x -invariante, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Neste caso, W é um submódulo de V .*

Dizemos que uma representação não nula (V, ρ) é *irredutível* (ou *simples*) se as suas únicas subrepresentações são as triviais, isto é, são os subespaços 0 e o próprio V . Por outro lado, dizemos que uma representação (V, ρ) é *indecomponível* quando V não pode ser escrito como soma direta de duas subrepresentações não triviais. Claramente temos que toda representação irredutível é indecomponível, mas o contrário não é verdadeiro.

Um dos principais problemas da teoria das representações de álgebras de Lie é classificar as representações irredutíveis e indecomponíveis de uma dada álgebra de Lie a menos de isomorfismo. Esse problema é bastante difícil e frequentemente é estudado parcialmente, com alguns bons resultados já estabelecidos, por exemplo no caso de representações de dimensão finita.

Nesse ponto recordaremos a generalização do famoso Lema de Schur, que desempenha um papel fundamental na teoria das representações de dimensão infinita das álgebras de Lie de dimensão finita.

Lema 2.2.4 (Lema de Dixmier) *Sejam M um módulo irredutível de dimensão no máximo contável sobre uma álgebra R definida sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado não contável e f um endomorfismo de M . Então existe $\lambda \in K$ tal que $f(m) = \lambda m$ para qualquer $m \in M$.*

Observamos que, no caso de módulo de dimensão finita, esta afirmação vale para qualquer corpo algebricamente fechado (Lema de Schur clássico). Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [7].

Uma consequência direta do Lema de Schur é que os módulos irredutíveis de dimensão finita para uma álgebra de Lie abeliana complexa são todos 1-dimensionais. Outra aplicação é seguinte: sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita complexa e (V, ρ) uma representação de dimensão finita e irredutível de $\mathfrak{g}$. Se $x \in Z(\mathfrak{g})$ então existe um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot v = \lambda v$ para todo $v \in V$, ou seja, nessas condições, o centro de $\mathfrak{g}$ age por escalares. A mesma afirmação vale para elementos do centro da álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$.

A importância do Lema de Dixmier é que os mesmos resultados sobre a ação do centro de uma álgebra (de Lie ou da sua álgebra envolvente universal) podem ser obtidos para certas classes de módulos irredutíveis de dimensão infinita.

2.2.2 Decomposição de Cartan

A esta altura, vamos relembrar o conceito de subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semissimples, assim como os conceitos de raízes e de subespaços de pesos.

Definição 2.2.5 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Para qualquer subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, definimos o normalizador de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ como sendo o conjunto $I(\mathfrak{h})$, dado por:*

$$I(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] \in \mathfrak{h}, \text{ para todo } y \in \mathfrak{h}\}.$$

Não é difícil verificar que $I(\mathfrak{h})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$ e que $\mathfrak{h}$ é um ideal de $I(\mathfrak{h})$. Além disso, se $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{a}$, então $\mathfrak{a}$ está contida em $I(\mathfrak{h})$, ou seja, $I(\mathfrak{h})$ é a maior subálgebra de $\mathfrak{g}$ na qual $\mathfrak{h}$ é um ideal.

Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é *nilpotente* se $\mathfrak{h}^k = 0$ para algum k , onde $\mathfrak{h}^1 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ e para qualquer i temos $\mathfrak{h}^i = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{i-1}]$.

Definição 2.2.6 *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$, dizemos que uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ se $\mathfrak{h}$ é nilpotente e $I(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Temos o seguinte resultado de existência e que pode ser encontrado em [17]:

Teorema 2.2.7 *Toda álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ possui uma subálgebra de Cartan. Mais ainda, dadas duas subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$ de $\mathfrak{g}$, existe um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Além disso, se $\mathfrak{g}$ é simples, então qualquer subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ é abeliana.*

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita definida sobre o corpo $\mathbb{C}$. Consideramos a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ restrita a $\mathfrak{h}$, a saber:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{h} &\rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto ad_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ y &\mapsto ad_x(y) = [x, y]. \end{aligned}$$

Dessa forma, como para cada elemento $x \in \mathfrak{h}$ associamos um operador linear ad_x , podemos “enxergar” $\mathfrak{h}$ como uma coleção de operadores lineares no $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é simples, temos que $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie abeliana, segue que todos os operadores lineares de $ad(\mathfrak{h})$ comutam entre si, pois $[h_1, h_2] = 0$ para quaisquer $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$, o que revela que

$$\begin{aligned} ad_{h_1} \circ ad_{h_2}(x) &= ad_{h_1}([h_2, x]) \\ &= [h_1, [h_2, x]] \\ &= \underbrace{[h_1, h_2], x}_{=0} + [h_2, [h_1, x]] \\ &= [h_2, [h_1, x]] \\ &= ad_{h_2} \circ ad_{h_1}(x). \end{aligned}$$

Além disso, como $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$ -módulo simples (em relação da representação adjunta) pode-se mostrar que $ad(\mathfrak{h})$ é uma coleção de operadores lineares diagonalizáveis. Daqui segue que existe uma base $\mathfrak{g}$ constituída de autovetores comuns de todos elementos de $ad(\mathfrak{h})$.

Nessas condições, provas-se que (ver por exemplo, [17]) pode-se decompor $\mathfrak{g}$ da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right), \quad (2.1)$$

onde $\mathfrak{h}^*$ é o dual da subálgebra de Cartan, $\Phi \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ é o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} ; ad_h(x) = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Essa decomposição chama-se *decomposição de Cartan* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Os α 's são chamados *raízes* e os subespaços $\mathfrak{g}_{\alpha}$'s são chamados *subespaços de raízes*. Dizemos que $\ell := \dim \mathfrak{h}$ é o *posto* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Como a dimensão de cada $\mathfrak{g}_{\alpha}$, $\alpha \in \Phi$ é 1, no caso de álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, de (2.1), segue que:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + |\Phi|.$$

Exemplo 2.2.8 Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ e $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan constituída pelas matrizes diagonais, temos que:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij} \right), \quad (2.2)$$

Perceba que se $A \in \mathfrak{h}$, então

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

com $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ e $[A, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$. Nesse caso, o sistema de raízes é $\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$, onde

$$e_i : \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_i.$$

Um sistema de raízes Φ goza das seguintes propriedades: Se $\alpha \in \Phi$, então $-\alpha \in \Phi$ e além disso, Φ gera $\mathfrak{h}^*$.

Definição 2.2.9 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ e $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$, com respeito a $\mathfrak{h}$. Dizemos que $\Delta \subset \Phi$ é um sistema de raízes simples se:

- Δ é uma base de $\mathfrak{h}^*$ como espaço vetorial.
- Cada raiz $\beta \in \Phi$ pode ser escrita como $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha$ sendo os coeficientes k_{α} todos inteiros não negativos ou todos inteiros não positivos.

As raízes de Δ são então chamadas de raízes simples. Além disso, dizemos que $\beta = \sum k_{\alpha} \alpha$ é positiva quando todos os escalares k_{α} são inteiros não negativos e que β é negativa no caso em que os escalares k_{α} são todos não positivos. No primeiro caso escrevemos $\beta \succ 0$ e $\beta \prec 0$ no segundo caso. Por fim, representamos por Φ^+ o conjunto das raízes positivas e por Φ^- o conjunto das raízes negativas.

Note que Δ define uma *relação de ordem parcial* em $\mathfrak{h}$ compatível com a relação $\alpha \succ 0$, definindo $\lambda \succ \mu$ se $\lambda - \mu$ é uma soma de raízes positivas ou $\lambda = \mu$.

Um fato importante, provado por exemplo em [17], é que todo sistema de raízes de uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita admite uma base.

Usualmente fixamos um sistema de raízes simples $\Delta \subset \Phi$ e os correspondentes conjuntos de raízes positivas e negativas. Isso define a decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \text{onde } \mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Por exemplo, no caso da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, cuja base é dada explicitamente por

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

temos $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$, $\mathfrak{n}_- = \mathbb{C}f$ e $\mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}e$. Esta álgebra desempenha um papel central na teoria das representações das álgebras de Lie, pois cada $\alpha \in \Phi^+$ determina uma subálgebra $\mathfrak{s}_\alpha \simeq \mathfrak{sl}(2)$ com base $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ and $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tais que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ e $\alpha(h_\alpha) = 2$. Os elementos do conjunto $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha; \alpha \in \Delta\}$ são chamados geradores de Chevalley de $\mathfrak{g}$ [17].

2.2.3 Forma de Killing

Fixada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, já definimos anteriormente a representação adjunta $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$. A partir da adjunta pode-se definir uma forma bilinear simétrica sobre $\mathfrak{g}$, que é a chamada *forma de Killing*, cuja definição é seguinte:

Definição 2.2.10 *A forma de Killing de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\langle x, y \rangle := \text{tr}(ad_x \circ ad_y).$$

A forma de Killing é uma ferramenta importante para detectar se a álgebra de Lie é semissimples, pois pelo Critério de Cartan, uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita é semissimples se e somente se a sua forma de Killing é não degenerada. Neste caso, a restrição da forma de Killing da subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é não degenerada também. Assim, ela induz uma aplicação linear (bijetiva) $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ dada por $\varphi(x) = f_x$ tal que

$$f_x(y) = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in \mathfrak{h}.$$

2.2.4 O grupo de Weyl

Para um sistema de raízes Φ associado a uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, há um grupo de operadores lineares de $\mathfrak{h}^*$ que revela uma bela geometria e simetria no sistema de raízes Φ , que é o chamado *grupo de Weyl*. Relembraremos a sua construção e as principais propriedades do grupo de Weyl nesta subseção.

Para cada $\alpha \in \Phi$ consideremos o operador linear $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ que é a reflexão em torno do hiperplano ortogonal a α dada por:

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

De posse desses operadores, temos então a definição do grupo de Weyl.

Definição 2.2.11 *O grupo W gerado pelas reflexões s_α , com $\alpha \in \Phi$, é chamado de grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$.*

O grupo de Weyl goza de inúmeras propriedades interessantes. Aqui vamos listar as mais relevantes (cuas provas podem ser encontradas, por exemplo, em [17]). A primeira delas é que o grupo de Weyl permuta as raízes, ou seja, se $w \in W$, então $w(\alpha) \in \Phi$, sempre que $\alpha \in \Phi$, o que nos permite concluir que W é um grupo finito, visto que é um subgrupo do grupo de permutações do conjunto finito Φ . Uma outra propriedade relevante é que dada qualquer raiz $\alpha \in \Phi$, existe uma raiz simples $\beta \in \Delta$ e um elemento $w \in W$ tais que $\alpha = w(\beta)$, isto é, $\Phi = W(\Delta)$, em particular, se conhecermos as raízes simples, podemos obter todo o sistema de raízes Φ por sucessivas reflexões.

2.3 Classificação das álgebras de Lie simples

As álgebras de Lie complexas simples de dimensão finita foram classificadas por Killing e Cartan. Elas pertencem às famílias A_n, B_n, C_n e D_n (álgebras de Lie clássicas) ou correspondem a uma das cinco álgebras de Lie excepcionais, a saber: E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2 . Para que não haja redundância nessa classificação consideramos que para A_n temos $n \geq 1$, para B_n , $n \geq 2$, para C_n , $n \geq 3$ e no caso D_n , temos que $n \geq 4$. As álgebras de Lie simples estão associadas aos chamados diagramas de Dynkin.

Definição 2.3.1 *Se Δ é um conjunto de raízes simples de um sistema de raízes Φ de uma álgebra de Lie complexa $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, o diagrama de Dynkin associado a Φ é um grafo construído da seguinte maneira:*

- Para cada raiz simples $\alpha \in \Delta$, construímos um vértice do grafo.
- Para cada par de raízes distintas $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$, conectamos os respectivos vértices n arestas, onde n depende do ângulo φ entre essas duas raízes do seguinte modo:
 Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $n = 0$, isto é, nesse caso não haverá arestas conectando os vértices correspondentes as raízes α_i e α_j ;
 Se $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $n = 1$;
 Se $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $n = 2$;
 Se $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, $n = 3$.
- Para cada par de raízes distintas (e não ortogonais) $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$ tais que $|\alpha_i| \neq |\alpha_j|$, orientamos as arestas que conectam os vértices correspondentes a essas raízes indicando uma seta que tem o sentido da raiz mais longa para a raiz mais curta.

Para as álgebras de Lie dos tipos $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ ou G_2 , os diagramas de Dynkin são os seguintes (para maiores detalhes, vide [17]).

No caso em que o corpo sobre o qual a álgebra de Lie está definida não é algebricamente fechado, a classificação existe mas é mais complicada. Essa classificação é feita através dos diagramas de Satake, conforme podemos encontrar uma descrição em [19].

2.3.1 A álgebra envolvente universal

Uma ferramenta essencial para o estudo das representações dos módulos sobre a uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a sua *álgebra envolvente universal* $U(\mathfrak{g})$. A álgebra $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com unidade, sem divisores de zero, noetheriana à direita, de dimensão infinita se $\mathfrak{g} \neq 0$ e não comutativa se $\mathfrak{g}$ não é abeliana.

Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base ordenada de $\mathfrak{g}$, então os monômios $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ (como elementos de um certo quociente de álgebra tensorial construída a partir de $\mathfrak{g}$), com $t_i \in \mathbb{Z}^+$, formam uma base de $U(\mathfrak{g})$. Esse é o conteúdo do famoso *Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt*. Em particular, $\mathfrak{g}$ pode ser identificada com um subespaço de $U(\mathfrak{g})$.

Vamos denotar por $Z_{\mathfrak{g}}$ o centro da álgebra $U(\mathfrak{g})$. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra complexa simples de dimensão finita, então $Z_{\mathfrak{g}}$ é isomorfo a uma álgebra polinomial em ℓ indeterminadas, onde ℓ é a dimensão de uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Por exemplo, no caso de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, o centro $Z_{\mathfrak{g}}$ é isomorfo a uma álgebra polinomial em $n - 1$ indeterminadas, enquanto o centro $Z_{\mathfrak{gl}(n)}$ é isomorfo a uma álgebra polinomial em n indeterminadas. O centro de $U(\mathfrak{gl}(n))$ é usado para construir a chamada *subálgebra de Gelfand-Tsetlin*, que apresentaremos numa seção posterior, e que é de fundamental importância para o presente trabalho.

Um outro fato que merece ser destacado é que qualquer representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem uma estrutura canônica de $U(\mathfrak{g})$ -módulo, e reciprocamente, qualquer $U(\mathfrak{g})$ -módulo tem uma estrutura canônica de representação de $\mathfrak{g}$. Assim, as categorias das representação de $\mathfrak{g}$ -módulos e de $U(\mathfrak{g})$ -módulos são equivalentes.

Capítulo 3

Módulos de Gelfand-Tsetlin

Neste capítulo abordamos os principais fatos sobre os módulos de Gelfand-Tsetlin para a álgebra de Lie complexa $\mathfrak{gl}(n)$. O tratamento da teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin para a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ é análogo, mas por conveniência técnica vamos considerar o caso de $\mathfrak{gl}(n)$. Destacamos que todo módulo de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathfrak{gl}(n)$ é um módulo de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathfrak{sl}(n)$. Reciprocamente, todo módulo de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathfrak{sl}(n)$ torna-se um módulo de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathfrak{gl}(n)$ após de definir-se a ação da matriz identidade de $\mathfrak{gl}(n)$ por um escalar. Além disso, a irredutibilidade ou a falta dela é preservada para os dois lados.

Além dos conceitos e terminologias peculiares dessa família de módulos, apresentaremos o Teorema de Gelfand-Tsetlin [15], onde são dadas realizações explícitas, através das chamadas tabelas de Gelfand-Tsetlin, para os módulos irredutíveis de dimensão finita. Ainda neste capítulo, mostraremos as principais extensões desse teorema no caso de dimensão infinita, passando pelos módulos genéricos de Gelfand-Tsetlin e culminando com os módulos 1-singulares, onde se encontra o principal problema resolvido nesta tese.

3.1 Módulos de peso

Para conveniência do leitor, vamos relembrar a definição de módulos de peso dada na Introdução. Fixadas uma álgebra de Lie simples de dimensão finita $\mathfrak{g}$ e uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, um módulo de peso sobre $\mathfrak{g}$, é um módulo M com decomposição de pesos $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$ onde $M_\lambda = \{v \in M \mid hv = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Definimos $\text{Supp} M = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid M_\lambda \neq 0\}$. A dimensão de M_λ é chamada de *multiplicidade* de λ como peso de M .

Além dos módulos de dimensão finita sobre $\mathfrak{g}$, os mais estudados e conhecidos entre os módulos de peso são *módulos de peso máximo*.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ uma decomposição de Cartan(2.1).

Definição 3.1.1 *Um vetor de peso máximo λ num $\mathfrak{g}$ -módulo V é um vetor não nulo v de peso λ tal que $\mathfrak{g}_\alpha v = 0$ para qualquer $\alpha \succ 0$. Nesse caso, dizemos também que λ é um peso máximo de V . Se o módulo V é gerado por um vetor v de peso máximo, então V é dito módulo de peso máximo λ .*

Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e I_λ o ideal (à esquerda) de $U(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos de $\mathfrak{n}_+$ e $h_i - \lambda(h_i).1$,

com $i = 1, \dots, l$ (onde $l = \dim \mathfrak{h}$). Definimos o módulo de Verma de peso máximo λ como sendo o quociente $M[\lambda] = U(\mathfrak{g})/I_\lambda$.

Como cada elemento $u \in U(\mathfrak{g})$ pode ser escrito como $u = u \cdot 1$, segue uma maneira alternativa para definirmos o módulo de Verma que é a seguinte: sendo $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ e $\mathbb{C}v_\lambda$ o módulo de dimensão 1 sobre $\mathfrak{b}$, onde $\mathfrak{n}_+v_\lambda = 0$ e $hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda$ para todo $h \in \mathfrak{h}$, temos

$$M[\lambda] \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}v_\lambda.$$

Todo vetor $v \in M[\lambda]$ pode ser escrito unicamente da forma $v = u \otimes v_\lambda$, com $u \in U(\mathfrak{n}_-)$, ou seja, a aplicação

$$U(\mathfrak{n}_-) \rightarrow M[\lambda]$$

$$u \mapsto u \otimes v_\lambda$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

O módulo de Verma $M[\lambda]$ é obviamente um módulo de peso com todos os subespaços de pesos sendo de dimensão finita e além disso o conjunto dos pesos de $M[\lambda]$ é dado por:

$$\text{Supp} M[\lambda] = \lambda - Q_+, \quad \text{com} \quad Q_+ = \left\{ \sum n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha_i \in \Delta \right\}$$

e $\dim M[\lambda]_\lambda = 1$ [Teorema 8.14 em [18]].

Pela construção $M[\lambda]$ é um módulo de peso máximo com a seguinte propriedade universal:

Proposição 3.1.2 (Lema 8.13 em [18]) *Se V é um módulo de peso máximo com peso máximo λ , então*

$$V \simeq M[\lambda]/W$$

para algum submódulo $W \subset M[\lambda]$.

O módulo de Verma $M[\lambda]$ tem um único submódulo próprio maximal. Portanto existe um único quociente irredutível $L[\lambda]$ de $M[\lambda]$ de peso máximo λ . Relembramos que a dimensão de $L[\lambda]$ é finita se, e somente se, λ é dominante integral, i.e.,

$$\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, l,$$

onde $h_1, \dots, h_\ell$ são co-raízes simples de $\mathfrak{g}$ [17]). Além disso, todo $\mathfrak{g}$ -módulo irredutível de dimensão finita tem a forma $L[\lambda]$ para algum peso dominante integral $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Os módulos $M[\lambda]$ e $L[\lambda]$ são exemplos de módulos de Gelfand-Tsetlin para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

A partir de agora, vamos fixar a notação $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ com subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ fixa de matrizes diagonais. Como já mencionamos no capítulo introdutório, o problema da classificação de todos os $\mathfrak{g}$ -módulos de peso irredutíveis é bastante complicado e ainda está longe de ser resolvido completamente. Uma estratégia para estudar parcialmente esse problema é considerar a subcategoria dos módulos de Gelfand-Tsetlin. A seguir, vamos apresentar os conceitos, notações e alguns resultados fundamentais sobre os módulos de Gelfand-Tsetlin.

3.2 Módulos de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}(n)$

Nesta seção vamos resumir algumas definições e fatos mais relevantes sobre os módulos de Gelfand-Tsetlin. Para simplificar a notação, no caso da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, usaremos $U = U(\mathfrak{gl}(n))$ ao longo do restante do texto. Para um anel comutativo R , usaremos $\text{Specm } R$ para denotar o conjunto dos ideais maximais de R .

A partir de agora, fixemos a base $\{E_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ de $\mathfrak{gl}(n)$ e a base $\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$ de $\mathfrak{h}$. Os pesos de $\mathfrak{gl}(n)$ serão representados por n -uplas $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Para cada $m \leq n$, consideremos $\mathfrak{gl}(m)$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$ gerada pelas matrizes elementares $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, m\}$. Temos então a seguinte cadeia de álgebras de Lie

$$\mathfrak{gl}(1) \subset \mathfrak{gl}(2) \subset \dots \subset \mathfrak{gl}(n),$$

que por sua vez induz a cadeia $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n$ das correspondentes álgebras envelopentes universais $U_m = U(\mathfrak{gl}(m))$, com $1 \leq m \leq n$. Seja Z_m o centro de U_m . Segue de [26] que Z_m é uma álgebra polinomial nas m variáveis $\{c_{mk} \mid k = 1, \dots, m\}$, onde

$$c_{mk} = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \dots E_{i_k i_1}. \quad (3.1)$$

Seguindo [4], chamamos a subálgebra de U gerada por $Z_m \mid m = 1, \dots, n$ de subálgebra de *Gelfand-Tsetlin* de U e a vamos denotar por Γ . Sabe-se que Γ é uma álgebra polinomial nas $\frac{n(n+1)}{2}$ variáveis $\{c_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$ (conforme o Capítulo 10 de [26]), i.e., os geradores c_{ij} de Γ são algebricamente independentes.

Denotaremos por Λ a álgebra polinomial nas variáveis $\{\lambda_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$. Seja $\iota : \Gamma \rightarrow \Lambda$ definida por $\iota(c_{mk}) = \gamma_{mk}(\lambda)$, onde

$$\gamma_{mk}(\lambda) := \sum_{i=1}^m (\lambda_{mi} + m - 1)^k \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{mi} - \lambda_{mj}}\right). \quad (3.2)$$

Zhelobenko [26], mostra que a imagem de ι coincide com a subálgebra dos polinômios G -invariantes em Λ , a qual nós identificamos com Γ , onde $G = S_n \times S_{n-1} \times \dots \times S_1$. Além disso, para cada $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\gamma_{mk}(\lambda)$ é um polinômio simétrico de grau k nas variáveis $\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mm}$ e $\{\gamma_{m1}(\lambda), \dots, \gamma_{mm}(\lambda)\}$ gera a álgebra dos polinômios simétricos nas variáveis $\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mm}$.

Vale a pena destacar o fato de que Γ contém a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{gl}(n)$, pois

$$c_{m1} = \sum_{i=1}^m E_{ii} \in \Gamma$$

ou seja, $E_{11}, E_{11} + E_{22}, \dots, E_{11} + \dots + E_{nn} \in \Gamma$, o que nos permite concluir que $E_{11}, \dots, E_{nn} \in \Gamma$.

Definição 3.2.1 *Um U -módulo finitamente gerado M é chamado de um módulo de Gelfand-Tsetlin (com respeito a Γ) se M se escreve como a seguinte soma direta de Γ -submódulos:*

$$M = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \text{Specm } \Gamma} M(\mathfrak{m}),$$

onde $M(\mathfrak{m}) = \{v \in M \mid \mathfrak{m}^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 0\}$.

Observação 3.2.2 *Os $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin são módulos de peso com respeito à subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, gerada pelas matrizes elementares $E_{11}, \dots, E_{nn} \in \Gamma$. Entretanto, o contrário nem sempre é verdade, ou seja, um módulo de peso não necessariamente é um módulo de Gelfand-Tsetlin (apesar de não ser simples dar um exemplo explícito de um módulo de peso irredutível que não seja um módulo de Gelfand-Tsetlin). No caso particular em que $n = 2$, todo módulo de peso irredutível é um módulo de Gelfand-Tsetlin. Também, todo módulo de peso com multiplicidades de todos os pesos finitas é um módulos de Gelfand-Tsetlin.*

Um homomorfismo de álgebras $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado um de *caráter de Gelfand-Tsetlin*. Para cada $\mathfrak{m} \in \text{Specm } \Gamma$ está associado um caráter $\chi_{\mathfrak{m}} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ e reciprocamente. Ou seja, para cada caráter de Gelfand-Tsetlin $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ tem-se que $\text{Ker}(\chi) \in \text{Specm } \Gamma$. Dessa forma existe uma identificação natural entre os caracteres de Gelfand-Tsetlin e o espectro maximal de Γ , o que, para cada módulo de Gelfand-Tsetlin M , nos permite escrever $M = \bigoplus_{\chi \in \Gamma^*} M(\chi)$, onde

$$M(\chi) := \left\{ v \in M \mid \text{para cada } \gamma \in \Gamma, \exists k \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ tal que } (\gamma - \chi(\gamma))^k v = 0 \right\}.$$

Motivado pelo que acabamos de expor, temos a seguinte definição:

Definição 3.2.3 *Para um módulo de Gelfand-Tsetlin $M = \bigoplus_{\chi \in \Gamma^*} M(\chi)$, definimos o suporte de Gelfand-Tsetlin de M como sendo*

$$\text{Supp}_{GT}(M) = \{\chi \in \Gamma^* \mid M(\chi) \neq 0\}.$$

Fazendo a já mencionada identificação de $\mathfrak{m}$ através o homomorfismo $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ com $\text{Ker } \chi = \mathfrak{m}$, podemos chamar $\mathfrak{m}$ de um *caráter de Gelfand-Tsetlin* de M no caso em que $M(\mathfrak{m}) \neq 0$, e $\dim M(\mathfrak{m})$ é definida como sendo a *multiplicidade de Gelfand-Tsetlin* de $\mathfrak{m}$. Frequentemente chamaremos de caráter de Gelfand-Tsetlin, multiplicidade de Gelfand-Tsetlin, e suporte de Gelfand-Tsetlin, simplesmente de caráter, multiplicidade e suporte, respectivamente.

Como já foi mencionado, os módulos irredutíveis de dimensão finita são exemplos clássicos de módulos de Gelfand-Tsetlin. A seguir, vamos mostrar que esses módulos podem ser realizados através de certas tabelas que constituem uma base de autovetores para a ação de Γ e que, nesse caso, $\dim M(\chi) \leq 1$ para todo $\chi \in \Gamma^*$.

Para finalizar vamos mencionar um importante resultado sobre os módulos de Gelfand-Tsetlin.

Teorema 3.2.4 (V. Futorny e S. Ovsienko, [14]) *Sejam $\Gamma \subset U$ a subálgebra de Gelfand-Tsetlin e $Q_n = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (n-1)!$. Se $\mathfrak{m} \in \text{Specm } \Gamma$, então:*

1. *Para um $\mathfrak{g}$ -módulo M tal que $M(\mathfrak{m}) \neq 0$ e M é gerado por algum $x \in M(\mathfrak{m})$ (em particular quando M é irredutível), tem-se que*

$$\dim M(\mathfrak{m}) \leq Q_n.$$

2. O número de classes de isomorfismos de $\mathfrak{g}$ -módulos irredutíveis N tais que $N(\mathfrak{m}) \neq 0$ é sempre não nulo e é limitado por Q_n .

3.3 $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de dimensão finita

Nesta seção vamos relembrar o resultado clássico de Gelfand-Tsetlin (apresentado em [15]) no qual eles fornecem bases explícitas para todos os $\mathfrak{gl}(n)$ -módulos irredutíveis de dimensão finita. Para isso vamos começar definindo as chamadas *tabelas de Gelfand-Tsetlin*.

Vamos representar os vetores do espaço vetorial $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ da seguinte forma:

$$v = (v_{n1}, \dots, v_{nn} | v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,n-1} | \dots | v_{21}, v_{22} | v_{11}).$$

Para $1 \leq j \leq i \leq n$, $\delta^{ij} \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ é definido por $(\delta^{ij})_{ij} = 1$ enquanto que todas as outras entradas de $(\delta^{ij})_{k\ell}$ são iguais a zero.

Relembrando que para o inteiro $i > 0$ representaremos por S_i o i -ésimo grupo simétrico. Por fim (k, ℓ) denotará a transposição de S_n , i.e, a permutação que troca de posição os elementos k e ℓ e fixa as demais posições.

Definição 3.3.1 *Seja $v = (v_{ij}) \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, representamos por $T(v)$ o seguinte arranjo de números complexos $\{v_{ij} : 1 \leq j \leq i \leq n\}$*

que denominamos de *tabela de Gelfand-Tsetlin de altura n* .

Para qualquer tabela de Gelfand-Tsetlin $T(v)$ (de altura n), vamos denotar por $\mathcal{B}(T(v))$ o conjunto de todas as tabelas que são obtidas a partir de $T(v)$ por translações de inteiros, ou seja todas as tabelas que são obtidas a partir de $T(v)$ adicionando números inteiros quaisquer em cada uma das entradas da tabela original, exceto na linha do topo da tabela, que deve permanecer fixa. Mais precisamente:

$$\mathcal{B}(T(v)) := \left\{ T(v + z) \mid z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}.$$

Cabe aqui uma observação que os elementos de $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ são considerados como elementos de $\mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ onde $z_{n1} = \dots = z_{nn} = 0$.

Uma tabela de Gelfand-Tsetlin $T(v)$ é chamada de *standard* se:

$$v_{ki} - v_{k-1,i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad e \quad v_{k-1,i} - v_{k,i+1} \in \mathbb{Z}_{> 0}, \quad \text{for all } 1 \leq i \leq k \leq n.$$

Existe uma correspondência natural entre os caráters da subálgebra de Gelfand-Tsetlin e o conjunto das tabelas de Gelfand-Tsetlin de altura n . Com efeito, para obter uma tabela de Gelfand-Tsetlin a partir de um caráter χ , basta resolvermos o sistema de equações

$$\gamma_{mk}(\lambda) = \chi(c_{mk}) \text{ com } 1 \leq k \leq m \leq n$$

(veja (3.2)) e reciprocamente, dada uma tabela de Gelfand-Tsetlin com entradas $\{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$, podemos construir um caráter de Gelfand-Tsetlin $\chi \in \Gamma$ usando o mesmo sistema de equações acima. Dessa forma cada tabela de Gelfand-Tsetlin determina um único caráter, entretanto um caráter $\chi \in \Gamma$ define uma tabela de Gelfand-Tsetlin a menos de permutações dos elementos das suas linhas, visto que as funções $\gamma_{mk}(v)$ são polinômios simétricos.

Agora vamos apresentar o resultado de Gelfand-Tsetlin (que surgiu por volta de 1950) e que dá uma realização através de Tabelas de Gelfand-Tsetlin para os módulos irredutíveis de dimensão finita.

Teorema 3.3.2 (Gelfand-Tsetlin, [15]) *Seja $L(\lambda)$ um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo de dimensão finita e irredutível de peso máximo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então existe uma base de $L(\lambda)$ constituída de tabelas standard $T(v)$ cuja linha do topo (linha n) de todas as tabelas é fixada $v_{n1} = \lambda_1, v_{n2} = \lambda_2 - 1, \dots, v_{nn} = \lambda_n - n + 1$. Além disso, a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ em $L(\lambda)$ é dada pelas chamadas fórmulas (clássicas) de Gelfand-Tsetlin, a saber:*

$$\begin{aligned} E_{k,k+1}(T(v)) &= - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\prod_{j=1}^{k+1} (v_{ki} - v_{k+1,j})}{\prod_{j \neq i}^k (v_{ki} - v_{kj})} \right) T(v + \delta^{ki}), \\ E_{k+1,k}(T(v)) &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\prod_{j=1}^{k-1} (v_{ki} - v_{k-1,j})}{\prod_{j \neq i}^k (v_{ki} - v_{kj})} \right) T(v - \delta^{ki}), \\ E_{kk}(T(v)) &= \left(k - 1 + \sum_{i=1}^k v_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{k-1,i} \right) T(v). \end{aligned}$$

Se uma nova tabela $T(v \pm \delta^{ki})$ não for standard, então o correspondente somando em $E_{k,k+1}(T(v))$ ou $E_{k+1,k}(T(v))$ é igual a zero, por definição. Além disso, a ação dos geradores c_{rs} de Γ (os quais foram definidos em (3.1)) é dada por,

$$c_{rs} \cdot T(v) = \gamma_{rs}(v) T(v), \tag{3.3}$$

onde γ_{rs} são definidos em (3.2).

3.4 Módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos

Observando que os coeficientes das fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin do Teorema 3.3.2 são funções racionais das entradas das tabelas, é bastante natural tentar estender a construção de Gelfand-Tsetlin para módulos mais gerais. No caso em que todos os denominadores não são números inteiros, podemos utilizar as mesmas fórmulas para definir uma nova classe de módulos, agora de

dimensão infinita, chamados *módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos*. Vamos então apresentar de modo sucinto essa construção feita por Y. Drozd, V. Futorny e S. Ovisienko na seção 2.3 de [5].

Definição 3.4.1 *Uma tabela de Gelfand-Tsetlin $T(v)$ é chamada genérica se $v_{rs} - v_{ru} \notin \mathbb{Z}$ para cada $1 \leq s < u \leq r \leq n - 1$.*

Teorema 3.4.2 (Seção 2.3, [5]) *Seja $T(v)$ uma tabela de Gelfand-Tsetlin genérica. Denotamos por $V(T(v))$ o espaço vetorial com base consistindo de todas as tabelas de Gelfand-Tsetlin $T(w)$ satisfazendo $w_{nj} = v_{nj}$, $w_{ij} - v_{ij} \in \mathbb{Z}$ para $1 \leq j \leq i \leq n - 1$. Então:*

- (i) *O espaço vetorial $V(T(v))$ tem uma estrutura de $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo com a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ dada pelas fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin. Além disso, o módulo $V(T(v))$ tem comprimento finito.*
- (ii) *A ação dos geradores de Γ sobre os elementos da base de $V(T(v))$ é dada por (3.3).*
- (iii) *O módulo definido em (i) é um módulo de Gelfand-Tsetlin e, além disso, todas as multiplicidades de Gelfand-Tsetlin são iguais a 1.*

Note que o módulo $V(T(v))$ não necessariamente é irredutível. Como Γ tem um espectro simples em $V(T(v))$ (i.e., as multiplicidades de Gelfand-Tsetlin são iguais a 1), para cada tabela $T(w)$ em $V(T(v))$ podemos definir o $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo *irredutível em $V(T(v))$ contendo $T(w)$* como sendo um subquociente de $V(T(v))$ contendo $T(w)$ (veja o Teorema 3.4.2(i)). O conjunto:

$$\Omega^+(T(w)) := \{(r, s, u) \mid w_{rs} - w_{r-1,u} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \quad (3.4)$$

é crucial para descrever bases de subquocientes de $V(T(v))$.

Teorema 3.4.3 (Teorema 6.14, [10]) *Seja $T(v)$ uma tabela genérica de Gelfand-Tsetlin e seja $T(w)$ uma tabela em $V(T(v))$. Então as seguintes condições ocorrem:*

- (i) *O submódulo de $V(T(v))$ gerado por $T(w)$ tem base*

$$\mathcal{N}(T(w)) := \{T(w') \in \mathcal{B}(T(v)) \mid \Omega^+(T(w)) \subseteq \Omega^+(T(w'))\};$$

- (ii) *O $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo irredutível em $V(T(v))$ contendo $T(w)$ tem base*

$$\mathcal{I}(T(w)) := \{T(w') \in \mathcal{B}(T(v)) \mid \Omega^+(T(w)) = \Omega^+(T(w'))\}.$$

3.4.1 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin em termos de permutações

Nesta subseção vamos mostrar como reescrever e generalizar as fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin que foram introduzidas no Teorema 3.3.2, usando uma notação que será bastante conveniente para os nossos propósitos, seguindo diretamente as ideias do final da seção §3 em [11].

Dizemos que v em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ é um vetor *genérico* se $T(v)$ é uma tabela de Gelfand-Tsetlin genérica (como definimos em 3.4.1), a denotaremos por $\mathbb{C}_{\text{gen}}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ o conjunto de todos vetores genéricos em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Sejam $G = S_n \times \cdots \times S_1$ e $\tilde{S}_m$ o subconjunto de S_m consistindo de todas as transposições $(1, i)$, com $i = 1, \dots, m$. Para $\ell < m$, seja $\Phi_{\ell m} = \tilde{S}_{m-1} \times \cdots \times \tilde{S}_\ell$. Para $\ell > m$, definimos $\Phi_{\ell m} = \Phi_{m\ell}$ e finalmente $\Phi_{\ell\ell} = \{Id\}$. Todo $\sigma \in \Phi_{\ell m}$ pode ser escrita como uma $|\ell - m|$ -upla de transposições $\sigma[t]$ (onde $\sigma[t]$ é a t -ésima componente de σ). Além disso, consideremos que toda $\sigma \in \Phi_{\ell m}$ como um elemento de $G = S_m \times \cdots \times S_1$ definindo $\sigma[t] = Id$ quando $t < \min(\ell, m)$ ou $t > \max(\ell, m) - 1$. Por fim, considere todo $\sigma \in \tilde{S}_m$ como um elemento de G representado por $\sigma[t] = Id$, com $t \neq m$.

Definição 3.4.4 *Seja $1 \leq r \leq n - 1$. Definimos*

$$\varepsilon_{r,r+1} := \delta^{r,1} \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Além disso, definimos também $\varepsilon_{rr} = 0$ e $\varepsilon_{r+1,r} = -\delta^{r,1}$.

Definição 3.4.5 *Para cada vetor genérico w e qualquer $1 \leq r \leq n - 1$, $1 \leq s \leq n$, definimos*

$$\begin{aligned} e_{r,r+1}(w) &:= -\frac{\prod_{j=1}^{r+1}(w_{r1} - w_{r+1,j})}{\prod_{j \neq 1}^r(w_{r1} - w_{rj})}, \\ e_{r+1,r}(w) &:= \frac{\prod_{j=1}^{r-1}(w_{r1} - w_{k-1,j})}{\prod_{j \neq 1}^k(w_{r1} - w_{rj})}, \\ e_{ss}(w) &:= \frac{1}{s} \left(s - 1 + \sum_{i=1}^s w_{si} - \sum_{i=1}^{s-1} w_{s-1,i} \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilizando as definições e notações que acabamos de estabelecer, podemos reescrever as fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin apresentadas no Teorema 3.3.2 da seguinte maneira:

Proposição 3.4.6 (Proposição 3.15, em [10]) *Seja $v \in \mathbb{C}_{\text{gen}}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. As fórmulas de Gelfand-Tsetlin para um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo de Gelfand-Tsetlin genérico $V(T(v))$ podem ser reescritas da seguinte forma:*

$$E_{\ell m}(T(v + z)) = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_r} e_{\ell m}(\sigma(v + z))T(v + z + \sigma(\varepsilon_{\ell m})),$$

onde $(\ell, m) \in \{(r, r+1), (r+1, r), (r, r)\}$ e $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tem uma linha nula no topo da tabela.

3.5 Módulos de Gelfand-Tsetlin singulares

Nesta seção vamos relembrar a construção dos módulos de Gelfand-Tsetlin singulares seguindo diretamente as ideias do trabalho de V. Futorny, D. Grantcharov e L.E. Ramirez em [11].

Definição 3.5.1 *Um vetor $\bar{v} \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ será chamado de 1-singular se existirem i, j, k com $1 \leq i < j \leq k \leq n - 1$ tais que $v_{ki} - v_{kj} \in \mathbb{Z}$ e $v_{rs} - v_{rt} \notin \mathbb{Z}$ para todos os demais $(r, s, t) \neq (k, i, j)$. Além disso, para cada vetor 1-singular $\bar{v}$ associamos uma tabela $T(\bar{v})$, chamada de tabela de Gelfand-Tsetlin 1-singular.*

A partir de agora fixemos a tripla (i, j, k) tal que $1 \leq i < j \leq k \leq n - 1$ e fixamos um vetor $\bar{v}$ que seja 1-singular com $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_{kj}$. Nesse caso dizemos que a correspondente tabela de Gelfand-Tsetlin $T(\bar{v})$ associada ao vetor $\bar{v}$ é uma *tabela crítica*.

Sendo $T(\bar{v})$ a tabela de Gelfand-Tsetlin associada ao vetor 1-singular $\bar{v}$, em [11] é construído um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo de Gelfand-Tsetlin 1-singular $V(T(\bar{v}))$ e as ações explícitas das fórmulas de Gelfand-Tsetlin são fornecidas para os geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ assim como para os geradores Γ . Nesta seção vamos relembrar os principais detalhes dessa construção.

A partir desse ponto representaremos por τ o elemento $(\tau[n], \dots, \tau[2], \tau[1])$ de G tal que $\tau[k]$ é a transposição (i, j) e todos os outros $\tau[t]$ são iguais a identidade (perceba que k é exatamente a linha onde ocorre a singularidade da tabela). Em [11], os autores introduziram formalmente um novo tipo de tabela, denotada por $\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$ para todo $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sujeita a relação $\mathcal{DT}(\bar{v} + w) + \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w)) \equiv 0$ a qual chamaram de *tabela Gelfand-Tsetlin derivada* associada a w .

Como as funções γ_{rs} definidas em (3.2) são polinômios simétricos nas entradas da tabela $T(\bar{v})$, segue que $\gamma_{rs}(\bar{v} + w) = \gamma_{rs}(\bar{v} + \tau(w))$ para todo $1 \leq s \leq r \leq n$ e por isso identificamos as tabelas $T(\bar{v} + w)$ e $T(\bar{v} + \tau(w))$, expressamos esse fato dizendo que elas satisfazem a relação $T(\bar{v} + w) - T(\bar{v} + \tau(w)) \equiv 0$, ou ainda $T(\bar{v} + w) \equiv T(\bar{v} + \tau(w))$.

Definição 3.5.2 *Seja $V(T(\bar{v}))$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto de tabelas (regulares e derivadas) $\{T(\bar{v} + w), \mathcal{DT}(\bar{v} + w) \mid w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}\}$, sujeitas às relações*

$$T(\bar{v} + w) = T(\bar{v} + \tau(w)) \text{ e } \mathcal{DT}(\bar{v} + w) + \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w)) = 0.$$

Fixemos uma base para $V(T(\bar{v}))$ como sendo o conjunto $\{Tab(w) : w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}\}$, onde

$$Tab(w) := \begin{cases} T(\bar{v} + w), & \text{se } w_{ki} - w_{kj} \leq 0 \\ \mathcal{DT}(\bar{v} + w), & \text{se } w_{ki} - w_{kj} > 0. \end{cases}$$

Para cada $w \in \mathbb{C}_{gen}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, seja $\lfloor Re(\bar{v} - w) \rfloor$ um vetor em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ cuja (r, s) -ésima componente é $\lfloor Re(\bar{v}_{rs} - w_{rs}) \rfloor$, que é a parte inteira da parte real do vetor $\bar{v}_{rs} - w_{rs}$. Definimos,

$$\mathcal{S} := \left\{ w + \lfloor Re(\bar{v} - w) \rfloor \mid w \in \mathbb{C}_{gen}^{\frac{n(n+1)}{2}} \right\}$$

e $\mathcal{V}_{gen} := \bigoplus_{v \in \mathcal{S}} V(T(v))$.

Seja $\mathcal{F}$ o espaço das funções racionais nas variáveis $v_{\ell m}$, com $1 \leq m \leq \ell \leq n$, com polos nos hiperplanos $v_{rs} - v_{rt} = 0$, e $\mathcal{F}_{ij}$ o subespaço de $\mathcal{F}$ consistindo de todas as funções que são suaves em $\overline{\mathcal{H}}$, que é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tais que $v_{tr} \neq v_{ts}$ para todas as triplas (t, r, s) , exceto para $(t, r, s) = (k, i, j)$.

Definindo $\mathcal{V}' = V(T(\bar{v})) \oplus \mathcal{V}_{gen}$ e a aplicação avaliação $ev(\bar{v}) : \mathcal{F}_{ij} \otimes \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}'$, a qual é linear e

$$fT(v + z) \mapsto f(\bar{v})T(\bar{v} + z), \quad f\mathcal{D}_{ij}(f)T(\bar{v} + z) \mapsto f(\bar{v})\mathcal{D}_{ij}(f)T(\bar{v} + z),$$

para $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $f \in \mathcal{F}_{ij}$ e $v \in \mathcal{S}$.

Finalmente, consideremos o operador linear $\mathcal{D} : \mathcal{F}_{ij} \otimes V(T(v)) \rightarrow V(T(\bar{v}))$, definida por

$$\mathcal{D}^{\bar{v}}(fT(v + z)) = \mathcal{D}^{\bar{v}}(f)T(\bar{v} + z) + f(\bar{v})\mathcal{DT}(\bar{v} + z),$$

onde $\mathcal{D}^{\bar{v}}(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{ki}} - \frac{\partial f}{\partial v_{kj}} \right) (\bar{v})$.

O seguinte lema será bastante útil para alguns cálculos que aparecerão nos próximos capítulos.

Lema 3.5.3 *Seja f uma função racional nas variáveis v_{rs} que é suave no hiperplano $v_{ki} - v_{kj} = 0$. Então,*

$$(i) \quad \mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})f) = f(\bar{v}).$$

$$(ii) \quad \text{Se } f \text{ é simétrica com respeito a } v_{ki} \text{ e } v_{kj} \text{ então, } \mathcal{D}^{\bar{v}}(f) = 0.$$

Prova:

(i) Como f suave no hiperplano $v_{ki} - v_{kj} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})f) &= \frac{1}{2} \left(f + (v_{ki} - v_{kj}) \frac{\partial f}{\partial v_{ki}} - (-f + (v_{ki} - v_{kj}) \frac{\partial f}{\partial v_{kj}} \right) (\bar{v}) \\ &= \frac{1}{2} (f(\bar{v}) + f(\bar{v})) \\ &= f(\bar{v}) \end{aligned}$$

(ii) Seja f suave e simétrica com respeito a v_{ki} e v_{kj} , e sejam $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_{kj} = x$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v_{ki}}(\bar{v}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\cdots, x+h, \cdots, x, \cdots) - f(\cdots, x, \cdots, x, \cdots)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\cdots, x, \cdots, x+h, \cdots) - f(\cdots, x, \cdots, x, \cdots)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial v_{kj}}(\bar{v}). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \mathcal{D}^{\bar{v}}(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial v_{ki}} - \frac{\partial f}{\partial v_{kj}} \right) (\bar{v}) = 0.$$

Teorema 3.5.4 (Teoremas 4.11 e 4.12 em [11]) *Se $\bar{v}$ é um vetor 1-singular em $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, então $V(T(\bar{v}))$ é um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo de Gelfand-Tsetlin 1-singular, com a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ dada por*

$$E_{rs}(T(\bar{v} + z)) = \mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})E_{rs}(T(v + z))) \quad (3.6)$$

$$E_{rs}(\mathcal{D}T(\bar{v} + z')) = \mathcal{D}^{\bar{v}}(E_{rs}(T(v + z'))), \quad (3.7)$$

Além disso, a ação dos geradores de Γ pode ser escrita explicitamente da seguinte forma:

$$c_{rs}(T(\bar{v} + z)) = \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + z) \quad (3.8)$$

$$c_{rs}(\mathcal{D}T(\bar{v} + z')) = \gamma_{rs}(\bar{v} + z')\mathcal{D}T(\bar{v} + z') + \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + z'))T(\bar{v} + z') \quad (3.9)$$

para todos $z, z' \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ com $z' \neq \tau(z')$.

Para alguns geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ a ação de $V(T(\bar{v}))$ coincide com a ação dada pelas fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin. O seguinte corolário dá algumas condições suficientes para que isso ocorra.

Corolário 3.5.5 *Seja z qualquer elemento de $\mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, então:*

(i) Para quaisquer ℓ, m tais que $k < \min\{\ell, m\}$ ou $\max\{\ell, m\} \leq k$ tem-se que

$$E_{\ell m}(T(\bar{v} + z)) = \sum_{\sigma \in \Phi_{\ell m}} e_{\ell m}(\sigma(\bar{v} + z))T(\bar{v} + z + \sigma(\varepsilon_{\ell m})).$$

(ii) A igualdade

$$E_{rs}(\mathcal{DT}(\bar{v} + z)) = \sum_{\sigma \in \Phi_{rs}} e_{rs}(\sigma(\bar{v} + z))\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \sigma(\varepsilon_{rs})),$$

ocorre se r, s satisfazem:

$$\begin{cases} k \notin \{r, r+1, \dots, s\}, & \text{se } r < s, \\ k \notin \{s, s+1, \dots, r\}, & \text{se } s < r. \end{cases}$$

Prova:

A prova desse fato está baseada nas propriedades básicas das funções racionais $e_{ij}(w)$ que foram definidas em 3.4.5.

(i) Se $k < \min\{\ell, m\}$ ou $\max\{\ell, m\} - 1 < k$ então, $e_{\ell m}(\sigma(v+z))$ é uma função suave, para qualquer $\sigma \in \Phi_{\ell m}$. Então, pelo Lema 3.5.3 segue que $\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})e_{\ell m}(\sigma(v+z))) = e_{\ell m}(\sigma(\bar{v} + z))$ e $ev(\bar{v})((v_{ki} - v_{kj})e_{\ell m}(\sigma(v+z))) = 0$. Agora, por (3.6) temos então a igualdade.

(ii) Nessas condições para r, s a função $e_{rs}(\sigma(v+z))$ é simétrica com respeito a v_{ki} e v_{kj} para qualquer $\sigma \in \Phi_{rs}$. Assim, pelo Lema 3.5.3, $\mathcal{D}^{\bar{v}}e_{rs}(\sigma(v+z)) = 0$ e então, por (3.7) temos a igualdade desejada.

Observação 3.5.6 Note que $\chi \in \text{Supp}_{GT}(V(T(\bar{v})))$ se, e somente se, existe $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tal que $\chi(c_{rs}) = \gamma_{rs}(\bar{v} + w)$ para qualquer $1 \leq s \leq r \leq n$. Nessa situação cada subespaço de Gelfand-Tsetlin $V(T(\bar{v}))(\chi)$ é gerado por $T(\bar{v} + w)$ e $\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$.

Observação 3.5.7 Como os polinômios $\gamma_{rs}(\lambda)$ com $1 \leq s \leq r \leq n$ são simétricos nas entradas de v e geram todos os polinômios simétricos, segue que $\gamma_{rs}(v) = \gamma_{rs}(v')$ para quaisquer r, s se, e somente se, $v = \sigma(v')$ para algum $\sigma \in S_n \times \dots \times S_1$. Em particular, para um vetor 1-singular $\bar{v}$, temos que $\gamma_{rs}(\bar{v} + z) = \gamma_{rs}(\bar{v} + w)$ com $1 \leq s \leq r \leq n$ se, e somente se, $w = z$ ou $w = \tau(z)$.

Para finalizar, apresentaremos mais um lema que será uma ferramenta essencial para o próximo capítulo, onde estudaremos de um modo mais detalhado como Γ age sobre o módulo $V(T(\bar{v}))$. Mostraremos no próximo capítulo que Γ “separa” tabelas num sentido que vamos deixar claro mais adiante. Essa propriedade será fundamental para a prova do principal resultado desta tese no último capítulo.

Lema 3.5.8 (Lemma 5.2 em [11]) Se $\tau(z) \neq z$ então temos as seguintes identidades em $V(T(\bar{v}))$:

$$(i) \quad (c_{k2} - \gamma_{k2}(\bar{v} + z))T(\bar{v} + z) = 0;$$

$$(ii) \quad (c_{k2} - \gamma_{k2}(\bar{v} + z))\mathcal{DT}(\bar{v} + z) = \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+z))T(\bar{v} + z) \text{ com } \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+z)) \neq 0;$$

$$(iii) \quad (c_{k2} - \gamma_{k2}(\bar{v} + z))^2\mathcal{DT}(\bar{v} + z) = 0.$$

Capítulo 4

Reticulados de Tabelas em $V(T(\bar{v}))$

Uma propriedade essencial dos módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos descritos no Teorema 3.4.2 é que, para quaisquer duas tabelas diferentes, existe um elemento γ de Γ que separa essas tabelas (ou seja, a ação de Γ tem autovalores diferentes sobre essas duas tabelas para algum gerador). Neste capítulo vamos dar uma prova detalhada deste fato para módulos 1-singulares.

4.1 A ação de Γ sobre $V(T(\bar{v}))$

Lembre que fixamos uma base $\{Tab(z) \mid z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}\}$ para $V(T(\bar{v}))$.

Para quaisquer $1 \leq s \leq r \leq n$ e $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ vamos denotar por $C_{rs}(z)$ o elemento $c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)$ de Γ .

Lema 4.1.1 *Para quaisquer $1 \leq s \leq r \leq n$, $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $\chi \in Supp_{GT}(V(T(\bar{v})))$, o subespaço $V(T(\bar{v}))(\chi)$ é $C_{rs}(z)$ -invariante.*

Prova: Pela Observação 3.5.6, qualquer subespaço $V(T(\bar{v}))(\chi)$ é gerado por $T(\bar{v} + w)$ ou $\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$ para algum $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} C_{rs}(z)T(\bar{v} + w) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z))T(\bar{v} + w) \\ &= c_{rs}T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + w) \\ &= \gamma_{rs}(\bar{v} + w)T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + w) \\ &= (\gamma_{rs}(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z))T(\bar{v} + w). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} C_{rs}(z)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z))\mathcal{DT}(\bar{v} + w) \\ &= \gamma_{rs}(\bar{v} + w)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) + \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma(\bar{v} + w))T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) \\ &= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(\bar{v} + z))T(\bar{v} + w) + (\gamma_{rs}(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z))\mathcal{DT}(\bar{v} + w). \end{aligned}$$

o que revela que o subespaço $V(T(\bar{v}))(\chi)$ é $C_{rs}(z)$ -invariante.

Agora vamos definir no conjunto das tabelas regulares e derivadas a seguinte relação binária.

Definição 4.1.2 Dados $z, w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, vamos escrever $\text{Tab}(z) \prec \text{Tab}(w)$ se, e somente se, existe $u \in U$ tal que $\text{Tab}(w)$ aparece com coeficiente não nulo na decomposição de $u \cdot \text{Tab}(z)$ como uma combinação linear de tabelas.

Lema 4.1.3 Se $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ é tal que $w \neq \tau(w)$, então $\mathcal{DT}(\bar{v} + w) \prec T(\bar{v} + w)$.

Prova: Temos que:

$$\begin{aligned} C_{k2}(w)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) &= (c_{k2}(w) - \gamma_{k2}(\bar{v} + w))\mathcal{DT}(\bar{v} + w) \\ &= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))T(\bar{v} + w). \end{aligned}$$

Como $w \neq \tau(w)$, pelo Lema 3.5.8(ii) segue que $\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w)) \neq 0$, então $\mathcal{DT}(\bar{v} + w) \prec T(\bar{v} + w)$, visto que o coeficiente da tabela $T(\bar{v} + w)$ é não nulo na decomposição (expansão) de $C_{k2}(w)\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$.

Lema 4.1.4 Sejam $z, w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tais que $w \neq z$ e $w \neq \tau(z)$. Fixe r e s tais que $\gamma_{rs}(\bar{v} + w) \neq \gamma_{rs}(\bar{v} + z)$ (tais r, s existem pela observação 3.5.7) e seja $a := \gamma_{rs}(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \neq 0$. Valem as seguintes identidades:

- (i) $C_{rs}(z)T(\bar{v} + z) = 0 = (C_{rs}(z))^2\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$.
- (ii) $C_{rs}(z)\mathcal{DT}(\bar{v} + z) = \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + z))T(\bar{v} + z)$.
- (iii) $C_{rs}(z)T(\bar{v} + w) = aT(\bar{v} + w)$
- (iv) $C_{rs}(z)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) = \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))T(\bar{v} + w) + a\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$.
- (v) $C_{rs}^2(z)T(\bar{v} + w) = a^2T(\bar{v} + w)$
- (vi) $C_{rs}^2(z)\mathcal{DT}(\bar{v} + w) = 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))T(\bar{v} + w) + a^2\mathcal{DT}(\bar{v} + w)$.

Prova: Analisemos caso a caso:

- (i) Ora, como $C_{rs}(z) = c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)$, segue que:

$$\begin{aligned} C_{rs}(z)T(\bar{v} + z) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z))T(\bar{v} + z) \\ &= c_{rs}T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + z) \\ &= \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)T(\bar{v} + z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + z) &= C_{rs}(c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\
&= C_{rs}(c_{rs} \mathcal{D}T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z)) \\
&= C_{rs}(\gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) + \mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z)) \\
&= C_{rs}(\mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) T(\bar{v} + z)) \\
&= \mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) C_{rs} T(\bar{v} + z) \\
&= \mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) . 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) Analogamente ao que fizemos no item anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
C_{rs}(z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\
&= c_{rs} \mathcal{D}T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\
&= \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) + \mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) T(\bar{v} + z) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\
&= \mathcal{D}(\gamma_{rs}(v + z)) T(\bar{v} + z).
\end{aligned}$$

(iii) Segue que:

$$\begin{aligned}
C_{rs}(z) T(\bar{v} + w) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) T(\bar{v} + w) \\
&= c_{rs} T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) T(\bar{v} + w) \\
&= \gamma_{rs}(\bar{v} + w) T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) T(\bar{v} + w) \\
&= (\gamma_{rs}(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) T(\bar{v} + w) \\
&= a T(\bar{v} + w).
\end{aligned}$$

(iv) Temos que:

$$\begin{aligned}
C_{rs}(z) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) &= (c_{rs} - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\
&= c_{rs} \mathcal{D}T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\
&= \gamma_{rs}(\bar{v} + w) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) + \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) T(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\
&= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) T(\bar{v} + w) + (\gamma_{rs}(\bar{v} + w) - \gamma_{rs}(\bar{v} + z)) \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\
&= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) T(\bar{v} + w) + a \mathcal{D}T(\bar{v} + w).
\end{aligned}$$

(v) Analogamente aos casos anteriores temos que:

$$\begin{aligned}
C_{rs}^2(z)T(\bar{v}+w) &= C_{rs}(c_{rs}-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))T(\bar{v}+w) \\
&= C_{rs}(c_{rs}T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)T(\bar{v}+w)) \\
&= C_{rs}(\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)T(\bar{v}+w)) \\
&= (\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)C_{rs}T(\bar{v}+w)) \\
&= (\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)(\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w) \\
&\quad -\gamma_{rs}(\bar{v}+z)T(\bar{v}+w)) \\
&= (\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)^2T(\bar{v}+w)) \\
&= a^2T(\bar{v}+w).
\end{aligned}$$

(vi) Finalmente,

$$\begin{aligned}
C_{rs}^2(z)\mathcal{D}T(\bar{v}+w) &= C_{rs}(c_{rs}-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= C_{rs}(c_{rs}\mathcal{D}T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)\mathcal{D}T(\bar{v}+w)) \\
&= C_{rs}(\gamma_{rs}(\bar{v}+w)\mathcal{D}T(\bar{v}+w)+\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w) \\
&\quad -\gamma_{rs}(\bar{v}+z)\mathcal{D}T(\bar{v}+w)) \\
&= C_{rs}(\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+(\gamma_{rs}(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))\mathcal{D}T(\bar{v}+w)) \\
&= C_{rs}(\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+a\mathcal{D}T(\bar{v}+w)) \\
&= (c_{rs}-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))(\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+a\mathcal{D}T(\bar{v}+w)) \\
&= c_{rs}\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+c_{rs}a\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&\quad -\gamma_{rs}(\bar{v}+z)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)a\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))c_{rs}T(\bar{v}+w)+ac_{rs}\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&\quad -\gamma_{rs}(\bar{v}+z)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+\gamma_{rs}(\bar{v}+z)a\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))\gamma_{rs}(\bar{v}+w)T(\bar{v}+w)+a\gamma_{rs}(\bar{v}+w)\mathcal{D}T(\bar{v}+w)+ \\
&\quad +a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w) \\
&\quad -\gamma_{rs}(\bar{v}+z)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z)a\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= (\gamma_{rs}(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w) \\
&\quad +a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w) \\
&\quad +(\gamma_{rs}(\bar{v}+w)-\gamma_{rs}(\bar{v}+z))a\mathcal{D}T(\bar{v}+w)\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+a^2\mathcal{D}T(\bar{v}+w) \\
&= 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))T(\bar{v}+w)+a^2\mathcal{D}T(\bar{v}+w).
\end{aligned}$$

Vamos utilizar esse lema para provar a seguinte proposição:

Proposição 4.1.5 *Sejam $z, w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tais que $w \neq z$ e $w \neq \tau(z)$. Existe $\gamma_z^w \in \Gamma$ tal que*

$$\gamma_z^w \cdot T(\bar{v} + z) = \gamma_z^w \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + z) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_z^w \cdot \text{Tab}(w) = \text{Tab}(w)$$

Prova: Temos dois casos, a saber:

Caso 1. Suponha que $\text{Tab}(w) = T(\bar{v} + w)$. Nesse caso basta tomar $\gamma_z^w = \frac{1}{a^2} C_{rs}^2(z)$, pois usando o Lema 4.1.4(i), segue que

$$\begin{aligned} \gamma_z^w \cdot T(\bar{v} + z) &= \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2 T(\bar{v} + z) \\ &= \frac{1}{a^2} C_{rs} C_{rs}(z) T(\bar{v} + z) \\ &= \frac{1}{a^2} C_{rs} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \gamma_z^w \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + z) &= \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, usando o Lema 4.1.4(v), segue que

$$\begin{aligned} \gamma_z^w \cdot \text{Tab}(w) &= \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2 T(\bar{v} + w) \\ &= \frac{1}{a^2} a^2 T(\bar{v} + w) \\ &= T(\bar{v} + w) \\ &= \text{Tab}(w). \end{aligned}$$

Caso 2. Suponha que $\text{Tab}(w) = \mathcal{D}T(\bar{v} + w)$. Nesse caso temos duas possibilidades, a saber:

- (i) $\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) = 0$. Nesse caso, pelo Lema 4.1.4(vi), temos que $(C_{rs}(z))^2 \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + w) = a^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w)$. Então, basta tomar $\gamma_z^w = \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2$, visto que, pelo caso anterior, teremos que:

$$\gamma_z^w \cdot T(\bar{v} + z) = \gamma_z^w \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + z) = 0$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \gamma_z^w \cdot \text{Tab}(w) &= \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= \frac{1}{a^2} a^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= \text{Tab}(w). \end{aligned}$$

- (ii) $\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) \neq 0$. Pelo Lema 3.5.8(ii), $\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w)) \neq 0$ e

$$\begin{cases} C_{k2}(w)T(\bar{v} + w) &= 0, \\ C_{k2}(w)\mathcal{D}T(\bar{v} + w) &= \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))T(\bar{v} + w). \end{cases}$$

Assim, aplicando $C_{k2}(w)$ na igualdade (vi), segue que:

$$\begin{aligned}
 C_{k2}(w) (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) &= C_{k2}(w) (2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))T(\bar{v} + w) + a^2\mathcal{D}T(\bar{v} + w)) \\
 &= 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))C_{k2}(w)T(\bar{v} + w) + a^2C_{k2}(w)\mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\
 &= 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) \cdot 0 + a^2\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))T(\bar{v} + w) \\
 &= a^2\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))T(\bar{v} + w).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ou seja,

$$C_{k2}(w) (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) = a^2\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))T(\bar{v} + w).$$

Como $\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w)) \neq 0$, segue que:

$$T(\bar{v} + w) = \frac{C_{k2}(w)C_{rs}^2(z)\mathcal{D}T(\bar{v} + w)}{a^2\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}. \tag{4.2}$$

Agora, substituindo a igualdade (4.2) em (vi), obtemos:

$$\begin{aligned}
 (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) &= 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))T(\bar{v} + w) + a^2\mathcal{D}T(\bar{v} + w) \Rightarrow \\
 (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) - 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))T(\bar{v} + w) &= a^2\mathcal{D}T(\bar{v} + w) \Rightarrow \\
 (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) - 2a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w)) \frac{C_{k2}(w) (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w)}{a^2\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))} &= a^2\mathcal{D}T(\bar{v} + w),
 \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) (C_{rs}(z))^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) = a^2\mathcal{D}T(\bar{v} + w). \tag{4.3}$$

Portanto, nesse caso, basta considerar $\gamma_z^w = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) (C_{rs}(z))^2$, pois

$$\begin{aligned}
 \gamma_z^w \cdot T(\bar{v} + z) &= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) (C_{rs}(z))^2 \cdot T(\bar{v} + z) \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \gamma_z^w \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + z) &= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) (C_{rs}(z))^2 \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + z) \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v + w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v + w))}\right) \cdot 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, sendo $Tab(w) = \mathcal{D}T(\bar{v} + w)$, segue que

$$\begin{aligned}\gamma_z^w \cdot Tab(w) &= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} \right) (C_{rs}(z))^2 \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= \frac{1}{a^2} a^2 \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= \mathcal{D}T(\bar{v} + w) \\ &= Tab(w).\end{aligned}$$

Resumindo, temos:

$$\gamma_z^w = \begin{cases} \frac{1}{a^2} (C_{rs}(z))^2, & \text{se } Tab(w) = T(\bar{v} + w) \text{ ou } \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w)) = 0 \\ \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{2C_{k2}(w)\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w))}{a\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} \right) (C_{rs}(z))^2, & \text{se } \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{rs}(v+w)) \neq 0. \end{cases}$$

Observação 4.1.6 Note que cada γ_z^w no lema anterior é uma combinação de produtos de elementos de Γ da forma $C_{\ell m}(w')$. Portanto, pelo Lemma 4.1.1, os subespaços de Gelfand-Tsetlin $V(T(\bar{v}))(\chi)$ são γ_z^w -invariantes.

Lema 4.1.7 Considere $T = aT(\bar{v} + w) + b\mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w))$, com $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ tal que $w \neq \tau(w)$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Então,

(i) Se $a \neq 0$, então $\gamma_1 \cdot T = T(\bar{v} + w)$ para algum $\gamma_1 \in \Gamma$.

(ii) Se $b \neq 0$, então $\gamma_2 \cdot T = \mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w))$ para algum $\gamma_2 \in \Gamma$.

Prova: Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ definidos por:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{1}{a}, & \text{se } b = 0 \\ \frac{C_{k2}(w)}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))}, & \text{se } b \neq 0 \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} \frac{1}{b}, & \text{se } a = 0 \\ \frac{1}{b} \left(1 - \frac{aC_{k2}(w)}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} \right), & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

Inicialmente percebe-se que pelo Lema 3.5.8, os denominadores de γ_1, γ_2 são não nulos e para verificar que γ_1 e γ_2 , cumprem os papéis desejados, basta apenas efetuar o cálculo direto da ação desses elementos sobre T . De fato, se $b = 0$ temos que $T := aT(\bar{v} + w) + 0 \cdot \mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w)) = aT(\bar{v} + w)$. Portanto,

$$\gamma_1 \cdot T = \frac{1}{a} aT(\bar{v} + w) = T(\bar{v} + w).$$

Se $b \neq 0$, temos que:

$$\begin{aligned}\gamma_1 \cdot T &= \frac{C_{k2}(w)}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} (aT(\bar{v} + w) + b\mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w))) \\ &= \frac{a}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} C_{k2}(w)T(\bar{v} + w) + \frac{b}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} C_{k2}(w)\mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w)) \\ &= \frac{a}{b\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} \cdot 0 + \frac{1}{\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} C_{k2}(w)\mathcal{D}T(\bar{v} + \tau(w)) \\ &= \frac{1}{\mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))} \mathcal{D}^{\bar{v}}(\gamma_{k2}(v+w))T(\bar{v} + w) \\ &= T(\bar{v} + w).\end{aligned}$$

Com um cálculo completamente análogo podemos verificar que se $b \neq 0$, então $\gamma_2 \cdot T = \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w))$.

4.2 Tabelas relacionadas

Vamos iniciar essa seção mostrando que, se duas tabelas $Tab(z)$ e $Tab(w)$ do módulo $V(T(\bar{v}))$ estão num mesmo reticulado pela ação de U (isto é, pelo menos uma pode ser obtida a partir da outra pela ação de U), então há certas propriedades que essas tabelas devem satisfazer, como revela o teorema a seguir:

Teorema 4.2.1 *Se $z, w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ são tais que $Tab(z) \prec Tab(w)$, então existe $u \in U$ tal que $u \cdot Tab(z) = Tab(w)$.*

Prova: Como $Tab(z) \prec Tab(w)$, segue que $Tab(w)$ aparece com coeficiente não nulo na decomposição (expansão) $U \cdot T(z)$, ou seja, existe $u' \in U$ tal que $u' \cdot Tab(z)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^s a_i T(\bar{v} + w_i) + b_i \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w_i)) \in V(T(\bar{v}))(\chi_0) \oplus \cdots \oplus V(T(\bar{v}))(\chi_s), \quad (4.4)$$

onde $w_i \neq w_j, \tau(w_j)$ para qualquer $i \neq j$ e $w_0 = w$ ou $w_0 = \tau(w)$, $a_0 \neq 0$ ou $b_0 \neq 0$, e χ_i é o caráter de Gelfand-Tsetlin associado com w_i . Pelo Lema 4.1.5, para cada $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, existe $\gamma_{w_j}^{w_0} \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_{w_j}^{w_0} T(\bar{v} + w_j) = \gamma_{w_j}^{w_0} \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w_j)) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{w_j}^{w_0} Tab(w_0) = Tab(w_0)$$

Então, pela Observação 4.1, aplicando $\gamma := \gamma_{w_s}^{w_0} \cdots \gamma_{w_1}^{w_0}$ em $u' \cdot Tab(z)$, temos que:

$$\gamma u' \cdot Tab(z) = \gamma_{w_s}^{w_0} \cdots \gamma_{w_1}^{w_0} \left(\sum_{i=0}^s a_i T(\bar{v} + w_i) + b_i \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w_i)) \right) \in V(T(\bar{v}))(\chi_0).$$

Portanto, $\gamma u' \cdot Tab(z) = aT(\bar{v} + w) + b\mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w))$ para certos $a, b \in \mathbb{C}$. Vamos ver a relação entre os coeficientes a , b e a_0 , b_0 .

Caso 1. Suponha $Tab(w) = T(\bar{v} + w)$. Nesse caso, para qualquer $j = 1, \dots, s$, ocorre a igualdade $\gamma_{w_j}^w T(\bar{v} + w) = T(\bar{v} + w)$ (pela construção de $\gamma_{w_j}^{w_0}$) e pela Observação 4.1, segue que $\gamma_{w_j}^w \mathcal{DT}(\bar{v} + w) = \mathcal{DT}(\bar{v} + w)$. Portanto,

$$\gamma u \cdot Tab(z) = a_0 T(\bar{v} + w) + b_0 \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w)).$$

Agora, como $a_0 \neq 0$, pelo Lema 4.1.7 existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_1 \gamma u \cdot Tab(z) = \gamma_1 (a_0 T(\bar{v} + w) + b_0 \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w))) = T(\bar{v} + w).$$

Caso 2. Suponha $Tab(w) = \mathcal{DT}(\bar{v} + w)$. Nesse caso, pela construção de $\gamma_{w_j}^{w_0}$, para qualquer $j = 1, \dots, s$, temos que $\gamma_{w_j}^w \mathcal{DT}(\bar{v} + w) = \mathcal{DT}(\bar{v} + w)$ e $\gamma_{w_j}^w T(\bar{v} + w) = \alpha_j T(\bar{v} + w)$ para algum $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$\gamma u \cdot Tab(z) = aT(\bar{v} + w) + b_0 \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w)),$$

com $a = \alpha_s \cdots \alpha_1 a_0$ e $b_0 \neq 0$. Pelo Lema 4.1.7, existe $\gamma_2 \in \Gamma$ tal que

$$\gamma_2 \gamma u \cdot Tab(z) = \gamma_2 (aT(\bar{v} + w) + b_0 \mathcal{DT}(\bar{v} + \tau(w))) = \mathcal{DT}(\bar{v} + w).$$

4.3 Relação de pré-ordem em $V(T(\bar{v}))$

Para finalizar, vamos mostrar que as ideias desenvolvidas nesse capítulo, nos permite estabelecer no conjunto das tabelas $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ uma pré-ordenação, conforme afirma a proposição a seguir:

Proposição 4.3.1 *A relação " $\prec$ " define uma pré-ordem no conjunto das tabelas $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ (i.e. $\prec$ é uma relação reflexiva e transitiva).*

Prova: A reflexibilidade é clara da definição de " $\prec$ ", visto que $Tab(w) = 1.Tab(w)$. Para a transitividade, assuma que $Tab(w_1) \prec Tab(w_2)$ e que $Tab(w_2) \prec Tab(w_3)$ para $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Pelo Teorema 4.2.1, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $u_1 Tab(w_1) = Tab(w_2)$ e $u_2 Tab(w_2) = Tab(w_3)$. Portanto, $u_2 u_1 Tab(w_1) = Tab(w_3)$. Assim, $Tab(w_1) \prec Tab(w_3)$, o que mostra a transitividade.

Nos próximos capítulos veremos que essa relação de pré-ordem sobre o conjunto $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ será uma forte ferramenta para demonstrarmos alguns resultados sobre o módulo $V(T(\bar{v}))$. Em particular, será essencial para estabelecer a irredutibilidade do módulo $V(T(\bar{v}))$.

Capítulo 5

Submódulos irredutíveis em $V(T(\bar{v}))$

O Teorema 3.4.3 fornece, para o caso genérico, uma base explícita para um submódulo irredutível de $V(T(\bar{v}))$ que contém uma dada tabela. Neste capítulo vamos apresentar um resultado semelhante no caso 1-singular e como consequência desse resultado daremos uma nova demonstração para o Teorema 4.14 em [11].

5.1 Algumas noções preliminares

Começaremos este capítulo introduzindo mais algumas definições, notações e um lema que serão ingredientes necessários para provar o principal teorema deste capítulo.

Definição 5.1.1 *Dados $z, w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, definimos a distância entre duas tabelas, $Tab(z)$ e $Tab(w)$ como sendo*

$$d(z, w) = \sum_{1 \leq s \leq r \leq n} |z_{rs} - w_{rs}|.$$

O Teorema 4.14 em [11] garante que se $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$, para quaisquer (r, s, t) , então o módulo $V(T(\bar{v}))$ é irredutível. Agora, consideremos uma tabela 1-singular, com $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_{kj}$, em que a condição $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ é satisfeita para quaisquer (r, s, t) tais que $r \geq k$. Vamos mostrar como construir um submódulo irredutível de $V(T(\bar{v}))$ que contém uma dada tabela que satisfaz essa condição. Para isso, precisamos estabelecer mais algumas definições.

No caso das tabelas genéricas, se tomarmos uma tabela $T(w) \in V(T(v))$, o Teorema 3.4.3, afirma que o conjunto $\mathcal{I}(T(w)) = \{T(w') \in \mathcal{B}(T(v)) \mid \Omega^+(Tab(w)) = \Omega^+(Tab(w'))\}$ é uma base para um $\mathfrak{gl}(n)$ -módulo irredutível contendo a tabela $T(w)$. Para construirmos um resultado análogo no caso 1-singular, faremos a seguinte definição:

Definição 5.1.2 *Seja $\bar{v} \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ um vetor 1-singular tal que $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_{kj}$. Para $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $Tab(w) = T(\bar{v} + w)$ ou $Tab(w) = \mathcal{DT}(\bar{v} + w)$, definimos*

$$\begin{aligned} \Omega_k(Tab(w)) &= \{(r, s, t) \mid r \leq k, (\bar{v}_{rs} + w_{rs}) - (\bar{v}_{r-1,t} + w_{r-1,t}) \in \mathbb{Z}\}; \\ \Omega_k^+(Tab(w)) &= \{(r, s, t) \mid r \leq k, (\bar{v}_{rs} + w_{rs}) - (\bar{v}_{r-1,t} + w_{r-1,t}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}; \\ \mathcal{I}_k(Tab(w)) &= \{Tab(w') \in \mathcal{B}(T(\bar{v})) \mid \Omega_k^+(Tab(w)) = \Omega_k^+(Tab(w'))\}. \end{aligned}$$

Lema 5.1.3 *Sejam $Tab(w'), Tab(w^*) \in \mathcal{I}_k(Tab(w))$ tabelas tais que $Tab(w') \not\prec Tab(w^*)$. Então existem i, j , com $k \leq j \leq i < n$ tais que $w'_{ij} \neq w^*_{ij}$.*

Prova: As tabelas $Tab(w'), Tab(w^*) \in \mathcal{I}_k(Tab(w))$ podem ser imaginadas como estando separadas em duas partes, a saber: a parte de cima, isto é, a parte que começa na k -ésima linha e vai até a n -ésima linha; e a parte de baixo, ou seja, a parte que inicia na linha 1 e termina na linha k . Vamos denotar as partes de baixo dessas tabelas por $Tab_k(w'), Tab_k(w^*)$. Agora, suponha que $w'_{ij} = w^*_{ij}$ para quaisquer $k \leq j \leq i < n$. Com essa suposição, as partes de cima das tabelas já estão coincidindo. Por outro lado, pelo fato de que $Tab(w'), Tab(w^*) \in \mathcal{I}_k(Tab(w))$, olhando apenas para a ação de $\mathfrak{gl}(k) \subset \mathfrak{gl}(n)$ sobre a parte de baixo das tabelas, segue pelo Teorema 3.4.3, que $Tab_k(w') \prec Tab_k(w^*)$, uma vez que o conjunto $\mathcal{I}_k(Tab(w))$ é uma base para um módulo irredutível contendo essas tabelas, o que nos permite concluir que $Tab(w') \prec Tab(w^*)$, que é uma contradição. Assim, não podemos ter $w'_{ij} = w^*_{ij}$ para quaisquer $k \leq j \leq i < n$.

5.2 Submódulos irredutíveis em $V(T(\bar{v}))$

Nesta seção vamos estabelecer o principal resultado deste capítulo e finalizar com uma nova demonstração para o Teorema 4.14 em [11], que fornece condições suficientes para a irredutibilidade do módulo $V(T(\bar{v}))$. Eis o teorema:

Teorema 5.2.1 *Seja $T(\bar{v})$ uma tabela 1-singular de Gelfand-Tsetlin tal que $\bar{v}_{ki} = \bar{v}_{kj}$ e $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$, para quaisquer (r, s, t) tais que $r \geq k$. Se $Tab(w) \in V(T(\bar{v}))$ é tal que $|\Omega_k^+(Tab(w))|$ é o maior possível, então o espaço vetorial N , gerado por $\mathcal{I}_k(Tab(w))$ é um submódulo irredutível de $V(T(\bar{v}))$.*

Prova: Inicialmente vamos provar que N é invariante pela ação de U . Para isso, mais uma vez usaremos a mesma notação $Tab_k(w)$, do Lema 5.1.3, para representar a parte de baixo da tabela $Tab(w)$. Se $Tab(w') \in U \cdot N$, temos que $|\Omega_k^+(Tab(w'))| \leq |\Omega_k^+(Tab(w))|$, visto que, por hipótese, $|\Omega_k^+(Tab(w))|$ é o maior possível.

Por outro lado, $Tab_k(w)$ é genérica, e pelo Teorema 3.4.3, temos $|\Omega_k^+(Tab_k(w'))| \geq |\Omega_k^+(Tab_k(w))|$ para qualquer $Tab(w') \in U \cdot N$. A partir das duas desigualdades que acabamos de expor, podemos concluir que $|\Omega_k^+(Tab(w'))| = |\Omega_k^+(Tab(w))|$ para toda tabela $Tab(w') \in U \cdot N$, o que revela que $\Omega_k^+(Tab(w')) = \Omega_k^+(Tab(w))$, isto é, $Tab(w') \in N$. Portanto, N é invariante pela ação de U .

Agora mostraremos a irredutibilidade de N . De fato, se N não fosse irredutível, existiriam duas tabelas $Tab(z'), Tab(w') \in N$ tais que $Tab(z') \not\prec Tab(w')$. Agora, fixando w' e escolhendo $z \in \{z' \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid Tab(z') \not\prec Tab(w')\}$ tal que $d(z, w')$ seja mínima e definindo $d := d(z, w')$, segue que, se $z^* \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ é tal que $d(z^*, w') < d$, teríamos $Tab(z^*) \prec Tab(w')$.

Ora, como $Tab(z), Tab(w') \in \mathcal{I}_k(Tab(w))$, $Tab(z) \not\prec Tab(w')$ e $d \geq 1$, pelo Lema 5.1.3, segue que $z_{rs} \neq w'_{rs}$ para pelo menos um par de valores r, s , tais que $r \geq k$.

Agora fixemos a posição r, s e assumimos (sem perda de generalidade) que $z_{rs} < w'_{rs}$. O caso em que $w'_{rs} < z_{rs}$ pode ser tratado de modo completamente análogo.

Como $z_{rs} < w'_{rs}$, segue que $d(z + \delta^{rs}, w') = d - 1 < d$. Então, $Tab(z + \delta^{rs}) \prec Tab(w')$. Portanto, como pela Proposição 4.3.1, " $\prec$ " é transitiva, deveríamos ter $Tab(z) \prec Tab(z + \delta^{rs})$. Então, o coe-

ficiente de $Tab(z + \delta^{rs})$ na expansão de $u \cdot Tab(z)$, com $u \in U$, será igual a zero.

Como as fórmulas que definem a ação de $\mathfrak{gl}(n)$ sobre $V(T(\bar{v}))$ dependem do tipo de tabela (regular ou derivada), vamos considerar e analisar os seguintes quatro casos:

	$Tab(z)$	$Tab(z + \delta^{rs})$
Caso 1	$T(\bar{v} + z)$	$T(\bar{v} + z + \delta^{rs})$
Caso 2	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})$
Caso 3	$T(\bar{v} + z)$	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})$
Caso 4	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$	$T(\bar{v} + z + \delta^{rs})$

Caso 1. O coeficiente de $T(\bar{v} + z + \delta^{rs})$ na decomposição de $E_{r,r+1}T(\bar{v} + z)$ é dado por $\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})e_{r,r+1}(\sigma_s(v + z)))$ onde σ_s é a transposição $(1, s)$ na linha r e a identidade nas demais linhas. Mas ocorre que

$$\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})e_{r,r+1}(\sigma_s(v + z))) = e_{r,r+1}(\sigma_s(\bar{v} + z))$$

pois, nesse caso, a função $e_{r,r+1}(\sigma_s(v + z))$ é suave.

Ora, como o numerador de $e_{r,r+1}(\sigma_s(\bar{v} + z))$ é um produto de diferenças do tipo $(\bar{v}_{rs} + z_{rs}) - (\bar{v}_{r+1,t} + z_{r+1,t})$, necessariamente temos que $(\bar{v}_{rs} + z_{rs}) - (\bar{v}_{r+1,t} + z_{r+1,t}) = 0$ para algum t , isto é: $\bar{v}_{r+1,t} - \bar{v}_{r,s} \in \mathbb{Z}$, com $r \geq k$, o que é uma contradição.

Caso 2. O coeficiente de $\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})$ na decomposição $E_{r,r+1}\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$ é dado por

$$e_{r,r+1}(\sigma_s(\bar{v} + z)).$$

Assim, de modo completamente análogo ao primeiro caso, obtemos que $\bar{v}_{r+1,t} - \bar{v}_{r,s} \in \mathbb{Z}$ para algum t , com $r \geq k$, o que é uma contradição.

Caso 3. A única possibilidade para que tenhamos

$$Tab(z) = T(\bar{v} + z) \text{ e } Tab(z + \delta^{rs}) = \mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})$$

é que $z_{ki} = z_{kj}$ e $(r, s) \in \{(k, i), (k, j)\}$. Ora, como o coeficiente de $\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{ks})$ é igual a $ev(\bar{v})((v_{ki} - v_{kj})e_{k,k+1}(\sigma_s(v + z)))$ e a função racional $e_{k,k+1}(\sigma_s(v + z))$ possui uma singularidade no hiperplano $v_{ki} - v_{kj} = 0$, segue que $ev(\bar{v})((v_{ki} - v_{kj})e_{k,k+1}(\sigma_s(v + z))) = 0$ se, e somente se,

$$\prod_{j=1}^{k+1} ((\bar{v} + z)_{ks} - (\bar{v} + z)_{k+1,j}) = 0,$$

o que implica que alguma diferença $\bar{v}_{ks} - \bar{v}_{k+1,t} \in \mathbb{Z}$, com $r \geq k$, o que é uma contradição.

Caso 4. Nesse caso, temos que:

$$\begin{aligned} E_{r,r+1}(\mathcal{DT}(\bar{v} + z)) &= \sum_{\sigma \in \Phi_{r,r+1}} \mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{r,r+1}(\sigma(v + z))T(\bar{v} + z + \sigma(\varepsilon_{r,r+1}))) \\ &+ \sum_{\sigma \in \Phi_{r,r+1}} e_{r,r+1}(\sigma(\bar{v} + z))\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \sigma(\varepsilon_{r,r+1})). \end{aligned}$$

- (i) Se $e_{r,r+1}(\sigma_s(\bar{v} + z)) = 0$ então, como no Caso 1, segue que $\bar{v}_{r+1,t} - \bar{v}_{r,s} \in \mathbb{Z}$ para algum t , com $r \geq k$, o que é uma contradição.
- (ii) Se $e_{r,r+1}(\sigma_s(\bar{v} + z)) \neq 0$ então, $\mathcal{DT}(\bar{v} + z) \prec \mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})$. Por outro lado, sabemos que

$$c_{k2}(\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{rs})) \prec T(\bar{v} + z + \delta^{rs}).$$

Portanto, o coeficiente de $T(\bar{v} + z + \delta^{rs})$ na decomposição (expansão) de $c_{k2}E_{r,r+1}\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$ é diferente de zero. Assim, temos que $\mathcal{DT}(\bar{v} + z) \prec T(\bar{v} + z + \delta^{rs})$, o que contradiz a hipótese.

Diante do que foi exposto acima, temos que a condição $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \in \mathbb{Z}$ é satisfeita para algum trio (r, s, t) , nesse caso, com $r \geq k$, o que é uma contradição. Assim, concluímos que o módulo N é irredutível.

Corolário 5.2.2 *O módulo $V(T(\bar{v}))$, descrito no enunciado do teorema anterior, tem comprimento finito.*

Prova: De fato, pelo Teorema 5.2.1, tomando $Tab(w) \in V(T(\bar{v}))$ tal que $m := |\Omega_k^+(Tab(w))|$ seja o maior possível, temos o submódulo irredutível $N = \text{span}_{\mathbb{C}} I_k(Tab(w))$. Fazendo o quociente de $V(T(\bar{v}))$ por N , restarão apenas tabelas $Tab(w')$ tais que $|\Omega_k^+(Tab(w'))| \leq m - 1$. Note que existe apenas um número finito de tabelas $Tab(w'_i)$, com $i = 1, \dots, s$, com $|\Omega_k^+(Tab(w'_i))| = m - 1$ tais que qualquer outra tabela $Tab(u)$ desse quociente com $|\Omega^+(Tab(u))| = m - 1$, tem-se que:

$$Tab(u) \in I_k(Tab(w'_1)) \cup \dots \cup I_k(Tab(w'_s)).$$

Na etapa seguinte, fazemos um novo quociente de modo a eliminar todas as tabelas $Tab(w')$ tais que $|\Omega_k^+(Tab(w'))| = m - 1$. Nesse novo quociente, existirão apenas tabelas $Tab(w'')$ tais que $|\Omega_k^+(Tab(w''))| \leq m - 2$. Mais uma vez existe um número finito de tabelas $Tab(w''_r)$, com $r = 1, \dots, t$, com $|\Omega_k^+(Tab(w''_r))| = m - 2$ tais que para qualquer outra tabela $Tab(u')$ desse quociente com $|\Omega^+(Tab(u'))| = m - 2$, tem-se que $Tab(u') \in I_k(Tab(w''_1)) \cup \dots \cup I_k(Tab(w''_t))$. Repetindo a mesma construção do caso anterior, passaremos na etapa seguinte às tabelas $Tab(w''')$ tais que $|\Omega_k^+(Tab(w'''))| \leq m - 3$ e assim sucessivamente. Dessa forma, após um número finito de etapas todas as tabelas do módulo original $V(T(\bar{v}))$ serão aniquiladas pelos sucessivos quocientes, o que revela que o módulo $V(T(\bar{v}))$, descrito no enunciado do teorema anterior, tem comprimento finito.

Para finalizar esse capítulo, vamos ressaltar o fato que o teorema que acabamos de provar fornece uma demonstração alternativa para o Teorema 4.14 em [11], cuja recíproca é o principal resultado a ser estabelecido nessa tese.

Teorema 5.2.3 (Teorema 4.14 em [11]) *O módulo $V(T(\bar{v}))$ é irredutível quando $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq t < r \leq n$ e $1 \leq s \leq r$.*

Em [11], os autores fornecem uma prova do teorema acima. Note que, o nosso Teorema 5.2.1 dá uma demonstração alternativa para o Teorema 5.2.3, que exhibe condições suficientes sobre as entradas de $\bar{v}$ para que o módulo $V(T(\bar{v}))$ seja irredutível. Com efeito, se $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq t < r \leq n$ e $1 \leq s \leq r$, isso implica que $\Omega_k^+(w) = \emptyset$ para todo $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Assim $0 = \max |\Omega_k^+(w)|$, o que implica que $V(T(\bar{v}))$ é irredutível.

No próximo capítulo vamos finalmente mostrar o nosso último teorema, que estabelece que a condição $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq t < r \leq n$ e $1 \leq s \leq r$, também é necessária para garantir a irredutibilidade do módulo $V(T(\bar{v}))$.

Capítulo 6

A irreducibilidade de $V(T(\bar{v}))$

Neste capítulo vamos provar o nosso resultado final. Vamos dar uma prova que as condições exibidas no Teorema 5.2.3 também são necessárias para a irreducibilidade do módulo $V(T(\bar{v}))$. Para iniciar o caminho na direção da prova serão necessárias algumas definições e lemas que faremos logo a seguir.

6.1 Alguns resultados auxiliares

Antes de abordarmos o principal problema a ser tratado nesta tese (que é a Conjectura 1.1.1) precisamos de uma série de definições e resultados auxiliares que serão necessários para a prova desse resultado.

Inspirado no caso genérico, aqui no caso 1-singular, faremos a seguinte definição:

Definição 6.1.1 Para qualquer $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ definimos

$$\Omega^+(Tab(w)) := \{(r, s, t) \mid (\bar{v}_{rs} + w_{rs}) - (\bar{v}_{r-1,t} + w_{r-1,t}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

No caso dos módulos genéricos, $Tab(z) \prec Tab(w)$ implica que $|\Omega^+(Tab(z))| \leq |\Omega^+(Tab(w))|$ (veja o Teorema 3.4.3(i)). Entretanto, para os módulos singulares, pode ocorrer a igualdade $|\Omega^+(Tab(w))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$, como confirma o exemplo a seguir:

Exemplo 6.1.2 Para o caso em que $n = 3$, se considerarmos $\bar{v} = (a, b, c, x, x, x)$ tal que $\{a - x, b - x, c - x\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ e $w = (0, 0, 0)$, então $|\Omega^+(Tab(z))| = 2$ enquanto que $E_{32}Tab(z) = Tab(z - \delta^{21})$ e $|\Omega^+(Tab(z - \delta^{21}))| = 1$.

Definição 6.1.3 Sejam $Tab(z)$ e $Tab(w)$ duas tabelas em $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ e $g \in \mathfrak{gl}(n)$. Vamos escrever $Tab(z) \prec_g Tab(w)$ para indicar que a tabela $Tab(w)$ aparece com coeficiente não nulo na expansão $g \cdot Tab(z)$.

A próxima proposição mostra que $|\Omega^+(Tab(z))| - 1$ é o mínimo valor para a cardinalidade de $\Omega^+(Tab(w))$ para qualquer $Tab(w) \in U \cdot Tab(z)$.

Vamos escrever $Tab(z) \prec_g Tab(w)$ para algum $g \in \mathfrak{gl}(n)$ quando a tabela $Tab(w)$ aparece com coeficiente não nulo na decomposição $g \cdot Tab(z)$.

Proposição 6.1.4 *Sejam $Tab(z)$ e $Tab(w)$ duas tabelas em $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ tais que $Tab(w) \in U \cdot Tab(z)$. Então $|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1$.*

Para provar essa proposição, vamos inicialmente provar que o resultado proposto é verdadeiro quando $Tab(z) \prec_g Tab(w)$ para algum $g \in \mathfrak{gl}(n)$ da forma $E_{r,r+1}$ ou $E_{r+1,r}$. Para isso enunciamos o seguinte lema:

Lema 6.1.5 *Sejam $Tab(z)$ e $Tab(w)$ tabelas em $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ tais que $Tab(z) \prec_g Tab(w)$ para algum $g \in \mathfrak{gl}(n)$ da forma $E_{r,r+1}$ ou $E_{r+1,r}$ com $1 \leq r \leq n-1$. Então $|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1$.*

Prova: Vamos analisar a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ da forma $E_{r,r+1}$ ou $E_{r+1,r}$ em todas as tabelas $Tab(z) \in V(T(\bar{v}))$ tais que $|\Omega^+(Tab(w))| \leq |\Omega^+(Tab(z))| - 1$ e $Tab(z) \prec_g Tab(w)$. Analisaremos caso a caso e vamos verificar que o coeficiente da tabela $Tab(w)$ é igual a zero quando ocorrer $|\Omega^+(Tab(w))| \leq |\Omega^+(Tab(z))| - 2$. Para começar, vamos apresentar uma lista de todas as possíveis tabelas $Tab(z)$ e $Tab(w)$ tais que ocorra a igualdade $|\Omega^+(Tab(w))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$ e o coeficiente de $Tab(w)$ não é zero. A lista completa é a seguinte:

1. $\mathcal{D} \begin{pmatrix} x & x+a \\ & x \end{pmatrix} \prec_{E_{k-1,k}} \begin{pmatrix} x & x+a \\ & x+1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}_{<0};$
2. $\mathcal{D} \begin{pmatrix} & x \\ x & x+a \end{pmatrix} \prec_{E_{k-1,k}} \begin{pmatrix} & x \\ x+a & x+1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}_{<0};$
3. $\mathcal{D} \begin{pmatrix} x & x+a \\ & x \end{pmatrix} \prec_{E_{k+1,k}} \begin{pmatrix} x-1 & x+a \\ & x \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{Z}_{<0};$
4. $\begin{pmatrix} & x \\ x & x \end{pmatrix} \prec_{E_{k-1,k}} \begin{pmatrix} & x \\ x & x+1 \end{pmatrix};$
5. $\begin{pmatrix} x & x \\ & x \end{pmatrix} \prec_{E_{k+1,k}} \begin{pmatrix} x-1 & x \\ & x \end{pmatrix}.$

As configurações acima representam a parte de cada uma das tabelas com parte das linhas k e $k-1$ ou k e $k+1$ (linha k é a linha onde ocorre a singularidade $\bar{v}_{ki} - \bar{v}_{kj} \in \mathbb{Z}$) e a presença de um $\mathcal{D}$ antes de uma tabela indica que aquela tabela é do tipo derivada

Antes de qualquer outra coisa, pelo Corolário 3.5.5 é suficiente considerar $r \in \{k, k-1\}$. De fato, nos demais casos a ação é dada pelas fórmulas clássicas de Gelfand-Tsetlin formulas, como no caso genérico, no qual temos que $|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))|$ (veja o Teorema 3.4.3(i)).

Inicialmente vamos assumir que $g = E_{r,r+1}$ (o outro caso é completamente análogo). A ação de $E_{r,r+1}$ nos elementos da base de $V(T(\bar{v}))$ é dada por:

$$E_{r,r+1}T(\bar{v} + w) = \sum_{\sigma} \mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ri} - v_{rj})e_{r,r+1}(\sigma(v + w)))T(\bar{v} + w + \sigma(\delta^{r1})) + \sum_{\sigma} ((v_{ri} - v_{rj})e_{r,r+1}(\sigma(v + w))) (\bar{v})\mathcal{DT}(\bar{v} + w + \sigma(\delta^{r1})), \quad (6.1)$$

$$E_{r,r+1}\mathcal{DT}(\bar{v} + w) = \sum_{\sigma} \mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{r,r+1}(\sigma(v + w)))T(\bar{v} + w + \sigma(\delta^{r1})) + \sum_{\sigma} e_{r,r+1}(\sigma(\bar{v} + w))\mathcal{DT}(\bar{v} + w + \sigma(\delta^{r1})). \quad (6.2)$$

Dependendo de $Tab(z)$ e $Tab(z + \delta^{r1})$ serem tabelas regulares ou tabelas derivadas, teremos que analisar diferentes tipos de coeficientes, como ilustra resumidamente a seguinte tabela:

Tipo	$Tab(z)$	$Tab(z + \delta^{r1})$	Coeficiente de $Tab(z + \delta^{r1})$
(a)	$T(\bar{v} + z)$	$T(\bar{v} + z + \delta^{r1})$	$\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})e_{r,r+1}(v + z))$
(b)	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{r1})$	$e_{r,r+1}(\bar{v} + z)$
(c)	$T(\bar{v} + z)$	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z + \delta^{r1})$	$((v_{ki} - v_{kj})e_{r,r+1}(v + z))(\bar{v})$
(d)	$\mathcal{DT}(\bar{v} + z)$	$T(\bar{v} + z + \delta^{r1})$	$\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{r,r+1}(v + z))$

- (i) Considere as tabelas $Tab(z)$ tais que $(\bar{v} + z)_{ki} = (\bar{v} + z)_{k-1,t} = x$ e $(\bar{v} + z)_{kj} = x + a$, com $a \in \mathbb{Z}$. Vamos representar uma parte da tabela $Tab(z)$ por (a linha em que aparecem duas variáveis iguais a x é a k -ésima linha da tabela $Tab(z)$).

$$Tab(z) = \begin{pmatrix} x & x + a \\ & x \end{pmatrix}.$$

Essa tabela pode ser regular (se $a \geq 0$) ou derivada (se $a < 0$). Vamos analisar esses dois casos separadamente.

Quando $E_{k-1,k}$ age nessa tabela obtemos a seguinte tabela:

$$Tab(z + \delta^{k-1,t}) = \begin{pmatrix} x & x + a \\ x + 1 & \end{pmatrix}.$$

Note que

$$|\Omega^+(Tab(z + \delta^{k-1,t}))| = \begin{cases} |\Omega^+(Tab(z))| - 2, & \text{se } a = 0 \\ |\Omega^+(Tab(z))| - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $a \geq 0$, a tabela $Tab(z)$ é regular. Nesse caso, vamos analisar os coeficientes dos tipos (a) e (c). Relembrando que,

$$e_{k-1,k}(v + z) = - \frac{\prod_{t=1}^k ((v + z)_{k-1,1} - (v + z)_{kt})}{\prod_{t \neq 1}^{k-1} ((v + z)_{k-1,1} - (v + z)_{k-1,t})}. \quad (6.3)$$

Nesse caso, $e_{k-1,k}(v + z)$ é uma função suave (porque a singularidade está na k -ésima linha e as diferenças que aparecem no denominador são diferenças entre os elementos da $(k-1)$ -ésima

linha). Assim, pelo Lema 3.5.3, segue que:

- $\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ri} - v_{rj})e_{k-1,k}(v+z)) = e_{k-1,k}(\bar{v}+z)$, e como nesse caso temos que ocorre a relação $(\bar{v}+z)_{kj} = (\bar{v}+z)_{k-1,t}$, segue que $e_{k-1,k}(\bar{v}+z) = 0$.
- Temos também que $((v_{ki} - v_{kj})e_{k-1,k}(v+z))(\bar{v}) = 0$.

Se $a < 0$, a tabela $Tab(z)$ é uma tabela derivada. Nesse caso, precisamos analisar os coeficientes dos tipos (b) e (d). Agora os coeficientes da tabela $Tab(z + \delta^{k-1,t})$ são $e_{k-1,k}(\bar{v}+z)$ e $\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{k-1,k}(v+z))$. Nesse caso, temos que:

- $e_{k-1,k}(\bar{v}+z) = 0$, visto que no produtório do numerador dessa função racional aparece a diferença $(\bar{v}+z)_{kj} - (\bar{v}+z)_{k-1,t}$ que é igual a zero, nesse caso.
- Para o coeficiente $\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{k-1,k}(\bar{v}+z))$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{k-1,k}(\bar{v}+z)) &= \mathcal{D}^{\bar{v}}(-(v_{k-1,t} - (v_{ki} + a))(v_{k-1,t} - v_{ki})\varphi(v)) \\ &= -\frac{1}{2}\varphi(\bar{v})a,\end{aligned}$$

onde $\varphi(v)$ é uma função racional das entradas do vetor v a qual não depende das entradas v_{ki} e v_{kj} . Além disso, $\varphi(\bar{v}) \neq 0$. Como $a \neq 0$, nesse caso, segue que: $\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{k-1,k}(\bar{v}+z)) \neq 0$.

- (ii) Agora vamos considerar uma tabela $Tab(z)$ tal que $k \neq n-1$, $(\bar{v}+z)_{k+1,t} = (\bar{v}+z)_{ki} = x$ e $(\bar{v}+z)_{kj} = x+a$, com $a \in \mathbb{Z}$. Uma representação de parte dessa tabela é:

$$Tab(z) = \begin{pmatrix} & x & \\ x & & x+a \end{pmatrix}.$$

Essa tabela pode ser regular ou derivada dependendo do valor de a . Vamos analisar esses dois casos.

Quando $E_{k,k+1}$ age nessa tabela, obtemos a tabela

$$Tab(z + \delta^{k,t}) = \begin{pmatrix} & x & \\ x+1 & & x+a \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, temos que $|\Omega^+Tab(z + \delta^{k,t})| = |\Omega^+Tab(z)| - 1$. Inicialmente vamos assumir que essa tabela é regular (o que ocorre se $a \geq 0$) e vamos analisar os coeficientes dos tipos (a) e (c). Para isso, lembrando que

$$e_{k,k+1}(v+z) = -\frac{\prod_{t=1}^{k+1} ((v+z)_{k,1} - (v+z)_{k+1,t})}{\prod_{t \neq 1}^k ((v+z)_{k,1} - (v+z)_{kt})}. \quad (6.4)$$

Se $a > 0$, $e_{k,k+1}(v+z)$ é uma função suave, então pelo Lema 3.5.3 segue que

- $\mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ri} - v_{rj})e_{k,k+1}(v+z)) = e_{k,k+1}(\bar{v}+z)$, e como temos que ocorre a relação $(\bar{v}+z)_{k+1,t} = (\bar{v}+z)_{k-1,1}$ então, $e_{k,k+1}(\bar{v}+z) = 0$.
- Além disso, $((v_{ki} - v_{kj})e_{k,k+1}(v+z))(\bar{v}) = 0$.

Por outro lado, se $a = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} ((v_{k1} - v_{kj})e_{k-1,k}(v+z))(\bar{v}) &= \left(\frac{\prod_{t=1}^k ((v+z)_{k-1,1} - (v+z)_{kt})}{\prod_{t \neq 1,j}^{k-1} ((v+z)_{k-1,1} - (v+z)_{k-1,t})} \right) (\bar{v}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\bar{v}}((v_{ki} - v_{kj})e_{k-1,k}(v+z)) &= \mathcal{D}^{\bar{v}} \left(\frac{\prod_{t=1}^k ((v+z)_{k-1,1} - (v+z)_{kt})}{\prod_{t \neq 1,j}^{k-1} ((v+z)_{k-1,1} - (v+z)_{k-1,t})} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, se $a < 0$ a tabela $Tab(\bar{v} + z)$ é uma tabela derivada. Nesse caso, vamos analisar os coeficientes dos tipos (b) e (d). Nessas circunstâncias, usando a fórmula (6.4), segue que:

- $e_{k-1,k}(\bar{v} + z) = 0$, visto que no numerador dessa função racional aparece a diferença $(\bar{v} + z)_{k1} - (\bar{v} + z)_{k+1,1}$, que é igual a zero nesse caso.
- Novamente utilizando a fórmula (6.4), segue que $\mathcal{D}^{\bar{v}}(e_{k-1,k}(\bar{v} + z)) \neq 0$.

Continuando com essa análise, caso a caso, identificamos todas as possíveis tabelas $Tab(w) \in U \cdot Tab(z)$ tais que $|\Omega^+(Tab(w))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$ entre as tabelas que foram descritas no início da prova do Lema 6.1.5 (casos (1)-(5)). Além disso, para todas as tabelas $Tab(w) \in V(T(\bar{V}))$ tais que $|\Omega^+(Tab(w))| \leq |\Omega^+(Tab(z))| - 2$, o correspondente coeficiente na expansão $g \cdot Tab(z)$, tal que $g \in \{E_{r,r+1}, E_{r+1,r}\}$, é igual a zero.

O lema a seguir mostra que, para cada caso descrito no Lemma 6.1.5, onde $Tab(z) \prec Tab(w)$ e $|\Omega^+(Tab(w))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$, (casos (1)-(5)), a ação dos elementos da base de $\mathfrak{gl}(n)$ sobre $Tab(w)$ irá gerar tabelas $Tab(w')$ tais que $|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|$, de modo mais explícito: $Tab(w) \prec_g Tab(w')$ para algum $g \in \mathfrak{gl}(n)$ da forma $E_{r,r+1}$ ou $E_{r+1,r}$ implica que $|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|$.

Lema 6.1.6 *Seja $Tab(w)$ uma tabela tal que $Tab(z) \prec Tab(w)$ e $|\Omega^+(Tab(w))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$ para algum $Tab(z)$. Se $Tab(w) \prec_g Tab(w')$ para algum $g \in \mathfrak{gl}(n)$ da forma $E_{r,r+1}$ ou $E_{r+1,r}$, então $|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|$.*

Prova: Pelo Lema 6.1.5 a lista de todas possíveis tabelas $Tab(w)$ satisfazendo a condição imposta no enunciado é dada por:

1. $\begin{pmatrix} x & & x+a \\ & x+1 & \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} & x & \\ x+a & & x+1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x-1 & & x+a \\ & x & \end{pmatrix}$ com $a \in \mathbb{Z}_{<0}$.
2. $\begin{pmatrix} & x & \\ x & & x+1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x-1 & & x \\ & x & \end{pmatrix}$.

Agora, para cada $Tab(w)$ como antes, vamos construir os subconjuntos $W(Tab(w))$ e $W^*(Tab(w))$, de $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$ tais que:

- (i) Se $Tab(w) \in W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ e $Tab(w') \in W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$, podemos garantir que $|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|$.

(ii) O conjunto $W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ é $\mathfrak{gl}(n)$ -invariante.

A construção anterior será suficiente para finalizar a prova. De fato, se $Tab(w) \prec_g Tab(w')$ com $g \in \mathfrak{gl}(n)$, então $Tab(w') \in W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ (pela condição (ii)). Assim, temos a seguinte desigualdade: $|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|$ (pela condição (i)).

Agora, considere $Tab(w)$ como sendo da forma $\begin{pmatrix} x & x+a \\ & x+1 \end{pmatrix}$. Defina os seguintes subconjuntos de $\mathcal{B}(T(\bar{v}))$:

$$W(Tab(w)) = \left\{ \begin{pmatrix} x+b & & x+a+c \\ & x+1+d & \end{pmatrix} \mid b-1-d < 0 \text{ e } b+a-1-d < 0 \right\};$$

$$W^*(Tab(w)) = \left\{ \begin{pmatrix} x+b & & x+a+c \\ & x+1+d & \end{pmatrix} \mid b-1-d \geq 0 \text{ ou } b+a-1-d \geq 0 \right\}.$$

Note que, as tabelas em $W(Tab(w))$ ou $W^*(Tab(w))$ podem ser regulares ou derivadas. O conjunto $W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ é $\mathfrak{gl}(n)$ -invariante. Além disso, temos que $Tab(w') \in W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ satisfaz a condição

$$|\Omega^+(Tab(w'))| \geq |\Omega^+(Tab(w))|.$$

De fato, se $Tab(w') \in W(Tab(w))$ segue que $|\Omega^+(Tab(w'))| = |\Omega^+(Tab(w))|$ e, por outro lado, se $Tab(w') \in W^*(Tab(w))$ segue que $|\Omega^+(Tab(w'))| > |\Omega^+(Tab(w))|$.

A construção de $W(Tab(w))$ e $W^*(Tab(w))$ para os demais casos é completamente análoga.

Prova da Proposição 6.1.4. Finalmente vamos mostrar que se $Tab(w) \in E_1 \cdots E_t \cdot Tab(z)$, onde $E_s \in \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$, com $s = 1, \dots, t$, então

$$|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1, \quad (6.5)$$

e por linearidade, o resultado segue para qualquer elemento de $u \in U(\mathfrak{gl}(n))$.

Prova: Sejam $Tab(z) \in V(T(\bar{v}))$ e $E_1 \cdots E_t \in U$. Vamos utilizar indução sobre t . De fato, se $t = 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema 6.1.5. Agora, suponha que o resultado que desejamos seja verdadeiro para o inteiro s tal que $1 \leq s \leq t-1$. Vamos provar que o resultado é verdadeiro para t . Com efeito, como

$$E_1 E_2 \cdots E_{t-1} E_t \cdot Tab(z) = E_1 E_2 \cdots E_{t-1} (E_t \cdot Tab(z)),$$

vamos considerar dois casos, a saber:

Caso 1. Se $Tab(z)$ não é uma das tabelas descritas no Lema 6.1.5 (casos (1)-(5)), segue que

$$E_t \cdot Tab(z) = \sum_i \alpha_i Tab(w_i), \quad \text{onde } |\Omega^+(Tab(w_i))| \geq |\Omega^+(Tab(z))|.$$

Nesse caso, pela hipótese da indução, a ação de $E_1 E_2 \cdots E_{t-1}$ sobre $(E_t \cdot Tab(w))$ faz surgir uma combinação linear de tabelas $Tab(w''_i)$ tais que $|\Omega^+(Tab(w''_i))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1$, o que prova o resultado nesse caso.

Caso 2. Agora vamos assumir que $Tab(z)$ é uma tabela das que são descritas no Lema 6.1.5

(casos (1)-(5)). Nesse caso, segue que:

$$E_t \cdot Tab(z) = \sum_i \alpha_i Tab(w_i) + \sum_i \beta_i Tab(w'_i),$$

onde $|\Omega^+(Tab(w_i))| \geq |\Omega^+(Tab(z))|$ e $|\Omega^+(Tab(w'_i))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1$. Assim, pela hipótese da indução, segue que quando $E_1 E_2 \cdots E_{t-1}$ age sobre as tabelas $Tab(w_i)$ obtemos uma combinação linear de novas tabelas $Tab(w''_i)$ tais que $|\Omega^+(Tab(w''_i))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1$. Por outro lado, quando $E_1 \cdots E_{t-1}$ age sobre a tabela $Tab(w'_i)$, obtemos uma combinação linear de tabelas pertencentes ao conjunto $W(Tab(w)) \cup W^*(Tab(w))$ (que foi descrito no Lema 6.1.6). Assim, nesse caso nós temos que na decomposição $E_1 \cdots E_{t-1} \cdot Tab(w'_i)$ aparecerão tabelas $Tab(w^*_i)$ tais que

$$|\Omega^+(Tab(w^*_i))| = |\Omega^+(Tab(z))| - 1,$$

o que prova o resultado no segundo caso.

Corolário 6.1.7 *Se $z \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ é tal que $|\Omega^+(Tab(z))| \geq 1$ então, $U \cdot Tab(z)$ é um submódulo próprio de $V(T(\bar{v}))$.*

Prova: De fato, se $U \cdot Tab(z)$ não fosse uma submódulo próprio de $V(T(\bar{v}))$, para toda tabela $Tab(w) \in V(T(\bar{v}))$ teríamos que $Tab(z) \prec Tab(w)$. Mas, pela Proposição 6.1.4, teríamos que

$$|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1.$$

Temos então dois casos a considerar:

Caso 1. Se $|\Omega^+(Tab(z))| \geq 2$, segue que:

$$|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| - 1 \geq 2 - 1 = 1.$$

Mas, isso é uma contradição, pois nós sempre podemos encontrar tabelas $T(w) \in V(T(\bar{v}))$ tais que $|\Omega^+(Tab(w))| = 0$.

Caso 2. Se $|\Omega^+(Tab(z))| = 1$, segue que a única diferença inteira $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t}$ não está próxima a linha crítica i.e., numa linha que não é vizinha a linha onde ocorre a singularidade) pois se essa diferença inteira estivesse próxima a linha crítica teríamos $|\Omega^+(Tab(z))| \geq 2$. Por outro lado, longe da linha crítica tudo funciona como no caso genérico, onde ocorre a seguinte desigualdade:

$$|\Omega^+(Tab(w))| \geq |\Omega^+(Tab(z))| = 1.$$

Como no caso anterior, isso é uma contradição.

6.2 O resultado principal

Finalizaremos este capítulo enunciando e dando uma prova para o nosso principal resultado, estabelecido em [16], que é a confirmação da Conjectura 1.1.1, ou seja, o teorema a seguir:

Teorema 6.2.1 *Se $V(T(\bar{v}))$ é irredutível, então $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq s \leq r \leq n$ e $1 \leq t \leq r-1$.*

Depois dos resultados desenvolvidos na seção anterior, podemos dar uma prova curta para esse teorema, visto que a dificuldade da sua prova está concentrada na dificuldade de provar a Proposição 6.1.4. Finalmente vamos à prova:

Prova: Suponha, por absurdo, que $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \in \mathbb{Z}$ para algum $1 \leq t < r \leq n, 1 \leq s \leq r$ e escolha $w \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tal que $|\Omega^+(Tab(w))|$ é máximo (nesse caso, $|\Omega^+(Tab(w))| \geq 1$). Considerando o submódulo N de $V(T(\bar{v}))$ gerado por $Tab(w)$, segue, pelo Corolário 6.1.7, que o submódulo N é próprio, o que é uma contradição com a hipótese de que o módulo $V(T(\bar{v}))$ é irredutível. Portanto, concluímos que $\bar{v}_{rs} - \bar{v}_{r-1,t} \notin \mathbb{Z}$ para quaisquer $1 \leq s \leq r \leq n$ e $1 \leq t \leq r-1$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Block. The irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$ and of the weyl algebra. *Advances in Mathematics*, 39 no. 1:69–110, 1981.
- [2] A. Cylke, V. Futorny, and S. Ovsienko. On the support of irreducible weight modules. *Preprint*, 011:1–34, 1996.
- [3] I. Dimitrov, O. Mathieu, and I. Penkov. On the structure of weight modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(6):2857–2869, 2000.
- [4] Y. Drozd, V. Futorny, and S. Ovsienko. Gelfand-Tsetlin modules over lie algebra $\mathfrak{sl}(3)$. *Contemp. Math.*, 131:23–29, 1992.
- [5] Y. Drozd, V. Futorny, and S. Ovsienko. Harish-chandra subalgebras and Gelfand-Zetlin modules. *Math. and Phys. Sci.*, 424:72–89, 1994.
- [6] N. Early, V. Mazorchuck, and E. Vishnyakova. Canonical Gelfand-Tsetlin modules over orthogonal Gelfand-Tsetlin algebras. *Preprint - arXiv:1709.01553*, 2017.
- [7] K. Erdmann and M. Wildon. *Introduction to Lie Algebras*. Springer-Verlag, first edition, 2006.
- [8] S. Fernando. Lie algebra modules with finite dimensional weight spaces I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322:757–781, 1990.
- [9] V. Futorny. The weight representations of semisimple finite dimensional Lie algebras. *Ph.D. Thesis*, Kiev University, 1987.
- [10] V. Futorny, D. Grantcharov, and L. E. Ramirez. Irreducible generic Gelfand-Tsetlin modules of $\mathfrak{gl}(n)$. *Symmetry, Integrability and Geometry - Methods and Applications*, 018:1–13, 2016.
- [11] V. Futorny, D. Grantcharov, and L. E. Ramirez. Singular Gelfand-Tsetlin modules for $\mathfrak{gl}(n)$. *Adv. Math.*, 290:453–482, 2016.
- [12] V. Futorny, D. Grantcharov, and L. E. Ramirez. Classification of irreducible Gelfand-Tsetlin modules for $\mathfrak{sl}(3)$. *In progress*, 2017.
- [13] V. Futorny, D. Grantcharov, and L. E. Ramirez. Drinfeld category and the classification of singular Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{gl}(n)$ -modules. *International Mathematics Research Notices*, 00:1–16, 2017.
- [14] V. Futorny and S. Ovsienko. Fibers of characters in Gelfand-Tsetlin categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366:4173–4208, 2014.

- [15] I. Gelfand and M. Tsetlin. Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.s.)*, 71:825–828, 1950.
- [16] C. A. Gomes and R. L. E. Families of irreducible singular Gelfand-Tsetlin modules of $\mathfrak{gl}(n)$. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 17B10:1–17, 2018.
- [17] J. E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. 1972.
- [18] A. Kirilov Jr. *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, first edition, 2008.
- [19] A. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhauser, second edition, 2005.
- [20] O. Mathieu. Classification of irreducible weight modules. *Ann. Inst. Fourier*, 50:537–592, 2000.
- [21] L. E. Ramirez and P. Zadunaisky. Gelfand-Tsetlin modules over $\mathfrak{gl}(n)$ with arbitrary characters. *Preprint*, arXiv:1705.10731, 2017.
- [22] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp., 2^a edition, 2010.
- [23] E. Vishnyakova. A geometric approach to 1-singular Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{gl}(n)$ -modules. *Preprint - arXiv:1704.00170*, 2017.
- [24] E. Vishnyakova. A geometric approach to p -singular Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{gl}(n)$ -modules. *Preprint - arXiv:1705.05793*, 2017.
- [25] P. Zadunaisky. A new way to construct 1-singular Gelfand-Tsetlin module. *Preprint - arXiv:1703.07264*, 2017.
- [26] D. Zhelobenko. *Compact Lie groups and their representations*. Transl. Math. Monographs, AMS - 40, first edition, 1974.