Extensões conexas e espaços de Banach $C(K)$ com poucos operadores

André Santoleri Villa Barbeiro

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu
apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, abril de 2018

Extensões conexas
e espaços de Banach $C(K)$
com poucos operadores

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio de Padua Franco Filho - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos - UFBA
- Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann - UNIFESP
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

"Senhor, fazei-me instrumento de vossa paz.
Onde houver ódio, que eu leve o amor.
Onde houver ofensa, que eu leve o perdão.
Onde houver discórdia, que eu leve a união.
Onde houver dúvida, que eu leve a fé.
Onde houver erro, que eu leve a verdade.
Onde houver desespero, que eu leve a esperança.
Onde houver tristeza, que eu leve a alegria.
Onde houver trevas, que eu leve a luz.
Ó Mestre, fazei que eu procure mais,
consolar que ser consolado,
compreender que ser compreendido,
amar que ser amado.
Pois é dando, que se recebe.
É perdoando, que se é perdoado.
E é morrendo que se vive para a vida eterna."

Oração de São Francisco.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo o que Ele tem feito na minha vida.

Agradeço à minha família, por todo amor, carinho e atenção que me deram desde sempre. Ao meu pai, Alexandre, que sempre me mostrou a importância do trabalho e do esforço. À minha mãe, Áurea, que sempre me amou de modo incondicional. E à minha irmã, Adriana, que sempre esteve ao meu lado nos momentos alegres e tristes da minha vida.

Agradeço aos meus amigos Erick e Sidney, que desde os tempos de escola encontraram morada no meu coração.

Agradeço aos professores do Colégio Jardim São Paulo, que me mostraram a importância do estudo e da disciplina.

Agradeço ao meu orientador, por toda dedicação e paciência ao longo destes 4 anos.

Agradeço a todos os professores do IME que de algum modo participaram da minha formação como matemático. De maneira especial, agradeço ao professor e amigo Antonio de Padua Franco Filho.

Agradeço pelos amigos que conheci nestes 8 anos de convívio no IME. De maneira especial, Willian, Helder, Renan, Johnny, Clayton e Vini.

Agradeço ao Movimento Regnum Christi e a congregação dos Legionários de Cristo, por me mostrarem o que realmente é essencial na vida. De modo especial, agradeço aos Padres Alfonso e Sérgio pela amizade e pelo carinho.

Agradeço ao ECYD por ter me trazido tantas crianças e adolescentes que me mostravam, a cada dia, a beleza da vida e da simplicidade.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

BARBEIRO, A. S. V. **Extensões conexas e espaços de Banach $C(K)$ com poucos operadores**. 2018. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Este trabalho tem dois objetivos principais. Primeiramente, analisamos a preservação de conexidade na extensão de espaços compactos por funções contínuas, técnica utilizada por Koszmider para obter $C(K)$ indecomponível com poucos operadores. Mostramos que para todo compacto metrizável K existe um desconexo L que é obtido a partir de K por uma quantidade finita de extensões por funções contínuas. Em seguida, enfatizamos a construção de espaços de Banach da forma $C(K)$ com poucos operadores, com a propriedade de que $C(L)$ tem poucos operadores, para todo fechado $L \subseteq K$. Assumindo o princípio $\diamondsuit$ construímos uma família $(K_\xi)_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ de espaços conexos e hereditariamente Koszmider tais que todo operador de $C(K_\xi)$ em $C(K_\eta)$ é fracamente compacto, para $\xi \neq \eta$. Em particular, $(C(K_\xi))_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ é uma família de espaços de Banach indecomponíveis e dois a dois essencialmente incomparáveis, e cada espaço K_ξ responde positivamente ao problema de Efimov. Apresentamos também um método de construção via *forcing* de um espaço compacto e conexo K hereditariamente fracamente Koszmider.

Palavras-chave: Espaço $C(K)$, espaço indecomponível, extensão por funções contínuas, *forcing*, poucos operadores, espaço hereditariamente Koszmider, espaços essencialmente incomparáveis, espaço hereditariamente fracamente Koszmider, problema de Efimov, princípio diamante.

Abstract

BARBEIRO, A. S. V. **Connected extensions and Banach spaces $C(K)$ with few operators**. 2018. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

This work has two main objectives. First, we analyze the preservation of connectedness in the extension of compact spaces by continuous functions, a technique used by Koszmider to obtain an indecomposable Banach space $C(K)$ with few operators. We show that for any metrizable compactum K there exists a disconnected L which is obtained from K by finitely many extensions by continuous functions. Next, we emphasize the construction of Banach spaces of the form $C(K)$ with the property that $C(L)$ has few operators, for every closed $L \subseteq K$. Assuming the $\diamondsuit$ principle we construct a family $(K_\xi)_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ of connected and hereditarily Koszmider spaces such that every operator from $C(K_\xi)$ into $C(K_\eta)$ is weakly compact, for $\xi \neq \eta$. In particular, $(C(K_\xi))_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ is a family of indecomposable and pairwise essentially incomparable Banach spaces, and each space K_ξ responds positively to the Efimov's problem. We also present a method of construction using forcing of a compact and connected hereditarily weakly Koszmider space K.

Keywords: $C(K)$ space, indecomposable space, extension by continuous functions, forcing, few operators, hereditarily Koszmider space, essentially incomparable spaces, hereditarily weakly Koszmider space, Efimov's problem, diamond principle.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	o conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$	o conjunto dos números racionais
ω	o conjunto dos naturais e o primeiro ordinal infinito enumerável
ω_1	o menor cardinal não enumerável
ω_2	o segundo cardinal não enumerável
2^ω	o cardinal do contínuo
$\diamondsuit$	o princípio diamante
CH	a hipótese do contínuo, isto é, $\omega_1 = 2^\omega$
GCH	a hipótese generalizada do contínuo, isto é, $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ para todo ordinal α
$C(K)$	o espaço de Banach das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ com a norma supremo
$M(K)$	o espaço de Banach das medidas de Radon sobre K com a norma da variação
$\|\|x\|\|$	a norma de x
X^*	o espaço dual do espaço de Banach X
T^*	o operador adjunto do operador T
l_∞	o espaço de Banach das sequências limitadas em $\mathbb{R}$ com a norma supremo
c_0	o espaço de Banach das sequências reais convergentes a 0, com a norma supremo
$X \oplus Y$	a soma direta de X e Y
$\beta\mathbb{N}$	o compactificado de Stone-Čech dos naturais
$Ker(f)$	o núcleo da função f
$Im(f)$	a imagem da função f
$dom(f)$	o domínio da função f
$supp(f)$	o suporte da função f, isto é, $\overline{\{x \in dom(f) : f(x) \neq 0\}}$
$Gr(f)$	o gráfico da função f, isto é, $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$
ZFC	o sistema de axiomas de Zermelo-Frankel com Axioma da Escolha
$p \Vdash$	a condição p força que

Introdução

Um espaço de Banach de dimensão infinita X é dito *decomponível* se, e somente se, existem subespaços fechados Y e Z, ambos de dimensão infinita, tais que $X = Y \oplus Z$. Se X não for decomponível, diremos que X é *indecomponível*. Durante muito tempo, a seguinte questão concernente à teoria dos espaços de Banach ficou em aberto: será que todo espaço de Banach de dimensão infinita é decomponível?

Em 1993, Gowers e Maurey responderam negativamente a esta pergunta, construindo, em [GM1], o primeiro exemplo de um espaço de Banach indecomponível X_{GM}. Mais do que apenas indecomponível, o espaço X_{GM} é *hereditariamente indecomponível*, i.e., todos os seus subespaços fechados de dimensão infinita são indecomponíveis.

No exemplo construído por Gowers e Maurey, todo operador linear e contínuo em X_{GM} pode ser escrito da forma $\gamma I + S$, onde γ é um número real, $I : X_{GM} \longrightarrow X_{GM}$ é o operador identidade e $S : X_{GM} \longrightarrow X_{GM}$ é um operador estritamente singular (i.e., S é um operador linear e contínuo tal que, para todo subespaço de dimensão infinita $Z \subseteq X_{GM}$, a restrição $f|_Z : Z \longrightarrow X_{GM}$ não é um isomorfismo sobre a imagem).

O primeiro exemplo de um espaço de Banach indecomponível da forma $C(K)$ foi construído por Piotr Koszmider em [Ko2]. Em [Ko2], Koszmider mostra que, se K é um compacto Hausdorff tal que todo operador linear e contínuo em $C(K)$ é multiplicador fraco, então $C(K)$ não é isomorfo a qualquer um dos seus subespaços próprios e nem a qualquer um dos seus quocientes próprios. Em particular, $C(K)$ não é isomorfo a qualquer um dos seus hiperplanos. Além disso, se $K \setminus F$ é conexo para todo subconjunto finito $F \subseteq K$, então $C(K)$ é indecomponível.

Ainda em [Ko2], assumindo a Hipótese do Contínuo (CH) Koszmider constrói o primeiro exemplo de um espaço de Banach $C(K)$ indecomponível em que todo operador linear e contínuo é multiplicação fraca. Utilizando a Representação de Wallman (uma generalização, para reticulados, do Teorema da Representação de Stone) Plebanek, em [Pl], constrói dentro de ZFC um espaço de Banach $C(K)$ indecomponível em que todo operador linear e contínuo é multiplicação fraca.

Como todo espaço de Banach da forma $C(K)$ de dimensão infinita possui uma cópia de c_0 como subespaço segue que, diferentemente do espaço X_{GM}, $C(K)$ não pode ser hereditariamente indecomponível. O espaço construído em [Ko2] é, portanto, um exemplo natural de espaço de Banach indecomponível que não é hereditariamente indecomponível. Em [Fer], Ferenczi mostra que o espaço X_{GM}, além de hereditariamente indecomponível, é *quociente hereditariamente indecomponível*, isto é, todos os seus quocientes são hereditariamente indecomponíveis. Por um resultado de [LM], temos que espaços de Banach da forma $C(K)$ possuem c_0 complementado ou l_2 como quociente e, portanto, um espaço da forma $C(K)$ também não pode ser quociente hereditariamente indecomponível.

Em [Pe2], Pełczyński mostra que um operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é fracamente compacto se, e somente se, é estritamente singular. Em [Ko2], Koszmider prova que, diferentemente do espaço X_{GM} construído por Gowers e Maurey, não existem espaços de Banach da forma $C(K)$ em que todo operador linear e contínuo possa ser escrito como $\gamma I + S$, onde $\gamma \in \mathbb{R}$, $I : C(K) \longrightarrow C(K)$ é o operador identidade e $S : C(K) \longrightarrow C(K)$ é um operador estritamente singular (equivalentemente, fracamente compacto). Também em [Ko2], mostra-se que todo espaço de Banach $C(K)$ possui um operador linear e contínuo que não é da forma $gI + C$, onde $g \in C(K)$ e $C : C(K) \longrightarrow C(K)$ é um operador compacto. Logo, no contexto dos espaços de Banach da forma $C(K)$, o máximo que podemos esperar sobre poucos operadores é que todo operador linear e contínuo em $C(K)$ seja multiplicação fraca.

Assumindo diamante ($\diamondsuit$), um princípio combinatório mais forte que CH, Rogério Fajardo, em [Fa2], constrói um compacto Hausdorff e conexo K tal que, para todo fechado $L \subseteq K$, $C(L)$ possui poucos operadores, no sentido de que todo operador linear e contínuo em C(L) é multiplicação fraca. Em particular, o espaço K construído por Fajardo responde positivamente ao *problema de Efimov*, sobre a existência de um espaço compacto que não contém cópia de $\beta\mathbb{N}$ e nem sequências convergentes não triviais. Utilizando a técnica do *forcing*, Fajardo mostra, em [Fa1], que é consistente com ZFC que existe um espaço de Banach da forma $C(K)$ indecomponível de densidade $\omega_1 < 2^\omega$ tal que todo operador linear e contínuo em $C(K)$ é multiplicação fraca. Também utilizando a técnica do *forcing*, Koszmider, em [Ko5], mostra que é consistente com ZFC que existe um espaço de Banach $C(K)$ indecomponível de densidade $2^{2^\omega} = \omega_2 > \omega_1 = 2^\omega$ tal que todo operador linear e contínuo em $C(K)$ é multiplicação fraca. Recentemente, Koszmider, Shelah e Świetek mostraram, em [Ko6], que não existe limitante superior para a densidade de um espaço de Banach indecomponível. Os autores provam, assumindo a Hipótese Generalizada do Continuum (GCH), que para todo cardinal κ existe um espaço de Banach indecomponível da forma $C(K)$ com poucos operadores de densidade maior que κ. Tal espaço não possui subespaço complementado de dimensão infinita com densidade menor que κ, o que também fornece um resultado mais forte que o obtido em [Ko3].

Dizemos que dois espaços de Banach são totalmente incomparáveis se nenhum subespaço de dimensão infinita de um espaço for isomorfo a um subespaço do outro. Sabemos que $C(K)$ de dimensão infinita possui uma cópia de c_0 como subespaço e, portanto, espaços de Banach da forma $C(K)$ não podem ser totalmente incomparáveis. Dois espaços de Banach X e Y são ditos *essencialmente incomparáveis* se para todos os operadores $T : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow X$ o operador $I - S \circ T : X \longrightarrow X$ é um operador de Fredholm. Fajardo, em [Fa3], constrói em ZFC uma família de tamanho 2^ω de espaços de Banach indecomponíveis da forma $C(K)$ com poucos operadores que são dois a dois essencialmente incomparáveis. Além disso, assumindo o princípio diamante ($\diamondsuit$), Fajardo obtém uma tal família de tamanho 2^{2^ω}.

Para obter $C(K)$ indecomponível com poucos operadores, Koszmider, em [Ko2], utiliza a técnica de *extensões por funções contínuas*. A condição de ser uma *extensão forte* foi utilizada para garantir a conexidade da extensão, conforme mostrado em [Ko2]. No capítulo 2 da presente tese, abordamos a seguinte pergunta: para preservarmos a conexidade, é realmente necessário exigirmos que a extensão seja forte? Será que uma extensão sempre preserva conexidade, seja ela forte ou não? Provamos que extensões de compactos métricos não necessariamente preservam conexidade. Com efeito, obtivemos os três resultados a seguir:

i) Existe uma extensão desconexa de um compacto conexo e metrizável K;

ii) Para todo compacto metrizável K existe um desconexo L que é obtido a partir de K por uma quantidade finita de extensões por funções contínuas;

iii) Se K é compacto conexo, localmente conexo e metrizável, então toda extensão de K por funções contínuas é conexa (mas pode não ser localmente conexa).

Também no capítulo 2, mostramos a relação que existe entre adicionar supremos em álgebras de Boole e a técnica de extensões por funções contínuas.

No capítulo 3, unindo as técnicas presentes em [Fa2] e [Fa3] construímos, assumindo $\diamondsuit$, uma família $(K_\xi)_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ de espaços conexos e *hereditariamente Koszmider* tais que $C(K_\xi)$ e $C(K_\eta)$ são essencialmente incomparáveis, para todo $\xi \neq \eta$. Como espaços hereditariamente Koszmider não possuem cópia de $\beta\mathbb{N}$ nem sequências convergentes não trivias, cada K_ξ construído responde positivamente ao problema de Efimov. No capítulo 4, apresentamos um método alternativo de construção via *forcing* de espaços $C(K)$ com poucos operadores com a propriedade de que $C(L)$ também tem poucos operadores, para todo fechado $L \subseteq K$. Em particular, o compacto K obtido via *forcing* também responde positivamente ao problema de Efimov. No final do capítulo 4 apresentamos um resultado envolvendo a densidade dos espaços de Banach $C(K)$ com poucos operadores. Por fim, no capítulo 1 tratamos de algumas definições e de alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo de toda a tese.

Todos os espaços considerados ao longo da tese são Hausdorff.

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

O objetivo principal deste capítulo é apresentar algumas definições e alguns resultados que serão utilizados ao longo de toda a tese. A Seção 1.1 relembra as definições de reticulado e álgebras de Boole, bem como o importante teorema da representação de Stone, que associa biunivocamente álgebras de Boole com espaços booleanos. A seção 1.2 apresenta as medidas de Radon e o espaço $M(K)$. A seção 1.3 apresenta definições e resultados que aparecem em [Ko2], [Ko4], [Ko5] e [Ko6]. Por fim, a seção 1.4 apresenta as noções básicas e alguns resultados fundamentais envolvendo o método do *forcing*.

1.1 Álgebras de Boole e a Representação de Stone

Definição 1.1. Um conjunto R, parcialmente ordenado por $\leq$, é um *reticulado* se, para todo $x, y \in R$, existirem $inf\{x, y\}$ (indicado por $x \wedge y$) e $sup\{x, y\}$ (indicado por $x \vee y$). Diremos que o reticulado é *completo* se todo subconjunto de R tem supremo e ínfimo.

Definição 1.2. Um reticulado R é *distributivo* se, para todo $x, y, z \in R$, valerem as igualdades

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

e

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Definição 1.3. Um reticulado R é *complementado* se satisfizer as duas condições a seguir:

(a) Existem dois elementos distintos $0 \in R$ e $1 \in R$ tais que, para todo $x \in R$, temos $0 \leq x \leq 1$;

(b) Para todo $x \in R$ existe $-x \in R$, chamado o *complemento* de x, tal que $x \vee (-x) = 1$ e $x \wedge (-x) = 0$.

Definição 1.4. Uma *álgebra de Boole* é um reticulado distributivo e complementado. Diremos que a álgebra de Boole é *completa* se o reticulado associado à ela for completo.

Definição 1.5. Seja M um subconjunto de uma álgebra de Boole A. Então

$$\langle M \rangle = \bigcap \{B \subseteq A : B \text{ é subálgebra de } A \text{ e } M \subseteq B\}$$

é a subálgebra *gerada* por M.

Definição 1.6. Dadas duas álgebras de Boole A e B, um *homomorfismo* entre A e B é uma função $h : A \longrightarrow B$ satisfazendo

$$h(0) = 0, \ h(1) = 1$$

e, para todo $x, y \in A$,

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \ h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \ h(-x) = -h(x).$$

Um *isomorfismo* é um homomorfismo bijetor. Denotamos por $A \cong B$ quando A é isomorfo a B.

Dada uma álgebra de Boole A, existe álgebra de Boole completa B tal que A é subálgebra densa de B. A álgebra B é única a menos de isomorfismo (veja [Kop]) e se chama o *completamento* de A.

Definição 1.7. Seja A uma álgebra de Boole. Dizemos que $F \subseteq A$ é um *filtro em A* se

- $1 \in F$;
- $0 \notin F$;
- Se $x, y \in F$ então $x \wedge y \in F$;
- Para todo $x, y \in A$, se $x \in F$ e $x \leq y$, então $y \in F$.

Um *ultrafiltro em A* é um filtro maximal, isto é, um filtro que não está contido propriamente em nenhum outro filtro.

Definição 1.8. Seja A uma álgebra de Boole. Dizemos que $F \subseteq A$ tem a *propriedade da intersecção finita* (p.i.f.) se para todos $x_1, ..., x_n \in F$ temos $x_1 \wedge ... \wedge x_n \neq 0$.

Lema 1.9. *Seja A uma álgebra de Boole.*

(a) *Se $F \subseteq A$ tem a propriedade da intersecção finita então existe um ultrafiltro que contém F;*

(b) *Um filtro F em A é um ultrafiltro se e somente se para todo $a \in A$, ou $a \in F$ ou $-a \in F$;*

(c) *Dados $a, b \in A$ distintos, existe um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em A tal que $a \in \mathcal{U}$ e $b \notin \mathcal{U}$, ou $b \in \mathcal{U}$ e $a \notin \mathcal{U}$.*

Definição 1.10. Seja X um espaço topológico. Diremos que X é *localmente conexo* se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças abertas e conexas.

Definição 1.11. Seja X um espaço topológico. Diremos que X é *0-dimensional* se X possuir uma base topológica formada por subconjuntos abertos-fechados de X.

Definição 1.12. Seja X um espaço topológico. Diremos que X é *totalmente desconexo* se os únicos subconjuntos conexos não-vazios de X são os unitários.

Teorema 1.13. ([Wa], 2.4) *Um espaço topológico compacto é 0-dimensional se, e somente se, é totalmente desconexo.*

Definição 1.14. O *peso* de um espaço topológico X, $\omega(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que existe uma base topológica de X de cardinalidade menor ou igual a κ.

Definição 1.15. Dado K um espaço topológico compacto 0-dimensional, definimos $Clop(K)$ a álgebra de Boole dos abertos-fechados de K. Dada uma álgebra de Boole A, definimos o *espaço de Stone de A*, denotado $S(A)$, como o conjunto dos ultrafiltros em A munido da topologia gerada por $\{a^* : a \in A\}$, onde $a^* = \{u \in S(A) : a \in u\}$.

Observação. Também usaremos a notação $[a]$ para indicar o conjunto de todos os ultrafiltros que contêm a.

Teorema 1.16 (Stone)**.** *Seja A uma álgebra de Boole. Então $A \cong Clop(S(A))$ pelo isomorfismo $h : A \longrightarrow Clop(S(A))$ dado por $h(a) = a^*$. Além disso, para todo espaço topológico compacto 0-dimensional K, temos K homeomorfo a $S(Clop(K))$.*

Da Definição 1.15 segue imediatamente o seguinte Lema:

Lema 1.17. *Se A é uma álgebra de Boole então $\omega(S(A)) = |A|$.*

1.2 O espaço $C(K)$ e seu dual $M(K)$

Os *borelianos* sobre um espaço topológico X são os elementos da σ-álgebra gerada pelos abertos de X; isto é, o menor subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ que contém os abertos de X e é fechado por uniões enumeráveis e complementos.

Notação 1.18. Dado um espaço topológico X, denotamos por $Bor(X)$ a σ-álgebra dos borelianos de X.

Definição 1.19. Seja K um espaço topológico compacto. Uma *medida boreliana* μ sobre K é uma função $\mu : Bor(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- Para toda família $(B_n)_{n\in\omega}$ de borelianos de K dois a dois disjuntos, tem-se que
$$\mu(\bigcup_{n\in\omega} B_n) = \Sigma_{n\in\omega}\mu(B_n).$$

Definição 1.20. Seja K um espaço topológico compacto. Uma medida boreliana μ sobre K é dita *positiva* se $\mu(B) \geq 0$, para todo $B \in Bor(K)$.

Definição 1.21. Dados um espaço topológico compacto K e uma medida boreliana μ sobre K, definimos $|\mu|$ por

$$|\mu|(B) = sup\{\Sigma_{1\leq i\leq n}|\mu(B_i)| : \ B_i \in Bor(K),\ B_i \subseteq B,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ \text{se } i \neq j\},$$

onde $B \in Bor(K)$.

Temos que $|\mu|$ está bem definida como função de $Bor(K)$ em $\mathbb{R}$ e é uma medida positiva (veja [Ru]). Chamamos a medida $|\mu|$ de *variação de* μ.

Definição 1.22. Sejam K um espaço topológico compacto e μ uma medida boreliana sobre K. Dizemos que μ é *regular* se para todo $B \in Bor(K)$ e todo $\varepsilon > 0$ existem F fechado e G aberto tais que $F \subseteq B \subseteq G$ e $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$.

Uma *medida de Radon* sobre um espaço topológico compacto K é simplesmente uma medida boreliana regular sobre K. De agora em diante, convencionaremos que o termo *medida* será usado no sentido de *medida de Radon*. Segue imediatamente da definição de regularidade que, se μ é regular, então $|\mu|$ também é regular.

O próximo lema nos será bastante útil ao longo da tese. Ele nos diz que uma medida sobre um espaço compacto K está unicamente determinada por seus valores em uma base de K fechada por intersecções finitas.

Lema 1.23. *Sejam K um espaço topológico compacto e B uma base de K fechada por intersecções finitas. Se μ e ν são medidas sobre K satisfazendo $\mu|_B = \nu|_B$, então $\mu = \nu$.*

Demonstração. Se E_1 e E_2 são borelianos em K, satisfazendo $E_1 \subseteq E_2$, a σ-aditividade de μ e ν nos dizem que $\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1)$ e também que $\nu(E_2 \setminus E_1) = \nu(E_2) - \nu(E_1)$. Provaremos agora que, se V é uma união finita de elementos de B, então $\mu(V) = \nu(V)$. Para isso, mostraremos por indução em n que, se $X \subseteq B$ e $|X| = n$, então $\mu(\cup X) = \nu(\cup X)$. Com efeito, o passo inicial $n = 1$ é garantido pela hipótese do Lema. Suponha agora que μ e ν coincidem para todas as uniões de no máximo n elementos de B e defina $V = \cup\{V_i : 1 \leq i \leq n+1\}$, onde $V_i \in B$. Note que

$$(*) \qquad V = (V_{n+1} \setminus \bigcup_{1\leq i\leq n} (V_{n+1} \cap V_i)) \cup (\bigcup_{1\leq i\leq n} V_i).$$

Como B é fechado por intersecções finitas, temos $V_{n+1} \cap V_i \in B$. Sejam agora $V' = \bigcup_{1\leq i\leq n}(V_{n+1} \cap V_i)$ e $V'' = \bigcup_{1\leq i\leq n}(V_i)$. Usando $(*)$, a hipótese indutiva e o fato de que μ e ν concidem em B, segue que

$$\mu(V) = \mu(V_{n+1}) - \mu(V') + \mu(V'') = \nu(V_{n+1}) - \nu(V') + \nu(V'') = \nu(V).$$

Considere $E \in Bor(K)$ qualquer. Usando a regularidade de μ e ν obtemos, para cada natural $n > 0$, fechados F_n^1 e F_n^2 contidos em E e abertos G_n^1 e G_n^2 contendo E tais que $|\mu|(G_n^1 \setminus F_n^1) < \frac{1}{4n}$ e $|\nu|(G_n^2 \setminus F_n^2) < \frac{1}{4n}$. Definindo $G_n = G_n^1 \cap G_n^2$ e $F_n = F_n^1 \cup F_n^2$, temos $F_n \subseteq E \subseteq G_n$, $|\mu|(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{4n}$ e $|\nu|(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{4n}$. Observe que F_n é compacto pois K é compacto e F_n é um fechado de K. Logo, existe W_n união finita de abertos pertencentes a B tal que $F_n \subseteq W_n \subseteq G_n$. Dessa forma, temos

$$|\mu(E) - \mu(W_n)| \leq |\mu(E) - \mu(F_n)| + |\mu(W_n) - \mu(F_n)| =$$

$$|\mu(E \setminus F_n)| + |\mu(W_n \setminus F_n)| \leq |\mu|(E \setminus F_n) + |\mu|(W_n \setminus F_n) < \frac{1}{2n}.$$

Analogamente, segue também que $|\nu(E) - \nu(W_n)| < \frac{1}{2n}$. Logo, como vale

$\mu(W_n) = \nu(W_n)$, concluímos que

$$|\mu(E) - \nu(E)| \leq |\mu(E) - \mu(W_n)| + |\nu(E) - \nu(W_n)| < \frac{1}{n},$$

para todo $n > 0$. Fazendo $n \to \infty$, segue que $\mu(E) = \nu(E)$. □

Definição 1.24. Sejam I um conjunto e $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos. O *produto de Tychonoff* dessa família é o espaço topológico $X = \Pi_{i \in I} X_i$ cuja topologia é a gerada pela base

$$\{\Pi_{i \in I} U_i : U_i \text{ é aberto em } X_i, \text{ para todo } i \in I, \text{ e } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ é finito}\}.$$

Definição 1.25. Seja $\Pi_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ um produto de espaços topológicos, para κ um ordinal limite. Sejam Y_α subespaços de $\Pi_{\beta<\alpha} X_\beta$ tais que $\pi_\beta[Y_\alpha] = Y_\beta$, para $\beta < \alpha$. Definimos o *limite inverso* de $(Y_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ por

$$\varprojlim (Y_\alpha)_{\alpha<\kappa} = \{(y_\alpha)_{\alpha<\kappa} \in \Pi_{\alpha<\kappa} X_\alpha : \forall \alpha < \kappa ((y_\beta)_{\beta<\alpha} \in Y_\alpha)\}.$$

Limite inverso preserva compacidade (veja [Eng], 2.5.1).

Definimos um *aberto elementar* de $\Pi_{i \in I} X_i$ como sendo um aberto da forma $\Pi_{i \in I} U_i$, onde cada U_i é um aberto básico (para uma base fixada) de X_i e $U_i = X_i$ para todos, exceto finitos, $i \in I$. Além disso, se $Y \subseteq \Pi_{i \in I} X_i$ é um subespaço, chamamos de *aberto elementar* de Y um aberto elementar de $\Pi_{i \in I} X_i$ intersectado com Y. Observe que, da definição de topologia produto e da definição de subespaço, segue que os abertos elementares formam uma base de abertos para Y, fechada por intersecções finitas. No caso em que tivermos $X_i = [0, 1]$, consideraremos como abertos básicos os intervalos abertos de $[0, 1]$ com extremos racionais.

Definição 1.26. Dado um cardinal α, denotaremos por $\mathcal{B}_\alpha$ a base de abertos elementares de extremos racionais do espaço $[0, 1]^\alpha$.

Observe que pelo Lema 1.23 podemos identificar medidas de Radon sobre $[0, 1]^\alpha$ com funções de $\mathcal{B}_\alpha$ em $\mathbb{R}$.

Notação 1.27. Seja K um espaço topológico compacto. Denotamos por $M(K)$ o conjunto das medidas de Radon sobre K e, para cada $\mu \in M(K)$, denotamos por $||\mu|| = |\mu|(K)$.

O *Teorema da Representação de Riesz* nos permite identificar o espaço dual $C(K)^*$ de $C(K)$ com o espaço $M(K)$ das medidas de Radon sobre K, munido da norma $||\mu|| = |\mu|(K)$. Faremos essa identificação ao longo de toda a tese e consideraremos sempre as topologias fraca e fraca* de $M(K)$. Sugerimos [Fa], [Se] ou [Di] para referências.

O próximo Teorema, também conhecido como o Lema de Rosenthal, será bastante importante ao longo da tese.

Teorema 1.28 (Rosenthal)**.** ([Di], pag. 82) *Seja $(\mu_n)_{n\in\omega}$ uma sequência limitada em $M(K)$. Para todo $\varepsilon > 0$ e toda sequência $(A_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos borelianos de K dois a dois disjuntos, existe uma sequência estritamente crescente de inteiros $(k_n)_{n\in\omega}$ tal que*

$$|\mu_{k_n}|(\bigcup_{n\neq j}(A_{k_j})) < \varepsilon,$$

para todo $n \in \omega$.

1.3 A noção de poucos operadores em $C(K)$

A noção de poucos operadores aparece em [Ko2] durante a construção de um espaço de Banach $C(K)$ indecomponível. Também em [Pl] a noção de poucos operadores aparece fortemente. Todos os resultados aqui apresentados são demonstrados em [Ko2], [Ko5] e [Ko6]. Também indicamos [Ko3] e [Ko4] para referências.

Definição 1.29. Dadas $f, g \in C(K)$ diremos que f e g são *disjuntas* se $f \cdot g = 0$, isto é, se $f(x) \cdot g(x) = 0$ para todo $x \in K$.

Ao longo de toda a tese utilizaremos o termo *operador* no sentido de *operador linear contínuo*.

Definição 1.30. ([Ko2], 2.1) Um operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é um *multiplicador fraco* se para toda sequência limitada $(e_n : n \in \omega)$ de elementos dois a dois disjuntos de $C(K)$, e toda sequência $(x_n : n \in \omega) \subseteq K$ tal que $e_n(x_n) = 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} T(e_n)(x_n) = 0.$$

Definição 1.31. ([Ko4], 1.1) Um operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é uma *multiplicação fraca* se pudermos escrever $T = gI + S$, onde $g \in C(K)$, I é o operador identidade em $C(K)$ e $S : C(K) \longrightarrow C(K)$ é fracamente compacto (equivalentemente, S é estritamente singular).

Lema 1.32. ([Ko2], 2.3) *Seja $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ um multiplicador fraco. Então T é um isomorfismo sobre a imagem se, e somente se, T é sobrejetor em $C(K)$.*

Teorema 1.33. ([Ko2], 2.4) *Suponha que todos os operadores em $C(K)$ são multiplicadores fracos. Então $C(K)$ não é isomorfo a nenhum dos seus hiperplanos e $C(K)$ é um espaço de Grothendieck [1].*

Teorema 1.34. ([Ko2], 2.5) *Suponha que todos os operadores em $C(K)$ são multiplicadores fracos e que $K \setminus F$ é conexo, para todo $F \subseteq K$ finito. Então $C(K)$ é um espaço de Banach indecomponível.*

Definição 1.35. Sejam X e Y espaços topológicos tais que $Y \subseteq X$. Dizemos que Y é C^*-imerso em X se toda função contínua e limitada de Y em $\mathbb{R}$ se estende a uma função contínua e limitada de X em $\mathbb{R}$.

Definição 1.36. ([Pl], 2.3) Dizemos que um espaço topológico K contém um *aberto-borboleta* se existem conjuntos abertos $U, V \subseteq K$ tais que $\overline{U} \cap \overline{V}$ é unitário.

Lema 1.37. ([Ko2], 2.8) *Seja K um espaço topológico compacto tal que, para todos U_1 e U_2 abertos disjuntos em K, $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$ ou $|\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2| \geq 2$. Então para todo $x \in K$ o espaço $K \setminus \{x\}$ é C^*-imerso em K.*

[1] Dizemos que um espaço de Banach X é um espaço de Grothendieck se as convergências fraca e fraca* de sequências coincidem no espaço dual X^*.

Teorema 1.38. ([Ko2], 2.7) *Seja K um espaço topológico compacto. São equivalentes:*

a) *Todo operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é da forma $gI + S$, onde $g \in C(K)$ e S é fracamente compacto.*

b) *Todos os operadores em $C(K)$ são multiplicadores fracos e, para todo $x \in K$, o espaço $K \setminus \{x\}$ é C^*-imerso em K.*

Definição 1.39. Dizemos que o espaço $C(K)$ tem *poucos operadores* se todo operador em $C(K)$ for um multiplicador fraco.

Definição 1.40. Seja K um espaço topológico compacto. Dizemos que:

1) K é um *espaço de Koszmider* se todo operador em $C(K)$ é multiplicação fraca;

2) K é um *espaço hereditariamente Koszmider* se para qualquer fechado $L \subseteq K$, todo operador em $C(L)$ é multiplicação fraca;

3) K é um *espaço fracamente Koszmider* se todo operador em $C(K)$ é multiplicador fraco;

4) K é um *espaço hereditariamente fracamente Koszmider* se para qualquer fechado $L \subseteq K$, todo operador em $C(L)$ é multiplicador fraco.

Observação: Schachermayer mostra, em [Sc], que um espaço de Banach $C(K)$ é de Grothendieck se, e somente se, não contém c_0 complementado. Pelo Teorema 1.33 temos que se K é um espaço hereditariamente fracamente Koszmider então K não contém cópia de $\beta\mathbb{N}$ pois $C(\beta\mathbb{N}) \equiv l_\infty$ e sabemos que l_∞ é isomorfo aos seus hiperplanos. Além disso, K não possui sequência convergente não trivial, pois do contrário teríamos c_0 complementado em $C(K)$.

Definição 1.41. A *densidade* de um espaço topológico X, $d(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que X possui um subconjunto denso de cardinalidade menor ou igual a κ. Se $d(X) = \omega$, dizemos que X é *separável*. Da mesma maneira definimos a *densidade* de um espaço de Banach como sendo o menor cardinal infinito κ para o qual existe um subconjunto denso de cardinalidade menor ou igual a κ, e diremos que o espaço de Banach é *separável* se $\kappa = \omega$.

O primeiro exemplo consistente de um espaço de Banach indecomponível de densidade maior que 2^ω foi construído em [Ko5]. Utilizando o método do *forcing*, Koszmider obteve o seguinte resultado:

Teorema 1.42. ([Ko5], 1.1) *Existe consistentemente com ZFC um espaço de Banach da forma $C(K)$ tal que:*

a) *A densidade de $C(K)$ é $2^{2^\omega} = \omega_2 > \omega_1 = 2^\omega$;*

b) *Todo operador $T : C(K) \longrightarrow C(K)$ é da forma $gI + S$, onde $g \in C(K)$ e S é fracamente compacto;*

c) *$C(K)$ é indecomponível.*

Definição 1.43. A Hipótese Generalizada do Contínuo [2], indicada por GCH, é a afirmação de que $\omega_{\alpha+1} = 2^{\omega_\alpha}$ para todo ordinal α.

Utilizando uma técnica diferente das construções clássicas dos espaços $C(K)$ com poucos operadores, Koszmider, Shelah e Šwietek obtiveram recentemente o seguinte resultado:

Teorema 1.44. ([Ko6], 1.3) *Assuma GCH. Para todo cardinal κ existe um espaço de Banach indecomponível de densidade maior que κ. Além disso, os espaços são da forma $C(K)$ com poucos operadores.*

1.4 O método do *forcing*

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que Γ é *consistente* se de Γ não deduzirmos contradições, isto é, se não existir fórmula ϕ tal que $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Do contrário, diremos que Γ é *inconsistente*. Dada uma fórmula ϕ, dizemos que ϕ é *relativamente consistente* com Γ se a consistência de Γ implicar a consistência de $\Gamma \cup \{\phi\}$. Isso equivale a dizer que de Γ não podemos

[2] A Hipótese Generalizada do Contínuo é independente de ZFC. Indicamos [Je] e [Ku] para referências.

deduzir $\neg\phi$, a menos que Γ seja inconsistente. Além disso, uma fórmula ϕ é *independente* de Γ se tanto ϕ quanto $\neg\phi$ forem relativamente consistentes com Γ. O método do *forcing* é um método utilizado para se demonstrar a consistência relativa de certas fórmulas. Esse método foi introduzido por Paul Cohen, em 1964, para se provar a consistência relativa da negação da hipótese do contínuo. Em 1940, o matemático Austríaco Kurt Gödel já havia demonstrado a consistência relativa da hipótese do contínuo e, portanto, segue que o problema do contínuo de Cantor, o primeiro dos 23 Problemas de Hilbert de 1900, é indecidível (veja [Go]). Na exposição abaixo seguiremos a notação e o método de [Ku], e todas as demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser vistos em [Ku] ou [Je].

Lembramos que o sistema de axiomas usual para a matemática é o sistema de Zermelo-Frankel com o axioma da escolha (ZFC). Além disso, lembramos também que a linguagem de ZFC é formada pelos seguintes símbolos: os quantificadores $\forall$ e $\exists$, os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, a igualdade $=$, a relação de pertinência $\in$, os delimitadores (e), e as variáveis x_1, x_2, x_3,...

Definição 1.45. Um *modelo* para a teoria dos conjuntos é um par (M, ε) onde M é um conjunto e $\varepsilon \subseteq M \times M$ é uma relação binária. Dizemos que o modelo é *standard* se a relação ε coincide com a relação de pertinência $\in$, isto é, se $\varepsilon = \{(x, y) \in M : x \in y\}$. Dizemos também que um modelo standard é *transitivo* se $x \subseteq M$, para todo $x \in M$.

Ao longo da tese iremos trabalhar apenas com modelos *standard*.

Definição 1.46. ([Ku], IV, 2.1) Seja M uma classe. Para cada fórmula ϕ definimos a *relativização de ϕ a M*, que será denotada por ϕ^M, por indução na complexidade de ϕ da seguinte maneira:

1. $(x = y)^M$ é $x = y$;
2. $(x \in y)^M$ é $x \in y$;
3. $(\phi \wedge \psi)^M$ é $\phi^M \wedge \psi^M$;
4. $(\neg\phi)^M$ é $\neg(\phi^M)$;

5. $(\exists x \phi)^M$ é $\exists x(x \in M \wedge \phi^M)$.

Diremos que M *satisfaz* ϕ ou que ϕ *vale* em M, e denotaremos por $M \models \phi$, se vale ϕ^M.

Pelo Teorema da Incompletude de Gödel, sabemos que ZFC não pode provar a sua própria consistência e, portanto, não podemos provar, em ZFC, que existe um modelo para ZFC. O Teorema de Löwenheim-Skolem garante a existência de um modelo enumerável para qualquer teoria consistente. Mas, para uso do *forcing*, precisamos de um modelo transitivo. Além disso, ainda que ZFC seja consistente, pode ser que não exista um modelo transitivo para ZFC, pois ZFC não é finitamente axiomátizavel. Entretanto, sabemos que demonstrações usam uma quantidade finita de fórmulas e, além disso, sabemos que se Γ é um conjunto finito e consistente de fórmulas então existe modelo transitivo enumerável M tal que $M \models \Gamma$ (veja [Ku]). Temos portanto o seguinte resultado, conhecido como o *Princípio do Forcing*.

Teorema 1.47 (Princípio do forcing)**.** *Para mostrar que uma fórmula φ é relativamente consistente com ZFC é suficiente mostrar que, para todo modelo transitivo enumerável M que satisfaz ZFC, existe um modelo N que satisfaz ZFC tal que $M \subseteq N$ e $N \models \varphi$.*

Definição 1.48. Sejam $\mathbb{P} = (P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $p, q \in \mathbb{P}$ elementos quaisquer. Dizemos que:

i) p *estende* q, ou ainda, p é uma *extensão* de q, se $p \leq q$;

ii) p e q são *compatíveis* se existe $r \in \mathbb{P}$ que estende p e q. Do contrário, diremos que p e q são *incompatíveis*, e escreveremos $p \perp q$.

Definição 1.49. Um conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P} = (P, \leq)$ será chamado de *forcing* se satisfizer as seguintes duas condições:

i) Para todo $p \in \mathbb{P}$ existem $q_1, q_2 \in \mathbb{P}$ incompatíveis que estendem p, isto é, $q_1, q_2 \leq p$ e $q_1 \perp q_2$;

ii) Existe o elemento máximo de $\mathbb{P}$, que denotaremos por $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}$.

Se $\mathbb{P} = (P, \leq)$ for um *forcing*, os elementos de P serão chamados de *condições do forcing*.

Definição 1.50. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Dizemos que um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ é *denso* em $\mathbb{P}$ se para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Dizemos também que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ é uma *anticadeia* em $\mathbb{P}$ se os elementos de A são dois a dois incompatíveis.

Definição 1.51. Sejam $\mathbb{P}$ um forcing e $G \subseteq \mathbb{P}$ um subconjunto não vazio. Dizemos que G é um *filtro* em $\mathbb{P}$ se :

i) Dados $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$;

ii) Para todo $p \in G$ e todo $q \in \mathbb{P}$, se $p \leq q$ então $q \in G$.

Definição 1.52. Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC e $\mathbb{P} \in M$ um forcing. Dizemos que um subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ é um *$\mathbb{P}$-genérico sobre M* se G é um filtro em $\mathbb{P}$ e, para todo $D \in M$ denso em $\mathbb{P}$, temos $G \cap D \neq \emptyset$.

Lema 1.53. ([Ku], VII, 2.3) *Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC e $\mathbb{P} \in M$ um* forcing. *Então, para todo $p \in \mathbb{P}$ existe G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Observe que o $\mathbb{P}$-genérico G dado pelo Lema 1.53 não pertence a M. Com efeito, suponha que $G \in M$ e defina $D = \mathbb{P} \setminus G$. Como $\mathbb{P}, G \in M$ e M é modelo transitivo para ZFC, teríamos também que $D \in M$. Seja agora $p \in \mathbb{P}$ qualquer. Pela definição de forcing, existem $q, r \in \mathbb{P}$ tais que $q, r \leq p$ e $q \perp r$. Como G é um filtro, temos que ou $q \notin G$ ou $r \notin G$, pois quaisquer dois elementos de G são compatíveis. Logo, segue que ao menos uma das extensões está em D. Isto nos mostra que D é denso. Mas também temos $D \cap G = \emptyset$, contradição com o fato de G ser $\mathbb{P}$-genérico sobre M.

Para se provar a consistência relativa de uma fórmula ϕ usando o método do forcing, partimos de um modelo transitivo enumerável para ZFC, que podemos assumir que existe, pelo princípio do forcing. Em seguida, tomamos G um $\mathbb{P}$-genérico sobre M e olhamos para $M[G]$, que será o menor modelo transitivo enumerável para ZFC que contém M e que satisfaz $G \in M[G]$. O genérico G será adicionado a M para se "forçar" a fórmula ϕ, isto é, para que tenhamos $M[G] \models \phi$.

Definição 1.54. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Diremos que τ é um $\mathbb{P}$-*nome* se τ é um conjunto de pares ordenados da forma (σ, p), onde $p \in \mathbb{P}$ e σ é um $\mathbb{P}$-nome. Denotamos por $V^{\mathbb{P}}$ a classe de todos os $\mathbb{P}$-nomes. Além disso, se M é um modelo transitivo enumerável para ZFC, com $\mathbb{P} \in M$, definimos $M^{\mathbb{P}} = M \cap V^{\mathbb{P}}$ o conjunto de todos os $\mathbb{P}$-nomes *sobre* M.

Observação. Para se formalizar a definição de $\mathbb{P}$-nomes, usamos o fato de que a relação de pertinência $\in$ é bem-fundada e o *Teorema da recursão sobre relações bem-fundadas* (veja [Ku]). Intuitivamente, o que estamos fazendo funciona como uma definição recursiva sobre ω, ou sobre um cardinal qualquer. O conjunto $\emptyset$ é um $\mathbb{P}$-nome. Logo, $\{(\emptyset, p) : p \in \mathbb{P}\}$ também é um $\mathbb{P}$-nome, bem como $\{((\emptyset, p), q) : p, q \in \mathbb{P}\}$, e assim por diante. Convém observar também que estamos usando a noção informal de classes, apenas como uma notação. Dizer portanto que $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ significa dizer que τ é um $\mathbb{P}$-nome. Para uma formalização da noção de classes, indicamos o estudo das teorias NGB (Von Neumann-Bernays-Gödel) e KM (Kelley-Morse). Várias outras definições que daremos a seguir usam o *Teorema da recursão sobre relações bem-fundadas.*

Definição 1.55. Sejam $\mathbb{P}$ um forcing, G um filtro e τ um $\mathbb{P}$-nome. Definimos $val_G(\tau)$ como sendo o conjunto $\{val_G(\sigma) : \exists p \in G\, (\sigma, p) \in \tau\}$. Seja M um modelo transitivo enumerável para ZFC, com $\mathbb{P} \in M$, e suponha que G é um $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos $M[G] = \{val_G(\tau) : \sigma \in M^{\mathbb{P}}\}$.

Definição 1.56. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Definimos o $\mathbb{P}$-nome $\check{x}$ recursivamente por $\check{x} = \{(\check{y}, \mathbf{1}_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$. Definimos também o nome $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.

Lema 1.57. ([Ku], VII, 2.11 e 2.13) *Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC, $\mathbb{P} \in M$ um* forcing *e G um $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Então*

a) *Para todo $x \in M$, $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ e $val_G(\check{x}) = x$;*

b) $val_G(\Gamma) = G$.

Note que o lema anterior nos garante que $M \subseteq M[G]$ e $G \in M[G]$. O teorema a seguir, essencial no método do *forcing*, nos trará todas as boas propriedades de $M[G]$.

Teorema 1.58. ([Ku], VII, 2.14, 4.2, 2.11, 2.13, 2.19) *Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC, $\mathbb{P}$ um forcing tal que $\mathbb{P} \in M$ e G um $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Então*

a) *$M[G]$ é um modelo transitivo enumerável;*

b) *$M[G] \models ZFC$;*

c) *$M \subseteq M[G]$;*

d) *$G \in M[G]$;*

e) *Se N é um modelo transitivo para ZFC tal que $N \supseteq M$ e $G \in N$, então $M[G] \subseteq N$.*

Iremos agora definir a *relação de forcing* $\Vdash$, que nos permitirá entender de que maneira os elementos de $\mathbb{P}$ fornecem informações sobre verdades em $M[G]$, de modo que, se escolhermos convenientemente G, a fórmula ϕ vale em $M[G]$. De fato, veremos a seguir que dados M e G, uma fórmula ϕ vale em $M[G]$ se, e somente se, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \phi$.

Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC e $\mathbb{P}$ um forcing em M. Definimos a *linguagem do forcing* $\mathbb{P}$ *sobre* M, que será denotada por $\mathcal{L}(M^P)$, como a linguagem da teoria dos conjuntos substituindo as variáveis livres por $\mathbb{P}$-nomes sobre M.

Teorema 1.59. ([Je], 14.6 e 14.7) *Sejam M um modelo transitivo enumerável para ZFC e $\mathbb{P} \in M$ um* forcing. *Existe uma relação $\Vdash \subseteq P \times \mathcal{L}(M^P)$ tal que:*

(i) *$\Vdash \in M$;*

(ii) **(a)** *$p \Vdash \phi(\tau_1, ..., \tau_n)$ se, e somente se, $M[G] \models \phi(val_G(\tau_1), ..., val_G(\tau_n))$, para todo G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$;*

(b) *$M[G] \models \phi(val_G(\tau_1), ..., val_G(\tau_n))$ se, e somente se, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \phi(\tau_1, ..., \tau_n)$;*

(iii) **(a)** *Se $p \Vdash \phi$ e $q \leq p$ então $q \Vdash \phi$;*

(b) *Não existem $p \in \mathbb{P}$ e $\phi \in \mathcal{L}(M^P)$ tais que $p \Vdash \phi$ e $p \Vdash \neg\phi$;*

(c) *Para todos $p \in \mathbb{P}$ e $\phi \in \mathcal{L}(M^P)$ existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \phi$ ou $q \Vdash \neg\phi$;*

(d) *$p \Vdash \neg\phi$ se, e somente se, $q \nVdash \phi$, para todo $q \leq p$;*

(e) *$p \Vdash \phi \wedge \psi$ se, e somente se, $p \Vdash \phi$ e $p \Vdash \psi$;*

(f) *$p \Vdash \exists x \phi(x)$ se, e somente se, existe $\tau \in M^P$ tal que $p \Vdash \phi(\tau)$.*

(iv) *$p \Vdash$ "Γ é um filtro" e, se D é denso em P, então $p \Vdash \Gamma \cap \check{D} \neq \emptyset$.*

Definição 1.60. A relação $\Vdash$ é chamada *relação de forcing*. Se $p \Vdash \phi$, diremos que *p força ϕ*.

Definição 1.61. ([Ku], IV, 3.1) Sejam ϕ uma fórmula com variáveis livres $x_1, ..., x_n$ e $M \subseteq N$ modelos transitivos para ZFC. Dizemos que

1. ϕ é *absoluta em relação a M* e N se

$$\forall x_1, ..., x_n \in M(M \models \phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow N \models \phi(x_1, ..., x_n));$$

2. ϕ é *absoluta em relação a M* se

$$\forall x_1, ..., x_n \in M(M \models \phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, ..., x_n));$$

3. ϕ é *absoluta* se é absoluta em relação a todo modelo transitivo.

O lema a seguir nos traz algumas fórmulas que são absolutas. Note que, quando escrevemos que ω é absoluto queremos dizer que a fórmula "x é o primeiro ordinal infinito" é absoluta. Além das fórmulas listadas abaixo, um outro grupo de fórmulas absolutas são as *fórmulas* Δ_0. Essas fórmulas são definidas indutivamente através das seguintes regras: $x \in y$ e $x = y$ são Δ_0 e, se ϕ e φ são Δ_0, então $\neg\phi$, $\phi \wedge \varphi$ e $\exists x(x \in y \wedge \phi)$ são Δ_0 (veja [Ku]).

Lema 1.62. ([Ku], IV, 5.1 e 5.3) *As seguintes fórmulas são absolutas:*

1. *ω;*

2. *x é um ordinal;*

3. *x é um ordinal limite;*

4. *x é um ordinal sucessor;*

5. *x é finito.*

Ainda que "ser um ordinal" seja absoluto para modelos transitivos, o mesmo não ocorre com "ser um cardinal". Isso significa dizer que, dado um cardinal $\kappa \in M$, quando olhamos para κ em $M[G]$ teremos um ordinal que não sabemos se é, ou não, um cardinal. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.63. Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ *preserva cardinais* se para todo modelo transitivo enumerável M tal que $\mathbb{P} \in M$, todo cardinal $\kappa \in M$, e todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, tivermos que κ é um cardinal em $M[G]$.

As próximas duas definições e o próximo teorema são úteis sempre que quisermos mostrar que um *forcing* $\mathbb{P}$ preserva cardinais.

Definição 1.64. Seja κ um cardinal. Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ é *κ-fechado* se para toda cadeia $(p_\alpha)_{\alpha<\kappa} \subset \mathbb{P}$ decrescente, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_\alpha$, para todo $\alpha < \kappa$. Além disso, dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ é *σ-fechado* se é ω_1-fechado.

Definição 1.65. Seja κ um cardinal. Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ é *κ-c.c* se toda anticadeia em $\mathbb{P}$ tem cardinalidade menor que κ.

Teorema 1.66. ([Ku], VII, 6.9 e 6.15) *Seja κ um cardinal. Se um forcing $\mathbb{P}$ é κ-fechado e κ^+-c.c, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais. Em particular, todo forcing σ-fechado e ω_2-c.c preserva cardinais.*

Capítulo 2

Extensões por funções contínuas

2.1 Introdução

Em [Ko2], Koszmider construiu um espaço topológico compacto totalmente desconexo K tal que todo operador T em $C(K)$ é da forma $T = gI + S$, onde $I : C(K) \longrightarrow C(K)$ representa o operador identidade, $g \in C(K)$ e $S : C(K) \longrightarrow C(K)$ é um operador fracamente compacto. O espaço K foi obtido como o Espaço de Stone de uma Álgebra de Boole contruída por indução transfinita, onde cada $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ é a Álgebra de Boole gerada por $\mathcal{A}_\alpha$ e o supremo de uma anticadeia em $\mathcal{A}_\alpha$. No passo limite tomamos a união.

O mesmo artigo provou também a existência de um Espaço de Banach indecomponível da forma $C(K)$. A construção é similar à anterior, exceto pelo fato de K ser conexo. Dessa forma, K não pode ser o Espaço de Stone de uma Álgebra de Boole. A ideia central na construção de tal K foi trocar o supremo de elementos da Álgebra de Boole - que corresponde, no Espaço de Stone, ao supremo das funções características de tais elementos - pelo supremo de funções contínuas disjuntas. E nesta hora, Koszmider desenvolveu uma nova técnica conhecida como *extensões por funções contínuas*.

Antes de introduzirmos a particular construção de Koszmider, vamos apresentar uma visão geral do problema. Seja K um espaço topológico compacto. Defina por $C(K)$ o Espaço de Banach de todas as funções contínuas em K, munido da norma do supremo, e $C_1(K)$ o conjunto de todas as funções contínuas de K em $[0,1]$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas em $C_1(K)$. Sejam L outro espaço topológico compacto e π uma função contínua e sobrejetora de L em K. Diremos que (L,π) *adiciona o supremo de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se $sup\{f_n\circ\pi : n\in\mathbb{N}\}$ existir em $C(L)$. Além disso, diremos que (L,π) *preserva supremos* se $sup\{g_n\circ\pi : n\in\mathbb{N}\}$ existir em $C(L)$, sempre que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta em $C_1(K)$ que tem supremo em $C(K)$.

Vamos agora ver como isto funciona no caso das Álgebras de Boole. Sejam $\mathcal{A}$ uma Álgebra de Boole e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em $\mathcal{A}$. Seja b o supremo de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no completamento de $\mathcal{A}$. Tome $\mathcal{B}$ a álgebra gerada por $\mathcal{A}\cup\{b\}$.

Sejam $S(\mathcal{A})$ e $S(\mathcal{B})$ os espaços de Stone de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Seja π a projeção standard de $S(\mathcal{B})$ sobre $S(\mathcal{A})$, dada por $\pi(u)=u\cap\mathcal{A}$, onde u é um ultrafiltro em $\mathcal{B}$.

Para cada $a\in\mathcal{B}$, denotaremos por $[a]_{\mathcal{B}}$ o conjunto aberto-fechado de $S(\mathcal{B})$ formado por todos os ultrafiltros sobre $\mathcal{B}$ que contêm a. Se $a\in\mathcal{A}$, a notação $[a]_{\mathcal{A}}$ significará o conjunto de todos os ultrafiltros sobre $\mathcal{A}$ que contêm a. É fácil ver que $\pi[[a]_{\mathcal{B}}]=[a]_{\mathcal{A}}$.

Em $C(S(\mathcal{B}))$ considere $\chi_{[b]_{\mathcal{B}}}$ a função característica de $[b]_{\mathcal{B}}$, que é contínua pelo fato de $[b]_{\mathcal{B}}$ ser um conjunto aberto-fechado. Como b é o supremo de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\chi_{[b]_{\mathcal{B}}}$ é claramente o supremo de $\{\chi_{[a_n]_{\mathcal{B}}} : n\in\mathbb{N}\}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ temos $\chi_{[a_n]_{\mathcal{B}}}=\chi_{[a_n]_{\mathcal{A}}}\circ\pi$. Podemos então concluir que $(S(\mathcal{B}),\pi)$ adiciona o supremo de $(\chi_{[a_n]_{\mathcal{B}}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Se $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem supremo a em $\mathcal{A}$, então $\chi_{[a]_{\mathcal{B}}}$ é o supremo de $(\chi_{[a'_n]_{\mathcal{B}}})_{n\in\mathbb{N}}$ em $C(S(\mathcal{B}))$. Logo, $S(\mathcal{B})$ preserva supremos de funções deste tipo, i.e., funções características de abertos-fechados básicos. Para o caso geral, segue do Lema 4.1 de [Ko2] que $(C(S(\mathcal{B})),\pi)$ preserva supremos.

Adicionar supremos de elementos de uma Álgebra de Boole é muito mais fácil que adicionar supremos em $C(K)$. Dessa forma, a melhor abordagem para adicionar supremos em $C(K)$ para K totalmente desconexo é via Álgebras de Boole. Se K é conexo, Koszmider, em [Ko2], introduziu a noção de *extensões por funções contínuas* para obter um espaço topológico compacto $L \subset K \times [0,1]$ que adiciona supremo de uma dada sequência disjunta $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_1(K)$. A função π é a projeção standard sobre K. Utilizaremos a notação $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ para indicar a extensão de K por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A noção de extensões por funções contínuas foi aplicada em muitos contra-exemplos na Teoria dos Espaços de Banach da forma $C(K)$, como acontece em [Ko2], [Fa1] e [Fa2]. Caminhos alternativos de adicionar supremos em espaços conexos foram desenvolvidos em [Pl] utilizando o teorema da representação de Wallman, que generaliza o teorema da representação de Stone para reticulados conexos.

A maior dificuldade nas construções que utilizam extensões por funções contínuas é assegurar a conexidade. Para isso, precisamos, eventualmente, passar a uma subsequência (como acontece em [Ko2]) ou modificar as funções (como acontece em [Fa2]).

O objetivo principal desse capítulo será apresentar três novos resultados envolvendo a técnica de extensões por funções contínuas. Com efeito, estudando a preservação de conexidade nas extensões por funções contínuas, obtivemos os seguintes resultados:

- Se K é um espaço topológico compacto conexo, localmente conexo e metrizável, então toda extensão de K por funções contínuas é conexa (mas pode não ser localmente conexa);
- Existe uma extensão desconexa de um espaço topológico compacto conexo e metrizável K;
- Para todo espaço topológico compacto metrizável K existe um desconexo L que é obtido a partir de K por uma quantidade finita de extensões por funções contínuas.

Definição 2.1. Um espaço topológico metrizável, compacto e conexo será chamado de *continuum*.

Problema 1. *Suponha que K seja um continuum e que L seja uma extensão de K por uma sequência de funções contínuas e duas a duas disjuntas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$. Será L necessariamente conexo?*

No Teorema 2.15 construíremos um continuum K e uma sequência de funções duas a duas disjuntas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ tal que $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é desconexo. O Teorema 2.16 fornece uma adaptação da técnica utilizada no Teorema 2.15 de modo que K seja ele mesmo uma extensão do intervalo $[0,1]$.

Uma vez respondido negativamente o Problema 1, podemos nos perguntar o que acontece se trocarmos a conexidade por alguma outra propriedade mais forte. Surge então a seguinte questão:

Problema 2. *Existe alguma propriedade não-vazia P na classe dos continua tal que, para todo K satisfazendo P e toda sequência de funções duas a duas disjuntas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$, então $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ também satisfaz P?*

Na tentativa de responder o Problema 2, poderíamos considerar a propriedade P como sendo conexidade local. Com efeito, no Teorema 2.14 provamos que se K é um espaço topológico compacto localmente conexo e metrizável, então toda extensão de K por funções contínuas é conexa. Mas a extensão pode não ser localmente conexa.

O Problema 2 também será respondido negativamente. O Teorema 2.18 prova que, começando com qualquer continuum K_0, existe uma sequência $(K_i)_{0\leq i\leq 3}$ de espaços topológicos compactos tal que cada K_i é uma extensão de K_{i-1} por uma sequência de funções contínuas e K_3 é desconexo.

Assumindo a Hipótese do Contínuo, os problemas 1 e 2 podem ser respondidos indiretamente (com a hipótese adicional de que P é preservado por limite inverso, no problema 2) usando a construção em [Ko2] e um Teorema que pode ser encontrado em [Me]. Se um desses problemas possuísse resposta afirmativa poderíamos construir, como em [Ko2], um espaço topológico compacto e conexo K tal que toda sequência disjunta em $C_1(K)$ tem supremo. Por [Me] isso implica que K é quasi-Stoneano[1] e portanto desconexo. No entanto, vamos apresentar exemplos que mostram como a conexidade é perdida em extensões sucessivas por funções contínuas.

O principal teorema deste capítulo está intimamente relacionado com a

[1]Um espaço topológico compacto é quasi-Stoneano se o fecho de todo aberto F_σ é aberto.

Teoria dos Espaços de Banach com poucos operadores, já que refuta uma conjectura que poderia simplificar várias construções.

Observação. Ao longo de todo o capítulo utilizaremos a notação $Gr(f)$ para indicar o gráfico de uma função f.

2.2 Definições e lemas principais

Nesta seção apresentamos as principais definições e os principais lemas envolvendo as extensões por funções contínuas, com base em [Ko2]. Se f é uma função real definida sobre um espaço topológico compacto K, denotaremos por $supp(f)$ o fecho de $\{x \in K : f(x) \neq 0\}$ em K.

Definição 2.2. Sejam K um espaço topológico compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_1(K)$. Definimos

$$D((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \bigcup\{U : U \text{ é aberto e } \{n : U \cap supp(f_n) \neq \emptyset\} \text{ é finito}\}.$$

Lema 2.3. ([Ko2], 4.1) *Seja K um espaço topológico compacto e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas. Então:*

(i) *$f \in C(K)$ é $sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no reticulado $C(K)$ se, e somente se,*

$$\{x \in K : \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \neq f(x)\}$$

é raro[2] *em K;*

(ii) *$D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é um subconjunto aberto-denso de K e $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n$ é contínua em $D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.*

Definição 2.4. Sejam K um espaço topológico compacto, $L \subseteq K \times [0,1]$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas. Dizemos que L é uma *extensão* de K por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e denotaremos por $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$, se L é o fecho do gráfico de $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n | D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Dizemos que L é uma *extensão forte* se, além disso, contém o gráfico de $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

[2]Dizemos que um subconjunto M de um espaço topológico K é *raro* se seu fecho tem interior vazio, isto é, se não existe um aberto V não-vazio tal que $V \subseteq \overline{M}$.

Definição 2.5. Sejam K um espaço topológico compacto e $L \subseteq K \times [0,1]$ uma extensão de K. Dizemos que L é uma *extensão completa* se para todo $x \in K$, $\pi_{L,K}^{-1}[\{x\}]$ é unitário ou igual a $[0,1] \times \{x\}$.

Lema 2.6. ([Fa2], 3.6) *Seja K um espaço topológico compacto e conexo. Se L é uma extensão completa de K, então L também é conexo.*

Lema 2.7. ([Ko2], 4.3 e 4.4) *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas. Tome $L = K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e $\pi : L \longrightarrow K$ a projeção standard. Então (L,π) adiciona o supremo de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e preserva supremos. Além disso, se L é uma extensão forte e K é conexo, então L também é conexo.*

Em [Ko2], Koszmider prova que a projeção π preserva conjuntos raros, i.e., $\pi^{-1}[M]$ é raro em L sempre que M for raro em K. Logo, a preservação de supremos segue do lema 2.3.

O supremo de $(f_n \circ \pi)_{n\in\mathbb{N}}$ em L é a projeção na segunda coordenada, i.e., a função f definida como $f(x,t) = t$, para $(x,t) \in L \subset K \times [0,1]$.

O próximo lema é uma versão simplificada do Lema 4.5 de [Ko2]. Ele mostra que a extensão é forte para muitas subsequências de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lema 2.8. ([Ko2], 4.5) *Seja K um espaço topológico compacto de peso $\kappa < 2^\omega$. Suponha que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ seja uma sequência de funções duas a duas disjuntas e que $(N_\xi)_{\xi<2^\omega}$ seja uma família de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tal que $N_\xi \cap N_{\xi'}$ é finito, para todo $\xi \neq \xi'$. Então existe $A \subset 2^\omega$ de cardinalidade não maior que κ tal que, para todo $\xi \in 2^\omega \smallsetminus A$ e todo $b \subset N_\xi$ infinito, a extensão de K por $(f_n)_{n\in b}$ é forte.*

Em [Fa2], Fajardo encontra algumas maneiras de obter a conexidade na extensão modificando ligeiramente as funções f_n. O Lema 2.11 nos mostra que a extensão é completa para muitas subsequências de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 2.9. Se K é um espaço compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ é uma sequência de funções duas a duas disjuntas, denotaremos por $\Delta((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ o conjunto $K \setminus D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Lema 2.10. ([Fa2], 3.6 e 3.8) *Seja K um continuum. Suponha que $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de reais positivos, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ é uma sequência de funções duas a duas disjuntas, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de medidas regulares sobre K e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em K tal que $f_n(x_n) = 1$. Então existe uma sequência $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_1(K)$ tal que*

(i) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $supp(f'_n) \subset supp(f_n)$, $f'_n(x_n) = 1$ e $\int |f'_n - f_n|\, d|\mu_n| < \varepsilon_n$;*

(ii) *$K((f'_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é conexo.*

Lema 2.11. ([Fa2], 3.10) *Seja K um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Dados*

(a) *Uma sequência $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de funções contínuas, duas a duas disjuntas de K em $[0,1]$;*

(b) *Uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em K;*

(c) *Um $\varepsilon > 0$;*

(d) *Uma sequência limitada $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ de medidas regulares sobre K tais que $|\int f_n d\mu_n| > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

existem $\delta > 0$, $a \subseteq \mathbb{N}$ infinito e funções contínuas $f'_n : K \longrightarrow [0,1]$ tais que $supp(f'_n) \subseteq supp(f_n)$ e para todo $b \subseteq a$ temos:

(e) *$|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ e $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, para todo $n \in a$;*

(f) *$L = K((f'_n)_{n\in b})$ é uma extensão completa;*

(g) *$\Delta((f'_n)_{n\in b})$ é unitário ou é disjunto de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Apesar de todo o esforço para garantir a conexidade da extensão, nenhum dos artigos mencionados prova que a extensão não preserva, em geral, a conexidade. Esse será o objetivo principal da seção 2.4.

2.3 Supremos de álgebras de Boole e extensões por funções contínuas

Vamos agora mostrar a relação que existe entre adicionar supremos em álgebras de Boole e o método de extensões por funções contínuas em espaços compactos 0-dimensionais. Se tomarmos uma álgebra de Boole A, podemos identificar o espaço dos ultrafiltros $S(A)$ com o subespaço fechado de $\{0,1\}^A$ formado por todos os homomorfismos de A em $\{0,1\}$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Lema 2.12. ([Kop], 7.11) *Seja A uma álgebra de Boole. Então o conjunto $\{x : A \to \{0,1\}$ tal que x é homomorfismo$\}$ é um subespaço fechado de $\{0,1\}^A$ homeomorfo a $S(A)$.*

Usando a identificação dada pelo lema anterior, temos a seguinte proposição, que nos diz como se relacionam supremos de álgebras de Boole e extensões por funções contínuas.

Proposição 2.13. *Seja A uma álgebra de Boole. Para cada $a \in A$ considere $[a] = \{x \in S(A) : x(a) = 1\}$ o aberto-fechado correspondente ao elemento a de A. Sejam também $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ uma sequência de elementos de A dois a dois disjuntos, s o supremo de tal sequência no completamento de A e $f_n : S(A) \longrightarrow [0,1]$ as funções características de $[a_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $L_1 = S(A)((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$, a extensão de $S(A)$ pelas funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $L_2 = \{x \restriction A \cup \{s\} : x \in S(B)\}$, onde $B = < A \cup \{s\} >$ é a álgebra de Boole gerada por $A \cup \{s\}$. Então $L_1 = L_2$ e, além disso, existe uma topologia sobre L_2 induzida por uma bijeção natural entre $S(B)$ e L_2.*

Demonstração. Seja $(x,t) \in L_1$ qualquer e mostremos que $t \in \{0,1\}$. Com efeito, suponha $t \neq 0$ e $t \neq 1$. Então existiria aberto $V \times W$ de $S(A) \times [0,1]$ com $(x,t) \in V \times W$ e $\{0,1\} \cap W = \emptyset$, tal que

$$(V \times W) \cap Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n | D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})) \neq \emptyset.$$

Portanto, existira também $(y,t') \in V \times W$ satisfazendo $y \in D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e $t' = \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n(y)$. Como as funções f_n são funções características de $[a_n]$, temos que $t' \in \{0,1\}$ e, com maior razão, seguiria que $\{0,1\} \cap W \neq \emptyset$, contradição. Concluímos então que $t = 0$ ou $t = 1$. Vamos agora analisar os três casos possíveis:

1) $(x, 0) \in L_1$ e $(x, 1) \notin L_1$: Nesse caso, existe $a \in A$ tal que $x \in [a]$ e $[a] \cap [a_n] = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, $x(a) = 1$ e a é disjunto de a_n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que tal elemento $a \in A$ existe pois, do contrário, se todo $a \in A$ satisfazendo $x \in [a]$ fosse tal que $[a] \cap [a_n] \neq \emptyset$ para algum n, teríamos que toda vizinhança de x intersectaria $supp(f_n) = [a_n]$ para algum n. Logo, em toda vizinhança V de x existira $y \in V \cap D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tal que $f_n(y) = 1$, o que implicaria que $(x, 1) \in L_1$, contradição.

   Logo, para todo $y \in L_2$ satisfazendo $y(a) = 1$, temos necessariamente $y(s) = 0$, já que a e s são disjuntos. Isto nos mostra que $(x, 0) \in L_2$ e $(x, 1) \notin L_2$.

2) $(x, 1) \in L_1$ e $(x, 0) \notin L_1$: Nesse caso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [a_n]$, isto é, tal que $x(a_n) = 1$. Isto nos mostra que todo homomorfismo em $S(B)$ que estende x tem que valer 1 em s e, portanto, concluímos que $(x, 1) \in L_2$ e $(x, 0) \notin L_2$.

3) $(x, 0) \in L_1$ e $(x, 1) \in L_1$: Nesse caso, temos que $x(a_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mas, para todo $a \in A$ temos também que existe n tal que $a \wedge a_n \neq \emptyset$. Isso implica que, para todo $a \in A$ tal que $x(a) = 1$, temos $a \wedge s \neq 0$ e $a \wedge -s \neq 0$. Precisamos mostrar que existem $y, z \in L_2$ tais que ambos estendem x e $y(s) = 1$ e $z(s) = 0$. Pensemos em x como um ultrafiltro em A sendo que $x(a) = 1$ significa que $a \in x$. Temos então que $x \cup \{s\}$ possui a propriedade da intersecção finita e, portanto, existe $y \in S(B)$ tal que $x \cup \{s\} \subseteq y$. Da mesma forma, existe $z \in S(B)$ tal que $x \cup \{-s\} \subseteq z$. Encontramos, portanto, os pontos de L_2 que queríamos : $y = (x, 1)$ e $z = (x, 0)$.

Mostramos acima que $L_1 \subseteq L_2$. De maneira totalmente análoga mostra-se que $L_2 \subseteq L_1$ e, portanto, concluímos que $L_1 = L_2$. Considere agora a função

$\varphi : S(B) \longrightarrow L_2$ definida por $\varphi(x) = x \restriction A \cup \{s\}$, para todo $x \in S(B)$. Claramente φ é sobrejetora. Além disso, como $A \cup \{s\}$ gera a álgebra B, temos que φ também é injetora, pois dois homomorfismos que coincidem num conjunto gerador coincidem em toda a álgebra. Por fim, a topologia que colocamos em L_2 é a topologia induzia por φ, isto é: $U \subseteq L_2$ é aberto se, e somente se, $\varphi^{-1}(U)$ é aberto em $S(B)$.

□

2.4 Conexidade e desconexidade das extensões por funções contínuas

Iniciaremos essa seção mostrando que se K é um espaço topológico compacto localmente conexo e metrizável, então toda extensão de K por funções contínuas é forte, e portanto, conexa.

Teorema 2.14. *Seja K um espaço topológico compacto localmente conexo e metrizável. Então toda extensão de K por funções contínuas é forte.*

Demonstração. Sejam K como na hipótese do teorema e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas. Tome $L = K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Iremos provar que L é uma extensão forte e, para isso, basta mostrarmos que $(x, 0) \in L$, para todo $x \in K \setminus D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Como L é compacto e metrizável, mostraremos que $(x, 0) \in L$ construindo uma sequência de pontos (x_n, r_n) em L convergindo para $(x, 0)$. Para isso, seja $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base local decrescente para x, onde cada V_n é um subconjunto aberto e conexo de K. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Pela definição 2.2 existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \cap supp(f_{k_n}) \neq \emptyset$. Logo, existe $y_n \in V_n$ tal que $f_{k_n}(y_n) > 0$. Como V_n é conexo e f_{k_n} é contínua, existe $x_n \in V_n$ tal que $0 < f_{k_n}(x_n) < \frac{1}{n}$. Tome $r_n = f_{k_n}(x_n)$. É fácil ver que $x_n \in D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e que $\Sigma_{i\in\mathbb{N}} f_i(x_n) = r_n$. Portanto, $(x_n, r_n) \in L$. Claramente $(x_n, r_n) \to (x, 0)$ e isso encerra a prova do teorema. □

O próximo resultado nos diz que extensões por funções contínuas nem sempre preservam conexidade:

Teorema 2.15. *Existem um continuum K e uma sequência de funções duas a duas disjuntas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ tais que $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é desconexo.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $g_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ como

$$g_n(x) = \begin{cases} sen(\pi(2^{n+1}x - 1)), & \text{se } x \in [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $g_n(\frac{1}{2^{n+1}}) = g_n(\frac{1}{2^n}) = 0$ e $g_n(\frac{3}{2^{n+2}}) = 1$. Além disso, g_n é estritamente crescente em $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}]$.

Para simplificar a notação, chamaremos $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ e $b_n = \frac{3}{2^{n+2}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja K_0 a extensão de $[0,1]$ por $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Defina $K = K_0 \cup (\{0\} \times [1,2])$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a função $f_n : K \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$f_n(x,t) = \begin{cases} t, & \text{se } x \in (a_{n+1}, a_n) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.14, K_0 é conexo. Como K_0 é fechado em $K \times [0,1]$ e $((b_n, 1))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em K_0 convergindo para $(0,1)$, temos que $(0,1) \in K_0 \cap (\{0\} \times [1,2])$. Como ambos os conjuntos são conexos, concluímos que K é conexo.

Usando a continuidade de g_n, é fácil verificar que f_n é contínua. A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é claramente formada por funções duas a duas disjuntas.

Seja $L = K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Observe que

$$\{0\} \times (1,2] \subset D((f_n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

pois $\{0\} \times (1,2]$ é um aberto de K que não intersecta nenhum dos suportes das f_n' s. Logo, $\{0\} \times (1,2] \times \{0\} \subset L$ e, como L é fechado, temos que $\{0\} \times [1,2] \times \{0\} \subset L$.

Claramente, $\{0\} \times [1,2] \times \{0\}$ é fechado em L. Para concluir o teorema é suficiente provar que esse conjunto é aberto em L.

Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L \setminus \{0\} \times [1,2] \times \{0\}$ convergindo para $z \in L$. Precisamos provar que $z \notin \{0\} \times [1,2] \times \{0\}$.

Podemos assumir que $z_n \in Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n | D((f_n)_{n\in\mathbb{N}}))$, pois o gráfico é denso em L.

Note que, se $(0,t) \in K$, para $0 < t \leq 1$, toda vizinhança aberta de $(0,t)$ intersecta $supp(f_n)$ para infinitos valores de n. Isso segue do fato de que cada g_n é sobrejetora em $[0,1]$, e os suportes das g_n convergem para 0.

Logo, temos que $(0,t) \notin D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$, para $0 < t \leq 1$. Portanto, segue que $z_n \notin \{0\} \times (0,1] \times [0,1]$.

Sejam $z_n = (x_n, y_n, t_n)$ e $z = (x', y', t')$. Suponha que $z \in \{0\} \times [1,2] \times \{0\}$. Isto é, $z = (0, y', 0)$, onde $1 \leq y' \leq 2$. Passando a uma subsequência, podemos assumir que $y_n > \frac{1}{2}$, para todo n. Pela observação acima, podemos também assumir que $x_n > 0$, para todo n. Mas é fácil verificar que isso implica que

$$x_n \in supp(g_{k_n}),$$

para algum $k_n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(x_n, y_n) \in supp(f_{k_n}).$$

Portanto, $t_n = y_n$, para todo n. Mas $y_n > \frac{1}{2}$, contradizendo que (x_n, y_n, t_n) converge para $(0, y', 0)$.

Mostramos que $\{0\} \times [1,2] \times \{0\}$ é um aberto-fechado de L, o que prova que L é desconexo. □

O próximo teorema mostra que podemos perder a conexidade de $[0,1]$ por uma dupla extensão.

Teorema 2.16. *Existem um continuum K e uma sequência de funções duas a duas disjuntas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ tais que K é uma extensão de $[0,1]$ por funções contínuas e $K((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é desconexo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, trocaremos o intervalo $[0,1]$ pelo intervalo $[-1,1]$, para manter a notação do teorema 2.15. Sejam g_n, a_n, b_n como na prova do teorema 2.15, estendendo g_n para $[-1,1]$ através da definição $g_n(x) = 0$, para $x \leq 0$. Defina K a extensão de $[-1,1]$ por $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$

e $f_n : K \longrightarrow [0,1]$, para $n \in \mathbb{N}$, como

$$f_n(x,t) = \begin{cases} 1-t, & \text{se } x \in [b_n, b_{n+1}] \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ provaremos a continuidade de f_n. Seja $(x_i, t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para (x,t) em K. Precisamos mostrar que $f_n(x_i,t_i)$ converge para $f_n(x,t)$.

Se $x \in [b_n, a_{n+1})$, temos que $x \in supp(g_n) \cap D((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e, portanto, $t = g_n(x)$. Como $t \neq 0$, podemos assumir que $t_i = g_n(x_i)$. Pela continuidade de g_n temos $g_n(x_i)$ convergindo para $g_n(x)$ e, portanto, $f_n(x_i,t_i) = 1 - g_n(x_i)$ convergindo para $f_n(x,t) = 1 - g_n(x)$.

Analogamente, se $x \in (a_{n+1}, b_{n+1}]$ temos que $t = g_{n+1}(x)$ e $f_n(x_i, t_i)$ converge para $f_n(x,t)$.

Se $x = a_{n+1}$, tanto $g_n(x_i)$ como $g_{n+1}(x_i)$ convergem para 0, para $i \in \mathbb{N}$. Então $f_n(x_i,t_i)$ converge para $1 = f_n(x,t)$.

Se $x \leq b_n$ ou $x \geq b_{n+1}$ é fácil verificar que $f_n(x_i,t_i)$ converge para 0, que é igual a $f_n(x,t)$.

Seja L a extensão de K por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vamos provar que L é desconexo. Para isso, precisamos mostrar que $[-1,0]\times\{0\}\times\{0\}$ – que é claramente um subconjunto fechado de L – é aberto em L.

A prova é análoga a do Teorema 2.15. Seja $z_n = (x_n, y_n, t_n)$ uma sequência em $L \setminus [-1,0]\times\{0\}\times\{0\}$ convergindo para $z = (x,y,t) \in L$. Precisamos provar que $z \notin L$.

Podemos assumir que $z_n \in Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n | D((f_n)_{n\in\mathbb{N}}))$, pois o gráfico é denso em L. Em particular, $(x_n, y_n) \in D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Observe que $\{0\}\times(0,1)$ está contido em K, mas é disjunto de $D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Logo podemos assumir que $x_n \neq 0$, para todo n. Além disso, note que

$$\pi^{-1}_{L,[-1,1]}([-1,0)) = [-1,0)\times\{0\}\times\{0\},$$

pois $[-1,0) \subset D((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e $[-1,0)\times\{0\} \subset D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Logo, também podemos assumir que $x_n > 0$, para todo n.

Suponha $z \in [-1,0]\times\{0\}\times\{0\}$. Em particular, $z = (x,0,0)$, para algum

x. Podemos assumir que $y_n < \frac{1}{2}$, para todo n. Como $x_n > 0$, existe i tal que $x_n \in [b_i, b_{i+1}]$. Logo,

$$t_n = f_i(x_n, y_n) = 1 - y_n > \frac{1}{2},$$

o que contradiz que t_n converge para 0. $\square$

Antes de enunciarmos o principal teorema deste capítulo, necessitamos do seguinte lema:

Lema 2.17. *Sejam K um espaço topológico compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_1(K)$ uma sequência de funções duas a duas disjuntas. Suponha que existe um fechado $L \subseteq K$ tal que $supp(f_n) \subset L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$K((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = L((f_n|L)_{n\in\mathbb{N}}) \bigcup (\overline{K \setminus L}) \times \{0\}.$$

Demonstração. Denotaremos por D o conjunto $D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Notemos primeiramente que $K \setminus L$ é um conjunto aberto de K onde f_n é nula para todo n. Temos então que $K \setminus L \subset D$. Como $supp(f_n) \subset L$, temos que $V \cap supp(f_n) \neq \emptyset$ se e somente se $(V \cap L) \cap supp(f_n|L) \neq \emptyset$, sempre que $n \in \mathbb{N}$ e V é aberto em K. Logo,

$$D((f_n|L)_{n\in\mathbb{N}}) = D \cap L.$$

Concluímos então que

$$L((f_n|L)_{n\in\mathbb{N}}) = \overline{Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n|D \cap L)}.$$

Isso é suficiente para provar o lema, já que temos as seguintes igualdades:

$$K((f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \overline{Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n|D)} = \overline{Gr(\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n|D \cap L) \cup (K \setminus L) \times \{0\}}.$$

$\square$

O teorema principal desse capítulo nos mostra que partindo de qualquer espaço topológico compacto conexo e metrizável, podemos obter um espaço desconexo depois de três extensões sucessivas.

Teorema 2.18. *Seja K_0 um continuum infinito qualquer. Então existem compactos K_1, K_2 e K_3 tais que K_i é uma extensão de K_{i-1} por funções contínuas, para $1 \leq i \leq 3$, e K_3 é desconexo.*

Demonstração. Usando a metrizabilidade de K_0, fixe $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente em K_0 e seja $\bar{x}$ o seu limite. Seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de abertos dois a dois disjuntos tal que $\bar{x}_n \in U_n$ e $diam(U_n) \leq \frac{1}{n}$ (i.e., para uma métrica fixada d sobre K_0, temos $d(x,y) \leq \frac{1}{n}$, para todo $x, y \in U_n$). Usando o Lema de Urysohn e a normalidade, encontramos, para cada n, uma função $e_n : K_0 \longrightarrow [0,1]$ cujo suporte está contido em U_n e tal que $e_n(\bar{x}_n) = 1$. Pela conexidade de K_0, $e_n[K_0] = [0,1]$. Defina $K_1 = K_0((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Afirmação 2.18.1. *Podemos assumir que $e_n^{-1}[\{\frac{1}{2}\}]$ é raro em K_0.*

Como espaços compactos metrizáveis satisfazem a condição de cadeia enumerável, existe $r \in [0,1]$ tal que $e_n^{-1}[\{r\}]$ é raro. Caso contrário, teríamos uma quantidade não enumerável de abertos dois a dois disjuntos em K_0. Tome $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma função contínua, bijetora e crescente tal que $h(r) = \frac{1}{2}$. Troque e_n por $h \circ e_n$. Repita o processo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação 2.18.2. $D((e_n)_{n\in\mathbb{N}}) = K_0 \setminus \{\bar{x}\}$.

Para provarmos a afirmação notemos que para toda vizinhança aberta U de $\bar{x}$, existe um conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset U$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus F$. Como $supp(e_n) \subset U_n$ e é não vazio, temos que $\bar{x} \in K_0 \setminus D((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Por outro lado, se $x \neq \bar{x}$, por Hausdorff existem abertos disjuntos V e U tais que $x \in V$ e $\bar{x} \in U$. Temos que $U_n \subset U$ para todos, exceto uma quantidade finita de $n \in \mathbb{N}$, o que nos permite concluir que $x \in D((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$ e isso encerra a prova da afirmação.

Afirmação 2.18.3. $\pi^{-1}_{K_1,K_0}[\bar{x}] = \{\bar{x}\} \times [0,1]$.

Seja $t \in [0,1]$. Usando que toda e_n é sobrejetora em $[0,1]$, tome $y_n \in U_n$ tal que $e_n(y_n) = t$. Claramente, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}$ e todo par (y_n, t_n) pertence ao gráfico de $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} e_n | D((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$, que está contido em K_1. Logo, pela compacidade de K_1, temos que $(\bar{x}, t) \in K_1$, o que prova a afirmação.

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em $[0,1]$ ambas convergindo para $\frac{1}{2}$ tais que $a_{n+1} < b_n < a_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $\tilde{f}_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ com suporte contido em $[a_{n+1}, a_n]$ e tal que $\tilde{f}_n(b_n) = 1$. Suponha também que $\tilde{f}_n$ é monótona em cada intervalo $[a_{n+1}, b_n]$ e $[b_n, a_n]$, como na definição de g_n na prova do Teorema 2.15.

Tome $f_n(x,t) = \tilde{f}_n(t)$, para todo $(x,t) \in K_1 \subset K_0 \times [0,1]$. Defina $K_2 = K_1((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Afirmação 2.18.4. $K_1 \setminus (K_0 \times \{\frac{1}{2}\}) \subset D((f_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

A afirmação segue do fato de que $D((\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}) = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Se tomarmos $t \neq \frac{1}{2}$ e V uma vizinhança aberta de t que intersecta $supp(\tilde{f}_n)$ para finitos n's, o conjunto $(K_0 \times V) \cap K_1$ intersecta $supp(f_n)$ para finitos n's, já que $f_n(x,t) = \tilde{f}_n(t)$.

Seja K' a extensão de $[0,1]$ por $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $\tilde{g}_n : K' \longrightarrow [0,1]$ definida como a f_n na prova do teorema 2.16. Temos então $K'((\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ desconexo. Denote essa extensão por K''. Defina

$$g_n(x,y,z) = \tilde{g}_n(y,z)$$

sobre K_2.

Afirmação 2.18.5. *Toda g_n é bem definida e contínua, e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções duas a duas disjuntas.*

A continuidade e o fato de serem funções duas a duas disjuntas segue imediatamente da definição, já que a projeção é contínua. Para provar que as funções estão bem definidas, precisamos mostrar que $(y,z) \in K'$, sempre que $(x,y,z) \in K_2$. Se $y \neq \frac{1}{2}$, segue da afirmação 2.18.4 que $z = f_n(x,y)$ e, portanto, $z = \tilde{f}_n(y)$. Temos então que $(y,z) \in K'$. Se $y = \frac{1}{2}$, pela construção temos que $(y,z) \in K'$ para todo $z \in [0,1]$, provando a afirmação. Tomamos agora $K_3 = K_2((g_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Afirmação 2.18.6. $K_3 \cap (K_0 \times \{\frac{1}{2}\} \times [0,1]^2)$ *é raro em* $K_3 \cap (K_0 \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]^2)$.

Pela afirmação 2.18.1, $K_1 \cap (K_0 \times \{\frac{1}{2}\})$ é raro em K_1. Usando o lema 2.17, $K_2 \cap (K_0 \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1])$ é a extensão de $K_1 \cap (K_0 \times [\frac{1}{2}, 1])$ pelas restrições de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lembrando que $f_n(x,t) = 0$, se $t < \frac{1}{2}$. Portanto, como extensões preservam conjuntos raros na projeção inversa (veja [Ko2]), concluímos que $K_2 \cap (K_0 \times \{\frac{1}{2}\} \times [0,1])$ é raro em $K_2 \cap (K_0 \times [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1])$. Basta agora repetir os mesmos argumentos na próxima extensão, e com isso encerramos a prova da afirmação.

Seja $L = K_3 \cap (K_0 \times [0, \frac{1}{2}] \times \{(0,0)\})$. Claramente L é um subespaço fechado de K_3. Para concluir a desconexidade de K_3, é suficiente provar a seguinte afirmação:

Afirmação 2.18.7. $\overline{K_3 \setminus L} \cap L = \emptyset$.

Por contradição, suponha que existe uma sequência (x_n, t_n, s_n, r_n) em $K_3 \setminus L$ convergindo para $(x, t, s, r) \in L$. Pela metrizabilidade e utilizando a afirmação 2.18.6 podemos assumir que $t_n > \frac{1}{2}$, para todo n. Portanto, como provamos, $r_n = \tilde{g}_m(t_n, s_n)$, para algum m. Então temos $(t_n, s_n, r_n) \in K''$. Claramente temos $(t, s, r) = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. Isso contradiz o argumento final na prova do teorema 2.16, quando provamos a desconexidade de K''.

$\square$

Capítulo 3

Espaços de Banach da forma $C(K)$ essencialmente incomparáveis

Dizemos que dois espaços de Banach são totalmente incomparáveis se nenhum subespaço de dimensão infinita de um espaço for isomorfo a um subespaço do outro. Em [Ga], Gasparis construiu uma família de tamanho 2^ω de espaços de Banach indecomponíveis, separáveis e dois a dois totalmente incomparáveis. Como os espaços são separáveis, 2^ω é o maior tamanho possível para uma tal família. Sabemos que $C(K)$ de dimensão infinita possui uma cópia de c_0 como subespaço e, portanto, espaços de Banach da forma $C(K)$ não podem ser totalmente incomparáveis. Utilizaremos neste capítulo uma noção mais fraca de incomparabilidade, devida a Aiena e González (veja [AG]), chamada *incomparabilidade essencial*, apresentada na Definição 3.12. Em [Fa3], Fajardo constrói, assumindo $\diamondsuit$, uma família $(C(K_\xi))_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ de espaços de Banach indecomponíveis e dois a dois essencialmente incomparáveis. No exemplo construído por Fajardo, cada K_ξ era um espaço de Koszmider. Unindo as técnicas presentes em [Fa2] e [Fa3] construíremos, assumindo $\diamondsuit$, uma família $(K_\xi)_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ de espaços conexos e hereditariamente Koszmider tais que $C(K_\xi)$ e $C(K_\eta)$ são essencialmente incomparáveis, para todo $\xi \neq \eta$. Como espaços hereditariamente Koszmider não contêm cópia de $\beta\mathbb{N}$ e nem sequências convergentes não trivias, cada espaço K_ξ responde positivamente ao *Problema de Efimov*, sobre a existência de um compacto que não possui sequências convergentes não triviais nem $\beta\mathbb{N}$ como subespaço. O problema de Efimov já havia sido respondido positivamente em 1975 por Fedorchuk (veja [Fed]) assumindo apenas CH. O problema continua em aberto em ZFC, e tão pouco sabemos se é consistente com ZFC a negação do problema de Efimov.

3.1 O Axioma $\diamondsuit$

Apresentaremos nesta seção a definição e também alguns resultados básicos envolvendo o axioma $\diamondsuit$ (lê-se *diamante*). O axioma $\diamondsuit$ é relativamente consistente com ZFC, valendo no universo construtível de Gödel. Além disso, como veremos a seguir, o axioma $\diamondsuit$ implica CH. Para maiores referências indicamos [Ku], [Je] e [Ve].

Definição 3.1. Dizemos que um subconjunto C de ω_1 é *fechado ilimitado* se é ilimitado e $supB \in C$, para todo $B \subseteq C$ enumerável. Dizemos que um subconjunto S de ω_1 é *estacionário* se intersecta todo fechado ilimitado.

Note que subconjuntos estacionários de ω_1 são ilimitados pois o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : \alpha > \beta\}$ é fechado ilimitado para cada $\beta < \omega_1$.

O próximo lema é um resultado bastante conhecido, que pode ser encontrado em [Ku, Capítulo II, Lema 6.8].

Lema 3.2. *A intersecção de uma família enumerável de fechados ilimitados de ω_1 é um conjunto fechado ilimitado. Em particular, se S é estacionário e C é fechado ilimitado, então $S \cap C$ é estacionário.*

Axioma $\diamondsuit$. Existe uma sequência $(X_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ tal que $X_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in \omega_1$, e o conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : X \cap \alpha = X_\alpha\}$ é estacionário para todo $X \subseteq \omega_1$.

Notação. A sequência $(X_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ é chamada $\diamondsuit$-sequência.

Não é difícil ver que o axioma $\diamondsuit$ implica CH, conforme demonstrado no lema abaixo.

Lema 3.3. $\diamondsuit \to CH$.

Demonstração. Seja $X \subseteq \omega$ um subconjunto qualquer. Como conjuntos estacionários são ilimitados, existe $\alpha > \omega$ tal que $X = X \cap \alpha = X_\alpha$. Logo $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ contém todos os subconjuntos de ω e isso encerra a demonstração do lema. $\square$

O Próximo lema nos será útil ao longo do capítulo. Usaremos ${}^{\alpha}2$ para denotar o conjunto das funções de α em $2 = \{0, 1\}$ e ${}^{\omega_1}2$ para denotar o conjunto das funções de ω_1 em $2 = \{0, 1\}$.

Lema 3.4. *O axioma $\diamondsuit$ implica:*

(a) *Se $(B_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma sequência de conjuntos de tamanho ω_1, existe uma sequência $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $x_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha}B_\beta$ e, para todo elemento $x \in \Pi_{\alpha<\omega_1}B_\alpha$, o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : x|\alpha = x_\alpha\}$ é estacionário;*

(b) *Se $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma sequência de conjuntos de tamanho ω_1, existe uma sequência $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ tal que $t_\alpha, s_\alpha \in {}^{\alpha}2$, $x_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha}X_\beta$ e para todo $t, s \in {}^{\omega_1}2$ e $x \in \Pi_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$ o conjunto*

$$\{\alpha < \omega_1 : t|\alpha = t_\alpha, s|\alpha = s_\alpha \text{ e } x|\alpha = x_\alpha\}$$

é estacionário.

Demonstração. Para provarmos (a) seja $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ uma $\diamondsuit$-sequência. Seja também $\{\xi_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma sequência crescente em ω_1 definida da seguinte maneira: $\xi_{\alpha+1} = \xi_\alpha + \omega$ e $\xi_\alpha = sup\{\xi_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$ para α limite.

Para cada $\alpha < \omega_1$ seja $\phi_\alpha : \mathcal{P}([\xi_\alpha, \xi_{\alpha+1})) \to B_\alpha$ uma função bijetora, que existe pois $\diamondsuit \to$ CH. Definimos então $x_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha}B_\beta$ dado por

$$x_\alpha(\beta) = \phi_\beta(X_{\xi_\alpha} \cap [\xi_\beta, \xi_{\beta+1}]),$$

para todo $\beta < \omega_1$.

Mostraremos que a sequência $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ satisfaz (a). Seja $x \in \Pi_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. Seja $X = \cup\{\phi_\alpha^{-1}(x(\alpha)) : \alpha < \omega_1\}$. Temos $x|\alpha = x_\alpha$ se, e somente se, $X \cap \xi_\alpha = X_{\xi_\alpha}$.

Pelo Lema 3.2 temos que o conjunto

$$\{\alpha < \omega_1 : X \cap \xi_\alpha = X_{\xi_\alpha}\} = \{\beta < \omega_1 : X \cap \beta = X_\beta\} \cap \{\xi_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

é estacionário. Mas

$$\{\alpha < \omega_1 : X \cap \xi_\alpha = X_{\xi_\alpha}\} = \{\alpha < \omega_1 : x|\alpha = x_\alpha\},$$

concluindo a prova do item (a).

Vamos agora provar o item (b). Para cada $\alpha < \omega_1$ defina $B_\alpha = 2 \times 2 \times X_\alpha$. Aplicando o item (a) para $(B_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, obtemos uma sequência $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $y_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha} B_\beta$ e, para todo $y \in \Pi_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$, o conjunto

$$\{\alpha < \omega_1 : y|\alpha = y_\alpha\}$$

é estacionário. O resultado segue da identificação de y_α com $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha)$. □

O lema a seguir será utilizado durante a construção indutiva dos espaços K_ξ para garantir certas condições topológicas. Este mesmo lema foi também utilizado por Fajardo, em [Fa2].

Lema 3.5. *Seja $Y \subseteq [0,1]^{\omega_1}$ e seja $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ uma sequência densa em Y. Então $\{\alpha < \omega_1 : (x_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[Y]\}$ é fechado ilimitado em ω_1.*

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que o conjunto a seguir definido por $C = \{\alpha < \omega_1 : (x_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[Y]\}$ é fechado em ω_1, i.e., para toda sequência enumerável crescente em C o supremo de tal sequência continua em C. Seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente em C e tome α o supremo de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em ω_1. Vamos provar que $\alpha \in C$, o que significa dizer que $(x_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[Y]$.

Seja U um aberto elementar de $[0,1]^\alpha$ que intersecta $\pi_\alpha[Y]$. Como U depende de um número finito de coordenadas, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que α_n contém todas essas coordenadas. Temos então que $U = \pi_{\alpha_n}^{-1}[\pi_{\alpha_n}[U]]$ e $\pi_{\alpha_n}[U]$ é aberto em $[0,1]^{\alpha_n}$. Logo, como $\alpha_n \in C$, existe $\beta < \alpha$ tal que $x_\beta|\alpha_n \in \pi_{\alpha_n}[U]$ e portanto $x_\beta|\alpha \in U$.

Vamos agora provar que C é ilimitado em ω_1. Para isso, seja α_0 um ordinal em ω_1. Pela continuidade da projeção, $(x_\beta|\alpha_0)_{\beta<\omega_1}$ é denso em $\pi_{\alpha_0}[Y]$. Como $\pi_{\alpha_0}[Y]$ tem peso enumerável, para cada vizinhança aberta de uma base enumerável de $\pi_{\alpha_0}[Y]$ tomamos algum $x_\beta|\alpha_0$ pertencente a ela. Assim obtemos $\alpha_1 < \omega_1$, que podemos supor maior que α_0, tal que $(x_\beta|\alpha_0)_{\beta<\alpha_1}$ é denso em $\pi_{\alpha_0}[Y]$. Iterando esse processo, encontramos uma sequência crescente $(\alpha_n)_{n\in\omega_1}$ tal que $(x_\beta|\alpha_n)_{\beta<\alpha_{n+1}}$ é denso em $\pi_{\alpha_n}[Y]$. Tomando α o supremo de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e repetindo os argumentos anteriores, concluímos que $(x_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[Y]$, provando que $\alpha \in C$. □

Iremos reduzir o problema de construir espaços de Banach essencialmente incomparáveis a um problema puramente combinatório. Para isso, introduziremos um lema combinatório, que é uma variação do princípio $A(2^{(2^\omega)})$ utilizado por Fajardo, em [Fa3]. Na demonstração do lema identificaremos 2^{ω_1} com o conjunto ${}^{\omega_1}2$ das funções de ω_1 em $2 = \{0,1\}$.

Lema 3.6. ($\diamondsuit$) *Seja $\kappa = 2^{\omega_1}$. Se $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma sequência de conjuntos de tamanho ω_1, então existem funções $\varphi_1, \varphi_2 : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa) \setminus \{\emptyset\}$ e uma sequência $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, com $x_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha} X_\beta$ tais que:*

1. *Para todo $\beta \leq \alpha < \omega_1$ e $i, j \in \{1,2\}$, temos que ou $\varphi_j(\alpha) \subseteq \varphi_i(\beta)$ ou $\varphi_j(\alpha) \cap \varphi_i(\beta) = \emptyset$;*

2. *Para todo $x \in \Pi_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ e $\xi, \eta < \kappa$ o conjunto*

$$\{\alpha < \omega_1 : x|\alpha = x_\alpha, \xi \in \varphi_1(\alpha), \eta \in \varphi_2(\alpha) \text{ e, se } \xi \neq \eta, \varphi_1(\alpha) \neq \varphi_2(\alpha)\}$$

é estacionário.

Demonstração. Assumamos o princípio $\diamondsuit$. Então, pelo Lema 3.3 sabemos que vale CH, isto é, sabemos que $\omega_1 = 2^\omega$. Além disso, se $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma sequência de conjuntos de tamanho $\omega_1 = 2^\omega$, o item (b) do Lema 3.4 nos diz que existe uma sequência $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ tal que $t_\alpha, s_\alpha \in {}^\alpha 2$, $x_\alpha \in \Pi_{\beta<\alpha} X_\beta$ e para todo $t, s \in {}^{\omega_1}2$ e $x \in \Pi_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, o conjunto

$$(*) \qquad \{\alpha < \omega_1 : t|\alpha = t_\alpha, s|\alpha = s_\alpha \text{ e } x|\alpha = x_\alpha\}$$

é estacionário.

Agora, para cada $\alpha < \omega_1 = 2^\omega$, defina $\varphi_1(\alpha) = \{t \in {}^{\omega_1}2 : t|\alpha = t_\alpha\}$, $\varphi_2(\alpha) = \{s \in {}^{\omega_1}2 : s|\alpha = s_\alpha\}$ e considere a sequência $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Para ver que vale a condição 1, note que se $\beta \leq \alpha$ e $t_\alpha|\beta = t_\beta$, então $\varphi_1(\alpha) \subseteq \varphi_1(\beta)$, e se $t_\alpha|\beta \neq t_\beta$, então $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_1(\beta) = \emptyset$. Com efeito, suponha $\beta \leq \alpha$ e $t_\alpha|\beta = t_\beta$. Tomando $t \in \varphi_1(\alpha)$ segue que t é uma função de ω_1 em 2 que satisfaz $t|\alpha = t_\alpha$. Como $\beta \leq \alpha$ temos $t|\beta = (t|\alpha)|\beta = t_\alpha|\beta = t_\beta$, provando que $t \in \varphi_1(\beta)$ donde segue a inclusão desejada. Suponha agora $t_\alpha|\beta \neq t_\beta$. Se $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_1(\beta) \neq \emptyset$ existiria função $t \in {}^{\omega_1}2$ satisfazendo $t|\alpha = t_\alpha$ e $t|\beta = t_\beta$ e, como $\beta \leq \alpha$, teríamos $t_\beta = t|\beta = (t|\alpha)|\beta = t_\alpha|\beta$, o que é uma contradição. O mesmo argumento pode ser repetido para outras combinações de φ_1 e φ_2 : Se $\beta \leq \alpha$ e $s_\alpha|\beta = s_\beta$, então $\varphi_2(\alpha) \subseteq \varphi_2(\beta)$, e se $s_\alpha|\beta \neq s_\beta$, então $\varphi_2(\alpha) \cap \varphi_2(\beta) = \emptyset$. Se $\beta \leq \alpha$ e $t_\alpha|\beta = s_\beta$, então $\varphi_1(\alpha) \subseteq \varphi_2(\beta)$, e se $t_\alpha|\beta \neq s_\beta$, então $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_2(\beta) = \emptyset$. Por fim, se $\beta \leq \alpha$ e $s_\alpha|\beta = t_\beta$, então $\varphi_2(\alpha) \subseteq \varphi_1(\beta)$, e se $s_\alpha|\beta \neq t_\beta$, então $\varphi_2(\alpha) \cap \varphi_1(\beta) = \emptyset$.

Mostraremos agora que vale a condição 2, lembrando que estamos identificando 2^{ω_1} com o conjunto das funções de ω_1 em 2. Com efeito, sejam $t, s \in {}^{\omega_1}2$ com $t \neq s$ e defina β o menor ordinal em ω_1 satisfazendo $t(\beta) \neq s(\beta)$. Como o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : \alpha > \beta\}$ é fechado ilimitado e $(*)$ é estacionário, o Lema 3.2 nos diz que a intersecção desses conjuntos é ainda um conjunto estacionário. □

3.2 Resultados auxiliares

Lema 3.7. *Sejam K um espaço topológico compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas duas a duas disjuntas de K em $[0,1]$. Temos então $\Delta((f_n)_{n\in a}) \subset \Delta((f_n)_{n\in b})$ para todos subconjuntos infinitos $a \subset b \subset \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como vale que $\Delta((f_n)_{n\in a}) = K \setminus D((f_n)_{n\in a})$ e também que $\Delta((f_n)_{n\in b}) = K \setminus D((f_n)_{n\in b})$, basta mostrar que $D((f_n)_{n\in b}) \subset D((f_n)_{n\in a})$.

Seja, pois, $x \in D((f_n)_{n\in b})$. Então existe um aberto U de K contendo x tal que $\{n \in b : U \cap supp(f_n) \neq \emptyset\}$ é finito. Como $a \subset b$, temos também que $\{n \in a : U \cap supp(f_n) \neq \emptyset\}$ é finito, donde segue que $x \in D((f_n)_{n\in a})$. Isto encerra a prova do Lema. $\square$

A Proposição a seguir é uma pequena variação do Teorema 5.1 de [Fa2] e será bastante importante na construção dos espaços K_ξ. Dizemos que uma sequência de fechados $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a um ponto x se para toda vizinhança aberta U de x temos $F_n \subseteq U$ para todos, exceto finitos, $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.8. *Seja K um espaço métrico compacto sem pontos isolados. Dados*

(a) *Uma sequência de funções contínuas duas a duas disjuntas $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de K em $[0,1]$;*

(b) *Uma sequência relativamente discreta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos distintos de K tais que $x_n \notin supp(f_m)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$;*

(c) *Um conjunto enumerável $\mathcal{P}$ de pares $((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (G_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tais que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de subconjuntos fechados disjuntos de K que convergem para o mesmo ponto de K;*

(d) *Um $\varepsilon > 0$;*

(e) *Uma sequência limitada $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ de medidas regulares sobre K tais que $|\int f_n d\mu_n| > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

existem $\delta > 0$, $b' \subset a \subset \mathbb{N}$ infinitos e funções contínuas $f'_n : K \longrightarrow [0,1]$ tais que $supp(f'_n) \subset supp(f_n)$ e para todo $b \subseteq b'$ temos:

(f) *$|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ e $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, para todo $n \in a$;*

(g) *$L = K((f'_n)_{n\in b})$ é uma extensão completa;*

(h) *$(\pi^{-1}_{L,K}[x_n])_{n\in b}$ e $(\pi^{-1}_{L,K}[x_n])_{n\in a\setminus b}$ convergem para o mesmo ponto em L;*

(i) *Para todo $((F_n)_{n\in N}, (G_n)_{n\in N}) \in \mathcal{P}$ existem $N', N'' \subset \mathbb{N}$ infinitos e $z \in L$ tais que $(\pi^{-1}_{L,K}[F_n])_{n\in N'}$ e $(\pi^{-1}_{L,K}[G_n])_{n\in N''}$ convergem para z.*

Demonstração. Usando a metrizabilidade de K existe $a' \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(x_n)_{n\in a'}$ é uma sequência convergente. Pelo lema 2.11 existem subconjuntos infinitos $b'' \subset a \subset a' \subset \mathbb{N}$ e funções contínuas $(f'_n)_{n\in a}$ satisfazendo o item (f) e o fato de que $L = K((f'_n)_{n\in b'})$ é uma extensão completa, para todo $b' \subset b''$. Além disso, tomando Z o conjunto de todos os limites de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (G_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{P}$, pelo item (g) do lema 2.11 podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\Delta((f'_n)_{n\in b''})$ é unitário ou disjunto de $Z \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim_{n\in a'} x_n\}$. Podemos assumir também que b'' é co-infinito em a.

Resta-nos provar os itens (h) e (i). Em outras palavras, temos que provar que algumas sequências que não podem ser separadas em K continuam não se separando em L.

Pelo lema 3.3 de [Fa2], se L é uma extensão de K por $(f'_n)_{n\in b'}$, para algum $b' \subset b''$, então $|\pi^{-1}_{L,K}(x)| = 1$ para todo $x \notin \Delta((f'_n)_{n\in b'})$.

Agora nós vamos separar nossa construção em dois casos, lembrando que pelo Lema 3.7 o mesmo vale para todo $b' \subset b''$:

Caso 1 $\Delta((f'_n)_{n\in b''})$ é disjunto de $Z \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim_{n\in a'} x_n\}$.

Sejam $((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (G_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{P}$ e z o limite de ambas as sequências. Tome z' o único ponto tal que $\pi_{L,K}(z') = z$. Como L é o gráfico de uma função contínua quando restrita a uma vizinhança aberta de z, temos que $\pi^{-1}[F_n]$ e $\pi^{-1}[G_n]$ convergem para z', em L. Isso prova o item (i), e o item (h) é provado analogamente.

Caso 2 $\Delta((f'_n)_{n\in b''})$ é unitário.

Seja y o único ponto em tal conjunto. Então $supp(f'_n) \xrightarrow{n\in b''} y$. De fato, se não fosse verdade, existiria uma vizinhança aberta V de y e um subconjunto infinito $c \subset b''$ tal que, para todo $n \in c$, existe $y_n \in supp(f'_n) \setminus V$. Tomando y' ponto de acumulação de $\{y_n : n \in c\}$ teríamos que $y' \in \Delta((f'_n)_{n\in b''})$ e $y' \neq y$, contradizendo que $\Delta((f'_n)_{n\in b''})$ é unitário.

Para simplificar a notação assumiremos que $((\{x_{k_n}\})_{n\in\mathbb{N}}, (\{x_{l_n}\})_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{P}$, onde $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são enumerações de a' e $\mathbb{N} \setminus a'$, respectivamente. Isto nos permite cuidar apenas do item (i), sendo o item (h) uma consequência imediata. Em particular, assumimos que $\lim_{n\in a'} x_n \in Z$.

Se $y \notin Z$ procederemos como no Caso 1. Para os elementos de $\mathcal{P}$ cujo limite não pertence à Z, também procederemos como no Caso 1 para provar o item (i).

Seja $((F_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}, (G_{n,m})_{n\in\mathbb{N}})$ uma enumeração (para $m \in \mathbb{N}$) de todos os elementos de $\mathcal{P}$ tais que $\lim_{n\in\mathbb{N}} F_{n,m} = \lim_{n\in\mathbb{N}} G_{n,m} = y$. Esta enumeração pode ter repetições, então não precisaremos trabalhar à parte para considerar o caso em que existam apenas uma quantidade finita de elementos em $\mathcal{P}$ nestas condições.

Passando a uma subsequência, podemos assumir que $y \notin supp(f'_n)$, que $y \notin F_{n,m}$ e $y \notin G_{n,m}$, para todos n, m.

Precisaremos agora da seguinte Afirmação:

Afirmação 3.8.1. *Existem subconjuntos infinitos $b', c_m, d_m \subset \mathbb{N}$, para $m \in \mathbb{N}$, tais que $F_{i,m} \cap supp(f'_k) = \emptyset$ e $G_{j,m} \cap supp(f'_k) = \emptyset$ para todos $i \in c_m$, $j \in d_m$, $m \in \mathbb{N}$ e $k \in b'$.*

Demonstração: Seja U_0 qualquer vizinhança aberta de y. Suponha que tenhamos definido U_n, $(k_j)_{j<n}$ e $(l_j)_{j<n}$ (Os $l'_j s$ são tomados em b''). Tomamos k_n tal que $k_n > k_j$, para todo $j < n$, e $F_{k_n,m} \subset U_n$, para todo $m \leq n$. Seja $V_n \subset U_n$ uma vizinhança aberta de y disjunta de $F_{k_j,m}$, para todos $j \leq n$ e $m \leq j$. Tome $l_n \in b''$ tal que $l_n > l_j$, para todo $j < n$, e $supp(f'_{l_n}) \subset V_n$. Seja U_{n+1} uma vizinhança aberta de y disjunta de $supp(f'_{l_n})$.

Defina $\tilde{b} = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $c_m = \{k_n : n \geq m\}$. Para todos $m, j \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$. temos que $F_{k_n,m} \subset U_n \setminus V_n$ e $supp(f'_{l_j}) \subset V_j \setminus U_{j+1}$. Se $n \leq j$ então $F_{k_n,m} \cap V_n = \emptyset$ e $supp(f'_{l_j}) \subset V_j \subset V_n$. Se $n > j$ então $F_{k_n,m} \subset U_n \subset U_j$ e $supp(f'_{l_j}) \cap U_j = \emptyset$. Em ambos os casos temos $F_{k_n,m} \cap supp(f'_{l_j}) = \emptyset$. Procedendo analogamente para $G_{n,m}$, nós obtemos $b' \subseteq \tilde{b}$ e d_m, o que encerra a prova da Afirmação. ∎

Tome $b \subset b'$, defina $L = K((f'_n)_{n\in b})$ e denote $\pi_{L,K}$ por π.

Pela Afirmação, temos que $\lim_{n\in c_m} \pi^{-1}[F_{n,m}] = (y, 0)$ e também que $\lim_{n\in d_m} \pi^{-1}[G_{n,m}] = (y, 0)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Suponha agora que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirjam para um ponto z distinto de y. Então, como no Caso 1, π^{-1} é um homeomorfismo em uma vizinhança aberta de z. Portanto, $\pi^{-1}[F_n]$ e $\pi^{-1}[G_n]$ convergem ambos para $\pi^{-1}(z)$, encerrando a prova da Proposição. $\square$

3.3 Construção dos espaços K_ξ

Assuma $\diamondsuit$. Usando o Lema 3.6 fixamos enumerações $\{f_n(\alpha) : n \in \omega\}$, $\{g_n(\alpha) : n \in \omega\}$, $\varepsilon(\alpha)$, $\{\mu_n(\alpha) : n \in \omega\}$, $\{x_n(\alpha) : n \in \omega\}$, $i(\alpha)$, U_α, V_α, A_α, $\mathcal{B}_\alpha$, para $\alpha \in \omega_1$, e funções φ_1 e φ_2 tais que :

A.1. $\{f_n(\alpha) : n \in \omega\}$ são funções contínuas de $[0,1]^{\omega_1}$ em $[0,1]$;

A.2. $\{g_n(\alpha) : n \in \omega\}$ são funções contínuas de $[0,1]^{\omega_1}$ em $[0,1]$;

A.3. $\varepsilon(\alpha) > 0$;

A.4. $(\mu_n(\alpha))_{n\in\omega}$ é uma sequência limitada de funções de $\mathcal{B}_\alpha$ em $\mathbb{R}$;

A.5. $(x_n(\alpha))_{n\in\omega}$ é uma sequência de pontos de $[0,1]^\alpha$;

A.6. $\varphi_1, \varphi_2 : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}(2^{2^\omega}) \setminus \{\emptyset\}$;

A.7. Para todo $\beta \leq \alpha < \omega_1$ e $i, j \in \{1,2\}$, temos que ou $\varphi_j(\alpha) \subseteq \varphi_i(\beta)$ ou $\varphi_j(\alpha) \cap \varphi_i(\beta) = \emptyset$;

A.8. $i(\alpha) \in \{0,1\}$;

A.9. U_α e V_α são uniões enumeráveis de abertos elementares de $[0,1]^{\omega_1}$ tais que $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$ e $\overline{U}_\alpha \cap \overline{V}_\alpha \neq \emptyset$;

A.10. A_α e B_α são subconjuntos enumeráveis de $[0,1]^\alpha$;

e, dados

B.1. uma sequência $\{f_n : n \in \omega\}$ de funções contínuas de $[0,1]^{\omega_1}$ em $[0,1]$;

B.2. uma sequência $\{g_n : n \in \omega\}$ de funções contínuas de $[0,1]^{\omega_1}$ em $[0,1]$;

B.3. um $\varepsilon > 0$;

B.4. uma sequência $\{\mu_n : n \in \omega\}$ limitada de funções de $\mathcal{B}_{\omega_1}$ em $\mathbb{R}$ que representam medidas de Radon;

B.5. uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ relativamente discreta em $[0,1]^{\omega_1}$;

B.6. um $\xi < \omega_1$;

B.7. um $\eta < \omega_1$;

B.8. um $i \in \{0,1\}$;

B.9. U e V uniões enumeráveis de abertos elementares de $[0,1]^{\omega_1}$ tais que $U \cap V = \emptyset$ e $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$;

B.10. $(x_\beta)_{\beta<\omega_1}$ e $(y_\beta)_{\beta<\omega_1}$ seqüências em $[0,1]^{\omega_1}$;

o conjunto dos $\alpha < \omega_1$ tais que

C.1. $f_n(\alpha) = f_n$, para todo n;

C.2. $g_n(\alpha) = g_n$, para todo n;

C.3. $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon$;

C.4. $\mu_n(\alpha) = \mu_n|\mathcal{B}_\alpha$, para todo n;

C.5. $x_n(\alpha) = x_n|\alpha$, para todo n;

C.6. $\xi \in \varphi_1(\alpha)$;

C.7. $\eta \in \varphi_2(\alpha)$ e $\varphi_1(\alpha) \neq \varphi_2(\alpha)$, se $\xi \neq \eta$;

C.8. $i(\alpha) = i$;

C.9. $U_\alpha = U$ e $V_\alpha = V$;

C.10. $\{x_\beta|\alpha : \beta \in \alpha\} = A_\alpha$ e $\{y_\beta|\alpha : \beta \in \alpha\} = B_\alpha$.

é estacionário.

Temos agora três casos para analisar:

Caso 1 $i(\alpha) = 0$ e $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$;

Caso 2 $i(\alpha) = 1$ e $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$;

Caso 3 $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_2(\alpha) = \emptyset$.

No **Caso 1** vamos matar operadores em $C(K_\xi(\alpha))$ que não são multiplicadores fracos, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$. Já no **Caso 2** vamos matar os abertos-borboleta de $K_\xi(\alpha)$, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$. E por fim, no **Caso 3**, vamos matar operadores de $C(K_\xi(\alpha))$ em $C(K_\eta(\alpha))$ que não são fracamente compactos, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ e $\eta \in \varphi_2(\alpha)$. A condição 2 do Lema 3.6 nos garante que mataremos todos os operadores que não são fracamente compactos de qualquer $C(K_\xi)$ em qualquer $C(K_\eta)$, e nos garante que mataremos todos os abertos-borboleta de qualquer K_ξ e todos os operadores que não são multiplicadores fracos de qualquer $C(K_\xi)$.

Seja $\kappa = 2^{\omega_1} = 2^{2^\omega}$. Vamos agora proceder na construção indutiva dos compactos conexos. A construção será muito similar àquela feita por Fajardo, em [Fa2] : construíremos, por indução em $\alpha < \omega_1 = 2^\omega$, sequências $(K_\xi(\alpha))_{\xi\in\kappa,\alpha<\omega_1}$ de compactos conexos $K_\xi(\alpha) \subseteq [0,1]^\alpha$, sequências de conjuntos $(I_\xi(\alpha))_{\xi\in\kappa,\alpha<\omega_1}$ com $I_\xi(\alpha) \subseteq \alpha \times \{0,1\}$, sequências de promessas $(P_\xi(\alpha))_{\xi\in\kappa,\alpha<\omega_1}$ tais que $P_\xi(\alpha) = \{(L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}, R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}, z^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}) : (\beta, i) \in I_\xi(\alpha)\}$, onde $L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}, R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)} \subset \mathbb{N}$ são disjuntos e $z^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)} \in K_\xi(\alpha)$, e subconjuntos fechados $F^{\beta,\xi}_n(\alpha) \subset K_\xi(\alpha)$, para β satisfazendo $(\beta, 0) \in I_\xi(\alpha)$.

Uma vez definido $K_\xi(\alpha)$, para todo β tal que $(\beta, 0) \in I_\xi(\alpha)$ definiremos

$$F^{\beta,\xi}_n(\alpha) = \pi^{-1}_{K_\xi(\alpha),K_\xi(\beta)}[\{x_n(\beta)\}].$$

Suponha que tenhamos $(K_\xi(\gamma))_{\xi<\kappa,\gamma<\alpha}$ e $(P_\xi(\gamma))_{\xi<\kappa,\gamma<\alpha}$ satisfazendo as seguintes condições indutivas, para todo $\gamma < \alpha$:

D.1. Se $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$ e $\gamma > \beta$, temos $\lim_{n\in L^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}} F^{\beta,\xi}_n(\gamma) = \lim_{n\in R^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}} F^{\beta,\xi}_n(\gamma) = z^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}$;

D.2. Se $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$ e $\gamma > \gamma' > \beta$, temos $\pi_{\gamma'}[K_\xi(\gamma)] = K_\xi(\gamma')$ e $z^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}|\gamma' = z^{\gamma',\xi}_{(\beta,i)}$;

D.3. Para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$ e todos $\gamma > \gamma' > \beta$, os conjuntos $L^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)} \setminus L^{\gamma',\xi}_{(\beta,i)}$ e $R^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)} \setminus R^{\gamma',\xi}_{(\beta,i)}$ são finitos.

Se α é um ordinal limite, definimos

E.1. $K_\xi(\alpha)$ é o limite inverso $(K_\xi(\gamma))_{\gamma<\alpha}$;

E.2. $I_\xi(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} I_\xi(\beta)$;

E.3. $z^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)} = \bigcup_{\beta<\gamma<\alpha} z^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}$, para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$;

E.4. Para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$, $L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ é uma pseudointersecção infinita de $(L^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)})_{\beta<\gamma<\alpha}$, isto é, o conjunto $L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)} \setminus L^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)}$ é finito, para todo $\gamma < \alpha$ (a existência de tal pseudointersecção é provada em [Do, Teorema 3.1]);

E.5. Para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$, $R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ é uma pseudointersecção infinita de $(R^{\gamma,\xi}_{(\beta,i)})_{\beta<\gamma<\alpha}$.

Vamos agora trabalhar no caso ordinal sucessor. Suponha que tenhamos definido $(K_\xi(\gamma))_{\gamma\leq\alpha}$ e $(P_\xi(\gamma))_{\gamma\leq\alpha}$. Vamos definir $K_\xi(\alpha + 1)$ e $P_\xi(\alpha + 1)$.

Diremos que $\alpha < \omega_1$ é *não trivial* se vale um dos seguintes três casos:

1) $i(\alpha) = 0$, $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ e além disso, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ fixado temos:

F.1. $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência relativamente discreta de pontos distintos de $K_\xi(\alpha)$;

F.2. Existem funções contínuas $f'_n : [0, 1]^\alpha \longrightarrow [0, 1]$ tais que $f_n(\alpha) = f'_n \circ \pi_\alpha$;

F.3. $(f'_n|_{K_\xi(\alpha)} : n \in \mathbb{N})$ como antes é disjunta;

F.4. $x_n(\alpha) \notin supp(f'_m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ e f'_m como no item F.2;

F.5. $|\int_{K_\xi(\alpha)} f'_n d\mu_n(\alpha)| > \varepsilon(\alpha)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) $i(\alpha) = 1$, $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ e além disso, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ fixado temos:

G.1. $A_\alpha, B_\alpha \subset K_\xi(\alpha)$;

G.2. $U_\alpha = \pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[U_\alpha]]$ e $V_\alpha = \pi_\alpha^{-1}[\pi_\alpha[V_\alpha]]$;

G.3. $\overline{\pi_\alpha[U_\alpha] \cap A_\alpha} \cap \overline{\pi_\alpha[V_\alpha] \cap B_\alpha} \neq \emptyset$;

G.4. $x_n(\alpha) \overset{n\in\omega}{\to} z$, para algum $z \in \overline{\pi_\alpha[U_\alpha] \cap A_\alpha} \cap \overline{\pi_\alpha[V_\alpha] \cap B_\alpha}$ e

$$\{x_n(\alpha) : n \in 2\omega\} \subseteq A_\alpha;$$

$$\{x_n(\alpha) : n \in \omega \setminus 2\omega\} \subseteq B_\alpha.$$

3) $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_2(\alpha) = \emptyset$ e além disso, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ e $\eta \in \varphi_2(\alpha)$ fixados temos:

H.1. $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência relativamente discreta de pontos distintos de $K_\eta(\alpha)$;

H.2. Existem funções contínuas $f'_n : [0,1]^\alpha \longrightarrow [0,1]$ tais que $f_n(\alpha) = f'_n \circ \pi_\alpha$;

H.3. $(f'_n|_{K_\xi(\alpha)} : n \in \mathbb{N})$ como antes é disjunta;

H.4. $|\int_{K_\xi(\alpha)} f'_n d\mu_n(\alpha)| > \varepsilon(\alpha)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

H.5. Existem funções contínuas $g'_n : [0,1]^\alpha \longrightarrow [0,1]$ tais que $g_n(\alpha) = g'_n \circ \pi_\alpha$;

H.6. $g'_n(x_n(\alpha)) > \varepsilon(\alpha)$.

Se $\alpha < \omega_1$ for trivial definiremos, para $\xi < \kappa$, $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha) \times \{0\}$, $I_\xi(\alpha+1) = I_\xi(\alpha)$, $L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} = L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$, $R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} = R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ e $z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} = z^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}{}^\frown 0$, para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$.

Agora, se $\alpha < \omega_1$ for não trivial teremos três casos para analisar :

a) $i(\alpha) = 0$ e $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$;

Nesse caso, a construção indutiva se dará da seguinte maneira : Sejam f'_n funções como em F.2 e defina $h_n = f'_n|_{K_\xi(\alpha)}$, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ fixado. Pela Proposição 3.8 existem subconjuntos infinitos $b \subset a \subset \mathbb{N}$, um $\delta > 0$ e funções contínuas $h'_n : K_\xi(\alpha) \longrightarrow [0,1]$, para $n \in a$, tais que:

I.1. $supp(h'_n) \subset supp(h_n)$, para todo $n \in a$;

I.2. $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha)((h'_n)_{n\in b})$ é uma extensão completa;

I.3. $|\int h'_n d\mu_n(\alpha)| > \delta$ e $\Sigma\{\int h'_m d|\mu_n(\alpha)| : m \neq n, m \in a\} < \frac{\delta}{3}$, para todo $n \in a$;

I.4. Para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$ existem subconjuntos de tamanho infinito $L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} \subset L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ e $R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} \subset R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ e um ponto $z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$ tais que $\lim_{n\in L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}} \pi^{-1}[F^{\beta,\xi}_n(\alpha)] = \lim_{n\in R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}} \pi^{-1}[F^{\beta,\xi}_n(\alpha)] = z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$, onde π é a projeção standard de $K_\xi(\alpha+1)$ em $K_\xi(\alpha)$;

I.5. $(\pi^{-1}[x_n(\alpha)])_{n\in b}$ e $(\pi^{-1}[x_n(\alpha)])_{n\in a\setminus b}$ convergem para um mesmo ponto $z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} \in K_\xi(\alpha+1)$.

Definimos $I_\xi(\alpha+1) = I_\xi(\alpha) \cup \{(\alpha, 0)\}$, $L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} = b$ e $R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} = a \setminus b$. Por fim, tomamos $F^{\alpha,\xi}_n(\alpha) = \{x_n(\alpha)\}$ e $F^{\beta,\xi}_n(\alpha+1) = \pi^{-1}[F^{\beta,\xi}_n(\alpha)]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo β satisfazendo $(\beta, 0) \in I_\xi(\alpha)$.

Isso completa a construção indutiva de $K_\xi(\alpha+1)$ no caso **a)**, para $\xi \in \varphi_1(\alpha)$. No caso em que $\zeta < \kappa$ é tal que $\zeta \notin \varphi_1(\alpha)$, definimos $K_\zeta(\alpha+1)$, $I_\zeta(\alpha+1)$ e $P_\zeta(\alpha+1)$ como no caso trivial.

b) $i(\alpha) = 1$ e $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$;

Nesse caso, construíremos da seguinte maneira : Tome $z = \lim_{n\to\infty} x_n(\alpha)$ em $K_\xi(\alpha)$, onde $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ está fixado. Pelo lema de Urysohn existe uma sequência de funções contínuas duas a duas disjuntas $(h_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$ de $K_\xi(\alpha)$ em $[0,1]$ tais que $\Delta((h_n)_{n\in 2\mathbb{N}}) = \{z\}$ e, para todo $n \in 2\mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$h_n(x_m(\alpha)) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \text{ ou } m = n+1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $b \subseteq 2\mathbb{N}$ tal que $K_\xi(\alpha)((h_n)_{n\in b})$ é uma extensão forte. Definimos então $I_\xi(\alpha+1) = I_\xi(\alpha) \cup \{(\alpha,0), (\alpha,1)\}$, $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha)((h_n)_{n\in b})$, $L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} = b$, $L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} = 2\mathbb{N} \setminus b$, $R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} = \{n+1 : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}\}$, $R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} = \{n+1 : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}\}$, $z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} = z^\frown 0$ e $z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} = z^\frown 1$.

Observe que $F^{\alpha,\xi}_n(\alpha+1) = \{x_n(\alpha)^\frown 1\}$, se $n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} \cup R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}$, e que $F^{\alpha,\xi}_n(\alpha+1) = \{x_n(\alpha)^\frown 0\}$, caso contrário. Concluímos portanto que $F^{\alpha,\xi}_n(\alpha+1) \to z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}$, para $n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} \cup R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}$, e $F^{\alpha,\xi}_n(\alpha+1) \to z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}$, para $n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} \cup R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}$.

O restante da construção de $P_\xi(\alpha+1)$ – a saber, $L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$, $R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$ e $z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$, para $(\beta,i) \in I_\xi(\alpha)$ – é feito como no caso **a)**, repetindo o argumento usado no Caso 2 da prova do item (i) da Proposição 3.8. No caso em que $\zeta < \kappa$ é tal que $\zeta \notin \varphi_1(\alpha)$, definimos $K_\zeta(\alpha+1)$, $I_\zeta(\alpha+1)$ e $P_\zeta(\alpha+1)$ como no caso trivial.

c) $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_2(\alpha) = \emptyset$.

Neste caso procederemos a construção da seguinte maneira : fixemos $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ e $\eta \in \varphi_2(\alpha)$. Sejam então f'_n funções como em H.2 e defina $e_n = f'_n|_{K_\xi(\alpha)}$. Logo, existem $b' \subset a' \subset \mathbb{N}$ subconjuntos infinitos, $\delta > 0$ e funções $e'_n : K_\xi(\alpha) \longrightarrow [0,1]$ tais que, para todo $b \subset b'$ valem as teses (f), (g), (h) e (i) da Proposição 3.8. Agora, fixe $b'' \subset b'$ infinito e co-infinito tal que

$$(*) \qquad \overline{\{x_n(\alpha) : n \in b''\}} \cap \overline{\{x_n(\alpha) : n \in b' \setminus b''\}} \neq \emptyset.$$

A existência de tal b'' segue do fato de que $K_\eta(\alpha)$ tem peso menor que 2^ω e do fato de que em um espaço compacto a separação de fechados pode ser feita por uma quantidade finita de abertos básicos.

Por $(*)$, sabemos que existe $z \in \overline{\{x_n(\alpha) : n \in b''\}} \cap \overline{\{x_n(\alpha) : n \in b' \setminus b''\}}$. Como $K_\eta(\alpha)$ é métrico, existe uma sequência em $\{x_n(\alpha) : n \in b''\}$ e uma sequência em $\{x_n(\alpha) : n \in b' \setminus b''\}$, ambas convergindo para z. Sejam pois $b \subseteq b''$ e $a'' \subseteq b' \setminus b''$ subconjuntos infinitos correspondentes às coordenadas dessas sequências que convergem a z. Definimos então $I_\eta(\alpha+1) = I_\eta(\alpha) \cup \{(\alpha,0)\}$, $L^{\alpha+1,\eta}_{(\alpha,0)} = b$, $R^{\alpha+1,\eta}_{(\alpha,0)} = a''$ e $z^{\alpha+1,\eta}_{(\alpha,0)} = z$. Além disso, definimos também $K_\eta(\alpha+1) = K_\eta(\alpha) \times \{0\}$, $L^{\alpha+1,\eta}_{(\beta,i)} = L^{\alpha,\eta}_{(\beta,i)}$, $R^{\alpha+1,\eta}_{(\beta,i)} = R^{\alpha,\eta}_{(\beta,i)}$ e $z^{\alpha+1,\eta}_{(\beta,i)} = z^{\alpha,\eta}_{(\beta,i)}{}^\frown 0$, para todo $(\beta,i) \in I_\xi(\alpha)$. Por fim, tomamos $F^{\alpha,\eta}_n(\alpha) = \{x_n(\alpha)\}$ e $F^{\beta,\eta}_n(\alpha+1) = \pi^{-1}[F^{\beta,\eta}_n(\alpha)]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo β satisfazendo $(\beta,0) \in I_\eta(\alpha)$.

Seja $a = a'' \cup b$ e defina $I_\xi(\alpha+1) = I_\xi(\alpha)$. Então, para a e b como acima temos:

J.1. $supp(e'_n) \subset supp(e_n)$, para todo $n \in a$;

J.2. $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha)((e'_n)_{n\in b})$ é uma extensão completa;

J.3. $|\int e'_n d\mu_n(\alpha)| > \delta$ e $\Sigma\{\int e'_m d|\mu_n(\alpha)| : m \neq n, m \in a\} < \frac{\delta}{3}$, para todo $n \in a$;

J.4. Para todo $(\beta, i) \in I_\xi(\alpha)$ existem subconjuntos de tamanho infinito $L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} \subset L^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ e $R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)} \subset R^{\alpha,\xi}_{(\beta,i)}$ e um ponto $z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$ tais que $\lim_{n\in L^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}} \pi^{-1}[F^{\beta,\xi}_n(\alpha)] = \lim_{n\in R^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}} \pi^{-1}[F^{\beta,\xi}_n(\alpha)] = z^{\alpha+1,\xi}_{(\beta,i)}$, onde π é a projeção standard de $K_\xi(\alpha+1)$ em $K_\xi(\alpha)$;

J.5. $(\pi^{-1}[x_n(\alpha)])_{n\in b}$ e $(\pi^{-1}[x_n(\alpha)])_{n\in a\setminus b}$ convergem para um mesmo ponto $z^{\alpha+1,\eta}_{(\alpha,0)} \in K_\eta(\alpha+1)$.

No caso em que $\zeta < \kappa$ é tal que $\zeta \notin \varphi_1(\alpha)$ e $\zeta \notin \varphi_2(\alpha)$, definimos $K_\zeta(\alpha+1)$, $I_\zeta(\alpha+1)$ e $P_\zeta(\alpha+1)$ como no caso trivial.

O resultado a seguir nos mostra que a construção indutiva anteriormente realizada está bem definida.

Proposição 3.9. *Para todo $\alpha < \omega_1$ temos $K_\xi(\alpha) = K_{\xi'}(\alpha)$, sempre que $i \in \{1,2\}$ e $\xi, \xi' \in \varphi_i(\alpha)$.*

Demonstração. Suponha que não seja verdade que os $K_\xi(\alpha)$'s são todos iguais para ξ's em $\varphi_i(\alpha)$. Seja então α o menor ordinal para o qual existem $i \in \{1,2\}$ e $\xi, \xi' \in \varphi_i(\alpha)$ tais que $K_\xi(\alpha) \neq K_{\xi'}(\alpha)$. Fixe tais i, ξ, ξ' e defina γ o menor ordinal tal que $K_\xi(\gamma) \neq K_{\xi'}(\gamma)$. Se γ é limite temos uma contradição pois $K_\xi(\gamma)$ e $K_{\xi'}(\gamma)$ são limites inversos de compactos que, pela hipótese indutiva, são os mesmos. Suponhamos agora $\gamma = \beta + 1$ para algum ordinal β. Pela hipótese indutiva temos $K_\xi(\beta) = K_{\xi'}(\beta)$. Suponha que $\xi \in \varphi_j(\beta)$, para algum $j \in \{1,2\}$. Teríamos então que $\xi \in \varphi_j(\beta) \cap \varphi_i(\alpha)$. Logo, pela condição 1 do Lema 3.6, seguiria que $\varphi_i(\alpha) \subseteq \varphi_j(\beta)$ e portanto $\xi, \xi' \in \varphi_j(\beta)$. Daí, pela construção, teríamos que ter $K_\xi(\beta+1) = K_{\xi'}(\beta+1)$, o que é uma contradição. Se $\xi' \in \varphi_j(\beta)$, para algum $j \in \{1,2\}$, o mesmo argumento de antes nos diria que $K_\xi(\beta+1) = K_{\xi'}(\beta+1)$, o que é uma contradição. Por fim, se nem ξ e nem ξ' estão em $\varphi_j(\beta)$ para algum $j \in \{1,2\}$, teríamos que ter $K_\xi(\beta+1) = K_\xi(\beta) \times \{0\} = K_{\xi'}(\beta) \times \{0\} = K_{\xi'}(\beta+1)$, o que também é uma contradição. $\square$

Para cada $\xi \in 2^{\omega_1}$ definimos K_ξ o limite inverso de $(K_\xi(\alpha))_{\alpha<\omega_1}$.

A próxima Proposição nos traz características topológicas importantes com respeito a cada K_ξ construído indutivamente. A demonstração é uma adaptação da demonstração do Teorema 5.2 presente em [Fa2].

Proposição 3.10. ($\diamondsuit$) *Sejam $\xi, \eta < 2^{\omega_1}$. Então K_ξ é um espaço topológico compacto e conexo tal que:*

(i) *Dados*

(a) *Uma sequência $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de funções contínuas e duas a duas disjuntas de K_ξ em $[0,1]$;*

(b) *Uma sequência relativamente discreta $(x_n : n \in \mathbb{N})$ de pontos distintos de K_η tal que, se $\xi = \eta$, então $f_m(x_n) = 0$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$;*

(c) *Um $\varepsilon > 0$;*

(d) *Uma sequência limitada $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ de medidas regulares sobre K_ξ tal que $|\int f_n d\mu_n| > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

existem $\delta > 0$, subconjuntos infinitos $b \subset a \subset \mathbb{N}$ e funções contínuas f'_n, com $supp(f'_n) \subset supp(f_n)$, tais que

(e) *$|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ e $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, para todo $n \in a$;*

(f) *$(f'_n)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi)$;*

(g) *$\overline{\{x_n : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n : n \in a \setminus b\}} \neq \emptyset$.*

(ii) *Se L é um subespaço fechado de K_ξ e V_1 e V_2 são dois abertos de L disjuntos tais que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \neq \emptyset$, então $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ tem pelo menos dois elementos.*

Demonstração. A compacidade de K_ξ segue do fato de que K_ξ é o limite inverso de espaços compactos. Além disso, pelo lema 3.7 de [Fa2] temos também que K_ξ é conexo. Vamos agora dividir a prova do item (i) em dois casos:

Caso 1 $\xi = \eta$;

Usando o lema de Urysohn e a regularidade das medidas μ_n para reduzir os suportes das f_n preservando a condição (d) da hipótese da Proposição, podemos assumir sem perda de generalidade que $x_n \notin supp(f_m)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

Pelo teorema de Tietze estendemos continuamente as funções f_n para $\tilde{f}_n : [0,1]^{\omega_1} \longrightarrow [0,1]$. Pelo teorema de Mibu (veja [Mi]) existem $\alpha < \omega_1$ e funções contínuas $g_n : [0,1]^\alpha \longrightarrow [0,1]$ tais que $\tilde{f}_n = g_n \circ \pi$. Observe que $f_n = g_n|_{K_\xi(\alpha)} \circ \pi_\alpha$. Como a existência de tais funções continua acontecendo para todo $\alpha' > \alpha$, pois $\tilde{f}_n \circ \pi_{\alpha'} = g_n \circ \pi_\alpha \circ \pi_{\alpha'}$, podemos escolher ordinal não trivial $\alpha < \omega_1$, com $i(\alpha) = 0$ e $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ e $\xi \in \varphi_1(\alpha)$, tal que:

K.1. $f_n(\alpha) = \tilde{f}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

K.2. $x_n(\alpha) = x_n|\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

K.3. $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon$;

K.4. $\mu_n(\alpha) = \mu_n|\mathcal{B}_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tome $b = L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}$ e $a = L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} \cup R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}$. Defina então $f'_n = h'_n \circ \pi$, onde h'_n são como em **I.1** até **I.5**, lembrando que $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha)((h'_n)_{n\in b})$. Fixe $\delta > 0$ como em **I.3**.

Pelo lema 3.4 de [Fa2], $(h'_n \circ \pi)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi(\alpha+1))$. Pelo lema 3.7 de [Fa2], $(f'_n)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi)$ e isso prova (f).

Observe que $\int f'_n d\mu_m = \int h'_n d\mu_m(\alpha)$, para todo n, m, já que f'_n é determinada pelas coordenadas abaixo de α. Logo também concluímos o item (e).

Resta-nos provar o item (g). Suponha que existam U_1 e U_2 subconjuntos abertos de K_ξ tais que $x_n(\alpha) \in U_1$, para todo $n \in b$, e $x_n(\alpha) \in U_2$, para todo $n \in a \setminus b$. Pela compacidade de K_ξ, podemos assumir que U_1 e U_2 são uniões finitas de abertos elementares. Portanto existe $\beta < \omega_1$, que pode ser escolhido maior do que α, tal que a separação ocorre abaixo de β, i.e., $\overline{\{x_n|\beta : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}} = \emptyset$, em $K_\xi(\beta)$. Como $x_n|\alpha = x_n(\alpha)$, temos $x_n|\beta \in F_n^{\alpha,\xi}(\beta)$. Pela construção temos que $L_{(\alpha,0)}^{\beta,\xi} \setminus L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\xi}$ é finito. Como $L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\xi} = b$ e $\lim_{n \in L_{(\alpha,0)}^{\beta,\xi}} F_n^{\alpha,\xi}(\beta) = z_{(\alpha,0)}^{\beta,\xi}$, temos que $z_{(\alpha,0)}^{\beta,\xi} \in \overline{\{x_n|\beta : n \in b\}}$. Analogamente concluímos que $z_{(\alpha,0)}^{\beta,\xi} \in \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}}$, contradizendo o fato de que $\overline{\{x_n|\beta : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}} = \emptyset$.

Caso 2 $\xi \neq \eta$.

Pelo teorema de Tietze estendemos continuamente as funções f_n para $\tilde{f}_n : [0,1]^{\omega_1} \longrightarrow [0,1]$. Pelo teorema de Mibu (veja [Mi]) existem $\alpha < \omega_1$ e funções contínuas $g_n : [0,1]^\alpha \longrightarrow [0,1]$ tais que $\tilde{f}_n = g_n \circ \pi$. Observe que $f_n = g_n|_{K_\xi(\alpha)} \circ \pi_\alpha$. Como a existência de tais funções continua acontecendo para todo $\alpha' > \alpha$, pois $\tilde{f}_n \circ \pi_{\alpha'} = g_n \circ \pi_\alpha \circ \pi_{\alpha'}$, podemos escolher ordinal não trivial $\alpha < \omega_1$, com $\varphi_1(\alpha) \cap \varphi_2(\alpha) = \emptyset$ e $\xi \in \varphi_1(\alpha)$ e $\eta \in \varphi_1(\alpha)$, tal que:

K.1. $f_n(\alpha) = \tilde{f}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

K.2. $x_n(\alpha) = x_n|\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

K.3. $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon$;

K.4. $\mu_n(\alpha) = \mu_n|\mathcal{B}_\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tome $b = L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\eta}$ e $a = L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\eta} \cup R_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\eta}$. Defina então $f'_n = e'_n \circ \pi$, onde e'_n são como em **J.1** até **J.5**, lembrando que $K_\xi(\alpha+1) = K_\xi(\alpha)((e'_n)_{n\in b})$. Fixe $\delta > 0$ como em **J.3**.

Pelo lema 3.4 de [Fa2], $(e'_n \circ \pi)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi(\alpha+1))$. Pelo lema 3.7 de [Fa2], $(f'_n)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi)$ e isso prova (f).

Observe que $\int f'_n d\mu_m = \int e'_n d\mu_m(\alpha)$, para todo n, m, já que f'_n é determinada pelas coordenadas abaixo de α. Logo também concluímos o item (e).

Resta-nos provar o item (g). Suponha que existam U_1 e U_2 subconjuntos abertos de K_η tais que $x_n(\alpha) \in U_1$, para todo $n \in b$, e $x_n(\alpha) \in U_2$, para todo $n \in a \setminus b$. Pela compacidade de K_η, podemos assumir que U_1 e U_2 são uniões finitas de abertos elementares. Portanto existe $\beta < \omega_1$, que pode ser escolhido maior do que α, tal que a separação ocorre abaixo de β, i.e., $\overline{\{x_n|\beta : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}} = \emptyset$, em $K_\eta(\beta)$. Como $x_n|\alpha = x_n(\alpha)$, temos $x_n|\beta \in F_n^{\alpha,\eta}(\beta)$. Pela construção temos que $L_{(\alpha,0)}^{\beta,\eta} \setminus L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\eta}$ é finito. Como $L_{(\alpha,0)}^{\alpha+1,\eta} = b$ e $\lim_{n \in L_{(\alpha,0)}^{\beta,\eta}} F_n^{\alpha,\eta}(\beta) = z_{(\alpha,0)}^{\beta,\eta}$, temos que $z_{(\alpha,0)}^{\beta,\eta} \in \overline{\{x_n|\beta : n \in b\}}$. Analogamente concluímos que $z_{(\alpha,0)}^{\beta,\eta} \in \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}}$, contradizendo o fato de que $\overline{\{x_n|\beta : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n|\beta : n \in a \setminus b\}} = \emptyset$.

Agora vamos provar a parte (ii) da Proposição. Para isso, seja L um subconjunto fechado de K_ξ e sejam V_1 e V_2 dois abertos de L disjuntos tais que $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 \neq \emptyset$. Tome U e V abertos de $[0,1]^{\omega_1}$ tais que $V_1 = U \cap L$ e $V_2 = V \cap L$. Como L é fechado, $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = \overline{U} \cap \overline{V} \cap L$, pois $\overline{U \cap L} = \overline{U} \cap L$.

Pela separabilidade de $[0,1]^{\omega_1}$ (veja [Eng], 2.3.16), temos que $[0,1]^{\omega_1}$ satisfaz a condição da cadeia enumerável, i.e., toda família de abertos não vazios e dois a dois disjuntos é enumerável. Logo, se tomarmos $U' \subset U$ a união de uma família maximal de abertos elementares de U, teremos $\overline{U'} = \overline{U}$, e o mesmo ocorre para V. Portanto, podemos assumir que U e V são uniões enumeráveis de abertos elementares.

Sejam $(y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ e $(z_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ sequências densas em V_1 e V_2, respectivamente. Tome $\beta < \omega_1$ contendo todas as coordenadas que determinam U e V, i.e., satisfazendo $\pi^{-1}[\pi_\beta[U]] = U$ e $\pi^{-1}[\pi_\beta[V]] = V$. Pelo Lema 3.5 existe $\alpha > \beta$ tal que $i(\alpha) = 1$, $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$ e $\xi \in \varphi_1(\alpha)$, $U_\alpha = U$, $V_\alpha = V$, $(y_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[V_1]$, $(z_\beta|\alpha)_{\beta<\alpha}$ é denso em $\pi_\alpha[V_2]$ e

$$\{y_\beta|\alpha : \beta < \alpha\} = A_\alpha;$$

$$\{z_\beta|\alpha : \beta < \alpha\} = B_\alpha.$$

Tome $x \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. Como A_α e B_α são densos em $\pi_\alpha[V_1]$ e $\pi_\alpha[V_2]$, respectivamente, temos que $x|\alpha \in \overline{\pi_\alpha[U_\alpha] \cap A_\alpha} \cap \overline{\pi_\alpha[V_\alpha] \cap B_\alpha}$. Logo α é um passo não trivial. Portanto $x_n(\alpha) \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} x|\alpha$ e $x_n(\alpha) \in \pi_\alpha[V_1]$, se n é par, e $x_n(\alpha) \in \pi_\alpha[V_2]$, se n é ímpar.

Para todo número par n, tome α_n tal que $y_{\alpha_n}|\alpha = x_n(\alpha)$. Para todo número ímpar n, tome α_n tal que $z_{\alpha_n}|\alpha = x_n(\alpha)$. Como na demonstração do item (g) da parte (i), temos

$$\overline{\{y_{\alpha_n} : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}\}} \cap \overline{\{z_{\alpha_n} : n \in R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}\}} \neq \emptyset;$$

$$\overline{\{y_{\alpha_n} : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}\}} \cap \overline{\{z_{\alpha_n} : n \in R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}\}} \neq \emptyset.$$

Sejam

$$z_1 \in \overline{\{y_{\alpha_n} : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}\}} \cap \overline{\{z_{\alpha_n} : n \in R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)}\}}$$

e

$$z_2 \in \overline{\{y_{\alpha_n} : n \in L^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}\}} \cap \overline{\{z_{\alpha_n} : n \in R^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)}\}}.$$

Temos então $z_1, z_2 \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ e

$$z_1|(\alpha+1) = z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,0)} \neq z^{\alpha+1,\xi}_{(\alpha,1)} = z_2|(\alpha+1).$$

Segue então que $|\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2| \geq 2$, o que encerra a prova da proposição.

□

Proposição 3.11. ($\diamondsuit$) *Seja $\xi < 2^{\omega_1}$. Então K_ξ é um espaço conexo e hereditariamente Koszmider. Em particular, $C(L)$ é indecomponível para todo fechado conexo $L \subseteq K_\xi$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.10 temos que K_ξ possui exatamente as mesmas propriedades topológicas estabelecidas pelo Teorema 5.2 de [Fa2]. A conclusão segue da demonstração do Teorema 5.3 de [Fa2]. □

Lembramos que um operador T em um espaço de Banach X é de *Fredholm* se a dimensão do núcleo e a codimensão da imagem são finitos (vide [DS]).

Definição 3.12. Dois espaços de Banach X e Y são *essencialmente incomparáveis* se, para todos operadores $T : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow X$, o operador $I - S \circ T : X \longrightarrow X$ é um operador de Fredholm.

Lema 3.13. *Sejam K e L espaços topológicos compactos tais que todo operador $T : C(K) \longrightarrow C(L)$ é fracamente compacto. Então $C(K)$ e $C(L)$ são essencialmente incomparáveis.*

Demonstração. Sabemos que a composição de um operador fracamente compacto com qualquer operador contínuo é um operador fracamente compacto. Por um resultado de [LT] temos que a soma de um operador de Fredholm e um operador estritamente singular é um operador de Fredholm. Pelo resultado de [Pe2], um operador fracamente compacto em $C(K)$ é estritamente singular. Note que o operador identidade é de Fredholm, já que $dim(Ker(I)) = codim(Im(I)) = 0$. Logo, para K e L como na hipótese do lema, $I - S \circ T$ é um operador de Fredholm em $C(K)$, para todos $T : C(K) \longrightarrow C(L)$ e $S : C(L) \longrightarrow C(K)$. □

Observação: Note que para o Lema 3.13 assumimos que todo operador é fracamente compacto apenas em uma direção, de $C(K)$ em $C(L)$, e concluímos que $C(K)$ e $C(L)$ são essencialmente incomparáveis. A existência de um operador não fracamente compacto de $C(K)$ em $C(L)$ não implica a existência de um operador não fracamente compacto de $C(L)$ em $C(K)$.

Lema 3.14. ([DU], VI, Cor. 17) *Sejam K um espaço compacto e X um espaço de Banach. Um operador $S : C(K) \longrightarrow X$ é fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência limitada e duas a duas disjunta $(f_n)_{n\in\omega}$ em $C(K)$, a sequência $(||S(f_n)||)_{n\in\omega}$ converge a 0.*

Proposição 3.15. ($\diamondsuit$) *Sejam $\xi, \eta < 2^{\omega_1}$. Se $\xi \neq \eta$, então todo operador $T : C(K_\xi) \longrightarrow C(K_\eta)$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Suponha que exista $T : C(K_\xi) \longrightarrow C(K_\eta)$ não fracamente compacto, para $\xi \neq \eta$. Pelo Lema 3.14, existe sequência limitada $f_n \in C(K_\xi)$ de funções duas a duas disjuntas e $\varepsilon > 0$ tais que $||T(f_n)|| > \varepsilon$, para todo n. Considerando múltiplos de $max(f_n, 0)$ e $-min(f_n, 0)$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que f_n tem imagem contida em $[0, 1]$.

Para cada $n \in \omega$ escolhemos $x_n \in K_\eta$ tal que $|T(f_n)(x_n)| > \varepsilon$. Como somas finitas de f_n's são uniformemente limitadas, se x_n fosse constante para infinitos valores de n, teríamos uma contradição com o fato de T ser limitada (isto é, contínua). Logo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os x_n's são todos distintos. Além disso, como K_η é compacto, toda sequência de pontos distintos contém uma subsequência relativamente discreta e, portanto, podemos também assumir, sem perda de generalidade, que $(x_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência relativamente discreta. Considere $\mu_n = T^*(\delta_{x_n})$, para $n \in \omega$. Temos então que

$$|T(f_n)(x_n)| = |\int f_n d\mu_n| > \varepsilon.$$

Aplicando o Lema de Rosenthal (veja [Di,pg.82]), encontramos $N' \subseteq \omega$ infinito tal que

$$\Sigma\{|\int f_m d\mu_n| : n \neq m, m \in N'\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se aplicarmos a Proposição 3.10 para $\{f_n : n \in N'\}$, $\{x_n : n \in N'\}$, $\{\mu_n : n \in N'\}$ e ε, achamos $b \subset a \subset N'$, $\delta > 0$ e funções $\{f'_n : n \in a\}$ tais que :

- $supp(f'_n) \subset supp(f_n)$;
- $|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ e $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, para todo $n \in a$;
- $(f'_n)_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_\xi)$;
- $\overline{\{x_n : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n : n \in a \setminus b\}} \neq \emptyset$.

Podemos assumir que

$$\int sup\{f'_m : m \in b\} d\mu_n = \int \Sigma_{m\in b} f'_m d\mu_n,$$

para todo $n \in \omega$. Com efeito, tome $(N_\xi)_{\xi<\omega_1}$ uma família de subconjuntos infinitos de N' tais que $N_\xi \cap N_\eta$ é finito, para todo $\xi \neq \eta$ (podemos construir tal família identificando $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Q}$ e ω_1 com $\mathbb{R}$, e tomando N_ξ uma sequência racional convergindo para ξ). Para todo ξ tome $b_\xi \subset a_\xi \subset N_\xi$ como a e b da Proposição 3.10.

Para todos $\xi < \omega_1$ e $n \in b_\xi$ considere f^ξ_n como as f'_n da Proposição 3.10, i.e., as propriedades (e), (f) e (g) da proposição 3.10 acontecem para $f'_n = f^\xi_n$, $a = a_\xi$ e $b = b_\xi$.

Afirmação 3.15.1. *Existe $\xi < \omega_1$ tal que*

$$\int [sup\{f^\xi_m : m \in b_\xi\} - \Sigma_{m\in b_\xi} f^\xi_m] d\mu_n = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para todo $\xi < \omega_1$ e todo $c \subset b_\xi$ definiremos a função $f_c^\xi = sup\{f_m^\xi : m \in c\} - \Sigma_{m \in c} f_m^\xi$ sempre que o supremo existir. Observe que, para todo subconjunto finito $F \subset b_\xi$, temos

$$sup\{f_m^\xi : m \in b_\xi\} = sup\{f_m^\xi : m \in b_\xi \setminus F\} + \Sigma_{m \in F} f_m^\xi$$

e, portanto, $f_{b_\xi \setminus F}^\xi = f_{b_\xi}^\xi$. Em particular, $f_{b_\xi}^\xi = f_{b_\xi \setminus b_{\xi'}}^\xi$, para todos $\xi \neq \xi'$ em ω_1, já que $b_\xi \cap b_{\xi'}$ é finito.

Sejam ξ e ξ' ordinais distintos em ω_1. Tome $g = sup\{f_n^\xi : n \in b_\xi \setminus b_{\xi'}\}$ e $h = sup\{f_n^{\xi'} : n \in b_{\xi'} \setminus b_\xi\}$. Como $supp(f_n^\eta) \subset supp(f_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\eta < \omega_1$, temos que $f_n^\xi \cdot f_m^{\xi'} = 0$, para todo $n \neq m$. Vamos agora provar que $g \cdot h = 0$.

Suponha que exista $x \in K$ tal que $g(x) > 0$ e $h(x) > 0$. Então existe uma vizinhança aberta V de x tal que as restrições de g e h em V são ambas estritamente positivas. Logo, existem $y \in V$ e $n \in b_\xi \setminus b_{\xi'}$ tais que $f_n^\xi(y) > 0$. Tome φ uma função contínua de K em $[0,1]$ tal que $\varphi(y) = 1$ e φ é nula nos pontos em que f_n^ξ é nula. Como $f_n^\xi \cdot f_m^{\xi'} = 0$, para todo $m \in b_{\xi'} \setminus b_\xi$, temos que $f_m^{\xi'} \leq h \cdot \varphi < h$, para todo $m \in b_{\xi'} \setminus b_\xi$, contradizendo a definição de h.

Como $f_{b_\xi}^\xi = f_{b_\xi \setminus b_{\xi'}}^\xi \leq g$ e $f_{b_{\xi'}}^{\xi'} = f_{b_{\xi'} \setminus b_\xi}^{\xi'} \leq h$, segue que $f_{b_\xi}^\xi \cdot f_{b_{\xi'}}^{\xi'} = 0$, para todo $\xi \neq \xi'$. Portanto existe $\xi < \omega_1$ tal que

$$\int f_{b_\xi}^\xi \, d\,\mu_n = 0$$

para todo n, o que encerra a prova da Afirmação. ■

Tomando $f = sup\{f_n' : n \in b\}$ e $n \in b$ temos

$$|T(f)(x_n)| = |\int f d\mu_n| = |\int f_n' d\mu_n + \int \Sigma\{f_m' : m \neq n, m \in b\} d\mu_n|$$

$$\geq \delta - \delta/3 = 2\delta/3.$$

Por outro lado, se $n \in a \setminus b$ temos

$$|T(f)(x_n)| = |\int \Sigma_{m\in b} f'_m d\mu_n| \leq \delta/3.$$

Contradizendo que $T(f)$ é contínua e o fato de que

$$\overline{\{x_n : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n : n \in a \setminus b\}} \neq \emptyset.$$

$\square$

Unindo a construção e as Proposições 3.11 e 3.15, obtemos o resultado desejado:

Teorema 3.16. ($\diamondsuit$) *Existe uma família* $(K_\xi)_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ *de espaços conexos e hereditariamente Koszmider tais que todo operador de* $C(K_\xi)$ *em* $C(K_\eta)$ *é fracamente compacto, para* $\xi \neq \eta$. *Em particular,* $(C(K_\xi))_{\xi<2^{(2^\omega)}}$ *é uma família de espaços de Banach indecomponíveis e dois a dois essencialmente incomparáveis.*

Capítulo 4

Construção alternativa de um espaço hereditariamente fracamente Koszmider

Assumindo o princípio $\diamondsuit$, Fajardo constrói, em [Fa2], o primeiro exemplo relativamente consistente com ZFC de um espaço de Banach indecomponível $C(K)$ tal que, para todo fechado $L \subseteq K$, todo operador em $C(L)$ é multiplicação fraca. O objetivo deste capítulo é apresentar um método alternativo de construção de espaços $C(K)$ com poucos operadores satisfazendo a propriedade de que $C(L)$ também tem poucos operadores, para todo fechado $L \subseteq K$. O método que utilizaremos será o método do *forcing* e o espaço compacto K que obteremos será conexo e hereditariamente fracamente Koszmider, isto é, para todo fechado $L \subseteq K$, todo operador em $C(L)$ é multiplicador fraco. Em particular, o compacto K responde positivamente ao problema de Efimov. O método do *forcing* foi criado por Paul Cohen, em 1964, para se mostrar a consistência da negação da hipótese do contínuo, resultado que lhe rendeu a medalha Fields, em 1966. No final do capítulo apresentamos um resultado envolvendo a densidade dos espaços $C(K)$ com poucos operadores.

4.1 A construção do *forcing*

Vamos iniciar nossa construção do forcing assumindo que no *ground model* V vale CH e que $\omega_2 = 2^{\omega_1}$. Seja $\kappa = \omega_2$.

Se $J \subseteq I \subseteq \kappa$, denotaremos por $\pi_{I,J}$ a projeção usual de $[0,1]^I$ sobre $[0,1]^J$, dada por $\pi_{I,J}(x) = x|_J$. Quando I estiver claro pelo contexto – especialmente quando $I = \kappa$ – denotaremos $\pi_{I,J}$ simplesmente por π_J.

Seja a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ e seja $(F_n)_{n\in a}$ uma sequência de subconjuntos fechados de um espaço topológico K. Dizemos que $(F_n)_{n\in a}$ *converge* para $x \in K$ se o conjunto $\{n \in a : F_n \nsubseteq U\}$ é finito, para toda vizinhança aberta U of x.

Definimos então a noção de forcing $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tomando $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os elementos $p = (I_p, K_p, \mathcal{P}_p, \mathcal{B}_p)$ satisfazendo as seguintes condições:

P1 $I_p \subseteq \kappa$ e $|I_p| \leq \omega$;

P2 $K_p \subseteq [0,1]^{I_p}$ é compacto e conexo;

P3 $\mathcal{P}_p$ é um conjunto enumerável de 4-uplas $((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, a, b, z)$ tais que

- $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos dois a dois disjuntos e fechados de K_p;
- $a, b \subseteq \mathbb{N}$ são subconjuntos infinitos e disjuntos;
- $z \in K_p$;
- $(F_n)_{n\in a}$ e $(F_n)_{n\in b}$ convergem para z.

P4 $\mathcal{B}_p = \{(x^p_\xi, y^p_\xi) : \xi \in I_p\}$, onde $x^p_\xi, y^p_\xi \in K_p$ e $x^p_\xi|_{I_p\cap\xi} = y^p_\xi|_{I_p\cap\xi}$.

Definimos também a relação de ordem $\leq$ dizendo que $q \leq p$ se, e somente se,

O1 $I_q \supseteq I_p$;

O2 $\pi_{I_q,I_p}[K_q] = K_p$;

O3 Se M é raro em K_p, então $\pi^{-1}_{I_q,I_p}[M]$ é raro em K_q;

O4 Para todo $((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, a, b, z) \in \mathcal{P}_p$ existe $((F'_n)_{n\in\mathbb{N}}, a', b', z') \in \mathcal{P}_q$ tal que

- $b' \setminus b$ e $a' \setminus a$ são conjuntos finitos;
- $z'|_{I_p} = z$;
- $F'_n = \pi^{-1}_{I_q,I_p}[F_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O5 Para todo $\xi \in I_p$ temos $x^q_\xi|_{I_p} = x^p_\xi$ e $y^q_\xi|_{I_p} = y^p_\xi$.

Lema 4.1. $(\mathbb{P}, \leq)$ *é* σ*-fechado. I.e., se* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathbb{P}$ *tal que* $p_{n+1} \leq p_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então existe* $p \in \mathbb{P}$ *tal que* $p \leq p_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência como na hipótese do lema. Precisamos encontrar $p = (I_p, K_p, \mathcal{P}_p, \mathcal{B}_p)$ tal que $p \in \mathbb{P}$ e $p \leq p_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tome $I_p = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{p_n}$, K_p o limite inverso de $(K_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{B}_p = \{(x^p_\xi, y^p_\xi) : \xi \in I_p\}$, onde $x^p_\xi = \bigcup_{n\geq n_0} x^{p_n}_\xi$, $y^p_\xi = \bigcup_{n\geq n_0} y^{p_n}_\xi$ e n_0 é o menor inteiro tal que $\xi \in I_{p_{n_0}}$. Claramente I_p e $\mathcal{B}_p$ satisfazem as condições P1 e P4. Além disso, como o limite inverso preserva compacidade e conexidade, K_p satisfaz P2.

Resta-nos agora definir $\mathcal{P}_p$. Para isso, construiremos uma função ϕ cujo domínio é $\bigcup \mathcal{P}_{p_n}$ e tomaremos $\mathcal{P}_p$ como sendo a imagem de ϕ.

Seja $Q \in \mathcal{P}_{n_0}$, para algum n_0. Fixe uma sequência $((F^n_m)_{m\in\mathbb{N}}, a_n, b_n, z_n)_{n\geq n_0}$ tal que $Q = ((F^{n_0}_m)_{m\in\mathbb{N}}, a_{n_0}, b_{n_0}, z_{n_0})$ e, para cada natural $n > n_0$, a 4-upla $((F^n_m)_{m\in\mathbb{N}}, a_n, b_n, z_n) \in \mathcal{P}_{p_n}$ é obtida a partir de $((F^{n-1}_m)_{m\in\mathbb{N}}, a_{n-1}, b_{n-1}, z_{n-1})$ utilizando a condição O4 da relação de ordem do forcing.

Para todo $m \in \mathbb{N}$, tome F_m o limite inverso de $(F^n_m)_{n\geq n_0}$. Seja a uma pseudo-intersecção infinita de $(a_n)_{n\geq n_0}$, i.e., $a \setminus a_n$ é um conjunto finito, para todo $n \geq n_0$ (a existência de tal pseudo-intersecção segue do fato de que $a_{n+1} \setminus a_n$ é finito. Veja [Do], Teorema 3.1).

Tome b' uma pseudo-intersecção infinita de $(b_n)_{n\geq n_0}$ e defina $b = b' \setminus a$. Está claro que $a \cap b'$ é finito e, portanto, b continua sendo uma pseudo-intersecção infinita de $(b_n)_{n\geq n_0}$.

Finalmente, tome $z = \bigcup_{n\geq n_0} z_n$ e defina $\phi(Q) = ((F_m)_{m\in\mathbb{N}}, a, b, z)$. Vamos agora provar P3. O fato de a e b serem disjuntos segue imediatamente da definição. Claramente $z \in K_p$ e $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos fechados de K_p e dois a dois disjuntos. Suponha que $(F_m)_{m\in a}$ não convirja para z. Isto significa que existem uma vizinhança aberta básica U de z, um subconjunto infinito $c \subset a$ e uma sequência $(x_m)_{m\in c}$ tais que $x_m \in F_m \smallsetminus U$, para todo $m \in c$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que U depende apenas de coordenadas que estão em I_{p_n}, temos que $\pi_{I_{p_n}}[U]$ é uma vizinhança aberta de z_n, em K_{p_n}, e $x_m|I_{p_n} \in F_m^n \smallsetminus \pi_{I_{p_n}}[U]$, para todo $m \in c$. Como $a \smallsetminus a_n$ é finito, segue que $a_n \cap c$ é um subconjunto infinito de a_n, contradizendo a condição P3 em p_n. A prova de que $(F_m)_{m\in b}$ converge para z é a mesma.

Logo, tomando $\mathcal{P}_p$ a imagem de ϕ, concluímos a construção de p e já provamos que $p \in \mathbb{P}$. Ainda nos falta provar que $p \leq p_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. As condições O1, O2 e O5 são facilmente verificadas, e O4 segue da definição da função ϕ. Para verificar O3, seja M raro em K_{p_n}, para algum n, e suponha que $\pi^{-1}_{I_p,I_{p_n}}[M]$ não seja raro em K_p. Seja $V \subseteq \overline{\pi^{-1}_{I_p,I_{p_n}}[M]}$ um aberto não-vazio. Tome $m > n$ tal que as coordenadas que determinam V estão em I_{p_m}. Note que $\pi^{-1}_{I_{p_m},I_{p_n}}[\overline{M}]$ é raro em K_{p_m} pois $p_m \leq p_n$ e $\overline{M}$ é raro em K_{p_n}. Como $\overline{\pi^{-1}_{I_p,I_{p_n}}[M]} \subseteq \pi^{-1}_{I_p,I_{p_n}}[\overline{M}]$ temos

$$\pi_{I_p,I_{p_m}}[V] \subseteq \pi_{I_p,I_{p_m}}[\pi^{-1}_{I_p,I_{p_n}}[\overline{M}]] = \pi_{I_p,I_{p_m}}[\pi^{-1}_{I_p,I_{p_m}}[\pi^{-1}_{I_{p_m},I_{p_n}}[\overline{M}]]] = \pi^{-1}_{I_{p_m},I_{p_n}}[\overline{M}]$$

e $\pi_{I_p,I_{p_m}}[V]$ é aberto em K_{p_m}, contradizendo que $\pi^{-1}_{I_{p_m},I_{p_n}}[\overline{M}]$ é raro em K_{p_m}. $\square$

Lema 4.2. *Seja $p \in \mathbb{P}$. Dados*

(a) *uma sequência $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de funções contínuas e duas a duas disjuntas de K_p em $[0,1]$;*

(b) *uma sequência relativamente discreta $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos distintos de K_p tais que $x_n \notin supp(f_m)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$;*

(c) *um $\varepsilon > 0$;*

(d) *uma sequência limitada $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ de medidas regulares sobre K tais que $|\int f_n d\mu_n| > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$;*

existem $q \leq p$, $\delta > 0$, $b \subset a \subset \mathbb{N}$ *subconjuntos infinitos,* $z' \in K_q$ *e funções contínuas* $f'_n : K_p \longrightarrow [0,1]$ *tais que* $supp(f'_n) \subset supp(f_n)$ *e*

(e) $|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ *e* $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, *para todo* $n \in a$;

(f) $K_q = K_p((f'_n)_{n\in b})$ *é uma extensão completa;*

(g) $(f'_n \circ \pi_{I_q,I_p})_{n\in b}$ *tem supremo em* $C(K_q)$;

(h) $((\pi^{-1}_{I_q,I_p}[\{x_n\}])_{n\in\mathbb{N}}, b, a \setminus b, z') \in \mathcal{P}_q$.

Demonstração. O resultado segue imediatamente da Proposição 3.8 e da definição de $\mathbb{P}$, tomando $I_q = I_p \cup \{\alpha\}$, onde α é qualquer limitante superior de I_p em κ. A única questão adicional a qual devemos nos preocupar é definir $\mathcal{B}_q$ e provar $O5$. Mas isso segue facilmente, já que podemos tomar x^q_ξ e y^q_ξ quaisquer extensões de x^p_ξ e y^p_ξ, respectivamente, em K_q, para $\xi \in I_p$, e $x^q_\alpha = y^q_\alpha$ qualquer elemento de K_q. Como $\alpha > \xi$, para todo $\xi \in I_p$, temos que $O5$ é preservada em q. □

Lema 4.3. *Dados* $p \in \mathbb{P}$ *e* $\alpha < \kappa$, *existem* $q \leq p$ *e* $\xi > \alpha$ *tais que* $\xi \in I_q$ *e* $x^q_\xi \neq y^q_\xi$.

Demonstração. Fixe $z \in K_p$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em K_p convergindo para z. Escolha vizinhanças abertas V_n de z_n duas a duas disjuntas e cujos diâmetros tendem a zero. Assuma, também, que $z \notin V_n$, para todo n. Fixe funções contínuas $f_n : K_p \longrightarrow [0,1]$ tais que $f_n(z_n) = 1$ e $supp(f_n) \subset V_n$. Defina $\mu_n = \delta_{z_n}$ e $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qualquer sequência relativamente discreta em K_p.

Tome $\xi > max\{\alpha, supI_p\}$ em κ e $q \leq p$ como no Lema 4.2, considerando $I_q = I_p \cup \{\xi\}$. Pelo item (e) desse lema temos que $f'_n(z_n) > \delta$. Logo, tomando t ponto de acumulação de $\{f'_n(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ temos que $t \geq \delta$ e $(z,t) \in K_q$. Defina $x^q_\xi = (z,0)$ e $y^q_\xi = (z,t)$. □

Lema 4.4. *Seja* $p \in \mathbb{P}$. *Tome* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções contínuas e duas a duas disjuntas de* K_p *em* $[0,1]$ *e suponha que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tem supremo* f *em* $C(K_p)$. *Então, para todo* $q \leq p$, $f \circ \pi_{I_q,I_p}$ *é o supremo de* $(f_n \circ \pi_{I_q,I_p})_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $C(K_q)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.3, f é o supremo de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C(K_p)$ se, e somente se, o conjunto

$$\Delta(f,(f_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{x \in K_p \,:\, \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \neq f(x)\}$$

é raro em K_p.

Como $\Delta(f\circ\pi_{I_q,I_p},(f_n\circ\pi_{I_q,I_p})_{n\in\mathbb{N}}) = \pi^{-1}_{I_q,I_p}[\Delta(f,(f_n)_{n\in\mathbb{N}})]$, pela condição P3 e pelo Lema 4.3 de [Ko2] segue que $\Delta(f\circ\pi_{I_q,I_p},(f_n\circ\pi_{I_q,I_p})_{n\in\mathbb{N}})$ é raro em K_q, provando que $f\circ\pi_{I_q,I_p}$ é o supremo de $f_n\circ\pi_{I_q,I_p}$ em $C(K_q)$. □

4.2 Extensão Genérica

Como $\mathbb{P}$ é σ-fechado sabemos que nossa noção de forcing não adiciona conjuntos enumeráveis (veja [Ku]). Em particular, $\mathbb{P}$ não adiciona novos reais e, portanto, $[0,1]^V = [0,1]^{V[G]}$.

Seja G um $\mathbb{P}$-genérico sobre V. Em $V[G]$, defina $I_G = \cup\{I_p \,:\, p \in G\}$. Seja $\dot{I}_G$ um $\mathbb{P}$-nome para I_G em V.

Lema 4.5. *I_G é ilimitado em $(\kappa)^{V[G]}$.*

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e $\alpha < \kappa$. Como G intersecta todo conjunto denso em $\mathbb{P}$, precisamos provar que existem $q \leq p$ e $\xi > \alpha$ tais que $\xi \in I_q$, o que segue do Lema 4.3. □

O próximo lema nos diz que se $\mathbb{P}$ é ω_2-c.c então $(2^{\omega_1})^{V[G]} = (2^{\omega_1})^V$. Observe que se $\mathbb{P}$ for ω_2-c.c então $\mathbb{P}$ preservará cardinais, pois todo forcing σ-fechado e ω_2-c.c preserva cardinais (veja [Ku]).

Lema 4.6. *Se $\mathbb{P}$ é ω_2-c.c então $(2^{\omega_1})^{V[G]} = (2^{\omega_1})^V$.*

Demonstração. Como $\mathbb{P}$ preserva cardinais, precisamos mostrar que $(2^{\omega_1})^{V[G]} = \kappa$. Seja, pois, X um subconjunto de ω_1 em $V[G]$. Existe *nice name* σ para X, i.e.,

$$\sigma = \cup_{\xi\in\omega_1}\{\check{\xi}\}\times A_\xi$$

onde cada A_ξ é uma anticadeia em $\mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ é ω_2-c.c temos $|A_\xi| \leq \omega_1$. Usando CH no modelo inicial verifica-se que $|\mathbb{P}| = \kappa = 2^{\omega_1}$. Logo, existem

$\omega_1 \times (2^{\omega_1})^{\omega_1} = 2^{\omega_1} = \kappa$ *nice names* para subconjuntos de ω_1, o que prova que $2^{\omega_1} = \kappa$ em $V[G]$. □

Lema 4.7. *Para todo $p \in \mathbb{P}$, $C(K_p)^{V[G]} = C(K_p)^V$ e $M(K_p)^{V[G]} = M(K_p)^V$, onde $M(K_p)$ é o conjunto das medidas de Radon sobre K_p.*

Demonstração. Sabemos que P não adiciona subconjuntos enumeráveis de conjuntos que estão no modelo inicial e portanto temos que $[0,1]^{V[G]} = [0,1]^V$. Tome $f : K_p \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, em $V[G]$. Vamos mostrar que $f \in V$ e que f é contínua em V. Como $K_p \subseteq [0,1]^{I_p}$, temos que K_p é metrizável e separável. Seja $E \subseteq K_p$ um subconjunto enumerável denso e considere $g = f|_E$. Como g é um subconjunto enumerável de $K_p \times \mathbb{R}$, segue que $g \in V$.

Para cada $x \in K_p$, como K_p é metrizável e E é denso, encontramos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E que converge para x, em V. Como convergir para um ponto é absoluto, temos que x_n converge para x em $V[G]$. Logo, como f é contínua em $V[G]$, segue que $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Logo $g(x_n) = f(x_n)$ também converge para $f(x)$ em V. Portanto podemos definir uma função $h : K_p \longrightarrow \mathbb{R}$ em V dada por

$$h(x) = lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em E que converge para x. Pelas observações anteriores, o limite acima existe, não depende da escolha de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, h é contínua em V e $h(x) = f(x)$, para todo x, concluindo que $f \in C(K_p)^V$. O que acabamos de mostrar foi que $C(K_p)^{V[G]} \subseteq C(K_p)^V$. Para a outra direção basta ver que, analogamente como vimos acima, uma função em K_p contínua em V também será contínua em $V[G]$. Por fim, como medidas de Radon sobre K_p podem ser identificadas como funções de uma base enumerável em $\mathbb{R}$, a prova de que $M(K_p)^{V[G]} = M(K_p)^V$ é análoga. □

Lema 4.8. *Se $p \Vdash (\dot{I} \subseteq \dot{I}_G) \wedge (|\dot{I}| \leq \check{\omega})$, então existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{I} \subseteq \check{I}_q$.*

Demonstração. Sejam $\dot{\alpha}_n$ nomes para elementos de κ tais que

$$p \Vdash \dot{I} = \{\dot{\alpha}_n : n \in \check{\mathbb{N}}\}.$$

Tome $p_{-1} = p$. Supondo construído p_{n-1}, para $n \geq 0$, tome $p'_n, q_n \in \mathbb{P}$ e $\alpha_n \in \kappa$ tais que $p'_n \leq p_{n-1}$ e

$$p'_n \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\alpha}_n, \check{\alpha}_n \in \check{I}_{q_n}, \check{q}_n \in \dot{G}.$$

Como $p'_n \Vdash \check{p}'_n, \check{q}_n \in \dot{G}$, achamos $p''_n \leq p'_n$ e $p_n \in \mathbb{P}$ tais que

$$p''_n \Vdash \check{p}_n \leq \check{p}'_n, \check{q}_n.$$

Como a relação de ordem em $\mathbb{P}$ é absoluta temos

$$p_n \Vdash \check{p}_n \leq \check{p}'_n, \check{q}_n.$$

Logo $p_n \Vdash \check{I}_{q_n} \subseteq \check{I}_{p_n}$ e

$$p_n \Vdash \dot{\alpha}_n = \check{\alpha}_n, \check{\alpha}_n \in \check{I}_{p_n}.$$

Como $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e $\mathbb{P}$ é σ-fechado, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$q \Vdash \forall n \in \check{\mathbb{N}}\ \dot{\alpha}_n = \check{\alpha}_n,\ \check{\alpha}_n \in \check{I}_q.$$

Isto é, $q \Vdash \dot{I} \subseteq \check{I}_q$, como queríamos. $\square$

Em $V[G]$, definimos

$$K = \{x \in [0,1]^{I_G} \ :\ \forall p \in G(x|_{I_p} \in K_p)\}$$

como um subespaço de $[0,1]^{I_G}$ com a topologia produto.

Sejam $\dot{K}$ e $\dot{G}$ $\mathbb{P}$-nomes para K e G, respectivamente.

Teorema 4.9. *Em $V[G]$, seja K como acima.*

(A) *K é compacto e conexo;*

(B) *Dados*

(a) *uma sequência de funções contínuas* $(f_n : n \in \mathbb{N})$ *e duas a duas disjuntas de* K *em* $[0,1]$*;*

(b) *uma sequência relativamente discreta* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *de pontos de* K *tais que* $f_n(x_m) = 0$*, para todo* $n, m \in \mathbb{N}$*;*

(c) *um* $\varepsilon > 0$*;*

(d) *uma sequência limitada* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de medidas regulares sobre* K *tais que* $|\int f_n d\mu_n| > \varepsilon$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

existem $\delta > 0$*,* $b \subseteq a \subseteq \mathbb{N}$ *subconjuntos infinitos e funções contínuas* f'_n *de* K *em* $[0,1]$ *tais que*

(e) $supp(f'_n) \subseteq supp(f_n)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(f) $|\int f'_n d\mu_n| > \delta$ *e* $\Sigma\{\int f'_m d|\mu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$*, para todo* $n \in a$*;*

(g) $\{f'_n : n \in b\}$ *tem supremo em* $C(K)$*;*

(h) $\overline{\{x_n : n \in b\}} \cap \overline{\{x_n : n \in a \setminus b\}} \neq \emptyset$*.*

(C) *Para todo fechado* $L \subseteq K$*, todo operador em* $C(L)$ *é multiplicador fraco;*

(D) *Se* $\mathbb{P}$ *preserva cardinais então* K *tem peso* κ*.*

Demonstração. Para (A), note que $K = \bigcap_{p\in G} \pi^{-1}_{I_G,I_p}[K_p]$ e, portanto, como cada K_p é compacto, temos que K é fechado em $[0,1]^{I_G}$ e, com maior razão, compacto. Se K não fosse conexo, obteríamos V e W abertos disjuntos de K tais que $K \setminus V \cup W = \emptyset$. Como os suportes de V e W são finitos, achamos $p \in G$ tal que I_p contém os suportes de V e W, e teríamos que $\pi_{I_p}[V]$ e $\pi_{I_p}[W]$ seriam dois abertos disjuntos cuja união é K_p, contradizendo que K_p é conexo.

Provaremos agora a parte (B). Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e ε como nos itens de (a) a (d) da parte (B).

Pelo teorema de Tietze existem funções contínuas $\tilde{f}_n : [0,1]^{I_G} \longrightarrow [0,1]$ tais que $\tilde{f}_n|_K = f_n$. Por um teorema de Mibu (veja [Mi]) existe $I \subseteq I_G$ enumerável tal que, se $x|I = y|I$, então $\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_n(y)$, para todo n.

Pela regularidade das medidas, cada μ_n depende de uma quantidade enumerável de abertos básicos. Logo, existem $J \subseteq I_G$ enumerável e medidas μ'_n sobre $\pi_J[K]$ tais que para todo boreliano A em K temos $\mu_n(A) = \mu'_n(\pi_J[A])$. Podemos assumir que $J = I$.

Sejam $\dot{f}_n$, $\dot{\mu}'_n$, $\dot{x}_n$ e $\dot{I}$ $\mathbb{P}$-nomes para os objetos descritos acima. Pelo princípio do máximo (veja [Ku]), podemos supor que $\mathbb{P}$ força que os itens de (a) a (d) valem e que $\dot{I}$ satisfaz a tese do teorema de Mibu.

Para concluirmos (B) precisamos provar que para todo $p \in \mathbb{P}$ existe $q \leq p$ que força os itens de (e) a (h).

Fixe $p \in \mathbb{P}$. Pelo lema 4.8 existe $r \leq p$ tal que $r \Vdash \dot{I} \subseteq \check{I}_r$. Por Mibu e por $\pi_{I_r}[K] = K_r$, achamos $\mathbb{P}$-nomes $\dot{g}_n$ para funções contínuas de K_r em $[0,1]$ tais que

$$r \Vdash \dot{g}_n(\dot{x}|\check{I}_r) = \dot{f}_n(\dot{x}), \text{ para todo } \dot{\mathrm{x}} \in \dot{\mathrm{K}}.$$

Claramente r força que $(\dot{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são duas a duas disjuntas. Temos também que $r \Vdash \dot{J} \supseteq \check{I}_r$ e

$$r \Vdash \dot{f}_n \circ \pi_{\dot{J}} = \dot{g}_n \circ \pi_{\dot{J},\check{I}_r}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $g_n = val_G(\dot{g}_n)$, pelo lema 4.7 temos $g_n \in V$.

Repetindo o mesmo argumento e usando as medidas μ'_n, podemos assumir que existe uma sequência $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas sobre K_r tais que $\mu_n(A) = \nu_n(\pi_{I_r}[A])$, para todo boreliano A em K.

Podemos também assumir que existem $z_n \in K_r$, para $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$(*) \qquad r \Vdash \check{z}_n = \dot{x}_n|_{\check{I}_r}.$$

Pelo lema 4.2 existem $q \leq r$, $\delta > 0$, $b \subset a \subset \mathbb{N}$ subconjuntos infinitos, $z' \in K_q$ e funções contínuas $g'_n : K_r \longrightarrow [0,1]$ tais que $supp(g'_n) \subset supp(g_n)$ e

(i) $|\int g'_n d\nu_n| > \delta$ e $\Sigma\{\int g'_m d|\nu_n| : m \neq n, m \in a\} < \delta/3$, para todo $n \in a$;

(ii) $K_q = K_r((g'_n)_{n\in b})$ é uma extensão completa;

(iii) $(g'_n \circ \pi_{I_q,I_r})_{n\in b}$ tem supremo em $C(K_q)$;

(iv) $((\pi^{-1}_{I_q,I_r}[\{z_n\}])_{n\in\mathbb{N}}, b, a\smallsetminus b, z')\in\mathcal{P}_q$.

Seja $\dot{g}$ um $\mathbb{P}$-nome para o supremo de $(\check{g}'_n\circ\pi_{I_q,I_r})_{n\in b}$ em $C(K_q)$. Podemos assumir que tal afirmação é forçada por q.

Em $V[G]$, defina $f'_n = g'_n\circ\pi_{I_q}$. Claramente vemos que vale (e). O item (f), por sua vez, segue de (i). Para provar os itens (g) e (h) e concluir a demonstração do teorema é suficiente mostrar que

(v) $q\Vdash \dot{g}\circ\pi_{I_q}$ é o supremo de $(\dot{f}'_n)_{n\in b}$ em $C(\dot{K})$ e $\overline{\{\dot{x}_n : n\in\check{b}\}}\cap\overline{\{\dot{x}_n : n\in\check{a}\smallsetminus\check{b}\}}\neq\emptyset$.

Suponha que $q\nVdash \dot{g}\circ\pi_{I_q} = sup(\dot{f}'_n)_{n\in b}$. Como

$$q\Vdash \dot{f}'_n(x) = \dot{g}'_n(x|_{\check{I}_r}) = \dot{g}'_n\circ\pi_{I_p,I_r}(x)\leq \dot{g}(x|_{\check{I}_q}) = \dot{g}\circ\pi_{I_q}(x)$$

existem $s\leq q$ e um $\mathbb{P}$-nome $\dot{h}$ para uma função contínua de K em $[0,1]$ tais que $s\Vdash \dot{f}'_n\leq\dot{h}<\dot{g}\circ\pi_{\check{I}_q}$, para todo $n\in b$. Pelo teorema de Mibu existem $s'\leq s$ e $\dot{J}$ tais que

$$s'\Vdash \dot{J}\subseteq\dot{I}_G,\ |\dot{J}| = \check{\mathbb{N}}\ \text{e, se}\ x|_{\dot{J}} = y|_{\dot{J}}\ \text{então}\ \dot{h}(x)=\dot{h}(y).$$

Pelo lema 4.8 existe $t\leq s'$ tal que $t\Vdash \dot{J}\subseteq\check{I}_t$. Logo, existe $\mathbb{P}$-nome $\dot{h}'$ para uma função contínua de K_t em $[0,1]$ tal que

$$t\Vdash \dot{h} = \dot{h}'\circ\pi_{\check{I}_t},\ \dot{g}'_n\circ\pi_{\check{I}_r}\leq\dot{h}.$$

Como $t\leq s$, existe um $\mathbb{P}$-nome $\dot{x}$ para um elemento de K tal que

$$t\Vdash \dot{h}'(\dot{x}|_{\check{I}_t}) = \dot{h}(\dot{x}) < \dot{g}\circ\pi_{\check{I}_r}(\dot{x}) = \dot{g}\circ\pi_{\check{I}_t,\check{I}_q}(\dot{x}|_{\check{I}_q}).$$

Portanto, t força que $\dot{g}\circ\pi_{\check{I}_t,\check{I}_q}$ não é o supremo de $(\dot{g}'_n\circ\pi_{\check{I}_r})_{n\in b}$ em K_r, pois

$$t\Vdash \dot{g}'_n\circ\pi_{\check{I}_t,\check{I}_r}\leq\dot{h}'<\dot{g}\circ\pi_{\check{I}_t,\check{I}_r}.$$

Isso contradiz o lema 4.4.

Para provarmos a segunda parte de (v), suponha que

$$q \nVdash \overline{\{\dot{x}_n : n \in \check{b}\}} \cap \overline{\{\dot{x}_n : n \in \check{a} \setminus \check{b}\}} \neq \emptyset.$$

Usando a compacidade de K, existem $s \leq q$ e $\mathbb{P}$-nomes $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ de abertos básicos de K tais que

$$s \Vdash \dot{V}_1 \cap \dot{V}_2 = \emptyset,\ \{\dot{x}_n : n \in \check{b}\} \subseteq \dot{V}_1,\ \{\dot{x}_n : n \in \check{a} \setminus \check{b}\} \subseteq \dot{V}_2.$$

Seja $\dot{I}$ um $\mathbb{P}$-nome tal que $s \Vdash \dot{I} = \{\alpha \in \check{I}_G : \pi_{\{\alpha\}}[\dot{V}_1] \neq \pi_{\{\alpha\}}[\dot{K}]$ ou $\pi_{\{\alpha\}}[\dot{V}_2] \neq \pi_{\{\alpha\}}[\dot{K}]\}$.

Como $\dot{V}_1$ e $\dot{V}_2$ são $\mathbb{P}$-nomes para abertos básicos, podemos assumir que $s \Vdash |\dot{I}| < \omega$. Pelo lema 4.8 existe $t \leq s$ tal que

$$t \Vdash \dot{I} \subseteq \check{I}_t.$$

Logo t força que $\pi_{\check{I}_t}[\dot{V}_1]$ e $\pi_{\check{I}_t}[\dot{V}_2]$ separam $\{\dot{x}_n|_{\check{I}_t} : n \in \check{b}\}$ e $\{\dot{x}_n|_{\check{I}_t} : n \in \check{a} \setminus \check{b}\}$ em K_t. I.e.,

$$(**) \qquad t \Vdash \overline{\{\dot{x}_n|_{\check{I}_t} : n \in \check{b}\}} \cap \overline{\{\dot{x}_n|_{\check{I}_t} : n \in \check{a} \setminus \check{b}\}} = \emptyset \text{ em } \check{\mathrm{K}}_{\mathrm{t}}.$$

Isso contradiz (iv) e as condições P3 e O4 da definição do forcing. De fato, por $(*)$ temos $x_n|_{I_t} \in \pi^{-1}_{I_t,I_r}[\{z_n\}]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, por (iv) e O4 existem $z'' \in K_t$ e $a', b' \subseteq \mathbb{N}$ subconjuntos infinitos e disjuntos tais que $((\pi^{-1}_{I_t,I_r}[\{z_n\}])_{n\in\mathbb{N}}, a', b', z'') \in \mathcal{P}_t$. Por P3 isso implicaria que $(\pi^{-1}_{I_t,I_r}[\{z_n\}])_{n\in a'}$ e $(\pi^{-1}_{I_t,I_r}[\{z_n\}])_{n\in b'}$ convergem para z'' e, como $a' \setminus b$ e $b' \setminus (a \setminus b)$ são finitos, obtemos uma contradição com $(**)$.

A demonstração do item (C) é a primeira parte da demonstração do Teorema 5.3 de [Fa2].

Por fim, para provarmos (D) suponha primeiramente que $\mathbb{P}$ preserva cardinais. Suponha então que K tem peso $\lambda < \kappa$ e seja $\mathcal{B}$ uma base para K de cardinalidade λ. Sem perda de generalidade podemos assumir que cada elemento de $\mathcal{B}$ depende de um número finito de coordenadas e, portanto, pela regularidade de κ, existe $\alpha < \kappa$ tal que todo elemento de $\mathcal{B}$ depende das coordenadas abaixo de α. Pelo lema 4.3 temos que

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \exists \beta > \alpha\, (\beta \in I_p \wedge x^p_\beta \neq y^p_\beta)\}$$

é denso em $\mathbb{P}$ e portanto $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Seja $\tilde{p} \in G \cap D_\alpha$ e fixe $\beta > \alpha$ tal que $\beta \in I_{\tilde{p}} \wedge x^{\tilde{p}}_\beta \neq y^{\tilde{p}}_\beta$. Defina $x_\beta = \bigcup_{p \in G} x^p_\beta$ e $y_\beta = \bigcup_{p \in G} y^p_\beta$. Portanto, $x_\beta \neq y_\beta$ e existem elementos de $\mathcal{B}$ que separam x_β e y_β. Por hipótese, a separação acontece abaixo de α, o que é uma contradição pois por P4 e O5 temos que $x_\beta|\alpha = y_\beta|\alpha$. Isto encerra a demonstração do Teorema.

□

O espaço K construído anteriormente tem peso pelo menos contínuo, e portanto $C(K)$ tem densidade pelo menos contínuo, pois o peso de K é a densidade de $C(K)$. De fato, K tem peso pelo menos contínuo porque todo espaço fracamente Koszmider tem peso não-enumerável (veja [Ko2]). Como começamos em um modelo V onde vale CH e usamos um forcing σ-fechado (que não adiciona conjuntos enumeráveis), CH continua valendo na extensão. Não obstante, pelo item (D) do teorema 4.9 e pelo lema 4.6, temos que se $\mathbb{P}$ for ω_2-c.c então K terá peso κ estritamente maior que contínuo, e portanto $C(K)$ terá densidade maior que contínuo, respondendo positivamente a seguinte pergunta:

Pergunta 1. *É relativamente consistente com ZFC que existe um espaço topológico compacto, Hausdorff e conexo K tal que $C(K)$ tem densidade maior que contínuo e K é hereditariamente fracamente Koszmider?*

Para o forcing que construímos, não sabemos se na extensão $V[G]$ vale o princípio $\diamondsuit$. Se em $V[G]$ valer $\neg\diamondsuit$, K responderá positivamente a seguinte pergunta:

Pergunta 2. *É relativamente consistente com CH + $\neg\diamondsuit$ que existe um espaço topológico compacto, Hausdorff e conexo K hereditariamente fracamente Koszmider?*

A Pergunta 2 é importante pois a única construção que conhecemos de K hereditariamente fracamente Koszmider é feita assumindo $\diamondsuit$. Veja [Fa2] para maiores referências.

4.3 Um resultado sobre a densidade de $C(K)$ com poucos operadores

Em [Ko4], Koszmider mostra que uma condição suficiente sobre K para garantir que $C(K)$ tenha poucos operadores é a seguinte: existe $E \subseteq K$ denso tal que para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E e toda sequência de abertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tais que $x_n \notin U_m$ para todos m e n, existe $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito e co-infinito satisfazendo $\overline{\{x_n : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \neq \emptyset$ e $\overline{\bigcup\{U_n : n \in M\}} \cap \overline{\bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} = \emptyset$. Mostraremos agora que essa condição, comumente utilizada nas construções de espaços de Banach $C(K)$ com poucos operadores, impõe um limitante superior para a densidade de $C(K)$, ou equivalentemente, para o peso de K.

Lema 4.10. *Se K é um espaço topológico compacto de densidade κ e $E \subseteq K$ é um denso, então existe uma sequência $(X_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ de subconjuntos de E tais que cada $X_\alpha = \{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$, onde $(x_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita e relativamente discreta, e $\overline{X_\beta} \cap X_\alpha = \emptyset$ $\forall \beta < \alpha$.*

Demonstração. Construíremos a sequência $(X_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ por recursão transfinita. Para isso, fixemos $\alpha < \kappa$ e assumamos que já tenhamos construído $X_\beta \subseteq E$, para $\beta < \alpha$. Defina agora $X = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha}\{x_n^\beta : n \in \mathbb{N}\}$. Como $|X| < d(K) = \kappa$, temos que $\overline{X} \neq K$ e, mais ainda, que $K \setminus \overline{X}$ é um aberto infinito. Como E é denso, segue que $(K \setminus \overline{X}) \cap E$ é infinito. Daí, podemos tomar $(x_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência infinita e relativamente discreta em $E \setminus \overline{X}$ e definir $X_\alpha = \{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. Para ver que a sequência $(X_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ satisfaz a condição do enunciado, tome $\beta < \alpha$ quaisquer. Como $X_\alpha \subseteq E\setminus\overline{X_\beta} \subseteq K\setminus\overline{X_\beta}$, segue que $\overline{X_\beta} \cap X_\alpha = \emptyset$. Isto encerra a prova do lema.

□

Lema 4.11. ([Ju], 2.7) *Seja K um espaço topológico compacto* [1]. *Então $w(K) \leq 2^{d(K)}$.*

Teorema 4.12. *Seja K um espaço topológico compacto e suponha que existe $E \subseteq K$ denso tal que para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E e toda sequência*

[1] O mesmo resultado vale para espaços topológicos regulares em geral.

de abertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ *tais que* $x_n \notin U_m$ *para todos* m *e* n*, existe* $M \subseteq \mathbb{N}$ *infinito e co-infinito satisfazendo* $\overline{\{x_n : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \neq \emptyset$ *e* $\overline{\bigcup\{U_n : n \in M\}} \cap \overline{\bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} = \emptyset$*. Então* $w(K) \leq 2^{2^{2^\omega}}$*.*

Demonstração. Sejam $d(K) = \kappa$ e $E \subseteq K$ denso. Tome $(x_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N},\alpha\in\kappa}$ como no Lema 4.10 e considere a aplicação $\varphi : \kappa \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dada por $\varphi(\alpha) = \{M \subseteq \mathbb{N}$ infinito e co-infinito $: \overline{\{x_n^\alpha : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \neq \emptyset\}$. Por absurdo, suponha que $\kappa > 2^{2^\omega}$. Então existem $\alpha, \beta \in \kappa$ tais que $\beta < \alpha$ e $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$. Usando a normalidade de K e o fato de que $\overline{\{x_n^\beta : n \in \mathbb{N}\}} \cap \{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, podemos tomar $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ uma sequência de abertos não vazios dois a dois disjuntos satisfazendo $x_n^\alpha \in U_n$ e $x_n^\beta \notin U_m$ para todos m e n. Por hipótese, existe $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito e co-infinito tal que $\overline{\{x_n^\beta : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n^\beta : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \neq \emptyset$ e $\overline{\bigcup\{U_n : n \in M\}} \cap \overline{\bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} = \emptyset$. Em particular, $M \in \varphi(\beta)$ e portanto $M \in \varphi(\alpha)$. Dessa forma, segue que devemos ter $\overline{\{x_n^\alpha : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \neq \emptyset$, o que é um absurdo pois sabemos que $\overline{\{x_n^\alpha : n \in M\}} \cap \overline{\{x_n^\alpha : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} \subseteq \overline{\bigcup\{U_n : n \in M\}} \cap \overline{\bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N} \setminus M\}} = \emptyset$. Desse modo, concluímos que $\kappa \leq 2^{2^\omega}$ e portanto, pelo Lema 4.11, temos $\omega(K) \leq 2^{d(K)} \leq 2^{2^{2^\omega}}$. $\square$

Em [Ko6] os autores provam que não existe limitante superior para a densidade dos espaços de Banach da forma $C(K)$ com poucos operadores. A técnica utilizada é diferente das técnicas usuais e ela se baseia nas ideias contidas em [Sh1] e [Sh2]. Motivados pela Pergunta 1 da seção anterior e pelo resultado de [Ko6], é razoável formularmos a seguinte pergunta:

Pergunta 3. *Será que existe limitante superior para a densidade dos espaços de Banach da forma* $C(K)$ *que satisfazem a propriedade de que* $C(L)$ *tem poucos operadores, para todo fechado* $L \subseteq K$*?*

Bibliografia

[AG] Aiena, P.; Gonzalez, M. *Essentially incomparable Banach spaces and Fredholm Theory*. Proc. Irish. Acad. Sect. A93, n. 1, p. 49 - 59, 1993.

[BF] Barbeiro, A.S.V.; Fajardo, R.A.S. *Suprema of continuous functions on connected spaces*. São Paulo J. Math. Sci, 2016.

[Ci] Ciesielski, K. *Set theory for the working mathematician*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Di] Diestel, J. *Sequences and series in Banach spaces*. Spring-Verlag, New York, 1984.

[DU] Diestel, J.; Uhl, J. J. Jr. *Vector measures*. Mathematical Surveys 15, AMS. 1977.

[Do] Douwen, E. K. *The integers and topology*. Em Kunen, K.; Vaughan, J. E., editores, *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier Science Publishers B.V., p. 111 - 167, 1984.

[DS] Dunford, N.; Schwartz, J. T. *Linear operators*. Interscience Publishers LTD., London, 1958.

[Eng] Engelking, R. *General topology*, 2ªed. Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Fa] Fabian, M.; Hájek, P.; Pelant, J.; Habala, P.; Montesinos, V.; Zizler, V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Spring-Verlag, New York, 2001.

[Fa1] Fajardo, R. *An indecomposable Banach space of continuous functions which has small density*. Fund. Math., v. 202, n. 1, p. 43 - 63, 2009.

[Fa2] Fajardo, R. *Quotients of indecomposable Banach spaces of continuous* *functions.* Studia Math., v. 212, n. 3, p. 259 - 283, 2012.

[Fa3] Fajardo, R. *Essentially Incomparable Banach Spaces of Continuous Functions.* Bull. Pol. Ac.: Tech., v. 58, n. 3, p. 247 - 258, 2010.

[Fed] Fedorchuk, V.V. *A bicompactum whose infinite closed subsets are all n-dimensinal* (Russo). Math. USSR Sbornik, v. 25, p. 37 - 57, 1975.

[Fer] Ferenczi, V. *Quotient hereditarily indecomposable Banach spaces.* Canad. J. Math., v. 51, n. 3, p. 566 - 584, 1999.

[Fr] Fremlin, D. H. *Consequences of Martin's axiom.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[Ga] Gasparis, I. *A continuum of totally incomparable hereditarily indecomposable Banach spaces.* Studia Math., v. 151, n. 3, p. 277 - 298, 2002.

[Go] Gödel, K. *What is Cantor's continuum problem?* Amer. Math. Monthly., v.54, p. 515 - 525, 1947.

[GM1] Gowers, W. T; Maurey, B. *The unconditional basic sequence problem.* Journal A. M. S., v. 6, p. 851 - 874, 1993.

[GM2] Gowers, W. T; Maurey, B. *Banach spaces with small spaces of operators.* Math. Ann., v. 307, p. 543 - 568, 1997.

[Ha] Haydon, R.*A non-reflexive Grothendieck space that does not contain l_∞.* Israel J. Math., v. 40, n. 1, p.65 - 73, 1981.

[HLO] Haydon, R.; Levy, M.; Odell, E. *On sequences without weak* convergent convex block subsequences.* Proc. Amer. Math. Soc., v.100, n. 1, p. 94 - 98, 1987.

[Ju] Juhász, I. *Cardinal functions in topology - ten years later.* Math. Centre Tracts, Vol. 123, Math. Centrum, Amsterdam, 1980.

[Je] Jech, T. *Set Theory : The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[KP] Kadec, M. I.; Pełczyński, A. *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p.* Studia Math., v. 21, p. 161 - 176, 1962.

[Ko1] Koszmider, P. *Forcing minimal extensions of Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., v. 351, n. 8, p. 3073 - 3117, 1999.

[Ko2] Koszmider, P. *Banach spaces of continuous functions with few operators.* Math. Annalen., v. 330, p. 151 - 183, 2004.

[Ko3] Koszmider, P. *A space $C(K)$ where all nontrivial complemented subspaces have big densities.* Studia Math., v. 168, n. 2, p. 109 - 127, 2005.

[Ko4] Koszmider, P. *A survey on Banach spaces $C(K)$ with few operators.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM 104 (2010), no. 2, 309-326.

[Ko5] Koszmider, P. *On large indecomposable Banach spaces.* J. Funct. Anal., v. 264, p. 1779 - 1805, 2013.

[Ko6] Świetek, M.; Koszmider, P.; Shelah, S. *There is no bound on sizes of indecomposable Banach spaces.* Advances in Mathematics, v. 323, p. 745 - 783, 2018.

[Kop] Koppelberg, S. *General theory of Boolean algebras.* Em Monk, J.D., editor, *Handbook of Boolean Algebras.* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.

[Ku] Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North Holland, 1980.

[LM] Lacey, E.; Morris, P. *On spaces of the type $A(K)$ and their duals.* Proc. Amer. Math. Soc., v. 23, p. 151 - 157, 1969.

[LT] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I: Sequences Spaces.* Springer-Verlag, 1977.

[Me] Meyer-Nieberg, P. *Banach Lattices.* Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mi] Mibu; *On Baire functions on finite product spaces.* Proc. Imperial Acad. Tokyo, v. 20, p. 661 - 663, 1994.

[Pe1] Pełczyński, A. *Banach spaces on which every unconditionally converging operation is weakly compact.* Bull. Acad. Polon. Sc. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., v. 10, p. 641 - 648, 1962.

[Pe2] Pełczyński, A. *On strictly singular and strictly non-singular operators I.* Bull. Acad. Polon. Sc. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., v. 13, p. 31 - 41, 1962.

[Pl] Plebanek, G.; *A construction of a Banach space $C(K)$ with few operators.* Top. Appl., v. 143, p. 217 - 239, 2004.

[Ru] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*, 3ªed. McGraw-Hill, New York, 1987.

[Sc] Schachermayer, W. *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras.* Diss. Math., 214, 1982.

[Schl] Schlackow, I. *Centripetal operators and Koszmider spaces.* Top. Appl., v. 155, p. 1227 - 1236, 2008.

[Se] Semadeni, Z.*Banach spaces of continuous functions.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.

[Sh1] Shelah, S. *Existence of endo-rigid Boolean algebras.* Lecture Notes in Math., v. 1182, p. 91 - 119, 1986.

[Sh2] Shelah, S. *Existence of endo-rigid Boolean algebras.* preprint, https://arxiv.org/abs/1105.3777, 2011.

[SS] Shelah, S.; Steprans, J.; *A Banach Space on which there are few operators.* Proc. Amer. Math. Soc., v. 104, p. 101 - 105, 1988.

[Ta] Talagrand, M. *Un Nouveau $C(K)$ qui possede la propriete de Grothendieck.* Israel J. Math., v. 37, p. 181 - 191, 1980.

[Ve] Velleman, D. *Morasses, diamond and forcing.* Ann. Pure. Appl. Logic, v. 23, p. 199 - 281, 1983.

[Wa] Walker, R. *The Stone-Čech Compactification.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.