Representações parciais de grupos, seus domínios e o multiplicador de Schur parcial

Helder Geovane Gomes de Lima

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev

Durante o desenvolvimento deste trabalho
o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP. Processo 2009/53551-9.

São Paulo, março de 2014

Representações parciais de grupos, seus domínios e o multiplicador de Schur parcial

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/03/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana - UFRGS
- Prof. Dr. Antonio Paques - UFRGS
- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Muniz S. Alves - UFPR
- Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev (orientador) - IME-USP

Dedico estre trabalho à memória de Boris Novikov.

Agradecimentos

Gostaria de aproveitar este espaço para expressar a minha gratidão a todos que, de uma forma ou de outra, ajudaram a tornar esta tese possível.

Acima de tudo, sou muito grato à minha família – em especial à minha mãe, ao meu pai, e aos meus irmãos – por acreditarem em mim, me apoiarem e me incentivarem em todos os momentos, além de serem compreensivos com a minha ausência.

Também agradeço ao meu orientador Mikhailo Dokuchaev, por sua paciência e sua disposição para esclarecer as dúvidas que surgiram durante a minha formação, e pela inspiração para me dedicar e me tornar bom pesquisador.

Sou grato aos meus grandes amigos, aos que tive a oportunidade de conhecer nesse período, àqueles com quem joguei conversa fora, com quem troquei ideias, ou dúvidas, ou que gentilmente apontaram meus erros, que estiveram juntos em momentos marcantes, nos seminários, nos congressos, nas vésperas de provas, nas pizzarias, nos passeios e nos recitais, e também àqueles que mesmo a distância estão sempre comigo.

Agradeço ainda a cada um dos compositores cuja boa música me acompanha (quase) todos os dias, e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Graças a cada um de vocês, pude sonhar e conseguir forças para batalhar pelos meus sonhos.

Resumo

LIMA, H. G. G. de. **Representações parciais de grupos, seus domínios e o multiplicador de Schur parcial**. 2014. 68 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

O multiplicador de Schur parcial de um grupo G é um semigrupo inverso comutativo $pM(G)$ que, no estudo de representações parciais projetivas de grupos, desempenha um papel análogo ao do multiplicador de Schur clássico $M(G)$. Há uma descrição de $pM(G)$ como uma união de grupos abelianos, em que cada componente $pM_D(G)$ é formada por classes de equivalência de certas funções parciais (chamadas de conjuntos fatores parciais), as quais assumem valores em um corpo e têm como domínio um subconjunto $D \subseteq G \times G$. Os domínios D formam um reticulado e foram caracterizados como os subconjuntos $\mathcal{T}$-invariantes de $G \times G$, em que $\mathcal{T}$ é um monoide específico atuando em $G \times G$. A componente total $pM_{G\times G}(G)$, que corresponde aos conjuntos fatores totalmente definidos, é particularmente interessante pois contém $M(G)$ como um de seus subgrupos e, além disso, qualquer outra componente é uma imagem epimorfa da componente total. Um dos objetivos deste trabalho é determinar a componente total do multiplicador de Schur parcial para algumas classes importantes de grupos, como os grupos diedrais, os grupos dicíclicos e os produtos de grupos cíclicos. Outro tópico que será abordado é a estrutura do reticulado dos domínios dos conjuntos fatores parciais, destacando-se propriedades daqueles que correspondem às representações parciais ditas elementares, as quais possuem um papel relevante na teoria. Provaremos que todo domínio pode ser representado em uma forma única como uma reunião de certos domínios indecomponíveis, que consistem de peças estruturais chamadas de blocos e domínios minimais. Também será determinada a estrutura dos domínios elementares e serão obtidos alguns invariantes numéricos do conjunto parcialmente ordenado dos domínios elementares. Como uma consequência dos resultados obtidos, serão caracterizados os grupos para os quais todos os domínios elementares são indecomponíveis. Além disso será feita uma aplicação da teoria de álgebras de semigrupos à álgebra parcial de grupo, que é uma álgebra responsável pelas representações parciais de grupos.
Palavras-chave: representações parciais projetivas de grupos, multiplicador de Schur parcial de um grupo, domínios elementares.

Abstract

LIMA, H. G. G. de. **Partial group representations, their domains and the partial Schur multiplier**. 2014. 68 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

The partial Schur multiplier of a group G is a commutative inverse semigroup $pM(G)$ which, in the study of partial projective representations, plays a role analogous to the classical Schur multiplier $M(G)$. There is a description of $pM(G)$ as a union of abelian groups, in which each component $pM_D(G)$ is formed by the equivalence classes of certain partial functions (called partial factor sets), taking values in a field and having as its domain a subset $D \subseteq G \times G$. The domains D form a lattice and were characterized as the $\mathcal{T}$-invariant subsets of $G \times G$, where $\mathcal{T}$ is a specific monoid acting on $G \times G$. The total component $pM_{G\times G}(G)$, which corresponds to the totally defined factor sets, is particularly interesting because it contains $M(G)$ as one of its subgroups and, moreover, any other component is an epimorphic image of the total component. One of the objectives of this work is to determine the total component of the partial Schur multiplier for some important classes of groups, such as the dihedral groups, the dicyclic groups and the products of cyclic groups. Another topic which will be considered is the structure of the lattice of domains of partial factor sets, emphasizing properties of those domains that correspond to the so-called elementary partial representations, which play a relevant role in the theory. We shall prove that each domain can be represented in a unique way as a union of certain indecomposable domains, where the latter consists of the so-called blocks and minimal domains. The structure of the elementary domains also will be determined, and some numerical invariants of the partially ordered set of the elementary domains will be given. As a consequence of the obtained facts, the groups whose elementary domains are indecomposable will be characterized. We will also give an application of the theory of semigroup algebras to the partial group algebra, an algebra which is responsible for partial group representations.
Keywords: partial projective representations of groups, partial Schur multiplier of a group, elementary domains.

Sumário

Lista de Símbolos **xi**

Lista de Figuras **xiii**

Lista de Tabelas **xv**

Introdução **1**

1 Preliminares **5**
1.1 Ações Parciais de Grupos . . . 5
1.2 Representações Parciais . . . 7
1.3 Semigrupos e Reticulados . . . 7
1.4 O Monoide $S(G)$ e Suas $\mathcal{J}$-classes . . . 11
1.5 Representações Parciais Projetivas . . . 12

2 Revisitando Alguns Fatos Conhecidos **17**
2.1 Decomposição da Álgebra Parcial de Grupo . . . 17
2.2 Representações Parciais de Grau Finito . . . 21
2.3 Interação entre Ações e Representações Parciais . . . 25

3 Domínios de Representações Parciais Projetivas **31**
3.1 Domínios Elementares . . . 31
3.2 Minimalidade e Indecomponibilidade . . . 33
3.3 Decomposição de Domínios Elementares . . . 37
3.4 Alguns Invariantes de $C(G)$ . . . 40

4 Multiplicador de Schur Parcial **45**
4.1 Grupos Diedrais . . . 48
4.2 Produto Direto de Grupos Cíclicos . . . 50
4.3 Grupos Dicíclicos . . . 57
4.4 Grupos Infinitos . . . 60
4.4.1 Grupo Cíclico Infinito . . . 60
4.4.2 Grupo Diedral Infinito . . . 62
4.5 Sugestões para Pesquisas Futuras . . . 64

A Diagramas de Domínios Elementares **65**

B S_3-órbitas Efetivas de $C_m \times C_n$ **67**

Referências Bibliográficas **69**

Índice Remissivo **72**

Lista de Símbolos

Símbolo	Página
$\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$	6
$A/\mathrm{St}\, A$	12
$C(G)$	14
D_A	32
$\mathrm{cls}(\sigma)$	15
$\mathrm{dom}\, \sigma$	13
$E(S)$	9
$\Gamma(G)$	21
$\Gamma_{\mathrm{fin}}(G)$	22
$\mathcal{G}(\mathcal{S}(G))$	22
I_a	8
J_a	8
$\mathcal{J}_a$	8
$\mathcal{J}_A$	12
$K[S]$	8
$K_0[S]$	8
$\ker(S)$	9
L_D	15
λ_Δ	23
N_D	14
$o_n(G)$	40
$pm(G)$	14
$pM(G)$	14
$pm'_D(G)$	14
$s(G, D)$	14
$S^0(H; \mathcal{I}, \Delta; P)$	10
$M(A; \mathcal{I}, \Delta; P)$	10
$\mathrm{Proj}\, M$	13
$\mathcal{S}(G)$	11
S_G	50
$\mathrm{St}\, A$	12
$\mathcal{T}$	13
$\mathcal{T}(G)$	40
T_G	50

Símbolo	Página
$\mathcal{V}_A$	21
$X(G)$	51
$Y(e)$	51

Lista de Figuras

1.1 Ilustração da definição de ação parcial de grupo. 5
1.2 Restrição de uma ação total β de um grupo em $\mathcal{B}$ a uma ação parcial α em $\mathcal{A}$. 6

2.1 Ordenação das $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(C_3)$. 21
2.2 Vértices e arestas de $\Gamma(C_3)$. 22

4.1 Representantes das órbitas efetivas de S_3 em $C_9 \times C_9$, em que $C_9 = \langle a \mid a^9 = 1 \rangle$. . . 46

A.1 Ordem parcial dos domínios elementares de $C_2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$. 65
A.2 Ordem parcial dos domínios elementares de $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$. 65
A.3 Ordem parcial dos domínios elementares de $C_4 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$. 65
A.4 Ordem parcial dos domínios elementares de $V = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$. 66
A.5 Ordem parcial dos domínios elementares de $C_5 = \langle a \mid a^5 = 1 \rangle$. 66
A.6 Ordem parcial dos domínios elementares de $C_6 = \langle a \mid a^6 = 1 \rangle$. 66
A.7 Ordem parcial dos domínios elementares de $S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$. 66

Lista de Tabelas

B.1 S_3-órbitas efetivas de $C_5 \times C_3$ 67
B.2 S_3-órbitas efetivas de $C_4 \times C_4$ 68

Introdução

O conceito de ação parcial foi elaborado na área de álgebra de operadores, nos artigos [25, 32, 26, 27]. Exel apresentou uma correspondência biunívoca entre as ações parciais de um grupo G e as ações (globais) de um semigrupo inverso $\mathcal{S}(G)$ que pode ser construído a partir daquele grupo (ver Definição 1.4.1). Posteriormente, o estudo de ações e representações parciais continuou em diferentes frentes de trabalho, investigando-se por exemplo:

- Qual é a estrutura da *álgebra parcial de grupo* cuja teoria de representações corresponde à teoria de representações parciais do grupo? Isso foi discutido em [16, 23], para grupos finitos.
- No caso de grupos infinitos, como descrever a estrutura das representações parciais irredutíveis (ou indecomponíveis) de grau finito em termos de representações usuais? Esse problema foi tratado em [24].
- Em que circunstâncias uma ação parcial de grupo é a restrição de alguma ação global, ou seja, quando ela é globalizável? O estudo disso iniciou-se em [1, 2, 39, 30, 15], e há informações adicionais em [14].
- Qual a estrutura do produto cruzado parcial, e quais são as suas propriedades? Ver, por exemplo, [14].
- E se em vez de ações parciais de grupos forem consideradas generalizações para monoides, grupoides, ou álgebras de Hopf? Quando existirá uma globalização? Isso foi abordado em [33, 28, 9, 10, 5, 6].
- Ao globalizar uma ação parcial de grupo ou de monoide sobre certo espaço topológico, que propriedades do espaço são transferidas para a globalização? Tal questão foi discutida em [2, 33].

Além das questões acima, foi estudado o problema do isomorfismo para álgebras parciais de grupos [14] e foi introduzida em [17] uma teoria de Galois de ações parciais, a qual continuou a ser estudada em trabalhos como [11, 36]. Foram desenvolvidas ainda diversas aplicações à teoria de autômatos [22] e álgebras de Leavitt [29], além de ter sido publicada uma série de trabalhos relacionados ao assunto na área de C^*-álgebras (há uma discussão desses trabalhos em [14]). Também desenvolveu-se uma teoria de representações parciais projetivas [14], uma teoria cohomológica baseada em ações parciais em [18] e foram pesquisados outros assuntos sobre ações e co-ações de álgebras de Hopf [4, 3, 7, 8, 12].

O multiplicador de Schur parcial $pM(G)$ de um grupo G foi introduzido em [19] e [20], juntamente com a noção de uma representação parcial projetiva de um grupo sobre um corpo. Ele é uma generalização do multiplicador de Schur usual $M(G)$ e aparece naturalmente no estudo de uma nova teoria de cohomologia baseada em ações parciais. Ao contrário de sua versão clássica, que é um grupo, este multiplicador tem a estrutura de um semirreticulado de grupos abelianos $pM_D(G)$, denominados componentes, indexados por certos subconjuntos $D \subseteq G \times G$ (ver Teorema 1.5.8). Fixando-se um corpo K, cada componente $pM_D(G)$ é formada por funções parcialmente definidas $\sigma\colon G \times G \to K$, que têm D como domínio e que são conhecidas como conjuntos fatores parciais. Esses conjuntos fatores parciais estão associados às representações parciais projetivas conforme a Definição 1.5.5.

Sabe-se que os domínios dos conjuntos fatores parciais formam um reticulado, e eles foram caracterizados em [19, Corollary 7] como os subconjuntos $\mathcal{T}$-invariantes de $G \times G$, em que $\mathcal{T}$ é um monoide específico atuando em $G \times G$ (ver (1.3) e (1.5)). Um dos objetivos deste trabalho é descrever a estrutura destes domínios, e também dos domínios que estão associados a certas representações parciais conhecidas como elementares (ver (3.1)).

A componente $pM_{G\times G}(G)$ do multiplicador de Schur parcial $pM(G)$ (que corresponde aos conjuntos fatores totalmente definidos) é particularmente importante, pois conforme [19] o multiplicador de Schur usual $M(G)$ é um de seus subgrupos e, além disso, de acordo com [21, Corollary 5.8 (iv)] qualquer componente é uma imagem epimorfa da componente total. Alguns trabalhos recentes forneceram uma descrição para a componente total $pM_{G\times G}(G)$ do multiplicador de Schur parcial $pM(G)$ sobre corpos algebricamente fechados nos casos em que G é um grupo cíclico finito [21, Corollary 6.4] ou um 2-grupo abeliano elementar C_2^n [34], e também no caso em que $G = S_3 \simeq D_6$ [38, Lemma 3.10].

O último capítulo deste trabalho será dedicado ao estudo da componente total do multiplicador de Schur parcial para algumas outras classes de grupos importantes. Em particular, uma generalização de [38, Lemma 3.10] para os grupos diedrais D_{2m} será apresentada no Teorema 4.1.1 e [21, Corollary 6.4] será generalizado para o produto direto $C_m \times C_n$ de grupos cíclico finitos no Corolário 4.2.6, e para o grupo cíclico infinito no Corolário 4.4.3. Além disso, a componente total também é descrita no caso dos grupos dicíclicos. Estes resultados foram obtidos em colaboração com H. Pinedo.

Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

- Descrição da estrutura do semirreticulado de domínios e dos domínios elementares;
- Descrição da componente total do multiplicador de Schur parcial para algumas famílias de grupos, a saber, grupos diedrais, grupos dicíclicos, produtos de grupos cíclicos, bem como para o grupo cíclico de ordem infinita e o grupo diedral de ordem infinita;
- Obtenção de um análogo de [20, Theorem 3] sobre a relação entre as categorias de ações parciais e a categoria de representações parciais no Teorema 2.3.3;
- Obtenção de uma demonstração alternativa para a estrutura da álgebra parcial de grupos finitos;
- Preenchimento de uma lacuna na demonstração de um resultado de [24] (vide Teorema 2.2.3 e Proposição 2.2.4).

Organização do Trabalho

No primeiro capítulo, serão apresentados os conceitos básicos de ações e representações parciais, bem como algumas definições e notações que são comuns na teoria de semigrupos. Além disso, o capítulo introduz as noções de representações parciais projetivas, os conjuntos fatores parciais e o multiplicador de Schur parcial, e relembra alguns fatos relacionados ao multiplicador parcial de Schur que serão utilizados ao caracterizar a componente total do multiplicador de Schur parcial para certas famílias de grupos.

O capítulo seguinte discute alguns resultados que foram apresentados originalmente nos artigos [16, 24, 20], começando pela exposição de uma demonstração alternativa para a decomposição da álgebra parcial de grupo em soma de álgebras matriciais sobre álgebras de subgrupos. Em um segundo momento, é demonstrada uma proposição cujo propósito é completar uma lacuna existente na prova de [24, Theorem 2.2], sobre as representações parciais de grau finito de grupos. O capítulo se encerra com a discussão da interação entre ações parciais e representações parciais em álgebras.

A partir do Capítulo 3 são consideradas representações parciais projetivas. Nas primeiras seções do terceiro capítulo são demonstradas algumas propriedades dos domínios elementares, e é dada uma descrição dos domínios minimais e indecomponíveis. Além disso, prova-se que todo domínio pode ser decomposto de forma única como uma união de certos domínios indecomponíveis, determina-se a estrutura dos domínios elementares e obtêm-se alguns invariantes numéricos do conjunto parcialmente ordenado dos domínios elementares. Por meio desses resultados, caracterizam-se os grupos para os quais todos os domínios elementares são indecomponíveis. Estes resultados foram obtidos em colaboração com H. Pinedo e com o professor M. Dokuchaev.

No Capítulo 4 será descrita a componente total $pM_{G\times G}(G)$ do multiplicador de Schur parcial $pM(G)$ para algumas famílias de grupos G, e serão indicados alguns caminhos que poderão ser seguidos em pesquisas futuras.

Finalmente, o Apêndice A mostra como são os domínios elementares para alguns grupos de ordem pequena e o Apêndice B ilustra como são as S_3-órbitas efetivas de produtos de grupos cíclicos finitos, e também a lista de representantes considerada no Exemplo 4.2.4.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas definições e resultados que serão úteis para a compreensão dos capítulos posteriores. Ao longo do texto, salvo indicação em contrário, K sempre denotará um corpo, K^* o conjunto de seus elementos diferentes de zero e G um grupo.

1.1 Ações Parciais de Grupos

O conceito de ação parcial de grupo será definido como em [27, 15]:

Definição 1.1.1. Uma *ação parcial de um grupo G em um conjunto X* é uma coleção de bijeções $\alpha_g \colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ entre subconjuntos $\mathcal{D}_g \subseteq X$, para cada $g \in G$, tal que:

(i) $\mathcal{D}_1 = X$ e $\alpha_1 = \mathrm{Id}_X$ (1 é o elemento neutro de G);

(ii) Para quaisquer $g, h \in G$:

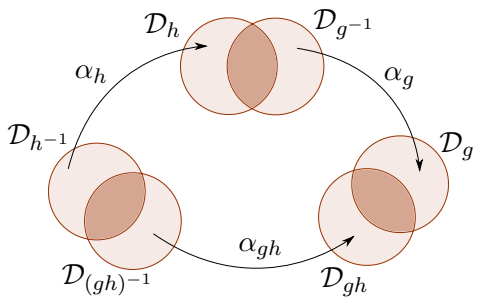
  (a) $\alpha_g(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$;

  (b) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$.

Há uma definição alternativa segundo a qual uma ação parcial de grupo é uma função parcial de $G \times X$ em X que satisfaz certas propriedades (para detalhes, consultar [30]). De forma mais geral, pode-se considerar também ações parciais de monoides como foi feito em [33].

As condições acima podem ser melhor visualizadas por meio da Figura 1.1. Quando há diversas

Figura 1.1: *Ilustração da definição de ação parcial de grupo.*



ações parciais de um mesmo grupo sendo consideradas, é interessante poder compará-las, e identificar aquelas que são, em sua essência, uma mesma ação parcial. A definição abaixo descreve essa identificação de forma mais precisa:

Definição 1.1.2. Sejam α e α' ações parciais de um grupo G nos conjuntos X e X' dadas por $\{\alpha_g \colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ e $\{\alpha'_g \colon \mathcal{D}'_{g^{-1}} \to \mathcal{D}'_g \mid g \in G\}$, respectivamente. Um *morfismo*[1] *de α em α'* é uma função $\varphi \colon X \to X'$ tal que, para todo $g \in G$:

[1] Em [33] os morfismos de ações parciais de monoides foram denominados *aplicações equivariantes*.

(i) $\varphi(\mathcal{D}_g) \subseteq \mathcal{D}'_g$;

(ii) $\alpha'_g(\varphi(x)) = \varphi(\alpha_g(x))$, para todo $x \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, ou seja, o diagrama

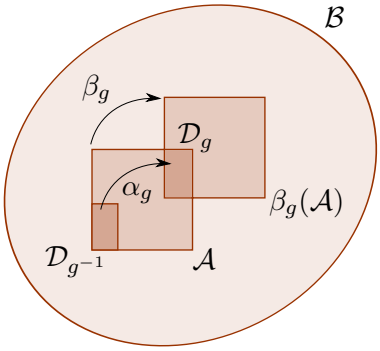
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_{g^{-1}} \arrow[r, "\alpha_g"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{D}_g \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{D}'_{g^{-1}} \arrow[r, "\alpha'_g"] & \mathcal{D}'_g \end{tikzcd}$$

é comutativo.

No caso de X ser uma K-álgebra associativa $\mathcal{A}$, em que K é um corpo, define-se uma ação parcial de G em $\mathcal{A}$ exigindo-se, além das condições presentes na Definição 1.1.1, que os domínios $\mathcal{D}_g$ sejam ideais de $\mathcal{A}$ e que as aplicações α_g ($g \in G$) sejam isomorfismos de álgebras (ver [15]). Neste caso, um morfismo entre ações parciais de G nas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ é definido como um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ satisfazendo as propriedades da Definição 1.1.2. O morfismo φ será chamado de *epimorfismo* se cada restrição $\varphi : \mathcal{D}_g \to \mathcal{D}'_g$ for um epimorfismo de álgebras, *monomorfismo* se tais restrições forem monomorfismos de álgebras e *isomorfismo* se elas forem isomorfismos de álgebras. Neste último caso, as ações parciais em questão serão denominadas *isomorfas*.[2]

Conforme [15, Theorem 4.5], uma ação parcial de G em uma álgebra $\mathcal{A}$ (com unidade) pode ser vista como a restrição de uma ação total (ou seja, é *globalizável*) se, e somente se, cada ideal $\mathcal{D}_g$ for uma álgebra com unidade. A obtenção de ações parciais a partir de ações totais é feita de forma bastante natural, como é ilustrado pela Figura 1.2. A definição precisa não será utilizada neste texto, mas pode ser consultada em [15].

Figura 1.2: *Restrição de uma ação total β de um grupo em $\mathcal{B}$ a uma ação parcial α em $\mathcal{A}$.*



Para entender a relação entre as ações e as representações parciais de grupos em álgebras que serão definidas na próxima seção, foi utilizada a seguinte noção em [15]:

Definição 1.1.3. Seja α uma ação parcial de um grupo G em uma álgebra $\mathcal{A}$. O *anel de grupo skew* correspondente é definido como

$$\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \delta_g : a_g \in \mathcal{D}_g \right\},$$

em que a soma é definida termo a termo, e o produto é determinado por

$$(a_g \delta_g) \cdot (b_h \delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g) b_h) \delta_{gh}.$$

Quando a ação parcial é globalizável, esse anel é associativo.

[2] Em [15] elas foram denominadas *equivalentes*.

1.2 Representações Parciais

Definição 1.2.1. Chama-se de *representação parcial de G em uma álgebra $\mathcal{A}$* (com unidade) a qualquer aplicação $\phi\colon G \to \mathcal{A}$ que verifique as seguintes propriedades:

(i) $\phi(1) = 1_{\mathcal{A}}$

(ii) $\phi(g)\phi(h)\phi(h^{-1}) = \phi(gh)\phi(h^{-1})$

(iii) $\phi(g^{-1})\phi(g)\phi(h) = \phi(g^{-1})\phi(gh)$

Em particular, toda representação (usual) de grupo é também uma representação parcial.

A cada grupo G e a cada corpo K associou-se em [16] uma K-álgebra com unidade que cumpre um papel análogo ao da *álgebra de grupo* no estudo das representações usuais:

Definição 1.2.2. A *álgebra parcial do grupo G* sobre K, denotada por $K_{\text{par}}(G)$, é a álgebra gerada pelo conjunto de símbolos $\{[g] : g \in G\}$, sujeitos às seguintes relações:

(i) $[1] = 1$

(ii) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$

(iii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$

para quaisquer $g, h \in G$.

Uma das razões para o interesse no estudo de $K_{\text{par}}(G)$ é que as *representações* (usuais) dessa álgebra correspondem biunivocamente às *representações parciais* de G, caso ele seja finito. O estudo da estrutura da álgebra parcial de grupo mencionado na introdução envolveu, entre outras coisas, o *problema do isomorfismo* no contexto de álgebras parciais de grupos (ver [16] e [23]). Nos artigos mencionados, os autores mostraram como um anel parcial $R_{\text{par}}(G)$ pode ser decomposto como soma direta de anéis de matrizes $M_m(RH)$, com H variando entre os subgrupos de G. No Teorema 2.1.2 será apresentada uma demonstração alternativa para essa decomposição de $K_{\text{par}}(G)$, utilizando-se da teoria de álgebra de semigrupos.

Definição 1.2.3. Sejam $\pi\colon G \to \mathcal{B}$ e $\pi'\colon G \to \mathcal{B}'$ representações parciais de G. Um *morfismo de π em π'* é um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{B} \arrow[ll, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

é comutativo, isto é, para todo $g \in G$, $\pi'(g) = \varphi(\pi(g))$.

1.3 Semigrupos e Reticulados

Nesta seção, serão fixadas algumas notações que são usuais na teoria de semigrupos e de álgebras de semigrupos e destacados alguns fatos que serão úteis posteriormente.

Um *semigrupo* S é um conjunto no qual está definida uma operação binária associativa. Se essa operação binária possui um elemento neutro, denotado por 1, então S é chamado de *monoide*. Dado um semigrupo S, o monoide obtido de S por meio da adjunção de uma unidade é o conjunto

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{se } S \text{ tem elemento neutro,} \\ S \cup \{1\}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Para todo $x \in S \cup \{1\}$, define-se $1x = x1 = x$. De forma análoga, pode-se obter um semigrupo com zero a partir de S:

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ tem zero,} \\ S \cup \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aqui, se $x \in S \cup \{0\}$, define-se $0x = x0 = 0$.

Dado $a \in S$, serão utilizadas ainda as seguintes notações:

- O *ideal principal de S gerado por a* é o conjunto $S^1aS^1 = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}$ e será denotado por J_a;
- A *$\mathcal{J}$-classe de a* é formada pelos elementos b tais que $J_b = J_a$ (ou seja, geradores de J_a) e é denotada por $\mathcal{J}_a$. Em outras palavras, $a, b \in S$ estão em uma mesma $\mathcal{J}$-classe se, e somente se, $S^1aS^1 = S^1bS^1$;
- I_a é o conjunto dos elementos de J_a que não geram J_a como um ideal de S. Assim, $I_a = J_a \setminus \mathcal{J}_a$ e $\mathcal{J}_a = J_a \setminus I_a$. Note que I_a é vazio exatamente no caso em que J_a é um ideal minimal de S, e quando isso não ocorre, I_a é um ideal de S;
- As $\mathcal{J}$-classes serão ordenadas como em [13, p. 48]:

$$\mathcal{J}_a \leq \mathcal{J}_b \text{ se, e somente se, } J_a \subseteq J_b. \tag{1.1}$$

Diz-se que S é um *semigrupo inverso*, se para cada $a \in S$ existe um único $b \in S$ tal que $aba = a$ e $bab = b$. Neste caso, b é chamado de inverso de a e denotado por a^{-1}.

Lema 1.3.1. *Se S é um semigrupo, então:*

(i) $\mathcal{J}_{ab} \leq \mathcal{J}_a$ e $\mathcal{J}_{ab} \leq \mathcal{J}_b$, para quaisquer $a, b \in S$;

(ii) Se S é inverso, $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_{a^{-1}}$, para todo $a \in S$.

Demonstração. Tem-se $J_{ab} = S^1abS^1 \subseteq S^1aS^1 = J_a$ e também $J_{ab} = S^1abS^1 \subseteq S^1bS^1 = J_b$. Assim, se S é inverso,

$$\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_{a(a^{-1}a)} \leq \mathcal{J}_{a^{-1}a} \leq \mathcal{J}_{a^{-1}}$$

e a igualdade segue por simetria. □

Definição 1.3.2. Seja S um semigrupo. A *álgebra de semigrupo* de S sobre K, denotada por $K[S]$, é o K-espaço vetorial com base S munido de uma multiplicação que estende naturalmente a operação de S. Mais precisamente, $K[S]$ é o conjunto de todas as somas formais $\alpha = \sum_{s \in S} \alpha_s s$, em que apenas uma quantidade finita dos coeficientes $\alpha_s \in K$ é diferente de zero. A soma é dada por

$$\sum_{s \in S} \alpha_s s + \sum_{s \in S} \beta_s s = \sum_{s \in S} (\alpha_s + \beta_s) s$$

e o produto por

$$\left(\sum_{s \in S} \alpha_s s \right) \cdot \left(\sum_{s \in S} \beta_s s \right) = \sum_{s \in S} \gamma_s s,$$

em que $\gamma_s = \sum_{u,v \in S, uv = s} \alpha_u \beta_v$.

Se S possui zero θ, define-se também a *álgebra de semigrupo contraída* de S sobre K como o quociente de álgebras $K_0[S] = K[S]/K\theta$, em que $K\theta = \{\alpha\theta \mid \alpha \in K\}$.

O Lema 1.3.4 destacará a relação entre a álgebra de semigrupo e a álgebra de semigrupo contraída. Para isso, tenha em mente a definição de quociente de semigrupos por ideais:

Definição 1.3.3. Seja I um ideal do semigrupo S e considere a congruência $\sim_I$ definida por

$$a \sim_I b \Leftrightarrow a = b \text{ ou } \{a, b\} \subseteq I.$$

Define-se o *semigrupo quociente* S/I como sendo $S/\sim_I$.

Verifica-se que S/I é isomorfo ao semigrupo $(S \setminus I) \cup \{0\}$ (assuma que $0 \notin S \setminus I$) no qual o produto de elementos arbitrários a e b é dado em termos de seu produto em S, da seguinte forma:

$$a \cdot b = \begin{cases} ab, & \text{se } a, b, ab \in S \setminus I, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 1.3.4. *Seja S um semigrupo. Então:*

- *[35, Chapter 4, Corollary 8] Se I é um ideal de S tal que a álgebra de semigrupo $K[I]$ possui unidade e, então $K[S] \simeq K[I] \oplus K_0[S/I]$, sendo o isomorfismo dado por $x \mapsto xe + \varphi(x), x \in K[S]$, em que φ é a aplicação natural de $K[S] \to K[S/I]$.*
- *[35, Chapter 4, Corollary 9] Se S tem zero, então $K[S] \simeq K \oplus K_0[S]$.*

Observação 1.3.5. Seja S um semigrupo com zero. Segue do segundo item do Lema 1.3.4 que a existência de uma unidade em $K[S]$ equivale à existência de uma unidade em $K_0[S]$. Além disso, se I é um ideal não-nulo de S tal que a álgebra de semigrupo $K[I]$ (ou $K_0[I]$) possui unidade, então

$$K_0[S] \simeq \frac{K[S]}{K\theta} \simeq \frac{K[I] \oplus K_0[S/I]}{K\theta} \simeq \frac{K[I]}{K\theta} \oplus K_0[S/I] \simeq K_0[I] \oplus K_0[S/I].$$

Se S não possui zero, será considerado que $K_0[S] = KS$.

Definição 1.3.6. O *núcleo de um semigrupo S* é definido como a interseção de todos os seus ideais bilaterais não vazios, e será denotado por $\ker(S)$.

Note que o núcleo de S é também um ideal, e se $0 \in S$ então $\ker(S) = \{0\}$.

Definição 1.3.7. Um semigrupo S é dito *simples* se não contém propriamente nenhum ideal bilateral. Analogamente, um semigrupo S com 0 é dito *0-simples* se o seu único ideal bilateral próprio é $\{0\}$ e sua multiplicação não é nula ($S^2 \neq \{0\}$).

Entre os semigrupos simples (e os 0-simples) há um tipo especial que também é de grande importância na teoria de semigrupos. No que segue, $E(S) = \{e \in S \mid e^2 = e\}$ denotará o conjunto dos idempotentes do semigrupo S.

Definição 1.3.8. Um idempotente e de um semigrupo S é dito *primitivo* se para todo idempotente f não-nulo, $ef = fe = e$ implica $e = f$ ou $e = 0$.

Definição 1.3.9. Um semigrupo S é dito *completamente simples* (*completamente 0-simples*) se S é simples (0-simples) e tem algum idempotente primitivo.

A estrutura destes semigrupos ficará mais clara quando for introduzida a notação da Definição 1.3.14. Antes disso, será considerado um conceito que ajuda a entender como os semigrupos (0-)simples aparecem de forma natural "dentro" de outros semigrupos.

Definição 1.3.10. Dado $a \in S$, o semigrupo quociente J_a/I_a, ou simplesmente J_a se $I_a = \emptyset$, é chamado de *fator principal* correspondente a a.

Observação 1.3.11. Note que se $I_a \neq \emptyset$, o fator principal $J_a/I_a = \mathcal{J}_a \cup \{0\} = \mathcal{J}_a^0$. Além disso, sabe-se por [13, Lemma 2.39] que em um semigrupo qualquer, todo fator principal é de um dos seguintes tipos:

(i) Simples (se for o núcleo do semigrupo)

(ii) 0-simples

(iii) De ordem dois e com multiplicação nula

Quando a terceira condição não ocorre, o semigrupo em questão recebe um nome especial.

Definição 1.3.12. Um semigrupo S é dito *semissimples* se nenhum de seus fatores principais possui multiplicação nula, isto é, se todos eles são 0-simples ou simples. Analogamente, se todo fator principal de S é completamente simples ou completamente 0-simples, S é denominado *completamente semissimples*.

O seguinte fato também é conhecido da teoria de semigrupos:

Lema 1.3.13[13, Corollary 2.56]. *Todo semigrupo finito simples (0-simples) é completamente simples (completamente 0-simples).*[3]

Pelo teorema de Rees–Sushkevich (ver [13]), todos os *semigrupos completamente 0-simples* são descritos pela seguinte construção:

Definição 1.3.14. Dados um grupo H, conjuntos $\mathcal{I}$ e Δ não vazios (e não necessariamente finitos), um símbolo 0 e uma matriz $P = (p_{\lambda,i})_{(\lambda,i)\in\Delta\times\mathcal{I}}$ com entradas em $H \cup 0$ e pelo menos um elemento não-nulo em cada linha e cada coluna, a notação $S^0(H;\mathcal{I},\Delta;P)$ será utilizada para denotar o semigrupo $(\mathcal{I}\times H\times\Delta)\cup\{0\}$ em que o produto é definido por

$$(i,g,\lambda)\cdot(j,h,\mu) = \begin{cases} (i, gp_{\lambda,j}h, \mu) & \text{se } p_{\lambda,j} \neq 0, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$0\cdot(i,g,\lambda) = (i,g,\lambda)\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0.$$

Se $|\mathcal{I}| = m$ e $|\Delta| = n$, a notação será simplificada para $S^0(H;m,n;P)$.

De forma similar, todos os semigrupos completamente simples têm a forma $S(H;\mathcal{I},\Delta;P)$, como na construção anterior, com a diferença de que P é uma matriz com entradas em H.

O semigrupo $S^0(H;\mathcal{I},\Delta;P)$ também pode ser representado por um conjunto de matrizes de dimensão $|\mathcal{I}|\times|\Delta|$ sobre $H\cup\{0\}$ com no máximo uma entrada diferente de zero, e com $a\cdot b = aPb$, para todo $a,b\in S^0(H;\mathcal{I},\Delta;P)$, em que o lado direito é um produto usual de matrizes. De forma similar, define-se a seguinte álgebra:

Definição 1.3.15. Dados uma K-álgebra A, conjuntos $\mathcal{I}$ e Δ não vazios (e não necessariamente finitos), e uma matriz P de dimensão $|\Delta|\times|\mathcal{I}|$ com entradas em A, a notação $\mathfrak{M}(A;\mathcal{I},\Delta;P)$ será utilizada para denotar a álgebra de todas as matrizes de dimensão $|\mathcal{I}|\times|\Delta|$ sobre A com uma quantidade finita de entradas não-nulas, em que a adição e a multiplicação por escalar são as usuais e o produto de A e B é definido por $A\cdot B = APB$ (o lado direito é um produto usual de matrizes). Se $|\mathcal{I}| = m$ e $|\Delta| = n$, a notação será simplificada para $\mathfrak{M}(A;m,n;P)$. Estas álgebras também são conhecidas como *álgebras de Munn*.

O teorema a seguir caracteriza os semigrupos inversos completamente 0-simples:

Teorema 1.3.16[13, Theorem 3.9]. *As seguintes condições sobre um semigrupo S com zero são equivalentes:*

(i) S é um semigrupo inverso completamente 0-simples;

(ii) S é isomorfo a um semigrupo $S^0(G;m,m;\mathrm{Id})$ sobre um grupo com zero G^0 em que Id é a matriz identidade de dimensão $m\times m$.

[3] O resultado continua válido se for assumido que o grupo é *periódico* em vez de *finito*, mas o conceito de periodicidade não será utilizado neste texto.

Finalmente, o próximo lema mostra como é a álgebra de semigrupo contraída no caso de semigrupos completamente 0-simples.

Lema 1.3.17[13, Lemma 5.17]. *A álgebra de semigrupo contraída $K_0[S]$ de $S = S^0(G; m, n, P)$ sobre o corpo K é isomorfa à álgebra $\mathcal{B} = \mathfrak{M}(KG, m, n, P)$.*

Para a conveniência do leitor, são lembrados também os seguintes conceitos da teoria de ordem que serão utilizados no Capítulo 3:

Definição 1.3.18. Um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ é chamado de *reticulado* se para quaisquer $x, y \in P$, existem o supremo e o ínfimo de $\{x, y\}$. Neste caso, denota-se o supremo por $x \vee y$ e o ínfimo por $x \wedge y$.

Observe que, em particular, $(P, \vee)$ e $(P, \wedge)$ são semigrupos comutativos em que todo elemento é idempotente, ou seja, *semirreticulados*.

Definição 1.3.19. Um *reticulado limitado* é um reticulado que possui máximo (denotado por 1) e mínimo (denotado por 0).

Definição 1.3.20. Um *reticulado completo* é um reticulado em que todo subconjunto possui supremo e ínfimo.

1.4 O Monoide $S(G)$ e Suas $\mathcal{J}$-classes

A cada grupo G, pode-se associar um monoide inverso como em [27, Definition 2.1]:

Definição 1.4.1. O monoide gerado pelos símbolos $\{[g] \mid g \in G\}$ com as relações

(i) $[1][g] = [g][1] = [g]$,

(ii) $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$.

(iii) $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$,

será denotado por $\mathcal{S}(G)$.[4]

Foi demonstrado em [30] que existe um isomorfismo de semigrupos

$$\mathcal{S}(G) \simeq \tilde{G}^{\mathcal{R}} = \{(A, g) \mid \{1, g\} \subset A \subset G, |A| < \infty\},$$

sendo que neste conjunto a multiplicação é dada pela regra

$$(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh).$$

Tal isomorfismo é induzido pela aplicação $[g] \mapsto (\{1, g\}, g)$ e deste modo $\mathcal{S}(G)$ é isomorfo à expansão de Birget-Rhodes de G (para mais detalhes, pode-se consultar [30] e [40]). No presente trabalho, $\mathcal{S}(G)$ será identificado com $\tilde{G}^{\mathcal{R}}$, mas isso não deverá causar confusão. Em particular, denotando por $E(S)$ o conjunto dos idempotentes de um semigrupo S, nota-se que os idempotentes de $\mathcal{S}(G)$ são dados por

$$E(\mathcal{S}(G)) = \{(A, 1) \mid 1 \in A \subset G, |A| < \infty\}.$$

Para descrever as $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(G)$ será utilizado o seguinte conceito:

Definição 1.4.2. Dados subconjuntos A e B de G, ambos contendo 1, define-se:

- $A \preceq B$ se, e somente se, existe algum $x \in G$ tal que $xA \subseteq B$;
- $A \sim B$ se, e somente se, $A \preceq B$ e $B \preceq A$.

[4] Em alguns artigos este monoide é denotado por $E(G)$, mas neste texto a notação $E(S)$ será reservada para indicar o conjunto dos idempotentes de S.

O fato a seguir encontra-se em [20, Lemma 2]:

Lema 1.4.3. *Para que $(B, b) \in \mathcal{S}(G)(A, a)\mathcal{S}(G)$, ou seja, que (B, b) esteja no ideal gerado por (A, a), é necessário e suficiente que $A \preceq B$.*

Com essas notações, [20, Corollary 2] fornece a seguinte descrição para as $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(G)$:

Lema 1.4.4. *A $\mathcal{J}$-classe de cada $(A, a) \in \mathcal{S}(G)$ é o conjunto finito*

$$\mathcal{J}_A = \mathcal{J}_{(A,a)} = \{(B, b) \mid B \sim A, 1, b \in B\} = \{(a^{-1}A, a^{-1}b) \mid a, b \in A\}.$$

Em particular, $|A| = |B|$ sempre que $(B, h) \in \mathcal{J}_{(A,a)}$.

Vale ressaltar a seguinte propriedade de $\mathcal{S}(G)$:

Lema 1.4.5. *Para qualquer grupo G, o semigrupo $\mathcal{S}(G)$ é completamente semissimples.*

Demonstração. Uma vez que toda $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}_A$ possui um idempotente $(A, 1)$, resulta da Observação 1.3.11 que $\mathcal{J}_A^0$ é 0-simples e $\ker(\mathcal{S}(G))$ é simples (pois a multiplicação nestes semigrupos não é nula). Também segue do Lema 1.4.4 que todas as $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(G)$ são finitas, e como todo fator principal de $\mathcal{S}(G)$ é da forma $\mathcal{J}_A^0$ (ou simplesmente $\mathcal{J}_A$ no caso da $\mathcal{J}$-classe que coincide com $\ker(\mathcal{S}(G))$, conclui-se que eles são finitos e, pelo Lema 1.3.13, completamente (0-)simples. □

Lembrando-se que as $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(G)$ podem ser indexadas por subconjuntos de G contendo a unidade (pelo Lema 1.4.4), tem-se o seguinte fato:

Lema 1.4.6[20, Lemma 3]. *Seja $\mathcal{J}_A$ uma $\mathcal{J}$-classe de $\mathcal{S}(G)$. Então $\mathcal{J}_A^0$ é um semigrupo inverso completamente 0-simples da forma*

$$S^0(\mathrm{St}\, A; A/\mathrm{St}\, A, A/\mathrm{St}\, A; \mathrm{Id}),$$

em que $\mathrm{St}\, A = \{x \in G \mid xA = A\}$ é um subgrupo, A é uma união de classes laterais à direita de $\mathrm{St}\, A$, o conjunto $A/\mathrm{St}\, A$ é um transversal de tais classes laterais e Id é a matriz identidade de dimensões $|A/\mathrm{St}\, A| \times |A/\mathrm{St}\, A|$.

1.5 Representações Parciais Projetivas

Definição 1.5.1. Diz-se que um semigrupo S com 0 é um *K-semigrupo* se existe uma aplicação $K \times S \to S$ que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $x, y \in S$:

- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,
- $1_K x = x$,
- $0_K x = 0_S$.

Um exemplo de K-semigrupo é o monoide $\mathrm{Mat}_n K$ formado pelas matrizes $n \times n$ com entradas em K. Esse monoide tem ainda uma outra característica importante: ao multiplicar escalares distintos por uma mesma matriz não-nula, as matrizes resultantes são distintas. Os K-semigrupos com essa propriedade recebem um nome especial:

Definição 1.5.2. Um semigrupo M (com zero) é dito *K-cancelativo* se ele é um K-semigrupo tal que, para quaisquer $\alpha, \beta \in K$ e $x \in M \setminus \{0\}$, vale

$$\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Em um monoide K-cancelativo M, a congruência λ definida por

$$x \lambda y \Leftrightarrow x = \alpha y, \text{ para algum } \alpha \in K^*$$

determina o quociente $\operatorname{Proj} M = M/\lambda$ e a projeção canônica $\xi\colon M \to \operatorname{Proj} M$. No caso em que $M = \operatorname{Mat}_n K$, o quociente $\operatorname{Proj} M$ é justamente o espaço projetivo $\operatorname{PMat}_n K$ de matrizes $n \times n$ sobre K.

Definição 1.5.3. Um *homomorfismo parcial (unital)* de um grupo G com valores em um monoide M é uma aplicação $\phi\colon G \to M$ que preserva a unidade e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\phi(g)\phi(h)\phi(h^{-1}) = \phi(gh)\phi(h^{-1}),$$

$$\phi(g^{-1})\phi(g)\phi(h) = \phi(g^{-1})\phi(gh).$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Definição 1.5.4. Seja M um monoide K-cancelativo e G um grupo. Uma *representação parcial projetiva* de G em M é um função $\Gamma\colon G \to M$ tal que a composição $\xi\Gamma\colon G \to \operatorname{Proj} M$ é um homomorfismo parcial.

Conforme [19, Theorem 3], dada uma representação parcial projetiva $\Gamma\colon G \to M$, existe uma única função parcialmente definida $\sigma\colon G \times G \to K^*$, tal que

$$\operatorname{dom}\sigma = \{(x, y) \mid \Gamma(x)\Gamma(y) \neq 0\} \tag{1.2}$$

e para todo $(x, y) \in \operatorname{dom}\sigma$

$$\Gamma(x^{-1})\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x^{-1})\Gamma(xy)\sigma(x, y)$$

e

$$\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(y^{-1}) = \Gamma(xy)\Gamma(y^{-1})\sigma(x, y).$$

Por conveniência, define-se $\sigma(x, y) = 0$ quando $(x, y) \notin \operatorname{dom}\sigma$ (tornando σ totalmente definida), mantendo-se a definição de $\operatorname{dom}\sigma$ como em (1.2), e assume-se (sem perda de generalidade) que $\Gamma(1) = 1$.

Definição 1.5.5. A função σ associada à representação parcial projetiva Γ como no parágrafo anterior é chamada de *conjunto fator parcial* de Γ (ou simplesmente *conjunto fator* de G, subentendendo-se que está sendo considerada alguma representação parcial projetiva de G).

Em [19, seção 6] os autores introduziram o monoide $\mathcal{T}$ gerado por símbolos u, v e t com relações

$$u^2 = v^2 = (uv)^3 = 1,\ t^2 = t,\ ut = t,\ tuvt = tvuv,\ tvt = 0. \tag{1.3}$$

Pode-se verificar que há uma união disjunta

$$\mathcal{T} = \mathcal{S} \cup t\mathcal{S} \cup vt\mathcal{S} \cup uvt\mathcal{S} \cup 0, \tag{1.4}$$

em que $\mathcal{S} = \langle u, v \mid u^2 = v^2 = (uv)^3 = 1\rangle$ é um grupo isomorfo ao grupo simétrico S_3.

Dado um grupo arbitrário G, há uma ação à esquerda de $\mathcal{T}$ em $G \times G$ definida por meio das seguintes transformações:

$$t(x, y) = (x, 1), \quad u(x, y) = (xy, y^{-1}) \quad \text{e} \quad v(x, y) = (y^{-1}, x^{-1}), \text{ para quaisquer } x, y \in G. \tag{1.5}$$

Segue de (1.3) e (1.5) que $0(x, y) = (1, 1)$, para quaisquer $x, y \in G$, e há uma ação de S_3 em $G \times G$ induzida pela ação de $\mathcal{T}$. Assim, a S_3-órbita de um par $(x, y) \in G \times G$ é da forma

$$S_3(x, y) = \{(x, y), (xy, y^{-1}), (y, y^{-1}x^{-1}), (y^{-1}, x^{-1}), (y^{-1}x^{-1}, x), (x^{-1}, xy)\} \tag{1.6}$$

e contém $1, 2, 3$ ou 6 elementos (ver [21, p. 216], em que a S_3-órbita que contém (a, b) é denotada por $A_{(a,b)}$). Como em [34], as órbitas com 2 ou 6 elementos são denominadas *órbitas efetivas*. Assim,

as órbitas não efetivas têm a forma

$$\{(1,y),(y,y^{-1}),(y^{-1},1)\},\ \text{com } y\in G. \tag{1.7}$$

Observação 1.5.6. A importância do monoide $\mathcal{T}$ reside no fato estabelecido em [19, Corollary 7] de que os $\mathcal{T}$-subconjuntos D de $G\times G$, isto é, os elementos de

$$C(G)=\{D\subseteq G\times G \mid \mathcal{T}D\subseteq D\}=\{D\subseteq G\times G \mid \mathcal{T}D=D\},$$

são precisamente os *domínios dos conjuntos fatores* das representações parciais projetivas de G (ver [19, Theorem 5]). Sendo assim, eles formam um semirreticulado em relação à inclusão e à interseção de conjuntos (na verdade, se for considerada também a operação de união de conjuntos, $C(G)$ é um reticulado).

Além dessa caracterização dos domínios como subconjuntos $\mathcal{T}$-invariantes de $G\times G$, observe que de acordo com [19, Corollary 5], os conjuntos fatores σ de todas as representações parciais projetivas de G formam um monoide inverso comutativo $pm(G)$, com relação à multiplicação ponto a ponto.

Definição 1.5.7. O *multiplicador de Schur parcial* de G é o semigrupo quociente $pM(G)=pm(G)/\sim$, em que a equivalência $\sim$ é dada por

$$\sigma\sim\tau \Leftrightarrow \sigma(x,y)=\eta(x)\eta(xy)^{-1}\eta(y)\tau(x,y),\ x,y\in G$$

para alguma função $\eta\colon G\to K^*$.

Por serem semigrupos inversos comutativos, tanto $pm(G)$ quanto $pM(G)$ são semirreticulados de grupos abelianos, conforme o teorema a seguir:

Teorema 1.5.8[19, Theorem 5]. *Os semigrupos $pm(G)$ e $pM(G)$ são semirreticulados de grupos abelianos*

$$pm(G)=\bigcup_{D\in C(G)} pm_D(G),\quad pM(G)=\bigcup_{D\in C(G)} pM_D(G),$$

em que $C(G)$ é o semirreticulado dos subconjuntos $\mathcal{T}$-invariantes de $G\times G$ com relação à interseção de conjuntos, $pm_D(G)=\{\sigma\in pm(G)\mid \operatorname{dom}\sigma=D\}$ e $pM_D(G)=pm_D(G)/\sim$.

Supondo que o corpo K é algebricamente fechado, tem-se ainda a seguinte caracterização dos conjuntos fatores parciais σ:

Teorema 1.5.9[21, Theorem 5.6]. *Se τ é um conjunto fator parcial de G com domínio D então existe um conjunto fator parcial $\sigma\sim\tau$, que satisfaz:*

$$\sigma(a,b)\sigma(b^{-1},a^{-1})=1_K, \tag{1.8}$$

$$\sigma(a,b)=\sigma(b^{-1}a^{-1},a)=\sigma(b,b^{-1}a^{-1}), \tag{1.9}$$

$$\sigma(a,1)=1_K, \tag{1.10}$$

para todo $(a,b)\in D$. Reciprocamente, se $\sigma\colon G\times G\to K$ é uma função parcialmente definida com $\operatorname{dom}\sigma\in C(G)$ tal que (1.8), (1.9) e (1.10) são satisfeitas para todo $(a,b)\in D$, então σ é um conjunto fator parcial de G.

Para cada $D\in C(G)$, o subgrupo de $pm_D(G)$ formado por todas as aplicações $\sigma\colon G\times G\to K^*$ que satisfazem (1.8), (1.9) e (1.10) será denotado por $pm'_D(G)$.

Observação 1.5.10. Resulta da demonstração do Teorema 1.5.9 que um conjunto fator $\sigma\in pm'_D(G)$ fica completamente determinado por seus valores em um conjunto completo de representantes das órbitas efetivas de D.

Corolário 1.5.11[21, Corollary 5.8]. *Se D é o domínio de um conjunto fator parcial de um grupo arbitrário G, então:*

(i) Todo conjunto fator parcial de $pm_D(G)$ é equivalente a um elemento de $pm'_D(G)$.

(ii) O núcleo $N_D = \{\sigma \in pm'_D(G) \mid \sigma \sim 1\}$ do epimorfismo natural de $pm'_D(G) \to pM_D(G)$ consiste dos $\sigma\colon G \times G \to K$ para os quais existe $\rho : G \times G \to K^*$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\rho(1) = 1_K, \tag{1.11}$$

$$\rho(a)\rho(a^{-1}) = 1, \text{ para todo } a \in G \text{ tal que } (a, 1) \in D, \tag{1.12}$$

$$\sigma(a, b) = \begin{cases} \rho(a)\rho(b)\rho(ab)^{-1}, & \text{se } (a, b) \in D, \\ 0, & \text{se } (a, b) \notin D. \end{cases} \tag{1.13}$$

(iii) Sejam $s = s(G, D)$ a cardinalidade do conjunto de S_3-órbitas efetivas de D e $\{(a_i, b_i)\}_{1\leq i\leq s}$ um conjunto completo de representantes de tais órbitas. Então a aplicação

$$\phi : (K^*)^s \ni x \mapsto \sigma_x \in pm'_D(G), \tag{1.14}$$

em que $x = (x_i)_{1\leq i\leq s}$ e $\sigma_x(a_i, b_i) = x_i$, é um isomorfismo de grupos multiplicativos.

(iv) Para todo domínio $Y \in C(G)$ tal que $Y \supseteq D$, tem-se um epimorfismo $\psi_D^Y\colon pM_Y(G) \to pM_D(G)$. Em particular, $pM_D(G)$ é uma imagem epimorfa da componente total $pM_{G\times G}(G)$.

Para finalizar este capítulo, definindo

$$L_D = \{x \in (K^*)^s \mid \sigma_x \sim 1\} = \{x \in (K^*)^s \mid \sigma_x \in N_D\} \tag{1.15}$$

tem-se o seguinte:

Teorema 1.5.12[21, Theorem 5.9]. *Se $D \in C(G)$ e $s = s(G, D)$ é a cardinalidade do conjunto de S_3-órbitas efetivas de D, então há os seguintes isomorfismos:*

$$pM_D(G) \simeq pm'_D(G)/N_D \simeq (K^*)^s/L_D.$$

Em particular, será utilizado o epimorfismo

$$\psi : (K^*)^s \ni x \mapsto \mathrm{cls}(\sigma_x) \in pM_D(G), \tag{1.16}$$

para o qual $\ker(\psi) = L_D$. Aqui, $\mathrm{cls}(\sigma_x)$ indica a classe de equivalência de σ_x em $pM_D(G)$.

Capítulo 2

Revisitando Alguns Fatos Conhecidos

Neste capítulo, serão discutidos alguns resultados que foram apresentados originalmente nos artigos [16, 24, 20]. Na primeira seção, será dada uma demonstração alternativa para a decomposição da álgebra parcial de grupo em soma de álgebras matriciais sobre álgebras de subgrupos. Em seguida, será demonstrada uma proposição que completa uma lacuna existente na demonstração de [24, Theorem 2.2], sobre as representações parciais de grau finito de grupos. Para encerrar o capítulo, será discutida a interação entre ações parciais e representações parciais em álgebras.

2.1 Decomposição da Álgebra Parcial de Grupo

A álgebra parcial de grupo $K_{\text{par}}(G)$ introduzida na Definição 1.2.2 é justamente a álgebra de semigrupo de $\mathcal{S}(G)$ sobre o corpo K. Se G é um grupo finito, e $\mathcal{C}$ denota um conjunto completo de representantes das classes de conjugação dos subgrupos de G então, conforme [23, Theorem 2.1], há um isomorfismo

$$\psi\colon K_{\text{par}}(G) \to \bigoplus_{\substack{H\in\mathcal{C}\\ 1\leq m\leq (G:H)}} c_m(H)M_m(KH), \tag{2.1}$$

em que $c_m(H)M_m(KH)$ significa a soma direta de $c_m(H)$ cópias de $M_m(KH)$. O leitor interessado deve consultar [23] para obter detalhes sobre as multiplicidades $c_m(H)$. Por conveniência, simplificaremos a notação anterior para $\psi\colon K_{\text{par}}(G) \to \oplus M_m(KH)$, ficando implícito que pode ocorrer a repetição de somandos com o mesmo m e o mesmo H.

Conforme sugerido em [20, Remark 1], também é possível estabelecer o isomorfismo dado em (2.1) por meio da teoria de álgebras de semigrupos para semigrupos inversos. Isso será feito no Teorema 2.1.2 e o Exemplo 2.1.4 mostrará como é essa abordagem no caso do grupo cíclico de ordem 3. Para isso, é bom ter em mente o seguinte resultado:

Lema 2.1.1[20, Remark 1]. *Para todo fator principal $\mathcal{J}_A^0$ de $\mathcal{S}(G)$, tem-se*

$$K_0\mathcal{J}_A^0 \simeq K_0S^0\left(H; m, m; \mathrm{Id}\right) \simeq M_m(KH),$$

em que $H = \mathrm{St}\,A = \{g \in G \mid gA = A\}$ e $m = |A|/|\mathrm{St}\,A|$.

Demonstração. De acordo com o Lema 1.4.6, cada $\mathcal{J}_A^0$ é um semigrupo inverso completamente 0-simples da forma $S^0(\mathrm{St}\,A; A/\mathrm{St}\,A, A/\mathrm{St}\,A; \mathrm{Id})$, em que $A/\mathrm{St}\,A$ é um conjunto completo de representantes das classes laterais à direita de $\mathrm{St}\,A$ que estão contidas em A. Além disso, o Lema 1.3.17 garante que $K_0S^0(G; m, n; P) \simeq \mathfrak{M}(KG; m, n; P)$, para qualquer grupo G. Em particular, se $G = \mathrm{St}\,A$, $m = n = |A|/|\mathrm{St}\,A|$ e $P = \mathrm{Id}$, tem-se o isomorfismo desejado, a saber, $\phi\colon K_0S^0\left(H; m, m; \mathrm{Id}\right) \to M_m(KH)$ definido por

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{g\in H} c_{i,j,g}(i,g,j)\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{g\in H} c_{i,j,g}g\right)e_{i,j}. \tag{2.2}$$

onde $e_{i,j}$ denota a matriz com a unidade na posição (i,j) e zero nas demais posições. □

O isomorfismo (2.3) abaixo é um caso particular de um fato conhecido na teoria de álgebras de semigrupos. O objetivo aqui é mostrar que sua prova pode ser usada para obter a decomposição (2.4) de $K_{\text{par}}(G)$, de forma alternativa à demonstração feita em [16].

Teorema 2.1.2 Ver [35, Chapter 5, Corollary 27]. *Se S é um semigrupo inverso finito, então*

$$K_0[S] \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_{m_i}(KH_i), \tag{2.3}$$

para certos subgrupos $H_i \subseteq S$ e inteiros $m_i \geq 1$, onde cada $M_{m_i}(KH_i)$ é uma álgebra de semigrupo contraída de um fator principal não-nulo de S. Em particular [16], para um grupo G finito,

$$K_{\text{par}}(G) \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_{m_i}(KH_i), \tag{2.4}$$

e neste caso H_i é um subgrupo de G, para todo $i \in \mathcal{I}$. Além disso, $G \simeq \ker(\mathcal{S}(G))$.

Demonstração. Evidentemente, pode-se assumir que $S \neq 0$. Seja I um ideal 0-minimal de S.

Se S contém 0, então I é um semigrupo inverso completamente 0-simples e, consequentemente, por [13, Theorem 3.9], I é isomorfo ao semigrupo $S^0(G;n,n;\text{Id})$, para algum grupo finito G e algum inteiro positivo n. O isomorfismo acima (2.2) mostra que $K_0[I] \simeq K_0[S^0\,(G;n,n,\text{Id})] \simeq M_n(KG)$. Em particular, $K_0[I]$ tem unidade.

Se S não possui zero, então I é um semigrupo inverso completamente simples. Como tal, I é na verdade um grupo G (I^0 é completamente 0-simples, de modo que $I \simeq S^0(G;n,n;\text{Id}) \setminus \{0\}$ e este último só não possui divisores de zero quando $n = 1$). Neste caso, $KI = K_0[I]$ é uma álgebra de grupo, e tem unidade. Note que em ambas as situações, $K_0[I]$ é a álgebra de semigrupo contraída de um fator principal não-nulo de S.

Tendo isso em mente, a decomposição será obtida por indução no número de $\mathcal{J}$-classes não-nulas de S. Se S possui apenas uma $\mathcal{J}$-classe não-nula, então $S = I$, e não é preciso fazer mais nada.

Assuma que o número de $\mathcal{J}$-classes não-nulas de S é $k > 1$ e suponha que a decomposição (2.3) seja válida para todo semigrupo inverso em que a quantidade de $\mathcal{J}$-classes não-nulas é no máximo $k-1$. Como $K_0[I]$ é uma álgebra com unidade, pode-se aplicar a Observação 1.3.5 para obter

$$K_0[S] \simeq K_0[I] \oplus K_0[S/I]. \tag{2.5}$$

A projeção canônica de S sobre S/I induz uma correspondência biunívoca entre os fatores principais de $S \setminus I$ e os fatores principais não-nulos de S/I, segundo a qual fatores principais associados são isomorfos. Consequentemente, a quantidade de $\mathcal{J}$-classes não-nulas do semigrupo inverso S/I é menor do que k e, pela hipótese de indução,

$$K_0[S/I] \simeq \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_{m_i}(KH_i).$$

Assim, a decomposição resulta de (2.5).

De modo a obter (2.4) observe o seguinte:

- Conforme o Lema 1.4.6, quando a $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}_A = \mathcal{J}_{(A,1)} \neq \ker(\mathcal{S}(G))$, o fator principal é $\mathcal{J}_A^0 \simeq S^0(\text{St}\,A; A/\text{St}\,A, A/\text{St}\,A; \text{Id})$, e $\text{St}\,A$ é um subgrupo de G;
- $\ker(\mathcal{S}(G)) = N = \{(G,g) \mid g \in G\} \simeq G$. Para cada (B,h)

  $$(G,g)(B,h) = (G \cup gB, gh) = (G, gh) \in N,$$

  e de forma análoga, $(B,h)(G,g) = (G,hg) \in N$. Disto conclui-se que a aplicação $g \mapsto (G,g) \in N$ fornece um isomorfismo entre o grupo G e $\ker(\mathcal{S}(G))$.

□

Seja S um monoide inverso finito e $C = \{\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_k\}$ o conjunto das $\mathcal{J}$-classes não-nulas de S, indexadas de tal modo que em relação à ordem parcial definida por (1.1) ocorra o seguinte:

- A $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}_1$ é minimal em C;
- A $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}_i$ é minimal em $C \setminus \{\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{i-1}\}$, para cada $i > 1$.

Aqui, a minimalidade é em relação à ordem parcial induzida pela inclusão dos ideais principais correspondentes. Note que se S não possui zero, $\mathcal{J}_1 = \ker(S)$. Caso contrário, defina $\mathcal{J}_0 = \ker(S) = \{0\}$. Seja m_i a quantidade de idempotentes em $\mathcal{J}_i$ e $e_i \in K_0S$ a sua soma. Com estas notações, tem-se o seguinte:

Proposição 2.1.3. *Se S é um monoide inverso finito não-nulo, então os elementos*

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &= (1-e_1)e_2, \\ f_3 &= (1-e_1)(1-e_2)e_3, \\ &\ldots \\ f_{k-1} &= (1-e_1)\ldots(1-e_{k-2})e_{k-1} \ \ e \\ f_k &= (1-e_1)\ldots(1-e_{k-2})(1-e_{k-1}) \end{aligned}$$

são idempotentes centrais ortogonais de K_0S e

$$K_0S = \bigoplus_{i=1}^{k}(K_0S)f_i \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{m_i}(KH_i). \tag{2.6}$$

Em particular, para $K_{\mathrm{par}}G$ o elemento e_i correspondente a $\mathcal{J}_{A_i}$ é dado por

$$e_i = \sum_{a \in A_i/\mathrm{St}\, A_i} (a^{-1}A_i, 1), \tag{2.7}$$

em que $A/\mathrm{St}\, A \subseteq A$ denota um conjunto de representantes das classes laterais à direita de $\mathrm{St}\, A$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.3.16, cada um dos semigrupos inversos completamente 0-simples $\mathcal{J}_i^0$ é isomorfo a um semigrupo de Rees do tipo $S^0(H_i; m_i, m_i; \mathrm{Id})$ e, segundo [13, Lemma 5.17],

$$K_0S^0(H_i; m_i, m_i; \mathrm{Id}) \simeq \mathfrak{M}(KH_i; m_i, m_i; \mathrm{Id}) = M_{m_i}(KH_i).$$

Dado um isomorfismo $\phi_i \colon K_0\mathcal{J}_i^0 \to M_{m_i}(KH_i)$, a unidade de $K_0\mathcal{J}_i^0$ é

$$\phi_i^{-1}(\mathrm{Id}_{m_i}) = \sum_{f \in E(S) \cap \mathcal{J}_i} f = e_i.$$

O resultado será obtido por indução sobre a quantidade de $\mathcal{J}$-classes não-nulas de S.

Suponha que há apenas uma $\mathcal{J}$-classe não-nula. Então a unidade de S está em $\mathcal{J}_1$ e coincide com a unidade 1 da álgebra $K_0S = K_0\mathcal{J}_1^0$. Além disso, essa unidade coincide com e_1, pois o semigrupo de Rees $\mathcal{J}_1^0 \simeq S^0(H_1; m_1, m_1; \mathrm{Id})$ só tem unidade se $m_1 = 1$. Consequentemente, a decomposição (2.6) reduz-se a igualdade trivial $K_0S = K_0S \oplus 0 = K_0Se_1 \oplus K_0S(1-e_1)$.

Suponha que o monoide S possui $k > 1$ $\mathcal{J}$-classes não-nulas. Assuma que a decomposição (2.6) seja válida para todo monoide inverso finito com no máximo $k-1$ $\mathcal{J}$-classes. Seja $I = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_0 \simeq \mathcal{J}_1^0$ se S possui zero, e $I = \mathcal{J}_1$ caso contrário. Em ambos os casos, I é um ideal de S e tem-se:

$$K_0S = K_0Se_1 \oplus K_0S(1-e_1) \simeq K_0I \oplus K_0[S/I].$$

Observe que há um isomorfismo $\phi\colon K_0[S/I] \to K_0S(1-e_1)$, segundo o qual cada elemento $x \in S\setminus I$, visto como um elemento de S/I, é levado em $x(1-e_1) \in K_0S(1-e_1)$. Uma vez que a quantidade de $\mathcal{J}$-classes não-nulas no semigrupo quociente S/I é exatamente $k-1$, pode-se aplicar a indução e obter:

$$\begin{aligned} K_0[S/I] = {} & K_0[S/I]e_2 \\ & \oplus K_0[S/I](1-e_2)e_3 \\ & \oplus K_0[S/I](1-e_2)(1-e_3)e_4 \\ & \oplus \dots \\ & \oplus K_0[S/I](1-e_2)\dots(1-e_{k-2})e_{k-1} \\ & \oplus K_0[S/I](1-e_2)\dots(1-e_{k-2})(1-e_{k-1}). \end{aligned}$$

Aplicando-se o isomorfismo ϕ a cada somando direto, obtém-se:

$$\begin{aligned} K_0S(1-e_1) = {} & K_0S(1-e_1)e_2 \\ & \oplus K_0S(1-e_1)(1-e_2)e_3 \\ & \oplus K_0S(1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)e_4 \\ & \oplus \dots \\ & \oplus K_0S(1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_{k-2})e_{k-1} \\ & \oplus K_0S(1-e_1)(1-e_2)\dots(1-e_{k-2})(1-e_{k-1}). \end{aligned}$$

Disso resulta a decomposição (2.6), pois sendo e_1 um idempotente central, $1-e_1$ também o será, e um produto de idempotentes centrais é um idempotente central. No caso de $K_{\mathrm{par}}(G)$, a fórmula (2.7) para cada e_i é obtida por meio do Lema 1.4.4, segundo o qual a $\mathcal{J}$-classe $\mathcal{J}_{A_i}$ é formada pelos elementos da forma $(a^{-1}A_i, a^{-1}b)$, em que $a, b \in A_i$. Em particular, os idempotentes de $\mathcal{J}_{A_i}$ são aqueles elementos do tipo $(a^{-1}A_i, 1)$, com $a \in A_i$, e para que cada idempotente apareça apenas uma vez na definição de e_i, considera-se apenas um elemento $a \in A_i$ em cada classe lateral à direita de $\mathrm{St}\, A_i$, formando-se assim o conjunto $A_i/\mathrm{St}\, A_i$ com estes representantes. □

Para finalizar esta seção, será calculado $K_{\mathrm{par}}C_3$.

Exemplo 2.1.4. Se $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1\rangle = \{1, a, a^2\}$ então há 8 elementos em $\mathcal{S}(C_3)$, e a sua decomposição em $\mathcal{J}$-classes é

$$\mathcal{S}(C_3) \simeq \{(\{1\},1)\} \cup \big\{(\{1,a\},1), (\{1,a\},a), (\{1,a^2\},a^2), (\{1,a^2\},1)\big\} \cup \big\{(C_3,1), (C_3,a), (C_3,a^2)\big\},$$

o que implica que $\mathcal{S}(C_3)$ possui três fatores principais:

- $\mathcal{J}^0_{(\{1\},1)} \simeq S^0(\{1\}; 1, 1; \mathrm{Id})$,
- $\mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)} \simeq S^0(\{1\}; 2, 2; \mathrm{Id})$ e
- $\mathcal{J}_{C_3} = J_{(C_3,1)} = \ker(\mathcal{S}(C_3)) \simeq S^0(C_3; 1, 1; \mathrm{Id}) \simeq C_3$.

As $\mathcal{J}$-classes estão ordenadas como na Figura 2.1.

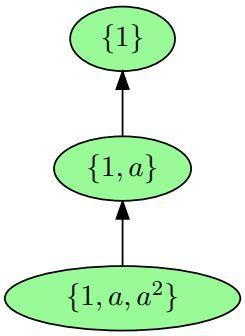
Uma vez que KC_3 é uma álgebra com unidade, pode-se aplicar o Lema 1.3.4 ao ideal não-nulo minimal $J_{(C_3,1)} = \mathcal{J}_{C_3}$, que é o núcleo de $\mathcal{S}(C_3)$, para obter

$$K_{\mathrm{par}}(C_3) \simeq KC_3 \oplus K_0[\mathcal{S}(C_3)/J_{(C_3,1)}].$$

Como o ideal $J_{(\{1,a\},1)} = \mathcal{J}_{(\{1,a\},1)} \cup J_{(C_3,1)}$, resulta que $J_{(\{1,a\},1)}/J_{(C_3,1)} \simeq \mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)}$ é um ideal não-nulo minimal de $\mathcal{S}(C_3)/J_{(C_3,1)}$. Além disso, a álgebra de semigrupo contraída deste ideal tem unidade, pois

$$K_0\mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)} \simeq K_0S^0(\{1\}; 2, 2; \mathrm{Id}) \simeq M_2(K).$$

Figura 2.1: *Ordenação das $\mathcal{J}$-classes de $\mathcal{S}(C_3)$.*



Assim, pode-se aplicar a Observação 1.3.5 ao ideal $J_{(\{1,a\},1)}/J_{(C_3,1)}$, para obter

$$K_{\mathrm{par}}(C_3) \simeq KC_3 \oplus K_0\mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)} \oplus K_0\left[\left(\mathcal{S}(C_3)/J_{(C_3,1)}\right)/\mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)}\right].$$

Mas $\left[\left(\mathcal{S}(C_3)/J_{(C_3,1)}\right)/\mathcal{J}^0_{(\{1,a\},1)}\right] \simeq \mathcal{S}(C_3)/J_{(\{1,a\},1)}$, que é isomorfo ao grupo trivial com um zero adicionado, e portanto

$$K_{\mathrm{par}}(C_3) \simeq K \oplus M_2(K) \oplus KC_3,$$

o que está de acordo com a decomposição que foi obtida em [16].

Explicitamente, tem-se o isomorfismo $\phi\colon K_{\mathrm{par}}(C_3) \to K \oplus M_2(K) \oplus KC_3$, dado por

$$\begin{aligned}
x &= [(\{1\},1) - (C_3,1)]\left[(\{1\},1) - \big((\{1,a\},1) + (\{1,a^2\},1)\big)\right]x \\
&\quad + [(\{1\},1) - (C_3,1)]\left[(\{1,a\},1) + (\{1,a^2\},1)\right]x \\
&\quad + (C_3,1)x. \\
&= \left[(\{1\},1) - (\{1,a\},1) - (\{1,a^2\},1) + (C_3,1)\right]x \\
&\quad + \left[(\{1,a\},1) + (\{1,a^2\},1) - 2(C_3,1)\right]x \\
&\quad + (C_3,1)x.
\end{aligned}$$

isto é, se $x = a_1(\{1\},1) + a_2(\{1,a\},1) + a_3(\{1,a\},a) + a_4(\{1,a^2\},1) + a_5(\{1,a^2\},a^2) + a_6(C_3,1) + a_7(C_3,1) + a_8(C_3,1)$, então:

$$\begin{aligned}
x \mapsto\ & a_1\left[(\{1\},1) - (\{1,a\},1) - (\{1,a^2\},1) + (C_3,1)\right] \\
&+ [a_1+a_2](\{1,a\},1) + a_3(\{1,a\},a) + [a_1+a_4](\{1,a^2\},1) + a_5(\{1,a^2\},a^2) \\
&+ [a_1+a_2+a_4+a_6](C_3,1) + [a_3+a_7](C_3,a) + [a_5+a_8](C_3,a^2).
\end{aligned}$$

2.2 Representações Parciais de Grau Finito

Dado um grupo G arbitrário, define-se em [24, p. 311] o grupoide $\Gamma(G)$ como uma categoria pequena em que os elementos (morfismos) são os pares (A,g) tais que $\{1,g^{-1}\} \subseteq A \subseteq G$, e os vértices são os pares $(A,1)$ nas mesmas condições, os quais serão denotados simplesmente por A. Dados elementos (A,g) e (B,h) de $\Gamma(G)$, o seu produto só está definido se $A = hB$. Neste caso,

$$(hB,g)(B,h) = (B,gh).$$

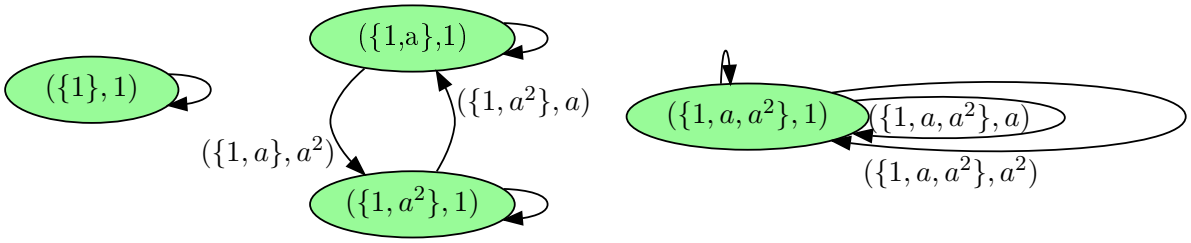
O grupoide $\Gamma(G)$ pode ser visto como um grafo orientado cujos vértices são rotulados pelos objetos de $\Gamma(G)$, e no qual um morfismo (A,g) em $\Gamma(G)$ corresponde a uma aresta $A \longrightarrow gA$.

Dado um objeto (vértice) A de $\Gamma(G)$, considera-se a componente conexa de $\Gamma(G)$ que contém A e denota-se por $\mathcal{V}_A$ o conjunto de seus vértices. Observa-se que o estabilizador $H = \mathrm{St}\,A = \{g \in$

$G \mid gA = A\}$ é um subconjunto de A, e A é uma união de classes laterais à direita de H, isto é, $A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} Hg_i$ para algum conjunto de índices $\mathcal{I}$ e algum transversal $\{g_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq A$ contendo 1_G. Além disso, a cardinalidade $|\mathcal{V}_A|$ de $\mathcal{V}_A$ é igual a $|\mathcal{I}|$, e $\mathcal{V}_A$ consiste de vértices da forma $g_i^{-1}A$, com $i \in \mathcal{I}$.

A Figura 2.2 mostra como é este grupoide no caso em que $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1\rangle$.

Figura 2.2: *Vértices e arestas de* $\Gamma(C_3)$.



Em [16, p. 9], o grupoide $\Gamma(G)$ foi definido apenas para grupos finitos. Para esclarecer a sua relação com o semigrupo $\mathcal{S}(G)$ no caso de grupos arbitrários, considere o subgrupoide $\Gamma_{\text{fin}}(G)$ de $\Gamma(G)$ que consiste de todos os pares (A, g) tais que $|A| < \infty$.

Conforme [31, Proposition 4], o semigrupo inverso $\mathcal{S}(G)$ pode ser visto como um grupoide $\mathcal{G}(\mathcal{S}(G))$ em relação ao seu produto restrito, que é definido por:

$$s \cdot t = \begin{cases} st, & \text{se } s^{-1}s = tt^{-1} \\ \nexists, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $s, t \in \mathcal{S}(G)$. Utiliza-se a notação $d(s) = s^{-1}s$ para indicar a origem da aresta s e $r(s) = ss^{-1}$ para indicar sua imagem. Em $\mathcal{S}(G)$, com a notação de Birget-Rhodes, tem-se $(A, g)^{-1} = (g^{-1}A, g^{-1})$, então

- $d(A, g) = (g^{-1}A, g^{-1})(A, g) = (g^{-1}A, 1)$,
- $r(A, g) = (A, g)(g^{-1}A, g^{-1}) = (A, 1)$.

e o produto restrito $(A, g)\cdot(B, h)$ está definido se, e somente se, $(g^{-1}A, 1) = (B, 1)$, o que equivale a $A = gB$. Para evitar ambiguidade entre $\mathcal{G}(\mathcal{S}(G))$ e $\Gamma(G)$, um elemento $(A, g) \in \Gamma(G)$ será denotado por $\langle A, g\rangle$.

Observação 2.2.1. Se G é um grupo, a aplicação $\phi\colon \mathcal{G}(\mathcal{S}(G)) \to \Gamma_{\text{fin}}(G)$, dada por

$$\phi(A, g) = \langle g^{-1}A, g\rangle,$$

é um isomorfismo de grupoides. De fato, é claro que ϕ é uma função injetora. Além disso, todo $\langle B, h\rangle$ pertence à imagem de ϕ, pois como B é finito, $(hB, h) \in \mathcal{S}(G)$ e $\phi(hB, h) = \langle B, h\rangle$. Se $(A, g) \cdot (B, h)$ está definido, então $A = gB$ e

$$\phi((gB, g) \cdot (B, h)) = \phi(gB, gh) = \langle (gh)^{-1}gB, gh\rangle = \langle h^{-1}B, gh\rangle.$$

Por outro lado,

$$\phi(gB, g)\phi(B, h) = \langle g^{-1}(gB), g\rangle\langle h^{-1}B, h\rangle = \langle h(h^{-1}B), g\rangle\langle h^{-1}B, h\rangle = \langle h^{-1}B, gh\rangle.$$

Observe ainda que, para todo semigrupo inverso S, se $s, t \in S$ são tais que $\exists s \cdot t$, isto é, se $s^{-1}s = tt^{-1}$, então

$$S^1tS^1 = S^1tt^{-1}tS^1 = S^1s^{-1}stS^1 \subseteq S^1sS^1 = S^1ss^{-1}sS^1 = S^1stt^{-1}S^1 \subseteq S^1tS^1.$$

Logo, quando o produto restrito $s \cdot t$ está definido, estes elementos pertencem à mesma $\mathcal{J}$-classe. Por transitividade, os elementos da componente conexa de s no grupoide $\mathcal{G}(S)$ estão todos na $\mathcal{J}$-classe de s no semigrupo inverso S.

Definição 2.2.2. Dada uma categoria pequena $\mathcal{C}$ e um corpo K, a *álgebra de categoria* $K\mathcal{C}$ é definida tomando-se o K-espaço vetorial cuja base é formada pelos morfismos de $\mathcal{C}$ e definindo-se a multiplicação da seguinte forma:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1\gamma_2, & \text{se existe a composição } \gamma_1\gamma_2 \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dada uma componente conexa Δ de $\mathcal{C} = \Gamma(G)$ (isto é, um subgrupoide maximal conexo por morfismos) com um número finito de vértices, define-se a aplicação $\lambda_\Delta \colon G \to K\Delta$ por:

$$\lambda_\Delta(g) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{A \in \mathcal{V}_\Delta \\ A \ni g^{-1}}} (A, g), & \text{se existe } A \in \mathcal{V}_\Delta \text{ com } g^{-1} \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em [24, Theorem 2.2] foi demonstrado o seguinte resultado, que descreve a estrutura das representações parciais de G de grau finito:

Teorema 2.2.3. *Seja G um grupo. Para cada componente conexa Δ de $\Gamma(G)$ com um número finito de vértices, a aplicação $\lambda_\Delta \colon G \to K\Delta$ é uma representação parcial de G em $K\Delta$. Além disso:*

(i) Para toda K-representação $\varphi \colon K\Delta \to End(V)$ de grau finito irredutível (respectivamente, indecomponível), $\varphi \circ \lambda_\Delta$ é uma representação parcial irredutível (respectivamente, indecomponível) de G.

(ii) Reciprocamente, para toda K-representação parcial de grau finito irredutível (respectivamente, indecomponível) $\pi \colon G \to End(V)$, existe uma única componente conexa Δ de $\Gamma(G)$ com um número finito de vértices e uma única representação $\tilde{\pi} \colon K\Delta \to End(V)$ tal que $\tilde{\pi} \circ \lambda_\Delta = \pi$.

No entanto, a prova deste teorema utilizou-se de um fato que para ser justificado no caso de grupos infinitos exigia um argumento um pouco mais elaborado do que aquele apresentado no artigo. A Proposição 2.2.4 complementa a demonstração do Teorema 2.2.3, preenchendo esta lacuna que havia em sua demonstração (ver [24, p. 314-315]).

No que segue, se $(A, g) \in \Gamma(G)$, então A será denominado o *conjunto suporte* de (A, g) e também será identificado com o vértice $(A, 1)$.

Proposição 2.2.4. *Com a notação do Teorema 2.2.3, seja Δ uma componente conexa de $\Gamma(G)$ cujo número de vértices, $|\mathcal{V}_\Delta|$, é finito. Então a K-álgebra $\mathcal{A}$ gerada pelos elementos $\{\lambda_\Delta(g) : g \in G\}$ coincide com $K\Delta$.*

Demonstração. Denote por $B_1, \ldots, B_m$ os vértices da componente Δ e seja (B, h) um elemento arbitrário desta componente.

Sejam $t_2, \ldots, t_k$ os únicos índices t_i para os quais $B \setminus B_{t_i} \neq \emptyset$ e escolha um elemento $x_i \in B \setminus B_{t_i}$, para cada $2 \leq i \leq k$. Por conveniência, defina também $x_0 = x_1 = 1$ e $x_{k+1} = h^{-1}$, e então $A_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq B$.

Defina $g_1, g_2, \ldots, g_{k+1} \in G$ por meio da igualdade $g_i = x_i^{-1} x_{i-1}$, para $i \in \mathcal{I} = \{1, \ldots, k+1\}$. Em particular, tem-se $g_1 = x_1 = 1$, bem como $g_2 = x_2^{-1}$ e $g_{k+1} = hx_k$. Note que se $i \in \mathcal{I}$, então g_i^{-1}

pertence (pelo menos) ao suporte do vértice $(x_{i-1}^{-1}B, 1) \in \mathcal{V}_\Delta$. Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\lambda_\Delta(g_{k+1})\cdots\lambda_\Delta(g_1) &= \sum_{\substack{g_i^{-1}\in A_i\in\mathcal{V}_\Delta,\\ i\in\mathcal{I}}} (A_{k+1}, g_{k+1})\cdots(A_1, g_1)\\
&= \sum_{\substack{g_1^{-1}\in A_1\in\mathcal{V}_\Delta\\ g_2^{-1}\in g_1A_1\\ \vdots\\ g_{k+1}^{-1}\in g_k\cdots g_1A_1}} (A_1, g_{k+1}\cdots g_1)\\
&= \sum_{\substack{g_1^{-1}\in A_1\in\mathcal{V}_\Delta\\ (g_2g_1)^{-1}\in A_1\\ \vdots\\ (g_{k+1}\cdots g_1)^{-1}\in A_1}} (A_1, h).
\end{aligned}$$

Como $g_1 = 1 = x_1^{-1}, (g_2g_1) = x_2^{-1}, \ldots, (g_{k+1}\cdots g_1) = h = x_{k+1}^{-1}$, tem-se que

$$\lambda_\Delta(g_{k+1})\cdots\lambda_\Delta(g_1) = \sum_{A_0\subseteq A\in\mathcal{V}_\Delta} (A, h) = \sum_{B\subseteq A\in\mathcal{V}_\Delta} (A, h). \tag{2.8}$$

A última igualdade em (2.8) deve-se ao fato de que $A_0 \nsubseteq B_{t_i}$ para todo $i \in \{2, \ldots, k\}$, pela definição de A_0. Logo, todo A nesta soma contém B.

A proposição será demonstrada por indução sobre $d(B)$, em que a função $d\colon \mathcal{V}_\Delta \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ é definida a seguir. Se A é maximal, isto é, se

$$A \subseteq A', \text{ para algum } A' \in \mathcal{V}_\Delta, \text{ implica } A = A',$$

será estipulado que $d(A) = 0$. Caso contrário, será definido

$$d(A) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{V}_\Delta, \text{ com } A_n \supsetneq \ldots \supsetneq A_1 \supsetneq A\}.$$

Se o suporte de (B, h) se enquadra no primeiro caso, então B não está contido no suporte de qualquer outro elemento de Δ e portanto a igualdade (2.8) reduz-se a

$$\lambda_\Delta(g_{k+1})\cdots\lambda_\Delta(g_1) = (B, h).$$

Portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ contém todo (B, h) cujo suporte é maximal.

Seja $d(B) = k > 0$ e assuma por hipótese de indução que qualquer $(A, g) \in \Delta$ satisfazendo $0 \le d(A) < k$ está em $\mathcal{A}$. Então escrevendo (2.8) na forma

$$\lambda_\Delta(g_{k+1})\cdots\lambda_\Delta(g_1) = (B, h) + \sum_{B\subsetneq A\in\mathcal{V}_\Delta} (A, h),$$

nota-se que se $(A, h) \in \Delta$ e $B \subsetneq A$, então $d(A, h) < k = d(B, h)$. Por indução, tem-se $(A, h) \in \mathcal{A}$ e, consequentemente,

$$(B, h) = \lambda_\Delta(g_{k+1})\cdots\lambda_\Delta(g_1) - \sum_{B\subsetneq A\in\mathcal{V}_\Delta} (A, h) \in \mathcal{A}.$$

□

2.3 Interação entre Ações e Representações Parciais

Seja π uma representação parcial de G em uma K-álgebra unital $\mathcal{B}$. Será utilizada a seguinte notação:

- $\varepsilon_g^\pi = \pi(g)\pi(g^{-1})$, para cada $g \in G$;
- $\mathcal{A}^\pi$ denotará a subálgebra de $\mathcal{B}$ gerada pelos ε_g^π;
- $\mathcal{D}_g^\pi = \varepsilon_g^\pi \mathcal{A}^\pi$, para cada $g \in G$.

Por simplicidade, caso π esteja subentendida pelo contexto, as notações anteriores serão simplificadas para ε_g, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}_g$, respectivamente.

Em [15, Lemma 6.5] é estabelecido o seguinte:

Lema 2.3.1. *Dada uma representação parcial $\pi\colon G \to \mathcal{B}$, as aplicações $\alpha_g^\pi\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ dadas por $\alpha_g^\pi(a) = \pi(g)a\pi(g^{-1})$ são isomorfismos de álgebras (para cada $g \in G$) e definem uma ação parcial α^π de G em $\mathcal{A}$.*

Reciprocamente, [15, Lemma 6.2] garante que:

Lema 2.3.2. *Dada uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ de G em uma álgebra $\mathcal{A}$, tal que cada $\mathcal{D}_g$ é uma álgebra com unidade 1_g, a aplicação $\pi_\alpha\colon G \to \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ definida por $\pi_\alpha(g) = 1_g\delta_g$ é uma representação parcial.*

Pode-se considerar a categoria $\mathbf{Rp}\,G$ cujos objetos são as representações parciais de um grupo G (em álgebras com unidade) e cujos morfismos são dados pela Definição 1.2.3.

Analogamente, tem-se uma categoria $\mathbf{Ap}\,G$ em que os objetos são as ações parciais de um grupo G em álgebras unitais[1] e os morfismos são dados pela Definição 1.1.2, ou seja, dadas ações parciais $\alpha = \{\alpha_g\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ em $\mathcal{A}$ e $\alpha' = \{\alpha'_g\colon \mathcal{D}'_{g^{-1}} \to \mathcal{D}'_g \mid g \in G\}$ em $\mathcal{A}'$, um morfismo de α em α' é um homomorfismo de álgebras $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tal que, para todo $g \in G$:

(i) $\varphi(\mathcal{D}_g) \subseteq \mathcal{D}'_g$;

(ii) $\alpha'_g(\varphi(x)) = \varphi(\alpha_g(x))$, para todo $x \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$.

Pode-se definir uma subcategoria $\mathbf{ApGl}\,G$ (não plena) de $\mathbf{Ap}\,G$ em que os objetos são somente as ações parciais globalizáveis do grupo G (em álgebras com unidade). Se α, α' são duas de tais ações parciais, o conjunto $Hom_{\mathbf{ApGl}\,G}(\alpha, \alpha')$ é formado pelos morfismos $\varphi \in Hom_{\mathbf{Ap}\,G}(\alpha, \alpha')$ que verificam a seguinte propriedade adicional:

(iii) $\varphi(1_g) = 1'_g, \forall g \in G$.

Aqui, 1_g e $1'_g$ denotam as unidades dos ideais $\mathcal{D}_g$ e $\mathcal{D}'_g$, respectivamente.

Seja $\alpha = \{\alpha_g\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial globalizável de G em $\mathcal{A}$, e $\mathcal{D}_g = \mathcal{A}1_g$, para cada $g \in G$. Denote por $\tilde{\mathcal{A}}$ a subálgebra de $\mathcal{A}$ gerada pelas unidades 1_g. Se $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, a ação parcial α será denominada *ajustada*. Caso contrário, definindo-se $\tilde{\mathcal{D}}_g = \tilde{\mathcal{A}}1_g$, para $g \in G$, tem-se $\tilde{\mathcal{D}}_g \subseteq \mathcal{D}_g$ e as restrições $\tilde{\alpha}_g = \alpha_g|_{\tilde{\mathcal{D}}_{g^{-1}}}\colon \tilde{\mathcal{D}}_{g^{-1}} \to \tilde{\mathcal{D}}_g$ são isomorfismos que definem uma ação parcial (ajustada) $\tilde{\alpha}$ de G em $\tilde{\mathcal{A}}$. Tal $\tilde{\alpha}$ será chamada de *ajustamento* de α. A categoria das ações parciais (globalizáveis) ajustadas e seus morfismos será denotada por $\mathbf{ApAj}\,G$. Assim, $\mathbf{ApAj}\,G$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{ApGl}\,G$.

Uma representação $\pi\colon G \to \mathcal{B}$ é *separadora* se a soma $\sum_{g\in G} \mathcal{D}_g^\pi \pi(g)$ é direta, ou seja, se para todo $g, h \in G$ tem-se $\mathcal{D}_g^\pi \pi(g) \cap \sum_{h\neq g} \mathcal{D}_h^\pi \pi(h) = 0$.

Como antes, $\mathcal{D}_g^\pi = \varepsilon_g^\pi \mathcal{A}^\pi$, $\forall g \in G$. A representação π será denominada *ajustada* se $\mathcal{B}$ coincidir com a álgebra $\langle \pi(G) \rangle$, gerada pelos elementos $\pi(g)$, em que $g \in G$.

Considerando-se as representações parciais ajustadas e seus morfismos, obtém-se uma subcategoria plena de $\mathbf{Rp}\,G$ que será denotada por $\mathbf{RpAj}\,G$. Restringindo-se às representações parciais

[1] Pode-se definir uma categoria como esta para álgebras sem unidade porém, neste texto, não será necessária essa generalidade.

ajustadas separadoras e seus morfismos, tem-se uma subcategoria plena que será denotada por $\mathbf{RpAjSe}\,G$.

O teorema a seguir descreve a interação entre essas categorias, de forma análoga à que foi feita em [20, Theorem 3].

Teorema 2.3.3.

(i) Existe um funtor $\alpha^\diamond\colon \boldsymbol{Rp}G \to \boldsymbol{ApAj}G$ que leva cada $\pi \in Ob\boldsymbol{Rp}G$ em α^π como no Lema 2.3.1.

(ii) Há um funtor $\pi_\diamond\colon \boldsymbol{ApGl}G \to \boldsymbol{RpSe}G$ que leva cada $\alpha \in Ob\boldsymbol{ApGl}G$ em π_α como no Lema 2.3.2. Além disso, π_α é ajustada se α é ajustada.

(iii) Para cada $\pi \in Ob\boldsymbol{Rp}G$ existe um morfismo $\pi_{\alpha^\pi} \to \pi$ que é um epimorfismo se π é ajustada e é um monomorfismo se π é separadora. Em particular, ele é um isomorfismo se $\pi \in Ob\boldsymbol{RpAjSe}G$.

(iv) Para cada $\alpha \in Ob\boldsymbol{ApGl}G$ existe um monomorfismo $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha$, que é um isomorfismo se α é ajustada. Em qualquer caso tem-se $\alpha^{\pi_\alpha} \simeq \tilde{\alpha}$, em que $\tilde{\alpha}$ é o ajustamento de α.

(v) As restrições dos funtores dos itens i e ii estabelecem uma equivalência entre as categorias $\boldsymbol{RpAjSe}G$ e $\boldsymbol{ApAj}G$.

(vi) A restrição $\boldsymbol{RpAj}G \to \boldsymbol{ApAj}G$ do funtor obtido no item i é um adjunto à direita da restrição $\boldsymbol{ApAj}G \to \boldsymbol{RpAj}G$ do funtor obtido no item ii.

Demonstração. (i) Se $(\pi, \mathcal{B}) \in Ob\mathbf{Rp}\,G$, então pelo Lema 2.3.1 tem-se uma ação parcial $\alpha^\diamond\pi = \alpha^\pi = \{\alpha_g^\pi\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ de G na álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gerada pelas unidades ε_g $(g \in G)$, em que cada $\mathcal{D}_g = \varepsilon_g\mathcal{A}$. Em particular, α^π é ajustada.

Resta mostrar como o funtor $\alpha^\diamond$ age nos morfismos. Para isso, considere um objeto $(\pi', \mathcal{B}') \in Ob\mathbf{Rp}\,G$ e um morfismo $\phi \in Hom_{\mathbf{Rp}\,G}(\pi, \pi')$. Como antes, tem-se uma ação parcial $\alpha^\diamond\pi' = \alpha^{\pi'} = \{\alpha_g^{\pi'}\colon \mathcal{D}'_{g^{-1}} \to \mathcal{D}'_g \mid g \in G\}$, de G na álgebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}'$ gerada pelos elementos ε'_g, com $g \in G$, em que cada $\mathcal{D}'_g = \varepsilon'_g\mathcal{A}'$. Uma vez que ϕ é um morfismo de representações, $\phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ é um homomorfismo de álgebras e $\phi \circ \pi = \pi'$. Logo, os geradores de $\mathcal{A}$ são levados nos geradores de $\mathcal{A}'$, pois para cada $g \in G$ tem-se

$$\phi(\varepsilon_g) = \phi(\pi(g)\pi(g^{-1})) = \phi(\pi(g))\phi(\pi(g^{-1})) = \pi'(g)\pi'(g^{-1}) = \varepsilon'_g.$$

Consequentemente, $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$ e também há uma correspondência entre os ideais dessas álgebras:

$$\phi(\mathcal{D}_g) = \phi(\varepsilon_g\mathcal{A}) = \varepsilon'_g\phi(\mathcal{A}) = \varepsilon'_g\mathcal{A}' = \mathcal{D}'_g.$$

Além disso, considerando-se que para quaisquer $a \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$ e $g \in G$ vale

$$\phi(\alpha_g^\pi(a)) = \phi(\pi(g)a\pi(g^{-1})) = \pi'(g)\phi(a)\pi'(g^{-1}) = \alpha_g^{\pi'}(\phi(a)),$$

obtém-se o morfismo $\alpha^\diamond\phi$ por meio da restrição $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

(ii) Dada uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$ de G em uma álgebra $\mathcal{A}$, tal que cada $\mathcal{D}_g$ é uma álgebra com unidade 1_g, o Lema 2.3.2 garante que a aplicação $\pi_\alpha : g \mapsto 1_g\delta_g$ é uma representação parcial de G em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g\delta_g$. Além disso, para cada $g \in G$ tem-se

$$\mathcal{D}_g\delta_g = (\mathcal{D}_g 1_g)\delta_g = (\mathcal{D}_g\delta_1)(1_g\delta_g) = (\mathcal{D}_g\delta_1)\pi_\alpha(g),$$

donde

$$\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \oplus_{g\in G}(\mathcal{D}_g\delta_1)\pi_\alpha(g). \tag{2.9}$$

Por outro lado, para que a representação π_α seja separadora, é preciso que $\sum_{g\in G}\mathcal{D}_g^{\pi_\alpha}\pi_\alpha(g)$ seja uma soma direta, mas levando em conta que, para cada $g\in G$,

$$\varepsilon_g^{\pi_\alpha}=\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1})=1_g\delta_g\cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}=\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_{g^{-1}})\delta_1=1_g\delta_1, \tag{2.10}$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_g^{\pi_\alpha}&=(\mathcal{A}\rtimes_\alpha G)^{\pi_\alpha}\varepsilon_g^{\pi_\alpha}\\&=\left\{\sum k_i\varepsilon_{g_{i_1}}^{\pi_\alpha}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_{g_{i_t}}^{\pi_\alpha}\right\}\cdot\varepsilon_g^{\pi_\alpha}\\&\overset{(2.10)}{=}\left\{\sum k_i(1_{g_{i_1}}\delta_1)\cdot\ldots\cdot(1_{g_{i_t}}\delta_1)\right\}\cdot 1_g\delta_1\\&=\left\{\sum k_i(1_{g_{i_1}}\ldots 1_{g_{i_t}})1_g\right\}\delta_1\\&\subseteq\mathcal{D}_g\delta_1.\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{D}_g^{\pi_\alpha}\pi_\alpha(g)\subseteq(\mathcal{D}_g\delta_1)\pi_\alpha(g)$ para qualquer $g\in G$ e, pela igualdade (2.9), conclui-se que π_α é separadora.

Se α' também for um objeto de $\mathbf{ApGl}\,G$ e $\varphi\colon\alpha\to\alpha'$ for um morfismo de ações parciais, então $\varphi(\mathcal{D}_g)\subseteq\mathcal{D}'_g$ e pode-se considerar a aplicação $\phi\colon\mathcal{A}\rtimes_\alpha G\to\mathcal{A}'\rtimes_{\alpha'}G$ dada por $\phi(a\delta_g)=\varphi(a)\delta'_g$. Observa-se que

$$\phi(a\delta_g\cdot b\delta_h)=\phi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh})=\varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b))\delta'_{gh}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\phi(a\delta_g)\cdot\phi(b\delta_h)&=\varphi(a)\delta'_g\cdot\varphi(b)\delta'_h\\&=\alpha'_g(\alpha'_{g^{-1}}(\varphi(a))\varphi(b))\delta'_{gh}\\&=\alpha'_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a))\varphi(b))\delta'_{gh}\\&=\alpha'_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a)b))\delta'_{gh}\\&=\varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b))\delta'_{gh}.\end{aligned}$$

Assim, ϕ preserva a multiplicação. Além disso, $\phi(1_{\mathcal{A}}\delta_1)=\varphi(1_{\mathcal{A}})\delta'_g=1'_{\mathcal{A}}\delta'_g$, segue-se que ϕ é um morfismo na categoria de álgebras unitais. Além disso,

$$\phi(\pi_\alpha(g))=\phi(1_g\delta_g)=\varphi(1_g)\delta'_g=1'_g\delta'_g=\pi_{\alpha'}(g),$$

portanto $\phi\in Hom_{\mathbf{RpSe}\,G}(\pi_\alpha,\pi_{\alpha'})$.

Se α for ajustada, então as unidades 1_g geram $\mathcal{A}$ e dado qualquer $a\delta_g\in\mathcal{A}\rtimes_\alpha G$, $a\in\mathcal{D}_g$, $g\in G$, tem-se $a=\beta 1_g$, em que β é um polinômio nas variáveis 1_h $(h\in G, h\neq g)$, e

$$a\delta_g=(\beta 1_g)\delta_g=(\beta\delta_1)(1_g\delta_g).$$

Além disso, tem-se $(1_{g_1}\cdot\ldots\cdot 1_{g_k})\delta_1=1_{g_1}\delta_1\cdot\ldots\cdot 1_{g_k}\delta_1$ para quaisquer desses monômios, e como $1_h\delta_1=1_h\delta_h\cdot 1_{h^{-1}}\delta_{h^{-1}}=\pi_\alpha(h)\pi_\alpha(h^{-1})$ para todo $h\in G$, tem-se que $a\delta_g$ é um polinômio nas variáveis $\pi_\alpha(h)$, com $h\in G$. Portanto, π_α é ajustada.

(iii) Seja $\pi\colon G\to\mathcal{B}$ um objeto de $\mathbf{Rp}\,G$. Conforme [15, Proposition 6.8], existe um homomorfismo de K-álgebras $\psi\colon\mathcal{A}^\pi\rtimes_{\alpha^\pi}G\to\mathcal{B}$ dado por $\psi(\sum_{g\in G}a_g\delta_g)=\sum_{g\in G}a_g\pi(g)$, tal que $\psi\circ\pi_{\alpha^\pi}=\pi$. Logo ψ define um morfismo $\pi_{\alpha^\pi}\to\pi$.

Se π é ajustada, a álgebra $\mathcal{B}$ é gerada pelos elementos $\pi(g)=\varepsilon_g\pi(g)=\psi(\varepsilon_g\delta_g)$, em que $g\in G$. Neste caso, ψ é sobrejetora.

Se $\psi(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) = \psi(\sum_{g\in G} b_g\delta_g)$, então $\sum_{g\in G} a_g\pi(g) = \sum_{g\in G} b_g\pi(g)$. Assim, se π é separadora, a soma dos $\mathcal{D}_g^\pi\pi(g)$ $(g \in G)$ é direta e consequentemente $a_g\pi(g) = b_g\pi(g)$, para todo $g \in G$. Neste caso, $a_g = a_g\varepsilon_g = a_g\pi(g)\pi(g^{-1}) = b_g\pi(g)\pi(g^{-1}) = b_g\varepsilon_g = b_g$. Portanto, ψ é injetora.

(iv) Seja α uma ação parcial globalizável de G em $\mathcal{A}$ dada por $\{\alpha_g\colon \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g \mid g \in G\}$, em que $\mathcal{D}_g = \mathcal{A}1_g, \forall g \in G$ e denote por $\tilde{\alpha}$ o ajustamento de α. Conforme a fórmula (2.10), para cada $g \in G$ tem-se $\varepsilon_g^{\pi_\alpha} = 1_g\delta_1$ e pelo Lema 2.3.1, α^{π_α} é uma ação parcial de G na álgebra $\tilde{\mathcal{A}}\delta_1 \subseteq \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ gerada pelos $\varepsilon_g^{\pi_\alpha} = 1_g\delta_1$.

A aplicação $\varphi\colon \tilde{\mathcal{A}}\delta_1 \to \tilde{\mathcal{A}}$ dada por $\varphi(a\delta_1) = a$ é um isomorfismo de álgebras, e suas restrições a $(\tilde{\mathcal{A}}\delta_1)\varepsilon_g^{\pi_\alpha} = (\tilde{\mathcal{A}}\delta_1)1_g\delta_1 = (\tilde{\mathcal{A}}1_g)\delta_1 = \tilde{\mathcal{D}}_g\delta_1$ são isomorfismos $\tilde{\mathcal{D}}_g\delta_1 \to \tilde{\mathcal{D}}_g$, para cada $g \in G$.

Além disso, para cada $a \in \tilde{\mathcal{D}}_g^{-1}$, vale

$$\begin{aligned}\alpha_g^{\pi_\alpha}(a\delta_1) &= \pi_\alpha(g)a\delta_1\pi_\alpha(g^{-1}) = 1_g\delta_g \cdot a\delta_1 \cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\\ &= 1_g\delta_g \cdot a1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = \alpha_g(a)\delta_1.\end{aligned}$$

Então $\varphi(\alpha_g^{\pi_\alpha}(a\delta_1)) = \varphi(\alpha_g(a)\delta_1) = \alpha_g(a) = \alpha_g(\varphi(a\delta_1))$ e φ determina um isomorfismo entre as ações parciais α^{π_α} e $\tilde{\alpha}$. Consequentemente, a composição $\tilde{\mathcal{A}}\delta_1 \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{i} \mathcal{A}$, em que i denota a inclusão, determina um monomorfismo de $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha$. Em particular, se α for ajustada tem-se um isomorfismo $\alpha^{\pi_\alpha} \to \tilde{\alpha} = \alpha$.

(v) Primeiramente, observe que o conjunto de morfismos entre dois objetos de $\mathbf{ApAj}\,G$ possui no máximo um elemento, pois qualquer que seja $\varphi \in Hom_{\mathbf{ApAj}\,G}(\alpha, \alpha')$, deve ocorrer $\varphi(1_g) = 1'_g$ para todo $g \in G$, e como as álgebras nas quais α e α' agem são geradas pelas unidades 1_g e $1'_g$, respectivamente, o valor de φ fica completamente determinado em todos os elementos da álgebra. Analogamente, cada $Hom_{\mathbf{RpAj}\,G}(\pi, \pi')$ é vazio ou consiste de um único elemento, e consequentemente o mesmo vale para cada $Hom_{\mathbf{RpAjSe}\,G}(\pi, \pi')$. Deste modo, a restrição do funtor $\alpha^\diamond$ obtido no item i (e do funtor $\pi_\diamond$ do item ii) é um funtor *pleno* e *fiel*. De fato, a restrição é fiel pois não há flechas paralelas $\pi \rightrightarrows \pi'$ entre objetos arbitrários de $\mathbf{RpAjSe}\,G$. Por outro lado, para que a restrição seja um funtor pleno, todo elemento de $Hom_{\mathbf{ApAj}\,G}(\alpha^\pi, \alpha^{\pi'})$ deve ser a imagem por $\alpha^\diamond$ de algum morfismo $\pi \to \pi'$ de $\mathbf{RpAjSe}\,G$. Mas se $\alpha^\pi \to \alpha^{\pi'}$ é o único morfismo entre esses objetos, pode-se aplicar o funtor $\pi_\diamond$ do item ii para obter um morfismo $\pi_{\alpha^\pi} \to \pi_{\alpha^{\pi'}}$, e usar o item iii para construir um morfismo $\pi \to \pi_{\alpha^\pi} \to \pi_{\alpha^{\pi'}} \to \pi'$ cuja imagem por $\alpha^\diamond$ será $\alpha^\pi \to \alpha^{\pi'}$.

Levando em conta o isomorfismo $\pi_{\alpha^\pi} \to \pi$ (ou $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha$) obtido no item iii (item iv, respectivamente), segue que as categorias $\mathbf{RpAjSe}\,G$ e $\mathbf{ApAj}\,G$ são equivalentes.

(vi) Para cada $\pi \in Ob\mathbf{RpAj}\,G$ e cada $\alpha \in Ob\mathbf{ApAj}\,G$ é preciso associar uma bijeção

$$\eta_{\alpha,\pi}\colon Hom_{\mathbf{RpAj}\,G}(\pi_\alpha, \pi) \to Hom_{\mathbf{ApAj}\,G}(\alpha, \alpha^\pi)$$

que seja natural tanto em α quanto em π. Fixada $\alpha \in Ob\mathbf{ApAj}\,G$, a naturalidade de $\eta_{\alpha,\pi}$ em π é obtida mostrando-se que para quaisquer $\pi_1, \pi_2 \in Ob\mathbf{RpAj}\,G$ e todo morfismo $\phi\colon \pi_1 \to \pi_2$ tem-se um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{RpAj}\,G}(\pi_\alpha, \pi_1) \arrow[r, "\eta_{\alpha,\pi_1}"] \arrow[d, "\phi^*"'] & Hom_{\mathbf{ApAj}\,G}(\alpha, \alpha^{\pi_1}) \arrow[d, "(\alpha^\phi)^*"] \\ Hom_{\mathbf{RpAj}\,G}(\pi_\alpha, \pi_2) \arrow[r, "\eta_{\alpha,\pi_2}"'] & Hom_{\mathbf{ApAj}\,G}(\alpha, \alpha^{\pi_2}), \end{tikzcd}$$

em que o morfismo α^ϕ é a imagem de ϕ pelo funtor $\alpha^\diamond$, e as aplicações ϕ^* e $(\alpha^\phi)^*$ são induzidas pela composição com ϕ e α^ϕ, respectivamente. Por sua vez, a naturalidade em α corresponde

à comutatividade de um diagrama análogo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_{\alpha_1}, \pi) \arrow[r, "\eta_{\alpha_1,\pi}"] \arrow[d, "(\pi_\phi)^*"'] & Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha_1, \alpha^\pi) \arrow[d, "\phi^*"] \\
Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_{\alpha_2}, \pi) \arrow[r, "\eta_{\alpha_2,\pi}"'] & Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha_2, \alpha^\pi),
\end{tikzcd}$$

em que

- O morfismo $\phi\colon \alpha_2 \to \alpha_1$ induz ϕ^* que leva $\psi \mapsto \psi \circ \phi$, para cada $\psi\colon \alpha_1 \to \alpha^\pi$.
- O morfismo $\pi_\phi\colon \pi_{\alpha_2} \to \pi_{\alpha_1}$ induz $(\pi_\phi)^*$ que leva $\varphi \mapsto \varphi \circ \pi_\phi$, para cada $\varphi\colon \pi_{\alpha_1} \to \pi$.

Conforme a demonstração do item v, cada um dos conjuntos de morfismos do primeiro diagrama possui no máximo um único elemento. Então basta mostrar que $Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_\alpha, \pi) = \emptyset$ exatamente quando $Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha, \alpha^\pi) = \emptyset$, pois neste caso $\eta_{\alpha,\pi}$ ficará unicamente determinada e sua naturalidade em α e π será imediata.

Suponha-se que $Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_\alpha, \pi) \neq \emptyset$. Pelo item i o morfismo $\pi_\alpha \to \pi$ dá origem a um morfismo $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha^\pi$. Por outro lado, o item iv garante a existência de um isomorfismo $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha$, cujo inverso pode ser composto com $\alpha^{\pi_\alpha} \to \alpha^\pi$, resultando em um morfismo $\alpha \to \alpha^\pi$. Disso resulta que $Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha, \alpha^\pi)$ também não é vazio.

Reciprocamente, se $Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha, \alpha^\pi)$ não é vazio, o seu único elemento dá origem a um morfismo $\pi_\alpha \to \pi_{\alpha^\pi}$ (conforme o item ii). Além disso, o item iii garante a existência de um morfismo $\pi_{\alpha^\pi} \to \pi$, e a composição desses morfismos fornece um morfismo $\pi_\alpha \to \pi$. Disso resulta que $Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_\alpha, \pi)$ também não é vazio.

Portanto, $Hom_{\mathbf{RpAj}G}(\pi_\alpha, \pi) = \emptyset \Leftrightarrow Hom_{\mathbf{ApAj}G}(\alpha, \alpha^\pi) = \emptyset$ e a demonstração está completa. $\square$

Capítulo 3

Domínios de Representações Parciais Projetivas

Neste capítulo demonstram-se alguns resultados sobre os domínios elementares, e é dada uma descrição dos domínios minimais e indecomponíveis. Também é mostrado que todo domínio pode ser decomposto de forma única como uma união de certos domínios indecomponíveis. Determina-se ainda a estrutura dos domínios elementares e obtêm-se alguns invariantes numéricos do conjunto parcialmente ordenado dos domínios elementares. Tais resultados permitem que seja obtida uma caracterização dos grupos para os quais todos os domínios elementares são indecomponíveis.

3.1 Domínios Elementares

Nesta seção introdutória, G denotará um grupo finito. Seja Pr a projeção de $\oplus M_m(KH)$ sobre uma das álgebras de matrizes $M_m(KH)$, e considere a aplicação $[\,]\colon G \ni g \mapsto [g] \in K_{\mathrm{par}}(G)$.

Definição 3.1.1. Chama-se de *representação parcial elementar* de G a uma função da forma

$$\varphi = Pr \circ \psi \circ [\,]\colon G \to M_l(KH),$$

em que ψ é o isomorfismo (2.1), que descreve a álgebra parcial de um grupo finito como uma soma de álgebras matriciais.[1] O conjunto

$$D = D_{Pr} = \{(x, y) \in G \times G \mid \varphi(x)\,\varphi(y) \neq 0\} \tag{3.1}$$

é chamado de *domínio elementar*.

O algoritmo a seguir determina as representações parciais elementares de um grupo (finito) G. Para maiores detalhes, ver [16, seção 3] e [37, seção 2].

Dado um grupo H, a notação $e_{i,j}(h)$ será utilizada para indicar a matriz em $M_m(KH)$ cuja entrada na posição (i, j) é h e cujas demais entradas são 0. Além disso, também será utilizado $e_{i,j} = e_{i,j}(1_H)$.

Seja A um vértice em $\Gamma(G)$, considere $H = \operatorname{St} A$ e escreva $A = \cup_{i=1}^{m} Hg_i$ como uma união disjunta, em que $g_1 = 1$. Denote $\tau = \{g_1, \ldots, g_m\}$. O conjunto τ será chamado de *transversal à direita de H em A*. A representação parcial elementar $\varphi_{A,\tau}\colon G \to M_m(KH)$ pode ser obtida da seguinte forma. Para qualquer $x \in G$ defina:

$$\mathcal{I}_x^{A,\tau} = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid g_i x \in A\}.$$

Se $\mathcal{I}_x^{A,\tau} = \emptyset$ defina:

$$\varphi_{A,\tau}(x) = 0. \tag{3.2}$$

[1] Em [24] as representações parciais elementares foram definidas para grupos arbitrários.

Se $\mathcal{I}_x^{A,\tau} \neq \emptyset$, então para cada $i \in \mathcal{I}_x^{A,\tau}$ existe um único elemento $j = j_{i,x}$ em $\{1, \ldots, m\}$ e $h = h_{i,x} \in H$ tal que $g_i x = h g_j$. Neste caso temos

$$\varphi_{A,\tau}(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}_x^{A,\tau}} e_{i,j}(h). \tag{3.3}$$

Denote por $D_{A,\tau}$ o domínio elementar que corresponde a $\varphi_{A,\tau}$.

Lema 3.1.2. *Sejam A e A' dois vértices da mesma componente conexa de $\Gamma(G)$. Considere também um transversal à direita τ de $\operatorname{St} A$ em A e um transversal à direita τ' de $\operatorname{St} A'$ em A'. Então $D_{A,\tau} = D_{A',\tau'}$.*

Demonstração. Como $A' \in \mathcal{V}_A$, existe uma aresta $(A', g) \in \Gamma(G)$ que vai de $(A', 1)$ para $(A, 1) = (gA', 1)$, isto é, $A' = g^{-1}A$. Uma vez que $g \in A = \cup_{i=1}^m \operatorname{St} A g_i$, existem $g_k \in \tau = \{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_m\}$ e $h \in H = \operatorname{St} A$ tais que $g = h g_k$. Assim, tem-se $A' = g_k^{-1} h^{-1} A = g_k^{-1} A$. Então $H' = \operatorname{St} A' = g_k^{-1}(\operatorname{St} A) g_k$, e $\tau'' = g_k^{-1}\tau$ é um transversal à direita de $\operatorname{St} A'$ em A'. Assim, é fácil ver que a representação elementar $\varphi_{A',\tau''} \colon G \to M_m(KH')$ está relacionada a $\varphi_{A,\tau} \colon G \to M_m(KH)$ pela fórmula

$$\varphi_{A',\tau''}(x) = \operatorname{diag}(g_k^{-1}, g_k^{-1}, \ldots g_k^{-1})\, \varphi_{A,\tau}(x) \operatorname{diag}(g_k, g_k, \ldots g_k),$$

para todo $x \in G$. Consequentemente, $D_{A,\tau} = D_{A',\tau''}$. Por [24, Lemma 3.1], as representações

$$\varphi_{A',\tau''}, \varphi_{A',\tau'} \colon G \to M_m(KH')$$

são equivalentes, e disso decorre que $D_{A',\tau''} = D_{A',\tau'}$. Conclui-se então que $D_{A,\tau} = D_{A',\tau'}$. □

Tendo em vista o Lema 3.1.2, $D_{A,\tau}$ e $\mathcal{I}^{A,\tau}$ serão denotados por D_A e $\mathcal{I}^A$ respectivamente.

No próximo exemplo serão consideradas as duas possibilidades extremas para A.

Exemplo 3.1.3. Os casos em que $A = \{1\}$ ou $A = G$.

- Se $A = \{1\}$, então $H = \operatorname{St} A = \{1\}$ e tem-se a representação elementar $\varphi_1 \colon G \to K$ dada por $\varphi_1(1) = 1_K$ e $\varphi_1(x) = 0$ para $x \neq 1$, e o domínio (elementar) correspondente é $\{(1, 1)\}$.
- Se $A = G$, então $H = \operatorname{St} A = G$ e a representação elementar associada é $\varphi_G \colon G \ni x \to x \in KG$ com domínio (elementar) $G \times G$.

A lista a seguir mostra os domínios elementares dos grupos de ordem ≤ 4, que serão utilizados posteriormente (veja também o Apêndice A). Denote por $C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$, o grupo cíclico de ordem $n \in \mathbb{N}$. Tem-se o seguinte:

Exemplo 3.1.4. Os domínios elementares dos grupos de ordem menor ou igual a 4 são os seguintes:

(i) Para C_1 o único domínio elementar é $\{(1, 1)\}$.

(ii) Para C_2 os domínios elementares são:

- $C_2 \times C_2$,
- $\{(1, 1)\}$.

(iii) Para C_3 os domínios elementares são:

- $C_3 \times C_3$,
- $D_{\{1,a\}} = \{(1, 1), (1, a), (1, a^{-1}), (a, 1), (a^{-1}, 1), (a, a^{-1}), (a^{-1}, a)\}$,
- $\{(1, 1)\}$.

(iv) Para C_4 os domínios elementares são:

- $C_4 \times C_4$,

- $D_{\{1,a\}} = \{(1,1),(1,a),(1,a^{-1}),(a,1),(a^{-1},1),(a,a^{-1}),(a^{-1},a)\}$,
- $D_{\{1,a^2\}} = \{(1,1),(1,a^2),(a^2,1),(a^2,a^2)\}$,
- $\{(1,1)\}$.

(v) Para $C_2 \times C_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ os domínios elementares são:

- $(C_2 \times C_2) \times (C_2 \times C_2)$,
- $D_{\{1,a\}} = \{(1,1),(1,a),(a,1),(a,a)\}$,
- $D_{\{1,b\}} = \{(1,1),(1,b),(b,1),(b,b)\}$,
- $D_{\{1,ab\}} = \{(1,1),(1,ab),(ab,1),(ab,ab)\}$,
- $\{(1,1)\}$.

De fato, os domínios elementares para os itens de (1) a (4) foram obtidos em [37, seção 3], enquanto que os domínios elementares de $C_2 \times C_2$ podem ser obtidos facilmente por meio de (3.2) e (3.3).

Para encerrar esta seção, será estabelecido o seguinte:

Lema 3.1.5. *Seja H um subgrupo de G. Então todo domínio elementar de H também é um domínio elementar de G.*

Demonstração. Seja D um domínio elementar de H e $\varphi'_{A,\tau}\colon H \to M_l(KH')$ uma representação parcial elementar de H em que $H' = \operatorname{St} A \subseteq H$ para algum vértice A de $\Gamma(H)$, τ é um transversal à direita de H' em A e $D = \{(x,y) \in H \times H \mid \varphi'_{A,\tau}(x)\varphi'_{A,\tau}(y) \neq 0\}$. Então A também é um vértice de $\Gamma(G)$ e definindo $\varphi\colon G \to M_l(KH')$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi'_{A,\tau}(x) & \text{se } x \in H \\ 0 & \text{se } x \notin H, \end{cases}$$

é imediato que $D = \{(x,y) \in G \times G \mid \varphi(x)\varphi(y) \neq 0\}$ e conclui-se que φ é a representação elementar $\varphi_{A,\tau}$ de G. □

3.2 Minimalidade e Indecomponibilidade

Note que os subconjuntos $\mathcal{T}$-invariantes de $G \times G$ formam um reticulado *completo* $(C(G), \cap, \cup)$. Além disso, resulta do Exemplo 3.1.3 que $\{(1,1)\}$ e $G \times G$ são o zero e o neutro de $C(G)$, respectivamente. Os domínios $\{(1,1)\}$ e $G \times G$ serão chamados de *domínios triviais* de G. Observe também que todo domínio elementar de G é um subconjunto $\mathcal{T}$-invariante de $G \times G$.

Para um grupo finito G, o Lema 3.1.2 implica que toda componente conexa de $\Gamma(G)$ corresponde a um domínio elementar, que pode ser obtido de um vértice arbitrário da componente. Será demonstrado que o domínio elementar associado ao vértice $A = \{1, a, b\}$ é a $\mathcal{T}$-órbita $\mathcal{T}(a^{-1}, b)$. Antes, no entanto, são necessários alguns resultados preliminares. Como no capítulo anterior, $\mathcal{V}_A$ denotará o conjunto dos vértices de $\Gamma(G)$ na componente que contém A.

Lema 3.2.1. *Seja G um grupo finito e A um vértice de $\Gamma(G)$. Então $(x,y) \in D_A$ se, e somente se, existe $A' \in \mathcal{V}_A$ tal que $\{x^{-1}, y\} \subseteq A'$.*

Demonstração. Seja $x, y \in G$. Por definição, $(x,y) \in D_A$ é equivalente a $\varphi_{A,\tau}(x)\varphi_{A,\tau}(y) \neq 0$, em que τ é um transversal à direita de $\operatorname{St} A$ em A. Além disso, a igualdade $g_i x = h g_j$ vale se, e somente se, $g_j x^{-1} = h^{-1} g_i$, e consequentemente, utilizando (3.3), obtém-se

$$\begin{aligned} (x,y) \in D_A &\Leftrightarrow \exists\, j \in \mathcal{I}^A_{x^{-1}} \cap \mathcal{I}^A_y \\ &\Leftrightarrow g_j x^{-1} \in A \text{ e } g_j y \in A \\ &\Leftrightarrow \{x^{-1}, y\} \subseteq g_j^{-1} A. \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma consequência direta da definição de $\mathcal{T}$.

Lema 3.2.2. *Se G é um grupo arbitrário e $x \in G$, então*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x,1) &= \{(1,1),(x,1),(1,x^{-1}),(x^{-1},x),(x^{-1},1),(1,x),(x,x^{-1})\}\\ &= S_3(1,1)\cup S_3(x,1)\cup S_3(x^{-1},1),\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{T}(x,1)=\mathcal{T}(x^{-1},1)=\mathcal{T}(1,x^{-1})=\mathcal{T}(1,x)=\mathcal{T}(x^{-1},x)=\mathcal{T}(x,x^{-1}).$$

Agora será calculado o domínio elementar associado ao vértice $\{1,a,b\}$.

Proposição 3.2.3. *Se G é um grupo e $a,b\in G$ então:*

$$\mathcal{T}(b^{-1},a)=\mathcal{T}(1,a)\cup\mathcal{T}(1,b)\cup\mathcal{T}(1,b^{-1}a)\cup S_3(b^{-1},a). \tag{3.4}$$

Além disso, se G é finito, então $D_{\{1,a,b\}}=\mathcal{T}(b^{-1},a)$.

Demonstração. A igualdade (3.4) resulta do Lema 3.2.2 por meio de uma inspeção dos elementos de $\mathcal{T}(b^{-1},a)$, com a ajuda da decomposição de $\mathcal{T}$ apresentada em (1.4) e da descrição das S_3-órbitas dada em (1.6). Por outro lado, observe que se $A=\{1,a,b\}$ então

$$\mathcal{V}_A=\{A,\{1,a^{-1},a^{-1}b\},\{1,b^{-1},b^{-1}a\}\},$$

havendo repetições se, e somente se, $A\cong C_3$ ou $|A|\leq 2$. Além disso, se G é finito, a Proposição 3.2.1 garante que um par (u,v) pertence a $D_{\{1,a,b\}}$ se, e somente se,

$$\{u^{-1},v\}\subseteq\{1,a,b\} \text{ ou } \{u^{-1},v\}\subseteq\{1,a^{-1},a^{-1}b\} \text{ ou } \{u^{-1},v\}\subseteq\{1,b^{-1},b^{-1}a\}.$$

Analisando caso a caso, obtém-se

$$\begin{aligned}D_{\{1,a,b\}}=\ &\{(1,1),(1,a),(1,b),(a^{-1},1),(a^{-1},a),(a^{-1},b),(b^{-1},1),(b^{-1},a),(b^{-1},b)\}\\ &\cup\{(1,a^{-1}),(1,a^{-1}b),(a,1),(a,a^{-1}),(a,a^{-1}b),(b^{-1}a,1),(b^{-1}a,a^{-1}),(b^{-1}a,a^{-1}b)\}\\ &\cup\{(1,b^{-1}),(1,b^{-1}a),(b,1),(b,b^{-1}),(b,b^{-1}a),(a^{-1}b,1),(a^{-1}b,b^{-1}),(a^{-1}b,b^{-1}a)\},\end{aligned}$$

e pelo Lema 3.2.2 e por (1.6), $D_{\{1,a,b\}}=\mathcal{T}(1,a)\cup\mathcal{T}(1,b)\cup\mathcal{T}(1,b^{-1}a)\cup S_3(b^{-1},a)$. □

Uma consequência imediata dessa proposição é o seguinte:

Corolário 3.2.4. *As $\mathcal{T}$-órbitas de qualquer grupo finito G são domínios elementares.*

Definição 3.2.5. Se G é um grupo arbitrário, um domínio $D\in C(G)$ será chamado *decomponível* se existirem domínios $\{D_i\}_{i\in I}$, em que $D\neq D_i\neq D_k\neq D$ para $i\neq k$, tais que $D=\cup_{i\in I}D_i$. Caso contrário, D será dito *indecomponível* (ou $\cup$-*irredutível*).

Observação 3.2.6. Em uma decomposição $D=\cup_{i\in I}D_i$ poderiam existir índices $j,k\in I$ tais que $D_j\subseteq D_k$. Neste caso, o domínio D_j seria supérfluo. Assim, serão consideradas apenas decomposições minimais, no sentido de que $D_j\nsubseteq D_k$, para $j\neq k$.

Exemplo 3.2.7. Existe um domínio elementar decomponível para C_5. De fato foi calculado em [37, seção 3] que

$$\begin{aligned}D_4=&\{(1,C_5),(C_5,1),(a,a),(a,a^4),(a^4,a),(a^3,a^2),(a^2,a^3),(a,a^3)(a^3,a),\\ &(a^2,a^4),(a^4,a^2),(a^4,a^4)\}=\mathcal{T}(a,a^3) \text{ e}\\ D_5=&\{(1,C_5),(C_5,1),(a,a^4),(a^4,a),(a^3,a^2),(a^2,a^3),(a^2,a^2),(a,a^2),(a^2,a),\\ &(a^3,a^4),(a^4,a^3),(a^3,a^3)\}=\mathcal{T}(a^2,a^2)\end{aligned}$$

são domínios elementares, em que $(C_5,1)$ e $(1,C_5)$ são a união dos pares $(x,1)$ e $(1,x)$, para todo $x\in C_5$, respectivamente. Além disso, $C_5\times C_5=D_4\cup D_5$ e o domínio $C_5\times C_5$ é decomponível.

Definição 3.2.8. Um domínio $D \neq \{(1,1)\}$ será dito *minimal* se, para todo domínio D', uma inclusão do tipo $D \supseteq D' \supsetneq \{(1,1)\}$ implicar que $D = D'$. Observe que os domínios minimais são precisamente os *átomos* do reticulado $C(G)$.

Note que na definição acima, se G é finito pode-se assumir que D' é elementar, uma vez que [20, Theorem 4] garante que para grupos finitos todo domínio é a união de domínios elementares. Obviamente qualquer domínio minimal é indecomponível. Além disso, obtém-se o seguinte a partir do Lema 3.1.5:

Corolário 3.2.9. *Se existe um domínio elementar decomponível para um subgrupo H de um grupo finito G, então também há um domínio elementar decomponível para G.*

Proposição 3.2.10. *Se a e b são elementos quaisquer de G, então $\mathcal{T}(a,b)$ é um domínio indecomponível (que é elementar se G for finito), e todo domínio indecomponível é uma $\mathcal{T}$-órbita.*

Demonstração. Suponha que existam domínios (elementares se G for finito) $D_1, \ldots, D_k$ tais que $\mathcal{T}(a,b) = \cup_{i=1}^{k} D_i$. Como $(a,b) \in \mathcal{T}(a,b)$, existe algum $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $(a,b) \in D_j$. Mas D_j também é invariante sob a ação de $\mathcal{T}$, então $\mathcal{T}(a,b) \subseteq D_j \subseteq \mathcal{T}(a,b)$, ou seja, $\mathcal{T}(a,b)$ coincide com o domínio elementar D_j. Portanto, $\mathcal{T}(a,b)$ é indecomponível. □

Seja G um grupo arbitrário. Então todo elemento $X \in C(G)$ é um subconjunto $\mathcal{T}$-invariante de $G \times G$, e é possível escrever $X = \cup_{(x,y)\in X} \mathcal{T}(x,y)$. Como todo $\mathcal{T}(x,y)$ contém $(1,1)$, é imediato que todo domínio minimal é uma $\mathcal{T}$-órbita. Mais especificamente, tem-se:

Proposição 3.2.11. *Um domínio D é minimal se, e somente se, $D = \mathcal{T}(x,1)$, para algum $x \in G \setminus \{1\}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $x \in G \setminus \{1\}$ e suponha que $\{(1,1)\} \neq D' \subseteq \mathcal{T}(x,1)$, para algum domínio D'. Então existe um par $(a,b) \in G \times G$ com $(1,1) \neq (a,b) \in D' \subseteq \mathcal{T}(x,1)$. Em particular, $(a,b) \in \mathcal{T}(x,1)$ e utilizando o Lema 3.2.2, obtém-se $\mathcal{T}(x,1) \subseteq D' \subseteq \mathcal{T}(x,1)$. Assim, $D' = \mathcal{T}(x,1)$ e $\mathcal{T}(x,1)$ é minimal.

($\Rightarrow$) Assuma que $D \neq \mathcal{T}(x,1)$, para todo $x \in G \setminus \{1\}$. Se $D = \mathcal{T}(1,1)$, então obviamente D não é minimal. Caso contrário, existe $(a,b) \in D$ tal que $a \neq 1$ ou $b \neq 1$. Além do mais,

- Se $a \neq 1$ então $\mathcal{T}(a,1) = \mathcal{T}t(a,b) \subseteq D$;
- Se $b \neq 1$ então $\mathcal{T}(b^{-1},1) = \mathcal{T}th(a,b) \subseteq D$.

Em ambos os casos, D contém um domínio da forma $\mathcal{T}(x,1) \neq \{(1,1)\}$, que por hipótese é diferente de D, contradizendo a minimalidade de D. □

A combinação da Proposição 3.2.3 e da Proposição 3.2.11 resulta no seguinte:

Corolário 3.2.12. *Seja D um domínio para um grupo finito G. Então D é minimal se, e somente se, existe $1 \neq x \in G$ tal que $D = D_{\{1,x\}}$.*

Sabe-se que os domínios dos conjuntos fatores parciais são uniões de $\mathcal{T}$-órbitas. Uma $\mathcal{T}$-órbita não minimal será chamada de *bloco*. Consequentemente, para qualquer domínio D, existem blocos $\{B_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ e átomos $\{M_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ em $C(G)$ tais que

$$D = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \cup \bigcup_{j\in\mathcal{J}} M_j.$$

Também é possível remover de tal decomposição todo átomo M_j que seja um subconjunto de algum B_i. Em outras palavras, pode-se assumir que neste tipo de decomposição de um domínio D não existem i, j de modo que $B_i \supseteq M_j$.

Proposição 3.2.13. *Seja G um grupo arbitrário. Suponha que os domínios $D_1, D_2 \in C(G)$ estejam decompostos como*

$$D_1 = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \cup \bigcup_{j\in\mathcal{J}} M_j$$

e

$$D_2 = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} C_k \cup \bigcup_{l\in\mathcal{L}} N_l,$$

com $M_j \not\subseteq B_i$ *e* $N_l \not\subseteq C_k$*, em que os* $B_i's$ *e os* $C_k's$ *são blocos e os* $M_j's$ *e os* $N_k's$ *são átomos. Se* $D_1 \subseteq D_2$*, então:*

- $\{B_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq \{C_k \mid k \in \mathcal{K}\}$*;*
- *Para qualquer* $j \in \mathcal{J}$ *tem-se* $M_j \subseteq C_k$*, para algum* $k \in \mathcal{K}$ *ou* $M_j = N_l$ *para algum* $l \in \mathcal{L}$*.*

Demonstração. Observe que a hipótese de que $M_j \not\subseteq B_i$ para cada i implica $M_j \not\subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i$, analogamente $N_l \not\subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{K}} C_k$. Sabe-se pelo Lema 3.2.2 e pela Proposição 3.2.3 que, para qualquer i, $B_i = \mathcal{T}(x_i, y_i)$, para certos $x_i, y_i \in G \setminus \{1\}$ satisfazendo $1 \neq x_i y_i$. Por outro lado, (x_i, y_i) é um elemento de

$$\bigcup_{k\in\mathcal{K}} C_k \cup \bigcup_{l\in\mathcal{L}} N_l.$$

Além disso, $N_j = \mathcal{T}(1, a_j)$, para algum a_j e cada elemento (u, v) destas $\mathcal{T}$-órbitas satisfaz $1 \in \{u, v, uv\}$. Consequentemente, $(x_i, y_i) \in C_k$, para algum k, e isso implica que $C_k = \mathcal{T}(x_i, y_i) = B_i$, e portanto $\{B_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq \{C_k \mid k \in \mathcal{K}\}$.

Em seguida, $M_j = \mathcal{T}(1, z_j)$, para algum $z_j \neq 1$, então se M_j não está contido em nenhum dos blocos que aparecem na decomposição de D_2, nota-se que $M_j \subseteq \bigcup_{l\in\mathcal{L}} N_l$, para todo j. Como para cada l tem-se $N_l = \mathcal{T}(1, z_l)$ para algum $z_l \neq 1$, resulta que $(1, z_j) \in \mathcal{T}(1, z_{l_0})$ e $\mathcal{T}(1, z_j) \subseteq \mathcal{T}(1, z_{l_0})$, para algum l_0. Finalmente, pela Proposição 3.2.11, estas $\mathcal{T}$-órbitas são minimais, então $M_j = N_{l_0}$. □

Corolário 3.2.14. *Seja* G *um grupo arbitrário. Se houver duas decomposições para um domínio* $D \in C(G)$*, como*

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i \cup \bigcup_{j\in\mathcal{J}} M_j$$

e

$$\bigcup_{k\in\mathcal{K}} C_k \cup \bigcup_{l\in\mathcal{L}} N_l,$$

com $M_j \not\subseteq B_i$ *e* $N_l \not\subseteq C_k$*, em que os* B_i*'s e os* C_k*'s são blocos e os* M_j*'s e os* N_k*'s são átomos, então* $\{B_i \mid i \in \mathcal{I}\} = \{C_k \mid k \in \mathcal{K}\}$ *e* $\{M_j \mid j \in \mathcal{J}\} = \{N_l \mid l \in \mathcal{L}\}$*.*

Demonstração. Pela proposição anterior, é claro que $\{B_i \mid i \in \mathcal{I}\} = \{C_k \mid k \in \mathcal{K}\}$. Disto, da hipótese de que $M_j \not\subseteq B_i$, e também da proposição anterior, decorre que $\{M_j \mid j \in \mathcal{J}\} = \{N_l \mid l \in \mathcal{L}\}$. □

O próximo lema caracteriza os blocos contendo um átomo fixado em $C(G)$.

Lema 3.2.15. *Seja* G *um grupo arbitrário e* $a \in G \setminus \{1\}$*. Então* $\mathcal{T}(1, a) \subseteq \mathcal{T}(x, y)$*, com* $1 \notin \{x, y, xy\}$ *se, e somente se, existe* $z \in G$ *tal que* $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(z, a)$*.*

Demonstração. Por (1.5) percebe-se que $(1, a) \in \mathcal{T}(z, a)$, para qualquer $z \in G$. Por outro lado, pela Proposição 3.2.3 tem-se $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{T}(1, y) \cup \mathcal{T}(1, x) \cup \mathcal{T}(1, xy) \cup S_3(x, y)$, e resulta de (1.6) que todo elemento (a, b) de $S_3(x, y)$ é tal que $1 \notin \{a, b, ab\}$. Assim, se $\mathcal{T}(1, a) \subseteq \mathcal{T}(x, y)$, então $(1, a)$ pertence a $\mathcal{T}(1, x) \cup \mathcal{T}(1, y) \cup \mathcal{T}(1, xy)$, e segue do Lema 3.2.2 que

$$a \in \{x, x^{-1}, y, y^{-1}, xy, y^{-1}x^{-1}\}.$$

Em outras palavras,

$$\mathcal{T}(x,y) = \begin{cases} \mathcal{T}(a,y) = \mathcal{T}(y^{-1}a^{-1},a), \text{ ou} \\ \mathcal{T}(a^{-1},y) = \mathcal{T}(y^{-1},a), \text{ ou} \\ \mathcal{T}(x,a), \text{ ou} \\ \mathcal{T}(x,a^{-1}) = \mathcal{T}(xa^{-1},a), \text{ ou} \\ \mathcal{T}(x,x^{-1}a) = \mathcal{T}(x^{-1},a), \text{ ou} \\ \mathcal{T}(x,x^{-1}a^{-1}) = \mathcal{T}(x^{-1}a^{-1},a) \end{cases}$$

Em todo caso, tem-se $(1,a) \in \mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}(z,a)$, para algum $z \in G$. □

Resulta da demonstração do Lema 3.2.15 o seguinte:

Corolário 3.2.16. *Sejam $x, y \in G$. Para quaisquer $u, v \in G$ tem-se $\mathcal{T}(x,y) \cap \mathcal{T}(u,v) = \{(1,1)\}$ exatamente quando*

$$\{u, v, uv\} \cap \{x, x^{-1}, y, y^{-1}, xy, y^{-1}x^{-1}\} = \emptyset.$$

3.3 Decomposição de Domínios Elementares

Nesta seção G denotará um grupo finito. Pela Proposição 3.2.10 sabe-se que toda $\mathcal{T}$-órbita é um domínio elementar indecomponível, e também é conhecido que a união de $\mathcal{T}$-órbitas é um elemento de $C(G)$, apesar de não ser necessariamente um domínio elementar. Por exemplo, resulta do Exemplo 3.1.4 que para $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ o domínio $X = \mathcal{T}(1,a) \cup \mathcal{T}(1,a^2)$ não é elementar. Como todo domínio elementar D é uma união de $\mathcal{T}$-órbitas, $D = \cup_{(x,y)\in D} \mathcal{T}(x,y)$, é natural considerar o seguinte problema:

Dado um domínio elementar D, encontrar um conjunto $\mathcal{I}$ com uma quantidade minimal de elementos tal que $D = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{T}(x_i, y_i)$.

Para resolver este problema será utilizado o seguinte:

Lema 3.3.1. *Se A e B são vértices de $\Gamma(G)$ tais que $A \subseteq B$, então $D_A \subseteq D_B$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in G$. Pelo Lema 3.2.1 sabe-se que $(a,b) \in D_A$ é equivalente à existência de um elemento $g_j \in A$ com $\{a^{-1}, b\} \subseteq g_j^{-1}A$. Então existe algum $g_j \in B$ satisfazendo $\{a^{-1}, b\} \subseteq g_j^{-1}B \in \mathcal{V}_B$. Novamente pelo Lema 3.2.1, conclui-se que $(a,b) \in D_B$. □

Observação 3.3.2. A recíproca do Lema 3.3.1 não é verdadeira. Por exemplo, conforme [37, Corollary 6.2], se $|G| > 3$ e A é um vértice em $\Gamma(G)$, tal que $|A| + 1 = |G|$, então $D_G = D_A$.

Considere $G_n = \{A \subseteq G \mid 1 \in A, |A| = n\}$ e defina uma relação de equivalência em G_n, por:

$$A \sim B \Longleftrightarrow \mathcal{V}_A = \mathcal{V}_B.$$

A classe de equivalência de um vértice A é exatamente $\mathcal{V}_A$.

Seja $\mathcal{C}_n$ um conjunto completo de representantes das classes de equivalência de $\sim$. O resultado a seguir fornece uma decomposição do domínio elementar induzido por um vértice $B \in \Gamma(G)$, em que B tem 3 ou mais elementos. Pelos resultados já obtidos, para todo vértice B satisfazendo $|B| \leq 3$, o domínio D_B é uma $\mathcal{T}$-órbita.

Teorema 3.3.3. *Seja B um vértice em $\Gamma(G)$ tal que $|B| \geq 3$ e considere um transversal $\tau = \{b_1 = 1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq B$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^{m} \operatorname{St} Bb_i$. Então*

$$D_B = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{\substack{A\in\mathcal{C}_3 \\ A\subseteq b_i^{-1}B}} D_A. \tag{3.5}$$

Além disso, a decomposição acima é minimal, isto é, nenhum dos blocos que nela aparecem pode ser omitido, e a decomposição é única exceto por uma possível permutação dos blocos.

Demonstração. Resulta do Corolário 3.3.1 e do Lema 3.1.2 que, para quaisquer $b \in B$ e $A \subseteq b^{-1}B$, tem-se $D_A \subseteq D_{b^{-1}B} = D_B$. Consequentemente, $D_B \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{C}_3 \\ A \subseteq b_i^{-1}B}} D_A$.

Para demonstrar a inclusão contrária, assuma que $(u, v) \in D_B$. Pelo Lema 3.2.1, há algum vértice $B' \in \mathcal{V}_B$ que contém o conjunto $\{u^{-1}, v\}$. Como $|B'| = |B| \geq 3$, existe um subconjunto E de B' tal que $\{1, u^{-1}, v\} \subseteq E$ e $|E| = 3$. Resulta novamente do Lema 3.2.1 que $(u, v) \in D_E$, e obtém-se (3.5).

A minimalidade da decomposição (3.5) será uma consequência das duas afirmações a seguir.

Afirmação 3.3.4. *Se A e B_1 são vértices em $\Gamma(G)$ tais que $|A| = |B_1| = 3$, então*

$$\mathcal{V}_A = \mathcal{V}_{B_1} \iff D_A = D_{B_1}.$$

De fato, já é conhecido do Lema 3.1.2 que todo vértice de uma determinada componente de $\Gamma(G)$ induz o mesmo domínio elementar. Para demonstrar a implicação contrária, sejam $A = \{1, a_1, a_2\}$ e $B_1 = \{1, b_1, b_2\}$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_A = \mathcal{V}_{B_1} &\iff B_1 = A \text{ ou } B_1 = a_1^{-1}A \text{ ou } B_1 = a_2^{-1}A \\ &\iff \{b_1, b_2\} \in \left\{\{a_1, a_2\}, \{a_1^{-1}, a_1^{-1}a_2\}, \{a_2^{-1}, a_2^{-1}a_1\}\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, pela Proposição 3.2.3, é suficiente mostrar que $\mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) = \mathcal{T}(b_1^{-1}, b_2)$ implica a terceira condição em (3.6).

Assumindo $\mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) = \mathcal{T}(b_1^{-1}, b_2)$, tem-se $(b_1^{-1}, b_2) \in \mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2)$, de modo que existe $\gamma \in \mathcal{T} = S_3 \cup tS_3 \cup vtS_3 \cup uvtS_3 \cup 0$ tal que $(b_1^{-1}, b_2) = \gamma(a_1^{-1}, a_2)$. Além disso, por (1.5) e (1.6), resulta que

$$tS_3(x, y) = \{(x, 1), (xy, 1), (y^{-1}, 1), (y^{-1}x^{-1}, 1), (y, 1), (x^{-1}, 1)\},$$

para todo $(x, y) \in G \times G$. Assim, os pares (a, b) de $(tS_3 \cup vtS_3 \cup 0)(x, y)$ possuem 1 em alguma de suas coordenadas. Como $1 \notin \{b_1, b_2\}$, resulta que $\gamma \notin tS_3 \cup vtS_3 \cup 0$. De modo similar, $\gamma \notin uvtS_3$, pois os pares em $uvtS_3(a_1^{-1}, a_2)$ são da forma (x^{-1}, x), mas por hipótese $b_1 \neq b_2$. Logo, a única possibilidade é que $\gamma \in S_3$. Neste caso, segue que (b_1^{-1}, b_2) pertence ao conjunto

$$\{(a_1^{-1}, a_2), (a_1^{-1}a_2, a_2^{-1}), (a_2^{-1}, a_1), (a_2^{-1}a_1, a_1^{-1}), (a_2, a_2^{-1}a_1), (a_1, a_1^{-1}a_2)\},$$

o que é apenas uma forma alternativa de expressar a terceira condição de (3.6). Isso completa a demonstração desta afirmação.

Afirmação 3.3.5. *Se $A, B_1, \ldots B_m$ são vértices pertencentes a componentes conexas distintas de $\Gamma(G)$, e $|A| = |B_j| = 3$, $j = 1, \ldots, m$, então $D_A \nsubseteq \bigcup_{j=1}^{m} D_{B_j}$.*

Fixe arbitrariamente um $j \in \{1, \ldots, m\}$ e escreva $A = \{1, a_1, a_2\}$, $B_j = \{1, b_1, b_2\}$. Então pela Afirmação 3.3.4 e pela Proposição 3.2.3 tem-se que $D_A = \mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) \neq \mathcal{T}(b_1^{-1}, b_2) = D_{B_j}$. Para $(x, y) \in \mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) \cap \mathcal{T}(b_1^{-1}, b_2)$ tem-se $\mathcal{T}(x, y) \subseteq \mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) \cap \mathcal{T}(b_1^{-1}, b_2)$. Por outro lado, pela Proposição 3.2.3 vê-se que os domínios não triviais contidos propriamente em uma $\mathcal{T}$-órbita são minimais. Como consequência, $1 \in \{x, y, xy\}$, e portanto, para todo $(u, v) \in D_A$ tal que $1 \notin \{u, v, uv\}$ tem-se $(u, v) \notin D_{B_j}$. Em particular, $(a_1^{-1}, a_2) \notin D_{B_j}$. Como j é arbitrário, resulta que $(a_1^{-1}, a_2) \notin \bigcup_{j=1}^{m} D_{B_j}$. Assim, $D_A = \mathcal{T}(a_1^{-1}, a_2) \nsubseteq \bigcup_{j=1}^{m} D_{B_j}$.

Finalmente, segue do Corolário 3.2.14 que a decomposição (3.5) é única. □

Observação 3.3.6. Tem-se o seguinte:

- O teorema anterior fornece um critério para decidir se um elemento $D \in C(G)$ é ou não um domínio elementar. De fato, seja $D = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{T}(x_i, y_i)$ com $|\mathcal{I}| \geq 2$ e B como no Teorema 3.3.3. Se existir $i \in \mathcal{I}$ tal que todo vértice em $\mathcal{V}_{\{1, y_i, x_i^{-1}\}}$ não esteja contido em $b_j^{-1}B$ para todo $1 \leq j \leq m$, tem-se $D \neq D_B$.

- Usando o Lema 3.2.2, pode-se reescrever a decomposição dada pela Proposição 3.2.3 da seguinte forma:
$$D_{\{1,a,b\}} = S_3(b^{-1}, a) \cup \bigcup_{x \in \{1, a, a^{-1}, b, b^{-1}, b^{-1}a, a^{-1}b\}} S_3(x, 1),$$
para quaisquer $a, b \in G$. Pelo Teorema 3.3.3, vê-se que todo domínio elementar é uma união de S_3-órbitas de $G \times G$, e consequentemente, todos os elementos de $C(G)$ são uniões de S_3-órbitas.

Definição 3.3.7. Diz-se que um vértice A é *total* se $D_A = G \times G$.

A seguir serão apresentados alguns resultados com os quais é possível decidir quando o domínio induzido por um vértice de $\Gamma(G)$ não é total. Isto ajudará a caracterizar os grupos finitos para os quais todos os domínios elementares são indecomponíveis. Primeiro, observe a seguinte consequência direta do Teorema 3.3.3:

Corolário 3.3.8. *Se G é um grupo tal que $|G| \geq 3$ então*
$$D_G = G \times G = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_3} D_A.$$
Além disso, para todo vértice B de $\Gamma(G)$, o domínio D_B não é total, se, e somente se, existe $A \in \mathcal{C}_3$ tal que D_A não está contido em D_B.

Proposição 3.3.9. *Se G é um grupo finito e A é um vértice de $\Gamma(G)$ tal que $|\mathrm{St}\, A|(|G|^2 - 1) > |A|(|A|^2 - 1)$, então D_A não é total.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.1, $(x, y) \in D_A$ exatamente quando existe algum vértice $A' \in \mathcal{V}_A$ contendo x^{-1} e y. Isso corresponde ao seguinte par de arestas no grupoide:
$$y^{-1}A' \xrightarrow{y} A' \xrightarrow{x} xA'.$$
Para cada vértice A', existem exatamente $|A|^2$ pares distintos de tais arestas. Como um destes pares é sempre $(1, 1)$, e $|\mathcal{V}_A| = |A|/|\mathrm{St}\, A|$, conclui-se que D_A tem no máximo $\frac{|A|}{|\mathrm{St}\, A|}(|A|^2 - 1) + 1$ elementos. Em particular, para qualquer A que é total, tem-se
$$|G|^2 = |D_A| \leq \frac{|A|}{|\mathrm{St}\, A|}(|A|^2 - 1) + 1.$$
□

Observação 3.3.10. As seguintes afirmações são verdadeiras para todo grupo finito G:

- Para todo subgrupo $H \subsetneq G$, o domínio D_H não é total.

- Se A é um vértice de $\Gamma(G)$, em que $|G| \geq 6$ e $|A| \leq 3$, então D_A não é total (basta usar a Proposição 3.3.9).

Proposição 3.3.11. *Seja G um grupo finito. Então as seguintes condições são equivalentes,*

(i) $1 \leq |G| \leq 4$,

(ii) todo domínio elementar de G é indecomponível,

(iii) todos os domínios elementares não triviais de G são minimais.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii),(iii) Se $1 \leq |G| \leq 4$, resulta do Exemplo 3.1.4 que todo domínio elementar não trivial de G induzido por $A \in \mathcal{V}_A$ é minimal e D_G é indecomponível.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que $|G| > 4$. Se $|G| \geq 6$ então o segundo item da Observação 3.3.10 e a Proposição 3.2.3 implicam que $D_G = G \times G$ não é uma $\mathcal{T}$-órbita, e, consequentemente, é decomponível. Finalmente, se $|G| = 5$, o Exemplo 3.2.7 implica que neste caso existem domínios elementares decomponíveis para G.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Isso é evidente se D_G é indecomponível. Por outro lado, se D_G é decomponível, então pelo Exemplo 3.1.4, $|G| \geq 5$ e G contém elementos $a \neq 1$, $b \neq 1$ com $ab \neq 1$. Neste caso o domínio $\mathcal{T}(a,b) \supsetneq \mathcal{T}(a,1)$ não é minimal. □

3.4 Alguns Invariantes de $C(G)$

Escreva $\mathcal{T}(G) = \{\mathcal{T}(x,y) \mid (x,y) \in G \times G\}$. Então $(\mathcal{T}(G), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado cujos elementos maximais são os blocos, e pelo Corolário 3.2.14 cada elemento de $C(G)$ pode ser escrito de forma única como uma união de elementos de $\mathcal{T}(G)$.

Proposição 3.4.1. *Se G e H são grupos então $\mathcal{T}(G) \simeq \mathcal{T}(H)$ como conjuntos parcialmente ordenados se, e somente se, $C(G) \simeq C(H)$ como reticulados.*

Demonstração. Seja $\phi\colon \mathcal{T}(G) \to \mathcal{T}(H)$ um isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados. Pelo Corolário 3.2.14 qualquer $D \in C(G)$ possui uma única decomposição $D = \cup_{i \in I} \mathcal{T}(a_i, b_i)$. Pode-se estender ϕ para $C(G)$ definindo

$$\phi(D) = \cup_{i \in I} \phi(\mathcal{T}(a_i, b_i)) \in C(H).$$

Claramente, a decomposição de $\phi(D)$ acima é única. Assim, obtém-se uma correspondência um a um entre $C(G)$ e $C(H)$ que preserva inclusões, o que implica que tal correspondência é na verdade um isomorfismo de reticulados.

Reciprocamente, um isomorfismo de reticulados $\phi\colon C(G) \to C(H)$ leva domínios indecomponíveis de G em domínios indecomponíveis de H, e como os domínios indecomponíveis são exatamente as $\mathcal{T}$-órbitas, ao restringir ϕ obtém-se um isomorfismo $\phi\colon \mathcal{T}(G) \to \mathcal{T}(H)$. □

A seguir são calculados alguns invariantes relacionados aos domínios elementares minimais e aos blocos. O subconjunto dos elementos de G cuja ordem é n será denotado por $o_n(G)$, e lembre-se que um bloco é uma $\mathcal{T}$-órbita que não é minimal nem trivial. Note que a Proposição 3.2.3 implica que todo bloco contém um, dois ou três domínios elementares minimais. Será calculada a quantidade de blocos em cada um destes casos, bem como o número de domínios minimais.

Teorema 3.4.2. *Seja G um grupo finito.*

(i) O número $\min(G)$ *de domínios elementares minimais de G é dado por:*

$$\min(G) = \frac{|G| + |o_2(G)| - 1}{2}.$$

(ii) Denote por $\mathrm{Bl}_1(G)$ *o conjunto de blocos que contêm exatamente um domínio elementar minimal. Então*

$$|\mathrm{Bl}_1(G)| = |\{H \text{ subgrupo de } G \mid H \simeq C_3\}| = |o_3(G)|/2.$$

(iii) Seja $\mathrm{Bl}_2(G)$ *o conjunto dos blocos que contêm exatamente dois domínios elementares minimais. Então*

$$|\mathrm{Bl}_2(G)| = |\{a \in G \mid o(a) > 3\}|/2.$$

(iv) Escreva $\mathrm{Bl}(G)$ *para indicar o conjunto de todos os blocos. Então*

$$|\mathrm{Bl}(G)| = \frac{\binom{|G|-1}{2} + |o_3(G)|}{3}.$$

(v) Seja $\mathrm{Bl}_3(G)$ *o número de blocos que contêm exatamente três domínios elementares minimais. Então*

$$|\mathrm{Bl}_3(G)| = \frac{2\binom{|G|-1}{2} - |o_3(G)| - 3|\{a \in G | o(a) > 3\}|}{6}.$$

Demonstração. (i) Qualquer $x \in G \setminus \{1\}$, induz um domínio elementar $\mathcal{T}(x,1) = \mathcal{T}(x^{-1},1)$, e a Proposição 3.2.11 garante que estes domínios são os únicos que são minimais. Por outro lado, pelo Lema 3.2.2 tem-se $\mathcal{T}(y,1) = \mathcal{T}(x,1)$ se, e somente se, $x = y$ ou $x = y^{-1}$. Consequentemente, o número de domínios elementares minimais $\mathcal{T}(x,1)$ para os quais $x \in o_2(G)$ é exatamente $|o_2(G)|$. Por outro lado, cada subconjunto $\{y, y^{-1}\}$ de $G \setminus (o_2(G) \cup \{1\})$ induz o domínio elementar minimal $\mathcal{T}(y,1)$, e a quantidade de tais subconjuntos é $\frac{|G|-(|o_2(G)|+1)}{2}$. Portanto:

$$\min(G) = |o_2(G)| + \frac{|G| - (|o_2(G)| + 1)}{2} = \frac{|G| + |o_2(G)| - 1}{2}.$$

(ii) Para todo $a \in G$ tal que $o(a) = 3$, obtém-se do Lema 3.2.2 e da Proposição 3.2.3 que $\mathcal{T}(a,a) = D_{\{1,a,a^2\}} = \mathcal{T}(1,a) \cup \mathcal{T}(1,a^2) \cup \mathcal{T}(1,a^{-2}a) \cup S_3(a^{-2},a) = \mathcal{T}(1,a) \cup S_3(a,a)$. Assim, para cada $H = \langle a \mid a^3 = 1\rangle \subseteq G$ tem-se um bloco $\mathcal{T}(a,a)$ que contém exatamente um domínio elementar minimal. Além disso, do fato de que $a \neq b \neq a^{-1}$ implica $\mathcal{T}(1,a) \neq \mathcal{T}(1,b)$, $a,b \in G$, segue que $\mathcal{T}(a,a) \neq \mathcal{T}(b,b)$ e essa correspondência é injetiva. Conclui-se então que $|\mathrm{Bl}_1(G)| \geq |\{H < G \mid H \simeq C_3\}|$.

Por outro lado, se $D_{\{1,a,b\}} = \mathcal{T}(1,a) \cup \mathcal{T}(1,b) \cup \mathcal{T}(1,b^{-1}a) \cup S_3(b^{-1},a)$ contém apenas um domínio elementar minimal, tem-se que $\mathcal{T}(1,a) = \mathcal{T}(1,b) = \mathcal{T}(1,b^{-1}a)$. Isso implica que $b = a^{-1} = b^{-1}a$, e disso conclui-se que $b = a^2$ e $a^3 = 1$. Portanto, $\{1,a,b\} = \{1,a,a^2\} \simeq C_3$ e conclui-se (ii).

(iii) Seja $\{1,a,b\}$ um conjunto de três elementos tais que

$$D_{\{1,a,b\}} = \mathcal{T}(1,a) \cup \mathcal{T}(1,b) \cup \mathcal{T}(1,b^{-1}a) \cup S_3(b^{-1},a)$$

é um bloco contendo exatamente dois domínios elementares minimais. A componente de $\Gamma(G)$ gerada pelo vértice $\{1,a,b\}$ tem três vértices ou apenas um vértice. No último caso, pela prova do item (ii), $\{1,a,b\}$ é um grupo de ordem 3 cujo bloco associado está em $\mathrm{Bl}_1(G)$. Consequentemente, este é novamente o primeiro caso e $D_{\{1,a,b\}} = D_{\{1,a^{-1},a^{-1}b\}} = D_{\{1,b^{-1},b^{-1}a\}}$. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que $\mathcal{T}(1,a) = \mathcal{T}(1,b) \neq \mathcal{T}(1,b^{-1}a)$. Isso implica que $b = a^{-1}$ e $b \neq b^{-1}a$. Então $a^{-1} = b \neq a^2$ e conclui-se que $o(a) \notin \{1,2,3\}$. Reciprocamente, é claro que todo bloco da forma $D_{\{1,a,a^{-1}\}}$, em que $a \in G$ é tal que $o(a) > 3$ contém exatamente dois domínios minimais. Conclui-se que $|\mathrm{Bl}_2(G)|$ é igual à quantidade de subconjuntos $\{a, a^{-1}\}$ de G para os quais $o(a) > 3$. Esta última é $|\{a \in G \mid o(a) > 3\}|/2$, provando então (iii).

(iv) Como pelo Lema 3.1.2 vértices pertencentes a uma mesma componente conexa do grupoide $\Gamma(G)$ dão origem ao mesmo domínio elementar, só é preciso contar o número de componentes que são definidas por vértices A de três elementos. Se um de tais vértices A não é um grupo, então $\mathrm{St}\, A = \{1\}$ e sua componente em $\Gamma(G)$ possui exatamente 3 vértices. Caso contrário, $A = \mathrm{St}\, A$ é um dos $|o_3(G)|/2$ subgrupos de G isomorfos a C_3. Assim, o número de blocos é

$$\frac{|o_3(G)|}{2} + \frac{\binom{|G|-1}{2} - |o_3(G)|/2}{3}$$

e resulta (iv).

(v) Pela Proposição 3.2.3, $|\mathrm{Bl}(G)| = |\mathrm{Bl}_1(G)| + |\mathrm{Bl}_2(G)| + |\mathrm{Bl}_3(G)|$, e assim (v) resulta de (ii), (iii) e (iv). □

Observação 3.4.3. Se G é um grupo finito então, lembrando que as órbitas com 2 ou 6 elementos são chamadas de efetivas:

- Segue da prova do item (ii) do Teorema 3.4.2 que os blocos de $\mathrm{Bl}_1(G)$ correspondem àquelas componentes conexas de $\Gamma(G)$ que possuem exatamente 1 vértice A tal que $|\mathrm{St}(A)| = 3$, e também estão em correspondência biunívoca com as S_3-órbitas que contêm exatamente 2 elementos.
- Segue da Proposição 3.2.11 que as S_3-órbitas contendo exatamente 3 elementos correspondem aos domínios minimais de G, e os blocos correspondem às órbitas efetivas.

Exemplo 3.4.4. Seja $C_n = \langle a \mid a^n = 1\rangle$ o grupo cíclico de ordem n. Se $3 \mid n$ então $a^{n/3}$ e $a^{2n/3}$ são os únicos elementos de C_n de ordem 3, caso contrário C_n não possui elementos de ordem 3. Portanto, pelo item (iv) do Teorema 3.4.2,

$$|\mathrm{Bl}(C_n)| = \frac{\binom{n-1}{2} + |o_3(G)|}{3} = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-2)}{6}, & \text{se } 3 \nmid n, \\ \frac{(n-1)(n-2)+4}{6}, & \text{se } 3 \mid n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Se $n \geq 4$ não é um múltiplo de 3, então $|\mathrm{Bl}(C_n)|$ é igual ao número

$$P_n = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \left(n - \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor - \frac{3}{2} \right)$$

obtido depois da prova de [21, Proposition 6.1]. De fato, é fácil verificar que $|\mathrm{Bl}(C_n)| = P_n$ se n é da forma $3k+1$ ou $3k+2$, com $k \in \mathbb{N}$. No entanto, para $n = 3k$ o número de S_3-órbitas efetivas, que é o mesmo que o número de blocos, é na verdade $|\mathrm{Bl}(C_n)| = P_n + 1$. Assim, [21, Proposition 6.1] deve ser reescrita da seguinte forma (que também leva em conta o caso $|\mathrm{Bl}(C_3)| = 1$):

Proposição 3.4.5. *Seja $n \geq 3$ e $\sigma \in pm'_{C_n \times C_n}(C_n)$. Então σ é determinado unicamente por seus valores $\sigma(i,j)$, em que $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$, $i \leq j \leq n-2i-1$, e $\sigma(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ se $3 \mid n$.*

Em vista do Exemplo 3.4.4, deve-se substituir P_n por $|\mathrm{Bl}(C_n)|$ em [21, Corollary 6.2, Corollary 6.4]. Consequentemente, continua em aberto o problema de saber se para algum grupo G existe alguma componente não total $pM_D(G)$ isomorfa à componente total $pM_{G\times G}(G)$.

Agora será considerada a questão de determinar o número de blocos $D_{\{1,x,y\}}$ diferentes que contém um certo domínio elementar minimal $\mathcal{T}(1,a)$. Um primeiro passo nesta direção foi mostrar no Lema 3.2.15 que os blocos do tipo $D_{\{1,a,z\}}$ esgotam a lista de blocos que contém a $\mathcal{T}$-órbita $\mathcal{T}(1,a)$. Ainda é preciso determinar se dois conjuntos distintos, por exemplo $\{1,a,y\}$ e $\{1,a,z\}$, podem dar origem ao mesmo bloco. O próximo resultado responde a este questionamento.

Lema 3.4.6. *Se $|\{1,a,y,z\}| = 4$ então $D_{\{1,a,y\}} = D_{\{1,a,z\}}$ se, e somente se, verifica-se uma das seguintes condições:*

- *$a^2 = 1$ e $z = ay$; ou*
- *$\{y,z\} = \{a^{-1}, a^2\}$.*

Demonstração. Conforme a Afirmação 3.3.4 tem-se a igualdade $D_{\{1,a,y\}} = D_{\{1,a,z\}}$ se, e somente se, $\{1,a,z\} = \{1,a^{-1},a^{-1}y\}$ ou $\{1,a,z\} = \{1,y^{-1},y^{-1}a\}$. Isso ocorre exatamente quando $\{a,z\} = \{a^{-1},a^{-1}y\}$ ou $\{a,z\} = \{y^{-1},y^{-1}a\}$, o que implica que $a^2 = 1$ e $z = ay$ ou $\{y,z\} = \{a^{-1},a^2\}$. □

Agora já é possível calcular o número de blocos nos quais está contido um certo domínio elementar minimal.

Proposição 3.4.7. *Seja $a \in G \setminus \{1\}$ e denote por $\mathrm{Bl}(1,a)$ o conjunto dos blocos que contêm o domínio elementar minimal $\mathcal{T}(1,a)$. Então*

$$|\mathrm{Bl}(1,a)| = \begin{cases} (|G|-2)/2, & \textit{se } a^2 = 1, \\ |G|-2, & \textit{se } a^3 = 1, \\ |G|-3, & \textit{se } a^2 \neq 1 \neq a^3. \end{cases}$$

Demonstração. Será utilizado o Lema 3.4.6 levando em conta três casos.

- Se $a^2 = 1$, então para cada $y \in G \setminus \{1, a\}$, tem-se dois blocos idênticos, $D_{\{1,a,y\}} = D_{\{1,a,ay\}}$. Consequentemente, $|\mathrm{Bl}(1, a)| = (|G| - 2)/2$.
- Se $a^3 = 1$, a condição $\{y, z\} = \{a^2, a^{-1}\}$ só ocorre para $y = z$. Então $|\mathrm{Bl}(1, a)| = |G| - 2$, neste caso.
- Se $a^2 \neq 1 \neq a^3$, então $D_{\{1,a,y\}} = D_{\{1,a,z\}}$ para $y, z \in G \setminus \{1, a\}$ apenas se $\{y, z\} = \{a^{-1}, a^2\}$. Assim, $|\mathrm{Bl}(1, a)| = |G| - 3$.

□

Exemplo 3.4.8. Considerando $G = C_6 = \langle a \rangle$, e observando o diagrama dos domínios elementares correspondente na Figura A.6 do Apêndice A, note que:

- $o(a^3) = 2$ e $\mathcal{T}(1, a^3)$ está contido em 2 blocos.
- $o(a^2) = 3$ e $\mathcal{T}(1, a^{-2}) = \mathcal{T}(1, a^2)$ está contido em 4 blocos.
- $o(a) = 6$ e $\mathcal{T}(1, a^{-1}) = \mathcal{T}(1, a)$ está contido em 3 blocos.

Tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.4.9. *Se $\mathcal{T}(G) \simeq \mathcal{T}(G')$ (como conjuntos parcialmente ordenados) então $|G| = |G'|$, $|o_2(G)| = |o_2(G')|$ e $|o_3(G)| = |o_3(G')|$.*

Demonstração. Para todo grupo G tem-se

$$G = \{1\} \cup o_2(G) \cup o_3(G) \cup \{a \in G \mid o(a) > 3\},$$

e, pelo Teorema 3.4.2 obtém-se

$$|G| = 1 + |o_2(G)| + 2|\mathrm{Bl}_1(G)| + 2|\mathrm{Bl}_2(G)|,$$

e as igualdades $|\mathrm{Bl}_1(G)| = |\mathrm{Bl}_1(G')|$ e $|\mathrm{Bl}_2(G)| = |\mathrm{Bl}_2(G')|$ implicam

$$|G| - |o_2(G)| = |G'| - |o_2(G')|. \tag{3.8}$$

Além disso, o isomorfismo $\mathcal{T}(G) \simeq \mathcal{T}(G')$ também tem como consequência que $\min(G) = \min(G')$, e a proposição resulta do Teorema 3.4.2 □

É natural considerar a seguinte questão: existem grupos não isomorfos G e H tais que $C(G) \simeq C(H)$? Foram verificados alguns grupos de ordem pequena e até agora não foram encontrados grupos não isomorfos G e H com $C(G) \simeq C(H)$. Mas fica evidente pela Proposição 3.4.9 que $C(C_n) \simeq C(C_m)$ implica $n = m$.

Capítulo 4

Multiplicador de Schur Parcial

Em [21, Corollary 6.4] foi determinada a estrutura da componente total $pM_{C_m \times C_m}(C_m)$ do multiplicador de Schur parcial $pM(C_m)$ sobre um corpo algebricamente fechado K, em que C_m é o grupo cíclico de ordem m. Neste capítulo serão apresentadas descrições análogas para algumas outras famílias de grupos G, como os grupos diedrais D_{2m} e os grupos dicíclicos Dic_m. O mesmo problema também será considerado para os produtos diretos de grupos cíclicos finitos $C_m \times C_n$ e para alguns grupos infinitos (o cíclico infinito $\mathbb{Z}$ e o diedral infinito D_∞).

De agora em diante será assumido que K é algebricamente fechado. Em particular, tem-se um isomorfismo de grupos

$$\frac{K^*}{\{1,-1\}} \simeq K^*. \tag{4.1}$$

Conforme foi lembrado na Observação 1.5.10, um conjunto fator parcial $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ fica completamente determinado pelos seus valores em um conjunto completo de representantes das S_3-órbitas efetivas de G (dadas pelas transformações (1.5)). Além disso, o número $s = s(G, G \times G)$ de S_3-órbitas efetivas de G é igual ao número de $\mathcal{T}$-órbitas da forma $\mathcal{T}(a, b)$, em que $1 \notin \{a, b, ab\}$. De acordo com o Teorema 3.4.2,

$$s(G, G \times G) = \frac{\binom{|G|-1}{2} + |o_3(G)|}{3}. \tag{4.2}$$

Em particular, se $G = D_{2m} = C_m \rtimes C_2 = \langle a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ ou $G = C_m \times C_2 = \langle a, b \mid a^m = b^2 = [a, b] = 1\rangle$, então $|o_3(G)| = 2$, se $3 \mid |G|$, e $|o_3(G)| = 0$ caso contrário. Consequentemente,

$$s(G, G \times G) = \begin{cases} \frac{(|G|-1)(|G|-2)+4}{6}, & \text{se } 3 \mid |G|, \\ \frac{(|G|-1)(|G|-2)}{6}, & \text{se } 3 \nmid |G|. \end{cases} \tag{4.3}$$

O Lema 4.0.11 fornecerá um conjunto completo de representantes das órbitas efetivas para esses grupos. Antes de prosseguir, observe que se $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$, a igualdade (1.9) implica

$$\sigma(a^i b, a^j) = \sigma(a^k b, a^i b) = \sigma(a^j, a^k b), \tag{4.4}$$

em que o expoente $k = i - j$ se $G = D_{2m}$ e $k = -i - j$ se $G = C_m \times C_2$.

Uma consequência imediata de (4.4) é que todo conjunto fator parcial $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ fica completamente determinado por seus valores naqueles pares cuja primeira coordenada é um elemento do subgrupo cíclico $C_m = \langle a\rangle$ de G. Assim, será conveniente adotar uma notação mais curta para esses valores, a saber

$$\sigma_{ij} = \sigma(a^i, a^j) \text{ e } \tau_{ij} = \sigma(a^i, a^j b). \tag{4.5}$$

Lema 4.0.10. *Se $\sigma \in pm'_{C_m\times C_m}(C_m)$ e $m \geq 3$ então σ fica completamente determinada por seus*

valores nos elementos de

$$S_{C_m} = \{(a^i, a^j) \mid 1 \leq i \leq \lfloor (m-1)/3 \rfloor \text{ e } i \leq j \leq m-2i-1\} \cup Z_{a,m}, \tag{4.6}$$

em que $Z_{a,m} = \{(a^{\frac{m}{3}}, a^{\frac{m}{3}})\}$ *se* $3 \mid m$ *e* $Z_{a,m} = \emptyset$ *caso contrário. Além disso, esses valores podem ser escolhidos arbitrariamente em* K^*.

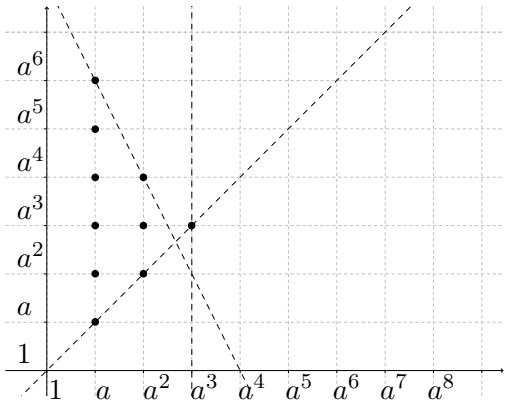
Demonstração. Resulta da demonstração de [21, Proposition 6.1] que, para todo $m \geq 3$, o conjunto

$$\left\{S_3(a^i, a^j) \;\middle|\; 1 \leq i \leq \lfloor m/3 \rfloor,\ i \leq j \leq m-2i\right\}$$

contém todas as S_3-órbitas efetivas de C_m. Além disso, segue de $S_3(a^i, a^i) = S_3(a^i, a^{m-2i})$ que para cada inteiro i satisfazendo $i < m-2i$, existem dois representantes para a mesma S_3-órbita no conjunto acima. Nestes casos, $i < \frac{m}{3}$ e é suficiente considerar aquelas $S_3(a^i, a^j)$ tais que $j \leq m-2i-1$ para obter um conjunto completo de representantes das S_3-órbitas efetivas. □

A Figura 4.1 ilustra essa escolha de representantes para as órbitas efetivas no caso de grupos cíclicos.

Figura 4.1: *Representantes das órbitas efetivas de* S_3 *em* $C_9 \times C_9$*, em que* $C_9 = \langle a \mid a^9 = 1\rangle$.



Lema 4.0.11. *Seja* $G = C_m \times C_2$ *ou* $G = D_{2m}$*, com* $m \geq 3$*, e* S_{C_m} *como no Lema 4.0.10. Então qualquer* $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ *fica completamente determinada por seus valores nos elementos de*

$$S_G \;\; = S_{C_m} \cup \{(a^k, a^l b) \mid 1 \leq k \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor \text{ e } 0 \leq l \leq m-1\} \cup Z_{a,b,m}, \tag{4.7}$$

em que $Z_{a,b,m} = \{(a^{m/2}, a^l b) \mid 0 \leq l \leq (m/2)-1\}$ *se* $2 \mid m$ *e* $Z_{a,b,m} = \emptyset$ *caso contrário. Além disso, esses valores podem ser escolhidos arbitrariamente em* K^*.

Demonstração. Já é conhecido pelo Lema 4.0.10 que a restrição de σ a $C_m \times C_m$ fica completamente determinada por seus valores σ_{ij}, em que $(a^i, a^j) \in S_{C_m}$ e S_{C_m} é dado por (4.6). Consequentemente, resta mostrar que cada um dos seus valores τ_{kl} é determinado por aqueles τ_{kl} cujos índices satisfazem as desigualdades em (4.7). Como $\sigma(1, a^j b) = 1$, para todo j, é suficiente considerar $1 \leq k \leq m-1$ e $0 \leq l \leq m-1$.

Resulta de (1.6) (por inspeção) que $(a^k, a^l b)$ e $(a^{m-k}, a^{k+l} b)$ são os únicos possíveis pares da órbita $S_3(a^k, a^l b)$ cuja primeira coordenada é uma potência de a. Então, pode-se assumir sem perda de generalidade que o representante $(a^k, a^l b)$ foi escolhido de tal modo que k é o menor expoente possível, em outras palavras, que $k \leq m-k$. Consequentemente, é suficiente considerar $1 \leq k \leq m/2$.

Se existem $(a^k, a^l b) \neq (a^{k'}, a^{l'} b)$ na mesma S_3-órbita, com $1 \leq k \leq k' \leq m/2$ e $0 \leq l, l' \leq m-1$ então, como foi visto acima, $(a^{k'}, a^{l'} b) = (a^{m-k}, a^{k+l} b)$. Portanto $a^{k'} = a^{m-k}$ implica $k' = k = m/2$ (em particular, isso só ocorre se m for par) e $a^{l'} b = a^{m/2+l} b$ implica $l' \equiv m/2 + l \pmod{m}$. Neste caso, se $l \geq m/2$ então $l' = l - m/2 \leq m/2 - 1$. Portanto, quando $k = m/2$ é inteiro é sempre possível escolher $0 \leq l \leq m/2 - 1$. □

Nos próximos resultados, dado $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$, será utilizada a seguinte notação.

- Fixado um elemento $x \in G$ defina

$$\pi_j = \pi_j(x) = \sigma(x,x)\sigma(x,x^2)\dots\sigma(x,x^{j-1}), \tag{4.8}$$

para cada inteiro $j \geq 2$.

- De forma mais geral, dados elementos arbitrários $x, y \in G$ e um inteiro $j \geq 1$, seja

$$\sigma_j(x,y) = \sigma(x,y)\sigma(x,xy)\sigma(x,x^2y)\dots\sigma(x,x^{j-1}y). \tag{4.9}$$

Convencione também que $\sigma_0(x,y) = 1$ e note que $\sigma_{j-1}(x,x) = \pi_j(x)$.

Lema 4.0.12. *Seja $C_m = \langle a \mid a^m = 1\rangle$. Se $\sigma \in pm'_{C_m\times C_m}(C_m)$ e $\sigma \sim 1$, isto é, se existe $\rho\colon G \to K^*$ tal que $\sigma(x,y) = \rho(x)\rho(y)/\rho(xy)$, para quaisquer $x, y \in G$, então $\pi_j(a) = \rho^j(a)/\rho(a^j)$ e*

$$\sigma(a^i,a^j) = \frac{\pi_{i+j}}{\pi_i\pi_j} = \frac{\sigma(a,a^i)\dots\sigma(a,a^{i+j-1})}{\sigma(a,a)\dots\sigma(a,a^{j-1})}, \tag{4.10}$$

para todo $(a^i,a^j) \in S_{C_m}$ tal que $i,j \geq 2$. Além disso,

$$\sigma(a,a^j) = \sigma(a,a^{m-j-1}), \tag{4.11}$$

para qualquer $(a,a^j) \in S_{C_m}$ que satisfaça $\lfloor (m+1)/2\rfloor \leq j \leq m-3$.

Demonstração. A justificativa é bastante simples e aparece na prova de [21, Proposition 6.3]. □

A igualdade (4.13) do lema a seguir é uma versão um pouco mais geral de (4.10).

Lema 4.0.13. *Dado $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$, se existe $\rho\colon G \to K^*$ tal que $\sigma(x,y) = \rho(x)\rho(y)/\rho(xy)$, para quaisquer $x, y \in G$, então*

$$\sigma_j(x,y) = \frac{\rho^j(x)\rho(y)}{\rho(x^jy)}, \tag{4.12}$$

$$\sigma(x^i,x^ky) = \frac{\sigma_{i+k}(x,y)\sigma(x^i,y)}{\sigma_i(x,y)\sigma_k(x,y)}, \tag{4.13}$$

para quaisquer $i,j,k \geq 1$ e $x,y \in G$. Além disso, para quaisquer $x,y \in G$ e $i,k \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma(x^i,x^k) = \frac{\sigma(x^i,y)\sigma(x^k,x^iy)}{\sigma(x^{i+k},y)}. \tag{4.14}$$

Demonstração. As igualdades anteriores seguem diretamente das definições (como na prova de [21, Proposition 6.3]). Dados i,j,k,x e y como acima,

$$\sigma_j(x,y) = \frac{\rho(x)\rho(y)}{\rho(xy)}\frac{\rho(x)\rho(xy)}{\rho(x^2y)}\frac{\rho(x)\rho(x^2y)}{\rho(x^3y)}\dots\frac{\rho(x)\rho(x^{j-1}y)}{\rho(x^jy)} = \frac{\rho^j(x)\rho(y)}{\rho(x^jy)}.$$

Consequentemente,

$$\sigma(x^i,x^ky) = \frac{\rho(x^i)\rho(x^ky)}{\rho(x^{i+k}y)} = \frac{\rho^{i+k}(x)\rho(y)}{\rho(x^{i+k}y)}\frac{\rho(x^i)\rho(y)}{\rho(x^iy)}\frac{\rho(x^iy)}{\rho^i(x)\rho(y)}\frac{\rho(x^ky)}{\rho^k(x)\rho(y)} = \frac{\sigma_{i+k}(x,y)\sigma(x^i,y)}{\sigma_i(x,y)\sigma_k(x,y)}.$$

Além disso,

$$\sigma(x^i,x^k) = \frac{\rho(x^i)\rho(x^k)}{\rho(x^{i+k})} = \frac{\rho(x^i)\rho(y)}{\rho(x^iy)}\frac{\rho(x^k)\rho(x^iy)}{\rho(x^{i+k}y)}\frac{\rho(x^{i+k}y)}{\rho(x^{i+k})\rho(y)} = \frac{\sigma(x^i,y)\sigma(x^k,x^iy)}{\sigma(x^{i+k},y)}.$$

□

4.1 Grupos Diedrais

Nesta seção será determinada a componente total $pM_{G\times G}(G)$ do multiplicador de Schur parcial $pM(G)$ sobre um corpo algebricamente fechado K, para qualquer grupo diedral finito $G = D_{2m} = \langle a, b \mid a^m = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$. Em particular, o Teorema 4.1.1 generalizará [38, Lemma 3.10], em que foi considerado o caso $m = 3$.

Por simplicidade, seja $d_m = s(D_{2m}, D_{2m} \times D_{2m})$ o número de órbitas efetivas do grupo diedral D_{2m}, que é dado pela fórmula (4.3).

Teorema 4.1.1. $pM_{D_{2m}\times D_{2m}}(D_{2m}) \simeq (K^*)^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}$.

Demonstração. Sejam $\psi\colon (K^*)^{d_m} \to pM_{D_{2m}\times D_{2m}}(D_{2m})$ o epimorfismo de grupos dado por (1.16) e $x \in \ker(\psi) = L_{D_{2m}\times D_{2m}}$. Então $\sigma = \sigma_x \in N_{D_{2m}\times D_{2m}}$. Isso significa que existe uma aplicação $\rho\colon D_{2m} \to K^*$ tal que

$$\sigma(a^i, a^j) = \frac{\rho(a^i)\rho(a^j)}{\rho(a^{i+j})} \text{ e } \sigma(a^k, a^l b) = \frac{\rho(a^k)\rho(a^l b)}{\rho(a^{k+l} b)}, \tag{4.15}$$

para quaisquer i, j, k, l, e ρ também satisfaz

$$\rho(1) = \rho(a^i)\rho(a^{-i}) = \rho(a^i b)^2 = 1, \tag{4.16}$$

para todo i.

É fácil verificar que $\sigma^2(a^k, a^l b) = \rho^2(a^k)$ para quaisquer k e l. Em particular, se m é par então $\sigma^2(a^{\frac{m}{2}}, a^l b) = 1$, para todo l. Resulta de (4.14) que, para qualquer $j = 1, \ldots, \lfloor (m-1)/2 \rfloor$,

$$\sigma(a, a^j) = \frac{\sigma(a, b)\sigma(a^j, ab)}{\sigma(a^{j+1}, b)}.$$

Portanto, usando os lemas 4.0.11 e 4.0.12, e indexando as coordenadas dos elementos de $(K^*)^{d_m}$ pelos representantes das órbitas efetivas correpondentes aos valores σ_{ij} e τ_{kl} (definidos em (4.5)), fica claro que

$$\begin{aligned}\ker(\psi) \subseteq R = \Bigg\{ (\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in (K^*)^{d_m} \;\Bigg|\; & \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{1i}\ldots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\ldots\sigma_{1,j-1}}, \text{ para } (i,j) \in J_1; \\ & \sigma_{1j} = \sigma_{1,m-j-1}, \text{ para } j \in J_2;\ \sigma_{1j} = \frac{\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{1+j,0}}, \text{ para } j \in J_3; \\ & \tau_{kl}^2 = \tau_{k0}^2, \text{ para } (k,l) \in J_4;\ \tau_{\frac{m}{2},l}^2 = 1, \text{ para } l \in J_5 \Bigg\},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\{ (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; i,j \geq 2 \text{ e } (a^i, a^j) \in S_{C_m} \right\}, \\
J_2 &= \{ j \in \mathbb{N} \mid \lfloor (m+1)/2 \rfloor \leq j \leq m-3 \}, \\
J_3 &= \{ j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor \}, \\
J_4 &= \{ (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor;\ 0 \leq j \leq m-1 \}, \\
J_5 &= \begin{cases} \{ l \in \mathbb{N} \mid 0 \leq l \leq (m/2) - 1 \}, & \text{se } 2 \mid m, \\ \emptyset, & \text{se } 2 \nmid m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{i=1}^{5} |J_i| = d_m$. Agora, considere o grupo

$$\begin{aligned} W = \{(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in R \mid \tau_{kl} = \mu_k, \text{ para } (k,l) \in J_4, \\ \tau_{m/2,l} = \mu_{m/2}, \text{ para } l \in J_5, \\ \text{e algum } \mu_k \in K^*, \\ \text{em que } \mu_{\frac{m}{2}} = 1 \text{ se } 2 \mid m \Big\}, \end{aligned}$$

que é obtido a partir de R removendo os quadrados nas relações que correspondem a J_4 e J_5.

Será verificado que $W \leq \ker(\psi)$. De fato, dado $(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in W$, seja $\lambda\colon D_{2m} \to K^*$ a aplicação definida por

$$\lambda(a^i b) = \lambda(1) = 1, \text{ para } 0 \leq i \leq m-1,$$

$$\lambda(a^i) = \frac{1}{\lambda(a^{m-i})} = \mu_i, \text{ para } 1 \leq i \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor$$

e $\lambda(a^{\frac{m}{2}}) = 1$ se $2 \mid m$. Então, resulta das definições de R e W que

$$\sigma_{1j} = \frac{\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{1+j,0}} = \frac{\mu_1\mu_j}{\mu_{1+j}} = \lambda(a)\lambda(a^j)/\lambda(a^{1+j}), \text{ para } j \in J_3,$$

$$\sigma_{1j} = \sigma_{1,m-j-1} = \lambda(a)\lambda(a^{m-j-1})/\lambda(a^{m-j}) = \lambda(a)\lambda(a^j)/\lambda(a^{j+1}), \text{ para } j \in J_2,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}} \\ &= \left(\frac{\lambda(a)\lambda(a^i)}{\lambda(a^{i+1})}\frac{\lambda(a)\lambda(a^{i+1})}{\lambda(a^{i+2})}\cdots\frac{\lambda(a)\lambda(a^{i+j-1})}{\lambda(a^{i+j})}\right)\left(\frac{\lambda(a^2)}{\lambda(a)\lambda(a)}\frac{\lambda(a^3)}{\lambda(a)\lambda(a^2)}\cdots\frac{\lambda(a^j)}{\lambda(a)\lambda(a^{j-1})}\right) \\ &= \frac{\lambda^j(a)\lambda(a^i)}{\lambda(a^{i+j})}\frac{\lambda(a^j)}{\lambda^j(a)} \\ &= \frac{\lambda(a^i)\lambda(a^j)}{\lambda(a^{i+j})}, \text{ para } (i,j) \in J_1, \end{aligned}$$

e

$$\tau_{kl} = \mu_k = \lambda(a^k)\lambda(a^l b)/\lambda(a^{k+l}b), \text{ para } (k,l) \in J_4 \cup (\{m/2\} \times J_5).$$

Consequentemente, $W \lhd \ker(\psi)$.

Será construído um epimorfismo cujo núcleo é W. Como $\sum_{i=1}^{5} |J_i| = d_m$, e $|(k,l) \in J_4, l \neq 0| = |J_4| - \lfloor (m-1)/2 \rfloor$, pode-se definir um homomorfismo $\Lambda\colon (K^*)^{d_m} \to (K^*)^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}$ levando (σ_{ij}, τ_{kl}) em

$$\left(\left(\frac{\sigma_{1j}\tau_{j+1,0}}{\tau_{10}\tau_{j1}}\right)_{j\in J_3}, \left(\frac{\sigma_{1j}}{\sigma_{1,m-j-1}}\right)_{j\in J_2}, \left(\frac{\sigma_{ij}\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}}{\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}\right)_{(i,j)\in J_1}, \left(\frac{\tau_{kl}}{\tau_{k0}}\right)_{(k,l)\in J_4, l\neq 0}, \left(\tau_{\frac{m}{2},l}\right)_{l\in J_5}\right).$$

Então por construção $W = \ker(\Lambda)$, e Λ é um epimorfismo, pois para todo

$$z = \big((u_i)_{i\in J_3}, (v_i)_{i\in J_2}, (w_{i,j})_{(i,j)\in J_1}, (x_{i,j})_{(i,j)\in J_4, j\neq 0}, (y_i)_{i\in J_5}\big) \in (K^*)^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor},$$

tem-se $\Lambda(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) = z$, em que

$$\tau_{k0} = 1 \text{ para } (k,0) \in J_4,$$

$$\tau_{kl} = x_{kl} \text{ para } (k,l) \in J_4, l \neq 0,$$

$$\tau_{\frac{m}{2}l} = y_l, \quad \text{para } l \in J_5,$$

$$\sigma_{1j} = \frac{u_j\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{j+1,0}}, \quad \text{para } j \in J_3,$$

$$\sigma_{1j} = v_j \sigma_{1,m-j-1}, \quad \text{para } j \in J_2$$

e

$$\sigma_{ij} = \frac{w_{ij}\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}}, \quad \text{para } (i,j) \in J_1.$$

Dado $x \in \ker(\psi) \subseteq R$, tem-se $\Lambda(x) = (1,\dots,1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_t)$, em que a quantidade de elementos 1 é dada por $|J_3| + |J_2| + |J_1|$ e $\varepsilon_i^2 = 1$, para $1 \le i \le t = |J_4| - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + |J_5|$. Em outras palavras, $\Lambda(\ker(\psi)) \triangleleft C_2^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}$, em que $C_2 = \{1,-1\}$.

Portanto, pelo Teorema 1.5.12,

$$pM_{D_{2m}\times D_{2m}}(D_{2m}) \simeq \frac{(K^*)^{d_m}}{\ker(\psi)} \simeq \frac{\frac{(K^*)^{d_m}}{\ker(\Lambda)}}{\frac{\ker(\psi)}{\ker(\Lambda)}} \simeq \frac{(K^*)^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}}{\Lambda(\ker(\psi))} \simeq (K^*)^{d_m - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor},$$

em que o último isomorfismo resulta de (4.1). □

4.2 Produto Direto de Grupos Cíclicos

Recorde-se que, dado um grupo G, foi definida uma ação do semigrupo $\mathcal{T}$ em $G \times G$ por meio das transformações indicadas em (1.5) e que $S_3 \simeq \langle u, v \rangle$.

Denote por GH o produto direto dos grupos G e H, e por (g_1h_1, g_2h_2) um elemento arbitrário do produto cartesiano $GH \times GH$, em que $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$.

Lema 4.2.1. *Para quaisquer grupos G e H, qualquer $x \in S_3$, e elementos arbitrários $g_i, g_i' \in G, h_i, h_i' \in H$,*

$$(g_1'h_1', g_2'h_2') = x(g_1h_1, g_2h_2) \Leftrightarrow (g_1', g_2') = x(g_1, g_2) \text{ e } (h_1', h_2') = x(h_1, h_2). \tag{4.17}$$

Demonstração. É suficiente mostrar (4.17) para os geradores u e v de S_3. Como no produto direto GH os elementos de G comutam com os de H, resulta que

$$u(g_1h_1, g_2h_2) = ((g_1h_1)(g_2h_2), (g_2h_2)^{-1}) = ((g_1g_2)(h_1h_2), g_2^{-1}h_2^{-1})$$

e consequentemente

$$(g_1'h_1', g_2'h_2') = u(g_1h_1, g_2h_2) \Leftrightarrow g_1' = g_1g_2 \text{ e } g_2' = g_2^{-1} \text{ e } h_1' = h_1h_2 \text{ e } h_2' = h_2^{-1}.$$

Analogamente, como

$$v(g_1h_1, g_2h_2) = ((g_2h_2)^{-1}, (g_1h_1)^{-1}) = (g_2^{-1}h_2^{-1}, g_1^{-1}h_1^{-1}),$$

resulta que

$$(g_1'h_1', g_2'h_2') = v(g_1h_1, g_2h_2) \Leftrightarrow g_1' = g_2^{-1} \text{ e } g_2' = h_2^{-1} \text{ e } h_1' = g_1^{-1} \text{ e } h_2' = h_1^{-1}.$$

Agora o resultado é imediato. □

Dado um grupo G, seja T_G um conjunto contendo exatamente um representante de cada órbita da ação de S_3 em $G \times G$, e S_G o subconjunto de T_G formado pelos elementos que correspondem às órbitas efetivas. Nesse texto, T_G sempre será escolhido de modo que $T_G \setminus S_G = \{1\} \times G$. Isso é possível porque por (1.6) as órbitas não efetivas são da forma $\{(1,x),(x,x^{-1}),(x^{-1},1)\}$, com $x \in G$. No caso particular em que $G = C_m$, será conveniente aplicar o Lema 4.0.10 e escolher

$$\begin{aligned} S_{C_m} = &\{(a^i, a^j) \mid 1 \le i < m/3 \text{ e } i \le j \le m-2i-1\} \\ &\cup \{(a^i, a^j) \mid i = j = m/3 \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

se $m \geq 3$, e $S_{C_m} = \emptyset$, se $m \in \{1, 2\}$.

Denote $o_k(G) = \{g \in G \mid \operatorname{ord}(g) = k\}$ e $G^* = G \setminus \{1\}$. Se G tem elementos de ordem maior do que 2, escolha $X(G) \subseteq G$ tal que $G \setminus o_1(G) \cup o_2(G) = X(G) \cup X(G)^{-1}$ e $X(G) \cap X(G)^{-1} = \emptyset$. Caso contrário, defina $X(G) = \emptyset$.

Se $|G|$ é par, considere para cada $e \in o_2(G)$ um conjunto $Y(e) \subsetneq G$ tal que $G = Y(e) \cup eY(e)$ e $Y(e) \cap eY(e) = \emptyset$.

Exemplo 4.2.2. Se $G = C_m = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$ e $m \geq 3$, escolha

$$X(C_m) = \{a, a^2, \ldots, a^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}\}. \tag{4.19}$$

Agora, se m é par, o único elemento de ordem 2 é $e = a^{\frac{m}{2}}$, e uma escolha natural é

$$Y(a^{\frac{m}{2}}) = \{1, a, \ldots, a^{\frac{m}{2}-1}\}. \tag{4.20}$$

Para $G = \mathbb{Z} = \langle a \rangle$, escolha $X(\mathbb{Z}) = \mathbb{N} = \{a^i \mid i > 0\}$.

O próximo lema fornecerá uma lista de representantes das órbitas efetivas de um produto direto de grupos. O caso particular do produto de grupos cíclicos finitos é especificado no Exemplo 4.2.4, que na verdade foi o que serviu de inspiração para a versão mais geral desse resultado.

Lema 4.2.3. *Dados grupos G e H arbitrários, fixe $S_G, S_H, T_G, X(G)$ e $Y(e)$ (se $e \in G_{(2)}$) como acima. Então o conjunto*

$$\begin{aligned}
&S_G \cup (X(G) \times GH^*) \\
&\quad \cup \bigcup_{e \in o_2(G)} \{e\} \times Y(e)H^* \\
&\quad \cup \{(g_1h_1, g_2h_2) \mid g_1, g_2 \in G \text{ e } (h_1, h_2) \in S_H, \text{ em que } (h_1, h_2) \notin H_{(3)} \times H_{(3)} \text{ ou } h_1 \neq h_2\} \\
&\quad \cup \{(g_1h, g_2h) \mid (g_1, g_2) \in T_G \cup v(S_G), (h, h) \in S_H \cap (H_{(3)} \times H_{(3)})\}
\end{aligned}$$

contém exatamente um representante de cada órbita efetiva de S_3 em $GH \times GH$.

Demonstração. Considere a seguinte decomposição:

$$GH \times GH = (G \times G) \cup (GH^* \times G) \cup (G \times GH^*) \cup (GH^* \times GH^*).$$

Por (1.6), a órbita de qualquer $(g_1h_1, g_2h_2) \in GH \times GH$ é da forma

$$\begin{aligned}
S_3(g_1h_1, g_2h_2) = \big\{&(g_1h_1, g_2h_2), (g_2^{-1}g_1^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}, g_1h_1), (g_2h_2, g_2^{-1}g_1^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}), \\
&(g_2^{-1}h_2^{-1}, g_1^{-1}h_1^{-1}), (g_1^{-1}h_1^{-1}, g_1g_2h_1h_2), (g_1g_2h_1h_2, g_2^{-1}h_2^{-1})\big\}.
\end{aligned}$$

Em particular, se $h_1 = h_2 = 1$ então $S_3(g_1, g_2) \subseteq G \times G$. Consequentemente S_G contém exatamente um representante de cada uma dessas órbitas efetivas da ação de S_3 em $GH \times GH$. Agora, considere uma das S_3-órbitas restantes, isto é, a órbita de um par de $(GH \times GH) \setminus (G \times G)$.

- Se a órbita contém algum par $(g_1h_1, g_2) \in GH^* \times G$, ela também tem um representante $(g_2^{-1}, g_1^{-1}h_1^{-1}) \in G \times GH^*$. Portanto, pode-se escolher pares de $G \times GH^*$ em vez de pares de $GH^* \times G$.

- Se a órbita é efetiva e contém um representante $(g_1, g_2h_2) \in G \times GH^*$, então $(g_1^{-1}, g_1g_2h_2)$ também está em $S_3(g_1, g_2h_2)$. Se $\operatorname{ord}(g_1) \neq 1, 2$, então $g_1 \neq g_1^{-1}$ e é suficiente escolher um destes pares distintos. Seja (g_1, g_2h_2) aquele tal que $g_1 \in X$. Por outro lado, se $\operatorname{ord}(g_1) = 2$, então $g_1^{-1} = g_1 \neq 1$ e $(g_1, g_1g_2h_2) \neq (g_1, g_2h_2)$. Neste caso, para evitar que haja dois representantes para a mesma S_3-órbita, suponha que g_2 pertence a $Y(g_1)$.

- Finalmente, suponha que a órbita é efetiva e contém algum $(g_1h_1, g_2h_2) \in GH^* \times GH^*$. Se ela intersecta $G \times GH^*$, escolha um representante como no caso anterior. Do contrário, $h_1h_2 \neq 1$

e $S_3(h_1, h_2)$ é uma órbita efetiva (veja (1.7)). Consequentemente, $(h_1, h_2) = x(h_1', h_2')$ para algum $x \in S_3$ e algum $(h_1', h_2') \in S_H$. Pelo Lema 4.2.1, se $(g_1', g_2') = x^{-1}(g_1, g_2)$, então $(g_1h_1, g_2h_2) = x(g_1'h_1', g_2'h_2')$. Portanto, é suficiente considerar representantes no conjunto

$$(G \times G)S_H = \{(g_1h_1, g_2h_2) \mid (g_1, g_2) \in G \times G, (h_1, h_2) \in S_H\}.$$

Observe que, pelo Lema 4.2.1, dois pares $(g_1'h_1', g_2'h_2')$ e $(g_1''h_1'', g_2''h_2'')$ deste conjunto estão na mesma órbita se, e somente se, existe $y \in S_3$ tal que $(g_1', g_2') = y(g_1'', g_2'')$ e $(h_1', h_2') = y(h_1'', h_2'')$. Nesse caso, como S_H contém apenas um par de cada órbita efetiva, resulta que $(h_1', h_2') = (h_1'', h_2'')$. Uma inspeção dos elementos da órbita efetiva $S_3(h_1'', h_2'')$, dados por (1.6), deixa claro que

$$(h_1'', h_2'') = y(h_1'', h_2'') \Leftrightarrow y \in \{1, uv, (uv)^2\}, h_1'' = h_2'' \text{ e } \operatorname{ord}(h_1'') = 3. \tag{4.21}$$

Suponha que $(h, h) \in S_H \cap (H_{(3)} \times H_{(3)})$.

Se $S_3(g_1, g_2)$ é efetiva então $(g_1, g_2) = z(g_1', g_2')$, para algum $(g_1', g_2') \in S_G$ e algum $z \in S_3$. Se $z \in \{1, uv, (uv)^2\}$ então, por (4.21), $(h, h) = z(h, h)$ e consequentemente $(g_1h, g_2h) = z(g_1'h, g_2'h)$ pelo Lema 4.2.1. Caso contrário, $z = vw$, com $w \in \{1, uv, (uv)^2\}$ e

$$(g_1, g_2) = vw(g_1', g_2') = w^{-1}v(g_1', g_2') = w^{-1}(g_2^{-1}, g_1^{-1}).$$

Por (4.21) e pelo Lema 4.2.1, resulta que $(g_1h, g_2h) = w^{-1}(g_2^{-1}h, g_1^{-1}h)$, em que $(g_2^{-1}, g_1^{-1}) = v(g_1', g_2') \in v(S_G)$. Assim, para qualquer órbita $S_3(g_1h, g_2h)$, tal que (g_1, g_2) é efetiva e $(h, h) \in S_H \cap (H_{(3)} \times H_{(3)})$, pode ser assumido que $(g_1, g_2) \in S_G \cup v(S_G)$.

Por outro lado, se $S_3(g_1, g_2)$ não é efetiva então $(g_1, g_2) = z(g_1', g_2')$, para algum $(g_1', g_2') \in T_G \setminus S_G$ e algum $z \in S_3$. Considerando que $v(S_3(g_1, g_2)) = S_3(g_1, g_2)$, é possível escolher $z \in \{1, uv, (uv)^2\}$ e obter $(g_1h, g_2h) = z(g_1'h, g_2'h)$ por (4.21), para qualquer $(h, h) \in S_H \cap (H_{(3)} \times H_{(3)})$.

□

Como consequência do lema anterior, pode-se obter uma lista de representantes para as órbitas efetivas dos produtos de grupos cíclicos finitos. O Apêndice B mostra como são as órbitas efetivas em dois exemplos concretos, e pode ser consultado para auxiliar na visualização do resultado.

Exemplo 4.2.4. Seja $G = C_m \times C_n = \langle a, b \mid a^m = b^n = a^{-1}b^{-1}ab = 1\rangle$, para alguns inteiros m e n. Utilizando as notações estabelecidas em (4.18), (4.19) e (4.20), defina

$$\begin{aligned} S_{C_m \times C_n} = S_{C_m} & \\ & \cup X(C_m) \times C_m C_n^* \\ & \cup \{a^{m/2}\} \times Y(C_m) C_n^* \\ & \cup (C_m \times C_m) \left(S_{C_n} \setminus \{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\}\right) \\ & \cup ((\{1\} \times C_m) \cup S_{C_m} \cup v(S_{C_m}))\, \{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\}. \end{aligned}$$

em que $Y(C_m) = Y(a^{\frac{m}{2}})$ se $2 \mid m$, $Y(C_m) = \emptyset$ se $2 \nmid m$ e $\{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\} = \emptyset$ se $3 \nmid n$.

Nessas circunstâncias, $S_{C_m \times C_n}$ contém precisamente um representante de cada S_3-órbita efetiva. Em particular, qualquer $\sigma \in pm'_{G \times G}(G)$ fica completamente determinado por seus valores nos elementos de $S_{C_m \times C_n}$, e estes valores podem ser escolhidos arbitrariamente em K^*.

Proposição 4.2.5. *Seja $G = C_m \times C_n$. Se $\sigma \in pm'_{G \times G}(G)$ e $\sigma \sim 1$ então σ é unicamente deter-*

minado por seus valores nos pares

$$(a, a^k b^l),\ \textit{em que}\ 0 \le k \le m-1,\ 1 \le l \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor, \tag{4.22}$$

$$(a, a^k b^{n/2}),\ \textit{em que}\ 0 \le k \le \lfloor (m-1)/2 \rfloor\ \textit{(somente se } n \textit{ é par)}, \tag{4.23}$$

$$(a^i, b),\ \textit{em que}\ 2 \le i \le \lfloor m/2 \rfloor, \tag{4.24}$$

$$(b, b^l),\ \textit{em que}\ 1 \le l \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor\ \textit{(somente se } n \ge 3\textit{)}, \tag{4.25}$$

e esses valores podem ser escolhidos arbitrariamente em K^*.

Demonstração. Assuma que $G = C_m \times C_n$ é gerado por a e b como no Exemplo 4.2.4. Como $\sigma \sim 1$, existe uma aplicação $\rho\colon G \to K^*$ satisfazendo (1.11) e (1.12) tal que $\sigma(x,y) = \rho(x)\rho(y)/\rho(xy)$, para quaisquer $x, y \in G$. Observe que, por (4.14) e pelo Exemplo 4.2.4, o valor de σ em qualquer $(a^i, a^k) \in S_{C_m}$ é determinado por seus valores em alguns elementos de

$$\begin{aligned} B_1 &= (X(C_m) \times C_m C_n^*) \cup (\{a^{m/2}\} \times Y(C_m) C_n^*) \\ &= \{(a^i, a^k b^l) \mid 1 \le i \le \lfloor (m-1)/2 \rfloor,\ 0 \le k \le m-1 \text{ e } 1 \le l \le n-1\} \\ &\quad \cup \{(a^{m/2}, a^k b^l) \mid 0 \le k \le m/2 - 1 \text{ e } 1 \le l \le n-1\}. \end{aligned}$$

Por (4.13), se $i, k \ge 1$ então

$$\sigma(a^i, a^k b^l) = \frac{\sigma_{i+k}(a, b^l)\sigma(a^i, b^l)}{\sigma_i(a, b^l)\sigma_k(a, b^l)} = \frac{\sigma(a, a^i b^l) \dots \sigma(a, a^{i+k-1} b^l)\sigma(a^i, b^l)}{\sigma(a, b^l) \dots \sigma(a, a^{k-1} b^l)}. \tag{4.26}$$

Assim, para $i \ge 2$, o valor de $\sigma(a^i, a^k b^l)$ é determinado pelos valores $\sigma(a, a^{k'} b^{l'})$ e $\sigma(a^{i'}, b^{l'})$ em que $1 \le k' \le m-1$, $1 \le l' \le n-1$ e $1 \le i' \le \lfloor m/2 \rfloor$.

Agora serão considerados os valores $\sigma(a, a^k b^l)$ e $\sigma(a^i, b^l)$. No primeiro caso,

$$\sigma(a^i, a^k b^l) = \frac{\rho(a^i)\rho(a^k b^l)}{\rho(a^{i+k} b^l)} = \frac{\rho(a^i)\rho(a^{m-i-k} b^{n-l})}{\rho(a^{m-k} b^{n-l})} = \sigma(a^i, a^{m-i-k} b^{n-l}), \tag{4.27}$$

então, em particular, para $i = 1$ tem-se $\sigma(a, a^k b^l) = \sigma(a, a^{m-1-k} b^{n-l})$. Assumindo que $l \le n - l$, tem-se $1 \le l \le n/2$. Se, além disso, n é par e $l = n/2$ então $\sigma(a, a^k b^{n/2}) = \sigma(a, a^{m-1-k} b^{n/2})$, e pode-se assumir que $k \le m - 1 - k$, isto é, $k \le \lfloor (m-1)/2 \rfloor$.

Com relação aos valores $\sigma(a^i, b^l)$, tem-se

$$\frac{\sigma(a^i, b^l)}{\sigma_i(a, b^l)} = \frac{\rho(a^i)\rho(b^l)}{\rho(a^i b^l)} \frac{\rho(a^i b^l)}{\rho^i(a)\rho(b^l)} = \frac{\rho(a^i)}{\rho^i(a)},$$

para todo l e $i \ge 1$, resulta que se $i, l \ge 2$ então

$$\sigma(a^i, b^l) = \sigma(a^i, b) \frac{\sigma_i(a, b^l)}{\sigma_i(a, b)}. \tag{4.28}$$

Consequentemente, os valores de σ nos elementos de B_1 são determinados por

$$\sigma(a, a^k b), \sigma(a, a^k b^2), \dots, \sigma(a, a^k b^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}),\ \text{em que}\ 0 \le k \le m-1, \tag{4.29}$$

$$\sigma(a^i, b),\ \text{em que}\ 2 \le i \le \lfloor m/2 \rfloor, \tag{4.30}$$

e (se n é par)

$$\sigma(a, a^k b^{n/2}),\ \text{em que}\ 0 \le k \le \lfloor (m-1)/2 \rfloor. \tag{4.31}$$

Aplicando-se o Lema 4.0.10 a $C_n = \langle b \rangle$, resulta que o conjunto

$$B_2 = (C_m \times C_m) \left(S_{C_n} \setminus \{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\} \right) \cup ((\{1\} \times C_m) \cup S_{C_m} \cup v(S_{C_m}))\, \{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\} \tag{4.32}$$

do Exemplo 4.2.4 não é vazio se $n \geq 3$, em que $\{(b^{\frac{n}{3}}, b^{\frac{n}{3}})\} = \emptyset$ se $3 \nmid n$. Além disso, para $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sigma(a^ib^j, a^kb^l) &= \frac{\rho(a^ib^j)\rho(a^kb^l)}{\rho(a^{i+k}b^{j+l})} \\ &= \frac{\rho(a^i)\rho(b^j)\rho(a^kb^l)}{\sigma(a^i, b^j)\rho(a^{i+k}b^{j+l})} \\ &= \frac{\sigma(a^i, a^kb^l)\rho(a^{i+k}b^l)\rho(b^j)}{\sigma(a^i, b^j)\rho(a^{i+k}b^{j+l})} \\ &= \frac{\sigma(a^i, a^kb^l)\rho(a^{i+k})\rho(b^l)\rho(b^j)}{\sigma(a^i, b^j)\sigma(a^{i+k}, b^l)\rho(a^{i+k}b^{j+l})} \\ &= \sigma(b^j, b^l)\frac{\sigma(a^i, a^kb^l)\sigma(a^{i+k}, b^{j+l})}{\sigma(a^i, b^j)\sigma(a^{i+k}, b^l)}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Portanto, os valores do conjunto fator parcial σ em qualquer $(a^ib^j, a^kb^l) \in B_2$ é determinado por aqueles que já foram especificados em (4.29), (4.30) e (4.31), juntamente com seus valores $\sigma(b^j, b^l)$ em que $(b^j, b^l) \in S_{C_n}$. Aplicando o Lema 4.0.12 ao grupo C_n, conclui-se que esses últimos são determinados por

$$\sigma(b, b^l), \text{ em que } 1 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor,$$

por meio de

$$\sigma(b^j, b^l) = \frac{\pi_{j+l}}{\pi_j\pi_l} = \frac{\sigma_{j+l-1}(b, b)}{\sigma_{j-1}(b, b)\sigma_{l-1}(b, b)},$$

em que $\pi_j = \pi_j(b)$ é dado por (4.8), e

$$\sigma(b, b^l) = \sigma(b, b^{n-l-1}).$$

Reciprocamente, denote por I a lista de pares indicados em (4.22)-(4.25) e fixe uma família $(\nu(x, y))_{(x,y)\in I}$ de elementos de K^*. No que vem a seguir, a intenção é mostrar que esses valores determinam um conjunto fator parcial $\sigma \sim 1$. Pelo Corolário 1.5.11 (ii), se for construída uma aplicação $\rho\colon G \to K^*$ que satisfaça (1.11) e (1.12) tal que

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x)\rho(y)}{\rho(xy)}, \text{ para qualquer } (x, y) \in I, \tag{4.34}$$

então a igualdade (4.34) definirá um conjunto fator parcial $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ tal que $\sigma \sim 1$.

Seja $\nu_0(x, y) = 1$ e $\nu_j(x, y) = \nu(x, y)\nu(x, xy)\dots\nu(x, x^{j-1}y)$, em que

- $(x, y) = (a, b^l)$, $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$; ou
- $(x, y) = (a, b^{n/2})$, $1 \leq j \leq \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ (somente se n é par); ou
- $(x, y) = (b, b)$ e $1 \leq j \leq \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ (somente se $n \geq 3$).

A intenção é definir $\rho(b), \dots, \rho(b^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor})$ de tal modo que ρ satisfaça (1.12) e

$$\nu_j(b, b) = \frac{\rho^{j+1}(b)}{\rho(b^{j+1})} \tag{4.35}$$

para $j = 1, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ (isso já é verdadeiro para $j = 0$), e os valores de ρ nas demais potências de b (se $n \geq 3$) serão definidos por meio de (1.12). Como $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, isso só é possível se

$$\rho^n(b) = \rho^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(b)\rho^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(b) = \left(\nu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(b, b)\rho(b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})\right)\left(\nu_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(b, b)\rho(b^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor})\right) = \nu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(b, b)\nu_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(b, b).$$

Então defina $\rho(b) = 1/\rho(b^{n-1}) = \omega_2$, em que $\omega_2^n = \nu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(b, b)\nu_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(b, b)$ e se $2 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, seja $\rho(b^j) = 1/\rho(b^{n-j}) = \omega_2^j/\nu_{j-1}(b, b)$. Nesse caso, a mesma fórmula também é válida para $j = 1$ e

para $j = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$:

$$\rho(b^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}) = \frac{1}{\rho(b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})} = \frac{\nu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}(b,b)}{\omega_2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{\omega_2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{\nu_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}(b,b)}.$$

Também será preciso que $\nu_j(a,b^l) = \rho^j(a)\rho(b^l)/\rho(a^jb^l)$ nos seguintes casos:

- Se $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ (se $n \geq 3$); e
- Se $1 \leq j \leq \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ e $l = n/2$.

Portanto, defina $\rho(a) = 1/\rho(a^{m-1}) = \rho(1) = 1$ e defina

$$\rho(a^jb^l) = \frac{1}{\rho(a^{m-j}b^{n-l})} = \frac{\rho^j(a)\rho(b^l)}{\nu_j(a,b^l)} = \frac{\omega_2^l}{\nu_j(a,b^l)\nu_{l-1}(b,b)} \tag{4.36}$$

nestes casos. Finalmente, para obter $\nu(a^i,b) = \rho(a^i)\rho(b)/\rho(a^ib)$ quando $1 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$, defina

$$\rho(a^i) = \frac{1}{\rho(a^{m-i})} = \frac{\nu(a^i,b)\rho(a^ib)}{\rho(b)} \overset{(4.36)}{=} \frac{\nu(a^i,b)\omega_2}{\omega_2\nu_i(a,b)\nu_0(b,b)} = \frac{\nu(a^i,b)}{\nu_i(a,b)}.$$

A aplicação ρ assim definida satisfaz as seguintes propriedades:

- Se $1 \leq k \leq m-1$ e $1 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, ou se n é par, $l = n/2$ e $1 \leq k \leq \lfloor (m-1)/2 \rfloor$ então

$$\frac{\rho(a)\rho(a^kb^l)}{\rho(a^{k+1}b^l)} = \frac{\omega_2^l}{\nu_k(a,b^l)\nu_{l-1}(b,b)} \frac{\nu_{k+1}(a,b^l)\nu_{l-1}(b,b)}{\omega_2^l} = \nu(a,a^kb^l).$$

- Se $1 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor$

$$\frac{\rho(a^i)\rho(b)}{\rho(a^ib)} = \frac{\nu(a^i,b)}{\nu_i(a,b)}\omega_2 \frac{\nu_i(a,b)\nu_0(b,b)}{\omega_2} = \nu(a^i,b).$$

- Se $n \geq 3$ e $1 \leq l \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ então

$$\frac{\rho(b)\rho(b^l)}{\rho(b^{l+1})} = \omega_2 \frac{\omega_2^l}{\nu_{l-1}(b,b)} \frac{\nu_l(b,b)}{\omega_2^{l+1}} = \nu(b,b^l).$$

□

Seja $c_{m,n} = |S_{C_m \times C_n}|$ o número de S_3-órbitas efetivas do grupo $C_m \times C_n$. Note que pelo Exemplo 4.2.4, $c_{m,n} = |S_{C_m}| + |B_1| + |B_2|$ em que

$$|B_1| = \begin{cases} \lfloor (m-1)/2 \rfloor m(n-1) + m(n-1)/2, & \text{se } 2 \mid m, \\ \lfloor (m-1)/2 \rfloor m(n-1), & \text{se } 2 \nmid m, \end{cases}$$

$$|B_2| = \begin{cases} m^2(|S_{C_n}| - 1) + m + 2|S_{C_m}|, & \text{se } n \geq 3 \text{ e } 3 \mid n, \\ m^2|S_{C_n}|, & \text{se } n \geq 3 \text{ e } 3 \nmid n, \\ 0, & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

e por (3.7), tem-se

$$|S_{C_n}| = |\mathrm{Bl}(C_n)| = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-2)}{6}, & \text{se } 3 \nmid n, \\ \frac{(n-1)(n-2)+4}{6}, & \text{se } 3 \mid n. \end{cases}$$

Corolário 4.2.6. *Se $G = C_m \times C_n$, então $pM_{G \times G}(G) \simeq (K^*)^{c_{m,n} - |Q_1| - |Q_2|}$.*

Demonstração. Considerando $S_{C_m\times C_n}$ como no Exemplo 4.2.4, escreva

$$(K^*)^{c_{m,n}} = \left\{\{x(u,v)\}_{(u,v)\in S_{C_m\times C_n}}\right\}.$$

Pela Proposição 4.2.5, o subgrupo $L = L_{G\times G} = \{x \in (K^*)^{c_{m,n}} \mid \sigma_x \sim 1\}$ de $(K^*)^{c_{m,n}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
L = \Bigg\{ x \in (K^*)^{c_{m,n}} \Bigg| \; & x(a^i,a^j) = \frac{x(a,a^i)\dots x(a,a^{i+j-1})}{x(a,a)\dots x(a,a^{j-1})}, \text{ para } (a^i,a^j)\in J_1;\\
& x(a,a^j) = x(a,a^{m-j-1}), \text{ para } j\in J_2;\; x(a,a^j) = \frac{x(a,b)x(a^j,ab)}{x(a^{1+j},b)}, \text{ para } j\in J_3;\\
& x(a^i,a^kb^l) = \frac{x(a,a^ib^l)\dots x(a,a^{i+k-1}b^l)x(a^i,b^l)}{x(a,b^l)\dots x(a,a^{k-1}b^l)}, \text{ para } (a^i,a^kb^l)\in J_4;\\
& x(a,a^kb^l) = x(a,a^{m-1-k}b^{n-l}), \text{ para } (k,l)\in J_5;\\
& x(a,a^kb^{n/2}) = x(a,a^{m-1-k}b^{n/2}), \text{ para } k\in J_6;\\
& x(a^i,b^l) = x(a^i,b)\frac{x(a,b^l)\dots x(a,a^{i-1}b^l)}{x(a,b)\dots x(a,a^{i-1}b)}, \text{ para } (i,l)\in J_7;\\
& x(a^ib^j,a^kb^l) = x(b^j,b^l)\frac{x(a^i,a^kb^l)x(a^{i+k},b^{j+l})}{x(a^i,b^j)x(a^{i+k},b^l)}, \text{ para } (i,l)\in J_8;\\
& x(b^j,b^l) = \frac{x(b,b^j)\dots x(b,b^{j+l-1})}{x(b,b)\dots x(b,b^{l-1})}, \text{ para } (b^j,b^l)\in J_9;\\
& x(b,b^l) = x(b,b^{n-l-1}), \text{ para } l\in J_{10}\Bigg\},
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left\{(a^i,a^j)\in S_{C_m} \,\middle|\, i,j\geq 2\right\},\\
J_2 &= \{j\in\mathbb{N} \mid \lfloor (m+1)/2\rfloor \leq j \leq m-3\},\\
J_3 &= \{j\in\mathbb{N} \mid 1\leq j\leq \lfloor (m-1)/2\rfloor\},\\
J_4 &= \left\{(a^i,a^kb^l)\in B_1 \,\middle|\, 2\leq i \text{ e } 1\leq k\right\},\\
J_5 &= \{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1\leq k\leq m-1 \text{ e } \lfloor n/2\rfloor+1\leq l\leq n-1\},\\
J_6 &= \{k\in\mathbb{N} \mid \lfloor m/2\rfloor\leq k\leq m-1\},\\
J_7 &= \{(i,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1\leq i\leq m/2 \text{ e } 2\leq l\leq n/2\},\\
J_8 &= \left\{(a^ib^j,a^kb^l)\in B_2 \,\middle|\, (i,k)\neq(0,0)\right\},\\
J_9 &= \left\{(b^j,b^l)\in S_{C_n} \,\middle|\, j,l\geq 2\right\},\\
J_{10} &= \{l\in\mathbb{N} \mid \lfloor (n+1)/2\rfloor\leq l\leq n-3\}.
\end{aligned}$$

Sejam $Q_1 \subseteq B_1 \subseteq S_{C_m\times C_n}$ o conjunto de pares dados por (4.22), (4.23) e (4.24) e $Q_2 \subseteq B_2 \subseteq S_{C_m\times C_n}$ o conjunto de pares dados por (4.25). Note que

$$|Q_1| = \begin{cases} m\lfloor (n-1)/2\rfloor + \lfloor m/2\rfloor - 1 + \lfloor (m+1)/2\rfloor, & \text{se } 2\mid n,\\ m\lfloor (n-1)/2\rfloor + \lfloor m/2\rfloor - 1, & \text{se } 2\nmid n,\end{cases}$$

que

$$|Q_2| = \begin{cases} \lfloor (n-1)/2\rfloor, & \text{se } n\geq 3,\\ 0, & \text{se } n=2\end{cases}$$

que $|B_1\setminus Q_1| = |J_4|+|J_5|+|J_6|+|J_7|$ e que $|B_2\setminus Q_2| = |J_8|+|J_9|+|J_{10}|$. Note também que $c_{m,n} - |Q_1| - |Q_2| = |S_{C_m\times C_n}| + |B_1\setminus Q_1| + |B_2\setminus Q_2|$ e, motivando-se pelas relações que descrevem

L, considere o homomorfismo $\Lambda\colon (K^*)^{c_{m,n}} \to (K^*)^{c_{m,n}-|Q_1|-|Q_2|}$ que leva $\{x(u,v)\}_{(u,v)\in S_{C_m\times C_n}}$ em

$$\Bigg(\left(\frac{x(a,a^i)\dots x(a,a^{i+j-1})}{x(a^i,a^j)x(a,a)\dots x(a,a^{j-1})}\right)_{(a^i,a^j)\in J_1}, \left(\frac{x(a,a^{m-j-1})}{x(a,a^j)}\right)_{j\in J_2},$$
$$\left(\frac{x(a,b)x(a^j,ab)}{x(a,a^j)x(a^{1+j},b)}\right)_{j\in J_3}, \left(\frac{x(a,a^ib^l)\dots x(a,a^{i+k-1}b^l)x(a^i,b^l)}{x(a^i,a^kb^l)x(a,b^l)\dots x(a,a^{k-1}b^l)}\right)_{(a^i,a^kb^l)\in J_4},$$
$$\left(\frac{x(a,a^{m-1-k}b^{n-l})}{x(a,a^kb^l)}\right)_{(k,l)\in J_5}, \left(\frac{x(a,a^{m-1-k}b^{n/2})}{x(a,a^kb^{n/2})}\right)_{k\in J_6},$$
$$\left(\frac{x(a^i,b)x(a,b^l)\dots x(a,a^{i-1}b^l)}{x(a^i,b^l)x(a,b)\dots x(a,a^{i-1}b)}\right)_{(i,l)\in J_7}, \left(\frac{x(b^j,b^l)x(a^i,a^kb^l)x(a^{i+k},b^{j+l})}{x(a^ib^j,a^kb^l)x(a^i,b^j)x(a^{i+k},b^l)}\right)_{(i,l)\in J_8},$$
$$\left(\frac{x(b,b^j)\dots x(b,b^{j+l-1})}{x(b^j,b^l)x(b,b)\dots x(b,b^{l-1})}\right)_{(b^j,b^l)\in J_9}, \left(\frac{x(b,b^{n-l-1})}{x(b,b^l)}\right)_{l\in J_{10}}\Bigg).$$

Pela forma como Λ foi construído, resulta que ele é um epimorfismo de grupos cujo núcleo é precisamente L. Consequentemente, pelo Teorema 1.5.12,

$$pM_{G\times G}(G) \simeq \frac{(K^*)^{c_{m,n}}}{L} \simeq (K^*)^{c_{m,n}-|Q_1|-|Q_2|}.$$

□

4.3 Grupos Dicíclicos

Para um inteiro positivo m, seja

$$\mathrm{Dic}_m = \langle a,b \mid a^{2m}=1,\ b^2=a^m,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle.$$

Note que todo elemento de Dic_m pode ser representado sob a forma a^ib^l, com $0\le i\le 2m-1$ e $l\in\{0,1\}$. Além disso, $(a^kb)^{-1}=a^{k+m}b$ e $(a^k)^{-1}=a^{2m-k}$.

No próximo resultado, $S_{C_{2m}}$ denota o conjunto completo de representantes das órbitas efetivas de C_{2m} escolhido em (4.6).

Lema 4.3.1. *O conjunto*

$$S_{\mathrm{Dic}_m} = S_{C_{2m}} \cup \{(a^i,a^kb) \mid 1\le i\le m-1, 0\le k\le 2m-1\} \cup \{(a^m,a^kb) \mid 0\le k\le m-1\}$$

contém exatamente um representante de cada órbita efetiva de S_3 em $\mathrm{Dic}_m\times\mathrm{Dic}_m$.

Demonstração. Conforme (1.6), tem-se $S_3(x,a^k)=S_3(a^{2m-k},x^{-1})$, então toda órbita $S_3(x,a^k)$, com $x\in\mathrm{Dic}_m$, pode ser representada por um par cuja primeira coordenada é uma potência de a. Além disso, como $ba=a^{-1}b$, obtém-se

$$a^iba^kb = a^{i-1}ba^{k-1}b = a^{i-2}ba^{k-2}b = \dots = a^{i-k}b^2 = a^{m+i-k},$$

e consequentemente, $S_3(a^ib,a^kb)=S_3(a^iba^kb,(a^kb)^{-1})=S_3(a^{m+i-k},a^{k+m}b)$.

Como um conjunto $S_{C_{2m}}$ (que pode ser definido por (4.18)) contém precisamente um elemento de cada S_3-órbita efetiva em $C_{2m}\times C_{2m}$, resta considerar os pares (a^i,a^kb). Como $S_3(a^i,a^kb)=S_3((a^i)^{-1},a^ia^kb)=S_3(a^{2m-i},a^{i+k}b)$, pode-se assumir que $i\le 2m-i$, ou seja, $i\le m$. No caso em que $i=m$, resulta que $S_3(a^m,a^kb)=S_3(a^m,a^{m+k}b)$, e pode-se escolher $k\le m-1$. De fato, $a^{m+k}b=a^{m+k-2m}b=a^{k-m}b$ e se $m\le k\le 2m-1$, então $0\le m-k\le m-1$. □

Proposição 4.3.2. *Seja $G = \mathrm{Dic}_m$, para algum número natural $m \geq 2$. Se $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ e $\sigma \sim 1$ então σ é unicamente determinado por seus valores nos pares*

$$(a, a^k b), \text{ em que } 0 \leq k \leq m, \tag{4.37}$$

$$(a^i, b), \text{ em que } 2 \leq i \leq m-1, \tag{4.38}$$

que podem ser escolhidos arbitrariamente em K^*, e também o seu valor em (a^m, b), que deve satisfazer

$$\sigma^2(a^m, b) = \frac{(\sigma_m(a,b))^2}{(\sigma(a,b)\sigma(a,a^m b))^m}. \tag{4.39}$$

Demonstração. Seja $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ e suponha que $\sigma \sim 1$. Por (4.14),

$$\sigma(a^i, a^k) = \frac{\sigma(a^i, b)\sigma(a^k, a^i b)}{\sigma(a^{i+k}, b)},$$

para quaisquer i e k. Assim, usando o Lema 4.3.1, é claro que os valores de σ nos pares (a^i, a^k) de $S_{C_{2m}}$ são determinados pelos seus valores em

$$B = S_{\mathrm{Dic}_m} \setminus S_{C_{2m}} = \{(a^i, a^k b) |\ 1 \leq i \leq m-1, 0 \leq k \leq 2m-1\} \cup \{(a^m, a^k b) |\ 0 \leq k \leq m-1\}.$$

Por (4.13), os valores de σ naqueles pares para os quais $i \geq 2$ e $k \geq 1$ são determinados pelos valores $\sigma(a, a^k b)$ e $\sigma(a^i, b)$, em que $0 \leq k \leq 2m-1$ e $2 \leq i \leq m$:

$$\sigma(a^i, a^k b) = \frac{\sigma_{i+k}(a,b)\sigma(a^i, b)}{\sigma_i(a,b)\sigma_k(a,b)} = \frac{\sigma(a, a^i b)\ldots\sigma(a, a^{i+k-1}b)\sigma(a^i, b)}{\sigma(a,b)\ldots\sigma(a, a^{k-1}b)}.$$

Além disso, seja $\sigma(x,y) = \rho(x)\rho(y)\rho(x,y)^{-1}$, para alguma $\rho\colon G \to K^*$ satisfazendo (1.12) e (1.13). Assim, considerando que

$$\sigma(a, a^k b)\sigma(a, a^{k+m}b) = \frac{\rho(a)\rho(a^k b)}{\rho(a^{k+1}b)}\frac{\rho(a)\rho(a^{k+m}b)}{\rho(a^{k+m+1}b)} = \rho^2(a) \tag{4.40}$$

para qualquer k, resulta que se $m+1 \leq k \leq 2m-1$ tem-se

$$\sigma(a, a^k b) = \frac{\sigma(a,b)\sigma(a, a^m b)}{\sigma(a, a^{k-m}b)}, \text{ em que } 1 \leq k-m \leq m-1.$$

Em outras palavras, os valores de $\sigma(a, a^k b)$ para $k = m+1, \ldots, 2m-1$ são determinados pelos valores $\sigma(a, a^k b)$ em que $1 \leq k \leq m$. Consequentemente, os valores de σ nos elementos de B são determinados por seus valores naqueles pares de (4.37) e (4.38). Além disso, (4.39) resulta de

$$\sigma^2(a^m, b)(\sigma(a,b)\sigma(a,a^m b))^m = \left(\frac{\rho(a^m)\rho(b)}{\rho(a^m b)}\right)^2 \left(\rho^2(a)\right)^m = \left(\frac{\rho^m(a)\rho(b)}{\rho(a^m b)}\right)^2 = (\sigma_m(a,b))^2.$$

Agora fixe uma família $(\nu(x,y))_{(x,y)\in I}$ de elementos de K^*, indexada pela lista de pares (4.37) e (4.38) indicada na proposição, e escreva $\nu_j(a,b) = \nu(a,b)\nu(a,ab)\ldots\nu(a,a^{j-1}b)$, para $1 \leq j \leq m+1$. Suponha que esses valores satisfazem um análogo de (4.39), isto é, que

$$\nu^2(a^m, b) = \frac{(\nu_m(a,b))^2}{(\nu(a,b)\nu(a,a^m b))^m}. \tag{4.41}$$

O objetivo é mostrar que esses valores determinam um conjunto fator parcial $\sigma \sim 1$. Pelo Corolário 1.5.11 (ii), se for construída uma aplicação $\rho\colon G \to K^*$ que satisfaça (1.11) e (1.12) tal que $\sigma(x,y) = \rho(x)\rho(y)/\rho(xy)$, para qualquer (x,y) dos que foram listados acima, então essa igualdade determinará um conjunto fator parcial $\sigma \in pm'_{G\times G}(G)$ tal que $\sigma \sim 1$.

Motivando-se pela equação (4.40), começe definindo $\rho(a) = 1/\rho(a^{2m-1}) = \omega_1$, em que ω_1 é tal que $\omega_1^2 = \nu(a,b)\nu(a,a^m b)$. Defina também $\rho(1) = 1$ e $\rho(a^m) = \omega_1^m \nu(a^m,b)/\nu_m(a,b)$, e note que por (4.41) isso implica que $\rho^2(a^m) = \omega_1^{2m}\left(\nu(a^m,b)/\nu_m(a,b)\right)^2 = 1$.

Uma vez que deseja-se obter

$$\nu(a^m,b) = \frac{\rho(a^m)\rho(b)}{\rho(a^m b)} = \rho(a^m)\rho^2(b),$$

defina $\rho(b) = 1/\rho(a^m b) = \omega_2$, sendo ω_2 tal que

$$\omega_2^2 = \frac{\nu(a^m,b)}{\rho(a^m)} = \frac{\nu(a^m,b)\nu_m(a,b)}{\omega_1^m \nu(a^m,b)} = \frac{\nu_m(a,b)}{\omega_1^m}.$$

Depois, defina

$$\rho(a^j b) = \frac{1}{\rho(a^{m+j}b)} = \frac{\rho^j(a)\rho(b)}{\nu_j(a,b)} = \frac{\omega_1^j\omega_2}{\nu_j(a,b)},$$

para $j = 1,\ldots,m-1$ e defina

$$\rho(a^j) = \frac{1}{\rho(a^{2m-j})} = \frac{\nu(a^j,b)\rho(a^j b)}{\rho(b)} = \frac{\nu(a^j,b)\omega_1^j\omega_2}{\omega_2\nu_j(a,b)} = \frac{\nu(a^j,b)\omega_1^j}{\nu_j(a,b)},$$

para $j = 1,\ldots,m-1$ (note que a mesma fórmula também vale para $j = m$).

Com essas definições, segue que

$$\frac{\rho(a)\rho(b)}{\rho(ab)} = \omega_1\omega_2\frac{\nu(a,b)}{\omega_1\omega_2} = \nu(a,b),$$

$$\frac{\rho(a)\rho(a^m b)}{\rho(a^{m+1}b)} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_1\omega_2}{\nu(a,b)} = \frac{\omega_1^2}{\nu(a,b)} = \nu(a,a^m b)$$

e, para todo $k = 1,\ldots,m-1$,

$$\frac{\rho(a)\rho(a^k b)}{\rho(a^{k+1}b)} = \omega_1\frac{\omega_1^k\omega_2}{\nu_k(a,b)}\frac{\nu_{k+1}(a,b)}{\omega_1^{k+1}\omega_2} = \frac{\nu_{k+1}(a,b)}{\nu_k(a,b)} = \nu(a,a^k b).$$

Além disso,

$$\frac{\rho(a^m)\rho(b)}{\rho(a^m b)} = \frac{\omega_1^m\nu(a^m,b)}{\nu_m(a,b)}\omega_2^2 = \frac{\omega_1^m\nu(a^m,b)}{\nu_m(a,b)}\frac{\nu_m(a,b)}{\omega_1^m} = \nu(a^m,b).$$

e para $2 \le i \le m-1$,

$$\frac{\rho(a^i)\rho(b)}{\rho(a^i b)} = \frac{\nu(a^i,b)\omega_1^i}{\nu_i(a,b)}\omega_2\frac{\nu_i(a,b)}{\omega_1^i\omega_2} = \nu(a^i,b).$$

Logo, obteve-se uma aplicação $\rho\colon G \to K^*$ com as propriedades desejadas. □

Seja $dc_m = |S_{\mathrm{Dic}_m}|$ o número de S_3-órbitas efetivas do grupo Dic_m, que pelo Lema 4.3.1 é dado pela fórmula

$$dc_m = \begin{cases} \frac{(4m-1)(4m-2)+4}{6}, & \text{se } 3 \mid m, \\ \frac{(4m-1)(4m-2)}{6}, & \text{se } 3 \nmid m. \end{cases} \tag{4.42}$$

Teorema 4.3.3. *Se $G = \mathrm{Dic}_m$, então $pM_{G\times G}(G) \simeq (K^*)^{dc_m - 2m+1}$.*

Demonstração. Considerando σ_{ij} e τ_{kl} como em (4.5), escreva

$$(K^*)^{dc_m} = \{(\sigma_{ij},\tau_{kl}) \in (K^*)^{|S_{C_{2m}}|} \times (K^*)^{|B|}\}.$$

Pela Proposição 4.3.2, o subgrupo $L = L_{G\times G} = \{x \in (K^*)^{dc_m} \mid \sigma_x \sim 1\}$ de $(K^*)^{dc_m}$ é dado por

$$\begin{aligned} L = \Bigg\{ (\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in (K^*)^{|S_{C_{2m}}|} \times (K^*)^{|B|} \;\Bigg|\; & \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}}, \text{ para } (i,j) \in J_1; \\ & \sigma_{1j} = \sigma_{1,2m-j-1}, \text{ para } j \in J_2;\ \sigma_{1j} = \frac{\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{1+j,0}}, \text{ para } j \in J_3; \\ & \tau_{i,k} = \frac{(\tau_{1,i}\dots\tau_{1,i+k-1})\tau_{i,0}}{\tau_{1,0}\dots\tau_{1,k-1}} \text{ para } (i,k) \in J_4; \\ & \tau_{1,k}\tau_{1,m+k} = \tau_{1,0}\tau_{1,m}, \text{ para } k \in J_5; \\ & \tau_{m,0}^2 = \frac{(\tau_{1,0}\tau_{1,1}\dots\tau_{1,m-1})^2}{(\tau_{1,0}\tau_{1,m})^m} \Bigg\}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; i,j \geq 2 \text{ e } (a^i, a^j) \in S_{C_{2m}}\right\}, \\ J_2 &= \{j \in \mathbb{N} \mid m \leq j \leq 2m-3\}, \\ J_3 &= \{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq \lfloor (2m-1)/2 \rfloor = m-1\}, \\ J_4 &= \left\{(i,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \;\middle|\; (a^i, a^k b) \in B,\ 2 \leq i \text{ e } 1 \leq k\right\}, \\ J_5 &= \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq m-1\}. \end{aligned}$$

Seja $Q \subseteq B \subseteq S_{\mathrm{Dic}_m}$ o conjunto de pares dados por (4.37) e (4.38) e note que $|Q| = 2m-1$ e que $|B \setminus Q| = |J_4| + |J_5| + 1$. Escreva

$$(K^*)^{dc_m - 2m+1} = \left\{(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in (K^*)^{|S_{C_{2m}}|} \times (K^*)^{|B\setminus Q|}\right\}$$

e considere o homomorfismo de grupos $\Lambda\colon (K^*)^{dc_m} \to (K^*)^{dc_m-2m+1}$ que leva (σ_{ij}, τ_{kl}) em

$$\left(\left(\frac{\sigma_{ij}\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}}{\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}\right)_{(i,j)\in J_1}, \left(\frac{\sigma_{1j}}{\sigma_{1,m-j-1}}\right)_{j\in J_2}, \left(\frac{\sigma_{1j}\tau_{j+1,0}}{\tau_{10}\tau_{j1}}\right)_{j\in J_3}, \left(\frac{(\tau_{1,i}\dots\tau_{1,i+k-1})\tau_{i,0}}{(\tau_{1,0}\dots\tau_{1,k-1})\tau_{i,k}}\right)_{(i,k)\in J_4}, \left(\frac{\tau_{1,0}\tau_{1,m}}{\tau_{1,k}\tau_{1,m+k}}\right)_{k\in J_5}, \frac{(\tau_{1,0}\tau_{1,1}\dots\tau_{1,m-1})^2}{\tau_{m,0}^2(\tau_{1,0}\tau_{1,m})^m}\right).$$

É fácil verificar que Λ é um epimorfismo cujo núcleo é precisamente L. Consequentemente, pelo Teorema 1.5.12, $pM_{G\times G}(G) \simeq (K^*)^{dc_m}/L \simeq (K^*)^{dc_m-2m+1}$. □

4.4 Grupos Infinitos

4.4.1 Grupo Cíclico Infinito

Denote por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos e para aplicações $\sigma\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to K$ e $\rho\colon \mathbb{Z} \to K^*$, denote $\sigma_{ij} = \sigma(i,j)$ e $\rho_i = \rho(i)$.

Lema 4.4.1. *Qualquer elemento de $pm'_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ é unicamente determinado pelos seus valores nos pares $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Além disso, esses valores podem ser escolhidos arbitrariamente em K^*.*

Demonstração. Observe primeiro que, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$S_3(i,j) = \{(i,j), (-i-j, i), (j, -i-j), (-j, -i), (-i, i+j), (i+j, -j)\}$$

Seja $S_3(i,j)$ uma órbita efetiva, ou seja, assuma que $0 \notin \{i, j, i+j\}$. Se $(i,j) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\setminus(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, será mostrado que existe exatamente um $(m,n) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cap S_3(i,j)$. Existem alguns casos a considerar:

- Se $i, j < 0$, então $(-j, -i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um representante da mesma órbita satisfazendo a propriedade desejada;
- Se $i < 0 < j$ e $i + j > 0$ então $(-i, i + j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por outro lado, se $i + j < 0$ então $(j, -i - j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Se $j < 0 < i$ e $i + j > 0$ então $(i + j, -j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por outro lado, se $i + j < 0$ então $(-i - j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Finalmente, se $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é claro que os demais elementos de sua S_3-órbita não estão em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. □

Proposição 4.4.2. *Se $\sigma \in pm'_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ e $\sigma \sim 1$ então σ é unicamente determinado por seus valores em $\{1\} \times \mathbb{N}$, que podem ser escolhidos arbitrariamente em K^*.*

Demonstração. Seja $\sigma \in pm'_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ e suponha que $\sigma \sim 1$. Isso significa que há uma aplicação $\rho\colon \mathbb{Z} \to K^*$ tal que,

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho_i \rho_j}{\rho_{i+j}} \tag{4.43}$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e ρ também satisfaz

$$\rho_1 = \rho_i \rho_{-i} = 1, \tag{4.44}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observe que de (4.43) resulta $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e se for definido $\pi_j = \sigma_{11}\sigma_{12}\ldots\sigma_{1,j-1}$, para $j \geq 2$, então

$$\pi_j = \frac{\rho_1^j}{\rho_j}, \tag{4.45}$$

e também

$$\sigma_{ij} = \frac{\pi_{i+j}}{\pi_i \pi_j}, \tag{4.46}$$

para $i, j \geq 2$, como na prova de [21, Proposition 6.3]. Portanto, o conjunto fator parcial σ é completamente determinado por seus valores

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots \tag{4.47}$$

que, pelo Lema 4.4.1, correspondem a pares pertencentes a S_3-órbitas distintas.

Por outro lado, fixando $(\nu_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ arbitrariamente em $(K^*)^{\mathbb{N}}$, será demonstrado que esses valores determinam um conjunto fator parcial $\sigma \sim 1$. Pelo Corolário 1.5.11 (ii), é suficiente construir uma aplicação $\rho\colon \mathbb{Z} \to K^*$ satisfazendo (1.12) e tal que

$$\nu_{1j} = \frac{\rho_1 \rho_j}{\rho_{j+1}} \tag{4.48}$$

para $j \in \mathbb{N}$. Para $j \geq 2$, escreva $\pi_j = \nu_{11}\ldots\nu_{1,j-1}$. Para obter (4.45) para $j \geq 2$, defina $\rho_1 = 1$ e $\rho_j = 1/\rho_{-j} = 1/\pi_j$.

Deste modo, obtém-se uma função $\rho\colon \mathbb{Z} \to K^*$ que satisfaz (1.12) e (4.48). De fato,

$$\sigma_{11} = \pi_2 = \frac{\rho_1^2}{\rho_2},$$

e para $j \geq 2$,

$$\sigma_{1j} = \frac{\pi_{j+1}}{\pi_j} = \frac{\frac{1}{\rho_{j+1}}}{\frac{1}{\rho_j}} = \frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} = \frac{\rho_1 \rho_j}{\rho_{j+1}}.$$

□

Corolário 4.4.3. $pM_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \simeq (K^*)^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Pelo Lemma 4.4.1 e pela Proposição 4.4.2,

$$pM_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \simeq \frac{(K^*)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{(K^*)^{\{1\}\times\mathbb{N}}} \simeq (K^*)^{\mathbb{N}}.$$

□

4.4.2 Grupo Diedral Infinito

Como um conjunto, o grupo diedral $D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ é igual a $\{(a^i, b^j) \mid i \in \mathbb{Z}, j \in \{0, 1\}\}$.

Lema 4.4.4. *Todo elemento de $pm'_{D_\infty\times D_\infty}(D_\infty)$ é unicamente determinado por seus valores nos pares do conjunto*

$$\{(a^i, a^j) \mid (i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\} \cup \{(a^k, a^l b) \mid (k, l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}. \tag{4.49}$$

Além disso, esses valores podem ser escolhidos em K^* arbitrariamente.

Demonstração. Análoga à prova do Lema 4.0.11. □

Proposição 4.4.5. $pM_{D_\infty\times D_\infty}(D_\infty) \simeq (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)}$.

Demonstração. Pelo Lema 4.4.4 as órbitas efetivas de D_∞ podem ser indexadas pelo conjunto $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$. Logo, pode-se considerar $\psi : (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)} \to pM_{D_\infty\times D_\infty}(D_\infty)$ como sendo o epimorfismo de grupos dado por (1.16) e $x \in \ker(\psi) = L_{D_\infty\times D_\infty}$. Assim $\sigma = \sigma_x \in N_{D_\infty\times D_\infty}$ e existe uma aplicação $\rho\colon D_\infty \to K^*$ tal que (4.15) e (4.16) são válidas. Como no caso dos grupos diedrais finitos, é fácil verificar que $\sigma^2(a^k, a^l b) = \rho^2(a^k)$ para quaisquer k e l.

Dados $j \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in D_\infty$, defina

$$\sigma_j(x, y) = \begin{cases} \sigma(x, y)\sigma(x, xy)\ldots\sigma(x, x^{j-1}y) & \text{se } j > 0, \\ 1 & \text{se } j = 0, \\ \sigma(x, x^{-1}y)\sigma(x, x^{-2}y)\ldots\sigma(x, x^j y) & \text{se } j < 0. \end{cases} \tag{4.50}$$

Observe que no caso particular em que $x = a$ e $y = b$ a igualdade

$$\sigma_j(a, b) = \frac{\rho^{|j|}(a)\rho(b)}{\rho(a^j b)} \tag{4.51}$$

vale para todo $j \in \mathbb{Z}$. Utilizando (4.50), é fácil verificar que

$$\frac{\sigma(a^i, a^j b)}{\sigma_{i+j}(a, b)\sigma(a^i, b)} = \frac{\rho(a^i b)\rho(a^j b)}{\rho^{|i+j|}(a)} = \begin{cases} \sigma_i^{-1}(a, b)\sigma_j^{-1}(a, b), & \text{se } i, j > 0, \\ \sigma_i^{-1}(a, b)\sigma_j(a, b), & \text{se } 0 < -j \le i, \\ \sigma_i(a, b)\sigma_j^{-1}(a, b), & \text{se } 0 < i \le -j. \end{cases} \tag{4.52}$$

Além disso, segue de (4.14) que para $i, j \ge 1$,

$$\sigma(a^i, a^j) = \frac{\sigma(a^i, b)\sigma(a^j, a^i b)}{\sigma(a^{i+j}, b)}. \tag{4.53}$$

Consequentemente, os valores de σ em qualquer par são determinados por seus valores nos pares de$\{(a^k, b) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{(a, a^l b) \mid l \in \mathbb{Z}\}$. Portanto, usando o Lema 4.4.4 e considerando σ_{ij} e τ_{kl} como

em (4.5), e π_i como em (4.8), conclui-se que

$$\ker(\psi) \subseteq R = \left\{ (\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in (K^*)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \times (K^*)^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}} \;\middle|\; \sigma_{ij} = \frac{\pi_{i+j}}{\pi_i\pi_j}, \text{ para } i,j \geq 2; \right.$$
$$\left. \sigma_{i1} = \sigma_{1i}, \text{ para } i \geq 2; \sigma_{1j} = \frac{\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{1+j,0}}, \text{ para } j \in \mathbb{N}; \tau_{kl}^2 = \tau_{k0}^2, \text{ para } (k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \right\}.$$

Considere o grupo

$$W = \{(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in R \mid \tau_{kl} = \mu_k, \text{ para } (k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \text{ e algum } \mu_k \in K^*\}.$$

Dado $(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \in W$, seja $\lambda\colon G \to K^*$ a aplicação definida por

$$\lambda(a^i b) = \lambda(1) = 1, \text{ para } i \in \mathbb{Z}$$

e

$$\lambda(a^i) = \frac{1}{\lambda(a^{m-i})} = \mu_i, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Então, resulta das definições de R e W que

$$\sigma_{1j} = \frac{\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{1+j,0}} = \frac{\mu_1\mu_j}{\mu_{1+j}} = \lambda(a)\lambda(a^j)/\lambda(a^{1+j}), \text{ para } j \in \mathbb{N},$$

$$\sigma_{i1} = \sigma_{1i} = \lambda(a)\lambda(a^i)/\lambda(a^{1+i}), \text{ para } i \geq 2.$$

Disto resulta que

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\sigma_{1i}\ldots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\ldots\sigma_{1,j-1}} \\
&= \left(\frac{\lambda(a)\lambda(a^i)}{\lambda(a^{i+1})}\frac{\lambda(a)\lambda(a^{i+1})}{\lambda(a^{i+2})}\cdots\frac{\lambda(a)\lambda(a^{i+j-1})}{\lambda(a^{i+j})}\right)\left(\frac{\lambda(a^2)}{\lambda(a)\lambda(a)}\frac{\lambda(a^3)}{\lambda(a)\lambda(a^2)}\cdots\frac{\lambda(a^j)}{\lambda(a)\lambda(a^{j-1})}\right) \\
&= \frac{\lambda^j(a)\lambda(a^i)}{\lambda(a^{i+j})}\frac{\lambda(a^j)}{\lambda^j(a)} \\
&= \frac{\lambda(a^i)\lambda(a^j)}{\lambda(a^{i+j})}, \text{ para } i,j \geq 2
\end{aligned}$$

e

$$\tau_{kl} = \mu_k = \lambda(a^k)\lambda(a^l b)/\lambda(a^{k+l}b), \text{ para } (k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}.$$

Consequentemente, $W \lhd \ker(\psi)$.

Como na prova do Teorema 4.1.1, será construído um epimorfismo de grupos cujo núcleo é W. Para isso, seja $\Lambda\colon (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})} \to (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)}$ o homomorfismo de grupos definido por

$$(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) \mapsto \left(\left(\frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{1i}}\right)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}, \left(\frac{\sigma_{ij}\sigma_{11}\ldots\sigma_{1,j-1}}{\sigma_{1i}\ldots\sigma_{1,i+j-1}}\right)_{i,j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}, \left(\frac{\sigma_{1j}\tau_{j+1,0}}{\tau_{10}\tau_{j1}}\right)_{j\in\mathbb{N}}, \left(\frac{\tau_{kl}}{\tau_{k0}}\right)_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*} \right).$$

Então Λ é um epimorfismo, uma vez que para todo

$$z = \left((u_{i1})_{i\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}, (v_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}, (w_{1j})_{j\in\mathbb{N}}, (x_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*}\right) \in (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)},$$

tem-se $\Lambda(\sigma_{ij}, \tau_{kl}) = z$, em que

$$\tau_{k0} = 1, \text{ para } (k,0) \in \mathbb{N}\times\{0\},$$

$$\tau_{kl} = x_{kl}, \text{ para } (k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*,$$

$$\sigma_{1j} = \frac{w_{1j}\tau_{10}\tau_{j1}}{\tau_{j+1,0}}, \text{ para } (1,j) \in \{1\} \times \mathbb{N},$$

$$\sigma_{i1} = \sigma_{1,i}u_{i1}, \text{ para } (i,1) \in \mathbb{N} \times \{1\},$$

e

$$\sigma_{ij} = \frac{v_{ij}\sigma_{1i}\dots\sigma_{1,i+j-1}}{\sigma_{11}\dots\sigma_{1,j-1}}, \quad \text{para } (i,j) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

Além disso, é imediato que $W = \ker(\Lambda)$. Dado $\mu \in \ker(\psi)$, resulta que

$$\Lambda(\mu) = ((1_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, (\varepsilon_{kl})_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*}),$$

em que $1_{ij} = 1 = \varepsilon_{kl}^2$ para $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$. Em outras palavras, $\Lambda(\ker(\psi)) \triangleleft C_2^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)}$.

Portanto,

$$pM_{D_\infty \times D_\infty}(D_\infty) = \frac{(K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})}}{\ker(\psi)} \simeq \frac{\frac{(K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})}}{\ker(\Lambda)}}{\frac{\ker(\psi)}{\ker(\Lambda)}} \simeq \frac{(K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)}}{\Lambda(\ker(\psi))} \simeq (K^*)^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^*)},$$

em que o último isomorfismo resulta de (4.1). □

4.5 Sugestões para Pesquisas Futuras

No que diz respeito ao multiplicador de Schur parcial, seria interessante determinar a sua componente total, ou pelo menos uma lista de representantes para as órbitas efetivas, também para algumas outras famílias de grupos:

- Grupos abelianos livres $\mathbb{Z}^k$, com $k \geq 2$;
- Produtos diretos de grupos arbitrários;
- Produtos semidiretos de grupos cíclicos finitos $C_m \rtimes C_n$, ou de forma mais geral, o produto semidireto de grupos quaisquer.
- Grupos simétricos S_n em que $n \geq 4$;

Apêndice A

Diagramas de Domínios Elementares

Neste apêndice, são apresentados diagramas para ilustrar o conjunto parcialmente ordenado dos domínios elementares dos grupos de ordem até 6. No caso do grupo trivial $C_1 = \{1\}$, há um único domínio elementar: $\mathcal{T}(1,1)$. Em cada um dos demais exemplos, será utilizada uma seta indo de A para B para indicar que $A \subsetneq B$.

$$\mathcal{T}(1,1) \longrightarrow \mathcal{T}(1,a) = C_2 \times C_2.$$

Figura A.1: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $C_2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.

$$\mathcal{T}(1,1) \longrightarrow \mathcal{T}(1,a) \longrightarrow \mathcal{T}(a,a) = C_3 \times C_3.$$

Figura A.2: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(1,1) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(1,a) \arrow[r] & \mathcal{T}(a,a) = C_4 \times C_4. \\
& \mathcal{T}(1,a^2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura A.3: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $C_4 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(1,a) \arrow[dr] & \\
\mathcal{T}(1,1) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(1,b) \arrow[r] & \mathcal{T}(a,b) = V \times V. \\
 & \mathcal{T}(1,ab) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura A.4: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $V = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}(1,a) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(a,a) \arrow[r] & C_5 \times C_5. \\
\mathcal{T}(1,1) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{T}(1,a^2) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{T}(a,a^2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Figura A.5: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $C_5 = \langle a \mid a^5 = 1 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(1,1) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \mathcal{T}(1,a^2) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \mathcal{T}(a^2,a^2) \arrow[rr] & & C_6 \times C_6 \\
 & \mathcal{T}(1,a) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \mathcal{T}(a,a) \arrow[r] & \mathcal{T}(a,a) \cup \mathcal{T}(a,a^2) \cup \mathcal{T}(a^2,a) \arrow[u] & \\
 & \mathcal{T}(1,a^3) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(a,a^2) \arrow[rr] & & \mathcal{T}(a,a^2) \cup \mathcal{T}(a^2,a) \arrow[u] \\
 & & \mathcal{T}(a^2,a) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Figura A.6: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $C_6 = \langle a \mid a^6 = 1 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(1,1) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \mathcal{T}(1,a) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \mathcal{T}(a,a) \arrow[rrr] & & & S_3 \times S_3 \\
 & \mathcal{T}(1,b) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(b,a) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{T}(b,a) \cup \mathcal{T}(a,b) \arrow[urr] & & \\
 & \mathcal{T}(1,a^2b) \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathcal{T}(a,b) \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathcal{T}(b,a) \cup \mathcal{T}(a^2b,a) \arrow[uurr] & & \\
 & \mathcal{T}(1,ab) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{T}(a^2b,a) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathcal{T}(a,b) \cup \mathcal{T}(a^2b,a) \arrow[uuurr] & &
\end{tikzcd}$$

Figura A.7: *Ordem parcial dos domínios elementares de* $S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$.

Apêndice B

S_3-órbitas Efetivas de $C_m \times C_n$

O objetivo deste apêndice é ilustrar a lista de S_3-órbitas efetivas obtidas no Exemplo 4.2.4 por meio de exemplos concretos. Em cada uma das tabelas a seguir, é considerado um produto direto de grupos cíclicos $C_m \times C_n$, e as órbitas efetivas correspondentes são indexadas por números inteiros positivos. Os elementos de $C_m \times C_n$ aparecem tanto na primeira linha quanto na primeira coluna, e o número que aparece na interseção da linha x com a coluna y indica a órbita efetiva da qual o par $(x, y) \in (C_m \times C_n) \times (C_m \times C_n)$ faz parte. Os representantes das órbitas efetivas que foram escolhidos no Exemplo 4.2.4 são indicados em negrito. As posições correspondentes aos elementos das órbitas não efetivas são marcadas com um ponto.

$\times$	1	a	a^2	a^3	a^4	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	a^4b^2
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a	.	**1**	**2**	1	.	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a^2	.	2	2	.	1	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
a^3	.	1	.	2	2	16	17	13	14	15	21	22	18	19	20
a^4	.	.	1	2	1	7	3	4	5	6	12	8	9	10	11
b	.	12	21	18	8	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	.	7	16	13	3
ab	.	11	20	22	12	27	**28**	**29**	28	24	3	17	14	4	.
a^2b	.	10	19	21	11	26	29	29	25	30	13	15	5	.	4
a^3b	.	9	18	20	10	25	28	26	31	31	16	6	.	5	14
a^4b	.	8	22	19	9	24	27	30	**31**	**30**	7	.	6	15	17
b^2	.	7	16	13	3	.	12	21	18	8	23	24	25	26	27
ab^2	.	6	15	17	7	8	22	19	9	.	27	30	31	30	24
a^2b^2	.	5	14	16	6	18	20	10	.	9	26	31	31	25	28
a^3b^2	.	4	13	15	5	21	11	.	10	19	25	30	26	29	29
a^4b^2	.	3	17	14	4	12	.	11	20	22	24	27	28	29	28

Tabela B.1: *S_3-órbitas efetivas de $C_5 \times C_3$*

$\times$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	b^3	ab^3	a^2b^3	a^3b^3
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a	.	**1**	1	.	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
a^2	.	1	.	1	**14**	**15**	14	15	**16**	**17**	16	17	**18**	**19**	18	19
a^3	.	.	1	1	5	2	3	4	9	6	7	8	13	10	11	12
b	.	13	18	10	**20**	**21**	**22**	**23**	20	24	25	26	.	5	14	2
ab	.	12	19	13	**26**	**27**	**28**	**29**	30	31	27	21	2	15	3	.
a^2b	.	11	18	12	**25**	**31**	**32**	**33**	32	28	22	34	14	4	.	3
a^3b	.	10	19	11	**24**	**30**	**34**	**35**	29	23	35	33	5	.	4	15
b^2	.	9	16	6	20	29	32	30	.	9	16	6	20	29	32	30
ab^2	.	8	17	9	23	28	31	24	6	17	7	.	26	33	34	21
a^2b^2	.	7	16	8	22	27	25	35	16	8	.	7	25	35	22	27
a^3b^2	.	6	17	7	21	26	33	34	9	.	8	17	24	23	28	31
b^3	.	5	14	2	.	13	18	10	20	21	22	23	20	24	25	26
ab^3	.	4	15	5	10	19	11	.	30	34	35	24	23	35	33	29
a^2b^3	.	3	14	4	18	12	.	11	32	33	25	31	22	34	32	28
a^3b^3	.	2	15	3	13	.	12	19	29	26	27	28	21	30	31	27

Tabela B.2: *S_3-órbitas efetivas de $C_4 \times C_4$*

Referências Bibliográficas

[1] F. Abadie, *Sobre ações parciais, fibrados de Fell, e grupoides*, Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo, 1999. 1

[2] ———, *Enveloping actions and Takai duality for partial actions*, Journal of Functional Analysis **197** (2003), no. 1, 14–67. 1

[3] E. R. Alvares, M. M. S. Alves, and E. Batista, *Partial Hopf module categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **217** (2013), no. 8, 1517–1534. 1

[4] M. M. S. Alves and E. Batista, *Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context*, Algebra and Discrete Mathematics (2009), no. 3, 1–19. 1

[5] ———, *Enveloping actions for partial Hopf actions*, Communications in Algebra **38** (2010), no. 8, 2872–2902. 1

[6] ———, *Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications*, Contemporary Mathematics **537** (2011), 13–30. 1

[7] M. M. S. Alves, E. Batista, M. Dokuchaev, and A. Paques, *Twisted partial actions of Hopf algebras*, Israel Journal of Mathematics **197** (2013), 263–308. 1

[8] M. M. S. Alves, E. Batista, and J. Vercruysse, *Partial representations of Hopf algebras*, (2013), arXiv: 1309.1659v2. 1

[9] D. Bagio, W. Cortes, M. Ferrero, and A. Paques, *Actions of inverse semigroups on algebras*, Communications in Algebra **35** (2007), no. 12, 3865–3874. 1

[10] D. Bagio, D. Flores, and A. Paques, *Partial actions of ordered groupoids on rings*, Journal of Algebra and Its Applications **9** (2010), no. 03, 501–517. 1

[11] S. Caenepeel and E. De Groot, *Galois corings applied to partial Galois theory*, Proc. ICMA-2004 (Kuwait), Kuwait University, 2005. 1

[12] S. Caenepeel and K. Janssen, *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory*, Communications in Algebra **36** (2008), no. 8, 2923–2946. 1

[13] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1961. 8, 9, 10, 11, 18, 19

[14] M. Dokuchaev, *Partial actions: a survey*, Contemporary Mathematics **537** (2011), 173–184. 1

[15] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, American Mathematical Society **357** (2004), no. 5, 1931–1952. 1, 5, 6, 25, 27

[16] M. Dokuchaev, R. Exel, and P. Piccione, *Partial representations and partial group algebras*, Journal of Algebra **226** (2000), no. 1, 505–532. 1, 2, 7, 17, 18, 21, 22, 31

[17] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and A. Paques, *Partial actions and Galois theory*, Journal of Pure and Applied Algebra **208** (2007), no. 1, 77–87. 1

[18] M. Dokuchaev and M. Khrypchenko, *Partial cohomology of groups*, (2013), arXiv: 1309.7069. 1

[19] M. Dokuchaev and B. Novikov, *Partial projective representations and partial actions*, Journal of Pure and Applied Algebra **214** (2010), 251–268. 1, 2, 13, 14

[20] _____, *Partial projective representations and partial actions II*, Journal of Pure and Applied Algebra **216** (2012), 438–455. 1, 2, 12, 17, 26, 35

[21] M. Dokuchaev, B. Novikov, and H. Pinedo, *The partial Schur multiplier of a group*, Journal of Algebra **392** (2013), 199–225. 2, 13, 14, 15, 42, 45, 46, 47, 61

[22] M. Dokuchaev, B. Novikov, and G. Zholtkevych, *Partial actions and automata*, Algebra and Discrete Mathematics **11** (2011), no. 2, 51–63. 1

[23] M. Dokuchaev and C. Polcino Milies, *Isomorphisms of partial group rings*, Glasgow Mathematical Journal **46** (2004), no. 1, 161–168. 1, 7, 17

[24] M. Dokuchaev and N. Zhukavets, *On finite degree partial representations of groups*, Journal of Algebra **274** (2004), no. 1, 309–334. 1, 2, 17, 21, 23, 31, 32

[25] R. Exel, *Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence*, Journal of functional analysis **122** (1994), no. 2, 361–401. 1

[26] _____, *Twisted partial actions: a classification of regular C^*-algebraic bundles*, Proceedings of the London Mathematical Society **74** (1997), no. 2, 417–443. 1

[27] _____, *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups*, Proceedings American Mathematical Society **126** (1998), 3481–3494. 1, 5, 11

[28] N. D. Gilbert, *Actions and expansions of ordered groupoids*, Journal of Pure and Applied Algebra **198** (2005), no. 1, 175–195. 1

[29] D. Gonçalves and D. Royer, *Leavitt path algebras as partial skew group rings*, (2012), arXiv: 1202.2704. 1

[30] J. Kellendonk and M. V. Lawson, *Partial actions of groups*, International Journal of Algebra and Computation **14** (2004), no. 1, 87. 1, 5, 11

[31] M. V. Lawson, *Inverse semigroups: the theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing Company, Londres, 1998. 22

[32] K. McClanahan, *K-theory for partial crossed products by discrete groups*, Journal of Functional Analysis **130** (1995), no. 1, 77–117. 1

[33] M. Megrelishvili and L. Schroder, *Globalization of confluent partial actions on topological and metric spaces*, Topology and its Applications **145** (2004), no. 1-3, 119–145. 1, 5

[34] B. Novikov and H. Pinedo, *On components of the partial Schur multiplier*, Communications in Algebra **42** (2014), no. 6, 2484–2495. 2, 13

[35] J. Okniński, *Semigroup Algebras*, Dekker, New York, 1991. 9, 18

[36] A. Paques, V. Rodrigues, and A. Sant'ana, *Galois correspondences for partial Galois Azumaya extensions*, Journal of Algebra and Its Applications **10** (2011), no. 05, 835–847. 1

[37] H. Pinedo, *On elementary domains of partial projective representations of groups*, Algebra and Discrete Mathematics **15** (2013), no. 1, 63–82. 31, 33, 34, 37

[38] ———, *A calculation of the partial Shur multiplier of S3*, International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra **22** (2014), no. 4, 405–417. 2, 48

[39] B. Steinberg, *Partial actions of groups on cell complexes*, Monatshefte für Mathematik **138** (2003), no. 2, 159–170. 1

[40] M. B. Szendrei, *A note on Birget-Rhodes expansion of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **58** (1989), 93–99. 11

Índice Remissivo

álgebra de semigrupo, 8
    contraída, 8
álgebra parcial de grupo, 1, 2, 7
órbita efetiva, 13, 42, 45

ação parcial, 1, 5, 6
    ajustada, 25
    em um conjunto, 5
    em uma álgebra, 6, 25
    globalizável, 1, 6, 25
ações parciais equivalentes
    ver isomorfismo de ações parciais, 6
anel de grupo *skew*, 6

bloco, 35, 42

conjunto fator parcial, 13
conjunto suporte, 23

domínio
    decomponível, 34
    elementar, 31, 34, 37, 39
    indecomponível, 34, 39
    minimal, 35, 40
    trivial, 33

fator principal, 9, 10, 12, 17

grupoide, 21–23

homomorfismo parcial, 13

ideal principal, 8
idempotente primitivo, 9
isomorfismo
    de ações parciais, 6

$\mathcal{J}$-classes, 8
    ordenação das, 8

morfismo, 5
    de ações parciais, 5
    de representações parciais, 7
multiplicador de Schur parcial, 1–3, 45
    componente total, 45
        grupo cíclico infinito, 62
        grupo diedral infinito, 62
        grupos dicíclicos, 59
        grupos diedrais, 48
        produto de grupos cíclicos, 55

núcleo de um semigrupo, 9

órbita efetiva
    representantes
        grupo cíclico infinito, 60
        grupo diedral infinito, 62
        grupos cíclicos, 46
        grupos dicíclicos, 57
        grupos diedrais, 46
        produto de grupos cíclicos, 52
        produto direto, 51

representação parcial, 7, 23, 25
    ajustada, 25
    de grau finito, 23
    elementar, 31
    projetiva, 1, 13, 14
    separadora, 25
reticulado, 11, 40
    completo, 11
    limitado, 11

semigrupo
    0-simples, 9
    completamente 0-simples, 9, 10
    completamente semissimples, 10
    completamente simples, 9
    inverso, 8
    K-cancelativo, 12
    K-semigrupo, 12
    semissimples, 10
    simples, 9
semirreticulado, 11

$\mathcal{T}$-órbita, 33–35
transversal, 31

vértice total, 39