**A construção do grau topológico
e sua aplicação a um sistema diferencial
não linear com condições de contorno**

Adriano Leandro da Costa Peixoto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri

São Paulo, fevereiro de 2014

**A construção do grau topológico
e sua aplicação a um sistema diferencial
não linear com condições de contorno**

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Adriano Leandro da Costa
Peixoto, e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 06 de maio de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Pierluigi Benevieri (orientador) - IME/USP

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva - UFSCAR

Notações

$\operatorname{sgn} x$	pag. 14	-1 se $x < 0$; 0 se $x = 0$; 1 se $x > 0$
$\det$	pag. 14	determinante de uma matriz
∂	pag. 16	bordo topológica
δ	pag. 16	bordo diferencial
conv	pag. 17	envoltório convexo
$\sup$	pag. 18	supremo
$\inf$	pag. 18	ínfimo
$ \cdot $	pag. 19	norma de um elemento de $\mathbb{R}$
(f, U, y)	pag. 22	terna admissível para o grau topológico de Brouwer
$\deg_B$	pag. 22	grau topológico de Brouwer
$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n\}$	pag. 27	base canônica do $\mathbb{R}^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	pag. 28	produto interno
$\operatorname{span} A$	pag. 28	espaço gerado pelo conjunto A

$V^\perp$	pag. 28	espaço ortogonal ao espaço V
$\text{dist}(x, y)$	pag. 32	distância entre x e y
$\ \cdot\ $	pag. 32	norma de um elemento do $\mathbb{R}^n$, $n > 1$
$B_\alpha(x)$	pag. 33	bola aberta de centro x e raio α
$\max\{x, y\}$	pag. 54	o máximo entre os valores de $x, y \in \mathbb{R}$
(f, U, y)	pag. 68	terna admissível para o grau topológico de Leray-Schauder
deg_{LS}	pag. 73	grau topológico de Leray-Schauder
C	pag. 84	$C([0, T], \mathbb{R}^n)$
C^1	pag. 84	$C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$
C_T	pag. 84	$\{u \in C : u(0) = u(T)\}$
C_T^1	pag. 84	$\{u \in C^1 : u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)\}$
L^1	pag. 84	$L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$
L_m^1	pag. 84	$\{h \in L^1 : \int_0^T h(t)dt = 0\}$
$\ \cdot\ _0$	pag. 84	norma de um elemento de C
$\ \cdot\ _1$	pag. 84	norma de um elemento de C^1
$\ \cdot\ _{L_1}$	pag. 84	norma de um elemento de L_1
N_f	pag. 93	operador de Nemytski

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a construção do grau topológico em dimensão finita e infinita. Veremos, também, algumas de suas propriedades e aplicações topológicas, como o clássico Teorema de ponto fixo de Brouwer. Seguindo o que fizeram Manásevich e Mawhin no artigo “*Periodic Solutions for Nonlinear Systems with p -Laplacian-Like Operators*”, Journal of Differential Equations, vol. 145, p. 367-393, 1998”, vamos provar a existência de soluções para um sistema diferencial não linear com condições de contorno, usando, entre outras ferramentas, o grau topológico.

Palavras-chave: teoria do grau, grau de Brouwer, grau de Leray-Schauder.

Abstract

The main purpose of this work is the construction of the topological degree in finite and infinite dimension. In addition, we will see some of its properties and topological applications. Following the approach of Manásevich and Mawhin in the paper “*Periodic Solutions for Nonlinear Systems with p -Laplacian-Like Operators*. Journal of Differential Equations, vol. 145, p. 367-393, 1998”, we will prove the existence of solutions for a nonlinear differential system with boundary conditions, using, among other tools, the topological degree.

Keywords: degree theory, Brouwer degree, Leray-Schauder degree.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	13
1.1 Álgebra linear	13
1.2 Topologia diferencial	16
1.3 Análise	16
1.4 Topologia geral	19
2 Grau topológico em dimensão finita	21
2.1 Definição do grau para valores regulares	22
2.2 Definição do grau para valores críticos	32
2.3 Definição do grau para funções contínuas	34
2.4 Propriedades do grau topológico de Brouwer	36
2.5 Grau de Brouwer em espaços normados	45
3 Algumas aplicações do grau de Brouwer	53
3.1 Teorema do ponto fixo de Brouwer	53
3.2 Teorema de Borsuk	56
4 Grau topológico em dimensão infinita	65
4.1 Introdução ao grau de Leray-Schauder	65
4.2 Grau de Leray-Schauder	68
4.3 Propriedades do grau de Leray-Schauder	73
5 Sistemas não lineares	83
5.1 Introdução	83
5.2 Problema auxiliar	84
5.3 Problema principal	93

Introdução

Neste trabalho, vamos apresentar uma ferramenta muito importante da Análise funcional não linear chamada *grau topológico*. O grau topológico nos fornece informações sobre soluções de equações do tipo

$$f(x) = y,$$

onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função dada entre, por exemplo, espaços euclidianos ($\mathbb{R}^n$), variedades diferenciáveis ou espaços normados de dimensão finita ou infinita, y é um ponto dado em Y e $U \subseteq X$ é um conjunto onde procuramos as soluções. Esta ferramenta é uma função que associa a cada terna do tipo (f, U, y) um número inteiro.

A construção e as propriedades do grau topológico nos permitem obter informações sobre a equação $f(x) = y$ em U . Tais informações podem ser, por exemplo, existência e localização de soluções. Isso será possível graças às propriedades que a construção do grau topológico permitirá provar. Por exemplo, a propriedade, talvez, mais importante é chamada de *existência de solução*. Tal propriedade diz que, se o grau topológico da terna (f, U, y) é não nulo, então a equação $f(x) = y$ possui solução em U . Uma outra propriedade é um tipo de invariância do grau topológico por homotopias. Algumas vezes podemos nos deparar com uma função f muito complicada, de tal maneira que se torna difícil determinar o grau topológico da terna (f, U, y) . Entretanto, veremos que, se conseguirmos deformar continuamente a função f a uma função mais simples, g , o grau topológico da terna (g, U, y) será igual ao grau topológico da terna (f, U, y) .

No Capítulo 1 deste trabalho, veremos alguns resultados preliminares de Álgebra linear, Topologia geral, Topologia diferencial e Análise que serão usados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, faremos a construção do grau topológico em espaços de dimensão finita, também chamado de Grau topológico de Brouwer. As principais referências deste capítulo são [13, Outerelo & Ruiz], [6, Fonseca & Gangbo] e [5, Deimling].

No Capítulo 3, vamos ver o Teorema do ponto fixo de Brouwer e o Teorema de Borsuk, que são dois exemplos de aplicação do grau de Brouwer. Esses teoremas podem ser encontrados em [13, Outerelo & Ruiz] e [6, Fonseca & Gangbo].

No Capítulo 4, vamos estudar o grau topológico em espaços de Banach de dimensão infinita, conhecido como Grau de Leray-Schauder. As referências para este capítulo são [12, Mawhin] e [6, Fonseca & Gangbo].

No último capítulo deste trabalho, Capítulo 5, usaremos o grau topológico para mostrar a existência de soluções para um sistema de equações diferenciais não lineares com condições de contorno. Este capítulo é nortado pelo artigo [11, Manásevich & Mawhin].

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, precisaremos de alguns resultados básicos de Álgebra linear, Topologia geral, Topologia diferencial e Análise. Neste capítulo, apresentaremos tais resultados.

1.1 Álgebra linear

Os resultados a seguir são referentes a bases de espaços vetoriais e determinantes de matrizes.

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e considere B_1 e B_2 duas bases de V . Então, as bases B_1 e B_2 são *equivalentes* se a matriz de mudança de base entre B_1 e B_2 tem determinante positivo.

Proposição 1.2. *Sejam V e W espaços vetoriais reais de mesma dimensão finita e $L : V \rightarrow W$ um isomorfismo. Considere B e C bases de V e W , respectivamente, tais que a matriz A do operador linear L nestas bases tem determinante positivo. Então, a base $\hat{B} = L^{-1}(C)$ de V é equivalente à base B .*

Demonstração. Seja M a matriz de mudança de base de $\hat{B}$ para B . Note que as colunas da matriz M são formadas pelas coordenadas dos vetores de $\hat{B}$ escritos na base B e as colunas da matriz A^{-1} são formadas pelas coordenadas das imagens dos vetores de C pelo operador L^{-1} escritos na base B . Como $\hat{B} = L^{-1}(C)$, então $M = A^{-1}$. Desde que $\det A^{-1} > 0$, temos $\hat{B}$ equivalente à B . $\square$

Proposição 1.3. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo e A a matriz associada a T na base canônica. Considere uma outra base B do $\mathbb{R}^n$ e a matriz $\hat{A}$*

associada a T , onde fixamos a base B no domínio e a canônica no contradomínio. Então, $\operatorname{sgn} \det \hat{A} = \operatorname{sgn} \det A$ se, e somente se, B é equivalente à base canônica.

Demonstração. Sejam Σ_n a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e M a matriz de mudança da base Σ_n para a base B . Observe o seguinte:

- As colunas da matriz A são formadas pelas coordenadas das imagens dos vetores de Σ_n pelo operador T escritas na base Σ_n ;
- As colunas da matriz $\hat{A}^{-1}$ são formadas pelas coordenadas das imagens dos vetores de Σ_n pelo operador T^{-1} escritos na base B .

Da observação acima, concluímos que as colunas da matriz $\hat{A}^{-1}A$ são formadas pelas coordenadas das imagens dos vetores de Σ_n pelo operador $T^{-1} \circ T = I$ escritos na base B . Então, $M = \hat{A}^{-1}A$.

Sabemos, pela Definição 1.1, que as bases Σ_n e B serem equivalentes é o mesmo que dizer que $\det M > 0$. Desta forma, temos

$$\det M > 0 \Leftrightarrow \det \hat{A}^{-1}A > 0 \Leftrightarrow \det \hat{A}^{-1} \cdot \det \hat{A} > 0.$$

Sendo assim,

$$\operatorname{sgn} \det A = \operatorname{sgn} \det \hat{A}.$$

□

Proposição 1.4. *Considere um espaço vetorial V de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Sejam $L : V \rightarrow V$ um isomorfismo, α uma base de V fixada e A_α a matriz de L na base α . Então, $\det A_\alpha$ não depende de α .*

Demonstração. Sejam β uma base qualquer de V e M a matriz de mudança da base α para a base β . Desta forma, M^{-1} é a matriz de mudança da base β para a base α . Observe que, se A_β é a matriz de L na base β , então

$$A_\beta = MA_\alpha M^{-1},$$

portanto

$$\det A_\beta = \det A_\alpha.$$

□

Proposição 1.5. *Sejam V e W dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Considere os isomorfismos $L : V \rightarrow V$, $S : V \rightarrow W$ e $S \circ L \circ S^{-1} : W \rightarrow W$. Fixadas as bases de V e W , se A é a matriz associada a L e B a matriz associada a $S \circ L \circ S^{-1}$ nestas bases, então $\det A = \det B$.*

Demonstração. Seja M a matriz associada a S na base fixada de W . Temos

$$B = MAM^{-1},$$

portanto

$$\det A = \det B.$$

□

A prova da proposição a seguir pode ser encontrada em [8, Hoffman & Kunze].

Proposição 1.6. *Considere uma matriz em blocos de ordem n da seguinte forma*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz $r \times r$, C é uma matriz $s \times s$, B é uma matriz $r \times s$ e 0 é a matriz nula $s \times r$. Então,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

Analogamente, se a matriz em blocos é da forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz $r \times r$, C é uma matriz $s \times s$, B é uma matriz $s \times r$ e 0 é a matriz nula $r \times s$, então

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

1.2 Topologia diferencial

Nesta seção, veremos alguns resultados de topologia diferencial. Consideramos conhecidas as definições de variedade diferenciável com bordo e sem bordo e, também, o conceito de difeomorfismo entre variedades.

Usaremos o símbolo δX para denotar o bordo diferencial da variedade X . Vale lembrar que δX é uma variedade diferenciável sem bordo com dimensão igual a $\dim X - 1$. Ressaltamos que as variedades que aparecem no desenvolvimento deste trabalho são subvariedades do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

No caso em que X for um subconjunto de um espaço topológico Y , o símbolo ∂X denotará o bordo topológico de X .

Definição 1.7. Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ de classe C^1 . Dizemos que $x \in X$ é *ponto regular* de f se $f'(x)$ é sobrejetor. Caso contrário dizemos que x é *ponto crítico* de f . Além disso, se $y \in Y$ é tal que $f^{-1}(y)$ contém pelo menos um ponto crítico, dizemos que y é *valor crítico* de f . Se $f^{-1}(y)$ é vazio ou contém apenas pontos regulares, dizemos que y é *valor regular* de f .

As próximas três proposições podem ser encontradas em [13, Outerele & Ruiz].

Proposição 1.8. *Considere X e Y variedades diferenciáveis, X com bordo e Y sem bordo, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função de classe C^1 . Seja $y \in Y$ um valor regular de f e de $f|_{\delta X}$. Então, $f^{-1}(y)$ é uma variedade com bordo $f^{-1}(y) \cap \delta X$, cuja dimensão é $\dim(X) - \dim(Y)$.*

Proposição 1.9. *Toda variedade de dimensão 1, compacta, conexa e com bordo é difeomorfa ao intervalo $[0, 1]$, se tiver bordo, ou a S^1 , caso contrário.*

Proposição 1.10 (Teorema de Sard). *Considere X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ de classe C^k , com $k > \dim X - \dim Y$. Então, o conjunto dos valores regulares de f é denso em Y .*

1.3 Análise

Iniciamos esta seção com resultados referentes a conjuntos convexos.

Definição 1.11. Sejam V um espaço vetorial e $C \subseteq V$ um conjunto qualquer. Dizemos que C é *convexo* se

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

para todo $x, y \in C$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Lema 1.12. *Sejam C um conjunto convexo e $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$. Então, todos os elementos da forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, onde $\alpha_i \geq 0$ para todo i e $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, pertencem a C .*

Demonstração. Vamos provar por indução em n . Para $n = 2$, pela Definição 1.11, o resultado é verdadeiro. Suponha que o resultado seja verdadeiro para $n - 1$.

Assuma que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} = \beta$, então cada α_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) é zero e $\alpha_n = 1$, o que implica

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in C.$$

Desta forma, podemos assumir que $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} > 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1$. Então, pela hipótese de indução,

$$\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1} \in C.$$

Consequentemente, como C é convexo,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1} \right) + \alpha_n x_n \in C.$$

O que completa a prova. $\square$

Definição 1.13. Sejam V um espaço vetorial e $D \subseteq V$ um conjunto qualquer. Chamamos de *envoltório convexo* de D a intersecção de todos os conjuntos convexos que contêm D . Denotaremos o envoltório convexo de D por $\text{conv}D$.

Lema 1.14. *Sejam V um espaço vetorial e $D \subseteq V$ um conjunto qualquer. Então,*

$$\text{conv}D = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in D; \lambda_i \in [0, 1] \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Faça

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in D; \lambda_i \in [0, 1] \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vamos provar que $K = \text{conv}D$. Observe que, por definição, K é convexo. Além disso, é imediato ver que $D \subseteq K$ e, portanto, $\text{conv}D \subseteq K$. Pelo Lema 1.12, qualquer conjunto convexo contendo D tem que conter K , em particular, $K \subseteq \text{conv}D$. Logo, $\text{conv}D = K$. $\square$

A seguir, apresentamos um importante teorema de extensão de funções contínuas, cuja demonstração pode ser encontrada em [6, Fonseca & Gangbo, pag. 16].

Teorema 1.15 (Teorema de extensão de Tietze). *Sejam X um espaço métrico, $A \subseteq X$ um conjunto fechado e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então, existe uma função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g|_A = f$ e*

$$\sup_{x \in X} g(x) = \sup_{x \in A} f(x) \quad \text{e} \quad \inf_{x \in X} g(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

O teorema de Tietze acima tem uma extensão imediata ao caso em que o contradomínio de f tem dimensão $m > 1$. Veja [6, Fonseca & Gangbo].

Proposição 1.16. *Sejam $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ dois conjuntos compactos tais que $K \subseteq L$. Considere uma função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então, existe uma função contínua $g : L \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|_K = f$ e*

$$\sup \left\{ \sup_{x \in K} f_i(x) : i = 1, \dots, m \right\} = \sup \left\{ \sup_{x \in L} g_i(x) : i = 1, \dots, m \right\},$$

onde f_i e g_i denotam as i -ésimas coordenadas de f e g , respectivamente.

Os dois resultados e a definição que seguem podem ser encontrados em [3, Bartle]

Proposição 1.17 (Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Seja f uma função contínua em um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}$. Então f pode ser aproximada uniformemente por uma função polinomial.*

Definição 1.18. Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Um conjunto $\mathcal{F}$ de funções $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamado de *equicontínuo* em K se, para cada $\epsilon > 0$, existir um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, se $x, y \in K$ e $|x - y| < \delta(\epsilon)$ e $f \in \mathcal{F}$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Proposição 1.19 (Teorema de Ascoli-Arzelà). *Sejam K um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma família de funções contínuas em K com valores no $\mathbb{R}^m$. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (a) A família $\mathcal{F}$ é limitada e equicontínua em K .
- (b) Toda sequência em $\mathcal{F}$ tem uma subsequência uniformemente convergente em K .

O próximo resultado pode ser encontrado em [1, Apostol].

Proposição 1.20 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções Lebesgue-integráveis em um intervalo I . Assuma que*

- i) (f_n) converge para f quase sempre em I .
- ii) Existe uma função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa e Lebesgue-integrável tal que, para todo $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{para quase todo } x \in I.$$

Então, f é Lebesgue-integrável, a sequência $(\int_I f_n)$ converge e

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

O resultado que segue pode ser encontrado em [10, Elon].

Proposição 1.21 (Teorema da função inversa). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existe uma bola aberta $B \subseteq U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto V que contém $f(a)$.*

1.4 Topologia geral

Nesta seção M e N são espaços métricos.

Definição 1.22. Sejam $\Omega \subseteq M$ um subconjunto qualquer e $f : M \rightarrow N$ uma função. Então, dizemos que f é *própria* em Ω se $f^{-1}(K) \cap \Omega$ é compacto em M para todo K subconjunto compacto de N .

Definição 1.23. Considere uma função $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f é *fechada*, se $f(F)$ é um conjunto fechado em N para todo F fechado em M .

Proposição 1.24. *Se $f : M \rightarrow N$ é contínua e própria nos fechados de M , então f é fechada.*

Demonstração. Fixe $F \subseteq M$ fechado. Considere uma sequência $(y_n) \subseteq f(F)$ convergente para $y \in N$. Seja $K = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$, que é compacto em N , portanto, por hipótese, $f^{-1}(K) \cap F$ é compacto em M . Agora, considere uma sequência $(z_n) \subseteq F$ tal que, para cada n , $f(z_n) = y_n$. Desta forma, $(z_n) \subseteq f^{-1}(K) \cap F$. Pela compacidade de $f^{-1}(K) \cap F$, existe uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) que converge para algum z em $f^{-1}(K) \cap F$. Sendo f contínua, segue que $f(z_{n_k})$ converge para $f(z)$, mas $f(z_{n_k})$ é uma subsequência de (y_n) , portanto $f(z_{n_k})$ converge para y . Pela unicidade do limite, temos $f(z) = y$. Como $z \in F$, então $y \in f(F)$. Logo, $f(F)$ é fechado. $\square$

A seguir, apresentamos um resultado no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.25. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $\overline{U}$ e de classe C^1 em U . Se y é valor regular de f em U e $y \notin f(\partial U)$, então $f^{-1}(y) \cap U$ é um conjunto finito.*

Demonstração. Podemos supor $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$. Como y é valor regular e f em U , então $f'(x)$ é sobrejetor para todo $x \in f^{-1}(y) \cap U$. Portanto, usando o Teorema da Função Inversa, conseguimos, para cada $x_0 \in f^{-1}(y) \cap U$, uma vizinhança U_{x_0} de x_0 tal que $f^{-1}(y) \cap U_{x_0} = \{x_0\}$. Assim, os pontos $x \in f^{-1}(y) \cap U$ são isolados. Este fato garante que $f^{-1}(y) \cap U$ é finito, pois caso contrário, como $\overline{U}$ é compacto, $f^{-1}(y) \cap U$ tem um ponto de acumulação $\bar{x} \in \overline{U}$. Sendo f contínua, temos $f(\bar{x}) = y$ e como $y \notin f(\partial U)$, obtemos $\bar{x} \in U$. Desta forma, encontramos $\bar{x} \in f^{-1}(y) \cap U$ com $\bar{x}$ não sendo ponto isolado, o que é uma contradição. Logo, $f^{-1}(y) \cap U$ é finito. $\square$

Capítulo 2

Grau topológico em dimensão finita

Como dito na introdução deste trabalho, o grau topológico é uma ferramenta que ajuda no estudo de equações do tipo $f(x) = y$, onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função dada e X e Y podem ser, por exemplo, espaços euclidianos, variedades diferenciáveis ou espaços normados de dimensão infinita. Além disso, $y \in Y$ é um ponto dado e $U \subseteq X$ é um conjunto onde as soluções estão sendo procuradas.

Neste capítulo vamos construir o grau topológico para funções definidas entre espaços vetoriais reais, normados e de dimensão finita, em particular, $\mathbb{R}^n$. Este grau topológico é conhecido como grau topológico de Brouwer, definido por Brouwer em [4]. A teoria do grau topológico de Brouwer pode ser encontrada, por exemplo, em [6, Fonseca & Gangbo] e [5, Deimling].

Na prática, para construir o grau topológico de Brouwer, vamos estabelecer uma família T de ternas (f, U, y) , que chamaremos de admissíveis. O grau topológico de Brouwer será uma função $\deg_B : T \rightarrow \mathbb{Z}$, ou seja, uma função que associa a cada terna admissível um número inteiro. A forma que fazemos a construção desta função e as consequentes propriedades que ela verifica permitem obter informações sobre a equação $f(x) = y$ em U .

No primeiro momento, o espaço de dimensão finita considerado será o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Neste caso, primeiramente, a função f será de classe C^2 em U e y um valor regular de f em U . Em seguida, estenderemos a definição de grau topológico ao caso em que y será valor crítico de f em U , mantendo, ainda, f de classe C^2 . O próximo passo será estender tal definição ao caso em que f será contínua. Tendo definido o grau topológico, apresentaremos uma lista de suas propriedades.

Em um segundo momento, vamos considerar um espaço normado qualquer de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. E então, seguiremos um caminho análogo ao feito no caso $\mathbb{R}^n$.

A partir deste ponto, diremos, simplesmente, *grau* em vez de *grau topológico*.

2.1 Definição do grau para valores regulares

Iniciaremos a construção do grau de Brouwer com a seguinte definição.

Definição 2.1 (Terna admissível). Considere Ω um subconjunto qualquer do $\mathbb{R}^n$ e U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com $\overline{U} \subseteq \Omega$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $\overline{U}$ e $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f(x) \neq y$ para todo x que pertence ao bordo (no sentido topológico) ∂U de U , então dizemos que (f, U, y) é uma *terna admissível* para o grau topológico.

Segue agora a definição do grau de Brouwer para um caso específico, como veremos em seu enunciado.

Definição 2.2. Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Então, definimos o *grau de Brouwer* de (f, U, y) como

$$\deg_B(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} f'(x), \quad (2.1)$$

onde $\operatorname{sgn} f'(x)$ denota o sinal do determinante da matriz associada ao operador linear $f'(x)$ em qualquer base. Se $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$, definimos

$$\deg_B(f, U, y) = 0.$$

Pelo Lema 1.25, $f^{-1}(y) \cap U$ é um conjunto finito e portanto o segundo membro da fórmula (2.1) é uma soma finita, logo, neste caso particular, o grau de Brouwer está bem definido.

A função dada pela fórmula (2.1), definida em um subconjunto do conjunto das ternas admissíveis, possui as propriedades que veremos a seguir.

Proposição 2.3. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. (Normalização). *Sejam $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função identidade e U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\deg_B(I, U, y) = 1, \forall y \in U.$$

2. (Translação). *Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f - y, U, 0).$$

3. (Aditividade). *Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Se $U_1, U_2 \subseteq U$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U_1, y) + \deg_B(f, U_2, y).$$

4. (Invariância local). *Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $\deg_B(f, U, z)$ está definido e*

$$\deg_B(f, U, z) = \deg_B(f, U, y).$$

5. (Invariância homotópica). *Sejam U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $\overline{U} \times [0, 1]$ e de classe C^2 em $U \times [0, 1]$. Considere $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(x, \lambda) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Denotando $H_0 = H(\cdot, 0)$ e $H_1 = H(\cdot, 1)$, se y é valor regular para $H_0|_U$ e $H_1|_U$, então*

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

Demonstração. 1 - Pela Definição 2.2, é evidente.

2 - Definindo $g = f - y$, notamos que $f(x) = y$ se, e somente se, $g(x) = 0$ e que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in U$. Desta forma, temos $f^{-1}(y) = g^{-1}(0)$, portanto

$$\deg_B(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \text{sgn } f'(x) = \sum_{x \in g^{-1}(0) \cap U} \text{sgn } g'(x) = \deg_B(g, U, 0).$$

Logo,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f - y, U, 0).$$

3 - Pela Definição 2.2, é evidente.

4 - Suponha $f^{-1}(y) \cap \overline{U} = \emptyset$, que, pela Definição 2.2, implica

$$\deg_B(f, U, y) = 0.$$

Sendo $\overline{U}$ compacto e $f|_{\overline{U}} : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, segue que $f(\overline{U})$ é compacto e, portanto, fechado. Sendo assim, como $y \notin f(\overline{U})$, então existe

uma vizinhança V de y com $V \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{U})$. Portanto, para todo $z \in V$, $f^{-1}(z) \cap \overline{U} = \emptyset$. Assim, temos $\deg_B(f, U, z) = 0$ para todo $z \in V$. Logo,

$$\deg_B(f, U, z) = \deg_B(f, U, y), \quad \forall z \in V.$$

Agora, vamos supor que $f^{-1}(y) \cap \overline{U} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Afirimo que o conjunto C dos pontos críticos de $f|_{\overline{U}}$ é fechado. De fato, se x é ponto crítico de $f|_{\overline{U}}$, então o determinante da matriz de $f'|_{\overline{U}}(x)$ é nulo. Como a função que a cada ponto x associa o determinante da matriz de $f'|_{\overline{U}}(x)$ é contínua, então C é fechado, pois C é a imagem inversa do 0 por uma função contínua. Como C é fechado dentro de um compacto, então C é compacto. Segue que $f(C)$ é compacto, portanto, é fechado. Como $y \notin f(C)$, então existe uma vizinhança $\widehat{V}$ de y formada apenas por valores regulares de $f|_{\overline{U}}$. Usando o fato que $f(\partial U)$ é fechado e que $y \notin f(\partial U)$, podemos tomar $\widehat{V}$ de tal maneira que $\widehat{V} \cap f(\partial U) = \emptyset$. Logo, $\deg_B(f, U, z)$ existe para todo $z \in \widehat{V}$.

Vamos mostrar que temos uma vizinhança V de y , dentro de $\widehat{V}$, tal que o grau de (f, U, z) não depende de $z \in V$. Pelo Teorema da Função Inversa existem vizinhanças $U_1, \dots, U_k$ de $x_1, \dots, x_k$, respectivamente, e vizinhanças $V_1, \dots, V_k$ de y tais que, para todo $1 \leq j \leq k$,

$$f|_{U_j} : U_j \rightarrow V_j$$

é um difeomorfismo. Sejam

$$\mathcal{V} = \bigcap_j V_j \quad \text{e, para cada } j, \quad \mathcal{U}_j = f^{-1}(\mathcal{V}) \cap U_j.$$

Desta forma, segue que, para cada j ,

$$f_j = f|_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{V}$$

é um difeomorfismo, e portanto $\text{sgn } f'_j(x)$ é constante em $\mathcal{U}_j$.

Considere

$$V = \mathcal{V} \setminus f\left(\overline{U} \setminus \bigcup_j \mathcal{U}_j\right).$$

Agora, observe o seguinte:

- i - Como $\overline{U} \setminus \bigcup_j \mathcal{U}_j$ é compacto, então $f(\overline{U} \setminus \bigcup_j \mathcal{U}_j)$ é fechado. Logo, V é aberto;
- ii - $y \in V$, pois $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \bigcup_j \mathcal{U}_j$;

iii - Fixe $z \in V$. Então, $z \in \mathcal{V}$. Sendo, para cada j , f_j uma função bijetora, então $f^{-1}(z) \cap \mathcal{U}_j$ é um conjunto unitário que chamaremos de $\{a_j\}$. Sendo assim, $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq f^{-1}(z) \cap U$. Agora, suponha que exista $a \in f^{-1}(z) \cap U$ tal que $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Então, como cada f_j é bijetora, $a \notin \bigcup_j \mathcal{U}_j$. Desta forma, $f(a) \in f(\overline{U} \setminus \bigcup_j \mathcal{U}_j)$ e $z = f(a) \notin V$, o que é contradição. Portanto, $f^{-1}(z) \cap U \subseteq \{a_1, \dots, a_k\}$. Logo, $f^{-1}(z) \cap U = \{a_1, \dots, a_k\}$.

Como, para cada j , $f|_{\mathcal{U}_j} : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{V}$ é um difeomorfismo, segue que

$$\text{sgn } f'(a_j) = \text{sgn } f'(x_j).$$

Desta forma, concluímos que, para todo $z \in V$,

$$\deg_B(f, U, z) = \sum_j \text{sgn } f'(a_j) = \sum_j \text{sgn } f'(x_j) = \deg_B(f, U, y).$$

5 - Vamos dividir essa demonstração em dois casos. No primeiro, vamos supor y valor regular de $H|_{U \times [0,1]}$ e, no segundo, vamos excluir esta hipótese.

Caso 1: suponha y valor regular de $H|_{U \times [0,1]}$. Pela Proposição 1.8, sabemos que $H^{-1}(y)$ é uma variedade com bordo de dimensão 1 e

$$\delta H^{-1}(y) = H^{-1}(y) \cap \delta(U \times [0, 1]) = H_0^{-1}(y) \cup H_1^{-1}(y). \quad (2.2)$$

Agora, usando a Proposição 1.9, segue que cada componente conexa de $H^{-1}(y)$ é difeomorfa ao intervalo $[0, 1]$ ou à circunferência S^1 . Se C for uma componente conexa de $H^{-1}(y)$ difeomorfa à circunferência S^1 , então C não terá bordo, portanto, por (2.2),

$$H_0^{-1}(y) \cap C = \emptyset \quad \text{e} \quad H_1^{-1}(y) \cap C = \emptyset.$$

Diante deste fato e observando que para os cálculos dos graus de (H_0, U, y) e (H_1, U, y) serão usados pontos que pertencem a $H_0^{-1}(y) \cup H_1^{-1}(y)$, concluímos que os pontos das componentes conexas difeomorfas à circunferência S^1 podem ser descartados. Esta situação está ilustrada na figura abaixo:

No caso em que C seja uma componente conexa de $H^{-1}(y)$ difeomorfa ao intervalo $[0, 1]$, C tem exatamente dois pontos P_0 e P_1 no bordo, onde $\{P_0, P_1\}$ é imagem de $\{0, 1\}$ através de qualquer difeomorfismo de $[0, 1]$ em C . Pode ocorrer uma das seguintes situações:

- (i) $\{P_0, P_1\} \subseteq U \times \{0\}$,
- (ii) $\{P_0, P_1\} \subseteq U \times \{1\}$,
- (iii) P_0, P_1 não pertencem à mesma seção $U \times \{0\}$ ou $U \times \{1\}$.

Ilustramos abaixo essas três situações:

Analisando o caso (i), vamos parametrizar C por

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

com $\gamma(0) = P_0 = (x_0, 0)$, $\gamma(1) = P_1 = (x_1, 0)$ e $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Como, para todo $t \in [0, 1]$, $H(\gamma(t)) = y$ e $\gamma(t)$ é ponto regular de H , então

$$H'(\gamma(t)) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é operador linear sobrejetor. Portanto, para cada $t \in [0, 1]$, $\ker H'(\gamma(t))$ tem dimensão 1 e é gerado por $\gamma'(t)$, pois $\gamma'(t) \neq 0$ e $H'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$.

Sendo $H^j : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a j -ésima componente de H , temos

$$H'(\gamma(0))\gamma'(0) = \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial \lambda}(x_0, 0) \\ \vdots \\ \frac{\partial H^n}{\partial \lambda}(x_0, 0) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(0) \\ \vdots \\ \gamma'_n(0) \\ \gamma'_{n+1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde A é a matriz $n \times n$ do operador linear $H'_0(x_0)$ nas bases canônicas do $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0^1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial H_0^2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_0^n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix},$$

com $\frac{\partial H_0^j}{\partial x_i}$ denotando a derivada da j -ésima coordenada de H_0 com relação a i -ésima coordenada do ponto x .

Agora, vamos supor que $\gamma'_{n+1}(0) = 0$. Desta forma, por (2.3), temos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_0^1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial H_0^2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_0^n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial H_0^n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial H_0^n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(0) \\ \gamma'_2(0) \\ \vdots \\ \gamma'_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo $H'_0(x_0)$ um isomorfismo, segue que $(\gamma'_1(0), \dots, \gamma'_n(0)) = (0, \dots, 0)$. Assim, temos $\gamma'(0) = 0$, o que é uma contradição, pois $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Concluimos, assim, que a condição de que $\gamma'_{n+1}(0) = 0$ é falsa. Portanto, $\gamma'_{n+1}(0) \neq 0$.

Temos provado que $\gamma'_{n+1}(0) \neq 0$ e, além disso, sabemos que $\gamma_{n+1}(0) = 0$. Como $\gamma_{n+1}(t) \in [0, 1]$ para todo t em $[0, 1]$ e denotando a base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\{e_1, \dots, e_{n+1}\},$$

concluimos que

$$\langle \gamma'(0), e_{n+1} \rangle = \gamma'_{n+1}(0) > 0. \quad (2.4)$$

De forma análoga, segue que

$$\langle \gamma'(1), e_{n+1} \rangle = \gamma'_{n+1}(1) < 0. \quad (2.5)$$

Agora, definimos

$$P_t = \begin{cases} \gamma(0) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \gamma(3t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \gamma(1) & \text{se } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

e

$$v_t = \begin{cases} (1-3t)e_{n+1} + 3t\gamma'(0) & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \gamma'(3t-1) & \text{se } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ (3-3t)\gamma'(1) - (3t-2)e_{n+1} & \text{se } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Seja, para cada t , $V_t = \text{span} \{v_t\}$. Note que, para cada $t \in [0, 1]$, V_t tem dimensão 1. De fato, vejamos que v_t é não nulo para todo $t \in [0, 1]$:

- Se $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, temos $v_t = (1-3t)e_{n+1} + 3t\gamma'(0)$. Como $1-3t$ e $3t$ não são simultaneamente nulos e $\langle \gamma'(0), e_{n+1} \rangle > 0$, segue que $v_t \neq 0$.
- Se $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, temos $v_t = \gamma'(3t-1) \neq 0$.
- Se $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, temos $v_t = (3-3t)\gamma'(1) + (3t-2)(-e_{n+1})$. Como $3-3t$ e $3t-2$ não são simultaneamente nulos e $\langle \gamma'(1), -e_{n+1} \rangle > 0$, segue que $v_t \neq 0$.

Denotando por $V_t^\perp$ o espaço ortogonal a V_t , afirmamos que $H'(P_t)|_{V_t^\perp} : V_t^\perp \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Para provarmos tal fato, basta mostrar que $V_t^\perp$ não contém o núcleo de $H'(P_t)$. Observe que:

- se $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, então o núcleo é gerado por $\gamma'(0)$;
- se $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, então o núcleo é gerado por $\gamma'(3t - 1)$;
- se $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, então o núcleo é gerado por $\gamma'(1)$.

Dizer que um elemento do núcleo de $H'(P_t)$ não pertence a $V_t^\perp$ é dizer que seu produto escalar com v_t é não nulo. Então, vejamos:

- se $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, então

$$\langle \gamma'(0), v_t \rangle = \langle \gamma'(0), (1 - 3t)e_{n+1} + 3t\gamma'(0) \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \gamma'(0), v_t \rangle = (1 - 3t)\langle \gamma'(0), e_{n+1} \rangle + 3t\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle.$$

Usando (2.4), temos

$$\langle \gamma'(0), v_t \rangle > 0;$$

- se $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, então

$$\langle \gamma'(3t - 1), v_t \rangle = \langle \gamma'(3t - 1), \gamma'(3t - 1) \rangle > 0,$$

pois $\gamma'(3t - 1) \neq 0$, para todo $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$;

- se $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, então

$$\langle \gamma'(1), v_t \rangle = \langle \gamma'(1), (3 - 3t)\gamma'(1) - (3t - 2)e_{n+1} \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \gamma'(1), v_t \rangle = (3 - 3t)\langle \gamma'(1), \gamma'(1) \rangle - (3t - 2)\langle \gamma'(1), e_{n+1} \rangle.$$

Usando (2.5), temos

$$\langle \gamma'(1), v_t \rangle > 0.$$

Portanto, $H'(P_t)|_{V_t^\perp} : V_t^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

Denotando por Σ_n a base canônica do $\mathbb{R}^n$, considere, para cada $t \in [0, 1]$ a base $\tilde{B}_t$ de $V_t^\perp$ obtida por $[H'(P_t)|_{V_t^\perp}]^{-1}(\Sigma_n)$. Note que, para cada $t \in [0, 1]$, $\tilde{B}_t \cup \{v_t\}$ é base do $\mathbb{R}^{n+1}$ e que $V_0^\perp = \mathbb{R}^n \times \{0\} = V_1^\perp$. Agora, definimos, para cada $t \in [0, 1]$, o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} F_t : \quad V_t^\perp \oplus V_t &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (x + \mu v_t) &\longmapsto (H'(P_t)x, \mu). \end{aligned}$$

Seja $B_0 = \tilde{B}_0 \cup \{e_{n+1}\}$ base de $V_0^\perp \oplus \text{span} \{e_{n+1}\}$. Considere, para cada $t \in [0, 1]$, A_t a matriz de F_t nas bases B_0 do $\mathbb{R}^{n+1}$ no domínio e Σ_{n+1} do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ na imagem. Como, para cada $t \in [0, 1]$, F_t é um isomorfismo, então $\det A_t \neq 0$ e, portanto, tem sinal constante. Sendo A_0 a matriz identidade, temos $\det A_t > 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Pela Proposição 1.2, $F_1^{-1}(\Sigma_{n+1})$ é uma base do $\mathbb{R}^{n+1}$ equivalente a B_0 . Pela definição de $\tilde{B}_1$ e como $v_1 = -e_{n+1}$, então

$$F_1^{-1}(\Sigma_{n+1}) = (H'(P_1)|_{V_1^\perp})^{-1}(\Sigma_n) \cup \{-e_{n+1}\} = \tilde{B}_1 \cup \{-e_{n+1}\}.$$

Além disso, a matriz de mudança de base de B_0 para $F_1^{-1}(\Sigma_{n+1})$ é do tipo

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & N & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right),$$

onde N é a matriz de mudança de base de $\tilde{B}_0$ para $\tilde{B}_1$. Como

$$\det M = -1 \cdot \det N > 0,$$

então

$$\det N < 0,$$

o que prova que $\tilde{B}_0$ e $\tilde{B}_1$ não são equivalentes. Desta forma, apenas uma das bases $\tilde{B}_0$ e $\tilde{B}_1$ é equivalente à base Σ_n , portanto, pela Proposição 1.3,

$$\text{sgn } H'_0(x_0) \neq \text{sgn } H'_0(x_1). \quad (2.6)$$

Com uma demonstração análoga, podemos provar, mas não o fazemos, que, no caso (ii),

$$\text{sgn } H'_1(x_0) \neq \text{sgn } H'_1(x_1), \quad (2.7)$$

onde $P_0 = (x_0, 1)$ e $P_1 = (x_1, 1)$. Também de forma análoga, podemos provar (não exibimos a prova) que, no caso (iii),

$$\operatorname{sgn} H'_0(x_0) = \operatorname{sgn} H'_1(x_1), \quad (2.8)$$

onde $P_0 = (x_0, 0)$ e $P_1 = (x_1, 1)$.

Neste ponto, vamos dividir as componentes conexas dos casos (i), (ii) e (iii), que são em número finito, da seguinte maneira:

- $\Gamma_0 \subseteq U \times \{0\}$ é o conjunto dos pontos em $U \times \{0\}$ das bordas das componentes conexas representadas no caso (i);
- $\Gamma_1 \subseteq U \times \{1\}$ é o conjunto dos pontos em $U \times \{1\}$ das bordas das componentes conexas representadas no caso (ii);
- $\Lambda_0 \subseteq U \times \{0\}$ é o conjunto dos pontos em $U \times \{0\}$ das bordas das componentes conexas representadas no caso (iii);
- $\Lambda_1 \subseteq U \times \{1\}$ é o conjunto dos pontos em $U \times \{1\}$ das bordas das componentes conexas representadas no caso (iii).

Segue que

$$\deg_B(H_0, U, y) = \sum_{(x,0) \in \Gamma_0} \operatorname{sgn} H'_0(x) + \sum_{(x,0) \in \Lambda_0} \operatorname{sgn} H'_0(x)$$

e

$$\deg_B(H_1, U, y) = \sum_{(x,1) \in \Gamma_1} \operatorname{sgn} H'_1(x) + \sum_{(x,1) \in \Lambda_1} \operatorname{sgn} H'_1(x)$$

Por (2.6) e (2.7), obtemos

$$\sum_{(x,0) \in \Gamma_0} \operatorname{sgn} H'_0(x) = \sum_{(x,1) \in \Gamma_1} \operatorname{sgn} H'_1(x) = 0.$$

Portanto,

$$\deg_B(H_0, U, y) = \sum_{(x,0) \in \Lambda_0} \operatorname{sgn} H'_0(x)$$

e

$$\deg_B(H_1, U, y) = \sum_{(x,1) \in \Lambda_1} \operatorname{sgn} H'_1(x)$$

Finalmente, por (2.8),

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y),$$

que prova a invariância homotópica no caso 1.

Caso 2: vamos desconsiderar agora a hipótese de y ser valor regular para $H|_{U \times [0,1]}$. Pelo item 4 acima, existe uma vizinhança V de y tal que

$$\deg_B(H_0, U, z) = \deg_B(H_0, U, y) \quad \text{e} \quad \deg_B(H_1, U, z) = \deg_B(H_1, U, y)$$

para todo $z \in V$. Agora, como H é de classe C^2 em $U \times [0, 1]$, podemos usar o Teorema de Sard e concluir que V contém algum valor regular (de fato, infinitos) $\hat{z}$ de $H|_{U \times [0,1]}$. Pelo *caso 1*, temos

$$\deg_B(H_0, U, \hat{z}) = \deg_B(H_1, U, \hat{z}).$$

Logo,

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

E a prova é concluída. □

2.2 Definição do grau para valores críticos

Até agora, temos a definição de grau topológico para ternas admissíveis (f, U, y) , com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . O próximo resultado nos permite estender esta definição para o caso em que y seja valor crítico de f em U .

Proposição 2.4. *Considere uma terna admissível (f, U, y) , com f de classe C^2 em U . Sejam z_0, z_1 valores regulares de f em U tais que $\|y - z_i\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$, $i = 0, 1$. Então,*

$$\deg_B(f, U, z_0) = \deg_B(f, U, z_1).$$

Lembre que $\text{dist}(y, f(\partial U)) = \inf_{x \in \partial U} \text{dist}(y, f(x))$.

Demonstração. Observe que a existência de z_0 e z_1 valores regulares de f em U tais que $\|y - z_i\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$, $i = 0, 1$, é garantida pelo Teorema de Sard. Considere a função $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(x, \lambda) = f(x) - [\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_0].$$

Temos

$$H(x, 0) = H_0(x) = f(x) - z_0 \quad \text{e} \quad H(x, 1) = H_1(x) = f(x) - z_1.$$

Portanto, pela Proposição 2.3, item 2,

$$\deg_B(H_0, U, 0) = \deg_B(f, U, z_0) \quad \text{e} \quad \deg_B(H_1, U, 0) = \deg_B(f, U, z_1).$$

Desta forma, basta mostrar que

$$\deg_B(H_0, U, 0) = \deg_B(H_1, U, 0).$$

Como H é uma homotopia C^2 , pela Proposição 2.3, item 5, é suficiente mostrar que $H(x, \lambda) \neq 0$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Para tanto, suponha que para algum $x' \in \partial U$ e para algum $\lambda' \in [0, 1]$ temos $H(x', \lambda') = 0$. Então,

$$f(x') = \lambda' z_1 + (1 - \lambda') z_0.$$

Sejam $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial U))$ e $B_\alpha(y)$ a bola aberta de centro y e raio α . Sendo $B_\alpha(y)$ convexa e $z_0, z_1 \in B_\alpha(y)$, então $\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_0 \in B_\alpha(y)$ para qualquer $\lambda \in [0, 1]$. E como $B_\alpha(y) \cap f(\partial U) = \emptyset$, segue que $f(x') \notin f(\partial U)$, o que é uma contradição. Portanto, $H(x, \lambda) \neq 0$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Logo, $\deg_B(H_0, U, 0) = \deg_B(H_1, U, 0)$, ou seja,

$$\deg_B(f, U, z_0) = \deg_B(f, U, z_1).$$

□

Com o último resultado podemos estender a definição de grau topológico para valores críticos.

Definição 2.5. Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U . Então,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U, \bar{y}),$$

onde $\bar{y}$ é um valor regular qualquer de f em U com $\|y - \bar{y}\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$ e $\deg_B(f, U, \bar{y})$ é dado pela Definição 2.2.

Agora que estendemos a definição de grau para ternas admissíveis (f, U, y) , com f de classe C^2 em U e y valor crítico de f em U , poderíamos apresentar uma lista de propriedades análogas às vistas na Proposição 2.3. Porém, será apresentada, neste momento, somente a extensão da invariância homotópica, pois será de grande importância para estendermos a definição de grau às funções contínuas. Após o término da construção do grau topológico de Brouwer, apresentaremos uma lista mais completa de propriedades.

Proposição 2.6 (Invariância homotópica-caso valor crítico). *Sejam U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $\overline{U} \times [0, 1]$ e de classe C^2 em $U \times [0, 1]$. Considere $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $H(x, \lambda) \neq y$, para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Então,*

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

Demonstração. Usando o Teorema de Sard, tome $z \in \mathbb{R}^n$ valor regular de H_0 e H_1 , com $\|z - y\| < \text{dist}(y, H(\partial U \times [0, 1]))$. Observe que $\|z - y\| < \text{dist}(y, H_0(\partial U))$ e $\|z - y\| < \text{dist}(y, H_1(\partial U))$. Pela Definição 2.5, temos

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_0, U, z)$$

e

$$\deg_B(H_1, U, y) = \deg_B(H_1, U, z).$$

Agora, note que o fato de $\|z - y\| < \text{dist}(y, H(\partial U \times [0, 1]))$ implica que $H(x, \lambda) \neq z$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Desta forma, podemos aplicar a Proposição 2.3, item 5, e concluir que $\deg_B(H_0, U, z) = \deg_B(H_1, U, z)$. Logo,

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

□

2.3 Definição do grau para funções contínuas

Para finalizarmos a construção do grau de Brouwer, vamos estender sua definição às funções contínuas.

Proposição 2.7. *Seja (f, U, y) uma terna admissível e considere $g_0, g_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções contínuas em $\overline{U}$ e de classe C^2 em U tais que*

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|g_i(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

$i = 0, 1$. Então,

$$\deg_B(g_0, U, y) = \deg_B(g_1, U, y).$$

Demonstração. Primeiramente, é importante notar que a existência das funções g_0 e g_1 é garantida pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass.

Defina $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x, \lambda) = \lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_0(x).$$

Note que H é uma homotopia contínua em $\overline{U} \times [0, 1]$ e de classe C^2 em $U \times [0, 1]$ e que $H_0 = g_0$ e $H_1 = g_1$. Portanto, basta provar que

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

Pela Proposição 2.6, é suficiente mostrar que $H(x, \lambda) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Para $x \in \overline{U}$ e $\lambda \in [0, 1]$ temos

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| = \|\lambda g_1(x) + (1 - \lambda)g_0(x) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(x)\|,$$

portanto

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| = \|\lambda(g_1(x) - f(x)) + (1 - \lambda)(g_0(x) - f(x))\|.$$

Pela desigualdade triangular da norma,

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| \leq \lambda\|g_1(x) - f(x)\| + (1 - \lambda)\|g_0(x) - f(x)\|.$$

Segue que

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| \leq \lambda \sup_{x \in \overline{U}} \|g_1(x) - f(x)\| + (1 - \lambda) \sup_{x \in \overline{U}} \|g_0(x) - f(x)\|.$$

Mas, por hipótese,

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|g_i(x) - f(x)\| < \alpha, \quad i = 0, 1,$$

onde $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial U))$. Logo,

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| < \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

A desigualdade acima implica que $H(x, \lambda) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$, pois se existisse $(x_0, \lambda_0) \in \partial U \times [0, 1]$ com $H(x_0, \lambda_0) = y$, teríamos

$$\|H(x_0, \lambda_0) - f(x_0)\| = \|y - f(x_0)\| < \alpha,$$

o que seria uma contradição. Logo,

$$\deg_B(g_0, U, y) = \deg_B(g_1, U, y).$$

□

Agora, podemos concluir a construção do grau topológico, estendendo, finalmente, sua definição às funções contínuas.

Definição 2.8. Sejam (f, U, y) uma terna admissível e $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em $\overline{U}$ e de classe C^2 em U tal que

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|g(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Então, definimos

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y),$$

onde $\deg_B(g, U, y)$ é dado pela Definição 2.5.

2.4 Propriedades do grau topológico de Brouwer

Vimos nas seções anteriores algumas propriedades do grau de Brouwer restritas aos casos particulares das ternas admissíveis (f, U, y) , com f de classe C^2 . Nesta seção, estenderemos aquelas propriedades ao caso geral, onde f é contínua. Além disso, apresentamos outras propriedades.

Proposição 2.9. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. (Normalização) *Sejam $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função identidade e U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$\deg_B(I, U, y) = 1, \forall y \in U.$$

2. (Translação) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f - y, U, 0).$$

3. (Aditividade) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se $U_1, U_2 \subseteq U$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U_1, y) + \deg_B(f, U_2, y).$$

4. (Excisão) *Seja (f, U, y) uma terna admissível e considere um conjunto compacto $K \subseteq \overline{U}$ tal que $y \notin f(K)$. Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U \setminus K, y).$$

5. (Invariância homotópica) *Sejam U um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva contínua tais que $\gamma(t) \notin H_t(\partial U)$, para todo $t \in [0, 1]$. Então, $\deg_B(H_t, U, \gamma(t))$ não depende de t ;*

6. (Continuidade em relação à função f) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda função contínua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ com*

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \epsilon,$$

a terna (g, U, y) é admissível e

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

7. (Invariância local) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $\deg_B(f, U, z)$ está definido e*

$$\deg_B(f, U, z) = \deg_B(f, U, y).$$

8. (Existência de solução) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se*

$$\deg_B(f, U, y) \neq 0,$$

então $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$.

9. (Propriedade do bordo) *Sejam (f, U, y) e (g, U, y) ternas admissíveis. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial U$. Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

10. (Mudança de variável) *Sejam (f, U, y) uma terna admissível, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^2 e $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $g(\bar{E}) = \bar{U}$. Se $p = g^{-1}(y)$, então $(g^{-1} \circ f \circ g, E, p)$ é uma terna admissível e*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g^{-1} \circ f \circ g, E, p).$$

11. (Função oposta) *Se (f, U, y) for uma terna admissível, então $(-f, U, -y)$ será admissível e*

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

Aqui, n é a dimensão do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. 1 - Já foi provada no item 1 da Proposição 2.3.

2 - Seja $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial U)) = \text{dist}(0, f(\partial U) - y)$. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, podemos tomar uma função $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|(g(x) - y) - (f(x) - y)\| = \sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \alpha.$$

Usando a Definição 2.8, segue que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y) \quad \text{e} \quad \deg_B(f - y, U, 0) = \deg_B(g - y, U, 0).$$

Agora, sabendo que $y \notin g(\partial U)$, temos $\text{dist}(y, g(\partial U)) = \beta > 0$. Aplicando o Teorema de Sard, tome z valor regular de g em U tal que $\|z - y\| < \beta$. Pela Definição 2.5,

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(g, U, z).$$

Como $\text{dist}(0, g(\partial U) - y) = \text{dist}(y, g(\partial U)) = \beta$ e $\sup_{x \in \bar{U}} \|(g(x) - y) - (g(x) - z)\| = \|z - y\| < \beta$, então, aplicando novamente a Definição 2.8,

$$\deg_B(g - y, U, 0) = \deg_B(g - z, U, 0).$$

Finalmente, aplicamos a Proposição 2.3, item 2, e concluímos que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f - y, U, 0).$$

3 - Primeiramente, note que $\partial U, \partial U_1$ e ∂U_2 estão contidos em $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$.

Considere $\epsilon > 0$ tal que $\text{dist}(y, f(\bar{U} \setminus U_1 \cup U_2)) = \epsilon$. Podemos tomar uma função $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que $\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Então, $y \notin g(\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$. De fato, se $x \in \bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$ é tal que $g(x) = y$, então

$$\|g(x) - f(x)\| = \|y - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2},$$

o que é contradição. Pela Definição 2.8,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

Para $x \in \partial U$, temos

$$\|y - g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|g(x) - f(x)\| > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, $\text{dist}(y, g(\partial U)) > \frac{\epsilon}{2}$. Usando o Teorema de Sard, tome $z \in \mathbb{R}^n \setminus g(\partial U \setminus U_1 \cup U_2)$, onde z é valor regular de g em U e $\|z - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Pela Definição 2.5, segue que

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(g, U, z).$$

Logo,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, z).$$

De forma análoga, concluímos que

$$\deg_B(f, U_1, y) = \deg_B(g, U_1, z) \quad \text{e} \quad \deg_B(f, U_2, y) = \deg_B(g, U_2, z).$$

Agora, usamos a Proposição 2.3, item 3 e obtemos

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U_1, y) + \deg_B(f, U_2, y).$$

4 - Pelo item 3 acima, segue que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U \setminus K, y) + \deg_B(f, \emptyset, y).$$

A Definição 2.2 implica

$$\deg_B(f, \emptyset, y) = 0.$$

Logo,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U \setminus K, y).$$

5 - Primeiramente, note que a função $(x, t) \mapsto \|\gamma(t) - H_t(x)\|$ é contínua e positiva no compacto $\partial U \times [0, 1]$ e, portanto, tem um mínimo $\epsilon > 0$. Por outro lado, H é uniformemente contínua no compacto $\overline{U} \times [0, 1]$, portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$\|H_t(x) - H_{t'}(x')\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad |t - t'| < \delta \quad \text{e} \quad \|x - x'\| < \delta.$$

Agora, fixe $t_0 \in [0, 1]$. Vamos mostrar que a função $t \mapsto \deg_B(H_t, U, \gamma(t))$ é constante em uma vizinhança de t_0 e, como t_0 é arbitrário, é constante no conexo $[0, 1]$.

Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma função $g : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que $\|g(x) - H_{t_0}(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in \overline{U}$. Daí, temos

$$\|g(x) - H_t(x)\| \leq \|g(x) - H_{t_0}(x)\| + \|H_{t_0}(x) - H_t(x)\| < \epsilon,$$

para todo $x \in \overline{U}$ e para $|t - t_0| < \delta$. Assim,

$$\|g(x) - H_t(x)\| \leq \|\gamma(t) - H_t(x)\| \tag{2.9}$$

para todo $x \in \overline{U}$ e para $|t - t_0| < \delta$. Em particular, para $x \in \partial U$ e $t = t_0$, temos

$$\|g(x) - H_{t_0}(x)\| < \text{dist}(\gamma(t_0), H_{t_0}(\partial U)). \tag{2.10}$$

Portanto, $g(x) \neq \gamma(t_0)$ para todo $x \in \partial U$. Como $g(\partial U)$ é compacto, concluímos que $\text{dist}(\gamma(t_0), g(\partial U)) > 0$. Desta forma, podemos dizer que $|t - t_0| < \delta$ implica

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \text{dist}(\gamma(t_0), g(\partial U)).$$

Agora, usando (2.9) e a Definição 2.8, temos

$$\deg(H_t, U, \gamma(t)) = \deg(g, U, \gamma(t)).$$

Por translação, segue que

$$\deg_B(H_t, U, \gamma(t)) = \deg_B(g - \gamma(t), U, 0).$$

Observando que

$$\begin{aligned} \|(g - \gamma(t)) - (g - \gamma(t_0))\| &= \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \\ &< \text{dist}(\gamma(t_0), g(\partial U)) \\ &= \text{dist}(0, (g - \gamma(t_0))(\partial U)) \end{aligned}$$

e aplicando a Definição 2.8, temos

$$\deg_B(H_t, U, \gamma(t)) = \deg_B(g - \gamma(t_0), U, 0).$$

Logo, a função $t \mapsto \deg_B(H_t, U, \gamma(t))$ é localmente constante e, consequentemente, constante no conexo $[0, 1]$.

6 - Faça $r = \text{dist}(y, f(\partial U))$ e fixe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua com

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \frac{r}{2}.$$

Para mostrar que (g, U, y) é admissível, basta provar que $y \notin g(\partial U)$. Para tanto, fixe $x \in \partial U$. Segue que

$$\|y - g(x)\| = \|y - f(x) + f(x) - g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|f(x) - g(x)\| \geq \frac{r}{2}.$$

Logo, $y \notin g(\partial U)$.

Agora, defina $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Vamos mostrar que $H(x, t) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $t \in [0, 1]$. De fato, fixe $x \in \partial U$ e $t \in [0, 1]$. Então,

$$\|H(x, t) - f(x)\| = \|(1-t)f(x) + tg(x) - (1-t)f(x) - tf(x)\| = t\|g(x) - f(x)\|.$$

Portanto,

$$\|H(x, t) - f(x)\| \leq t \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2}.$$

Logo, $H(x, t) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $t \in [0, 1]$. Desta forma, podemos aplicar o item 5 acima e concluir que

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y),$$

ou seja,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

7- Sejam $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial U))$ e $V = B_\alpha(y)$. Fixe $z \in V$ e considere as funções $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por

$$H(x, t) = f(x) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = ty + (1-t)z.$$

Como V é um conjunto convexo, $\gamma(t) \in V$ para todo $t \in [0, 1]$. Além disso, $V \cap f(\partial U) = \emptyset$. Pela definição de H , temos $H_t(\partial U) = f(\partial U)$ para todo $t \in [0, 1]$. Portanto, $\gamma(t) \notin H_t(\partial U)$ para todo $t \in [0, 1]$. Desta forma, podemos aplicar o item 5 acima e concluir que

$$\deg_B(f, U, z) = \deg_B(f, U, y).$$

8 - Suponha $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$. Então,

$$\text{dist}(y, f(\partial U)) \geq \text{dist}(y, f(\bar{U})) = \epsilon > 0. \quad (2.11)$$

Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe uma função $g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que $\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Pela Definição 2.8,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

Para $x \in \bar{U}$, temos

$$\|y - g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|g(x) - f(x)\| > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Isso implica que $\text{dist}(y, g(\bar{U})) > \frac{\epsilon}{2}$. Desta forma, $g^{-1}(y) \cap U = \emptyset$ e y é valor regular de g em U . Assim, podemos usar a Definição 2.2 e concluir que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y) = 0.$$

Isso contraria a hipótese. Portanto, concluímos que $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$.

9 - Considere a homotopia $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$. Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial U$, então, para todo $x \in \partial U$ e para todo $t \in [0, 1]$, temos

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) = f(x) = g(x).$$

Desta forma, $H(x, t) \neq y$ para todo $(x, t) \in \partial U \times [0, 1]$. Sendo assim, aplicamos o item 5 acima e concluímos que

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y),$$

ou seja,

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

10 - Seja $h = g^{-1} \circ f \circ g$. Primeiramente, como g é difeomorfismo, então $g(\partial E) = \partial U$ e, portanto,

$$x \in \partial E \Rightarrow g(x) \in \partial U \Rightarrow f(g(x)) \in f(\partial U) \Rightarrow f(g(x)) \neq y.$$

Portanto, $g^{-1}(f(g(x))) \neq p$. Logo, $p \notin h(\partial E)$.

Agora, vamos dividir a demonstração em três passos.

Passo 1: Assuma que f seja de classe C^2 e que y seja valor regular de f em U . Neste caso, como g é um difeomorfismo de classe C^2 , temos

$$\deg_B(h, E, p) = \sum_{(g^{-1} \circ f \circ g)(q) = p} \text{sgn } [g^{-1} \circ f \circ g]'(q),$$

portanto

$$\deg_B(h, E, p) = \sum_{(g^{-1} \circ f \circ g)(q) = p} \text{sgn } (g^{-1})'(f(g(q))) \text{sgn } f'(g(q)) \text{sgn } g'(q),$$

ou seja,

$$\deg_B(h, E, p) = \sum_{(g^{-1} \circ f \circ g)(q) = p} \frac{\text{sgn } f'(g(q)) \text{sgn } g'(q)}{\text{sgn } g'(g^{-1}f(g(q)))}.$$

Isso implica que

$$\deg_B(h, E, p) = \sum_{f(g(q)) = g^{-1}(p)} \text{sgn } f'(g(q)) = \sum_{f(g(q)) = y} \text{sgn } f'(g(q)).$$

Então,

$$\deg_B(h, E, p) = \sum_{f(x) = y} \text{sgn } f'(x).$$

Logo,

$$\deg_B(h, E, p) = \deg_B(f, U, y).$$

Passo 2: Agora, assuma que f seja de classe C^2 e que y seja valor crítico de f em U . Aplicando o Teorema de Sard, podemos encontrar uma sequência (y_n) tal que y_n é valor regular de f em U para todo n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Sendo assim, a sequência $(p_n) = g^{-1}(y_n)$ é tal que p_n é valor regular de h em E para todo n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p.$$

Tome N , suficientemente grande, de tal forma que

$$\|y_N - y\| < \text{dist}(y, f(\partial U)) \quad \text{e} \quad \|p_N - p\| < \text{dist}(p, h(\partial E)).$$

Pelo passo anterior e pela Definição 2.5, concluimos que

$$\deg_B(h, E, p) = \deg_B(h, E, p_N) = \deg_B(f, U, y_N) = \deg_B(f, U, y).$$

Passo 3: Finalmente, assuma que f seja contínua. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, podemos tomar uma sequência (f_n) , onde, para cada n , f_n é uma função de classe C^2 e (f_n) converge uniformemente para f . Desta forma, a sequência $(h_n) = (g^{-1} \circ f_n \circ g)$ é tal que, para cada n , h_n é de classe C^2 e (h_n) converge uniformemente para h . Tome N , suficientemente grande, tal que

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|f_N(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$$

e

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|h_N(x) - h(x)\| < \text{dist}(p, h(\partial E)).$$

Usando o passo anterior e a Definição 2.8, concluimos que

$$\deg_B(h_N, E, p) = \deg_B(h, E, p) = \deg_B(f_N, U, y) = \deg_B(f, U, y).$$

11 - Primeiramente, é evidente que $(-f, U, -y)$ é admissível.

Agora, dividiremos a demonstração em três passos.

Passo 1. Suponha f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U .

Note que

$$f^{-1}(y) \cap U = (-f)^{-1}(-y) \cap U.$$

Assim, se $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$, pela Definição 2.2, teríamos

$$\deg_B(f, U, y) = 0 \quad \text{e} \quad \deg_B(-f, U, -y) = 0.$$

Portanto,

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

Do contrário, ou seja, se $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$, então, pela Definição 2.2,

$$\deg_B(-f, U, -y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} [-f'(x)].$$

Lembrando que $\operatorname{sgn} f'(x)$ denota o sinal do determinante da matriz associada ao operador $f'(x)$, segue que

$$\operatorname{sgn} [-f'(x)] = (-1)^n \operatorname{sgn} f'(x).$$

Desta forma,

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} f'(x).$$

Logo, pela Definição 2.2,

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

Passo 2. Suponha f de classe C^2 em U e y valor crítico de f em U . Pelo Teorema de Sard, podemos tomar $z \in \mathbb{R}^n$, valor regular de f em U , tal que

$$\|z - y\| < \operatorname{dist}(y, f(\partial U)).$$

Assim, a Definição 2.5 garante que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U, z)$$

e

$$\deg_B(-f, U, -y) = \deg_B(-f, U, -z).$$

Pelo passo 1,

$$\deg_B(-f, U, -z) = (-1)^n \deg_B(f, U, z).$$

Logo,

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

Passo 3. Finalmente, não acrescentaremos hipóteses sobre f e y . Pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, podemos tomar uma função $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua em $\bar{U}$ e de classe C^2 em U tal que

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Assim, a Definição 2.8 garante que

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y)$$

e

$$\deg_B(-f, U, -y) = \deg_B(-g, U, -y).$$

Pelo passo 2,

$$\deg_B(-g, U, -y) = (-1)^n \deg_B(g, U, y).$$

Logo,

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

□

2.5 Grau de Brouwer em espaços normados reais de dimensão finita

O objetivo desta seção é estender o grau às ternas (f, U, y) , onde f é uma função definida em um subconjunto de um espaço normado real de dimensão finita qualquer.

No restante desta seção, sempre que usarmos o termo *terna admissível*, estaremos nos referindo à definição a seguir.

Definição 2.10. Seja V um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Considere Ω um subconjunto qualquer de V e U um subconjunto aberto e limitado de V com $\bar{U} \subseteq \Omega$. Se $f : \Omega \rightarrow V$ é contínua em $\bar{U}$ e $y \in V$ é tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in \partial U$, então dizemos que (f, U, y) é uma *terna admissível* para o grau topológico.

A construção exposta nesta seção se iniciará com a definição do grau para ternas admissíveis (f, U, y) , onde f é de classe C^2 em U e y é valor regular de f em U . Em seguida, apresentaremos a propriedade da invariância homotópica que, junto com o Teorema de Sard e o Teorema de aproximação de Weierstrass, nos permitirá definir o grau para o caso em que y seja valor crítico de f em U e para o caso em que f seja contínua em U . Para finalizar esta seção, exibiremos uma lista de propriedades do grau.

Definição 2.11. Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Então, definimos o *grau de Brouwer* de (f, U, y) como

$$\deg_B(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} f'(x), \quad (2.12)$$

onde $\operatorname{sgn} f'(x)$ denota o sinal do determinante da matriz associada ao operador linear $f'(x)$ em qualquer base de V . Se $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$, então definimos $\deg_B(f, U, y) = 0$.

Pela Proposição 1.4, $\operatorname{sgn} f'(x)$ não depende da base escolhida para V . Desta forma, o grau está bem definido. É importante observar que esta definição é uma extensão da Definição 2.2, pois, se $V = \mathbb{R}^n$, a fórmula acima coincide com a fórmula (2.1).

O resultado a seguir mostra que, utilizando um isomorfismo qualquer, podemos relacionar os graus definidos em $\mathbb{R}^n$ e em V .

Proposição 2.12. *Seja (f, U, y) uma terna admissível tal que f seja de classe C^2 em U e y valor regular de f em U . Se $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo qualquer, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(h \circ f \circ h^{-1}, h(U), h(y)).$$

O lado esquerdo da igualdade se refere à Definição 2.11, ao passo que o lado direito se refere, ao mesmo tempo, às Definições 2.2 e 2.11.

Demonstração. Sabemos que

$$\deg_B(h \circ f \circ h^{-1}, h(U), h(y)) = \sum_{q \in h(f^{-1}(y))} \operatorname{sgn} [h \circ f \circ h^{-1}]'(q).$$

Como h é linear,

$$\sum_{q \in h(f^{-1}(y))} \operatorname{sgn} [h \circ f \circ h^{-1}]'(q) = \sum_{q \in h(f^{-1}(y))} \operatorname{sgn} [h(f(h^{-1}(q))) f'(h^{-1}(q)) h^{-1}(q)].$$

Pela Proposição 1.5, segue que

$$\deg_B(h \circ f \circ h^{-1}, h(U), h(y)) = \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} f'(x).$$

Logo, pela fórmula (2.12),

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(h \circ f \circ h^{-1}, h(U), h(y)).$$

□

O próximo resultado é a propriedade da invariância homotópica. Este resultado vai permitir definir o grau para valores críticos e para funções contínuas de forma semelhante ao feito para o grau em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.13 (Invariância homotópica). *Seja V um espaço normado de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Sejam U um subconjunto aberto e limitado de V e $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow V$ contínua em $\bar{U} \times [0, 1]$ e de classe C^2 em $U \times [0, 1]$. Considere $y \in V$ tal que $H(x, \lambda) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Denotando $H_0 = H(\cdot, 0)$ e $H_1 = H(\cdot, 1)$, se y é valor regular para $H_0|_U$ e $H_1|_U$, então*

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

Demonstração. Fixe $h : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo qualquer. Pela Proposição 2.12, temos

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(h \circ H_0 \circ h^{-1}, h(U), h(y))$$

e

$$\deg_B(H_1, U, y) = \deg_B(h \circ H_1 \circ h^{-1}, h(U), h(y)).$$

Observe que $h \circ H \circ h^{-1} : h(\bar{U}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma homotopia contínua em $h(\bar{U}) \times [0, 1]$ e de classe C^2 em $h(U) \times [0, 1]$. Além disso,

$$y \notin H_t(\partial U) \Rightarrow h(y) \notin (h \circ H_t)(\partial U) = (h \circ H \circ h^{-1})(h(\partial U)).$$

Portanto, podemos usar a Proposição 2.3, item 5 e concluir que

$$\deg_B(h \circ H_0 \circ h^{-1}, h(U), h(y)) = \deg_B(h \circ H_1 \circ h^{-1}, h(U), h(y)).$$

Logo,

$$\deg_B(H_0, U, y) = \deg_B(H_1, U, y).$$

□

As duas proposições a seguir são análogas, respectivamente, à Proposição 2.4 e à Proposição 2.7. Como as demonstrações também são análogas, as omitimos.

Proposição 2.14. *Considere uma terna admissível (f, U, y) , com f de classe C^2 em U . Sejam z_0, z_1 valores regulares de f em U tais que $\|y - z_i\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$, $i = 0, 1$. Então,*

$$\deg_B(f, U, z_0) = \deg_B(f, U, z_1).$$

Proposição 2.15. *Seja (f, U, y) uma terna admissível e considere $g_0, g_1 : \Omega \rightarrow V$ funções contínuas em $\bar{U}$ e de classe C^2 em U tais que*

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|g_i(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

$i = 0, 1$. Então,

$$\deg_B(g_0, U, y) = \deg_B(g_1, U, y).$$

Da mesma forma que fizemos no caso $\mathbb{R}^n$, podemos apresentar as seguintes definições:

Definição 2.16. *Seja (f, U, y) uma terna admissível com f de classe C^2 em U . Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U, \bar{y}),$$

onde $\bar{y}$ é um valor regular qualquer de f em U com $\|y - \bar{y}\| < \text{dist}(y, f(\partial U))$ e $\deg_B(f, U, \bar{y})$ é dado pela fórmula (2.12).

Definição 2.17. *Sejam (f, U, y) uma terna admissível e $g : \Omega \rightarrow V$ uma função contínua em $\bar{U}$ e de classe C^2 em U tal que*

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|g(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Então, definimos

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y),$$

onde $\deg_B(g, U, y)$ é dado pela Definição 2.16.

De forma análoga ao grau topológico das ternas (f, U, y) , onde f era definida em um subconjunto do $\mathbb{R}^n$, podemos provar uma lista de propriedades do grau para ternas (f, U, y) , onde f está definida em um subconjunto de um espaço normado real de dimensão finita V . A seguir, veremos uma lista com tais propriedades, onde a prova será omitida.

Proposição 2.18. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. (Normalização) *Sejam V um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, $I : V \rightarrow V$ a função identidade e U um subconjunto aberto e limitado de V , então*

$$\deg_B(I, U, y) = 1, \forall y \in U.$$

2. (Translação) *Seja (f, U, y) uma terna admissível, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f - y, U, 0).$$

3. (Aditividade) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se $U_1, U_2 \subseteq U$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U_1, y) + \deg_B(f, U_2, y).$$

4. (Excisão) *Seja (f, U, y) uma terna admissível e considere um conjunto compacto $K \subseteq \overline{U}$ tal que $y \notin f(K)$. Então,*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U \setminus K, y).$$

5. (Invariância homotópica) *Sejam V um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{R}$, U um subconjunto aberto e limitado de V , $H : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow V$ uma função contínua e $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ uma curva contínua tais que $\gamma(t) \notin H_t(\partial U)$, para todo $t \in [0, 1]$. Então, $\deg_B(H_t, U, \gamma(t))$ não depende de t .*

6. (Continuidade em relação á função f) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda função contínua $g : \Omega \rightarrow V$ com*

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|g(x) - f(x)\| < \epsilon,$$

a terna (g, U, y) é admissível e

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

7. (Invariância local) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, existe uma vizinhança W de y tal que, para todo $z \in W$, $\deg_B(f, U, z)$ está definido e*

$$\deg_B(f, U, z) = \deg_B(f, U, y).$$

8. (Existência de solução) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se*

$$\deg_B(f, U, y) \neq 0,$$

então $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$.

9. (Propriedade do bordo) *Sejam (f, U, y) e (g, U, y) ternas admissíveis. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial U$, então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g, U, y).$$

10. (Mudança de variável) *Sejam (f, U, y) uma terna admissível, $g : V \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^2 e $E \subseteq V$ um conjunto aberto e limitado tal que $g(\bar{E}) = \bar{U}$. Se $p = g^{-1}(y)$, então $(g^{-1} \circ f \circ g, E, p)$ é uma terna admissível e*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(g^{-1} \circ f \circ g, E, p).$$

11. (Função oposta) *Se (f, U, y) for uma terna admissível, então $(-f, U, -y)$ será admissível e*

$$\deg_B(-f, U, -y) = (-1)^n \deg_B(f, U, y).$$

Aqui, n é a dimensão do espaço V que contém o domínio de f .

Dado um espaço normado V de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e uma função $f : \Omega \rightarrow V$, definida em um subconjunto Ω de V , podemos relacionar o grau de ternas do tipo (f, U, y) com o grau de ternas que contém restrições de f a subespaços W de V . O resultado a seguir mostra como fazer tal relação. Este resultado será fundamental, mais tarde, para definirmos o grau em um espaço de dimensão infinita.

Lema 2.19. *Sejam V um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V de dimensão $m < n$. Sejam $\Omega \subseteq V$ um conjunto qualquer e $U \subseteq V$ um conjunto aberto e limitado tal que $\bar{U} \subseteq \Omega$. Considere uma função $f : \Omega \rightarrow W$ contínua em $\bar{U}$ e defina $g : \Omega \rightarrow V$ por $g(x) = x - f(x)$. Se $g|_{\Omega \cap W} : \Omega \cap W \rightarrow W$ for a restrição de g em $\Omega \cap W$ (com contradomínio W) e $y \in W \setminus g(\partial U)$, então*

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(g|_{\Omega \cap W}, U \cap W, y).$$

Demonstração. Por simplicidade de notação, faça $h = g|_{\Omega \cap W}$. Primeiramente, vamos mostrar que

$$g^{-1}(y) \cap U = h^{-1}(y) \cap U.$$

A inclusão $h^{-1}(y) \cap U \subseteq g^{-1}(y) \cap U$ é evidente. Para mostrar a outra inclusão, tome $x \in g^{-1}(y) \cap U$. Sendo assim, $g(x) = y$, ou seja, $x = y + f(x) \in W$. Desta forma, $x \in U \cap W$. Portanto, $y = h(x)$. Consequentemente, se $h^{-1}(y) \cap (U \cap W) = \emptyset$, então $g^{-1}(y) \cap U$ se torna igualmente vazio e este fato implica que

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(h, U \cap W, y) = 0.$$

Suponha, portanto, $h^{-1}(y) \cap (U \cap W) \neq \emptyset$ e divida o restante da demonstração em dois passos.

Passo 1: Suponha f de classe C^2 em U e y valor regular de h em $U \cap W$. Considere a decomposição $V = W \oplus W'$, onde W' é um complemento direto qualquer de W . Fixe uma base de V obtida juntando uma base de W com uma base de W' . Para $x \in U \cap W$, temos a seguinte matriz do operador $g'(x)$ na base que foi fixada:

$$\begin{pmatrix} A_x & B \\ 0_{(n-m) \times m} & I_{n-m} \end{pmatrix},$$

onde A_x é a matriz do operador $h'(x)$ e

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(x) & \cdots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}}(x) & \cdots & -\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

com $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ denotando a derivada da j -ésima coordenada da função f com relação à i -ésima coordenada do ponto x .

Concluimos, pela Proposição 1.6, que, para $x \in U \cap W$,

$$\operatorname{sgn} g'(x) = \operatorname{sgn} h'(x).$$

Juntando os fatos de que y é valor regular de h em $U \cap W$ e que $h^{-1}(y) \cap U = g^{-1}(y) \cap U$, segue que y é valor regular de g em U . Portanto,

$$\sum_{x \in g^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} g'(x) = \sum_{x \in h^{-1}(y) \cap U} \operatorname{sgn} h'(x).$$

Logo,

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(h, U \cap W, y).$$

Passo 2: Agora, suponha f apenas contínua em $\bar{U}$. Pelo Teorema de aproximação de Weierstrass, existe $\hat{f} : \Omega \rightarrow W$ de classe C^2 em U tal que, para todo $x \in \bar{U}$,

$$\|\hat{f}(x) - f(x)\| < \operatorname{dist}(y, g(\partial U)). \quad (2.13)$$

Defina as funções $\hat{g} : \Omega \rightarrow V$ e $\hat{h} : \Omega \cap W \rightarrow W$ por

$$\hat{g}(x) = x - \hat{f}(x) \quad \text{e} \quad \hat{h} = \hat{g}|_{\Omega \cap W}.$$

Usando o Teorema de Sard, podemos escolher $a \in W$ valor regular de $\widehat{h}$ tal que

$$\|a - y\| < \text{dist}(y, \widehat{g}(\partial U)).$$

Por (2.13), segue que

$$\|\widehat{g}(x) - g(x)\| < \text{dist}(y, g(\partial U)).$$

para todo $x \in \overline{U}$ e, pela Definição 2.8, obtemos

$$\deg_B(\widehat{g}, U, y) = \deg_B(g, U, y) \quad \text{e} \quad \deg_B(\widehat{h}, U \cap W, y) = \deg_B(h, U \cap W, y). \quad (2.14)$$

Usando a Definição 2.5, segue que

$$\deg_B(\widehat{g}, U, y) = \deg_B(\widehat{g}, U, a) \quad \text{e} \quad \deg_B(\widehat{h}, U \cap W, y) = \deg_B(\widehat{h}, U \cap W, a). \quad (2.15)$$

O *Passo 1* implica que

$$\deg_B(\widehat{g}, U, a) = \deg_B(\widehat{h}, U \cap W, a). \quad (2.16)$$

Concluimos de (2.14), (2.15) e (2.16) que

$$\deg_B(g, U, y) = \deg_B(h, U \cap W, y).$$

□

Capítulo 3

Algumas aplicações do grau de Brouwer

Vamos apresentar neste capítulo duas aplicações do grau de Brouwer. A primeira é o Teorema do Ponto fixo de Brouwer. De uma forma geral, teoremas de ponto fixo são de grande utilidade. Por exemplo, vários problemas de equações diferenciais podem ser transformados em problemas de ponto fixo entre espaços de funções. Tal aplicação pode ser encontrada em [11, Mawhin].

A segunda aplicação que veremos é o Teorema de Borsuk. Este teorema garante, sob certas condições, que $\deg_B(f, U, y)$ é um número ímpar. Note que, se $\deg_B(f, U, y)$ é um número ímpar, então $\deg_B(f, U, y) \neq 0$. Desta forma, juntando este resultado com a Proposição 2.9, item 8, temos garantida a existência de solução para a equação $f(x) = y$.

3.1 Teorema do ponto fixo de Brouwer

Teorema 3.1 (Ponto fixo de Brouwer). *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, convexo e não-vazio. Se $f : D \rightarrow D$ é contínua, então f tem um ponto fixo. O mesmo continua verdadeiro se D é homeomorfo a um conjunto compacto e convexo.*

Demonstração. Primeiramente, vamos supor $D = \overline{B_r}(0)$ e que f não tenha ponto fixo no bordo de D . Defina $H : D \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(x, t) = x - tf(x)$. Observe que:

- para $x \in \partial D$ temos $H(x, 1) \neq 0$, pois $f(x) \neq x$, para todo $x \in \partial D$;

- para $(x, t) \in \partial D \times [0, 1]$ temos

$$\|H(x, t)\| = \|x - tf(x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| \geq (1 - t)r > 0.$$

Concluimos que $H(x, t) \neq 0$, para todo $x \in \partial D$ e para todo $t \in [0, 1]$. Agora, usando a invariância homotópica, Proposição 2.9, item 5, temos

$$\deg_B(I, B_r(0), 0) = \deg_B(I - f, B_r(0), 0).$$

Pela Proposição 2.9, item 1, segue que

$$\deg_B(I - f, B_r(0), 0) = 1.$$

E, aplicando o item 8 da mesma proposição, segue que existe $x \in B_r(0)$ tal que $f(x) = x$.

Agora, suponha D um conjunto compacto e convexo qualquer e considere a seguinte extensão contínua de f (veja em [5, Deimling, pag. 6]):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ \left(\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \phi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \phi_i(x) f(a^i) & \text{se } x \notin D, \end{cases}$$

onde $\{a^1, a^2, \dots\}$ é um conjunto enumerável e denso em D e

$$\phi_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{\|x - a^i\|}{\text{dist}(x, D)}, 0 \right\}, \quad \forall x \notin D.$$

O próximo passo é mostrar que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subseteq D$. Para $x \in D$ é evidente. Agora, note que, quando $x \notin D$, temos

$$\tilde{f}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m,$$

onde

$$S_m = \left(\sum_{i=1}^m 2^{-i} \phi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i=1}^m 2^{-i} \phi_i(x) f(a^i).$$

Pela Proposição 1.14, para cada m , $S_m \in \text{conv} f(D)$, então $\tilde{f}(x) \in \overline{\text{conv} f(D)}$ para $x \notin D$. Então, $\tilde{f}(x) \in \overline{\text{conv} f(D)}$ para $x \notin D$. Sendo D compacto, temos $\tilde{f}(x) \in D$ para $x \notin D$. Portanto, $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subseteq D$.

Fixe $r > 0$ tal que $D \subseteq \overline{B_r(0)}$. Pela primeira parte da demonstração, existe um ponto fixo x de $\tilde{f}$ em $\overline{B_r(0)}$. Mas $\tilde{f}(x) \in D$, portanto $x = \tilde{f}(x) = f(x)$.

Finalmente, suponha D homeomorfo a um conjunto compacto e convexo $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $h : D_0 \rightarrow D$ um homeomorfismo. Pelo demonstrado no passo anterior, sabemos que $h^{-1} \circ f \circ h : D_0 \rightarrow D_0$ tem um ponto fixo. Segue que $f(h(x)) = h(x) \in D$. $\square$

O resultado seguinte é conhecido como Teorema de Perron-Frobenius e é uma aplicação do Teorema do ponto fixo de Brouwer.

Proposição 3.2 (Perron-Frobenius). *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j . Então, existem $\lambda \geq 0$ e $x \neq 0$, tais que $x_i \geq 0$ para todo i e $Ax = \lambda x$.*

Demonstração. Seja

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

Vamos mostrar que D é um conjunto compacto e convexo. Primeiro, observe que D é um conjunto limitado. Para mostrar que D é fechado, considere dois conjuntos

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$$

e

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

Note que $\mathbb{R}^n \setminus D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists i_0 \text{ tal que } x_{i_0} < 0\}$ é um conjunto aberto, portanto D_1 é um conjunto fechado. Defina a função contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Observe que $D_2 = f^{-1}(\{1\})$, então D_2 é um conjunto fechado. Como $D = D_1 \cap D_2$, concluímos que D é um conjunto fechado. Portanto, temos D fechado e limitado no $\mathbb{R}^n$, ou seja, D é compacto.

Para mostrar a convexidade de D , fixe $x, y \in D$ e $\lambda \in [0, 1]$. Então,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \dots, \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n).$$

É evidente que, para cada i , $\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i \geq 0$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^n \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n y_i = 1.$$

Logo, D é um conjunto convexo.

Agora, se $Ax = 0$ para algum $x \in D$, então, o resultado está provado para $\lambda = 0$. Suponha $Ax \neq 0$ em D . Lembre que as entradas da matriz A e as coordenadas do vetor x são não negativas, então Ax possui coordenadas $(Ax)_i$ não negativas. Como $Ax \neq 0$, pelo menos uma das coordenadas $(Ax)_i$ é positiva. Logo,

$$\sum_{i=1}^n (Ax)_i > 0$$

para todo $x \in D$. Defina uma função contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i}.$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$$

e

$$f_i(x) \geq 0$$

para todo $x \in D$. Portanto,

$$f(D) \subseteq D.$$

Pelo Teorema 3.1, existe $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) = x_0$. Fazendo $\lambda = \sum_{i=1}^n (Ax_0)_i$, obtemos

$$Ax_0 = \lambda x_0.$$

□

3.2 Teorema de Borsuk

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema de Borsuk, cuja importância já foi mencionada no início deste capítulo. Para tanto, vamos precisar de alguns resultados preliminares.

Lema 3.3. *Sejam K e M subconjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$ com $K \subseteq M$. Considere $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > n$, uma função contínua com $0 \notin f(K)$. Então, existe uma função contínua $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in K$, e $0 \notin \bar{f}(M)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon = \text{dist}(0, f(K))$. Pelo Teorema de Extensão de Tietze, existe uma função contínua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $g(x) = f(x)$ para todo $x \in K$. Agora, pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, podemos tomar uma função polinomial $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\sup_{x \in K} \|g(x) - h(x)\| < \frac{\epsilon}{4}$. Como $m > n$, então, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x)$ é valor crítico de h . Usando o Teorema de Sard, dado $y \in h(\mathbb{R}^n)$, qualquer vizinhança de y contém valores regulares de h , ou seja, $h(\mathbb{R}^n)$ tem interior vazio no $\mathbb{R}^m$. Portanto, podemos encontrar $a \notin h(\mathbb{R}^n)$ com $\|a\| < \frac{\epsilon}{4}$. Agora, defina $h_1 = h - a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. É evidente que $0 \notin h_1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para $x \in K$,

$$\|h_1(x) - g(x)\| \leq \|h_1(x) - h(x)\| + \|h(x) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere a seguinte função contínua:

$$h_2(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon h_1(x)}{2\|h_1(x)\|} & \text{se } \|h_1(x)\| < \frac{\epsilon}{2} \\ h_1(x) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, para todo x , $\|h_2(x)\| \geq \frac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, para $x \in K$, temos $f(x) = g(x)$ e

$$\|h_1(x)\| \geq \|g(x)\| - \|g(x) - h_1(x)\| > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para $x \in K$, $h_2(x) = h_1(x)$, e portanto

$$\|h_2(x) - f(x)\| = \|h_1(x) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere a função

$$h_2 - f : K \rightarrow B_{\frac{\epsilon}{2}}(0),$$

onde $B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$ é a bola de centro 0 e raio $\frac{\epsilon}{2}$. Aplicando o Teorema de Extensão de Tietze, existe $h_3 : M \rightarrow B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$ tal que $h_3(x) = (h_2 - f)(x)$ para todo $x \in K$. Afirmamos que $\bar{f} = h_2 - h_3$ é a função procurada. De fato, para $x \in K$,

$$\bar{f}(x) = h_2(x) - h_3(x) = h_2(x) - (h_2(x) - f(x)) = f(x).$$

Além disso, para $x \in M$,

$$\|\bar{f}(x)\| \geq \|h_2(x)\| - \|h_3(x)\| \geq \frac{\epsilon}{2} - \|h_3(x)\| > \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 0.$$

E assim completamos a prova. $\square$

Antes de provarmos o próximo lema, precisamos da definição a seguir.

Definição 3.4. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *simétrico* se, para cada $x \in D$, tivermos $-x \in D$. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada *função ímpar* se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in D$.

Lema 3.5. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Suponha que $0 \notin \overline{D}$ e que D seja simétrico. Considere $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > n$, uma função ímpar e contínua tal que $0 \notin f(\partial D)$. Então, existe uma função contínua e ímpar $\bar{f} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in \partial D$, e $0 \notin \bar{f}(\overline{D})$.*

Observação 3.6. Note que o Lema 3.3 garante a existência de uma extensão de f que nunca se anula. Entretanto, neste caso, queremos que tal extensão seja ímpar.

Demonstração. Provaremos por indução em n . Suponha $n = 1$. Como $0 \notin \overline{D}$ e $\overline{D}$ é compacto, então existem $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, tais que $\overline{D} \subseteq [-b, -a] \cup [a, b]$. Seja

$$f_1 = f|_{\partial D \cap [a, b]}.$$

Desta forma, f_1 é contínua e $0 \notin f_1(\partial D \cap [a, b])$. Pelo Lema 3.3, f_1 pode ser estendida continuamente à uma função $f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $0 \notin f_2([a, b])$. Afirmando que $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{se } x \in \overline{D} \cap [a, b] \\ -f_2(-x) & \text{se } x \in \overline{D} \cap [-b, -a], \end{cases}$$

é a função procurada. Da forma em que está definida a função g , fica evidente que g é contínua, ímpar e que $0 \notin g(\overline{D})$. Falta mostrar que $g|_{\partial D} = f$. Para tanto, tome $x \in \partial D$. Se $x \in \partial D \cap [a, b]$, então

$$g(x) = f_2(x) = f_1(x) = f(x).$$

Caso $x \in \partial D \cap [-b, -a]$, como f é ímpar, segue que

$$g(x) = -f_2(-x) = -f_1(-x) = -f(-x) = f(x).$$

Agora, suponha $n > 1$ e que o lema valha para $n - 1$. Vamos identificar $\mathbb{R}^{n-1}$ com o conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Sejam

$$D_+ = \{x \in D : x_n > 0\} \quad \text{e} \quad D_- = \{x \in D : x_n < 0\}.$$

Note que

$$\overline{D} = D_+ \cup D_- \cup \partial D \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}).$$

Seja

$$f_1 = f|_{\partial D \cap \mathbb{R}^{n-1}}.$$

Temos f_1 contínua, ímpar e $0 \notin f_1(\partial D \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, pela hipótese de indução, f_1 pode ser estendida continuamente a uma função $f_2 : \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde f_2 é ímpar e $0 \notin f_2(\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Defina

$$f_3(x) = \begin{cases} f_2(x), & \text{se } x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1} \\ f(x), & \text{se } x \in \partial D. \end{cases}$$

Primeiramente, veja que f_3 está bem definida. De fato, se $x \in (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}) \cap \partial D = \partial D \cap \mathbb{R}^{n-1}$, temos

$$f_2(x) = f_1(x) = f(x).$$

Além disso, como $f_2(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial D$, obtemos

$$f_3(x) \neq 0$$

para todo $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1} \cap \partial D$. Agora, veja que f_3 é ímpar. De fato, se $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, então $-x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Desta forma, $f_3(x) = f_2(x)$ e $f_3(-x) = f_2(-x) = -f_2(x)$, portanto

$$f_3(x) = -f_3(-x).$$

Se $x \in \partial D$, então $f_3(x) = f(x)$ e $f_3(-x) = f(-x) = -f(x)$, portanto

$$f_3(x) = -f_3(-x).$$

A continuidade de f_3 é evidente.

Seja $\widehat{D} = \overline{D} \setminus D_-$, ou seja,

$$\widehat{D} = (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}) \cup D_+ \cup \partial D.$$

Desta forma, temos que $\widehat{D}$ é um conjunto compacto e, pelo Lema 3.3, f_3 pode ser estendida continuamente a uma função $f_4 : \widehat{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $0 \notin f_4(\widehat{D})$. Finalmente, defina

$$g(x) = \begin{cases} f_4(x) & \text{se } x \in \widehat{D} \\ -f_4(-x) & \text{se } x \in \overline{D} \setminus \widehat{D} = D_-. \end{cases}$$

É evidente que $0 \notin g(\overline{D})$. Note que, se $x \in \partial D$, então $x \in \widehat{D}$, portanto $g(x) = f_4(x) = f_3(x) = f(x)$. Logo,

$$g|_{\partial D} = f.$$

60CAPÍTULO 3. ALGUMAS APLICAÇÕES DO GRAU DE BROUWER

Agora, para mostrar que g é ímpar, observe que se $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, então $-x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, portanto $g(x) = f_4(x) = f_3(x)$ e $g(-x) = f_4(-x) = f_3(-x)$. Assim,

$$g(x) = -g(-x).$$

Se $x \in \partial D$, então $-x \in \partial D$, portanto $g(x) = f_4(x) = f_3(x) = f(x)$ e $g(-x) = f_4(-x) = f_3(-x) = f(-x)$. Logo,

$$g(x) = -g(-x).$$

Se $x \in D_+$, então $g(x) = f_4(x)$ e $g(-x) = -f_4(x)$. Logo,

$$g(x) = -g(-x).$$

Se $x \in D_-$, então $g(x) = -f_4(-x)$ e $g(-x) = f_4(-x)$. Logo,

$$g(x) = -g(-x).$$

Falta mostrar que g é contínua. Se $x_0 \in D_+ \cup D_-$, então a continuidade em x_0 será evidente. Para $x_0 \in \partial D \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$, considere uma sequência $(x_r) \subseteq \overline{D}$ tal que

$$x_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} x_r.$$

Temos dois casos para analisar:

- (i) (x_r) possui uma subsequência (x_{r_k}) tal que $x_{r_k} \in \widehat{D}$ para todo r_k ;
- (ii) (x_r) possui uma subsequência $(\tilde{x}_{r_k})$ tal que $\tilde{x}_{r_k} \notin \widehat{D}$ para todo r_k , isto é, $-\tilde{x}_{r_k} \in D_+$ para todo r_k .

No caso (i), temos

$$\lim_{r_k \rightarrow \infty} g(x_{r_k}) = \lim_{r_k \rightarrow \infty} f_4(x_{r_k}) = f_4(x_0) = g(x_0).$$

No caso (ii), temos

$$\lim_{r_k \rightarrow \infty} g(\tilde{x}_{r_k}) = \lim_{r_k \rightarrow \infty} -f_4(-\tilde{x}_{r_k}) = - \lim_{r_k \rightarrow \infty} f_4(-\tilde{x}_{r_k}) = -f_4(-x_0) = g(x_0).$$

Desta forma, concluímos que g é contínua. □

Agora veremos o último lema antes do principal resultado desta seção. Observe que, no lema a seguir, a função f tem domínio e contradomínio de mesma dimensão.

Lema 3.7. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e simétrico tal que $0 \notin \overline{D}$. Seja $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e ímpar tal que $0 \notin f(\partial D)$. Então, existe uma função $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e ímpar tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \partial D$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$.*

Demonstração. Vamos identificar o $\mathbb{R}^{n-1}$ com o conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Considere os conjuntos

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}.$$

Seja

$$f_1 = f|_{\partial D \cap \mathbb{R}^{n-1}} = f|_{\partial(D \cap \mathbb{R}^{n-1})}.$$

Como f_1 é contínua, ímpar e $0 \notin f_1(\partial(D \cap \mathbb{R}^{n-1}))$, então, pelo Lema 3.5, existe uma função $f_2 : \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, ímpar tal que $0 \notin f_2(\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$ e $f_2|_{\partial(D \cap \mathbb{R}^{n-1})} = f_1$.

Defina $f_3 : (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}) \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f_3(x) = \begin{cases} f_2(x), & \text{se } x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1} \\ f(x), & \text{se } x \in \partial D. \end{cases}$$

Note que f_3 está bem definida. De fato, se $x \in \partial D \cap (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$, então $x \in \partial D \cap \mathbb{R}^{n-1}$ e, portanto,

$$f_2(x) = f_1(x) = f(x).$$

Além disso, é evidente que f_3 é ímpar e $0 \notin f_3(\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Como f_3 é contínua nos conjuntos ∂D e $\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, então f_3 é contínua. Sendo o compacto $\partial D \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})$ um subconjunto do compacto $\partial D \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}) \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}_+^n) = \widehat{D}$, segue, pela Proposição 1.16, que existe uma função $f_4 : \widehat{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua tal que $f_4|_{\partial D \cup (\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1})} = f_3$.

Finalmente, defina $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g(x) = \begin{cases} f_4(x), & \text{se } x \in \widehat{D} \\ -f_4(-x), & \text{se } x \in \overline{D} \setminus \widehat{D}. \end{cases}$$

Com argumento análogo ao usado na demonstração do Lema 3.5, prova-se que g é contínua e ímpar. Além disso, como

$$g|_{\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}} = f_4|_{\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}} = f_3|_{\overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}} = f_2,$$

então $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{n-1}$. □

Finalmente, podemos provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.8 (Teorema de Borsuk). *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e simétrico tal que $0 \notin D$. Seja $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $0 \notin f(\partial D)$ e assumamos que*

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|} \quad (3.1)$$

para todo $x \in \partial D$. Então,

$$\deg_B(f, D, 0)$$

é um número ímpar.

Demonstração. A demonstração será dividida em quatro passos.

Passo 1: Vamos mostrar que podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é uma função ímpar. De fato, seja $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função definida por

$$g(x) = f(x) - f(-x).$$

É evidente que g é contínua e ímpar. Além disso, por (3.1), $0 \notin g(\partial D)$ e, para todo $x \in \partial D$,

$$\frac{g(x)}{\|g(x)\|} = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \neq \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = \frac{g(-x)}{\|g(-x)\|}.$$

Considere a homotopia contínua $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$H(x, t) = f(x) - tf(-x).$$

Se $H(x, t) = 0$ para algum $x \in \partial D$ e para algum $t \in [0, 1]$, então $f(x) = tf(-x)$. Desta forma, temos $\frac{f(x)}{\|f(x)\|} = \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}$, o que é uma contradição com (3.1). Portanto, $H(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \partial D$ e para todo $t \in [0, 1]$. Segue, pela Proposição 2.9, item 5, que

$$\deg_B(f, D, 0) = \deg_B(g, D, 0).$$

A partir de agora, podemos assumir que f é uma função ímpar.

Passo 2: Vamos mostrar que podemos assumir, sem perda de generalidade, que numa vizinhança do 0, f coincide com a função identidade. Para tanto, considere $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B}_\epsilon(0) \subseteq D$ e seja $D_1 = D \setminus \overline{B}_\epsilon(0)$. Defina $f_1 : \overline{B}_\epsilon(0) \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \overline{B}_\epsilon(0) \\ f(x), & \text{se } x \in \partial D. \end{cases}$$

Temos f_1 contínua, ímpar e $\partial D_1 = \partial D \cup \partial B_\epsilon(0)$. Seja

$$f_2 = f_1|_{\partial D_1}.$$

Como $0 \notin f_2(\partial D_1)$, pelo Lema 3.7, existe $f_3 : \overline{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que f_3 é contínua, ímpar, $f_3|_{\partial D_1} = f_2$ e $f_3(x) \neq 0$ para todo $x \in \overline{D}_1 \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Agora, defina $f_4 : \overline{D}_1 \cup \overline{B}_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f_4(x) = \begin{cases} f_3(x), & \text{se } x \in \overline{D}_1 \\ x, & \text{se } x \in \overline{B}_\epsilon(0). \end{cases}$$

Note que f_4 está bem definida, pois se $x \in \overline{B}_\epsilon(0) \cap \overline{D}_1 = \overline{B}_\epsilon(0) \cap \overline{D}$, então $x \in \partial B_\epsilon(0)$ e

$$f_3(x) = f_2(x) = x.$$

É fácil ver que f_4 é ímpar e contínua. Além disso, para todo $x \in \partial D$, temos $x \in \partial D_1$ e

$$f_4(x) = f_3(x) = f_2(x) = f_1(x) = f(x).$$

Portanto, $0 \notin f_4(\partial D)$ e

$$\deg_B(f_4, D, 0) = \deg_B(f, D, 0).$$

Segue também que, para todo $x \in \partial D$,

$$\frac{f_4(x)}{\|f_4(x)\|} \neq \frac{f_4(-x)}{\|f_4(-x)\|}.$$

Passo 3: Vamos provar que $\deg_B(f_3, D_1, 0)$ é um número par. Para isso, seja $K = \overline{D}_1 \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Note que $0 \notin f_3(K)$ e que K é um conjunto compacto contido em $\overline{D}_1$. Pela Proposição 2.9, item 4, temos

$$\deg_B(f_3, D_1, 0) = \deg_B(f_3, D_1 \setminus K, 0) = \deg_B(f_3, D_1^+ \cup D_1^-, 0),$$

onde $D_1^+ = D_1 \cap \mathbb{R}_+^n$ e $D_1^- = D_1 \cap \mathbb{R}_-^n$. Aplicando a Proposição 2.9, item 3, segue que

$$\deg_B(f_3, D_1, 0) = \deg_B(f_3, D_1^+, 0) + \deg_B(f_3, D_1^-, 0).$$

O item 10 da mesma proposição, implica

$$\deg_B(f_3, D_1^-, 0) = \deg_B((-I) \circ f_3 \circ (-I), -I(D_1^-), -I(0)) = \deg_B(f_3, D_1^+, 0),$$

onde I é a função identidade. Concluimos que

$$\deg_B(f_3, D_1, 0) = 2 \deg_B(f_3, D_1^+, 0).$$

64CAPÍTULO 3. ALGUMAS APLICAÇÕES DO GRAU DE BROUWER

Passo 4: Finalmente, vamos concluir que $\deg_B(f, D, 0)$ é um número ímpar. Já vimos que $f|_{\partial D} = f_4|_{\partial D}$, $f_4|_{B_\epsilon(0)} = I$, $f_4|_{D_1} = f_3|_{D_1}$ e $D \setminus \overline{B_\epsilon(0)} = D_1$. Então, aplicando a Proposição 2.9, itens 1, 3 e 4 temos

$$\begin{aligned}
 \deg_B(f, D, 0) &= \deg_B(f_4, D, 0) \\
 &= \deg_B(f_4, B_\epsilon(0), 0) + \deg_B(f_4, D \setminus \partial B_\epsilon(0), 0) \\
 &= 1 + \deg_B(f_4, D \setminus \partial B_\epsilon(0), 0) \\
 &= 1 + \deg_B(f_3, D_1, 0) \\
 &= 1 + 2 \deg_B(f_3, D_1^+, 0).
 \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Grau topológico em dimensão infinita

4.1 Introdução ao grau de Leray-Schauder

Schauder identificou uma importante classe de operadores não lineares em espaços de Banach, as *perturbações completamente contínuas da identidade* $(I - T)$, para a qual ele pôde generalizar dois importantes resultados de Brouwer em dimensão finita: os teoremas de ponto fixo e invariância do domínio ([14]-[18]). Além disso, junto com Leray, ele estendeu o grau de Brouwer às perturbações completamente contínuas da identidade em espaços de Banach como veremos neste capítulo ([9]).

Considere um espaço de Banach E e um subconjunto qualquer Ω de E . Seja Δ o conjunto das ternas (f, U, y) , onde $U \subseteq E$ é aberto e limitado, $\overline{U} \subseteq \Omega$, $f : \Omega \rightarrow E$ é contínua em $\overline{U}$ e $y \in E \setminus f(\partial U)$. Queremos definir uma função $d : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$ esperando que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) $d(I, U, y) = 1$ para todo $y \in U$, onde I é função identidade em E ;
- (ii) $d(f, U, y) \neq 0$ implica $f^{-1}(y) \cap U \neq \emptyset$;
- (iii) $d(H_t, U, y)$ não depende de t , onde $H_t : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow E$ é uma homotopia contínua com $y \notin H_t(\partial U)$.

Quando E é um espaço de dimensão finita, definimos o grau de Brouwer satisfazendo as propriedades acima, com f apenas contínua em $\overline{U}$. Entretanto, se E for um espaço de dimensão infinita, veremos que não basta que f seja contínua.

O exemplo a seguir, creditado a Leray, pode ser encontrado em [6, Fonseca & Gangbo, pag. 172].

Exemplo 4.1 (Leray). Seja E o espaço das funções contínuas $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e, para $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{s \in [0,1]} |x(s)|.$$

Considere $x_0 \in E$ definida por

$$x_0(s) = \frac{1}{2}, \quad s \in [0, 1]$$

e seja $U \subseteq E$ dado por

$$U = \left\{ x \in E : \|x - x_0\| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Então, existe $y \in E$ tal que, para qualquer função $d : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}$, $d(\cdot, U, y)$ não satisfaz pelo menos uma das propriedades (i), (ii) e (iii). Para provarmos tal afirmação, assuma, por contradição, que d satisfaça as três propriedades. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função contínua dada por

$$\gamma(s) = \begin{cases} s & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1 - s & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{5}{8} \\ \frac{5}{3}(s - 1) + 1 & \frac{5}{8} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

e defina $f : \overline{U} \rightarrow E$ por

$$f(x) = \gamma \circ x.$$

Como $\gamma([0, 1]) = [0, 1]$, então $f(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Defina $H_t : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow E$ por

$$H_t(x) = tx + (1 - t)f(x).$$

É evidente que

$$\|H_t(x) - x_0\| \leq \frac{1}{2}. \quad (4.1)$$

Afirmção 1. $H_t(\partial U) \subseteq \partial U$ para todo $t \in [0, 1]$.

De fato, fixe $t \in [0, 1]$ e $x \in \partial U$. Então,

$$\|x - x_0\| = \frac{1}{2},$$

portanto

$$|x(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2},$$

para algum $s_0 \in [0, 1]$. Desta forma, $s_0 \in \{0, 1\}$, segue que $H_t(x)(s_0) \in \{0, 1\}$. Sendo assim,

$$|H_t(x)(s_0) - x_0(s_0)| = \frac{1}{2}.$$

Por (4.1),

$$\|H_t(x) - x_0\| = \frac{1}{2},$$

ou seja, $H_t(x) \in \partial U$.

Seja $y \in E$ definida por

$$y(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s.$$

Então,

$$\|y - x_0\| = \frac{1}{4}$$

e, portanto, $y \notin \partial U$. Pela afirmação 1, para todo $t \in [0, 1]$, temos $y \notin H_t(\partial U)$ e, desta forma, $d(H_t, U, y)$ está bem definido. Usando as propriedades (i) e (ii),

$$d(f, U, y) = d(I, U, y) = 1$$

e, pela propriedade (iii), existe $x \in U$ tal que $y = f(x) = \gamma \circ x$.

Afirmação 2. A equação $x(s) = \frac{1}{2}$ admite exatamente uma solução.

De fato,

$$\frac{1}{4} = y(0) \Rightarrow \frac{1}{4} = \gamma \circ x(0) \Rightarrow x(0) = \frac{1}{4}$$

e

$$\frac{3}{4} = y(1) \Rightarrow \frac{3}{4} = \gamma \circ x(1) \Rightarrow x(1) = \frac{17}{20}.$$

Pela continuidade de x , $x(s) = \frac{1}{2}$ admite pelo menos uma solução. Além disso,

$$x(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma(x(s)) = \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{1}{2},$$

portanto $s = \frac{1}{2}$ é a única solução da equação $x(s) = \frac{1}{2}$. A afirmação 2, junto com a continuidade de x , implica que

$$x(s) > \frac{1}{2} \text{ para todo } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

ou

$$x(s) < \frac{1}{2} \text{ para todo } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Suponha $x(s) < \frac{1}{2}$ para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Então, para qualquer $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, temos

$$x(s) < \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma \circ x(s) < \frac{1}{2} \Rightarrow y(s) < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = y(1) < \frac{1}{2},$$

que é uma contradição. Concluimos que $x(s) > \frac{1}{2}$ para todo $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Agora, como $x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon]$, $x(s) \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$. Sendo assim,

$$\gamma \circ x(s) \in \left[\gamma\left(\frac{5}{8}\right), \gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right].$$

Lembrando que $y(s) = \gamma \circ x(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s$ é crescente, obtemos uma contradição.

Logo, pelo menos uma das propriedades (i), (ii) e (iii) não é verificada por $d(\cdot, U, y)$.

4.2 Grau de Leray-Schauder

Antes de definirmos o grau de Leray-Schauder, vamos precisar de alguns resultados e noções preliminares.

Definição 4.2. Sejam E e F dois espaços de Banach e $M \subseteq E$ um conjunto qualquer. Dizemos que a função $T : M \rightarrow F$ é *completamente contínua* se

- (i) T é contínua;
- (ii) $\overline{T(A)}$ é um conjunto compacto para todo $A \subseteq M$ limitado.

Se, além das propriedades (i) e (ii), tivermos $\overline{T(M)}$ compacto, dizemos que T é uma função *compacta*.

Definição 4.3 (Terna admissível para o grau de Leray-Schauder). Sejam E um espaço de Banach, $\Omega \subseteq E$ um conjunto qualquer e $U \subseteq E$ um conjunto aberto e limitado tal que $\overline{U} \subseteq \Omega$. Considere uma função completamente contínua $T : \Omega \rightarrow E$. Se $f : \Omega \rightarrow E$ é definida por $f(x) = x - T(x)$ e $y \in E \setminus f(\partial U)$, então dizemos que (f, U, y) é uma *terna admissível* para o grau de Leray-Schauder.

Neste capítulo, sempre que não houver ambiguidade, se uma terna (f, U, y) for admissível para o grau de Leray-Schauder, vamos dizer apenas que (f, U, y) é admissível.

Os resultados que serão apresentados a seguir servirão de base para definirmos o grau de Leray-Schauder.

Definição 4.4. Sejam E e F dois espaços de Banach e $M \subseteq E$ um conjunto qualquer. Dizemos que a função $T : M \rightarrow F$ tem *dimensão finita* se $T(M)$ está contido num subespaço de F de dimensão finita.

Lema 4.5. *Sejam E e F dois espaços de Banach. Assuma que $M \subseteq E$ seja um conjunto limitado e considere uma função compacta $T : M \rightarrow F$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon : M \rightarrow F$ de dimensão finita tal que $\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_F < \epsilon$ para todo $x \in M$, onde $\|\cdot\|_F$ denota a norma em F .*

Demonstração. Sendo T uma função compacta, segue que $\overline{T(M)}$ é um conjunto compacto. Fixando $\epsilon > 0$, como

$$\overline{T(M)} \subseteq \bigcup_{p \in \overline{T(M)}} B_\epsilon(p),$$

então existem pontos $p_1, \dots, p_k \in \overline{T(M)}$ tais que

$$\overline{T(M)} \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i).$$

Defina, para cada $1 \leq i \leq k$ e para $x \in M$,

$$m_i(x) = \max\{0, \epsilon - \|T(x) - p_i\|_F\}$$

e

$$\theta_i(x) = \frac{m_i(x)}{\sum_{j=1}^k m_j(x)}.$$

Afirmo que, para cada i , $\theta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida e é contínua. De fato, é evidente que m_i é contínua e, dado $x \in M$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $T(x) \in B_\epsilon(p_j)$. Então, $\|T(x) - p_j\|_F < \epsilon$ e, consequentemente, $m_j(x) > 0$. Segue que

$$\sum_{s=1}^k m_s(x) > 0,$$

e, portanto, para cada i , θ_i está bem definida e é contínua.

Agora defina

$$T_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^k \theta_j(x) p_j$$

e observe que

$$\sum_{j=1}^k \theta_j(x) = 1.$$

Daí,

$$T(x) - T_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^k \theta_j(x) T(x) - \sum_{j=1}^k \theta_j(x) p_j = \sum_{j=1}^k \theta_j(x) [T(x) - p_j].$$

Logo,

$$\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_F \leq \sum_{j=1}^k \theta_j(x) \|T(x) - p_j\|_F < \epsilon.$$

□

O seguinte corolário é imediato.

Corolário 4.6. *Sejam E um espaço de Banach e $K \subseteq E$ um conjunto compacto. Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita $V_\epsilon \subseteq E$ e uma função contínua $g_\epsilon : K \rightarrow F_\epsilon$ tal que, para todo $x \in K$, $\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon$.*

Lema 4.7. *Sejam E um espaço de Banach e $U \subseteq E$ um conjunto aberto e limitado. Considere uma função compacta $T : \overline{U} \rightarrow E$ e defina $f : \overline{U} \rightarrow E$ por $f(x) = x - T(x)$. Então:*

(i) *f é uma função própria em $\overline{U}$;*

(ii) *f é uma função fechada.*

Demonstração. (i) - Sejam $K \subseteq E$ um conjunto compacto com $f^{-1}(K) \cap \overline{U} \neq \emptyset$ e $(x_n) \subseteq f^{-1}(K) \cap \overline{U}$ uma sequência. Pela compacidade do conjunto K , existe uma subsequência $(x_{n_p}) \subseteq (x_n)$ tal que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(x_{n_p}) = z \in K.$$

Agora, como T é compacta, existe uma subsequência $(x_{n_{p_i}}) \subseteq (x_{n_p})$ tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T(x_{n_{p_i}}) = w \in E.$$

Sendo $f = I - T$, segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{p_i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_{p_i}}) + \lim_{i \rightarrow \infty} T(x_{n_{p_i}}) = z + w.$$

Como f é contínua, então $f(z + w) = z \in K$, ou seja, $z + w \in f^{-1}(K)$. Além disso, sendo $\overline{U}$ um conjunto fechado, temos $z + w \in \overline{U}$. Portanto, $z + w \in f^{-1}(K) \cap \overline{U}$. Logo, $f^{-1}(K) \cap \overline{U}$ é compacto.

(ii) - Este resultado é imediato pela Proposição 1.24. $\square$

O próximo lema é de grande importância para a construção do grau de Leray-Schauder, pois nos mostra que, quando tivermos uma perturbação completamente contínua da identidade $I - T$, aproximando T por uma função de dimensão finita, poderemos construir o grau de Leray-Schauder a partir do grau de Brouwer.

Lema 4.8. *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Tome $T_1, T_2 : \overline{U} \rightarrow E$ duas funções de dimensão finita tais que, para todo $x \in \overline{U}$,*

$$\|T_1(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)) \quad \text{e} \quad \|T_2(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Considere o seguinte:

- $S_1 = \text{span} \{T_1(\overline{U}) \cup \{y\}\}$, $S_2 = \text{span} \{T_2(\overline{U}) \cup \{y\}\}$ e $S = S_1 + S_2$;
- $U_1 = U \cap S_1$ e $U_2 = U \cap S_2$;
- $f_1 : \overline{U \cap S} \rightarrow S$ e $f_2 : \overline{U \cap S} \rightarrow S$ as funções definidas por

$$f_1(x) = x - T_1(x) \quad \text{e} \quad f_2(x) = x - T_2(x).$$

Então, as ternas $(f_1|_{\overline{U_1}}, U_1, y)$ e $(f_2|_{\overline{U_2}}, U_2, y)$ são admissíveis para o grau de Brouwer e

$$\deg_B(f_1|_{\overline{U_1}}, U_1, y) = \deg_B(f_2|_{\overline{U_2}}, U_2, y).$$

Observação 4.9. Na última igualdade, $f_1|_{\overline{U_1}}$ tem S_1 como contradomínio e $f_2|_{\overline{U_2}}$ tem S_2 como contradomínio.

Demonstração. Para $i = 1, 2$, seja ∂U_i o bordo de U_i em S_i . Note que $\partial U_i \subseteq \partial U$. Tomando $x \in \partial U_i$ e supondo $f_i(x) = y$, segue que

$$\|y - f(x)\| = \|f_i(x) - f(x)\| = \|T_i(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Portanto, temos uma contradição. Desta forma, para cada $i = 1, 2$, $y \notin f_i(\partial U_i)$ e $(f_i|_{\overline{U_i}}, U_i, y)$ é uma terna admissível para o grau de Brouwer.

Sabendo que $S = S_1 + S_2$ e usando o Lema 2.19, podemos escrever

$$\deg_B(f_1, U \cap S, y) = \deg_B(f_1|_{\overline{U}_1}, U_1, y)$$

e

$$\deg_B(f_2, U \cap S, y) = \deg_B(f_2|_{\overline{U}_2}, U_2, y).$$

Considere, para $x \in \overline{U \cap S}$ e $\lambda \in [0, 1]$, a seguinte homotopia contínua

$$H(x, \lambda) = \lambda f_1(x) - (1 - \lambda)f_2(x).$$

Agora, fixe $x \in \overline{U \cap S}$ e $\lambda \in [0, 1]$. Daí,

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| = \|\lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_2(x) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(x)\|.$$

Portanto

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| = \|\lambda(f_1(x) - f(x)) + (1 - \lambda)(f_2(x) - f(x))\|.$$

Pela desigualdade triangular da norma,

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| \leq \lambda\|f_1(x) - f(x)\| + (1 - \lambda)\|f_2(x) - f(x)\|.$$

Segue que

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| \leq \lambda \text{dist}(y, f(\partial U)) + (1 - \lambda) \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Logo,

$$\|H(x, \lambda) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Esta última desigualdade nos permite concluir que $H(x, \lambda) \neq y$ para todo $x \in \partial(U \cap S)$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$. Podemos, desta forma, aplicar a Proposição 2.18, item 5 e deduzir que

$$\deg_B(f_1, U \cap S, y) = \deg_B(f_2, U \cap S, y).$$

Portanto,

$$\deg_B(f_1|_{\overline{U}_1}, U_1, y) = \deg_B(f_2|_{\overline{U}_2}, U_2, y).$$

□

Finalmente, podemos definir o grau de Leray-Schauder.

Definição 4.10 (Grau de Leray-Schauder). Sejam (f, U, y) uma terna admissível e $\hat{T} : \bar{U} \rightarrow E$ uma função de dimensão finita tal que, para todo $x \in \bar{U}$,

$$\|\hat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Defina $\hat{f} : \bar{U} \rightarrow E$ por $\hat{f}(x) = x - \hat{T}(x)$. Se $S \subseteq E$ é um espaço vetorial de dimensão finita tal que $y \in S$ e $\hat{T}(\bar{U}) \subseteq S$, então definimos o *grau de Leray-Schauder* de (f, U, y) por

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}(\hat{f}|_{\bar{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

4.3 Propriedades do grau de Leray-Schauder

Com as exceções das propriedades 10 e 11 da Proposição 2.18, as propriedades apresentadas a seguir são análogas às vistas para o grau de Brouwer.

Proposição 4.11. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. (Normalização) Sejam E um espaço de Banach, $I : E \rightarrow E$ a função identidade e U um subconjunto aberto e limitado de E , então, para todo $y \in U$,

$$\deg_{\text{LS}}(I, U, y) = 1.$$

2. (Translação) Seja (f, U, y) uma terna admissível, então $(f - y, U, 0)$ é admissível e

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f - y, U, 0).$$

3. (Aditividade) Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se $U_1, U_2 \subseteq U$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, então (f, U_1, y) e (f, U_2, y) são admissíveis e

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U_1, y) + \deg_{\text{LS}}(f, U_2, y).$$

4. (Excisão) Seja (f, U, y) uma terna admissível e considere um conjunto compacto $K \subseteq \bar{U}$ tal que $y \notin f(K)$. Então, $(f, U \setminus K, y)$ é admissível

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U \setminus K, y).$$

5. (Continuidade em relação à função T) Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, sendo $T = I - f$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda função compacta $P : \bar{U} \rightarrow E$ com

$$\sup_{x \in \bar{U}} \|P(x) - T(x)\| < \epsilon,$$

a terna $(I - P, U, y)$ é admissível e

$$\deg_{\text{LS}}(I - P, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U, y).$$

6. (Invariância homotópica) *Sejam E um espaço de Banach e $U \subseteq E$ um conjunto aberto e limitado. Considere $y \in E$ e uma função compacta $F : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow E$ tais que $x - F(x, t) \neq y$ para todo $x \in \partial U$ e para todo $t \in [0, 1]$. Então,*

$$\deg_{\text{LS}}(I - F(\cdot, t), U, y)$$

não depende de t .

7. (Invariância local) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $\deg_{\text{LS}}(f, U, z)$ está definido e*

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, z) = \deg_{\text{LS}}(f, U, y).$$

8. (Existência de solução) *Seja (f, U, y) uma terna admissível. Se*

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) \neq 0,$$

então existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$.

9. (Propriedade do bordo) *Sejam (f, U, y) e (g, U, y) duas ternas admissíveis tais que $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$. Então,*

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(g, U, y).$$

Demonstração. 1 - Seja $S = \text{span } \{y\}$. Segue, da Definição 4.10, que

$$\deg_{\text{LS}}(I, U, y) = \deg_{\text{B}}(I|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

Como $y \in U$, então $y \in U \cap S$, portanto, pela Proposição 2.18, item 1,

$$\deg_{\text{LS}}(I, U, y) = \deg_{\text{B}}(I|_{E \cap S}, U \cap S, y) = 1.$$

2 - Para $x \in \partial U$, sabemos, por hipótese, que $f(x) \neq y$, portanto $f(x) - y \neq 0$. Logo, $(f - y, U, 0)$ é admissível.

Agora, tome $\widehat{T} : \overline{U} \rightarrow E$ uma função de dimensão finita tal que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Seja $S = \text{span } \{\widehat{T}(\overline{U}) \cup \{y\}\}$. Segue que

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y). \quad (4.2)$$

Veja que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|(\widehat{T} + y)(x) - (T + y)(x)\| = \|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

ou seja,

$$\|(\widehat{T} + y)(x) - (T + y)(x)\| < \text{dist}(0, (f - y)(\partial U)).$$

Podemos, pela Definição 4.10, concluir que

$$\deg_{\text{LS}}(f - y, U, 0) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T} - y)|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, 0). \quad (4.3)$$

Pela Proposição 2.18, item 2,

$$\deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T} - y)|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, 0).$$

Sendo assim, por (4.2) e (4.3),

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f - y, U, 0).$$

3 - Note que $\partial U_1 \subseteq \overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$, portanto para $x \in \partial U_1$, $f(x) \neq y$. Logo, (f, U_1, y) é admissível. De forma análoga, (f, U_2, y) é admissível.

Considere uma função de dimensão finita $\widehat{T} : \overline{U} \rightarrow E$ tal que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U_1))$$

e

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U_2)),$$

onde $T = I - f$. Seja $S = \text{span } \{\widehat{T}(\overline{U}) \cup \{y\}\}$. Segue, da Definição 4.10, que

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y),$$

$$\deg_{\text{LS}}(f, U_1, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U_1 \cap S, y)$$

e

$$\deg_{\text{LS}}(f, U_2, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U_2 \cap S, y).$$

Pela Proposição 2.18, item 3, concluímos que

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U_1, y) + \deg_{\text{LS}}(f, U_2, y).$$

4 - Como $y \notin f(\partial U)$ e $y \notin f(K)$, então $y \notin f(\partial(U \setminus K))$. Portanto, $(f, U \setminus K, y)$ é admissível.

Considere uma função de dimensão finita $\widehat{T} : \overline{U} \rightarrow E$ tal que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Seja $S = \text{span } \{\widehat{T}(\overline{U}) \cup \{y\}\}$. Pela Definição 4.10, temos

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y)$$

e

$$\deg_{\text{LS}}(f, U \setminus K, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\overline{U} \cap S}, (U \setminus K) \cap S, y).$$

Pela Proposição 2.18, item 4, temos

$$\deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\Omega \cap S}, U \cap S, y) = \deg_{\text{B}}((I - \widehat{T})|_{\Omega \cap S}, (U \setminus K) \cap S, y).$$

Logo,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U \setminus K, y).$$

5 - Faça $r = \text{dist}(y, f(\partial U))$ e fixe $P : \overline{U} \rightarrow E$ uma função compacta com

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|P(x) - T(x)\| < \frac{r}{2}.$$

Defina $g = I - P$. Para mostrar que (g, U, y) é uma terna admissível, basta provar que $y \notin g(\partial U)$. Para tanto, fixe $x \in \partial U$. Segue que

$$\|y - g(x)\| = \|y - f(x) + f(x) - g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|f(x) - g(x)\|,$$

portanto

$$\|y - g(x)\| \geq \|y - f(x)\| - \|P(x) - T(x)\| \geq \frac{r}{2}.$$

Logo, $y \notin g(\partial U)$.

Agora, sejam $T_1, P_1 : \overline{U} \rightarrow E$ duas funções de dimensão finita tais que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|T(x) - T_1(x)\| \leq r \quad \text{e} \quad \|P(x) - P_1(x)\| \leq \frac{r}{2}.$$

Fazendo $f_1 = I - T_1$, $g_1 = I - P_1$, $S = \text{span } \{T_1(\overline{U}) \cup P_1(\overline{U}) \cup \{y\}\}$ e usando a definição do grau de Leray-Schauder, temos

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}(f_1|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y)$$

e

$$\deg_{\text{LS}}(g, U, y) = \deg_{\text{B}}(g_1|_{\bar{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

Seja $W = U \cap S$ e defina a seguinte homotopia:

$$\begin{aligned} H : \bar{W} \times [0, 1] &\rightarrow S \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = tf_1|_{\bar{U} \cap S}(x) + (1-t)g_1|_{\bar{U} \cap S}(x). \end{aligned}$$

Afirmo que $y \notin H(\partial W \times [0, 1])$. De fato, tome $(x, t) \in \partial W \times [0, 1]$. Então,

$$\|H(x, t) - f(x)\| = \|tf_1|_{\bar{U} \cap S}(x) + (1-t)g_1|_{\bar{U} \cap S}(x) - tf(x) - (1-t)f(x)\|,$$

portanto

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - f(x)\| &\leq t\|f_1|_{\bar{U} \cap S}(x) - f(x)\| + (1-t)\|g_1|_{\bar{U} \cap S}(x) - f(x)\| \\ &\leq t\|f_1|_{\bar{U} \cap S}(x) - f(x)\| + (1-t)(\|g_1|_{\bar{U} \cap S}(x) - g(x)\| + \|g(x) - f(x)\|). \end{aligned}$$

Segue que

$$\|H(x, t) - f(x)\| \leq tr + (1-t)\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = r.$$

Sendo $\partial W = \partial(U \cap S) = \partial U \cap S$, concluímos que $y \notin H(\partial W \times [0, 1])$. Desta forma, podemos usar a Proposição 2.18, item 5. Assim temos

$$\deg_{\text{B}}(f_1|_{\bar{U} \cap S}, U \cap S, y) = \deg_{\text{B}}(g_1|_{\bar{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

Logo,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(g, U, y).$$

6 - Faça, para todo $t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t) = I - F(\cdot, t)$ e $r = \text{dist}(y, H(\partial U \times [0, 1]))$. Vamos mostrar que $r > 0$. Para tanto, defina a função

$$\begin{aligned} \hat{H} : \bar{U} \times [0, 1] &\rightarrow E \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \hat{H}(x, t) = (x, t) - (F(x, t), t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$H(x, t) = (x - F(x, t), 0).$$

Agora, defina $\hat{F} : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow E \times \mathbb{R}$ por

$$\hat{F}(x, t) = (F(x, t), t).$$

Segue que

$$\widehat{H} = I - \widehat{F}.$$

Afirmo que $\widehat{F}$ é compacta. De fato, primeiramente, como F é contínua, então $\widehat{F}$ é contínua. Tome, agora, uma sequência $(x_n, t_n) \subseteq \overline{U} \times [0, 1]$. Como $[0, 1]$ é compacto, existe uma subsequência $(t_{n_j}) \subseteq (t_n)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j} = t_0 \in [0, 1].$$

Pela compacidade da função F , existe uma subsequência $(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \subseteq (x_n, t_{n_j})$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = y_0 \in E.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{F}(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (F(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) = (y_0, t_0).$$

Portanto, $\widehat{F}$ é uma função compacta.

Usando o Lema 4.7, segue que $\widehat{H}(\partial U \times [0, 1])$ é um conjunto fechado, ou seja, $H(\partial U \times [0, 1], 0)$ é um conjunto fechado em $E \times \mathbb{R}$, o que implica $H(\partial U \times [0, 1])$ é um fechado em E . Como $y \notin H(\partial U \times [0, 1])$, podemos concluir que $r > 0$.

Defina $K = \overline{F(\overline{U} \times [0, 1])} \subseteq E$. Pelo Lema 4.6, existe um subespaço de dimensão finita $S_{\frac{r}{2}} \subseteq E$ e uma função contínua $g_{\frac{r}{2}} : K \rightarrow S_{\frac{r}{2}}$ verificando, para todo $x \in K$,

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}.$$

Seja $H_1 : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow E$ definida por

$$H_1(x, t) = x - g_{\frac{r}{2}}(F(x, t)).$$

Veja que, para todo $x \in \overline{U}$ e para todo $t \in [0, 1]$,

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| = \|x - F(x, t) - x + g_{\frac{r}{2}}(F(x, t))\|,$$

portanto

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| = \|F(x, t) - g_{\frac{r}{2}}(F(x, t))\| < \frac{r}{2}.$$

Segue, para todo $t \in [0, 1]$, que

$$\sup_{x \in \overline{U}} \|H(x, t) - H_1(x, t)\| < \frac{r}{2}.$$

Daí, aplicando o item 5 acima, temos, para todo $t \in [0, 1]$,

$$\deg_{\text{LS}}(H(\cdot, t), U, y) = \deg_{\text{LS}}(H_1(\cdot, t), U, y).$$

Seja $S \subseteq E$ um subespaço de dimensão finita contendo $\overline{g_{\frac{r}{2}}(F(\overline{U} \times [0, 1]))}$ e y . Aplicando a definição do grau de Leray-Schauder, podemos concluir que, para todo $t \in [0, 1]$,

$$\deg_{\text{LS}}(H_1(\cdot, t), U, y) = \deg_{\text{LS}}(H_1(\cdot, t)|_{\Omega \cap S}, U \cap S, y).$$

Finalmente, usando a Proposição 2.18, item 5, concluimos que

$$\deg_{\text{LS}}(H(\cdot, t), U, y)$$

não depende de t .

7 - Considere uma função de dimensão finita $\hat{T} : \overline{U} \rightarrow E$ tal que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|\hat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)),$$

onde $T = I - f$. Seja $S = \text{span} \{\hat{T}(\overline{U}) \cup \{y\}\}$. Segue que

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}((I - \hat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

Pela Proposição 2.18, item 7, sabemos que existe uma vizinhança V de y , tal que, para todo $z \in V$, $\deg_{\text{B}}((I - \hat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, z)$ está definido e

$$\deg_{\text{B}}((I - \hat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, z) = \deg_{\text{B}}((I - \hat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, y).$$

Por outro lado, a Definição 4.10 implica que

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, z) = \deg_{\text{B}}((I - \hat{T})|_{\overline{U} \cap S}, U \cap S, z).$$

Logo,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f, U, z).$$

8 - Para todo $n > \frac{1}{\text{dist}(y, f(\partial U))}$, existe $T_n : \overline{U} \rightarrow E$ de dimensão finita tal que

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{1}{n}$$

para todo $x \in \overline{U}$, onde $T = I - f$. Sejam

$$S_n = \text{span} \{T_n(\overline{U}) \cup \{y\}\} \quad \text{e} \quad U_n = U \cap S_n.$$

Assim,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}((I - T_n)|_{\overline{U} \cap S_n}, U_n, y).$$

Por hipótese, $\deg_{\text{B}}((I - T_n)|_{\overline{U} \cap S}, U_n, y) \neq 0$ e, aplicando a Proposição 2.18, item 8, existe $x_n \in U_n$ tal que

$$x_n - T_n(x_n) = y \quad (4.4)$$

Como $T|_{\overline{U}}$ é compacta e, para cada n , $x_n \in U$, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que a sequência $T(x_n)$ converge para algum $p \in X$. Daí, por (4.4), (x_n) converge para $y + p \in \overline{U}$. Pela continuidade da função f , obtemos

$$f(p + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_n - T(x_n)] = y.$$

Sabemos que $y \notin f(\partial U)$, portanto $p + y \in U$. Desta forma, a equação $f(x) = y$ admite a solução $p + y$.

9 - Sejam $T : \Omega \rightarrow E$ e $S : \Omega \rightarrow E$ funções completamente contínuas tais que

$$f = I - T \quad \text{e} \quad g = I - S.$$

Considere a função compacta $F : \overline{U} \times [0, 1] \rightarrow E$ definida por

$$F(x, t) = tT(x) + (1 - t)S(x).$$

Para $x \in \partial U$ e para $t \in [0, 1]$, $F(x, t) = tT(x) + (1 - t)S(x) = T(x) = S(x)$. Portanto, $x - F(x, t) = f(x) \neq y$. Daí, aplicando o item 6 acima,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(g, U, y).$$

□

Para finalizar a seção das propriedades do grau de Leray-Schauder, e consequentemente finalizar este capítulo, destacamos a proposição a seguir, que relaciona o grau em um espaço de Banach E , com o grau em um subespaço F de E . Este resultado é análogo ao do Lema 2.19, que foi apresentada quando tratamos de espaços de dimensão finita.

Lema 4.12. *Sejam E e F espaços de Banach, onde $F \subseteq E$. Sejam $\Omega \subseteq E$ um conjunto qualquer e $U \subseteq E$ aberto e limitado com $\overline{U} \subseteq \Omega$. Considere uma função completamente contínua $T : \Omega \rightarrow F$ e defina $f : \Omega \rightarrow E$ por $f(x) = x - T(x)$. Se $f|_{\Omega \cap F} : \Omega \cap F \rightarrow F$ for a restrição de f em $\Omega \cap F$ com contradomínio F e $y \in F \setminus f(\partial U)$, então*

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f|_{\Omega \cap F}, U \cap F, y).$$

Demonstração. Tome $\widehat{T} : \overline{U} \rightarrow F$ uma função de dimensão finita tal que, para todo $x \in \overline{U}$,

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial U)).$$

Sejam $G = \text{span } \{\widehat{T}(\overline{U}) \cup \{y\}\}$ e $\widehat{f} : \overline{U} \rightarrow E$ dada por $\widehat{f}(x) = x - \widehat{T}(x)$. Pela definição do grau de Leray-Schauder,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{B}}(\widehat{f}|_{\overline{U \cap G}}, U \cap G, y).$$

Faça $h = f|_{\Omega \cap F}$, ou seja, $h : \Omega \cap F \rightarrow F$ é dada por $h(x) = x - T(x)$. Observe que $\widehat{T}|_{\overline{U \cap F}}$ é uma função de dimensão finita tal que, para todo $x \in \overline{U \cap F}$,

$$\|\widehat{T}|_{\overline{U \cap F}}(x) - T|_{\Omega \cap F}(x)\| < \text{dist}(y, h(\partial U \cap F)).$$

Sejam $W = \text{span } \{\widehat{T}|_{\overline{U \cap F}}(\overline{U \cap F}) \cup \{y\}\}$ e $\widehat{h} : \overline{U \cap F} \rightarrow W$ dada por $\widehat{h}(x) = x - \widehat{T}|_{\overline{U \cap F}}(x)$. Pela definição do grau de Leray-Schauder,

$$\deg_{\text{LS}}(h, U \cap F, y) = \deg_{\text{B}}(\widehat{h}|_{\overline{U \cap W}}, U \cap W, y).$$

Note que $W \subseteq G$ e $\widehat{T}|_{\overline{U \cap G}}(\overline{U \cap G}) \subseteq W$. Desta forma, o Lema 2.19 garante que

$$\deg_{\text{B}}(\widehat{f}|_{\overline{U \cap G}}, U \cap G, y) = \deg_{\text{B}}(\widehat{h}|_{\overline{U \cap W}}, U \cap W, y).$$

Logo,

$$\deg_{\text{LS}}(f, U, y) = \deg_{\text{LS}}(f|_{\Omega \cap F}, U \cap F, y).$$

□

Capítulo 5

Soluções de sistemas não lineares com condições de contorno

5.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é usar o grau topológico para estudar a existência de soluções para o seguinte sistema não linear de equações diferenciais:

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (5.1)$$

Este problema foi estudado por Manásevich e Mawhin no artigo [11]. No artigo citado, os autores transformam o problema (5.1) em um problema de ponto fixo em espaços de funções. Em seguida, sob certas condições, usam o grau de Leray-Schauder para provar a existência de soluções do problema acima. Vamos aqui apresentar esta abordagem.

Seguem os detalhes do problema acima:

- $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função satisfazendo:

(H₁) Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$,

$$\langle \phi(x_1) - \phi(x_2), x_1 - x_2 \rangle > 0.$$

(H₂) Existe uma função $\alpha : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, com $\lim_{s \rightarrow +\infty} \alpha(s) = +\infty$, tal que

$$\langle \phi(x), x \rangle \geq \alpha(\|x\|)\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 5.1. Sob essas condições, ϕ é um homeomorfismo do $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R}^n$. Além disso,

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} \|\phi^{-1}(y)\| = +\infty.$$

Veja [5, Deimling, cap. 3].

- Para T fixado, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função Carathéodory, ou seja,
 - (i) para quase todo $t \in [0, T]$, $f(t, \cdot, \cdot)$ é contínua;
 - (ii) para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $f(\cdot, x, y)$ é mensurável;
 - (iii) para qualquer $\rho > 0$, existe $g \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ tal que, para quase todo $t \in [0, T]$ e para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, com $\|x\| \leq \rho$ e $\|y\| \leq \rho$, temos $\|f(t, x, y)\| \leq g(t)$.

Entendemos por *solução* do problema (5.1) uma função $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfazendo as condições de contorno e tal que a função $t \mapsto \phi(u'(t))$ seja absolutamente contínua e satisfaça $(\phi(u'(t)))' = f(t, u(t), u'(t))$ para quase todo t em $[0, T]$. Para chegarmos ao nosso objetivo, na Seção 5.2, apresentaremos um problema que vai nos auxiliar no estudo do problema (5.1). E, na Seção 5.3, vamos provar o principal teorema deste capítulo, que garante, sob certas condições, a existência de solução para o problema (5.1).

Notações básicas. Neste capítulo, para T fixado, denotaremos $C = C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $C^1 = C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ e $L^1 = L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, que são espaços de Banach dotados, respectivamente, com as normas

$$\|u\|_0 = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|, \quad \|u\|_1 = \|u\|_0 + \|u'\|_0 \quad \text{e} \quad \|h\|_{L^1} = \int_0^T \|h(t)\| dt.$$

Denotaremos, também, $C_T = \{u \in C : u(0) = u(T)\}$, $C_T^1 = \{u \in C^1 : u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)\}$ e $L_m^1 = \{h \in L^1 : \int_0^T h(t) dt = 0\}$ subespaços fechados, respectivamente, de C , C^1 e L^1 .

5.2 Problema auxiliar

Antes de provarmos o principal resultado deste capítulo, que trata da existência de soluções do problema (5.1), vamos estudar o seguinte problema auxiliar:

$$(\phi(u'))' = h(t), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \quad (5.2)$$

onde $h \in L_m^1$ e ϕ satisfaz as condições (H_1) e (H_2) .

Supondo que u seja solução do problema (5.2) e integrando de 0 a $t \in [0, T]$, segue que

$$\phi(u'(t)) = a + H(h)(t),$$

onde $H : L^1 \rightarrow C$ é o operador integral definido por

$$H(h)(t) = \int_0^t h(s) ds$$

e $a \in \mathbb{R}^n$ é uma constante oportuna. Aplicando ϕ^{-1} , temos

$$u'(t) = \phi^{-1}[a + H(h)(t)].$$

Integrando novamente de 0 a $t \in [0, T]$, deduzimos que, se u é solução do problema (5.2), então

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \phi^{-1}[a + H(h)(s)] ds. \quad (5.3)$$

Como $u(0) = u(T)$, então

$$\int_0^T \phi^{-1}[a + H(h)(t)] dt = 0.$$

Agora, defina, para cada $l \in C$, a função $G_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$G_l(a) = \int_0^T \phi^{-1}(a + l(t)) dt, \quad (5.4)$$

Resumindo, fixada $h \in L_m^1$, se (5.2) admite solução em C_T^1 , então existe $a \in \mathbb{R}^n$ (que depende de h) tal que

$$G_{H(h)}(a) = 0.$$

Por outro lado, suponha que, para algum $h \in L_m^1$, exista $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_{H(h)}(a) = 0$. Defina $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \phi^{-1}[a + H(h)(s)] ds.$$

Derivando, temos

$$u'(t) = \phi^{-1}[a + H(h)(t)]. \quad (5.5)$$

Aplicando a função ϕ , segue que

$$\phi(u'(t)) = a + H(h)(t). \quad (5.6)$$

Agora, derive novamente e conclua que

$$(\phi(u'(t)))' = h(t). \quad (5.7)$$

Destacamos que as igualdades (5.5) e (5.6) são para todo $t \in [0, T]$ e a igualdade (5.7) é para quase todo $t \in [0, T]$.

Como

$$G_{H(h)}(a) = \int_0^T \phi^{-1}[a + H(h)(t)] dt = 0,$$

temos $u(0) = u(T)$. Além disso, como $h \in L_m^1$, por (5.5), segue que

$$u'(0) = \phi^{-1}(a) = u'(T).$$

Diante do exposto acima, podemos concluir que o problema (5.2) admite solução em C_T^1 se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $G_{H(h)}(a) = 0$.

Na proposição a seguir apresentamos duas propriedades importantes da função G .

Proposição 5.2. *Se ϕ satisfaz as condições (H_1) e (H_2) , então a função G_l tem as seguintes propriedades:*

(i) *Para cada $l \in C$, a equação*

$$G_l(a) = 0 \quad (5.8)$$

possui uma única solução $\tilde{a}(l)$.

(ii) *A função $\tilde{a} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em (i), é contínua e envia conjuntos limitados em conjuntos limitados.*

Demonstração. Fixe $l \in C$. Por (H_1) , segue que, para $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ com $a_1 \neq a_2$,

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(a_1 + l(t)) - \phi^{-1}(a_2 + l(t)), a_1 - a_2 \rangle dt > 0,$$

portanto

$$\langle G_l(a_1) - G_l(a_2), a_1 - a_2 \rangle > 0.$$

Desta forma, se (5.8) tem solução, ela é única. Agora vamos provar a existência. Para tanto, ainda com $l \in C$ fixado, vamos mostrar que $\langle G_l(a), a \rangle > 0$ para $\|a\|$ suficientemente grande. Temos

$$\langle G_l(a), a \rangle = \int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), a \rangle dt.$$

Segue que

$$\langle G_l(a), a \rangle = \int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), a + l(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), l(t) \rangle dt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), l(t) \rangle dt \leq \int_0^T \|\phi^{-1}(a + l(t))\| \|l(t)\| dt$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), l(t) \rangle dt \leq \|l\|_0 \int_0^T \|\phi^{-1}(a + l(t))\| dt.$$

Assim,

$$\langle G_l(a), a \rangle \geq \int_0^T \langle \phi^{-1}(a + l(t)), a + l(t) \rangle dt - \|l\|_0 \int_0^T \|\phi^{-1}(a + l(t))\| dt. \quad (5.9)$$

Como ϕ satisfaz (H_2) , para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\langle \phi^{-1}(y), y \rangle \geq \alpha(\|\phi^{-1}(y)\|) \|\phi^{-1}(y)\|. \quad (5.10)$$

De (5.9) e (5.10),

$$\langle G_l(a), a \rangle \geq \int_0^T (\alpha(\|\phi^{-1}(a + l(t))\|) - \|l\|_0) \|\phi^{-1}(a + l(t))\| dt. \quad (5.11)$$

Sabendo que $\|\phi^{-1}(a + l(t))\|$ tende para o infinito uniformemente em $t \in [0, T]$ quando $\|a\|$ tende para o infinito, deduzimos de (5.11) que existe um $r > 0$ tal que, para todo $a \in \mathbb{R}^n$ com $\|a\| = r$,

$$\langle G_l(a), a \rangle > 0. \quad (5.12)$$

Agora, considere uma função $H : \overline{B_r}(0) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(x, t) = (1 - t)x + tG_l(x).$$

Se $x \in \partial B_r(0)$ e $t \in [0, 1]$, pela desigualdade 5.12, temos

$$\langle (1 - t)x + tG_l(x), x \rangle = (1 - t)\langle x, x \rangle + t\langle G_l(x), x \rangle > 0.$$

Portanto, para todo $x \in \partial B_r(0)$ e para todo $t \in [0, 1]$,

$$H(x, t) \neq 0.$$

Daí, pelas propriedades Invariância homotópica e Normalização do grau de Brouwer,

$$\deg_B(G_l, B_r(0), 0) = \deg_B(I, B_r(0), 0) = 1.$$

Logo, pela propriedade Existência de solução, para cada $l \in C$, a equação

$$G_l(a) = 0$$

tem solução. E, como já vimos, essa solução é única. Desta forma, definimos a função $\tilde{a} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz

$$\int_0^T \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)) dt = 0. \quad (5.13)$$

Para provarmos (ii), sejam $\Lambda \subseteq C$ um conjunto limitado e $l \in \Lambda$ fixado. Por (5.13),

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)), \tilde{a}(l) \rangle dt = 0.$$

Assim,

$$\int_0^T \langle \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)), \tilde{a}(l) + l(t) \rangle dt = \int_0^T \langle \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)), l(t) \rangle dt. \quad (5.14)$$

Vamos supor que o conjunto $\Gamma = \{\tilde{a}(l) : l \in \Lambda\}$ não seja limitado. Tome $R > 0$ qualquer tal que $\Lambda \subseteq B_R(0)$. Pela definição da função α , existe N tal que $s > N$ implica $\alpha(s) > R$. A Observação 5.1 implica que podemos tomar M tal que, se $\|y\| > M$, então $\|\phi^{-1}(y)\| > N$. Como Γ não é limitado e Λ é limitado, então existe $l \in \Lambda$ tal que, para qualquer $t \in [0, T]$, $\|\tilde{a}(l) + l(t)\| > M$. Finalmente, podemos dizer que existe $l \in \Lambda$ tal que, para qualquer $t \in [0, T]$,

$$R < \alpha(\|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\|).$$

Dai,

$$R \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt < \int_0^T \alpha(\|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\|) \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt.$$

Por (5.10),

$$R \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt < \int_0^T \langle \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)), \tilde{a}(l) + l(t) \rangle dt.$$

Usando (5.14), deduzimos que

$$R \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt < \int_0^T \langle \phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t)), l(t) \rangle dt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$R \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt < \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| \|l(t)\| dt.$$

Finalmente,

$$R \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt < \|l\|_0 \int_0^T \|\phi^{-1}(\tilde{a}(l) + l(t))\| dt.$$

Portanto, $R < \|l\|_0$, o que é uma contradição. Logo, $\tilde{a}$ envia conjuntos limitados em C em conjuntos limitados em $\mathbb{R}^n$.

Para finalizar, vamos mostrar que $\tilde{a}$ é uma função contínua. Para tanto, seja $(l_n) \subseteq C$ uma sequência tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l \in C. \quad (5.15)$$

Como $(\tilde{a}(l_n))$ é uma sequência limitada, então possui uma subsequência $(\tilde{a}(l_{n_j}))$ convergente. Digamos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{a}(l_{n_j}) = \hat{a}. \quad (5.16)$$

Temos, para cada j ,

$$\int_0^T \phi^{-1}(\tilde{a}(l_{n_j}) + l_{n_j}(t)) dt = 0.$$

Por (5.15) e (5.16), $(\tilde{a}(l_{n_j}) + l_{n_j})$ converge uniformemente para $\hat{a} + l$. Como ϕ^{-1} é contínua, então $(\phi^{-1}(\tilde{a}(l_{n_j}) + l_{n_j}(\cdot)))$ converge uniformemente para $\phi^{-1}(\hat{a} + l(\cdot))$. Portanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \phi^{-1}(\tilde{a}(l_{n_j}) + l_{n_j}(t)) dt = \int_0^T \phi^{-1}(\hat{a} + l(t)) dt = 0.$$

Assim, $\tilde{a}(l) = \hat{a}$, o que mostra que $\tilde{a}$ é contínua. $\square$

Agora defina $a : L^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$a(h) = \tilde{a}(H(h)). \quad (5.17)$$

Desta forma, a é contínua e envia conjuntos limitados de L^1 em conjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$. De fato, para provarmos tal afirmação, note que H é uma função linear e, além disso, temos, para $h \in L^1$,

$$\begin{aligned} \|H(h)\|_0 &= \max_{t \in I} \|H(h)(t)\| = \max_{t \in I} \left\| \int_0^t h(s) ds \right\| \\ &\leq \max_{t \in I} \int_0^t \|h(s)\| ds \leq \int_0^T \|h(s)\| ds = \|h\|_{L^1}, \end{aligned}$$

ou seja, H é uma função limitada. Sendo H linear e limitada, concluímos que H é contínua e envia conjuntos limitados em conjuntos limitados. Como a é uma composição de funções contínuas e, além disso, $\tilde{a}$ envia conjuntos limitados em conjuntos limitados, segue que a é contínua e envia conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Diante do exposto acima, concluímos que a é uma função completamente contínua.

Vamos retornar à expressão (5.3), ou seja,

$$u(t) = u(0) + H(\phi^{-1}(a(h) + H(h)))(t).$$

Aqui, por um abuso de notação, ϕ^{-1} é entendida como uma função $\phi^{-1} : C \rightarrow C$ dada por $\phi^{-1}(v)(t) = \phi^{-1}(v(t))$. É claro que ϕ^{-1} é contínua e envia conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Defina as funções $P : C_T^1 \rightarrow C_T^1$ e $Q : L^1 \rightarrow L^1$ dadas por

$$Pu = u(0) \quad \text{e} \quad Qh = \frac{1}{T} \int_0^T h(s) ds.$$

Observe que podemos decompor C_T^1 da forma

$$C_T^1 = E_1 \oplus E_2, \quad (5.18)$$

onde E_1 é o espaço das funções $\tilde{u}$ tais que $\tilde{u}(0) = 0$ e E_2 é o subespaço de dimensão n das funções constantes. Desta forma, P é a projeção contínua sobre E_2 . Além disso, podemos decompor L^1 da forma

$$L^1 = L_m^1 \oplus F_2,$$

onde F_2 é o subespaço de dimensão n das funções constantes. Segue que o operador Q é a projeção contínua em F_2 .

Considere a função $\mathcal{K} : L^1 \rightarrow C_T^1$ dada por

$$\mathcal{K}(h)(t) = H\left(\phi^{-1}[a((I-Q)(h)) + H((I-Q)(h))]\right)(t) \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (5.19)$$

Se, para alguma $h \in L_m^1$, $u \in C^1$ é solução de (5.2), então u satisfaz a equação (5.3), ou seja, para todo $t \in [0, T]$,

$$u(t) = u(0) + H\left(\phi^{-1}(a(h) + H(h))\right)(t).$$

Portanto, u satisfaz a equação

$$u = Pu + Qh + \mathcal{K}(h). \quad (5.20)$$

Por outro lado, se $u \in C_T^1$ é uma solução de (5.20) para alguma $h \in L^1$, segue, pela definição da função a , que

$$\mathcal{K}(h)(T) = H\{\phi^{-1}[a((I-Q)h) + H((I-Q)h)]\}(T) = 0.$$

Portanto,

$$u(T) = u(0) + Qh,$$

que implica

$$Qh = 0.$$

Vejamos que, desta forma, $u = u(0) + \mathcal{K}(h)$ é solução de (5.2). De fato, temos

$$u(t) = u(0) + H\{\phi^{-1}[a(h) + H(h)]\}(t)$$

Derivando, obtemos

$$u'(t) = \phi^{-1}[a(h) + H(h)](t). \quad (5.21)$$

Aplicando a função ϕ , segue que

$$\phi(u'(t)) = [a(h) + H(h)](t). \quad (5.22)$$

Agora, derive novamente e conclua que

$$(\phi(u'(t)))' = h(t). \quad (5.23)$$

Destacamos que as igualdades (5.21) e (5.22) são para todo $t \in [0, T]$ e a igualdade (5.23) é para quase todo $t \in [0, T]$.

Diante do exposto acima, temos que os problemas (5.2) e (5.20) são equivalentes.

Para terminar esta seção, apresentamos propriedades importantes da função $\mathcal{K}$.

Lema 5.3. *A função $\mathcal{K}$, definida acima, é contínua e envia conjuntos equi-integráveis de L^1 em conjuntos relativamente compactos de C_T^1 .*

Demonstração. A continuidade de $\mathcal{K}$ com valores em C segue do fato de que $\mathcal{K}$ é uma composição de funções contínuas. Além disso, temos que

$$(\mathcal{K}(h))'(t) = \phi^{-1}[a((I - Q)(h)) + H((I - Q)(h))](t),$$

que é uma composição de funções contínuas e, portanto, é contínua.

Seja $\mathcal{E}$ um conjunto equi-integrável em L^1 . Então, se $h \in \mathcal{E}$, existe $\eta \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ tal que, para quase todo $t \in I$,

$$\|h(t)\| \leq \eta(t).$$

Queremos mostrar que $\overline{\mathcal{K}(\mathcal{E})} \subseteq C_T^1$ é um conjunto compacto. Para tanto, tome (v_n) uma sequência em $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ e (h_n) uma sequência em L^1 tal que $v_n = \mathcal{K}(h_n)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned} \|H(I - Q)(h_n)(t)\| &\leq \left\| \int_0^t h_n(s) ds \right\| + \|Qh_n\| t \\ &\leq \left| \int_0^t \eta(s) ds \right| + \frac{t}{T} \int_0^T \eta(s) ds \leq 2 \int_0^T \eta(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência $(H(I - Q)(h_n))$ é uniformemente limitada. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para $t, t' \in [0, T]$, segue que

$$\begin{aligned} \|H(I - Q)(h_n)(t) - H(I - Q)(h_n)(t')\| &\leq \left\| \int_{t'}^t h_n(s) ds \right\| + \|Qh_n\| |t - t'| \\ &\leq \left| \int_{t'}^t \eta(s) ds \right| + \frac{|t - t'|}{T} \int_0^T \eta(s) ds. \end{aligned}$$

Observe que, se $|t - t'|$ convergir para zero, $\|H(I - Q)(h_n)(t) - H(I - Q)(h_n)(t')\|$ também convergirá para zero. Desta maneira, a sequência $(H(I - Q)(h_n))$ é equicontínua (ver Definição 1.18). Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, $(H(I - Q)(h_n))$ possui uma subsequência convergente em C , que vamos chamar de $(H(I - Q)(h_{n_j}))$. Então, passando a uma subsequência, se necessário, temos que a sequência

$$(a((I - Q)(h_{n_j})) + H(I - Q)(h_{n_j}))$$

é convergente em C . Usando que $\phi^{-1} : C \rightarrow C$ é contínua e que

$$(\mathcal{K}(h_{n_j}))' = \phi^{-1}[a((I - Q)(h_{n_j})) + H((I - Q)(h_{n_j}))],$$

segue que a sequência $((\mathcal{K}(h_{n_j}))')$ é convergente em C e, portanto, $(v_{n_j}) = ((\mathcal{K}(h_{n_j})))$ é convergente em C_T^1 . Para finalizar a prova, suponha $(v_n) \subseteq \overline{\mathcal{K}(\mathcal{E})}$. Seja $(l_n) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|l_n - v_n\|_1 = 0.$$

Seja, também, (l_{n_j}) uma subsequência de (l_n) que converge para l . Segue que $l \in \overline{\mathcal{K}(\mathcal{E})}$ e (v_{n_j}) converge para l . Portanto, o resultado está provado. $\square$

5.3 Problema principal

Antes de provarmos o principal resultado do capítulo, apresentamos o seguinte lema.

Lema 5.4. *Sejam $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função Carathéodory e $N_f : C_T^1 \rightarrow L^1$ o operador de Nemytski associado à f , ou seja,*

$$N_f(u)(t) = f(t, u(t), u'(t)).$$

Então, N_f é contínuo e envia conjuntos limitados em conjuntos equi-integráveis.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em C_T^1 que converge para algum $u \in C_T^1$. Como f é Carathéodory, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Proposição 1.20),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^1} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f(t, u_n(t), u'_n(t)) - f(t, u(t), u'(t))\| dt = 0. \end{aligned}$$

Logo, N_f é contínua.

Agora, seja $\Lambda \subseteq C_T^1$ um conjunto limitado. Quero mostrar que $A = \{N_f(u) : u \in \Lambda\}$ é equi-integrável. De fato, como Λ é limitado, existe $r > 0$ tal que $\Lambda \subseteq B_r(0)$. Portanto, se $u \in \Lambda$, temos

$$\|u\|_1 = \|u\|_0 + \|u'\|_0 < r.$$

Sendo f Carathéodory, existe $g \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ tal que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\|f(t, u(t), u'(t))\| \leq g(t).$$

Portanto,

$$\|N_f(u)\|_{L^1} = \int_0^T \|f(t, u(t), u'(t))\| dt \leq \int_0^T g(t) dt$$

para todo $u \in \Lambda$. Logo, A é equi-integrável. $\square$

A seguir temos o resultado principal deste capítulo, que foi provado por Manásevich e Mawhin no Teorema 3.1 do artigo [11].

Teorema 5.5. *Sejam $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua satisfazendo as propriedades (H_1) e (H_2) e $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Carathéodory. Considere o seguinte problema*

$$(\phi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (5.24)$$

Assuma que U seja um aberto e limitado em C_T^1 tal que as condições a seguir sejam satisfeitas:

(1) Para cada $\lambda \in (0, 1)$, o problema

$$(\phi(u'))' = \lambda f(t, u, u'), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T) \quad (5.25)$$

não tem solução em ∂U .

(2) Se $F : E_2 \rightarrow E_2$ é dada por

$$F(a) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, a, 0) dt,$$

então a equação

$$F(a) = 0 \quad (5.26)$$

não tem solução em $\partial U \cap E_2$, onde E_2 é o subespaço de C_T^1 dado pela decomposição 5.18.

(3) O grau de Brouwer

$$\deg_B(F, U \cap E_2, 0) \neq 0. \quad (5.27)$$

Então, o problema (5.24) tem solução em $\overline{U}$.

Demonstração. Seja N_f o operador de Nemytski associado à f , ou seja,

$$N_f(u)(t) = f(t, u(t), u'(t)).$$

Considere o problema

$$(\phi(u'))' = \lambda N_f(u) + (1 - \lambda)QN_f(u), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (5.28)$$

Para $\lambda \in (0, 1]$, se u é uma solução do problema (5.25), então, como já foi visto, a condição $u'(0) = u'(T)$ implica $QN_f(u) = 0$, portanto u resolve o problema (5.28). Por outro lado, ainda para $\lambda \in (0, 1]$, se u é uma solução do problema (5.28), observando que

$$Q[\lambda N_f(u) + (1 - \lambda)QN_f(u)] = QN_f(u),$$

temos que $QN_f(u) = 0$. Desta forma, u resolve o problema (5.25).

Podemos escrever o problema (5.28) da seguinte forma equivalente

$$u = \zeta(u, \lambda), \quad (5.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \zeta(u, \lambda) &= Pu + QN_f(u) + (\mathcal{K} \circ [\lambda N_f + (1 - \lambda)QN_f])(u) \\ &= Pu + QN_f(u) + (\mathcal{K} \circ [\lambda(I - Q)N_f])(u). \end{aligned}$$

Suponha que o problema (5.28) não tenha solução para $\lambda = 1$. Do contrário, o teorema está provado. Pela hipótese (1), o problema (5.29) não tem solução em $\partial U \times (0, 1]$. Para $\lambda = 0$, o problema (5.28) fica da forma

$$(\phi(u'))' = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u(t), u'(t)) dt, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (5.30)$$

Se u é solução do problema (5.30), então

$$\int_0^T f(t, u(t), u'(t)) dt = 0. \quad (5.31)$$

Assim, $(\phi(u'(t)))' = 0$, portanto $\phi(u'(t)) = c \in \mathbb{R}^n$, que implica $u'(t) = \phi^{-1}(c)$. Integrando a última igualdade em $[0, T]$, segue que $\phi^{-1}(c) = 0$. Desta forma, concluímos que u é uma função constante, digamos $u(t) = d$. Por (5.31),

$$\int_0^T f(t, d, 0) dt = 0,$$

que, junto com a condição (2), implica que $u = d \notin \partial U \cap E_2$. Sendo assim, provamos que o problema (5.29) não tem solução em $\partial U \times [0, 1]$. Além disso, como f é Carathéodory, a função $\mathcal{N} : C_T^1 \times [0, 1] \rightarrow L^1$, definida por

$$\mathcal{N}(u, \lambda) = \lambda N_f(u) + (1 - \lambda) Q N_f(u)$$

é contínua e envia conjuntos limitados em conjuntos equi-integráveis. Do Lema 5.3, segue que, ζ é completamente contínua. Diante do exposto acima, para $\lambda \in [0, 1]$, o grau de Leray-Schauder $\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, \lambda), U, 0)$ está bem definido e, pela invariância homotópica do grau de Leray-Schauder,

$$\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 0), U, 0) = \deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 1), U, 0). \quad (5.32)$$

Agora, é evidente que o problema (5.24) é equivalente ao problema

$$u = \zeta(u, 1) \quad (5.33)$$

e, por (5.32), para provarmos que o problema (5.33) tem solução, basta mostrar que $\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 0), U, 0) \neq 0$.

Observando que $\mathcal{K}(0) = 0$, temos

$$\zeta(u, 0) = Pu + QN_f(u),$$

ou seja,

$$u - \zeta(u, 0) = u - Pu - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u(t), u'(t)) dt.$$

Considerando a decomposição (5.18) de C_T^1 e aplicando o Lema 4.12, temos

$$\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 0), U, 0) = \deg_{\text{LS}}((I - \zeta(\cdot, 0))|_{\overline{U} \cap E_2}, U \cap E_2, 0).$$

Note que $\dim E_2 = n < \infty$ e que $u - \zeta(u, 0) = -F(u)$ para todo $u \in E_2$. Desta forma,

$$\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 0), U, 0) = \deg_{\text{B}}(-F, U \cap E_2, 0).$$

Portanto, usando a Proposição 2.18, item 11, segue que

$$\deg_{\text{LS}}(I - \zeta(\cdot, 0), U, 0) = (-1)^n \deg_{\text{B}}(F, U \cap E_2, 0)$$

Pela hipótese (3), completamos a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis: a modern approach to advanced calculus*. Reading, Mass: Addison-Wesley Pub., 1957, 553 p.
- [2] Bachman, G.; Narici, L., *Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1972, 542 p.
- [3] Bartle R.G., *The Elements of Real Analysis*. New York: Wiley, 1976, 480 p.
- [4] Brouwer, L.E.J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., vol. 71, n°1, p. 97-115, 1912.
- [5] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1980, 450 p.
- [6] Fonseca, I.; Gangbo, W., *Degree Theory in Analysis and Applications*. New York: Oxford Science Publications, 1995, 211 p.
- [7] Guillemin V.; Pollack A., *Differential topology*. Providence, R.I: AMS Chealsea Pub., 1974, 222 p.
- [8] Hoffman, K.; Kunze, R., *Linear Algebra*. Englewood,N.J.: Prentice-Hall, 1971, 407 p.
- [9] Leray, J; Schauder, J., *Topologie et équations fonctionnelles*. Ann. Sci. École Norm. Sup., s3, vol. 51, p. 45-78, 1934.
- [10] Lima, E.L., *Curso de Anlise*. Rio de Janeiro: vol. 2, Impa, 2009, 546 p.
- [11] Manásevich, R.;Mawhin, J., *Periodic Solutions for Nonlinear Systems with p-Laplacian-Like Operators*. Journal of Differential Equations, vol. 145, p. 367-393, 1998.

- [12] Mawhin, J., *Leray-Schauder Degree: A Half Century of Extensions and Applications*. Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. Toruń, vol. 14, p. 195-228, 1999.
- [13] Outerelo, E.; Ruiz, J.M., *Mapping Degree Theory*. Madrid: A.M.S., 2009, 244 p. (Graduate studies in mathematics; vol. 108).
- [14] Schauder, J., *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*. Math. Z., vol. 26, p. 47-65, 1927.
- [15] Schauder, J., *Bemerkungen zu meiner Arbeit "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen"*. Math. Z., vol. 26, p. 417-431, 1927.
- [16] Schauder, J., *Invarianz der Gebiet in Funktionalräumen*. Studia Math. vol. 1, p. 123-139, 1929.
- [17] Schauder, J., *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. Studia Math. vol. 2, p. 171-180, 1930.
- [18] Schauder, J., *Ueber den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typ*. Math. Ann., vol. 106, p. 47-65, 1932.