Introdução à Lógica Modal

Bruno Costa Coscarelli

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Orientador: Profa. Dra. Angela Weiss

São Paulo
2008

Introdução à Lógica Modal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de mestrado devidamente corrigida e defendida por Bruno Costa Coscarelli e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, junho de 2009.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Angela Weiss (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP
- Prof. Dr. Andreas Bernhard Michael Brunner

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo proporcionar aos estudantes que precisem da lógica modal como ferramenta um texto conciso mas suficientemente completo. Embora seja um texto de cunho matemático, procura-se manter o equilíbrio entre os conceitos matemáticos e suas motivações filosóficas, pela crença de que tal equilíbrio é essencial para situar o pensamento em um texto introdutório. O primeiro capítulo começa com um breve histórico filosófico e trabalha os conceitos fundamentais de um ponto de vista sintático. O segundo capítulo retoma os conceitos do primeiro capítulo de um ponto de vista semântico e faz a conexão entre sintaxe e semântica. O terceiro capítulo trabalha o conceito de bissimulação e apresenta ferramentas que abrirão caminho para aplicações.

Abstract

The goal of this work is to provide the students who need to deal with modal logic as a tool with a text which might be concise but complete enough at the same time. Although this is a rather mathematical text, an effort is made in order to maintain the equilibrium between mathematical concepts and their philosophical origins for believing this equilibrium is of great importance for clarifying the ideas in a work for beginners. The first chapter starts with a brief historical approach of logic and then discusses some fundamental concepts from a syntactical point of view. The second chapter discusses the same concepts from a semantical point of view and links syntact and semantics. The third chapter presents the concept of bisimulation and paves the way for working with applications.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Profa. Dra. Angela Weiss pelo atencioso trabalho de orientação.

Agradeço pelo suporte computacional novamente à professora Angela Weiss, aos funcionários da Seção de Informática do IME, a Alexandre Carneiro e Sálvio Soares.

Agradeço aos amigos, que muito me apoiaram neste processo. De forma especial, a Tatiani e Rogério Baeta, Mariana Diláscio e Liliane e Eduardo da Silveira.

Agradeço aos professores da USP pelo acolhimento.

Agradeço aos colegas de mestrado pelo companheirismo.

Agradeço aos professores da UFMG pelo incentivo para seguir na carreira acadêmica. Em especial, às professoras Cristina Marques e Sônia Pinto e aos professores Armando Neves e Adairto dos Anjos.

Agradeço a todos os familiares pelo carinho e apoio. Em particular, ao meu irmão Leonardo e, in memoriam, à minha querida avó Alba.

Agradeço à minha companheira Helena por compartilhar comigo este momento.

Agradeço, finalmente, à minha filha Alba Bruna pela felicidade com que preenche a minha vida.

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Histórico	2
1.2	Cálculo Proposicional	13
1.3	Os Sistemas de Lógicas Modais	17
1.4	Teoremas de Redução em S5	25
1.5	Apêndice	28
2	Semântica	32
2.1	Modelos e Estruturas	32
2.2	Caracterização de Lógicas Modais por Estruturas	35
2.3	Relação Entre Axiomas e Condições Impostas às Relações	41
2.4	Consistência, Corretude e Completude	46
2.5	Considerações Finais	61
3	Bissimulação	68
3.1	Bissimulação	68
3.2	n-Bissimilaridade	82
3.3	Filtragem	86
	Bibliografia	92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico

O primeiro pensador a fazer um estudo sistemático do que hoje se chama lógica foi Aristóteles e já com ele nasceu a Lógica Modal.

Para situarmos um pouco o nosso pensamento, Aristóteles foi discípulo de Platão e seu trabalho ao mesmo tempo segue a linha do mestre em vários pontos e critica a mesma em outros pontos.

Vamos começar dando uma breve visão do momento filosófico em que nasceu a lógica: A filosofia nasceu como uma busca de entender o mundo ao nosso redor. Seu marco inicial foram as teorias sobre o surgimento do *chosmos*, sobre os elementos dos quais tudo seria formado e sob que força ou ordem, etc. Essa discussão se dá em torno da chamada *physis*.

Dois momentos desse período da filosofia merecem nossa atenção mais cuidadosa pelos nossos interesses mais objetivos. O Primeiro momento é Parmênides, com seu princípio funda-

mental: O ser é e o não-ser não é. Partindo desse princípio, Parmênides argumenta que o movimento não existe, pois, para que o movimento existisse, o ser teria que mudar e ele só poderia mudar para o que ele não é, ou seja, o não-ser, que, pelo seu princípio, não é.

O segundo momento é Heráclito, com seu princípio fundamental: ‘Tudo flui’. Heráclito é o autor da famosa afirmação de que não se banha em um mesmo rio duas vezes, pois, da segunda vez, o rio já não é o mesmo e nem a pessoa que se banha. Para Heráclito, portanto, tudo é movimento.

Essas duas correntes dividiram esse período da filosofia com fortes disputas e o pouco sucesso em se chegar a um acordo sobre o princípio fundamental de tudo abriu o caminho para um movimento que virou o eixo da filosofia: A sofística. A sofística nasceu da idéia de que tudo, na verdade, é relativo. Seu principal fundador, Protágoras, é o autor da famosa frase: ‘O homem é a medida de todas as coisas’. No entanto, esse movimento acabou tomando outros rumos. O papel da sofística vem sendo rediscutido, mas é fato que os sofistas que sucederam se dedicaram ao desenvolvimento de técnicas de retórica e ensinavam tais técnicas. A procura por esse tipo de instrução tornou-se grande.

O que nos interessa como relevante é que seu estudo sobre retórica instigou o surgimento da lógica e, além disso, embora não tenham constituído uma corrente filosófica, forçaram a mudança do eixo do pensamento filosófico da natureza para

o homem e abriram caminho para um novo período da filosofia, que nasceu com Sócrates. Sócrates não era um relativista. Pelo contrário, ele criticou duramente os sofistas e procurou organizar o pensamento. Ele buscava a verdade, mas, naturalmente, em moldes muito diferentes do que era feito no primeiro período. Sócrates foi o criador da dialética. Suas frases mais famosas: ‘Só sei que nada sei.’ e ‘Conhece-te a ti mesmo.’ (a segunda, na verdade, ele teria recebido do oráculo). Sócrates se definia como ‘parteiro de almas’, por ajudar seu interlocutor a encontrar a verdade em si mesmo. Seu método era fazer perguntas sucessivamente até desmontar os conceitos previamente formados pelo seu interlocutor e depois, novamente através de perguntas, levá-lo à verdade, que ele (interlocutor) já conhecia. Sócrates não deixou nada escrito e sua própria existência chegou a ser questionada. Hoje, no entanto, é aceito no meio acadêmico que ele existiu de fato. Sua obra nos foi reportada pelo seu principal discípulo, Platão, que partiu do legado do mestre para criar sua própria filosofia. Um tema central nessa filosofia era a dialética, o método por excelência para chegar à verdade, através de questionamentos sucessivos.

Esse brevíssimo apanhado foi para situar o momento em que Aristóteles escreveu e levantar alguns dos pontos mais relevantes que influenciaram o seu pensamento. Vamos então aos pontos que influenciaram diretamente a lógica. Aristóteles destacava, dentre todas as ciências, a metafísica. Cada ciência trata de um aspecto particular do ser, e portanto é fragmentada. A

metafísica trata do ser como um todo, na sua totalidade. A metafísica tem caráter ontológico (ontologia é o ramo da filosofia que trata do ser). Em sua metafísica, Aristóteles pretende superar de vez a *Ontologia Eleática* (a escola eleática é a escola filosófica que segue Parmênides). Ele admite a multiplicidade do ser. A partir daí, começa a discorrer sobre as características do mesmo. A primeira distinção são as categorias, que representam o grupo principal de significados do ser e constituem as originárias ‘divisões do ser’. Aristóteles fala em dez categorias, mas discorre efetivamente sobre oito, a saber: Substância (ou essência), qualidade, quantidade, relação, ação, paixão, lugar e tempo. A teoria das categorias tem importantes conseqüências no desenvolvimento da lógica. No entanto, outra distinção filosófica nos interessa de forma mais próxima: a distinção entre potência e ato. Por exemplo, a semente é uma árvore em potência, mas não em ato. Existe uma grande diferença entre o cego e quem tem os olhos sãos mas os mantém fechados. O primeiro não é capaz de enxergar. O segundo é uma pessoa que enxerga em potência, mas não em ato. Apenas quando abrir os olhos enxergará em ato. Essa distinção foi o embrião da lógica modal. Quando se afirma que ‘o homem vê a pedra’, essa proposição pode ser verdadeira ou falsa. Se o homem vê a pedra, ela é verdadeira. Se o homem não vê a pedra, ela é falsa. Se o homem tem possibilidade de ver a pedra, a afirmação é possível, mesmo que seja falsa, ou seja, que o homem não esteja vendo a pedra naquele momento. Se o homem não tem

a possibilidade de ver a pedra, a afirmação é impossível. Da mesma forma, uma afirmação que é verdadeira e não poderia ser falsa é necessária. Nesse ponto, Aristóteles começa a considerar afirmações modais, como ‘é necessário que...’, ‘é impossível que...’, ‘é possível que...’. O adjetivo ‘modal’ refere-se ao modo como a afirmação é verdadeira ou falsa: ela é necessariamente verdadeira ou necessariamente falsa (o que equivale a dizer que é impossível), ou possivelmente verdadeira ou falsa. Nasce assim a lógica modal.

Aristóteles abre então a discussão sobre as implicações modais. Ele afirma que de uma afirmação necessária se conclui uma necessária. Em outras palavras, se é necessário que A implique B e A é necessária, então B é necessária. Ao considerar conjunções de afirmações possíveis, ele acaba fazendo uma distinção importante. Vejamos: É possível que um homem esteja sentado e é possível que o mesmo esteja andando. No entanto, é impossível que ele esteja sentado e esteja andando ao mesmo tempo. Portanto, da conjunção de duas afirmações possíveis criou-se uma afirmação impossível; Algo e a negação desse algo não podem acontecer ao mesmo tempo. Aristóteles, nesse ponto, percebe que afirmar que é impossível que o homem voe porque ele não tem asas e afirmar que é impossível que o pássaro voe e ande ao mesmo tempo são coisas muito diferentes. No primeiro caso, a impossibilidade vem da maneira como o mundo é, da natureza do homem, que não tem asas. No segundo caso, temos uma impossibilidade lógica oriunda

dos conceitos do que seja andar e voar. Aristóteles cria então uma importante distinção entre os dois tipos de impossibilidade. O primeiro, ele chama de impossibilidade relativa e o segundo de impossibilidade absoluta. Naturalmente, a mesma distinção vale para a necessidade relativa e para a necessidade absoluta.

A lógica não nasceu pelo puro e simples interesse especulativo; Ela nasceu da necessidade de se estabelecerem regras para a argumentação. Em grande medida, era uma resposta às técnicas dos sofistas, que criavam artifícios para ludibriar seus interlocutores com argumentos aparentemente verdadeiros, mas com falhas muitas vezes sutis. Como então contestar os argumentos enganosos? Aristóteles sentiu a necessidade de sistematizar as regras de argumentação, para discernir entre os argumentos válidos e os não. A lógica não era tida como parte da filosofia, mas como um instrumento, uma ferramenta.

Naturalmente, não podemos afirmar de forma simplista que Aristóteles tenha sistematizado a teoria da argumentação apenas para refutar os sofistas; Ele também tinha interesse na argumentação científica e na argumentação dialética.

O ponto chave dessa ferramenta é a teoria do silogismo. Ela estabelece as regras de argumentação. O exemplo ilustrativo mais famoso de silogismo é: Sócrates é um homem. Todo homem é mortal. Logo, Sócrates é mortal.

Aristóteles estabelece várias formas de silogismo, chamados modos de silogismo. Cada modo recebeu um nome na Idade

Média. Alguns modos de silogismo: Se todo S é M e todo M é L, então todo S é L (Barbara); Se nenhum M é L e todo S é M, então nenhum S é L (Celarent); Se todo S é M e algum L é S, então algum L é M (Darrii); Se nenhum M é L e algum S é M, então algum S não é L (Ferio).

Cada um desses modos pode ser lido à luz da teoria dos conjuntos e facilmente visualizado a partir de figuras como ilustrado abaixo.

Barbara

Celarent

Darrii

Ferio

Em seu estudo sobre sentenças, Aristóteles as classifica em quatro tipos: Universal Afirmativa (todo homem é filósofo); Universal Negativa (nenhum homem é filósofo); Particular Afirmativa (algum homem é filósofo); Particular Negativa (algum homem não é filósofo). A universal afirmativa e a particular negativa são a negação uma da outra. Aristóteles as chama de contraditórias. Da mesma forma, a universal negativa e a particular afirmativa. A universal positiva e a universal nega-

tiva não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo, mas podem ser falsas ao mesmo tempo. Elas são chamadas de contrárias. A particular afirmativa e a particular negativa não podem ser falsas ao mesmo tempo, mas podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Elas são chamadas de subcontrárias. A teoria dos silogismos de Aristóteles foi aceita como suficiente para o tratamento da lógica de forma pronta e acabada até o fim do século XIX, quando Frege e Russell mostraram que ela por si só não resolvia a lógica. Para uma discussão sobre o assunto, veja o apêndice no final do capítulo. O que acabamos de discutir pode ser representado pelo seguinte esquema:

Aristóteles percebeu que uma afirmação do tipo ‘é possível que...’ pode ser tratada como uma afirmação existencial particular do tipo ‘existe um algo tal que...’. Da mesma forma, uma afirmação do tipo ‘é necessário que...’ pode ser tratada como uma afirmação existencial universal. Isso o leva a fazer uma analogia entre as sentenças quantificadas e as modais e assim classificar as sentenças modais de forma análoga. Uma importante pergunta levantada a partir dessa discussão: Se pusermos a palavra ‘necessário’ antes de uma sentença alteramos

o predicado da sentença ou a sentença toda? A resposta é que alteramos a sentença toda. De fato, a negação de ‘é necessário que A seja B’ é ‘não é necessário que A seja B’ e não ‘é necessário que A seja não-B’. Da mesma forma, a negação de ‘é possível que A seja B’ é ‘não é possível que A seja B’ e não ‘é possível que A seja não-B’. No caso das sentenças quantificadas, a negação de ‘existe A tal que B’ é ‘não existe A tal que B’ e não ‘existe A tal que não B’. Essa discussão autoriza a efetivação da analogia, que pode ser representada pelo seguinte esquema:

Aristóteles então procura criar uma teoria de silogismos modais, mas essa teoria é falha em muitos aspectos.

Vamos levantar um ponto: Na sua discussão sobre necessidade, impossibilidade e possibilidade, os conceitos de possibilidade e contingência ficaram misturados. Dizer que algo é contingente é o mesmo que dizer que aquele algo é possível e que a negação daquele algo é possível também. No entanto, a possibilidade de algo não implica a possibilidade da sua negação. Em outras palavras, ‘A é contingente’ significa ‘A é possível e não A é possível’. Aristóteles usa uma mesma palavra para as duas noções e isso leva a confusões.

Em sua teoria de silogismos modais, Aristóteles parte da noção de contingência como elementar e procura derivar o resto daí. Tal escolha provavelmente foi motivada pela sua metafísica, inspirada na sua noção de potência, mas não foi uma escolha adequada. De início, podemos observar que contingência é a conjunção de duas possibilidades, uma afirmação do tipo ‘A e B’. Na prática, teríamos então um silogismo com uma conjunção no primeiro termo, o que não é um silogismo no sentido estrito que Aristóteles concebe.

Sobre o insucesso da teoria dos silogismos modais, é pertinente observar que, a rigor, não seria necessária uma teoria sobre o assunto. De fato, já que a modalidade altera a sentença como um todo, ou seja, ela atua ‘externamente’, não atua na estrutura ‘interna’ da sentença, os silogismos ordinários bastam para tratar das sentenças modais.

Para encerrar a seção, vamos citar brevemente uma escola filosófica que rivalizou com a escola aristotélica (chamada Peripato) e que deu grande atenção à lógica modal: O estoicismo (que foi uma sucessão da escola de Megara).

Diodoro, um dos membros mais destacados da escola de Megara, define possível como aquilo que é ou será; impossível como aquilo que, sendo falso, não será verdadeiro; necessário como aquilo que, sendo verdadeiro, não será falso; e não necessário como aquilo que é ou será falso.

Diodoro toma o chamado Argumento Mestre para sustentar seus conceitos: ‘Tudo que é passado e verdadeiro é necessário’.

‘O impossível não segue do possível’. ‘O que não é nem será é possível’. Como as três afirmações são incompatíveis e as duas primeiras são verdadeiras, então nada é possível que não seja nem venha a ser verdadeiro.

O argumento acima é bastante confuso. O fato é que a noção de modalidade para eles estava intimamente ligada à de tempo. O que era passado era tido como necessário, uma vez que não poderia ser mudado.

Dois fatos relevantes devem ser destacados a respeito do estoicismo (e da escola de Megara). Primeiro, que a escola era rival do Peripato. Segundo, que era determinista. O primeiro fato influenciou nas suas noções sobre modalidade na medida em que a escola aparentemente procurava negar a teoria aristotélica de potência e ato. O segundo fato certamente vinculou a noção de modalidade à de tempo.

Vamos encerrar a seção expondo, a título de ilustração, um argumento que na época era apresentado como prova do determinismo:

- Amanhã haverá ou não haverá uma batalha.
- Daí, uma das seguintes afirmações é verdadeira: 1) Amanhã haverá uma batalha.
2) Amanhã não haverá uma batalha.
- Se agora é verdade que amanhã haverá uma batalha, então, tendo em vista esse fato, é necessário que amanhã haja uma batalha. Da mesma forma, se agora é verdade que

amanhã não haverá uma batalha, então é necessário que amanhã não haja uma batalha.

- Portanto, já está determinado se amanhã haverá ou não uma batalha.

1.2 Cálculo Proposicional

Daremos agora um grande salto no tempo para tratar de lógica dentro do espírito moderno.

O espírito que imperou até tempos bem recentes foi de unicidade da Lógica. Hoje, o espírito é do estudo de sistemas lógicos. Foi a mesma mudança de espírito processada com a descoberta da possibilidade de outras geometrias que não a euclidiana. A geometria moderna não lida apenas com um sistema geométrico; Até um período não muito distante da história da matemática, lidava-se apenas com o sistema euclidiano, que era visto como o único, como a Geometria. Tal mudança se processou na lógica em um momento mais tardio e constituiu uma grande revolução de pensamento. A bem da verdade, quando discutimos a respeito de um sistema lógico, nós o fazemos através de uma ‘metalinguagem’ e, nessa metalinguagem, seguimos regras de argumentação, como Aristóteles queria discutir. No momento histórico em que Aristóteles escreveu, não existia a distinção entre linguagem e metalinguagem. Em uma análise mais profunda, essa é a distinção que possibilita pensar em múltiplas lógicas. Por outro lado,

a possibilidade de pensar em sistemas lógicos lançando mão da metalinguagem enriquece a discussão sobre as regras de argumentação. A questão filosófica é delicada e merece uma atenção mais cuidadosa, mas, a partir de agora, deixaremos a filosofia de lado para assumir uma postura puramente matemática e estudar as possibilidades de sistemas lógicos, que discutiremos, naturalmente, na nossa metalinguagem. Para uma discussão aprofundada sobre a história da lógica, consultar Kneale and Kneale [6]. Para uma boa introdução à história da filosofia, consultar Giovanni Reale [10] ou Marilena Chauí [3]. Duas boas referências para o estudo da lógica de primeira ordem são Mendelson [8] e Manin [7]. Para uma introdução acessível à lógica dentro de uma abordagem da teoria da argumentação, uma boa referência é Margutti [9]. A lógica modal contemporânea nasceu em um trabalho denominado Symbolic Logic, de C.I Lewis e H.C. Langford, publicado em 1932. O objetivo do trabalho era analisar as propriedades que distinguem a implicação estrita, para a qual se usa o símbolo $\prec$, da implicação material de Russell, para a qual se usa o símbolo $\supset$. Nesse trabalho, os autores constroem cinco sistemas lógicos modais distintos denominados $S1$, $S2$, $S3$, $S4$ e $S5$, cada um estendendo o anterior. Os três primeiros não são normais e não trataremos deles neste trabalho (definiremos logo adiante o que é um sistema lógico normal). Todos os sistemas adotavam o axioma T ($\Box p \supset p$) e tinham como teorema a equivalência $(p \prec q) \equiv \Box(p \supset q)$. Adotaremos o símbolo $\supset$ para designar

a implicação material nos sistemas lógicos, mas usaremos o símbolo $\rightarrow$ para designar implicação na nossa metalinguagem.

Nosso interesse neste trabalho não passa pelo estudo da linguagem e da teoria da argumentação. Não vamos lidar com sentenças, mas com proposições. Dentro de uma linguagem bastante formal, proposições são variáveis que podem assumir dois valores: verdadeiro e falso. Definimos também o símbolo $\perp$ como sempre falso. Em outras palavras, é também um símbolo atômico, como as proposições elementares, mas tem sempre o valor 'falso', enquanto as primeiras podem ser verdadeiras ou falsas.

Para construir um sistema lógico, precisamos definir:

- a) Uma lista de símbolos primitivos.
- b) Uma lista de regras de formação, que determinarão quais são as fórmulas bem formadas.
- c) Uma lista de fórmulas bem formadas, que serão chamadas de axiomas.
- d) Uma lista de regras de derivação, que determinarão quais fórmulas bem formadas são teoremas.

Cálculo proposicional é o sistema lógico onde os símbolos primitivos são variáveis, que representam proposições (ou proposições elementares), o símbolo $\perp$, os símbolos $\neg$ e $\vee$, que representam, respectivamente, negação e disjunção (união) e os parênteses, usados para indicar a ordem em que os símbolos são empregados.

As regras de formação são:

- Uma proposição elementar é uma fórmula bem formada.
- $\perp$ é uma fórmula bem formada.
- Se ψ é uma fórmula bem formada, $\neg\psi$ é uma fórmula bem formada.

- Se ψ e ϕ são fórmulas bem formadas, $\psi \vee \phi$ é uma fórmula bem formada.

Os axiomas, para citar a axiomatização devida a Whitehead e Russell, são:

- $(p \wedge p) \supset p$
- $q \supset (p \vee q)$.
- $(p \vee q) \supset (q \vee p)$.
- $(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$.
- As regras de derivação são:

a) **Substituição Uniforme:** Ao substituir uniformemente uma variável em um teorema por uma fórmula bem formada, obtém-se um teorema.

b) **Modus Ponens:** Se ψ e $\psi \supset \phi$ são teoremas, então ϕ é teorema.

Observações: 1) Outros símbolos são usados como abreviações. Por exemplo, $p \wedge q$ é uma abreviação para $\neg(\neg p \vee \neg q)$; $p \supset q$ é uma abreviação para $\neg p \vee q$; $\top$ é uma abreviação para $\neg\perp$. 2) A rigor, $\perp$ pode ser tratado como uma abreviação para $p \wedge \neg p$, mas é conveniente tratá-lo como primitivo para efeito de definição de complexidade de fórmulas, que desempenha um papel fundamental na aplicação da indução. 3) Os parênteses, na verdade, são desnecessários. Para uma notação

que dispensa o seu uso, consultar Bourbaki [2]. 4) Quando uma fórmula ψ é teorema no sistema que estamos considerando, escrevemos $\vdash \psi$. Dessa forma, podemos reescrever: b) **Modus Ponens:** Se $\vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$, então $\vdash \phi$.

Não nos estenderemos mais com cálculo proposicional. Para um estudo mais aprofundado sobre o assunto, remetemos novamente a Mendelson [8]. A lógica de primeira ordem é uma extensão do Cálculo proposicional pelo acréscimo dos quantificadores $\forall$ e $\exists$. Nossos sistemas de lógica modal também serão extensões do cálculo proposicional, que doravante abreviaremos por PC. Os símbolos $\neg$, $\vee$ e derivados serão chamados Booleanos.

1.3 Os Sistemas de Lógicas Modais

Temos agora o problema de estender PC e chegar a um sistema de lógica modal. Naturalmente, devemos começar acrescentando o símbolo $\Diamond$, que para nós significa ‘é possível que’. Acrescentamos então às regras de formação a seguinte: Se ψ é uma fórmula bem formada, então $\Diamond\psi$ também o é. O símbolo $\Box p$ é abreviação de $\neg\Diamond\neg p$. Dessa forma, $\Box p$ significa que não é verdade que não p seja possível. Em outras palavras, p é necessário.

Para começar a pensar em Lógica Modal, devemos indagar quais são as propriedades que essa lógica deve ter. Antes de mais nada, como concebemos as modalidades? Bem, concebe-

mos as modalidades como absolutas e não relativas, nos termos de Aristóteles. Assim, queremos que uma fórmula necessária seja aquela logicamente necessária. Em outras palavras, aquilo que é um teorema no sistema lógico é necessário. Para exprimir tal idéia, vamos acrescentar a seguinte regra de transformação:

Necessitação: Se ψ é um teorema, então $\Box\psi$ é um teorema. Essa regra de transformação simplesmente traduz a idéia primordial que queremos para a palavra ‘necessário’ e será adotada em qualquer sistema de lógica modal que venhamos a considerar.

Outra propriedade que será considerada básica é a ‘Lei de Aristóteles’, que diz que de uma implicação estrita (necessária) e uma premissa necessária tiramos uma consequência necessária. Em símbolos, $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$. Esse axioma é denominado axioma K .

Definição 1.3.1 (Sistemas Normais). *A extensão de PC pelo acréscimo da regra de transformação Necessitação e do axioma K é chamada sistema K. Um sistema (ou uma lógica) é chamado normal quando é uma extensão de K. Dessa forma, K é o menor sistema normal.*

Trabalharemos apenas com os sistemas normais.

Vamos agora analisar outras propriedades que queremos que nossos sistemas tenham e procurar os axiomas com os quais pretendemos estender nosso sistema básico K .

É bastante razoável aceitar que o que é necessário é válido ($\Box p \supset p$). Além de razoável, essa propriedade foi consagrada

pelo desenvolvimento da lógica na idade média. No entanto, dependendo do que esperamos que o nosso sistema traduza, a propriedade resulta inadequada. Por exemplo, se quisermos que $\Box p$ signifique ‘é obrigatório que p ’, não é razoável aceitar que o que é obrigatório vá acontecer. Definindo $\Box p$ dessa forma, $\Diamond p = \neg \Box \neg p$ significa ‘não é verdade que a negação de p seja obrigatória’, ou seja, ‘ p é permitido’. Em tal contexto, é razoável aceitar como regra que o que é obrigatório é permitido ($\Box p \supset \Diamond p$). Como nenhuma das duas propriedades segue do que temos até o momento, cada uma delas pode ser tomada como axioma e elas são denominadas T e D , respectivamente.

$$-T = \Box p \supset p$$

$$-D = \Box p \supset \Diamond p$$

Vamos trabalhar um pouco com o conceito de contingência. Na discussão que fizemos sobre filosofia, estabelecemos que uma proposição é contingente quando ela é possível e sua negação também é possível. Usando o símbolo ∇ para designar contingência, isso se traduz em termos matemáticos com a seguinte definição: $\nabla p = \Diamond p \wedge \Diamond \neg p$. Usaremos o símbolo Δ para designar não-contingência. Então, $\Delta p = \neg \nabla p$.

Intuitivamente, contingente é o que é possível e cuja negação também é possível; necessário é aquilo que é verdadeiro e não poderia ser falso. Em outras palavras, é aquilo que é verdadeiro e não é contingente. É de se esperar, portanto, que $\Box p \equiv (p \wedge \Delta p)$ seja um teorema. Mas será que podemos assumir ∇ como operador primitivo e definir $\Diamond$ e $\Box$ a partir dele?

Para isso, precisamos ter a equivalências $\Diamond p \equiv (p \vee \nabla \neg p)$, o que equivale a $\Box p \equiv (p \wedge \Delta p)$. Chamemos de Eq a segunda equivalência. O teorema a seguir nos dá uma resposta:

Teorema 1.3.2. *O axioma T é equivalente em K à equivalência $Eq = (\Box p \equiv (p \wedge \Delta p))$.*

Demonstração. $\mathbf{T} \supset Eq$ Antes, observemos que, independentemente de T , $(\Box p \wedge p) \supset \Box p$ e $\Box p \supset \Box p$ são teoremas. Dessa forma, $\Box p \supset p$ é equivalente a $(\Box p \wedge p) \equiv \Box p$.

Vamos então à demonstração:

$$(1) \Box p \equiv (\top \supset (p \wedge \Box p))$$

[(1) segue da equivalência que mencionamos acima e da equivalência $p \equiv (\top \supset p)$]

$$(2) \Box p \equiv (\perp \vee (p \wedge \Box p))$$

[(2) segue de (1) e da equivalência $(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)$]

$$(3) \Box p \equiv ((p \wedge \Box \neg p) \vee (p \wedge \Box p))$$

[(3) segue de (2) e do fato de que $(p \wedge \Box \neg p)$ é uma contradição (uma vez assumido T), equivalente, portanto, a $\perp$]

$$(4) \Box p \equiv (p \wedge (\Box p \vee \Box \neg p))$$

[(4) segue de (3) e da equivalência $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$]

$$((5)) \Box p \equiv (p \wedge \Delta p)$$

[(5) segue de (4) e da definição de Δ , pois $(\Box p \vee \Box \neg p) \equiv \neg(\neg \Box p \wedge \neg \Box \neg p) \equiv \neg(\Diamond \neg p \wedge \Diamond p)$]

$$Eq \supset T$$

$$(1) \Box p \supset (p \wedge \Delta p)$$

[A implicação segue da equivalência que assumimos]

$$(2)(p \wedge \Delta p) \supset p$$

$$(3)\Box p \supset p$$

[(3) segue de (1) e (2) por Modus Ponens]

□

Com isso, provamos que assumir T é equivalente a assumir como teorema a nossa definição intuitiva de necessidade a partir de contingência. Portanto, se quisermos estender PC a partir de ∇ ao invés de $\Diamond$, precisamos assumir T , mas, em alguns contextos, pode ser interessante não o fazer. Portanto, assumir ∇ como primitivo não é conveniente. Isso fecha a discussão que abrimos quando falamos em Aristóteles.

Nas demonstrações acima, não usamos em momento algum a regra de derivação Necesitação nem o axioma K . Nossa discussão, portanto, independe deles e não está restrita às lógicas normais.

Chama-se T a extensão de K pelo acréscimo do axioma T . A extensão de K pelo acréscimo de D chama-se sistema KD . O axioma D é mais fraco que T . De fato, se $T = (\Box p \supset p)$ é axioma, substituindo uniformemente p por $\neg p$ em T , obtemos $\Box \neg p \supset \neg p$ como teorema, o que é equivalente a $p \supset \neg \Box \neg p$, o que é equivalente a $p \supset \Diamond p$. Se assumirmos, portanto, T como axioma, temos D como teorema. Mas, assumindo D como axioma, não obtemos T como teorema. Para provar que um axioma não implica um dado teorema, lançamos mão da teoria de modelos. Desenvolveremos essas ferramentas no próximo capítulo. Sem elas, é muito difícil uma demonstração

de tal natureza. No entanto, intuitivamente, para demonstrar T a partir de D , precisaríamos de $\Diamond p \supset p$, o que ‘banalizaria’ a nossa lógica, no sentido de que não estaríamos acrescentando nada a PC. Temos que o sistema KD está contido no sistema T , ou que T é uma extensão própria de KD .

Consideremos os seguintes axiomas:

$$-B : p \supset \Box \Diamond p$$

$$-(4) : \Box p \supset \Box \Box p$$

$$-(5) : \Diamond p \supset \Box \Diamond p$$

A extensão de T (que também chamaremos KT para deixar claro que é uma extensão de K) pelo acréscimo de B é chamada KTB . A extensão de T pelo acréscimo de (4) é chamada $KT4$ ou $S4$, pois coincide com o sistema $S4$ de Lewis. A extensão de T pelo acréscimo de (5) é chamada $KT5$ ou $S5$, pois coincide com o sistema $S5$ de Lewis. Vamos provar que $S5$ é uma extensão de KTB e de $S4$.

Antes, vamos provar uma regra de derivação a partir do que já temos:

DR1 : Se $p \supset q$ é um teorema, então $\Box p \supset \Box q$ é um teorema.

De fato, se $p \supset q$ é um teorema, $\Box(p \supset q)$ é um teorema por Necessitação. Usando K e Modus Ponens, tiramos que $\Box p \supset \Box q$ é um teorema e **DR1** está provada.

Proposição 1.3.3. *B é um teorema de $S5$:*

Demonstração. (1) $\Diamond p \supset \Box \Diamond p$ (é o axioma (5))

$$(2)p \supset \Diamond p$$

[(2) foi demonstrado acima partindo de T]

$$(3)p \supset \Box \Diamond p$$

[(3) segue de (2) e (1) por Modus Ponens]

□

Proposição 1.3.4. (4) *é um teorema de $S5$:*

Demonstração. (1) $p \supset \Box \Diamond p$ (é o axioma B , que é um teorema de $S5$, como acabamos de demonstrar)

$$(2)\Box p \supset \Box \Diamond \Box p$$

[(2) segue da substituição uniforme de p por $\Box p$ em (1)]

$$(3)\Diamond p \supset \Box \Diamond p \text{ (axioma (5))}$$

$$(4)\Diamond \neg p \supset \Box \Diamond \neg p$$

[(4) segue da substituição uniforme de p por $\neg p$]

$$(5)\neg \Box \Diamond \neg p \supset \neg \Diamond \neg p$$

[(5) segue de $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$]

$$(6)\Diamond \Box p \supset \Box p$$

[(6) segue de $\Box p = \neg \Diamond \neg p$ e $\Diamond p = \neg \Box \neg p$]

$$(7)\Box \Diamond \Box p \supset \Box \Box p$$

[(7) segue de (6) e $DR1$]

$$(8)\Box p \supset \Box \Box p \text{ (axioma (4))}$$

[(8) segue de (2) e (7) por Modus Ponens] cqd

□

O seguinte esquema resume a nossa discussão:

No esquema acima, as setas indicam inclusão. Nós provamos as inclusões na nossa discussão, mas não provamos que elas são estritas. Neste capítulo, tratamos de lógica apenas em nível de sintaxe. No próximo capítulo, daremos uma interpretação por modelos e trataremos de lógica em nível de semântica. Nesse ponto, voltaremos a discutir o esquema e trataremos da questão das inclusões estritas. Nosso interesse neste trabalho versa mais pelo tratamento semântico de algumas questões. Uma ótima referência para um estudo versando mais pelo lado sintático é Hughes [5]. Vamos encerrar a discussão mostrando que a extensão de T pelo acréscimo dos axiomas B e (4) tem (5) como teorema o que mostra que $S5$ é a menor extensão de T que inclui B e (4) como teoremas.

Proposição 1.3.5. $((4) \wedge B) \supset (5)$ *(no sistema T)*

Demonstração. (1) $p \supset \Box \Diamond p$ (axioma B)

(2) $\Diamond p \supset \Box \Diamond \Diamond p$

[(2) segue de (1) pela substituição uniforme de p por $\Diamond p$]

(3) $\Box p \supset \Box \Box p$ (axioma (4))

(4) $\Box \neg p \supset \Box \Box \neg p$

[(4) segue de (3) pela substituição uniforme de p por $\neg p$]

$$(5) \neg \Box \Box \neg p \supset \neg \Box \neg p$$

[(5) segue de (4) pela regra por $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$]

$$(6) \Diamond \Diamond p \supset \Diamond p$$

[(6) segue de (5) por $\Diamond p = \neg \Box \neg p$]

$$(7) \Box \Diamond \Diamond p \supset \Box \Diamond p$$

[(7) segue de (6) por *DR1*]

$$(8) \Diamond p \supset \Box \Diamond p$$

[(8) segue de (2) e (7) por Modus Ponens]

□

1.4 Teoremas de Redução em S5

O sistema *S5* possui propriedades interessantes, que são os teoremas de redução:

Proposição 1.4.1. *As seguintes propriedades são teoremas em S5:*

$$TR1 : \Box \Box p \equiv \Box p$$

$$TR2 : \Diamond \Diamond p \equiv \Diamond p$$

$$TR3 : \Box \Diamond p \equiv \Diamond p$$

$$TR4 : \Diamond \Box p \equiv \Box p$$

Demonstração. *TR1:* $\Box p \supset \Box \Box p$ é o axioma (4), que já provamos que é um teorema de *S5*. A recíproca $\Box \Box p \supset \Box p$ segue da substituição uniforme de p por $\Box p$ no axioma *T* ($\Box p \supset p$).

TR2: Segue diretamente de *TR1* substituindo uniformemente p por $\neg p$ e aplicando $\Diamond p = \neg \Box \neg p$

TR3: $\Diamond p \supset \Box \Diamond p$ é o axioma (5). A recíproca segue da substituição uniforme de p por $\Diamond p$ em *T*.

TR4: Segue diretamente de *TR3* pelo mesmo raciocínio pelo qual *TR2* segue de *TR1*. $\square$

Usando $\square\neg p = \neg\Diamond p$, $\Diamond\neg p = \neg\square p$ e a lei da dupla negação ($\neg\neg p = p$), podemos reduzir qualquer seqüência de modalidades a uma seqüência em que, se houver uma negação, ela ocorre no início da seqüência. Usando as regras de redução, podemos reduzir qualquer seqüência de modalidades a uma única modalidade. Com isso, em *S5*, as únicas modalidades existentes, a menos de equivalências, são $\square$, $\Diamond$ e suas negações. Em *S4*, valem *TR1* e *TR2*. Basta rever as demonstrações e verificar que não usamos o axioma (5) para prová-las. Para ver que *TR3* e *TR4* não são válidas em *S4*, basta ver que *TR3* e *TR4* são equivalentes e o axioma (5) é uma das implicações de *TR3*.

Também muito úteis são os teoremas de absorção:

Proposição 1.4.2. *São teoremas em S5 as seguintes propriedades:*

$$TA1 : \square(p \vee \square q) \equiv \square p \vee \square q$$

$$TA2 : \square(p \vee \Diamond q) \equiv \square p \vee \Diamond q$$

$$TA3 : \Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond p \wedge \Diamond q$$

$$TA4 : \Diamond(p \wedge \square q) \equiv \Diamond p \wedge \square q$$

Demonstração. Começamos provando *TA1*:

$$(1) \square(\neg q \supset p) \supset (\square\neg q \supset \square p)$$

[(1) segue de *K* pela substituição uniforme de *q* por *w*, seguida pela substituição uniforme de *p* por $\neg q$, seguida pela

substituição uniforme de w por p .]

$$(2) \Box(q \vee p) \supset (\Diamond q \vee \Box p)$$

$$(3) \Box(p \vee \Box q) \supset (\Box p \vee \Box q)$$

[(3) segue de (2) pela substituição uniforme de q por $\Box q$ e pela aplicação de $TR4$]

$$(4) (\Box p \vee \Box \Box q) \supset \Box(p \vee \Box q)$$

[(4) segue da terceira regra $R3$ abaixo pela substituição uniforme de q por $\Box q$]

$$(5) (\Box p \vee \Box q) \supset \Box(p \vee \Box q)$$

[(5) segue de (4) pela aplicação de $TR1$]

O terceiro teorema $TA3$ segue de $TA1$ pelas substituições uniformes de p por $\neg p$ e de q por $\neg q$, aplicação das equivalências $(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ e $\Box \neg p \equiv \neg \Diamond p$.

O quarto teorema $TA4$ segue de $TA2$ como $TA3$ de $TA1$.

□

Embora a demonstração de $TA2$ possa ser feita de forma semelhante, vamos deixá-la para o próximo capítulo para dar uma demonstração em termos semânticos, fazendo um paralelo entre as duas possibilidades.

Proposição 1.4.3. *As quatro regras abaixo são teoremas no sistema K .*

$$R1 : \Box(p \vee q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$$

$$R2 : \Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$$

$$R3 : (\Box p \vee \Box q) \supset \Box(p \vee q)$$

$$R4 : \Diamond(p \wedge q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)$$

São pontos muito importantes e delicados no estudo de um sistema lógico se ele é completo e consistente. Esses pontos serão tratados no próximo capítulo. No caso dos sistemas que estudamos neste trabalho, a discussão é favorecida pelo fato de possuímos modelos para eles.

Um sistema lógico também é chamado de lógica e o cálculo proposicional também é chamado de lógica Booleana. Como última observação, vale ressaltar que existe toda uma discussão filosófica em torno dos axiomas e sistemas com que trabalhamos. Não faremos tal estudo, pois foge ao escopo do texto. A título de curiosidade: O axioma T tem o nome de Axioma do Conhecimento; O axioma B de Axioma de Brouwer; O axioma (4) de Axioma da Introspecção Positiva; O axioma (5) de Axioma da Introspecção Negativa; O axioma (5) de Axioma da Consistência. O sistema $S4$ serve de modelo para a Lógica Intuicionista.

1.5 Apêndice

Como mencionamos acima, a silogística de Aristóteles foi tida como suficiente e totalmente satisfatória para se resolver a lógica até o final do século XIX, quando foram apontados problemas e uma nova forma de tratar a lógica foi proposta por Frege e Russell. Este apêndice pretende apontar brevemente os problemas levantados e as soluções propostas. Sendo um adendo independente do texto, pode ser saltado sem prejuízo

à compreensão do que segue. As questões começam com a estrutura da sentença declarativa assumida por Aristóteles: Sujeito/cópula/Predicado. De início, assumir tal estrutura gera questões no campo da metafísica. Vejamos: Se assumimos que a sentença declarativa tem essa estrutura, assumimos que ela tem a capacidade de falar da realidade e, conseqüentemente, assumimos que a realidade tem essa estrutura, ou seja, é composta de coisas que possuem ou não certas propriedades. Geramos assim uma questão metafísica de ordem ontológica. Consideremos agora alguns problemas: O problema mais antigo e célebre é o problema dos universais e remonta à Idade Média. Aristóteles apresenta como exemplos de sentença 'Sócrates é um homem' e 'todo homem é mortal'. Na primeira, o sujeito é particular; Sócrates denota uma pessoa específica. No segundo, o sujeito é universal. No primeiro caso, o termo que está como sujeito não poderia ser predicado em nenhuma sentença. No segundo, sim. Aristóteles percebeu essa diferença, mas não considerou que se precisasse distinguir os dois tipos de sentença. De fato, a sua silogística só leva em conta o segundo tipo, embora o primeiro tipo tenha aparentemente fornecido o modelo no qual ele se baseia. Aristóteles é levado a admitir que os dois tipos de sujeito, tanto o individual quanto o universal, são da ordem da substância. Assim, ele admite dois tipos de substância: substâncias primeiras, individuais e substâncias segundas, universais. Essa admissão gera problemas metafísicos complexos. Não nos es-

tenderemos com esses problemas metafísicos. Uma boa apresentação dessas questões pode ser encontrada no capítulo 2 do volume 8 (Wittgenstein) da coleção Figuras do Saber, escrito por François Schmitz. No entanto, mais um problema deve ser levando aqui: o modelo aristotélico de sentença não é adequado para exprimir enunciados de relação, como 'força é igual a massa vezes aceleração'. Isso causou um divórcio entre Filosofia e Ciência. Para ilustrar a questão, consideremos a afirmação: 'Demóstenes é tão bom orador quanto Cícero'. Na análise aristotélica, 'Demóstenes' é sujeito e 'tão bom orador quanto Cícero' é predicado. No entanto, a mesma idéia seria igualmente bem expressa pela sentença 'Cícero é tão bom orador quanto Demóstenes'. Vemos que não existe uma hierarquia lógica entre os nomes 'Demóstenes' e 'Cícero', como sugere a forma de sentença aristotélica. Podemos também expressar a mesma idéia na forma (Demóstenes, Cícero, tão bom orador um quanto o outro). E é essa a proposta de Frege e Russell. Eles propõem a noção de função proposicional. Dessa forma, trataríamos o nosso caso da seguinte forma: Seja $F(x,y)$ a função proposicional 'ser tão bom orador um quanto o outro'. F é uma função proposicional, onde x e y são variáveis que podem assumir nomes próprios. Expressaríamos então nossa idéia de Demóstenes e Cícero serem igualmente bons oradores na forma $F(\text{Cícero}, \text{Demóstenes})$. Essa forma deixa claro que não existe hierarquia lógica entre os nomes, não deixa ambigüidades e é mais adequada para expressar as idéias do ponto de vista

lógico. Nosso interesse é diretamente com a Lógica Modal e, como dissemos acima, não trabalharemos com sentenças, mas sim com proposições. Dentro dessa linha, a proposta deste apêndice é apenas dar uma brevíssima pincelada nos problemas que são levantados posteriormente quanto ao trabalho de Aristóteles como complementação ao apanhado histórico que fizemos.

Capítulo 2

Semântica

2.1 Modelos e Estruturas

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos essenciais para dar às lógicas modais uma semântica que se revelou de grande utilidade em aplicações, sobretudo para a computação. A semântica aqui apresentada leva o nome de Semântica de Kripke. No capítulo anterior, trabalhamos a nível de sintaxe. Neste capítulo, vamos mudar o paradigma.

Começemos com as primeiras definições.

Definição 2.1.1 (Estrutura). *Uma estrutura (frame) é um par do tipo $\{W, R\}$, onde W é um conjunto cujos elementos serão chamados pontos e R um conjunto de pares (x, y) , onde x e y pertencem a W . O par (x, y) será representado com a notação xRy e chamado relação entre os elementos x e y . Podemos ainda dizer que, na estrutura E , x se relaciona com y , ou que x enxerga y . Neste trabalho, tratamos apenas de lógicas modais com um único operador básico $\Diamond$. Para uma generalização, ver Venema [1].*

Definição 2.1.2 (Modelo). *Sejam um conjunto P , cujos elementos serão chamados proposições elementares (ou, simplesmente, proposições), um conjunto S , cujos elementos são subconjuntos de W e V uma função de P em S . Seja ainda $\{W, R\}$ uma estrutura.*

Um modelo é uma tripla do tipo $\{W, R, V\}$.

As proposições elementares são ‘atômicas’, no sentido de que não podem ser desmembradas. São as proposições a partir das quais construiremos as fórmulas complexas. Usaremos letras latinas minúsculas para proposições elementares e letras latinas maiúsculas ou letras gregas para as fórmulas em geral (uma fórmula pode ser apenas uma proposição elementar).

Pondo as coisas de maneira menos formal, $V(p)$ é o conjunto dos pontos onde vale a proposição p .

Antes de dar seguimento, uma observação sobre notação: Quando citarmos um modelo M ou M' , estaremos tacitamente nos referindo ao modelo $M = \{W, R, V\}$ ou $M' = \{W', R', V'\}$. Usaremos sistematicamente essa notação.

Definição 2.1.3 (Complexidade de uma fórmula). *A complexidade de uma fórmula ψ é assim definida:*

-Se ψ é uma proposição elementar ($\psi = p$) ou $\psi = \perp$, então ψ tem complexidade 1. -Se $\psi = \neg\phi$ ou $\psi = \Diamond\phi$, tendo ϕ complexidade n , então ψ tem complexidade $n+1$. -Se $\psi = \phi \vee \gamma$, onde ϕ e γ têm complexidade n e m , respectivamente, então ψ tem complexidade $n+m+1$.

Definição 2.1.4 (Satisfação). *Cosideremos um modelo M . Seja $w \in W$ um ponto. Vamos definir por indução satisfação de uma fórmula ψ em w .*

-Se $\psi = \perp$, w não satisfaz ψ em M .

-Se $\psi = p \in P$ é uma proposição elementar, dizemos que w satisfaz p em M se $w \in V(p)$.

-Se $\psi = \alpha \vee \beta$, então dizemos que w satisfaz ψ em M se w satisfaz α em M ou w satisfaz β em M .

-Se $\psi = \neg\alpha$, dizemos que w satisfaz ψ em M se w não satisfaz α em M .

-Se $\psi = \Diamond\alpha$, dizemos que w satisfaz ψ em M se existe $u \in W$ tal que wRu e u satisfaz α em M .

Se w satisfaz ψ em M , escrevemos $M, w \models \psi$.

Na definição acima, não foi necessário definirmos os casos $\psi = \alpha \wedge \beta$ e $\psi = \Box\alpha$ porque são derivados dos outros ($\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$ e $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$). No entanto, vejamos o que eles significam:

No caso da conjunção, é fácil ver que $M, w \models (\alpha \wedge \beta)$ se $M, w \models \alpha$ e $M, w \models \beta$.

No caso $\Box$, como $\Box\alpha = \neg\Diamond\neg\alpha$, dizer $M, w \models \alpha$ é o mesmo que dizer que não é verdade que existe algum ponto que w enxerga e que não satisfaz α em M , ou seja, todo ponto que w enxerga satisfaz α em M .

A definição que acabamos de dar tem caráter local. Ela leva em consideração o ponto e os pontos que se relacionam com ele. Vamos agora falar em satisfação do ponto de vista global.

A seguir, damos o conceito de Satisfação Global em Modelos e Validade em Estruturas

Definição 2.1.5. *Uma fórmula ψ é válida em um modelo quando ela é satisfeita por todos os pontos do conjunto W .*

Escrevemos $M \models \psi$.

Dizemos que uma fórmula ψ é válida em uma estrutura E quando ψ é válida em todo modelo baseado em E .

Estendendo as definições acima, se Σ é um conjunto de fórmulas, dizemos que um ponto $w \in W$ do modelo M satisfaz Σ em M se w satisfaz todas as fórmulas de Σ em M . Escrevemos $M, w \models \Sigma$.

Da mesma forma, dizemos que Σ é válido em um modelo se todas as fórmulas em Σ são válidas no modelo. Escrevemos $M \models \Sigma$.

Finalmente, dizemos que Σ é válido na estrutura E se todas as fórmulas em Σ são válidas em E . Escrevemos $E \models \Sigma$.

2.2 Caracterização de Lógicas Modais por Estruturas

Sejam L uma lógica modal e $\mathcal{C}$ uma classe de modelos.

Dizemos que L é correta em relação a $\mathcal{C}$ se todo teorema de L é uma fórmula válida em $\mathcal{C}$.

Dizemos que L é completa em relação a $\mathcal{C}$ se toda fórmula válida em $\mathcal{C}$ é um teorema em L .

Dizemos que L é caracterizada por $\mathcal{C}$ se L é correta e completa em relação a $\mathcal{C}$.

Particularmente, interessa-nos o caso em que $\mathcal{C}$ é a classe dos modelos possíveis a partir de uma determinada estrutura $\{W, R\}$.

Vamos verificar que as regras de inferência continuam válidas para as lógicas caracterizadas por estruturas. Não percamos de vista que cada ponto fixado de W engloba PC: uma lógica caracterizada L por um modelo, ou classe de modelos, ou estrutura, ou classe de estruturas, etc., contém PC, pois é a interseção de conjuntos de fórmulas que contêm PC. Portanto, todos os teoremas de PC são válidos em L . Mas vejamos que tal lógica não herda as regras de inferência de PC, pois estamos trabalhando com fórmulas que ultrapassam o conjunto das fórmulas bem definidas em PC.

Proposição 2.2.1. *Modus Ponens é uma regra de inferência válida na lógica caracterizada por uma estrutura.*

Demonstração. Suponhamos que $A \in L$ e $(A \supset B) \in L$. Isso significa que, dado um ponto w arbitrário de um modelo qualquer $M = \{W, R, V\}$ construído a partir da estrutura $\{W, R\}$, temos $M, w \models A$ e $M, w \models (\neg A \vee B)$. Se w satisfaz A , então w não satisfaz $\neg A$, mas como satisfaz $\neg A \vee B$, temos que w necessariamente satisfaz B . Portanto, $M, w \models B$. Como w é um ponto arbitrário em M e M é um modelo arbitrário na estrutura considerada, temos que B é satisfeita em qualquer ponto de qualquer modelo construído a partir de $\{W, R\}$, ou

seja, $\{W, R\} \models B$. Portanto, Modus Ponens é uma regra de inferência válida em L . Observemos que não usamos o fato de L ser caracterizada por uma estrutura; simplesmente provamos Modus Ponens pontualmente. Se estivermos considerando uma lógica caracterizada por uma classe qualquer de modelos, temos Modus Ponens. $\square$

Proposição 2.2.2. *Substituição Uniforme é uma regra de inferência válida na lógica caracterizada por uma estrutura.*

Demonstração. Sejam M um modelo, p uma proposição e A e B fórmulas. Suponhamos que p e B sejam satisfeitas em M nos mesmos pontos. Formalmente, $V(p) = \{w \in W \mid M, w \models B\}$. Seja A' a fórmula formada pela substituição uniforme de p por B ($A' = A(B/p)$). Para todo ponto $w \in W$, $(M, w \models A) \leftrightarrow (M, w \models A')$. Faremos a demonstração por indução sobre o grau de A :

Se A tem complexidade 1, $A = \perp$ ou $A = q$ (onde q pode ser p), o resultado é imediato. Suponhamos o resultado válido para fórmulas com complexidade até k . Suponhamos que A tenha complexidade $k+1$. As formas possíveis para A são: $A = \neg C$, $A = (C \vee D)$ e $A = \diamond C$, onde C e D têm complexidade até k .

Seja $A = \neg C$: Então $A' = \neg C'$, onde $C' = A'(B/p)$. Dado $w \in W$, $(M, w \models \neg C) \leftrightarrow (M, w \not\models C) \leftrightarrow (M, w \not\models C') \leftrightarrow (M, w \models \neg C')$.

Seja $A = (C \vee D)$: Então $A' = (C' \vee D')$, onde $C' = C(B/p)$ e $D' = D(B/p)$. Para $w \in W$, $(M, w \models (C \vee D)) \leftrightarrow [(M, w \models C) \text{ ou } (M, w \models D)] \leftrightarrow [(M, w \models C') \text{ ou } (M, w \models D')] \leftrightarrow (M, w \models (C' \vee D'))$.

Seja $A = \Diamond C$: Então $A' = \Diamond C'$, onde $C' = C(B/p)$. Para $w \in W$, $M, w \models \Diamond C \leftrightarrow [\exists v \in W | wRv; M, v \models C] \leftrightarrow [\exists v \in W | wRv; M, v \models C'] \leftrightarrow M, w \models \Diamond C'$. A segunda equivalência acima se justifica pela hipótese de indução, pois cada v satisfaz ambas C e C' ou nenhuma das duas em M . Suponhamos agora que A seja válida numa estrutura $E = \{W, R\}$. Suponhamos, por absurdo, que $A' = A(B/p)$ não seja válida em E . Existem então um modelo M construído com base em E e um ponto $w \in W$ tais que $M, w \not\models A(B/p)$. Podemos então construir um modelo M' sob E da seguinte forma: Em todos os pontos de W , todas as proposições diferentes de p mantêm em M' a mesma valoração que têm no modelo M . A proposição p , em M' , tem a mesma valoração de B em M . Ou seja: $V'(q) = V(q)$ se $q \neq p$ e $V'(p) = \{w \in W | M, w \models B\}$. Construído M' dessa forma temos, pelo que demonstramos acima, que $M, w \not\models A$. Absurdo contra o fato de que A é válida em E . Portanto, Substituição Uniforme é uma regra de inferência válida em L . $\square$

Obs.: Neste ponto, usamos fortemente o fato de que o conjunto $\mathcal{C}$ é gerado por uma estrutura; no momento em que construimos M' , é esse fato que nos garante que M' está em $\mathcal{C}$. Para $\mathcal{C}$ arbitrário, não podemos garantir que Substituição Uniforme

seja válida. De fato, seja $\mathcal{C}$ formado por um único modelo $M = \{W, R, V\}$ formado da seguinte maneira: $W = \{w\}$, um único ponto. $R = \emptyset$ e $V(p) = \{w\}$, ou seja, p é verdadeira em w . Em M , $M, w \models p$, ou seja, p é válida em todos os modelos de $\mathcal{C}$, mas $M, x \not\models p(\neg p/p)$.

Proposição 2.2.3. *Necessitação é uma regra de inferência válida na lógica caracterizada por uma estrutura.*

Demonstração. Suponhamos que $A \in L$, ou seja, que a fórmula A seja válida em $\mathcal{C}$. Seja então $w \in W$ um ponto arbitrário de um modelo arbitrário construído a partir de E . Se w é um ponto terminal (w não enxerga nenhum ponto), então $\Box A$ é satisfeita em w , pois não há nenhum ponto v tal que wRv e $M, v \not\models A$. Se v é tal que wRv , então $M, v \models A$, pois A é válida em M . Como v é arbitrário, então $M, w \models \Box A$. Com w e M são arbitrários, $\Box A$ é válida em L . Portanto, Necessitação é uma regra de inferência válida em $\mathcal{C}$. $\square$

Tampouco nessa demonstração usamos o fato de $\mathcal{C}$ ser gerada por uma estrutura. Necessitação vale, portanto, para lógicas geradas por classes arbitrárias de modelos.

Verificadas as regras de inferência, verifiquemos agora a fórmula K .

Proposição 2.2.4. *A fórmula K $[\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)]$ é válida na lógica caracterizada por uma estrutura.*

Demonstração. Suponhamos que $\Box(p \supset q)$ e $\Box p$ sejam satisfeitas num ponto arbitrário $w \in W$ de um modelo arbitrário

M sob a estrutura E . Para todo $v \in W$ com wRv , temos $M, v \models p$ e $M, v \models p \supset q$. Por Modus Ponens, $M, v \models q$. Portanto, $M, w \models \Box q$. Como M e w são arbitrários, K é satisfeita em todos os pontos de W para todos os modelos criados a partir de E . Portanto, K é válida em E . $\square$

Novamente, não usamos o fato de trabalhar com uma classe de modelos gerada por uma estrutura, uma vez que não usamos nada além de Modus Ponens, que vale em classes arbitrárias de modelos. Se tivéssemos usado Substituição Uniforme, teríamos usado que a classe de modelos considerada é gerada por uma classe de estruturas, pois Substituição Uniforme não vale em classes arbitrárias de modelos.

Seja agora Θ uma classe de estruturas. De maneira muito natural, definimos que uma fórmula A é válida em Θ se ela é válida em todas as estruturas de Θ .

Vamos considerar agora a lógica L caracterizada por Θ e vamos verificar a validade das regras de inferência em L :

-Modus Ponens: Se ψ e $\psi \supset \phi$ são válidas em Θ , então elas são válidas em cada estrutura de Θ , donde ϕ é válida em cada estrutura de Θ , donde q é válida em Θ . Portanto, Modus Ponens é uma regra de inferência válida em L .

-Substituição Uniforme: Segue o mesmo raciocínio; Usando a mesma notação acima, se A é válida em Θ , então A é válida em cada estrutura de Θ . Então, em cada estrutura, $A(B/p)$ é válida. Logo, $A(B/p)$ é válida em Θ . Portanto, Substituição Uniforme é uma regra de inferência válida em L .

-Necessitação: Novamente; Se A é válida em Θ , então A é válida em cada estrutura de Θ , donde $\Box p$ é válida em cada estrutura de Θ , donde $\Box p$ é válida em Θ . Portanto, necessitação é um aregra de inferência válida em L .

A fórmula K é imediata; Provamos acima que ela é válida em toda estrutura. Logo, é válida em toda estrutura de Θ . Portanto, é válida em Θ .

Obs.: Em Θ , não exigimos sequer que as estruturas sejam formadas a partir de um mesmo conjunto W de mundos possíveis.

Vimos, assim, que um conjunto de estruturas caracteriza uma lógica modal normal.

Dessa forma, tomando Θ como sendo a classe de todas as estruturas possíveis, temos que Θ caracteriza uma lógica modal normal. O fato de que Θ é o mais geral possível nos sugere que essa lógica seja K . E de fato é, como demonstraremos abaixo.

2.3 Relação Entre Axiomas e Condições Impostas às Relações

Vamos agora impor condições às relações R dos modelos que compõem Θ e estudar a influência disso na lógica L . Acabamos de demonstrar que o conjunto de todas as fórmulas válidas em uma classe de estruturas contém os axiomas e as regras de inferência da lógica K . Com isso, provamos a correte de K em relação a esse conjunto. Ao provar que se todas

as estruturas da classe satisfazem uma dada condição então o conjunto de fórmulas que a classe satisfaz contém certo axioma, estamos provando a corretude da lógica obtida de K pelo acréscimo daquele axioma. Quando provamos a recíproca (que o acréscimo do axioma acarreta o cumprimento daquela condição pela classe de estruturas), estamos mostrando que aquela condição ‘reflete’ o axioma. Mas a demonstração da recíproca não é necessária para provar corretude, nem prova completude. Nesse sentido, quando falamos na lógica L caracterizada, por exemplo, pela classe das estruturas reflexivas, não estamos nos referindo a T , pois só saberemos que essa classe de estruturas caracteriza T quando provarmos também a completude. Estamos nos referindo ao conjunto das fórmulas válidas nessa classe, que já sabemos que é uma lógica normal.

Proposição 2.3.1. O axioma D ($\Box p \supset \Diamond p$).

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura E contenha D é necessário e suficiente que a relação R seja serial, ou seja, que para todo $w \in W$ exista $v \in W$ tal que wRv . Em outras palavras, que não exista ponto terminal.

Demonstração. Necessário: Suponhamos que L contenha D . Suponhamos agora, por contradição, que exista um ponto terminal w . Como w é ponto terminal, temos, para todo p , $M, w \models \Box p$, mas $M, w \not\models \Diamond p$. Absurdo.

Suficiente: Suponhamos que a relação seja serial. Sejam um modelo M em E e um ponto $w \in W$ arbitrários.

Primeiro caso: Se $M, w \not\models \Box p$, então é imediato que $M, w \models D$.

Segundo caso: Se $M, w \models \Box p$, temos ainda que, como R é serial, existe $v \in Q$ tal que wRv . Como $M, w \models \Box p$, temos $M, v \models p$. Portanto, $M, w \models \Diamond p$. Portanto, também neste caso, $M, w \models D$.

Como w e M são arbitrários, $\Box p \supset \Diamond p$ é válida em E . $\square$

Proposição 2.3.2. O axioma $T(\Box p \supset p)$.

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura E contenha T é necessário e suficiente que a relação R seja reflexiva, ou seja, que wRw para todo $w \in W$.

Demonstração. Necessário: Suponhamos que L contenha T . Suponhamos, por absurdo, que exista $w \in W$ tal que não tenhamos wRw . Podemos construir um modelo M sobre E com uma valoração tal que p seja falsa em w e verdadeira em todos os outros pontos. Temos $M, w \models \Box p$, mas $M, w \not\models p$. Contradição.

Suficiente: Suponhamos que para todo $w \in W$ tenhamos wRw . Sejam M um modelo sobre E e $w \in W$ arbitrários. Primeiro caso: Se $M, w \not\models \Box p$, então é imediato que $M, w \models T$.

Segundo caso: Se $M, w \models \Box p$, então $M, w \models p$, pois wRw . Portanto, também neste caso, $M, w \models T$.

Como M e w são arbitrários, T é válida em L . $\square$

Proposição 2.3.3. O axioma $B(p \supset \Box \Diamond p)$.

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura E

contenha B é necessário e suficiente que a relação R seja simétrica, ou seja, para todo $w, v \in W$, $wRv \rightarrow vRw$.

Demonstração. Necessário: Suponhamos que L satisfaça B . Suponhamos por absurdo que existam $w, v \in W$ tais que wRv mas não ocorra vRw . Podemos construir um modelo M sobre E com uma valoração V tal que p seja verdadeira em w e seja falsa em todo $u \in W$ tal que vRu . Nesse modelo, $v \not\models \Diamond p$, donde $M, w \not\models \Box \Diamond p$, pois wRv . Mas $M, w \models p$. Contradição.

Suficiente: Suponhamos que R seja simétrica. Sejam M um modelo sobre E e $w \in W$ arbitrários. Primeiro caso: Se $M, w \not\models p$, então é imediato que $M, w \models B$.

Segundo caso: Se $M, w \models p$, consideremos um $v \in W$ qualquer para o qual wRv . Como vRw e $M, w \models p$, temos $M, v \models \Diamond p$. Como isso vale para qualquer v tal que wRv , então $M, w \models \Box \Diamond p$.

Portanto, também nesse caso $M, w \models B$.

Como M e w são arbitrários, L contém B . □

Proposição 2.3.4. O axioma (4) $(\Box p \supset \Box \Box p)$.

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura E contenha (4) é necessário e suficiente que a relação R seja transitiva, ou seja, para todo $w, v, u \in W$, $(wRv \wedge vRu) \rightarrow wRu$.

Demonstração. Necessária: Suponhamos que L contenha (4). Suponhamos, por absurdo, que existam $w, v, u \in W$ tais

que wRv , vRu , mas não ocorra wRu . Podemos construir um modelo sobre E com uma valoração V tal que p seja verdadeira em todo $m \in W$ tal que wRm , mas seja falsa em u . Nesse modelo, $M, w \models \Box p$, mas $M, w \not\models \Box \Box p$, pois wRv e $M, v \not\models \Box p$, já que vRu e $M, u \not\models p$. Contradição.

Suficiente: Suponhamos agora que R seja transitiva. Sejam M um modelo sobre E e $w \in W$ arbitrários. Primeiro caso: Se $M, w \not\models \Box p$, então é imediato que $M, w \models (4)$.

Segundo caso: $M, w \models \Box p$. Seja $v \in W$ um ponto qualquer tal que wRv e seja um ponto $u \in W$ qualquer tal que vRu . Como R é transitiva, ocorre wRu , donde $M, u \models p$. Como u é qualquer, temos $M, v \models \Box p$. Como v é qualquer, temos $M, w \models \Box \Box p$. Portanto, também neste caso $M, w \models (4)$.

Como M e w são arbitrários, L contém (4). □

Proposição 2.3.5. O axioma (5) $(\Diamond p \supset \Box \Diamond p)$.

Para que a lógica L caracterizada por uma estrutura E satisfaça (5) é necessário e suficiente que a relação R seja euclidiana, ou seja, para todo $w, v, u \in W$, $(wRv \wedge wRu) \rightarrow vRu$.

Demonstração. Necessária: Suponhamos, por contradição, que existam $w, v, u \in W$ tais que wRv , wRu , mas não ocorra vRu . Podemos construir um modelo M sobre E com uma valoração V tal que p seja verdadeira em u e seja falsa em todo $m \in W$ tal que vRm . Temos então $M, w \models \Diamond p$, mas $M, v \not\models \Diamond p$, donde $M, w \not\models \Box \Diamond p$. Contradição.

Suficiente: Suponhamos que R seja euclidiana. Sejam M um modelo sobre E e $w \in W$ arbitrários.

Primeiro caso: Se $M, w \not\models \Diamond p$, então é imediato que $M, w \models (5)$.

Segundo caso: $M, w \models \Diamond p$. Então existe $v \in W$ tal que wRv e $M, v \models p$. Seja $m \in W$ um ponto qualquer tal que wRm (pode ser inclusive $m = v$). Como wRm e wRv , ocorre mRv . Daí, $M, m \models \Diamond p$. Como m é qualquer, temos $M, w \models \Box \Diamond p$. Portanto, também neste caso, $M, w \models (5)$.

Como M e w são arbitrários, L satisfaz (5). □

2.4 Consistência, Corretude e Completude

Quatro conceitos são de grande importância quando se fala em um sistema lógico:

Consistência: Uma lógica é consistente quando $p \wedge \neg p$ não é válida. Basta exigir que uma proposição qualquer e sua negação não sejam válidas ao mesmo tempo para garantir que nenhuma fórmula é válida juntamente com a sua negação. De fato, se p e $\neg p$ são válidas ao mesmo tempo, dada uma fórmula ψ qualquer, $\neg p \vee \psi$ é válida, e essa fórmula é equivalente a $p \supset \psi$. Disso e da validade de p , segue por Modus Ponens que ψ é válida. Desse modo, se $p \wedge \neg p$ é válida, qualquer fórmula é válida. O comentário que acabamos de fazer mostra a importância de se indagar sobre consistência.

Começemos observando que, dados um modelo M e um

ponto w desse modelo, não podemos ter $p \wedge \neg p$ (para uma proposição elementar p) válida em w , pela forma como definimos a valoração de um modelo. Seguindo por indução, suponhamos provado para n que nenhuma fórmula com grau até n pode ser válida juntamente com a sua negação em qualquer ponto de M . Seja ψ uma fórmula com grau $n+1$ tal que $M, w \models \psi$, onde w é um ponto de M . Se $\psi = \Diamond \phi$, então existe $v \in W$ tal que wRv e $M, v \models \phi$. Se $M, w \models \neg \psi$, então todo ponto que w enxerga satisfaz $\neg \phi$ (pois $\neg \psi = \neg \Diamond \phi \equiv \Box \neg \phi$). Em particular, $M, v \models \neg \phi$. Temos então que v satisfaz simultaneamente ϕ e $\neg \phi$, onde ϕ tem grau n . Isso vai contra a hipótese de indução. Os casos Booleanos são imediatos, pois cada ponto de M satisfaz PC.

Com o exposto acima, se uma lógica é caracterizada por um modelo, ela é consistente. Naturalmente, se ela é caracterizada por uma classe de modelos, ela também é consistente. Se ela é caracterizada por estruturas, ela também é consistente, pois uma estrutura determina uma classe de modelos. Olhando mais a fundo, não precisamos encontrar um modelo ou uma classe de modelos que caracterizem a lógica. Basta encontrarmos um modelo em relação ao qual ela seja correta, pois tal modelo contém a lógica e, como nele não há inconsistência, tampouco haverá nela. Portanto, todas as lógicas que estudamos neste capítulo são consistentes.

Estudar a consistência de uma lógica sem recorrer a modelos é bastante complicado. A consistência dessas lógicas sem esse

recurso lança mão de uma função de transformação de fórmulas modais em fórmulas não modais. Novamente citamos Hughes [5].

Corretude: Uma lógica L é correta em relação à classe de modelos $\mathcal{C}$ quando todo teorema de L é válido em $\mathcal{C}$. Para provar que uma lógica é correta em relação a uma classe de modelos, precisamos provar que cada axioma e cada regra de inferência da lógica são válidos na classe de modelos. E foi exatamente isso que fizemos na seção anterior. Já provamos, portanto, que os sistemas que estamos estudando são corretos em relação às classes de estruturas que apresentamos.

Completeness: O conceito de completeness é complementar ao de corretude: Uma lógica L é completa em relação à classe de modelos $\mathcal{C}$ quando toda fórmula válida em $\mathcal{C}$ é um teorema de L . Enquanto a corretude garante que o que pode ser demonstrado como teorema em termos sintáticos é válido em termos semânticos, a completeness garante que o que é válido em termos semânticos pode ser demonstrado como teorema em termos sintáticos. Os dois conceitos, portanto, fazem o casamento entre sintaxe e semântica.

O que denominamos completeness também é chamado de completeness fraca, em contraposição ao conceito de completeness forte. Antes da definição de completeness forte, uma outra definição preliminar:

Definição 2.4.1 (Consequência Semântica Local). *Uma fórmula ψ é consequência semântica local de um conjunto de fórmulas*

Σ em uma classe $\mathcal{C}$ de modelos quando, para qualquer ponto w de qualquer modelo M em $\mathcal{C}$, se Σ é satisfeito em w , então ψ é satisfeita em w . Em símbolos, $\forall M \forall w \in W (w \models \Sigma \rightarrow w \models \psi)$

Agora a definição principal:

Definição 2.4.2 (Completeness Forte). *Uma lógica L é fortemente completa em relação a uma classe de modelos $\mathcal{C}$ quando, dados um conjunto Σ de fórmulas em L e uma fórmula ψ , se ψ é consequência semântica local de Σ , então ψ pode ser demonstrada em L a partir de Σ . Em outras palavras: se Σ implica ψ semanticamente, então ψ é dedutível em L sintaticamente a partir de Σ .*

Vejamos bem que completeness forte implica completeness fraca. Podemos definir completeness fraca pela mesma propriedade pela qual definimos completeness forte, exigindo que a condição seja satisfeita não para todo conjunto de fórmulas, mas para o conjunto vazio. De fato, se $\Sigma = \emptyset$, a condição de ψ ser consequência semântica de Σ nos diz que, se para algum ponto de algum modelo na classe forem satisfeitas todas as fórmulas de um conjunto vazio de fórmulas, temos ψ . Isso é o mesmo que dizer que temos ψ em todo ponto de todo modelo. A condição de ψ ser consequência sintática de Σ significa que, ao assumir todas as fórmulas de um conjunto vazio de fórmulas, demonstramos ψ , ou seja, demonstramos ψ sem precisar assumir mais nada. Uma lógica pode ser fracamente completa em relação a

uma classe de modelos sem ser fortemente completa, mas não daremos exemplo aqui. Para um exemplo, ver [Venema][1]. Antes de provar a completude dos sistemas que apresentamos, uma definição e um teorema.

Definição 2.4.3 (*L-consistência*). *Seja L uma lógica. Um conjunto de fórmulas Σ é L -consistente ou consistente com L quando não apresenta nenhuma inconsistência com L , ou seja, se a partir do conjunto Σ não se demonstra nenhuma inconsistência em L . O conjunto Σ é L -consistente maximal quando é L -consistente e é maximal com essa propriedade, ou seja, qualquer conjunto que contenha Σ propriamente não é L -consistente.*

Teorema 2.4.4. *Dadas uma lógica L e uma classe de modelos $\mathcal{C}$, se todo conjunto Σ de fórmulas consistente com L é satisfeito em algum ponto de algum modelo de $\mathcal{C}$, então L é fortemente completa em relação a $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Suponhamos que cada conjunto de fórmulas consistente com L seja satisfeito em algum ponto de algum modelo em $\mathcal{C}$. Suponhamos, por absurdo, que L não seja fortemente completa em relação a $\mathcal{C}$. Então existem uma fórmula ψ e um conjunto de fórmulas Σ consistente com L tais que ψ é conseqüência semântica local de Σ em $\mathcal{C}$, mas ψ não é demonstrável em L a partir de Σ . Então o conjunto $\Gamma = \Sigma \cup \{\neg\psi\}$ é consistente com L , mas não existe modelo em $\mathcal{C}$ em que Γ seja satisfeito para algum ponto. Absurdo. $\square$

Como consequência imediata do teorema acima, se toda fórmula consistente com L é satisfeita em algum ponto de algum modelo de $\mathcal{C}$, então L é fracamente completa em $\mathcal{C}$.

Nosso caminho a partir deste momento é construir modelos em relação aos quais nossas lógicas sejam completas e usar o teorema acima. O conceito de consistência maximal terá um papel fundamental na construção de tais modelos. Por isso, o próximo passo é explorar algumas propriedades.

Antes, uma observação: Sejam um conjunto de fórmulas Σ , uma lógica L e uma fórmula ψ . Se ψ e $\neg\psi$ são consequências lógicas de Σ em L , então $\psi \wedge \neg\psi$ é consequência lógica de Σ em L . Isso significa que Σ não é consistente com L . Portanto, se Σ é consistente com L e nem ψ nem $\neg\psi$ pertence a Σ , então pelo menos uma das duas pode ser acrescentada a Σ sem gerar inconsistência.

Seja L uma lógica e seja Σ um conjunto de fórmulas L -consistentes maximais. 1) Para toda fórmula ψ , temos $\psi \in \Sigma$ ou $\neg\psi \in \Sigma$.

De fato, se nenhuma delas pertence a Σ , a observação acima nos diz que pelo menos uma delas pode ser acrescentada a Σ sem gerar inconsistência. Assim fazendo, obtemos um conjunto consistente com L que contém Σ propriamente. Isso é uma contradição contra o fato de Σ ser maximal.

2) Σ é fechado em relação a modus ponens.

De fato, sejam $A \supset B$ e A pertencentes a Σ . Em L , $A \supset B$ e A implicam B , pois modus ponens vale em L . Portanto, $\neg B$

é inconsistente com Σ em L . Portanto, $\neg B$ não pode pertencer a Σ . Pela propriedade 1 acima, $B \in \Sigma$.

3) $L \subseteq \Sigma$

De fato, se, para alguma fórmula ψ , $\psi \in L$ e $\psi \notin \Sigma$, então o conjunto $\Sigma \cup \{\psi\}$ é consistente com L e contém Σ propriamente. Isso é um absurdo contra o fato de Σ ser maximal.

4) Dadas duas fórmulas ψ e ϕ , $(\psi \vee \phi) \in \Sigma$ se e somente se $\psi \in \Sigma$ ou $\phi \in \Sigma$.

De fato, suponhamos que $(\psi \vee \phi) \in \Sigma$. Isso equivale a $(\neg\psi \supset \phi)$. Pela propriedade 1 acima, ou temos $\psi \in \Sigma$, ou temos $\neg\psi \in \Sigma$. No segundo caso, temos $\phi \in \Sigma$, por modus ponens.

Suponhamos agora que ψ ou ϕ pertença a Σ . Digamos que $\psi \in \Sigma$. Mas observemos que $(\psi \supset (\psi \vee \phi)) \in \Sigma$, pois é uma tautologia em PC e, portanto, pertence a L (e a Σ). Como $\psi \in \Sigma$, segue por modus ponens que $(\psi \vee \phi) \in \Sigma$.

Lema 2.4.5 (Lema de Lindenbaum). *Se Σ é um conjunto de fórmulas consistente com L , então existe um conjunto Π consistente com L maximal que contém Σ .*

Demonstração. Seja $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ uma enumeração das fórmulas bem formadas na linguagem em cima da qual L é formada. Cabe frisar que toda linguagem parte de um conjunto enumerável de variáveis, um conjunto finito de símbolos e um conjunto finito de regras a partir dos quais as fórmulas bem formadas são definidas de forma indutiva, sem perda, portanto, da enumerabilidade.

Definamos conjuntos de fórmulas de forma indutiva:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$\Sigma_{n+1} = (\Sigma_n \cup \{\psi_n\})$, se tal conjunto é consistente com L ou $\Sigma_{n+1} = (\Sigma_n \cup \{\neg\psi_n\})$, caso contrário.

Finalmente, Π é a união de todos os Σ_n .

Construindo os conjuntos dessa maneira, temos que:

-Cada Σ_n é consistente com L . Por indução: Σ_0 é o próprio Σ , que é consistente com L . Se Σ_k é consistente com L , Σ_{k+1} também o é, pois é formado pelo acréscimo em Σ_k de uma fórmula que não introduz inconsistência.

-Dada uma fórmula ψ , uma e somente uma fórmula entre ψ e $\neg\psi$ está em Π . Isso é imediato pela forma como Π foi construído.

-Se ψ é consequência lógica de Π em L , então $\psi \in \Pi$. De fato, se ψ é consequência lógica de Π em L , então existe um conjunto finito de fórmulas $\Xi \subset \Pi$ tal que ψ é consequência lógica de Ξ em L . Existe algum Σ_n que contém Ξ . Como Σ_n é consistente com L , $\neg\psi$ não pertence a Σ_n . Tampouco poderia pertencer aos outros conjuntos da seqüência dos Σ_k , pois introduziria inconsistência com L . Como $\neg\psi$ não pertence a nenhum conjunto da seqüência, tampouco pertence à união de todos eles, ou seja, a Π . Como $\neg\psi$ não pertence a Π , ψ deverá pertencer, pelo item b.

- Π é L -consistente maximal. De fato, se Π fosse inconsistente com L , haveria um subconjunto finito Λ de Π e uma fórmula ϕ também em Π tais que $\neg\phi$ seria consequência lógica

de Λ em L . Como $\Lambda \cup \{\phi\}$ é um conjunto finito, existe algum Σ_n que o contenha. Tal Σ_n seria inconsistente com L . Absurdo. Está assim provado que Π é consistente com L . A maximalidade segue imediatamente do item b. De fato, se um conjunto contém Π propriamente, ele contém alguma fórmula $\psi \notin \Pi$ e sua negação $\neg\psi$, pois $\neg\psi \in \Pi$. Construimos assim um conjunto L -consistente maximal contendo Σ e o lema está demonstrado. $\square$

Estabelecemos propriedades que os conjuntos L -consistentes maximais devem ter. Seguindo um roteiro parecido com o da demonstração do lema acima (2.4.5), podemos demonstrar uma recíproca:

Se um conjunto de fórmulas Σ contém uma lógica L , é fechado em relação a modus ponens e, para toda fórmula ψ , contém ψ ou sua negação $\neg\psi$, então Σ é L -consistente maximal.

Dados uma lógica L caracterizada por uma classe de modelos, um modelo M dessa classe e um ponto w desse modelo, o conjunto Σ das fórmulas satisfeitas em w é L -consistente maximal. De fato, que Σ contém L é imediato do fato de que L é a interseção de todos os conjuntos de fórmulas satisfeitas em pontos de modelos da classe. Que Σ é fechado em relação a modus ponens, já demonstramos mais acima neste capítulo. Que, para toda fórmula ψ , temos $\psi \in \Sigma$ ou $\neg\psi \in \Sigma$ segue por indução pela forma como definimos satisfação em um ponto de um modelo.

Cabe frisar que não precisamos lançar mão da substituição uniforme para caracterizar conjuntos L -consistentes maximais. Por isso, não precisamos exigir acima que L fosse caracterizada por uma classe de estruturas.

Feita essa discussão, é natural procurar modelos para uma determinada lógica a partir de conjuntos consistentes maximais. E é o que faremos a partir de agora.

Definição 2.4.6 (Modelo Canônico). *Dada uma lógica modal normal, chama-se modelo canônico de L ao modelo M formado da seguinte forma:*

- W é o conjunto de todos os conjuntos L -consistentes maximais.

- R é a relação que relaciona dois elementos w e v em W da seguinte forma: wRv quando, para toda fórmula $\psi \in v$, tem-se $\Diamond\psi \in w$.

- V é a valoração definida da seguinte forma: dada uma proposição elementar p , $x \in V(p)$ quando $p \in x$.

Lema 2.4.7. *Seja L uma lógica normal. Para dois pontos w e v quaisquer do modelo canônico M , temos wRv se e somente se para toda fórmula ψ , $(\Box\psi \in w) \rightarrow (\psi \in v)$.*

Demonstração. Suponhamos que wRv . Seja $\Box\psi \in w$. Se $\psi \notin v$, então $\neg\psi \in v$. Como wRv , $\Diamond\neg\psi \in w$, o que equivale a $\neg\Box\psi \in w$, o que é um absurdo contra o fato de que $\Box\psi \in w$.

Suponhamos agora que, para toda ψ , $(\Box\psi \in w) \rightarrow (\psi \in v)$. Seja $\phi \in v$. Se $\Diamond\phi \notin w$, então $\neg\Diamond\phi \in w$, o que equivale a

$\Box \neg \phi \in w$, o que implica $\neg \phi \in v$, o que é um absurdo contra o fato de que $\phi \in v$. $\square$

Lema 2.4.8 (Lema de Existência). *Sejam L uma lógica normal e w um ponto do modelo canônico M . Se $\Diamond \psi \in w$, então existe $v \in W$ tal que wRv e $\psi \in v$.*

Demonstração. Seja $\Diamond \psi \in w$. Seja o conjunto $v' = \{\psi\} \cup \{\phi \mid \Box \phi \in w\}$. Antes de provar que v' é consistente com L , observemos que $(\Box \psi_1 \wedge \Box \psi_2 \wedge \dots \wedge \Box \psi_n) \supset \Box(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n)$ é um teorema em qualquer lógica normal: De fato, o primeiro membro da implicação diz que cada ψ_i é satisfeita por todo ponto que w enxerga, mas isso é o mesmo que dizer que cada ponto que w enxerga satisfaz a conjunção das ψ_i .

Suponhamos agora, por absurdo, que v' não seja consistente com L . Então existe um conjunto $\chi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subset v'$ tal que $(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \supset \neg \psi$ é um teorema de L . Usando a regra de inferência *DR1* demonstrada no primeiro capítulo, temos que $\Box(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \supset \Box \neg \psi$ é um teorema em L . Disso e da observação no início da demonstração, segue por modus ponens que $(\Box \psi_1 \wedge \dots \wedge \Box \psi_n) \supset \Box \neg \psi$ é um teorema em L . Como cada uma das $\Box \psi_i$ pertence a w , temos que $\Box \psi_1 \wedge \dots \wedge \Box \psi_n$ pertence a w . Temos, portanto, que $\Box \neg \psi \in w$, o que equivale a $\neg \Diamond \psi \in w$, o que é um absurdo contra o fato de que $\Diamond \psi \in w$. Concluimos então que v' é consistente com L .

Seja então v uma extensão de v' a um conjunto L -consistente maximal, que existe, pelo lema de Lindenbaum. Pela forma como v foi construído, $\psi \in v$. Além disso, para toda fórmula

$\phi, \Box\phi \in w \rightarrow \phi \in v$. O lema 2.4.8 nos dá que wRv . Portanto, v é tal que $\psi \in v$ e wRv . O lema está demonstrado. $\square$

Lema 2.4.9 (Lema de Veracidade). *Dados uma lógica normal L , seu modelo canônico M , um ponto $w \in W$ e uma fórmula ψ , $M, w \models \psi$ se e somente se $\psi \in w$.*

Demonstração. Por indução sobre a complexidade da fórmula. Se ψ é uma proposição elementar, o resultado é imediato pela forma como a valoração V foi definida.

Supondo o resultado válido para grau até k , seja ψ uma fórmula com complexidade $k+1$. Os casos Booleanos saem facilmente usando as propriedades 1, 2, 3 e 4 para conjuntos L -consistentes maximais que demonstramos acima. Tratem os casos modais. Seja então $\psi = \Diamond\phi$, onde ϕ tem grau k .

($\rightarrow$): Suponhamos que $M, w \models \Diamond\phi$. Existe, portanto, $v \in W$ tal que wRv e $M, v \models \phi$. Pela hipótese de indução, $\phi \in v$. Pela definição de R , $\Diamond\phi \in w$.

($\leftarrow$): Suponhamos que $\Diamond\phi \in w$. O lema de existência garante que existe um $v \in W$ tal que wRv e $\phi \in v$. Pela hipótese de indução, $M, v \models \phi$. Logo, $M, w \models \Diamond\phi$. $\square$

Teorema 2.4.10 (Teorema do Modelo Canônico). *Toda lógica normal é fortemente completa em relação ao seu modelo canônico.*

Demonstração. Sejam L uma lógica normal e Σ um conjunto de fórmulas consistente com L . Pelo lema de Lindenbaum,

existe uma extensão de Σ a um conjunto L -consistente maximal Π . Esse conjunto é um elemento do modelo canônico que satisfaz todas as fórmulas em Σ . Portanto, todo conjunto de fórmulas consistente em L é satisfeito em algum ponto do modelo canônico. Pelo teorema 2.4.4, L é fortemente completa em relação ao seu modelo canônico. $\square$

O teorema que acabamos de demonstrar é exatamente a ferramenta de que precisamos para demonstrar a completude das lógicas que estamos considerando. Para estabelecer a completude forte (e, conseqüentemente, a fraca) de K em relação à classe de todas as estruturas, basta encontrar, para cada conjunto de fórmulas consistente com K , um modelo e um ponto desse modelo que satisfaça tal conjunto. O teorema acima nos diz que o modelo canônico satisfaz cada um desses conjuntos em algum ponto. Para estabelecer a completude de uma lógica em relação a uma classe de estruturas, basta encontrarmos, para cada conjunto de fórmulas consistente com a lógica, um modelo baseado em alguma estrutura da classe e um ponto desse modelo que satisfaça aquele conjunto de fórmulas. Usando o teorema acima, basta-nos provar que o modelo canônico é baseado em alguma estrutura da classe.

Já estabelecemos a completude de K . Vamos estabelecer a completude das outras lógicas.

Proposição 2.4.11 (Completude de KD). *KD é completa em relação à classe das estruturas seriais (que não têm*

ponto terminal).

Demonstração. Basta provar que o modelo canônico de KD é serial. Sejam M o modelo canônico e w um ponto de M . Como w contém KD , temos $(\Box p \supset \Diamond p) \in w$. Pela substituição uniforme de p por $\top$, obtemos $(\Box \top \supset \Diamond \top) \in w$. Como $\top$ é teorema em qualquer lógica normal, $\Box \top$ também o é, por Necessitação. Aplicando Modus Ponens, temos $\Diamond \top \in w$. Pelo lema de veracidade, $M, w \models \Diamond \top$. Portanto, existe $v \in W$ tal que wRv e o ponto w não é terminal. $\square$

Proposição 2.4.12 (Completude de T). *T é completa em relação à classe das estruturas reflexivas.*

Demonstração. Basta provar que o modelo canônico de T é reflexivo. Sejam M o modelo canônico e w um ponto de M . Seja ψ uma fórmula em w . Como todas as fórmulas de T estão em w , temos $(\psi \supset \Diamond \psi) \in w$. Por Modus Ponens, $\Diamond \psi \in w$. Provamos então que, para toda fórmula ψ em w , $\Diamond \psi$ também está em w . Pela definição de R , wRw . Portanto, M é baseado em uma estrutura reflexiva. $\square$

Proposição 2.4.13. *B é completa em relação à classe das estruturas reflexivas e simétricas.*

Demonstração. Sejam w e v pontos do modelo canônico M tais que wRv . Seja ψ uma fórmula arbitrária em w . Precisamos mostrar que $\Diamond \psi \in v$ para estabelecer que vRw e, portanto, M é baseado em uma estrutura simétrica. De fato,

como w contém B , $(\psi \supset \Box\Diamond\psi) \in w$. Por modus ponens, $\Box\Diamond\psi \in w$. Como wRv , o lema 2.4.7 garante que $\Diamond\psi \in v$.

Na verdade, acabamos de estabelecer, de forma mais geral, que, ao acrescentar o axioma B , ganhamos a simetria da estrutura sobre a qual o modelo canônico é baseado. Da mesma maneira, estabelecemos acima que, ao acrescentar o axioma T , ganhamos a reflexividade da estrutura sobre a qual o modelo canônico é baseado. Temos então que o modelo canônico de B é reflexivo e simétrico. Portanto, B é completa em relação a essa classe de estruturas. $\square$

Proposição 2.4.14 (Completude de $S4$). *$S4$ é completa em relação à classe das estruturas reflexivas e transitivas.*

Demonstração. Pela mesma discussão que acabamos de fazer, já sabemos que o modelo canônico de $S4$ é reflexivo. Precisamos apenas provar que ele é transitivo. Sejam w , v e u três pontos de M tais que wRv e vRu . Queremos mostrar que wRu . Seja então $\psi \in u$ arbitrária. Precisamos mostrar que $\Diamond\psi \in w$. De fato, como vRu , temos $\Diamond\psi \in v$. Como wRv , temos $\Diamond\Diamond\psi \in w$. Como $(\Diamond\Diamond\psi \supset \Diamond\psi) \in w$, segue, por Modus Ponens, que $\Diamond\psi \in w$. $\square$

Proposição 2.4.15 (Completude de $S5$). *$S5$ é completa em relação à classe das estruturas reflexivas, simétricas e transitivas.*

Demonstração. Novamente, acima demonstramos o resultado de que o acréscimo do axioma (4) nos dá a transitividade da

estrutura sobre a qual o modelo canônico é formado. Como $S5$ contém os axiomas T , B e (4), segue dos resultados acima que o modelo canônico de $S5$ é formado sobre uma estrutura reflexiva, simétrica e transitiva. Está assim provado o resultado. $\square$

2.5 Considerações Finais

Nas seções anteriores, provamos que a classe das estruturas com relação serial caracteriza a lógica KD , que a classe das estruturas com relação reflexiva caracteriza KT e assim por diante.

Vamos usar essa caracterização para reobter o esquema do capítulo anterior, estabelecendo inclusive que as inclusões são estritas.

Vejamos primeiramente que R reflexiva implica R serial. De fato, se R é reflexiva, para todo $x \in W$, existe algum $y \in W$ tal que xRy , pois podemos fazer $y = x$. Mas R pode ser serial sem ser reflexiva. Isso nos dá que T implica D mas D não implica T . Daí, a lógica T contém a lógica KD estritamente.

Além disso, R pode ser reflexiva sem ser transitiva nem simétrica nem euclidiana e pode ser transitiva ou simétrica ou euclidiana sem ser reflexiva. Por fim, pode ser transitiva sem ser simétrica e simétrica sem ser transitiva.

Para ver isso, consideremos $W = \{x, y, z, w\}$.

A relação $R = \{(x, x); (y, y); (z, z); (w, w); (x, y); (y, z); (x, w)\}$

é reflexiva mas não é transitiva, pois ocorrem xRy , yRz mas não ocorre yRx ; não é simétrica, pois ocorre xRy mas não ocorre yRx ; e não é euclidiana, pois ocorrem xRy e xRw mas não ocorre yRw .

A relação $R1 = \{(x, y); (y, z); (x, w); (y, x); (z, y); (w, x)\}$ é simétrica mas não é reflexiva, pois não ocorre xRx ; não é transitiva, pois ocorrem xRy e yRz mas não ocorre xRz ; não é euclidiana, pois ocorrem xRy e xRw mas não ocorre yRz . A relação $R2 = \{(x, y); (x, z)\}$ é transitiva mas não é reflexiva, pois não ocorre xRx ; não é simétrica, pois ocorre xRy mas não ocorre yRx ; não é euclidiana, pois ocorrem xRy e xRz mas não ocorre yRz .

Finalmente, a relação $R3 = \{(x, y); (y, z)\}$ é euclidiana mas não é reflexiva, nem simétrica nem transitiva.

Isso nos mostra que os axiomas T , (4), B e (5) são dois a dois independentes. Isso nos mostra que $KT4 \neq K4$, $KTB \neq KB$ e $KT5 \neq K5$. Em resumo, o axioma T não pode ser dispensado para considerar $S4$ e $S5$. Além disso, KTB e $KT4 = S4$ são extensões legítimas de KT .

Vimos que $R1$ é simétrica sem ser transitiva e $R2$ é transitiva sem ser simétrica. Mas será que R ser simétrica e reflexiva é independente de ser transitiva e reflexiva?

Sim. A relação $R3 = \{(x, x); (y, y); (z, z); (w, w); (x, y)\}$ é reflexiva e transitiva mas não é simétrica.

A relação $R4 = \{(x, x); (y, y); (z, z); (w, w); (x, y); (y, z); (y, x); (z, y)\}$ é reflexiva e simétrica mas não é transitiva.

Isso mostra que $(T \wedge B) \not\rightarrow (4)$ e $(T \wedge (4)) \not\rightarrow B$. Portanto, $KT B \neq KT 4 = S4$.

Outra questão natural é sobre a independência entre as propriedades de ser reflexiva e simétrica ou reflexiva e transitiva e ser reflexiva e euclidiana. Vamos analisar agora essa questão.

Suponhamos que R seja reflexiva e euclidiana. Suponhamos que ocorra xRy . Como R é reflexiva, ocorre também xRx .

Assim, temos que R é euclidiana e ocorrem xRy e xRx . Logo, ocorre yRx . Portanto, R é também simétrica.

Suponhamos novamente que R seja reflexiva e euclidiana. Suponhamos que ocorram xRy e yRz . Como R é simétrica, pelo que acabamos de demonstrar, ocorre yRx . Assim, temos que R é euclidiana e ocorrem yRx e yRz . Logo, ocorre xRz . Portanto, R é transitiva.

Traduzindo, vemos que $(T \wedge (5))$ implica $(B \wedge (4))$. Isso nos mostra que $KT5 = S5$ é uma extensão própria de $KT B$ e de $S4$.

A última questão: Se R for reflexiva, simétrica e transitiva, R é euclidiana? Sim.

De fato, seja R reflexiva, simétrica e transitiva. Suponhamos que ocorram xRy e xRz . Como R é simétrica, ocorre yRx . Como R é transitiva e ocorrem yRx e xRz , então ocorre yRz . Portanto, R é euclidiana. Observemos que na verdade não usamos a reflexividade. Basta então que R seja simétrica e transitiva para ser euclidiana.

Traduzindo, $(B \wedge (4))$ implica (5) . Isso mostra que $S5 =$

KT B4.

Com essa discussão, reobtivemos resultados do capítulo anterior e obtivemos resultados que não obtivemos lá raciocinando em termos puramente semânticos.

Reobtivemos o esquema do capítulo anterior (desta vez completamente demonstrado):

Isso ilustra bem a conveniência de trabalhar em termos semânticos.

Ainda nessa linha de ilustrar o uso da semântica, vamos demonstrar *TA2*, conforme prometido no capítulo anterior.

Proposição 2.5.1 ($TA2(\Box(p \vee \Diamond q) \equiv \Box p \vee \Diamond q)$).

Demonstração. Precisamos provar que, dado qualquer ponto de qualquer modelo com relação reflexiva, simétrica e transitiva (estamos provando em *S5*), a equivalência é válida. Sejam então um modelo arbitrário M e um ponto $x \in W$. Se x é um ponto terminal, o primeiro membro da equivalência é válido por ser uma fórmula em $\Box$ e o segundo membro também é verdadeiro porque é uma disjunção onde uma das fórmulas é em $\Box$. Se x não é um ponto terminal, consideremos por casos:

1) Existe um $y \in W$ tal que xRy e $M, y \models q$. A fórmula do segundo membro é obviamente válida em x , pois $M, x \models \Diamond q$. Seja agora um $z \in W$ arbitrário tal que xRz (z pode ser inclusive igual a y). Como R é simétrica, temos também zRx . Como R é transitiva, temos, de zRx e xRy que zRy . Assim, $M, z \models \Diamond q$, donde $M, z \models (p \vee \Diamond q)$. Como z é arbitrário com a condição xRz , temos $M, x \models \Box(p \vee \Diamond q)$.

2) Todo $y \in W$ tal que xRy satisfaz p . A fórmula do segundo membro é válida em x , pois $M, x \models \Box p$. Para y tal que xRy , então, temos $M, x \models (p \vee \Diamond q)$. Como y é arbitrário, $M, x \models \Box(p \vee \Diamond q)$ e, portanto, o primeiro membro da equivalência é válido em x .

3) Se em x não valem $\Box p$ nem $\Diamond q$, o segundo membro da equivalência não é válido em x . Como $\Box p$ não é válida em x , existe algum $z \in W$ tal que xRz onde p não é válida. Tampouco $\Diamond q$ é válida em z , pois, caso contrário, existiria algum $w \in W$ com zRw onde q seria válida. Mas, como R é transitiva, teríamos xRw e, portanto, $\Diamond q$ seria válida em x . Temos, portanto, $M, z \not\models (p \vee \Diamond q)$, donde $M, x \not\models \Box(p \vee \Diamond q)$. Logo, o primeiro membro da equivalência tampouco é válido.

Como 1, 2 e 3 esgotam todas as possibilidades, vemos que o primeiro membro é válido quando e somente quando o segundo o é. Portanto, a equivalência é válida. $\square$

A demonstração acima, se comparada à de $TA1$, dada no primeiro capítulo, é longa, mas é canônica. Os teoremas de absorção, juntamente com as regras $R1$ a $R4$ (que podem ser demonstradas na mesma linha de raciocínio) e os teoremas de redução permitem demonstrar que toda fórmula em $S5$ tem grau modal 0 ou 1 (definiremos grau modal logo adiante, no início do próximo capítulo).

Outra observação interessante: Se tomarmos para um W a relação universal, onde ocorre xRy para todo $x, y \in W$, tal relação é reflexiva, simétrica e transitiva. Vemos então que

sistemas mais fracos que $S5$ não se enquadram em modelos com a relação universal.

Ganha-se uma outra forma de caracterizar $S5$ lançando mão dessa observação:

Um modelo carnapiano M é um par $\{W, V\}$, onde W é um conjunto de pontos e V é uma função valoração. Seja F o conjunto de todas as fórmulas bem formadas. A função V é definida de $W \times F$ em $\{0, 1\}$ da seguinte forma: $V(x, A) = 1$ se A é válida em x e $V(x, A) = 0$ se A não é válida em x .

A valoração V deve ainda satisfazer, para todo x :

- $V(x, \perp) = 0$
- $V(x, A \supset B) = 1$ se e somente se $V(x, A) = 0$ ou $V(x, B) = 1$
- $V(x, \neg A) = 1$ se e somente se $V(x, A) = 0$
- $V(x, A \wedge B) = 1$ se e somente se $V(x, A) = 1$ e $V(x, B) = 1$
- $V(x, \Box A) = 1$ se e somente se $V(y, A) = 1 \forall y \in W$

As outras condições naturais seguem como consequência.

Uma fórmula é válida em um modelo carnapiano se a sua valoração é 1 em todos os pontos de W .

O conjunto das fórmulas válidas em todos os modelos carnapianos é $S5$.

Não falaremos mais em modelos carnapianos ao longo do texto. Apenas os apresentamos para comentar que $S5$ pode ser tratado em termos de um tipo de modelo em que $\Box$ tem caráter global. Considerando que os modelos carnapianos foram apresentados só a título de comentário e que $S5$ foi cuidadosamente caracterizado em termos da semântica de Kripke,

não demonstraremos que $S5$ é caracterizado em termos de modelos carnapianos. No entanto, só para dar uma idéia da linha de raciocínio da demonstração, demonstraremos que todo modelo carnapiano satisfaz o axioma (5). De fato, Suponhamos, por absurdo, que haja um ponto x de um modelo carnapiano MC que não satisfaça (5). Temos então que, para algum p , x satisfaz $\Diamond p$ mas não satisfaz $\Box \Diamond p$. Como x não satisfaz $\Box \Diamond p$, existe, pela definição de $\Box$, um ponto y que não satisfaz $\Diamond p$. Pela definição de valoração, y satisfaz $\neg \Diamond p$, o que é o mesmo que $\Box \neg p$, o que significa que todo ponto de MC satisfaz $\neg p$, mas o fato de que x satisfaz $\Diamond p$ garante que algum ponto de MC satisfaz p . Essa contradição prova que o axioma (5) é válido em MC .

Como última observação, é interessante ressaltar que a validade das fórmulas é considerada de forma local, ou seja, verificada ponto a ponto. Já as regras de inferência têm um caráter global.

Capítulo 3

Bissimulação

3.1 Bissimulação

Vamos agora tratar de uma questão central no estudo de lógicas modais: Dados dois modelos, quando um ponto de um corresponde a um ponto do outro, ou seja, quando um ponto de um satisfaz as mesmas fórmulas que um ponto do outro?

A grande importância desse estudo reside no fato de que muitas simplificações podem ser feitas a partir dessa teoria. Muitas vezes se consegue um modelo equivalente ao modelo com o qual se está lidando significativamente mais simples do que esse, o que abre a possibilidade de simplificar vários problemas. Uma ótima referência para consulta dentro da abordagem que estamos seguindo é Venema [1]. Para aplicações à Ciência da Computação, indicamos Gabbay [4]. Vamos começar com uma definição preliminar:

Definição 3.1.1 (Grau Modal). *A definição de grau modal é indutiva:*

-O grau modal de uma proposição elementar ou de $\perp$ é

0.

-O grau modal de $\psi = \Diamond\phi$ é o grau modal de $\phi + 1$.

-O grau modal de $\psi = \neg\phi$ é o grau modal de ϕ .

-O grau modal de $\psi = \phi \vee \theta$ é o máximo dos graus modais de ϕ e θ .

Sejam então dois modelos M e M' e sejam dois pontos $x \in W$ e $x' \in W'$. Vamos analisar as condições necessárias e suficientes para que eles satisfaçam as mesmas fórmulas:

Em primeiro lugar, é obviamente necessário que suas valorações coincidam, ou seja, que para uma proposição elementar p , $x \in V(p)$ se e somente se $x' \in V'(p)$. Isso já basta para que x e x' satisfaçam as mesmas fórmulas com grau modal 0, ou seja, puramente Booleanas.

Vamos então concentrar nossa atenção nos operadores modais.

Suponhamos que se tenha $y \in W$ tal que ocorra xRy . Se não houver $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$, então $M, x \models \Diamond\top$ mas $M', x' \not\models \Diamond\top$. Além disso, se para alguma proposição p , $M, y \models p$, é preciso não só que exista y' tal que $x'R'y'$, mas que $M', y' \models p$, pois, caso contrário $M, x \models \Diamond p$ mas $M', x' \not\models \Diamond p$. Mais ainda, se para todo y tal que xRy tivermos $M, y \models p$, precisamos ter $M', y' \models p$ para todo y' tal que $x'R'y'$.

Em princípio, parece que nos estamos aproximando de uma condição suficiente para que dois pontos de dois modelos satisfaçam as mesmas fórmulas. No entanto, para fórmulas com grau modal superior a 1, precisamos olhar para as relações

dos elementos que x enxerga, ou seja, precisamos impor mais condições às relações R e R' , envolvendo mais pontos de W e W' . Isso nos sugere que não seja conveniente considerar dois pontos isoladamente em dois modelos. De fato, é mais conveniente trabalhar com uma noção englobando os pontos do modelo de forma mais coletiva. É essa noção que vamos procurar a partir de agora.

Vamos considerar uma relação B entre os pontos de W e os pontos de W' . Queremos que B seja tal que se xBx' então $M, x \models \psi$ se e somente se $M', x' \models \psi$ para qualquer fórmula ψ .

A discussão que acabamos de fazer sugere que imponhamos algumas condições a B , o que nos leva à seguinte definição:

Definição 3.1.2 (Bissimulação). *Uma relação B entre pontos de dois modelos M e M' ($B \subset W \times W'$) é uma bissimulação se, dados dois pontos quaisquer $x \in W$ e $x' \in W'$ com xBx' , temos:*

- *Para toda proposição elementar p , $x \in V(p)$ se e somente se $x' \in V'(p)$.*
- *Se $y \in W$ é tal que xRy , então existe $y' \in W'$ tal que yBy' , $x'R'y'$ e, para toda proposição elementar p , $y \in V(p)$ se e somente se $y' \in V'(p)$.*
- *Se $y' \in W'$ é tal que $x'R'y'$, então existe $y \in W$ tal que yBy' , xRy e, para toda proposição elementar p , $y \in V(p)$ se e somente se $y' \in V'(p)$.*

Se B é uma bissimulação entre dois modelos M e M' e

xBx' , dizemos que M e M' são modelos bissimilares e que x e x' são pontos bissimilares. Deixemos claro que a definição acima não exige que, para dois modelos bissimilares, dado um ponto de um desses modelos exista um ponto bissimilar a ele no outro modelo. Pode também acontecer de uma bissimulação relacionar dois pontos de dois modelos e outra bissimulação não. Para que dois pontos sejam bissimilares é necessário e suficiente que exista uma bissimulação relacionando os dois.

Essa é exatamente a noção de que precisamos e o nosso próximo passo será provar que dois pontos bissimilares satisfazem exatamente as mesmas fórmulas modais em seus respectivos modelos. Vale a pena chamar a atenção para os fatos de que a definição acima é simétrica e que uma relação B não é necessariamente uma função.

Teorema 3.1.3. *Dois pontos bissimilares x e x' de dois modelos bissimilares M e M' satisfazem as mesmas fórmulas.*

Demonstração. A demonstração é por indução sobre a complexidade da fórmula. Seja ψ uma fórmula.

Se ψ tem complexidade 1, então ψ é uma proposição elementar ou $\psi = \perp$ ($\top = \neg\perp$ e não precisa ser considerada separadamente). Se ψ é uma proposição elementar, então de fato $M, x \models \psi$ se e somente se $M', x' \models \psi$, pois x e x' satisfazem as mesmas proposições elementares. Se $\psi = \perp$, então segue o mesmo resultado, pois nenhum ponto de nenhum modelo satisfaz $\perp$.

Suponhamos agora que o teorema valha para fórmulas com grau até k . Seja ψ uma fórmula com complexidade $k+1$. Então temos $\psi = \neg\alpha$, ou $\psi = \alpha \vee \beta$, ou $\psi = \Diamond\alpha$, onde α e β têm complexidade não superior a k (novamente, a conjunção, a implicação e o operador $\Box$ saem dos operadores básicos). Os casos Booleanos seguem de maneira bastante natural:

-Se $\psi = \neg\alpha$, então $(M, x \models \neg\alpha) \leftrightarrow (M, x \not\models \alpha) \leftrightarrow (M', x' \not\models \alpha) \{ \text{nessa passagem usamos a hipótese de indução} \} \leftrightarrow (M', x' \models \neg\alpha)$.

-Se $\psi = \alpha \vee \beta$, então $(M, x \models (\alpha \vee \beta)) \leftrightarrow [(M, x \models \alpha) \text{ ou } (M, x \models \beta)] \leftrightarrow [(M', x' \models \alpha) \text{ ou } (M', x' \models \beta)] \{ \text{novamente usando a hipótese de indução} \} \leftrightarrow (M', x' \models (\alpha \vee \beta))$.

Resta agora o operador $\Diamond$. Seja então $\psi = \Diamond\alpha$:

-Se $M, x \models \Diamond\alpha$, temos que existe $y \in W$ tal que xRy e $M, y \models \alpha$. Como x e x' são bissimilares, existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e yBy' . Como y e y' são bissimilares e α tem complexidade não superior a k , segue da hipótese de indução que $M', y' \models \alpha$, donde $M', x' \models \Diamond\alpha$. Logo $M, x \models \psi \rightarrow M', x' \models \psi$. Como nossa definição de bissimulação é simétrica, a demonstração de que $M', x' \models \psi \leftrightarrow M, x \models \psi$ é exatamente a mesma.

Completamos assim a indução. □

Para dar uma primeira ilustração da força do conceito que acabamos de apresentar, vamos dar um exemplo e uma aplicação.

Exemplo 3.1.4. *Sejam dois modelos $M = \{W, R, V\}$ e $M' = \{W', R', V'\}$ assim definidos: W é o conjunto dos naturais, R relaciona um natural com o seu sucessor e V é tal que a proposição p é válida nos pares. Para M' , $W' = \{a, b\}$, $R' = \{(a, b); (b, a)\}$ e V' é tal que p é válida em a e não em b .*

Seja agora uma relação B entre W e W' definida de modo que os pares enxergam a e os ímpares enxergam b .

É fácil verificar que B é uma bissimulação. Temos assim um exemplo de um modelo infinito bissimilar a um modelo finito.

Agora a aplicação. Vamos mostrar que o operador box global, definido pela propriedade de que um ponto x satisfaz box global ψ se e somente se **todos os pontos do modelo** satisfazem ψ , não pode ser definido a partir do operador diamante.

Se quisermos trabalhar com esse operador, ele deve ser definido como um operador elementar.

Para tanto, precisamos de um resultado preliminar. Se dois modelos M e M' são disjuntos, ou seja, $W \cap W' = \emptyset$, o modelo M'' tal que $W'' = W \cup W'$, $R'' = R \cup R'$ e $V'' = V \cup V'$ é chamado união disjunta de M e M' . Podemos criar uma relação B entre M'' e M (ou M') identificando os pontos da maneira natural. Como a união é disjunta, a relação R'' funciona em relação a cada ponto da mesma forma que a relação R (ou R'). Dessa forma, é imediato que dois pontos quaisquer identificados por B são bissimilares.

Tomemos então dois modelos M e M' disjuntos tais que para uma dada proposição p tenhamos $M, x \models p$ para todo $x \in W$ e $M', x' \not\models p$ para todo $x' \in W'$. Seja M'' a união disjunta de M e M' .

Suponhamos por absurdo que o operador box global possa ser definido a partir do operador $\Diamond$ e dos operadores Booleanos. Existe então uma expressão $S(p)$ formada somente por símbolos da linguagem modal básica tal que para qualquer elemento w de um modelo arbitrário temos que w satisfaz $S(p)$ se e somente se **todos os elementos** daquele modelo satisfazem p . Tomemos $x \in W$ e $x' \in W'$. Pela maneira como definimos as valorações nos modelos, temos $M, x \models S(p)$ e $M', x' \not\models S(p)$.

Mas $M, x \models S(p) \rightarrow M'', x \models S(p) \rightarrow M'', x' \models p \rightarrow M', x' \models p$. Absurdo. Acima, cometemos o abuso de lingua-

gem de usar o mesmo nome para os pontos de M ou M' e seus pontos correspondentes em M'' , mas isso não gera confusão e alivia a notação.

Visto que dois modelos bissimilares não se distinguem do ponto de vista modal, é natural indagar se bissimulação também preserva propriedades em lógica de primeira ordem. Vamos agora dar um exemplo de dois modelos bissimilares que do ponto de vista da lógica de primeira ordem são diferentes.

Exemplo 3.1.5. *Sejam duas proposições p e q e dois modelos M e M' definidos da seguinte forma: $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (3, 5)\}$, $V(p) = \{1, 3\}$, $V(q) = \{2, 4, 5\}$, $W' = \{a, b, c, d, e\}$, $R' = \{(a, b); (a, c); (b, d); (c, d); (d, e)\}$ e $V'(p) = \{a, d\}$, $V'(q) = \{b, c, e\}$, conforme a figura abaixo.*

Seja agora B a relação entre os elementos de W e W' definida da seguinte forma: $B = \{(1, a); (2, b); (2, c); (3, d); (4, e); (5, e)\}$.

Provemos que B é uma bissimulação.

Primeiramente, observemos que 1 e a pertencem a $V(p)$ ($V'(p)$) mas não a $V(q)$ ($V'(q)$). Da mesma forma 3 e d . Verifica-se facilmente com o mesmo procedimento a condição de bissimulação sobre as valorações.

Olhemos para as relações. Ocorre $1R2$. Então é preciso que exista algum ponto w' em W' bissimilar a 2 tal que ocorra $aR'w$. De fato, tanto b quanto c atendem tal exigência. Da mesma forma, como $aR'b$ e $aR'c$, é preciso que existam pontos w e y em W (não necessariamente distintos), bissimilares a b e c respectivamente, tais que ocorram $1Rw$ e $1Ry$. De fato, o ponto 2 atende a ambas as exigências. A verificação das condições de bissimulação para os demais pares de pontos é totalmente análoga. Fazendo tal verificação, fica provado que M e M' são bissimilares.

Com isso, os pontos 1 e a satisfazem as mesmas fórmulas modais em seus respectivos modelos, mas observemos que a fórmula $\psi = \exists w, y, z[(w \neq y) \wedge (w \neq z) \wedge (y \neq z) \wedge xRw \wedge xRy \wedge wRz \wedge yRz]$ é satisfeita para $x = a$ em M' mas não é satisfeita para $x = 1$ em M . A estrutura descrita pela fórmula ψ acima recebe o nome de diamante. O exemplo que acabamos de dar mostra que ‘bissimulação não enxerga diamante’.

Portanto, bissimulação preserva fórmulas modais mas não preserva necessariamente fórmulas de primeira ordem.

Agora um exemplo de dois pontos equivalentes de dois modelos distintos, ou seja, que satisfazem as mesmas fórmulas modais, mas não são bissimilares.

Exemplo 3.1.6. *Sejam dois modelos M e M' com base nas figuras. A primeira figura possui um ramo com n elementos para todo n e a segunda figura, além desses ramos, possui um ramo infinito. Cada ramo da primeira figura começa em w e cada ramo da segunda em w' . Sejam as relações R e R' tais que cada ponto enxerga o ponto seguinte do ramo. Consideremos as valorações vazias, ou seja, nenhum ponto satisfaz qualquer proposição elementar.*

Antes de começar a falar desses modelos, vamos considerar separadamente um ramo de cada. Ou seja, vamos considerar os modelos gerados pelas restrições de M e M' a esses ramos.

Primeiramente, é imediato que dois ramos com o mesmo

número de elementos nos dois modelos são equivalentes. O ponto chave é que para fórmulas com grau modal k , um ramo com $k+1$ elementos equivale ao ramo infinito. De fato, sigamos por indução sobre o grau modal das fórmulas. Se ψ tem grau modal 0 , é imediato que ψ satisfaz w se e somente se satisfaz w' . Suponhamos agora provada a equivalência para fórmulas de grau modal k . Seja então ψ uma fórmula com grau modal $k+1$ e sejam o ramo com $k+1$ elementos de M e o ramo infinito de M' .

-Seja ψ da forma $\Diamond\phi$ para alguma ϕ de grau modal k : Se ψ é válida em w , então ϕ é válida no ponto $x \in W$ tal que wRx , ou seja, no segundo ponto do ramo. Considerando cada ramo a partir do respectivo segundo elemento x e x' , temos ainda um ramo com k elementos e um ramo infinito. Pela hipótese de indução, a fórmula ϕ , que tem grau modal $k-1$, é válida em x se e somente se é válida em x' . Logo, $\Diamond\phi = \psi$ é válida em w se e somente se é válida em w' .

-Seja ψ da forma $\neg\Diamond\phi$ tendo ϕ grau modal k . Então ψ é válida em $w \leftrightarrow \Diamond\phi$ não é válida em $w \leftrightarrow \Diamond\phi$ não é válida em w' (pela parte já demonstrada) $\leftrightarrow \psi$ é válida em w' .

-Seja finalmente ψ conjunção ou disjunção de fórmulas da forma $\Diamond\phi$ para ϕ com grau modal no máximo k . Segue o resultado pelo mesmo tipo de raciocínio usado acima.

Agora podemos discutir sobre os modelos M e M' : Os pontos w e w' satisfazem as mesmas fórmulas modais. De fato, se uma fórmula ψ é da forma $\Diamond\phi$, ela é válida em

w (ou w') se e somente se ϕ é válida em algum x (ou x') tal que wRx (ou $w'R'x'$). Então é só considerar o ramo equivalente no outro modelo ao ramo que contém x (ou x'), lembrando que para um ramo finito temos o ramo finito do outro modelo com o mesmo número de elementos e para o ramo infinito sempre temos um ramo finito equivalente levando em conta o grau modal da fórmula considerada. As outras possibilidades a serem estudadas para ψ são os casos Booleanos, que são rotineiros.

Embora satisfaçam as mesmas fórmulas modais, w e w' não são bissimilares. Suponhamos, por absurdo, que exista uma bissimulação B entre M e M' tal que wBw' . Se B é uma bissimulação entre M e M' e $x' \in W'$ é o segundo elemento do ramo infinito de M' ($w'R'x'$), existe $x \in W$ tal que xBx' . Denominando os elementos seguintes do ramo infinito x'_2, x'_3 , etc., temos que, como $x'R'x'_2$ e xBx' , então precisa haver $x_2 \in W$ tal que xRx_2 e $x_2Bx'_2$. Tal elemento x_2 só pode ser o terceiro elemento do ramo ao qual x pertence. Assim sucessivamente. Mas o ramo infinito segue sem fim e, para algum passo, não haverá sucessor no ramo finito para o elemento considerado. Chegamos com isso a um absurdo e, portanto, M e M' não podem ser bissimilares.

O exemplo acima mostra que equivalência modal de dois pontos não implica bissimilaridade, embora bissimilaridade implique equivalência modal. No entanto, essa recíproca é válida

em um caso particular.

Teorema 3.1.7 (Hennessy-Milner). *Sejam dois modelos M e M' com relações finitas, ou seja, cujas relações gozam da propriedade de que um ponto não enxerga um número infinito de pontos.*

Então dois pontos dos dois modelos são modalmente equivalentes se e somente se são bissimilares.

Demonstração. Que dois pontos bissimilares são modalmente equivalentes já foi provado. Resta então a recíproca.

Seja B uma relação entre os elementos de W e W' definida da seguinte forma: Para $x \in W$ e $x' \in W'$, temos xBx' se e somente se x e x' são modalmente equivalentes (satisfazem as mesmas fórmulas modais). Vamos provar que B é uma bissimulação.

De fato, sejam $x \in W$ e $x' \in W'$ tais que xBx' . Suponhamos agora que $y \in W$ seja tal que xRy . Precisamos provar que existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e yBy' . Começemos observando que o conjunto X' dos elementos de W' que x' enxerga não é vazio pois, caso contrário, teríamos $M, x \models \Diamond \top$ mas $M', x' \not\models \Diamond \top$. Sabemos que X' é finito por hipótese. Precisamos provar que algum elemento de X' é modalmente equivalente a y . Suponhamos por absurdo que nenhum elemento $y'_1 \dots y'_n$ de X' seja modalmente equivalente a y . Então para cada $y'_i \in X'$ existe uma fórmula ψ_i tal que $M, y \models \psi_i$ mas $M', y'_i \not\models \psi_i$. Assim, temos que $\phi = (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n)$ é satisfeita

por y mas não é satisfeita por nenhum elemento de X' . Portanto, $M, x \models \Diamond\phi$ mas $M', x' \not\models \Diamond\phi$, o que é uma contradição contra o fato de que x e x' são modalmente equivalentes. A demonstração no outro sentido é igual. $\square$

Duas observações para concluir a seção:

-Bissimulação é uma relação de equivalência. De fato, todo modelo é bissimilar a si mesmo pela relação identidade; Se M é bissimilar a M' então M' é bissimilar a M , bastando inverter os pares da relação de bissimulação; e, finalmente, se M é bissimilar a M' e M' é bissimilar a M'' então M é bissimilar a M'' . Para ver isso, é preciso verificar que a composta de duas bissimulações é uma bissimulação. Consideremos então B e B' bissimulações entre M e M' e entre M' e M'' respectivamente. Sejam xBx' e $x'B'x''$ Mostremos que x e x'' são bissimilares. De fato, eles satisfazem as mesmas proposições elementares, pois ambos satisfazem as mesmas proposições elementares que x' . Se xRy , então existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e yBy' , mas isso implica que existe $y'' \in W''$ tal que $x''R''y''$ e $y'B'y''$. A composição de B e B' relaciona y e y'' e está satisfeita a segunda condição de bissimulação. A terceira é simétrica à segunda e é tratada do mesmo modo. Isso determina que a bissimilaridade entre pontos é transitiva, mas é necessário notar que a composição de duas bissimulações pode ser uma relação vazia. Portanto, se exigirmos que uma bissimulação seja uma relação não vazia, a composição de bissimulações pode não ser uma bissimulação. Podemos então afirmar que bissimilaridade

entre pontos é uma relação de equivalência e quanto à bissimilaridade entre modelos, temos essa ressalva.

-Finalmente, a última observação é que a união de bissimulações, finita ou infinita, é ainda uma bissimulação. Isso garante a existência de uma bissimulação maximal.

3.2 n-Bissimilaridade

Ainda à luz do exemplo anterior, vamos seguir na busca de uma condição necessária e suficiente para que dois pontos de modelos distintos sejam equivalentes. O exemplo nos sugere que devemos levar em conta o grau modal das fórmulas. Vamos aprofundar nossa busca com mais uma definição:

Definição 3.2.1 (n-bissimulação). *Dois pontos w e w' de dois modelos M e M' são n-bissimilares quando existem relações $B_n \subset B_{n-1} \subset \dots \subset B_0$ tais que:*

- wB_nw'
- Se xB_0x' , então x e x' satisfazem as mesmas proposições elementares.
- Se $xB_{i+1}x'$ e xRy , então existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e yB_iy' .
- Se $xB_{i+1}x'$ e $x'R'y'$, então existe $y \in W$ tal que xRy e yB_iy' .

Cabe ressaltar que dois pontos bissimilares são n-bissimilares para todo n. Basta tomarmos todas as relações B_i iguais à bis-simulação B . Mas a recíproca não é verdadeira. Os modelos do

exemplo acima são n -bissimilares para todo n mas não são bis-similares. Isso nos mostra que bissimilaridade é uma condição mais forte do que n -bissimilaridade para todo n .

Antes de apresentar o próximo teorema, precisamos de mais um resultado:

Lema 3.2.2. *Se o número de proposições elementares em um modelo é finito, o número de fórmulas modais distintas e não equivalentes com grau modal até n (para qualquer n) é finito.*

Demonstração. Apliquemos indução sobre o grau modal: Se o grau modal é 0, a fórmula é uma proposição elementar, $\perp$, ou combinação Booleana disso, o que gera um número finito de possibilidades. Supondo provado que para grau modal n o número de possibilidades é finito, as possibilidades para grau modal $n+1$ são as fórmulas possíveis para grau modal até n , cada uma delas precedida por diamante e as combinações Booleanas disso, o que dá novamente um número finito de possibilidades. $\square$

Teorema 3.2.3. *Dois pontos x e x' de dois modelos M e M' para os quais o número de proposições elementares é finito satisfazem as mesmas fórmulas modais até grau n se e somente se são n -bissimilares. Em outras palavras, n -bissimilaridade é condição necessária e suficiente para equivalência modal até grau n .*

Demonstração. -Condição Necessária: Por indução: Para grau

modal 0, é imediato. Suponhamos provado para grau modal $n-1$. Suponhamos que x e x' satisfaçam as mesmas fórmulas modais até grau modal n . Sabemos que o número de fórmulas modais distintas não equivalentes com grau modal até n é finito. Construimos primeiramente as relações B_i como segue: $B_n = \{(x, x')\}$; Para formar B_{n-1} , tomamos os conjuntos W_{n-1} e W'_{n-1} dos pontos que x e x' enxergam, respectivamente. A partir daí, definimos B_{n-1} como o conjunto dos pares de elementos de W_{n-1} e W'_{n-1} que são $(n-1)$ -bissimilares. Uma vez formada B_i , B_{i-1} é formada da mesma maneira, tomando os conjuntos dos pontos que cada elemento do conjunto formado na passagem anterior enxerga e relacionando os pontos $(i-1)$ -bissimilares. Procedemos assim até construir B_0 . O próximo passo é mostrar que essa sequência de relações satisfaz a definição acima. De fato, temos xBx' (primeira condição); Se $w \in W$ e $w' \in W'$ são tais que wB_0w' , então w e w' satisfazem as mesmas proposições elementares, pois B_0 foi construída de modo que todos os pontos que ela relacionam são 0-bissimilares, o que equivale a dizer que satisfazem as mesmas proposições elementares (segunda condição); Sejam agora $w, v \in W$ e $w' \in W'$ tais que wB_iw' e wRv . O conjunto W_{i-1} contém v e o conjunto W'_{i-1} contém todos os elementos que w' enxerga. Como o número de fórmulas com grau modal até n é finito, não existe conjunto infinito de pontos modalmente distintos até grau n dois a dois, ou seja, é possível escolher um conjunto finito dentre os pontos que w' enxerga tal que

qualquer outro ponto que w' enxergue seja modalmente equivalente até grau n a algum ponto desse conjunto. Podemos seguir o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema de Hennessy-Milner, só que considerando pontos modalmente equivalentes até grau $i - 1$, e temos que algum v' desse conjunto é modalmente equivalente a v até grau $i-1$. Esse v' é $(i-1)$ -bissimilar a v pela hipótese de indução e, portanto, tal que $vB(i-1)v'$ e $w'R'v'$ (terceira condição); A quarta condição é simétrica à terceira e segue do mesmo modo.

-Condição Suficiente: Suponhamos agora que exista uma n -bissimulação entre os elementos x e x' . Seguimos por indução sobre n de forma bem semelhante ao que fizemos no exemplo. Para grau modal 0 , o resultado é imediato. Suponhamos o resultado provado para grau modal n . Sejam x e x' $(n+1)$ -bissimilares e ψ uma fórmula com grau modal $n+1$. Se ψ for da forma $\Diamond\phi$ onde ϕ tem grau modal n e $M, x \models \psi$, temos que existe $y \in W$ tal que $M, y \models \phi$. Como x e x' são $(n+1)$ -bissimilares, existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e yB_ny' (seguindo nossa nomenclatura padrão). Como yB_ny' , y e y' são n -bissimilares. Pela hipótese de indução, satisfazem as mesmas fórmulas até grau modal n . Como ϕ tem grau modal n , temos que $M', y' \models \phi$, donde $M', x' \models \psi$. As outras possibilidades para ψ (os casos Booleanos) são mais imediatas e podem ser tratadas como foi feito com detalhes no exemplo. $\square$

O teorema acima afirma que dois pontos satisfazem as mesmas fórmulas modais até grau n se são n -bissimilares. Para

dois pontos serem modalmente equivalentes, é preciso que satisfaçam as mesmas fórmulas modais para qualquer grau modal. Chegamos então à condição que procurávamos: Para que dois pontos de dois modelos distintos sejam modalmente equivalentes é necessário e suficiente que sejam n -bissimilares para todo n .

Já vimos que isso é uma condição mais fraca do que bissimilaridade.

3.3 Filtragem

As ferramentas que desenvolvemos até aqui tratam da equivalência modal de dois pontos no sentido total. Mas é interessante considerar pontos modalmente equivalentes em sentido parcial. Em outras palavras, pontos que satisfazem as mesmas fórmulas modais dentro de um conjunto de fórmulas.

Vamos formalizar.

Definição 3.3.1. *Um conjunto de fórmulas modais Σ é fechado em relação a subfórmulas quando:*

- $(\psi \vee \phi) \in \Sigma \rightarrow (\psi, \phi \in \Sigma)$
- $\neg\psi \in \Sigma \rightarrow \psi \in \Sigma$
- $\Diamond\psi \in \Sigma \rightarrow \psi \in \Sigma$

Definição 3.3.2. *Dois pontos v, w são equivalentes em relação a um conjunto de fórmulas Σ quando satisfazem as mesmas fórmulas em Σ . Em símbolos: $v \sim w \leftrightarrow (def) \forall \psi \in \Sigma, (v \models \psi \leftrightarrow w \models \psi)$*

A equivalência de pontos de um modelo em relação a um conjunto de fórmulas é uma relação de equivalência. Portanto, dados um modelo M e um conjunto de fórmulas Σ , podemos identificar cada ponto de W com sua classe de equivalência. Construimos, assim, um conjunto W' cujos elementos são as classes de equivalência dos pontos de W . Para $w \in W$, chamemos w' a classe de equivalência de w . Com a nossa notação, um ponto de W' pode ter vários nomes.

Definição 3.3.3 (Filtragem). *Sejam M um modelo e Σ um conjunto de fórmulas. Uma filtragem de W em relação a Σ é um modelo M' satisfazendo as seguintes propriedades:*

- W' é o conjunto das classes de equivalência dos elementos de W , como feito acima.

-Se xRy então $x'R'y'$.

-Se $x'R'y'$ e $\Diamond\psi \in \Sigma$, então $(M, y \models \psi) \rightarrow (M, x \models \Diamond\psi)$.

-Para toda proposição elementar $p \in \Sigma$, $V(p) = \{w' \mid M, w \models p\}$

Teorema 3.3.4 (Teorema da Filtragem). *Sejam M um modelo e M' sua filtragem em relação a um conjunto de fórmulas Σ fechado em relação a subfórmulas. Para toda fórmula $\psi \in \Sigma$ e para todo ponto $x \in W$, $M, x \models \psi$ se e somente se $M', x' \models \psi$.*

Demonstração. A demonstração é por indução sobre o grau de ψ (não grau modal): Se ψ é formada por apenas um símbolo, estamos no caso de proposições elementares, que é imediato

pela definição da valoração na filtragem. Os casos Booleanos são canônicos, mas é pertinente lembrar que, neste ponto, estamos usando a hipótese de que Σ é fechada por subfórmulas para aplicar a indução. Passemos então ao caso modal. Suponhamos o teorema provado para fórmulas de grau até n e seja $\psi = \Diamond\phi$, onde ϕ é formada por n símbolos.

Suponhamos que $M, x \models \psi$. Então existe $y \in W$ tal que xRy e $M, y \models \phi$. Pela segunda condição na definição de filtragem, $x'R'y'$ e, pela hipótese de indução, $M', y' \models \phi$. Portanto, $M', x' \models \psi$.

Agora a recíproca. Suponhamos que $M', x' \models \psi$. Então existe $y' \in W'$ tal que $x'R'y'$ e $M', y' \models \phi$, donde $M, y \models \phi$ pela hipótese de indução. Mas isso implica, pela terceira condição na definição de filtragem, que $M, x \models \psi$. $\square$

O próximo passo é mostrar que, dados um modelo M e um conjunto Σ de fórmulas fechado por subfórmulas, existe uma filtragem M' . O conjunto W' e a valoração V' podem sempre ser definidos como descrevemos. O que não ficou claro é se existe uma relação R' satisfazendo a definição de filtragem. Vamos definir duas relações entre os elementos de W' e mostrar que ambas satisfazem as condições.

- $R1$: Para $x', y' \in W'$, temos $x'R1y'$ se e somente se existem $w, v \in W$ tais que w pertence à classe de equivalência de x ($w' = x'$), v pertence à classe de equivalência de y ($v' = y'$) e wRv .

Precisamos mostrar que $R1$ satisfaz a segunda e a terceira

condições da definição: Se xRy , então, obviamente, x pertence à classe de equivalência de x e y pertence à classe de equivalência de y , donde $x'R1y'$ (segunda condição); Se $x'R1y'$, então, seja $\Diamond\psi \in \Sigma$ tal que $M, y \models \psi$. Como $x'R1y'$, pela forma como definimos $R1$, temos que existem $w, v \in W$ tais que w pertence à classe de equivalência de x , v pertence à classe de equivalência de y e wRv . Como v pertence à classe de equivalência de y e $M, y \models \psi$, $M, v \models \psi$ e, portanto, $M, w \models \Diamond\psi$. Como w e x pertencem à mesma classe de equivalência, temos que $M, x \models \Diamond\psi$ (terceira condição).

Agora que provamos que $R1$ satisfaz as condições da definição de filtragem, vejamos mais um ponto: Seja R' uma relação que satisfaça as condições. Se $x'R1y'$, então existem $w, v \in W$ tais que w pertence à classe de equivalência de x , v pertence à classe de equivalência de y e wRv . Como wRv , pela segunda condição, $w'R'v'$. Como $w' = x'$ e $v' = y'$, temos $x'R'y'$. Portanto, $R1 \subset R'$. Isso significa que $R1$ é a menor relação que satisfaz as condições da definição de filtragem.

- $R2$: Para $x', y' \in W'$, temos $x'R2y'$ se e somente se para toda fórmula $\Diamond\psi \in \Sigma$, $(M, y \models \psi) \rightarrow (M, x \models \Diamond\psi)$.

Novamente, precisamos provar que $R2$ satisfaz as condições: Se xRy , então $(M, y \models \psi) \rightarrow (M, x \models \Diamond\psi)$, qualquer que seja ψ . Em particular, isso vale para toda ψ tal que $\Diamond\psi \in \Sigma$. Isso nos dá $x'R2y'$ (segunda condição); Se $x'R2y'$ e $\Diamond\psi \in \Sigma$, é imediato que $M, y \models \psi \rightarrow M, x \models \Diamond\psi$, pois essa foi a maneira como $R2$ foi definida (terceira condição).

Agora que provamos que $R2$ satisfaz as condições da definição de filtragem, vejamos outro ponto: Seja R' uma relação que satisfaça as condições. Seja $x'R'y'$. Como R' satisfaz a terceira condição, é imediato que $x'R2y'$. Portanto $R' \subset R2$. Isso mostra que $R2$ é a maior relação que satisfaz as condições.

Agora sabemos que sempre existe uma filtragem para um modelo M e um conjunto Σ de fórmulas fechado por subfórmulas quaisquer. Cabe ressaltar que a filtragem pode não ser única, sendo que duas filtrações só podem diferir pela relação, já que só há uma maneira de tomar W' e V' . Sabemos que existem uma menor e uma maior filtragem. Mas lembremos que a maior e a menor relação podem eventualmente ser a mesma. Com isso, a filtragem pode eventualmente ser única.

Ainda nessa linha de raciocínio, a escolha de uma relação adequada para a filtragem pode preservar propriedades convenientes de um modelo. Por exemplo, se um modelo M é transitivo, sua filtragem será transitiva se tomarmos R' da seguinte forma: $x'R'y'$ quando, para toda $\Diamond\psi \in \Sigma$, $M, y \models (\psi \vee \Diamond\psi) \rightarrow M, x \models \Diamond\psi$. Primeiro, precisamos mostrar que R' satisfaz as condições da definição de filtragem. Sejam então $x, y \in W$ tais que xRy . Se $M, y \models (\psi \vee \Diamond\psi)$, temos que ou $M, y \models \psi$ e nesse caso $M, x \models \Diamond\psi$, pois xRy ou $M, y \models \Diamond\psi$. Nesse caso, existe $z \in W$ tal que yRz e $M, z \models \psi$. Como R é transitiva, temos também xRz . Daí, também nesse caso temos $M, x \models \Diamond\psi$. Portanto, $x'R'y'$ e a segunda condição da definição está satisfeita. Sejam agora $x', y' \in W'$ tais que $x'R'y'$. Sejam $\Diamond\psi \in \Sigma$

e $M, y \models \psi$. Então, obviamente, $M, y \models \psi \vee \Diamond\psi$. Como $x'R'y'$, temos que $M, x \models \Diamond\psi$, como precisávamos provar. Portanto, está satisfeita a terceira condição e a relação R' de fato define uma filtragem. Resta agora provar que R' é transitiva. De fato, sejam $x', y', z' \in W'$ tais que $x'R'y'$ e $y'R'z'$. Seja $\Diamond\psi \in \Sigma$ tal que $M, z \models (\psi \vee \Diamond\psi)$. Como $y'R'z'$, temos $M, y \models \Diamond\psi$, portanto $M, y \models (\psi \vee \Diamond\psi)$, donde $M, x \models \Diamond\psi$ (pois $x'R'y'$). Obtivemos, portanto, que $M, z \models (\psi \vee \Diamond\psi) \rightarrow M, x \models \Diamond\psi$, como queríamos demonstrar. Logo, R' é transitiva.

Uma aplicação imediata e de grande relevância desta ferramenta é que toda fórmula que pode ser satisfeita em algum modelo pode ser satisfeita em um modelo finito. Para ver isso, primeiramente observemos que se Σ é um conjunto finito, a filtragem tem de ser finita, pelo fato de que o número de possibilidades de suconjuntos de Σ é finito e, portanto, o número de classes de equivalência é finito. Dessa forma, se ψ pode ser satisfeita em algum modelo, tomemos um modelo qualquer M onde ela seja satisfeita. Tomemos Σ o conjunto das subfórmulas de ψ , que obviamente é um conjunto de fórmulas fechado por subfórmulas. Tomemos a filtragem M' de M por Σ . Pelo que acabamos de discutir, M' é um modelo finito e, como é uma filtragem, satisfaz ψ .

Vamos encerrar com um exemplo.

Exemplo 3.3.5. *Seja um modelo M conforme a figura acima. O ponto 0 enxerga todas as literais, todas as literais enxergam o número 1 e cada número positivo enxerga seu sucessor. A literal a satisfaz a proposição elementar p_a , b satisfaz p_b , e c satisfaz p_c . Todos os naturais satisfazem a proposição elementar q .*

Seja $M' = \{W', R', V'\}$ uma filtragem para um conjunto Σ fechado por subfórmulas. Se tomarmos $\Sigma = \{\Diamond q, q\}$, teremos $W' = \{0', a', 1'\}$, $V'(\Diamond q) = \{a', 1'\}$, $V'(q) = \{0', 1'\}$ e podemos tomar $R' = \{(0', a'); (a', 1'); (1', 1')\}$. Se tomarmos $\Sigma = \{\Diamond q, q, p_a\}$, teremos $W' = \{0', a', b', 1'\}$, $V(\Diamond q) = \{a', b', 1'\}$, $V'(q) = \{0', 1'\}$, $V'(p_a) = \{a\}$ e podemos tomar $R' = \{(0', a'); (a', 1'); (b', 1'); (1', 1')\}$

Referências Bibliográficas

- [1] Blackburn, P. de Rijke, M., Venema, Y. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] Bourbaki, N. *Elements of Mathematics: Theory of Sets*. Hermann: Addison Wesley Pub. Co., 1968.
- [3] Chaui, M. *Introdução à História da Filosofia*. Companhia das Letras, 2002.
- [4] Gabbay, D., Kurucz, A., Wolter, F. and Zakharyashev, M. *Many-Dimensional Logics: Theory and Applications*. Elsevier, 2003.
- [5] Hughes, G. *An Introduction to Modal Logic*. London: Methuen, 1968.
- [6] Keale, W., Keale, M. *The Development of Logic*. Clarendon Press, 1962.
- [7] Manin, Y. *A Course in Mathematical Logic*. Springer-Verlag, 1977.
- [8] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, 1987.
- [9] Pinto, P. R. M. *Introdução à Lógica Simbólica*. Editora UFMG, 2001.
- [10] Reale, G., Antiseri, D. *Storia della Filosofia*. Editrice La Scuola, 1997.