**Deformabilidade sobre S^1
a livre de ponto fixo para
auto-aplicações de T -fibrados
e Reidemeister sobre S^1**

Gustavo de Lima Prado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu
auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2010

**Deformabilidade sobre S^1
a livre de ponto fixo para
auto-aplicações de T -fibrados
e Reidemeister sobre S^1**

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Gustavo de Lima Prado em 25/03/2010.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves IME - USP
- Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi IGCE - UNESP
- Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto ICMC - USP

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço, ainda, a minha família, aos meus amigos e aos meus professores. Finalmente, agradeço ao meu orientador de iniciação científica, Prof. Dr. João Peres Vieira, à FAPESP e à UNESP, que me ajudaram e guiaram durante a graduação, e ao meu orientador de mestrado, Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves, ao CNPq e à USP, que me auxiliaram e conduziram durante o mestrado.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é classificar as auto-aplicações, f , de fibrados, com fibra toro, (MA, p, S^1, T) , que preservam fibra sobre S^1 , com a propriedade de poderem ser deformadas sobre S^1 a uma aplicação livre de ponto fixo. Isto é feito, ao estudarmos se um certa equação admite solução em $\Pi_2(MA, MA - S^1) \triangleleft \Pi_1(MA - S^1)$. Gostaríamos de destacar que, para calcular uma apresentação para $\Pi_1(MA - S^1)$, nós utilizamos uma técnica diferente da do artigo [GPV-04].

Depois, nós investigamos a relação entre o número de Reidemeister sobre S^1 , $R_{S^1}(f)$, e a deformabilidade de f sobre S^1 a uma aplicação livre de ponto fixo. Em particular, se $R_{S^1}(f) < \infty$ e $(f|_T)_\#$ é diferente da identidade, então f não é deformável sobre S^1 a uma aplicação livre de ponto fixo. Também, $R_{S^1}(f) = \infty$ não implica que f é deformável sobre S^1 a uma aplicação livre de ponto fixo.

Finalmente, fazemos uma comparação entre o teorema principal deste trabalho e um resultado obtido por Koschorke. Uma vez que nós usamos o grupo fundamental, enquanto que Koschorke usa classes de homotopia de seções dadas por f , segue que esta comparação é muito interessante.

Palavras-chave: ponto fixo, fibrado com fibra toro, Reidemeister sobre S^1 .

Abstract

The main purpose of this work is to classify all fiber-preserving self-maps, f , of torus bundles, (MA, p, S^1, T) , over S^1 by the property of being able to deform them over S^1 into a fixed point free map by a fiberwise homotopy over S^1 . This is done by studying whether a given equation admits a solution in $\Pi_2(MA, MA - S^1) \triangleleft \Pi_1(MA - S^1)$. We'd like to emphasize that in order to find a presentation for $\Pi_1(MA - S^1)$, we use a technique that is different from the one found on [GPV-04].

Later we investigate the relationship between Reidemeister number over S^1 , $R_{S^1}(f)$, and deformability of f over S^1 into a fixed point free map. In particular if $R_{S^1}(f) < \infty$ and $(f|_T)_\#$ is different from identity then f is not deformable over S^1 into a fixed point free map. Also $R_{S^1}(f) = \infty$ does not imply that f is deformable over S^1 into a fixed point free map.

Finally we make a comparison between this work's main theorem and a result obtained by Koschorke. Once we use the fundamental group while Koschorke uses homotopy classes of sections given by f this comparison is of most interest.

Keywords: fixed point, torus bundle, Reidemeister over S^1 .

Índice

1	Resultados preliminares e gerais	1
1.1	Convenções e notações	1
1.2	Sobre fibrações e fibrados	2
1.3	Sobre grupos	7
1.4	Sobre ponto fixo	18
1.5	O problema geral e reduções	19
2	S-fibrados sobre S^1	23
2.1	Classificação dos S -fibrados sobre S^1	23
2.2	Reduções do problema geral	25
3	T-fibrados sobre S^1	29
3.1	Sobre o Toro	29
3.2	Classificação dos T -fibrados sobre S^1	32
3.3	Reduções do problema geral	34
3.4	A equação principal	45
3.5	Abelianização da equação principal	49
3.6	Resolução para T -fibrados sobre S^1	55
4	Classes e número de Reidemeister sobre B	79
4.1	Reidemeister sobre B	79
4.2	Reidemeister sobre S^1 para T -fibrados sobre S^1	81

4.3	$(f _T)_\#$ igual a identidade	83
5	Comparação entre resultados	97
5.1	Exposição inicial	97
5.2	Exposição para ponto fixo	99
5.3	Comparação	100
	Referências Bibliográficas	113

“Veni, vidi, vici”
Gaius Julius Caesar

Capítulo 1

Resultados preliminares e gerais

1.1 Convenções e notações

Em todo o trabalho, consideraremos I o intervalo compacto $[0, 1]$ e $\partial I = \{0, 1\}$.

Denotaremos a aplicação identidade de X por 1_X , uma aplicação constante igual a $x \in X$ por c_x e, por π_1 e π_2 , respectivamente, as projeções nos primeiro e segundo fatores (de $X \times Y$), isto é, $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, para todo $(x, y) \in X \times Y$. Dada uma aplicação $f : X \rightarrow X$, denotaremos, por $Fix(f)$, o conjunto dos pontos fixos de f , $\{x \in X : f(x) = x\}$. Dadas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$, denotaremos, por $C(f, g)$, o conjunto dos pontos de coincidência de f e g , $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Denotaremos, ainda, para todo $Y \subset X \times X$, a diagonal de Y , isto é, a intersecção entre Y e a diagonal de $X \times X$, simplesmente por Δ .

Denotaremos as relações entre espaços homeomorfos por $\approx$, espaços com o mesmo tipo de homotopia por $\sim$, espaços isomorfos por $\cong$ e aplicações homotópicas por $\simeq$. Se $H : X \times I \rightarrow Y$ é uma homotopia, denotaremos

$H_t := H(, t)$, para todo $t \in I$, e $H_0 \simeq H_1$, ou $H : H_0 \simeq H_1$. Denotaremos o grupo fundamental de um espaço topológico X , com ponto base $x_0 \in X$, por $\Pi_1(X, x_0)$ e, em geral, denotaremos o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em Y por $[X, Y]$.

Ainda, S denotará sempre uma superfície fechada.

1.2 Sobre fibrações e fibrados

Em toda a seção, E , B e F serão espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ será uma aplicação contínua.

Definição 1.2.1. (Problema do Levantamento) *Dadas duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow Y$, existe uma aplicação também contínua $h : X \rightarrow Z$ tal que $g \circ h = f$?*

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Se existe uma tal h , dizemos que f pode ser levantada a Z e h é um levantamento de f . Ainda, dizemos que h é um levantamento no diagrama acima.

Definição 1.2.2. (Problema da Extensão) *Dadas duas aplicações contínuas $g : Y \rightarrow X$ e $f : Y \rightarrow Z$, existe uma aplicação também contínua $h : X \rightarrow Z$ tal que $h \circ g = f$?*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ Z & & \end{array}$$

Se existe uma tal h , dizemos que f pode ser estendida a X e h é uma extensão de f . Ainda, dizemos que h é uma extensão no diagrama acima.

Definição 1.2.3. (Propriedade do levantamento de homotopia) *Seja X um espaço topológico. Dizemos que p satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia para X , se, dadas $F : X \times I \rightarrow B$ e $\tilde{f} : X \rightarrow E$ aplicações contínuas tais que $p \circ \tilde{f} = F(\cdot, 0)$, existe $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ aplicação contínua tal que $p \circ \tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}$.*

Considerando $\tilde{f} : X \times 0 \rightarrow E$, $\tilde{f}(x, 0) := \tilde{f}(x)$, para todo $x \in X$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Definição 1.2.4. *Dizemos que a tripla (E, p, B) , ou a aplicação $p : E \rightarrow B$, é uma fibração (de Hurewicz), se p satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia, para todo espaço topológico X .*

Chamamos E , B e $p^{-1}(b)$, com $b \in B$, respectivamente, de espaço total, espaço base e fibra sobre b da fibração. Denotamos por $(E, p, B)_F$, ou por $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, uma fibração $p : E \rightarrow B$, com $F = p^{-1}(b_0)$, para algum $b_0 \in B$.

Exemplo 1.2.5. *$(B \times F, \pi_1, B)$ é fibração, com fibra sobre b homeomorfa a F , para todo $b \in B$, chamada de fibração produto.*

De fato, sejam X um espaço topológico e $H : X \times I \rightarrow B$ e $\tilde{h} : X \rightarrow B \times F$ aplicações contínuas tais que $\pi_1 \circ \tilde{h} = H(\cdot, 0)$. Definamos $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E \times B$, $\tilde{H}(x, t) = (H(x, t), \pi_2 \circ \tilde{h}(x))$, para todo $(x, t) \in X \times I$, onde $\pi_2 : B \times F \rightarrow F$ é a projeção no segundo fator. Como $\tilde{H}$ é contínua, $\pi_1 \circ \tilde{H} = H$, $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{h}$ e X é qualquer, então π_1 é fibração.

Observemos que $\pi_1^{-1}(b) = b \times F \approx F$, para todo $b \in B$.

Exemplo 1.2.6. *Toda projeção de revestimento é fibração.*

Definição 1.2.7. *Sejam $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B$ fibrações. Dizemos que uma aplicação contínua $f : E \rightarrow E'$ preserva fibra sobre B , se $p' \circ f = p$.*

Observamos, daí, que $f(p^{-1}(b)) \subset p'^{-1}(b)$, para todo $b \in B$.

Dizemos que uma homotopia $H : E \times I \rightarrow E'$ preserva fibra sobre B , se $p' \circ H_t = p$, para todo $t \in I$. Ainda, uma aplicação contínua $f : E \rightarrow E'$ é deformável sobre B a uma aplicação contínua $g : E \rightarrow E'$ (por uma homotopia que preserva fibra sobre B), se existe $H : f \simeq g$ tal que $p' \circ H_t = p$, para todo $t \in I$.

Definição 1.2.8. Dizemos que a quádrupla (E, p, B, F) , ou a aplicação $p : E \rightarrow B$, ou o espaço E , é um fibrado (localmente trivial) sobre B , com fibra F , ou um F -fibrado sobre B , ou simplesmente um fibrado, se existem uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de B e, para cada $U \in \mathcal{C}$, um homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \varphi_U : U \times F \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator. Temos que $p^{-1}(b) \approx F$, para todo $b \in B$.

Chamamos E , B , F e p , respectivamente, de espaço total, espaço base, fibra e projeção do fibrado. Denotamos um fibrado (E, p, B, F) também por $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$.

Exemplo 1.2.9. $(B \times F, \pi_1, B, F)$ é fibrado, chamado de fibrado produto.

Com efeito, consideremos $\mathcal{C} = \{B\}$ e $\varphi_B = 1_{B \times F}$. Daí, $\pi_1 \circ 1_{B \times F} = \pi_1$.

Exemplo 1.2.10. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma projeção de revestimento, com X conexo, então, dado $x_0 \in X$, $(\tilde{X}, p, X, p^{-1}(x_0))$ é fibrado, com fibra discreta.

Definição 1.2.11. Dois fibrados, (E, p, B, F) e (E', p', B, F) , com mesma fibra e mesma base, são ditos equivalentes, ou isomorfos, se existe um homeomorfismo $h : E \rightarrow E'$ tal que $p' \circ h = p$. Ainda, dizemos que um fibrado é trivial, quando ele é equivalente ao fibrado produto.

Teorema 1.2.12. Se (E, p, B, F) é fibrado, com B paracompacto e Hausdorff, então p é fibração.

A demonstração encontra-se em [Sp-66]. ■

Exemplo 1.2.13. Sejam S uma superfície fechada e $\phi : S \rightarrow S$ um homeomorfismo. Definimos $M(\phi) := \frac{S \times I}{(x,0) \sim (\phi(x),1)}$ e $p : M(\phi) \rightarrow S^1$, $p(\langle x, t \rangle) = \langle t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times I$, onde $\langle x, t \rangle$ e $\langle t \rangle$ denotam, respectivamente, o elemento de $M(\phi)$ que contém (x, t) e o de $\frac{I}{0 \sim 1} = S^1$ que contém t . Então $(M(\phi), p, S^1, S)$ é fibrado. Ainda, como S^1 é compacta e Hausdorff, p é fibração.

Definição 1.2.14. Seja $f : X \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Definimos o pullback de f e p como sendo o espaço topológico $E^* := \{(e, x) \in E \times X : f(x) = p(e)\}$, junto com as aplicações contínuas $p^* := \pi_2 \circ i$ e $f^* := \pi_1 \circ i$, onde $i : E^* \hookrightarrow E \times X$ é a inclusão. Observamos que $p \circ f^* = f \circ p^*$ e o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{f^*} & E \\ p^* \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Frequentemente, subentendemos f^* e p^* e dizemos que E^* é o pullback de f e p . Denotamos E^* também por $E \times_B X$.

Observações 1.2.15. Temos que o diagrama acima (ou o pullback de f e p) tem a seguinte propriedade universal: para quaisquer aplicações contínuas $f' : E' \rightarrow E$ e $p' : E' \rightarrow X$ tais que $p \circ f' = f \circ p'$, existe uma única aplicação contínua $h : E' \rightarrow E^*$ tal que $f^* \circ h = f'$ e $p^* \circ h = p'$.

$$\begin{array}{ccccc} E' & & & & \\ & \searrow f' & & \searrow p & \\ & & E^* & \xrightarrow{f^*} & E \\ & \swarrow p' & \downarrow p^* & & \downarrow p \\ & & X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Definição 1.2.16. Seja $p : E \rightarrow B$ uma fibração. Uma seção, ou uma seção transversal, de p é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$.

Proposição 1.2.17. *Com as notações de 1.2.14, se p é fibração, então f se levanta a E se, e só se, p^* admite uma seção.*

($\implies$) Suponhamos que existe $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Então $(\tilde{f}(x), x) \in E^*$, para todo $x \in X$. Definamos $s : X \rightarrow E^*$, $s = (\tilde{f}, 1_X)$. Como s é uma aplicação contínua e $p^* \circ s = 1_X$, então s é uma seção de p^* .

($\impliedby$) Se existe uma aplicação contínua $s : X \rightarrow E^*$ tal que $p^* \circ s = 1_X$, então $f^* \circ s : X \rightarrow E$ é um levantamento de f a E . ■

Proposição 1.2.18. *Com as notações de 1.2.14, se p é fibração, então p^* também o é, chamada de fibração induzida de p por f , ou fibração pullback de p por f . Ainda, $p^{*-1}(x_0) \approx p^{-1}(f(x_0))$.*

De fato, sejam Y um espaço topológico e $G : Y \times I \rightarrow X$ e $\tilde{g} : Y \rightarrow E^*$ aplicações contínuas tais que $p^* \circ \tilde{g} = G(, 0)$. Como p é fibração e $p \circ (f^* \circ \tilde{g}) = f \circ G(, 0)$, então existe $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{H} = f \circ G$ e $\tilde{H}(, 0) = f^* \circ \tilde{g}$. Definamos $\tilde{G} : Y \times I \rightarrow E^*$, $\tilde{G} = (\tilde{H}, G)$. Como $p^* \circ \tilde{G} = G$ e $\tilde{G}(, 0) = \tilde{g}$, então p^* é fibração. Observemos que $p^{*-1}(x_0) = p^{-1}(f(x_0)) \times x_0 \approx p^{-1}(f(x_0))$. ■

Proposição 1.2.19. *Com as notações de 1.2.14, se $\xi = (E, p, B, F)$ é fibrado, então $f^*(\xi) := (E^*, p^*, X, F)$ também o é, chamado de fibrado induzido de ξ (ou de p) por f , ou fibrado pullback de ξ (ou de p) por f .*

A demonstração encontra-se em [Sp-66]. ■

Exemplo 1.2.20. *Com as notações de 1.2.13, sejam $\xi = (M(\phi), p, S^1, S)$ e $x_0 \in S$ tal que $\phi(x_0) = x_0$. Se $M(\phi) - S^1 := \frac{(S - x_0) \times I}{(x, 0) \sim (\phi(x), 1)}$ e $p| : M(\phi) - S^1 \rightarrow S^1$ é uma restrição de p , então $p^*(\xi) = (M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), \pi_2 \circ k, M(\phi), S)$ e $p|_*(\xi) = (M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1), \pi_2 \circ l, M(\phi) - S^1, S)$ são fibrados, com $k : M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \hookrightarrow M(\phi) \times M(\phi)$ e $l : M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1) \hookrightarrow M(\phi) \times (M(\phi) - S^1)$ inclusões. Ainda, como p é fibração, então $\pi_2 \circ k$ e $\pi_2 \circ l$ também o são.*

Lema 1.2.21. *A composta de fibrações também o é.*

Ainda, se $\epsilon_{01} : B^I \rightarrow B \times B$ é tal que $\epsilon_{01}(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$, para todo $\alpha \in B^I$, então ϵ_{01} é fibração e portanto $\epsilon_0 := \pi_1 \circ \epsilon_{01}$ e $\epsilon_1 := \pi_2 \circ \epsilon_{01}$ também o são.

A demonstração encontra-se em [Sp-66]. ■

Teorema 1.2.22. *Seja $f : X \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Consideremos a fibração induzida de ϵ_0 por f , $((B^I)^*, \epsilon_0^*, X)$, e uma seção desta, $s : X \rightarrow (B^I)^*$, $s(x) = (c_{f(x)}, x)$, para todo $x \in X$. Seja $p_f : (B^I)^* \rightarrow B$, $p_f = \epsilon_1 \circ f^*$. Então $p_f \circ s = f$, p_f é fibração (chamada de fibração que substitui f) e existe $H : s \circ \epsilon_0^* \simeq 1_{(B^I)^*}$ tal que $\epsilon_0^* \circ H_t = \epsilon_0^*$, para todo $t \in I$.*

A demonstração encontra-se em [Sp-66]. ■

Definição 1.2.23. *Seja $E_0 \subset E$. Dizemos que a quádrupla (E, E_0, p, B) é um par de fibrações (de Hurewicz), se (E, p, B) e $(E_0, p|_{E_0}, B)$ são fibrações (de Hurewicz) e existe uma aplicação contínua $\lambda : \overline{B} \rightarrow E^I$ tal que $\lambda(e_0, w) \in (E_0)^I$, para todo $e_0 \in E_0$, onde $\overline{B} := \{(e, w) \in E \times B^I : p(e) = w(0)\}$. Chamamos o par $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0)$, com $b \in B$, de fibra sobre b do par de fibrações.*

Dizemos que $(\xi := (E, p, B, F), \xi_0 := (E_0, p|_{E_0}, B, F_0))$ é um par de fibrados (localmente triviais), se ξ e ξ_0 são fibrados localmente triviais e existem uma cobertura aberta, $\mathcal{C}$, de B e, para cada $U \in \mathcal{C}$, um homeomorfismo de pares $\phi_U : (U \times F, U \times F_0) \rightarrow (p^{-1}(U), p_0^{-1}(U))$ tal que $p(\phi_U(b, z)) = b$, para todo $(b, z) \in U \times F$. Chamamos o par (F, F_0) de fibra do par de fibrados.

1.3 Sobre grupos

Em toda a seção, daremos resultados gerais e preliminares sobre grupos e, em particular, sobre o grupo fundamental.

Observações 1.3.1. *Seja $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ um homomorfismo de grupos. Temos que α determina uma ação (de grupos) de G sobre A , $g \cdot a = \alpha(g)(a)$, para todo $a \in A$, para todo $g \in G$. De fato, $e_G \cdot a = \alpha(e_G)(a) = 1_A(a) = a$, $y \cdot (x \cdot a) = (yx) \cdot a$ e $x \cdot (ab) = (x \cdot a)(x \cdot b)$, para todo $a, b \in A$, para todo $x, y \in G$.*

Agora, consideremos o produto cartesiano $K = G \times A$, com a operação binária $(x, a) \bullet (y, b) = (xy, y \cdot ab)$. Temos que $(K, \bullet)$ é um grupo.

Definição 1.3.2. *Com as notações de 1.3.1, dizemos que K é o produto semi-direto de G e A (com respeito a α). Denotamos K por $G \rtimes_\alpha A$, ou $A \rtimes G$, ou $G \rtimes A$. Observamos que, se $A := e_G \times A \triangleleft K$, $G := G \times e_A \leq K$, então $A \cap G = 1$ e $GA = K$.*

Teorema 1.3.3. *Sejam K , A e G grupos. Então existe $\alpha \in \text{Hom}(G, \text{Aut}(A))$ tal que $K \cong G \rtimes_\alpha A$ se, e somente se, existem A_1 e G_1 subgrupos de K tais que $A \cong A_1 \triangleleft K$ e $G \cong G_1 \leq K$, $A_1 \cap G_1 = 1$ e $K = G_1 A_1$.*

A demonstração encontra-se em [GL-05]. ■

Definição 1.3.4. *Dizemos que uma sequência exata curta, $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$, cinde, se ν admite inversa a direita.*

Proposição 1.3.5. *Uma sequência exata curta, $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$, cinde se, e somente se, $\tilde{G} \cong A \rtimes G$.*

($\implies$) Seja $\sigma : G \rightarrow \tilde{G}$ um homomorfismo de grupos tal que $\nu \circ \sigma = 1_G$. Definamos $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, $\alpha(g)(a) = \iota^{-1}(\sigma(g)\iota(a)\sigma(g)^{-1})$, para todo $g \in G$, para todo $a \in A$. Como α é homomorfismo, então $\tilde{G} \cong G \rtimes_\alpha A = A \rtimes G$. Em particular, temos também que $\tilde{G} = \text{Im}(\iota)\text{Im}(\sigma)$.

($\impliedby$) Temos, por 1.3.3, que $\tilde{G} = \text{Im}(\iota)H$, com $A \cong \text{Im}(\iota) \triangleleft \tilde{G}$, $G \cong H \leq \tilde{G}$ e $\text{Im}(\iota) \cap H = 1$. Temos que $\nu|_H : H \rightarrow G$ é isomorfismo. De fato, se $g \in G$, então, como ν é sobrejetor, existe $\iota(a)h \in \tilde{G}$, com $a \in A$, $h \in H$, tal que

$g = \nu(\iota(a)h) = \nu(h)$. Ainda, se $\nu(h) = \nu(h')$, então $hh'^{-1} \in \text{Im}(\iota) \cap H = 1$. Logo, $\nu|$ é isomorfismo. Definamos $\sigma : G \rightarrow \tilde{G}$, $\sigma(g) = \nu|^{-1}(g)$. Assim, $\nu \circ \sigma = 1_G$ e a sequência cinde. ■

Observações 1.3.6. *Se uma sequência exata curta, $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$, cinde, com $\tilde{G}$ abeliano, temos que $\tilde{G} \cong A \oplus G$.*

Definição 1.3.7. *Uma extensão de um grupo G por um grupo A é um grupo $\tilde{G}$ tendo um subgrupo normal N tal que $A \cong N$ e $\frac{\tilde{G}}{N} \cong G$. Dizemos, também, que uma sequência exata curta (de grupos), $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$, é uma extensão (de G por A).*

Observações 1.3.8. *Se $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1$ é uma extensão e $\langle X|R \rangle = G$ e $\langle Y|S \rangle = A$ são apresentações, definimos os seguintes conjuntos*

- $\tilde{Y} = \{\tilde{y} = \iota(y) | y \in Y\};$
- $\tilde{S} = \{\tilde{s} | s \in S\}$, onde, se $s = y_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots y_{i_k}^{\epsilon_{i_k}}$, então $\tilde{s} = \tilde{y}_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots \tilde{y}_{i_k}^{\epsilon_{i_k}};$
- $\tilde{X} = \langle \tilde{x} | x \in X \rangle$, onde $\tilde{G} = \bigcup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \tilde{x}\text{Im}\iota$ e $\nu(\tilde{x}) = x;$
- $\tilde{R} = \{\tilde{r}v_r^{-1} | r \in R\}$, onde, se $r = x_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \cdots x_{j_l}^{\epsilon_{j_l}}$, então $\tilde{r} = \tilde{x}_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} \cdots \tilde{x}_{j_l}^{\epsilon_{j_l}}$. Ainda, como $\tilde{r} \in \ker \nu = \text{Im}\iota$ e $\text{Im}\iota$ é gerado por $\tilde{Y}$, então existe v_r , palavra em $\tilde{Y}$, tal que $\tilde{r} = v_r;$ e
- $\tilde{T} = \{\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}w_{xy}^{-1} | x \in X, y \in Y\}$, onde, como $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x} \in \text{Im}\iota \triangleleft G$ e $\text{Im}\iota$ é gerado por $\tilde{Y}$, então existe w_{xy} , palavra em $\tilde{Y}$, tal que $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x} = w_{xy}.$

Teorema 1.3.9. *Dadas uma extensão*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1,$$

e apresentações $G = \langle X|R \rangle$ e $A = \langle Y|S \rangle$, então $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} | \tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T} \rangle$ é uma apresentação para $\tilde{G}$, onde $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{R}, \tilde{S}$ e $\tilde{T}$ são como acima.

A demonstração encontra-se em [J-97]. ■

Observações 1.3.10. Denotaremos uma apresentação $\langle X | R \rangle$ também por $\langle X | R = 1 \rangle$.

Observações 1.3.11. Sejam (E, p, B) uma fibração e $b_0 \in B$. Seja $n + 1 \in \mathbb{N}^*$. Dada $[g] \in \Pi_{n+1}(B, b_0)$, $g : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (B, b_0)$, consideramos $g : (\frac{S^n \times I}{S^n \times 0}, S^n \times 1) \rightarrow (B, b_0)$, $g(x, t) := g(tx)$, para todo $(x, t) \in S^n \times I$. Como p é fibração, existe $\tilde{G} : \frac{S^n \times I}{S^n \times 0} \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{G} = g$. Daí, $[\tilde{G}_1] \in \Pi_n(p^\perp(b_0))$ e definimos $\partial_{n+1} : \Pi_{n+1}(B) \rightarrow \Pi_n(p^\perp(b_0))$, $\partial_{n+1}([g]) = [\tilde{G}_1]$.

Teorema 1.3.12. Se $(E, p, B)_F$ é uma fibração, então existe uma sequência exata

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \Pi_{n+1}(B) &\xrightarrow{\partial_{n+1}} \Pi_n(F) \xrightarrow{i_\#} \Pi_n(E) \xrightarrow{p_\#} \Pi_n(B) \xrightarrow{\partial_n} \Pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \Pi_2(B) &\xrightarrow{\partial_2} \Pi_1(F) \xrightarrow{i_\#} \Pi_1(E) \xrightarrow{p_\#} \Pi_1(B) \xrightarrow{\partial_1} \Pi_0(F) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Pi_0(E) \xrightarrow{p_\#} \Pi_0(B), \end{aligned}$$

chamada de sequência de homotopia da fibração p , onde $i : F \hookrightarrow E$ é a inclusão e ∂_{n+1} é como acima, para todo $n + 1 \in \mathbb{N}^*$.

A demonstração encontra-se em [W-78]. ■

Teorema 1.3.13. Seja $(E, p, B)_F$ uma fibração. Se p admite uma seção s , então a seguinte sequência é exata curta

$$1 \longrightarrow \Pi_n(F) \xrightarrow{i_\#} \Pi_n(E) \xrightarrow{p_\#} \Pi_n(B) \longrightarrow 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Ainda, a sequência cinde e portanto

$$\begin{cases} \Pi_n(E) \cong \Pi_n(F) \oplus \Pi_n(B), & n \neq 1, \\ \Pi_1(E) \cong \Pi_1(F) \rtimes \Pi_1(B). \end{cases}$$

Como $p_{\#} \circ s_{\#} = 1$, então $p_{\#}$ é sobrejetor. Daí, pela sequência de homotopia da fibração p , $\partial \equiv 0$ e $i_{\#}$ é injetor, donde a sequência acima é exata curta, para todo $n \geq 1$. Em particular, como $s_{\#}$ é inversa a direita de $p_{\#}$, então a sequência acima cinde, para todo $n \geq 1$. Daí, como $\Pi_n(E)$ é abeliano, para todo $n \geq 2$, então, por 1.3.5 e 1.3.6, segue o resultado. ■

Corolário 1.3.14. *Com as notações de 1.2.20, se $x_1 \in S - x_0$ é tal que $\phi(x_1) = x_1$, $X_0 := \langle x_0, 0 \rangle$ e $X_1 := \langle x_1, 0 \rangle$, então*

(i) as seguintes sequências são exatas curtas

$$1 \longrightarrow \Pi_1(S, x_j) \xrightarrow{i_{\#}} \Pi_1(M(\phi), X_j) \xrightarrow{p_{\#}} \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) \longrightarrow 1, j \in \{0, 1\},$$

$$1 \longrightarrow \Pi_1(S, x_0) \xrightarrow{k_1\#} \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (X_0, X_1)) \xrightarrow{(\pi_2 \circ k)_{\#}} \Pi_1(M(\phi), X_1) \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \Pi_1(S, x_0) \xrightarrow{l_1\#} \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1), (X_0, X_1)) \xrightarrow{(\pi_2 \circ l)_{\#}} \Pi_1(M(\phi) - S^1, X_1) \longrightarrow 1,$$

onde $i(x) = \langle x, 0 \rangle$ e $k_1(x) = (\langle x, 0 \rangle, X_1) = l_1(x)$, para todo $x \in S$;

(ii) elas cindem e portanto existem isomorfismos

$$\begin{aligned} \Phi : \Pi_1(M(\phi)) &\longrightarrow \Pi_1(S) \rtimes \Pi_1(S^1), \\ \Phi_k : \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) &\longrightarrow \Pi_1(S) \rtimes \Pi_1(M(\phi)), \\ \Phi_l : \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1)) &\longrightarrow \Pi_1(S) \rtimes \Pi_1(M(\phi) - S^1); \end{aligned}$$

(iii) elas induzem as seguintes Π -ações

$$\begin{aligned} \bullet : \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(S) &\longrightarrow \Pi_1(S), & c \bullet \alpha &= c\alpha c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha), \\ \bullet : \Pi_1(M(\phi)) \times \Pi_1(S) &\longrightarrow \Pi_1(S), & \beta \bullet \alpha &= \beta\alpha\beta^{-1} = p_{\#}(\beta) \bullet \alpha = \phi_{\#}^{k_{\beta}}(\alpha), \\ \bullet : \Pi_1(M(\phi) - S^1) \times \Pi_1(S) &\longrightarrow \Pi_1(S), & \gamma \bullet \alpha &= \gamma\alpha\gamma^{-1} = p_{l_{\#}}(\gamma) \bullet \alpha, \end{aligned}$$

para algum $k_{\beta} \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, sejam $s_j : S^1 \rightarrow M(\phi)$, $k_2 : M(\phi) \rightarrow M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ e $l_2 : M(\phi) - S^1 \rightarrow M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1)$ tais que $s_j(\langle t \rangle) = \langle x_j, t \rangle$ e $k_2(\langle x, t \rangle) =$

$(\langle x_0, t \rangle, \langle x, t \rangle) = l_2(\langle x, t \rangle)$, com $j \in \{0, 1\}$. Denotemos s_j , $j \in \{0, 1\}$, simplesmente por s . Como s , k_2 e l_2 são seções respectivamente de p , $\pi_2 \circ k$ e $\pi_2 \circ l$, então por 1.3.13, as sequências são exatas curtas e cindem.

Observemos que $\Pi_1(M(\phi)) = \text{Im} i_{\#} \cdot \text{Im} s_{\#}$, $\Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) = \text{Im} k_{1\#} \cdot \text{Im} k_{2\#}$ e $\Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1)) = \text{Im} l_{1\#} \cdot \text{Im} l_{2\#}$. Temos que, se $\gamma \in \Pi_1(M(\phi))$, então $\gamma = i_{\#}(\alpha) s_{\#}(\beta)$, para algum $\alpha \in \Pi_1(S)$, para algum $\beta \in \Pi_1(S^1)$. Daí, $\beta = p_{\#} \circ s_{\#}(\beta) = p_{\#}(\gamma)$ e $\alpha = i_{\#}^{-1}(\gamma \cdot s_{\#} \circ p_{\#}(\gamma^{-1}))$, donde definimos $\Phi(\gamma) = (i_{\#}^{-1}(\gamma \cdot s_{\#} \circ p_{\#}(\gamma^{-1})), p_{\#}(\gamma))$, para todo $\gamma \in \Pi_1(M(\phi))$. Analogamente, se $\gamma \in \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi))$, $\Phi_k(\gamma) = (k_{1\#}^{-1}(\gamma \cdot k_{2\#} \circ (\pi_2 \circ k)_{\#}(\gamma^{-1})), (\pi_2 \circ k)_{\#}(\gamma))$ e, se $\gamma \in \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1))$, $\Phi_l(\gamma) = (l_{1\#}^{-1}(\gamma \cdot l_{2\#} \circ (\pi_2 \circ l)_{\#}(\gamma^{-1})), (\pi_2 \circ l)_{\#}(\gamma))$. Temos que são isomorfismos.

Sejam $\theta : \Pi_1(S^1) \rightarrow \text{Aut}(\Pi_1(S))$, $\theta_k : \Pi_1(M(\phi)) \rightarrow \text{Aut}(\Pi_1(S))$ e $\theta_l : \Pi_1(M(\phi) - S^1) \rightarrow \text{Aut}(\Pi_1(S))$ tais que $\theta(c)(\alpha) = i_{\#}^{-1}(s_{\#}(c) \cdot i_{\#}(\alpha) \cdot s_{\#}(c)^{-1})$, $\theta_k(\beta)(\alpha) = k_{1\#}^{-1}(k_{2\#}(\beta) \cdot k_{1\#}(\alpha) \cdot k_{2\#}(\beta)^{-1})$ e $\theta_l(\gamma)(\alpha) = l_{1\#}^{-1}(l_{2\#}(\gamma) \cdot l_{1\#}(\alpha) \cdot l_{2\#}(\gamma)^{-1})$. Como os homomorfismos envolvidos são injetores, então, simplificando a notação, podemos dizer que $c \cdot \alpha := \theta(c)(\alpha) = c\alpha c^{-1}$, $\beta \bullet \alpha := \theta_k(\beta)(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$ e $\gamma \bullet \alpha := \theta_l(\gamma)(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) & \xleftarrow{k_2} & M(\phi) \\
 & \nearrow k_1 & \downarrow \pi_1 \circ k & & \downarrow p \\
 S & \xrightarrow{i} & M(\phi) & \xleftarrow{s} & S^1 \\
 & \searrow l_1 & \uparrow \pi_1 \circ l & & \uparrow p_l \\
 & & M(\phi) \times_{S^1} (M(\phi) - S^1) & \xleftarrow{l_2} & M(\phi) - S^1
 \end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \theta(p_{\#}(\beta))(\alpha) &= i_{\#}^{-1}(s_{\#}(p_{\#}(\beta)) \cdot i_{\#}(\alpha) \cdot s_{\#}(p_{\#}(\beta))^{-1}) \\
 &= (\pi_1 \circ k \circ k_1)_{\#}^{-1}((\pi_1 \circ k \circ k_2)_{\#}(\beta) \cdot (\pi_1 \circ k \circ k_1)_{\#}(\alpha) \cdot (\pi_1 \circ k \circ k_2)_{\#}(\beta)^{-1}) \\
 &= k_{1\#}^{-1}(k_{2\#}(\beta) \cdot k_{1\#}(\alpha) \cdot k_{2\#}(\beta)^{-1}) \\
 &= \theta_k(\beta)(\alpha),
 \end{aligned}$$

para todo $\beta \in \Pi_1(M(\phi))$, para todo $\alpha \in \Pi_1(S)$. Logo, $\theta \circ p_{\#} = \theta_k$. Analogamente, $\theta \circ p_{l\#} = \theta_l$. Portanto, $\beta_{\bullet}\alpha = p_{\#}(\beta) \cdot \alpha$ e $\gamma \bullet \alpha = p_{l\#}(\gamma) \cdot \alpha$.
 Seja $\alpha \in \Pi_1(S)$ qualquer. Denotemos um representante de α novamente por α . Seja $c : I \rightarrow S^1$, $c(t) = \langle t \rangle$, para todo $t \in I$. Denotemos a classe do caminho fechado c também por $c \in \Pi_1(S^1)$. Notemos que c é gerador de $\Pi_1(S^1)$. Como $\langle x_0, t \rangle * \langle \alpha(t), 0 \rangle * \langle x_0, 1-t \rangle = \langle x_0, t \rangle * \langle \phi(\alpha(t)), 1 \rangle * \langle x_0, 1-t \rangle \simeq_{\partial I} \langle \phi(\alpha(t)), 0 \rangle$, isto é, $s_{\#}(c) \cdot i_{\#}(\alpha) \cdot s_{\#}(c)^{-1} = i_{\#}(\phi_{\#}(\alpha))$, e $i_{\#}$ e $s_{\#}$ são injetores, então, simplificando a notação, dizemos que $c\alpha c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha)$. Agora, seja $\beta \in \Pi_1(M(\phi))$ qualquer. Como c é gerador de $\Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, então $p_{\#}(\beta) = c^{k_{\beta}}$, para algum $k_{\beta} \in \mathbb{Z}$. Portanto, $p_{\#}(\beta) \cdot \alpha = p_{\#}(\beta)\alpha(p_{\#}(\beta))^{-1} = c^{k_{\beta}}\alpha c^{-k_{\beta}} = \phi_{\#}^{k_{\beta}}(\alpha)$. ■

Observações 1.3.15. *Pelo teorema de classificação de superfícies fechadas (isto é, compactas, sem bordo), temos que S é homeomorfa ou à esfera, S^2 , ou à soma conexa de n toros, $\#_n T$, ou à soma conexa de n planos projetivos, $\#_n \mathbb{R}P^2$, para algum $n \geq 1$. Ainda, se $\chi(S) \leq 0$, então ou $S \approx T_n := \#_n T$, ou $S \approx P_{n+1} := \#_{n+1} \mathbb{R}P^2$, para algum $n \geq 1$.
 Temos que $\Pi_1(T_n) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n | [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n] \rangle$ e $\Pi_1(P_n) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \alpha_1^2 \cdots \alpha_n^2 \rangle$, para todo $n \geq 1$, por [M-77], página 131.*

Proposição 1.3.16. *Com as notações de 1.3.14 e 1.3.15, se $\chi(S) \leq 0$ e $\langle c \rangle = \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, então $\Pi_1(M(\phi), X_1)$ e $\Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (X_0, X_1))$ admitem, respectivamente, as seguintes apresentações*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, c | [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n] = 1, \\ c\alpha_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha_i), c\beta_i c^{-1} = \phi_{\#}(\beta_i), i = 1, \dots, n \rangle, & \text{se } S \approx T_n, \\ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, c | \alpha_1^2 \cdots \alpha_{n+1}^2 = 1, \\ c\alpha_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha_i), i = 1, \dots, n+1 \rangle, & \text{se } S \approx P_{n+1}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} < \alpha'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_1, \dots, \beta'_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, c \\ |[\alpha'_1, \beta'_1] \cdots [\alpha'_n, \beta'_n] = 1, [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n] = 1 \\ c\alpha_i c^{-1} \phi_{\#}(\alpha_i)^{-1} = 1, c\beta_i c^{-1} \phi_{\#}(\beta_i)^{-1} = 1, \\ c\alpha'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha'_i), c\beta'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\beta'_i), \\ \alpha_j \alpha'_i \alpha_j^{-1} = \alpha'_i, \alpha_j \beta'_i \alpha_j^{-1} = \beta'_i, \\ \beta_j \alpha'_i \beta_j^{-1} = \alpha'_i, \beta_j \beta'_i \beta_j^{-1} = \beta'_i, i, j = 1, \dots, n >, \quad \text{se } S \approx T_n, \\ < \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, c | \alpha'_1{}^2 \cdots \alpha'_{n+1}{}^2 = 1, \\ \alpha_1{}^2 \cdots \alpha_{n+1}{}^2 = 1, c\alpha_i c^{-1} \phi_{\#}(\alpha_i)^{-1} = 1, \\ c\alpha'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha'_i), \alpha_j \alpha'_i \alpha_j^{-1} = \alpha'_i, i, j = 1, \dots, n+1 >, \quad \text{se } S \approx P_{n+1}, \end{array} \right.$$

onde α_i, β_i e α'_i, β'_i denotam, respectivamente, as imagens ou por $i_{\#}$, ou por $k_{1\#}$, ou por $k_{2\#} \circ i_{\#}$ (monomorfismos), de $\alpha_i, \beta_i \in \Pi_1(S, x_1)$ e $\alpha'_i, \beta'_i \in \Pi_1(S, x_0)$. Ainda, c denota a imagem ou por $s_{\#}$, ou por $k_{2\#} \circ s_{\#}$ (monomorfismos), de $c \in \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle)$.

Demonstraremos apenas para $n = 1$, pois a demonstração para $n > 1$ é completamente análoga, e por conseguinte omitiremos o sub-índice i dos geradores. Por [GPV-09], temos o resultado, quando $S \approx P_2$. Assim, nos resta mostrar o resultado apenas quando $S \approx T_1 = T$.

Como, por 1.3.14, $1 \longrightarrow \Pi_1(T, x_1) \xrightarrow{i_{\#}} \Pi_1(M(\phi), X_1) \xrightarrow{p_{\#}} \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) \longrightarrow 1$ é exata curta e cinde, então, por 1.3.9 e 1.3.15, é possível determinarmos uma apresentação para a extensão $\Pi_1(M(\phi), X_1)$. De fato, com as notações de 1.3.8, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \{s_{\#}(c)\} \\ \tilde{Y} &= \{i_{\#}(\alpha), i_{\#}(\beta)\}, \\ \tilde{R} &= \emptyset, \\ \tilde{S} &= \{[i_{\#}(\alpha), i_{\#}(\beta)]\}, \\ \tilde{T} &= \{s_{\#}(c)i_{\#}(\alpha)s_{\#}(c)^{-1}w_{c\alpha}^{-1}, s_{\#}(c)i_{\#}(\beta)s_{\#}(c)^{-1}w_{c\beta}^{-1}\}, \end{aligned}$$

donde, como $s_{\#}(c)i_{\#}(\alpha)s_{\#}(c)^{-1} = i_{\#}(\phi_{\#}(\alpha)) =: w_{c\alpha}$ e $s_{\#}(c)i_{\#}(\beta)s_{\#}(c)^{-1} = i_{\#}(\phi_{\#}(\beta)) =: w_{c\beta}$, pela demonstração de 1.3.14, então, simplificando a nota-

ção, segue o resultado, isto é, $\Pi_1(M(\phi), X_1) = \langle \alpha, \beta, c \mid [\alpha, \beta] = 1, c\alpha c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha), c\beta c^{-1} = \phi_{\#}(\beta) \rangle$.

Do mesmo modo, temos, por 1.3.14, que a seguinte sequência é exata curta e cinde

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T, x_0) \xrightarrow{k_1\#} \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (X_0, X_1)) \xrightarrow{(\pi_2 \circ k)\#} \Pi_1(M(\phi), X_1) \longrightarrow 1,$$

donde, por 1.3.9 e 1.3.15, é possível determinarmos uma apresentação para a extensão $\Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (X_0, X_1))$. Com efeito, usando as notações de 1.3.8, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \{(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha), (k_2 \circ i)_{\#}(\beta), (k_2 \circ s)_{\#}(c)\} \\ \tilde{Y} &= \{k_{1\#}(\alpha'), k_{1\#}(\beta')\}, \\ \tilde{R} &= \{[(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha), (k_2 \circ i)_{\#}(\beta)]v_{\alpha\beta}^{-1}, \\ &\quad (k_2 \circ s)_{\#}(c)(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha)(k_2 \circ s)_{\#}(c)^{-1}(k_2 \circ i)_{\#}(\phi_{\#}(\alpha))^{-1}v_{c\alpha}^{-1}, \\ &\quad (k_2 \circ s)_{\#}(c)(k_2 \circ i)_{\#}(\beta)(k_2 \circ s)_{\#}(c)^{-1}(k_2 \circ i)_{\#}(\phi_{\#}(\beta))^{-1}v_{c\beta}^{-1}\}, \\ \tilde{S} &= \{[k_{1\#}(\alpha'), k_{1\#}(\beta')]\}, \\ \tilde{T} &= \{(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha)k_{1\#}(\alpha')(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha)^{-1}w_{\alpha\alpha'}^{-1}, (k_2 \circ i)_{\#}(\alpha)k_{1\#}(\beta')(k_2 \circ i)_{\#}(\alpha)^{-1}w_{\alpha\beta'}^{-1}, \\ &\quad (k_2 \circ i)_{\#}(\beta)k_{1\#}(\alpha')(k_2 \circ i)_{\#}(\beta)^{-1}w_{\beta\alpha'}^{-1}, (k_2 \circ i)_{\#}(\beta)k_{1\#}(\beta')(k_2 \circ i)_{\#}(\beta)^{-1}w_{\beta\beta'}^{-1}, \\ &\quad (k_2 \circ s)_{\#}(c)k_{1\#}(\alpha')(k_2 \circ s)_{\#}(c)^{-1}w_{c\alpha'}^{-1}, (k_2 \circ s)_{\#}(c)k_{1\#}(\beta')(k_2 \circ s)_{\#}(c)^{-1}w_{c\beta'}^{-1}\}. \end{aligned}$$

Desde que $[i_{\#}(\alpha), i_{\#}(\beta)] = 1$, $s_{\#}(c)i_{\#}(\alpha)s_{\#}(c)^{-1} = i_{\#}(\phi_{\#}(\alpha))$, $s_{\#}(c)i_{\#}(\beta)s_{\#}(c)^{-1} = i_{\#}(\phi_{\#}(\beta))$ e $k_{2\#}$ é homomorfismo, então $v_{\alpha\beta} = v_{c\alpha} = v_{c\beta} := 1$.

De agora em diante, nesta demonstração, denotaremos caminhos representantes de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ pelas mesmas letras. Como

$$\begin{aligned} (\langle x_0, t \rangle, \langle x_1, t \rangle) * (\langle \alpha'(t), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle) * (\langle x_0, 1-t \rangle, \langle x_1, 1-t \rangle) &= \\ (\langle x_0, t \rangle, \langle x_1, t \rangle) * (\langle \phi(\alpha'(t)), 1 \rangle, \langle x_1, 1 \rangle) * (\langle x_0, 1-t \rangle, \langle x_1, 1-t \rangle) &\simeq_{\partial I} \\ (\langle \phi(\alpha'(t)), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle), & \end{aligned}$$

segue que $(k_2 \circ s \circ c) * (k_1 \circ \alpha') * (k_2 \circ s \circ c)^{-1} \simeq_{\partial I} k_1 \circ \phi \circ \alpha'$ e portanto $w_{c\alpha'} := k_{1\#}(\phi_{\#}(\alpha'))$. Do mesmo modo, $w_{c\beta'} := k_{1\#}(\phi_{\#}(\beta'))$.

Desde que

$$\begin{aligned}
(\langle x_0, 0 \rangle, \langle \alpha(t), 0 \rangle) * (\langle \alpha'(t), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle) * (\langle x_0, 0 \rangle, \langle \alpha(1-t), 0 \rangle) &= \\
(\langle \alpha'(t), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle) * (\langle x_0, 0 \rangle, \langle \alpha(t), 0 \rangle) * (\langle x_0, 0 \rangle, \langle \alpha(1-t), 0 \rangle) &\simeq_{\partial I} \\
(\langle \alpha'(t), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle) * (\langle x_0, 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle) &\simeq_{\partial I} \\
(\langle \alpha'(t), 0 \rangle, \langle x_1, 0 \rangle), &
\end{aligned}$$

então $(k_2 \circ i \circ \alpha) * (k_1 \circ \alpha') * (k_2 \circ i \circ \alpha)^{-1} \simeq_{\partial I} k_1 \circ \alpha'$ e portanto $w_{\alpha\alpha'} := k_{1\#}(\alpha')$. De maneira análoga, $w_{\beta\alpha'} := k_{1\#}(\alpha')$ e $w_{\alpha\beta'} := k_{1\#}(\beta') =: w_{\beta\beta'}$.

Finalmente, temos que, simplificando a notação, segue o resultado, isto é,

$$\begin{aligned}
\Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi), (X_0, X_1)) = & \langle \alpha', \beta', \alpha, \beta, c | [\alpha', \beta'] = 1, \\
& [\alpha, \beta] = 1, c\alpha c^{-1}\phi_{\#}(\alpha)^{-1} = 1, c\beta c^{-1}\phi_{\#}(\beta)^{-1} = 1, \\
& \alpha\alpha'\alpha^{-1} = \alpha', \alpha\beta'\alpha^{-1} = \beta', \\
& \beta\alpha'\beta^{-1} = \alpha', \beta\beta'\beta^{-1} = \beta', \\
& c\alpha'c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha'), c\beta'c^{-1} = \phi_{\#}(\beta') \rangle.
\end{aligned}$$

■

Observações 1.3.17. Com as notações de 1.3.16, temos, de forma análoga, que $\Pi_1(M(\phi), X_0)$ admite a seguinte apresentação

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_n, \beta'_1, \dots, \beta'_n, c | [\alpha'_1, \beta'_1] \cdots [\alpha'_n, \beta'_n] = 1, \\ c\alpha'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha'_i), c\beta'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\beta'_i), i = 1, \dots, n \rangle, \quad \text{se } S \approx T_n, \\ \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{n+1}, c | \alpha'_1{}^2 \cdots \alpha'_{n+1}{}^2 = 1, \\ c\alpha'_i c^{-1} = \phi_{\#}(\alpha'_i), i = 1, \dots, n+1 \rangle, \quad \text{se } S \approx P_{n+1}. \end{array} \right.$$

Definição 1.3.18. Sejam Π um grupo e $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que um espaço topológico X é $K(\Pi, n)$, ou é um espaço de Eilenberg-Mac Lane de tipo (Π, n) , se $\Pi_i(X) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}^* - n$, e $\Pi_n(X) \cong \Pi$.

Observamos que Π deve ser abeliano, se $n \neq 1$.

Exemplo 1.3.19. Temos que S^1 é $K(\mathbb{Z}, 1)$ e $\bigvee_n S^1$ é $K(*_n \mathbb{Z}, 1)$.

Se S é uma superfície fechada tal que $\chi(S) \leq 0$, então S é $K(\Pi, 1)$.

Se $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração tal que F e B são $K(\Pi, 1)$, então E também o é.

Com as notações de 1.2.13, se $\chi(S) \leq 0$, então $M(\phi)$ é $K(\Pi, 1)$.

Com as notações de 1.2.20, se $\chi(S) \leq 0$, então $M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)$ é $K(\Pi, 1)$.

Proposição 1.3.20. *Se S é uma superfície fechada tal que $\chi(S) \leq 0$, então $\Pi_n(S, S - pt) = 1$, para todo $n \geq 3$, e a seguinte sequência é exata curta*

$$1 \longrightarrow \Pi_2(S, S - pt) \longrightarrow \Pi_1(S - pt) \xrightarrow{j\#} \Pi_1(S) \longrightarrow 1,$$

onde $j: S - pt \hookrightarrow S$ é a inclusão.

Com efeito, consideremos a sequência de homotopia do par $(S, S - pt)$,

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \Pi_n(S - pt) \longrightarrow \Pi_n(S) \longrightarrow \Pi_n(S, S - pt) \longrightarrow \Pi_{n-1}(S - pt) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \Pi_2(S) \longrightarrow \Pi_2(S, S - pt) \longrightarrow \Pi_1(S - pt) \xrightarrow{j\#} \Pi_1(S) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Como $S - pt$ é $K(\Pi, 1)$ e S é $K(\frac{\Pi}{R_S}, 1)$, para algum $R_S \triangleleft \Pi$, segue, em particular, que $\Pi_2(S) = 1$ e que $j\#$ é sobrejetor, donde a sequência exata longa acima se quebra e $1 \longrightarrow \Pi_2(S, S - pt) \longrightarrow \Pi_1(S - pt) \xrightarrow{j\#} \Pi_1(S) \longrightarrow 1$ é uma sequência exata curta. Ainda, uma vez que $\Pi_{n-1}(S - pt) = 1$ e $\Pi_n(S) = 1$, para todo $n \geq 3$, segue que $\Pi_n(S, S - pt) = 1$, para todo $n \geq 3$. ■

Teorema 1.3.21. (Critério para 2-extensibilidade) *Sejam (X, L) um complexo CW relativo, $(\tilde{X}, p, X)_F$ uma fibração e $i: F \hookrightarrow \tilde{X}$ a inclusão. Se X , L e F são conexos por caminhos, então uma seção $u: L \rightarrow \tilde{L}$ pode ser estendida a uma seção u' sobre o 2-esqueleto $X_2 = L \cup X^2$ exatamente quando $i\#: \Pi_1(F) \rightarrow \Pi_1(\tilde{X})$ é monomorfismo e quando existe um homomorfismo θ que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\tilde{L}) & \longrightarrow & \Pi_1(\tilde{X}) \\ \uparrow & & \uparrow \theta \\ \Pi_1(L) & \longrightarrow & \Pi_1(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow p\# \\ \longrightarrow \Pi_1(X) \end{array}$$

$\xrightarrow{i_{\Pi_1(X)}}$

A demonstração encontra-se em [Ba-77]. ■

Corolário 1.3.22. *Sejam X um complexo CW, $(\tilde{X}, p, X)_F$ uma fibração e $i : F \hookrightarrow \tilde{X}$ a inclusão. Se X e F são conexos por caminhos, então existe uma seção u' sobre o 2-esqueleto $X_2 = L \cup X^2$ exatamente quando $i_\# : \Pi_1(F) \rightarrow \Pi_1(\tilde{X})$ é monomorfismo e quando existe um homomorfismo θ que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\tilde{X}) & & \\ \theta \uparrow & \searrow p_\# & \\ \Pi_1(X) & \xrightarrow{i_{\Pi_1(X)}} & \Pi_1(X) \end{array}$$

Segue diretamente do teorema acima. ■

1.4 Sobre ponto fixo

A seguinte proposição nos dá uma caracterização de quando uma auto-aplicação contínua f é livre de ponto fixo, isto é, $Fix(f) = \emptyset$.

Proposição 1.4.1. *Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então $Fix(f) = \emptyset$ se, e somente se, existe uma aplicação contínua $\varphi : X \rightarrow X \times X \setminus \Delta$ tal que $(1_X, f) = i \circ \varphi$, onde $i : X \times X \setminus \Delta \hookrightarrow X \times X$ é a inclusão.*

($\implies$) Se $Fix(f) = \emptyset$, então $f(x) \neq x$, para todo $x \in X$ e portanto $(x, f(x)) \in X \times X \setminus \Delta$, para todo $x \in X$. Definamos $\varphi : X \rightarrow X \times X \setminus \Delta$, $\varphi(x) = (x, f(x))$, para todo $x \in X$.

($\impliedby$) Se existe $\varphi : X \rightarrow X \times X \setminus \Delta$ tal que $(1_X, f) = i \circ \varphi$, então $f(x) = \pi_2 \circ i \circ \varphi(x) \neq \pi_1 \circ i \circ \varphi(x) = x$, para todo $x \in X$, isto é, $Fix(f) = \emptyset$. ■

Neste contexto, uma pergunta que surge naturalmente agora é a de quando uma auto-aplicação contínua f é deformável a uma aplicação contínua livre de

ponto fixo. A seguinte proposição vem para responder tal pergunta, quando X é uma variedade topológica.

Proposição 1.4.2. *Sejam X uma variedade topológica e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então existe uma aplicação contínua $f' : X \rightarrow X$ tal que $f \simeq f'$ e $\text{Fix}(f') = \emptyset$ se, e somente se, existe uma aplicação contínua $\varphi' : X \rightarrow X \times X \setminus \Delta$ tal que $(1_X, f) \simeq i \circ \varphi'$, onde $i : X \times X \setminus \Delta \hookrightarrow X \times X$ é a inclusão.*

($\implies$) Se existe $f' : X \rightarrow X$ tal que $f \simeq f'$ e $\text{Fix}(f') = \emptyset$, então basta tomarmos $\varphi'(x) = (x, f'(x))$, para todo $x \in X$. Com efeito, $(x, f'(x)) \in X \times X \setminus \Delta$, para todo $x \in X$ e $(1_X, f) \simeq (1_X, f') = i \circ \varphi'$.

($\impliedby$) Se existe $\varphi' : X \rightarrow X \times X \setminus \Delta$ tal que $(1_X, f) \simeq i \circ \varphi'$, então $\varphi'_j := \pi_j \circ i \circ \varphi'$, $j = 1, 2$, são aplicações contínuas tais que $(1_X, f) \simeq (\varphi'_1, \varphi'_2)$ e $\varphi'_1(x) \neq \varphi'_2(x)$, para todo $x \in X$. Segue do lema abaixo que existe $F' : \varphi'_2 \simeq f'$ tal que $\text{Fix}(f') = C(1_X, f') = C(\varphi'_1, \varphi'_2) = \emptyset$. Logo, existe $f' : X \rightarrow X$ tal que $f \simeq \varphi'_2 \simeq f'$ e $\text{Fix}(f') = \emptyset$. ■

Lema 1.4.3. *Sejam X um espaço topológico, Y uma variedade topológica e $f, g, f'', g'' : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que $(G, F) : (g, f) \simeq (g'', f'')$. Então existe $F' : f'' \simeq f'$ tal que $C(G_{1-t}, F'_t) = C(g'', f'')$, para todo $t \in I$. Em particular, $C(g, f') = C(g'', f'')$.*

A demonstração encontra-se em [Br-72]. ■

1.5 O problema geral e reduções

Sejam E, B espaços topológicos, $p : E \rightarrow B$ uma fibração e $f : E \rightarrow E$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre B . Quando f é deformável sobre B a uma aplicação contínua livre de ponto fixo $g : E \rightarrow E$ (por uma

homotopia que preserva fibra sobre B)?

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f,g} & E \\ p \downarrow & \swarrow p & \\ B & & \end{array}$$

Observações 1.5.1. Temos que E. Fadell e S. Husseini, em [FH-81], consideram este problema para fibrados $F \rightarrow M \xrightarrow{p} B$, com fibra F , espaço base B e espaço total M sendo variedades fechadas.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre B . Sejam $(M \times_B M, p^*, M, F)$ o fibrado pullback de p por p , $(E_B(M), q, M \times_B M, \mathcal{F})$ o fibrado que substitui i (do mesmo modo que em 1.2.22) e $(E_B(f), q^*, M, \mathcal{F})$ o fibrado pullback de q por $(1_M, f)$, onde $i : M \times_B M \setminus \Delta \hookrightarrow M \times_B M$ é a inclusão. Assim,

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{F} & & \mathcal{F} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & E_B(f) & \xrightarrow{(1_M, f)^*} & E_B(M) & \\ \sigma \nearrow & \downarrow q^* & & \downarrow q & \\ M & \xrightarrow{1_M} & M & \xrightarrow{(1_M, f)} & M \times_B M. \end{array}$$

Teorema 1.5.2. Com as notações de 1.5.1, a aplicação contínua $f : M \rightarrow M$ é deformável sobre B a uma aplicação contínua livre de ponto fixo se, e somente se, existe um levantamento σ no diagrama acima.

($\implies$) Seja $H : M \times I \rightarrow M$, $H : H_0 \simeq f$ tal que $p \circ H_t = p$ e $\text{Fix}(H_0) = \emptyset$. Definamos $\sigma : M \rightarrow E_B(f)$, $\sigma(x) = ((c_x, H(x, \cdot)), x)$, para todo $x \in M$. De fato, $p(c_x(t)) = p(x) = p(H_t(x)) = p(H(x, t))$, $c_x(0) = x \neq H_0(x) = H(x, 0)$ e $q(c_x, H(x, \cdot)) = (c_x(1), H(x, 1)) = (x, f(x)) = (1_M, f)(x)$, para todo $(x, t) \in M \times I$ e segue o resultado.

($\impliedby$) Se existe um levantamento σ no diagrama acima, isto é, q^* admite uma seção σ , então $\sigma(x) = ((x_1, x_2), x)$, com $(x_1, x_2) : I \rightarrow M \times_B M$ um caminho tal

que $x_1(0) = x_2(0)$ e $(x_1(1), x_2(1)) = (x, f(x))$, para todo $x \in M$. Definamos $\varsigma : M \times I \rightarrow M \times_B M$, $\varsigma(x, t) = (x_1(t), x_2(t))$, para todo $(x, t) \in M \times I$. Assim, $\varsigma : (g'', f'') \simeq (1_M, f)$, onde $(g'', f'')(x) = (x_1(0), x_2(0))$, para todo $x \in M$. Daí, pela proposição 2.4 ([FH-81], página 55), existe uma homotopia $H : H_0 \simeq f$ que preserva fibra sobre B , com $Fix(H_0) = C(1_M, H_0) = \emptyset$, donde segue o resultado. ■

Proposição 1.5.3. *Com as notações de 1.5.1, $\Pi_{n-1}(\mathcal{F}) \cong \Pi_n(F, F - pt)$, para todo $n - 1 \geq 1$.*

De fato, sejam $M_\Delta := M \times_B M \setminus \Delta$ e $i : M_\Delta \hookrightarrow M \times_B M$ a inclusão. Consideremos, respectivamente, as seqüências de homotopia da fibração q e de homotopia do par $(M \times_B M, M_\Delta)$,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \xrightarrow{q\#} \Pi_n(M \times_B M) & \rightarrow & \Pi_{n-1}(\mathcal{F}) & \rightarrow & \Pi_{n-1}(E_B(M)) & \xrightarrow{q\#} & \Pi_{n-1}(M \times_B M) \rightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \varphi_{n-1} \downarrow & & \cong \downarrow & & \parallel \\ \cdots \xrightarrow{i\#} \Pi_n(M \times_B M) & \rightarrow & \Pi_n(M \times_B M, M_\Delta) & \rightarrow & \Pi_{n-1}(M_\Delta) & \xrightarrow{i\#} & \Pi_{n-1}(M \times_B M) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Como q é a fibração que substitui i (ver 1.2.22), temos, em particular, que $E_B(M) \sim M_\Delta$, donde segue o isomorfismo no diagrama acima. Daí, temos, também, que φ_{n-1} é isomorfismo, para todo $n - 1 \geq 1$. Ainda, como, pela proposição 2.1 ([FH-81], página 53), $(M \times_B M, M_\Delta, \pi_1 \circ k, M)$ é um par de fibrados, com fibra $(F, F - pt)$, então $\Pi_n(M \times_B M, M_\Delta) \cong \Pi_n(F, F - pt)$, para todo $n \geq 1$. Portanto, $\Pi_{n-1}(\mathcal{F}) \cong \Pi_n(F, F - pt)$, para todo $n - 1 \geq 1$.

$$\begin{array}{ccc} F - pt \approx pt \times (p^{-1}(p(pt)) - pt) & \hookrightarrow & pt \times p^{-1}(p(pt)) \approx F \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\Delta & \xrightarrow{i} & M \times_B M \\ & \searrow (\pi_1 \circ k)|_{M_\Delta} & \swarrow \pi_1 \circ k \\ & M & \end{array}$$

■

Capítulo 2

S -fibrados sobre S^1

Lembremos que, em todo o trabalho, S denota uma superfície fechada.

2.1 Classificação dos S -fibrados sobre S^1

Lema 2.1.1. *Se x_0 e y_0 são pontos interiores de uma n -variedade conexa M , então existem um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(x_0) = y_0$ e uma isotopia entre 1_M e h .*

Segue diretamente da demonstração do lema 6.4, [V-94], página 150.

Proposição 2.1.2. *Sejam $\phi : S \rightarrow S$ um homeomorfismo e $x_0 \in S$. Então existem um homeomorfismo que preserva ponto base $\psi : (S, x_0) \rightarrow (S, x_0)$ e uma isotopia entre ϕ e ψ .*

Com efeito, seja $\phi(x_0) = y_0 \in S$. Por 2.1.1, existem um homeomorfismo $h : S \rightarrow S$ tal que $h(y_0) = x_0$ e uma isotopia $H : 1_S \simeq h$. Como ϕ é homeomorfismo, então $H \circ (\phi \times 1_I)$ é uma isotopia entre ϕ e $h \circ \phi$. Desde que $h \circ \phi(x_0) = x_0$, basta tomarmos $\psi = h \circ \phi$. ■

Teorema 2.1.3. *Sejam $\phi_1, \phi_2 : S \rightarrow S$ homeomorfismos. Então $M(\phi_1)$ é homeomorfo a $M(\phi_2)$ por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 se, e só se, ϕ_1 é isotópico a um conjugado de ϕ_2 .*

Consideremos $p_i : M(\phi_i) \rightarrow S^1$, $p_i(\langle x, t \rangle) = \langle t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times I$.
 $(\Leftarrow)$ Suponhamos que ϕ_1 e $h \circ \phi_2 \circ h^{-1}$ são isotópicas, onde $h : S \rightarrow S$ é um homeomorfismo. Daí, existe $G : S \times I \rightarrow S$ tal que $G(\cdot, 0) = \phi_1$, $G(\cdot, 1) = h \circ \phi_2 \circ h^{-1}$ e $G_t = G(\cdot, t) : S \rightarrow S$ é homeomorfismo, para todo $t \in I$. Notemos que $(h^{-1} \circ G_1) \circ \phi_1 = (h^{-1} \circ (h \circ \phi_2 \circ h^{-1})) \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h^{-1} \circ \phi_1 = \phi_2 \circ (h^{-1} \circ G_0)$. Definamos $g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$, $g(\langle x, t \rangle) = \langle h^{-1} \circ G(x, t), t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times I$. Temos que g é bem definida. De fato, $g(\langle x, 0 \rangle) = \langle h^{-1} \circ G(x, 0), 0 \rangle = \langle \phi_2 \circ (h^{-1} \circ G_0)(x), 1 \rangle = \langle (h^{-1} \circ G_1) \circ \phi_1(x), 1 \rangle = \langle h^{-1} \circ G(\phi_1(x), 1), 1 \rangle = g(\langle \phi_1(x), 1 \rangle)$. Ainda, g é homeomorfismo, pois h e G_t o são, para todo $t \in I$.

$(\Rightarrow)$ Seja $g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ um homeomorfismo tal que $p_2 \circ g = p_1$. Então existe $H : S \times I \rightarrow S$ aplicação contínua tal que $H_t := H(\cdot, t)$ é homeomorfismo, para todo $t \in I$, e $g(\langle x, t \rangle) = \langle H(x, t), t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times I$. Como $\langle \phi_2 \circ H_0(x), 1 \rangle = \langle H(x, 0), 0 \rangle = g(\langle x, 0 \rangle) = g(\langle \phi_1(x), 1 \rangle) = \langle H(\phi_1(x), 1), 1 \rangle = \langle H_1 \circ \phi_1(x), 1 \rangle$, então $\phi_2 \circ H_0 = H_1 \circ \phi_1$, donde $\phi_1 \simeq H_0^{-1} \circ \phi_2 \circ H_0$ e portanto ϕ_1 é isotópico a um conjugado de ϕ_2 . ■

Corolário 2.1.4. *Os S -fibrados sobre S^1 são classificados a menos de homeomorfismo (que preserva fibra sobre S^1) pelas classes de conjugação das classes de isotopia dos homeomorfismos que preservam ponto base.*

Dados $\phi_1, \phi_2 : S \rightarrow S$ homeomorfismos e $x_0 \in S$, consideremos, usando a proposição 2.1.2, homeomorfismos $\psi_1, \psi_2 : (S, x_0) \rightarrow (S, x_0)$ tais que $\phi_i \simeq \psi_i, i = 1, 2$. Pelo teorema 2.1.3, $M(\psi_1) \approx M(\phi_1) \approx M(\phi_2) \approx M(\psi_2)$ por homeomorfismos que preservam fibra sobre S^1 se, e só se, ψ_1 é isotópico a um conjugado de ψ_2 . ■

2.2 Reduções do problema geral

Em toda a seção, sejam $(M(\phi), p, S^1, S)$ um S -fibrado sobre S^1 e $f : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ uma auto-aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 . Quando f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo $g : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1)?

$$\begin{array}{ccc} M(\phi) & \xrightarrow{f,g} & M(\phi) \\ p \downarrow & \swarrow p & \\ S^1 & & \end{array}$$

Seja $f_t : S \rightarrow S$, $f_t(x) := y$, se $f(\langle x, t \rangle) = \langle y, t \rangle$, com $x, y \in S$, $t \in I$. Desde que $\langle y, t \rangle = \langle z, t \rangle$ se, e só se, $y = z$, f_t é bem definida, para todo $t \in I$.

Proposição 2.2.1. *Se $f : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ é uma aplicação contínua sobre S^1 , então $\phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$ é homotópica a f_0 . Reciprocamente, se $f_0 : S \rightarrow S$ é uma aplicação contínua tal que $\phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$ é homotópica a f_0 , então existe uma aplicação contínua $f : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ sobre S^1 tal que $f(\langle x, 0 \rangle) = \langle f_0(x), 0 \rangle$.*

($\implies$) Como, para todo $x \in S$, $\langle x, 0 \rangle = \langle \phi(x), 1 \rangle$, então $\langle f_0(x), 0 \rangle = f(\langle x, 0 \rangle) = f(\langle \phi(x), 1 \rangle) = \langle f_1 \circ \phi(x), 1 \rangle = \langle \phi^{-1} \circ f_1 \circ \phi(x), 0 \rangle$ e portanto $f_1 = \phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$.

Observemos que, como f é contínua, $\langle x, t \rangle = \{(x, t)\}$, se $t \in I \setminus \partial I$, e $p \circ f = p$, então existe uma aplicação contínua $g : S \times (I \setminus \partial I) \rightarrow S$ tal que $f(\langle x, t \rangle) = \langle g(x, t), t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times (I \setminus \partial I)$. Observemos que $G : S \times I \rightarrow S$,

$$G(x, t) = \begin{cases} f_0(x), & \text{se } t = 0, \\ g(x, t), & \text{se } t \in I \setminus \partial I, \\ f_1(x), & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

é uma extensão contínua de g . Daí, $G : f_0 \simeq \phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$.

($\impliedby$) Consideremos $H : S \times I \rightarrow S$, $H : f_0 \simeq \phi \circ f_0 \circ \phi^{-1}$. Definamos

$f : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$, $f(\langle x, t \rangle) = \langle H(x, t), t \rangle$, para todo $(x, t) \in S \times I$. Daí, f é bem definida, contínua e tal que $p \circ f = p$ e $f(\langle x, 0 \rangle) = \langle H(x, 0), 0 \rangle = \langle f_0(x), 0 \rangle$, para todo $x \in S$. ■

Proposição 2.2.2. *Seja $\chi(S) \leq 0$. Existe uma seção trasversal de q^* sobre $M(\phi)$, $\sigma : M(\phi) \rightarrow E_{S^1}(f)$, se, e somente se, existe uma seção transversal de q^* sobre o 2-esqueleto de $M(\phi)$, $\rho_2 : M(\phi)_2 \rightarrow E_{S^1}(f)$.*

($\Rightarrow$) Dada σ , basta tomarmos $\rho_2 = \sigma_2 : M(\phi)_2 \rightarrow E_{S^1}(f)$.

($\Leftarrow$) Como, por [W-78], página 292, a obstrução em estender um levantamento parcial $\rho_n : M(\phi)_n \rightarrow E_{S^1}(f)$ de $1_{M(\phi)}$ ($n \geq 1$) é uma aplicação contínua $\bar{c}^{n+1}(\rho_n) \in \Gamma^{n+1}(M(\phi); \Pi_n(\mathcal{F}))$ e, por 1.5.3 e 1.3.20, $\Pi_n(\mathcal{F}) \cong \Pi_{n+1}(S, S-pt) = 1$, para todo $n+1 \geq 3$, então, em particular, $\bar{c}^3(\rho_2) \equiv 0$ e portanto existe $\sigma : M(\phi) \rightarrow E_{S^1}(f)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} M(\phi)_2 & \xrightarrow{\rho_2} & E_{S^1}(f) \\ \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow q^* \\ M(\phi) & \xrightarrow{1_{M(\phi)}} & M(\phi) \end{array}$$

■

Observações 2.2.3. $\Gamma^{n+1}(M(\phi); \Pi_n(\mathcal{F})) := H^{n+1}(M(\phi)_{n+1}, M(\phi)_n; \Pi_n(\mathcal{F}))$.

Proposição 2.2.4. *Seja $\chi(S) \leq 0$. Existe uma seção transversal de q^* sobre o 2-esqueleto de $M(\phi)$ se, e somente se, o seguinte diagrama admite um levantamento ψ*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{F}) & \cong & \Pi_2(S, S-pt) \\ \downarrow & & \\ \Pi_1(E_{S^1}(M(\phi))) & \cong & \Pi_1(M(\phi)_\Delta) \\ \downarrow q_\# & & \\ \Pi_1(M(\phi)) & \xrightarrow{(1_{M(\phi)}, f)_\#} & \Pi_1(M(\phi) \times_{S^1} M(\phi)) \end{array}$$

ψ (dotted arrow from $\Pi_1(M(\phi))$ to $\Pi_1(E_{S^1}(M(\phi)))$)

onde $M(\phi)_\Delta := M(\phi) \times_{S^1} M(\phi) \setminus \Delta$.

($\implies$) Dada uma seção de q^* sobre o 2-esqueleto de $M(\phi)$, $\rho_2 : M(\phi)_2 \rightarrow E_{S^1}(f)$, temos, pela proposição 2.2.2, que existe uma seção de q^* sobre $M(\phi)$, $\sigma : M(\phi) \rightarrow E_{S^1}(f)$. Daí, basta tomarmos $\psi = ((1_{M(\phi)}, f)^* \circ \sigma)_\#$.

($\impliedby$) Seja ψ um tal levantamento de $(1_{M(\phi)}, f)_\#$. Definamos $\theta : \Pi_1(M(\phi)) \rightarrow \Pi_1(E_{S^1}(f))$, $\theta([\alpha]) = [(\beta, \alpha)]$, onde β é tal que $\psi([\alpha]) = [\beta]$. Temos que θ é bem-definida. Agora, desde que $M(\phi)$ é $K(\Pi, 1)$, então, pela sequência de homotopia da fibração q^* , $i_\# : \Pi_1(\mathcal{F}) \rightarrow \Pi_1(E_{S^1}(f))$ é monomorfismo. Daí, como $q^*_\# \circ \theta = 1_{M(\phi)}$, então, por 1.3.22, existe uma seção de q^* sobre o 2-esqueleto de $M(\phi)$. ■

Capítulo 3

T -fibrados sobre S^1

3.1 Sobre o Toro

O toro (bidimensional) é, a menos de homeomorfismo, a única superfície fechada orientável que tem característica de Euler nula.

Seja $T^2 := S^1 \times S^1$ o toro, com estrutura de grupo dada pelo produto da estrutura de grupo de S^1 por ela mesma e aplicação de revestimento, $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$, dada pelo produto da aplicação de revestimento de S^1 , $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, por ela mesma. Ainda, seja $T := \frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ o toro, com aplicação de revestimento, $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$, dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}^2$ é contrátil, temos, em particular, que p e q são os revestimentos universais de T^2 e T , respectivamente. Definamos $\varphi : T^2 \rightarrow T$, $\varphi(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$, para todo $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Temos que φ é homeomorfismo. De agora em diante (exceto quando for interessante diferenciar), denotaremos o toro simplesmente por T .

Quando conveniente, consideraremos, ainda, o toro como sendo o polígono fundamental (de Poincaré), $\frac{I \times I}{(s,0) \sim (s,1), (0,t) \sim (1,t)}$, associado a ele (figura 1), ou como sendo o espaço de adjunção (ou de colagem) de uma 2-célula, D^2 , em X (figura 2),

via uma dada aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow X$ ($D^2 \cup_f X := \frac{D^2 \dot{\cup} X}{f(S^1) \sim S^1}$).

Figura 1

Figura 2

Observemos que, ao retirarmos um “quadrado concêntrico” (um disco, D^2) do toro (figuras 3 e 4, com $a(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ e $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$, para todo $t \in I$) e fazermos as devidas identificações, obtemos a figura 5. Em particular, esta idéia geométrica é útil para a construção da dada aplicação f de colagem.

Figura 3

Figura 4

Figura 5

Notemos que a e b são laços (caminhos fechados) no toro, baseados em $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: x$. Ainda, temos que $\Pi_1(T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$, onde $a, b \in \Pi_1(T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ denotam, respectivamente, as classes dos laços a, b . Sejam agora $x_1, x_2 \in T - D^2$ dois pontos distintos e $y \in \overset{\circ}{D^2}$. Consideremos ρ_{11}, ρ_{12} geradores de $\Pi_1(T - x_2, x_1)$ e ρ_{21}, ρ_{22} geradores de $\Pi_1(T - x_1, x_2)$ definidos como em [Sc-70]. Observemos, em particular, que podemos considerar $\rho_{j1}, \rho_{j2} \in \Pi_1(T - y, x_j)$, $j = 1, 2$, como descrito pelos laços (denotados conforme suas classes) nas

figuras 6 e 7.

Figura 6

Figura 7

Ainda, consideremos as inclusões $i_1: (T - x_2, x_1) \hookrightarrow (T, x_1)$, $i_2: (T - x_1, x_2) \hookrightarrow (T, x_2)$, $i_{10}: (T - x_2, x_1) \hookrightarrow (T \times T \setminus \Delta, (x_1, x_2))$, $i_{20}: (T - x_1, x_2) \hookrightarrow (T \times T \setminus \Delta, (x_1, x_2))$ e denotemos $i_{1\#}(\rho_{1j}) =: \rho_{1j} := i_{10\#}(\rho_{1j})$ e $i_{2\#}(\rho_{2j}) =: \rho_{2j} := i_{20\#}(\rho_{1j})$, $j = 1, 2$. Denotemos, em particular, $\rho_1 := \rho_{21}$ e $\rho_2 := \rho_{22}$. Consideremos a representação do toro dada pela figura 9. Se $x_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x_2 := \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$, para algum $-1 < q < 0$, com $|q|$ “pequeno”, então, a partir da colagem de uma 2-célula, D^2 , na figura 7, é possível obtermos a figura 10.

Figura 9

Figura 10

Ainda, $\Pi_1(T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle \rho_{11}, \rho_{12} \mid [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = 1 \rangle$ e $\Pi_1(T, \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle \rho_1, \rho_2 \mid [\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1 \rangle$. Agora, desde que $\Pi_n(T) \cong \Pi_n(S^1) \times \Pi_n(S^1)$, para todo $n \geq 1$, por [H-59] página 144, e S^1 é $K(\mathbb{Z}, 1)$, então T é $K(\mathbb{Z}^2, 1)$.

Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ uma matriz quadrada 2×2 com coeficientes inteiros. Temos que A define um homomorfismo $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e este induz uma aplicação contínua $\phi_A: T \rightarrow T$. Como $\Pi_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ e os homomorfismos de

$\mathbb{Z}^2$ são dados pelas matrizes quadradas 2×2 com coeficientes inteiros, então $\Phi : M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) \rightarrow [T, T]$, $\Phi(A) := [\phi_A]$ é uma bijeção, onde $[T, T]$ denota o conjunto das classes de homotopia de T . Em particular, temos que $\Phi(AB) = [\phi_A \circ \phi_B]$ e $\Phi(I) = [1_T]$, com $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denotaremos, muitas vezes, ϕ_A novamente por A .

3.2 Classificação dos T -fibrados sobre S^1

Em toda a seção, sejam (MA, p, S^1, T) um T -fibrado sobre S^1 e $f : MA \rightarrow MA$ uma auto-aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , onde $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ é tal que ϕ_A é um homeomorfismo ($MA := M(\phi_A) = \frac{T \times I}{(x,0) \sim (\phi_A(x),1)}$). Denotaremos f restrita a fibra por $f|_T : T \rightarrow T$, $f(\langle x, 0 \rangle) = \langle f|_T(x), 0 \rangle$, para todo $x \in T$. Notemos que, dado $t_0 \in I$ qualquer, poderíamos considerar f restrita a fibra, $f|_T'$, como sendo tal que $f(\langle x, t_0 \rangle) = \langle f|_T'(x), t_0 \rangle$, para todo $x \in T$. Ainda, denotaremos por $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, a matriz quadrada 2×2 com coeficientes inteiros de $f|_{T\#} : \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(T)$.

Observações 3.2.1. *Como $\phi_A : T \rightarrow T$ é homeomorfismo, então $\det(A) = \pm 1$, pois $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = 1$, com $A, A^{-1} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$.*

Lema 3.2.2. *Temos que B comuta com A .*

Como f é uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , então, pela proposição 2.2.1, $\phi_A \circ f|_T \circ \phi_A^{-1} \simeq f|_T$. Daí, $\phi_{A\#} f|_{T\#} = f|_{T\#} \phi_{A\#}$ e $AB = BA$. ■

Observações 3.2.3. *Temos que, se f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo, então f restrita a fibra, $f|_T$, é deformável a uma aplicação contínua livre de ponto fixo.*

Teorema 3.2.4. *Se f restrita a fibra é deformável a uma aplicação contínua livre de ponto fixo, então A e B devem ser (a menos de conjugação) como*

em algum dos casos abaixo.

- (**Caso 0**) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 (**Caso 1**) $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, $a_3(b_4-1)=0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$;
 (**Caso 2**) $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, $a_3(b_4-1)=-2b_3$ e $b_4 \neq 1$;
 (**Caso 3**) $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, $a_3(b_4-1)=0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$;
 (**Caso 4**) $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, $a_3(b_4-1)=2b_3$ e $b_4 \neq 1$.

Com efeito, suponhamos que f restrita a fibra, $f|_T$, é deformável a uma aplicação contínua livre de ponto fixo. Desde que o número de Lefschetz é um invariante homotópico, então $L(f|_T) = 0$. Como, por [BBPT-75], $\det(B-I) = L(f|_T) = 0$, segue que 1 é autovalor de B . Seja $\mathbb{Z}^2 \ni v \neq 0$ um autovetor de B associado ao autovalor 1. Então, como $B(A(v)) = A(B(v)) = A(v)$, temos que $\mathbb{Z}^2 \ni A(v) \neq 0$ também o é. Sejam $\mathfrak{B} := \{v, w\}$ um conjunto gerador de $\mathbb{Z}^2$ e $\mathfrak{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Se $B = [f|_{T\#}]_{\mathfrak{C}}$, então $[f|_{T\#}]_{\mathfrak{B}} = PBP^{-1}$, para alguma matriz inversível $P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Do mesmo modo, se $A = [\phi_{A\#}]_{\mathfrak{C}}$, então $[\phi_{A\#}]_{\mathfrak{B}} = PAP^{-1}$. Daí, por 2.1.3, MA é homeomorfo a $M[\phi_{A\#}]_{\mathfrak{B}}$ por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 , donde, sem perda de generalidade, consideramos $A := [\phi_{A\#}]_{\mathfrak{B}}$ e $B := [f|_{T\#}]_{\mathfrak{B}}$. Assim, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$. Se $\mathfrak{B} := \{v, w\}$, com $Bw = w$, então $B = I$ e não há restrições adicionais sobre A , donde obtemos o caso 0. Se $\mathfrak{B} := \{v, w\}$, com $Bw \neq w$, então, como $AB = BA$ e $\det(A) = \pm 1$, segue que $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$ e $(a_2b_3 = 0, a_2b_4 = a_2$ e $a_3(b_4 - 1) + b_3(a_1 - a_4) = 0)$ e $a_1a_4 - a_2a_3 = \pm 1$. Daí, em particular, $a_2 = 0$ e $a_1a_4 = \pm 1$. Se $a_1 = \pm 1 = a_4$, obtemos os casos 1 e 3, isto é, $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a_3 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$. Se $a_1 = \pm 1 = -a_4$, obtemos os casos 2 e 4, ou seja, $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & a_3 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = \mp 2b_3$ e $b_4 \neq 1$. ■

Observações 3.2.5. Notemos, em particular, que, se $\mathfrak{B} := \{v, A(v)\}$, então $B = I$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & a_4 \end{pmatrix}$.

Ainda, já que $\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$, então, por 2.1.3, $M\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\right)$ é homeomorfo a $M\left(\begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\right)$ por um homeomorfismo que preserva fibra sobre

S^1 , donde, sem perda de generalidade, podemos considerar $a_3 \geq 0$, nos casos de 1 a 4.

3.3 Reduções do problema geral

Em toda a seção, sejam (MA, p, S^1, T) um T -fibrado sobre S^1 e $f : MA \rightarrow MA$ uma auto-aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 . Quando f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo $g : MA \rightarrow MA$ (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1)?

$$\begin{array}{ccc} MA & \xrightarrow{f,g} & MA \\ p \downarrow & \swarrow p & \\ S^1 & & \end{array}$$

Suporemos, sem perda de generalidade, que $f(\langle [0], 0 \rangle) = \langle [q], 0 \rangle$, para algum $-1 < q < 0$, com $|q|$ “pequeno”, e denotaremos $\tilde{0} := \langle [0], 0 \rangle$ e $\tilde{q} := \langle [q], 0 \rangle$. Ainda, denotaremos $MA_\Delta := MA \times_{S^1} MA \setminus \Delta$.

Seja $h : MA \times_{S^1} MA \rightarrow MA \times_{S^1} MA$, $h(\langle [x]_y, t \rangle, \langle [\tilde{x}]_{\tilde{y}}, t \rangle) = (\langle [x]_y, t \rangle, \langle [\tilde{x}]_{\tilde{y}} - [x]_y, t \rangle)$, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, para todo $t \in I$. Temos que h é bem-definida. De fato, como a auto-aplicação contínua de $(T \times I) \times (T \times I)$, $(\langle [x]_y, t \rangle, \langle [\tilde{x}]_{\tilde{y}}, t \rangle) \mapsto (([x]_y, t), ([\tilde{x}]_{\tilde{y}} - [x]_y, t))$ é tal que $((A([x]_y), 1), (A([\tilde{x}]_{\tilde{y}} - [x]_y), 1)) = ((A([x]_y), 1), (A([\tilde{x}]_{\tilde{y}}) - A([x]_y), 1))$, para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, então h é bem-definida. Destacamos que, na prova de que h é bem-definida, usa-se o fato de que ϕ_A é linear. Ainda, temos que h é um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1 , isto é, tal que $(p \circ p^*) \circ h = p \circ p^*$, onde $p^* : MA \times_{S^1} MA \rightarrow MA$ é o fibrado pullback de p por p . Observemos que $h| : MA_\Delta \xrightarrow{\cong} MA \times_{S^1} (MA - S^1)$.

Consideremos os isomorfismos $\Phi_k : \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) \rightarrow \Pi_1(T) \rtimes \Pi_1(MA)$ e $\Phi_l : \Pi_1(MA \times_{S^1} (MA - S^1)) \rightarrow \Pi_1(T) \rtimes \Pi_1(MA - S^1)$ dados por 1.3.14.

Proposição 3.3.1. *São equivalentes:*

- a) A aplicação contínua f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1);
- b) Existe um levantamento $\sigma : MA \rightarrow E_{S^1}(f)$ no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{F} & & \mathcal{F} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & E_{S^1}(f) & \xrightarrow{(1_{MA}, f)^*} & E_{S^1}(MA) & \\
 \nearrow \sigma & \downarrow q^* & & \downarrow q & \\
 MA & \xrightarrow{1_{MA}} & MA & \xrightarrow{(1_{MA}, f)} & MA \times_{S^1} MA;
 \end{array}$$

- c) Existe um levantamento $\psi : \Pi_1(MA) \rightarrow \Pi_1(E_{S^1}(MA))$ no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_1(\mathcal{F}) & \cong & \Pi_2(T, T-pt) \\
 \downarrow & & \\
 \Pi_1(E_{S^1}(MA)) & \cong & \Pi_1(MA_\Delta) \\
 \nearrow \psi & \downarrow q_\# & \\
 \Pi_1(MA) & \xrightarrow{(1_{MA}, f)_\#} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA);
 \end{array}$$

- d) Existe um levantamento $\Gamma : \Pi_1(MA) \rightarrow \Pi_1(MA - S^1)$ no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \Pi_1(MA - S^1) & \\
 & & & & \nearrow \Gamma & \downarrow i_\# & \\
 \Pi_1(MA) & \xrightarrow{(1_{MA}, f)_\#} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) & \xrightarrow{h_\#} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) & \xrightarrow{(\pi_2 \circ k)_\#} & \Pi_1(MA).
 \end{array}$$

Com efeito, temos que (a) é equivalente a (b), por 1.5.2. Ainda, (b) é equivalente a (c), por 2.2.2 e 2.2.4. Verifiquemos que (c) é equivalente a (d). Inicialmente, observemos que existe um levantamento ψ no diagrama (c)

acima se, e só se, existe um levantamento Ψ no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Pi_1(MA_\Delta) & \xrightarrow{h_{l\#}} & \Pi_1(MA \times_{S^1} (MA - S^1)) & \xrightarrow{\Phi_l} & \Pi_1(T) \rtimes \Pi_1(MA - S^1) \xrightarrow{\pi_2} \Pi_1(MA - S^1) \\
 & \nearrow \Psi & \downarrow i_{\#} & & \downarrow \tilde{i}_{\#} & & \downarrow 1_{\Pi_1(T)} \times \tilde{i}_{\#} \\
 \Pi_1(MA) & \xrightarrow{(1_{MA}, f)_{\#}} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) & \xrightarrow{h_{\#}} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA) & \xrightarrow{\Phi_k} & \Pi_1(T) \rtimes \Pi_1(MA) \xrightarrow{\pi_2} \Pi_1(MA) \\
 & & & & & & \downarrow \tilde{i}_{\#}
 \end{array}$$

onde $i, \tilde{i}, \tilde{i}$ são inclusões. Observemos que o diagrama acima é completamente comutativo, ou seja, cada um dos quadrados é comutativo.

($\implies$) Se existe Ψ , então basta tomarmos $\Gamma = \pi_2 \circ \Phi_l \circ h_{l\#} \circ \Psi$, uma vez que $\pi_2 \circ \Phi_k = (\pi_2 \circ k)_{\#}$ e $\pi_2 \circ \Phi_l = (\pi_2 \circ l)_{\#}$, onde k e l são as inclusões nos produtos.

($\impliedby$) Suponhamos que existe Γ . Definamos $\Psi : \Pi_1(MA) \rightarrow \Pi_1(MA_\Delta)$, $\Psi = h_{l\#}^{-1} \circ \Phi_l^{-1} \circ (\pi_1 \circ \Phi_k \circ h_{\#} \circ (1_{MA}, f)_{\#}, \Gamma)$. Como $i_{\#} \circ h_{l\#}^{-1} \circ \Phi_l^{-1} = h_{\#}^{-1} \circ \Phi_k^{-1} \circ (1_{\Pi_1(T)} \times \tilde{i}_{\#})$, então $i_{\#} \circ \Psi = h_{\#}^{-1} \circ \Phi_k^{-1} (\pi_1 \circ \Phi_k \circ (h \circ (1_{MA}, f))_{\#}, \tilde{i}_{\#} \circ \Gamma)$. Daí, como $\tilde{i}_{\#} \circ \Gamma = (\pi_2 \circ k)_{\#} \circ h_{\#} \circ (1_{MA}, f)_{\#} = \pi_2 \circ \Phi_k \circ h_{\#} \circ (1_{MA}, f)_{\#}$, segue o resultado, isto é, $i_{\#} \circ \Psi = (1_{MA}, f)_{\#}$. ■

Observações 3.3.2. *Do mesmo modo que $(MA \times_{S^1} MA, MA \times_{S^1} (MA - S^1), \pi_1 \circ k, MA)$ é um par de fibrados, com fibra $(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, temos que $(MA, MA - S^1, p, S^1)$ também o é, donde $\Pi_n(MA, MA - S^1) \cong \Pi_n(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, para todo $n \geq 1$. Daí, já que MA é $K(\Pi, 1)$ e, por 1.3.20, $\Pi_1(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = 1$, segue, pela sequência de homotopia do par $(MA, MA - S^1)$, que a sequência*

$$1 \longrightarrow \Pi_2(MA, MA - S^1) \longrightarrow \Pi_1(MA - S^1) \longrightarrow \Pi_1(MA) \longrightarrow 1$$

é exata curta. Assim, pelo resultado acima, uma auto-aplicação contínua $f : MA \rightarrow MA$ é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1) se, e só se, existe um levantamento Γ no diagrama abaixo, donde devemos, inicialmente,

determinar apresentações para os grupos envolvidos neste diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \Pi_2(MA, MA-S^1, \tilde{q}) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \Pi_1(MA-S^1, \tilde{q}) \\
 & \Gamma & & \nearrow & \downarrow \tilde{i}_\# \\
 \Pi_1(MA, \tilde{0}) & \xrightarrow{(h \circ (1_{MA}, f))_\#} & \Pi_1(MA \times_{S^1} MA, (\tilde{0}, \tilde{q})) & \xrightarrow{(\pi_2 \circ k)_\#} & \Pi_1(MA, \tilde{q}) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & 1
 \end{array}$$

Lembremos que A denota tanto o homeomorfismo $\phi_A : T \rightarrow T$, quanto a matriz de $\phi_{A\#}$. A fim de calcular apresentações para os grupos envolvidos consideraremos, ao invés de ϕ_A , $\phi_A' : T \rightarrow T$ isotópico a $\phi_A : T \rightarrow T$, com $\phi_A'([q]) = [q]$ e $\phi_A'([0]) = [0]$. Temos que $M(\phi_A')$ é homeomorfo (por um homeomorfismo que preserva fibra sobre S^1) a $M(\phi_A)$, por 2.1.3.

Proposição 3.3.3. *Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, então $\Pi_1(M(\phi_A'), \tilde{q})$ admite a seguinte apresentação*

$$\langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | [\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1, c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{a_1}(\rho_2^{-1})^{a_2}, c\rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_1^{a_3}(\rho_2^{-1})^{a_4} \rangle,$$

onde ρ_j denota a imagem por $i_\# : \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A'))$ (monomorfismo), do gerador $\rho_j \in \Pi_1(T, [q])$, $j = 1, 2$. Ainda, c denota a imagem por $s_\# : \Pi_1(S^1) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A'))$ (monomorfismo), do gerador $c \in \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle)$.

Sejam $\Pi_1(T, [q]) = \langle \rho_1, \rho_2^{-1} | [\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1 \rangle$ e $\Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) = \langle c \rangle$. Uma vez que, $\phi_{A\#}'(\rho_1) = \rho_1^{a_1}(\rho_2^{-1})^{a_2}$ e $\phi_{A\#}'(\rho_2^{-1}) = \rho_1^{a_3}(\rho_2^{-1})^{a_4}$, então, por 1.3.16, segue o resultado. Destacamos que, desde que $\phi_A'([q]) = [q]$, existe $s : S^1 \rightarrow M(\phi_A')$, $s : \langle t \rangle \rightarrow \langle [q], t \rangle$. ■

Observações 3.3.4. *Sejam $\Pi_1(T, [q]) = \langle \rho_{11}, \rho_{12} | [\rho_{11}, \rho_{12}] = 1 \rangle$ e $\Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) = \langle c \rangle$. Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, isto é, $\phi_{A\#}'(\rho_{11}) = \rho_{11}^{a_1}(\rho_{12}^{-1})^{a_2}$ e $\phi_{A\#}'(\rho_{12}^{-1}) = \rho_{11}^{a_3}(\rho_{12}^{-1})^{a_4}$, então, por 1.3.17, $\Pi_1(M(\phi_A'), \tilde{0})$ admite a seguinte apresentação*

$$\langle \rho_{11}, \rho_{12}^{-1}, c | [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = 1, c\rho_{11} c^{-1} = \rho_{11}^{a_1}(\rho_{12}^{-1})^{a_2}, c\rho_{12}^{-1} c^{-1} = \rho_{11}^{a_3}(\rho_{12}^{-1})^{a_4} \rangle,$$

onde ρ_{1j} denota a imagem por $i_{\#} : \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A'))$ (monomorfismo), do gerador $\rho_{1j} \in \Pi_1(T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $j = 1, 2$ e c denota a imagem por $s_{\#} : \Pi_1(S^1) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A'))$ (monomorfismo), do gerador $c \in \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle)$. Destacamos que, desde que $\phi_A'(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, existe $s : S^1 \rightarrow M(\phi_A')$, $s : \langle t \rangle \rightarrow \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \rangle$.

Proposição 3.3.5. Se $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, então $\Pi_1(M(\phi_A') \times_{S^1} M(\phi_A'), (\tilde{0}, \tilde{q}))$ admite a seguinte apresentação

$$\begin{aligned} \langle \rho_{11}, \rho_{12}^{-1}, \rho_1, \rho_2^{-1}, c \mid [\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = 1, \\ [\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1, c\rho_1\bar{c}^{-1}\rho_1^{-a_1}(\rho_2^{-1})^{-a_2} = 1, c\rho_2^{-1}\bar{c}^{-1}\rho_1^{-a_3}(\rho_2^{-1})^{-a_4} = 1, \\ \rho_1\rho_{11}\rho_1^{-1} = \rho_{11}, \rho_1\rho_{12}^{-1}\rho_1^{-1} = \rho_{12}^{-1}, \\ \rho_2^{-1}\rho_{11}\rho_2 = \rho_{11}, \rho_2^{-1}\rho_{12}^{-1}\rho_2 = \rho_{12}^{-1}, \\ c\rho_{11}\bar{c}^{-1} = \rho_{11}^{a_1}(\rho_{12}^{-1})^{a_2}, c\rho_{12}^{-1}\bar{c}^{-1} = \rho_{11}^{a_3}(\rho_{12}^{-1})^{a_4} \rangle, \end{aligned}$$

onde ρ_j e ρ_{1j} denotam, respectivamente, as imagens, por $k_{2\#} \circ i_{\#}$, de $\rho_j \in \Pi_1(T, \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix})$ e, por $k_{1\#}$, de $\rho_{1j} \in \Pi_1(T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $j = 1, 2$. Ainda, c denota a imagem, por $k_{2\#} \circ s_{\#}$ (monomorfismo), de $c \in \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle)$.

Com efeito, usando as apresentações acima, temos, por 1.3.16, que segue o resultado. ■

Observações 3.3.6. Consideremos a fibração $(M(\phi_A') - S^1, p_1, S^1)$. Uma vez que $\tilde{s} : S^1 \rightarrow M(\phi_A') - S^1$, $\tilde{s}(\langle t \rangle) := \langle \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}, t \rangle$, é uma seção de p_1 , segue, por 1.3.13, que a sequência

$$1 \longrightarrow \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}) \xrightarrow{i_{\#}} \Pi_1(M(\phi_A') - S^1, \tilde{q}) \xrightarrow{p_{1\#}} \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) \longrightarrow 1$$

é exata curta e cinde. Desde que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle$ e $\mathbb{Z} \cong \Pi_1(S^1, \langle 0 \rangle) = \langle c \rangle$, segue, por 1.3.9, que $\Pi_1(M(\phi_A') - S^1, \tilde{q}) = \langle \rho_1, \rho_2, c \mid c\rho_1\bar{c}^{-1}w_{c\rho_1}^{-1} = 1, c\rho_2\bar{c}^{-1}w_{c\rho_2}^{-1} = 1 \rangle$, para alguma palavra $w_{c\rho_1}, w_{c\rho_2}$ em $\{\rho_1, \rho_2\}$, onde $\rho_j := i_{\mid\#}(\rho_j)$, $c := \tilde{s}_{\#}(c) \in \Pi_1(M(\phi_A') - S^1, \tilde{q})$, $j = 1, 2$.

Agora, da mesma forma que em 1.3.14, a sequência acima induz a seguinte Π -ação

$$\cdot : \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}), c \cdot \alpha = c\alpha c^{-1} = \phi_A'_{\mid\#}(\alpha),$$

onde $\phi_A' : T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Assim, a fim de determinarmos uma apresentação para $\Pi_1(M(\phi_A') - S^1, \tilde{q})$, devemos, antes, determinar $w_{cp_1} := \phi_A'|_{\#}(\rho_1)$ e $w_{cp_2} := \phi_A'|_{\#}(\rho_2)$. Faremos isto por meio de modelos, isto é, dada uma matriz por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos que

e, se $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$ e ρ_1, ρ_2 são laços que representam, respectivamente, $\rho_1, \rho_2 \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix})$, como na primeira seção deste capítulo, temos ainda que

onde A , nas figuras acima, ao centro e à direita, denota $\phi_A'|$ e a igualdade acima decorre de uma deformação contínua. Notemos, então, que $\phi_A'| \circ \rho_1 \simeq_{\partial I} \rho_1$ e $\phi_A'| \circ \rho_2 \simeq_{\partial I} \rho_1^{-1} \rho_2$. Logo, neste caso, $\phi_A'|_{\#}(\rho_1) = \rho_1$ e $\phi_A'|_{\#}(\rho_2) = \rho_1^{-1} \rho_2$. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então, pelas três primeiras figuras (do primeiro bloco, sem sombreamento) abaixo (caso 1, $a_3 = 2$), obtemos, da mesma maneira, que $\phi_A'|_{\#}(\rho_1) = \rho_1$ e $\phi_A'|_{\#}(\rho_2) = \rho_1^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2$. Pela quarta figura desse mesmo bloco (caso 1, $a_3 = 3$), percebemos uma tendência e determinamos que, se $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $\phi_A'|_{\#}(\rho_1) = \rho_1$ e $\phi_A'|_{\#}(\rho_2) = \rho_1^{-a_3} \rho_2$. Analogamente, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então, pelas três primeiras figuras (do segundo

bloco, com sombreamento) abaixo (caso 2, $a_3 = 2$), obtemos que $\phi_A'_{|\#}(\rho_1) = \rho_2^{-1}\rho_1\rho_2$ e $\phi_A'_{|\#}(\rho_2) = \rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_1^{-1}$. Pela quarta figura desse mesmo bloco (caso 2, $a_3 = 3$), percebemos uma tendência e determinamos que, se $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, então $\phi_A'_{|\#}(\rho_1) = \rho_2^{-1}\rho_1\rho_2$ e $\phi_A'_{|\#}(\rho_2) = \rho_2^{-1}\rho_1^{-a_3}$. Pelos dois últimos blocos, determinamos, de modo completamente análogo, que, se $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (caso 3), então $\phi_A'_{|\#}(\rho_1) = \rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2$ e $\phi_A'_{|\#}(\rho_2) = \rho_2^{-1}\rho_1^{-a_3}$ e, se $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (caso 4), então $\phi_A'_{|\#}(\rho_1) = \rho_1^{-1}$ e $\phi_A'_{|\#}(\rho_2) = \rho_1^{-a_3}\rho_2$.

Assim, obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.3.7. *Se $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ é como em um dos casos de 1 a 4, então $\Pi_1(M(\phi_A') - S^1, \tilde{q})$ admite a seguinte apresentação*

- (**Caso 1**) $\langle \rho_1, \rho_2, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1, c\rho_2 c^{-1} = \rho_1^{-a_3} \rho_2 \rangle$
- (**Caso 2**) $\langle \rho_1, \rho_2, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2, c\rho_2 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3} \rangle$
- (**Caso 3**) $\langle \rho_1, \rho_2, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2, c\rho_2 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3} \rangle$
- (**Caso 4**) $\langle \rho_1, \rho_2, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{-1}, c\rho_2 c^{-1} = \rho_1^{-a_3} \rho_2 \rangle$

Segue diretamente das observações acima. ■

Feitas as devidas distinções, voltaremos, em geral, a utilizar A para denotar tanto o homeomorfismo, quanto a matriz.

Observações 3.3.8. *Já determinadas apresentações para os grupos envolvidos no diagrama (d) de 3.3.1, devemos, agora, determinar os homomorfismos envolvidos neste diagrama, isto é, $\tilde{i}_\#$ e $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_\#$.*

Como $\tilde{i}_\#(i_\#(\rho_j)) = i_\#(\rho_j)$, onde ρ_j é, ora gerador de $\Pi_1(T - [0])$, ora gerador de $\Pi_1(T)$, $j = 1, 2$, e $\tilde{i}_\#(\tilde{s}_\#(c)) = s_\#(c)$, então, simplificando a notação, temos que $\tilde{i}_\#(\rho_j) = \rho_j$, $j = 1, 2$, e $\tilde{i}_\#(c) = c$.

Proposição 3.3.9. *Se $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, então*

$$f_\# : \begin{cases} \rho_{11} & \mapsto \rho_1 \\ \rho_{12}^{-1} & \mapsto \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4} \\ c & \mapsto \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c, \end{cases}$$

$$(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#} : \begin{cases} \rho_{11} & \mapsto 1 \\ \rho_{12}^{-1} & \mapsto \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} \\ c & \mapsto \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c. \end{cases}$$

Com efeito, como

$$\begin{aligned} f_{\#}[i(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix})] &= [f(i(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}))] \\ &= [\langle f|_T(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}), 0 \rangle] \\ &= [\langle [B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [\langle [\begin{pmatrix} s+b_3t \\ b_4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [\langle [\begin{smallmatrix} q+s+b_3t \\ 0 \end{smallmatrix}] * [\begin{smallmatrix} q \\ b_4t \end{smallmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [i(\begin{bmatrix} q+s+b_3t \\ 0 \end{bmatrix}) * [\begin{smallmatrix} q \\ b_4t \end{smallmatrix}]], \end{aligned}$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$, e $\rho_{11}(t) \simeq_{\partial I} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\rho_{12}(t) \simeq_{\partial I} \begin{bmatrix} 0 \\ -t \end{bmatrix}$, $\rho_1(t) \simeq_{\partial I} \begin{bmatrix} q+t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\rho_2(t) \simeq_{\partial I} \begin{bmatrix} q \\ -t \end{bmatrix}$, então $f_{\#}[i(\rho_{11})] = [i(\rho_1)]$, $f_{\#}[i(\rho_{12}^{-1})] = [i(\rho_1^{b_3} * (\rho_2^{-1})^{b_4})]$, donde, simplificando a notação, obtemos parcialmente o primeiro resultado. Como $f_{\#}(s_{\#}(c))(s_{\#}(c))^{-1} \in \ker p_{\#} = \text{Im } i_{\#}$, segue que existem $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $f_{\#}(s_{\#}(c))(s_{\#}(c))^{-1} = i_{\#}(\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2})$, isto é, $f_{\#}(s_{\#}(c)) = i_{\#}(\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2}) \cdot s_{\#}(c)$, donde, simplificando a notação, obtemos o resto do primeiro resultado.

Agora, desde que

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}[i(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix})] &= (\pi_2 \circ k \circ h)_{\#}[\langle i(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}), f(i(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix})) \rangle] \\ &= (\pi_2 \circ k \circ h)_{\#}[\langle [\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}], 0 \rangle, \langle f|_T(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}), 0 \rangle] \\ &= (\pi_2 \circ k \circ h)_{\#}[\langle [\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}], 0 \rangle, \langle [B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= (\pi_2 \circ k)_{\#}[\langle [\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}], 0 \rangle, \langle [B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [\langle [(B - I) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [\langle [\begin{pmatrix} b_3t \\ (b_4-1)t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}], 0 \rangle] \\ &= [\langle [\begin{smallmatrix} q+b_3t \\ 0 \end{smallmatrix}] * [\begin{smallmatrix} q \\ (b_4-1)t \end{smallmatrix}], 0 \rangle], \end{aligned}$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$, então $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}[i(\rho_{11})] = 1$ e $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}[i(\rho_{12}^{-1})] = [i(\rho_1^{b_3} * (\rho_2^{-1})^{b_4-1})]$, donde, ao denotarmos $\rho_{11} := i_{\#}(\rho_{11})$, $\rho_{12} := i_{\#}(\rho_{12})$, $\rho_1 :=$

$i_{\#}(\rho_1)$, $\rho_2 := i_{\#}(\rho_2)$, obtemos parcialmente o segundo resultado. Agora, já que $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))(\mathfrak{s}(\langle t \rangle)) = (\pi_2 \circ k \circ h)(\mathfrak{s}(\langle t \rangle), f(\mathfrak{s}(\langle t \rangle))) = (\pi_2 \circ k)(h(\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t), f(\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t))) = (\pi_2 \circ k)(\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t), f(\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t))) = f(\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t)) = f(\mathfrak{s}(\langle t \rangle))$, para todo $t \in I$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$, segue o resto do resultado. ■

Teorema 3.3.10. *Sejam $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. Existe um levantamento $\Gamma : \Pi_1(MA) \rightarrow \Pi_1(MA - S^1)$ no diagrama (d) de 3.3.1 se, e somente se, existem elementos $Z_1, Z_2, Z_3 \in \ker \tilde{i}_{\#}$ tais que*

$$\begin{cases} \Gamma(\rho_{11}) &= Z_1 \\ \Gamma(\rho_{12}^{-1}) &= Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1} \\ \Gamma(c) &= Z_3 \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c, \end{cases} \begin{cases} [\Gamma(\rho_{11}), \Gamma(\rho_{12}^{-1})] &= 1 \\ \Gamma(c)\Gamma(\rho_{11})\Gamma(c)^{-1} &= \Gamma(\rho_{11}^{a_1}(\rho_{12}^{-1})^{a_2}) \\ \Gamma(c)\Gamma(\rho_{12}^{-1})\Gamma(c)^{-1} &= \Gamma(\rho_{11}^{a_3}(\rho_{12}^{-1})^{a_4}). \end{cases}$$

De fato, como $\tilde{i}_{\#}(\Gamma(\rho_{11})) = (\tilde{i}_{\#} \circ \Gamma)(\rho_{11}) = (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}(\rho_{11}) = 1$, segue que $\Gamma(\rho_{11}) =: Z_1 \in \ker \tilde{i}_{\#}$. Desde que $\tilde{i}_{\#}(\Gamma(\rho_{12}^{-1})) = (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}(\rho_{12}^{-1}) = \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1} = \tilde{i}_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})$, então $\Gamma(\rho_{12}^{-1}) \cdot (\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-1} =: Z_2 \in \ker \tilde{i}_{\#}$. E, finalmente, como $\tilde{i}_{\#}(\Gamma(c)) = (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c = \tilde{i}_{\#}(\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c)$, temos que $\Gamma(c) \cdot (\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c)^{-1} =: Z_3 \in \ker \tilde{i}_{\#}$.

Agora, já que, por 3.3.4, $[\rho_{11}, \rho_{12}^{-1}] = 1, c\rho_{11}c^{-1} = \rho_{11}^{a_1}(\rho_{12}^{-1})^{a_2}, c\rho_{12}^{-1}c^{-1} = \rho_{11}^{a_3}(\rho_{12}^{-1})^{a_4}$, segue o resultado. ■

Observações 3.3.11. *Consideremos os seguintes diagramas comutativos.*

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{j} T & 1 \rightarrow \ker j_{\#} \hookrightarrow \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \xrightarrow{j_{\#}} \Pi_1(T) \rightarrow 1 \\ \downarrow i_{\#} & \downarrow i_{\#} & \downarrow i_{\#} & \downarrow i_{\#} & \downarrow i_{\#} \\ MA - S^1 \xrightarrow{\tilde{i}} MA & 1 \rightarrow \ker \tilde{i}_{\#} \hookrightarrow \Pi_1(MA - S^1) \xrightarrow{\tilde{i}_{\#}} \Pi_1(MA) \rightarrow 1 \\ & & p_{\#} \downarrow & & p_{\#} \downarrow \\ & & \Pi_1(S^1) \xrightarrow{1_{\Pi_1(S^1)}} \Pi_1(S^1) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 1 \end{array}$$

Como as sequências no diagrama acima, à direita, são exatas curtas, segue que $\ker j_{\#} \cong \ker \tilde{i}_{\#}$. De fato, se $y \in \ker \tilde{i}_{\#}$, então $(p_{\#} \circ \tilde{i}_{\#})(y) = 1$, donde

$y \in \ker p|_{\#} = \text{Im } i|_{\#}$. Daí, existe um único x tal que $i|_{\#}(x) = y$. Desde que $(i_{\#} \circ j_{\#})(x) = 1$ e $i_{\#}$ é injetor, segue que $x \in \ker j_{\#}$ e portanto $i|_{\#|}(x) = y$. Agora, suponhamos que $i|_{\#|}(x) = 1$, para algum $x \in \ker j_{\#}$. Desde que $i|_{\#}(x) = 1$ e $i|_{\#}$ é injetor, segue que $x = 1$. Logo, $i|_{\#|}$ é isomorfismo.

Ainda, temos que $\Pi_2(MA, MA - S^1) = \ker \tilde{i}_{\#} \cong \ker j_{\#} = \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, onde as igualdades denotam, na verdade, isomorfismos.

Proposição 3.3.12. *Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , como no caso 0, isto é, com $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. Então existe um levantamento Γ para $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1, f))_{\#}$.*

Com efeito, como $\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, então, por 3.3.10, tomando $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 1$, temos que $\Gamma : \Pi_1(MA) \rightarrow \Pi_1(MA - S^1)$, $\Gamma(\rho_{11}) = 1$, $\Gamma(\rho_{12}^{-1}) = 1$, $\Gamma(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$ é um levantamento para $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}$. ■

Proposição 3.3.13. *Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , como nos casos de 1 a 4. Se existe um levantamento Γ para $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1, f))_{\#}$, então $Z_1 = 1$.*

De fato, por 3.3.10, $\Gamma(\rho_{11}) = Z_1$, $\Gamma(\rho_{12}^{-1}) = Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1}$ e $[\Gamma(\rho_{11}), \Gamma(\rho_{12}^{-1})] = 1$. Desde que $Z_1 = i|_{\#|}(Z'_1)$ e $Z_2 = i|_{\#|}(Z'_2)$, para únicos $Z'_1, Z'_2 \in \ker j_{\#}$, então

$$\begin{aligned} 1 &= [Z_1, Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1}] \\ &= [i|_{\#|}(Z'_1), i|_{\#|}(Z'_2) i|_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1})] \\ &= i|_{\#}[Z'_1, Z'_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1}], \end{aligned}$$

donde, como $i|_{\#}$ é injetor, segue que $[Z'_1, Z'_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1}] = 1$. Se $Z_1 \neq 1$ e portanto $Z'_1 \neq 1$, então $Z'_1 = u^{z_1}$ e $Z'_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4 - 1} = u^{z_2}$, para algum $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, para algum $u \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, pois este grupo é livre. Ainda, como $j_{\#}(u)^{z_1} = j_{\#}(u^{z_1}) = j_{\#}(Z'_1) = 1$ e $\Pi_1(T)$ é livre de torção, então $j_{\#}(u) = 1$, isto é, $u \in \ker j_{\#}$. Finalmente, desde que $\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, então $1 \neq$

$\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1} = (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1_{MA}, f))_{\#}(\rho_2^{-1}) = \tilde{i}_{\#} \circ \Gamma(\rho_2^{-1}) = \tilde{i}_{\#}(Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}) = \tilde{i}_{\#}(i_{|\#}(Z'_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})) = \tilde{i}_{\#} \circ i_{|\#}(u^{z_2}) = (i_{\#} \circ j_{\#})(u^{z_2}) = 1$, o que é um absurdo. Logo, $Z_1 = 1$. ■

Corolário 3.3.14. *Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , como nos casos de 1 a 4. Então existe um levantamento Γ para $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1, f))_{\#}$ se, e somente se, a equação em $\{Z_2, Z_3\}$, $\Gamma(c)\Gamma(\rho_{12}^{-1})\Gamma(c)^{-1} = \Gamma(\rho_{12}^{-1})^{a_4}$, admite solução.*

De fato, lembremos que, nos casos de 1 a 4, $a_2 = 0$, donde, por 3.3.10 e 3.3.13, existe Γ se, e só se, existem $1 = Z_1, Z_2, Z_3 \in \ker \tilde{i}_{\#}$ tais que

$$\begin{cases} \Gamma(\rho_{11}) &= 1, \\ \Gamma(\rho_{12}^{-1}) &= Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}, \\ \Gamma(c) &= Z_3 \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2} c; \end{cases} \quad \begin{cases} [1, \Gamma(\rho_{12}^{-1})] &= 1, \\ \Gamma(c)1\Gamma(c)^{-1} &= 1^{a_1}\Gamma(\rho_{12}^{-1})^0, \\ \Gamma(c)\Gamma(\rho_{12}^{-1})\Gamma(c)^{-1} &= 1^{a_3}\Gamma(\rho_{12}^{-1})^{a_4}, \end{cases}$$

isto é, a equação em $\{Z_2, Z_3\}$, $\Gamma(c)\Gamma(\rho_{12}^{-1})\Gamma(c)^{-1} = \Gamma(\rho_{12}^{-1})^{a_4}$, admite solução. ■

3.4 A equação principal

Em toda a seção, A e B serão como nos casos de 1 a 4. Em particular, $a_4 = \pm 1$.

Observemos que $Z_2 = i_{|\#}(Z'_2)$, $Z_3 = i_{|\#}(Z'_3)$ e $c(Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})c^{-1} = i_{|\#}(C)$, para únicos $Z'_2, Z'_3 \in \ker j_{\#}$ e para único $C \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ e denotemos estes, no restante do capítulo, respectivamente, por Z_2, Z_3 e $c(Z_2 \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})c^{-1}$.

A seguir, veremos que a equação em $Z_2, Z_3 \in \ker \tilde{i}_{\#} = \Pi_2(MA, MA - S^1)$, dada por 3.3.14, dá origem a uma equação em $Z_2, Z_3 \in \ker j_{\#} = \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

Observações 3.4.1. *Desde que*

$$\begin{aligned} i_{\#} (Z_3 \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1}) c^{-1} (\rho_2^{-1})^{-c_2} \rho_1^{-c_1} Z_3^{-1} (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4}) &= \\ Z_3 \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1}) c^{-1} (\rho_2^{-1})^{-c_2} \rho_1^{-c_1} Z_3^{-1} (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4} &= \\ \Gamma(c) \Gamma(\rho_{12}^{-1}) \Gamma(c)^{-1} \Gamma(\rho_{12}^{-1})^{-a_4} &= 1 \end{aligned}$$

e $i_{\#}$ é injetor, então a equação em $Z_2, Z_3 \in \Pi_2(MA, MA - S^1)$, dada por 3.3.14, admite solução se, e só se, a equação em $Z_2, Z_3 \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ abaixo admite solução.

$$Z_3 \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1}) c^{-1} (\rho_2^{-1})^{-c_2} \rho_1^{-c_1} Z_3^{-1} = (Z_2 \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{a_4} \quad (3.1)$$

Proposição 3.4.2. *Sejam $D, E \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ tais que $j_{\#}(D) = j_{\#}(\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})$ e $j_{\#}(E) = j_{\#}(\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2})$ quaisquer. Então a equação 3.1 admite solução se, e somente se, uma das equações abaixo admite solução.*

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_3 E c Z_2 D c^{-1} E^{-1} Z_3^{-1} = (Z_2 D)^{a_4} \\ (Z_3) (E c Z_2 c^{-1} E^{-1}) (E (c D c^{-1} D^{-a_4}) E^{-1}) \\ \cdot [E, D^{a_4}] (D^{a_4} Z_3^{-1} D^{-a_4}) (D^{\frac{a_4-1}{2}} Z_2^{-a_4} D^{\frac{1-a_4}{2}}) = 1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Com efeito, temos que $\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} D^{-1} =: Z_D, \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} E^{-1} =: Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Substituindo $\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} = Z_D D, \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} = Z_E E$ na equação 3.1, obtemos a equação abaixo.

$$Z_3 Z_E E c (Z_2 Z_D D) c^{-1} E^{-1} Z_E^{-1} Z_3^{-1} = (Z_2 Z_D D)^{a_4}$$

Ao denotarmos $Z_2 := Z_2 Z_D, Z_3 := Z_3 Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, encontramos a primeira equação de 3.2.

Agora, se $D', E' \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ são tais que $j_{\#}(D') = j_{\#}(\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})$ e $j_{\#}(E') = j_{\#}(\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2})$, segue que $DD'^{-1} =: Z'_D, EE'^{-1} =: Z'_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ e portanto $D = Z'_D D'$ e $E = Z'_E E'$. Assim, a primeira equação de 3.2, com D, E , admite solução Z_2, Z_3 se, e só se, com D', E' , admite solução $Z_2 Z'_D, Z_3 Z'_E$.

Em particular, a equação 3.1 admite solução se, e só se, a primeira equação de 3.2 admite solução, para algum D, E (e portanto para todo D, E).

Notemos que $Z_2 D = D(D^{\frac{1-1}{2}} Z_2 D^{\frac{1+1}{2}})$ e $(Z_2 D)^{-1} = D^{-1}(D^{\frac{1-1}{2}} Z_2^{-1} D^{\frac{1-1}{2}})$, donde, como $a_4 = \pm 1$, $(Z_2 D)^{-a_4} = D^{-a_4}(D^{\frac{a_4-1}{2}} Z_2^{-a_4} D^{\frac{1-a_4}{2}})$. Assim, a partir da equação $Z_3 E c Z_2 \mathbf{1} D c^{-1} \mathbf{E}^{-1} Z_3^{-1} (\mathbf{Z}_2 D)^{-a_4} = 1$, obtemos a segunda equação de 3.2, ao substituirmos $\mathbf{1}$ por $(c^{-1} E^{-1} E c)$, $\mathbf{E}^{-1}$ por $(D^{-a_4} E^{-1} [E, D^{a_4}] D^{a_4})$ e $(\mathbf{Z}_2 D)^{-a_4}$ por $D^{-a_4}(D^{\frac{a_4-1}{2}} Z_2^{-a_4} D^{\frac{1-a_4}{2}})$. Como as duas equações de 3.2 são na verdade a mesma equação, é claro que a equação 3.1 admite solução se, e só se, a segunda equação de 3.2 admite solução, para algum D, E (e por conseguinte para todo D, E). ■

Observações 3.4.3. Temos que o fator $c D c^{-1} D^{-a_4}$, presente na segunda equação de 3.2, é tal que $j_{\#}(c D c^{-1} D^{-a_4}) = 1$. De fato, como, pela notação utilizada,

$$\begin{aligned} (i_{\#} \circ j_{\#})(c D c^{-1} D^{-a_4}) &= \\ (i_{\#} \circ j_{\#})(c \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} c^{-1} (\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4}) &= \\ (\tilde{i}_{\#} \circ i_{|\#})(c \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} c^{-1} (\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4}) &= \\ c \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} c^{-1} (\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4} &\in \Pi_1(MA) \end{aligned}$$

e, por 3.3.3, $\Pi_1(MA) = \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | [\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1, c \rho_1 c^{-1} = \rho_1^{a_1}, c \rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_1^{a_3} (\rho_2^{-1})^{a_4} \rangle$ e, pela demonstração de 3.2.4, $a_3(b_4 - 1) + b_3(a_1 - a_4) = 0$, então

$$\begin{aligned} c \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} c^{-1} (\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4} &= \\ (\rho_1^{a_1})^{b_3} (\rho_1^{a_3} (\rho_2^{-1})^{a_4})^{b_4-1} (\rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})^{-a_4} &= \\ (\rho_1^{a_1})^{b_3} (\rho_1^{a_3})^{b_4-1} (\rho_1^{b_3})^{-a_4} &= \\ \rho_1^{b_3(a_1-a_4)+a_3(b_4-1)} &= \\ \rho_1^0 &= 1, \end{aligned}$$

donde, uma vez que $i_{\#}$ é injetor, segue que $j_{\#}(c D c^{-1} D^{-a_4}) = 1$.

Definição 3.4.4. Chamaremos cada equação de 3.2 de equação principal e chamaremos $(b_3, b_4, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^4$ de entrada de dados (para a equação principal).

Observações 3.4.5. Notemos que, por 3.4.2, para resolvermos o problema para uma dada f , devemos verificar se a equação principal admite solução para uma determinada entrada de dados (b_3, b_4, c_1, c_2) .

Denotemos por $| \cdot |_1, | \cdot |_2 : (\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ os homomorfismos que somam os expoentes, respectivamente, de ρ_1 e de ρ_2^{-1} , em palavras de $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Assim, por exemplo, $|\rho_1|_1 = 1 = |\rho_1\rho_2^{-1}|_1$ e $|\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1}|_2 = 2 = |\rho_2^{-1}\rho_2^{-1}|_2$. Em particular, observemos que, se $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, então $|D|_1 = b_3 = |wDw^{-1}|_1$, $|D|_2 = b_4 - 1 = |wDw^{-1}|_2$, $|E|_1 = c_1 = |wEw^{-1}|_1$ e $|E|_2 = c_2 = |wEw^{-1}|_2$, uma vez que $\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}D^{-1}, \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}E^{-1} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

Proposição 3.4.6. Seja $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ qualquer. A equação principal admite solução para $(|D|_1, |D|_2, |E|_1, |E|_2)$ se, e somente se, admite solução para $(|D|_1, |D|_2, |wEcw^{-1}c^{-1}|_1, |wEcw^{-1}c^{-1}|_2)$. Ainda, temos que $|wEcw^{-1}c^{-1}|_1 = |E|_1 + |wcw^{-1}c^{-1}|_1$ e $|wEcw^{-1}c^{-1}|_2 = |E|_2 + |wcw^{-1}c^{-1}|_2$.

Com efeito, se $Z'_2 := wZ_2w^{-1}, Z'_3 := wZ_3w^{-1} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \triangleleft \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, temos, pela equação principal, que

$$\begin{aligned} w(Z_3EcZ_2Dc^{-1}E^{-1}Z_3^{-1})w^{-1} &= w(Z_2D)^{a_4}w^{-1} \\ Z'_3(wEcw^{-1}c^{-1})(cZ'_2(wDw^{-1})c^{-1})(cwc^{-1}E^{-1}w^{-1})Z_3'^{-1} &= (Z'_2(wDw^{-1}))^{a_4}, \end{aligned}$$

donde a equação principal, com D, E , admite solução Z_2, Z_3 se, e só se, com $wDw^{-1}, wEcw^{-1}c^{-1}$, admite solução wZ_2w^{-1}, wZ_3w^{-1} , ou seja, a equação principal admite solução para $(|D|_1, |D|_2, |E|_1, |E|_2)$ se, e só se, admite solução para $(|D|_1 = |wDw^{-1}|_1, |D|_2 = |wDw^{-1}|_2, |wEcw^{-1}c^{-1}|_1, |wEcw^{-1}c^{-1}|_2)$.

Ainda, desde que $|wEcw^{-1}c^{-1}|_j = |(wEw^{-1})(wcw^{-1}c^{-1})|_j = |wEw^{-1}|_j + |wcw^{-1}c^{-1}|_j = |E|_j + |wcw^{-1}c^{-1}|_j$, com $j = 1, 2$, segue o resultado. ■

Corolário 3.4.7. Seja H a imagem do homomorfismo $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $w \mapsto (|wcw^{-1}c^{-1}|_1, |wcw^{-1}c^{-1}|_2)$. Sejam $(b_3, b_4, c_1, c_2), (b_3, b_4, c'_1, c'_2)$ entradas de dados tais que $[(c_1, c_2)] = [(c'_1, c'_2)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$. Então a equação principal admite solução para uma se, e somente se, admite solução para a outra.

De fato, suponhamos que a equação principal admite solução para (b_3, b_4, c_1, c_2) . Sejam $D, E \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ tais que $(|D|_1, |D|_2, |E|_1, |E|_2) = (b_3, b_4, c_1, c_2)$. Desde que $[(c_1, c_2)] = [(c'_1, c'_2)]$, existe $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ tal que $(|cwc^{-1}w^{-1}|_1, |cwc^{-1}w^{-1}|_2) = (c'_1, c'_2) - (c_1, c_2)$. Daí, por 3.4.6, $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2) + (|cwc^{-1}w^{-1}|_1, |cwc^{-1}w^{-1}|_2) = (|wEcw^{-1}c^{-1}|_1, |wEcw^{-1}c^{-1}|_2)$ e a equação principal admite solução para $(|D|_1, |D|_2, |wEcw^{-1}c^{-1}|_1, |wEcw^{-1}c^{-1}|_2) = (b_3, b_4, c'_1, c'_2)$. O outro sentido segue de modo análogo. ■

Observações 3.4.8. *Assim, dado um conjunto de representantes, $\mathfrak{C}$, para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{H}$ e fixadas $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, a fim de analisar se a equação principal admite solução para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$, é suficiente analisar para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathfrak{C}\}$.*

3.5 Abelianização da equação principal

Temos que as soluções da equação principal estão em $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Nesta seção, olharemos para a equação principal no abelianizado deste grupo e em alguns quocientes deste abelianizado. Sempre que ou no abelianizado, ou nalgum destes quocientes, a equação principal não admitir solução, saberemos que, em $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, ela também não admitirá solução. Assim, procuraremos encontrar uma solução, em $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, para a equação principal, apenas quando, no abelianizado e nestes quocientes, ela admitir solução.

Observações 3.5.1. *Se $\mathcal{F}$ é a fibra da fibração que substitui $j : T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hookrightarrow T$ (ver 1.2.22), temos, analogamente ao que foi feito em 1.5.3, que $\Pi_1(\mathcal{F}) \cong \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Daí, $H_1(\mathcal{F}) \cong \frac{\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})}{[\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}), \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})]} =: \Pi_{2ab}$. Sejam $\mathcal{A} : \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \Pi_{2ab}$ o homomorfismo abelianização (a projeção natural) e $\mathcal{E} : \mathbb{Z}[\Pi_1(T)] \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo tal que $\mathcal{E}(t \cdot \bar{w}) = t$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, para todo $\bar{w} \in \Pi_1(T)$, onde $\mathbb{Z}[\Pi_1(T)]$ é o anel de grupo de $\Pi_1(T)$ sobre*

$\mathbb{Z}$.

Finalmente, notemos que $\ker j_{\#} = \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ é o menor subgrupo normal de $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ que contém $B := [\rho_1, \rho_2^{-1}] \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, donde $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \langle wBw^{-1} | w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rangle$. Ainda, desde que $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \ker j_{\#} \cong \ker \tilde{j}_{\#} = \Pi_2(MA, MA - S^1)$, então, simplificando a notação, $c\rho_1c^{-1}, c\rho_2^{-1}c^{-1} \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ e portanto $cBc^{-1} = [c\rho_1c^{-1}, c\rho_2^{-1}c^{-1}] \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Logo, para todo $Z \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, temos que $cZc^{-1} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

Proposição 3.5.2. *Existe um isomorfismo $\mathcal{O} : \Pi_{2ab} \rightarrow \mathbb{Z}[\Pi_1(T)]$ tal que $\mathcal{O}(\mathcal{A}(wBw^{-1})) = 1.\bar{w}$, para todo $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, onde w e $\bar{w}$ denotam a mesma palavra, respectivamente, em $\{\rho_1, \rho_2^{-1}\} \subset \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ e em $\{j_{\#}(\rho_1), j_{\#}(\rho_2^{-1})\} \subset \Pi_1(T)$.*

De fato, basta definirmos $\mathcal{O}(\mathcal{A}(\prod_w wB^t w^{-1})) = \sum_w t_w \cdot \bar{w}$. Verifiquemos que $\mathcal{O}$ é bem-definida, injetora e sobrejetora. Se $\mathcal{A}(wBw^{-1}) = \mathcal{A}(vBv^{-1})$, então $(wBw^{-1})(vB^{-1}v^{-1}) \in [\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}), \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})]$, donde, por [L-50] página 659, $\bar{w} = \bar{v}$ e $\mathcal{O}$ é bem-definida. Agora, se $\bar{w} = \bar{v}$, então $wv^{-1} \in \ker j_{\#} = \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Daí, como $wBw^{-1} = wv^{-1}(vBv^{-1})(wv^{-1})^{-1}$, segue que $\mathcal{A}(wBw^{-1}) = \mathcal{A}(vBv^{-1})$ e portanto $\mathcal{O}$ é injetora. Finalmente, $\mathcal{O}$ é sobrejetora, pois $j_{\#}$ o é. Logo, desde que $\mathcal{O}$ é homomorfismo, segue o resultado. ■

Observações 3.5.3. *Seja $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ e denotemos $B_{\bar{w}} := \mathcal{A}(wBw^{-1})$. Desde que, pela demonstração acima, $\bar{w} = \bar{v}$ se, e só se, $\mathcal{A}(wBw^{-1}) = \mathcal{A}(vBv^{-1})$, segue que $B_{\bar{w}}$ é bem-definido. Para simplificar a notação, como em seções anteriores, denotemos $j_{\#}(\rho_1), j_{\#}(\rho_2^{-1}) \in \Pi_1(T)$, respectivamente, por ρ_1, ρ_2^{-1} . Se $\bar{w} = \rho_1^x(\rho_2^{-1})^y$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$, denotemos $B_{(x,y)} := B_{\bar{w}}$. Definamos $\bullet : \Pi_1(T) \times \Pi_{2ab} \rightarrow \Pi_{2ab}$, $\bar{v} \bullet \mathcal{A}(wBw^{-1}) := \mathcal{A}(vwB(vw)^{-1})$. Temos que $\bullet$ é uma Π -ação. Com efeito, já que $\bar{u} = \bar{v}$ se, e só se, $\bar{u}\bar{w} = \bar{v}\bar{w}$ se, e só se, $\mathcal{A}(uwB(uw)^{-1}) = \mathcal{A}(vwB(vw)^{-1})$, $\bullet$ é bem-definida. Agora, desde que*

$$\begin{aligned} \bar{1} \bullet \mathcal{A}(wBw^{-1}) &= \mathcal{A}(1wB(1w)^{-1}) = \mathcal{A}(wBw^{-1}), \\ \bar{u}\bar{v} \bullet \mathcal{A}(wBw^{-1}) &= \mathcal{A}(uvwB(uvw)^{-1}) = \bar{u} \bullet (\bar{v} \bullet \mathcal{A}(wBw^{-1})), \end{aligned}$$

segue o resultado. Em particular, usando a notação acima, $\bar{v}_\bullet B_{\bar{w}} = B_{\bar{v}\bar{w}}$.
Denotemos $\mathcal{E} \circ \mathcal{O} \circ \mathcal{A}$ simplesmente por $||: \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Proposição 3.5.4. *Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ e $Z, W \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ quaisquer. Então, temos os seguintes cálculos:*

1. $|wZw^{-1}| = |Z|$, para todo $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$;
2. $||[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]|| = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$;
3. $||[Z\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, W\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]|| = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$;
4. $|cZc^{-1}| = (\det A)|Z|$.

1. De fato, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathcal{A}(Z) = B_{\bar{v}}^t$, para algum $v \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Desde que $\mathcal{A}(wZw^{-1}) = \bar{w}_\bullet \mathcal{A}(Z) = \bar{w}_\bullet B_{\bar{v}}^t = B_{\bar{w}\bar{v}}^t$, então $|wZw^{-1}| = (\mathcal{E} \circ \mathcal{O} \circ \mathcal{A})(wZw^{-1}) = (\mathcal{E} \circ \mathcal{O})(B_{\bar{w}\bar{v}}^t) = t = (\mathcal{E} \circ \mathcal{O})(B_{\bar{v}}^t) = |Z|$, para todo $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$;
2. Com efeito, temos, inicialmente, que

$$\begin{aligned}
& ||[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]|| = \\
& |\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2} \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4} (\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2})^{-1} (\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4})^{-1}| = \\
& |\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2} \rho_1^{x_3} ((\rho_2^{-1})^{-x_2} \rho_1^{-x_3} \rho_1^{-x_1} \rho_1^{x_3} \rho_1^{x_1} (\rho_2^{-1})^{x_4}) \rho_1^{-x_1} (\rho_2^{-1})^{-x_4} \rho_1^{-x_3}| = \\
& |\rho_1^{x_1} ((\rho_2^{-1})^{x_2} \rho_1^{x_3} (\rho_2^{-1})^{-x_2} \rho_1^{-x_3}) \rho_1^{-x_1} \rho_1^{x_3} (\rho_1^{x_1} (\rho_2^{-1})^{x_4} \rho_1^{-x_1} (\rho_2^{-1})^{-x_4}) \rho_1^{-x_3}| = \\
& |\rho_1^{x_1} [(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}] \rho_1^{-x_1}| + |\rho_1^{x_3} [\rho_1^{x_1}, (\rho_2^{-1})^{x_4}] \rho_1^{-x_3}| \stackrel{por (1)}{=} \\
& |[(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}]| + |[\rho_1^{x_1}, (\rho_2^{-1})^{x_4}]|
\end{aligned}$$

para todo $x_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq 4$.

Ainda, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $|[(\rho_2^{-1})^y, \rho_1^x]| = -|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]|$, pois $[(\rho_2^{-1})^y, \rho_1^x][\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y] = 1$ e $-|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]| = |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{-y}]|$, uma

vez que

$$\begin{aligned}
& |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{-y}]| + |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]| \stackrel{por (1)}{=} \\
& |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{-y}]| + |(\rho_2^{-1})^{-y}[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y](\rho_2^{-1})^y| = \\
& |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{-y}](\rho_2^{-1})^{-y}[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y](\rho_2^{-1})^y| = \\
& |\rho_1^x(\rho_2^{-1})^{-y}\rho_1^{-x}(\rho_2^{-1})^y(\rho_2^{-1})^{-y}\rho_1^x(\rho_2^{-1})^y\rho_1^{-x}(\rho_2^{-1})^{-y}(\rho_2^{-1})^y| = \\
& |1| = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que $|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]| = xy$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, para todo $0 \leq y \in \mathbb{Z}$. De fato, desde que $|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^0]| = 0 = x0$, então, por indução forte em y , segue que

$$\begin{aligned}
|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]| & \stackrel{por (1)}{=} |\rho_1^x(\rho_2^{-1})^{-1}[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y](\rho_1^x(\rho_2^{-1})^{-1})^{-1}| \\
& = |[\rho_1^x(\rho_2^{-1})^{-1}, \rho_1^x(\rho_2^{-1})^{y-1}]| \\
& \stackrel{por 1^a parte de (2)}{=} |[(\rho_2^{-1})^{-1}, \rho_1^x]| + |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{y-1}]| \\
& \stackrel{por 2^a parte de (2)}{=} |[\rho_1^x, \rho_2^{-1}]| + |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{y-1}]| \\
& \stackrel{por HI}{=} x1 + x(y-1) \\
& = xy.
\end{aligned}$$

Daí, temos também que, para todo $x \in \mathbb{Z}$, para todo $0 \geq y \in \mathbb{Z}$, $-xy = x(-y) = |[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^{-y}]| = -|[\rho_1^x, (\rho_2^{-1})^y]|$.

Assim,

$$\begin{aligned}
& |[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| \stackrel{por 1^a parte de (2)}{=} \\
& |[(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}]| + |[\rho_1^{x_1}, (\rho_2^{-1})^{x_4}]| \stackrel{por 2^a parte de (2)}{=} \\
& |[\rho_1^{x_3}, (\rho_2^{-1})^{-x_2}]| + |[\rho_1^{x_1}, (\rho_2^{-1})^{x_4}]| = \\
& x_3(-x_2) + x_1x_4 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$;

3. De fato,

$$\begin{aligned}
& |[Z\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, W\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| &= \\
& |Z\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}W\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}(Z\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2})^{-1}(W\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4})^{-1}| &= \\
& |Z\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}W((\rho_2^{-1})^{-x_2}\rho_1^{-x_1}[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}) \\
& \quad \cdot Z^{-1}(\rho_2^{-1})^{-x_4}\rho_1^{-x_3}W^{-1}| &= \\
& |Z| + |\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}W(\rho_2^{-1})^{-x_2}\rho_1^{-x_1}| + |[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| \\
& \quad + |\rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}Z^{-1}(\rho_2^{-1})^{-x_4}\rho_1^{-x_3}| + |W^{-1}| \stackrel{por(1)}{=} \\
& |Z| + |W| + |[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| + |Z^{-1}| + |W^{-1}| &= \\
& |Z| + |W| + |[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| - |Z| - |W| &= \\
& |[\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}, \rho_1^{x_3}(\rho_2^{-1})^{x_4}]| \stackrel{por(2)}{=} \\
& \det\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$, $Z, W \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$;

4. Por 3.3.3, se $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$, $c\rho_1c^{-1}\rho_1^{-a_1} =: W_1, c\rho_2^{-1}c^{-1}(\rho_2^{-1})^{-a_4}\rho_1^{-a_3} =: W_2 \in \ker j_{\#} = \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Logo, para cada caso de 1 a 4 de 3.2.4, existe $W_1, W_2 \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ tal que $c\rho_1c^{-1} = W_1\rho_1^{a_1}$ e $c\rho_2^{-1}c^{-1} = W_2\rho_1^{a_3}(\rho_2^{-1})^{a_4}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
|cBc^{-1}| &= |c\rho_1c^{-1}c\rho_2^{-1}c^{-1}c\rho_1^{-1}c^{-1}c\rho_2c^{-1}| \\
&= |[W_1\rho_1^{a_1}, W_2\rho_1^{a_3}(\rho_2^{-1})^{a_4}]| \\
&\stackrel{por(3)}{=} \det A.
\end{aligned}$$

Agora, se $Z = \prod_{i=1}^r w_i B^{t_i} w_i^{-1} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, com $w_i \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $t_i \in \mathbb{Z}$, para todo $1 \leq i \leq r$, para algum $r \geq 1$, então $cZc^{-1} = \prod_{i=1}^r cw_i c^{-1} cB^{t_i} c^{-1} (cw_i c^{-1})^{-1}$. Daí, já que $|Z| = \sum_{i=1}^r |B^{t_i}| = \sum_{i=1}^r t_i$ e, para todo $1 \leq i \leq r$, $|cB^{t_i}c^{-1}| = t_i |cBc^{-1}| = t_i (\det A)$, segue que $|cZc^{-1}| = \sum_{i=1}^r |cB^{t_i}c^{-1}| = \sum_{i=1}^r t_i (\det A) = (\det A) \sum_{i=1}^r t_i = (\det A) |Z|$.

■

Observações 3.5.5. Seja $K := \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (c_1, c_2), (b_3, b_4 - 1) \rangle}$. Consideremos $\mathbb{Z}[\Pi_1(T)] = \Pi_{2ab}$, para simplificar a notação, e $\mathbb{Z}[K]$. Observemos que ambos são abelianos. Denotemos, por $\overline{Z}$, a imagem de $Z \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, ora em $\mathbb{Z}[\Pi_1(T)]$, ora em $\mathbb{Z}[K]$, pela projeção natural correspondente. Com esta notação, observemos que $\mathcal{E}(\overline{Z} \overline{W}) = \mathcal{E}(\overline{Z}) + \mathcal{E}(\overline{W}) = |Z| + |W|$ e $\mathcal{E}(1) = 0$, para todo $Z, W \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$.

A seguir, determinaremos a equação principal em $\mathbb{Z}[\Pi_1(T)]$ (abelianizado de $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$) e em $\mathbb{Z}[K]$. Ainda, determinaremos uma condição necessária para a equação principal (em $\Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$) admitir solução.

Proposição 3.5.6. Sejam $D, E \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ tais que $j_{\#}(D) = j_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})$ e $j_{\#}(E) = j_{\#}(\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2})$ quaisquer. Se a equação principal (ver 3.4.2) admite solução, então as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(\overline{EcDc^{-1}D^{-a_4}E^{-1}}) \\ \cdot \overline{[E, D^{a_4}]}(D^{a_4}Z_3^{-1}D^{-a_4})(D^{\frac{a_4-1}{2}}Z_2^{-a_4}D^{\frac{1-a_4}{2}}) = 1, \text{ em } \mathbb{Z}[\Pi_1(T)], \text{ com } Z_2, Z_3 \in \mathbb{Z}[\Pi_1(T)], \\ cZ_2c^{-1}\overline{cDc^{-1}D^{-a_4}}\overline{[E, D^{a_4}]}Z_2^{-a_4} = 1, \text{ em } \mathbb{Z}[K], \text{ com } Z_2 \in \mathbb{Z}[K], \end{array} \right.$$

também admitem.

Com efeito, consideremos, por 3.4.2, a equação principal

$$(Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(\overline{EcDc^{-1}D^{-a_4}E^{-1}})[E, D^{a_4}](D^{a_4}Z_3^{-1}D^{-a_4})(D^{\frac{a_4-1}{2}}Z_2^{-a_4}D^{\frac{1-a_4}{2}}) = 1.$$

Se $Z \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, então, em particular, lembremos que cZc^{-1} , wZw^{-1} , $wcZc^{-1}w^{-1} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, para todo $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Analogamente, $c\overline{Z}c^{-1}$, $w\overline{Z}w^{-1}$, $wc\overline{Z}c^{-1}w^{-1} \in \mathbb{Z}[L]$, para todo $w \in \Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, onde L é, ora $\Pi_1(T)$, ora K . Assim, denotando $Z_2 := \overline{Z_2}$ e $Z_3 := \overline{Z_3}$ e observando que, por 3.4.3, $cDc^{-1}D^{-a_4} \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, obtemos, a partir da equação principal acima, a primeira equação do enunciado, tanto em $\mathbb{Z}[\Pi_1(T)]$, quanto em $\mathbb{Z}[K]$. Agora, desde que $j_{\#}(D) = j_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})$ e $j_{\#}(E) = j_{\#}(\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2})$, segue que $\overline{DBD}^{-1} = B_{(b_3, b_4-1)}$ e $\overline{EBE}^{-1} = B_{(c_1, c_2)}$, onde $B = [\rho_1, \rho_2^{-1}]$. Daí, em

$\mathbb{Z}[K]$, $\overline{DBD^{-1}} = B_{(0,0)} = \overline{B} = \overline{EBE^{-1}}$ e, para todo $Z \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\overline{DZD^{-1}} = \overline{Z} = \overline{EZE^{-1}}$. Logo, em $\mathbb{Z}[K]$,

$$\begin{aligned} Ec\overline{Z_2}c^{-1}E^{-1} &= c\overline{Z_2}c^{-1}, \\ \overline{EcDc^{-1}D^{-a_4}E^{-1}} &= \overline{cDc^{-1}D^{-a_4}}, \\ D^{a_4}\overline{Z_3}^{-1}D^{-a_4} &= \overline{Z_3}^{-1}, \\ D^{\frac{a_4-1}{2}}\overline{Z_2}^{-a_4}D^{\frac{1-a_4}{2}} &= \overline{Z_2}^{-a_4}. \end{aligned}$$

Assim, denotando $Z_2 := \overline{Z_2}$ e $Z_3 := \overline{Z_3}$, na verdade, a equação, em $\mathbb{Z}[K]$, obtida acima, é tal que

$$(Z_3)cZ_2c^{-1}\overline{cDc^{-1}D^{-a_4}}\overline{[E, D^{a_4}]}(Z_3^{-1})Z_2^{-a_4} = 1,$$

donde, como $\mathbb{Z}[K]$ é abeliano, segue a segunda equação do enunciado. Note-mos que, se a equação principal admite solução Z_2, Z_3 , então as equações do enunciado admitem soluções $\overline{Z_2}, \overline{Z_3}$. ■

Corolário 3.5.7. *Com as notações de 3.5.6, se a equação principal admite solução, então*

$$(\det A)|Z_2| + |cDc^{-1}D^{-a_4}| + |[E, D^{a_4}]| + |Z_2^{-a_4}| = 0.$$

De fato, aplicando $\mathcal{E}$ na segunda equação de 3.5.6, obtemos $|cZ_2c^{-1}| + |cDc^{-1}D^{-a_4}| + |[E, D^{a_4}]| + |Z_2^{-a_4}| = 0$, donde, como, pelo item (4) de 3.5.4, $|cZ_2c^{-1}| = (\det A)|Z_2|$, segue o resultado. ■

3.6 Resolução para T -fibrados sobre S^1

Nesta seção, enunciaremos e provaremos o principal resultado deste trabalho, a classificação (para T -fibrados sobre S^1) de aplicações contínuas que preservam fibra sobre S^1 que são deformáveis sobre S^1 a livre de ponto fixo. Para tanto, usaremos a classificação de T -fibrados sobre S^1 e aplicações contínuas que preservam fibra sobre S^1 que, restritas a fibra, são deformáveis a livre de ponto fixo, dada por 3.2.4.

Teorema 3.6.1. *Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 qualquer. Então existe um levantamento Γ para $(\pi_2 \circ k \circ h \circ (1, f))_\#$ se, e somente se,*

(Caso 0) *sempre;*

(Caso 1) $c_1(b_4 - 1) - c_2b_3 = 0$;

(Caso 2) $c_1(b_4 - 1) - c_2b_3 = 0$;

(Caso 3) $b_3b_4 - c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, *exceto quando*

a_3 *é par e* $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$; *ou*

a_3 *é ímpar e* $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$;

(Caso 4) a_3 *é par e* $(b_4 - 1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2) \equiv 0 \pmod{2}$,

exceto quando $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2$ *e* $\frac{b_4 - 1}{L}$ *são ímpares; ou*

a_3 *é ímpar e* $\frac{b_4 - 1}{2}(1 + c_2) \equiv 0 \pmod{2}$,

exceto quando $1 + c_2$ *e* $\frac{b_4 - 1}{L}$ *são ímpares, onde* $L := \text{mdc}(b_4 - 1, c_2)$.

Caso 0.

Se f é como no caso 0, então, por 3.3.12, existe Γ .

Caso 1.

Seja f como no caso 1, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$. Consideremos, por 3.4.2, a equação principal

$$(Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1})[E, D](DZ_3^{-1}D^{-1})(Z_2^{-1}) = 1.$$

Temos que uma condição necessária para a equação principal admitir solução, dada por 3.5.7, é a de que $|Z_2| + |cDc^{-1}D^{-1}| + |[E, D]| + |Z_2^{-1}| = 0$, isto é,

$$|cDc^{-1}D^{-1}| + |[E, D]| = 0.$$

Pelo item (3) de 3.5.4, uma vez que $D = Z_D\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}$, $E = Z_E\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}$, para algum $Z_D, Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, temos que $|[E, D]| = \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix}$.

Se $a_3 = 0$, então, por 3.3.7, $c\rho_1c^{-1} = \rho_1$ e $c\rho_2c^{-1} = \rho_2$, donde $cDc^{-1} = D$ e portanto $cDc^{-1}D^{-1} = 1$. Logo, $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$ é uma condição necessária, quando $a_3 = 0$.

Se $b_4-1 = 0$, então, escolhendo $D = \rho_1^{b_3}$, temos, por 3.3.7, que $cDc^{-1} = c\rho_1^{b_3}c^{-1} = \rho_1^{b_3} = D$ e portanto $cDc^{-1}D^{-1} = 1$. Daí, $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = 0$ é uma condição necessária, quando $b_4-1 = 0$.

Verifiquemos que $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$ é, também, condição suficiente para a equação principal admitir solução. Desde que $(b_3, b_4-1) \neq (0, 0)$, existe $L = \text{mdc}(b_3, b_4-1)$. Seja $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $(b_3, b_4-1) = L(k_1, k_2)$. Como $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$, segue que existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $(c_1, c_2) = l(k_1, k_2)$. Logo, escolhendo $D = w^L$, $E = w^l$, onde $w = \rho_1^{k_1}(\rho_2^{-1})^{k_2}$, temos que $[E, D] = 1$. Se $a_3 = 0$, observemos que já temos $cDc^{-1}D^{-1} = 1$. Se $b_4-1 = 0$, notemos, em particular, que $k_2 = 0$ e $D = w^L = \rho_1^{b_3}$, donde, também, $cDc^{-1}D^{-1} = 1$. Portanto, já que $[E, D] = 1$ e $cDc^{-1}D^{-1} = 1$, segue que $Z_2 = 1 = Z_3$ é uma solução para a equação principal.

Assim, no caso 1, existe Γ se, e só se, $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$.

Caso 2.

Seja f como no caso 2, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = -2b_3$ e $b_4 \neq 1$. Consideremos, por 3.4.2, a equação principal

$$(Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(E(cDc^{-1}D)E^{-1})[E, D^{-1}](D^{-1}Z_3^{-1}D)(D^{-1}Z_2D) = 1.$$

Temos que uma condição necessária, dada por 3.5.7, para a equação principal admitir solução é a de que $-|Z_2| + |cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| + |Z_2| = 0$, ou seja,

$$|cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| = 0.$$

Pelo item (3) de 3.5.4, uma vez que $D^{-1} = Z_{D^{-1}}\rho_1^{-b_3}(\rho_2^{-1})^{-(b_4-1)}$, $E = Z_E\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}$, para algum $Z_{D^{-1}}, Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, temos que $|[E, D^{-1}]| = -\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix}$. Desde que $a_3(b_4-1) = -2b_3$, então, em particular, 2 ou divide a_3 , ou divide b_4-1 . Tomemos $w := \rho_2^{-1}\rho_1^{\frac{a_3}{2}}$, se 2 divide a_3 , e $v := \rho_2^{-1}\rho_1^{-a_3}\rho_2^{-1}$, se

2 divide $b_4 - 1$. Como, por 3.3.7, $c\rho_1 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2$ e $c\rho_2 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3}$, então $cwc^{-1} = w^{-1}$ e $cvc^{-1} = v^{-1}$. Logo, escolhendo ou $D = w^{b_4-1}$, ou $D = v^{\frac{b_4-1}{2}}$, segue que $cDc^{-1} = D^{-1}$, isto é, $cDc^{-1}D = 1$. Portanto, $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$ é uma condição necessária.

Consideremos o homomorfismo $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $w \mapsto (|cwc^{-1}w^{-1}|_1, |cwc^{-1}w^{-1}|_2)$. Desde que $\rho_1 \mapsto (|c\rho_1 c^{-1}\rho_1^{-1}|_1, |c\rho_1 c^{-1}\rho_1^{-1}|_2) = (|\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2\rho_1^{-1}|_1, |\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2\rho_1^{-1}|_2) = (0, 0)$ e $\rho_2^{-1} \mapsto (|c\rho_2^{-1}c^{-1}\rho_2|_1, |c\rho_2^{-1}c^{-1}\rho_2|_2) = (|\rho_1^{a_3}\rho_2\rho_2|_1, |\rho_1^{a_3}\rho_2\rho_2|_2) = (a_3, -2)$, então, por 3.4.7, a fim de analisar se a equação principal admite solução para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$, é suficiente analisar para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathfrak{C}\}$, onde $\mathfrak{C}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (a_3, -2) \rangle}$. Temos que

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (a_3, -2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (a_3, -2), (r, -1) \rangle}{\langle (a_3, -2) \rangle} \cong \mathbb{Z}, & \text{se } a_3 = 2r + 1; \\ \frac{\langle (1, 0), (r, -1) \rangle}{\langle (a_3, -2) \rangle} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_3 = 2r. \end{cases}$$

Se $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{r} + 1$, então $\mathfrak{C}_{2r+1} := \{(yr, -y) | y \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2r+1, -2) \rangle}$. Desde que $\mathfrak{C}_{2r+1}$ deve satisfazer $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$ e $(2r+1)(b_4-1) = -2b_3$, com $b_4 \neq 1$, então $b_4-1 = 2s$, para algum $0 \neq s \in \mathbb{Z}$, e $0 = \det\begin{pmatrix} yr & -s(2r+1) \\ -y & 2s \end{pmatrix} = ys(2r-2r-1)$, donde $y = 0$. Assim, em particular, quando $a_3 = 2r+1$, a equação principal não admite solução para as entradas de dados $(b_3, b_4, yr, -y)$ tais que $y \neq 0$. Verifiquemos que, quando $a_3 = 2r+1$, para $(b_3, b_4, 0, 0)$, ela admite solução. De fato, escolhendo $D = v^{\frac{b_4-1}{2}}$ e $E = 1$, temos que $[E, D^{-1}] = 1$ e $cDc^{-1}D = 1$, donde a equação principal admite a solução $Z_2 = 1 = Z_3$. Em particular, quando $a_3 = 2r+1$, se $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$, então a equação principal admite solução.

Se $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{r}$, então $\mathfrak{C}_{2r} := \{(x, 0), (\tilde{x} + r, -1) | x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2r, -2) \rangle}$. Como $\mathfrak{C}_{2r}$ deve

satisfazer $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$ e $(2r)(b_4-1) = -2b_3$, com $b_4 \neq 1$, então $0 = \det\begin{pmatrix} x & -r(b_4-1) \\ 0 & b_4-1 \end{pmatrix} = (b_4-1)x$ e $0 = \det\begin{pmatrix} \tilde{x}+r & -r(b_4-1) \\ -1 & b_4-1 \end{pmatrix} = (b_4-1)(\tilde{x}+r-r)$, donde $x = 0 = \tilde{x}$. Daí, em particular, quando $a_3 = 2r$, a equação principal não admite solução para as entradas de dados $(b_3, b_4, x, 0)$ e $(b_3, b_4, \tilde{x}+r, -1)$ tais que $x \neq 0 \neq \tilde{x}$. Verifiquemos que, quando $a_3 = 2r$, para $(b_3, b_4, 0, 0)$ e para $(b_3, b_4, r, -1)$, ela admite solução. Com efeito, ou escolhendo $D = w^{b_4-1}$, $E = 1$, ou escolhendo $D = w^{b_4-1}$, $E = w^{-1} = \rho_1^r \rho_2$, segue que $[E, D^{-1}] = 1$ e $cDc^{-1}D = 1$ e portanto a equação principal admite a solução $Z_2 = 1 = Z_3$. Em particular, quando $a_3 = 2r$, se $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$, então a equação principal admite solução.

Logo, também no caso 2, existe Γ se, e somente se, $\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$.

Caso 3.

Seja f como no caso 3, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = 0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$. Consideremos, por 3.4.2, a equação principal

$$(Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(E(cDc^{-1}D)E^{-1})[E, D^{-1}](D^{-1}Z_3^{-1}D)(D^{-1}Z_2D) = 1.$$

Temos que uma condição necessária, dada por 3.5.7, para a equação principal admitir solução é a de que $|Z_2| + |cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| + |Z_2| = 0$, ou seja,

$$2|Z_2| + |cDc^{-1}D| + |[E, D^{-1}]| = 0.$$

Pelo item (3) de 3.5.4, temos que $|[E, D^{-1}]| = -\det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix}$. Daí,

$$|cDc^{-1}D| - \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$$

também é uma condição necessária. Desde que, se $D' := Z_D D$ e $E' := Z_E E$,

para algum $Z_D, Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, então

$$\begin{aligned}
|cD'c^{-1}D'| &= |cZ_D D c^{-1} Z_D D| \\
&= |(cZ_D c^{-1})(cD c^{-1} D)(D^{-1} Z_D D)| \\
&= |cZ_D c^{-1}| + |cD c^{-1} D| + |D^{-1} Z_D D| \\
&\stackrel{\text{por 3.5.4}}{=} (\det A)|Z_D| + |cD c^{-1} D| + |Z_D| \\
&= 2|Z_D| + |cD c^{-1} D|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|[E', D'^{-1}]| &= |[Z_E E, Z_{D^{-1}} D^{-1}]| \\
&\stackrel{\text{por 3.5.4}}{=} |[E, D^{-1}]|,
\end{aligned}$$

segue que, módulo 2, não há perda de generalidade em considerarmos $D = \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}$ na condição necessária. Observemos que $(\rho_1^{a_3} \rho_2)^{b_4-1}(\rho_2^{-1})^{b_4-1} = 1$, pois $a_3(b_4-1) = 0$. Como, por 3.3.7, $c\rho_1 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2$ e $c\rho_2 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3}$, segue que

$$\begin{aligned}
|c(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})c^{-1}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})| &= \\
|(c\rho_1 c^{-1})^{b_3}(c\rho_2^{-1} c^{-1})^{b_4-1} \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}| &= \\
|(\rho_2^{-1} \rho_1^{-b_3} \rho_2)(\rho_1^{a_3} \rho_2)^{b_4-1} \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}| &= \\
|(\rho_2^{-1} \rho_1^{-b_3} \rho_2 \rho_1^{b_3}) \rho_1^{-b_3} ((\rho_1^{a_3} \rho_2)^{b_4-1} (\rho_2^{-1})^{b_4-1}) \rho_1^{b_3} (\rho_1^{-b_3} (\rho_2^{-1})^{-(b_4-1)} \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1})| &= \\
|[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-b_3}] \rho_1^{-b_3} \rho_1^{b_3} [\rho_1^{-b_3}, (\rho_2^{-1})^{-(b_4-1)}]| &= \\
|[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-b_3}]| + |[\rho_1^{-b_3}, (\rho_2^{-1})^{-(b_4-1)}]| &\stackrel{\text{por 3.5.4}}{=} \\
\det \begin{pmatrix} 0 & -b_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -b_3 & 0 \\ 0 & -(b_4-1) \end{pmatrix} &= \\
b_3 b_4 &
\end{aligned}$$

Logo, uma condição necessária para a equação principal admitir solução é a de que

$$b_3 b_4 - \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Consideremos o homomorfismo $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $w \mapsto (|cwc^{-1}w^{-1}|_1, |cwc^{-1}w^{-1}|_2)$. Desde que $\rho_1 \mapsto (|c\rho_1 c^{-1} \rho_1^{-1}|_1, |c\rho_1 c^{-1} \rho_1^{-1}|_2) = (|\rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1^{-1}|_1, |\rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1^{-1}|_2) = (-2, 0)$ e $\rho_2^{-1} \mapsto (|c\rho_2^{-1} c^{-1} \rho_2|_1, |c\rho_2^{-1} c^{-1} \rho_2|_2) = (|\rho_1^{a_3} \rho_2 \rho_2|_1, |\rho_1^{a_3} \rho_2 \rho_2|_2) = (a_3, -2)$,

então, por 3.4.7, a fim de analisar se a equação principal admite solução para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$, é suficiente analisar para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathfrak{C}\}$, onde $\mathfrak{C}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-2, 0), (a_3, -2) \rangle}$. Desde que $\langle (-2, 0), (2r+1, -2) \rangle = \langle (1, 2), (0, 4) \rangle$ e $\langle (-2, 0), (2r, -2) \rangle = \langle (2, 0), (0, 2) \rangle$, para todo $r \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-2, 0), (a_3, -2) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (1, 2), (0, 1) \rangle}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle} \cong \mathbb{Z}_4, & \text{se } a_3 = 2r + 1; \\ \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } a_3 = 2r. \end{cases}$$

Notemos que, se $(E(cDc^{-1}D)E^{-1})[E, D^{-1}] = EcDc^{-1}E^{-1}D = 1$, para algum D, E tal que $j_{\#}(D) = j_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})$, $j_{\#}(E) = j_{\#}(\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2})$, então a equação principal admite a solução trivial.

Se $a_3 = 2r + 1$, então $\mathfrak{C}_{2r+1} := \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$. Desde que $(2r + 1)(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3, b_4 - 1) \neq (0, 0)$, então $b_4 - 1 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Assim, $\mathfrak{C}_{2r+1}$ deve satisfazer $b_3(c_2 + 1) = b_3 - \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_3 \\ c_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = b_3b_4 - \det\left(\begin{smallmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{smallmatrix}\right) \equiv 0 \pmod{2}$. Se c_2 é par, segue que $b_3 = 2s$, para algum $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, enquanto que, se c_2 é ímpar, segue que $b_3 \neq 0$ é qualquer. Deste modo, em particular, quando $a_3 = 2r + 1$, a equação principal não admite solução para as entradas de dados $(2s + 1, 1, 0, 0)$ e $(2s + 1, 1, 0, 2)$, para todo $s \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que, por um lado, para $(2s, 1, 0, 0)$, $(b_3, 1, 0, 1)$ e $(b_3, 1, 0, 3)$, ela admite solução e, por outro lado, para $(2s, 1, 0, 2)$, ela não admite solução, para todo $s, b_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. De fato, tomando $D = \rho_1^s \rho_2^{-1} \rho_1^s \rho_2$, $E = 1$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = ((\rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2) \rho_1^{a_3} \rho_2 (\rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2) \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3}) \rho_1^s \rho_2^{-1} \rho_1^s \rho_2 = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(2s, 1, 0, 0)$. Agora, tomando $D = \rho_2^{-1} \rho_1^{b_3} \rho_2$, $E = \rho_2^{-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_2^{-1} (\rho_1^{a_3} \rho_2 (\rho_2^{-1} \rho_1^{-b_3} \rho_2) \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3}) \rho_2 \rho_2^{-1} \rho_1^{b_3} \rho_2 = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 1, 0, 1)$. Finalmente, tomando $D = \rho_1^{b_3}, E = \rho_1^{-2}\rho_2$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_1^{-2}\rho_2(\rho_2^{-1}\rho_1^{-b_3}\rho_2)\rho_2^{-1}\rho_1^2\rho_1^{b_3} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 1, -2, -1)$ e portanto para $(b_3, 1, 0, 3)$, uma vez que $[(0, 3)] = [(-2, -1)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$. Mostremos, agora, que a equação principal não admite solução para $(2s, 1, 0, 2)$. Desde que $[(0, 2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$, basta mostrarmos para $(2s, 1, 1, 0)$. Faremos isto, ao verificarmos que a equação principal não admite solução em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (2s, 0) \rangle})$. Tomemos $D = \rho_1^{2s}, E = \rho_1$. Daí,

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_1(\rho_2^{-1}\rho_1^{-2s}\rho_2)\rho_1^{-1}\rho_1^{2s} = \rho_1[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-2s}]\rho_1^{-1}.$$

Em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (2s, 0) \rangle})$, $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = \rho_1[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-2s}]\rho_1^{-1}$. Consideremos a identidade $[x, y^n] = (y^{-1}[y, x]y)(y^{-2}[y, x]y^2) \cdots (y^{-n}[y, x]y^n)$, para $n > 0$. Daí, para $s > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} &= \rho_1 B_{(-1, 0)} B_{(-2, 0)} \cdots B_{(-2s, 0)} \rho_1^{-1} \\ &= B_{(0, 0)} B_{(-1, 0)} \cdots B_{(-2s+1, 0)} \\ &= B_{(0, 0)} B_{(1, 0)} \cdots B_{(2s-1, 0)}, \end{aligned}$$

onde $B = [\rho_1, \rho_2^{-1}]$. Ainda, se Z_2^{-1} contém $B_{(x, y)}^n$, então, desde que

$$\begin{aligned} EcB_{(x, y)}^n c^{-1} E^{-1} &= \overline{\rho_1 c \rho_1^x \rho_2^{-y} B^n \rho_2^y \rho_1^{-x} c^{-1} \rho_1^{-1}} \\ &= \overline{\rho_1 \rho_2^{-1} \rho_1^{-x} \rho_2 (\rho_1^{a_3} \rho_2)^y (c B^n c^{-1}) (\rho_1^{a_3} \rho_2)^{-y} \rho_2^{-1} \rho_1^x \rho_2 \rho_1^{-1}} \\ &= \overline{\rho_1 \rho_2^{-1} \rho_1^{-x} \rho_2 (\rho_1^{a_3} \rho_2)^y (\rho_1^{-1} B^n \rho_1) (\rho_1^{a_3} \rho_2)^{-y} \rho_2^{-1} \rho_1^x \rho_2 \rho_1^{-1}} \\ &= B_{(-x+a_3y, -y)}^n, \end{aligned}$$

segue que $(EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2^{-1}$ contém $B_{(-x+a_3y, -y)}^n B_{(x, y)}^n$. Desde que, em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (2s, 0) \rangle})$, $\overline{DZD^{-1}} = \overline{Z} = \overline{D^{-1}ZD}$ e este grupo é abeliano, temos que a equação principal, nele, é tal que

$$EcZ_2c^{-1}E^{-1}(\overline{EcDc^{-1}DE^{-1}})[\overline{E}, \overline{D^{-1}}]Z_2 = 1,$$

ou melhor,

$$\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = (EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2^{-1}.$$

Como $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = B_{(0,0)}B_{(1,0)}\cdots B_{(2s-1,0)}$ e $s \neq 0$, segue que o membro direito da equação acima deve conter $B_{(2s-x,0)}B_{(x,0)}$, com $0 \leq x \leq s$. Daí, resulta que $B_{(0,0)}B_{(s,0)} = 1$, o que é uma contradição. Se $s < 0$, então, a partir da identidade $[y, x^n] = [y, x](x[y, x]x^{-1})\cdots(x^{n-1}[y, x]x^{-n+1})$, para $n > 0$, obtemos $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = B_{(1,0)}^{-1}B_{(2,0)}^{-1}\cdots B_{(-2s,0)}^{-1} = B_{(0,0)}^{-1}B_{(1,0)}^{-1}\cdots B_{(-2s+1,0)}^{-1}$ e a contradição segue de forma análoga. Logo, a equação acima não admite solução e portanto a equação principal não admite solução para $(2s, 1, 0, 2)$.

Se $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{r}$, então $\mathfrak{C}_{2r} := \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$. Como $(2r)(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3, b_4 - 1) \neq (0, 0)$, então, se $r \neq 0$, segue que $b_4 - 1 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Assim, $\mathfrak{C}_{2r}$ deve satisfazer $b_3(c_2 + 1) = b_3 - \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = b_3b_4 - \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$. Se c_2 é par, então $b_3 = 2s$, para algum $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, enquanto que, se c_2 é ímpar, segue que $b_3 \neq 0$ é qualquer. Desta forma, em particular, quando $a_3 = 2r \neq 0$, a equação principal não admite solução para as entradas de dados $(2s+1, 1, 0, 0)$ e $(2s+1, 1, 1, 0)$, para todo $s \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que, por um lado, para $(2s, 1, 0, 0)$, $(b_3, 1, 0, 1)$ e $(b_3, 1, 1, 1)$, ela admite solução e, por outro lado, para $(2s, 1, 1, 0)$, ela não admite solução, para todo $s, b_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Com efeito, tomando os mesmos D 's e E 's acima, temos que a equação principal admite solução para as entradas de dados $(2s, 1, 0, 0)$ e $(b_3, 1, 0, 1)$. Agora, tomando $D = \rho_1^{b_3}$, $E = \rho_1^{-1}\rho_2$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_1^{-1}\rho_2(\rho_2^{-1}\rho_1^{-b_3}\rho_2)\rho_2^{-1}\rho_1\rho_1^{b_3} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 1, -1, -1)$ e portanto para $(b_3, 1, 1, 1)$, uma vez que $[(1, 1)] = [(-1, -1)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$. Finalmente, a demonstração de que a equação principal não admite solução para $(2s, 1, 1, 0)$,

quando $a_3 = 2r + 1$, também se aplica aqui, quando $a_3 = 2r \neq 0$.

Se $\mathbf{a_3=2r=0}$, então, desde que $\mathfrak{C}_{2r}$ deve satisfazer $b_3b_4 - \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$, segue que ou $(c_1, c_2) = (0, 0)$ e portanto b_3b_4 é par, ou $(c_1, c_2) = (1, 0)$ e daí $(b_3 + 1)b_4$ é ímpar, ou $(c_1, c_2) = (0, 1)$ e portanto $b_3(b_4 + 1)$ é par, ou $(c_1, c_2) = (1, 1)$ e daí $(b_3 + 1)(b_4 + 1)$ é par. Assim, em particular, quando $a_3 = 0$, a equação principal não admite solução para as entradas de dados $(2s+1, 2t+1, 0, 0)$, $(2s+1, b_4, 1, 0)$, $(b_3, 2t, 1, 0)$, $(2s+1, 2t, 0, 1)$, $(2s, 2t, 1, 1)$, para todo $s, t, b_3, b_4 \in \mathbb{Z}$. Verifiquemos que, por um lado, para $(b_3, 2t, 0, 0)$, $(2s, b_4, 0, 0)$, $(b_3, 2t+1, 0, 1)$, $(2s, b_4, 0, 1)$, $(b_3, 2t+1, 1, 1)$ e $(2s+1, b_4, 1, 1)$, ela admite solução e, por outro lado, para $(2s, 2t+1, 1, 0)$, ela não admite solução, para todo $s, t, b_3, b_4 \in \mathbb{Z}$, com $(2s, b_4), (b_3, 2t+1), (2s, 2t+1) \neq (0, 1)$. De fato, tomando $D = (\rho_2^{-1})^t \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{t-1}$, $E = 1$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = (\rho_2^t \rho_2^{-1} \rho_1^{-b_3} \rho_2 \rho_2^{t-1}) (\rho_2^{-1})^t \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{t-1} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 2t, 0, 0)$. Tomando $D = \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{b_4} \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{-1}$, $E = 1$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = (\rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2 \rho_2^{b_4} \rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2 \rho_2^{-1}) \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{b_4} \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{-1} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(2s, b_4, 0, 0)$. Agora, se $D = (\rho_2^{-1})^t \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^t$, $E = (\rho_2^{-1})^{-1}$, segue que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_2 (\rho_2^t \rho_2^{-1} \rho_1^{-b_3} \rho_2 \rho_2^t) \rho_2^{-1} (\rho_2^{-1})^t \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^t = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 2t+1, 0, -1)$ e portanto para $(b_3, 2t+1, 0, 1)$, uma vez que $[(0, 1)] = [(0, -1)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$. Se $D = \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{b_4-1} \rho_1^s$, $E = (\rho_2^{-1})^{-1}$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_2 (\rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2 \rho_2^{b_4-1} \rho_2^{-1} \rho_1^{-s} \rho_2) \rho_2^{-1} \rho_1^s (\rho_2^{-1})^{b_4-1} \rho_1^s = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(2s, b_4, 0, -1)$ e portanto para $(2s, b_4, 0, 1)$. Finalmente, tomando $D = (\rho_2^{-1})^t \rho_1^{b_3-1} (\rho_2^{-1})^t \rho_1$, $E = \rho_1^{-1} (\rho_2^{-1})^{-1}$,

temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_1^{-1}\rho_2(\rho_2^t\rho_2^{-1}\rho_1^{-b_3+1}\rho_2\rho_2^t\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2)\rho_2^{-1}\rho_1(\rho_2^{-1})^t\rho_1^{b_3-1}(\rho_2^{-1})^t\rho_1 = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(b_3, 2t+1, -1, -1)$ e portanto para $(b_3, 2t+1, 1, 1)$, uma vez que $[(1, 1)] = [(-1, -1)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$. Se $D = \rho_1^s(\rho_2^{-1})^{b_4-1}\rho_1^{s+1}$, $E = \rho_1^{-1}(\rho_2^{-1})^{-1}$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D = \rho_1^{-1}\rho_2(\rho_2^{-1}\rho_1^{-s}\rho_2\rho_2^{b_4-1}\rho_2^{-1}\rho_1^{-s-1}\rho_2)\rho_2^{-1}\rho_1\rho_1^s(\rho_2^{-1})^{b_4-1}\rho_1^{s+1} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(2s+1, b_4, -1, -1)$ e portanto para $(2s+1, b_4, 1, 1)$. Mostremos, agora, que a equação principal não admite solução para $(2s, 2t+1, 1, 0)$. Faremos isto, ao verificarmos que a equação principal não admite solução em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (2s, 0), (0, 2t) \rangle})$. Tomemos $D = (\rho_2^{-1})^t\rho_1^{2s}(\rho_2^{-1})^t$, $E = \rho_1$. Daí,

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D &= \\ \rho_1(\rho_2^t\rho_2^{-1}\rho_1^{-2s}\rho_2\rho_2^t)\rho_1^{-1}(\rho_2^{-1})^t\rho_1^{2s}(\rho_2^{-1})^t &= \\ \rho_1\rho_2^t\rho_2^{-1}\rho_1^{-2s}\rho_2\rho_2^t(\rho_2^{-t}\rho_1^{2s}\rho_2^{-t}\rho_1^{-1}\rho_2^t\rho_1^{-2s}\rho_1^{-1}\rho_1^{2s}\rho_2^{-t}\rho_2^t\rho_1^{-2s}\rho_1\rho_2^t)\rho_1^{-1}\rho_2^t\rho_1^{2s}\rho_2^{-t} &= \\ (\rho_1\rho_2^t[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-2s}]\rho_2^{-t}\rho_1^{-1})[\rho_1, \rho_2^t](\rho_2^t\rho_1^{-2s}[\rho_1, \rho_2^t]\rho_1^{2s}\rho_2^{-t}). \end{aligned}$$

Temos que $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = \rho_1\rho_2^t\overline{[\rho_2^{-1}, \rho_1^{-2s}]\rho_2^{-t}\rho_1^{-1}[\rho_1, \rho_2^t]\rho_2^t\rho_1^{-2s}[\rho_1, \rho_2^t]\rho_1^{2s}\rho_2^{-t}}$, em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (2s, 0), (0, 2t) \rangle})$. Consideremos as identidades

$$\begin{aligned} [x, y^n] &= (y^{-1}[y, x]y)(y^{-2}[y, x]y^2)\cdots(y^{-n}[y, x]y^n), \\ [y, x^n] &= [y, x](x[y, x]x^{-1})\cdots(x^{n-1}[y, x]x^{-n+1}), \end{aligned}$$

para $n > 0$. Daí, para $s > 0$ e $-t=:k > 0$,

$$\begin{aligned} [\rho_2^{-1}, \rho_1^{-2s}] &= (\rho_1^{-1}B\rho_1)(\rho_1^{-2}B\rho_1^2)\cdots(\rho_1^{-2s}B\rho_1^{2s}), \\ [\rho_1, (\rho_2^{-1})^k] &= B(\rho_2^{-1}B\rho_2)\cdots((\rho_2^{-1})^{k-1}B(\rho_2^{-1})^{-k+1}) \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} &= \rho_1\rho_2^t\overline{[\rho_2^{-1},\rho_1^{-2s}]\rho_2^{-t}\rho_1^{-1}[\rho_1,\rho_2^t]\rho_2^t\rho_1^{-2s}[\rho_1,\rho_2^t]\rho_1^{2s}\rho_2^{-t}} \\
&= \rho_1\rho_2^t\overline{(\rho_1^{-1}B\rho_1)(\rho_1^{-2}B\rho_1^2)\cdots(\rho_1^{-2s}B\rho_1^{2s})\rho_2^{-t}\rho_1^{-1}} \\
&\quad \cdot \overline{B(\rho_2^{-1}B\rho_2)\cdots((\rho_2^{-1})^{k-1}B(\rho_2^{-1})^{-k+1})} \\
&\quad \cdot \rho_2^t\rho_1^{-2s}\overline{B(\rho_2^{-1}B\rho_2)\cdots((\rho_2^{-1})^{k-1}B(\rho_2^{-1})^{-k+1})}\rho_1^{2s}\rho_2^{-t} \\
&= \rho_1\rho_2^t B_{(-1,0)}B_{(-2,0)}\cdots B_{(-2s,0)}\rho_2^{-t}\rho_1^{-1} \\
&\quad \cdot B_{(0,0)}B_{(0,1)}\cdots B_{(0,k-1)} \\
&\quad \cdot \rho_2^t\rho_1^{-2s}B_{(0,0)}B_{(0,1)}\cdots B_{(0,k-1)}\rho_1^{2s}\rho_2^{-t} \\
&= B_{(0,-t)}B_{(-1,-t)}\cdots B_{(-2s+1,-t)} \\
&\quad \cdot B_{(0,0)}B_{(0,1)}\cdots B_{(0,k-1)} \\
&\quad \cdot B_{(-2s,-t)}B_{(-2s,1-t)}\cdots B_{(-2s,k-1-t)} \\
&= B_{(0,k)}B_{(1,k)}\cdots B_{(2s-1,k)} \\
&\quad \cdot B_{(0,0)}B_{(0,1)}\cdots B_{(0,k-1)} \\
&\quad \cdot B_{(0,k)}B_{(0,k+1)}\cdots B_{(0,2k-1)}
\end{aligned}$$

onde $B = [\rho_1, \rho_2^{-1}]$. Ainda, se Z_2^{-1} contém $B_{(x,y)}^n$, então, desde que

$$\begin{aligned}
EcB_{(x,y)}^n c^{-1}E^{-1} &= \overline{\rho_1 c \rho_1^x \rho_2^{-y} B^n \rho_2^y \rho_1^{-x} c^{-1} \rho_1^{-1}} \\
&= \overline{\rho_1 \rho_2^{-1} \rho_1^{-x} \rho_2^y \rho_2^y (\rho_1^{-1} B^n \rho_1) \rho_2^{-y} \rho_2^{-1} \rho_1^x \rho_2 \rho_1^{-1}} \\
&= B_{(-x,-y)}^n,
\end{aligned}$$

segue que $(EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2^{-1}$ contém $B_{(-x,-y)}^n B_{(x,y)}^n$. Agora, como, em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{<(2s,0),(0,2t)>})$, $\overline{DZD^{-1}} = \overline{Z} = \overline{D^{-1}ZD}$ e este grupo é abeliano, então a equação principal, nele, é tal que

$$EcZ_2c^{-1}E^{-1}\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D}Z_2=1,$$

ou seja,

$$\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = (EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2^{-1}.$$

Desde que $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D} = B_{(0,k)}B_{(1,k)}\cdots B_{(2s-1,k)}B_{(0,0)}B_{(0,1)}\cdots B_{(0,2k-1)}$ e $(s,k) \neq (0,0)$, então o membro direito da equação acima deve conter

$B_{(2s-x,k)}B_{(x,k)}$ e $B_{(0,2k-y)}B_{(0,y)}$, com ou $0 < x \leq s$ e $0 \leq y \leq k$, ou $0 \leq x \leq s$ e $0 \leq y < k$. Daí, resulta que $B_{(0,0)}B_{(s,k)} = 1$, o que é uma contradição. Se $s < 0$, ou $t > 0$, a contradição segue de maneira análoga. Logo, a equação acima não admite solução e portanto a equação principal não admite solução para $(2s, 2t + 1, 1, 0)$.

Assim, no caso 3, existe Γ se, e somente se, $b_3b_4 - \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$, exceto se, ou $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1,2), (0,4) \rangle}$, quando a_3 é ímpar, ou $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2,0), (0,2) \rangle}$, quando a_3 é par.

Caso 4.

Seja f como no caso 4, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$. Consideremos, por 3.4.2, a equação principal

$$(Z_3)(EcZ_2c^{-1}E^{-1})(E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1})[E, D](DZ_3^{-1}D^{-1})(Z_2^{-1}) = 1.$$

Temos que uma condição necessária, dada por 3.5.7, para a equação principal admitir solução é a de que $-|Z_2| + |cDc^{-1}D^{-1}| + |[E, D]| + |Z_2^{-1}| = 0$, ou seja,

$$-2|Z_2| + |cDc^{-1}D^{-1}| + |[E, D]| = 0.$$

Pelo item (3) de 3.5.4, obtemos que $|[E, D]| = \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix}$, donde

$$|cDc^{-1}D^{-1}| + \det\begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}$$

também é uma condição necessária. Seja $D' := Z_D D$ e $E' := Z_E E$, para algum $Z_D, Z_E \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$. Desde que, por 3.5.4,

$$\begin{aligned} |cD'c^{-1}D'^{-1}| &= -2|Z_D| + |cDc^{-1}D^{-1}|, \\ |[E', D']| &= |[E, D]|, \end{aligned}$$

então, módulo 2, não há perda de generalidade em considerarmos, na condição necessária, $D = v^{\frac{b_4-1}{2}}$ quando a_3 é ímpar, ou $D = w^{b_4-1}$ quando a_3 é par, onde $v := \rho_2^{-1}\rho_1^{a_3}\rho_2^{-1}$ e $w := \rho_2^{-1}\rho_1^{\frac{a_3}{2}}$. Como, por 3.3.7, $c\rho_1c^{-1} = \rho_1^{-1}$ e $c\rho_2c^{-1} = \bar{\rho}_1^{a_3}\rho_2$,

segue que $cvc^{-1} = \rho_2^{-1}v\rho_2$ e $cwc^{-1} = w$, donde $cv^{\frac{b_4-1}{2}}c^{-1}(v^{\frac{b_4-1}{2}})^{-1} = [\rho_2^{-1}, v^{\frac{b_4-1}{2}}]$ e $cw^{b_4-1}c^{-1}(w^{b_4-1})^{-1} = 1$. Finalmente, desde que $v^{\frac{b_4-1}{2}} = W\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}$, para algum $W \in \Pi_2(T, T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, e $||[\rho_2^{-1}, W\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}]|| = \det \begin{pmatrix} 0 & b_3 \\ 1 & b_4-1 \end{pmatrix} = -b_3$, então

$$\begin{cases} -b_3 + \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}, & \text{se } a_3 \text{ é ímpar,} \\ \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{2}, & \text{se } a_3 \text{ é par,} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{b_4-1}{2}(1 + c_2) \equiv 0 \pmod{2}, & \text{se } a_3 \text{ é ímpar,} \\ (b_4-1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2) \equiv 0 \pmod{2}, & \text{se } a_3 \text{ é par,} \end{cases}$$

é uma condição necessária para a equação principal admitir solução.

Consideremos o homomorfismo $\Pi_1(T - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $w \mapsto (|cwc^{-1}w^{-1}|_1, |cwc^{-1}w^{-1}|_2)$. Desde que $\rho_1 \mapsto (|c\rho_1c^{-1}\rho_1^{-1}|_1, |c\rho_1c^{-1}\rho_1^{-1}|_2) = (|\rho_1^{-1}\rho_1^{-1}|_1, |\rho_1^{-1}\rho_1^{-1}|_2) = (-2, 0)$ e $\rho_2^{-1} \mapsto (|c\rho_2^{-1}c^{-1}\rho_2|_1, |c\rho_2^{-1}c^{-1}\rho_2|_2) = (|\rho_2^{-1}\rho_1^{a_3}\rho_2|_1, |\rho_2^{-1}\rho_1^{a_3}\rho_2|_2) = (a_3, 0)$, então, por 3.4.7, a fim de analisar se a equação principal admite solução para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$, é suficiente analisar para $\{(b_3, b_4, c_1, c_2) | (c_1, c_2) \in \mathfrak{C}\}$, onde $\mathfrak{C}$ é um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-2, 0), (a_3, 0) \rangle}$. Desde que $\langle (-2, 0), (2r+1, 0) \rangle = \langle (1, 0) \rangle$ e $\langle (-2, 0), (2r, 0) \rangle = \langle (2, 0) \rangle$, para todo $r \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (-2, 0), (a_3, 0) \rangle} = \begin{cases} \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (1, 0) \rangle} \cong \mathbb{Z}, & \text{se } a_3 = 2r+1; \\ \frac{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle}{\langle (2, 0) \rangle} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } a_3 = 2r. \end{cases}$$

Observemos que, se $(E(cDc^{-1}D^{-1})E^{-1})[E, D] = EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = 1$, para algum D, E tal que $j_{\#}(D) = j_{\#}(\rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4-1})$, $j_{\#}(E) = j_{\#}(\rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2})$, então a equação principal admite a solução trivial.

Se $a_3 = 2r$, então

$$\begin{array}{ll} \phi : G_1 \rightarrow G_2, & \psi : G_2 \rightarrow G_1, \\ \rho_1 \mapsto \rho_1 & \rho_1 \mapsto \rho_1 \\ \rho_2^{-1} \mapsto \rho_2^{-1} \rho_1^{-\frac{a_3}{2}} & \rho_2^{-1} \mapsto \rho_2^{-1} \rho_1^{\frac{a_3}{2}} \\ c \mapsto c & c \mapsto c \end{array}$$

são isomorfismos inversos, onde

$$\begin{aligned} G_1 &:= \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{-1}, c\rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{a_3} \rangle \\ G_2 &:= \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{-1}, c\rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_2^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

De fato, $\phi \circ \psi = 1$, $\psi \circ \phi = 1$, $\phi(c\rho_1 c^{-1}\rho_1) = c\rho_1 c^{-1}\rho_1 = 1$, $\phi(c\rho_2^{-1} c^{-1} \rho_1^{-a_3} \rho_2) = c\rho_2^{-1} \rho_1^{-\frac{a_3}{2}} c^{-1} \rho_1^{-a_3} \rho_1^{\frac{a_3}{2}} \rho_2 = 1$, $\psi(c\rho_1 c^{-1}\rho_1) = c\rho_1 c^{-1}\rho_1 = 1$ e $\psi(c\rho_2^{-1} c^{-1} \rho_2) = c\rho_2^{-1} \rho_1^{\frac{a_3}{2}} c^{-1} \rho_1^{-\frac{a_3}{2}} \rho_2 = 1$. Consideremos $f_{\#} : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_1$, $f_{\#}(\rho_1) = \rho_1$, $f_{\#}(\rho_2^{-1}) = \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4}$, $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$, onde $\tilde{G}_i$ é G_i com a relação adicional $[\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1$. Notemos que podemos considerar $\phi : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$, $\psi : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_1$. Daí, $f_{\#} := \phi \circ f_{\#} \circ \psi : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_2$ é tal que $f_{\#}(\rho_1) = \rho_1$, $f_{\#}(\rho_2^{-1}) = (\rho_2^{-1})^{b_4}$, $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1 + \frac{a_3}{2}} c_2 (\rho_2^{-1})^{c_2} c$. Assim, obtemos $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, $c'_1 = c_1 + \frac{a_3}{2} c_2$ e $c'_2 = c_2$, para os quais é equivalente resolver a equação principal. Consideremos as novas entradas de dados $(0, b_4, c_1 - \frac{a_3}{2} c_2, c_2)$. Seja $\mathfrak{C}_{2r} := \{(0, c_2), (1, c_2) | c_2 \in \mathbb{Z}\}$ um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0) \rangle}$. Temos que $\mathfrak{C}_{2r}$ deve satisfazer $(b_4 - 1)(c_1 - \frac{a_3}{2} c_2) \equiv 0 \pmod{2}$. Se $c_1 - \frac{a_3}{2} c_2 = 1$, então $b_4 = 2t + 1$, para algum $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, enquanto que, se $c_1 - \frac{a_3}{2} c_2 = 0$, então $b_4 \neq 1$ é qualquer. Seja $L := \text{mdc}(b_4 - 1, c_2)$. Verifiquemos que, por um lado, para $(0, b_4, 0, c_2)$ e $(0, 2t + 1, 1, c_2)$, onde $\frac{2t}{L}$ é par, a equação principal admite solução e, por outro lado, para $(0, 2t + 1, 1, c_2)$, onde $\frac{2t}{L}$ é ímpar, ela não admite solução, para todo $b_4, t, c_2 \in \mathbb{Z}$, $b_4 \neq 1, t \neq 0$. De fato, tomando $D = (\rho_2^{-1})^{b_4-1}$, $E = (\rho_2^{-1})^{c_2}$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = (\rho_2^{-1})^{c_2}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}\rho_2^{c_2}\rho_2^{b_4-1} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(0, b_4, 0, c_2)$. Agora, se $\frac{2t}{L} = \frac{b_4-1}{L} = 2p$, para algum $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, segue que $\frac{c_2}{L} = 2q + 1$, para algum

$q \in \mathbb{Z}$. Observemos que, se $w_1 := \rho_1 \rho_2^{-L}$ e $w_2 := \rho_1^{-1} \rho_2^{-L}$, então $cw_1 c^{-1} = w_2$ e $cw_2 c^{-1} = w_1$. Daí, ao tomarmos $D = (w_1 w_2)^p$ e $E = (w_1 w_2)^{q+1} w_2^{-1}$, obtemos

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = (w_1 w_2)^{q+1} w_2^{-1} (w_2 w_1)^p w_2 (w_1 w_2)^{-q-1} (w_1 w_2)^{-p} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(0, 2pL+1, 1, (2q+1)L)$. Note-mos que $(0, 2pL+1, 1, (2q+1)L) = (0, 2t+1, 1, c_2)$, com $\frac{2t}{L} = 2p$, par. Finalmente, mostremos que a equação principal não admite solução para $(0, 2t+1, 1, c_2)$, com $\frac{2t}{L} = \frac{b_4-1}{L} = 2p+1$, ímpar, para algum $p \in \mathbb{Z}$. Faremos isto, ao verificarmos que a equação principal não admite solução em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{<(0,L)>})$. Tomemos $D = (\rho_2^{-1})^{b_4-1}$, $E = \rho_1(\rho_2^{-1})^{c_2}$. Daí,

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} &= \rho_1(\rho_2^{-1})^{c_2}(\rho_2^{-1})^{b_4-1}(\rho_2^{-1})^{-c_2}\rho_1^{-1}(\rho_2^{-1})^{-b_4+1} \\ &= [\rho_1, (\rho_2^{-1})^{b_4-1}]. \end{aligned}$$

Em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{<(0,L)>})$, $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} = \overline{[\rho_1, (\rho_2^{-1})^{b_4-1}]}$. Consideremos as identidades

$$\begin{aligned} [x, y^n] &= [x, y](y[x, y]y^{-1}) \cdots (y^{n-1}[x, y]y^{-n+1}), \\ [x, y^{-n}] &= (y^{-1}[y, x]y)(y^{-2}[y, x]y^2) \cdots (y^{-n}[y, x]y^n), \end{aligned}$$

para $n > 0$. Daí, respectivamente, para $b_4-1=2t > 0$ e $-b_4+1=:2k > 0$, temos que

$$\begin{aligned} [\rho_1, (\rho_2^{-1})^{2t}] &= [\rho_1, \rho_2^{-1}](\rho_2^{-1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_2) \cdots (\rho_2^{-2t+1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_2^{2t-1}), \\ [\rho_1, (\rho_2^{-1})^{-2k}] &= (\rho_2[\rho_2^{-1}, \rho_1]\rho_2^{-1})(\rho_2^2[\rho_2^{-1}, \rho_1]\rho_2^{-2}) \cdots (\rho_2^{2k}[\rho_2^{-1}, \rho_1]\rho_2^{-2k}), \end{aligned}$$

e portanto, para $2t > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} &= \overline{[\rho_1, \rho_2^{-1}]} \overline{\rho_2^{-1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_2} \cdots \overline{\rho_2^{-2t+1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_2^{2t-1}} \\ &= B_{(0,0)} B_{(0,1)} \cdots B_{(0,2t-1)} \\ &= B_{(0,0)} B_{(0,1)} \cdots B_{(0,L-1)} \\ &\quad \cdot B_{(0,L)} B_{(0,L+1)} \cdots B_{(0,L2-1)} \cdots \\ &\quad \cdot B_{(0,L2p)} B_{(0,L2p+1)} \cdots B_{(0,L(2p+1)-1)} \\ &= B_{(0,0)}^{2p+1} B_{(0,1)}^{2p+1} \cdots B_{(0,L-1)}^{2p+1}, \end{aligned}$$

onde $B = [\rho_1, \rho_2^{-1}]$. Ainda, se Z_2 contém $B_{(x,y)}^n$, então, desde que

$$\begin{aligned} EcB_{(x,y)}^n \bar{c}^{-1} E^{-1} &= \rho_1 (\rho_2^{-1})^{c_2} \overline{\rho_1^{-x} (\rho_2^{-1})^y (\rho_1^{-1} B^{-n} \rho_1) \rho_2^y \rho_1^x \rho_2^{c_2} \rho_1^{-1}} \\ &= B_{(-x, c_2+y)}^{-n} \\ &= B_{(-x,y)}^{-n}, \end{aligned}$$

segue que $(EcZ_2^{-1} \bar{c}^{-1} E^{-1})Z_2$ contém $B_{(-x,y)}^n B_{(x,y)}^n$. Agora, uma vez que $\overline{DZD^{-1}} = \overline{Z} = \overline{D^{-1}ZD}$, em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (0,L) \rangle})$, pois L divide b_4-1 , e este grupo é abeliano, então a equação principal, nele, é tal que

$$EcZ_2 \bar{c}^{-1} E^{-1} \overline{EcDc^{-1} E^{-1} D^{-1}} Z_2^{-1} = 1,$$

ou seja,

$$\overline{EcDc^{-1} E^{-1} D^{-1}} = (EcZ_2^{-1} \bar{c}^{-1} E^{-1})Z_2.$$

Desde que $\overline{EcDc^{-1} E^{-1} D^{-1}} = B_{(0,0)}^{2p+1} B_{(0,1)}^{2p+1} \cdots B_{(0,L-1)}^{2p+1}$, então o membro direito da equação acima deve conter potências ímpares de $B_{(0,i)}$, com $0 \leq i \leq L-1$, o que não ocorre. Para $-2t = 2k > 0$, a contradição segue de forma análoga. Assim, a equação acima não admite solução e portanto a equação principal não admite solução para $(0, L(2p+1)+1, 1, c_2)$. Notemos que $(0, L(2p+1)+1, 1, c_2) = (0, 2t+1, 1, c_2)$, com $\frac{2t}{L} = 2p+1$, ímpar.

Se $\mathbf{a_3} = \mathbf{2r+1}$, então $b_4 = 2t+1$, para algum $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pois $a_3(b_4-1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$. Ainda,

$$\begin{array}{ll} \phi : G_1 \rightarrow G_2, & \psi : G_2 \rightarrow G_1, \\ \rho_1 \mapsto \rho_1 & \rho_1 \mapsto \rho_1 \\ \rho_2^{-1} \mapsto \rho_2^{-1} \rho_1^{-r} & \rho_2^{-1} \mapsto \rho_2^{-1} \rho_1^r \\ c \mapsto c & c \mapsto c \end{array}$$

são isomorfismos inversos, onde

$$\begin{aligned} G_1 &:= \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{-1}, c\rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{2r+1} \rangle \\ G_2 &:= \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c | c\rho_1 c^{-1} = \rho_1^{-1}, c\rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1 \rangle. \end{aligned}$$

Do mesmo modo que acima, se $\tilde{G}_2$ é G_2 com a relação adicional $[\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1$, então $f_{\#} := \phi \circ f_{\#} \circ \psi : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_2$ é tal que $f_{\#}(\rho_1) = \rho_1$, $f_{\#}(\rho_2^{-1}) = \rho_1^t(\rho_2^{-1})^{2t+1}$, $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1+rc_2}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Assim, obtemos $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2t+1 \end{pmatrix}$, $c'_1 = c_1 + rc_2$ e $c'_2 = c_2$, para os quais é equivalente resolver a equação principal. Consideremos as novas entradas de dados $(t, 2t+1, c_1 - rc_2, c_2)$. Seja $\mathfrak{C}_{2r+1} := \{(0, c_2) | c_2 \in \mathbb{Z}\}$ um conjunto de representantes para as classes de equivalência de $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1,0) \rangle}$. Temos que $\mathfrak{C}_{2r+1}$ deve satisfazer $t(1+c_2) \equiv 0 \pmod{2}$. Daí, se c_2 é par, então $t = 2t'$, para algum $t' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, enquanto que, se c_2 é ímpar, então $t \neq 0$ é qualquer. Seja $L := \text{mdc}(b_4 - 1, c_2)$. Desde que $b_4 - 1$ é par, então L é par se, e só se, c_2 o é. Verifiquemos que, por um lado, para $(t, 2t+1, 0, 2u+1)$ e $(2t', 4t'+1, 0, 2u)$, com $\frac{4t'}{L}$ par, a equação principal admite solução e, por outro lado, para $(2t', 4t'+1, 0, 2u)$, com $\frac{4t'}{L}$ ímpar, ela não admite solução, para todo $t, t', u \in \mathbb{Z}$, $t, t' \neq 0$. Com efeito, tomando $D = (\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^t$, $E = (\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^{u+1}\rho_2$, então

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = (\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^{u+1}\rho_2(\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^t\rho_2^{-1}(\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^{-u-1}(\rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1})^{-t} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(t, 2t+1, u+1, 2u+1)$ e portanto para $(t, 2t+1, 0, 2u+1)$, uma vez que $[(0, 2u+1)] = [(u+1, 2u+1)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1,0) \rangle}$. Agora, se c_2 é par e $\frac{b_4-1}{L} = 2p$, para algum $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, segue que $\frac{c_2}{L} = 2q+1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Notemos que, se $w_1 := \rho_2^{-1}\rho_1\rho_2^{-1}$ e $w_2 := \rho_2^{-1}\rho_2^{-1}\rho_1$, então $cw_1c^{-1} = w_2$ e $cw_2c^{-1} = w_1$. Daí, tomando $D = (w_1^{\frac{L}{2}}w_2^{\frac{L}{2}})^p$ e $E = w_1^{\frac{L}{2}}(w_2^{\frac{L}{2}}w_1^{\frac{L}{2}})^q$, temos que

$$EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} = w_1^{\frac{L}{2}}(w_2^{\frac{L}{2}}w_1^{\frac{L}{2}})^q(w_2^{\frac{L}{2}}w_1^{\frac{L}{2}})^p(w_2^{\frac{L}{2}}w_1^{\frac{L}{2}})^{-q}w_1^{-\frac{L}{2}}(w_1^{\frac{L}{2}}w_2^{\frac{L}{2}})^{-p} = 1,$$

donde a equação principal admite solução para $(pL, 2pL+1, (2q+1)\frac{L}{2}, (2q+1)L)$ e portanto para $(pL, 2pL+1, 0, (2q+1)L)$, visto que $[(0, (2q+1)L)] = [((2q+1)\frac{L}{2}, (2q+1)L)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1,0) \rangle}$. Observemos que $(pL, 2pL+1, 0, (2q+1)L) = (2t', 4t'+1, 0, 2u)$, para algum $u \in \mathbb{Z}$, com $\frac{4t'}{L} = 2p$, par. Finalmente, mostremos que a equação principal não admite solução para $(2t', 4t'+1, 0, 2u)$,

com $\frac{4t'}{L} = \frac{2t}{L} = 2p + 1$, ímpar, para algum $p \in \mathbb{Z}$. Faremos isto, ao verificarmos que a equação principal não admite solução em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{<(1,0),(0,L)>})$. Tomemos $D = w_1^{2t'} = w_1^t$, $E = w_2^u$. Daí,

$$\begin{aligned} EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1} &= w_2^u w_2^t w_2^{-u} w_1^{-t} \\ &= \rho_2^{-1}(\rho_2 w_2^t) w_1^{-t} \\ &= \rho_2^{-1}(w_1^t \rho_2) w_1^{-t} \\ &= [\rho_2^{-1}, (\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^t]. \end{aligned}$$

Em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{<(1,0),(0,L)>})$, $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} = \overline{[\rho_2^{-1}, (\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^t]}$. Consideremos as identidades

$$\begin{aligned} [y, (yxy)^n] &= (y[y, x]y^{-1})(y(xy^2)[y, x](xy^2)^{-1}y^{-1}) \cdots (y(xy^2)^{n-1}[y, x](xy^2)^{-n+1}y^{-1}), \\ [y, (yxy)^{-n}] &= (y^{-1}x^{-1}[x, y]xy) \cdots ((yxy)^{-n+1}y^{-1}x^{-1}[x, y]xy(yxy)^{n-1}), \end{aligned}$$

para $n > 0$. Daí, respectivamente, para $t > 0$ e $-t=:k > 0$,

$$\begin{aligned} &[\rho_2^{-1}, (\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^t] = \\ &(\rho_2^{-1}[\rho_2^{-1}, \rho_1]\rho_2) \cdots (\rho_2^{-1}(\rho_1 \rho_2^{-2})^{t-1}[\rho_2^{-1}, \rho_1](\rho_1 \rho_2^{-2})^{-t+1}\rho_2), \\ &[\rho_2^{-1}, (\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^{-k}] = \\ &(\rho_2 \rho_1^{-1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_1 \rho_2^{-1}) \cdots ((\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^{-k+1} \rho_2 \rho_1^{-1}[\rho_1, \rho_2^{-1}]\rho_1 \rho_2^{-1}(\rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2^{-1})^{k-1}), \end{aligned}$$

e portanto, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} &= \overline{\rho_2^{-1}[\rho_2^{-1}, \rho_1]\rho_2 \cdots \rho_2^{-1}(\rho_1 \rho_2^{-2})^{t-1}[\rho_2^{-1}, \rho_1](\rho_1 \rho_2^{-2})^{-t+1}\rho_2} \\ &= B_{(0,1)}^{-1} B_{(1,3)}^{-1} \cdots B_{(t-1,2t-1)}^{-1} \\ &= B_{(0,1)}^{-1} B_{(1,3)}^{-1} \cdots B_{(\frac{L}{2}-1, L-1)}^{-1} \\ &\quad \cdot B_{(\frac{L}{2}, L+1)}^{-1} B_{(\frac{L}{2}+1, L+3)}^{-1} \cdots B_{(\frac{L}{2}2-1, L2-1)}^{-1} \cdots \\ &\quad \cdot B_{(\frac{L}{2}2p, L2p+1)}^{-1} B_{(\frac{L}{2}2p+1, L2p+3)}^{-1} \cdots B_{(\frac{L}{2}(2p+1)-1, L(2p+1)-1)}^{-1} \\ &= B_{(0,1)}^{-2p-1} B_{(1,3)}^{-2p-1} \cdots B_{(\frac{L}{2}-1, L-1)}^{-2p-1} \end{aligned}$$

onde $B = [\rho_1, \rho_2^{-1}]$, pois $t = \frac{L}{2}(2p + 1)$. Ainda, se Z_2 contém $B_{(x,y)}^n$, então,

desde que

$$\begin{aligned}
EcB_{(x,y)}^n c^{-1} E^{-1} &= (\rho_2^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1)^u \overline{c \rho_1^x \rho_2^{-y} B^n \rho_2^y \rho_1^{-x} c^{-1} (\rho_2^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1)^{-u}} \\
&= (\rho_2^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1)^u \overline{\rho_1^{-x} (\rho_2^{-1} \rho_1)^y (\rho_1^{-1} B^{-n} \rho_1) (\rho_2^{-1} \rho_1)^{-y} \rho_1^x (\rho_2^{-1} \rho_2^{-1} \rho_1)^{-u}} \\
&= B_{(u-x+y-1, 2u+y)}^n \\
&= B_{(x,y)}^n,
\end{aligned}$$

segue que $(EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2$ contém $B_{(x,y)}^n B_{(x,y)}^n = B_{(x,y)}^{2n}$. Agora, como $\overline{DZD^{-1}} = \overline{Z} = \overline{D^{-1}ZD}$, em $\mathbb{Z}(\frac{\Pi_1(T)}{\langle (1,0), (0,L) \rangle})$, e este grupo é abeliano, então a equação principal, nele, é tal que

$$EcZ_2c^{-1}E^{-1}\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}}Z_2^{-1}=1,$$

ou seja,

$$\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} = (EcZ_2^{-1}c^{-1}E^{-1})Z_2.$$

Desde que $\overline{EcDc^{-1}E^{-1}D^{-1}} = B_{(0,1)}^{-2p-1} B_{(1,3)}^{-2p-1} \dots B_{(\frac{L}{2}-1, L-1)}^{-2p-1}$, então o membro direito da equação acima deve conter potências ímpares de $B_{(i-1, 2i-1)}$, com $1 \leq i \leq \frac{L}{2}$, o que não ocorre. Se $t < 0$, a contradição segue de maneira análoga. Logo, a equação acima não admite solução e portanto a equação principal não admite solução para $(\frac{L}{2}(2p+1), L(2p+1)+1, u, 2u)$ e portanto para $(\frac{L}{2}(2p+1), L(2p+1)+1, 0, 2u)$, visto que $[(0, 2u)] = [(u, 2u)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1,0) \rangle}$. Observemos que $(\frac{L}{2}(2p+1), L(2p+1)+1, 0, 2u) = (t, 2t+1, 0, 2u) = (2t', 4t'+1, 0, 2u)$, com $\frac{4t'}{L} = 2p+1$, ímpar.

Assim, no caso 4, existe Γ se, e somente se, ou $\frac{b_4-1}{2}(1+c_2) \equiv 0 \pmod{2}$ quando a_3 é ímpar, exceto se $1+c_2$ e $\frac{b_4-1}{L}$ são ímpares; ou $(b_4-1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2) \equiv 0 \pmod{2}$ quando a_3 é par, exceto se $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2$ e $\frac{b_4-1}{L}$ são ímpares. ■

Observações 3.6.2. *Consideremos o seguinte diagrama, construído de forma análoga ao diagrama (d) de 3.3.1.*

$$\begin{array}{ccc}
& & \Pi_1(M(\phi_A^\wedge) - S^1) \\
& \nearrow \Gamma & \downarrow \tilde{i}_\# \\
\Pi_1(M(\phi_A^\wedge)) & \xrightarrow{H'} & \Pi_1(M(\phi_A^\wedge))
\end{array}$$

Desde que, no diagrama acima, na verdade usou-se o homomorfismo $H := (\pi_2 \circ k \circ h \circ (1, f))_{\#}$, ao invés de $H' := (\pi_2 \circ k \circ h' \circ (1, f))_{\#}$, onde $h' : M(\phi_A^{\wedge}) \times_{S^1} M(\phi_A^{\wedge}) \rightarrow M(\phi_A^{\wedge}) \times_{S^1} M(\phi_A^{\wedge})$ é um homeomorfismo tal que $M(\phi_A^{\wedge})_{\Delta} \xrightarrow{\cong} M(\phi_A^{\wedge}) \times_{S^1} (M(\phi_A^{\wedge}) - S^1)$, segue que os resultados anteriores dizem, a partir de f , quando uma certa g é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (pois, por 3.3.1(a) e pelo diagrama acima, determinar se f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo é equivalente a encontrar um levantamento para H' , não para H). Notemos que, em [GPV-04], dada f , obtém-se H que resolve o problema para f (isto é, tal que a existência de um certo levantamento, conforme enunciado em 3.3.1, é equivalente a poder deformar f sobre S^1 a livre de ponto fixo). Aqui, por sua vez, dada f , obtém-se H que não necessariamente leva $M(\phi_A^{\wedge})_{\Delta}$ em $M(\phi_A^{\wedge}) \times_{S^1} (M(\phi_A^{\wedge}) - S^1)$ e portanto não necessariamente resolve o problema para f , mas resolve para uma g .

Agora, através de um isomorfismo $\Pi_1(M(\phi_A^{\wedge}) - S^1) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A) - S^1)$ que por sua vez induz um isomorfismo $\Pi_1(M(\phi_A^{\wedge})) \rightarrow \Pi_1(M(\phi_A))$, determinaremos H' que então resolve o problema para f . Observemos que, por 3.3.9, se f é tal que

$$f_{\#} : \begin{cases} \rho_{11} & \mapsto \rho_1 \\ \rho_{12}^{-1} & \mapsto \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4} \\ c & \mapsto \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c, \end{cases}$$

então H é tal que

$$H : \begin{cases} \rho_{11} & \mapsto 1 \\ \rho_{12}^{-1} & \mapsto \rho_1^{b_3} (\rho_2^{-1})^{b_4-1} \\ c & \mapsto \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c. \end{cases}$$

Ainda, notemos que, a partir de H , é possível recuperar f . Assim, por meio do tal isomorfismo, a partir de H dado por (b_3, b_4, c_1, c_2) , encontraremos H' dado por (b'_3, b'_4, c'_1, c'_2) (em função de (b_3, b_4, c_1, c_2)). Daí, a partir do

resultado anterior, enunciaremos quando é possível deformar f sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo.

Exemplo 3.6.3. *Seja f , por exemplo, como no caso 3, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3 \neq 0$ ou $b_4 \neq 1)$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Temos que*

$$\begin{array}{ccc} \phi : G_1 & \rightarrow & G_2, & \psi : G_2 & \rightarrow & G_1, \\ x & \mapsto & \rho_1^{-1} & \rho_1 & \mapsto & x^{-1} \\ y & \mapsto & \rho_2 & \rho_2^{-1} & \mapsto & y^{-1} \\ z & \mapsto & \rho_1 c & c & \mapsto & xz \end{array}$$

são isomorfismos inversos, onde

$$\begin{aligned} G_1 &:= \langle x, y, z \mid z x z^{-1} = x^{-1} y^{-1} x^{-1} y x, z y z^{-1} = x^{-1} y^{-1} x^{a_3} x \rangle \\ G_2 &:= \langle \rho_1, \rho_2^{-1}, c \mid c \rho_1 c^{-1} = \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2, c \rho_2^{-1} c^{-1} = \rho_1^{a_3} \rho_2 \rangle. \end{aligned}$$

De fato, $\phi \circ \psi = 1_{G_2}$, $\psi \circ \phi = 1_{G_1}$,

$$\begin{aligned} \phi((z x z^{-1}) x^{-1} y^{-1} x y x) &= (\rho_1 c \rho_1^{-1} c^{-1} \rho_1^{-1}) \rho_1 \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1^{-1} = 1 \in G_2, \\ \phi((z y z^{-1}) x^{-1} x^{-a_3} y x) &= (\rho_1 c \rho_2 c^{-1} \rho_1^{-1}) \rho_1 \rho_1^{a_3} \rho_2 \rho_1^{-1} = 1 \in G_2, \\ \psi((c \rho_1 c^{-1}) \rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2) &= (x z x^{-1} z^{-1} x^{-1}) y^{-1} x^{-1} y = 1 \in G_1, \\ \psi((c \rho_2^{-1} c^{-1}) \rho_2^{-1} \rho_1^{-a_3}) &= (x z y^{-1} z^{-1} x^{-1}) y^{-1} x^{a_3} = 1 \in G_1. \end{aligned}$$

Notemos que G_2 é $\Pi_1(M(\phi_A') - S^1)$, dado por 3.3.7, e G_1 é $\Pi_1(M(\phi_A) - S^1)$, dado por [GPV-04], para $a_3 \leq 0$. Deste modo, temos $f_{\#} : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_2$, $f_{\#}(\rho_1) = \rho_1$, $f_{\#}(\rho_2^{-1}) = \rho_1^{b_3}(\rho_2^{-1})^{b_4}$, $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$, onde $\tilde{G}_2$ é G_2 com a relação adicional $[\rho_1, \rho_2^{-1}] = 1$. Notemos que podemos considerar $\phi : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}_2$, $\psi : \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_1$, isomorfismos, onde, do mesmo modo que acima, $\tilde{G}_1$ é G_1 com a relação adicional $[x, y] = 1$. Daí, nos esquecendo do ponto base por enquanto, $H' := \tilde{\psi} \circ H \circ \tilde{\phi}$ é tal que $H'(x) = \tilde{\psi}(1) = 1$, $H'(y) = \tilde{\psi}(\rho_1^{-b_3} \rho_2^{b_4-1}) = x^{b_3} y^{b_4-1}$ e $H'(z) = \tilde{\psi}(H(\rho_1 c)) = \tilde{\psi}(\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c) = x^{-c_1+1} y^{-c_2} z$, de modo que obtemos $(b'_3, b'_4, c'_1, c'_2) = (b_3, b_4, -c_1 + 1, -c_2)$. Pelo resultado anterior, temos que

existe o tal levantamento para H se, e só se, $b_3b_4 - c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando a_3 é par e $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$, ou a_3 é ímpar e $[(c_1, c_2)] = [(1, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$. Daí, existe o tal levantamento para H' se, e só se, $b_3b_4 - (-c_1 + 1)(b_4 - 1) + (-c_2)b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $[(-c_1 + 1, c_2)] = [(1, 0)]$. Logo, f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo se, e somente se, $b_4(b_3 + 1) - 1 + c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $[(c_1, c_2)] = [(0, 0)]$. Notemos que, se tomarmos G_1 como sendo $\Pi_1(M(\phi_A) - S^1)$, dado por $[GPV-04]$, para $a_3 > 0$, o resultado segue de forma análoga, uma vez que ambos os grupos de $[GPV-04]$ são isomorfos por um isomorfismo tal que $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $z \mapsto [x^{-1}, y^{-1}]z$.

Corolário 3.6.4. *Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 . Então f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1) se, e somente se,*

(Caso 0) sempre;

(Caso 1) $c_1(b_4 - 1) - c_2b_3 = 0$;

(Caso 2) $c_1(b_4 - 1) - c_2b_3 = 0$;

(Caso 3) $b_4(b_3 + 1) - 1 + c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando a_3 é par e $[(c_1, c_2)] = [(0, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$; ou a_3 é ímpar e $[(c_1, c_2)] = [(0, 0)] \in \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$;

(Caso 4) a_3 é par e $(b_4 - 1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2 - 1$ e $\frac{b_4 - 1}{L}$ são ímpares; ou a_3 é ímpar e $\frac{b_4 - 1}{2}(1 + c_2) \equiv 0 \pmod{2}$, exceto quando $1 + c_2$ e $\frac{b_4 - 1}{L}$ são ímpares, onde $L := \text{mdc}(b_4 - 1, c_2)$.

Segue do resultado anterior e de considerarmos isomorfismos como exemplificado acima. ■

Capítulo 4

Classes e número de Reidemeister sobre B

Neste capítulo, apresentaremos a definição para as classes e o número de Reidemeister sobre uma dada base B (conferir [GK-09]) e calcularemos o último para as auto-aplicações contínuas de T -fibrados sobre S^1 .

4.1 Reidemeister sobre B

Sejam $(M, p_M, B), (N, p_N, B)$ fibrações e $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ aplicações que preservam fibra sobre B . Sejam $x_0 \in C(f_1, f_2)$, $y_0 := f_1(x_0) = f_2(x_0)$ e $F_N := p_N^{-1}(p_M(x_0))$. Se $c : (I, \partial I) \rightarrow (M, x_0)$ e $\theta : (I, \partial I) \rightarrow (F_N, y_0)$ são caminhos fechados, então, considerando as aplicações contínuas $h : I \times I \rightarrow B$, $h(s, t) = p_M \circ c(s)$ e $h' : ((I \times 0) \cup (0 \times I) \cup (I \times 1)) \rightarrow N$, $h'(s, 0) = f_1 \circ c(s)$, $h'(0, t) = \theta(t)$, $h'(s, 1) = f_2 \circ c(s)$, para todo $(s, t) \in I \times I$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{h'} & N \\ \downarrow & \nearrow H' & \downarrow p_N \\ I \times I & \xrightarrow{h} & B, \end{array}$$

onde $\blacksquare := (I \times 0) \cup (0 \times I) \cup (I \times 1)$. Como p_N é fibração, então existe uma aplicação contínua H' , como acima, fazendo os sub-diagramas comutarem. Como $\theta'(t) := H'(1, t) \in F_N$, para todo $t \in I$, então podemos definir a seguinte ação

$$*_B : \Pi_1(M, x_0) \times \Pi_1(F_N, y_0) \rightarrow \Pi_1(F_N, y_0)$$

$$([c], [\theta]) \mapsto [\theta'].$$

Definição 4.1.1. *Com as notações acima, dizemos que $\Pi_1(F_N, y_0) \ni [\theta], [\theta']$ são (f_1, f_2) -Reidemeister equivalentes sobre B (ou simplesmente $R.$ equivalentes sobre B), se existe $[c] \in \Pi_1(M, x_0)$ tal que $[c] *_B [\theta] = [\theta']$.*

Temos que a (f_1, f_2) -classe de Reidemeister sobre B de $[\theta]$ (ou simplesmente classe de $R.$ sobre B de $[\theta]$) é a órbita de $[\theta]$ por $*_B$, $\Pi[\theta] := \{[c] *_B [\theta] \mid [c] \in \Pi_1(M, x_0)\}$.

O (f_1, f_2) -conjunto de Reidemeister sobre B (ou simplesmente conjunto de $R.$ sobre B) é o conjunto das classes de Reidemeister sobre B e é denotado por $\mathfrak{R}_B(f_1, f_2)$.

Ainda, o (f_1, f_2) -número de Reidemeister sobre B (ou simplesmente número de $R.$ sobre B) é a cardinalidade de $\mathfrak{R}_B(f_1, f_2)$ e é denotado por $R_B(f_1, f_2)$.

Definição 4.1.2. *Sejam (M, p, B) uma fibração e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre B . Definimos o f -conjunto de Reidemeister sobre B (ou simplesmente conjunto de $R.$ sobre B) por $\mathfrak{R}_B(f) := \mathfrak{R}_B(f, 1_M)$ e o f -número de Reidemeister sobre B (ou simplesmente número de $R.$ sobre B) por $R_B(f) := R_B(f, 1_M)$.*

4.2 Reidemeister sobre S^1 para T -fibrados sobre S^1

Seja $f : MA \rightarrow MA$ uma auto-aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 . Como S^1 é $K(\Pi, 1)$, então, por [GK-09], para determinarmos o conjunto de Reidemeister sobre S^1 , $\mathfrak{R}_{S^1}(f)$, e o número de Reidemeister sobre S^1 , $R_{S^1}(f)$, basta considerarmos, ao invés de $*_{S^1}$, a seguinte ação

$$\Pi_1(MA) \times \Pi_1(T) \rightarrow \Pi_1(T)$$

$$(\gamma, \alpha) \mapsto f_{\#}(\gamma)^{-1} \alpha \gamma,$$

onde $\Pi_1(T)$ é identificado com sua imagem $i_{\#}(\Pi_1(T)) \triangleleft \Pi_1(MA)$.

Observações 4.2.1. *Temos que, se não é possível deformar $f|_T : T \rightarrow T$ a uma aplicação contínua livre de ponto fixo, então $R(f|_T) < \infty$. Logo, $R_{S^1}(f) \leq R(f|_T) < \infty$.*

Proposição 4.2.2. *Se A e B são como em um dos casos de 1 a 4 (ver 3.2.4), então*

$$\begin{aligned} (\textbf{Casos 1 e 2}) \quad R_{S^1}(f) & \begin{cases} < \infty, & \text{se } \det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0, \\ = \infty, & \text{caso contrário;} \end{cases} \\ (\textbf{Casos 3 e 4}) \quad R_{S^1}(f) & = \infty. \end{aligned}$$

Em todos os casos, temos que $\mathfrak{R}(f|_T) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{Im}(B-I)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (b_3, b_4-1) \rangle}$ e $R(f|_T) = \infty$. Se A, B são como no caso 1, então $\Pi_n^m = \{ \binom{m}{n} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{c_1 + a_3(n - \frac{1}{2}(l+1)c_2)}{c_2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \}$, com $\binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2 \cong \Pi_1(T)$. Lembremos que $a_3(b_4 - 1) = 0$. Se $a_3 = 0$, então $\mathfrak{R}_{S^1}(f) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (b_3, b_4-1), (c_1, c_2) \rangle}$ e portanto $R_{S^1}(f) = \infty$ se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$. Se $b_4 = 1$ e $b_3 \neq 0$ (pois $B \neq I$), então $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$ se, e somente se, $c_2 = 0$. Como $\mathfrak{R}(f|_T) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\text{Im}(B-I)} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (b_3, 0) \rangle} = \mathbb{Z}_{b_3} \oplus \mathbb{Z}$, então $\mathfrak{R}_{S^1}(f) \subset \mathbb{Z}_{b_3} \oplus \mathbb{Z}$. Assim, se $c_2 = 0$, segue que $\Pi_{n'}^m = \Pi_n^m$ se, e somente se, $n' = n$, donde $R_{S^1}(f) = \infty$. Se $c_2 \neq 0$, então $\mathfrak{R}_{S^1}(f) \subset \mathbb{Z}_{b_3} \oplus \mathbb{Z}_{c_2}$ e $R_{S^1}(f) <$

∞ . Portanto, no caso 1, $R_{S^1}(f) = \infty$ se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$. Agora, se A, B são como no caso 2, então $\Pi \binom{m}{n} = \{ \binom{m}{n} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{2c_1+a_3c_2}{0} \mid k, l \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \binom{m+na_3+c_1}{-n+c_2} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{2c_1+a_3c_2}{0} \mid k, l \in \mathbb{Z} \}$, com $\binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2$. Temos que $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$ se, e somente se, $2c_1 + a_3c_2 = 0$, pois $a_3(b_4 - 1) = -2b_3$ e $b_4 \neq 1$. Se $2c_1 + a_3c_2 = 0$, então cada classe de Reidemeister sobre S^1 de f é igual a, no máximo, união de duas classes de Reidemeister de $f|_T$ e $R_{S^1}(f) \geq \frac{R(f|_T)}{2} = \infty$. Suponhamos $2c_1 + a_3c_2 \neq 0$. Daí, se $b_3 = 0$, então $\mathfrak{R}_{S^1}(f) \subset \mathbb{Z}_{(2c_1+a_3c_2)} \oplus \mathbb{Z}_{(b_4-1)}$ e $R_{S^1}(f) < \infty$ e, se $b_3 \neq 0$, então, como, para todo $\binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2$, $\{ \binom{m}{n} + k \binom{0}{b_4-1} + l \binom{\text{mdc}(b_3, 2c_1+a_3c_2)}{0} \mid k, l \in \mathbb{Z} \} \subset \Pi \binom{m}{n}$, $\mathfrak{R}_{S^1}(f) \subset \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\langle (0, b_4-1), (\text{mdc}(b_3, 2c_1+a_3c_2), 0) \rangle} = \mathbb{Z}_{\text{mdc}(b_3, 2c_1+a_3c_2)} \oplus \mathbb{Z}_{(b_4-1)}$ e $R_{S^1}(f) < \infty$. Logo, também no caso 2, $R_{S^1}(f) = \infty$ se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$. Se A, B são como no caso 3, então $\Pi \binom{m}{n} = \{ \binom{m}{n} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{a_3(2n-c_2)}{0} \mid k, l \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \binom{-m+na_3+c_1}{-n+c_2} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{a_3(2n-c_2)}{0} \mid k, l \in \mathbb{Z} \}$, para todo $\binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2$. Lembremos que $a_3(b_4 - 1) = 0$. Se $a_3 = 0$, então cada classe de Reidemeister sobre S^1 de f é igual a, no máximo, união de duas classes de Reidemeister de $f|_T$ e $R_{S^1}(f) \geq \frac{R(f|_T)}{2} = \infty$. Se $b_4 = 1$ e $b_3 \neq 0$, então $\Pi \binom{m}{n'} = \Pi \binom{m}{n}$ se, e somente se ou $n' = n$, ou $n' = -n + c_2$, e daí $R_{S^1}(f) = \infty$. Assim, no caso 3, temos que $R_{S^1}(f) = \infty$. Finalmente, se A, B são como no caso 4, então $\Pi \binom{m}{n} = \{ \binom{m}{n} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{a_3c_2}{2c_2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \binom{-m+na_3+c_1}{n+c_2} + k \binom{b_3}{b_4-1} + l \binom{a_3c_2}{2c_2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \}$, para todo $\binom{m}{n} \in \mathbb{Z}^2$. Uma vez que $\binom{a_3c_2}{2c_2} = \frac{2c_2}{b_4-1} \binom{b_3}{b_4-1}$, pois $a_3(b_4 - 1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$, então cada classe de Reidemeister sobre S^1 de f é igual a, no máximo, união de duas classes de Reidemeister de $f|_T$. Portanto, também no caso 4, $R_{S^1}(f) = \infty$. ■

Observações 4.2.3. *Lembremos que uma aplicação contínua, $g : T \rightarrow T$, é deformável a livre de ponto fixo, se e somente, se $R(g) = \infty$. No entanto, por 3.6.4, não é verdade que uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 , $f : MA \rightarrow MA$, é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1) se, e somente se, $R_{S^1}(f) = \infty$. Com efeito, nos casos 1 e 2, f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e só*

se, $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$ se, e só se, $R_{S^1}(f) = \infty$, enquanto que, nos casos 3 e 4, $R_{S^1}(f) = \infty$, mas há situações em que não é possível deformar f sobre S^1 a livre de ponto fixo. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_4-1}{2} \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$ e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1} \rho_2 c$, com $b_4, c_1 \in \mathbb{Z}$, $1 \neq b_4$ ímpar, então, por 3.6.4, f não é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo e, por 4.2.2, $R_{S^1}(f) = \infty$.

Corolário 4.2.4. *Se $R_{S^1}(f) < \infty$ e $B \neq I$, então não é possível deformar f sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1).*

De fato, se $R_{S^1}(f) < \infty$ e $B \neq I$, então ou não é possível deformar $f|_T : T \rightarrow T$ a uma aplicação contínua livre de ponto fixo, ou, por 4.2.2, f é como nos casos 1 e 2 e $\det \begin{pmatrix} b_3 & c_1 \\ b_4-1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0$, donde, por 3.6.4, segue que não é possível deformar f sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1). ■

Observações 4.2.5. *Se, quando $B = I$, tivermos $R_{S^1}(f) = \infty$, então a seguinte afirmação será verdadeira:*

Se $R_{S^1}(f) < \infty$, então não é possível deformar f sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1).

4.3 $(f|_T)_{\#}$ igual a identidade

Nesta seção, investigaremos o que ocorre com $R_{S^1}(f)$, quando $(f|_T)_{\#} = 1_{\Pi_1(T)}$, isto é, $B = I$.

Queremos verificar, quando $B = I$, que $R_{S^1}(f) = \infty$. Deste modo, fixados $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ tal que $\det A = \pm 1$, queremos verificar que a

$\mathbb{Z}$ -ação sobre $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$,

$$(k, \binom{m}{n}) \mapsto k \cdot \binom{m}{n} := \begin{cases} A^k \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^k A^i \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k > 0, \\ \binom{m}{n}, & \text{se } k = 0, \\ A^k \binom{m}{n} - \sum_{i=k+1}^0 A^i \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k < 0, \end{cases}$$

é tal que a cardinalidade do conjunto das órbitas é infinita, isto é, $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$, onde $\binom{m'}{n'} \sim \binom{m}{n}$, se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\binom{m'}{n'} = k \cdot \binom{m}{n}$. Analisemos alguns casos particulares.

I. $\binom{c_1}{c_2} = \binom{0}{0}$.

Se $\binom{c_1}{c_2} = \binom{0}{0}$, então $k \cdot \binom{m}{n} = A^k \binom{m}{n}$. Seja $v_l := \binom{2^l}{0}$, com $l \in \mathbb{Z}$. Desde que, para todo $j \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, 2^j não é autovalor de A^k , pois $\det A = \pm 1$ e $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, então $v_l \approx v_{l'}$, para todo $l \neq l'$. Logo, $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$. De agora em diante, suporemos $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$.

II. A periódica.

Se $A = I$, então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \begin{cases} \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^k \binom{c_1}{c_2} = \binom{m}{n} + k \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k > 0, \\ \binom{m}{n}, & \text{se } k = 0, \\ \binom{m}{n} - \sum_{i=k+1}^0 \binom{c_1}{c_2} = \binom{m}{n} - (-k) \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k < 0 \end{cases} = \binom{m}{n} + k \binom{c_1}{c_2}.$$

Assim, se $c_2 \neq 0$ (respectivamente, $c_1 \neq 0$), a órbita de $\binom{m}{n}$ possui no máximo um vetor em cada reta (inteira) paralela a Ox (respectivamente, Oy), donde são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

Se $A = -I$, então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \begin{cases} (-1)^k \binom{m}{n} + \frac{-1+(-1)^k}{2} \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k > 0, \\ \binom{m}{n}, & \text{se } k = 0, \\ (-1)^k \binom{m}{n} - \frac{(-1)^{k+1}+1}{2} \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k < 0 \end{cases} = (-1)^k \binom{m}{n} + \frac{-1+(-1)^k}{2} \binom{c_1}{c_2}.$$

Logo, a órbita de $\binom{m}{n}$ possui no máximo dois vetores, $\binom{m}{n}$ e $-\binom{m}{n} - \binom{c_1}{c_2}$, donde são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

Seja A uma matriz periódica qualquer, isto é, existe $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$, tal que $A^{p+1} = A$. Como A é inversível, então $A^p = I$. Sejam $v_{c_1 c_2} := \binom{c_1}{c_2} + A \binom{c_1}{c_2} + \dots + A^{p-1} \binom{c_1}{c_2}$ e

$$V_{mn} := \{A^{-p+1} \binom{m}{n} - \sum_{i=-p+2}^0 A^i \binom{c_1}{c_2}, \dots, A^{-2} \binom{m}{n} - \sum_{i=-1}^0 A^i \binom{c_1}{c_2}, A^{-1} \binom{m}{n} - \binom{c_1}{c_2}, \binom{m}{n}, A \binom{m}{n} + A \binom{c_1}{c_2}, A^2 \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^2 A^i \binom{c_1}{c_2}, \dots, A^{p-1} \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^{p-1} A^i \binom{c_1}{c_2}\}.$$

Assim, a órbita de $\binom{m}{n}$ é igual a $V_{mn} + \mathbb{Z}v_{c_1 c_2}$. Se $v_{c_1 c_2} = \binom{0}{0}$, então a órbita de $\binom{m}{n}$ possui no máximo $2p - 1$ vetores, donde segue o resultado. Se a segunda (respectivamente, primeira) coordenada de $v_{c_1 c_2}$ é não-nula, então a órbita de $\binom{m}{n}$ possui no máximo $2p - 1$ vetores em cada reta (inteira) paralela a Ox (respectivamente, Oy), donde também segue o resultado, isto é, são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$. Em particular, notemos que, se $A = I$, então $v_{c_1 c_2} = \binom{c_1}{c_2}$ e $V_{mn} = \{\binom{m}{n}\}$, e, se $A = -I$, então $v_{c_1 c_2} = \binom{0}{0}$ e $V_{mn} = \{\binom{m}{n}, -\binom{m}{n} - \binom{c_1}{c_2}\}$.

III. $A = \begin{pmatrix} \epsilon & l \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, ou $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ l & \eta \end{pmatrix}$, $l \in \mathbb{Z}$, $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, então $A^k = \begin{pmatrix} 1 & kl \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desde que $A^k \binom{x}{y} = \binom{x+kl y}{y}$, então, se $k > 0$, $\sum_{i=1}^k A^i \binom{c_1}{c_2} = \binom{kc_1 + \sum_{i=1}^k i l c_2}{kc_2} = \binom{kc_1 + \frac{(k+1)k}{2} l c_2}{kc_2}$ e, se $k < 0$, $-\sum_{i=k+1}^0 A^i \binom{c_1}{c_2} = -\binom{-kc_1 + \sum_{i=k+1}^0 i l c_2}{-kc_2} = -\binom{-kc_1 + \frac{(k+1)(-k)}{2} l c_2}{-kc_2}$. Logo,

$$k \cdot \binom{m}{n} = \binom{m+kl n}{n} + \binom{kc_1 + \frac{(k+1)k}{2} l c_2}{kc_2},$$

para todo $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Assim, se $c_2 = 0$, a órbita de $\binom{m}{n}$ está inteiramente contida na reta paralela a Ox , $y = n$, enquanto que, se $c_2 \neq 0$, a órbita de

$\binom{m}{n}$ possui no máximo um vetor em cada reta (inteira) paralela a Ox , donde, em ambos os casos, $\left| \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim} \right| = \infty$.

Se $A = \begin{pmatrix} -1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -kl \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desde que

$$k \cdot \binom{m}{n} = \binom{m'}{(-1)^k n} + \binom{c'_1}{\frac{-1+(-1)^k}{2} c_2},$$

para algum $m', c'_1 \in \mathbb{Z}$, para todo $k, m, n \in \mathbb{Z}$, então a órbita de $\binom{m}{n}$ está inteiramente contida nas retas paralelas a Ox , $y = n$ e $y = -n - c_2$ e portanto $\left| \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim} \right| = \infty$.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou $A = \begin{pmatrix} -1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, segue que $A^2 = I$, ou seja, A é periódica e portanto $\left| \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim} \right| = \infty$. Assim, notemos que o resultado vale para $A = \begin{pmatrix} \epsilon & l \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, para todo $l \in \mathbb{Z}$, $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$. De modo análogo, temos que o resultado também vale para $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ l & \eta \end{pmatrix}$, para todo $l \in \mathbb{Z}$, $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$.

IV. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l \end{pmatrix}$, ou $A = \begin{pmatrix} l & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, l \in \mathbb{Z}$.

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então $A^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} f_{-k+1} & -f_{-k} \\ -f_{-k} & f_{-k-1} \end{pmatrix}$, onde $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ e $f_k := f_{k-1} + f_{k-2}$, para todo $k \geq 2$. Consideremos, para todo $x \neq 1$, a identidade $x + x^2 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} - 1 = \frac{x^{k+1}-x}{x-1}$.

Seja $k > 0$. Como $\sum_{i=1}^k A^i = (A^{k+1} - A)(A - I)^{-1} = A^{k+2} - A^2 = \begin{pmatrix} f_{k+1}-1 & f_{k+2}-1 \\ f_{k+2}-1 & f_{k+3}-2 \end{pmatrix}$, então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \binom{mf_{k-1}+nf_k}{mf_k+nf_{k+1}} + \binom{c_1 f_{k+1} + c_2 f_{k+2} - (c_1 + c_2)}{c_1 f_{k+2} + c_2 f_{k+3} - (c_1 + 2c_2)},$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), então, para $n > c_1 + c_2$, temos que o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$ tem ambas as coordenadas positivas.

Seja, agora, $k < 0$. Já que $-(A^k - I)(A^{-1} - I)^{-1} = A^{k+2} - A^2$ e portanto

$$-\sum_{i=k+1}^0 A^i = \begin{cases} -I, & \text{se } k = -1, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -A, & \text{se } k = -2, \\ \begin{pmatrix} (-1)^k f_{-k-1} - 1 & (-1)^{k+1} f_{-k-2} - 1 \\ (-1)^{k+1} f_{-k-2} - 1 & (-1)^k f_{-k-3} - 2 \end{pmatrix}, & \text{se } k < -2, \end{cases}$$

então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \begin{cases} A^{-1} \binom{m}{n} - I \binom{c_1}{c_2} = \binom{-m+n}{m} - \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k = -1, \\ A^{-2} \binom{m}{n} - A \binom{c_1}{c_2} = \binom{2m-n}{-m+n} - \binom{c_2}{c_1+c_2}, & \text{se } k = -2, \\ (-1)^k \binom{mf_{-k+1}-nf_{-k}}{-mf_{-k}+nf_{-k-1}} + \binom{(-1)^k(c_1f_{-k-1}-c_2f_{-k-2})-(c_1+c_2)}{(-1)^k(-c_1f_{-k-2}+c_2f_{-k-3})-(c_1+2c_2)}, & \text{se } k < -2, \end{cases}$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Observemos que, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$), então, para $n > c_1 + c_2$, temos que o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$, para $k < 0$ par, tem a primeira coordenada negativa e a segunda coordenada positiva, enquanto que, para $k < -1$ ímpar, tem a primeira coordenada positiva e a segunda coordenada negativa (para $k = -1$, tem a primeira coordenada positiva e a segunda coordenada não-positiva). Daí, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$), segue, para $n > c_1 + c_2$, que o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, e portanto $\binom{0}{n} \approx \binom{0}{n'}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' > c_1 + c_2$. De maneira análoga, se $c_1 \leq 0$, ou $c_2 \leq 0$, segue, para um número infinito de n 's, que $k \cdot \binom{0}{n}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, donde são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (ver tabela abaixo) e portanto $\left| \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim} \right| = \infty$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \binom{0}{n}$ é		
	para $k > 0$	para $k < 0$, par	para $k < 0$, ímpar
$c_1, c_2 \geq 0, n > c_1 + c_2$	positiva	negativa	positiva
$c_1, c_2 \leq 0, n < c_1 + c_2$	negativa	positiva	negativa
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, c_2 \geq -c_1, n > c_1 - c_2$	positiva	negativa	positiva
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, c_2 \leq -c_1, n < -c_1 + c_2$	negativa	positiva	negativa
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 \geq -c_1, n > -c_1 + c_2$	positiva	negativa	positiva
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 \leq -c_1, n < c_1 - c_2$	negativa	positiva	negativa

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & l \end{pmatrix}$, para algum $l > 1, l \in \mathbb{Z}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então $A^k = \begin{pmatrix} g_{k-1} & g_k \\ g_k & g_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} g_{-k+1} & -g_{-k} \\ -g_{-k} & g_{-k-1} \end{pmatrix}$, onde

$g_0 := 0$, $g_1 := 1$ e $g_k := lg_{k-1} + g_{k-2}$, para todo $k \geq 2$. Observemos que $g_{2k} = \sum_{i=1}^k a_{ki} l^{2i-1}$, para algum $a_{ki} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq k$, isto é, g_{2k} é um polinômio, com as potências ímpares de l , menores do que $2k$, e $g_{2k+1} = \sum_{i=0}^k b_{ki} l^{2i}$, para algum $b_{ki} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $0 \leq i \leq k$, ou seja, g_{2k+1} é um polinômio, com as potências pares de l , menores do que $2k+1$, sendo $b_{k0} = 1$. Daí, em particular, l divide $g_{k-1} + g_k - 1$ e l divide $(-1)^k(g_{k-1} - g_k) - 1$, para todo $k > 0$. Seja $k > 0$. Desde que $\sum_{i=1}^k A^i = (A^{k+1} - A)(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} g_k & g_{k+1}-1 \\ g_{k+1}-1 & g_{k+2}-l \end{pmatrix} \frac{1}{-l} \begin{pmatrix} -1+l & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} g_{k-1}+g_k-1 & g_k+g_{k+1}-1 \\ g_k+g_{k+1}-1 & g_{k+1}+g_{k+2}-1-l \end{pmatrix}$, então

$$k \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg_{k-1}+ng_k \\ mg_k+ng_{k+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} c_1(g_{k-1}+g_k-1)+c_2(g_k+g_{k+1}-1) \\ c_1(g_k+g_{k+1}-1)+c_2(g_{k+1}+g_{k+2}-1-l) \end{pmatrix},$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Seja, agora, $k < 0$. Uma vez que $-(A^k - I)(A^{-1} - I)^{-1} = -\begin{pmatrix} (-1)^k g_{-k+1}-1 & -(-1)^k g_{-k} \\ -(-1)^k g_{-k} & (-1)^k g_{-k-1}-1 \end{pmatrix} \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1-l \end{pmatrix}$, então

$$-\sum_{i=k+1}^0 A^i = \begin{cases} -I, & \text{se } k = -1, \\ \frac{1}{l} \begin{pmatrix} (-1)^k(g_{-k+1}-g_{-k})-1 & (-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k})-1 \\ (-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k})-1 & (-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k-2})-1-l \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1 \end{cases}$$

e portanto

$$k \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} A^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - I \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -lm+n \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, & \text{se } k = -1, \\ (-1)^k \begin{pmatrix} mg_{-k+1}-ng_{-k} \\ -mg_{-k}+ng_{-k-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} c_1((-1)^k(g_{-k+1}-g_{-k})-1)+c_2((-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k})-1) \\ c_1((-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k})-1)+c_2((-1)^k(g_{-k-1}-g_{-k-2})-1-l) \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Observemos que, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), então, para $n > c_1 + c_2$, o vetor $k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, e portanto $\begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ n' \end{pmatrix}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' > c_1 + c_2$. Analogamente, se $c_1 \leq 0$, ou $c_2 \leq 0$, segue que são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (ver tabela abaixo) e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \binom{0}{n}$ é		
	para $k > 0$	para $k < 0$, par	para $k < 0$, ímpar
$c_1, c_2 \geq 0, n > c_1 + c_2$	positiva	negativa	positiva
$c_1, c_2 \leq 0, n < c_1 + c_2$	negativa	positiva	negativa
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, n < -c_1 + c_2$	neg., se $l \neq 1$	positiva	negativa
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, n > -c_1 + c_2$	pos., se $l \neq 1$	negativa	positiva

Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} f_{k-1} & -f_k \\ -f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = \begin{pmatrix} f_{-k+1} & f_{-k} \\ f_{-k} & f_{-k-1} \end{pmatrix}$.

Seja $k > 0$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k A^i &= (A^{k+1} - A)(A - I)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -(-1)^k f_k & (-1)^k f_{k+1} - 1 \\ (-1)^k f_{k+1} - 1 & -(-1)^k f_{k+2} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^k f_{k-2} + 1 & -(-1)^k f_{k-1} + 1 \\ -(-1)^k f_{k-1} + 1 & (-1)^k f_k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \begin{cases} A \binom{m}{n} + A \binom{c_1}{c_2} = \binom{n}{m-n} + \binom{c_2}{c_1 - c_2}, & \text{se } k = 1, \\ (-1)^k \binom{mf_{k-1} - nf_k}{-mf_k + nf_{k+1}} + \binom{c_1((-1)^k f_{k-2} + 1) + c_2(-(-1)^k f_{k-1} + 1)}{c_1(-(-1)^k f_{k-1} + 1) + c_2(-1)^k f_k}, & \text{se } k > 1, \end{cases}$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Seja, agora, $k < 0$. Como $-\sum_{i=k+1}^0 A^i = -(A^k - I)(A^{-1} - I)^{-1} = -\begin{pmatrix} f_{-k+1} - 1 & f_{-k} \\ f_{-k} & f_{-k-1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{-k+2} + 1 & -f_{-k+1} + 1 \\ -f_{-k+1} + 1 & -f_{-k} \end{pmatrix}$, então

$$k \cdot \binom{m}{n} = \binom{mf_{-k+1} + nf_{-k}}{mf_{-k} + nf_{-k-1}} + \binom{c_1(-f_{-k+2} + 1) + c_2(-f_{-k+1} + 1)}{c_1(-f_{-k+1} + 1) + c_2(-f_{-k})},$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$), então, para $n < -c_1 - c_2$, o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, e portanto $\binom{0}{n} \approx \binom{0}{n'}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' < -c_1 - c_2$. De forma análoga, se $c_1 \leq 0$, ou $c_2 \leq 0$, segue que são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (ver tabela abaixo) e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \binom{0}{n}$ é		
	para $k > 0$, par	para $k > 0$, ímpar	para $k < 0$
$c_1, c_2 \geq 0, n < -c_1 - c_2$	positiva	negativa	negativa
$c_1, c_2 \leq 0, n > -c_1 - c_2$	negativa	positiva	positiva
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, c_2 \geq -c_1, n > c_1 - c_2$	negativa	positiva	positiva
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, c_2 \leq -c_1, n < -c_1 + c_2$	positiva	negativa	negativa
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 \geq -c_1, n > -c_1 + c_2$	negativa	positiva	positiva
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 \leq -c_1, n < c_1 - c_2$	positiva	negativa	negativa

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -l \end{pmatrix}$, para algum $l > 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} g_{k-1} & -g_k \\ -g_k & g_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = \begin{pmatrix} g_{-k+1} & g_{-k} \\ g_{-k} & g_{-k-1} \end{pmatrix}$.

Seja $k > 0$. Como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k A^i &= (A^{k+1} - A)(A - I)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -(-1)^k g_k & (-1)^k g_{k+1} - 1 \\ (-1)^k g_{k+1} - 1 & -(-1)^k g_{k+2} + l \end{pmatrix} \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1-l & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{l} \begin{pmatrix} (-1)^k (g_k - g_{k-1}) + 1 & (-1)^k (g_k - g_{k+1}) + 1 \\ (-1)^k (g_k - g_{k+1}) + 1 & (-1)^k (g_{k+2} - g_{k+1}) + 1 - l \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então

$$k \cdot \binom{m}{n} = (-1)^k \binom{mg_{k-1} - ng_k}{-mg_k + ng_{k+1}} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} c_1((-1)^k (g_k - g_{k-1}) + 1) + c_2((-1)^k (g_k - g_{k+1}) + 1) \\ c_1((-1)^k (g_k - g_{k+1}) + 1) + c_2((-1)^k (g_{k+2} - g_{k+1}) + 1 - l) \end{pmatrix},$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Seja, agora, $k < 0$. Uma vez que $-(A^k - I)(A^{-1} - I)^{-1} = -\begin{pmatrix} g_{-k+1} - 1 & g_{-k} \\ g_{-k} & g_{-k-1} - 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-l} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1+l \end{pmatrix}$, então

$$-\sum_{i=k+1}^0 A^i = \begin{cases} -I, & \text{se } k = -1, \\ \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -g_{-k+1} - g_{-k} + 1 & -g_{-k-1} - g_{-k} + 1 \\ -g_{-k-1} - g_{-k} + 1 & -g_{-k-1} - g_{-k-2} + 1 - l \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1 \end{cases}$$

e portanto

$$k \cdot \binom{m}{n} = \begin{cases} A^{-1} \binom{m}{n} - I \binom{c_1}{c_2} = \binom{lm+n}{m} - \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k = -1, \\ \binom{mg_{-k+1} + ng_{-k}}{mg_{-k} + ng_{-k-1}} + \frac{1}{l} \begin{pmatrix} c_1(-g_{-k+1} - g_{-k} + 1) + c_2(-g_{-k-1} - g_{-k} + 1) \\ c_1(-g_{-k-1} - g_{-k} + 1) + c_2(-g_{-k-1} - g_{-k-2} + 1 - l) \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, se $c_1, c_2 \geq 0$ (e $\binom{c_1}{c_2} \neq \binom{0}{0}$), então, para $n < -c_1 - c_2$, o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, e portanto $\binom{0}{n} \approx \binom{0}{n'}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' < -c_1 - c_2$. De forma análoga, se $c_1 \leq 0$, ou $c_2 \leq 0$, segue que são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (ver tabela abaixo) e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \binom{0}{n}$ é		
	para $k > 0$, par	para $k > 0$, ímpar	para $k < 0$
$c_1, c_2 \geq 0, n < -c_1 - c_2$	positiva	negativa	negativa
$c_1, c_2 \leq 0, n > -c_1 - c_2$	negativa	positiva	positiva
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, n < -c_1 + c_2$	positiva	negativa	neg., se $l \neq 1$
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, n > -c_1 + c_2$	negativa	positiva	pos., se $l \neq 1$

Logo, desde que $\binom{0}{1} \binom{1}{0}$ é periódica, então, pelos casos apresentados, se $A = \binom{0}{1} \binom{1}{l}$, com $l \in \mathbb{Z}$, segue que $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$. De forma análoga, temos que o resultado também vale para $A^{-1} = \binom{-1}{1} \binom{1}{0}$, com $l \in \mathbb{Z}$.

V. $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{l}, l \in \mathbb{Z}$.

Se $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{-1}$, ou $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{0}$, ou $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{1}$, então $A^{12} = I$, ou seja, A é periódica e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$. Seja $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{2}$. Daí, $A^k = \binom{-k+1}{k} \binom{-k}{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e portanto $\sum_{i=1}^k A^i = \binom{-\frac{(1+k)k}{2}+k}{\frac{(1+k)k}{2}} \binom{-\frac{(1+k)k}{2}}{\frac{(1+k)k}{2}+k}$, para $k > 0$, e $-\sum_{i=k+1}^0 A^i = \binom{-\frac{(1+k)k}{2}+k}{\frac{(1+k)k}{2}} \binom{-\frac{(1+k)k}{2}}{\frac{(1+k)k}{2}+k}$, para $k < 0$. Logo,

$$k \cdot \binom{0}{n} = \binom{-kn}{(k+1)n} + \binom{c_1(-\frac{(1+k)k}{2}+k)+c_2(-\frac{(1+k)k}{2})}{c_1(\frac{(1+k)k}{2})+c_2(\frac{(1+k)k}{2}+k)},$$

para todo $k, n \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Notemos que, se $c_1 + c_2 \geq 0$, então $\binom{0}{n} \approx \binom{0}{n'}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' > c_1$, enquanto que, se $c_1 + c_2 \leq 0$, então $\binom{0}{n} \approx \binom{0}{n'}$, para todo $n \neq n'$, com $n, n' < c_1$. Logo, são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

Seja $A = \binom{0}{1} \binom{-1}{l}$, para algum $l > 2$, $l \in \mathbb{Z}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então

$A^k = \begin{pmatrix} -h_{k-1} & -h_k \\ h_k & h_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = \begin{pmatrix} h_{-k+1} & h_{-k} \\ -h_{-k} & -h_{-k-1} \end{pmatrix}$, onde $h_0 := 0$, $h_1 := 1$ e $h_k := lh_{k-1} - h_{k-2}$, para todo $k \geq 2$. Notemos que $h_{k+1} > h_k$, para todo $k \geq 0$. Desde que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k A^i = \begin{pmatrix} -h_k & -h_{k+1}+1 \\ h_{k+1}-1 & h_{k+2}-l \end{pmatrix} \frac{1}{2-l} \begin{pmatrix} -1+l & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \text{se } k > 0, \\ -\sum_{i=k+1}^0 A^i = -\begin{pmatrix} h_{-k+1}-1 & h_{-k} \\ -h_{-k} & -h_{-k-1}-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2-l} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1+l \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

então

$$k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -nh_k \\ nh_{k+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{l-2} \begin{pmatrix} c_1(-h_k+h_{k-1}+1)+c_2(h_k-h_{k+1}+1) \\ c_1(-h_k+h_{k+1}-1)+c_2(h_{k+2}-h_{k+1}+1-l) \end{pmatrix}, & \text{se } k > 0, \\ A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} - I \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, & \text{se } k = -1, \\ \begin{pmatrix} nh_{-k} \\ -nh_{-k-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{l-2} \begin{pmatrix} c_1(h_{-k}-h_{-k+1}+1)+c_2(-h_{-k}+h_{-k-1}+1) \\ c_1(h_{-k}-h_{-k-1}-1)+c_2(-h_{-k-2}+h_{-k-1}+1-l) \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela tabela abaixo, para n suficientemente grande, ou n suficientemente pequeno, dependendo de c_1, c_2 , o vetor $k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, donde são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ é	
	para $k > 0$	para $k < 0$
$c_1, c_2 \geq 0, n > 2c_1 + c_2$	negativa	positiva
$c_1, c_2 \leq 0, n < 2c_1 + c_2$	positiva	negativa
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, n < -2c_1 + c_2$	positiva	negativa
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, n > -2c_1 + c_2$	negativa	positiva

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -l \end{pmatrix}$, para algum $l > 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} -h_{k-1} & h_k \\ -h_k & h_{k+1} \end{pmatrix}$, enquanto que, se $k < 0$, então $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} h_{-k+1} & -h_{-k} \\ h_{-k} & -h_{-k-1} \end{pmatrix}$, onde h_k , com $k \geq 0$, é como acima. Uma vez que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k A^i = \begin{pmatrix} (-1)^k h_k & (-1)^{k+1} h_{k+1}+1 \\ (-1)^k h_{k+1}-1 & (-1)^{k+1} h_{k+2}+l \end{pmatrix} \frac{1}{2+l} \begin{pmatrix} -1-l & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & \text{se } k > 0, \\ -\sum_{i=k+1}^0 A^i = -\begin{pmatrix} (-1)^k h_{-k+1}-1 & (-1)^{k+1} h_{-k} \\ (-1)^k h_{-k} & (-1)^{k+1} h_{-k-1}-1 \end{pmatrix} \frac{1}{2+l} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1-l \end{pmatrix}, & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

então

$$k \cdot \binom{0}{n} = \begin{cases} (-1)^k \binom{nh_k}{nh_{k+1}} + \frac{1}{2+l} \left(\begin{matrix} c_1((-1)^k(-h_k-h_{k-1})-1) + c_2((-1)^k(h_{k+1}+h_k)-1) \\ c_1((-1)^k(-h_k-h_{k+1})+1) + c_2((-1)^k(h_{k+1}+h_{k+2})-1-l) \end{matrix} \right), & \text{se } k > 0, \\ A^{-1} \binom{0}{n} - I \binom{c_1}{c_2} = \binom{n}{0} - \binom{c_1}{c_2}, & \text{se } k = -1, \\ (-1)^k \binom{-nh_{-k}}{-nh_{-k-1}} + \frac{1}{2+l} \left(\begin{matrix} c_1((-1)^k(h_{-k+1}+h_{-k})-1) + c_2((-1)^k(-h_{-k}-h_{-k-1})-1) \\ c_1((-1)^k(h_{-k-1}+h_{-k})+1) + c_2((-1)^k(-h_{-k-2}-h_{-k-1})-1-l) \end{matrix} \right), & \text{se } k < -1, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Pela tabela abaixo, para n suficientemente grande, ou n suficientemente pequeno, dependendo de c_1, c_2 , o vetor $k \cdot \binom{0}{n}$ tem a primeira coordenada não-nula, para todo $k \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, donde são necessárias infinitas órbitas para completar $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

	a primeira coordenada de $k \cdot \binom{0}{n}$ é	
	para $k > 0$, par (ímpar)	para $k < 0$, par (ímpar)
$c_1, c_2 \geq 0, n > c_1 + c_2$	positiva (negativa)	negativa (positiva)
$c_1, c_2 \leq 0, n < c_1 + c_2$	negativa (positiva)	positiva (negativa)
$c_1 \geq 0, c_2 \leq 0, n < -c_1 + c_2$	negativa (positiva)	positiva (negativa)
$c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, n > -c_1 + c_2$	positiva (negativa)	negativa (positiva)

Logo, pelos casos apresentados, se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & l \end{pmatrix}$, com $l \in \mathbb{Z}$, então $|\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$.

Observações 4.3.1. *Seja $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ tal que $\det A = \pm 1$. Notemos que o polinômio característico de A é da forma $p_A(x) = x^2 - lx \pm 1$, para algum $l \in \mathbb{Z}$. Ainda, temos que ou $p_A(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, ou $p_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$, para algum $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, $\lambda \neq \mu$, ou $p_A(x) = (x - \lambda)^2$, para algum $\lambda \in \mathbb{Q}$.*

Se $x^2 - lx + 1 = p_A(x) = (x - \lambda)^2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2$, então $\lambda = \pm 1$.

Agora, se $x^2 - lx \pm 1 = p_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu$, então $\lambda\mu = \pm 1$ e $l = \lambda \pm \frac{1}{\lambda}$. Se $\lambda = \frac{p}{q}$, para algum $p, q \in \mathbb{Z}$, então $l = \frac{p^2 \pm q^2}{pq}$. Suponhamos $\text{mdc}(p, q) = 1$. Desde que p divide p^2 e p divide $p^2 \pm q^2$, pois $l \in \mathbb{Z}$, então também divide q^2 , donde $p, q \in \{-1, 1\}$. Assim, $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$.

Assim, ou $p_A(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, ou $p_A(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$, ou $p_A(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, ou $p_A(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Definição 4.3.2. *Sejam $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. Dizemos que A é semelhante sobre $\mathbb{Z}$ a B , se existe $P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, com $\det(P) = \pm 1$ (isto é, $P^{-1} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$), tal que $A = PBP^{-1}$. Denotamos $A \equiv B$.*

Observações 4.3.3. *Se $C \equiv A$, então o número de Reidemeister sobre S^1 , com $B = I$, não se altera. Com efeito, consideremos $P \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, com $\det(P) = \pm 1$, tal que $C = PAP^{-1}$. Queremos verificar que $\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim_C} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim_A}$, onde $\sim_A$ denota a relação de equivalência para um par $(A, \binom{c_1}{c_2})$, enquanto que $\sim_C$ denota a relação de equivalência para $(C, P \binom{c_1}{c_2})$. Temos que $\binom{m}{n} \sim_A A^k \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^k A^i \binom{c_1}{c_2}$ e $P \binom{m}{n} \sim_C C^k P \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^k C^i P \binom{c_1}{c_2} = P(A^k \binom{m}{n} + \sum_{i=1}^k A^i \binom{c_1}{c_2})$, para todo $k, m, n \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Para $k \leq 0$, obtemos resultados análogos. Assim, basta definirmos*

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim_A} & \rightarrow & \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim_C}, \\ \left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right] & \mapsto & \left[P \binom{m}{n} \right]. \end{array}$$

Proposição 4.3.4. *Sejam $B = I$ e $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, com $\det A = \pm 1$. Se $p_A(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$, então $R_{S^1}(f) = \infty$.*

De fato, pelo teorema 3.12 ([N-72], página 50), temos que, se $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ e $p_A(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$, então A é semelhante sobre $\mathbb{Z}$ a uma matriz triangular $\binom{k}{0} \binom{l}{n}$, para algum $k, l, n \in \mathbb{Z}$. Daí, como $\det A = \pm 1$, então $A \equiv \binom{\epsilon}{0} \binom{l}{\eta}$, com $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, $l \in \mathbb{Z}$. Assim, pelo item **III** apresentado acima, segue que $R_{S^1}(f) = \left| \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim} \right| = \infty$. ■

Exemplo 4.3.5. *Temos que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ são tais que $p_{A_1}(x) = x^2 - 1 = p_{A_2}(x)$. Ainda, $A_1 \not\equiv A_2$, mas $A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De fato, suponhamos que existe $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $\det(P) = \pm 1$, tal que $A_1 = PA_2P^{-1}$. Daí, se $\det(P) = 1$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -2ab \\ 2cd & -* \end{pmatrix}$, o que é um absurdo. Se $\det(P) = -1$, a contradição também segue. Logo, $A_1 \not\equiv A_2$. Agora, para mostrar a semelhança sobre $\mathbb{Z}$ acima, basta tomar $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Observações 4.3.6. *Sejam $B = I$ e $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, com $\det A = \pm 1$. Seja $p_A(x) = x^2 - lx \pm 1$ irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Notemos que, pelos itens **IV** e **V** apresentados acima, sabemos que, se $A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & l \end{pmatrix}$, então $R_{S^1}(f) = |\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\sim}| = \infty$. Deste modo, temos um exemplo, para cada polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$, em que o número de Reidemeister sobre S^1 é infinito. Se, quando $p_A(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, tivermos que $R_{S^1}(f) = \infty$, então, por 4.2.4, teremos que $R_{S^1}(f) < \infty$ implica que não é possível deformar f sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1).*

Capítulo 5

Comparação entre resultados

Neste capítulo, daremos uma comparação entre um dos resultados obtidos por Koschorke, em [K], e o resultado principal de [GPV-04] e deste trabalho. Nas duas primeiras seções deste capítulo, faremos uma breve exposição de alguns resultados obtidos por Koschorke, em [K].

5.1 Exposição inicial

Temos que, em [K], Koschorke determina ambos os números mínimos (de pontos de coincidência, $MC_B(f_1, f_2)$, e de componentes por caminho de subespaços de coincidência, $MCC_B(f_1, f_2)$), além de outros invariantes topológicos, para pares de aplicações contínuas entre fibrados lineares, tendo toros como fibras, de dimensões quaisquer e, possivelmente diferentes entre si, que preservam fibra sobre as esferas unitárias e, em particular, sobre o círculo unitário.

Por um fibrado linear, com fibra toro, entendemos um fibrado suave (M, p, B, T^m) , com fibra $T^m = (S^1)^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, e grupo estrutural $GL(m, \mathbb{Z})$.

Sejam $(M, p_M, B, T^m), (N, p_N, B, T^m)$ fibrados lineares, com fibra toro, e

$f_1, f_2 : M \rightarrow N$ aplicações contínuas que preservam fibra sobre B , isto é, tais que $p_N \circ f_j = p_M$, $j = 1, 2$. Consideremos $L := (f_1|_B - f_2|_B)_\# : \mathbb{Z}^m = \Pi_1(T^m) \rightarrow \Pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ e sua extensão linear, $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Consideremos $C(f_1, f_2) = \{x \in M | f_1(x) = f_2(x)\} = (f_1, f_2)^{-1}(\Delta)$, $MC_B(f_1, f_2) := \min\{\#C(f'_1, f'_2) | f_j \simeq_B f'_j, j = 1, 2\}$ e $MCC_B(f_1, f_2) := \min\{\#\Pi_0(C(f'_1, f'_2)) | f_j \simeq_B f'_j, j = 1, 2\}$, onde, por $f_j \simeq_B f'_j$, entendemos $F_j : f_j \simeq f'_j$ e $p_N \circ F_j = p_M$, $j = 1, 2$. Além disso, consideremos, respectivamente, os números de Nielsen e de Reidemeister sobre B , $N_B(f_1, f_2)$ e $R_B(f_1, f_2)$, como definidos em [GK-09].

Num primeiro momento (ver teorema 1.13, [K]), quando B é um ponto, ou uma esfera unitária b -dimensional, $b \geq 1$, Koschorke verifica, entre outras coisas, que $MCC_B(f_1, f_2) = N_B(f_1, f_2)$; e que $MC_B(f_1, f_2) = N_B(f_1, f_2)$, se $N_B(f_1, f_2) = 0$ ou $m+b = n$, enquanto que $MC_B(f_1, f_2) = \infty$, caso contrário. Se $B = S^1$, consideremos $M = \frac{T^m \times I}{(u,1) \sim (A_M(u),0)}$ ($N = \frac{T^n \times I}{(u,1) \sim (A_N(u),0)}$), com A_M (A_N) homeomorfismo do toro, induzido por algum $A_M \in GL(m, \mathbb{Z})$ ($A_N \in GL(n, \mathbb{Z})$). Seja $s_{0M} : S^1 \rightarrow M$ ($s_{0N} : S^1 \rightarrow N$) tal que $S^1 \ni \langle t \rangle \mapsto \langle 1, t \rangle \in M$ ($\in N$). Temos que $p_M \circ s_{0M} = 1_{S^1} = p_N \circ s_{0N}$, donde s_{0M} (s_{0N}) é uma seção, chamada de seção nula, de p_M (p_N).

Koschorke verifica, entre outras coisas, na seção 3, que os números de Nielsen, de Reidemeister e mínimos permanecem inalterados ao trocarmos (f_1, f_2) por $(f_1 - f_2, f_0 := s_{0N} \circ p_M)$, donde basta trabalharmos com o segundo par.

Na seção 4, Koschorke determina dois isomorfismos, a saber

$$\sigma : \frac{\mathbb{Z}^n}{(A_N - I)(\mathbb{Z}^n)} \rightarrow [S^1, N], [v] \mapsto [s_v], \quad (5.1)$$

onde $s_v(\langle t \rangle) := \langle q_n(tv), t \rangle$, $q_n : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ é a projeção natural e $[S^1, N]$ denota o grupo das classes de homotopia de seções de p_N ; e

$$\varsigma : \{L : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \text{ linear} | L \circ A_M = A_N \circ L\} \oplus \frac{\mathbb{Z}^n}{(A_N - I)(\mathbb{Z}^n)} \rightarrow [M, N]_B, \quad (5.2)$$

onde $\varsigma^{-1} : [f] \mapsto (f|_\#, \sigma^{-1}([f \circ s_{0M}]))$ e $[M, N]_B$ denota o conjunto das classes de homotopia de aplicações contínuas de M em N que preservam fibra sobre

B. Denotemos $\sigma^{-1}([f \circ s_{0M}]) := [v_{f \circ s_{0M}}]$.

A partir destes resultados, vemos que $[f_1 - f_2]$ é completamente determinada por L e $[v_{f \circ s_{0M}}]$ e vemos que para calcularmos os invariantes topológicos citados para um par (f_1, f_2) , basta calcularmos para $(f_1 - f_2, f_0)$, donde basta analisarmos o que acontece com L e $[v_{f \circ s_{0M}}]$.

Deste modo, a partir da dimensão de $L(\mathbb{R}^m)$ (que é ou igual a n (caso 0), ou igual a $n - 1$ (caso 1) ou menor do que $n - 1$ (caso 2)), Koschorke determina os números mínimos e de Nielsen para todo par de aplicações contínuas que preservam fibra sobre S^1 (ver teorema 1.18, [K]). Por exemplo, se $\dim L(\mathbb{R}^m) < n - 1$, então o par (f_1, f_2) sempre pode ser deformado sobre S^1 a livre de coincidência e $MC_{S^1}(f_1, f_2) = MCC_{S^1}(f_1, f_2) = N_{S^1}(f_1, f_2) = 0$.

5.2 Exposição para ponto fixo

Temos que, em [K], Koschorke particulariza os resultados obtidos, de um par (f_1, f_2) , para um par $(f, 1)$, determinando, na verdade, os invariantes topológicos da teoria de ponto fixo para uma auto-aplicação, f , de um fibrado linear, (N, p_N, S^1, T^n) , que preserva fibra sobre S^1 .

Consideremos $n = 2$ e denotemos $T := T^2$, $p := p_N$, $s := s_N$ e $A := A_N$. Pelos resultados obtidos por Koschorke, a fim de calcular tais invariantes topológicos, devemos analisar o que acontece com $L := f|_{\#} - 1_{\Pi_1(T)}$ e $[v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)\mathbb{Z}^2}$. Desde que $\dim L(\mathbb{R}^2) + \dim W_{+1} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, onde W_{+1} denota o auto-espaço de $f|_{\#} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associado ao autovalor 1, então podemos trabalhar com $\dim W_{+1}$ ao invés de $\dim L(\mathbb{R}^2)$. No caso em que $\dim W_{+1} = 1$, consideraremos a decomposição $\mathbb{Z}^2 \cong (\mathbb{Z}^2 \cap L(\mathbb{R}^2)) \oplus \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z} \cong \langle y_2 \rangle$ e $y_2 \in \mathbb{Z}^2$ é um vetor que realiza a menor distância estritamente positiva entre os elementos de $\mathbb{Z}^2$ e a reta $L(\mathbb{R}^2)$, isto é, se $\mathbb{Z}^2 \cap L(\mathbb{R}^2) = \langle y_1 \rangle$, então y_2 é tal que $\{y_1, y_2\}$ gera $\mathbb{Z}^2$.

Deste modo, a partir da dimensão de W_{+1} (que é ou igual a 0 (caso 0), ou igual

a 1 (caso 1) ou igual a 2 (caso 2)), Koschorke determina os números mínimos e de Nielsen para toda auto-aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 (ver teorema 1.34, [K]). Por exemplo, se $\dim W_{+1} = 2$, então f sempre pode ser deformada sobre S^1 a livre de ponto fixo e $MC_{S^1}(f, 1) = MCC_{S^1}(f, 1) = N_{S^1}(f, 1) = 0$, enquanto que, se $\dim W_{+1} = 0$, então f nunca pode ser deformada sobre S^1 a livre de ponto fixo e $MC_{S^1}(f, 1) = \infty$. Daí, Koschorke obtém o seguinte resultado (ver corolário 1.35, [K]), que enunciaremos de modo mais detalhado e conveniente para fazer a comparação.

Corolário 5.2.1. *Seja (N, p, S^1, T) um T -fibrado linear sobre S^1 , com $N := \frac{T \times I}{(u, 1) \sim (A(u), 0)}$. Seja $f : N \rightarrow N$ uma auto-aplicação contínua de N que preserva fibra sobre S^1 . Então f é deformável sobre S^1 a uma aplicação contínua livre de ponto fixo se, e somente se, ou $f|_{\#} \equiv 1_{\Pi_1(T)}$, ou o auto-espço, W_{+1} , de $f|_{\#}$ associado ao autovalor 1 tem dimensão 1 e uma das seguintes condições vale:*

1. $A|_{W_{+1}} = +1_{W_{+1}}$ e existe $v_1 y_1 + v_2 y_2 = v \in [v_{fos}]$ tal que $v_2 = 0$;
2. $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$ e existe $v_1 y_1 + v_2 y_2 = v \in [v_{fos}]$ tal que v_2 é ímpar;
3. $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$, $\det A = 1$, existe $v_1 y_1 + v_2 y_2 = v \in [v_{fos}]$ tal que $v_2 = 0$, v_1 é ímpar e d é par;
4. $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$, $\det A = -1$, existe $v_1 y_1 + v_2 y_2 = v \in [v_{fos}]$ tal que $v_2 = 0$ e $\frac{d}{\text{mdc}(v_1, d)}$ é par;

onde d é tal que $(f|_{\#} - 1_{\Pi_1(T)})(\mathbb{Z}^2) = \langle dy_1 \rangle$.

5.3 Comparação

Sejam (MA, p, S^1, T) um T -fibrado sobre S^1 e $f : MA \rightarrow MA$ uma aplicação contínua que preserva fibra sobre S^1 . Observemos que $0 \leq \dim(f|_{\#} - 1_{\Pi_1(T)})(\mathbb{R}^2) \leq 2$. Nesta seção, verificaremos que f é deformável sobre S^1 a (uma aplicação

contínua) livre de ponto fixo (por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1) no nosso trabalho (ver 3.6.4) se, e somente se, o é no trabalho do Koschorke (ver 5.2.1).

Se f é tal que f restrita a fibra, $f|_f$, já não é deformável a livre de ponto fixo, temos que f não é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Observemos que este é precisamente o caso em que $\dim(f|_{\#}-1_{\Pi(T)})(\mathbb{R}^2) = \dim(B-I)(\mathbb{R}^2) = 2$, ou seja, $\dim(W_{+1}) = 0$, onde W_{+1} é o auto-espaço de B associado ao autovalor 1. Neste caso, Koschorke verifica, ao determinar que $MC_{S^1}(f, 1) = \infty$, que f não é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Se f é como no caso 0 (ver 3.2.4), isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$, temos que f é sempre deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Notemos que este é exatamente o caso em que $\dim(f|_{\#}-1_{\Pi(T)})(\mathbb{R}^2) = \dim(B-I)(\mathbb{R}^2) = 0$, isto é, $\dim(W_{+1}) = 2$. Neste caso, Koschorke verifica, ao determinar que $MC_{S^1}(f, 1) = 0$, que f é sempre deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Assim, só nos resta verificar que os resultados são compatíveis entre si, quando $\dim(f|_{\#}-1_{\Pi(T)})(\mathbb{R}^2) = \dim(B-I)(\mathbb{R}^2) = 1$.

Proposição 5.3.1. *Seja f como nos casos de 1 a 4 (ver 3.2.4). Se f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo no nosso trabalho, então também o é no trabalho do Koschorke.*

De fato, desde que $A = \begin{pmatrix} \epsilon & a_3 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, então $A|_{W_{+1}} = \epsilon 1_{W_{+1}}$ e $\det A = \epsilon\eta$, onde $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ e W_{+1} é o auto-espaço de B associado ao autovalor 1.

Ainda, como $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $(b_3, b_4-1) \neq (0, 0)$, podemos considerar $\text{mdc}(b_3, b_4-1) =: d > 0$. Sejam $y_1 \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $(b_3, b_4-1) = dy_1$ e $y_2 \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ um vetor que realiza a menor distância estritamente positiva da reta $(B-I)(\mathbb{R}^2)$ aos pontos de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, isto é, y_2 é tal que $\{y_1, y_2\}$ gera $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\det(y_1 y_2) = 1$.

Finalmente, desde que o conjunto das classes de homotopia livre é tal que $[S^1, MA] = \frac{\Pi_1(MA)}{\sim}$, onde $\alpha \sim \beta$ se, e só se, existe $\gamma \in \Pi_1(MA)$ tal que $\beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$, então $[f \circ s] = \{\rho_1^m (\rho_2^{-1})^n c^k f_{\#}(c) (\rho_1^m (\rho_2^{-1})^n c^k)^{-1} : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$, com $f_{\#}(c) \in \Pi_1(MA)$. Se $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c$, segue que $[f \circ s] = \{\rho_1^m (\rho_2^{-1})^n A^k (\rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2}) c \rho_1^{-m} (\rho_2^{-1})^{-n} : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$. Em particular, $s_{(c_1, c_2)} \in [f \circ s]$, onde $s_{(c_1, c_2)}(\langle t \rangle) = \langle q(t(c_1, c_2)), t \rangle$ e $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ é a projeção natural. Assim, $[f \circ s] \in [S^1, MA]$ (como grupo das classes de homotopia de seções) corresponde a $[(c_1, c_2)] = [v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)\mathbb{Z}^2}$ (ver bijeção 5.1).

Caso 1.

Seja f como no caso 1, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3, b_4 - 1) \neq (0, 0)$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c$. Neste caso, temos que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix} = 0$. Suponhamos $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix} = 0$. Daí, existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $(c_1, c_2) = \lambda y_1$, isto é, $(c_1, c_2) \in (B - I)\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{Z}^2$.

No caso em que $A|_{W_{+1}} = 1_{W_{+1}}$, Koschorke verifica que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, existe $v \in [v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)\mathbb{Z}^2}$ cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula, pois determina que $MC_{S^1}(f, 1) = 0$ se, e só se, $d|v_2| = MCC_{S^1}(f, 1) = 0$, para algum $v \in [v_{f \circ s}]$, onde $v = v_1 y_1 + v_2 y_2$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$. Assim, no caso 1, desde que $A|_{W_{+1}} = 1_{W_{+1}}$ e $(c_1, c_2) \in (B - I)\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{Z}^2$, ou seja, (c_1, c_2) tem a segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, nula, segue, também pelo trabalho do Koschorke, que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Caso 2.

Seja f como no caso 2, ou seja, tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = -2b_3$ e $b_4 \neq 1$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1} (\rho_2^{-1})^{c_2} c$. Neste caso, temos, novamente, que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix} = 0$. De modo análogo ao caso 1, no caso 2, temos que, se f é deformável sobre

S^1 a livre de ponto fixo no nosso trabalho, então também o é no trabalho do Koschorke.

Caso 3.

Seja f como no caso 3, isto é, tal que $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3, b_4 - 1) \neq (0, 0)$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Neste caso, temos que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e só se, $b_4(b_3 + 1) - 1 + c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$ (exceto quando ou a_3 é par e $[(c_1, c_2)] = [(0, 0)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2, 0), (0, 2) \rangle}$, ou a_3 é ímpar e $[(c_1, c_2)] = [(0, 0)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle}$). Assim, suponhamos $b_4(b_3 + 1) - 1 + c_1(b_4 - 1) + c_2b_3 \equiv 0 \pmod{2}$, com ou c_1 ímpar, ou c_2 ímpar, caso a_3 seja par e, com ou c_2 ímpar, ou c_2 par e $[(c_1, c_2)] = [(0, 2)]$, caso a_3 seja ímpar. Seja $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Analisemos, agora, quanto à paridade, as quatro possibilidades para b_3 e $b_4 - 1$.

Se $b_3 = 2s - 1$ e $b_4 - 1 = 2t$, para algum $s, t \in \mathbb{Z}$, temos que $c_2(2s - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{2}$ e portanto c_2 é ímpar. Notemos que, nesta situação, a_3 pode assumir vários valores, mas, uma vez que c_2 é ímpar, já está excluída a exceção mencionada acima. Ainda, d é ímpar e $y_1 = (2k - 1, 2l)$, para algum $k, l \in \mathbb{Z}$. Se $y_2 = (m, n)$, para algum $m, n \in \mathbb{Z}$, então, desde que $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ e $(2k - 1)n - 2lm = 1$, segue que $\alpha = \frac{1+2lm}{2k-1}c_1 - mc_2$ e $\beta = -2lc_1 + (2k - 1)c_2$. Logo, β é ímpar.

Agora, se $b_3 = 2s - 1$ e $b_4 - 1 = 2t - 1$, para algum $s, t \in \mathbb{Z}$, segue que $c_1(2t - 1) + c_2(2s - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{2}$ e portanto, módulo 2, ou $c_1 \equiv 0 \equiv c_2 - 1$, ou $c_1 - 1 \equiv 0 \equiv c_2$. Observemos, nesta situação, que $a_3 = 0$, donde, desde que ou c_1 é ímpar, ou c_2 é ímpar, segue que já está excluída a exceção mencionada acima. Ainda, d é ímpar e $y_1 = (2k - 1, 2l - 1)$, para algum $k, l \in \mathbb{Z}$. Como $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ e $\det(y_1, y_2) = 1$, segue que $\beta = -(2l - 1)c_1 + (2k - 1)c_2$ e portanto β é ímpar.

Se $b_3 = 2s$ e $b_4 - 1 = 2t - 1$, para algum $s, t \in \mathbb{Z}$, então $c_1(2t - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{2}$ e c_1 é ímpar. Notemos, nesta situação, que $a_3 = 0$, donde, desde que c_1 é

ímpar, temos que já está excluída a exceção mencionada acima. Ainda, d é ímpar e $y_1 = (2k, 2l - 1)$, para algum $k, l \in \mathbb{Z}$. Já que $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ e $\det(y_1, y_2) = 1$, então $\beta = -(2l - 1)c_1 + 2kc_2$, donde segue que β é ímpar.

Finalmente, se $b_3 = 2s$ e $b_4 - 1 = 2t$, para algum $s, t \in \mathbb{Z}$, segue que $(2t + 1)(2s + 1) - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, o que é sempre verdade. Ainda, d é par e $y_1 = (2k, 2l - 1)$, ou $y_1 = (2k - 1, 2l - 1)$, ou $y_1 = (2k - 1, 2l)$, para algum $k, l \in \mathbb{Z}$. Se $y_2 = (m, n)$, para algum $m, n \in \mathbb{Z}$, então, desde que $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$ e $\det(y_1, y_2) = 1$, segue, respectivamente, que $\beta = -(2l - 1)c_1 + 2kc_2$ e $\alpha = nc_1 + \frac{1-2kn}{2l-1}c_2$, ou $\beta = -(2l - 1)c_1 + (2k - 1)c_2$ e $\alpha = \frac{1+(2l-1)m}{2k-1}c_1 - mc_2$, ou $\beta = -2lc_1 + (2k - 1)c_2$ e $\alpha = \frac{1+2lm}{2k-1}c_1 - mc_2$.

Notemos que, se $y_1 = (2k, 2l - 1)$, ou $y_1 = (2k - 1, 2l - 1)$, então $b_4 - 1 = d(2l - 1) \neq 0$, donde $a_3 = 0$ e portanto c_1 é ímpar, ou c_2 é ímpar. Notemos ainda que, se $y_1 = (2k - 1, 2l)$ e a_3 é ímpar, então $b_4 - 1 = 0$, $d = b_3 = 2s$, $y_1 = (1, 0)$ e $y_2 = (0, 1)$, donde segue que $\beta = c_2$ e $\alpha = c_1$.

Se $\beta = -(2l - 1)c_1 + 2kc_2$ e $\alpha = nc_1 + \frac{1-2kn}{2l-1}c_2$, temos que β é ímpar, caso c_1 seja ímpar, e β é par e α é ímpar, caso c_1 seja par (e c_2 ímpar). Agora, se $\beta = -(2l - 1)c_1 + (2k - 1)c_2$, segue que β é ímpar, caso c_1 seja par (e c_2 ímpar), ou c_2 seja par (e c_1 ímpar), e β é par e α é ímpar, caso c_1 e c_2 sejam ímpares. Finalmente, se $\beta = -2lc_1 + (2k - 1)c_2$ e $\alpha = \frac{1+2lm}{2k-1}c_1 - mc_2$, temos que β é ímpar, caso c_2 seja ímpar, e β é par, caso c_2 seja par, donde precisamos analisar as possibilidades para a_3 . Se a_3 é par e c_2 é par (e portanto c_1 é ímpar), segue que β é par e α é ímpar. Observemos que, nas três situações em que β é par e α é ímpar, temos que a_3 é par, donde é possível escolhermos $v \in [v_{fos}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2,0), (0,2) \rangle}$ cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula e a primeira continua sendo ímpar. Se a_3 é ímpar e c_2 é par (e portanto $[(c_1, c_2)] = [(0, 2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,2), (0,4) \rangle}$), então, desde que $\beta = c_2$, $\alpha = c_1$ e $[(0, 2)] = [(1, 0)]$, obtemos $v \in [v_{fos}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,2), (0,4) \rangle}$ cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula e a primeira é igual a 1, ímpar.

No caso em que $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$ e $\det A = 1$, Koschorke verifica que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo (isto é, $MC_{S^1}(f, 1) = 0$) se, e somente se, existe $v \in [v_{fos}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)(\mathbb{Z}^2)}$ ou cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula e a primeira é ímpar e d é par, ou cuja segunda coordenada (na mesma base) é ímpar. Assim, no caso 3, desde que $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$, $\det A = 1$ e, nas quatro possibilidades para b_3 e $b_4 - 1$ acima, (c_1, c_2) é tal que ou α é ímpar, $\beta = 0$ e d é par, ou β é ímpar, então, também pelo trabalho do Koschorke, f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Caso 4.

Seja f como no caso 4, ou seja, tal que $A = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$, e $f_{\#}(c) = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Neste caso, temos que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, ou a_3 é ímpar e $\frac{b_4-1}{2}(1+c_2) \equiv 0 \pmod{2}$ (exceto quando d' é ímpar e c_2 é par), ou a_3 é par e $(b_4-1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$ (exceto quando d' é ímpar e $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2$ é par), onde $d' := \frac{b_4-1}{\text{mdc}(b_4-1, c_2)}$.

Inicialmente, suponhamos $a_3 = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $\frac{b_4-1}{2}(1+c_2) \equiv 0 \pmod{2}$, com ou d' par, ou c_2 ímpar. Daí, $d = \text{mdc}(b_3, b_4 - 1) = \frac{b_4-1}{2}$ e $y_1 = (2k+1, 2)$, e $y_2 := (k, 1)$ realiza a tal menor distância estritamente positiva. Se $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, então $\beta = -2c_1 + (2k+1)c_2$ e $\alpha = c_1 - kc_2$. Se c_2 é ímpar, segue que β é ímpar. Se c_2 é par e d' é par, então, ao considerarmos $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2) + (kc_2 + \frac{c_2}{2} - c_1, 0) = (kc_2 + \frac{c_2}{2}, c_2)$, obtemos $\beta' = -2c'_1 + (2k+1)c'_2 = -2(kc_2 + \frac{c_2}{2}) + (2k+1)c_2 = 0$ e $\alpha' = c'_1 - kc'_2 = kc_2 + \frac{c_2}{2} - kc_2 = \frac{c_2}{2}$, com $\frac{d}{\text{mdc}(d, \alpha')} = \frac{\frac{b_4-1}{2}}{\text{mdc}(\frac{b_4-1}{2}, \frac{c_2}{2})} = d' \equiv 0 \pmod{2}$. Notemos que $[(c'_1, c'_2)] = [(c_1, c_2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,0) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2,0), (a_3,0) \rangle}$.

Suponhamos, agora, $a_3 = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $(b_4 - 1)(c_1 - kc_2 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$, com ou d' par, ou $c_1 - kc_2 \equiv 1 \pmod{2}$. Assim, $d = \text{mdc}(b_3, b_4 - 1) = b_4 - 1$ e $y_1 = (k, 1)$, e $y_2 := (k-1, 1)$ realiza a tal menor distância estritamente positiva. Se $(c_1, c_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, então $\beta = -c_1 + kc_2$ e $\alpha = c_1 - (k-1)c_2$. Se $c_1 - kc_2 \equiv 1 \pmod{2}$, então β é ímpar. Se $c_1 - kc_2 \equiv 0 \pmod{2}$ e d' é par,

então, ao considerarmos $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2) + (kc_2 - c_1, 0) = (kc_2, c_2)$, obtemos $\beta' = -c'_1 + kc'_2 = -kc_2 + kc_2 = 0$ e $\alpha' = c'_1 - (k-1)c'_2 = kc_2 - (k-1)c_2 = c_2$, com $\frac{d}{\text{mdc}(d, \alpha')} = \frac{b_4-1}{\text{mdc}(b_4-1, c_2)} = d' \equiv 0 \pmod{2}$. Observemos que $[(c'_1, c'_2)] = [(c_1, c_2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2,0) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2,0), (a_3,0) \rangle}$.

No caso em que $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$ e $\det A = -1$, Koschorke verifica que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo (isto é, $MC_{S^1}(f, 1) = 0$) se, e somente se, existe $v \in [v_{fos}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)(\mathbb{Z}^2)}$ ou cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula e a primeira, v_1 , é tal que $\frac{d}{\text{mdc}(d, v_1)} \equiv 0 \pmod{2}$, ou cuja segunda coordenada (na mesma base) é ímpar. Assim, no caso 4, desde que $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$, $\det A = -1$ e (c_1, c_2) é tal que ou $\beta = 0$ e $\frac{d}{\text{mdc}(d, \alpha)} \equiv 0 \pmod{2}$, ou β é ímpar, então, também pelo trabalho do Koschorke, f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo. ■

Proposição 5.3.2. *Seja f tal que $\dim(B-I)(\mathbb{R}^2) = 1$. Se f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo no trabalho do Koschorke, então também o é no nosso trabalho.*

Com efeito, desde que $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$, então, se $\dim(B-I)(\mathbb{R}^2) = 1$, segue que $B-I = \begin{pmatrix} \kappa a & \kappa b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, para algum $a, b, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, com $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(\kappa, \lambda) \neq (0, 0)$. Assim, podemos considerar $\text{mdc}(a, b) =: d > 0$ e $\text{mdc}(\kappa, \lambda) > 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $\text{mdc}(\kappa, \lambda) = 1$. Como $\begin{pmatrix} \kappa a & \kappa b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(ax+by) \\ \lambda(ax+by) \end{pmatrix}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ e $\text{mdc}(\kappa, \lambda) = 1$, então $(-b, a)$ é um autovetor de B associado ao autovalor 1 e $y_1 := (\kappa, \lambda)$ gera $\mathbb{Z}^2 \cap (B-I)(\mathbb{R}^2)$. Em particular, temos que $d(\kappa, \lambda)$ gera $(B-I)(\mathbb{Z}^2)$. Seja $y_2 \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ um vetor que realiza a menor distância estritamente positiva da reta $(B-I)(\mathbb{R}^2)$ aos pontos de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, isto é, y_2 é tal que $\{y_1, y_2\}$ gera $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\det(y_1, y_2) = 1$.

Sejam $f_1 := (\frac{-b}{d}, \frac{a}{d})$ e $f_2 := (m, n)$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$ são tais que $-am - bn = d$. Daí, obtemos a matriz de $f|_{\#}$ na base $\mathcal{F} := \{f_1, f_2\}$, $B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, onde $b_3, b_4 \in \mathbb{Z}$ são tais que $(b_3 \frac{-b}{d} + b_4 m, b_3 \frac{a}{d} + b_4 n) = b_3 f_1 + b_4 f_2 = B(f_2) =$

$((\kappa a + 1)m + \kappa bn, \lambda am + (\lambda b + 1)n)$. Logo, $-b_3b + db_4m = d(\kappa a + 1)m + d\kappa bn$ e $b_3a + db_4n = d\lambda am + d(\lambda b + 1)n$. Notemos, ainda, que $\text{mdc}(b_3, b_4 - 1) = d$. Agora, se $A_{\mathcal{F}}$ denota a matriz do isomorfismo A na base $\mathcal{F}$, então, uma vez que $A_{\mathcal{F}}B_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}}A_{\mathcal{F}}$ e $\det A_{\mathcal{F}} = \pm 1$, segue que $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \epsilon & a_3 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, para algum $a_3 \in \mathbb{Z}$, para algum $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$. Em particular, se W_{+1} denota o autoespaço de B associado ao autovalor 1, então $A|_{W_{+1}} = \epsilon 1_{W_{+1}}$.

Finalmente, já que o conjunto das classes de homotopia livre é tal que $[S^1, MA] = \frac{\Pi_1(MA)}{\sim}$, onde $\alpha \sim \beta$ se, e só se, existe $\gamma \in \Pi_1(MA)$ tal que $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, então $[f \circ s] = \{\rho_1^m(\rho_2^{-1})^n c^k f_{\#}(c)(\rho_1^m(\rho_2^{-1})^n c^k)^{-1} : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$, com $f_{\#}(c) \in \Pi_1(MA)$. Lembremos que $[f \circ s] \in [S^1, MA]$ (como grupo das classes de homotopia de seções) corresponde a $[v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)(\mathbb{Z}^2)}$ (ver bijeção 5.1). Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Se $\rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}c, \rho_1^{y_1}(\rho_2^{-1})^{y_2}c \in [f \circ s]$, então $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in [v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)(\mathbb{Z}^2)}$ e portanto $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) \in (A - I)(\mathbb{Z}^2)$. Assim, por 3.4.7, segue que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo, com $f_{\#}(c) = \rho_1^{x_1}(\rho_2^{-1})^{x_2}c$ se, e somente, se o é, com $f_{\#}(c) = \rho_1^{y_1}(\rho_2^{-1})^{y_2}c$.

Caso $A|_{W_{+1}} = +1_{W_{+1}}$.

Seja f tal que $A|_{W_{+1}} = +1_{W_{+1}}$. Neste caso, Koschorke obtém que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, existe $v \in [v_{f \circ s}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)(\mathbb{Z}^2)}$ cuja segunda coordenada, na base $\{y_1, y_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, é nula. Suponhamos que existe tal vetor, isto é, existe $v = v_1y_1 + 0y_2 = v_1(\kappa, \lambda) \in [v_{f \circ s}]$, com $v_1 \in \mathbb{Z}$. Daí, $v = (v_1\kappa, v_1\lambda) = c_1f_1 + c_2f_2 = c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) = (c_1\frac{-b}{d} + c_2m, c_1\frac{a}{d} + c_2n)$, para algum $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, e portanto $\lambda(-c_1b + dc_2m) = \kappa(c_1a + dc_2n)$. Notemos que, pelas observações acima, podemos considerar $f_{\#}(c) = \rho_1^{v_1\kappa}(\rho_2^{-1})^{v_1\lambda}c$ e portanto, na base $\mathcal{F}$, $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Consideremos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} -b_3b + db_4m &= d(\kappa a + 1)m + d\kappa bn \\ b_3a + db_4n &= d\lambda am + d(\lambda b + 1)n \\ \lambda(-c_1b + dc_2m) &= \kappa(c_1a + dc_2n) \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} \kappa(b_3a + db_4n - dn) &= \lambda(-b_3b + db_4m - dm) \\ \lambda(-c_1b + dc_2m) &= \kappa(c_1a + dc_2n), \end{cases}$$

isto é, $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ b_3 & b_4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda b + \kappa a \\ \lambda(-dm) + \kappa dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b + \kappa a \\ \lambda(-dm) + \kappa dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ -dm & dn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \kappa \end{pmatrix}$, então, como $\begin{pmatrix} \lambda \\ \kappa \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, segue que $\det \begin{pmatrix} b & a \\ -dm & dn \end{pmatrix} = 0$, ou seja, $adm + bdn = 0$, o que é um absurdo, pois $-am - bn = d > 0$. Logo, $\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ b_3 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0 = \det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix}$.

Logo, desde que $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, $B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $A_{\mathcal{F}}B_{\mathcal{F}} = B_{\mathcal{F}}A_{\mathcal{F}}$ e $(b_3, b_4-1) \neq (0, 0)$, $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$ e $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4-1 \end{pmatrix} = 0$, segue, também pelo nosso trabalho (casos 1 e 2), que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Caso $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$.

Seja f tal que $A|_{W_{+1}} = -1_{W_{+1}}$. Neste caso, Koschorke obtém que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo se, e somente se, existe $v \in [v_{fos}] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{(A-I)\mathbb{Z}^2}$, $v = v_1y_1 + v_2y_2$, tal que ou v_2 é ímpar, ou $v_2 = 0$, v_1 é ímpar, d é par e $\det A = 1$, ou $v_2 = 0$, $\frac{d}{\text{mdc}(d, v_1)} \equiv 0 \pmod{2}$ e $\det A = -1$.

Suponhamos, inicialmente, que existe $v = v_1y_1 + 0y_2 = v_1(\kappa, \lambda) \in [v_{fos}]$, com $v_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{d}{\text{mdc}(d, v_1)} \equiv 0 \pmod{2}$ e $\det A = -1$. Daí, $v = (v_1\kappa, v_1\lambda) = c_1f_1 + c_2f_2 = c_1\left(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}\right) + c_2(m, n)$, para algum $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$. Notemos que $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$, e $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Agora, desde que $b_3\left(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}\right) + (b_4-1)(m, n) = (\kappa(am + bn), \lambda(am + bn))$ e $\text{mdc}(b_3, b_4-1) = d = -am - bn$, então obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -\frac{b_3}{d}\left(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}\right) - \frac{b_4-1}{d}(m, n) &= (\kappa, \lambda) \\ c_1\left(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}\right) + c_2(m, n) &= v_1(\kappa, \lambda) \\ -am - bn &= d \end{cases}$$

Como $\mathcal{F}$ é base e a decomposição de $v_1(\kappa, \lambda)$ como combinação linear dos vetores da base é única, então $c_1 = -v_1\frac{b_3}{d}$ e $c_2 = -v_1\frac{b_4-1}{d}$. Ainda, notemos que, se a_3 é par, então $d = \text{mdc}(b_3, b_4-1) = \text{mdc}(\frac{a_3}{2}(b_4-1), b_4-1) = |b_4-1|$

e, se a_3 é ímpar, então $d = \text{mdc}(b_3, b_4 - 1) = \text{mdc}(a_3 \frac{b_4 - 1}{2}, b_4 - 1) = \left| \frac{b_4 - 1}{2} \right|$, pois $a_3(b_4 - 1) = 2b_3$. Assim, desde que d é par, pois $\frac{d}{\text{mdc}(d, v_1)} \equiv 0 \pmod{2}$, então, se a_3 é par, segue que $(b_4 - 1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$, e se a_3 é ímpar, segue que $\frac{b_4 - 1}{2}(1 + c_2) \equiv 0 \pmod{2}$. Finalmente, em ambos os casos, $d' := \frac{b_4 - 1}{\text{mdc}(b_4 - 1, c_2)} = \frac{d}{\text{mdc}(d, -v_1)} \equiv 0 \pmod{2}$. Portanto, também pelo nosso trabalho (caso 4), segue que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Suponhamos, agora, que existe $v = v_1 y_1 + 0 y_2 = v_1(\kappa, \lambda) \in [v_{fos}]$, com $v_1 \in \mathbb{Z}$, v_1 ímpar, d par e $\det A = 1$. Daí, novamente, $v = (v_1 \kappa, v_1 \lambda) = c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n)$, para algum $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$. Observemos que $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4 - 1) = 0$ e $(b_3, b_4 - 1) \neq (0, 0)$, e $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -\frac{b_3}{d}(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) - \frac{b_4 - 1}{d}(m, n) &= (\kappa, \lambda) \\ c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) &= v_1(\kappa, \lambda) \\ -am - bn &= d \end{cases}$$

Daí, notemos que $c_1 = -v_1 \frac{b_3}{d}$ e $c_2 = -v_1 \frac{b_4 - 1}{d}$. Como v_1 é ímpar e $\text{mdc}(\frac{b_3}{d}, \frac{b_4 - 1}{d}) = 1$, segue que c_1 e c_2 não são ambos pares. Agora, de modo análogo ao caso em que $A|_{W_{+1}} = +1_{W_{+1}}$, temos que $\det \begin{pmatrix} c_1 & b_3 \\ c_2 & b_4 - 1 \end{pmatrix} = 0$. Daí, desde que b_3 e $b_4 - 1$ são pares, pois $d = \text{mdc}(b_3, b_4 - 1)$ o é, então $b_4(b_3 + 1) - 1 + c_1(b_4 - 1) + c_2 b_3 \equiv 0 \pmod{2}$. Assim, para a_3 par, também pelo nosso trabalho (caso 3), segue que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo. Se a_3 é ímpar, então $b_4 - 1 = 0$, donde $c_2 = 0$ e $c_1 = 2r + 1$, ímpar, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Desde que $[(2r + 1, 0)] = [(0, 2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1, 2), (0, 4) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2, 0), (a_3, -2) \rangle}$, então, também pelo nosso trabalho (caso 3), segue que f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Finalmente, suponhamos que existe $v = v_1 y_1 + v_2 y_2 = v_1(\kappa, \lambda) + v_2 y_2 \in [v_{fos}]$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$, v_2 ímpar. Desde que $\text{mdc}(\kappa, \lambda) = 1$, então existem $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ tais que $\kappa \nu - \lambda \mu = 1$, donde podemos tomar $y_2 = (\mu, \nu)$. Notemos, em particular, que $\text{mdc}(\mu, \nu) = 1$. Consideremos $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $v = v_1(\kappa, \lambda) +$

$v_2(\mu, \nu) = c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n)$. Como $-\frac{b_3}{d}(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) - \frac{b_4-1}{d}(m, n) = (\kappa, \lambda)$, então

$$\begin{aligned} v_2(\mu, \nu) &= c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) + v_1 \frac{b_3}{d}(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + v_1 \frac{b_4-1}{d}(m, n) \\ &= (c_1 + v_1 \frac{b_3}{d})(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + (c_2 + v_1 \frac{b_4-1}{d})(m, n). \end{aligned}$$

Notemos que, se $\det A = -1$, então $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = 2b_3$ e $b_4 \neq 1$, e $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Daí, se a_3 é par, temos que $d = b_4 - 1 = \text{mdc}(\frac{a_3}{2}(b_4 - 1), b_4 - 1)$, enquanto que, se a_3 é ímpar, então $d = \frac{b_4-1}{2} = \text{mdc}(a_3 \frac{b_4-1}{2}, b_4-1)$, onde, sem perda de generalidade, supomos $b_4-1 > 0$. Ainda, se a_3 é par, então $v_2(\mu, \nu) = (c_1 + v_1 \frac{a_3}{2})(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + (c_2 + v_1)(m, n)$, enquanto que, se a_3 é ímpar, $v_2(\mu, \nu) = (c_1 + v_1 a_3)(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + (c_2 + 2v_1)(m, n)$. Se a_3 é ímpar, então, para $(c'_1, c'_2) = (-v_1 a_3, c_2)$, segue que $v_2(\mu, \nu) = (c'_1 + v_1 a_3)(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + (c'_2 + 2v_1)(m, n) = (c_2 + 2v_1)(m, n)$. Desde que $\text{mdc}(\mu, \nu) = 1 = \text{mdc}(m, n)$ e v_2 é ímpar, então $c_2 + 2v_1 = \pm v_2$ e portanto c_2 é ímpar. Daí, $\frac{b_4-1}{2}(1 + c_2) \equiv 0 \pmod{2}$. Assim, desde que $[(c'_1, c'_2)] = [(c_1, c_2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (1,0) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2,0), (a_3,0) \rangle}$, então, para a_3 ímpar e $\det A = -1$, também pelo nosso trabalho (caso 4), f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo. Agora, se a_3 é par, então, a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} -\frac{a_3}{2}(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) - (m, n) &= (\kappa, \lambda) \\ c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) &= v_1(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu), \end{cases}$$

obtemos que $(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2)(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) = (v_1 + c_2)(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu)$. Desde que $\{y_1, y_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, então, em particular, $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2$ divide v_2 , ímpar, donde segue que $c_1 - \frac{a_3}{2}c_2$ é ímpar. Observemos que, se $b_4 - 1 < 0$, então, para $(c'_1, c'_2) = (-c_1, c_2)$, segue que $c'_1 + \frac{a_3}{2}c'_2 = -c_1 + \frac{a_3}{2}c_2 = -(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2)$, com $[(c'_1, c'_2)] = [(c_1, c_2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2,0) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2,0), (a_3,0) \rangle}$. Logo, $(b_4-1)(c_1 - \frac{a_3}{2}c_2 - 1) \equiv 0 \pmod{2}$ e portanto, para a_3 par e $\det A = -1$, também pelo nosso trabalho (caso 4), f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo.

Agora, se $\det A = 1$, então $A_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & a_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & b_3 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}$, com $a_3(b_4-1) = 0$ e $(b_3, b_4-1) \neq (0,0)$, e $f_{\#}(c)_{\mathcal{F}} = \rho_1^{c_1}(\rho_2^{-1})^{c_2}c$. Se $a_3 \neq 0$, então $b_4 = 1$, $b_3 \neq 0$ e

$d = b_3$, onde, sem perda de generalidade, supomos $b_3 > 0$. Daí, a partir do sistema de equações

$$\begin{cases} -(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) &= (\kappa, \lambda) \\ c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) &= v_1(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu), \end{cases}$$

obtemos que $c_2(m, n) = (v_1 + c_1)(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu)$. Desde que $\{y_1, y_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, então, em particular, c_2 divide v_2 , ímpar, donde segue que c_2 é ímpar. Logo, $b_4(b_3+1)-1+c_1(b_4-1)+c_2b_3=b_3(1+c_2) \equiv 0 \pmod{2}$ e portanto, para $a_3 \neq 0$ e $\det A = 1$, também pelo nosso trabalho (caso 3), f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo. Agora, se $a_3 = 0$, então, uma vez que $c_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c_2(m, n) = v_1(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu)$, segue, para $c_1 = 0$, que c_2 é ímpar, enquanto que, para $c_2 = 0$, que c_1 é ímpar. Assim, desde que, em $\frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2,0), (0,2) \rangle}$, $[(0, c_2)] = [(2k, c_2)]$ e $[(c_1, 0)] = [(c_1, 2k)]$, então c_1 e c_2 não são ambos pares. Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -\frac{b_3}{d}(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) - \frac{b_4-1}{d}(m, n) &= (\kappa, \lambda) \\ c'_1(\frac{-b}{d}, \frac{a}{d}) + c'_2(m, n) &= v_1(\kappa, \lambda) + v_2(\mu, \nu) \end{cases}$$

Para $(c'_1, c'_2) = (1, 0)$, obtemos que $\frac{b_4-1}{d}$ é ímpar, donde, b_4-1 é ímpar, se d é ímpar, enquanto que b_4-1 e b_3 são pares, se d é par. Daí,

$$b_4(b_3+1)-1+c'_1(b_4-1)+c'_2b_3 = b_4(b_3+1)-1+(b_4-1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Para $(c'_1, c'_2) = (0, 1)$, obtemos que $\frac{b_3}{d}$ é ímpar, donde, b_3 é ímpar, se d é ímpar, enquanto que b_3 e b_4-1 são pares, se d é par. Logo,

$$b_4(b_3+1)-1+c'_1(b_4-1)+c'_2b_3 = b_4(b_3+1)-1+b_3 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Para $(c'_1, c'_2) = (1, 1)$, obtemos que $(b_4-1) - b_3$ divide b_3v_2 , donde b_4-1 e b_3 não são ambos ímpares, pois v_2 é ímpar. Daí,

$$b_4(b_3+1)-1+c'_1(b_4-1)+c'_2b_3 = b_4(b_3+1)-1+(b_4-1)+b_3 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Assim, desde que $[(c'_1, c'_2)] = [(c_1, c_2)] \in \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (2,0), (0,2) \rangle} = \frac{\mathbb{Z}^2}{\langle (-2,0), (a_3, -2) \rangle}$, então, para $a_3 = 0$ e $\det A = 1$, também pelo nosso trabalho (caso 4), f é deformável sobre S^1 a livre de ponto fixo. ■

Observações 5.3.3. *Deste modo, verificamos que os dois resultados são compatíveis. Gostaríamos de ressaltar que, em [K], a partir do cálculo dos invariantes topológicos (números mínimos, de Nielsen e de Reidemeister) para pares de aplicações contínuas entre fibrados lineares, tendo toros como fibras, de dimensões quaisquer e, possivelmente diferentes entre si, que preservam fibra sobre as esferas unitárias, Koschorke obtém resultados mais gerais, tendo 5.2.1, como um resultado particular, mas, isoladamente, já muito interessante.*

Referências Bibliográficas

- [GPV-04] D. L. Gonçalves; D. Penteado; J. P. Vieira. Fixed points on torus fiber bundles over the circle. *Fund. Math.* 183(1), 2004, 1-38.
- [GPV-09] D. L. Gonçalves; D. Penteado; J. P. Vieira. Fixed points on Klein bottle fiber bundles over the circle. *Fund. Math.* 203(3), 2009, 293-305.
- [L-50] R. C. Lyndon. Cohomology theory of groups with a single defining relation. *Ann. of Math.* 52(3), 1950, 650-665.
- [Sc-70] G. P. Scott. Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 68(3), 1970, 605-617.
- [Br-72] R. B. S. Brooks. On removing coincidences of two maps when only one, rather than both, of them may be deformed by a homotopy. *Pacific J. Math.* 40(1), 1972, 45-52.
- [BBPT-75] R. B. S. Brooks; R. F. Brown; J. Pak; D. H. Taylor. Nielsen numbers of maps of tori. *Proc. Amer. Math. Soc.* 52(1), 1975, 398-400.
- [Ba-77] H. J. Baues. Obstruction theory - on homotopy classification of maps. *Lecture Notes in Math.* 628, Springer-Verlag, 1977.

- [FH-81] E. Fadell; S. Husseini. A fixed point theory for fiber-preserving maps. *Lecture Notes in Math. 886*, Springer-Verlag, 1981, 49-72.
- [H-59] S. T. Hu. Homotopy theory. *Academic Press*, 1959.
- [Sp-66] E. H. Spanier. Algebraic topology. *McGraw-Hill Series Higher Math.*, McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [N-72] M. Newman. Integral matrices. *Academic Press*, 1972.
- [M-77] W. S. Massey. Algebraic topology, an introduction. *Grad. Texts Math. 56*, Springer-Verlag, 1977.
- [W-78] G. W. Whitehead. Elements of homotopy theory. *Grad. Texts Math. 61*, Springer-Verlag, 1978.
- [V-94] J. W. Vick. Homology theory: an introduction to algebraic topology second edition. *Grad. Texts Math. 145*, Springer-Verlag, 1994.
- [J-97] D. L. Johnson. Presentations of groups second edition. *London Math. Soc. Student Texts. 15*, Cambridge University Press, 1997.
- [GL-05] A. Garcia; Y. Lequain. Elementos de álgebra terceira edição. *Projeto Euclides*, IMPA, 2005.
- [GK-09] D. L. Gonçalves; U. Koschorke. Nielsen coincidence theory of fibre-preserving maps and Dold's fixed point index. *Top. Meth. in Nonlin. Anal. 33(1)*, 2009, 85-103.
- [K] U. Koschorke. Fixed points and coincidences in torus bundles. *submitted exclusively to the London Math. Soc.*