Nilálgebras comutativas de potências associativas

Mary Luz Rodiño Montoya

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIENCIAS

Programa: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández

Co-Orientador: Prof. Dr. Alexandre Grichkov

São Paulo, julho de 2009

Nilálgebras comutativas de potências associativas

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Mary Luz Rodiño Montoya
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández (orientador) -IME-USP.
- Prof. Dr. Alexandre Grichkov (co-orientador) -IME-USP.
- Prof. Dr. Alexandre Ananin -UNICAMP.
- Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov -UNICAMP.
- Prof. Dr. Aleksandr Pozhidaev -IM SB RAS.

*À minha Família,
especialmente à minha Mãe.*

Agradecimentos

Agradeço ao professor Juan Carlos Gutiérrez Fernández, meu orientador, e ao professor Alexandre Grichkov, meu co-orientador, pela paciência, dedicação e pelos importantes aportes na elaboração desta tese. Também agradeço aos professores da banca de defesa pela valiosa contribuição com suas correções e sugestões, ao Instituto de Matemática e Estatística pela formação acadêmica e à possibilidade de utilização de seus recursos para meus estudos, à Cristina e ao Alexandre pela amizade e ajuda com o português na redação desta tese e a todos meus amigos pelo apoio e carinho.

Abstract

The aim of this work is to study the structure of the modules over a trivial algebra of dimension two in the variety $\mathfrak{M}$ of commutative and power-associative algebras. In particular we classify the irreducible modules. These results enables us to understand better the structure of finite-dimensional power-associative nilalgebras of nilindex 4.

Finally, we classify, up to isomorphism, commutative power associative nilalgebras of nilindex n and dimension n .

Keywords: Power associative algebras, nilalgebras, irreducible bimodules, power associative bimodules.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a estrutura dos módulos sobre uma álgebra trivial de dimensão dois na variedade $\mathfrak{M}$ das álgebras comutativas de potências associativas. Em particular classificamos os módulos irredutíveis. Estes resultados nos permitem compreender melhor a estrutura das nilálgebras comutativas de dimensão finita e nilíndice 4.

Finalmente classificamos, sob isomorfismos, as nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice n .

Palavras-chave: Álgebras de potências associativas, nilálgebras, bimódulos irredutíveis, bimódulos de potências associativas.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	6
2 Bimódulos de potências associativas	17
2.1 Definição dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α	19
2.2 $\mathcal{A}$ -módulos irredutíveis.	24
2.3 Decomposição de M como soma dos W_α	26
3 Nilálgebras de potências associativas e nilíndice 4	31
3.1 O produto $W_\alpha \cdot W_\beta$ para $\alpha, \beta \in F^*$	33
3.2 Os produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$ para $\alpha, \beta \in F^*$	40
3.2.1 Produtos para $i + j = 3$.	40
3.2.2 Produtos para $i + j = 4$.	43
3.2.3 Produtos para $i + j = 5$.	49
3.2.4 Produtos para $i + j \geq 6$.	50
3.3 O produto $W_0 \cdot W_\alpha$ para $\alpha \in F$.	53
3.4 Algumas nilálgebras que não são simples.	56
4 Dimensão e nilíndice n.	64
4.1 Dimensão menor ou igual a quatro.	66

4.2	Classificação para dimensão cinco.	67
4.3	Classificação para dimensão seis.	87
4.4	Classificação para dimensão sete.	110
4.5	Classificação para dimensão oito.	130
4.6	Classificação para dimensão maior ou igual a nove.	140
Referências Bibliográficas		165
Índice Remissivo		168

Introdução

As álgebras não-associativas são objeto de importantes estudos matemáticos. Paralelamente, elas têm despertado o interesse de pesquisadores de outras áreas, tais como a física teórica e a biomatemática. Por exemplo, as álgebras de Jordan foram introduzidas na mecânica quântica, as álgebras de Lie são utilizadas para descrever a estrutura local dos grupos topológicos e as álgebras bárias desempenham um papel central na teoria das álgebras genéticas. Focaremos nosso trabalho nas nilálgebras comutativas de potências associativas. Observe-se que as álgebras de Jordan são de potências associativas.

Em 1948, A. Albert levantou em [2] algumas questões, uma das quais sobre a existência de exemplos de nilálgebras simples de potências associativas. A seguinte conjectura ficou conhecida como o Problema de Albert: *Toda nilálgebra comutativa de potências associativas e de dimensão finita é solúvel*. Isto é equivalente a afirmar que, dentro da classe das nilálgebras comutativas de potências associativas, não existem álgebras simples de dimensão finita. Em 1972, D. Suttles [23] apresentou um exemplo de uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão cinco e nilíndice quatro que é solúvel mas não é nilpotente.

Exemplo de Suttles: Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra comutativa com base $\{e_1, \dots, e_5\}$ e produtos não nulos dados por

$$e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, \quad e_1e_3 = e_4, \quad e_2e_3 = e_5.$$

Observamos que $\mathcal{B}^2\mathcal{B}^2 = 0$, logo $\mathcal{B}$ é solúvel de índice de solubilidade 2, porém $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^m \neq 0$ para todo inteiro positivo m , o que mostra que $\mathcal{B}$ não é nilpotente. Assim, temos uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 que é solúvel mas não é nilpotente.

Deste modo, no problema de Albert, a condição de solubilidade não pode ser trocada pela condição de nilpotência.

M. Gerstenhaber em [13], num trabalho que faz parte de uma série de três artigos publicados entre 1958 e 1960, obteve o seguinte resultado sobre a estrutura das nilálgebras comutativas de potências associativas.

Teorema. (1) *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas, sobre um corpo de característica zero ou de característica suficientemente grande se comparada ao índice de nilpotência t de $b \in \mathcal{B}$. Então a álgebra gerada por R_{b^i} , com $i \in \mathbb{N}$, é nilpotente de índice menor ou igual a $2(t-1)^2+1$, sendo R_b a multiplicação à direita de b por um elemento qualquer de $\mathcal{B}$.* (2) *Se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de característica zero e nilíndice t , então $R_b^{2t-3} = 0$, para todo b em $\mathcal{B}$.*

Em um trabalho de 1975 [12], M. Gerstenhaber e H. Myung realizaram um estudo das nilálgebras de dimensão pequena, mostrando a nilpotência da álgebra quando a dimensão é menor ou igual a quatro e determinando as classes de isomorfismos de tais álgebras.

Nos últimos dez anos, publicou-se uma série de artigos que forneceu uma solução parcial ao problema de Albert. Estes estudos podem ser classificados em duas linhas de pesquisa: uma delas aborda o problema por meio do estudo da dimensão da nilálgebra, no caso de dimensões pequenas, e a outra aborda o problema por meio do estudo do nilíndice quando ele é pequeno ou quando ele é grande com relação a dimensão. No caso do estudo da solubilidade (ou nilpotência) das nilálgebra de p.a. por meio de sua dimensão, foi mostrado por I. Correa e L. Peresi [7] que, para dimensão cinco, a álgebra é solúvel de índice menor ou igual a três, e que quando o nilíndice é três, a álgebra é nilpotente de índice de nilpotência menor ou igual a quatro. Para dimensão seis, I. Correa, I. Henzel e L. Peresi [6] mostraram a solubilidade da álgebra,

e para dimensão sete, a solubilidade foi provada em [11] por L. Elgueta e A. Suazo. Neste mesmo trabalho foi mostrada a solubilidade da álgebra para dimensão oito para álgebra de nilíndice menor ou igual a quatro e, em [16], J.C. Gutiérrez Fernández e A. Suazo finalmente mostraram a solubilidade para nilíndice cinco ficando demonstrada a solubilidade para dimensão oito. Assim, podemos resumir todos estes resultados no seguinte teorema.

Teorema. *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas, sobre um corpo de característica diferente de dois 2 e 3. Se $\mathcal{B}$ tem dimensão menor ou igual a 8, então $\mathcal{B}$ é solúvel.*

Em função da nilpotência, quando o nilíndice é menor ou igual a três, o resultado é devido a Albert [21] já que, neste caso, a álgebra é de Jordan e, portanto, nilpotente se de dimensão finita. Para nilíndice n , sendo n a dimensão da álgebra, I. Correa e A. Suazo [8] mostraram que a álgebra é nilpotente de índice de nilpotência n (este resultado foi uma generalização do método utilizado por M. Gerstenhaber e H. Myung [12]). Eles encontraram também uma condição necessária e suficiente para que tais álgebras sejam de Jordan, e neste caso fizeram a classificação, sob a condição de que a característica não fosse um divisor de $n - 2$. Para nilíndice maior ou igual a $n - 2$, J.C. Gutiérrez Fernández [15] mostrou que a álgebra é solúvel, sendo neste caso a característica do corpo zero ou suficientemente grande se comparada ao nilíndice. Tais resultados podem ser condensados no seguinte teorema.

Teorema. *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas, de dimensão finita e característica zero: (1) Se $\mathcal{B}$ tem nilíndice menor ou igual a 3, então $\mathcal{B}$ é nilpotente; (2) Se $\mathcal{B}$ tem dimensão n e nilíndice maior ou igual a $n - 2$, então $\mathcal{B}$ é solúvel.*

Além dos resultados anteriores, foram obtidos outros num contexto mais geral, como por exemplo o caso não comutativo, que foi considerado por I. Correa e I. Hentzel [4], os quais mostraram o seguinte: *Se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra não comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice n sobre um corpo de característica diferente de 2, então $\mathcal{B}$ é solúvel e $\mathcal{B}^2$ é nilpo-*

tente. Para todo $n > 2$, eles apresentaram dois exemplos de nilálgebras não comutativas de potências associativas de dimensão n . No primeiro exemplo, a álgebra tem nilíndice n e não é nilpotente; no segundo, a álgebra tem nilíndice $n - 1$ e não é solúvel.

J.C. Gutiérrez Fernández mostrou [15] que as nilálgebras comutativas (não necessariamente de potências associativas) de dimensão menor ou igual a 6 são solúveis se a característica do corpo for diferente de 2, 3, 5. Finalmente, I. Correa estabeleceu [3] que o índice de nilpotência de uma nilálgebra de Jordan de nilíndice $n - 1$ e dimensão n é $n - 1$.

Considerando-se a profundidade e a complexidade do problema em questão, faz sentido continuar seu estudo em alguns casos particulares como tem sido feito até agora, para dimensões e nilíndices pequenos. Assim, na primeira parte desta tese (Capítulos 2 e 3), focamos nosso trabalho no estudo das nilálgebras de nilíndice 4. Mais explicitamente, consideremos F um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e de 3 e $\mathfrak{M}$ a variedade das álgebras comutativas e de nilíndice 4, sobre o corpo F . É claro que as $\mathfrak{M}$ -álgebras são álgebras de potências associativas. Observamos que mesmo para as $\mathfrak{M}$ -álgebras o problema de Albert está em aberto. É bom tentar aplicar métodos clássicos desenvolvidos para análise das álgebras de Lie, de Jordan, de Malcev, etc. para o estudo da estrutura das $\mathfrak{M}$ -álgebras e para a construção de exemplos. O principal obstáculo que temos para o estudo da estrutura das $\mathfrak{M}$ -álgebras é a ausência do análogo do Teorema de Engel na teoria das $\mathfrak{M}$ -álgebras, que pode ser formulado da seguinte forma:

Conjectura. *Seja $\mathcal{B}$ uma $\mathfrak{M}$ -álgebra de dimensão finita. Então $\mathcal{B}$ é nilpotente se, e somente se, para cada par de elementos $a, b \in \mathcal{B}$, tal que $a^2 = b^2 = ab = 0$, a álgebra gerada pelos operadores L_a e L_b é nilpotente.*

Esta conjectura mostra a importância do estudo dos módulos sobre a $\mathfrak{M}$ -álgebra

$$\mathcal{A} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ab = 0 \rangle,$$

isto é, a classificação dos $\mathcal{A}$ -módulos na variedade $\mathfrak{M}$.

Desta maneira, no Capítulo 1, damos algumas definições básicas e resul-

tados necessários para a compreensão do restante do trabalho. No Capítulo 2, desenvolvemos a teoria dos $\mathcal{A}$ -módulos M de dimensão finita na classe $\mathfrak{M}$, caracterizando os irredutíveis. Definimos, para todo $\alpha \in F$, os $\mathcal{A}$ -submódulos W_α e construímos uma base para tais módulos. Finalmente, demonstramos que M pode ser decomposto como soma direta destes W_α .

Uma vez que toda álgebra $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ contém uma subálgebra trivial $\mathcal{A}$, é possível estudar a álgebra $\mathcal{B}$ por meio de sua estrutura de $\mathcal{A}$ -módulo. Assim no Capítulo 3, estudamos a estrutura de $\mathcal{B}$ por meio de sua decomposição como soma direta dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α , com $\alpha \in F$. Estudaremos como são em $\mathcal{B}$ os produtos dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α .

Intentaremos nos aproximar do problema de Albert através dos módulos estudados no Capítulo 2. Isto nos permitirá construir alguns exemplos e buscar, se existir, algum contra-exemplo. Por exemplo, podemos analisar as álgebras em $\mathfrak{M}$ que são da forma $A + M$ onde A é uma álgebra trivial de dimensão 2, $AM \subset M$ e M é um A -módulo via $(x, m) = xm$ com $x \in A$ e $m \in M$.

Finalmente, no Capítulo 4, estudamos as nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão n e nilíndice n e damos uma classificação a menos de isomorfismo.

Preliminares

Neste capítulo daremos alguns conceitos básicos das álgebras não-associativas, nilálgebras, álgebras de potências associativas e bimódulos. Alguns teoremas que serão utilizados nos outros capítulos serão apresentados sem sua demonstração, indicando sua respectiva referência.

Sejam F um corpo, $\mathcal{B}$ um espaço vetorial sobre F e

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \times \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ (x, y) &\longmapsto xy\end{aligned}$$

uma aplicação bilinear tal que $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, para todo $x, y \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in F$. O espaço vetorial $\mathcal{B}$, junto com a multiplicação definida através da aplicação bilinear, forma uma *álgebra* $\mathcal{B}$ sobre o corpo F . Se a multiplicação em $\mathcal{B}$ verifica que $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ chama-se *comutativa* e, se cumpre que $(xy)z = x(yz)$, para todo $x, y, z \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ chama-se *associativa*. O termo álgebras não-associativas, será usado para fazer referência a álgebras não necessariamente associativas.

Seja $\Phi = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de uma álgebra $\mathcal{B}$ de dimensão finita. A multiplicação em $\mathcal{B}$ está determinada por $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k$, com $1 \leq i, j \leq n$. Os escalares $\gamma_{ijk} \in F$ são denominados *constantes de estrutura* da álgebra $\mathcal{B}$ com respeito à base dada Φ . Se V é um espaço vetorial sobre

F , com base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e γ_{ijk} ($1 \leq i, j, k \leq n$) são escalares, a expressão $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k$ define uma multiplicação $xy = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \gamma_{ijk} \right) e_k$ em que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$ e munido desta multiplicação V é uma álgebra sobre F . Observe que V é comutativa se cumpre a identidade $\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}$, para todo i, j, k .

Sejam $\mathfrak{M}$ uma classe de álgebras sobre o corpo F , $A \in \mathfrak{M}$, M é um espaço vetorial sobre F e $A \times M \rightarrow M$ e $M \times A \rightarrow M$ duas aplicações bilineares dadas por $(a, m) \mapsto am$ e $(m, a) \mapsto ma$. Então a soma direta $A \oplus M$ dos espaços vetoriais A e M é uma álgebra sobre F com a multiplicação em $A \oplus M$ definida por:

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) := a_1 a_2 + (m_1 a_2 + a_1 m_2).$$

Se a álgebra $A \oplus M$ está em $\mathfrak{M}$, então M é um *bimódulo* (no sentido de Eilenberg) sobre a álgebra A (ou um *A-bimódulo*) na classe $\mathfrak{M}$.

Notemos que, se $\mathfrak{M}$ é a classe de todas as álgebras não-associativas sobre o corpo F , então nenhuma outra condição, fora da bilinearidade assumida originalmente será imposta às aplicações $A \times M \rightarrow M$ e $M \times A \rightarrow M$. Se a classe $\mathfrak{M}$ está definida por um conjunto de identidades multilíneares $\{f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = 0 / i \in I\}$, então não é difícil ver que M é um bimódulo para $A \in \mathfrak{M}$ na classe $\mathfrak{M}$ se e, somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

$$f_i(a_1, \dots, a_{k-1}, m, a_{k+1}, \dots, a_{n_i}) = 0,$$

para todo $i \in I$, $k \in \{1, \dots, n_i\}$, $a_j \in A$, $m \in M$.

Um subconjunto N de M é um *A-subbimódulo* de M se ele mesmo é um bimódulo sobre A na classe $\mathfrak{M}$. Um bimódulo M é *irredutível* se não contém subbimódulos próprios, isto é seus únicos subbimódulos são 0 e M .

Um subespaço vetorial S de uma álgebra $\mathcal{B}$, fechado sob a multiplicação, chama-se *subálgebra* de $\mathcal{B}$. Um subespaço I de $\mathcal{B}$ fechado sob a multiplicação por elementos de $\mathcal{B}$, isto é, $xy, yx \in I$ para todo $x \in \mathcal{B}$ e $y \in I$, é um *ideal* de $\mathcal{B}$. Notemos que todo ideal é uma subálgebra, mas o contrário não é

válido. A subálgebra $\mathcal{B}^2$, gerada como espaço vetorial pelos produtos xy tal que $x, y \in \mathcal{B}$, é um ideal de $\mathcal{B}$. Uma álgebra $\mathcal{B}$ é *simples* quando $\mathcal{B}^2 \neq 0$ e seus únicos ideais são os triviais, isto é, 0 e $\mathcal{B}$. Assim, se uma álgebra $\mathcal{B}$ é simples, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$. Seja I um ideal de $\mathcal{B}$, o conjunto $\mathcal{B}/I = \{\bar{x} = x + I : x \in \mathcal{B}\}$ munido das operações $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ e $\alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}$, para todo $x, y \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in F$ é a *álgebra quociente* de $\mathcal{B}$ por I . Observe que a álgebra $\mathcal{B}/\mathcal{B}^2$ tem multiplicação zero. Se I, J são ideais de $\mathcal{B}$ tal que $I \cap J = 0$ e sua soma é todo $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é *soma direta* de I e J e é denotado por $\mathcal{B} = I \oplus J$. Note que para cada $x, y \in I$ e $z, w \in J$ temos que $(x + z)(y + w) = xy + zw$, pois $xw, zy \in I \cap J = 0$. O anulador de uma álgebra $\mathcal{B}$, que denotaremos por $Anul(\mathcal{B})$, está formado pelos elementos de $\mathcal{B}$ cujo produto com qualquer outro elemento de $\mathcal{B}$ é nulo, isto é $Anul(\mathcal{B}) = \{x \in \mathcal{B} \mid xy = yx = 0, \text{ para todo } y \in \mathcal{B}\}$.

Uma transformação linear h entre as F -álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, é um *homomorfismo de álgebras*, se $h(xy) = h(x)h(y)$, para todo $x, y \in \mathcal{B}$. É claro que o núcleo e a imagem de h , são subálgebras de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente, e que o núcleo é um ideal de $\mathcal{B}$. Se I é um ideal de $\mathcal{B}$, então a inclusão $h : I \longrightarrow \mathcal{B}$, e a projeção $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/I$, são exemplos de homomorfismos de álgebras.

Se x é um elemento de $\mathcal{B}$, então o operador linear $R_x : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, definido por $R_x(y) = yx$, é denominado *multiplicação à direita por x* . De maneira análoga temos L_x , a *multiplicação à esquerda por x* , isto é, $L_x(y) = xy$ para todo $y \in \mathcal{B}$. Observemos que em geral, R_x, L_x não são homomorfismos de álgebras. É claro que em álgebras comutativas, estes operadores coincidem, isto é $L_x = R_x$. Notemos que no caso de um A -bimódulo M na classe $\mathfrak{M}$, as aplicações $R_x|_M : m \mapsto mx$ e $L_x|_M : m \mapsto xm$ para $x \in A$ e $m \in M$, são transformações lineares em M .

Uma transformação linear $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é *nilpotente* se existir um inteiro $k \geq 0$ tal que $f^k \equiv 0$. O menor k , cumprindo esta identidade, chama-se *índice de nilpotência*. Uma álgebra $\mathcal{B}$ chama-se de *Engel* se toda multiplicação à esquerda e à direita de $\mathcal{B}$ é nilpotente, isto é, os operadores L_x e R_x são nilpotentes para todo $x \in \mathcal{B}$. Uma álgebra $\mathcal{J}$ é de *Jordan* se é comutativa e satisfaz a seguinte lei de associatividade, chamada de *identidade de Jordan*,

$x^2(yx) = (x^2y)x$, para todo x, y em $\mathcal{J}$.

Até aqui, quase todos os conceitos apresentados são bem familiares, uma vez que eles são válidos em álgebras associativas. As principais diferenças entre as definições nas álgebras associativas e as não-associativas, estão naquelas que envolvem a multiplicação da álgebra. Assim uma das grandes diferenças está na definição das potências de uma álgebra e de um elemento, sendo que nas álgebras não associativas temos várias definições para as potências que coincidem quando a álgebra é associativa. Na continuação daremos algumas delas.

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra não-associativa. Se C e D são subespaços de $\mathcal{B}$, então CD denota o subespaço vetorial gerado por todos os produtos cd , com $c \in C$ e $d \in D$. As seguintes potências são definidas por indução:

$$\mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B},$$

e para $r \geq 2$ e $s \geq 0$,

$$\mathcal{B}^r = \sum_{i+j=r} \mathcal{B}^i \mathcal{B}^j \quad \text{e} \quad \mathcal{B}^{(s+1)} = \mathcal{B}^{(s)} \mathcal{B}^{(s)}.$$

Da definição anterior, é fácil ver por indução sobre r , para $r \geq 0$, que

$$(\mathcal{B}^{(s)})^{(r)} = \mathcal{B}^{(s+r)}.$$

Em termos destas potências podem-se definir os seguintes conceitos: uma álgebra $\mathcal{B}$ é *nilpotente* se existir um inteiro r tal que $\mathcal{B}^r = 0$, e é *solúvel* se existir um inteiro s tal que $\mathcal{B}^{(s)} = 0$. Os menores r e s cumprindo estas propriedades chamam-se *índice de nilpotência* e *índice de solubilidade*, respectivamente. É fácil ver que uma álgebra $\mathcal{B}$ é nilpotente de índice r se, e somente se, o produto de r ou mais elementos com qualquer arranjo de parênteses é zero e existe um produto não nulo de $r-1$ elementos. Definimos também as potências de um elemento $x \in \mathcal{B}$, assim:

$$x^1 = x \quad \text{e} \quad x^{i+1} = x^i x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots$$

Notemos que toda álgebra nilpotente é solúvel uma vez que $\mathcal{B}^{(r)} \subseteq \mathcal{B}^{2^r}$. Podemos verificar a inclusão anterior por indução sobre r assim: Se $r = 0$, $\mathcal{B}^{(0)} \subseteq \mathcal{B}^{2^0}$, e supondo para valores menores ou iguais a $r - 1$, temos para r que $\mathcal{B}^{(r)} = \mathcal{B}^{(r-1)}\mathcal{B}^{(r-1)} \subseteq \mathcal{B}^{2^{r-1}}\mathcal{B}^{2^{r-1}} \subseteq \mathcal{B}^{2^r}$, cumprindo-se a inclusão. Por outro lado, temos que a solubilidade não implica a nilpotência, basta tomar a álgebra $\mathcal{B}$ gerada pelo conjunto $\{e_1, e_2\}$, onde $e_1^2 = e_2^2 = 0$ e $e_1e_2 = -e_2e_1 = e_1$. Como $\mathcal{B}^2 = \langle e_1 \rangle$, $\mathcal{B}^2\mathcal{B}^2 = 0$ e $\mathcal{B}^{(2)} = \mathcal{B}^{(1)}\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}^2\mathcal{B}^2 = 0$. Assim, $\mathcal{B}$ é solúvel de índice 2, mas $\mathcal{B}\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2$, logo $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^3 = \dots = \mathcal{B}^r = \dots \neq 0$. Portanto, $\mathcal{B}$ não é nilpotente.

Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de dimensão finita, então $\mathcal{B}$ contém um único ideal maximal solúvel S . Portanto, a álgebra quociente $\mathcal{B}/S$ não contém ideais solúveis não nulos. O ideal S chama-se o *radical solúvel* da álgebra $\mathcal{B}$ e é denotado por $Sol(\mathcal{B})$.

Um elemento x em $\mathcal{B}$ é *nilpotente* se a subálgebra gerada por ele é nilpotente. A partir deste conceito podemos introduzir a definição de nilálgebra, que é uma das principais características das álgebras que vamos estudar nesta tese. Uma álgebra $\mathcal{B}$ é uma *nilálgebra* se todos seus elementos são nilpotentes. Assim, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra, então para cada $x \in \mathcal{B}$, existe um inteiro k tal que o produto de x , k ou mais vezes, com qualquer associação, é zero. Se k pode ser escolhido independente de x , então diz-se que $\mathcal{B}$ tem *nilíndice* k , sendo k o menor inteiro satisfazendo esta propriedade.

Introduziremos na continuação a noção de álgebras de potências associativas, assim como alguns teoremas a respeito desta classe de álgebras.

Uma álgebra $\mathcal{B}$ é de *potências associativas*, (p.a.), se para todo $x \in \mathcal{B}$, a subálgebra gerada por x é associativa, assim definidas as potências dos elementos x de $\mathcal{B}$ por

$$x^1 = x \quad e \quad x^{i+1} = x^i x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots$$

temos que $\mathcal{B}$ é de potências associativas, se para todo $x \in \mathcal{A}$

$$x^i x^j = x^{i+j} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots$$

Numa álgebra de p.a. temos que

$$(x^r)^s = x^{rs}, \quad x^r x^s = x^{r+s}.$$

Assim definidas as potências de um elemento, temos que numa álgebra de p.a. um elemento x é *nilpotente* se $x^k = 0$, para algum k .

Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra comutativa de p.a. de dimensão finita, então $\mathcal{B}$ contém um único nilideal maximal $Nil(\mathcal{B})$, chamado de *nilradical* da álgebra $\mathcal{B}$. Em uma álgebra $\mathcal{B}$ de p.a. de dimensão finita, tem-se que $S(\mathcal{B}) \subseteq Nil(\mathcal{B})$, isto é, o radical solúvel de $\mathcal{B}$ está contido no nilradical de $\mathcal{B}$.

Assim neste contexto, o Problema de Albert pode ser reformulado em termos de radicais: na classe das álgebras comutativas de potências associativas de dimensão finita o radical solúvel é igual ao nilradical.

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra comutativa de p.a. sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Então linearizando a identidade (ver teoria de linearização em K. Zevlakov [25], pag. 14)

$$x^4 = x^2 x^2,$$

obtemos as seguintes novas identidades:

$$2x(x(xy)) + x(x^2y) + x^3y = 4x^2(xy), \quad (1.1)$$

$$2y(x(xy)) + 2x(y(xy)) + x(xy^2) + y(x^2y) = 4(xy)^2 + 2x^2y^2, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} 2x(x(yz)) + 2x(z(xy)) + 2z(x(xy)) + 2x(y(xz)) \\ + z(x^2y) + 2y(x(xz)) + y(x^2z) = 4x^2(yz) + 8(xy)(xz), \end{aligned} \quad (1.3)$$

para quaisquer elementos x, y, z em $\mathcal{B}$.

O seguinte resultado, que caracteriza a álgebra gerada pelos operadores L_{x^i} , foi apresentado por Albert em [2].

Lema 1.1 *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra comutativa de p.a. sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Então, para cada $x \in \mathcal{B}$, a álgebra gerada pelos operadores L_{x^i} com $i \geq 1$, é gerada por L_x e L_{x^2} .*

Prova: Trocando z por x^r em (1.3) temos que

$$\begin{aligned} 2x(x(x^r y)) + 2x(x^r(xy)) + 2x^r(x(xy)) + 2x(x^{r+1}y) \\ + x^r(x^2 y) + 3x^{r+2}y = 4x^2(x^r y) + 8x^{r+1}(xy), \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} 3L_{x^{r+2}} &= 4L_{x^2}L_{x^r} + 8L_{x^{r+1}}L_x - 2L_x^2L_{x^r} - 2L_xL_{x^r}L_x \\ &\quad - 2L_xL_{x^{r+1}} - 2L_{x^r}L_x^2 - L_{x^r}L_{x^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

De (1.4) obtemos por indução sobre r , que $L_{x^{r+2}} \in \langle L_x, L_{x^2} \rangle$ para $r \geq 1$. $\square$

Utilizando indução e as identidades (1.1), (1.3) e (1.4) é possível demonstrar o seguinte teorema. Para mais detalhes veja [2].

Teorema 1.2 . *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra comutativa sobre um corpo F de característica diferente de 2, 3 e 5. Então $\mathcal{B}$ é de p.a. se, e somente se, $x^4 = x^2x^2$, para todo $x \in \mathcal{B}$.*

Em [1], Albert mostrou que toda álgebra de característica zero ou prima com 30 que satisfaz as identidades $xx^2 = x^2x$ e $x^2x^2 = (x^2x)x$ é de potências associativas. Neste caso a álgebra não é necessariamente comutativa. É importante ressaltar que a restrição na característica é necessária. Três exemplos de álgebras comutativas que cumprem a identidade $x^2x^2 = x^4$ e não são de potências associativas podem ser vistos em [1].

O seguinte resultado para espaços vetoriais foi apresentado por Gerstenhaber em [14]. Uma outra demonstração do lema foi dada por Mathes, Omladic e Radjavi em [19].

Lema 1.3 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo com pelo menos n elementos, e H um subespaço vetorial de endomorfismos nilpotentes de V . Então $\dim(H) \leq n(n-1)/2$, e se $\dim(H) = n(n-1)/2$, então o espaço vetorial H é uma álgebra nilpotente de índice n .*

Um outro resultado, relacionado com o anterior, foi dado por Gutiérrez Fernández em [15].

Lema 1.4 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo F com pelo menos 3 elementos. Se H é um subespaço vetorial de endomorfismos nilpotentes de $\text{End}(V)$, então verifica-se uma das seguintes possibilidades:*

- (i) *Existe um elemento não nulo $v \in V$ no núcleo de todos os $h \in H$.*
- (ii) *$\dim(H) = 2$. Para todo $0 \neq h \in H$, tem-se $\text{posto}(h) = 2$. Se $H = \langle f, g \rangle$, então existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de V tal que: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = 0$ e $g(v_1) = 0$, $g(v_2) = \beta v_1$, $g(v_3) = -\beta v_2$, com $\beta \neq 0$.*

Prova: Seja H um espaço vetorial de aplicações lineares nilpotentes sobre um espaço vetorial V de dimensão 3, que não satisfaz a condição (i). Pelo Lema 1.3, $\dim(H) = 2$. Sejam f, g tais que $H = \langle f, g \rangle$. Como f, g são nilpotentes, $\ker(f) \neq \{0\}$ e $\ker(g) \neq \{0\}$; por outro lado, $\dim(V) = 3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ (igualmente para g), logo $\dim(\ker(f)) = 1$ ou $\dim(\ker(g)) = 1$, portanto, $\text{posto}(f) = 2$ ou $\text{posto}(g) = 2$.

Suponhamos que $\text{posto}(f) = 2$. Usando a forma canônica de Jordan de f , o endomorfismo f pode ser representado, relativo a uma base adequada $\Phi = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V como $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de f com respeito à base Φ , e então obviamente $v_1 \in \ker(f)$. A representação anterior de f é invariante a respeito de bases da forma

$\{\gamma v_1, \beta v_1 + \gamma v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in F$ e $\gamma \neq 0$. Seja $B = [\beta_{ij}]$ a matriz de g com respeito à base Φ . Para todo $\lambda \in F$, $\lambda f + g \in H$, e portanto $\lambda f + g : V \longrightarrow V$ é nilpotente, e uma vez que $\dim(V) = 3$, temos que seu polinômio característico é $P(\lambda f + g) := t^3$. Por outro lado, $P(\lambda f + g) = \det(tI - \lambda A - B) = t^3 - s_2 t^2 + s_1 t + s_0$, onde

$$s_2 = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33},$$

$$s_1 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \lambda + \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} \\ \beta_{31} & \beta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{22} & \lambda + \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$s_0 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \lambda + \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \lambda + \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Para $i = 0, 1, 2$, podemos exprimir s_i como polinômios em λ da seguinte maneira

$$s_i = s_{i2}\lambda^2 + s_{i1}\lambda + s_{i0},$$

onde

$$s_{22} = s_{21} = 0, \quad s_{20} = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}, \quad s_{12} = 0,$$

$$s_{11} = \beta_{32} + \beta_{21}, \quad s_{10} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} \\ \beta_{31} & \beta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$s_{02} = \beta_{31}, \quad s_{01} = \beta_{32}\beta_{11} + \beta_{21}\beta_{33} - \beta_{31}\beta_{12} - \beta_{23}\beta_{31},$$

$$s_{00} = -\beta_{33} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \beta_{23} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{vmatrix} - \beta_{13} \begin{vmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{vmatrix}.$$

Agora, percorrendo λ pelo menos três elementos diferentes de F obtemos que

$s_{ij} = 0$, para todo $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Em particular, de $s_{02} = s_{11} = s_{20} = 0$ temos que

$$\beta_{31} = 0, \quad \beta_{21} + \beta_{32} = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0. \quad (1.5)$$

A seguir, a prova será dividida em dois casos.

- Caso 1: Se $\ker(g) \not\subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$, podemos assumir que $v_3 \in \ker(g)$. Assim, de (1.5) temos que a matriz B tem a forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & -\beta_{11} & 0 \\ 0 & -\beta_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que, $s_{01} = 0$ e $\beta_{33} = \beta_{31} = 0$, segue que $\beta_{32}\beta_{11} = 0$, isto é,

$$\beta_{21}\beta_{11} = 0. \quad (1.6)$$

Por outro lado temos que $s_{10} = 0$ e $\beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{33} = 0$, logo $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} = 0$, isto é,

$$\beta_{11}^2 + \beta_{12}\beta_{21} = 0. \quad (1.7)$$

De (1.6) e (1.7), e usando a hipótese de $v_1 \notin \ker(g)$, obtemos que $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$ e $\beta_{21} \neq 0$. Assim, chamando β_{21} de β , temos que g está representado com respeito à base Φ como $g(x_1, x_2, x_3) = \beta(0, x_1, -x_2)$, com $\beta \neq 0$.

- Caso 2: Se $\ker(g) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$, então como $v_1 \notin \ker(g)$, podemos assumir $v_2 \in \ker(g)$, logo $\beta_{32} = 0$ e por (1.5) temos que $\beta_{21} = 0$. Portanto a matriz B tem a seguinte forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 0 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & -\beta_{11} \end{pmatrix}.$$

Como B é nilpotente e triangular superior $\beta_{11} = 0$, e isto implica que $v_1 \in \ker(g)$, contradizendo a hipótese. Portanto, este caso não é possível.

Como mostramos que $\text{posto}(f) = \text{posto}(g) = 2$, podemos repetir o processo utilizando primeiro o endomorfismo g e mostrando que f, g podem ser representadas como $f(x_1, x_2, x_3) = \gamma(0, x_1, -x_2)$ com $\gamma \neq 0$ e $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$, para uma base adequada de V . $\square$

Bimódulos de potências associativas

Neste capítulo desenvolveremos a teoria dos bimódulos de potências associativas, sobre uma álgebra de multiplicação zero. Para tal, seja F um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3 e seja $\mathfrak{M}$ a variedade das álgebras comutativas de potências associativas. Seja $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ uma álgebra de multiplicação zero e dimensão 2, isto é

$$\mathcal{A} = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ab = 0 \rangle$$

e M um $\mathcal{A}$ -bimódulo, na classe $\mathfrak{M}$. Notemos que nesta classe, os conceitos de módulo e bimódulo coincidem, pois as álgebras são comutativas, portanto de agora em diante nos referiremos a M simplesmente como um $\mathcal{A}$ -módulo e a $\mathcal{A}$ como a álgebra trivial de dimensão dois definida acima. Ao longo deste capítulo, F , $\mathfrak{M}$, $\mathcal{A}$ e M são fixos e $n = \dim M$.

Neste capítulo, caracterizaremos os $\mathcal{A}$ -módulos irredutíveis em $\mathfrak{M}$, definiremos os $\mathcal{A}$ -submódulos W_α para cada $\alpha \in F$, construiremos uma base para tais $\mathcal{A}$ -submódulos e demonstraremos finalmente que todo $\mathcal{A}$ -módulo M , de dimensão finita, se decompõe como soma direta dos W_α , com $\alpha \in F$.

Para começar este estudo, seja $x \in \mathcal{A}$ e L_x a restrição em M da transformação linear multiplicação à esquerda na álgebra $\mathcal{A} \oplus M$, isto é, $L_x : M \longrightarrow M$ tal que $m \mapsto xm$ para todo $m \in M$. Como estamos trabalhando

com álgebras comutativas, as transformações multiplicação à esquerda e multiplicação à direita coincidem, portanto utilizaremos apenas L_x .

Sabemos que todos os elementos das álgebras em $\mathfrak{M}$, satisfazem as identidades

$$xy = yx \text{ e } x^4 = x^2x^2.$$

Se linearizamos a segunda identidade, obtemos

$$2x(x(xy)) + x(x^2y) + x^3y = 4x^2(xy), \quad (2.1)$$

que em termos do operador L_x é equivalente a

$$2L_x^3 + L_xL_{x^2} + L_{x^3} = 4L_{x^2}L_x.$$

Uma vez que $\mathcal{A}^2 = 0$, temos de (2.1) que $x(x(xm)) = 0$ ou $L_x^3 = 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$ e todo $m \in M$, e linearizando esta identidade obtemos:

$$x(x(yx)) + x(y(xm)) + y(x(xm)) = 0,$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$, isto é,

$$L_x^2L_y + L_xL_yL_x + L_yL_x^2 = 0.$$

Em particular, lembrando que temos $a, b \in \mathcal{A}$ fixos,

$$L_a^3 = L_b^3 = 0, \quad L_a^2L_b + L_aL_bL_a + L_bL_a^2 = 0 \text{ e } L_b^2L_a + L_bL_aL_b + L_aL_b^2 = 0.$$

Definimos agora

$$V := \ker L_a.$$

Observamos que $V \neq 0$, pois $L_a^3 = 0$, e como para todo $v \in V$,

$$L_a^2L_b(v) = -L_aL_bL_a(v) - L_bL_a^2(v) = 0,$$

segue que V é invariante pelo operador L_aL_b . Portanto, podemos definir a seguinte transformação linear em V

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto abv, \end{aligned}$$

isto é $\varphi = L_a L_b$ restrita a V . Para simplificar a notação, se $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{A}$ e $v \in V$, então $x_1 \dots x_k v$ representa o produto principal $x_1(x_2(\dots(x_k v) \dots))$.

Para cada $\alpha \in F$ definimos

$$V_\alpha := \{v \in V \mid (\varphi - \alpha I)^n(v) = 0\}$$

e para $k = 0, \dots, n$, definimos

$$V_{\alpha,k} := \ker(\varphi - \alpha I)^k.$$

É claro da definição que $V_{\alpha,n} = V_\alpha$ e

$$0 = V_{\alpha,0} \subset V_{\alpha,1} \subset \dots \subset V_{\alpha,n} = V_\alpha.$$

Temos também que $v_k \in V_{\alpha,k}$, se, e somente se,

$$\varphi(v_k) = \alpha v_k + v_{k-1},$$

com $v_{k-1} \in V_{\alpha,k-1}$, para $k \geq 1$.

Notemos que $V_\alpha = 0$ se, e somente se, α não é autovalor de φ . Como F é algebricamente fechado, temos pelo Teorema de Decomposição Primária para endomorfismos sobre um espaço de dimensão finita que

$$V = \bigoplus_{\alpha \in F} V_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} V_\alpha,$$

onde Δ é o conjunto finito formado por todos os autovalores de φ .

Para todo inteiro não negativo k , temos que $V_{\alpha,k}$ é invariante por φ e se $\alpha \neq 0$, então φ restrita a $V_{\alpha,k}$ é injetora para todo $k \geq 1$.

2.1 Definição dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α

Agora que conhecemos algumas propriedades dos espaços vetoriais $V_{\alpha,k}$, estamos em condição de definir os $\mathcal{A}$ -submódulos W_α , para cada $\alpha \in F$. Esta

definição será feita discriminando os casos $\alpha \neq 0$ e $\alpha = 0$. Denotaremos por F^* o conjunto dos escalares em F diferentes de zero. Se $\alpha \in F^*$, então

$$W_\alpha := V_\alpha + bV_\alpha + bbV_\alpha$$

e para $k = 0, \dots, n$, definimos

$$W_{\alpha,k} := V_{\alpha,k} + bV_{\alpha,k} + bbV_{\alpha,k}.$$

Da definição segue imediatamente que $W_{\alpha,n} = W_\alpha$ e que

$$0 = W_{\alpha,0} \subset W_{\alpha,1} \subset \dots \subset W_{\alpha,n} = W_\alpha.$$

Notemos que $W_{\alpha,k}$ é invariante pela multiplicação por a e b , pois $L_a(V_{\alpha,k}) = 0$, $L_a(bV_{\alpha,k}) = \varphi(V_{\alpha,k}) \subset V_{\alpha,k}$ e $L_a(bbV_{\alpha,k}) = L_aL_b^2(V_{\alpha,k}) \subset -L_b^2L_a(V_{\alpha,k}) - L_bL_aL_b(V_{\alpha,k}) = -b\varphi(V_{\alpha,k}) \subset bV_{\alpha,k}$, isto é $L_a(W_{\alpha,k}) \subset W_{\alpha,k}$ e claramente $L_b(W_{\alpha,k}) \subset W_{\alpha,k}$. Logo $W_{\alpha,k}$ é um $\mathcal{A}$ -submódulo de M , para $k = 0, \dots, n$.

Definimos assim, para $\alpha \in F^*$, os $\mathcal{A}$ -submódulos W_α e, para todo $k \geq 1$, os $\mathcal{A}$ -submódulos $W_{\alpha,k}$. Queremos agora construir uma base para os $\mathcal{A}$ -submódulos $W_{\alpha,k}$, e portanto para $W_\alpha = W_{\alpha,n}$. Dado que definimos W_α a partir dos espaços vetoriais V_α , para os quais temos conhecidas e importantes propriedades, queremos definir uma base para W_α a partir de uma base conhecida de V_α , o que de fato é possível, como demonstraremos no seguinte teorema. Antes de passar ao teorema, notemos que dada uma base para $V_{\alpha,k-1}$, é sempre possível construir uma base para $V_{\alpha,k}$ contendo a base de $V_{\alpha,k-1}$, para todo $k \geq 2$.

Teorema 2.1 *Sejam $\alpha \in F^*$, $k \geq 1$ e $\{u_1, u_2, \dots, u_{t_k}\}$ uma base para $V_{\alpha,k}$. Então o conjunto $\{u_1, bu_1, bbu_1, u_2, bu_2, bbu_2, \dots, u_{t_k}, bu_{t_k}, bbu_{t_k}\}$ é uma base para $W_{\alpha,k}$.*

Prova: Uma vez que $W_{\alpha,k} = V_{\alpha,k} + bV_{\alpha,k} + bbV_{\alpha,k}$, é claro que se $\{u_1, u_2, \dots, u_{t_k}\}$, é uma base para $V_{\alpha,k}$, então o conjunto

$$\{u_1, bu_1, bbu_1, u_2, bu_2, bbu_2, \dots, u_{t_k}, bu_{t_k}, bbu_{t_k}\},$$

é um conjunto gerador para $W_{\alpha,k}$. Portanto resta apenas mostrar que este conjunto é linearmente independente e portanto uma base para $W_{\alpha,k}$.

Mostraremos primeiro que, se o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_t\} \subset V_{\alpha,k}$ é linearmente independente, então o conjunto $\{u_1, bu_1, u_2, bu_2, \dots, u_t, bu_t\}$ é linearmente independente. Sejam $\beta_i, \lambda_i \in F$ tal que

$$\sum_{i=1}^t \beta_i u_i + \lambda_i bu_i = 0.$$

Então multiplicando por a ,

$$\sum_{i=1}^t \beta_i au_i + \lambda_i abu_i = \sum_{i=1}^t \varphi(\lambda_i u_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^t \lambda_i u_i\right) = 0,$$

pois $au_i = 0$, para todo i , e como $\sum_{i=1}^t \lambda_i u_i \in V_{\alpha,k}$ e $\varphi|_{V_{\alpha,k}}$ é injetora, para $\alpha \in F^*$, segue que $\sum_{i=1}^t \lambda_i u_i = 0$. E portanto $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, t$, logo $\sum_{i=1}^t \beta_i u_i = 0$, de onde $\beta_i = 0$, para $i = 1, \dots, t$.

Vejam agora que, se o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_t\} \subset V_{\alpha,k}$ é linearmente independente, então o conjunto $\{u_1, bu_1, bbu_1, u_2, bu_2, bbu_2, \dots, u_t, bu_t, bbu_t\}$ é linearmente independente. Para isto, sejam $\beta_i, \lambda_i, \rho_i \in F$ tal que

$$\sum_{i=1}^t \beta_i u_i + \lambda_i bu_i + \rho_i bbu_i = 0.$$

Então, multiplicando duas vezes por a , temos que

$$\sum_{i=1}^t \beta_i aau_i + \lambda_i aabu_i + \rho_i aabbu_i = 0,$$

mas $aau_i = 0$, $aabu_i = -abau_i - baau_i = 0$ e $aabbu_i = -ababu_i - abbaui = -ababu_i$, pois $u_i \in V_{\alpha,k}$, logo

$$\sum_{i=1}^t \rho_i aabbu_i = -\sum_{i=1}^t \rho_i ababu_i = -\varphi^2\left(\sum_{i=1}^t \rho_i u_i\right) = 0$$

e como $\sum_{i=1}^t \rho_i u_i \in V_{\alpha,k}$, segue da injetividade de $\varphi|_{V_{\alpha,k}}$, que $\sum_{i=1}^t \rho_i u_i = 0$. Logo concluímos que $\rho_i = 0$, para $i = 1, \dots, t$. Assim

$$\sum_{i=1}^t \beta_i u_i + \lambda_i b u_i = 0.$$

Segue da primeira parte da demonstração que $\beta_i = \lambda_i = 0$, para $i = 1, \dots, t$.

Portanto, dada uma base $\{u_1, u_2, \dots, u_{t_k}\}$ para $V_{\alpha,k}$, temos que o conjunto $\{u_1, bu_1, bbu_1, u_2, bu_2, bbu_2, \dots, u_{t_k}, bu_{t_k}, bbu_{t_k}\}$ é um conjunto linearmente independente que gera $W_{\alpha,k}$, o que mostra que é uma base para $W_{\alpha,k}$. $\square$

Teorema 2.2 *Seja $\Phi = \{u_1, u_2, \dots, u_{t_\alpha}\}$ uma base para V_α com $\alpha \neq 0$ e $A = [\alpha_{ij}]$ a matriz da restrição de φ em V_α em relação à base Φ . Então a matriz da restrição de L_a e L_b em W_α em relação à base $\Phi' = \{u_1, bu_1, bbu_1, u_2, \dots, bbu_{t_\alpha}\}$ é respectivamente*

$$A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{t_\alpha} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_{t_α} é a matriz identidade de ordem $t_\alpha \times t_\alpha$.

Prova: Temos que $au_j = 0$, $abu_j = \varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{t_\alpha} \alpha_{ij} u_i$ e $abbu_j = -babu_j - bbau_j = -babu_j = -b(\varphi(u_j)) = -b(\sum_{i=1}^{t_\alpha} \alpha_{ij} u_i) = \sum_{i=1}^{t_\alpha} -\alpha_{ij} bu_i$. Isto prova o teorema. $\square$

Tendo em vista que os W_α foram definidos para $\alpha \in F^*$, passaremos agora a definir W_0 . Definiremos uma cadeia de $\mathcal{A}$ -submódulos $W_{0,k}$, para $k \geq 1$, e finalmente a partir destes, definiremos W_0 . Sejam

$$\begin{aligned} W_{0,0} &:= 0, \\ W_{0,1} &:= \{x \in M \mid ax = bx = 0\}, \\ &\vdots \\ W_{0,k+1} &:= \{x \in M \mid ax, bx \in W_{0,k}\}. \end{aligned}$$

Então definimos

$$W_0 := \bigcup_{k=0}^n W_{0,k},$$

onde n é a dimensão de M . Segue imediatamente da definição que W_0 é invariante por L_a e L_b , ou seja, W_0 é um $\mathcal{A}$ -submódulo, e

$$0 = W_{0,0} \subset W_{0,1} \subset \cdots \subset W_{0,n} = W_0.$$

Diferente do caso W_α , para $\alpha \neq 0$, não é verdade que W_0 possa ser escrito como a soma $V_0 + bV_0 + bbV_0$, neste caso temos apenas a inclusão $V_0 + bV_0 + bbV_0 \subseteq W_0$, pois podem existir elementos $x \in W_0$ tal que $x \notin V_0 + bV_0 + bbV_0$. De fato no exemplo de Suttles, existe um elementos $x \in W_0$ tal que $x \notin V_0 + bV_0 + bbV_0$, o qual exibiremos abaixo. Lembremos que neste exemplo temos uma álgebra com base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e os produtos não nulos são dados por

$$e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, \quad e_1e_3 = e_4 \quad \text{e} \quad e_2e_3 = e_5.$$

Seja $\mathcal{A} = \langle e_4, e_5 \rangle$ sendo $a = e_4$ e $b = e_5$. Então é claro que $V = \langle e_1, e_3, e_4, e_5 \rangle$ e dado que $e_5e_4e_1 = e_5e_4e_3 = e_5e_4e_4 = e_5e_4e_5 = 0$, ou seja, $abe_i = 0$, para $i \neq 2$, temos que $V = V_0$, $bV_0 = \{e_3\}$ e $bbV_0 = \{0\}$, isto é, $V = V_0 + bV_0 + bbV_0$. Como $aae_2 = e_4e_4e_2 = e_4e_3 = 0$ e $bae_2 = e_5e_4e_2 = e_5e_3 = 0$, segue que $ae_2 \in W_{0,1}$ e uma vez que $be_2 = 0 \in W_{0,1}$, temos que $e_2 \in W_{0,2}$, isto é, $e_2 \in W_0$ e $e_2 \notin V_0 + bV_0 + bbV_0$.

Lema 2.3

$$V_0 + bV_0 + bbV_0 \subset W_0.$$

Prova: Basta mostrar que $V_0 \subset W_0$, já que W_0 é um $\mathcal{A}$ -submódulo. Para mostrar que $V_0 \subset W_0$, mostraremos que $V_{0,k} \subset W_0$ por indução sobre $k \geq 0$. O caso $k = 0$ é trivial. Seja $k \geq 0$ e suponhamos, por hipótese de indução, que

$$V_{0,t} \subset W_0 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq k,$$

verifiquemos que $V_{0,k+1} \subset W_0$. Seja $u \in V_{0,k+1}$. Então $\varphi^{k+1}u = 0$ e portanto $\varphi^k(abu) = 0$, o que implica que $abu \in V_{0,k}$ e temos então pela hipótese de indução que $abu \in V_{0,k} \subset W_0$, logo $babu \in bV_{0,k} \subset W_0$. Mas $babu = -abbu$, logo $abbu \in W_0$ e $bbbu = 0$ do que segue que $bbu \in W_0$. De $bbu, abu \in W_0$ segue que $bu \in W_0$ e como $au = 0$ temos que $u \in W_0$. Portanto, para todo $u \in V_{0,k+1}$, temos que $u \in W_0$, logo $V_{0,k+1} \subset W_0$. Assim, $V_0 \subset W_0$ e dessa forma fica mostrado que

$$V_0 + bV_0 + bbV_0 \subset W_0.$$

□

2.2 $\mathcal{A}$ -módulos irredutíveis.

A seguir caracterizaremos os $\mathcal{A}$ -módulos irredutíveis em $\mathfrak{M}$. Observamos que a categoria dos $\mathcal{A}$ -módulos na variedade $\mathfrak{M}$ é equivalente à categoria dos módulos associativos sobre a álgebra $Ass[x, y]/I$, onde $Ass[x, y]$ é a álgebra livre associativa gerada por x e y e I é o ideal gerado pelo conjunto $\{x^3, y^3, xy^2 + xyx + yx^2, yx^2 + yxy + xy^2\}$.

Notamos que se $0 \neq v \in V_\alpha$ e $\varphi(v) = \alpha v$, então $I = \langle v, bv, bbv \rangle$ é um submódulo de M , pois é claro que I é invariante por L_b e que $abv = \alpha v \in I$ e $abbv = -babv - bbav = -\alpha bv \in I$, sendo também invariante por L_a . Como uma consequência do que fizemos anteriormente temos que se M é um $\mathcal{A}$ -módulo irredutível, então φ tem apenas um autovalor α e $M = W_\alpha \subset \langle v, bv, bbv \rangle$, para algum $v \in V_\alpha$. Portanto, um $\mathcal{A}$ -módulo irredutível tem dimensão menor ou igual que 3.

Lema 2.4 *Se M é um $\mathcal{A}$ -módulo irredutível, então $\dim(M) = 1$ ou $\dim(M) = 3$.*

Prova: Sabemos que para autovetor v de φ o subespaço gerado por v, bv e bbv é um $\mathcal{A}$ -submódulo de M . Assim, sendo que M é irredutível, temos que φ

tem exatamente um autovalor que denotaremos por α . Seja v um autovetor de φ associado ao autovalor α . Pelas observações acima $\langle v, bv, bbv \rangle$ é um $\mathcal{A}$ -submódulo de M . Já que M é irredutível $M = \langle v, bv, bbv \rangle$. Analisaremos os casos $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Se $\alpha \neq 0$, então pelo Teorema 2.1 o conjunto $\{v, bv, bbv\}$ é uma base de M e $av = 0$, $a(bv) = \alpha v$ e $a(bbv) = -babv = -\alpha bv$.

Assumiremos agora que $\alpha = 0$. Se bbv for diferente de zero, então a família $\{v, bv, bbv\}$ é linearmente independente e dado que $abbv = -babv - bbav = -b(\varphi(v)) = 0$ e $b(bbv) = 0$ temos que $\langle bbv \rangle$ é um $\mathcal{A}$ -submódulo próprio de M em contradição com a hipótese. Portanto $bbv = 0$. Analogamente, se bv for diferente de zero, então temos que $a(bv) = \varphi(v) = 0$ e $b(bv) = bbv = 0$ logo $\langle bv \rangle$ é um $\mathcal{A}$ -submódulo próprio de M em contradição com a hipótese. Assim $bv = 0$. Consequentemente, $M = \langle v \rangle$, tem dimensão 1. $\square$

Corolário 2.5 *Se M é um $\mathcal{A}$ -módulo irredutível de dimensão 3, então para uma base adequada, as ações de a e de b são dadas por*

$$L_a \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad L_b \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com $\alpha \neq 0$.

Para cada $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, denotaremos por I_α o $\mathcal{A}$ -módulo $\langle v, bv, bbv \rangle$, onde $av = 0$, $abv = \alpha v$ e $abbv = -\alpha bv$, isto é, as matrizes de L_a e L_b são dadas como acima. Por I_0 denotamos um $\mathcal{A}$ -módulo irredutível de dimensão 1. Observamos que para cada $\alpha \in \Delta$, existe uma cadeia de $\mathcal{A}$ -submódulos de W_α

$$0 = U_{\alpha,0} \subset U_{\alpha,1} \subset \cdots \subset U_{\alpha,n_k} = W_\alpha,$$

tal que

$$\frac{U_{\alpha,i}}{U_{\alpha,i-1}} \cong \bigoplus I_\alpha,$$

para $i = 1, 2, \dots, n_k$. Mostraremos na seguinte subseção que W_α é o submódulo maximal de M que satisfaz a propriedade acima.

2.3 Decomposição de M como soma dos W_α

Queremos agora mostrar, que todo $\mathcal{A}$ -módulo na classe $\mathfrak{M}$, de dimensão finita, pode ser decomposto como soma direta dos W_α . Mostraremos primeiro que a soma dos W_α , para todo $\alpha \in F$, é direta e logo enunciaremos dois lemas que precisaremos para a demonstração do teorema.

Nesta seção, M será um $\mathcal{A}$ -módulo na classe $\mathfrak{M}$ de dimensão finita n , e para cada inteiro não negativo k e cada α no corpo algebricamente fechado F os espaços vetoriais $V_{\alpha,k}$, V_α e os $\mathcal{A}$ -submódulos $W_{\alpha,k}$ e W_α definidos neste capítulo. Denotaremos por Δ o conjunto finito formado por todos os autovalores de φ e por Δ^* o conjunto de todos os autovalores de φ diferentes de zero.

Lema 2.6 *Temos que*

$$\sum_{\alpha \in \Delta^*} W_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^*} W_\alpha.$$

Prova: Seja $\Delta^* = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Como $\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^k V_{\alpha_i} + bV_{\alpha_i} + bbV_{\alpha_i}$, para mostrar que a soma é direta basta mostrar que se $\sum_{i=1}^k u_i + bv_i + bbw_i = 0$, para $u_i, v_i, w_i \in V_{\alpha_i}$, então $u_i = v_i = w_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$.

Vejamos primeiro que se $\sum_{i=1}^k u_i + bv_i = 0$, para $u_i, v_i \in V_{\alpha_i}$, então $u_i = v_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$. Seja $\sum_{i=1}^k u_i + bv_i = 0$. Então $0 = \sum_{i=1}^k au_i + abv_i = \sum_{i=1}^k abv_i$, pois $au_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$. Logo $0 = \sum_{i=1}^k abv_i \in \bigoplus_{i=1}^k V_{\alpha_i}$, donde segue que $\varphi(v_i) = abv_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$, mas φ é injetora em V_{α_i} , pois $\alpha_i \neq 0$, logo $v_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$. Assim $0 = \sum_{i=1}^k u_i + bv_i = \sum_{i=1}^k u_i \in \bigoplus_{i=1}^k V_{\alpha_i}$ e portanto $u_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$.

Agora, seja $\sum_{i=1}^k u_i + bv_i + bbw_i = 0$, para $u_i, v_i, w_i \in V_{\alpha_i}$. Então $0 = \sum_{i=1}^k au_i + abv_i + abbw_i = \sum_{i=1}^k abv_i - babw_i$ e uma vez que abv_i e abw_i estão em V_{α_i} , temos da primeira parte da demonstração que $abv_i = abw_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$, logo $v_i = w_i = 0$ pela injetividade de φ em V_{α_i} , assim $0 = \sum_{i=1}^k u_i \in \bigoplus_{i=1}^k V_{\alpha_i}$ e portanto $u_i = 0$, para $i = 1, \dots, k$. $\square$

Lema 2.7 *Temos que*

$$\sum_{\alpha \in \Delta} W_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} W_\alpha.$$

Prova: Pelo lema anterior, basta mostrar que

$$W_0 \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = 0,$$

onde $\Delta^* = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Provaremos por indução sobre j que

$$W_{0,j} \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = 0.$$

O caso $j = 0$ é trivial. Seja agora $j > 0$ e assumir por hipótese de indução que $W_{0,s} \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = 0$ para todo inteiro não negativo $s < j$. Seja $x \in W_{0,j} \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = W_{0,j} \cap \left(\sum_{i=1}^k V_{\alpha_i} + bV_{\alpha_i} + bbV_{\alpha_i} \right)$. Então podemos exprimir x sob a forma

$$x = \sum_{i=1}^k u_i + bv_i + bbw_i, \quad (2.2)$$

com $u_i, v_i, w_i \in V_{\alpha_i}$. Multiplicando por b duas vezes e seguidamente duas vezes por a , obtemos $aabbx = \sum_{i=1}^k aabbu_i \in W_{0,j-1} \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = 0$, logo $0 = aabb\left(\sum_{i=1}^k u_i\right) = -\varphi^2\left(\sum_{i=1}^k u_i\right)$ e portanto $\sum_{i=1}^k u_i = 0$ já que a restrição de φ a $\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i}$ é injetora. Isto implica que $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$.

De maneira análoga podemos multiplicar pela esquerda ambos membros da igualdade (2.2) primeiro por b e depois duas vezes por a e obtemos que $aabx = \sum_{i=1}^k aabbv_i \in W_{0,j-1} \cap \left(\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i} \right) = 0$, logo $0 = aab\left(\sum_{i=1}^k v_i\right) = -\varphi^2\left(\sum_{i=1}^k v_i\right)$ e portanto $\sum_{i=1}^k v_i = 0$ já que a restrição de φ a $\sum_{i=1}^k W_{\alpha_i}$ é injetora. Isto implica que $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$. Finalmente, multiplicando pela esquerda ambos membros da identidade (2.2) por a duas vezes, podemos provar de maneira análoga que $w_1 = w_2 = \dots = w_k = 0$. Isto prova o lema.

□

Lema 2.8 *Seja I um $\mathcal{A}$ -submódulo irredutível de M , tal que $I \cong I_\alpha$. Então*

- i) Se $au \in I$ para $u \in M$, então existe $s \in I$ tal que $a(u + s) = 0$.*
- ii) Se $au, bu \in I$ para $u \in M$, então existe $s_1 \in I$ tal que $a(u + s_1) = 0$ e $b(u + s_1) = 0$.*

Prova:

- i) Seja $au = \lambda_1 v + \lambda_2 bv + \lambda_3 bbv$ para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. Então $0 = aaau = -\lambda_3 \alpha^2 v$, logo $\lambda_3 = 0$. Portanto se $s = -\frac{\lambda_1}{\alpha} bv + \frac{\lambda_2}{\alpha} bbv$, então $a(u + s) = 0$.
- ii) Seja $bu \in I$. Então se $u_1 = u + s$ com $s \in I$, temos que $bu_1 \in I$. Sejam $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in F$ tal que $bu_1 = \beta_1 v + \beta_2 bv + \beta_3 bbv$. Então $0 = aaabu_1 = -\beta_3 \alpha^2 v$, logo $\beta_3 = 0$. Agora $\alpha \beta_1 v - \alpha \beta_2 bv = \beta_1 abv + \beta_2 abbv = ab(\beta_1 v + \beta_2 bv) = abbu_1 = -babu_1 = -b(\beta_2 \alpha v) = -\alpha \beta_2 bv$, logo $\beta_1 = 0$ e assim $bu_1 = \beta_2 bv$. Portanto $au_2 = bu_2 = 0$ para $u_2 = u_1 - \beta_2 v$. $\square$

Teorema 2.9

$$M = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} W_\alpha.$$

Prova: Demonstraremos este teorema por indução sobre n , sendo n a dimensão do $\mathcal{A}$ -módulo M . A demonstração é trivial para os casos $n = 0, 1$. Seja M um $\mathcal{A}$ -módulo de potências associativas de dimensão $n > 1$ e suponhamos o teorema para todo $\mathcal{A}$ -módulo de potências associativas de dimensão menor a n . Dividiremos a prova em dois casos.

- Caso 1: Suponhamos que $0 \in \Delta$. Então existe $v \in W_{0,1}$ com $v \neq 0$. Seja J o $\mathcal{A}$ -submódulo $\langle v \rangle$ e $\overline{M}$ o $\mathcal{A}$ -submódulo quociente de p.a. M/J . É fácil ver que $\overline{W}_0 = W_0/J$. Mostraremos agora que para cada $\alpha \neq 0$ temos que $\overline{W}_\alpha = (W_\alpha + J)/J$, para isto basta mostrar que $\overline{V}_\alpha = (V_\alpha + J)/J$. Demonstraremos por indução sobre k que $\overline{V}_{\alpha,k} =$

$(V_{\alpha,k} + J)/J$. Para $k = 0$ a demonstração é trivial. Seja $k > 0$ e suponhamos por hipótese de indução que $\overline{V}_{\alpha,k-1} = (V_{\alpha,k-1} + J)/J$. Se $u + J \in \overline{V}_{\alpha,k}$, então $\varphi(u + J) - \alpha(u + J) = (abu - \alpha u) + J \in \overline{V}_{\alpha,k-1} = (V_{\alpha,k-1} + J)/J$. Portanto $abu = \alpha u + u_{k-1} + \lambda v$ para algum $u_{k-1} \in V_{\alpha,k-1}$ e $\lambda \in F$. Logo $u + \frac{\lambda}{\alpha}v \in V_{\alpha,k}$, do que segue que $u + J \in (V_{\alpha,k} + J)/J$. Contrariamente, se $u \in V_{\alpha,k}$, então $ab(u + J) - \alpha(u + J) = (abu - \alpha u) + J \in (V_{\alpha,k-1} + J)/J = \overline{V}_{\alpha,k-1}$ e portanto $u + J \in \overline{V}_{\alpha,k}$. Por hipótese de indução temos que $\overline{M} = \sum_{\alpha \in \Delta} \overline{W}_\alpha = (W_\alpha + J)/J$. Assim $M = \sum_{\alpha \in \Delta} W_\alpha$, uma vez que $J \subset W_0$.

- Caso 2: Suponhamos que $0 \notin \Delta$. Seja $J = \langle v, bv, bbv \rangle$ um $\mathcal{A}$ -submódulo irreduzível de M tal que $J \cong J_\alpha$. Denotamos por $\overline{M}$ o $\mathcal{A}$ -submódulo quociente M/J . Pelos lemas 2.3 e 2.8, temos que $\overline{W}_0 = \{0\} + J = (W_0 + J)/J$ e pode-se mostrar facilmente que $\overline{W}_\alpha = (W_\alpha + J)/J$. Seja $\beta \in F$ com $\beta \neq 0, \alpha$. Provaremos por indução sobre k que $\overline{V}_{\beta,k} = (V_{\beta,k} + J)/J$ para todo inteiro não negativo k . O caso $k = 0$ é trivial. Seja $k > 0$ e suponhamos por hipótese de indução que $\overline{V}_{\beta,k-1} = (V_{\beta,k-1} + J)/J$. Seja $u + J \in \overline{V}_{\beta,k}$. Então $au \in J$ e pelo Lema 2.8, existe $u_1 \in M$ tal que $u - u_1 \in J$ e $au_1 = 0$. Pela hipótese de indução temos que $\varphi(u) - \beta u \in (V_{\beta,k-1} + J)/J$, logo $\varphi(u_1) = \beta u_1 + u' + \lambda_1 v + \lambda_2 bv + \lambda_3 bbv$ para algum $u' \in V_{\beta,k-1}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. Portanto, $0 = a\varphi(u_1) = \lambda_2 \alpha v - \lambda_3 \alpha bv$ e segue que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Uma vez que é possível verificar que $u_1 + \frac{\mu}{\alpha - \beta}v \in V_{\beta,k}$ temos que $u + J \in (V_{\beta,k} + J)/J$. Assim $\overline{V}_{\beta,k} \subset (V_{\beta,k} + J)/J$, o que implica que $\overline{W}_\beta \subset (W_\beta + J)/J$ para todo $\beta \in F$. A prova da inclusão contrária é imediata, portanto temos que $\overline{W}_\beta = (W_\beta + J)/J$. Logo pela hipótese de indução temos que $\overline{M} = \sum_{\gamma \in F} \overline{W}_\gamma = \sum_{\gamma \in F} (W_\gamma + J)/J$. Já que $J \subset W_\alpha$, segue que $M = \sum_{\gamma \in F} W_\gamma$.

Isto demonstra o teorema. □

Observamos que a decomposição do $\mathcal{A}$ -módulo M , independe da escolha

da base de $\mathcal{A}$. Isto é, se escolhemos a base $\{a', b'\}$ de $\mathcal{A}$, então

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

com $P \in M_{2 \times 2}(F)$ invertível. Assim $V' = \ker L_{a'}$, $\varphi' = L_{a'} L_{b'}|_{V'}$ e os autovalores de φ' são dados pelo conjunto $\Delta' = \{\alpha\alpha_1, \dots, \alpha\alpha_k\}$, sendo que $\alpha = \det(P)$ e $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ é o conjunto de autovalores de φ .

Nilálgebras de potências associativas e nilíndice 4

No capítulo anterior vimos que, se F é um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3, $\mathfrak{M}$ a variedade das álgebras comutativas de potências associativas sobre F e $\mathcal{A}$ é uma álgebra trivial de dimensão 2, então todo $\mathcal{A}$ -módulo M de dimensão finita na variedade $\mathfrak{M}$ pode ser decomposto como soma direta dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α , com $\alpha \in F$. Neste capítulo utilizaremos este resultado para estudar a estrutura das nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão finita. Para tal seja $\mathfrak{M}$ a variedade das nilálgebras comutativas de potências associativas e nilíndice quatro sobre o corpo F , isto é a variedade das nilálgebras comutativas de potências associativas verificando a identidade

$$x^4 = x^2 x^2 = 0.$$

Seja $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ e $n = \dim \mathcal{B}$. Se o nilíndice de $\mathcal{B} \leq 3$, então $\mathcal{B}$ é nilpotente. Se o nilíndice de $\mathcal{B} = 4$, então $\mathcal{B}$ possui uma subálgebra trivial de dimensão 2. Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra trivial de $\mathcal{B}$ de dimensão 2. É fácil ver que $\mathcal{B}$ é um $\mathcal{A}$ -módulo em $\mathfrak{M}$ via o produto usual em $\mathcal{B}$, since a álgebra $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ com produto definido por $(x, b_1)(y, b_2) = (xy, xb_2 + yb_1) = (0, xb_2 + yb_1)$, para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, está na variedade $\mathfrak{M}$. Uma vez escolhida $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e fixados os elementos $a, b \in \mathcal{A}$, obtemos uma decomposição de $\mathcal{B}$ como soma

direta dos $\mathcal{A}$ -submódulos W_α , isto é

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha \in F} W_\alpha.$$

Em vista disto, estamos interessados em conhecer os produtos $W_\alpha \cdot W_\beta$ em $\mathcal{B}$ para todos os $\alpha, \beta \in F$. Ao longo deste capítulo os elementos a, b continuarão fixos, isto é $a, b \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $a^2 = b^2 = ab = 0$.

Para todo $x \in \mathcal{B}$, temos que $x^2x^2 = 0$, que linearizando nos leva a

$$x^2(xy) = 0. \quad (3.1)$$

Linearizando (3.1) em x temos

$$(xy)(xz) = -\frac{1}{2}x^2(yz) \quad (3.2)$$

e

$$(xy)(zw) + (xz)(yw) + (xw)(yz) = 0. \quad (3.3)$$

Linearizando a identidade $x^4 = 0$, obtemos as seguintes três novas identidades,

$$2x(y(xy)) + 2y(x(xy)) + x(xy^2) + y(yx^2) = 0, \quad (3.4)$$

$$2x(x(yz)) + 2x(y(xz)) + 2x(z(xy)) + 2y(x(xz)) + \\ 2z(x(xy)) + y(zx^2) + z(yx^2) = 0, \quad (3.5)$$

e

$$x(y(zw)) + x(z(yw)) + x(w(yz)) + y(x(zw)) + y(z(xw)) + \\ y(w(xz)) + z(x(yw)) + z(y(xw)) + z(w(xy)) + \\ w(x(yz)) + w(y(xz)) + w(z(xy)) = 0. \quad (3.6)$$

Notemos que as identidades anteriores verificam-se para todo $x, y, z, w \in \mathcal{B}$. Para facilitar a notação, na ausência de parênteses entenderemos o produto da direita para a esquerda, isto é escreveremos $xyzw$ ao invés de $x(y(zw))$ e no caso $(xy)(zw)$ escreveremos $xw \cdot yz$; caso seja necessário, os parênteses serão indicados.

3.1 O produto $W_\alpha \cdot W_\beta$ para $\alpha, \beta \in F^*$

Passaremos agora ao calculo dos produtos $W_\alpha \cdot W_\beta$, onde pode ocorrer que $\alpha\beta \neq 0$, com $\alpha \neq \beta$, $\alpha = \beta \neq 0$, $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ e finalmente $\alpha = \beta = 0$. Assim temos que analisar estes quatro casos.

Inicialmente estudaremos o produto $W_\alpha \cdot W_\beta$, para $\alpha, \beta \neq 0$. Observamos que para todo $\alpha \in F^*$, e para todo inteiro não negativo, temos que

$$W_\alpha = V_\alpha + bV_\alpha + bbV_\alpha$$

e

$$W_{\alpha,k} = V_{\alpha,k} + bV_{\alpha,k} + bbV_{\alpha,k}.$$

O Teorema 2.1, nos diz que basta calcular os produtos uv , ubv , $ubbv$, $bu \cdot bv$, $bu \cdot bbv$ e $bbu \cdot bbv$, onde $u \in U_{\alpha,k}$ e $v \in U_{\beta,m}$, sendo que o conjunto $U_{\alpha,k} = \{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1t_1}, \dots, u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kt_k}\}$ é uma base para $V_{\alpha,k}$. Em algumas ocasiões será necessário tomar um elemento mais específico do conjunto $U_{\alpha,k}$. Portanto é importante ressaltar, que cada vez que seja mostrada alguma identidade e/ou propriedade para um elemento $u_i \in V_{\alpha,i}$, estamos considerando u_i como um elemento do conjunto $\{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{it_i}\}$, satisfazendo

$$au_i = 0 \quad \text{e} \quad abu_i = \alpha u_i + x_{i-1}, \quad (3.7)$$

para $i \geq 1$, sendo que x_{i-1} é uma combinação linear de elementos de $U_{\alpha,i-1}$. Lembrando que $abbu_i = -babu_i$, temos também a igualdade

$$abbu_i = -\alpha bu_i - bx_{i-1}.$$

Das igualdades anteriores é claro que V_α e bV_α são invariantes por φ , isto é $abu \in V_\alpha$ e $abbu \in bV_\alpha$ para todo $u \in V_\alpha$.

Notemos que pela identidade (3.2) temos

$$\begin{aligned} bbu \cdot bbv &= -\frac{1}{2}b^2(bu \cdot bv) = 0, \\ bbu \cdot bv &= -\frac{1}{2}b^2 \cdot vbu = 0, \\ bu \cdot bv &= -\frac{1}{2}b^2 \cdot uv = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$bbu \cdot bbv = bbu \cdot bv = bu \cdot bv = 0,$$

para todo $u \in V_\alpha$ e $v \in V_\beta$.

Isto prova o seguinte:

Lema 3.1 *Se $\alpha, \beta \in F$ com $\alpha\beta \neq 0$, então*

$$bV_\alpha \cdot bV_\beta = \{0\}, \quad bV_\alpha \cdot bbV_\beta = \{0\} \quad e \quad bbV_\alpha \cdot bbV_\beta = \{0\}.$$

Continuaremos agora com o cálculo dos produtos $V_\alpha \cdot V_\beta$ e $V_\alpha \cdot bV_\beta$.

Lema 3.2 *Se $\alpha, \beta \in F$ com $\alpha\beta \neq 0$, então*

$$V_\alpha \cdot V_\beta = \{0\} \quad e \quad V_\alpha \cdot bV_\beta = \{0\}.$$

Prova: Como $V_{\alpha,n} = V_\alpha$, basta mostrar que

$$V_{\alpha,i} \cdot V_{\beta,j} = \{0\} \quad e \quad V_{\alpha,i} \cdot bV_{\beta,j} = \{0\}, \quad \text{para } i, j \geq 1.$$

Demonstraremos as duas igualdades anteriores por indução sobre $k = i + j$.

Seja $k = 2$. Se $i = 0$ ou $j = 0$ então a igualdade é trivial já que por definição $V_{\alpha,0} = 0$. Consideremos agora o caso $i = j = 1$. Se $u_1 \in V_{\alpha,1}$ e $v_1 \in V_{\beta,1}$, então por (3.7) temos que $au_1 = 0$, $abu_1 = \alpha u_1$, $av_1 = 0$ e $abv_1 = \beta v_1$, logo por (3.2), (3.3) e lembrando que $ab = 0$, temos que

$$u_1 v_1 = \frac{1}{\alpha\beta}(abu_1)(abv_1) = -\frac{1}{2\alpha\beta}a^2(bu_1 \cdot bv_1) = 0$$

e

$$u_1 \cdot bv_1 = \frac{1}{\alpha}abu_1 \cdot bv_1 = -\frac{1}{\alpha}(ab \cdot v_1 bu_1 + av_1 \cdot bbu_1) = 0.$$

Assim

$$u_1 v_1 = u_1 b v_1 = 0$$

e portanto

$$V_{\alpha,1} \cdot V_{\beta,1} = \{0\} \quad \text{e} \quad V_{\alpha,1} \cdot bV_{\beta,1} = \{0\}.$$

Seja $k > 2$ e suponhamos, por hipótese de indução, que

$$V_{\alpha,t} \cdot V_{\beta,l} = \{0\} \quad \text{e} \quad V_{\alpha,t} \cdot bV_{\beta,l} = \{0\}, \quad \text{para } 2 \leq t + l < k.$$

Sejam i , e j inteiros positivos tais que $i + j = k$ e considerar $u_i \in V_{\alpha,i}$ e $v_j \in V_{\beta,j}$. Então existem $x_{i-1} \in V_{\alpha,i-1}$ e $y_{j-1} \in V_{\beta,j-1}$ tais que

$$au_i = 0, \quad abu_i = \alpha u_i + x_{i-1}, \quad av_j = 0 \quad \text{e} \quad abv_j = \beta v_j + y_{j-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} u_i v_j &= \frac{1}{\alpha\beta} (abu_i - x_{i-1})(abv_j - y_{j-1}) \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} (abu_i \cdot abv_j - y_{j-1} abu_i - x_{i-1} abv_j + x_{i-1} y_{j-1}). \end{aligned}$$

De (3.2) segue que $abu_i \cdot abv_j = 0$, portanto

$$u_i v_j = \frac{1}{\alpha\beta} [-y_{j-1}(\alpha u_i + x_{i-1}) - x_{i-1}(\beta v_j + y_{j-1}) + x_{i-1} y_{j-1}].$$

Então, pela hipótese de indução temos

$$u_i v_j = -\frac{1}{\alpha\beta} (\alpha y_{j-1} u_i + \beta x_{i-1} v_j + x_{i-1} y_{j-1}) = 0.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} u_i b v_j &= \frac{1}{\alpha\beta} (abu_i - x_{i-1})(babv_j - by_{j-1}) \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} (abu_i - x_{i-1})(abbv_j + by_{j-1}) \\ &= -\frac{1}{\alpha\beta} (abu_i \cdot abbv_j + abu_i \cdot by_{j-1} - x_{i-1} \cdot abbv_j - x_{i-1} y_{j-1}). \end{aligned}$$

Logo por (3.2) $abu_i \cdot abbv_j = 0$ e pela hipótese de indução $abu_i \cdot by_{j-1} = x_{i-1} \cdot babv_j = x_{i-1} y_{j-1} = 0$, desta forma $u_i b v_j = 0$ e temos então que

$$V_{\alpha,i} \cdot V_{\beta,j} = \{0\} \quad \text{e} \quad V_{\alpha,i} \cdot bV_{\beta,j} = \{0\}, \quad \text{para } i, j \geq 1,$$

o que demonstra o lema. $\square$

Assim, para determinar completamente o produto $W_\alpha \cdot W_\beta$, resta apenas conhecer o produto $V_\alpha \cdot bbV_\beta$. Até aqui o produto foi calculado com a única restrição de $\alpha\beta \neq 0$, sem importar se α era igual ou diferente de β , mas neste produto que vamos calcular, faremos os dois casos separadamente, dado que cada um deles origina um resultado diferente, como veremos na continuação.

Lema 3.3 *Se $\alpha, \beta \in F^*$ com $\alpha \neq \beta$, então*

$$V_\alpha \cdot bbV_\beta = \{0\}.$$

Prova: Mostraremos, por indução sobre $k = i + j$, que

$$V_{\alpha,i} \cdot bbV_{\beta,j} = \{0\}, \quad \text{para } i, j \geq 1.$$

Seja $k = 2$, e portanto $i = j = 1$. Se $u_1 \in V_{\alpha,1}$ e $v_1 \in V_{\beta,1}$, então por (3.3)

$$\begin{aligned} u_1bbv_1 &= \frac{1}{\alpha}abu_1 \cdot bbv_1 = -\frac{1}{\alpha}[(ab)(bu_1 \cdot bv_1) + abv_1 \cdot bbu_1] \\ &= -\frac{1}{\alpha}abv_1 \cdot bbu_1 = -\frac{\beta}{\alpha}v_1bbu_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos da identidade (3.5) e os lemas 3.1 e 3.2 que

$$\begin{aligned} v_1bbu_1 &= -\frac{1}{2}[2bu_1bv_1 + 2bbu_1v_1 + 2bv_1bu_1 + 2u_1bbv_1 + u_1v_1b^2 + v_1u_1b^2] \\ &= -u_1bbv_1. \end{aligned}$$

Logo $\alpha = \beta$ ou $u_1bbv_1 = 0$, mas por hipótese $\alpha \neq \beta$, o que nos leva a concluir que

$$u_1bbv_1 = 0$$

e portanto

$$V_{\alpha,1} \cdot bbV_{\beta,1} = \{0\}.$$

Seja $k > 2$ e suponhamos, por hipótese de indução, que

$$V_{\alpha,t} \cdot bbV_{\beta,l} = \{0\},$$

para todos os inteiros não negativos t e l tais que $t + l < k$. Sejam i e j inteiros positivos tais que $i + j = k$ e considerar $u_i \in V_{\alpha,i}$ e $v_j \in V_{\beta,j}$. Então por (3.7) existem $x_{i-1} \in V_{\alpha,i-1}$ e $y_{j-1} \in V_{\beta,j-1}$ tais que

$$au_i = 0, \quad abu_i = \alpha u_i + x_{i-1}, \quad av_j = 0 \quad \text{e} \quad abv_j = \beta v_j + y_{j-1},$$

e utilizando (3.3) temos que

$$\begin{aligned} u_i b b v_j &= \frac{1}{\alpha} [(abu_i - x_{i-1}) b b v_j] = \frac{1}{\alpha} [abu_i \cdot b b v_j - x_{i-1} b b v_j] \\ &= -\frac{1}{\alpha} [(ab)(bu_i \cdot bv_j) + abv_j \cdot b b u_i + x_{i-1} b b v_j] \\ &= -\frac{1}{\alpha} [(\beta v_j + y_{j-1}) b b u_i + x_{i-1} b b v_j] \\ &= -\frac{1}{\alpha} [\beta v_j b b u_i + y_{j-1} b b u_i + x_{i-1} b b v_j] \\ &= -\frac{\beta}{\alpha} u_i b b v_j, \end{aligned}$$

pois, pela hipótese de indução, $y_{j-1} b b u_i = x_{i-1} b b v_j = 0$ e pelo Lema 3.1 $bu_i \cdot bv_j = 0$. Temos também, da identidade (3.5) e os lemas 3.1 e 3.2, que

$$\begin{aligned} v_j b b u_i &= -\frac{1}{2} [2bu_i bv_j + 2bbu_i v_j + 2bv_j bu_i + 2u_i b b v_j + u_i v_j b^2 + v_j u_i b^2] \\ &= -u_i b b v_j \end{aligned}$$

e como $\alpha \neq \beta$, segue que

$$u_i b b v_j = 0,$$

de onde concluímos que

$$V_{\alpha,i} \cdot b b V_{\beta,j} = \{0\}, \quad \text{para} \quad i, j \geq 1,$$

provando o lema. □

É importante notar, da demonstração anterior, que se $\alpha = \beta$, isto é $u, v \in V_\alpha$, então vamos ter que

$$u b b v = -v b b u. \tag{3.8}$$

Lembremos que por definição $W_{0,1} = \{x \in \mathcal{B} \mid ax = bx = 0\}$. Queremos mostrar agora que $V_\alpha \cdot bbV_\alpha \subset W_{0,1}$. Antes de mostrar isto, é importante ressaltar que este produto, em geral, não é nulo, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 \rangle$, $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\alpha \neq 0$ e os produtos em $\mathcal{B}$, não nulos, dados por

$$v_4v_9 = -v_6v_7 = v_3, \quad v_1v_5 = \alpha v_4, \quad v_2v_4 = v_5, \quad v_1v_6 = -\alpha v_5,$$

$$v_2v_5 = v_6, \quad v_1v_8 = \alpha v_7, \quad v_2v_7 = v_8, \quad v_1v_9 = -\alpha v_8 \quad \text{e} \quad v_2v_8 = v_9.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 (uma vez que é possível verificar que para todo $x \in \mathcal{B}$ cumpre-se que $x^4 = x^2x^2 = 0$.)

Notamos que $\mathcal{B}$ se decompõe como $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha$, onde $W_0 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $W_\alpha = \langle v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 \rangle$. Da definição, é claro que

$$0 \neq V_\alpha \cdot bbV_\alpha = \langle v_3 \rangle \subset W_{0,1}.$$

Lema 3.4 Se $\alpha \in F$ com $\alpha \neq 0$, então

$$V_\alpha \cdot bbV_\alpha \subset W_{0,1}.$$

Prova: Sejam $u \in V_{\alpha,i}$ e $v \in V_{\alpha,j}$. Então pela identidade (3.6), temos que

$$\begin{aligned} aubbv = & -[abubv + a(bv \cdot bu) + uabbv + ubabv + u(bv \cdot ab) + baubv \\ & + buabv + b(bv \cdot au) + bv \cdot abu + bv \cdot uab + bv \cdot bau]. \end{aligned}$$

É claro que

$$u(bv \cdot ab) = b(bv \cdot au) = bv \cdot uab = bv \cdot bau = 0$$

e pelos lemas 3.1 e 3.2,

$$abubv = a(bv \cdot bu) = baubv = 0.$$

Além disso, temos que $abbv + babv = -bbav = 0$, portanto

$$uabbv + ubabv = 0,$$

de onde segue que

$$aubbv = -[buabv + bv \cdot abu].$$

Mas pelo Lema 3.2, $u \cdot abv \in V_\alpha^2 = \{0\}$ e $abu \cdot bv \in V_\alpha \cdot bV_\alpha = \{0\}$, logo $aubbv = 0$. Agora pelos lemas 3.1 e 3.2 e por (3.5) temos que

$$\begin{aligned} bubbv &= -\frac{1}{2}[2bbubv + 2b(bv \cdot bu) + 2ubbbv + 2bv \cdot bbu \\ &\quad + u(bv \cdot b^2) + bv \cdot ub^2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim $aubbv = bubbv = 0$, o que demonstra o lema. □

Decorre, dos lemas anteriores, o seguinte resultado.

Proposição 3.5 *Se $\alpha, \beta \in F$ com $\alpha\beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$, então*

$$W_\alpha \cdot W_\beta = 0 \quad e \quad W_\alpha \cdot W_\alpha = V_\alpha \cdot bbV_\alpha \subset W_{0,1}.$$

O lema anterior nos diz então que para $\alpha \in F^*$

$$W_\alpha^2 = V_\alpha \cdot bbV_\alpha \subset W_{0,1},$$

isto é

$$W_\alpha^2 = \langle ubbv, \text{ com } u, v \in V_\alpha \text{ e } aubbv = bubbv = 0 \rangle.$$

3.2 Os produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$ para $\alpha, \beta \in F^*$

Exploraremos agora, um pouco mais, os produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$, para $i + j \geq 3$, lembrando que pela definição dada no Capítulo 1, quando $\alpha = \beta$ obtemos na verdade as potências de W_α que definimos inductivamente por

$$W_\alpha^k = \sum_{i+j=k} W_\alpha^i \cdot W_\alpha^j.$$

3.2.1 Produtos para $i + j = 3$.

Vejamos como é o produto $W_\alpha^2 \cdot W_\beta$, ou seja, o produto $(V_\alpha \cdot bbV_\alpha) \cdot W_\beta$. Sejam $u, v \in V_\alpha$ e $w \in V_\beta$. Então pela identidade (3.3) temos

$$ubbv \cdot bbw = -[(bu)(bbv \cdot bw) + (bbbv)(ubw)] = 0.$$

Portanto $(V_\alpha \cdot bbV_\alpha) \cdot bbV_\beta = \{0\}$, isto é,

$$W_\alpha^2 \cdot bbV_\beta = \{0\}, \quad \text{para } \alpha\beta \neq 0, \quad (3.9)$$

e se $\alpha \neq \beta$,

$$ubbv \cdot bw = -[bu \cdot wbbv + bbbv \cdot uw] = 0,$$

pois $wbbv \in V_\beta \cdot bbV_\alpha = 0$, para $\alpha \neq \beta$. Logo

$$W_\alpha^2 \cdot bV_\beta = \{0\}, \quad \text{para } \alpha \neq \beta \quad \text{e} \quad \alpha\beta \neq 0. \quad (3.10)$$

Lema 3.6 *Se $\alpha, \beta \in F^*$, então*

$$W_\alpha^2 \cdot V_\beta = \{0\}.$$

Prova: Mostraremos, por indução sobre k , que

$$W_\alpha^2 \cdot V_{\beta,k} = \{0\}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Para $k = 1$, sejam $u, v \in V_\alpha$ e $w_1 \in V_{\beta,1}$. Então $abw_1 = \beta w_1$ e $abbw_1 = -\beta bw_1$, logo por (3.3) e o Lema 3.2 temos

$$w_1 \cdot ubbv = \frac{1}{\beta} abw_1 \cdot ubbv = -\frac{1}{\beta} [(au)(bw_1 \cdot bbv) + abbv \cdot ubw_1] = 0.$$

Assim

$$W_\alpha^2 \cdot V_{\beta,1} = \{0\}.$$

Seja $k > 1$ e suponhamos, por hipótese de indução, que

$$W_\alpha^2 \cdot V_{\beta,t} = \{0\},$$

para todo inteiro não negativo t com $t < k$. Sejam $u, v \in V_\alpha$ e $w_k \in V_{\alpha,k}$. Então $abw_k = \beta w_k + x_{k-1}$, com $x_{k-1} \in V_{\beta,k-1}$, $w_k = \frac{1}{\beta}(abw_k - x_{k-1})$ e $bw_k = -\frac{1}{\beta}(abbw_k + bx_{k-1})$. Logo por (3.3) e pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} w_k \cdot ubbv &= \frac{1}{\beta}[(abw_k - x_{k-1}) \cdot ubbv] = \frac{1}{\beta}[abw_k \cdot ubbv - x_{k-1}ubbv] \\ &= \frac{1}{\beta}[abw_k \cdot ubbv] = -\frac{1}{\beta}[(au)(bw_k \cdot bbv) + (abv)(ubw_k)] = 0. \end{aligned}$$

Assim $W_\alpha^2 \cdot V_{\beta,k} = \{0\}$, para todo $k \geq 1$, isto é

$$w \cdot ubbv = 0,$$

para $w \in V_\beta$ e $u, v \in V_\alpha$, o que demonstra o lema. $\square$

Calculemos agora a potência W_α^3 , para $\alpha \in F^*$. Segue claramente de (3.9) e do lema anterior que $W_\alpha^2 \cdot V_\alpha = \{0\}$ e $W_\alpha^2 \cdot bbV_\alpha = \{0\}$, restando apenas calcular $W_\alpha^2 \cdot bV_\alpha$. Antes disto, daremos um exemplo que mostra que este produto, em geral, não é nulo.

Exemplo 3.2 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, \dots, v_{15} \rangle$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, uma álgebra trivial tal que $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$. Se $\alpha \neq 0$ e os produtos não nulos em $\mathcal{B}$, são dados por

$$v_7v_{12} = -v_9v_{10} = v_3, \quad v_{10}v_{15} = -v_{12}v_{13} = v_4, \quad v_7v_{15} = -v_9v_{13} = v_5$$

$$v_3v_{14} = v_4v_8 = -v_5v_{11} = v_6, \quad v_1v_8 = \alpha v_7, \quad v_2v_7 = v_8, \quad v_1v_9 = -\alpha v_8,$$

$$v_2v_8 = v_9, \quad v_1v_{11} = \alpha v_{10}, \quad v_2v_{10} = v_{11}, \quad v_1v_{12} = -\alpha v_{11}, \quad v_2v_{11} = v_{12},$$

$$v_1v_{14} = \alpha v_{13}, \quad v_2v_{13} = v_{14}, \quad v_1v_{15} = -\alpha v_{14}, \quad v_2v_{14} = v_{15},$$

então $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4, pois para todo $x \in \mathcal{B}$ é possível verificar que $x^4 = x^2x^2 = 0$. Uma vez que $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$, é claro que

$$W_0 = \langle v_1, v_2, \dots, v_6 \rangle \quad \text{e} \quad W_\alpha = \langle v_7, v_8, \dots, v_{15} \rangle,$$

tendo-se portanto a decomposição $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha$. Notemos também que

$$W_\alpha^2 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle \subset W_{0,1} \quad \text{e} \quad W_\alpha^2 \cdot bV_\alpha = \langle v_6 \rangle \subset W_{0,1}.$$

Este exemplo, além de nos mostrar que o produto não é nulo, nos dá a idéia de que $W_\alpha^2 \cdot bV_\alpha \subset W_{0,1}$, o que de fato acontece.

Lema 3.7 *Se $\alpha \in F^*$, então*

$$W_\alpha^3 = W_\alpha^2 \cdot bV_\alpha = bV_\alpha \cdot (V_\alpha \cdot bbV_\alpha) \subset W_{0,1}.$$

Prova: Sejam $u \in V_{\alpha,i}$, $v \in V_{\alpha,j}$ e $w \in V_{\alpha,t}$. Então fazendo $x = a$, $y = bw$, $z = u$ e $w = bbv$ na identidade (3.6) temos que

$$\begin{aligned} -a(bw \cdot ubbv) &= a(u(bw \cdot bbv)) + a((bbv)(u \cdot bw)) + (bw)(u \cdot abbv) \\ &\quad + (bw)(a \cdot ubbv) + (bw)(bbv \cdot au) + u(a(bw \cdot bbv)) \\ &\quad + u(bw \cdot abbv) + u(bbv \cdot abw) + bbv \cdot aubw \\ &\quad + (bbv)(bw \cdot au) + bbv \cdot uabw \end{aligned}$$

e como $u \cdot abbv \in V_\alpha \cdot bV_\alpha = \{0\}$, $u \cdot abw \in V_\alpha^2 = \{0\}$, $bw \cdot abbv \in (bV_\alpha)^2 = \{0\}$ e $u(bbv \cdot abw) \in V_\alpha \cdot W_\alpha^2 = \{0\}$, segue que

$$a(bw \cdot ubbv) = 0.$$

Igualmente, fazendo $x = b$, $y = bw$, $z = u$ e $w = bbv$ em (3.6), temos

$$\begin{aligned} -b(bw \cdot ubbv) &= b(u(bw \cdot bbv)) + b(bbv(u \cdot bw)) + (bw)(u \cdot bbbv) + (bw)(b \cdot ubbv) \\ &\quad + (bw)(bbv \cdot bu) + u(b(bw \cdot bbv)) + u(bw \cdot bbbv) + u(bbv \cdot bbw) \\ &\quad + bbv \cdot bubw + (bbv)(bw \cdot bu) + bbv \cdot ubbv \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois por (3.9), $bbv \cdot ubbw \in bbV_\alpha \cdot W_\alpha^2 = \{0\}$. Logo

$$b(bw \cdot ubbv) = 0,$$

provando o lema. □

Podemos então enunciar o seguinte lema, cuja prova decorre das equações (3.9), (3.10) e dos lemas 3.6 e 3.7.

Proposição 3.8 *Se $\alpha, \beta \in F$ com $\alpha\beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$, então*

$$W_\alpha^2 \cdot W_\beta = \{0\} \quad e \quad W_\alpha^3 = W_\alpha^2 \cdot bV_\alpha \subset W_{0,1}.$$

É bom ressaltar que para $\alpha \neq 0$,

$$W_\alpha^3 = \langle bw \cdot ubbv, \quad | \quad u, v, w \in V_\alpha \rangle$$

e para todo $u, v, w \in V_\alpha$, temos

$$a(bw \cdot ubbv) = b(bw \cdot ubbv) = 0.$$

3.2.2 Produtos para $i + j = 4$.

Passemos agora ao caso $i + j = 4$, isto é vamos calcular os produtos $W_\alpha^2 \cdot W_\beta^2$ e $W_\alpha^3 \cdot W_\beta$. Iniciaremos com o caso $\alpha \neq \beta \neq 0$.

Lema 3.9 *Se $\alpha, \beta \in F^*$ com $\alpha \neq \beta$, então*

$$W_\alpha^2 \cdot W_\beta^2 = \{0\} \quad e \quad W_\alpha^3 \cdot W_\beta = \{0\}.$$

Prova: Sejam $u, v \in V_\alpha$ e $t, w \in V_\beta$. Então por (3.3) temos

$$ubbv \cdot tbbw = -(ut)(bbv \cdot bbw) - ubbw \cdot tbbv = 0,$$

pois $ubbw \in W_\alpha \cdot W_\beta = \{0\}$. Logo

$$W_\alpha^2 \cdot W_\beta^2 = \{0\}.$$

Sejam $u, v, w \in V_\alpha$ e $t \in V_\beta$. Lembremos que os únicos produtos não nulos em W_α^3 são os $bw \cdot ubbv$, assim temos que calcular os produtos $t(bw \cdot ubbv)$, $(bt)(bw \cdot ubbv)$ e $(btt)(bw \cdot ubbv)$. Por (3.3) temos

$$(bt)(bw \cdot ubbv) = -(bbw)(t \cdot ubbv) - (b \cdot ubbv)(t \cdot bw) = 0$$

e

$$(b \cdot bt)(bw \cdot ubbv) = -(bbw)(bt \cdot ubbv) - (b \cdot ubbv)(bt \cdot bw) = 0,$$

pois $bt \cdot ubbv \in bV_\beta \cdot W_\alpha^2 = \{0\}$. Fazendo $x = t$, $y = bw$, $z = u$ e $w = bbv$ em (3.6) obtemos que

$$\begin{aligned} t(bw \cdot ubbv) &= -[t(u(bw \cdot bbv)) + t(bbv \cdot ubw) + (bw)(t \cdot ubbv) + (bw)(u \cdot tbbv) \\ &\quad + (bw)(bbv \cdot ut) + u(t(bw \cdot bbv)) + u(bw \cdot tbbv) + u(bbv \cdot tbw) \\ &\quad + (bbv)(t \cdot ubw) + bbv \cdot utbw + (bbv)(bw \cdot ut)] = 0, \end{aligned}$$

pois $tbbv \in W_\alpha \cdot W_\beta = \{0\}$. Assim

$$W_\alpha^3 \cdot W_\beta = \{0\}.$$

□

Notemos que na demonstração anterior obtivemos que

$$(bt)(bw \cdot ubbv) = 0 \tag{3.11}$$

sem impor a condição de α ser diferente de β , portanto esta igualdade é válida também para todo $u, v, w, t \in V_\alpha$.

Passemos agora ao caso $\alpha = \beta$, isto é calculemos a potência

$$W_\alpha^4 = W_\alpha^2 \cdot W_\alpha^2 + W_\alpha^3 \cdot W_\alpha.$$

Antes de calcularmos esta potência, apresentaremos o seguinte exemplo que mostra que tal potência não é necessariamente nula.

Exemplo 3.3 Seja $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$, $W_0 = \langle v_1, \dots, v_{12} \rangle$ e para $\alpha \neq 0$, $W_\alpha = \langle v_{13}, \dots, v_{24} \rangle$ e $W_{-\alpha} = \langle v_{25}, v_{26}, v_{27} \rangle$. Se os produtos, não nulos, entre estes elementos são definidos assim

$$\left. \begin{aligned} v_{13}v_{18} &= -v_{15}v_{16} = v_3, & v_{13}v_{21} &= -v_{15}v_{19} = v_4, \\ v_{13}v_{24} &= -v_{15}v_{22} = v_5, & v_{16}v_{21} &= -v_{18}v_{19} = v_6, \\ v_{16}v_{24} &= -v_{18}v_{22} = v_7, & v_{19}v_{24} &= -v_{21}v_{22} = v_8, \end{aligned} \right\} \in W_\alpha^2$$

$$\left. \begin{aligned} v_3v_{20} &= v_6v_{14} = -v_4v_{17} = v_9, & v_3v_{23} &= v_7v_{14} = -v_5v_{17} = v_{10}, \\ v_4v_{23} &= v_8v_{14} = -v_5v_{20} = v_{11}, & v_6v_{23} &= v_8v_{17} = -v_7v_{20} = v_{12}, \end{aligned} \right\} \in W_\alpha^3$$

$$\left. \begin{aligned} v_1v_{14} &= \alpha v_{13}, & v_2v_{13} &= v_{14}, & v_1v_{15} &= -\alpha v_{14}, & v_2v_{14} &= v_{15}, \\ v_1v_{17} &= \alpha v_{16}, & v_2v_{16} &= v_{17}, & v_1v_{18} &= -\alpha v_{17}, & v_2v_{17} &= v_{18}, \\ v_1v_{20} &= \alpha v_{19}, & v_2v_{19} &= v_{20}, & v_1v_{21} &= -\alpha v_{20}, & v_2v_{20} &= v_{21}, \\ v_1v_{23} &= \alpha v_{22}, & v_2v_{22} &= v_{23}, & v_1v_{24} &= -\alpha v_{23}, & v_2v_{23} &= v_{24}, \end{aligned} \right\} \in W_\alpha$$

$$\left. \begin{aligned} v_1v_{26} &= -\alpha v_{25}, & v_{12}v_{13} &= -v_{11}v_{16} = -v_9v_{22} = v_{10}v_{19} = v_{25}, \\ v_1v_{27} &= \alpha v_{26}, & v_2v_{25} &= -v_3v_8 = -v_5v_6 = v_4v_7 = v_{26}, \\ v_2v_{26} &= v_9v_{24} = -v_{10}v_{21} = v_{11}v_{18} = -v_{12}v_{15} = v_{27}, \end{aligned} \right\} \in W_{-\alpha},$$

então a álgebra $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_{-\alpha}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice quatro. Observamos dos produtos anteriores que

$$W_\alpha^3 = \langle v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12} \rangle \subset W_0, \quad W_\alpha^2 \cdot W_\alpha^2 = \langle v_{26} \rangle \subset bV_{-\alpha} \subset W_{-\alpha}$$

e

$$W_\alpha \cdot W_\alpha^3 = \langle v_{25}, v_{27} \rangle \subset V_{-\alpha} + bV_{-\alpha} \subset W_{-\alpha},$$

portanto

$$\{0\} \neq W_\alpha^4 \subset W_{-\alpha}.$$

Antes de enunciar o próximo lema, referente a potência W_α^4 , faremos alguns cálculos que facilitarão sua demonstração.

Sejam $u, v, w, t \in V_\alpha$ e $\bar{s} = ubbv$. Então pela identidade (3.6) e pelos lemas anteriores temos que

$$\begin{aligned} a(t(bw \cdot \bar{s})) &= -[a(bw \cdot t\bar{s}) + a(\bar{s} \cdot tbw) + t(a(bw \cdot \bar{s})) + t(bw \cdot a\bar{s}) \\ &\quad + t(\bar{s} \cdot abw) + (bw)(a \cdot t\bar{s}) + (bw)(t \cdot a\bar{s}) + (bw)(\bar{s} \cdot at) \\ &\quad + \bar{s}(a \cdot tbw) + \bar{s}(t \cdot abw) + \bar{s}(bw \cdot at)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\bar{s}(t \cdot bbw)) &= -[a(t(\bar{s} \cdot bbw)) + a(bbw \cdot \bar{s}t) + \bar{s}(a \cdot tbbw) + \bar{s}(t \cdot abbw) \\ &\quad + \bar{s}(bbw \cdot at) + t(a(\bar{s} \cdot bbw)) + t(\bar{s} \cdot abbw) + t(bbw \cdot a\bar{s}) \\ &\quad + (bbw)(a \cdot \bar{s}t) + (bbw)(\bar{s} \cdot at) + (bbw)(t \cdot a\bar{s})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\bar{s}(t \cdot bbw)) &= -[b(t(\bar{s} \cdot bbw)) + b(bbw \cdot \bar{s}t) + \bar{s}(b \cdot tbbw) + \bar{s}(t \cdot bbbw) \\ &\quad + \bar{s}(bbw \cdot bt) + t(b(\bar{s} \cdot bbw)) + t(\bar{s} \cdot bbbw) + t(bbw \cdot b\bar{s}) \\ &\quad + (bbw)(b \cdot \bar{s}t) + (bbw)(\bar{s} \cdot bt) + (bbw)(t \cdot b\bar{s})] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{s} \cdot tbbw &= -[\bar{s}(b \cdot tbw) + \bar{s}(bw \cdot bt) + t(\bar{s} \cdot bbw) + t(b(\bar{s} \cdot bw)) \\ &\quad + t(bw \cdot b\bar{s}) + (bw)(\bar{s} \cdot bt) + (bw)(t \cdot b\bar{s}) + (bw)(b \cdot t\bar{s}) \\ &\quad + b(\bar{s} \cdot tbw) + b(t(bw \cdot \bar{s})) + b(bw \cdot t\bar{s})]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\bar{s} \in W_\alpha^2 \subset W_{0,1}$, temos que $a\bar{s} = b\bar{s} = 0$. Também temos por (3.9) e pelo Lema 3.6 que $\bar{s} \cdot t = \bar{s} \cdot abw = \bar{s} \cdot bbw = 0$, pois $abw \in V_\alpha$.

Assim $a(t(bw \cdot \bar{s})) = -t(a(bw \cdot \bar{s}))$, $a(\bar{s} \cdot tbbw) = -t(\bar{s} \cdot abbw)$, $b(\bar{s} \cdot tbbw) = -(bbw)(bt \cdot \bar{s})$ e $\bar{s} \cdot tbbw = -t(b(bw \cdot \bar{s})) - (bw)(bt \cdot \bar{s}) - b(t(bw \cdot \bar{s}))$. E novamente de $bw \cdot \bar{s} \in W_\alpha^3 \subset W_{0,1}$, segue que $a(bw \cdot \bar{s}) = b(bw \cdot \bar{s}) = 0$ e de (3.11)

$(bw)(bt \cdot \bar{s}) = 0$. Logo

$$a(t(bw \cdot \bar{s})) = 0 \quad (3.12)$$

$$a(\bar{s} \cdot tbbw) = -t(abbw \cdot \bar{s}) \quad (3.13)$$

$$b(\bar{s} \cdot tbbw) = (-bbw)(bt \cdot \bar{s}) \quad (3.14)$$

$$\bar{s} \cdot tbbw = -b(t(bw \cdot \bar{s})) \quad (3.15)$$

Com estas igualdades podemos então mostrar o seguinte lema.

Lema 3.10 *Se $\alpha \in F^*$, então*

$$V_\alpha \cdot W_\alpha^3 \subset V_{-\alpha}, \quad bV_\alpha \cdot W_\alpha^3 = \{0\}, \quad bbV_\alpha \cdot W_\alpha^3 \subset bbV_{-\alpha} \quad e$$

$$W_\alpha^2 \cdot W_\alpha^2 \subset bV_{-\alpha}.$$

Prova: De (3.11) é claro que $bV_\alpha \cdot W_\alpha^3 = \{0\}$.

Para os outros produtos sejam $u, v, w, t \in V_\alpha$. Vejamos primeiro que $V_\alpha \cdot W_\alpha^3 \subset V_{-\alpha}$, isto é que $t(bw \cdot ubbv) \in V_{-\alpha}$. Mostraremos, por indução sobre i , que se $w_i \in V_{\alpha, i}$, então

$$t(bw_i \cdot ubbv) \in V_{-\alpha, i}, \quad \text{para } i \geq 1.$$

Notemos primeiramente que por (3.12)

$$a(t(bw_i \cdot ubbv)) = 0$$

e por (3.13) e (3.15)

$$ubbv \cdot tbbw_i = -b(t(bw_i \cdot ubbv)) \quad e \quad a(ubbv \cdot tbbw_i) = -t(abbw_i \cdot ubbv),$$

logo

$$a(b(t(bw_i \cdot ubbv))) = t(abbw_i \cdot ubbv).$$

Para $i = 1$, seja $w_1 \in V_{\alpha, 1}$. Então $abw_1 = \alpha w_1$ e $abbw_1 = -\alpha bw_1$, logo

$$a(b(t(bw_1 \cdot ubbv))) = t(abbw_1 \cdot ubbv) = -\alpha t(bw_1 \cdot ubbv)$$

e assim

$$a(t(bw_1 \cdot ubbv)) = 0 \quad \text{e} \quad a(b(t(bw_1 \cdot ubbv))) = -\alpha t(bw_1 \cdot ubbv).$$

Portanto

$$t(bw_1 \cdot ubbv) \in V_{-\alpha,1}.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que se $w_k \in V_{\alpha,k}$, então

$$t(bw_k \cdot ubbv) \in V_{-\alpha,k} \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq i-1$$

e verifiquemos a relação para $k = i$.

Seja $w_i \in V_{\alpha,i}$. Então $abw_i = \alpha w_i + x_{i-1}$ com $x_{i-1} \in V_{\alpha,i-1}$, e portanto $abbw_i = -\alpha bw_i - bx_{i-1}$. Assim

$$a(b(t(bw_i \cdot ubbv))) = t(abbw_i \cdot ubbv) = -\alpha t(bw_i \cdot ubbv) - t(bx_{i-1} \cdot ubbv).$$

Uma vez que pela hipótese de indução temos $y_{i-1} = -t(bx_{i-1} \cdot ubbv) \in V_{-\alpha,i-1}$, segue que

$$a(t(bw_i \cdot ubbv)) = 0 \quad \text{e} \quad a(b(t(bw_i \cdot ubbv))) = -\alpha t(bw_i \cdot ubbv) + y_{i-1},$$

com $y_{i-1} \in V_{-\alpha,i-1}$. Portanto

$$t(bw_i \cdot ubbv) \in V_{-\alpha,i}, \quad \text{para} \quad i \geq 1,$$

o que mostra que

$$t(bw \cdot ubbv) \in V_{-\alpha}.$$

Decorre da parte anterior e de (3.15) que

$$ubbv \cdot tbbw \in bV_{-\alpha},$$

ou seja,

$$V_\alpha \cdot W_\alpha^3 \subset V_{-\alpha} \quad \text{e} \quad W_\alpha^2 \cdot W_\alpha^2 \subset bV_{-\alpha}.$$

Temos também por (3.14) e (3.15) que

$$(bbw)(bt \cdot ubbv) = -b(ubbv \cdot tbbw) = b(b(t(bw \cdot ubbv))),$$

isto é

$$(bbw)(bt \cdot ubbv) = b(b(t(bw \cdot ubbv))) \in bbV_{-\alpha}.$$

Portanto

$$bbV_\alpha \cdot W_\alpha^3 \subset bbV_{-\alpha}.$$

□

Temos então do lema anterior que

$$W_\alpha^4 \subset W_{-\alpha},$$

isto é

$$W_\alpha^4 = \langle r, br, bbr, \text{ com } r \in V_{-\alpha} \text{ e } r = t(bw \cdot ubbv) \text{ com } t, w, u, v \in V_\alpha \rangle.$$

Proposição 3.11 *Se $\alpha, \beta \in F^*$ com $\alpha \neq \beta$, então para $i + j = 4$*

$$W_\alpha^i \cdot W_\beta^j = \{0\} \quad e \quad W_\alpha^4 \subset W_{-\alpha}.$$

3.2.3 Produtos para $i + j = 5$.

Continuando com o cálculo dos produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$, passemos ao caso $i + j = 5$ lembrando que neste caso temos os produtos

$$W_\alpha^4 \cdot W_\beta \quad e \quad W_\alpha^2 \cdot W_\beta^3.$$

Lema 3.12 *Sejam $\alpha, \beta \in F^*$. Então*

$$W_\alpha^2 \cdot W_\beta^3 = \{0\} \quad e \quad W_\alpha^4 \cdot W_\beta = \{0\}.$$

Prova: Sejam $u, v \in V_\alpha$ e $w, t, s \in V_\beta$. Então por (3.3)

$$(ubbv)(bw \cdot tbbs) = -(u \cdot bw)(bbv \cdot tbbs) - (u \cdot tbbs)(bbv \cdot bw) = 0,$$

logo

$$W_\alpha^2 \cdot W_\beta^3 = \{0\}.$$

Como $W_\alpha^4 \subset W_{-\alpha}$, segue que $W_\alpha^4 \cdot W_\beta \subset W_{-\alpha} \cdot W_\beta$. Portanto se $\beta \neq -\alpha$, então $W_\alpha^4 \cdot W_\beta = \{0\}$ e se $\beta = -\alpha$, então vamos ter que $W_\alpha^4 \cdot W_\beta \subset W_{-\alpha}^2$, cujos únicos produtos não nulos são os $ubbv$ com $u, v \in V_{-\alpha}$, mas neste caso $u \in V_{-\alpha} \cap W_\alpha^4$, portanto $u = t(bw \cdot rbbs)$ com $t, w, r, s \in V_\alpha$. Logo $ubbv = (t(bw \cdot rbbs))(bbv)$ e por (3.3)

$$(t(bw \cdot rbbs))(bbv) = -(bt)(bw \cdot bv) - (t \cdot bv)(b(bw \cdot rbbs)) = 0, \quad (3.16)$$

e desta forma

$$W_\alpha^4 \cdot W_\beta = \{0\}.$$

□

Como consequência imediata do lema anterior temos que para $\alpha \in F^*$

$$W_\alpha^5 = \{0\}.$$

3.2.4 Produtos para $i + j \geq 6$.

Notemos que para $\alpha, \beta \in F^*$ e $i, j \geq 5$, $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j = \{0\}$, portanto a igualdade anterior é válida também se $i + j \geq 9$, restando então calcular o produto para $6 \leq i + j \leq 8$.

Lema 3.13 *Sejam $\alpha, \beta \in F^*$. Então*

$$W_\alpha^3 \cdot W_\beta^3 = \{0\} \quad e \quad W_\alpha^4 \cdot W_\beta^2 = \{0\}.$$

Prova: Sejam $u, v, w \in V_\alpha$ e $r, s, t \in V_\beta$. Então por (3.3)

$$(bw \cdot ubbv)(bt \cdot rbbs) = -(bw \cdot bt)(ubbv \cdot rbbs) - (bt \cdot ubbv)(bw \cdot rbbs),$$

isto é,

$$(bw \cdot ubbv)(bt \cdot rbbs) = (bt \cdot ubbv)(bw \cdot rbbs).$$

Se $\alpha \neq \beta$, então $bt \cdot ubbv \in W_\beta \cdot W_\alpha^2 = \{0\}$ e se $\alpha = \beta$, então $bt \cdot ubbv \in W_\alpha^3$. Seja $\alpha = \beta$ e $\bar{p} = bt \cdot ubbv$. Então $(bt \cdot ubbv)(bw \cdot rbbs) = \bar{p}((bw)(r \cdot bbs))$ e por (3.6) e os lemas anteriores temos

$$\begin{aligned} \bar{p}((bw)(r \cdot bbs)) &= -[\bar{p}(r(bw \cdot bbs)) + \bar{p}(bbs \cdot rbw) + (bw)(\bar{p} \cdot rbbs) + \\ &\quad (bw)(r(\bar{p} \cdot bbs)) + (bw)(bbs \cdot \bar{p}r) + r(\bar{p}(bw \cdot bbs)) + \\ &\quad r((bw)(\bar{p} \cdot bbs)) + r(bbs\bar{p} \cdot bw) + (bbs)(\bar{p} \cdot rbw) \\ &\quad + (bbs)(bw \cdot \bar{p}r) + (bbs)(r(\bar{p} \cdot bw))] \\ &= -[bw(\bar{p} \cdot rbbs) + (bw)(r(\bar{p} \cdot bbs)) + (bw)(bbs \cdot \bar{p}r) + \\ &\quad r((bw)(\bar{p} \cdot bbs)) + r(bbs(\bar{p} \cdot bw)) + (bbs)(bw \cdot \bar{p}r) + \\ &\quad (bbs)(r(\bar{p} \cdot bw))]. \end{aligned}$$

Como $\bar{p} \cdot bbs, \bar{p}r, \bar{p} \cdot bw \in W_\alpha^3 \cdot W_\alpha \subset W_{-\alpha}$, temos que $r(\bar{p} \cdot bbs), bw(\bar{p} \cdot bbs), bbs \cdot \bar{p}r, bw \cdot \bar{p}r, r(\bar{p} \cdot bw), (bbs)(\bar{p} \cdot bw) \in W_\alpha \cdot W_{-\alpha} = \{0\}$ e $\bar{p} \cdot rbbs \in W_\alpha^3 \cdot W_\alpha^2 \subset W_\alpha^5 = \{0\}$. Logo $\bar{p}(bw \cdot rbbs) = 0$, o que mostra que $W_\alpha^3 \cdot W_\alpha^3 = \{0\}$ e portanto

$$W_\alpha^3 \cdot W_\beta^3 = \{0\}.$$

Uma vez que $W_\alpha^4 \cdot W_\beta^2 \subset W_{-\alpha} \cdot W_\beta^2$ temos que analisar apenas o caso $\beta = -\alpha$, pois se $\beta \neq -\alpha$ é claro que $W_\alpha^4 \cdot W_\beta^2 = \{0\}$. Lembrando que os únicos produtos não nulos de $W_{-\alpha}^3$ são $bw \cdot ubbv$, temos que calcular apenas este produto, mas neste caso temos que $w \in V_{-\alpha} \cap W_\alpha^4$. Logo $w = t(bq \cdot rbbs)$ e segue de (3.3) e (3.16) que

$$bw \cdot ubbv = -(bu)(w \cdot bbv) - (bbbv)(w \cdot u) = -(bu)[(t(bq \cdot rbbs))(bbv)] = 0.$$

Assim

$$W_\alpha^4 \cdot W_\beta^2 = \{0\}.$$

□

Para o caso $i + j = 7$, temos que estudar somente o produto $W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4$. Devido ao fato de $W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4 \subset W_\alpha^3 \cdot W_{-\beta}$, temos que nos preocupar apenas com o caso $\beta = -\alpha$, pois se $\beta \neq -\alpha$, temos que $W_\alpha^3 \cdot W_{-\beta} = \{0\}$ e portanto $W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4 = \{0\}$.

Lema 3.14 *Sejam $\alpha, \beta \in F^*$. Então*

$$W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4 = \{0\}.$$

Prova: Seja $\beta = -\alpha$. Queremos calcular o produto $W_\alpha^3 \cdot W_{-\alpha}^4 \subset W_\alpha^4$ e dado que os elementos de W_α^3 são da forma $bw \cdot ubbv$, com $w, u, v \in V_\alpha$ e $W_{-\alpha}^4 \subset W_\alpha$, temos de calcular os produtos $r(bw \cdot ubbv)$, $(br)(bw \cdot ubbv)$ e $(bbr)(bw \cdot ubbv)$, com $r \in V_\alpha \cap W_{-\alpha}^4$. Lembremos que por (3.11) $(br)(bw \cdot ubbv) = 0$, restando calcular os outros dois produtos. Como $r = t(bs \cdot pbbq)$, com $t, s, p, q \in V_{-\alpha}$, temos por (3.3) que

$$\begin{aligned} r(bw \cdot ubbv) &= (t(bs \cdot pbbq))(bw \cdot ubbv) \\ &= -(t \cdot bw)((ubbv)(bs \cdot pbbq)) - (t \cdot ubbv)((bw)(bs \cdot pbbq)) = 0 \end{aligned}$$

e

$$(bbr)(bw \cdot ubbv) = -(b \cdot bw)(br \cdot ubbv) - (b \cdot ubbv)(br \cdot bw) = 0,$$

pois $br \cdot ubbv \in W_{-\alpha}^4 \cdot W_\alpha^2 = \{0\}$. Assim $W_\alpha^3 \cdot W_{-\alpha}^4 = \{0\}$ e do comentário anterior ao lema tínhamos que $W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4 = \{0\}$ para $\beta \neq -\alpha$. Em decorrência disto, temos

$$W_\alpha^3 \cdot W_\beta^4 = \{0\},$$

para todo $\alpha, \beta \in F^*$, ficando provado o lema. $\square$

Segue imediatamente do lema anterior que

$$W_\alpha^7 = \{0\}.$$

Chegamos finalmente ao caso $i + j = 8$ para o qual devemos calcular somente o produto $W_\alpha^4 \cdot W_\beta^4$, notando que se $\alpha \neq \beta$, então $W_\alpha^4 \cdot W_\beta^4 \subset W_{-\alpha} \cdot W_{-\beta} = \{0\}$. Portanto analisemos apenas o caso $\alpha = \beta$, isto é $W_\alpha^4 \cdot W_\alpha^4 \subset W_{-\alpha}^2$. Mas os únicos produtos não nulos de $W_{-\alpha}^2$ são $ubbv$, com $u, v \in V_{-\alpha}$, e como neste caso $u = t(br \cdot pbbq)$, com $t, r, p, q \in V_\alpha$ segue de (3.3) e (3.11) que

$$ubbv = (t(br \cdot pbbq))(bbv) = (bt)((bv)(br \cdot pbbq)) - (t \cdot bv)(b(br \cdot pbbq)) = 0.$$

Portanto $W_\alpha^4 \cdot W_\alpha^4 = \{0\}$, de onde podemos concluir que

$$W_\alpha^4 \cdot W_\beta^4 = \{0\} \quad \text{e} \quad W_\alpha^8 = \{0\}.$$

Lema 3.15 *Sejam $\alpha, \beta \in F^*$. Então*

$$W_\alpha^4 \cdot W_\beta^4 = \{0\}.$$

Podemos agora, utilizando todos os resultados anteriores, enunciar os seguintes dois teoremas

Teorema 3.16 *Se $\alpha \in F^*$, então*

$$W_\alpha^k = \{0\}, \quad \text{para todo } k \geq 5.$$

Prova: Para $k \geq 5$,

$$W_\alpha^k = \sum_{5 \leq i+j \leq k} W_\alpha^i \cdot W_\alpha^j = \sum_{i,j \leq 4} W_\alpha^i \cdot W_\alpha^j = \sum_{5 \leq i+j \leq 8} W_\alpha^i \cdot W_\alpha^j = 0.$$

□

Teorema 3.17 *Sejam $\alpha, \beta \in F^*$, com $\alpha \neq \beta$. Então*

$$W_\alpha^i \cdot W_\beta^j = \{0\}, \quad \text{para } i, j \geq 1.$$

Com isto caracterizamos os produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$ sempre que $\alpha, \beta \in F^*$.

3.3 O produto $W_0 \cdot W_\alpha$ para $\alpha \in F$.

Gostaríamos de caracterizar os produtos $W_\alpha^i \cdot W_\beta^j$, da mesma forma como fizemos na seção anterior, para o caso em que um dos dois, ou ambos escalares, são nulos, isto é caracterizar os produtos $W_\alpha^i \cdot W_0^j$ e W_0^k , lembrando que para $l \geq 1$, $W_{0,l} = \{w \in \mathcal{B} : aw, bw \in W_{0,l-1}\}$ e $W_0 = \bigcup_{k=0}^n W_{0,k}$. Mas no

caso mais simples, isto é, para $i, j = 1$ e $k = 2$ não temos o mesmo comportamento como no caso dos escalares não nulos. No que segue apresentaremos quatro exemplos, os quais nos mostram que os produtos

$$W_0 \cdot W_0 \quad \text{e} \quad W_0 \cdot W_\alpha$$

são arbitrários.

Exemplo 3.4 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \rangle$ com produtos não nulos dados por

$$v_1 v_5 = \alpha v_4, \quad v_2 v_4 = v_3^2 = v_5, \quad v_1 v_6 = -\alpha v_5 \quad \text{e} \quad v_2 v_5 = v_6,$$

com $\alpha \neq 0$. Então se escolhermos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ como $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$, temos que $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 com a decomposição $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha$, onde $W_0 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $W_\alpha = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$. Desta forma,

$$W_0 \cdot W_0 \subset W_\alpha \quad \text{e} \quad W_0 \cdot W_\alpha = W_\alpha.$$

Convém ressaltar que $\mathcal{B}$ não é nilpotente, pois $\mathcal{B}^r = \mathcal{B}^2 \neq \{0\}$, para $r \geq 3$, mas é solúvel, de índice de solubilidade 2, uma vez que $\mathcal{B}^2 = W_\alpha$ e $W_\alpha^2 = \{0\}$, isto é, $\mathcal{B}^{(2)} = \{0\}$.

No exemplo anterior vimos que para $\alpha \in F^*$, os produtos $W_\alpha \cdot W_0$ e W_0^2 estavam contidos em W_α , isto nem sempre ocorre, como mostram os seguinte exemplos.

Exemplo 3.5 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, \dots, v_8 \rangle$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma álgebra trivial tal que $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e os produtos em $\mathcal{B}$, não nulos, são dados por

$$v_3^2 = v_4 v_7 = v_5, \quad v_1 v_7 = \alpha v_6, \quad v_2 v_6 = v_7, \quad v_1 v_8 = -\alpha v_7 \quad \text{e} \quad v_2 v_7 = v_8,$$

com $\alpha \neq 0$. Então $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 e $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha$, onde $W_0 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ e $W_\alpha = \langle v_6, v_7, v_8 \rangle$. Assim

$$W_0 \cdot W_0 \subset W_0 \quad \text{e} \quad W_0 \cdot W_\alpha \subset W_0 \oplus W_\alpha.$$

Observamos que $\mathcal{B}^2 = \langle v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle$. Portanto $\mathcal{B}^2 \mathcal{B}^2 = 0$ o que mostra que $\mathcal{B}$ é solúvel de índice 2, mas não é nilpotente, pois $\mathcal{B}^r = \mathcal{B}^2$, para todo $r \geq 3$.

Uma outra idéia, que poderíamos ter, é a de que sempre o produto $W_0 \cdot W_\alpha$ está inteiramente contido na soma $W_0 \oplus W_\alpha$. Isto não é verdade, uma vez que podem existir $\beta_1, \dots, \beta_i \in F$, todos não nulos e diferentes de α , tais que uma parte do produto $W_0 \cdot W_\alpha$ esteja contido na $\bigoplus W_{\beta_i}$. O seguinte exemplo ilustra este caso.

Exemplo 3.6 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_{11} \rangle$. Se $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e os produtos em $\mathcal{B}$, não nulos, são dados por

$$v_3 v_7 = v_4, \quad v_1 v_7 = \alpha v_6, \quad v_2 v_6 = v_7, \quad v_1 v_8 = -\alpha v_7, \quad v_2 v_7 = v_8, \quad v_5 v_7 = v_9,$$

$$v_1 v_{10} = \beta v_9, \quad v_2 v_9 = -v_5 v_8 = v_{10}, \quad v_1 v_{11} = -\beta v_{10}, \quad v_2 v_{10} = v_{11},$$

com $\alpha \neq \beta \neq 0$. Então $W_0 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$, $W_\alpha = \langle v_6, v_7, v_8 \rangle$ e $W_\beta = \langle v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$. Desta forma temos que $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 e

$$W_0 \cdot W_\alpha \subset W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta.$$

Ao calcular as potências para $\mathcal{B}$ achamos que $\mathcal{B}^2 = \langle v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$ e $\mathcal{B}^3 = \langle v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$, tendo-se então que

$$\mathcal{B}^n = \begin{cases} \mathcal{B}^2, & \text{se } n \text{ par } \geq 4 \\ \mathcal{B}^3, & \text{se } n \text{ ímpar } \geq 5, \end{cases}$$

o que nos mostra que $\mathcal{B}$ é solúvel de índice 2, mas não é nilpotente.

Finalizamos esta seção com o seguinte exemplo.

Exemplo 3.7 Seja $\mathcal{B} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, uma álgebra trivial tal que $\mathcal{A} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e os produtos em $\mathcal{B}$, não nulos, são dados por:

$$\begin{aligned} v_1 v_5 &= v_4, & v_1 v_7 &= \alpha v_6, & v_2 v_6 &= v_3^2 = v_7, & v_1 v_8 &= -\alpha v_7, & v_2 v_7 &= v_8, \\ v_1 v_{10} &= \beta v_9, & v_2 v_9 &= v_5^2 = v_{10}, & v_1 v_{11} &= -\beta v_{10} & \text{e} & v_2 v_{10} &= v_{11}, \end{aligned}$$

com $\alpha \neq \beta \neq 0$. Então $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de potências associativas de nilíndice 4 e $\mathcal{B} = W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta$, onde $W_0 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$, $W_\alpha = \langle v_6, v_7, v_8 \rangle$ e $W_\beta = \langle v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$. Assim

$$W_0 \cdot W_0 \subset W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta.$$

Notemos que $\mathcal{B}^2 = \langle v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$ e $\mathcal{B}^3 = \langle v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \rangle$ de onde segue que $\mathcal{B}^2 \mathcal{B}^2 = 0$ e $\mathcal{B}^r = \mathcal{B}^3$ para $r \geq 4$, o que nos mostra que $\mathcal{B}$ é solúvel de índice 2, mas não é nilpotente.

Os exemplos anteriores nos fornecem as possíveis inclusões para W_0^2 e $W_0 \cdot W_\alpha$ quando $\alpha \neq 0$, isto é

$$W_0 \cdot W_0 \subset \begin{cases} W_0 \\ W_\alpha \\ W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta \end{cases} \quad \text{e} \quad W_0 \cdot W_\alpha \subset \begin{cases} W_\alpha \\ W_0 \oplus W_\alpha \\ W_0 \oplus W_\alpha \oplus W_\beta \end{cases}$$

sendo que $\beta \in F^*$ e $\alpha \neq \beta$. É claro que a única inclusão que não é possível é $W_0 \cdot W_\alpha \subset W_0$.

3.4 Algumas nilálgebras que não são simples.

Utilizando alguns dos resultados anteriores, caracterizaremos duas classes de álgebras que não são simples. Lembremos que estamos trabalhando com o fato de $\mathcal{B}$ ser uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão n e nilíndice 4, que se decompõe como $\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha \in F} W_\alpha$.

Tínhamos no Lema 3.5 que $W_\alpha \cdot W_\alpha \subset W_{0,1}$. Mostraremos que

$$W_\alpha \cdot W_\alpha \not\subset \mathcal{A}.$$

Se $W_\alpha^2 \subset \mathcal{A}$, então existem $u, v \in V_\alpha$, tal que $ubbv \in \mathcal{A}$, isto é $ubbv = \lambda_1 a + \lambda_2 b$. Por (3.9), $0 = bbu \cdot ubbv = \lambda_1 abbu + \lambda_2 bbbu = \lambda_1 abbu$ e como $abbu \neq 0$, segue que $\lambda_1 = 0$, portanto $ubbv = \lambda_2 b$.

Pelo Lema 3.6, temos que $0 = u \cdot ubbv = \lambda_2 bu$ e dado que $bu \neq 0$, segue que $\lambda_2 = 0$, logo $ubbv = 0$. Portanto se $W_{0,1} = \mathcal{A}$, então para $\alpha \in F^*$, $W_\alpha^2 = \{0\}$.

Como uma consequência dos fatos anteriores temos o seguinte resultado, que nos mostra que não é possível (neste contexto) construir um contra-exemplo para a conjectura de Albert, se $W_0 = \mathcal{A}$, isto é, a dimensão de W_0 é dois.

Teorema 3.18 *Não existem nilálgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 4, simples, com a seguinte forma*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right).$$

Prova: Sabemos que $\mathcal{A} \cdot W_\alpha \subset W_\alpha$ e $W_\alpha \cdot W_\beta = \{0\}$ para $\alpha, \beta \in F^*$ e $\alpha \neq \beta$. Neste caso $W_\alpha^2 = \{0\}$ para todo $\alpha \in F^*$, portanto temos que $\mathcal{B}^2 \subset \bigoplus_{\alpha \neq 0} W_\alpha$, o que mostra que $\mathcal{B}^2 \neq \mathcal{B}$, isto é $\mathcal{B}$ não é simples. $\square$

O seguinte lema nos diz que, se W_0 tem dimensão 3 e existe $\alpha \in F^*$ tal que $W_\alpha \neq 0$, então $W_0 = W_{0,1}$.

Lema 3.19 *Seja $W_0 = \mathcal{A} \oplus \langle w \rangle$ e $\alpha \in F^*$ tal que $W_\alpha \neq 0$. Então $\mathcal{A}w = \{0\}$.*

Prova: Como W_0 é um $\mathcal{A}$ -módulo, sabemos que $aw, bw \in W_0$. Seja $aw = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 w$, então da nilpotência do operador L_a segue que $0 = L_a^3(w) =$

$\lambda_3^2 aw$, de onde concluímos que $\lambda_3 = 0$. Assim $aw = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ e analogamente $bw = \gamma_1 a + \gamma_2 b$, ou seja,

$$aw = \lambda_1 a + \lambda_2 b \quad \text{e} \quad bw = \gamma_1 a + \gamma_2 b.$$

Seja $u \in V_\alpha$. então por (3.3),

$$bu \cdot aw = -(ba)(uw) - (bw)(au) = 0,$$

logo $bu \cdot aw = \lambda_1 abu + \lambda_2 bbu = 0$ e portanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Da mesma forma por (3.3) temos

$$bu \cdot bw = -\frac{1}{2}b^2(uw) = 0.$$

Desta forma $bu \cdot bw = \gamma_1 abu + \gamma_2 bbu = 0$, de onde segue que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Assim $aw = bw = 0$, isto é

$$w\mathcal{A} = \{0\}.$$

□

Antes de passarmos ao próximo lema, calcularemos um outro produto, que nos será útil na próxima demonstração.

Sejam $w \in \mathcal{B}$, e $u, v \in V_\alpha$. Então

$$u \cdot wv = 0. \tag{3.17}$$

Mostraremos, por indução sobre i , que para $u_i \in V_{\alpha,i}$,

$$u_i \cdot wv = 0, \quad \text{para} \quad i \geq 1.$$

Para $i = 1$, seja $u_1 \in V_{\alpha,1}$. Então por (3.3) segue

$$u_1 \cdot wv = \frac{1}{\alpha}(abu_1 \cdot wv) = -\frac{1}{\alpha}[(aw)(v \cdot bu_1) + (av)(wbu_1)] = 0.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que

$$u_s \cdot wv = 0, \quad \text{para} \quad s = 1, \dots, i-1$$

e verifiquemos a igualdade para $s = i$. Seja $u_i \in V_{\alpha,i}$, isto é $abu_i = \alpha u_i + x_{i-1}$, com $x_{i-1} \in V_{\alpha,i-1}$. Então por (3.3) e pela hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} u_i \cdot wv &= \frac{1}{\alpha}[(abu_i - x_{i-1}) \cdot wv] = \frac{1}{\alpha}[abu_i \cdot wv - x_{i-1} \cdot wv] \\ &= \frac{1}{\alpha}[abu_i \cdot wv] = -\frac{1}{\alpha}[aw \cdot vbu_i + av \cdot wbu_i] = 0. \end{aligned}$$

Portanto $u_i \cdot wv = 0$, para todo $i \geq 1$, o que mostra a igualdade.

O seguinte teorema nos mostra que não é possível construir (neste contexto) um contra-exemplo para a conjectura de Albert, quando a dimensão de W_0 é três.

Teorema 3.20 *Não existem nilálgebras comutativas de potências associativas de nilíndice 4, simples, com a seguinte forma*

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \langle w \rangle \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right),$$

sendo que $W_0 = \mathcal{A} \oplus \langle w \rangle$ e algum $W_\alpha \neq 0$ com $\alpha \neq 0$.

Prova: Sabemos que $\mathcal{A} \cdot W_\alpha \subset W_\alpha$, $W_\alpha^2 \subset W_{0,1}$ e $W_\alpha \cdot W_\beta = \{0\}$, para $\alpha \neq \beta \neq 0$ e pela observação anterior temos que neste caso $w \cdot \mathcal{A} = 0$, logo nos resta calcular os produtos w^2 e $w \cdot W_\alpha$, para todo $\alpha \in F^*$. Dividiremos a prova em dois casos.

- Caso1: Existe $\alpha \neq 0$ tal que $W_\alpha^2 \neq \{0\}$.

Sejam $u, v \in V_\alpha$ tal que $0 \neq ubbv \in W_{0,1}$. Então $ubbv = \theta a + \rho b + \lambda w$, com $\lambda \neq 0$, caso contrário $ubbv \in \mathcal{A}$ o que não é possível.

Uma vez que, $(ubbv)^2 = -\frac{1}{2}u_i^2(bbv_i)^2 = 0$, por (3.2), temos que

$$w^2 = 0.$$

Pelo Lema 3.6 temos, $0 = u \cdot ubbv = \rho bu + \lambda wu$, logo

$$wu = -\frac{\rho}{\lambda} bu \in W_\alpha.$$

Da identidade (3.2) segue, $bu \cdot ubbv = -\frac{1}{2}u^2 \cdot bbbv = 0$. Logo $0 = bu \cdot ubbv = \theta abu + \rho bbu + \lambda wbu$, portanto

$$wbu = -\frac{\theta}{\lambda}abu_i - \frac{\theta}{\lambda}bbu_i \in W_\alpha.$$

E pela identidade (3.5)

$$wbbu = -\frac{1}{2}[2bbwu + 2bwbu + 2bubw + 2ubbw + wub^2 + uw b^2]$$

isto é

$$wbbu_i = -bbwu_i - bwbu_i \in W_\alpha.$$

Assim $wu, wbu, wbbu \in W_\alpha$.

Notemos que para qualquer $t \in V$, incluindo $t \in V_\beta$ com $\beta \in F^*$ e $\alpha \neq \beta$, temos que $t \cdot ubbv = 0$, portanto

$$wt = -\frac{\rho}{\lambda}bu_t, \quad \text{para todo } t \in V,$$

e se existir $t, s \in V$, tal que $tbbs \neq 0$ e $tbbs = \theta_t a + \rho_t b + \lambda_t w$, então

$$wt = -\frac{\rho_t}{\lambda_t}bt \quad \text{para todo } t \in V,$$

portanto

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{\rho_t}{\lambda_t},$$

para todo $t \in V$, como dado acima, se definimos

$$\tilde{w} = \rho b + \lambda w,$$

então é claro que $a\tilde{w} = b\tilde{w} = \tilde{w}^2 = 0$, e para qualquer $t \in V$,

$$\begin{aligned} \tilde{w}t &= \rho bt + \lambda wt = \rho bt - \lambda \frac{\rho}{\lambda}bt = 0 \\ \tilde{w}bt &= \rho bbt + \lambda wbt = \rho bbt + \lambda \left(\frac{\theta_t}{\lambda_t}abu_t - \frac{\rho_t}{\lambda_t}bbt \right) \\ &= \rho bbt - \lambda \frac{\theta_t}{\lambda_t}abt - \lambda \frac{\rho}{\lambda}bbt = -\lambda \frac{\lambda_t}{\lambda_t}abt, \\ \tilde{w}bbt &= -bb\tilde{w}t - b\tilde{w}bt = -\lambda \frac{\theta_t}{\lambda_t}abbt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} tbbs &= \theta_t a + \rho_t b + \lambda_t w = \theta_t a + \lambda_t \frac{\rho}{\lambda} b + \lambda_t w \\ &= \theta_t a + \frac{\lambda_t}{\lambda} (\rho b + \lambda w) = \theta_t a + \frac{\lambda_t}{\lambda} \tilde{w}. \end{aligned}$$

Podemos concluir então, que para uma base adequada,

$$w^2 = wu = 0, \quad wbb, wbu \in W_\alpha \quad \text{e} \quad ubbv = \theta a + \lambda w,$$

para todo $u, v \in V_\alpha$, o que nos mostra que $b \notin \mathcal{B}^2$ e portanto

$$\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}.$$

- Caso 2: Para todo $\alpha \in F^*$, $W_\alpha^2 = \{0\}$.

Seja $wu = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 w + \lambda_4 x$, com $x \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$ e $u \in V_\alpha$.

Então por (3.17)

$$0 = u \cdot wu = \lambda_2 bu + \lambda_3 wu.$$

i) Se $\lambda_3 \neq 0$, então

$$wu = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} bu. \quad (3.18)$$

Analogamente ao caso anterior temos que $wbbu = -bbwu - bwbu$ e como $bbwu = 0$, segue que

$$wbbu = -bwbu. \quad (3.19)$$

Seja

$$wbu = \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 w + \gamma_4 y,$$

com $y \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$. Então pela identidade (3.3) temos que $bu \cdot wbu = -(bw)(u \cdot bu) - (bbu)(wu) = 0$, logo

$$0 = \gamma_1 abu + \gamma_2 bbu + \gamma_3 wbu.$$

* Se $\gamma_3 \neq 0$, então

$$wbu = -\frac{\gamma_1}{\gamma_3}abu - \frac{\gamma_2}{\gamma_3}bbu \quad (3.20)$$

e temos então por (3.18), (3.19) e (3.20) que

$$wu, wbu \text{ e } wbbu \in W_\alpha.$$

Seja $w^2 = \theta_1 a + \theta_2 b + \theta_3 w + \theta_4 d$, com $d \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$. Então $0 = w^2 w^2 = \theta_3^2 w^2 + \tilde{d}$, com $\tilde{d} \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$. Se $\theta_3 \neq 0$, então $w^2 \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$, isto é

$$w^2, wu, wbu \text{ e } wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha,$$

o que mostra que $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$. Se $\theta_3 = 0$, então $w^2 \in \mathcal{B} \setminus \langle w \rangle$, isto é

$$w^2, wu, wbu \text{ e } wbbu \in \mathcal{B} \setminus \langle w \rangle,$$

o que prova que $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$.

* Se $\gamma_3 = 0$, então $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, logo $wbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$ e segue de (3.19) que $wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$, portanto

$$wu, wbu \text{ e } wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$$

e analogamente ao caso anterior podemos concluir que

$$w^2, wu, wbu \text{ e } wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$$

e assim $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$.

ii) Se $\lambda_3 = 0$, então $\lambda_2 = 0$, de onde segue que $wu = \lambda_1 a + \lambda_4 v$. Seja

$$wbu = \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 w + \gamma_4 v,$$

com $v \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$. Então pela identidade (3.3) temos que

$$bu \cdot wbu = -(bw)(u \cdot bu) - (bbu)(wu) = \lambda_1 abbu,$$

de onde segue que

$$\gamma_1 abu + \gamma_2 bbu + \gamma_3 wbu - \lambda_1 abbu = 0.$$

Portanto:

- * Se $\gamma_3 \neq 0$, então $wbu_i \in W_\alpha$ e uma vez que $-wbbu = bbwu + bwbu$, segue que $wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$ e assim

$$wu, wbu \text{ e } wbbu \in \langle a \rangle \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right).$$

Logo se $w^2 = \theta_1 a + \theta_2 b + \theta_3 w + \theta_4 d$, com $d \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$, então $0 = w^2 w^2 = \theta_3^2 w^2 + \tilde{d}$, com $\tilde{d} \in \langle a \rangle \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right)$. Se $\theta_3 \neq 0$, então $w^2 \in \langle a \rangle \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right)$, isto é

$$w^2, wu, wbu \text{ e } wbbu \in \langle a \rangle \oplus \left(\bigoplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha \right),$$

o que mostra que $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$. Se $\theta_3 = 0$, então $w^2 \in \mathcal{B} \setminus \langle w \rangle$, isto é

$$w^2, wu, wbu \text{ e } wbbu \in \mathcal{B} \setminus \langle w \rangle,$$

o que prova que $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$.

- * Se $\gamma_3 = 0$, então $\gamma_1 = \gamma_2 = \lambda_1 = 0$, portanto $wu, wbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$ e como $-wbbu = bbwu + bwbu$, segue que $wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha$ e assim

$$wu, wbu \text{ e } wbbu \in \oplus_{0 \neq \alpha \in F} W_\alpha,$$

e da mesma forma como nos casos anteriores concluímos que $\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}$.

Assim em qualquer dos casos vemos que

$$\mathcal{B}^2 \subsetneq \mathcal{B}.$$

□

Finalizamos esta seção com a seguinte conjectura.

Conjectura: *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão finita e nilíndice 4, sobre um corpo algebricamente fechado e de característica diferente de 2 e de 3. Se existir uma decomposição $\mathcal{B} = \bigoplus_{\alpha \in F} W_\alpha$ com algum $\alpha \neq 0$, então $\mathcal{B}$ não é simples.*

Dimensão e nilíndice n .

Neste capítulo daremos continuidade ao estudo das nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão e nilíndice n . Em [8], Correa e Suazo demonstraram a nilpotência de uma nilálgebra comutativa $\mathcal{B}$, de potências associativas de dimensão e nilíndice n , sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Neste trabalho classificaremos estas álgebras a menos de isomorfismo.

Estudaremos por separado os casos de dimensão 3,4,5,6 e 7. Para dimensão maior ou igual que 8, observamos um comportamento padrão em ditos produtos, o que nos levou a um resultado geral.

Para o restante do capítulo, F denotará um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5 ou suficientemente grande comparada com n e $\mathcal{B}$ uma nilálgebra sobre o corpo F . Se x é um elemento de $\mathcal{B}$ tal que, $x^k \neq 0$ e $x^{k+1} = 0$, para um inteiro positivo k , então A_x denotará a subálgebra de $\mathcal{B}$, gerada por $\langle x, x^2, \dots, x^k \rangle$.

Lema 4.1 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão n e nilíndice $n + 1$. Se x é um elemento em $\mathcal{B}$ tal que $x^n \neq 0$, então $\{x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma base de $\mathcal{B}$, e cada subálgebra própria de $\mathcal{B}$ está contida em $\mathcal{B}^2$.*

Prova: Como $\mathcal{B}$ tem nilíndice $n + 1$, existe $x \in \mathcal{B}$ tal que $x^n \neq 0$ e já que $\{x, x^2, \dots, x^n\}$ é um conjunto linearmente independente, é claro que é uma base de $\mathcal{B}$. Seja D uma subálgebra de $\mathcal{B}$ tal que $D \not\subseteq \mathcal{B}^2$. Logo, existe um

elemento $d \in D$ tal que $d \notin \mathcal{B}^2$. O elemento d exprime-se em função da base como $d = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ com $\alpha_1 \neq 0$. Então $d^s = \alpha_1^s x^s + f_s(x) x^{s+1}$ para $s \geq 1$, onde $f_s(x)$ é uma expressão polinomial em x . Logo, $d^n = \alpha_1^n x^n \neq 0$ e então o conjunto $\{d, d^2, \dots, d^n\}$ é linearmente independente, logo D tem dimensão n e portanto $D = \mathcal{B}$. $\square$

Teorema 4.2 [8] *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , sobre um corpo de característica diferente de 2 e de 3. Se a é um elemento em $\mathcal{B}$ tal que $a^{n-1} \neq 0$, então $\mathcal{B}^k = A_a^k$ para todo $k \geq 2$. Portanto $\mathcal{B}$ é nilpotente de índice n .*

Observamos que para cada $x \in \mathcal{B}$ o elemento x^{n-1} está no anulador da álgebra $\mathcal{B}$.

Corolário 4.3 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , sobre um corpo de característica diferente de 2 e de 3. Se a é um elemento em $\mathcal{B}$ tal que $a^{n-1} \neq 0$, então existe $b \in \mathcal{B} \setminus A_a$ tal que $ba = 0$. O elemento b está determinado de maneira única, a menos de multiplicação por escalares diferentes de zero e somas de elementos em $\langle a^{n-1} \rangle$, isto é, se b_1 é outro elemento com a mesma propriedade, então existe $\lambda, \mu \in F$, $\lambda \neq 0$ tal que $b_1 = \lambda b + \mu a^{n-1}$.*

Prova: Seja $c \in \mathcal{B} \setminus A_a$. Então $\{c, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ é uma base de $\mathcal{B}$ e ca é da forma $ca = \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{n-1} a^{n-1}$, onde $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in F$. Seja $b = \lambda_0 c + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_{n-1} a^{n-1}$ um elemento arbitrário em $\mathcal{B}$. Então $b \in \mathcal{B} \setminus A_a$ e $ba = 0$ se e somente se $\lambda_0 \neq 0$ e $0 = ba = \lambda_0 ca + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i a^{i+1}$. Portanto, $\lambda_0 \neq 0$ e $ca = -(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{\lambda_i}{\lambda_0} a^{i+1})$. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, o conjunto formado pelos seguintes pares de elementos,

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{(a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid a^{n-1} \neq 0, \quad ab = 0 \quad \text{e} \quad b \notin A_a\}.$$

Fazendo $x = a$ e $y = b$ em (1.2), (1.1) e (1.4), e utilizando o fato de $ab = 0$ obtemos as seguintes identidades

$$a^2b^2 = \frac{1}{2}[a(ab^2) + b(a^2b)], \quad (4.1)$$

$$a^3b = -a(a^2b), \quad (4.2)$$

$$a^4b = \frac{1}{3}[3a^2(a^2b) - 2a(a^3b) - 2a(a(a^2b))], \quad (4.3)$$

$$a^5b = \frac{1}{3}[4a^2(a^3b) - a^3(a^2b) - 2a(a^4b) - 2a(a(a^3b))], \quad (4.4)$$

$$a^{r+2}b = \frac{1}{3}[4a^2(a^rb) - a^r(a^2b) - 2a(a^{r+1}b) - 2a(a(a^rb))]. \quad (4.5)$$

4.1 Dimensão menor ou igual a quatro.

Para dimensão menor ou igual a 4, Gerstenhaber e Myung [12] mostraram a nilpotência destas álgebras determinando suas classes de isomorfismos.

Para dimensão 3, os autores do trabalho citado acima, acharam uma família de álgebras associativas. Para cada $\alpha \in F$, $\mathcal{B}(\alpha)$ é uma nilálgebra comutativa com base $\{a, a^2, b\}$, onde $b^2 = \alpha a^2$, e os outros produtos são nulos, isto é, a^2 está no anulador da álgebra. Para cada $\alpha, \alpha' \in F$, cumpre-se que $\mathcal{B}(\alpha) \cong \mathcal{B}(\alpha')$ se, e somente se, existir $\rho \in F^*$ tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.

Para dimensão 4, Gerstenhaber e Myung acharam a família de álgebras, definidas a seguir. Para cada $\alpha \in F$, a nilálgebra comutativa $\mathcal{C}(\alpha)$ tem uma base da forma $\{a, a^2, a^3, b\}$, tal que $bA_a^2 = 0$ e

$$ab = 0 \text{ e } b^2 = \alpha a^2.$$

Esta família de álgebras está parametrizada por elementos de $F^*/(F^*)^2$. Também cinco álgebras individuais com base $\{a, a^2, a^3, b\}$ tal que $bA_a^2 = 0$ e os produtos ab e b^2 são dados por um da seguinte lista:

$$\mathcal{C}_1 : \quad ab = 0, \quad b^2 = 0;$$

$$\mathcal{C}_2 : \quad ab = 0, \quad b^2 = a^3;$$

$$\mathcal{C}_3 : \quad ab = a^2, \quad b^2 = 0;$$

$$\mathcal{C}_4 : \quad ab = a^2, \quad b^2 = a^3;$$

$$\mathcal{C}_5 : \quad ab = a^2, \quad b^2 = a^2.$$

Observamos que somente são associativas as álgebras determinadas por $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Este resultado pode ser reformulado, usando diferentes bases, no seguinte teorema.

Teorema 4.4 *Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 4, é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, a^3\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\mathcal{A}_1 : \quad b^2 = -a^2 + a^3, \quad a^2b = a^3.$$

$$\mathcal{A}_2 : \quad b^2 = -a^2, \quad a^2b = a^3;$$

$$\mathcal{A}_3 : \quad a^2b = a^3;$$

$$\mathcal{A}_4 : \quad b^2 = a^3;$$

$$\mathcal{A}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^2, \quad [\rho^2];$$

A matriz da direita dá a condição necessária e suficiente para que duas álgebras na classe sejam isomorfas, isto é $\mathcal{A}_5(\alpha) \cong \mathcal{A}_5(\alpha')$ se e somente se, existir $\rho \in F^*$ tal que $\alpha' = \rho^2\alpha$. Por produtos não triviais, entendemos os produtos entre as potências de a .

4.2 Classificação para dimensão cinco.

Nesta seção estudaremos as nilálgebras comutativas de p.a. de dimensão e nilíndice 5. Daremos a tabela de multiplicação para uma base da forma

$\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$, com $ab = 0$, e também uma classificação a menos de isomorfismos.

O seguinte teorema foi provado por Elgueta e Suazo em [10] e Correa e Suazo em [8].

Teorema 4.5 *Seja $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, de p.a. de dimensão e nilíndice 5, e $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então:*

(i) *Se $\mathcal{B}$ não é de Jordan, então existe $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, tal que*

$$b^2 + a^2 \in A_a^3, \quad ba^2 - a^3 \in A_a^4, \quad ba^3 + a^4 = 0.$$

(ii) *Se $\mathcal{B}$ é de Jordan, então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ tal que*

$$b^2 \in A_a^3, \quad ba \in A_a^3.$$

Vejamos agora o seguinte resultado.

Teorema 4.6 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 5 e seja $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então para a base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ de $\mathcal{B}$, os produtos não triviais são dados por:*

$$\begin{aligned} b^2 &= -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4, \\ a^2 b &= \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4, \\ a^3 b &= -\gamma_3 a^4. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$ para todo $k \geq 5$ e para todos os inteiros positivos i e j , e (4.6), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 5.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 5 e $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Por Teorema 4.2, temos que

$$b^2 = \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 \quad \text{e} \quad a^2 b = \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4.$$

Usando relações (4.2) e (4.1), obtemos que

$$a^3 b = -a(\gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4) = -\gamma_3 a^4$$

e

$$a^2b^2 = \frac{1}{2}[\alpha_2a^4 + \gamma_3a^3b + \gamma_4a^4b] = \frac{1}{2}[\alpha_2a^4 - \gamma_3^2a^4].$$

Por outro lado, temos que

$$a^2b^2 = \alpha_2a^4,$$

logo $\alpha_2 = -\gamma_3^2$. Assim na base anterior, os produtos não triviais, são dados por

$$b^2 = -\gamma_3^2a^2 + \alpha_3a^3 + \alpha_4a^4, \quad a^2b = \gamma_3a^3 + \gamma_4a^4 \quad \text{e} \quad a^3b = -\gamma_3a^4.$$

Demonstraremos agora que, se $\mathcal{B}$ tem base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$, com produtos dados por $ab = a^k = 0$, $a^ia^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 5$ e $i, j \geq 1$, e relações (4.6), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 5. Para tal seja $x = \lambda b + \sum_{i=1}^4 \lambda_i a^i$ um elemento arbitrário da álgebra. Então

$$\begin{aligned} x^2 &= (-\lambda^2\gamma_3^2 + \lambda_1^2)a^2 + (\lambda^2\alpha_3 + 2\lambda\lambda_2\gamma_3 + 2\lambda_1\lambda_2)a^3 + (\lambda^2\alpha_4 + 2\lambda\lambda_2\gamma_4 \\ &\quad - 2\lambda\lambda_3\gamma_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4, \\ x^3 &= (-\lambda^3\gamma_3^3 + \lambda\lambda_1^2\gamma_3 - \lambda_1\lambda^2\gamma_3^2 + \lambda_1^3)a^3 + (\lambda^3\gamma_3^2\gamma_4 + \lambda\lambda_1^2\gamma_4 - \lambda^3\gamma_3\alpha_3 \\ &\quad - 3\lambda^2\lambda_2\gamma_3^2 + \lambda_1\lambda^2\alpha_3 + 3\lambda_1^2\lambda_2)a^4, \\ x^4 &= (\lambda^4\gamma_3^4 - 2\lambda^2\lambda_1^2\gamma_3^2 + \lambda_1^4)a^4 = (\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)^2a^4, \\ x^5 &= 0, \\ x^2x^2 &= (\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)^2a^4, \end{aligned}$$

portanto $x^4 - x^2x^2 = 0$, ficando claro que $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 5. $\square$

Denotaremos a álgebra do enunciado do lema anterior por $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4)$. Observamos que a matriz coordenada por linhas de L_b , em relação à base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma_3^2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A seguir, faremos uma análise que nos permitirá determinar as classes de isomorfismo das álgebras da forma $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4)$.

Lema 4.7 *Sejam λ e β escalares não nulos. Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^3}\alpha_3, \frac{\beta^2}{\lambda^4}\alpha_4, \frac{\beta}{\lambda}\gamma_3, \frac{\beta}{\lambda^2}\gamma_4\right).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4)$, em relação à base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$. Considerar λ e β em F^* e os elementos em $\mathcal{B}$ dados por $a_1 := \lambda a$ e $b_1 := \beta b$. Obviamente $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Determinemos agora as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação à base de $\mathcal{B}$ determinada pelo par (a_1, b_1) . Temos que $a_1^2 = \lambda^2 a^2$, $a_1^3 = \lambda^3 a^3$ e $a_1^4 = \lambda^4 a^4$, logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = -\beta^2 \gamma_3^2 \frac{1}{\lambda^2} a_1^2 + \beta^2 \alpha_3 \frac{1}{\lambda^3} a_1^3 + \beta^2 \alpha_4 \frac{1}{\lambda^4} a_1^4,$$

e também

$$a_1^2 b_1 = \lambda^2 \beta a^2 b = \frac{\beta}{\lambda} \gamma_3 a_1^3 + \frac{\beta}{\lambda^2} \gamma_4 a_1^4,$$

o que demonstra o lema. $\square$

Lema 4.8 *Para todo ρ em F ,*

$$\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4) \cong \mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4 - 3\rho\alpha_3, \gamma_3, \gamma_4 - 6\rho\gamma_3).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4)$ em relação à base determinada pelo par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Seja $\rho \in F$. Definamos os elementos em $\mathcal{B}$,

$$a_1 := a + \rho a^2 \quad \text{e} \quad b_1 := b - \rho \gamma_3 a^2 + \rho(\rho \gamma_3 - \gamma_4) a^3.$$

Então $a_1^2 = a^2 + 2\rho a^3 + \rho^2 a^4$, $a_1^3 = a^3 + 3\rho a^4$, $a_1^4 = a^4$ e

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= -\rho \gamma_3 a^3 + \rho(\rho \gamma_3 - \gamma_4) a^4 + \rho a^2 b - \rho^2 \gamma_3 a^4 \\ &= -\rho \gamma_3 a^3 + \rho(\rho \gamma_3 - \gamma_4) a^4 + \rho \gamma_3 a^3 + \rho \gamma_4 a^4 - \rho^2 \gamma_3 a^4 \\ &= (\rho^2 \gamma_3 - \rho \gamma_4 + \rho \gamma_4 - \rho^2 \gamma_3) a^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Determinemos agora as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação à base $\{b_1, a_1, a_1^2, a_1^3, a_1^4\}$. Temos que

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b^2 - 2\rho\gamma_3 a^2 b + 2\rho(\rho\gamma_3 - \gamma_4) a^3 b + \rho^2 \gamma_3^2 a^4 \\ &= -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 - 2\rho\gamma_3^2 a^3 - 2\rho\gamma_3 \gamma_4 a^4 - 2\rho\gamma_3(\rho\gamma_3 - \gamma_4) a^4 + \rho^2 \gamma_3^2 a^4 \\ &= -\gamma_3^2 a^2 + (\alpha_3 - 2\rho\gamma_3^2) a^3 + (\alpha_4 - \rho^2 \gamma_3^2) a^4, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= b a^2 + 2\rho a^3 b - \rho\gamma_3 a^4 = \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 - 2\rho\gamma_3 a^4 - \rho\gamma_3 a^4 \\ &= \gamma_3 a^3 + (\gamma_4 - 3\rho\gamma_3) a^4. \end{aligned}$$

Usando agora as relações $a^3 = a_1^3 - 3\rho a_1^4$ e $a^2 = a_1^2 - 2\rho(a_1^3 - 3\rho a_1^4) - \rho^2 a_1^4 = a_1^2 - 2\rho a_1^3 + 5\rho^2 a_1^4$, segue que

$$\begin{aligned} b_1^2 &= -\gamma_3^2(a_1^2 - 2\rho a_1^3 + 5\rho^2 a_1^4) + (\alpha_3 - 2\rho\gamma_3^2)(a_1^3 - 3\rho a_1^4) + (\alpha_4 - \rho^2 \gamma_3^2) a_1^4 \\ &= -\gamma_3^2 a_1^2 + 2\gamma_3^2 \rho a_1^3 - 5\rho^2 \gamma_3^2 a_1^4 + (\alpha_3 - 2\rho\gamma_3^2) a_1^3 - 3\rho(\alpha_3 - 2\rho\gamma_3^2) a_1^4 \\ &\quad + (\alpha_4 - \rho^2 \gamma_3^2) a_1^4 = -\gamma_3^2 a_1^2 + \alpha_3 a_1^3 + (\alpha_4 - 3\rho\alpha_3) a_1^4, \end{aligned}$$

e

$$a_1^2 b_1 = \gamma_3(a_1^3 - 3\rho a_1^4) + (\gamma_4 - 3\rho\gamma_3) a_1^4 = \gamma_3 a_1^3 + (\gamma_4 - 6\rho\gamma_3) a_1^4,$$

demonstrando o lema. $\square$

Observamos que pelo Lema 4.7, se $\gamma_3 \neq 0$, então tomando $\beta = \frac{1}{\gamma_3}$ e $\lambda = 1$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, \gamma_3, \gamma_4) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_3^2}, \frac{\alpha_4}{\gamma_3^2}, 1, \frac{\gamma_4}{\gamma_3}\right).$$

Portanto podemos supor, a menos de isomorfismos, que $\gamma_3 = 0$ ou $\gamma_3 = 1$. Analisemos estes dois casos separadamente.

- Caso 1: ($\gamma_3 = 0$.) Temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, 0, \gamma_4)$, que pelo Lema 4.8, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4 - 3\rho\alpha_3, 0, \gamma_4)$, para todo ρ em F .

- Se $\alpha_3 \neq 0$, então fazendo $\rho = \frac{\alpha_4}{3\alpha_3}$, temos que $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, 0, \gamma_4)$, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, 0, 0, \gamma_4)$. Por outro lado, temos do Lema 4.7, que se $\beta = \lambda = \alpha_3 \neq 0$, então $\mathcal{B}(\alpha_3, 0, 0, \gamma_4)$ é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(1, 0, 0, \gamma'_4)$, onde $\gamma'_4 = \gamma_4/\alpha_3$.

- * Se $\gamma'_4 \neq 0$, então considerando $\lambda = \gamma_4'^2$ e $\beta = \gamma_4'^3$, no Lema 4.7, obtemos que

$$\mathcal{B}(1, 0, 0, \gamma'_4) \cong \mathcal{B}(1, 0, 0, 1).$$

- * Se $\gamma'_4 = 0$, então

$$\mathcal{B}(1, 0, 0, \gamma'_4) \cong \mathcal{B}(1, 0, 0, 0).$$

- Se $\alpha_3 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_4, 0, \gamma_4)$.

- * Se $\gamma_4 \neq 0$, então tomando $\beta = \lambda = \gamma_4$, no Lema 4.7, obtemos que

$$\mathcal{B}(0, \alpha_4, 0, \gamma_4) \cong \mathcal{B}(0, \alpha'_4, 0, 1),$$

$$\text{onde } \alpha'_4 = \alpha_4/\gamma_4^2.$$

- * Se $\gamma_4 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_4, 0, 0)$.

- Caso 2: ($\gamma_3 = 1$.) Então temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, 1, \gamma_4)$, que pelo Lema 4.8, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4 - 3\rho\alpha_3, 1, \gamma_4 - 6\rho)$, para todo ρ em F . Logo, podemos assumir a menos de isomorfismo, que $\gamma_4 = 0$.

- Se $\alpha_3 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_4, 1, 0)$.

- Se $\alpha_3 \neq 0$, então fazendo $\beta = \lambda = \alpha_3 \neq 0$, no Lema 4.7, obtemos que a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_3, \alpha_4, 1, 0)$, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(1, \alpha'_4, 1, 0)$, onde $\alpha'_4 = \frac{\alpha_4}{\alpha_3^2}$.

Podemos concluir, de todo o anterior que, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 5, então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$, cujos produtos são dados por uma da seguinte lista:

$$\mathcal{B}_1(\alpha) : \quad b^2 = -a^2 + a^3 + \alpha a^4, \quad a^2b = a^3, \quad a^3b = -a^4, \quad \alpha \in F;$$

$$\mathcal{B}_2(\alpha) : \quad b^2 = -a^2 + \alpha a^4, \quad a^2b = a^3, \quad a^3b = -a^4, \quad \alpha \in F;$$

$$\mathcal{B}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad a^2b = a^4, \quad \alpha \in F;$$

$$\mathcal{B}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_5 : \quad b^2 = a^3, \quad a^2b = a^4;$$

$$\mathcal{B}_6 : \quad b^2 = a^3;$$

$$\mathcal{B}_7 :$$

e os outros produtos não triviais são zero. Portanto toda álgebra desta classe é isomorfa a alguma da lista anterior. Analisemos agora as condições de isomorfismo entre as álgebras da lista dada acima.

Observamos que $\dim(\text{Anul}(\mathcal{B}_7)) = \dim(\langle b, a^4 \rangle) = 2$ e $\dim(\text{Anul}(\mathcal{B}_i)) = \dim(\langle a^4 \rangle) = 1$, para $i \neq 7$, e portanto podemos concluir que,

$$\mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_i, \quad \text{para } i \neq 7.$$

Pelo Teorema 4.5, temos que as álgebras $\mathcal{B}_1(\alpha)$ e $\mathcal{B}_2(\alpha)$ não são de Jordan e que $\mathcal{B}_3(\alpha)$, $\mathcal{B}_4(\alpha)$, $\mathcal{B}_5$ e $\mathcal{B}_6$, são álgebras de Jordan. Portanto podemos separar as seis primeiras álgebras da lista anterior, em dois conjuntos de álgebras não isomorfas, isto é, uma álgebra de um conjunto não é isomorfa a nenhuma outra álgebra do outro conjunto.

Seja $\bar{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i / (\text{Anul}(\mathcal{B}_i))$. Então para $i = 5, 6$, a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_i$ é 1 e para $j = 3, 4$, a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_j$ é 2. Portanto o segundo conjunto fica separado em dois subconjuntos de álgebras não isomorfas. Lembrando que a álgebra $\mathcal{B}_7$ não é isomorfa a nenhuma da lista anterior, temos as restantes álgebras desta lista separadas em três conjuntos de álgebras não isomorfas, a saber:

$$C1 : \mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{B}_2(\alpha), \quad C2 : \mathcal{B}_3(\alpha), \mathcal{B}_4(\alpha), \quad C3 : \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6.$$

Analisemos então cada conjunto por separado.

Observamos no conjunto $C1$ que a álgebra $\bar{\mathcal{B}}_2(\alpha)$ corresponde a álgebra $\mathcal{A}_3$ e a álgebra $\bar{\mathcal{B}}_1(\alpha)$ corresponde a álgebra $\mathcal{A}_1$, do Teorema 4.4, e já que estas álgebras não são isomorfas, segue que para todo α e α' em F

$$\mathcal{B}_1(\alpha) \not\cong \mathcal{B}_2(\alpha').$$

Podemos concluir de todo o anterior que

$$\mathcal{B}_1 \not\cong \mathcal{B}_i, \text{ para } i \neq 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 \not\cong \mathcal{B}_j, \text{ para } j \neq 2.$$

As álgebras do conjunto $C3$, são isomorfas como demonstramos no seguinte lema.

Lema 4.9 *Temos que*

$$\mathcal{B}_5 \cong \mathcal{B}_6.$$

Prova: Seja $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ a base $\mathcal{B}_6$, onde $b^2 = a^3$ e os outros produtos não triviais são zero. Se definimos

$$a_1 := -b + a \quad \text{e} \quad b_1 := b + a^2,$$

então $a_1 b_1 = -b^2 - a^2 b + ab + a^3 = -b^2 + a^3 = 0$, $a_1^2 = b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + a^3$, $a_1^3 = a^3 + a^4$ e $a_1^4 = a^4 \neq 0$. É claro da definição de b_1 que $b_1 \notin A_{a_1}$, portanto podemos concluir, de todo o anterior, que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_6)$. Como

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b^2 + 2a^2 b + a^4 = a^3 + a^4 = a_1^3, \\ a_1^2 b_1 &= a^4 = a_1^4, \\ a_1^3 b_1 &= 0, \end{aligned}$$

temos que $\mathcal{B}_5$ e $\mathcal{B}_6$ são isomorfas. □

Observamos que

$$\mathcal{B}_6 \not\cong \mathcal{B}_i, \text{ para } i \neq 5, 6.$$

Vejamos agora que para cada α e α' em F , a álgebra $\mathcal{B}_3(\alpha)$ não é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}_4(\alpha')$, o que será uma consequência do seguinte lema.

Lema 4.10 *Seja α em F^* . Se (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$, então existe $\rho \in F^*$ tal que*

$$b_1^2 = \rho^2 \alpha a_1^4 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0,$$

e os outros produtos não triviais são zero.

Prova: Seja $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ uma base para $\mathcal{B}_4(\alpha)$, tal que $b^2 = \alpha a^4$ e $a^2 b = 0$. Se $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$, então a_1 e b_1 são da forma $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4$, e uma vez que a_1 tem nilíndice máximo, temos que

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + 2\lambda_1 \lambda_3 a^4 + \lambda_2^2 a^4 \\ &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (\lambda^2 \alpha + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4, \\ a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_2 \lambda_1^2 a^4 = \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 \neq 0, \end{aligned}$$

portanto $\lambda_1 \neq 0$. Agora,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_3 \beta_1 a^4 \\ &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta \alpha + \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 = 0, \end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$, igualmente $\beta_2 = 0$ e portanto $\beta_3 = \frac{-\lambda \beta \alpha}{\lambda_1}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\lambda \beta \alpha}{\lambda_1} a^3 + \beta_4 a^4, \quad \text{com} \quad \beta \neq 0,$$

pois se $\beta = 0$, então $b_1 = \beta_4 a^4 \in \mathcal{B}^2$, o que não é possível. Logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \alpha a^4 = \beta^2 \frac{1}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4$$

e $a_1^2 b_1 = 0$, portanto

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0, \quad \text{com} \quad \lambda_1, \beta \neq 0,$$

o que demonstra o lema. □

Corolário 4.11 *Sejam α e α' em F^* . Então*

$$\mathcal{B}_4(\alpha) \cong \mathcal{B}_4(\alpha')$$

se, e somente se, existir um ρ não nulo tal que, $\alpha' = \alpha\rho^2$.

Como consequência imediata do lema anterior, temos também que para α diferente de zero e α' em F ,

$$\mathcal{B}_4(\alpha) \not\cong \mathcal{B}_3(\alpha').$$

Portanto podemos concluir de todo o anterior que $\mathcal{B}_5 \cong \mathcal{B}_6$ e

$$\mathcal{B}_i \not\cong \mathcal{B}_j, \quad (2 \leq i < j \leq 7).$$

Passaremos agora a estudar as classes dadas por $\mathcal{B}_1(\alpha)$, $\mathcal{B}_2(\alpha)$ e $\mathcal{B}_3(\alpha)$, para um α qualquer em F .

Lema 4.12 *Para todo α e α' em F ,*

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha')$$

se, e somente se, $\alpha' = \alpha$.

Prova: Seja α um elemento em F e $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$ tal que $b^2 = \alpha a^4$ e $a^2 b = a^4$. Analisemos como são os pares (a_1, b_1) de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$. Cada elemento do par anterior, exprime-se de maneira única na forma $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4$, e cumpre que

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda\lambda_2 a^2 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + 2\lambda_1\lambda_3 a^4 + \lambda_2^2 a^4 \\ &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + (\lambda^2 \alpha + 2\lambda\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2) a^4, \\ a_1^3 &= \lambda\lambda_1^2 a^2 b + \lambda_1^3 a^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_2 \lambda_1^2 a^4 = \lambda_1^3 a^3 + (\lambda\lambda_1^2 \alpha + 3\lambda_1^2 \lambda_2) a^4, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 \neq 0, \end{aligned}$$

pois a_1 tem nilíndice máximo, logo $\lambda_1 \neq 0$. Como,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 \\ &\quad + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_3 \beta_1 a^4 \\ &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta \alpha + \lambda \beta_2 + \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta + \lambda_2 \beta_2 \\ &\quad + \lambda_3 \beta_1) a^4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

segue que, $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e dado que $\lambda_1 \neq 0$, temos que $\beta_1 = 0$, igualmente $\beta_2 = 0$ e portanto $\beta_3 = \frac{-\beta(\lambda\alpha + \lambda_2)}{\lambda_1}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta(\lambda\alpha + \lambda_2)}{\lambda_1} a^3 + \beta_4 a^4, \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

caso contrário $b_1 \in \mathcal{B}^2$, que levaria a uma contradição. Logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \alpha a^4 = \beta^2 \frac{1}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4$$

e

$$a_1^2 b_1 = \lambda_1^2 \beta a^2 b = \lambda_1^2 \beta a^4 = \lambda_1^2 \beta \frac{1}{\lambda_1^4} a_1^4.$$

Portanto

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^2} a_1^4, \quad \text{com } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

Assim, podemos concluir que dado um α' de F , segue que $\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha')$, se e somente se, existir $\lambda_1, \beta \in F^*$ tais que $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha$ e $\frac{\beta}{\lambda_1^2} = 1$, logo $\beta = \lambda_1^2$. Consequentemente, $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha = \frac{\lambda_1^4}{\lambda_1^4} \alpha = \alpha$, o que demonstra o lema $\square$

Lema 4.13 *Se α e α' estão em F , então*

$$\mathcal{B}_2(\alpha) \cong \mathcal{B}_2(\alpha'),$$

se, e somente se, $\alpha' = \rho^2 \alpha$ com $\rho \in F^$.*

Prova: Seja α um elemento de F . Considerar $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$ tal que $b^2 = -a^2 + \alpha a^4$ e $a^2 b = a^3$. Se $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$, então podemos exprimir a_1 e b_1 sob a forma $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4$, $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4$. As potências de a_1 são dadas por

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda\lambda_2 a^2 b + 2\lambda\lambda_3 a^3 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + 2\lambda_1\lambda_3 a^4 + \lambda_2^2 a^4 \\
&= (\lambda_1^2 - \lambda^2) a^2 + (2\lambda\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) a^3 + (\lambda^2 \alpha - 2\lambda\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2) a^4, \\
&= (\lambda_1^2 - \lambda^2) a^2 + 2\lambda_2(\lambda + \lambda_1) a^3 + [2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda) + (\lambda^2 \alpha + \lambda_2^2)] a^4, \\
a_1^3 &= \lambda(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^2 b + 2\lambda_2 \lambda(\lambda + \lambda_1) b a^3 + \lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 + 2\lambda_1\lambda_2(\lambda + \lambda_1) a^4 \\
&\quad + \lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^4 \\
&= \lambda(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 - 2\lambda_2 \lambda(\lambda + \lambda_1) a^4 + \lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 + 2\lambda_1\lambda_2(\lambda + \lambda_1) a^4 \\
&\quad + \lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^4 \\
&= (\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 + [2\lambda_2 \lambda^2 - 2\lambda_2 \lambda \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2 \lambda + 2\lambda_1^2 \lambda_2 + \\
&\quad \lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2)] a^4, \\
&= (\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 + 3\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^4, \\
a_1^4 &= \lambda(\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^3 b + \lambda_1(\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2) a^4 \\
&= (\lambda_1^2 - \lambda^2)^2 a^4.
\end{aligned}$$

Como a_1 tem nilíndice máximo, temos que $\lambda_1^2 - \lambda^2 \neq 0$, portanto $\lambda_1 \neq \pm \lambda$. Uma vez que o produto de a_1 com b_1 é zero, segue que

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda \beta_3 a^3 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_2 \beta a^2 b \\
&\quad + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_3 \beta a^3 b + \lambda_3 \beta_1 a^4 \\
&= (-\lambda \beta + \lambda_1 \beta_1) a^2 + (\lambda \beta_2 + \lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta \alpha - \lambda \beta_3 + \\
&\quad \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 - \lambda_3 \beta + \lambda_3 \beta_1) a^4 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sendo que $\lambda_1^2 - \lambda^2 \neq 0$, cumpre-se que $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda \neq 0$. Vamos então analisar os pares (a_1, b_1) nestes dois casos por separado. Combinando com Lema 4.7, podemos supor que $\lambda_1 = 1, \lambda \neq \pm 1$ ou $\lambda_1 = 0, \lambda = 1$.

- $(\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda \neq \pm 1.)$ Como

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= (-\lambda\beta + \beta_1)a^2 + (\lambda\beta_2 + \beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\lambda\beta\alpha - \lambda\beta_3 + \\ &\quad \beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

segue que $\beta_1 = \lambda\beta$ e portanto $(\lambda + 1)\beta_2 = -\lambda_2\beta - \lambda_2\lambda\beta$, isto é,

$$\beta_2 = -\frac{\beta\lambda_2(\lambda + 1)}{\lambda + 1} = -\beta\lambda_2.$$

Igualmente $\beta_3(1 - \lambda) = -[\lambda\beta\alpha + \lambda_2(-\beta\lambda_2) - \lambda_3\beta + \lambda_3\lambda\beta]$, logo

$$\beta_3 = -\frac{\beta(\lambda\alpha - \lambda_3 + \lambda_3\lambda - \lambda_2^2)}{1 - \lambda}.$$

Assim

$$b_1 = -\lambda\beta b - \beta\lambda_2 a^2 - \frac{\beta(\lambda\alpha - \lambda_3 + \lambda_3\lambda - \lambda_2^2)}{1 - \lambda} a^3 + \beta_4 a^4, \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

pois se β fosse zero, então b_1 pertenceria a $\mathcal{B}^2$. Portanto

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \beta^2 b^2 - 2\lambda_2\beta^2 a^2 b + \frac{2\beta^2(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{\lambda - 1} a^3 b + \lambda^2\beta^2 a^2 \\ &\quad - 2\lambda_2\lambda\beta^2 a^3 + \frac{2\lambda\beta^2(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{\lambda - 1} a^4 + \beta^2\lambda_2^2 a^4 \\ &= -\beta^2 a^2 + \alpha\beta^2 a^4 - 2\lambda_2\beta^2 a^3 - \frac{2\beta^2(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{\lambda - 1} a^4 \\ &\quad + \lambda^2\beta^2 a^2 - 2\lambda_2\lambda\beta^2 a^3 + \frac{2\lambda\beta^2(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{\lambda - 1} a^4 + \beta^2\lambda_2^2 a^4 \\ &= \beta_1^2(\lambda^2 - 1)a^2 - 2\beta^2\lambda_2(\lambda + 1)a^3 + \\ &\quad \beta^2 \left[\alpha + \frac{2\beta^2(\lambda - 1)(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{\lambda - 1} + \lambda^2 \right] a^4 \\ &= \beta^2(\lambda^2 - 1)a^2 - 2\beta^2\lambda_2(\lambda + 1)a^3 + \beta^2(\alpha + 2\lambda\alpha - \lambda_2^2 - 2\lambda_3 + \\ &\quad 2\lambda_3\lambda)a^4, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1^2 b_1 &= \beta(1 - \lambda^2)a^2 b + 2\lambda_2\beta(\lambda + 1)a^3 b + \lambda\beta(1 - \lambda^2)a^3 + \\
&\quad 2\lambda_2\lambda\beta(\lambda + 1)a^4 - \lambda_2\beta(1 - \lambda^2)a^4 \\
&= \beta(1 - \lambda^2)a^3 - 2\lambda_2\beta(\lambda + 1)a^4 + \lambda\beta(1 - \lambda^2)a^3 + \\
&\quad 2\lambda_2\lambda\beta(\lambda + 1)a^4 - \lambda_2\beta(1 - \lambda^2)a^4 \\
&= \beta(1 + \lambda)(1 - \lambda^2)a^3 + \lambda_2\beta[-2(\lambda + 1) + 2\lambda(\lambda + 1) - (1 - \lambda^2)]a^4 \\
&= \beta(1 + \lambda)(1 - \lambda^2)a^3 - 3\lambda_2\beta(1 - \lambda^2)a^4.
\end{aligned}$$

Como precisamos escrever b_1^2 e $a_1^2 b_1$ em termos das potências de a_1 , utilizaremos a seguinte matriz cujas colunas correspondem as coordenadas de $a_1^2, a_1^3, a_1^4, b_1^2$ e $a_1^2 b_1$, nessa ordem, nas potências a^2, a^3, a^4 . Para facilitar a escritura seja $\theta = \alpha + 2\lambda\alpha - \lambda_2^2 - 2\lambda_3 + 2\lambda_3\lambda$ e $\mu = 1 - \lambda^2$. Então temos a matriz

$$\begin{bmatrix}
\mu & 0 & 0 & -\beta^2\mu & 0 \\
2\lambda_2(1 + \lambda) & (\lambda + 1)\mu & 0 & -2\lambda_2\beta^2(\lambda + 1) & \beta(1 + \lambda)\mu \\
2\lambda_3(1 - \lambda) + (\lambda^2\alpha + \lambda_2^2) & 3\lambda_2\mu & \mu^2 & \beta^2\theta & -3\lambda_2\beta\mu
\end{bmatrix},$$

e realizando uma redução por linhas obtemos

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -\beta^2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \beta \\
0 & 0 & 1 & \frac{\alpha\beta^2}{(\lambda-1)^2} & -\frac{6\lambda_2\beta}{(\lambda^2-1)}
\end{bmatrix}.$$

Portanto, os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$ são da forma $-a_1^2 + \alpha'a_1^4$ e a_1^3 respectivamente, para algum $\alpha' \in F$ se e somente se

$$-\beta^2 = -1, \quad \frac{\alpha\beta^2}{(\lambda-1)^2} = \alpha', \quad \beta = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{6\lambda_2\beta}{(\lambda^2-1)} = 0.$$

Logo $\beta = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Assim $\alpha' = \frac{\alpha}{(\lambda-1)^2}$.

- ($\lambda = 1$ e $\lambda_1 = 0$.) Neste caso temos que,

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= -\beta a^2 + (\beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 \\
&\quad + (\beta\alpha - \beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 = 0,
\end{aligned}$$

logo $\beta = 0$, $\beta_2 = -\beta_1\lambda_2$, e portanto $\beta_3 = \beta_1(-\lambda_2^2 + \lambda_3)$. Assim,

$$b_1 = \beta_1 a - \beta_1 \lambda_2 a^2 + \beta_1(-\lambda_2^2 + \lambda_3)a^3 + \beta_4 a^4, \quad \text{com } \beta_1 \neq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \beta_1^2 a^2 - 2\beta_1^2 \lambda_2 a^3 + 2\beta_1^2(-\lambda_2^2 + \lambda_3)a^4 + \beta_1^2 \lambda_2^2 a^4 \\ &= \beta_1^2 a^2 - 2\beta_1^2 \lambda_2 a^3 + \beta_1^2(-\lambda_2^2 + 2\lambda_3)a^4 \end{aligned}$$

e

$$a_1^2 b_1 = -\beta_1 a^3 + 2\lambda_2 \beta_1 a^4 + \beta_1 \lambda_2 a^4 = -\beta_1 a^3 + 3\beta_1 \lambda_2 a^4.$$

Portanto temos a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \beta_1^2 & 0 \\ 2\lambda_2 & -1 & 0 & -2\lambda_2 \beta_1^2 & -\beta_1 \\ -2\lambda_3 + (\alpha + \lambda_2^2) & -3\lambda_2 & 1 & \beta_1^2 \theta & 3\lambda_2 \beta_1 \end{bmatrix},$$

com $\theta = \alpha - \lambda_2^2 + 2\lambda_3$. Reduzindo a matriz por linhas obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \beta_1^2 & 6\lambda_2 \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$ são da forma $-a_1^2 + \alpha' a_1^4$ e a_1^3 respectivamente, para algum $\alpha' \in F$ se e somente se

$$-\beta^2 = -1, \quad \frac{\alpha \beta_1^2}{(\lambda_1 - 1)^2} = \alpha', \quad \beta = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{6\lambda_2 \beta_1}{\lambda_1^2 - 1} = 0.$$

Logo $\beta = 1$, $\lambda_2 = 0$ e assim $\alpha' = \alpha$. Isto prova o lema. $\square$

A demonstração do próximo lema segue os mesmos pasos da demonstração do lema anterior, pelo qual omitiremos alguns detalhes.

Lema 4.14 Para todo α e α' em F ,

$$\mathcal{B}_1(\alpha) \cong \mathcal{B}_1(\alpha')$$

se, e somente se, existir λ_1 em F com $\lambda_1 \neq \pm 1$, tal que $\alpha' = \frac{(\lambda_1+1)^4}{(\lambda_1-1)^4}\alpha + \frac{\lambda_1(\lambda_1^2+1)}{2(\lambda_1-1)^4}$.

Prova: Seja α em F e (a, b) um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1(\alpha))$ que determina uma base com produtos $b^2 = -a^2 + a^3 + \alpha a^4$, $a^2b = a^3$ e $a^3b = -a^4$. Todo par $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_1(\alpha))$, escreve-se de maneira única como $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4$. Calculando as potências de a_1 , obtemos que

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda\lambda_2 a^2 b + 2\lambda\lambda_3 a^3 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + 2\lambda_1\lambda_3 a^4 + \lambda_2^2 a^4 \\ &= (\lambda_1^2 - \lambda^2)a^2 + [\lambda^2 + 2\lambda_2(\lambda + \lambda_1)]a^3 + [2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda) + (\lambda^2\alpha + \lambda_2^2)]a^4, \\ a_1^3 &= \lambda(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^2 b + \lambda[\lambda^2 + 2\lambda_2(\lambda + \lambda_1)]a^3 b + \lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^3 + \lambda_1[\lambda^2 \\ &\quad + 2\lambda_2(\lambda + \lambda_1)]a^4 + \lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^4 \\ &= (\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^3 + (\lambda_1 - \lambda)[\lambda^2 + 3\lambda_2(\lambda + \lambda_1)]a^4, \\ a_1^4 &= \lambda(\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^3 b + \lambda_1(\lambda + \lambda_1)(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^4 \\ &= (\lambda_1^2 - \lambda^2)^2 a^4, \end{aligned}$$

e uma vez que a_1 tem nilíndice máximo, segue que $\lambda_1^2 - \lambda^2 \neq 0$, portanto $\lambda_1 \neq \pm\lambda$. Agora,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda\beta b^2 + \lambda\beta_2 a^2 b + \lambda\beta_3 a^3 b + \lambda_1\beta_1 a^2 + \lambda_1\beta_2 a^3 + \lambda_1\beta_3 a^4 + \lambda_2\beta a^2 b \\ &\quad + \lambda_2\beta_1 a^3 + \lambda_2\beta_2 a^4 + \lambda_3\beta a^3 b + \lambda_3\beta_1 a^4 \\ &= (-\lambda\beta + \lambda_1\beta_1)a^2 + (\lambda\beta + \lambda\beta_2 + \lambda_1\beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\lambda\beta\alpha - \lambda\beta_3 \\ &\quad + \lambda_1\beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- ($\lambda_1 = 1$ e $\lambda \neq \pm 1$.) Dado que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= (-\lambda\beta + \beta_1)a^2 + (\lambda\beta + \lambda\beta_2 + \beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\lambda\beta\alpha \\ &\quad - \lambda\beta_3 + \beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

temos que $\beta_1 = \lambda\beta$,

$$\beta_2 = -\frac{\beta\lambda + \lambda_2\beta + \lambda_2\lambda\beta}{(\lambda + 1)}$$

e

$$\begin{aligned}\beta_3(1 - \lambda) &= -\lambda\beta\alpha - \lambda_2 \left[-\frac{\beta\lambda + \lambda_2\beta + \lambda_2\lambda\beta}{(\lambda + 1)} \right] + \lambda_3\beta - \lambda_3\lambda\beta \\ &= -\frac{\beta[(\lambda\alpha - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)(\lambda + 1) - \lambda_2(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)]}{(\lambda + 1)}.\end{aligned}$$

Assim

$$\beta_3 = \frac{\beta(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{\lambda^2 - 1}$$

e portanto

$$\begin{aligned}b_1 &= \beta b + \lambda\beta a - \frac{\beta(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{\lambda + 1}a^2 \\ &\quad + \frac{\beta(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{\lambda^2 - 1}a^3 + \beta_4a^4,\end{aligned}$$

com $\beta \neq 0$. Uma vez que pelo Lema 4.7, podemos considerar múltiplos escalares de b_1 e $\beta \neq 0$, podemos supor que $\beta = 1$. Assim

$$\begin{aligned}b_1 &= b + \lambda a - \frac{(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{\lambda + 1}a^2 \\ &\quad + \frac{(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{\lambda^2 - 1}a^3 + \beta_4a^4.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}b_1^2 &= b^2 - \frac{2(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{(\lambda + 1)}a^2b + \lambda^2a^2 - \frac{2\lambda(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{(\lambda + 1)}a^3 + \\ &\quad \frac{2(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{(\lambda^2 - 1)}a^3b + \\ &\quad \frac{2\lambda(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{(\lambda^2 - 1)}a^4 \\ &\quad + \frac{(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)^2}{(\lambda + 1)^2}a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda^2 - 1)a^2 + \beta^2 \left[1 - \frac{2(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{(\lambda + 1)} - \frac{2\lambda(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)}{(\lambda + 1)} \right] a^3 \\
&\quad + \left[\alpha + \frac{2(\lambda - 1)(\lambda^2\alpha + \lambda_3\lambda^2 + \lambda\alpha - \lambda_3 - \lambda_2\lambda - \lambda_2^2 - \lambda_2^2\lambda)}{(\lambda^2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\lambda^2 + 2\lambda\lambda_2 + 2\lambda^2\lambda_2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_2^2\lambda + \lambda_2^2\lambda^2)}{(\lambda + 1)^2} \right] a^4 \\
&= (\lambda^2 - 1)a^2 - (2\lambda + 2\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda - 1)a^3 + \frac{1}{(\lambda + 1)^2} [2\lambda^3\alpha + 2\lambda_3\lambda^3 \\
&\quad + 5\lambda^2\alpha - 2\lambda\lambda_3 - 2\lambda_2^2\lambda - \lambda_2^2\lambda^2 + 2\lambda_3\lambda^2 + 4\lambda\alpha - 2\lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda^2 \\
&\quad + \alpha] a^4
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1^2 b_1 &= (1 - \lambda^2)a^2 b + [\lambda^2 + 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^3 b + \lambda(1 - \lambda^2)a^3 + \lambda[\lambda^2 + \\
&\quad 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^4 - \frac{(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)(1 - \lambda^2)}{(\lambda + 1)}a^4 \\
&= (1 - \lambda^2)a^3 - [\lambda^2 + 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^4 + \lambda(1 - \lambda^2)a^3 + \lambda[\lambda^2 + \\
&\quad 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^4 - \frac{(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)(1 - \lambda^2)}{(\lambda + 1)}a^4 \\
&= (1 + \lambda)(1 - \lambda^2)a^3 + [(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda_2\lambda + 2\lambda_2) - (1 - \lambda)(\lambda + \\
&\quad \lambda_2 + \lambda_2\lambda)]a^4 \\
&= (1 + \lambda)(1 - \lambda^2)a^3 + (\lambda^2 - 1)(\lambda + 3\lambda_2)a^4.
\end{aligned}$$

Portanto temos a matriz

$$\begin{bmatrix}
\mu & 0 & 0 & -\mu & 0 \\
\lambda^2 + 2\lambda_2(1 + \lambda) & (\lambda + 1)\mu & 0 & -\epsilon & (1 + \lambda)\mu \\
2\lambda_3(1 - \lambda) + (\lambda_2^2 + \lambda^2\alpha) & (1 - \lambda)[\lambda^2 + 3\lambda_2(1 + \lambda)] & \mu^2 & \frac{\theta}{(\lambda + 1)^2} & -\mu(\lambda + 3\lambda_2)
\end{bmatrix},$$

com $\theta = 2\lambda^3\alpha + 2\lambda_3\lambda^3 + 5\lambda^2\alpha - 2\lambda\lambda_3 - 2\lambda_2^2\lambda - \lambda_2^2\lambda^2 + 2\lambda_3\lambda^2 + 4\lambda\alpha - 2\lambda_3 - \lambda_2^2 + \lambda^2 + \alpha$, $\epsilon = 2\lambda + 2\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda - 1$ e $\mu = 1 - \lambda^2$, que reduzida por linhas da a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\phi}{(\lambda+1)^2(\lambda^2-1)^2} & \frac{(2\lambda^2+\lambda+6\lambda\lambda_2+6\lambda_2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)^2} \end{bmatrix},$$

com $\phi = \lambda^4\alpha - \lambda^4 + 4\lambda^3\alpha - 3\lambda^3\lambda_2 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2\alpha + 3\lambda^2\lambda_2 + 4\lambda\alpha + 3\lambda\lambda_2 + \alpha - 3\lambda_2$. Portanto utilizando o Lema 4.7, temos que os produtos b_1^2 e $a_1^2b_1$ são da forma $-a_1^2 + a_1^3 + \alpha'a_1^4$ e a_1^3 , para algum α' em F , se e somente se

$$-\frac{x^2}{y^3} \frac{(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2} = -1, \quad \frac{x^2}{y^4} \frac{\phi}{(\lambda+1)^2(\lambda^2-1)^2} = \alpha',$$

$$\frac{x}{y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(2\lambda^2 + \lambda + 6\lambda\lambda_2 + 6\lambda_2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)^2} = 0,$$

para x e y não nulos. Logo $x = y$ do que segue que $-\frac{1}{y} \frac{(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2} = -1$, isto é, $y = \frac{(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2}$. Por outro lado temos que $\lambda_2 = -\frac{\lambda(2\lambda+1)}{6(\lambda+1)}$ que substituída em ϕ , nos dá $\phi = (\lambda+1)^4\alpha + \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{2}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{y^2} \frac{\phi}{(\lambda+1)^2(\lambda^2-1)^2} = \frac{(\lambda+1)^4}{(\lambda-1)^2} \frac{\phi}{(\lambda+1)^2(\lambda^2-1)^2} = \frac{\phi}{(\lambda-1)^4} \\ &= \frac{(\lambda+1)^4}{(\lambda-1)^4} \alpha + \frac{\lambda(\lambda^2+1)}{2(\lambda-1)^4}. \end{aligned}$$

- ($\lambda = 1$ e $\lambda_1 = 0$.) Então

$$\begin{aligned} a_1b_1 &= -\beta a^2 + (\beta + \beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\beta\alpha \\ &\quad -\beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $\beta = 0$, $\beta_2 = -\beta_1\lambda_2$ e $\beta_3 = \beta_1(\lambda_3 - \lambda_2^2)$. Assim

$$b_1 = \beta_1 a - \beta_1 \lambda_2 a^2 + \beta_1 (\lambda_3 - \lambda_2^2) a^3 + \beta_4 a^4, \quad \text{com } \beta_1 \neq 0,$$

e podemos supor, igual que no caso anterior, que $\beta = 1$, isto é,

$$b_1 = a - \lambda_2 a^2 + (\lambda_3 - \lambda_2^2) a^3 + \beta_4 a^4.$$

Portanto

$$b_1^2 = a^2 - 2\lambda_2 a^3 + (2\lambda_3 - \lambda_2^2) a^4,$$

$$a_1^2 b_1 = -a^3 + (1 + 3\lambda_2) a^4,$$

e temos a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 + 2\lambda_2 & -1 & 0 & -2\lambda_2 & -1 \\ \alpha - 2\lambda_3 + \lambda_2^2 & -1 - 3\lambda_2 & 1 & 2\lambda_3 - \lambda_2^2 & 1 + 3\lambda_2 \end{bmatrix},$$

que reduzida por linhas da a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha - 1 - 3\lambda_2 & 2 + 6\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Logo os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$ são da forma $-a_1^2 + a_1^3 + \alpha' a_1^4$ e a_1^3 , para algum α' em F , se e somente se

$$\alpha - 1 - 3\lambda_2 = \alpha' \quad \text{e} \quad 2 + 6\lambda_2 = 0,$$

do que segue que $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ e assim $\alpha = \alpha'$.

Observamos que o resultado obtido no segundo ítem é um caso particular do primeiro para $\lambda = 0$. Isto prova o lema. $\square$

Podemos finalmente enunciar o seguinte teorema, cuja prova decorre de todo o anterior.

Teorema 4.15 *Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 5, é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(\alpha) : \quad & b^2 = -a^2 + a^3 + \alpha a^4, \quad a^2b = a^3, \quad a^3b = -a^4; \\ \mathcal{A}_2(\alpha) : \quad & b^2 = -a^2 + \alpha a^4, \quad a^2b = a^3, \quad a^3b = -a^4, \quad [\rho^2]; \\ \mathcal{A}_3(\alpha) : \quad & b^2 = \alpha a^4, \quad a^2b = a^4; \\ \mathcal{A}_4(\alpha) : \quad & b^2 = \alpha a^4, \quad [\rho^2]; \\ \mathcal{A}_5 : \quad & b^2 = a^3.\end{aligned}$$

A condição suficiente e necessária para que $\mathcal{A}_3(\alpha')$ seja isomorfa com $\mathcal{A}_3(\alpha)$ é $\alpha' = \alpha$. E $\mathcal{A}_1(\alpha) \cong \mathcal{A}_1(\alpha')$ se, e somente se, existir um $\lambda \neq \pm 1$ tal que $\alpha' = \frac{(\lambda_1+1)^4}{(\lambda_1-1)^4}\alpha + \frac{\lambda_1(\lambda_1^2+1)}{2(\lambda_1-1)^4}$.

4.3 Classificação para dimensão seis.

Classificaremos, a menos de isomorfismos, as nilálgebras comutativas $\mathcal{B}$ de p.a. de dimensão e nilíndice 6. Iniciaremos demonstrando o seguinte lema, que dá os produtos para uma base determinada pelo par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Teorema 4.16 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6 e $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então para a base determinada pelo par (a, b) , os produtos não triviais são dados por:*

$$\begin{aligned}b^2 &= -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5, \\ a^2b &= \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5, \\ a^3b &= -\gamma_3 a^4 - \gamma_4 a^5, \\ a^4b &= \gamma_3 a^5.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$,

e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 6$ e $i, j \geq 1$, e (4.7), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 6.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6, e base e produtos como no enunciado do lema. Uma vez que $A_a^5 = \langle a^5 \rangle$ é um ideal de $\mathcal{B}$, temos que $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/A_a^5$ é uma nilálgebra comutativa de p.a de dimensão e nilíndice 5, com base $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4\}$ e produtos como indicados no Teorema 4.6. Logo $\bar{b}^2 = -\gamma_3^2 \bar{a}^2 + \alpha_3 \bar{a}^3 + \alpha_4 \bar{a}^4$ e $\bar{a}^2 \bar{b} = \gamma_3 \bar{a}^3 + \gamma_4 \bar{a}^4$. Portanto

$$b^2 = -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5 \quad \text{e} \quad a^2 b = \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5.$$

Por (4.2), temos que

$$a^3 b = -\gamma_3 a^4 - \gamma_4 a^5,$$

e por (4.3),

$$a^4 b = \frac{1}{3}[3(\gamma_3 a^5) - 2(-\gamma_3 a^5) - 2(\gamma_3 a^5)] = \gamma_3 a^5.$$

Temos também que

$$a^2 b^2 = -\gamma_3^2 a^4 + \alpha_3 a^5,$$

e por (4.1),

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= \frac{1}{2}[(-\gamma_3 a^4 + \alpha_3 a^5) + (\gamma_3 a^3 b + \gamma_4 a^4 b)] \\ &= \frac{1}{2}[-\gamma_3^2 a^4 + \alpha_3 a^5 - \gamma_3^2 a^4 - \gamma_3 \gamma_4 a^5 + \gamma_4 \gamma_3 a^5] \\ &= \frac{1}{2}[-2\gamma_3^2 a^4 + \alpha_3 a^5], \end{aligned}$$

logo $\alpha_3 = 0$. Assim

$$b^2 = -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5,$$

o que demonstra a primeira parte do teorema. Para a outra, seja $\mathcal{B}$ com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ e produtos dados por $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para $k \geq 6$ e $i, j \geq 1$, e (4.7). Então se $x = \lambda b + \sum_{i=1}^5 \lambda_i a^i$, temos que

$$\begin{aligned}
x^2 &= (-\lambda^2\gamma_3^2 + \lambda_1^2)a^2 + (2\lambda\lambda_2\alpha_3 + 2\lambda_1\lambda_2)a^3 + (\lambda^2\alpha_4 + 2\lambda\lambda_2\gamma_4 - 2\lambda\lambda_3\gamma_3 \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4 + (\lambda^2\alpha_5 + 2\lambda\lambda_2\gamma_5 - 2\lambda\lambda_3\gamma_4 + 2\lambda\lambda_4\gamma_3 + 2\lambda_1\lambda_4 + \\
&\quad 2\lambda_2\lambda_3)a^5, \\
x^3 &= (-\lambda^3\gamma_3^3 + \lambda\lambda_1^2\gamma_3 - \lambda_1\lambda^2\gamma_3^2 + \lambda_1^3)a^3 + (-\lambda^3\gamma_3^2\gamma_4 + \lambda\lambda_1^2\gamma_4 - 3\lambda^2\lambda_2\gamma_3^2 \\
&\quad + 3\lambda_1^2\lambda_2)a^4 + (-\lambda^3\gamma_3^2\gamma_5 + \lambda\lambda_1^2\gamma_5 + \lambda^3\gamma_3\alpha_4 - 3\lambda^2\lambda_3\gamma_3^2 + 3\lambda\lambda_2^2\gamma_3 \\
&\quad + \lambda^2\lambda_1\alpha_4 + 3\lambda_1^2\lambda_3 + 3\lambda_1\lambda_2^2)a^5, \\
x^4 &= (\lambda^4\gamma_3^4 - 2\lambda^2\lambda_1^2\gamma_3^2 + \lambda_1^4)a^4 + (-4\lambda^3\lambda_2\gamma_3^3 + 4\lambda\lambda_1^2\lambda_2\gamma_3 - 4\lambda^2\lambda_1\lambda_2\gamma_3^2 \\
&\quad + 4\lambda_1^3\lambda_2)a^5 = (\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)^2a^4 - 4\lambda_2(\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda\gamma_3 + \lambda_1)a^5, \\
x^5 &= (\lambda^5\gamma_3^5 - 2\lambda^3\lambda_1^2\gamma_3^3 + \lambda\lambda_1^4\gamma_3 + \lambda^4\lambda_1\gamma_3^4 - 2\lambda^2\lambda_1^3\gamma_3^2 + \lambda_1^5)a^5, \\
x^6 &= 0, \\
x^2x^2 &= (\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)^2a^4 - 4\lambda_2(\lambda^2\gamma_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda\gamma_3 + \lambda_1)a^5,
\end{aligned}$$

logo $x^4 = x^2x^2$, ficando demonstrado que $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6. $\square$

Utilizaremos a notação $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$, para nos referir a álgebra do enunciado do lema anterior. A matriz coordenada por linhas, do operador L_b , na base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ é

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\gamma_3^2 & 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

A continuação, estudaremos as classes de isomorfismos das álgebras da forma $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$.

Lema 4.17 Para todo λ e β em F^* ,

$$\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^4}\alpha_4, \frac{\beta^2}{\lambda^5}\alpha_5, \frac{\beta}{\lambda}\gamma_3, \frac{\beta}{\lambda^2}\gamma_4, \frac{\beta}{\lambda^3}\gamma_5\right).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$, com base determinada pelo par (a, b) . Para λ e β não nulos definimos os elementos $a_1 := \lambda a$ e $b_1 := \beta b$. É claro que (a_1, b_1) pertence a $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Determinemos as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação a base determinada por (a_1, b_1) . Como $a_1^2 = \lambda^2 a^2$, $a_1^3 = \lambda^3 a^3$, $a_1^4 = \lambda^4 a^4$ e $a_1^5 = \lambda^5 a^5$, segue que

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \beta^2 b^2 = -\beta^2 \gamma_3^2 \frac{1}{\lambda^2} a_1^2 + \beta^2 \alpha_4 \frac{1}{\lambda^4} a_1^4 + \beta^2 \alpha_5 \frac{1}{\lambda^5} a_1^5, \\ a_1^2 b_1 &= \lambda^2 \beta a^2 b = \beta \gamma_3 \frac{1}{\lambda} a_1^3 + \beta \gamma_4 \frac{1}{\lambda^2} a_1^4 + \beta \gamma_5 \frac{1}{\lambda^3} a_1^5. \end{aligned}$$

o que demonstra o lema. $\square$

Lema 4.18 Seja ρ em F . Então

$$\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) \cong \mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5 - \theta, \gamma_3, \gamma_4 - 6\rho\gamma_3, \gamma_5 + 7\rho(3\rho\gamma_3 - \gamma_4)),$$

$$\text{com } \theta = 2\rho[2\alpha_4 - \gamma_4^2 + 2\gamma_3(\gamma_5 - \rho\gamma_4 + \rho^2\gamma_3)].$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$ com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$. Sejam ρ em F ,

$$a_1 := a + \rho a^2 \text{ e } b_1 := b - \rho\gamma_3 a^2 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3) a^3 - \rho[\gamma_5 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3)] a^4.$$

Então $a_1^2 = a^2 + 2\rho a^3 + \rho^2 a^4$, $a_1^3 = a^3 + 3\rho a^4 + 3\rho^2 a^5$, $a_1^4 = a^4 + 4\rho a^5$, $a_1^5 = a^5 \neq 0$ e

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= -\rho\gamma_3 a^3 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3) a^4 - \rho[\gamma_5 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3)] a^5 + \rho a^2 b - \rho^2 \gamma_3 a^4 \\ &\quad - \rho^2 (\gamma_4 - \rho\gamma_3) a^5 \\ &= -\rho\gamma_3 a^3 + [\rho(\rho\gamma_3 - \gamma_4) - \rho^2 \gamma_3] a^4 + [-\rho\gamma_5 + \rho^2(\gamma_4 - \rho\gamma_3) \\ &\quad - \rho^2(\gamma_4 - \rho\gamma_3)] a^5 + \rho(\gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5) \\ &= (-\rho\gamma_3 + \rho\gamma_3) a^3 + (-\rho\gamma_4 + \rho\gamma_4) a^4 + (-\rho\gamma_5 + \rho\gamma_5) a^5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma vez que fica claro da definição que $b_1 \notin A_{a_1}$, temos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Como

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b^2 - 2\rho\gamma_3a^2b - 2\rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3)a^3b + \rho^2\gamma_3^2a^4 + 2\rho^2\gamma_3(\gamma_4 - \rho\gamma_3)a^5 - \\ &\quad 2\rho[\gamma_5 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3)]a^4b \\ &= -\gamma_3^2a^2 - 2\rho\gamma_3^2a^3 + (\alpha_4 - \rho^2\gamma_3^2)a^4 + [\alpha_5 + 2\rho(\gamma_4^2 - 2\gamma_3\gamma_5 + \rho\gamma_3\gamma_4 - \\ &\quad 2\rho^2\gamma_3^2)]a^5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2b_1 &= ba^2 - \rho\gamma_3a^4 - \rho(\gamma_4 - \rho\gamma_3)a^5 + 2\rho a^3b - 2\rho^2\gamma_3a^5 + \rho^2a^4b \\ &= \gamma_3a^3 + (\gamma_4 - 3\rho\gamma_3)a^4 + (\gamma_5 - 3\rho\gamma_4)a^5, \end{aligned}$$

temos a seguinte matriz, cujas colunas são as coordenadas de $a_1^2, \dots, a_1^5, b_1^2$ e $a_1^2b_1$ em relação a $a^2, \dots, a^5$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3^2 & 0 \\ 2\rho & 1 & 0 & 0 & -2\rho\gamma_3^2 & \gamma_3 \\ \rho^2 & 3\rho & 1 & 0 & \alpha_4 - \rho^2\gamma_3^2 & \gamma_4 - 3\rho\gamma_3 \\ 0 & 3\rho^2 & 4\rho & 1 & \alpha_5 + 2\rho(\gamma_4^2 - 2\gamma_3\gamma_5 + \rho\gamma_3\gamma_4 - 2\rho^2\gamma_3^2) & \gamma_5 - 3\rho\gamma_4 \end{bmatrix},$$

que reduzida por linhas nos leva a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_3^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_4 & \gamma_4 - 6\rho\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_5 - 2\rho(2\alpha_4 + 2\rho\gamma_3\gamma_5 - 2\rho\gamma_3\gamma_4 - \gamma_4^4 + 2\rho^2\gamma_3^2) & \gamma_5 + 21\rho^2\gamma_3 - 7\rho\gamma_4 \end{bmatrix},$$

que nos dá as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação a base determinada pelo par (a_1, b_1) , demonstrando o lema. $\square$

Observamos que pelo Lema 4.17, se $\gamma_3 \neq 0$, então tomando $\beta = \frac{1}{\gamma_3}$ e $\lambda = 1$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\alpha_4}{\gamma_3^2}, \frac{\alpha_5}{\gamma_3^2}, 1, \frac{\gamma_4}{\gamma_3}, \frac{\gamma_5}{\gamma_3}\right).$$

Portanto podemos supor, a menos de isomorfismos, que $\gamma_3 = 0$ ou $\gamma_3 = 1$. Passemos ao análise destes dois casos.

- Caso 1: ($\gamma_3 = 0$.) Temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, 0, \gamma_4, \gamma_5)$, que pelo Lema 4.18, é isomorfa a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5 - 2\rho(2\alpha_4 - \gamma_4^2), 0, \gamma_4, \gamma_5 - 7\rho\gamma_4)$, para todo ρ em F .

- Se $\gamma_4 \neq 0$, então fazendo $\rho = \frac{\gamma_5}{7\gamma_4}$, temos que $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, 0, \gamma_4, \gamma_5)$, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha'_5, 0, \gamma_4, 0)$. Por outro lado, temos do Lema 4.7, que se $\beta = \lambda = \gamma_4 \neq 0$, então $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha'_5, 0, \gamma_4, 0)$, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\bar{\alpha}_4, \bar{\alpha}_5, 0, 1, 0)$. Se $\bar{\alpha}_5 \neq 0$, então tomando $\lambda = \bar{\alpha}_5$ e $\beta = \bar{\alpha}_5^2$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha'_5, 0, 1, 0) \cong \mathcal{B}(\bar{\alpha}_4, 1, 0, 1, 0),$$

e se $\bar{\alpha}_5 = 0$, então temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, 0, 0, 1, 0)$.

- Se $\gamma_4 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, 0, 0, \gamma_5)$, isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5 - 4\rho\alpha_4, 0, 0, \gamma_5)$.

- * Se $\alpha_4 \neq 0$, então considerando $\rho = \frac{\alpha_5}{4\alpha_4}$, obtemos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, 0, 0, 0, \gamma_5)$.

- Se $\gamma_5 \neq 0$, então fazendo $\lambda = 1$ e $\beta = \frac{1}{\gamma_5}$, no Lema 4.17, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(\frac{\alpha_4}{\gamma_5^2}, 0, 0, 0, 1)$. Assim

$$\mathcal{B}(\alpha_4, 0, 0, 0, \gamma_5) \cong \mathcal{B}(\alpha'_4, 0, 0, 0, 1), \quad \text{com } \alpha'_4 \neq 0.$$

- Se $\gamma_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, 0, 0, 0, 0)$.

- * Se $\alpha_4 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_5, 0, 0, \gamma_5)$.

- Se $\gamma_5 \neq 0$, então fazendo $\lambda = 1$ e $\beta = \frac{1}{\gamma_5}$, no Lema 4.17, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha'_5, 0, 0, 1)$. Se $\alpha'_5 \neq 0$, então considerando $\lambda = \frac{1}{\alpha'_5}$ e $\beta = \frac{1}{\alpha'^3_5}$, obtemos que

$$\mathcal{B}(0, \alpha'_5, 0, 0, 1) \cong \mathcal{B}(0, 1, 0, 0, 1),$$

e se $\alpha'_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, 0, 0, 0, 1)$.

· Se $\gamma_5 = 0$ e $\alpha_5 \neq 0$, basta tomar $\lambda = \alpha_5$ e $\beta = \alpha_5^2$, no Lema 4.17, para obtermos a álgebra $\mathcal{B}(0, 1, 0, 0, 0)$.

- Caso 2: ($\gamma_3 = 1$.) Temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, 1, \gamma_4, \gamma_5)$, que pelo Lema 4.18, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5 - \theta, 1, \gamma_4 - 6\rho, \gamma_5 + 7\rho(3\rho - \gamma_4))$, para todo ρ em F , com $\theta = 2\rho(2\alpha_4 - \gamma_4^2 + 2\gamma_5 - 2\rho\gamma_4 + 2\rho^2)$. Logo considerando $\rho = \frac{1}{6\gamma_4}$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_4, \alpha_5, 1, \gamma_4, \gamma_5) \cong \mathcal{B}(\alpha_4, \alpha'_5, 1, 0, \gamma'_5).$$

Podemos concluir, de todo o anterior que, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6, então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$, com produtos não triviais não zero, dados por um da seguinte lista, com α , θ e γ em F .

$$\mathcal{B}_1(\alpha, \theta, \gamma) : b^2 = -a^2 + \alpha a^4 + \theta a^5, \quad a^2b = a^3 + \gamma a^5, \quad a^3b = -a^4, \quad a^4b = a^5;$$

$$\mathcal{B}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4 + a^5, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{B}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{B}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad a^2b = a^5, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_6 : \quad b^2 = a^5, \quad a^2b = a^5;$$

$$\mathcal{B}_7 : \quad a^2b = a^5;$$

$$\mathcal{B}_8 : \quad b^2 = a^5;$$

$$\mathcal{B}_9 :$$

Uma vez que toda álgebra desta classe é isomorfa a alguma da lista anterior, resta analisar as condições de isomorfismo entre elas. É claro que

$$\mathcal{B}_9 \not\cong \mathcal{B}_i, \quad \text{para } i \neq 9,$$

pois a dimensão do anulador de $\mathcal{B}_9$ é 2 e a dimensão do anulador de $\mathcal{B}_i$ é 1, para todo i diferente de 9.

Seja $\bar{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i / \text{Anul}(\mathcal{B}_i)$. Como a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_i$ é 1 para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, enquanto que a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_j$ é 2 para $j = 6, 7, 8$, temos as oito primeiras álgebras da lista anterior separadas em dois conjuntos de álgebras não isomorfas. O primeiro dele formado pelas álgebras $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5$ e o segundo formado pelas álgebras $\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$.

Observamos que a álgebra $\bar{\mathcal{B}}_1$ corresponde à álgebra $\mathcal{A}_2$, as álgebras $\bar{\mathcal{B}}_2$ e $\bar{\mathcal{B}}_3$ correspondem à álgebra $\mathcal{A}_3$ e as álgebras $\bar{\mathcal{B}}_4$ e $\bar{\mathcal{B}}_5$ correspondem à álgebra $\mathcal{A}_4$, do Teorema 4.15, que não são isomorfas. Isto nos divide o primeiro conjunto em três subconjuntos de álgebras não isomorfas, sendo que no primeiro só fica a álgebra $\mathcal{B}_1$, portanto

$$\mathcal{B}_1 \not\cong \mathcal{B}_i, \text{ para } i \neq 1.$$

Assim a nossa lista, sem $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_9$, fica dividida em três conjuntos de álgebras não isomorfas, mais explicitamente estes conjuntos são:

$$C1 : \mathcal{B}_2(\alpha), \mathcal{B}_3(\alpha). \quad C2 : \mathcal{B}_4(\alpha), \mathcal{B}_5(\alpha). \quad C3 : \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8.$$

Vejamos que as álgebras de $C2$ são isomorfas.

Lema 4.19 *Para todo α em F^* ,*

$$\mathcal{B}_4(\alpha) \cong \mathcal{B}_5(\alpha)$$

Prova: Seja α não nulo em F e $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ uma base para $\mathcal{B}_5(\alpha)$ na qual $b^2 = \alpha a^4$ e os outros produtos não triviais são zero. Definamos os seguintes elementos

$$a_1 = -\frac{1}{\alpha}b + a \text{ e } b_1 = b + a^3.$$

Vejamos que (a_1, b_1) pertencem a $\mathcal{P}(\mathcal{B}_5(\alpha))$. De fato

$$a_1 b_1 = -\frac{1}{\alpha}b^2 + a^4 = -\frac{1}{\alpha}\alpha a^4 + a^4 = 0$$

e a tem nilíndice máximo, pois $a_1^2 = a^2 + \frac{1}{\alpha}a^4$, $a_1^3 = a^3 + \frac{1}{\alpha}a^5$, $a_1^4 = a^4$ e $a_1^5 = a^5 \neq 0$.

Como $b_1^2 = b^2 = \alpha a^4 = \alpha a_1^4$ e $a_1^2 b_1 = a^2 b = a^5 = a_1^5$, o lema fica provado.

□

Assim

$$\mathcal{B}_4 \not\cong \mathcal{B}_i, \quad \text{para } i \neq 4, 5.$$

Provaremos agora que as álgebras do $C3$ não são isomorfas. Para isto, determinaremos as constantes de estrutura de uma nilálgebra comutativa $\mathcal{B}$ de p.a. de dimensão e nilíndice 6, em relação a base determinada pelo par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, sendo que os produtos respeito a base determinada pelo par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, são $b^2 = \theta_1 a^5$ e $a^2 b = \theta_2 a^5$. Pois cada uma das álgebras de $C3$, esta determinada pelos valores de θ_1 e θ_2 no conjunto $\{0, 1\}$.

Lema 4.20 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6, com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ tal que $b^2 = \theta_1 a^5$ e $a^2 b = \theta_2 a^5$ e os outros produtos não triviais são zero. Então para cada par $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} \theta_1 a_1^5 \quad e \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} \theta_2 a_1^5, \quad \text{com } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra como no enunciado do lema e (a_1, b_1) um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então a_1 e b_1 são da forma $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5$, e

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda_2 \lambda a^2 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + 2\lambda_1 \lambda_3 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_4 a^5 + \lambda_2^2 a^4 \\ &\quad + 2\lambda_2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (\lambda^2 \theta_1 + 2\lambda_2 \lambda \theta_2 + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5, \\ a_1^3 &= \lambda_1^2 \lambda a^2 b + \lambda_1^3 a^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_1 (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^5 + \lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 a^5 \\ &\quad + \lambda_1^2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_1 (\lambda \lambda_1 \theta_2 + 3\lambda_1 \lambda_3 + 3\lambda_2^2) a^5, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 3\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + \lambda_2 \lambda_1^3 a^5 = \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 \neq 0, \end{aligned}$$

do que segue que $\lambda_1 \neq 0$. Dado que,

$$\begin{aligned}
 a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_2 \beta a^2 b + \\
 &\quad \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_4 \beta_1 a^5 \\
 &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda \beta \theta_1 + \lambda \beta_2 \theta_2 \\
 &\quad + \lambda_1 \beta_4 + \lambda_2 \beta \theta_2 + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1 + \lambda_2 \beta_3) a^5 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

temos que $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$. Igualmente $\beta_2 = \beta_3 = 0$ e portanto $\beta_4 = -\frac{\lambda \beta \theta_1 + \lambda_2 \beta \theta_2}{\lambda_1}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta(\lambda \theta_1 + \lambda_2 \theta_2)}{\lambda_1} a^4 + \beta_5 a^5, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \theta_1 a^5 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} \theta_1 a_1^5 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \beta \lambda_1^2 a^2 b = \beta \lambda_1^2 \theta_2 a^5 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} \theta_2 a_1^5.$$

□

Se $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 1$, no lema anterior, temos a álgebra $\mathcal{B}_7$, portanto se (a_1, b_1) é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_7)$, então

$$b_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5, \quad \text{com } \lambda_1, \beta \neq 0,$$

com o qual fica claro que

$$\mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_6 \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_8.$$

Quando $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}_8$, logo para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_8)$, segue que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} a_1^5 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0, \quad \text{com } \lambda_1, \beta \neq 0,$$

portanto

$$\mathcal{B}_6 \not\cong \mathcal{B}_8.$$

Assim

$$\mathcal{B}_6 \not\cong \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_j \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_8 \not\cong \mathcal{B}_k, \quad \text{para } i \neq 6, j \neq 7 \text{ e } k \neq 8.$$

Para concluir o análise das condições de isomorfismo das álgebras da lista anterior, resta estudar as álgebras do conjunto $C1$. Faremos isto a continuação.

Lema 4.21 *Seja α diferente de -3 em F^* . Então*

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_2(\alpha).$$

Prova: Seja α diferente de 0 e -3 , (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$ e os produtos respeito a base determinada por (a, b) dados por $b^2 = \alpha a^4$, $a^2 b = a^4$ e $a^3 b = -a^5$. Definimos os seguinte elementos

$$a_1 := \frac{7}{4\alpha(3+\alpha)}b + a - \frac{1}{4(3+\alpha)}a^2 \quad \text{e} \quad b_1 := b - \frac{3}{2\alpha(3+\alpha)}a^3 - \frac{3(7+\alpha)}{8\alpha(3+\alpha)}a^4.$$

Então

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= -\frac{7}{4\alpha(3+\alpha)}b^2 - \frac{1}{4(3+\alpha)}ba^2 - \frac{21}{8\alpha(3+\alpha)^2}ba^3 - \frac{3}{2(3+\alpha)}a^4 \\ &\quad + \frac{3}{8(3+\alpha)^2}a^5 - \frac{3(7+\alpha)}{8\alpha(3+\alpha)^2}a^5 \\ &= \frac{1}{2(3+\alpha)} \left[\frac{7}{2} - \frac{1}{2} - 3 \right] a^4 + \frac{1}{8\alpha(3+\alpha)} [21 + 3\alpha - 21 - 3\alpha] a^5 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{49}{16\alpha^2(3+\alpha)^2}b^2 - \frac{7}{8\alpha(3+\alpha)^2}ba^2 + a^2 - \frac{1}{2(3+\alpha)}a^3 + \frac{1}{16(3+\alpha)^2}a^4 \\ &= a^2 - \frac{1}{2(3+\alpha)}a^3 + \frac{33+\alpha}{16\alpha(3+\alpha)^2}a^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1^3 &= \frac{7}{4\alpha(3+\alpha)}a^2b - \frac{7}{8\alpha(3+\alpha)^2}ba^3 + a^3 - \frac{1}{2(3+\alpha)}a^4 + \frac{35+\alpha}{16\alpha(3+\alpha)^2}a^5 \\
&\quad - \frac{1}{4(3+\alpha)}a^4 + \frac{1}{8(3+\alpha)^2}a^5, \\
&= a^3 + \frac{7-3\alpha}{4\alpha(3+\alpha)}a^4 + \frac{49+3\alpha}{16\alpha(3+\alpha)^2}a^5, \\
a_1^4 &= \frac{7}{4\alpha(3+\alpha)}a^3b + a^4 - \frac{1}{4(3+\alpha)}a^5 + \frac{7-3\alpha}{4\alpha(3+\alpha)}a^5 \\
&= a^4 - \frac{1}{(3+\alpha)}a^5, \\
a_1^5 &= a^5.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $a_1b_1 = 0$ e a_1 tem nilíndice máximo, e sendo claro que b_1 não pertence a A_{a_1} segue que (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_5)$.

Agora

$$\begin{aligned}
b_1^2 &= b^2 - \frac{3}{(3+\alpha)}a^3b = \alpha a^4 + \frac{3}{(3+\alpha)}a^5 = \alpha \left[a_1^4 + \frac{1}{(3+\alpha)}a_1^5 \right] + \frac{3}{(3+\alpha)}a_1^5 \\
&= \alpha a_1^4 + a_1^5
\end{aligned}$$

e

$$a_1^2b_1 = a^4 - \frac{1}{(3+\alpha)}a^5 = \left[a_1^4 + \frac{1}{(3+\alpha)}a_1^5 \right] - \frac{1}{(3+\alpha)}a_1^5 = a_1^4,$$

o que mostra o isomorfismo. $\square$

Assim neste caso resta ver como são as álgebras $\mathcal{B}_2(\alpha)$ e $\mathcal{B}_3(\alpha)$, para α igual a 0 e -3 . Denotaremos estas álgebras assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3(0) : & \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5; \\
\mathcal{B}_3(-3) : & \quad b^2 = -3a^4, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5; \\
\mathcal{B}_2(-3) : & \quad b^2 = -3a^4 + a^5, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5; \\
\mathcal{B}_2(0) : & \quad b^2 = a^5, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5.
\end{aligned}$$

Demonstraremos que estas álgebras não são isomorfas, da mesma maneira que fizemos para as álgebras do conjunto $C3$.

Lema 4.22 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6, com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ tal que $b^2 = \theta_1 a^4 + \theta_2 a^5$, $a^2 b = a^4$ e $a^3 b = -a^5$ e os outros produtos não triviais são zero. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, existem $\lambda_1, \beta \in F^*$ e $\lambda_2, \lambda \in F$, tais que*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \theta_1 a_1^4 + \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} (-4\lambda_2 \theta_1 + \theta_2 \lambda_1 + 2\lambda \theta_1 + 2\lambda_2) a_1^5$$

e

$$a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^2} a_1^4 + \frac{\beta}{\lambda_1^4} (7\lambda_2 + \lambda \theta_1) a_1^5.$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ como no enunciado do lema e $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então a_1 e b_1 exprimem-se de maneira única na forma, $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5$. Antes de calcular os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$, vejamos como são as potências de a_1 .

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda_2 \lambda a^2 b + 2\lambda_3 \lambda a^3 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + 2\lambda_1 \lambda_3 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_4 a^5 \\ &\quad + \lambda_2^2 a^4 + 2\lambda_2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (\lambda^2 \theta_1 + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (\lambda^2 \theta_2 - 2\lambda \lambda_3 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5, \\ a_1^3 &= \lambda_1^2 \lambda a^2 b + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda a^3 b + \lambda_1^3 a^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_1 (\lambda^2 \theta_1 + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3 \\ &\quad + \lambda_2^2) a^5 + \lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 a^5 + \lambda_1^2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^3 a^3 + (\lambda \lambda_1^2 + 3\lambda_1^2 \lambda_2) a^4 + \lambda_1 (\lambda^2 \theta_1 + 3\lambda_1 \lambda_3 + 3\lambda_2^2) a^5, \\ a_1^4 &= \lambda \lambda_1^3 a^3 b + \lambda_1^4 a^4 + (\lambda \lambda_1^3 + 3\lambda_1^3 \lambda_2) a^5 + \lambda_1^3 \lambda_2 a^5 = \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq 0$, pois a_1 tem nilíndice máximo, temos que

$$a^5 = \frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 \quad \text{e} \quad a^4 = \frac{1}{\lambda_1^4} a_1^4 - 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^6} a_1^5.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda \beta_3 a^3 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 \\
 &\quad + \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_3 \beta a^3 b + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \\
 &\quad \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_4 \beta_1 a^5 \\
 &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta \theta_1 + \lambda \beta_2 + \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta + \lambda_2 \beta_2 \\
 &\quad + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda \beta \theta_1 - \lambda \beta_3 + \lambda_1 \beta_4 + \lambda_2 \beta_3 - \lambda_3 \beta + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1) a^5 \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$. Igualmente $\beta_2 = 0$, e portanto $\beta_3 = -\frac{\lambda \beta \theta_1 + \lambda_2 \beta}{\lambda_1}$ e

$$\beta_4 = -\frac{\beta(\lambda \lambda_1 \theta_2 + \lambda^2 \theta_1 + \lambda \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda \theta_1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2}.$$

Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta(\lambda \theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} a^3 - \frac{\beta(\lambda \lambda_1 \theta_2 + \lambda^2 \theta_1 + \lambda \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda \theta_1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2} a^4 + \beta_5 a^5,$$

com $\beta \neq 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
 b_1^2 &= \beta^2 b^2 - \frac{2\beta^2(\lambda \alpha + \lambda_2)}{\lambda_1} a^3 b = \beta^2 \alpha a^4 + \beta^2 \theta_2 a^5 + \frac{2\beta^2(\lambda \theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} a^5 \\
 &= \beta^2 \theta_1 a^4 + \frac{\beta^2(\theta_2 \lambda_1 + 2\lambda \theta_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1} a^5 \\
 &= \beta^2 \theta_1 \left[\frac{1}{\lambda_1^4} a_1^4 - 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^6} a_1^5 \right] + \frac{\beta^2(\theta_2 \lambda_1 + 2\lambda \theta_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1} \left[\frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 \right] \\
 &= \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \theta_1 a_1^4 + \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} (-4\lambda_2 \theta_1 + \theta_2 \lambda_1 + 2\lambda \theta_1 + 2\lambda_2) a_1^5,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_1^2 b_1 &= \beta \lambda_1^2 a^2 b - \frac{\lambda_1^2 \beta(\lambda \theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} a^5 + 2\lambda_1 \lambda_2 \beta a^3 b = \beta \lambda_1^2 a^4 - \beta \lambda_1(\lambda \theta_1 + 3\lambda_2) a^5 \\
 &= \beta \lambda_1^2 \left[\frac{1}{\lambda_1^4} a_1^4 - 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^6} a_1^5 \right] - \beta \lambda_1(\lambda \theta_1 + 3\lambda_2) \left[\frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 \right] \\
 &= \frac{\beta}{\lambda_1^2} a_1^4 + \frac{\beta}{\lambda_1^4} (7\lambda_2 + \lambda \theta_1) a_1^5,
 \end{aligned}$$

o que demonstra o lema. $\square$

Para $\mathcal{B}_3(0)$, temos que $\theta_1 = \theta_2 = 0$ no lema anterior, portanto para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_3(0))$,

$$b_1^2 = \frac{2\beta^2\lambda_2}{\lambda_1^6}a_1^5 \quad \text{e} \quad a_1^2b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^2}a_1^4 - \frac{7\beta\lambda_2}{\lambda_1^4}a_1^5 \quad \text{com} \quad \lambda_1, \beta \in F^* \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in F.$$

Do anterior é claro que $\mathcal{B}_3(0)$ não pode ser isomorfa a nenhuma das outras álgebras da ultima lista, pois se fosse isomorfa a qualquer um delas então $-\frac{7\beta\lambda_2}{\lambda_1^4} = 0$, e como λ_1 e β são não nulos, $\lambda_2 = 0$ e portanto $b_1^2 = 0$.

Para $\mathcal{B}_3(-3)$ temos que temos que $\theta_1 = -3$ e $\theta_2 = 0$, logo se (a_1, b_1) pertence a $\mathcal{P}(\mathcal{B}_3(-3))$, então

$$b_1^2 = \frac{-3\beta^2}{\lambda_1^4}a_1^4 + \frac{2\beta^2(7\lambda_2 - 3\lambda)}{\lambda_1^6}a_1^5 \quad \text{e} \quad a_1^2b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^2}a_1^4 + \frac{\beta(7\lambda_2 - 3\lambda)}{\lambda_1^4}a_1^5,$$

com $\lambda_1, \beta \in F^*$ e $\lambda_2, \lambda \in F$. Portanto para $\mathcal{B}_3(-3)$ ser isomorfa a alguma das outras duas álgebras teria que se cumprir que $-\frac{\beta(7\lambda_2 - 3\lambda)}{\lambda_1^4} = 0$, logo $7\lambda_2 = 3\lambda$ e assim $b_1^2 = \frac{-3\beta^2}{\lambda_1^4}a_1^4$, isto é, o escalar correspondente a a_1^5 é zero.

Por ultimo, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 1$, para $\mathcal{B}_2(0)$. Logo para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2(0))$, segue que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1^6}a_1^5,$$

isto é, o escalar correspondente a a_1^4 é zero o que mostra que $\mathcal{B}_2(0)$ não pode ser isomorfa a $\mathcal{B}_2(-3)$. Do analise anterior concluímos que

$$\mathcal{B}_3(0) \not\cong \mathcal{B}_3(-3) \not\cong \mathcal{B}_2(-3) \not\cong \mathcal{B}_2(0).$$

Do lema anterior desprende-se também o seguinte corolário.

Corolário 4.23 *Seja α diferente de -3 e de 0 e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha'),$$

se, e somente se, $\alpha' = \alpha$.

Prova: Seja α diferente de -3 em F^* e os produtos respeito a base determinada pelo par $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$, dados por $b^2 = \alpha a^4$, $a^2 b = a^4$ e $a^3 b = -a^5$. Se (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$, então pelo lema anterior

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4 + \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} (-4\lambda_2 \alpha + 2\lambda \alpha + 2\lambda_2) a_1^5$$

e

$$a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^2} a_1^4 + \frac{\beta}{\lambda_1^4} (7\lambda_2 + \lambda \alpha) a_1^5, \quad \text{com, } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

Logo para α' em F , $\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha')$ se, e somente se,

$$\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha, \quad \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} (-4\lambda_2 \alpha + 2\lambda \alpha + 2\lambda_2) = 0, \quad \frac{\beta}{\lambda_1^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\lambda_1^4} (7\lambda_2 + \lambda \alpha) = 0,$$

portanto $\beta = \lambda_1^2$ e assim $\alpha' = \alpha$. $\square$

Com isto concluímos o estudo das condições de isomorfismo das álgebras da lista inicial. Resta então analisar como são as classes dadas por $\mathcal{B}_1(\alpha, \theta, \gamma)$ e $\mathcal{B}_5(\alpha)$.

Lema 4.24 *Sejam α e α' em F^* . Então*

$$\mathcal{B}_5(\alpha) \cong \mathcal{B}_5(\alpha'),$$

se, e somente se, existir um ρ em F^ tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.*

Prova: Sejam α em F e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_5(\alpha))$ tal que $b^2 = \alpha a^4$ e os outros produtos não triviais são zero. Se (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_5(\alpha))$, então $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5$, e uma vez que a_1 tem nilíndice máximo, temos que

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + 2\lambda_1 \lambda_3 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_4 a^5 + \lambda_2^2 a^4 + 2\lambda_2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda^2 \alpha) a^4 + (2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5, \\ a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_1 (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda^2 \alpha) a^5 + \lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 a^5 + \lambda_1^2 \lambda_3 a^5 \\ &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \lambda_1 (3\lambda_1 \lambda_3 + 3\lambda_2^2 + \lambda^2 \alpha) a^5, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 3\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + \lambda_2 \lambda_1^3 a^5 = \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 \neq 0, \end{aligned}$$

portanto $\lambda_1 \neq 0$. É fácil ver que $a^5 = \frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5$ e $a^4 = \frac{1}{\lambda_1^4} a_1^4 - 4 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^6} a_1^5$. Agora,

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \\ &\quad \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_4 \beta_1 a^5 \\ &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta \alpha + \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda_1 \beta_4 + \\ &\quad \lambda_2 \beta_3 + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1) a^5 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$, igualmente $\beta_2 = 0$ e portanto $\beta_3 = \frac{-\lambda \beta \alpha}{\lambda_1}$ e $\beta_4 = \frac{\lambda_2 \lambda \beta \alpha}{\lambda_1^2}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta \lambda \alpha}{\lambda_1} a^3 + \frac{\lambda_2 \lambda \beta \alpha}{\lambda_1^2} a^4 + \beta_5 a^5, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \alpha a^4 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha a_1^4 - 4 \frac{\beta^2 \lambda_2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^5$$

e

$$a_1^2 b_1 = \lambda_1^2 a^2 b = -\frac{\beta \lambda \lambda_1^2}{\lambda_1} \alpha a^5 = -\beta \lambda \lambda_1 \alpha \frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 = -\frac{\beta \lambda}{\lambda_1^4} \alpha a_1^5.$$

Portanto dado um α' em F^* , temos que $\mathcal{B}_5(\alpha) \cong \mathcal{B}_5(\alpha')$, se e somente se,

$$\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^4} \alpha, \quad -\frac{4\beta^2 \lambda_2}{\lambda_1^6} \alpha = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\beta \lambda}{\lambda_1^4} \alpha = 0.$$

Como β, λ_1 e α são não nulos temos que $\lambda = \lambda_2 = 0$ e assim $\alpha' = \rho^2 \alpha$, com ρ em F^* . $\square$

Lema 4.25 Para todo α, θ e γ em F ,

$$\mathcal{B}_1(\alpha, \theta, \gamma) \cong \mathcal{B}_1(\alpha', \theta', \gamma'),$$

se, e somente se, existir $\rho_1, \rho_2 \in F^*$, tal que

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\rho_1^2}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\rho_2^3} \quad \text{e} \quad \gamma' = \frac{1}{\rho_2^2} \left(\gamma + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \alpha' \right).$$

Prova: Sejam α, θ, γ em F , $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_1(\alpha, \theta, \gamma)$ e $(a, b) \in \mathcal{P}(B)$, tal que $b^2 = -a^2 + \alpha a_4 + \theta a^5$, $a^2 b = a^3 + \gamma a^5$, $a^3 b = -a^4$ e $a^4 b = a^5$. Todo par $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, exprime-se de maneira única como $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5$. Calculando as potências de a_1 , obtemos que

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda\lambda_2 a^2 b + 2\lambda\lambda_3 a^3 b + 2\lambda\lambda_4 a^4 b + \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + 2\lambda_1\lambda_3 a^4 + \\
&\quad 2\lambda_1\lambda_4 a^5 + \lambda_2^2 a^4 + 2\lambda_2\lambda_3 a^5 \\
&= (\lambda_1^2 - \lambda^2)a^2 + 2\lambda_2(\lambda + \lambda_1)a^3 + (\lambda^2\alpha - 2\lambda\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4 + (\lambda^2\theta + \\
&\quad 2\lambda\lambda_2\gamma + 2\lambda\lambda_4 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_3)a^5, \\
a_1^3 &= \lambda(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^2 b + 2\lambda\lambda_2(\lambda + \lambda_1)a^3 b + \lambda(\lambda^2\alpha - 2\lambda\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4 b + \\
&\quad \lambda_1(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^3 + 2\lambda_1\lambda_2(\lambda + \lambda_1)a^4 + \lambda_1(\lambda^2\alpha - 2\lambda\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^5 + \\
&\quad \lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^4 + 2\lambda_2\lambda_2(\lambda + \lambda_1)a^5 + \lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda^2)a^5 \\
&= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda^2)a^3 + 3\lambda_2(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda)a^4 + (\lambda_1 + \lambda)(\lambda^2\alpha - \lambda_2\gamma - \\
&\quad 3\lambda\lambda_3 + \lambda\lambda_1\gamma + 3\lambda_2^2 + 3\lambda_1\lambda_3)a^5, \\
a_1^4 &= \lambda(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda^2)a^3 b + 3\lambda\lambda_2(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda)a^4 b + \lambda_1(\lambda_1 - \lambda) \\
&\quad (\lambda_1 + \lambda^2)a^4 + 3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda)a^5 + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + \lambda^2)a^5 \\
&= (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1)^2 a^4 - 4\lambda_2(\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_1)^2 a^5, \\
a_1^5 &= \lambda(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1)^2 a^4 b + \lambda_1(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1)^2 a^5 \\
&= (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda + \lambda_1)^3 a^5,
\end{aligned}$$

e uma vez que a_1 tem nilíndice máximo, segue que $\lambda \pm \lambda_1 \neq 0$, portanto $\lambda \neq \pm \lambda_1$. Temos que

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \lambda\beta b^2 + \lambda\beta_2 a^2 b + \lambda\beta_3 a^3 b + \lambda\beta_4 a^4 b + \lambda_1\beta_1 a^2 + \lambda_1\beta_2 a^3 + \lambda_1\beta_3 a^4 \\
&\quad + \lambda_1\beta_4 a^5 + \lambda_2\beta a^2 b + \lambda_2\beta_1 a^3 + \lambda_2\beta_2 a^4 + \lambda_2\beta_3 a^5 + \lambda_3\beta a^3 b + \lambda_3\beta_1 a^4 \\
&\quad + \lambda_3\beta_2 a^5 + \lambda_4\beta a^4 b + \lambda_4\beta_1 a^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-\lambda\beta + \lambda_1\beta_1)a^2 + (\lambda\beta_2 + \lambda_1\beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\lambda\beta\alpha - \lambda\beta_3 \\
&\quad + \lambda_1\beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 + (\lambda\beta\theta + \lambda\beta_2\gamma + \lambda_1\beta_4 + \lambda_2\beta\gamma \\
&\quad + \lambda_3\beta_2 + \lambda_4\beta + \lambda_4\beta_1 + \lambda\beta_4 + \lambda_2\beta_3)a^5 = 0. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- $(\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda \neq \pm 1.)$ Então

$$\begin{aligned}
a_1b_1 &= (-\lambda\beta + \beta_1)a^2 + (\lambda\beta_2 + \beta_2 + \lambda_2\beta + \lambda_2\beta_1)a^3 + (\lambda\beta\alpha - \lambda\beta_3 \\
&\quad + \beta_3 + \lambda_2\beta_2 - \lambda_3\beta + \lambda_3\beta_1)a^4 + (\lambda\beta\theta + \lambda\beta_2\gamma + \beta_4 + \lambda_2\beta\gamma \\
&\quad + \lambda_3\beta_2 + \lambda_4\beta + \lambda_4\beta_1 + \lambda\beta_4 + \lambda_2\beta_3)a^5 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\beta_1 = \lambda\beta$,

$$\beta_2 = -\frac{\beta\lambda_2 + \lambda_2\lambda\beta}{(\lambda + 1)} = -\beta\lambda_2,$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= -\frac{\beta\lambda\alpha - \lambda_2^2\beta - \lambda_3\beta + \lambda_3\lambda\beta}{(1 - \lambda)} \\
&= \frac{\beta(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{(\lambda - 1)},
\end{aligned}$$

e

$$\beta_4 = -\frac{\beta(\lambda^2\theta - \lambda^2\lambda_2\gamma + 2\lambda\lambda_2\gamma + \lambda^2\lambda_4 + \lambda_2\lambda\alpha - \lambda_2^3 - \lambda\theta - \lambda_2\gamma - \lambda_4)}{(\lambda^2 - 1)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
b_1 &= \beta b + \lambda\beta a - \beta\lambda_2a^2 + \frac{\beta(\lambda\alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3\lambda)}{(\lambda - 1)}a^3 \\
&\quad - \frac{\beta(\lambda^2\theta - \lambda^2\lambda_2\gamma + 2\lambda\lambda_2\gamma + \lambda^2\lambda_4 + \lambda_2\lambda\alpha - \lambda_2^3 - \lambda\theta - \lambda_2\gamma - \lambda_4)}{(\lambda^2 - 1)}a^4 \\
&\quad + \beta_5a^5,
\end{aligned}$$

com $\beta \neq 0$ e supondo $\beta = 1$, temos que

$$\begin{aligned} b_1 = & b + \lambda a - \lambda_2 a^2 + \frac{(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} a^3 \\ & - \frac{\lambda^2 \theta - \lambda^2 \lambda_2 \gamma + 2\lambda \lambda_2 \gamma + \lambda^2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda \alpha - \lambda_2^3 - \lambda \theta - \lambda_2 \gamma - \lambda_4}{(\lambda^2 - 1)} a^4 \\ & + \beta_5 a^5. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} b_1^2 = & b^2 - 2\lambda_2 a^2 b + \frac{2(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} a^3 b + \\ & \frac{2\lambda^2 \theta - \lambda^2 \lambda_2 \gamma + 2\lambda \lambda_2 \gamma + \lambda^2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda \alpha - \lambda_2^3 - \lambda \theta - \lambda_2 \gamma - \lambda_4}{(\lambda^2 - 1)} a^4 b \\ & + \lambda^2 a^2 - 2\lambda \lambda_2 a^3 + \frac{2\lambda(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} a^4 + \\ & \frac{2\lambda(\lambda^2 \theta - \lambda^2 \lambda_2 \gamma + 2\lambda \lambda_2 \gamma + \lambda^2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda \alpha - \lambda_2^3 - \lambda \theta - \lambda_2 \gamma - \lambda_4)}{(\lambda^2 - 1)} a^5 \\ & + \lambda_2^2 a^4 - \frac{2\lambda_2(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} a^5 \\ = & (\lambda^2 - 1)a^2 - 2\lambda_2(\lambda + 1)a^3 + \left[\frac{-2(\lambda + 1)(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} \right. \\ & \left. + \alpha + \lambda_2^2 \right] a^4 + \left[\theta - 2\lambda_2 \gamma + \frac{2\lambda_2(\lambda \alpha - \lambda_2^2 - \lambda_3 + \lambda_3 \lambda)}{(\lambda - 1)} + \right. \\ & \left. \frac{2(\lambda - 1)(\lambda^2 \theta - \lambda^2 \lambda_2 \gamma + 2\lambda \lambda_2 \gamma + \lambda^2 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda \alpha - \lambda_2^3 - \lambda \theta - \lambda_2 \gamma - \lambda_4)}{(\lambda^2 - 1)} \right] a^5 \\ = & (\lambda^2 - 1)a^2 - 2\beta^2 \lambda_2(1 + \lambda)a^3 - (-2\lambda \alpha - 2\lambda \lambda_3 - \alpha + 2\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4 \\ & + (-\lambda^2 \theta - 2\lambda_4 \lambda^2 + 2\lambda^2 \lambda_2 \gamma - 4\lambda_2 \lambda \alpha + 3\lambda \theta - 6\lambda \lambda_2 \gamma + 4\lambda_2^3 - \theta + 4\lambda_2 \gamma \\ & + 2\lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda \lambda_2 \lambda_3)a^5 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1^2 b_1 &= (1 - \lambda^2)a^2 b + [\lambda^2 + 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^3 b + \lambda(1 - \lambda^2)a^3 + \lambda[\lambda^2 + \\
&\quad 2\lambda_2(\lambda + 1)]a^4 - \frac{\beta(\lambda + \lambda_2 + \lambda_2\lambda)(1 - \lambda^2)}{(\lambda + 1)}a^4 \\
&= (1 + \lambda)(1 - \lambda^2)a^3 + [(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda_2\lambda + 2\lambda_2) - (1 - \lambda)(\lambda + \\
&\quad \lambda_2 + \lambda_2\lambda)]a^4 \\
&= -(1 - \lambda)(1 + \lambda)^2 a^3 + 3\lambda_2(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)^2 a^4 + \\
&\quad (\lambda - 1)(\lambda\alpha - \theta - 3\lambda_3)a^5.
\end{aligned}$$

Seja M a matriz cujas colunas são as coordenadas de $a_1^2, a_1^3, a_1^4, a_1^5, b_1^2$ e $a_1^2 b_1$ em termos das potências a^2, a^3, a^4, a^5 . Fazendo uma redução por linhas de M chegamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha}{(\lambda-1)^2} & \frac{6\lambda_2}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\mu_1}{(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2} & \frac{\mu_2}{(\lambda^2-1)^2} \end{bmatrix},$$

com $\mu_1 = -3\lambda^2\theta + 4\lambda^2\lambda_2\gamma + 4\lambda_2\lambda\alpha + 3\lambda\theta - 8\lambda\lambda_2\gamma + 4\lambda_2^3 - \theta + 4\lambda_2\gamma + \lambda^3\theta + 4\lambda_2\alpha + 4\lambda_2\alpha\lambda^2$ e $\mu_2 = \lambda^2\gamma - 2\lambda\gamma - \lambda\alpha + \gamma + 21\lambda_2^2$.

Portanto utilizando o Lema 4.17, temos que para α', θ' e γ' em F , os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$, são da forma $-a_1^2 + \alpha'a^4 + \theta'a^5$ e $a_1^3 + \gamma'a_1^5$, respectivamente se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y^4} \frac{\alpha}{(\lambda - 1)^2} &= \alpha', \quad \frac{x^2}{y^5} \frac{\mu_1}{(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2} = \theta', \\
\frac{x}{y} &= 1, \quad \frac{x}{y^2} \frac{6\lambda_2}{(\lambda^2 - 1)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x}{y^3} \frac{\mu_2}{(\lambda^2 - 1)^2} = \gamma',
\end{aligned}$$

para x, y não nulos. Logo $x = y$, $\lambda_2 = 0$ e assim $\mu_1 = -3\lambda^2\theta + 3\lambda\theta - \theta + \lambda^3\theta$ e $\mu_2 = \lambda^2\gamma - 2\lambda\gamma - \lambda\alpha + \gamma$, de onde

$$\alpha' = \frac{\alpha}{y^2(\lambda - 1)^2}, \quad \theta' = \frac{(-3\lambda^2 + 3\lambda - 1 + \lambda^3)\theta}{y^3(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2} = \frac{\theta}{y^3(\lambda + 1)^3},$$

e

$$\begin{aligned}\gamma' &= \frac{(\lambda^2 - 2\lambda + 1)\gamma - \lambda\alpha}{y^2(\lambda^2 - 1)^2} = \frac{1}{y^2(\lambda + 1)^2} \left(\gamma - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda - 1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{y^2(\lambda + 1)^2} (\gamma - \lambda\alpha').\end{aligned}$$

Lembrando que $y \neq 0$ e $\lambda \neq \pm 1$, podemos definir $\rho_1, \rho_2 \neq 0$, assim $\rho_1 = y(\lambda - 1)$ e $\rho_2 = y(\lambda + 1)$. Portanto

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\rho_1^2}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\rho_2^3}, \quad \gamma' = \frac{1}{\rho_2^2} \left(\gamma + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \alpha' \right).$$

- ($\lambda = 1$ e $\lambda_1 = 0$.) Então

$$\begin{aligned}a_1 b_1 &= -\beta a^2 + (\beta_2 + \lambda_2 \beta + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\beta \alpha - \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 - \lambda_3 \beta + \\ &\quad \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\beta \theta + \beta_2 \gamma + \lambda_2 \beta \gamma + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta + \lambda_4 \beta_1 + \beta_4 + \\ &\quad \lambda_2 \beta_3) a^5 \\ &= 0.\end{aligned}$$

logo $\beta = 0$, $\beta_2 = -\beta_1 \lambda_2$, $\beta_3 = -\beta_1 (\lambda_3 - \lambda_2^2)$ e $\beta_4 = -\beta_1 (-\lambda_2 \gamma + \lambda_4 - \lambda_2^2)$, portanto

$$b_1 = \beta_1 a - \beta_1 \lambda_2 a^2 - \beta_1 (\lambda_3 - \lambda_2^2) a^3 - \beta_1 (-\lambda_2 \gamma + \lambda_4 - \lambda_2^2) a^4 + \beta_5 a^5,$$

com $\beta_1 \neq 0$, e supondo $\beta = 1$, temos que

$$b_1 = a - \lambda_2 a^2 - (\lambda_3 - \lambda_2^2) a^3 - (-\lambda_2 \gamma + \lambda_4 - \lambda_2^2) a^4 + \beta_5 a^5.$$

Portanto

$$b_1^2 = a^2 - 2\lambda_2 a^3 + (2\lambda_3 - \lambda_2^2) a^4 + 2(\lambda_2 \gamma - \lambda_4 + 2\lambda_2^3 - \lambda_2 \lambda_3) a^5,$$

e

$$a_1^2 b_1 = -a^3 + 3\lambda_2 a^4 + (\alpha - 3\lambda_3) a^5,$$

e temos a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda_2 & -1 & 0 & 0 & -2\lambda_2 & -1 \\ \alpha - \mu_1 & -3\lambda_2 & 1 & 0 & \mu_2 & 3\lambda_2 \\ \theta + \mu_3 & \alpha - \gamma - \mu_4 & -4\lambda_2 & 1 & 2\mu_5 & (\alpha - 3\lambda_3) \end{bmatrix},$$

com $\mu_1 = 2\lambda_3 + \lambda_2^2$, $\mu_2 = (2\lambda_3 - \lambda_2^2)$, $\mu_3 = 2\lambda_2(\gamma + \lambda_3) + 2\lambda_4$, $\mu_4 = 3(\lambda_3 + \lambda_2^2)$ e $\mu_5 = \lambda_2\gamma - \lambda_4 + 2\lambda_2^3 - \lambda_2\lambda_3$. Reduzindo por linhas a matriz anterior obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\alpha & 6\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda_2^3 + 4\lambda_2\gamma + \theta + 4\lambda_2\alpha & \gamma + 21\lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto os produtos b_1^2 e $a_1^2b_1$, são da forma $-a_1^2 + \alpha'a^4 + \theta'a^5$ e $a_1^3 + \gamma'a^5$, para α' , θ' e γ' em F , se e somente se,

$$\alpha = \alpha', \quad 4\lambda_2^3 + 4\lambda_2\gamma + \theta + 4\lambda_2\alpha = \theta', \quad 6\lambda_2 = 0 \quad \text{e} \quad \gamma + 21\lambda_2 = \gamma',$$

logo $\lambda_2 = 0$, e assim $\alpha' = \alpha$, $\theta' = \theta$ e $\gamma' = \gamma$. Isto demonstra o lema.

□

Teorema 4.26 *Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 6, é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\mathcal{A}_1(\alpha, \theta, \gamma) : \quad b^2 = -a^2 + \alpha a^4 + \theta a^5, \quad a^2b = a^3 + \gamma a^5, \quad a^3b = -a^4, \quad a^4b = a^5;$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad [\rho^2];$$

$$\mathcal{A}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^4, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5, \quad [1];$$

$$\mathcal{A}_4 : \quad b^2 = -3a^4, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{A}_5 : \quad b^2 = -3a^4 + a^5, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{A}_6 : \quad b^2 = a^5;$$

$$\mathcal{A}_7 : \quad b^2 = a^5, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{A}_8 : \quad b^2 = a^5, \quad a^2b = a^5;$$

$$\mathcal{A}_9 : \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5;$$

$$\mathcal{A}_{10} : \quad a^2b = a^5;$$

sendo que $\mathcal{A}_1(\alpha, \theta, \gamma) \cong \mathcal{A}_1(\alpha', \theta', \gamma')$ se, e somente se, existirem $\rho_1, \rho_2 \in F^*$ tal que

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\rho_1^2}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\rho_2^3} \quad e \quad \gamma' = \frac{1}{\rho_2^2} \left(\gamma + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \alpha' \right).$$

Além disso, temos que para $\mathcal{A}_3(\alpha)$, α é diferente de zero e menos três.

Observamos que a matriz da direita dá a condição suficiente e necessária par que duas álgebras desta classe sejam isomorfas, no caso da matriz [1], temos que $\mathcal{A}_3(\alpha) \cong \mathcal{A}_3(\alpha')$ se, e somente se, $\alpha = \alpha'$.

4.4 Classificação para dimensão sete.

Nesta seção classificaremos, a menos de isomorfismos, todas as nilálgebras comutativas de potências associativas de dimensão e nilíndice 7. O método utilizado será basicamente o mesmo utilizado para dimensão cinco. Utilizaremos também alguns resultados da seção anterior.

Teorema 4.27 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 7 e (a, b) um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então os produtos não triviais,*

para a base determinada pelo par (a, b) , são dados por:

$$\begin{aligned} b^2 &= \gamma_4^2 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^6, \\ a^2 b &= \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6, \\ a^3 b &= -\gamma_4 a^5 - \gamma_5 a^6, \\ a^4 b &= \gamma_4 a^6. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa com base $\{b, a, a^2, \dots, a^6\}$, e produtos $ab = a^k = ab = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para $k \geq 7$ e $i, j \geq 1$ e (4.8), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e de nilíndice 7.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 7 e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então, $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/A_a^6 = \langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4, \bar{a}^5 \rangle$ e pelo Teorema 4.16 temos que $\bar{b}^2 = -\gamma_3^2 \bar{a}^2 + \alpha_4 \bar{a}^4 + \alpha_5 \bar{a}^5$ e $\bar{a}^2 \bar{b} = \gamma_3 \bar{a}^3 + \gamma_4 \bar{a}^4 + \gamma_5 \bar{a}^5$, logo

$$b^2 = -\gamma_3^2 a^2 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^6 \quad \text{e} \quad a^2 b = \gamma_3 a^3 + \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6$$

e utilizando (4.2), (4.3) e (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned} a^3 b &= -\gamma_3 a^4 - \gamma_4 a^5 - \gamma_5 a^6, \\ a^4 b &= \frac{1}{3}[3(\gamma_3 a^5 + \gamma_4 a^6) - 2(-\gamma_3 a^5 - \gamma_4 a^6) - 2(\gamma_3 a^5 + \gamma_4 a^6)] = \gamma_3 a^5 + \gamma_4 a^6, \\ a^5 b &= \frac{1}{3}[4(-\gamma_3 a^6) - (\gamma_3 a^6) - 2(\gamma_3 a^6) - 2(-\gamma_3 a^6)] = -\frac{5}{3}\gamma_3 a^6, \end{aligned}$$

e de (4.1),

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= \frac{1}{2}[(-\gamma_3^2 a^4 + \alpha_4 a^6) + (\gamma_3 a^3 b + \gamma_4 a^4 b + \gamma_5 a^5 b)] \\ &= \frac{1}{2}[-\gamma_3^2 a^4 + \alpha_4 a^6 - \gamma_3^2 a^4 - \gamma_3 \gamma_4 a^5 - \gamma_3 \gamma_5 a^6 + \gamma_4 \gamma_3 a^5 + \gamma_4^2 a^6 - \frac{5}{3}\gamma_3 \gamma_5 a^6] \\ &= \frac{1}{2}[-2\gamma_3^2 a^4 + (\alpha_4 + \gamma_4^2 - \frac{8}{3}\gamma_3 \gamma_5) a^6], \end{aligned}$$

mas $a^2 b^2 = -\gamma_3^2 a^4 + \alpha_4 a^6$, logo $\alpha_4 = \gamma_4^2 - \frac{8}{3}\gamma_3 \gamma_5$ e portanto

$$b^2 = -\gamma_3^2 a^2 + (\gamma_4^2 - \frac{8}{3}\gamma_3 \gamma_5) a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^6.$$

Uma vez que $\mathcal{B}$ é de p.a. temos que para qualquer elemento $x \in \mathcal{B}$, cumpre-se que $x^4 = x^2x^2$. Seja $x = b + a^2$. Então

$$\begin{aligned} x^2 &= -\gamma_3^2 a^2 + 2\gamma_3 a^3 + (\gamma_4^2 - \frac{8}{3}\gamma_3\gamma_5 + 2\gamma_4 + 1)a^4 + (2\gamma_5 + \alpha_5)a^5 + (2\gamma_6 + \alpha_6)a^6, \\ x^3 &= -\gamma_3^3 a^3 + (-\gamma_3^2\gamma_4 - 3\gamma_3^2)a^4 + (-\frac{11}{3}\gamma_3^2\gamma_5 + \gamma_3\gamma_4^2 + 3\gamma_3)a^5 + (-\gamma_3^2\gamma_6 - 8\gamma_3\gamma_5 \\ &\quad + \gamma_4^3 - \frac{8}{3}\gamma_3\gamma_4\gamma_5 + 3\gamma_4^2 + 3\gamma_4 - \frac{5}{3}\gamma_3\alpha_5 + 1)a^6, \\ x^4 &= \gamma_3^4 a^4 - 4\gamma_3^3 a^5 + (\frac{64}{9}\gamma_3^3\gamma_5 - \frac{8}{3}\gamma_3^2\gamma_4^2 - 4\gamma_3^2\gamma_4 - 8\gamma_3^2)a^6 \end{aligned}$$

e

$$x^2x^2 = \gamma_3^4 a^4 - 4\gamma_3^3 a^5 + (-2\gamma_3^2\gamma_4^2 + \frac{16}{3}\gamma_3^3\gamma_5 - 4\gamma_3^2\gamma_4 - 8\gamma_3^2)a^6,$$

logo

$$0 = x^4 - x^2x^2 = (\frac{16}{9}\gamma_3^3\gamma_5 - \frac{2}{3}\gamma_3^2\gamma_4^2 - 10\gamma_3^2)a^6,$$

e portanto

$$\frac{2}{9}\gamma_3^2(8\gamma_3\gamma_5 - 3\gamma_4^2 - 45) = 0. \quad (4.9)$$

Seja agora $y = 3b + a^2$. Então

$$\begin{aligned} y^2 &= -9\gamma_3^2 a^2 + 6\gamma_3 a^3 + (9\gamma_4^2 - 24\gamma_3\gamma_5 + 6\gamma_4 + 1)a^4 \\ &\quad + (6\gamma_5 + 9\alpha_5)a^5 + (6\gamma_6 + 9\alpha_6)a^6, \\ y^3 &= -27\gamma_3^3 a^3 + (-27\gamma_3^2\gamma_4 - 27\gamma_3^2)a^4 + (-99\gamma_3^2\gamma_5 + 27\gamma_3\gamma_4^2 + 9\gamma_3)a^5 \\ &\quad + (-27\gamma_3^2\gamma_6 - 72\gamma_3\gamma_5 + 27\gamma_4^3 - 72\gamma_3\gamma_4\gamma_5 + 27\gamma_4^2 + 9\gamma_4 - 45\gamma_3\alpha_5 + 1)a^6, \\ y^4 &= 81\gamma_3^4 a^4 - 108\gamma_3^3 a^5 + (576\gamma_3^3\gamma_5 - 216\gamma_3^2\gamma_4^2 - 108\gamma_3^2\gamma_4 - 72\gamma_3^2)a^6 \end{aligned}$$

e

$$y^2y^2 = 81\gamma_3^4 a^4 - 108\gamma_3^3 a^5 + (-162\gamma_3^2\gamma_4^2 + 432\gamma_3^3\gamma_5 - 108\gamma_3^2\gamma_4 + 18\gamma_3^2)a^6,$$

logo

$$0 = y^4 - y^2y^2 = (144\gamma_3^3\gamma_5 - 54\gamma_3^2\gamma_4^2 - 90\gamma_3^2)a^6,$$

e portanto

$$18\gamma_3^2(8\gamma_3\gamma_5 - 3\gamma_4^2 - 5) = 0. \quad (4.10)$$

Se $\gamma_3 \neq 0$, então de (4.9) temos que, $\gamma_5 = \frac{1}{8\gamma_3}(3\gamma_4^2 + 45)$, e por (4.10) temos que, $\gamma_5 = \frac{1}{8\gamma_3}(3\gamma_4^2 + 5)$, o que nos leva a um absurdo. Portanto $\gamma_3 = 0$ e assim $b^2 = \gamma_4^2 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^6$, $a^2 b = \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6$, $a^3 b = -\gamma_4 a^5 - \gamma_5 a^6$, $a^4 b = \gamma_4 a^6$ e $a^5 b = 0$.

Suponhamos agora que $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$, e produtos dados por $ab = a^k = ab = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para $k \geq 6$, $i, j \geq 1$ e (4.8). Vejamos que $\mathcal{B}$ é de p.a. e tem nilíndice 7. Para tal seja $x = \lambda b + \sum_{i=1}^6 \lambda_i a^i$. Então

$$\begin{aligned} x^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (\lambda^2 \gamma_4^2 + 2\lambda \lambda_2 \gamma_4 + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (\lambda^2 \alpha_5 + 2\lambda \lambda_2 \gamma_5 \\ &\quad - 2\lambda \lambda_3 \gamma_4 + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (\lambda^2 \alpha_6 + 2\lambda \lambda_2 \gamma_6 - 2\lambda \lambda_3 \gamma_5 + 2\lambda \lambda_4 \gamma_4 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\ x^3 &= \lambda_1^3 a^3 + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_4 + 3\lambda_1^2 \lambda_2) a^4 + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_5 + \lambda^2 \lambda_1 \gamma_4^2 + 3\lambda_3 \lambda_1^2 + 3\lambda_1 \lambda_2^2) a^5 \\ &\quad + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_6 + \lambda^3 \gamma_4^3 + 3\lambda^2 \lambda_2 \gamma_4^2 + 3\lambda \lambda_2^2 \gamma_4 + \lambda_1 \lambda^2 \alpha_5 + 3\lambda_1^2 \lambda_4 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ &\quad + \lambda_2^3) a^6, \\ x^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (2\lambda^2 \lambda_1^2 \gamma_4^2 + 4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_4 + 4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6, \\ x^5 &= \lambda_1^5 a^5 + (\lambda \lambda_1^4 \gamma_4 + 5\lambda_1^4 \lambda_2) a^6, \\ x^6 &= \lambda_1^6 a^6, \\ x^7 &= 0, \\ x^2 x^2 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (2\lambda^2 \lambda_1^2 \gamma_4^2 + 4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_4 + 4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6, \end{aligned} \quad (4.11)$$

assim $x^4 = x^2 x^2$ e podemos concluir que $\mathcal{B}$ é de p.a. e tem nilíndice 7. $\square$

Observamos que os produtos dados por (4.11), dão a expressão geral para as potências de um elemento qualquer da álgebra do lema anterior. Utilizaremos estes produtos indicando os valores dos escalares α_i e γ_i , cada vez que fomos calcular as potências de elementos desta álgebra neste tipo de base.

Denotaremos a álgebra do lema anterior por $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7)$. A matriz coordenada por linha, do operador L_b , na base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4^2 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_4 & -\gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudemos as classes de isomorfismos de todas as álgebras da forma $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$.

Lema 4.28 *Sejam λ e β em F^* . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^5}\alpha_5, \frac{\beta^2}{\lambda^6}\alpha_6, \frac{\beta}{\lambda^2}\gamma_4, \frac{\beta}{\lambda^3}\gamma_5, \frac{\beta}{\lambda^4}\gamma_6\right).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$, com base determinada pelo par (a, b) . Definimos os elementos $a_1 := \lambda a$ e $b_1 := \beta b$, para λ e β em F^* . Claramente (a_1, b_1) pertence a $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Determinemos as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação a base determinada por (a_1, b_1) . Uma vez que $a_1^4 = \lambda^4 a^4$, $a_1^5 = \lambda^5 a^5$ e $a_1^6 = \lambda^6 a^6$, segue que

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \gamma_4^2 \frac{1}{\lambda^4} a_1^4 + \beta^2 \alpha_5 \frac{1}{\lambda^5} a_1^5 + \beta^2 \alpha_6 \frac{1}{\lambda^6} a_1^6,$$

$$a_1^2 b_1 = \lambda^2 \beta a^2 b = \beta \gamma_4 \frac{1}{\lambda^2} a_1^4 + \beta \gamma_5 \frac{1}{\lambda^3} a_1^5 + \beta \gamma_6 \frac{1}{\lambda^4} a_1^6,$$

o que demonstra o lema. $\square$

Lema 4.29 *Sejam ρ_1 e ρ_2 em F . Então a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$ é isomorfa à álgebra*

$$\mathcal{B}(\alpha_5 - 2\rho_1\gamma_4^2, \alpha_6 - 2\rho_2\gamma_4^2 + 7\rho_1^2\gamma_4^2 - 5\rho_1\alpha_5, \gamma_4, \gamma_5 - 7\rho_1\gamma_4, \gamma_6 + \theta),$$

sendo que $\theta = -8\rho_1\gamma_5 - \rho_2\gamma_4 + 29\rho_1^2\gamma_4$.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$ com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$.
Sejam ρ_1 e ρ_2 em F ,

$$a_1 := a + \rho_1 a^2 + \rho_2 a^3$$

e

$$b_1 := b - \rho_1 \gamma_4 a^3 + (-\rho_1 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_4) a^4 - (\rho_1 \gamma_6 - \rho_2 \gamma_5 - \rho_1^2 \gamma_5 + \rho_1^3 \gamma_4) a^5.$$

Então

$$\begin{aligned} a_1^2 &= a^2 + 2\rho_1 a^3 + (2\rho_2 + \rho_1^2) a^4 + 2\rho_1 \rho_2 a^5 + \rho_2^2 a^6, \\ a_1^3 &= a^3 + 3\rho_1 a^4 + 3(\rho_2 + \rho_1^2) a^5 + \rho_1(6\rho_2 + \rho_1^2) a^6, \\ a_1^4 &= a^4 + 4\rho_1 a^5 + (4\rho_2 + 6\rho_1^2) a^6, \\ a_1^5 &= a^5 + 5\rho_1 a^6, \\ a_1^6 &= a^6 \neq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= -\rho_1 \gamma_4 a^4 + (-\rho_1 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_4) a^5 - (\rho_1 \gamma_6 - \rho_2 \gamma_5 - \rho_1^2 \gamma_5 + \rho_1^3 \gamma_4) a^6 \\ &\quad + \rho_1 a^2 b - \rho_1^2 \gamma_4 a^5 + \rho_1(-\rho_1 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_4) a^6 + \rho_2 a^3 b \rho_1 \rho_2 \gamma_4 a^6 \\ &= (-\rho_1 \gamma_4 + \rho_1 \gamma_4) a^4 + (-\rho_1 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_4 - \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_1 \gamma_5 - \rho_2 \gamma_4) a^5 + \\ &\quad (-\rho_1 \gamma_6 + \rho_2 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_5 - \rho_1^3 \gamma_4 + \rho_1 \gamma_6 - \rho_1^2 \gamma_5 + \rho_1^3 \gamma_4 + \rho_1 \rho_2 \gamma_4 - \rho_2 \gamma_5 \\ &\quad - \rho_1^3 \rho_2 \gamma_5) a^6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sendo que $b_1 \notin A_{a_1}$, temos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Como

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b^2 - 2\rho_1 \gamma_4 a^3 b + 2(-\rho_1 \gamma_5 + \rho_1^2 \gamma_4 + \rho_2 \gamma_4) a^4 b + \rho_1^2 \gamma_4^2 a^6 \\ &= \gamma_4^2 a^4 + (\alpha_5 + 2\rho_1 \gamma_4^2) a^5 + (\alpha_6 + 3\rho_1^2 \gamma_4^2 + 2\rho_2 \gamma_4^2) a^6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= b a^2 - \rho \gamma_3 a^4 - \rho(\gamma_4 - \rho \gamma_3) a^5 + 2\rho a^3 b - 2\rho^2 \gamma_3 a^5 + \rho^2 a^4 b \\ &= \gamma_3 a^3 + (\gamma_4 - 3\rho \gamma_3) a^4 + (\gamma_5 - 3\rho \gamma_4) a^5, \end{aligned}$$

temos a matriz,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\rho_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\rho_2 + \rho_1^2 & 3\rho_1 & 1 & 0 & 0 & \gamma_4^2 & \gamma_4 \\ 2\rho_1\rho_2 & 3(\rho_2 + \rho_1^2) & 4\rho_1 & 1 & 0 & \alpha_5 + 2\rho_1\gamma_4^2 & \gamma_5 - 3\rho_1\gamma_4 \\ \rho_2^2 & \rho_1(6\rho_2 + \rho_1^2) & 4\rho_2 + 6\rho_1^2 & 5\rho_2 & 1 & \alpha_6 + 3\gamma_4^2(\rho_1^2 + 2\rho_2) & \gamma_6 + \mu \end{bmatrix},$$

com $\mu = -3(\rho_1\gamma_5 - \rho_2\gamma_4)$, que reduzida por linhas nos leva a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma_4^2 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_5 - 2\rho_1\gamma_4^2 & \gamma_5 - 7\rho_1\gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_6 - 2\rho_2\gamma_4^2 + 7\rho_1^2\gamma_4^2 - 5\rho_1\alpha_5 & \gamma_6 - 8\rho_1\gamma_5 - \rho_2\gamma_4 + 29\rho_1^2\gamma_4 \end{bmatrix},$$

que nos dá as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação a base determinada pelo par (a_1, b_1) , demonstrando o lema. $\square$

Estudemos os casos $\gamma_4 = 1$ e $\gamma_4 = 0$ separadamente.

- Caso 1: ($\gamma_4 = 1$.) Temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, 1, \gamma_5, \gamma_6)$, que pelo Lema 4.29 é isomorfa à álgebra

$$\mathcal{B}(\alpha_5 - 2\rho_1, \alpha_6 - 2\rho_2 + 7\rho_1^2 - 5\rho_1\alpha_5, 1, \gamma_5 - 7\rho_1, \gamma_6 - 8\rho_1\gamma_5 - \rho_2 + 29\rho_1^2).$$

Se $\rho_1 = \frac{\gamma_5}{7}$ e $\rho_2 = \gamma_6 - \frac{27\gamma_5^2}{49}$, então obtemos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha'_5, \alpha'_6, 1, 0, 0)$.

Se $\alpha'_5 \neq 0$, então fazendo $\lambda = \alpha'_5$ e $\beta = \alpha'^2_5$, no Lema 4.28 obtemos

$$\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, 1, \gamma_5, \gamma_6) \cong \mathcal{B}(1, \alpha'_6, 1, 0, 0),$$

e se $\alpha'_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha'_6, 1, 0, 0)$.

- Caso 2: ($\gamma_4 = 0$.) Temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, 0, \gamma_5, \gamma_6)$, que pelo Lema 4.29, é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6 - 2\rho_1\alpha_5, 0, \gamma_5, \gamma_6 - 8\rho_1\gamma_5)$, para todo ρ_1 em F .

- Se $\gamma_5 \neq 0$, então considerando $\rho_1 = \frac{\gamma_6}{8\gamma_5}$, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha'_6, 0, \gamma_5, 0)$, que é isomorfa a álgebra $\mathcal{B}(\alpha'_5, \alpha'_6, 0, 1, 0)$, quando tomamos $\beta = \gamma_5^2$ e $\lambda = \gamma_5$, no Lema 4.28.

* Se $\alpha'_5 \neq 0$, então fazendo $\lambda = \frac{1}{\alpha'_5}$ e $\beta = \frac{1}{\alpha_5^3}$, no Lema 4.28 temos que

$$\mathcal{B}(\alpha'_5, \alpha'_6, 0, 1, 0) \cong \mathcal{B}(1, \alpha'_6, 0, 1, 0).$$

* Se $\alpha'_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha'_6, 0, 1, 0)$.

- Se $\gamma_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6 - 5\rho_1\alpha_5, 0, 0, \gamma_6)$.

* Se $\alpha_5 \neq 0$, então fazendo $\rho_1 = \frac{\alpha_6}{5\alpha_5}$, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, 0, 0, 0, \gamma_6)$, e tomando $\lambda = \alpha_5$ e $\beta = \alpha_5^2$, no Lema 4.28, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \gamma_6) \cong \mathcal{B}(1, 0, 0, 0, \gamma_6).$$

* Se $\alpha_5 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_6, 0, 0, \gamma_6)$.

· Se $\gamma_6 \neq 0$, então considerando $\lambda = \gamma_6$ e $\beta = \gamma_6^3$, no Lema 4.17,

$$\mathcal{B}(0, \alpha_6, 0, 0, \gamma_6) \cong \mathcal{B}(0, \alpha_6, 0, 0, 1).$$

· Se $\gamma_6 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_6, 0, 0, 0)$.

Podemos concluir, de todo o anterior que, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 7, então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$, com produtos não triviais não zero, dados por um da seguinte lista, com α em F .

$$\mathcal{B}_1(\alpha) : \quad b^2 = a^4 + a^5 + \alpha a^6, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5, \quad a^4b = a^6;$$

$$\mathcal{B}_2(\alpha) : \quad b^2 = a^4 + \alpha a^6, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5, \quad a^4b = a^6;$$

$$\mathcal{B}_3(\alpha) : \quad b^2 = a^5 + \alpha a^6, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6;$$

$$\mathcal{B}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6;$$

$$\mathcal{B}_5(\alpha) : \quad b^2 = a^5, \quad a^2b = \alpha a^6;$$

$$\mathcal{B}_6(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^6;$$

$$\mathcal{B}_7(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_8 :$$

Iniciemos a análise das condições de isomorfismo. Igual que para dimensão cinco e seis, $\mathcal{B}_8$ não é isomorfa as outras sete álgebras por causa da dimensão do seu anulador. Se $\bar{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i / \text{Anul}(\mathcal{B}_i)$, então calculando a dimensão do anulador das restantes $\bar{\mathcal{B}}_i$, separamos as álgebras $\mathcal{B}_6$ e $\mathcal{B}_7$ das cinco primeiras da lista. Finalmente calculando a dimensão do anulador do $\text{Anul}(\bar{\mathcal{B}}_i)$, das cinco primeiras $\bar{\mathcal{B}}_i$, separamos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ das três restantes. Assim as sete primeiras álgebras estão separadas em três conjuntos de álgebras não isomorfas, eles são

$$C1 : \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2. \quad C2 : \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5. \quad C3 : \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7.$$

Observamos que $\bar{\mathcal{B}}_3$ corresponde a $\mathcal{A}_8$, $\bar{\mathcal{B}}_4$ corresponde a $\mathcal{A}_{10}$ e $\bar{\mathcal{B}}_5$ corresponde a $\mathcal{A}_6$, do Teorema 4.26, que não são isomorfas. Isto mostra que as álgebras de $C2$ não são isomorfas. Resta então analisar os conjuntos $C1$ e $C3$.

Vejamos que as álgebras de $C1$, são isomorfas.

Lema 4.30 *Para todo α em F ,*

$$\mathcal{B}_2(\alpha) \cong \mathcal{B}_1 \left(\alpha - \frac{1}{16} \right).$$

Prova: Sejam α em F e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$, tal que $b^2 = a^4 + \alpha a^6$, $a^2b = a^4$, $a^3b = -a^5$, $a^4b = a^6$ e os outros produtos não triviais são zero. Se definimos

$$a_1 := \frac{7}{16}b + a - \frac{1}{16}a^2 - \frac{19}{64}a^3 \quad \text{e} \quad b_1 := b - \frac{3}{8}a^3 - \frac{31}{64}a^4 - \left(\frac{7}{16}\alpha - \frac{9}{128} \right) a^5,$$

então

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= a^2 - \frac{1}{8}a^3 - \frac{29}{64}a^4 + \frac{19}{64}a^5 + \left(\frac{49}{256}\alpha + \frac{361}{498}\right)a^6, \\
a_1^3 &= a^3 + \frac{1}{4}a^4 - \frac{11}{16}a^5 + \frac{21}{128}a^6, \\
a_1^4 &= a^4 - \frac{1}{4}a^5 - \frac{57}{64}a^6, \\
a_1^5 &= a^5 + \frac{1}{8}a^6, \\
a_1^6 &= a^6 \neq 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \frac{7}{16}b^2 - \frac{21}{128}a^3b - \frac{217}{1024}a^4b - \left(\frac{3}{8}a^4 - \frac{31}{64}\right)a^5 - \left(\frac{7}{16}\alpha - \frac{9}{128}\right)a^6 - \\
&\quad \frac{1}{16}a^2b + \frac{3}{128}a^5 + \frac{31}{1024}a^6 - \frac{19}{64}a^3b + \frac{57}{512}a^6 \\
&= \left(\frac{7}{16} - \frac{3}{8} - \frac{1}{16}\right)a^4 + \left(\frac{21}{128} - \frac{31}{64} + \frac{3}{128} + \frac{19}{64}\right)a^5 + \\
&\quad \left(\frac{7}{16}\alpha - \frac{217}{1024} - \frac{7}{16}\alpha + \frac{9}{128} + \frac{31}{1024} + \frac{57}{512}\right)a^6 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O anterior somado ao fato de $b_1 \notin A_{a_1}$ mostra que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$, e uma vez que

$$\begin{aligned}
b_1^2 &= b^2 - \frac{3}{4}a^3b - \frac{31}{32}a^4b + \frac{9}{64}a^6 = a^4 + \alpha a^6 + \frac{3}{4}a^5 - \frac{31}{32}a^6 + \frac{9}{64}a^6 \\
&= a^4 + \frac{3}{4}a^5 + \left(\alpha - \frac{53}{64}\right)a^6 \\
&= \left(a_1^4 + \frac{1}{4}a_1^5 + \frac{55}{64}a_1^6\right) + \left(a_1^5 - \frac{1}{8}a_1^6\right) + \left(\alpha - \frac{53}{64}\right)a_1^6 \\
&= a_1^4 + a_1^5 + \left(\alpha - \frac{1}{16}\right)a_1^6
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1^2 b_1 &= ba^2 - \frac{1}{8}a^3b - \frac{29}{64}a^4b + \frac{3}{64}a^6 - \frac{31}{64}a^6 \\
&= a^4 + \frac{1}{8}a^5 - \frac{29}{64}a^6 + \frac{3}{64}a^6 - \frac{31}{64}a^6 \\
&= a^4 - \frac{1}{4}a^5 - \frac{57}{64}a^6 \\
&= \left(a_1^4 + \frac{1}{4}a_1^5 + \frac{55}{64}a_1^6 \right) - \frac{1}{4} \left(a_1^5 - \frac{1}{8}a_1^6 \right) - \frac{57}{64}a_1^6 \\
&= a_1^4,
\end{aligned}$$

temos o isomorfismo. $\square$

Temos então que a classe determinada por $\mathcal{B}_1(\alpha)$ está contida na classe determinada por $\mathcal{B}_2(\alpha)$. Assim

$$\mathcal{B}_1 \not\cong \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \neq 1, 2.$$

Para finalizar o análise das condições de isomorfismo, resta demonstrar que as álgebras do conjunto $C2$ não são isomorfas, como concluiremos do seguinte lema.

Lema 4.31 *Seja α em F^* . Para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_7(\alpha))$,*

$$b_1^2 = \rho^2 \alpha a_1^6 \text{ e } a_1^2 b_1 = 0,$$

com ρ não nulo e os outros produtos não triviais são zero.

Prova: Seja α não nulo e $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$, uma base para $\mathcal{B}_7(\alpha)$, tal que $b^2 = \alpha a^6$ e os outros produtos não triviais são zero. Então se (a_1, b_1) é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_7(\alpha))$, a_1 e b_1 são da forma $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5 + \lambda_6 a^6$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \beta_6 a^6$. Utilizando a equação (4.11), para $\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ e $\alpha_6 = \alpha$, temos que as potências de a_1 são dadas por

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (\lambda^2 \alpha + \\
&\quad 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\
a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 3(\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \lambda_1) a^5 + (3\lambda_4 \lambda_1^2 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^3) a^6 \\
a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_2^2 \lambda_1^2) a^6 \\
a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6, \\
a_1^6 &= \lambda_1^6 a^6 \neq 0,
\end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \neq 0$. Temos também que,

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_1 \beta_5 a^6 + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \\
&\quad \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_2 \beta_4 a^6 + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_3 \beta_3 a^6 \\
&\quad + \lambda_4 \beta_1 a^5 + \lambda_4 \beta_2 a^6 + \lambda_5 \beta_1 a^6 + \lambda_3^2 a^6 \\
&= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 \\
&\quad + (\lambda_1 \beta_4 + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1 + \lambda_2 \beta_3) a^5 + (\lambda \beta \alpha + \lambda_1 \beta_5 + \lambda_5 \beta_1 + \lambda_2 \beta_4 \\
&\quad + \lambda_4 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3) a^6 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$, igualmente $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Portanto $\beta_5 = -\frac{\lambda \beta \alpha}{\lambda_1}$, e assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta \lambda \alpha}{\lambda_1} a^5 + \beta_6 a^6, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Logo

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \alpha a^6 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0, \quad \text{com } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

□

Corolário 4.32 *Sejam α e α' não nulos. Então*

$$\mathcal{B}_7(\alpha) \cong \mathcal{B}_7(\alpha')$$

se, e somente se, existir ρ não nulo tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.

Como uma consequência do lema anterior temos que para α não nulo e α' em F ,

$$\mathcal{B}_6(\alpha') \not\cong \mathcal{B}_7(\alpha).$$

Podemos concluir portanto que

$$\mathcal{B}_i \not\cong \mathcal{B}_j \text{ para todo } i \neq j.$$

Estudaremos agora as classes dadas por cada $\mathcal{B}_i(\alpha)$ para um α qualquer. Uma vez que a classe dada por $\mathcal{B}_7(\alpha)$ já foi estudada e que a classe dada por $\mathcal{B}_1(\alpha)$ está contida na classe dada por $\mathcal{B}_2(\alpha)$, resta analisar as classes dadas para $i = 2, 3, 4, 5, 6$.

Lema 4.33 *Sejam α e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha'),$$

se, e somente se, existir um ρ em F^ tal que $\alpha' = \rho^2\alpha$.*

Prova: Sejam α e α' em F e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$ tal que $b^2 = \alpha a^6$ e $a^2b = a^6$. Sejam $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$. Vejamos como são os produtos b_1^2 e $a_1^2b_1$. O par (a_1, b_1) exprime-se na base determinada pelo par (a, b) , como $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5 + \lambda_6 a^6$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \lambda_6 a^6$. Por (4.11), para $\alpha_4 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$, $\gamma_6 = 1$ e $\alpha_6 = \alpha$, temos as potências de a_1 dadas por

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (\lambda^2 \alpha + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\ a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 3(\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_2^2) a^5 + (3\lambda_4 \lambda_1^2 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^3) a^6, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_2^2 \lambda_1^2) a^6, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 4\lambda_1^4 \lambda_2 a^6, \\ a_1^6 &= \lambda_1^6 a^6 \neq 0. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_1 \beta_5 a^6 + \\
&\quad \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_2 \beta_4 a^6 + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \\
&\quad \lambda_3 \beta_3 a^6 + \lambda_4 \beta_1 a^5 + \lambda_4 \beta_2 a^6 + \lambda_5 \beta_1 a^6 + \lambda_3^2 a^6 \\
&= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda_1 \beta_4 + \lambda_3 \beta_2 \\
&\quad + \lambda_4 \beta_1 + \lambda_2 \beta_3) a^5 + (\lambda \beta \alpha + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_1 \beta_5 + \lambda_5 \beta_1 + \lambda_2 \beta_4 \\
&\quad + \lambda_4 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3) a^6 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e dado que $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$, igualmente $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ e portanto $\beta_5 = \frac{-\lambda \beta \alpha + \lambda_2 \beta}{\lambda_1}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\lambda \beta \alpha + \lambda_2 \beta}{\lambda_1} a^5 + \lambda_1 \beta_6 a^6, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Portanto

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 \alpha a^6 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \alpha \beta a^2 b = \lambda_1^2 \beta a^5 = \frac{\beta}{\lambda_1^4} a_1^5,$$

com $\lambda_1, \beta \neq 0$. Logo para um α' em F , temos que $\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha')$, se e somente se,

$$\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\lambda_1^4} = 1,$$

de onde $\beta = \lambda_1^4$ e portanto $\alpha' = \frac{1}{\lambda_1^2} \alpha$, o que demonstra o lema. $\square$

Lema 4.34 *Sejam α e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_5(\alpha) \cong \mathcal{B}_5(\alpha'),$$

se, e somente se, existir um ρ não nulo tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.

Prova: Seja $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ uma base para $\mathcal{B}_5(\alpha)$ com produtos dados por $b^2 = a^5$ e $a^2 b = \alpha a^6$, para α em F . Se $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$, então

$a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5 + \lambda_6 a^6$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \beta_6 a^6$. Por (4.11), as potências de a_1 são dadas por

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (\lambda^2 + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (2\lambda \lambda_2 \alpha + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\ a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + 3(\lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \lambda_1) a^5 + (\lambda \lambda_1^2 \alpha + \lambda_1 \lambda^2 + 3\lambda_4 \lambda_1^2 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^3) a^6, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_2^2 \lambda_1^2) a^6, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6, \\ a_1^6 &= \lambda_1^6 a^6 \neq 0, \end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \neq 0$, pois a_1 tem nilíndice máximo. Como o produto de a_1 com b_1 é nulo, temos que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_1 \beta_5 a^6 + \\ &\quad \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_2 \beta_4 a^6 + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \\ &\quad \lambda_3 \beta_3 a^6 + \lambda_4 \beta_1 a^5 + \lambda_4 \beta_2 a^6 + \lambda_5 \beta_1 a^6 + \lambda_3^2 a^6 \\ &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda \beta + \lambda_1 \beta_4 + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1 + \lambda_2 \beta_3) a^5 + (\lambda \beta_2 \alpha + \lambda_2 \beta \alpha + \lambda_1 \beta_5 + \lambda_5 \beta_1 + \lambda_2 \beta_4 + \lambda_4 \beta_2 + \lambda_3 \beta_3) a^6 \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, pois $\lambda_1 \neq 0$ e então $\beta_4 = -\frac{\lambda \beta}{\lambda_1}$ e $\beta_5 = -\frac{\beta \lambda_2 (\lambda_1 \alpha - \lambda)}{\lambda_1^2}$. Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\lambda \beta}{\lambda_1} a^4 - \frac{\beta \lambda_2 (\lambda_1 \alpha - \lambda)}{\lambda_1^2} a^5 + \beta_6 a^6, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Portanto

$$b_1^2 = \beta^2 b^2 = \beta^2 a^5 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \alpha \beta a^2 b = \lambda_1^2 \beta a^5 = \frac{\beta}{\lambda_1^4} a_1^5,$$

com $\lambda_1, \beta \neq 0$. Logo para um α' em F , temos que $\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha')$, se e somente se,

$$\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\lambda_1^4} = 1,$$

de onde $\beta = \lambda_1^4$ e portanto $\alpha' = \frac{1}{\lambda_1^2}\alpha$, o que demonstra o lema.

O estudo das classes determinadas por $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ será feito conjuntamente no seguinte lema.

Lema 4.35 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 7, com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ tal que $b^2 = \theta_1 a^5 + \theta_2 a^6$, $a^2 b = a^5$ e $a^3 b = -a^6$ e os outros produtos não triviais são zero. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, existem $\lambda_1, \beta \in F^*$ e $\lambda_2, \lambda \in F$, tais que*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} \theta_1 a_1^5 + \frac{\beta^2}{\lambda_1^7} (\theta_2 \lambda_1 - 5\theta_1 \lambda_2) a_1^6 \quad e \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5 - \frac{\beta}{\lambda_1^5} (8\lambda_2 - \theta_1 \lambda) a_1^6.$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ como no enunciado do lema e $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então a_1 e b_1 exprimem-se de maneira única na forma, $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5 + \lambda_6 a^6$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \beta_6 a^6$. As potências de a_1 , dadas por (4.11), são

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (\lambda^2 \gamma_4^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (\lambda^2 \theta_1 + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_4 \\ &\quad + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (\lambda^2 \theta_2 - 2\lambda \lambda_3 + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\ a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + (\lambda \lambda_1^2 + 3\lambda_3 \lambda_1^2 + 3\lambda_1 \lambda_2^2) a^5 + (\lambda_1 \lambda^2 \theta_1 + 3\lambda_1^2 \lambda_4 + \\ &\quad + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^3) a^6, \\ a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6, \\ a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6, \\ a_1^6 &= \lambda_1^6 a^6, \end{aligned}$$

e sendo que a_1 tem nilíndice máximo, temos que $\lambda_1 \neq 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda \beta_3 a^3 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 \\ &\quad + \lambda_1 \beta_5 a^6 + \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_2 \beta_4 a^6 \\ &\quad + \lambda_3 \beta a^3 b + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_3 \beta_3 a^6 + \lambda_4 \beta_1 a^5 + \lambda_4 \beta_2 a^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 \\
&\quad + (\lambda \beta \theta_1 + \lambda \beta_2 + \lambda_1 \beta_4 + \lambda_2 \beta + \lambda_2 \beta_3 + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1) a^5 \\
&\quad + (\lambda \beta \theta_2 - \lambda \beta_3 + \lambda_1 \beta_5 + \lambda_2 \beta_4 - \lambda_3 \beta + \lambda_3 \beta_3 + \lambda_4 \beta_2) a^6 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \beta_1 = 0$ e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$. Igualmente $\beta_2 = \beta_3 = 0$, e portanto $\beta_4 = -\frac{\beta(\lambda\theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1}$ e

$$\beta_5 = -\frac{\beta}{\lambda_1}(\lambda\lambda_1\theta_2 + \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda\theta_1 + \lambda_2^2 - \lambda_3\lambda_1).$$

Assim

$$b_1 = \beta b - \frac{\beta(\lambda\theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} a^4 - \frac{\beta}{\lambda_1}(\lambda\lambda_1\theta_2 + \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda\theta_1 + \lambda_2^2 - \lambda_3\lambda_1) a^5 + \beta_6 a^6,$$

com $\beta \neq 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
b_1^2 &= \beta^2 b^2 = \beta^2 \theta_1 a^5 + \beta^2 \theta_2 a^6 = \beta^2 \theta_1 \left[\frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 - 5 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^7} a_1^6 \right] + \beta^2 \theta_2 \frac{1}{\lambda_1^6} a_1^6 \\
&= \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} \theta_1 a_1^5 + \frac{\beta^2(\theta_2 \lambda_1 - 5 \theta_1 \lambda_2)}{\lambda_1^7} a_1^6,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1^2 b_1 &= \beta \lambda_1^2 a^2 b + 2\beta \lambda_1 \lambda_2 a^3 b - \frac{\lambda_1^2 \beta(\lambda\theta_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} a^6 = \beta \lambda_1^2 a^5 - \beta \lambda_1 (3\lambda_2 + \lambda\theta_1) a^6 \\
&= \beta \lambda_1^2 \left[\frac{1}{\lambda_1^5} a_1^5 - 5 \frac{\lambda_2}{\lambda_1^7} a_1^6 \right] - \beta \lambda_1 (3\lambda_2 + \lambda\theta_1) \frac{1}{\lambda_1^6} a_1^6 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5 - \frac{\beta}{\lambda_1^5} (8\lambda_2 - \theta_1 \lambda) a_1^6.
\end{aligned}$$

o que demonstra o lema. $\square$

Corolário 4.36 *Sejam α em α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_4(\alpha) \cong \mathcal{B}_4(\alpha')$$

se e somente se, $\alpha' = \alpha$.

Prova: Para $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \alpha$, no lema anterior, temos a álgebra $\mathcal{B}_4(\alpha)$, portanto para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$, cumpres-se que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2 \alpha}{\lambda_1^6} a_1^6 \text{ e } a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5 - \frac{8\beta \lambda_2}{\lambda_1^5} \text{ com } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

Logo para α' em F , $\mathcal{B}_4(\alpha)$ é isomorfa a $\mathcal{B}_4(\alpha')$, se e somente se $\alpha' = \frac{\beta^2 \alpha}{\lambda_1^6}$, $1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3}$ e $0 = -\frac{8\beta \lambda_2}{\lambda_1^5}$. Portanto $\lambda_2 = 0$, $\beta = \lambda_1^3$ e $\alpha' = \frac{\lambda_1^6 \alpha}{\lambda_1^6} = \alpha$. $\square$

Corolário 4.37 *Para todo α e α' em F ,*

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha').$$

Prova: Se $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = \alpha$, no lema anterior, temos a álgebra $\mathcal{B}_4(\alpha)$, logo para todo par $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_3(\alpha))$, temos que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5} a_1^5 + \frac{\beta^2(\lambda_1 \alpha - 5\lambda_2)}{\lambda_1^7} a_1^6 \text{ e } a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5 - \frac{\beta(8\lambda_2 + \lambda)}{\lambda_1^5} \text{ com } \lambda_1, \beta \neq 0.$$

Logo para α' em F , $\mathcal{B}_3(\alpha)$ é isomorfa a $\mathcal{B}_3(\alpha')$, se e somente se $1 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^5}$, $\alpha' = \frac{\beta^2(\lambda_1 \alpha - 5\lambda_2)}{\lambda_1^7}$, $1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3}$ e $0 = -\frac{\beta(8\lambda_2 + \lambda)}{\lambda_1^5}$. Portanto $\lambda = -8\lambda_2$, $\beta = \lambda_1^3$ e $\alpha' = \alpha - \frac{5\lambda_2}{\lambda_1}$. $\square$

Lema 4.38 *Sejam α e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_2(\alpha) \cong \mathcal{B}_2(\alpha')$$

se, e somente se, existir ρ não nulo tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.

Prova: Seja α e α' em F e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$ tal que $b^2 = a^4 + \alpha a^6$, $a^2 b = a^4$, $a^3 b = -a^5$ e $a^4 b = a^6$. Então cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, exprime-se de maneira única na base determinada por (a, b) como $a_1 = \lambda b + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \lambda_5 a^5 + \lambda_6 a^6$ e $b_1 = \beta b + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3 + \beta_4 a^4 + \beta_5 a^5 + \beta_6 a^6$. As potências de a_1 , dadas por (4.11), são

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (\lambda^2 + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (-2\lambda \lambda_3 + 2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + (\lambda^2 \alpha + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6, \\
a_1^3 &= \lambda_1^3 a^3 + (\lambda \lambda_1^2 + 3\lambda_1^2 \lambda_2) a^4 + (\lambda_1 \lambda^2 + 3\lambda_3 \lambda_1^2 + 3\lambda_1 \lambda_2^2) a^5 + (\lambda^3 + 3\lambda_2 \lambda^2 + 3\lambda \lambda_2^2 + 3\lambda_4 \lambda_1^2 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^3) a^6, \\
a_1^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (2\lambda^2 \lambda_1^2 + 4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 + 4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_2^2 \lambda_1^2) a^6, \\
a_1^5 &= \lambda_1^5 a^5 + (\lambda \lambda_1^4 + 5\lambda_1^4 \lambda_2) a^6, \\
a_1^6 &= \lambda_1^6 a^6 \neq 0,
\end{aligned}$$

logo $\lambda_1 \neq 0$, pois a_1 tem nilíndice máximo.

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= \lambda \beta b^2 + \lambda \beta_2 a^2 b + \lambda \beta_3 a^3 b + \lambda \beta_4 a^4 b + \lambda_1 \beta_1 a^2 + \lambda_1 \beta_2 a^3 + \lambda_1 \beta_3 a^4 + \lambda_1 \beta_4 a^5 + \lambda_1 \beta_5 a^6 + \lambda_2 \beta a^2 b + \lambda_2 \beta_1 a^3 + \lambda_2 \beta_2 a^4 + \lambda_2 \beta_3 a^5 + \lambda_2 \beta_4 a^6 + \lambda_3 \beta a^3 b + \lambda_3 \beta_1 a^4 + \lambda_3 \beta_2 a^5 + \lambda_3 \beta_3 a^6 + \lambda_4 \beta a^4 b + \lambda_4 \beta_1 a^5 + \lambda_4 \beta_2 a^6 + \lambda_5 \beta_1 a^6 \\
&= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda \beta + \lambda \beta_2 + \lambda_2 \beta + \lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda \beta_3 - \lambda_3 \beta + \lambda_1 \beta_4 + \lambda_4 \beta_1 + \lambda_2 \beta_3 + \lambda_3 \beta_2) a^5 + (\lambda \beta \alpha + \lambda \beta_4 + \lambda_4 \beta + \lambda_1 \beta_5 - \lambda_5 \beta_1 + \lambda_2 \beta_4 + \lambda_3 \beta_3 + \lambda_4 \beta_2) a^6 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\text{logo } \beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{\beta(\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1}, \beta_4 = -\frac{\beta(\lambda^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2} \text{ e}$$

$$\beta_5 = \frac{\beta(\lambda \lambda_1^2 - \lambda^3 + \lambda \lambda_2^2 + \lambda_4 \lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda^2 + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
b_1 &= \beta b - \frac{\beta(\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1} a^3 - \frac{\beta(\lambda^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2} a^4 \\
&\quad + \frac{\beta(\lambda \lambda_1^2 - \lambda^3 + \lambda \lambda_2^2 + \lambda_4 \lambda_1^2 - \lambda_2 \lambda^2 + \lambda_2^3)}{\lambda_1^3} a^5 + \beta_6 a^6,
\end{aligned}$$

com $\beta \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \beta^2 b^2 - 2 \frac{\beta^2(\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1} a^3 b - \frac{2\beta^2(\lambda^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2} a^4 b + \frac{\beta^2(\lambda + \lambda_2)^2}{\lambda_1^2} a^3 \\ &= \beta^2 a^4 + \frac{2\beta^2(\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1} a^5 + \frac{\beta^2(\lambda_1^2 \alpha - \lambda^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + 3\lambda_2^2 + 2\lambda \lambda_2)}{\lambda_1^2} a^6, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= \lambda_1^2 \beta a^b + 2\lambda_1 \lambda_2 \beta a^3 b + (\lambda^2 + 2\lambda \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 b + \frac{\lambda_1^2 \beta (\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1} a^5 \\ &\quad - \frac{\lambda_1^2 \beta (\lambda^2 - \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2} a^6 - \frac{2\lambda_1 \lambda_2 \beta (\lambda + \lambda_2)}{\lambda_1} a^6 \\ &= \beta \lambda_1^2 a_1^4 - \beta \lambda_1 (3\lambda_2 + \lambda) a^5 + 3\beta \lambda_1 \lambda_3 a^6. \end{aligned}$$

Seja M a matriz cujas colunas são as coordenadas de $a_1^2, \dots, a_1^6, b_1^2, a_1^2 b_1$, em relação a $a^2, \dots, a^6$. Então uma redução por linhas nos leva a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\beta^2}{\lambda_1^3} & \frac{\beta}{\lambda_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2\beta^2(\lambda_2 - \lambda)}{\lambda_1^6} & -\frac{\beta(7\lambda_2 + \lambda)}{\lambda_1^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\beta^2(\alpha \lambda_1^2 - 5\lambda^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 + 7\lambda_2^2 - 10\lambda \lambda_2)}{\lambda_1^4} & -\frac{\beta(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda^2 - 8\lambda \lambda_2 - 29\lambda_2^2)}{\lambda_1^6} \end{bmatrix}.$$

Portanto para um α' em F , $\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha')$, se e somente se

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\beta^2 \alpha}{\lambda_1^4}, \quad 0 = -\frac{2\beta^2(\lambda_2 - \lambda)}{\lambda_1^6}, \quad \alpha' = \frac{\beta^2(\alpha \lambda_1^2 - 5\lambda^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 + 7\lambda_2^2 - 10\lambda \lambda_2)}{\lambda_1^4}, \\ 1 &= \frac{\beta}{\lambda_1^2}, \quad 0 = -\frac{\beta(7\lambda_2 + \lambda)}{\lambda_1^4} \quad \text{e} \quad 0 = -\frac{\beta(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda^2 - 8\lambda \lambda_2 - 29\lambda_2^2)}{\lambda_1^6}. \end{aligned}$$

Logo $\beta = \lambda_1^2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{7}\lambda$, $\lambda_3 = \frac{76\lambda^2}{49\lambda_1}$ e $\lambda = \frac{7}{16}\lambda_1^2$ e assim obtemos que $\alpha' = \frac{1}{\lambda_1^2}\alpha$, e dado que $\lambda_1 \neq 0$ segue-se a demonstração do lema. $\square$

Temos finalmente o seguinte resultado para dimensão e nilíndice 7.

Teorema 4.39 *Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 7, é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\alpha) : \quad & b^2 = a^4 + \alpha a^6, \quad a^2b = a^4, \quad a^3b = -a^5, \quad a^4b = a^6, \quad [\rho^2]; \\
\mathcal{A}_2 : \quad & b^2 = a^5, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6; \\
\mathcal{A}_3(\alpha) : \quad & b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6, \quad [1]; \\
\mathcal{A}_4(\alpha) : \quad & b^2 = a^5, \quad a^2b = \alpha a^6, \quad [\rho^2]; \\
\mathcal{A}_5(\alpha) : \quad & b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^6, \quad [\rho^2]; \\
\mathcal{A}_6(\alpha) : \quad & b^2 = \alpha a^6, \quad [\rho^2].
\end{aligned}$$

4.5 Classificação para dimensão oito.

Nas seções anteriores mostramos explicitamente as constantes de estrutura de uma nilálgebra $\mathcal{B}$ em relação a base determinada por um par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Veremos a partir de esta seção que tais constantes tem um comportamento padrão. Embora seja possível, a partir da dimensão oito, dar um teorema geral caracterizando tais constantes, faremos este caso separado do caso geral, pois mesmo sendo a idéia a mesma que demonstra o caso geral, teremos de considerar algumas particularidades para dimensão 8.

O método utilizado para achar as classes de isomorfismos destas álgebras, será o mesmo utilizado para dimensão 5, 6 e 7, sendo em este caso, algumas demonstrações muito mais simples. Uma vez que o método já foi muito trabalhado, daremos apenas as idéias principais.

Iniciaremos com o teorema que caracteriza tais constantes.

Teorema 4.40 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 8 e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então para a base determinada pelo par anterior, isto é, formada por b e as potências de a , os produtos não triviais são*

dados por:

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha_6 a^6 + \alpha_7 a^7, \\ a^2 b &= \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6 + \gamma_7 a^7, \\ a^3 b &= -\gamma_5 a^6 - \gamma_6 a^7, \\ a^4 b &= \gamma_5 a^7. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, \dots, a^7\}$, e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 8$ e $i, j \geq 1$, e (4.12), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 8.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 8, e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/A_a^7 = \langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4, \bar{a}^5, \bar{a}^6 \rangle$. Pelo Teorema 4.27, temos que $\bar{b}^2 = \gamma_4^2 \bar{a}^4 + \alpha_5 \bar{a}^5 + \alpha_6 \bar{a}^6$ e $\bar{a}^2 \bar{b} = \gamma_4 \bar{a}^4 + \gamma_5 \bar{a}^5 + \gamma_6 \bar{a}^6$, logo

$$b^2 = \gamma_4^2 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^6 + \alpha_7 a^7 \quad \text{e} \quad a^2 b = \gamma_4 a^4 + \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6 + \gamma_7 a^7.$$

Por (4.1) a (4.5) temos que

$$\begin{aligned} a^3 b &= -\gamma_4 a^5 - \gamma_5 a^6 - \gamma_6 a^7, \\ a^4 b &= \gamma_4 a^6 + \gamma_5 a^7, \\ a^5 b &= -\frac{5}{3} \gamma_4 a^7, \\ a^6 b &= 0, \end{aligned}$$

e

$$a^2 b^2 = \gamma_4^2 a^6 + \alpha_5 a^7 = \gamma_4^2 a^6 + \frac{1}{2}(\alpha_5 - \frac{2}{5} \gamma_4 \gamma_5) a^7,$$

de onde $\alpha_5 = -\frac{2}{3} \gamma_4 \gamma_5$, assim

$$b^2 = \gamma_4^2 a^4 - \frac{2}{3} \gamma_4 \gamma_5 a^5 + \alpha_6 a^6 + \alpha_7 a^7.$$

Seja

$$x = b + a + a^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
 x^2 &= a^2 + 2a^3 + (\gamma_4^2 + 2\gamma_4 + 1)a^4 + \left(-\frac{2}{3}\gamma_4\gamma_5 + 2\gamma_5\right)a^5 + (2\gamma_6 + \alpha_6)a^6 \\
 &\quad + (2\gamma_7 + \alpha_7)a^7, \\
 x^3 &= a^3 + (3 + \gamma_4)a^4 + (3 + \gamma_4^2 + \gamma_5)a^5 + \left(1 + 3\gamma_4 - \frac{2}{3}\gamma_4\gamma_5 + 3\gamma_4^2 + \gamma_4^3 + \gamma_6\right)a^6 \\
 &\quad + \left(-2\gamma_4\gamma_5 + \frac{19}{9}\gamma_4\gamma_5^2 + 3\gamma_5 + \gamma_7 + \alpha_6\right)a^7, \\
 x^4 &= a^4 + 4a^5 + (6 + 4\gamma_4 + 2\gamma_4^2)a^6 + \left(4 - 2\gamma_4 - \frac{4}{3}\gamma_4\gamma_5 + 4\gamma_4^2 - \frac{2}{3}\gamma_4^3 + 4\gamma_5\right)a^7,
 \end{aligned}$$

e

$$x^2x^2 = a^4 + 4a^5 + (6 + 4\gamma_4 + 2\gamma_4^2)a^6 + \left(4 + 8\gamma_4 - \frac{4}{3}\gamma_4\gamma_5 + 4\gamma_4^2 + 4\gamma_5\right)a^7,$$

e lembrando que $\mathcal{B}$ é de p.a. temos que

$$0 = x^4 - x^2x^2 = \left(-\frac{2}{3}\gamma_4^2 - 10\right)\gamma_4a^7,$$

do que segue que $\gamma_4 = 0$, portanto $b^2 = \alpha_6a^6 + \alpha_7a^7$, $a^2b = \gamma_5a^5 + \gamma_6a^6 + \gamma_7a^7$, $a^3b = -\gamma_5a^6 - \gamma_6a^7$, $a^4b = \gamma_5a^7$ e $a^tb = 0$, para $t \geq 5$.

Suponhamos agora que $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$ e produtos $ab = a^k = 0$, $a^ia^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 8$ e todos os $i, j \geq 1$, e (4.12). Se $x = \lambda b + \sum_{i=1}^7 \lambda_i a^i$, então

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1\lambda_2 a^3 + (2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2)a^4 + (2\lambda\lambda_2\gamma_5 + 2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_3)a^5 \\
 &\quad + (\lambda^2\alpha_6 + 2\lambda\lambda_2\gamma_6 - 2\lambda\lambda_3\gamma_5 + 2\lambda_1\lambda_5 + 2\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3^2)a^6 + \\
 &\quad + (\lambda^2\alpha_7 + 2\lambda\lambda_2\gamma_7 - 2\lambda\lambda_3\gamma_6 + 2\lambda\lambda_4\gamma_5 + 2\lambda_1\lambda_6 + 2\lambda_2\lambda_5 + 2\lambda_3\lambda_4)a^7, \\
 x^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2\lambda_2 a^4 + (\lambda\lambda_1^2\gamma_5 + 3\lambda_3\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2^2)a^5 + (\lambda\lambda_1^2\gamma_6 + 3\lambda_1^2\lambda_4 + \\
 &\quad + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2^3)a^6 + (\lambda\lambda_1^2\gamma_7 + 3\lambda\lambda_2^2\gamma_5 + \lambda_1\lambda^2\alpha_6 + 3\lambda_1^2\lambda_5 + 6\lambda_1\lambda_2\lambda_4 \\
 &\quad + 3\lambda_1\lambda_3^2 + 3\lambda_2^2\lambda_3)a^7, \\
 x^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3\lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3\lambda_3 + 6\lambda_1^2\lambda_2^2)a^6 + (4\lambda\lambda_1^2\lambda_2\gamma_5 + 4\lambda_1^3\lambda_4 \\
 &\quad + 12\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_1\lambda_2^3)a^7,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6 + (\lambda \lambda_1^4 \gamma_5 + 5\lambda_1^4 \lambda_3 + 10\lambda_1^3 \lambda_2^2) a^7, \\
x^6 &= \lambda_1^6 a^6 + 6\lambda_1^5 \lambda_2 a^7, \\
x^7 &= \lambda_1^7 a^7, \\
x^8 &= 0, \\
x^2 x^2 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6 + (4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_5 + 4\lambda_1^3 \lambda_4 \\
&\quad + 12\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + 4\lambda_1 \lambda_2^3) a^7,
\end{aligned}$$

assim $x^4 = x^2 x^2$ e podemos concluir que $\mathcal{B}$ é de p.a. e tem nilíndice 8. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7)$ a álgebra dada no lema anterior. Para esta álgebra temos que a matriz coordenada por linhas de L_b , em relação à base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$ é

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & M \end{array} \right) \quad \text{sendo} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 \\ 0 & -\gamma_5 & -\gamma_6 \\ 0 & 0 & \gamma_5 \end{pmatrix}.$$

Passemos a estudar as classes de isomorfismo para as álgebras que tem a forma anterior. Sejam (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então se definimos para λ e β em F^* , os elementos $a_1 := \lambda a$ e $b_1 := \beta b$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^6} \alpha_6, \frac{\beta^2}{\lambda^7} \alpha_7, \frac{\beta}{\lambda^3} \gamma_5, \frac{\beta}{\lambda^4} \gamma_6, \frac{\beta}{\lambda^5} \gamma_7\right). \quad (4.13)$$

Lema 4.41 *Sejam ρ_1 e ρ_2 em F . Então $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7)$ é isomorfa à álgebra*

$$\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7 - 2\rho_1(\gamma_5^2 + 3\alpha_6), \gamma_5, \gamma_6 - 8\rho_1\gamma_5, \gamma_7 + \gamma_5(38\rho_1^2 - 2\rho_2) - 9\rho_1\gamma_6).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_5, \alpha_6, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$ em relação ao par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Sejam ρ_1 e ρ_2 em F ,

$$a_1 := a + \rho_1 a^2 + \rho_2 a^3$$

e

$$b_1 := b - \rho_1 \gamma_5 a^4 + (-\rho_1 \gamma_6 + \rho_1^2 \gamma_5 + \rho_2 \gamma_5) a^5 - (\rho_1 \gamma_7 - \rho_2 \gamma_6 - \rho_1^2 \gamma_6 + \rho_1^3 \gamma_5) a^6.$$

Um calculo direto nos mostra que $a_1^7 = a^7 \neq 0$ e $a_1 b_1 = 0$, e uma vez que é claro que $b_1 \notin A_{a_1}$, temos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Calculando os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$, obtemos que

$$b_1^2 = \alpha_6 a^6 + (\alpha_7 - 2\rho_1 \gamma_5^2) a^7 = \alpha_6 a_1^6 + [\alpha_7 - 2\rho_1(\gamma_5^2 + 3\alpha_6)] a_1^7$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= \gamma_5 a^5 + (\gamma_6 - 3\rho_1 \gamma_5) a^6 + (\gamma_7 - 3\rho_1 \gamma_6 + 3\rho_2 \gamma_5) a^7 \\ &= \gamma_5 a_1^5 + (\gamma_6 - 8\rho_1 \gamma_5) a_1^6 + [\gamma_7 + \gamma_5(38\rho_1^2 - 2\rho_2) - 9\rho_1 \gamma_6] a_1^7. \end{aligned}$$

Isto prova o lema. $\square$

Por (4.13) podemos supor, a menos de isomorfismos, que $\gamma_5 = 0$ ou $\gamma_5 = 1$. Acharemos as classes de isomorfismos considerando estes dois casos por separado.

- ($\gamma_5 = 0$.) Neste caso temos pelo Lema 4.41 que $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, 0, \gamma_6, \gamma_7) \cong \mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7 - 6\rho_1 \alpha_6, 0, \gamma_6, \gamma_7 - 9\rho_1 \gamma_6)$.

- Se $\gamma_6 \neq 0$, então considerando $\rho_1 = \frac{\gamma_7}{9\gamma_6}$, no Lema 4.41 e fazendo $\lambda = \gamma_6$ e $\beta = \gamma_6^3$ em (4.13), obtemos que $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, 0, \gamma_6, \gamma_7)$ é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha'_7, 0, 1, 0)$. Se α'_7 é não nulo, então fazendo $\lambda = \frac{1}{\alpha'_7}$ e $\beta = \frac{1}{\alpha'^4_7}$, temos que

$$\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha'_7, 0, 1, 0) \cong \mathcal{B}(\alpha'_6, 1, 0, 1, 0),$$

e se $\alpha'_7 = 0$, então temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_6, 0, 0, 1, 0)$.

- Se $\gamma_6 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7 - 6\rho_1 \alpha_6, 0, 0, \gamma_7)$. Se α_6 é não nulo e $\gamma_7 \neq 0$, então considerando $\rho_1 = \frac{\alpha_7}{6\alpha_6}$, $\lambda = \gamma_7$ e $\beta = \gamma_7^4$, obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_6, \alpha_7, 0, \gamma_6, \gamma_7) \cong \mathcal{B}(\alpha'_6, 0, 0, 0, 1) \quad \text{com } \alpha'_6 \neq 0,$$

e se $\gamma_7 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_6, 0, 0, 0, 0)$ com $\alpha_6 \neq 0$.

Se $\alpha_6 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_7, 0, 0, \gamma_7)$. Se $\gamma_7 \neq 0$, então considerando $\lambda = \gamma_7$ e $\beta = \gamma_7^4$, obtemos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha'_7, 0, 0, 1)$.

Se $\gamma_7 = 0$, e $\alpha_7 \neq 0$, então fazendo $\lambda = \alpha_7$ e $\beta = \alpha_7^3$, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(0, 1, 0, 0, 0)$.

- ($\gamma_5 \neq 0$.) Então fazendo $\rho_1 = \frac{\gamma_6}{8\gamma_5}$, $\rho_2 = \frac{32\gamma_5\gamma_7 - 17\gamma_6^2}{64\gamma_5^2}$, $\lambda = \gamma_5$ e $\beta = \gamma_5^2$, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(\alpha'_6, \alpha'_7, 1, 0, 0)$. Se $\alpha'_7 \neq 0$, então considerando $\lambda = \alpha'_7$ e $\beta = \alpha'^3_7$, obtemos o isomorfismo com a álgebra $\mathcal{B}(\alpha'_6, 1, 1, 0, 0)$. Se $\alpha'_7 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha'_6, 0, 1, 0, 0)$.

Assim se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 8, então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, \dots, a^7\}$, com produtos não triviais dados por um da seguinte lista:

$$\mathcal{B}_1(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6 + a^7, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6, \quad a^4b = a^7;$$

$$\mathcal{B}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^5, \quad a^3b = -a^6, \quad a^4b = a^7;$$

$$\mathcal{B}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6 + a^7, \quad a^2b = a^6, \quad a^3b = -a^7;$$

$$\mathcal{B}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^6, \quad a^3b = -a^7;$$

$$\mathcal{B}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2b = a^7, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_6(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\mathcal{B}_7(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^7, \quad a^2b = a^7;$$

$$\mathcal{B}_8 : \quad b^2 = a^7;$$

$$\mathcal{B}_9 :$$

e os outros produtos não triviais são zero. Assim temos que toda álgebra desta classe é isomorfa a alguma da lista anterior. Estudemos as condições de isomorfismo das álgebras desta lista.

Claramente $\mathcal{B}_9$ não é isomorfa com as outras álgebras. Se $\bar{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}/\text{Anul}(\mathcal{B}_i)$, então temos que a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_7$ e $\bar{\mathcal{B}}_8$ é 2 e das outras $\bar{\mathcal{B}}_i$ é

1. Isto nos separa $\mathcal{B}_7$ e $\mathcal{B}_8$ das restantes álgebras. Observamos que $\bar{\mathcal{B}}_1$ e $\bar{\mathcal{B}}_2$ correspondem à álgebra $\mathcal{A}_3$, as álgebras $\bar{\mathcal{B}}_3$ e $\bar{\mathcal{B}}_4$ correspondem à álgebra $\mathcal{A}_5$ e $\bar{\mathcal{B}}_5$, $\bar{\mathcal{B}}_6$ correspondem à álgebra $\mathcal{A}_6$, do Teorema 4.39, que não são isomorfas. Assim temos as álgebras da lista anterior dividida em quatro conjuntos de álgebras não isomorfas, eles são:

$$C1 : \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2. \quad C2 : \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4. \quad C3 : \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6. \quad C4 : \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8.$$

Os resultados que daremos a continuação serão apresentados sem suas provas, que seguem os mesmos alinhamentos dos lemas das seções anteriores. Portanto no caso de mostrar o isomorfismo entre duas álgebras, daremos especificamente os elementos a_1 e b_1 que nos levam ao isomorfismo, sem fazer as contas que verificam ele. Igualmente quando precisemos calcular as constantes de estrutura das álgebras $\mathcal{B}_i$, em relação a base determinada pelo par (a_1, b_1) , indicaremos os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$ diretamente. Passemos agora a estudar cada um dos conjuntos anteriores.

Para o conjunto $C3$, temos que as álgebras deste conjunto são isomorfas. Basta fixar a base determinada pelo par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_6)$ e definir em termos desta base os seguintes elementos

$$a_1 := -\frac{1}{\alpha}b + a \quad \text{e} \quad b_1 := b + a^5,$$

para termos o isomorfismo. Assim para α não nulo

$$\mathcal{B}_5(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha).$$

Analisando as álgebras do conjunto $C2$, temos que para α não nulo, as álgebras $\mathcal{B}_3(\alpha)$ e $\mathcal{B}_4(\alpha)$ são isomorfas. De fato seja $\alpha \neq 0$ e (a, b) um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$. Então se definimos, em termos da base determinada pelo par (a, b) , os elementos

$$a_1 := \frac{3}{2\alpha^2}b + a - \frac{1}{6\alpha}a^2 \quad \text{e} \quad b_1 := b - \frac{4}{3\alpha}a^5 - \frac{2}{9\alpha^2}a^6,$$

temos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$, $b_1^2 = \alpha a_1^6 + a_1^7$ e $a_1^2 b_1 = a_1^7$, o que nos dá o isomorfismo. Isto é,

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_4(\alpha) \quad \text{para} \quad \alpha \in F^*.$$

Resta então analisar o caso em que α é nulo. O seguinte lema nos mostra que para $\alpha = 0$, as álgebras, que denotaremos simplesmente por $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$, não são isomorfas.

Lema 4.42 *Para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_4(\alpha))$*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 - \frac{6\beta^2 \lambda_2}{\lambda_1^8} \alpha a_1^7 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^4} a_1^6 - \frac{\beta(9\lambda_2 + \lambda\alpha)}{\lambda_1^6} a_1^7 \quad \text{com} \quad \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Do lema anterior temos que se $\alpha = 0$, então $b_1^2 = 0$ o que nos mostra que

$$\mathcal{B}_4 \not\cong \mathcal{B}_3.$$

Se α é diferente de zero, temos que para um α' em F^* , $\mathcal{B}_4(\alpha)$ é isomorfa a $\mathcal{B}_4(\alpha')$, se e somente se, $\lambda_2 = \lambda = 0$, $\beta = \lambda_1^4$, e consequentemente $\alpha' = \lambda_1^2 \alpha$.

Corolário 4.43 *Sejam α e α' não nulos. Então*

$$\mathcal{B}_4(\alpha) \cong \mathcal{B}_4(\alpha'),$$

se e somente se, existir ρ não nulo tal que $\alpha' = \rho^2 \alpha$.

Analisando agora as álgebras do conjunto $C4$, vemos que elas não são isomorfas. Isto segue-se do fato de, para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_8)$, termos que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^7} a_1^7 \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0, \quad \text{com} \quad \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Portanto, é claro que

$$\mathcal{B}_8 \not\cong \mathcal{B}_7.$$

Resta então analisar as álgebras do conjunto $C1$. O seguinte lema mostrará que as duas álgebras deste conjunto não são isomorfas.

Lema 4.44 *Para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2(\alpha))$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6} \alpha a_1^6 - \frac{2\beta^2 \lambda_2 (1 + 3\alpha)}{\lambda_1^8} a_1^7$$

e

$$a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3} a_1^5 - \frac{8\beta \lambda_2}{\lambda_1^5} a_1^6 - \frac{\beta(2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda \lambda_1 \alpha + \lambda \lambda_1 - 38\lambda_2^2)}{\lambda_1^7} a_1^7 \quad \text{com} \quad \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Assim, se $\mathcal{B}_2$ fosse isomorfa com $\mathcal{B}_1$, então $-\frac{8\beta\lambda_2}{\lambda_1^5} = 0$ e $-\frac{2\beta^2\lambda_2(1+3\alpha)}{\lambda_1^8} = 1$, isto é, $\lambda_2 = 0$, e assim $1 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6}\alpha = 0$. Portanto

$$\mathcal{B}_2 \not\cong \mathcal{B}_1.$$

Por outro lado temos que para um α' em F , $\mathcal{B}_2(\alpha)$ é isomorfa com $\mathcal{B}_2(\alpha')$ se, e somente se, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{\lambda(\alpha+1)}{2}$ e $\beta = \lambda_1^3$, portanto $\alpha' = \alpha$. Assim para todo α e α' em F ,

$$\mathcal{B}_2(\alpha) \cong \mathcal{B}_2(\alpha') \text{ se, e somente se, } \alpha = \alpha'.$$

Com isto terminamos o análise das classes de isomorfismo. Passemos agora a estudar as classes dadas pelas álgebras $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_6$ e $\mathcal{B}_7$.

Seja α em F . Para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1(\alpha))$

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6}\alpha a_1^6 + \frac{\beta^2(\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6\lambda_2\alpha)}{\lambda_1^8}a_1^7$$

e

$$a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^3}a_1^5 - \frac{8\beta\lambda_2}{\lambda_1^5}a_1^6 - \frac{\beta(2\lambda_1\lambda_3 + \lambda\lambda_1\alpha + \lambda\lambda_1 - 38\lambda_2^2)}{\lambda_1^7}a_1^7 \text{ com } \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Portanto temos que para um α' em F , a álgebra $\mathcal{B}_1(\alpha)$ será isomorfa com $\mathcal{B}_1(\alpha')$ se e somente se, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{\lambda(\alpha+1)}{2}$ e $\beta = \lambda_1^3$, consequentemente $\alpha = \alpha'$. Portanto temos que para α e α' em F

$$\mathcal{B}_1(\alpha) \cong \mathcal{B}_1(\alpha') \text{ se, e somente se, } \alpha = \alpha'.$$

Seja α não nulo. Para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^6}\alpha a_1^6 - \frac{6\beta^2\lambda_2\alpha}{\lambda_1^8}a_1^7 \text{ e } a_1^2 b_1 = -\frac{\lambda\beta}{\lambda_1^6}\alpha a_1^7 \text{ com } \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Neste caso é claro que para um α' em F^* ,

$$\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha')$$

se, e somente se, existir $\rho \in F^*$ tal que $\alpha = \rho^2\alpha'$.

Finalmente para um α qualquer em F , temos para $\mathcal{B}_7(\alpha)$ que para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_7(\alpha))$,

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^7} \alpha a_1^7 \text{ e } a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^5} a_1^7 \text{ com } \lambda_1, \beta \in F^*.$$

Logo para um α' em F , as álgebras $\mathcal{B}_7(\alpha)$ e $\mathcal{B}_7(\alpha')$ serão isomorfas se, e somente se, $\beta = \lambda_1^5$ e $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^7} \alpha = \frac{\lambda_1^{10}}{\lambda_1^7} \alpha = \lambda_1^3 \alpha$. Portanto para todo α e α' em F

$$\mathcal{B}_7(\alpha) \cong \mathcal{B}_7(\alpha')$$

se, e somente se, existir $\rho \in F^*$ tal que $\alpha' = \rho^3 \alpha$.

De todo o anterior temos o seguinte resultado para dimensão e nilíndice 8.

Teorema 4.45 *Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 8, é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\mathcal{A}_1(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6 + a^7, \quad a^2 b = a^5, \quad a^3 b = -a^6, \quad a^4 b = a^7. \quad [1];$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2 b = a^5, \quad a^3 b = -a^6, \quad a^4 b = a^7, \quad [1];$$

$$\mathcal{A}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad a^2 b = a^6, \quad a^3 b = -a^7, \quad [\rho^2];$$

$$\mathcal{A}_4 : \quad a^2 b = a^6, \quad a^3 b = -a^7;$$

$$\mathcal{A}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^6, \quad [\rho^2];$$

$$\mathcal{A}_6 : \quad b^2 = a^7, \quad a^2 b = a^6, \quad a^3 b = -a^7;$$

$$\mathcal{A}_7(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^7, \quad a^2 b = a^7, \quad [\rho^3];$$

$$\mathcal{A}_8 : \quad b^2 = a^7;$$

4.6 Classificação para dimensão maior ou igual a nove.

Finalmente, daremos nesta seção, o resultado geral que caracteriza as constantes de estrutura de uma nilálgebra $\mathcal{B}$ de dimensão e nilíndice n , na base determinada pelo par (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Além disso daremos dois teoremas de classificação para estas álgebras, os quais foram separados para n par e para n ímpar. Para facilitar a demonstração do teorema geral, demonstraremos primeiro o teorema para dimensão 9 e utilizaremos ele na prova do caso geral.

Teorema 4.46 *Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 9 e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então para a base $\{b, a, a^2, \dots, a^8\}$ de $\mathcal{B}$ os produtos não triviais são dados por:*

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha_7 a^7 + \alpha_8 a^8, \\ a^2 b &= \gamma_6 a^6 + \gamma_7 a^7 + \gamma_8 a^8, \\ a^3 b &= -\gamma_6 a^7 - \gamma_7 a^8, \\ a^4 b &= \gamma_6 a^8. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, \dots, a^8\}$, e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 9$ e $i, j \geq 1$, e (4.14), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice 9.

Prova: Seja $\mathcal{B}$ como no enunciado do teorema. Então $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/A_a^8 = \langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4, \bar{a}^5, \bar{a}^6, \bar{a}^7 \rangle$ e pelo Teorema 4.40, temos que $\bar{b}^2 = \alpha_6 \bar{a}^6 + \alpha_7 \bar{a}^7$ e $\bar{a}^2 \bar{b} = \gamma_5 \bar{a}^5 + \gamma_6 \bar{a}^6 + \gamma_7 \bar{a}^7$, logo

$$b^2 = \alpha_6 a^6 + \alpha_7 a^7 + \alpha_8 a^8 \quad \text{e} \quad a^2 b = \gamma_5 a^5 + \gamma_6 a^6 + \gamma_7 a^7 + \gamma_8 a^8,$$

portanto, por (4.1) a (4.5) temos que

$$\begin{aligned} a^3 b &= -\gamma_5 a^6 - \gamma_6 a^7 - \gamma_7 a^8, \\ a^4 b &= \gamma_5 a^7 + \gamma_6 a^8, \\ a^5 b &= -\frac{5}{3} \gamma_5 a^8, \end{aligned}$$

$a^6b = a^7b = 0$ e

$$a^2b^2 = \alpha_6a^8 = \frac{1}{2}(\alpha_6 - \frac{5}{3}\gamma_5^2)a^8,$$

de onde $\alpha_6 = -\frac{5}{3}\gamma_5^2$, isto é,

$$b^2 = -\frac{5}{3}\gamma_5^2a^6 + \alpha_7a^7 + \alpha_8a^8.$$

Seja

$$x = b + a + a^2.$$

Então

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + 2a^3 + a^4 + 2\gamma_5a^5 + (-\frac{5}{3}\gamma_5^2 + 2\gamma_6)a^6 + (2\gamma_7 + \alpha_7)a^7 \\ &\quad + (2\gamma_8 + \alpha_8)a^8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3 + 3a^4 + (3 + \gamma_5)a^5 + (1 + \gamma_6)a^6 + (3\gamma_5 - \frac{5}{3}\gamma_5^2 + \gamma_7)a^7 \\ &\quad + (-5\gamma_5^2 + 3\gamma_6 + \gamma_8 + \alpha_7)a^8, \end{aligned}$$

$$x^4 = a^4 + 4a^5 + 6a^6 + (4 + 4\gamma_5)a^7 + (1 - 2\gamma_5 - \frac{10}{3}\gamma_5^2 + 4\gamma_6)a^8$$

e

$$x^2x^2 = a^4 + 4a^5 + 6a^6 + (4 + 4\gamma_5)a^7 + (1 + 8\gamma_5 - \frac{10}{3}\gamma_5^2 + 4\gamma_6)a^8,$$

e como $\mathcal{B}$ é de p.a. temos que

$$0 = x^4 - x^2x^2 = -10\gamma_5a^8,$$

do que segue que $\gamma_5 = 0$, portanto $b^2 = \alpha_7a^7 + \alpha_8a^8$, $a^2b = \gamma_6a^6 + \gamma_7a^7 + \gamma_8a^8$, $a^3b = -\gamma_6a^7 - \gamma_7a^8$, $a^4b = \gamma_6a^8$ e $a^tb = 0$ para $t \geq 5$.

Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, \dots, a^8\}$ e produtos $ab = a^k = 0$, $a^ia^j = a^{i+j}$, para todo $k \geq 9$ e $i, j \geq 1$, e (4.14). Então para $x = \lambda b + \sum_{i=1}^8 \lambda_i a^i$, temos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + (2\lambda_1 \lambda_4 + 2\lambda_2 \lambda_3) a^5 + \quad (4.15) \\ &\quad (2\lambda \lambda_2 \gamma_6 + 2\lambda_1 \lambda_5 + 2\lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3^2) a^6 + (\lambda^2 \alpha_7 + 2\lambda \lambda_2 \gamma_7 - 2\lambda \lambda_3 \gamma_6 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_6 + 2\lambda_2 \lambda_5 + 2\lambda_3 \lambda_4) a^7 + (\lambda^2 \alpha_8 + 2\lambda \lambda_2 \gamma_8 - 2\lambda \lambda_3 \gamma_7 + 2\lambda \lambda_4 \gamma_6 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_7 + 2\lambda_2 \lambda_6 + 2\lambda_3 \lambda_5 + \lambda_4^2) a^8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + (3\lambda_3 \lambda_1^2 + 3\lambda_1 \lambda_2^2) a^5 + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_6 + 3\lambda_1^2 \lambda_4 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + \lambda_2^3) a^6 + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_7 + 3\lambda_1^2 \lambda_5 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + 3\lambda_1 \lambda_3^2 + 3\lambda_2^2 \lambda_3) a^7 + (\lambda \lambda_1^2 \gamma_8 \\
&\quad + 3\lambda \lambda_2^2 \gamma_6 + \lambda_1 \lambda^2 \alpha_7 + 3\lambda_1^2 \lambda_6 + 6\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 + 6\lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + 3\lambda_2^2 \lambda_4 + \\
&\quad 3\lambda_2 \lambda_3^2) a^8, \\
x^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6 + (4\lambda_1^3 \lambda_4 + 12\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \\
&\quad 4\lambda_1 \lambda_2^3) a^7 + (4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_6 + 4\lambda_1^3 \lambda_5 + 12\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_4 + 6\lambda_1^2 \lambda_3^2 + 12\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 \\
&\quad + \lambda_2^4) a^8, \\
x^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6 + (5\lambda_1^4 \lambda_3 + 10\lambda_1^3 \lambda_2^2) a^7 + (\lambda \lambda_1^4 \gamma_6 + 5\lambda_1^4 \lambda_4 + \\
&\quad 20\lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_3 + 10\lambda_1^2 \lambda_2^3) a^8, \\
x^6 &= \lambda_1^6 a^6 + 6\lambda_1^5 \lambda_2 a^7 + (6\lambda_1^5 \lambda_3 + 15\lambda_1^4 \lambda_2^2) a^8, \\
x^7 &= \lambda_1^7 a^7 + 7\lambda_1^6 \lambda_2 a^8, \\
x^8 &= \lambda_1^8 a^8, \\
x^9 &= 0, \\
x^2 x^2 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_1^3 \lambda_3 + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2) a^6 + (4\lambda_1^3 \lambda_4 + 12\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \\
&\quad 4\lambda_1 \lambda_2^3) a^7 + (4\lambda \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_6 + 4\lambda_1^3 \lambda_5 + 12\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_4 + 6\lambda_1^2 \lambda_3^2 + 12\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 \\
&\quad + \lambda_2^4) a^8,
\end{aligned}$$

assim $x^4 = x^2 x^2$ e podemos concluir que $\mathcal{B}$ é de p.a. e tem nilíndice 9. $\square$

Teorema 4.47 *Seja n maior ou igual que 8. Se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n e (a, b) um elemento em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, então para a base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ de $\mathcal{B}$ os produtos não triviais são dados por:*

$$\begin{aligned}
b^2 &= \alpha_{n-2} a^{n-2} + \alpha_{n-1} a^{n-1}, \\
a^2 b &= \gamma_{n-3} a^{n-3} + \gamma_{n-2} a^{n-2} + \gamma_{n-1} a^{n-1}, \\
a^3 b &= -\gamma_{n-3} a^{n-2} - \gamma_{n-2} a^{n-1}, \\
a^4 b &= \gamma_{n-3} a^{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$,

e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para $k \geq n$ e $i, j \geq 1$, e (4.16), então $\mathcal{B}$ é de p.a. e nilíndice n .

Prova: Demonstraremos a primeira parte do teorema por indução sobre n . Para n igual a 8 e 9, o resultado é válido pelos Teoremas 4.40 e 4.46.

Suponhamos, por hipótese de indução, que para $8 \leq k \leq n-1$, os produtos não nulos na base $\{b, a, a^2, \dots, a^k\}$ são dados por:

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha_{k-2}a^{k-2} + \alpha_{k-1}a^{k-1}, \\ a^2b &= \gamma_{k-3}a^{n-3} + \gamma_{k-2}a^{k-2} + \gamma_{k-1}a^{k-1}, \\ a^3b &= -\gamma_{k-3}a^{k-2} - \gamma_{k-2}a^{k-1}, \\ a^4b &= \gamma_{k-3}a^{k-1}, \end{aligned}$$

e demonstremos para $k = n$.

Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n e base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ e produtos não triviais dados por (4.16). Uma vez que $A_a^{n-1} = \langle a^{n-1} \rangle$ é um ideal de $\mathcal{B}$, temos que $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/A_a^{n-1} = \{\bar{b}, \bar{a}, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^{n-2}\}$. Pela hipótese de indução,

$$\bar{b}^2 = \alpha_{n-3}\bar{a}^{n-3} + \alpha_{n-2}\bar{a}^{n-2}$$

e

$$\bar{a}^2\bar{b} = \gamma_{n-4}\bar{a}^{n-4} + \gamma_{n-3}\bar{a}^{n-3} + \gamma_{n-2}\bar{a}^{n-2},$$

logo

$$b^2 = \alpha_{n-3}a^{n-3} + \alpha_{n-2}a^{n-2} + \alpha_{n-1}a^{n-1}$$

e

$$a^2b = \gamma_{n-4}a^{n-4} + \gamma_{n-3}a^{n-3} + \gamma_{n-2}a^{n-2} + \gamma_{n-1}a^{n-1},$$

e utilizando as igualdades (4.1) a (4.5) obtemos que

$$a^3b = -\gamma_{n-4}a^{n-3} - \gamma_{n-3}a^{n-2} + \gamma_{n-2}a^{n-1},$$

$$\begin{aligned}
a^4b &= \frac{1}{3}[3(\gamma_{n-4}a^{n-2} + \gamma_{n-3}a^{n-1}) - 2(-\gamma_{n-4}a^{n-2} - \gamma_{n-3}a^{n-1}) \\
&\quad - 2(\gamma_{n-4}a^{n-2} + \gamma_{n-3}a^{n-1})] \\
&= \gamma_{n-4}a^{n-2} + \gamma_{n-3}a^{n-1}, \\
a^5b &= \frac{1}{3}[4(-\gamma_{n-4}a^{n-1}) - (\gamma_{n-4}a^{n-1}) - 2(-\gamma_{n-4}a^{n-1}) \\
&\quad - 2(\gamma_{n-4}a^{n-1})] \\
&= -\frac{5}{3}\gamma_{n-4}a^{n-1},
\end{aligned}$$

e para $r \geq 4$, temos que $a^2(a^r b) \in A_a^2 A_a^{n-2} = A_a^n = \{0\}$, $a^r(a^2 b) \in A_a^4 A_a^{n-4} = A_a^n = \{0\}$, $a(a^{r+1} b) \in A_a A_a^{n-1} = A_a^n = \{0\}$ e $a(a(a^r b)) \in A_a A_a A_a^{n-2} = A_a^n = \{0\}$, portanto

$$a^{r+2}b = \frac{1}{3}[4a^2(a^r b) - a^r(a^2 b) - 2a(a^{r+1} b) - 2a(a(a^r b))] = 0,$$

para $r \geq 4$, assim

$$a^t b = 0 \quad \text{para} \quad t \geq 6.$$

Temos que

$$a^2 b^2 = \alpha_{n-3} a^{n-1}$$

e por (4.1),

$$\begin{aligned}
a^2 b^2 &= \frac{1}{2}[\alpha_{n-3} a^{n-1} + \gamma_{n-4} a^{n-4} b + \gamma_{n-3} a^{n-3} b + \gamma_{n-2} a^{n-2} b + \gamma_{n-1} a^{n-1} b], \\
&= \frac{1}{2} \alpha_{n-3} a^{n-1},
\end{aligned}$$

pois para $n \geq 10$ temos que $a^{n-i} \geq 6$ e portanto $a^{n-i} b = 0$, para $1 \leq i \leq 4$, de onde $\alpha_{n-3} = 0$. Assim

$$b^2 = \alpha_{n-2} a^{n-2} + \alpha_{n-1} a^{n-1}.$$

Seja

$$x = b + a + a^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
x^2 &= a^2 + 2a^3 + a^4 + 2\gamma_{n-4}a^{n-4} + 2\gamma_{n-3}a^{n-3} + (2\gamma_{n-2} + \alpha_{n-2})a^{n-2} \\
&\quad + (2\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1})a^{n-1}, \\
x^3 &= a^3 + 3a^4 + 3a^5 + a^6 + \gamma_{n-4}a^{n-4} + \gamma_{n-3}a^{n-3} + (\gamma_{n-2} + 3\gamma_{n-4})a^{n-2} \\
&\quad + (\gamma_{n-1} + 3\gamma_{n-3} + \alpha_{n-2})a^{n-1}, \\
x^4 &= a^4 + 4a^5 + 6a^6 + 4a^7 + a^8 + 4\gamma_{n-4}a^{n-2} + (4\gamma_{n-3} - 2\gamma_{n-4})a^{n-1}
\end{aligned}$$

e

$$x^2x^2 = a^4 + 4a^5 + 6a^6 + 4a^7 + a^8 + 4\gamma_{n-4}a^{n-2} + (4\gamma_{n-3} + 8\gamma_{n-4})a^{n-1},$$

logo

$$0 = x^4 - x^2x^2 = -10\gamma_{n-4}a^{n-1},$$

pois $\mathcal{B}$ é de p.a., do que segue que $\gamma_{n-4} = 0$, portanto $b^2 = \alpha_{n-2}a^{n-2} + \alpha_{n-1}a^{n-1}$, $a^2b = \gamma_{n-3}a^{n-3} + \gamma_{n-2}a^{n-2} + \gamma_{n-1}a^{n-1}$, $a^3b = -\gamma_{n-3}a^{n-2} - \gamma_{n-2}a^{n-1}$, $a^4b = \gamma_{n-3}a^{n-1}$ e $a^tb = 0$ para $t \geq 5$.

Para demonstrar a outra parte do teorema, seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa com base $\{b, a, \dots, a^{n-1}\}$ e produtos $ab = a^k = 0$, $a^ia^j = a^{i+j}$, para $k \geq n$ e $i, j \geq 1$, e (4.16). Mostraremos primeiro que $\mathcal{B}$ é de p.a. Para isto, seja $x = \lambda b + p(a)$ com $p(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^i$. Então

$$\begin{aligned}
x^2 &= \lambda^2 b^2 + 2\lambda b \cdot p(a) + p^2(a), \\
x^3 &= \lambda^3 b^3 + 2\lambda^2 b(b \cdot p(a)) + \lambda b \cdot p^2(a) + \lambda^2 b^2 \cdot p(a) + 2\lambda p(a)(b \cdot p(a)) \\
&\quad + p^3(a), \\
x^4 &= \lambda^4 b^4 + 2\lambda^3 b(b(b \cdot p(a))) + \lambda^2 b(b \cdot p^2(a)) + \lambda^3 b(b^2 \cdot p(a)) + \\
&\quad 2\lambda^2 b(p(a)(b \cdot p(a))) + \lambda b \cdot p^3(a) + \lambda^3 p(a) \cdot b^3 + 2\lambda^2 p(a)(b(b \cdot p(a))) + \\
&\quad \lambda p(a)(b \cdot p^2(a)) + \lambda^2 p(a)(b^2 \cdot p(a)) + 2\lambda p(a)(p(a)(b \cdot p(a))) + p^4(a), \\
x^2x^2 &= \lambda^4 b^2 \cdot b^2 + 4\lambda^3 b^2(b \cdot p(a)) + 2\lambda^2 b^2 \cdot p^2(a) + 4\lambda^2(b \cdot p(a))(b \cdot p(a)) \\
&\quad + 4\lambda p^2(a)(b \cdot p(a)) + p^2(a) \cdot p^2(a).
\end{aligned}$$

Provaremos que $x^4 - x^2x^2 = 0$, verificando as seguintes igualdades:

$$4b^2(b \cdot p(a)) = 2b(b(b \cdot p(a))) + b(b^2 \cdot p(a)) + b^3 \cdot p(a), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} 4p^2(a)(b \cdot p(a)) &= b \cdot p^3(a) + p(a)(b \cdot p^2(a)) + \\ &2p(a)(p(a)(b \cdot p(a))), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} 2b^2 \cdot p^2(a) + 4(b \cdot p(a))^2 &= b(b \cdot p^2(a)) + 2b(p(a)(b \cdot p(a))) + \\ &2p(a)(b(b \cdot p(a))) + p(a)(b^2 \cdot p(a)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Uma vez que,

$$p(a) = \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 + \lambda_4 a^4 + \sum_{i=5}^{n-1} \lambda_i a^i,$$

temos que

$$\begin{aligned} b \cdot p(a) &= \lambda_2 b a^2 + \lambda_3 b a^3 + \lambda_4 b a^4 \\ &= \lambda_2(\gamma_{n-3} a^{n-3} + \gamma_{n-2} a^{n-2} + \gamma_{n-1} a^{n-1}) + \lambda_3(-\gamma_{n-3} a^{n-2} - \\ &\gamma_{n-2} a^{n-1}) + \lambda_4 \gamma_{n-3} a^{n-1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} b \cdot p(a) &= \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-3} + (\lambda_2 \gamma_{n-2} - \lambda_3 \gamma_{n-3}) a^{n-2} + \\ &(\lambda_2 \gamma_{n-1} - \lambda_3 \gamma_{n-2} + \lambda_4 \gamma_{n-3}) a^{n-1} \in A_a^{n-3}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Portanto $b(b \cdot p(a)) = 0$, e assim

$$b^2(b \cdot p(a)) = b(b(b \cdot p(a))) = 0.$$

Por outro lado, temos que, $b^3 = b b^2 \in b A_a^{n-2} = \{0\}$ e

$$b^2 \cdot p(a) = (\alpha_{n-2} a^{n-2} + \alpha_{n-1} a^{n-1}) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^i = \lambda_1 \alpha_{n-2} a^{n-1}.$$

Em consequência,

$$b(b^2 \cdot p(a)) = b^3 \cdot p(a) = 0,$$

o que verifica (4.17).

Temos que

$$\begin{aligned} p^2(a) &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + \\ &\quad \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i^2 a^{2i} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\substack{j=i+1 \\ (i,j) \neq (1,2), (1,3)}}^{n-1} \lambda_i \lambda_j a^{i+j}, \\ p^3(a) &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + \sum_{i=5}^{n-1} \theta_i a^i, \end{aligned}$$

logo

$$b \cdot p^3(a) = \lambda_1^3 b a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 b a^4 = -\lambda_1^3 (\gamma_{n-3} a^{n-2} + \gamma_{n-2} a^{n-1}) + 3\lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-1},$$

pois $b a^i = 0$, para $i \geq 5$. Assim,

$$b \cdot p^3(a) = -\lambda_1^3 \gamma_{n-3} a^{n-2} + (-\lambda_1^3 \gamma_{n-2} + 3\lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3}) a^{n-1}.$$

Agora

$$\begin{aligned} b \cdot p^2(a) &= \lambda_1^2 b a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 b a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) b a^4 \\ &= \lambda_1^2 \gamma_{n-3} a^{n-3} + \lambda_1 (\lambda_1 \gamma_{n-2} - 2\lambda_2 \gamma_{n-3}) a^{n-2} + (\lambda_1^2 \gamma_{n-1} + \lambda_2^2 \gamma_{n-3} + \\ &\quad 2\lambda_1 \lambda_3 \gamma_{n-3} - 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma_{n-2}) a^{n-1} \in A_a^{n-3}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

do que segue que

$$p(a)(b \cdot p^2(a)) = \lambda_1^3 \gamma_{n-3} a^{n-2} + \lambda_2 \lambda_1^2 \gamma_{n-3} a^{n-1} + \lambda_1^2 (\lambda_1 \gamma_{n-2} - 2\lambda_2 \gamma_{n-3}) a^{n-1},$$

isto é,

$$p(a)(b \cdot p^2(a)) = \lambda_1^3 \gamma_{n-3} a^{n-2} + \lambda_1^2 (-\lambda_2 \gamma_{n-3} + \lambda_1 \gamma_{n-2}) a^{n-1}.$$

Por (4.20), temos que

$$\begin{aligned} p^2(a)(b \cdot p(a)) &= \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-1}, \\ p(a)(b \cdot p(a)) &= \lambda_1 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-2} + \lambda_1 (\lambda_2 \gamma_{n-2} - \lambda_3 \gamma_{n-3}) a^{n-1} + \lambda_2^2 \gamma_{n-3} a^{n-1} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-2} + (\lambda_2^2 \gamma_{n-3} + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_{n-2} - \lambda_1 \lambda_3 \gamma_{n-3}) a^{n-1}, \end{aligned}$$

logo

$$p^2(a)(b \cdot p(a)) = p(a)(p(a)(b \cdot p(a))) = \lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-1}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} & b \cdot p^3(a) + p(a)(b \cdot p^2(a)) + 2p(a)(p(a)(b \cdot p(a))) \\ &= -\lambda_1^3 \gamma_{n-3} a^{n-2} + (-\lambda_1^3 \gamma_{n-2} + 3\lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3}) a^{n-1} + \lambda_1^3 \gamma_{n-3} a^{n-2} + \\ & \quad \lambda_1^2 (-\lambda_2 \gamma_{n-3} + \lambda_1 \gamma_{n-2}) a^{n-1} + 2\lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-1} \\ &= 4\lambda_1^2 \lambda_2 \gamma_{n-3} a^{n-1} \\ &= 4p^2(a) \cdot b \cdot p(a), \end{aligned}$$

verificando (4.18).

Por (4.20) e (4.21), temos que $b \cdot p(a), b \cdot p^2(a) \in A_a^{n-3}$, logo $(b \cdot p(a))^2 \in A_a^{2(n-3)} = \{0\}$ e $b(b \cdot p^2(a)) \in bA_a^{n-3} = \{0\}$, e uma vez que, $b^2 \cdot p^2(a) \in A_a^{n-2} A_a^2 = \{0\}$, podemos concluir que

$$(b \cdot p(a))^2 = b(b \cdot p^2(a)) = b^2 \cdot p^2(a) = 0.$$

Por outro lado, segue de (4.20), que $b(b \cdot p(a)) \in bA_a^{n-3} = \{0\}$ e $p(a)(b \cdot p(a)) \in A_a^{n-2}$, portanto $p(a)(b(b \cdot p(a))) = 0$ e $b(p(a)(b \cdot p(a))) \in bA_a^{n-2} = \{0\}$. Finalmente, temos que $p(a)(b^2 \cdot p(a)) \in A_a A_a^{n-2} A_a = A_a^n = \{0\}$. Assim

$$p(a)(b(b \cdot p(a))) = b(p(a)(b \cdot p(a))) = p(a)(b^2 \cdot p(a)) = 0,$$

o que nos verifica (4.19).

Para concluirmos que $x^4 = x^2 x^2$, resta mostrar que $b^4 = b^2 b^2$ e que $p^4(a) = p^2(a) p^2(a)$. O segundo fato é imediato da tabela de multiplicação para os a^i , em quanto ao primeiro, temos que, $b^2 b^2 \in A_a^{2(n-2)} = \{0\}$, e uma vez que mostramos que $b^3 = 0$, segue que $b^4 = 0$. Assim podemos concluir, de todo o anterior, que $\mathcal{B}$ é de p.a.

Passemos agora a demonstrar que $\mathcal{B}$ tem nilíndice $n - 1$. Seja $x = \lambda b + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^i$. Mostraremos que para $n \geq 9$ e $k \geq 2$, cumpre-se que:

$$x^k = \lambda_1^k a^k + k\lambda_1^{k-1} \lambda_2 a^{k+1} + \left[k\lambda_3 \lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_2^2 \lambda_1^{k-2} \right] a^{k+2} + \sum_{i=k+3}^{n-1} \theta_i a^i, \quad (4.22)$$

sendo que $\sum_{i=k+3}^{n-1} \theta_i a^i = 0$ para $k \geq n - 3$.

Demonstraremos a igualdade anterior por indução sobre n . Para $n = 9$, temos por (4.15) que:

$$\begin{aligned} x^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2^2) a^4 + \sum_{i=5}^8 \theta_{2,i} a^i, \\ x^3 &= \lambda_1^3 a^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 a^4 + (3\lambda_3 \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 \lambda_1) a^5 + \sum_{i=6}^8 \theta_{3,i} a^i, \\ x^4 &= \lambda_1^4 a^4 + 4\lambda_1^3 \lambda_2 a^5 + (4\lambda_3 \lambda_1^3 + 6\lambda_2^2 \lambda_1^2) a^6 + \sum_{i=7}^8 \theta_{4,i} a^i, \\ x^5 &= \lambda_1^5 a^5 + 5\lambda_1^4 \lambda_2 a^6 + (5\lambda_3 \lambda_1^4 + 10\lambda_2^2 \lambda_1^3) a^7 + \theta a^8 \\ x^6 &= \lambda_1^6 a^6 + 6\lambda_1^5 \lambda_2 a^7 + (6\lambda_3 \lambda_1^5 + 15\lambda_2^2 \lambda_1^4) a^8 \\ x^7 &= \lambda_1^7 a^7 + 7\lambda_1^6 \lambda_2 a^8, \\ x^8 &= \lambda_1^8 a^8. \end{aligned}$$

o que verifica (4.22) para dimensão 9.

Suponhamos por hipótese de indução que

$$x^k = \lambda_1^k a^k + k\lambda_1^{k-1} \lambda_2 a^{k+1} + \left[k\lambda_3 \lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_2^2 \lambda_1^{k-2} \right] a^{k+2} + \sum_{i=k+3}^{m-1} \theta_i a^i,$$

para $9 \leq m \leq n - 1$ e demonstremos a igualdade para $m = n$.

Seja $\mathcal{B}$ uma nilálgebra comutativa, com base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, e produtos $ab = a^k = 0$, $a^i a^j = a^{i+j}$, para $k \geq n$ e $i, j \geq 1$, e (4.16). Se $x \in \mathcal{B}$, então lembrando que $\langle a^{n-1} \rangle$ é um ideal de $\mathcal{B}$, temos que $\bar{x} \in \bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} / \langle a^{n-1} \rangle$ é da forma $\bar{x} = \lambda \bar{b} + \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}^2 + \dots + \lambda_{n-2} \bar{a}^{n-2}$, logo pela hipótese de indução temos que

$$\bar{x}^k = \lambda_1^k \bar{a}^k + k\lambda_1^{k-1} \lambda_2 \bar{a}^{k+1} + \left[k\lambda_3 \lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} \lambda_2^2 \lambda_1^{k-2} \right] \bar{a}^{k+2} + \sum_{i=k+3}^{n-2} \theta_i \bar{a}^i.$$

Portanto

$$x^k = \lambda_1^k a^k + k\lambda_1^{k-1}\lambda_2 a^{k+1} + \left[k\lambda_3\lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-2} \right] a^{k+2} + \sum_{i=k+3}^{n-2} \theta_i a^i + \theta a^{n-1}$$

e

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \lambda_1^k x a^k + k\lambda_1^{k-1}\lambda_2 x a^{k+1} + \left[k\lambda_3\lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-2} \right] x a^{k+2} \\ &\quad + \sum_{i=k+3}^{n-2} \theta_i x a^i + \theta x a^{n-1} \\ &= \lambda_1^k \lambda b a^k + \lambda_1^{k+1} a^{k+1} + \lambda_1^k \lambda_2 a^{k+2} + \lambda_1^k \lambda_3 a^{k+3} + \lambda_1^k \sum_{i=4}^{n-1} \lambda_i a^{i+k} + \\ &\quad k\lambda_1^{k-1}\lambda_2 \lambda b a^{k+1} + k\lambda_1^k \lambda_2 a^{k+2} + k\lambda_1^{k-1}\lambda_2^2 a^{k+3} + k\lambda_1^{k-1}\lambda_2 \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i a^{k+1+i} \\ &\quad + \left[k\lambda_3\lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-2} \right] \lambda b a^{k+2} + \left[k\lambda_3\lambda_1^k + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-1} \right] \\ &\quad a^{k+3} + \left[k\lambda_3\lambda_1^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-2} \right] \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i a^{k+2+i} + \sum_{i=k+4}^{n-1} \tilde{\theta}_i a^i \\ &= \lambda_1^{k+1} a^{k+1} + (\lambda_1^k \lambda_2 + k\lambda_1^k \lambda_2) a^{k+2} + \left\{ \lambda_1^k \lambda_3 + k\lambda_1^{k-1}\lambda_2^2 + \left[k\lambda_3\lambda_1^k + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-1} \right] \right\} a^{k+3} + \sum_{i=k+4}^{n-1} \rho_i a^i \\ &= \lambda_1^{k+1} a^{k+1} + (k+1)\lambda_1^k \lambda_2 a^{k+2} + \left[(k+1)\lambda_3\lambda_1^k + \frac{k(k+1)}{2}\lambda_2^2\lambda_1^{k-1} \right] a^{k+3} \\ &\quad + \sum_{i=k+4}^{n-1} \rho_i a^i, \end{aligned}$$

pois $ba^k \in A_a^{n-3}$, para $k \geq 2$ e $n \geq 9$, com o qual fica verificada (4.22). Assim para $k = n$, temos que $x^n = \lambda_1^n a^n = 0$, o que nos mostra que $x^n = 0$

para todo $x \in \mathcal{B}$ e existe $a \in \mathcal{B}$ tal que $a^{n-1} \neq 0$. Portanto podemos concluir que $\mathcal{B}$ tem nilíndice n . $\square$

Denotaremos por $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1)$ a álgebra do teorema anterior. Estudemos as classes de isomorfismos de todas as álgebras desta forma. Para tal fixaremos o par (a, b) que determina a base canônica para dita álgebra, quando não houver lugar a a confusão nos referiremos a esta álgebra simplesmente como $\mathcal{B}$.

Sejam λ e β em F^* . Então definindo os elemento $a_1 := \lambda a$ e $b_1 := \beta a$, obtemos o seguinte isomorfismo.

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\beta^2}{\lambda^{n-2}}\alpha_2, \frac{\beta^2}{\lambda^{n-1}}\alpha_1, \frac{\beta}{\lambda^{n-5}}\gamma_3, \frac{\beta}{\lambda^{n-4}}\gamma_2, \frac{\beta}{\lambda^{n-3}}\gamma_1\right). \quad (4.23)$$

Observamos que se consideramos $\beta = \frac{1}{\gamma_3}$ e $\lambda = 1$, então

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1) \cong \mathcal{B}\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_3^2}, \frac{\alpha_1}{\gamma_3^2}, 1, \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \frac{\gamma_1}{\gamma_3}\right).$$

Portanto podemos supor, a menos de isomorfismos, que $\gamma_3 = 0$ ou $\gamma_3 = 1$. Achamos então as classes de isomorfismos considerando estes dois casos.

- ($\gamma_3 = 1$.) Neste caso temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 1, \gamma_2, \gamma_1)$.

Lema 4.48 *Sejam $\alpha_2, \alpha_1, \gamma_2$ e γ_1 em F . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 1, \gamma_2, \gamma_1) \cong \mathcal{B}(\alpha'_2, \alpha'_1, 1, 0, 0).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 1, \gamma_2, \gamma_1)$ em relação a base determinada pelo par (a, b) . Definimos os seguintes elementos em $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} a_1 &:= a + \frac{\gamma_2}{n} a^2 + \left[\frac{\gamma_1}{(n-6)} - \frac{(n^2 - n + 12) \gamma_2^2}{2n^2(n-6)} \right] a^3 \\ &\quad + \left[\frac{6\gamma_1 \gamma_2}{n(n-6)} - \frac{(n^3 - 3n^2 + 26n - 12) \gamma_2^3}{2n^3(n-6)} \right] a^4 \end{aligned}$$

e

$$b_1 := b - \frac{\gamma_2}{n} a^{n-4} + \left[\frac{\gamma_1}{(n-6)} - \frac{3(n^2 - 5n + 8) \gamma_2^2}{2n^2(n-6)} \right] a^{n-3}.$$

Observamos que a_1 é um elemento de nilíndice máximo, pois por (4.22) $a_1^{n-1} = a^{n-1} \neq 0$. Da definição é claro que $b_1 \notin A_{a_1}$, e fazendo um calculo direto obtemos que $a_1 b_1 = 0$. Portanto (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Utilizando (4.22) para calcular $a_1^2, a_1^{n-3}, a_1^{n-2}$ e a_1^{n-1} , e calculando os produtos, b_1^2 e $a_1^2 b_1$, obtemos que

$$b_1^2 = \alpha'_2 a_1^{n-2} + \alpha'_2 a_1^{n-1} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = a_1^{n-3},$$

o que demonstra o lema. $\square$

- $(\gamma_3 = 0.)$ Neste caso temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, \gamma_2, \gamma_1)$.

Se $\gamma_2 \neq 0$, então considerando $\beta = \frac{1}{\gamma_2}$ e $\lambda = 1$, em (4.23) segue que

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, \gamma_2, \gamma_1) \cong \mathcal{B}(\alpha'_2, \alpha'_1, 0, 1, \gamma'_1).$$

Lema 4.49 *Sejam α_2, α_1 e γ_1 em F . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 1, \gamma_1) \cong \mathcal{B}(\alpha'_2, \alpha'_1, 0, 1, 0).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 1, \gamma_1)$ em relação a base determinada pelo par (a, b) . Definimos os seguintes elementos em $\mathcal{B}$,

$$a_1 := a + \frac{\gamma_1}{(n+1)} a^2 + \frac{n \gamma_1^2}{(n+1)^2} a^3,$$

$$b_1 := b - \frac{\gamma_1}{(n+1)} a^{n-3}.$$

Então um calculo direto nos mostra que $a_1 b_1 = 0$, e uma vez que é claro que a_1 tem nilíndice máximo e que b_1 não pertence a A_{a_1} , segue que (a_1, b_1) pertence a $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Utilizando (4.22) para calcular as potências de a_1 , e calculando os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$ em termos das potências de a_1 obtemos que

$$b_1^2 = \alpha'_{n-2} a_1^{n-2} + \alpha'_{n-1} a_1^{n-1} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = a_1^{n-2}.$$

Isto prova o lema. $\square$

Lema 4.50 *Seja α_2 não nulo e α_1 em F . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 1, 0) \cong \mathcal{B}(\alpha_2, 0, 0, 1, 0).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 1, 0)$ em relação a base determinada pelo par (a, b) . Definindo os seguintes elementos em $\mathcal{B}$,

$$a_1 := -\frac{(n+1)\alpha_1}{(n-2)\alpha_2^2}b + a + \frac{\alpha_1}{(n-2)\alpha_2}a^2 + \frac{[n\alpha_1^2 - (n+1)(n-2)\alpha_1^2]}{(n-2)^2\alpha_2^2}a^3$$

e

$$b_1 := b + \frac{n\alpha_1}{(n-2)\alpha_2}a^{n-3},$$

temos que (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ e calculando os produtos b_1^2 e $a_1^2 b_1$, obtemos as constantes de estrutura de $\mathcal{B}$ em relação a base determinada pelo par (a_1, b_1) , o que nos mostra o isomorfismo. $\square$

Observamos que se $\alpha_2 = 0$ então temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_1, 0, 1, 0)$.

Se $\gamma_2 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, \gamma_1)$. Neste caso, se γ_1 é não nulo, então fazendo $\beta = \frac{1}{\gamma_1}$ e $\lambda = 1$ em (4.23), obtemos que

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, \gamma_1) \cong \mathcal{B}(\alpha'_2, \alpha'_1, 0, 0, 1).$$

Lema 4.51 *Seja α_2 não nulo e α_1 em F . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, 1) \cong \mathcal{B}(\alpha_2, 0, 0, 0, 1).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, 1)$ em relação a base determinada pelo par (a, b) . Definimos os seguinte elementos em $\mathcal{B}$,

$$a_1 := a + \frac{\alpha_1}{(n-2)\alpha_2} a^2 \quad \text{e} \quad b_1 := b - \frac{\alpha_1}{(n-2)\alpha_2} a^{n-2}.$$

Igual que no lema anterior obtemos que (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ e

$$b_1^2 = \alpha_2' a_1^{n-2} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = a_1^{n-3},$$

o que demonstra o lema. $\square$

Se $\alpha_2 = 0$ então temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_1, 0, 0, 1)$. Quando $\gamma_1 = 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, 0)$.

Lema 4.52 *Seja α_2 não nulo e α_1 em F . Então*

$$\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, 0) \cong \mathcal{B}(\alpha_2, 0, 0, 0, 0).$$

Prova: Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, 0, 0, 0)$ em relação a base determinada pelo par (a, b) . Basta definir o seguinte elemento em $\mathcal{B}$,

$$a_1 := a + \frac{\alpha_1}{(n-2)\alpha_2} a^2,$$

para obter que (a_1, b) está em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ e

$$b^2 = \alpha_2' a_1^{n-2} \quad \text{e} \quad a_1^2 b = 0,$$

o que demonstra o lema. $\square$

Para $\alpha_2 \neq 0$, temos a álgebra $\mathcal{B}(0, \alpha_1, 0, 0, 0)$.

De todo o anterior temos que se $\mathcal{B}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , então existe uma base da forma $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, cujos produtos são dados por um da seguinte lista:

$$\mathcal{B}_1(\alpha, \theta) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2} + \theta a^{n-1}, \quad a^2 b = a^{n-3}, \quad a^3 b = -a^{n-2}, \quad a^4 b = a^{n-1};$$

$$\mathcal{B}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad a^2 b = a^{n-2}, \quad a^3 b = -a^{n-1}, \quad \alpha \in F^*;$$

$$\mathcal{B}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2 b = a^{n-2}, \quad a^3 b = -a^{n-1};$$

$$\mathcal{B}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad a^2 b = a^{n-1}, \quad \alpha \in F^*;$$

$$\mathcal{B}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2 b = a^{n-1};$$

$$\mathcal{B}_6(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad \alpha \in F^*;$$

$$\mathcal{B}_7(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad \alpha \in F^*;$$

$$\mathcal{B}_8 :$$

e os outros produtos não triviais são zero. Portanto toda álgebra desta classe é isomorfa a uma da lista anterior. Analisemos as condições de isomorfismo da lista anterior.

É claro que $\mathcal{B}_8$ não é isomorfa com as outras $\mathcal{B}_i$ por causa da dimensão do seu anulador. Por outro lado temos que se $\bar{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}/\text{Anul}(\mathcal{B}_i)$, então a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_5$ e $\bar{\mathcal{B}}_7$ é 2 em quanto que a dimensão do anulador de $\bar{\mathcal{B}}_i$ é 1 para $i \neq 5, 7$. Olhando agora para a dimensão do anulador de $\text{Anul}(\bar{\mathcal{B}}_i)$, temos que é 1 para $i = 1$, e é 2 para $i = 2, 3, 4, 6$. Portanto temos que

$$\mathcal{B}_1 \not\cong \mathcal{B}_i \quad \text{para } i \neq 1.$$

As álgebras restantes da lista anterior, ficam divididas em dois conjuntos de álgebras não isomorfas, eles são:

$$C1 : \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_6. \quad C2 : \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_7.$$

Lema 4.53 *Para todo α não nulo,*

$$\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_4(\alpha).$$

Prova: Seja α não nulo e $(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-2}$ e os outros produtos não triviais são zero. Definindo os elementos

$$a_1 := -\frac{1}{\alpha}b + a \quad \text{e} \quad b_1 := b + a^{n-3},$$

obtemos que $(a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_6(\alpha))$ e que

$$b_1^2 = \alpha a_1^{n-2} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = a_1^{n-1},$$

o que nos mostra o isomorfismo. $\square$

Antes de continuar com o análise das condições de isomorfismo daremos algumas propriedades para os pares (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, sendo $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}(\alpha_2, \alpha_1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1)$. No seguinte lema nos referiremos a esta álgebra por $\mathcal{B}$.

Lema 4.54 *Seja n maior ou igual que 9 e (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$*

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-4} a^{n-4} + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1},$$

com β não nulo e β_i em F .

Prova: Seja (a, b) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ tal que $b^2 = \alpha_2 a^{n-2} + \alpha_1 a^{n-1}$, $a^2 b = \gamma_3 a^{n-3} + \gamma_2 a^{n-2} + \gamma_1 a^{n-1}$, $a^3 b = -\gamma_3 a^{n-2} - \gamma_2 a^{n-1}$, $a^4 b = \gamma_3 a^{n-1}$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$. O par (a_1, b_1) exprime-se na base anterior como $a_1 = \lambda b + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^i$ e $b_1 = \beta b + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i a^i$. Mostraremos por indução sobre n que $b_1 \in \langle b \rangle + \mathcal{B}^{n-4}$. Lembremos que por (4.22), $a_1^{n-1} = \lambda_1^{n-1} \neq 0$ e assim $\lambda_1 \neq 0$.

Para $n = 9$, temos que $b^2 = \alpha_7 a^7 + \alpha_8 a^8$, $a^2 b = \gamma_6 a^6 + \gamma_7 a^7 + \gamma_8 a^8$, $a^3 b = -\gamma_6 a^7 - \gamma_7 a^8$ e $a^4 b = \gamma_6 a^8$. Logo

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda_1 \beta_1 a^2 + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2 \beta_1) a^3 + (\lambda_1 \beta_3 + \lambda_2 \beta_2 + \lambda_3 \beta_1) a^4 + (\lambda_1 \beta_4 + \lambda_2 \beta_3 \\ &\quad + \lambda_3 \beta_2 + \lambda_4 \beta_1) a^5 + (\lambda_1 \beta_2 \gamma_6 + \lambda_1 \beta_5 + \lambda_1 \beta \gamma_6 + \lambda_2 \beta_4 \lambda_3 \beta_3 + \lambda_4 \beta_2 + \\ &\quad + \lambda_5 \beta_1) a^6 + (\lambda \beta_2 \alpha_7 + \lambda \beta_2 \gamma_7 - \lambda \beta_3 \gamma_6 + \lambda_1 \beta_6 + \lambda_2 \beta \gamma_7 + \lambda_2 \beta_5 - \lambda_3 \beta \gamma_6 \\ &\quad + \lambda_3 \beta_4 + \lambda_4 \beta_3 + \lambda_5 \beta_2 + \lambda_6 \beta_1) a^7 + (\lambda \beta \alpha_8 + \lambda \beta_2 \gamma_8 - \lambda \beta_3 \gamma_7 + \lambda \beta_4 \gamma_6 \\ &\quad + \lambda_1 \beta_7 + \lambda_2 \beta \gamma_8 + \lambda_2 \beta_6 - \lambda_3 \beta \gamma_7 + \lambda_3 \beta_5 + \lambda_4 \beta \gamma_6 + \lambda_4 \beta_4 + \lambda_5 \beta_3 + \\ &\quad + \lambda_6 \beta_2 + \lambda_7 \beta_1) a^8 \\ &= 0, \end{aligned}$$

e uma vez que $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_1 = 0$. Igualmente concluímos que $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, portanto

$$b_1 = \beta b + \beta_5 a^5 + \beta_6 a^6 + \beta_7 a^7 + \beta_8 a^8, \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Assim

$$b_1 \in \langle b \rangle + \mathcal{B}^5 \quad \text{e } \beta \neq 0.$$

Suponhamos, por hipótese de indução que $b_1 \in \langle b \rangle + \mathcal{B}^{k-4}$ e $\beta \neq 0$, para $9 \leq k \leq n-1$, e demonstremos para $k = n$.

Sejam $(a, b), (a_1, b_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ e $\mathcal{B} = \langle b, a, \dots, a^{n-1} \rangle$. Como $\langle a^{n-1} \rangle$ é um ideal de $\mathcal{B}$, temos que $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}/\langle a^{n-1} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{a}, \dots, \bar{a}^{n-1} \rangle$, e é claro que $(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in \mathcal{P}(\overline{\mathcal{B}})$. Pela hipótese de indução, $\bar{b}_1 \in \langle \bar{b} \rangle + \overline{\mathcal{B}}^{n-5}$ e $\beta \neq 0$, logo, sem perda de generalidade, podemos utilizar os mesmos escalares, e dizer que

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-5} a^5 + \beta_{n-4} a^{n-4} + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda_1 \beta_{n-5} a^{n-4} + (\lambda_2 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-4} + \lambda_2 \beta_{n-5}) a^{n-3} + (\lambda \beta \alpha_{n-2} + \\ &\quad \lambda_2 \beta \gamma_{n-2} - \lambda_3 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-3} + \lambda_2 \beta_{n-4} + \lambda_3 \beta_{n-5}) a^{n-2} \\ &\quad + (\lambda \beta \alpha_{n-1} + \lambda_2 \beta \gamma_{n-1} - \lambda_3 \beta \gamma_{n-2} + \lambda_4 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-2} + \lambda_2 \beta_{n-3} \\ &\quad + \lambda_3 \beta_{n-4} + \lambda_4 \beta_{n-5}) a^{n-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_{n-5} = 0$, portanto

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= (\lambda_2 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-4}) a^{n-3} + (\lambda \beta \alpha_{n-2} + \lambda_2 \beta \gamma_{n-2} - \lambda_3 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-3} \\ &\quad + \lambda_2 \beta_{n-4}) a^{n-2} + (\lambda \beta \alpha_{n-1} + \lambda_2 \beta \gamma_{n-1} - \lambda_3 \beta \gamma_{n-2} + \lambda_4 \beta \gamma_{n-3} + \lambda_1 \beta_{n-2} \\ &\quad + \lambda_2 \beta_{n-3} + \lambda_3 \beta_{n-4}) a^{n-1} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

e assim

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-4} a^{n-4} + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

isto é

$$b_1 \in \langle b \rangle + \mathcal{B}^{n-4} \quad \text{para } n \geq 9.$$

□

Do lema anterior é claro que

$$b_1^2 = \beta^2 b^2, \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

e assim para (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_i)$, com $i = 2, 6$, temos que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} + \frac{\beta^2 \lambda_2 (n-2)}{\lambda_1} \alpha a_1^{n-1} \quad \text{com } \beta, \lambda_1, \alpha \neq 0,$$

e para (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B}_j)$, com $j = 3, 5, 7$, temos que

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1}.$$

Portanto para termos o isomorfismo entre uma álgebra $\mathcal{B}_i$ e uma álgebra $\mathcal{B}_j$, é preciso que $\frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha = 0$, o que não é possível. Uma vez que vimos que $\mathcal{B}_3$ não é isomorfa com $\mathcal{B}_5$ e $\mathcal{B}_7$, temos que

$$\mathcal{B}_3 \not\cong \mathcal{B}_i \quad \text{para } i \neq 3.$$

Assim restam por analisar no conjunto $C1$ as álgebras $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_6$, e no conjunto $C2$, as álgebras $\mathcal{B}_5$ e $\mathcal{B}_7$. Antes disso citamos as seguintes igualdades que serão utilizadas nos seguintes lemas, elas decorrem da equação (4.22) que caracteriza as potências de um elemento x neste tipo de álgebras. De aqui por diante $a_1 = \lambda b + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^i$.

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \lambda_1^2 a^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a^3 + [\lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_3] a^4 + d, \\ a_1^{n-3} &= \lambda_1^{n-3} a^{n-3} + (n-3) \lambda_1^{n-4} \lambda_2 a^{n-2} + (n-3) \lambda_1^{n-4} \left[\lambda_3 + \frac{(n-4)}{2\lambda_1} \lambda_2^2 \right] a^{n-1}, \\ a_1^{n-2} &= \lambda_1^{n-2} a^{n-2} + (n-2) \lambda_1^{n-3} \lambda_2 a^{n-1}, \\ a_1^{n-1} &= \lambda_1^{n-1} a^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

com $d \in \mathcal{B}^5$ e $\lambda_1 \neq 0$.

Lema 4.55 *Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_7(\alpha)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0, \quad \text{com} \quad \beta, \lambda_1 \neq 0.$$

Prova: Seja α não nulo e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-1}$, $a^2 b = 0$ e os outros produtos não triviais são zero. Se (a_1, b_1) está em $\mathcal{P}(B)$, então por (4.24) temos que

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= \lambda_1 \beta_{n-4} a^{n-3} + (\lambda_1 \beta_{n-3} + \lambda_2 \beta_{n-4}) a^{n-2} + (\lambda \beta \alpha + \lambda_1 \beta_{n-2} + \\ &\quad \lambda_2 \beta_{n-3} + \lambda_3 \beta_{n-4}) a^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

e como $\lambda_1 \neq 0$, segue que $\beta_{n-4} = \beta_{n-3} = 0$, assim,

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com} \quad \beta \neq 0.$$

Utilizando (4.25), calculamos os produtos b_1^2 , $a_1^2 b_1$ e obtemos que $b_1^2 = \beta^2 \alpha a_1^{n-1}$ e $a_1^2 b_1 = 0$, que em termos das potências de a_1 são

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1} \quad \text{e} \quad a_1^2 b_1 = 0,$$

o que demonstra o lema. □

Do lema anterior é claro que $\mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_5$. Portanto

$$\mathcal{B}_5 \not\cong \mathcal{B}_i \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_7 \not\cong \mathcal{B}_j, \quad \text{para} \quad i \neq 5 \quad \text{e} \quad j \neq 7.$$

Temos também, como uma consequência imediata do lema, o seguinte corolário.

Corolário 4.56 *Seja α não nulo e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_7(\alpha) \cong \mathcal{B}_7(\alpha')$$

se e somente se, existirem λ e β em F^ , tais que $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda^{n-1}} \alpha$.*

Resta então analisar as álgebras do conjunto $C1$. Faremos isto do mesmo jeito que fizemos para $C2$, portanto omitiremos alguns detalhes na demonstração do seguinte lema.

Lema 4.57 *Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_6(\alpha)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} - \frac{\beta^2 \lambda_2 (n-2)}{\lambda_1^n} \alpha a_1^{n-1} \quad e \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta_{n-3}}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-1}.$$

Prova: Seja α não nulo e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-2}$, $a^2 b = 0$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(B)$. Então por (4.24) temos que $\beta_{n-4} = 0$ e assim,

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0.$$

Logo

$$b_1^2 = \beta^2 \alpha a^{n-2} = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} - \frac{\beta^2 \lambda_2 (n-2)}{\lambda_1^n} \alpha a_1^{n-1}$$

e

$$a_1^2 b_1 = \lambda_1^2 \beta_{n-3} a^{n-1} = \frac{\beta_{n-3}}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-1}.$$

□

Do lema é claro que $\mathcal{B}_6(\alpha) \not\cong \mathcal{B}_2(\alpha)$. Portanto

$$\mathcal{B}_6 \not\cong \mathcal{B}_i \quad e \quad \mathcal{B}_2 \not\cong \mathcal{B}_j \quad \text{para } i \neq 6 \quad e \quad j \neq 2.$$

Como uma consequência do lema anterior temos o seguinte corolário.

Corolário 4.58 *Seja α não nulo e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_6(\alpha) \cong \mathcal{B}_6(\alpha')$$

se, e somente se, existirem λ e β em F^ , tais que $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda^{n-2}} \alpha$.*

Podemos concluir de todo o anterior (excluindo a álgebra $\mathcal{B}_4$), que

$$\mathcal{B}_i \not\cong \mathcal{B}_j \quad \text{para } i \neq j.$$

Estudemos agora as classes dadas por $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_5$.

Lema 4.59 *Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_5(\alpha)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1} \quad e \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-1}.$$

Prova: Seja α em F e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-1}$, $a^2 b = a^{n-1}$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(B)$, então por (4.24) temos que $\beta_{n-4} = \beta_{n-3} = 0$, logo

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

e assim

$$b_1^2 = \beta^2 \alpha a^{n-1} = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1} \quad e \quad a_1^2 b_1 = \lambda_1^2 \beta a^{n-1} = \frac{\beta}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-1}.$$

□

Notemos que para α' em F , a álgebra $\mathcal{B}_5(\alpha')$ é isomorfa a álgebra $\mathcal{B}_5(\alpha)$ se, e somente se, $\beta = \lambda_1^{n-3}$ e $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha = \lambda_1^{n-5} \alpha$.

Corolário 4.60 *Sejam α e α' em F . Então*

$$\mathcal{B}_5(\alpha) \cong \mathcal{B}_5(\alpha')$$

se, e somente se, existir λ em F^ , tal que $\alpha' = \lambda^{n-5} \alpha$.*

Lema 4.61 *Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_3(\alpha)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1} \quad e \quad a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^{n-4}} a_1^{n-2} + \frac{\lambda_1 \beta_{n-3} - n \lambda_2 \beta}{\lambda_1^{n-2}} a_1^{n-1}.$$

Prova: Seja α em F e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-1}$, $a^2 b = a^{n-2}$, $a^3 b = -a^{n-1}$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(B)$, então por (4.24) temos que $\beta_{n-4} = 0$ e assim,

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

portanto

$$b_1^2 = \beta^2 \alpha a^{n-1} = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}} \alpha a_1^{n-1}$$

e

$$a_1^2 b_1 = \lambda_1^2 \beta a^{n-2} + (\lambda_1^2 \beta_{n-3} - 2\lambda_1 \lambda_2 \beta) a^{n-1} = \frac{\beta}{\lambda_1^{n-4}} a^{n-2} + \frac{\lambda_1 \beta_{n-3} - n\lambda_2 \beta}{\lambda_1^{n-2}} a_1^{n-1}.$$

□

Temos do lema anterior, que para α' em F , a álgebra $\mathcal{B}_3(\alpha')$ é isomorfa a álgebra $\mathcal{B}_3(\alpha)$ se, e somente se, $\beta_{n-3} = \frac{n\lambda_2\beta}{\lambda_1}$, $\beta = \lambda_1^{n-4}$ e $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-1}}\alpha = \lambda_1^{n-7}\alpha$.

Corolário 4.62 *Para α e α' em F*

$$\mathcal{B}_3(\alpha) \cong \mathcal{B}_3(\alpha')$$

se, e somente se, existir λ não nulo tal que $\alpha' = \lambda^{n-7}\alpha$.

Lema 4.63 *Seja α não nulo e $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_2(\alpha)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} - \frac{\beta^2(n-2)\lambda_2}{\lambda_1^n} \alpha a_1^{n-1}$$

e

$$a_1^2 b_1 = \frac{\beta}{\lambda_1^{n-4}} a_1^{n-2} - \frac{\beta\lambda_2 n - \beta_{n-3}\lambda_1}{\lambda_1^{n-2}} a_1^{n-1}.$$

Prova: Seja α não nulo e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-2}$, $a^2 b = a^{n-2}$, $a^3 b = -a^{n-1}$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(B)$, então por (4.24) temos que $\beta_{n-4} = 0$ e assim,

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

portanto

$$b_1^2 = \beta^2 \alpha a^{n-2} = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} - \frac{\beta^2(n-2)\lambda_2}{\lambda_1^n} \alpha a_1^{n-1}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= \lambda_1^2 \beta a^{n-2} + (\lambda_1^2 \beta_{n-3} - 2\lambda_1 \lambda_2 \beta) a^{n-1} \\ &= \frac{\beta}{\lambda_1^{n-4}} a_1^{n-2} - \frac{\beta \lambda_2 n - \beta_{n-3} \lambda_1}{\lambda_1^{n-2}} a_1^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Assim, temos do lema anterior que para α' em F^* , $\mathcal{B}_2(\alpha') \cong \mathcal{B}_2(\alpha)$ se, e somente se, $\lambda_2 = \beta_{n-3} = 0$, $\beta = \lambda_1^{n-4}$ e $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha = \lambda_1^{n-6} \alpha$.

Corolário 4.64 *Se α e α' são não nulos, então*

$$\mathcal{B}_2(\alpha) \cong \mathcal{B}_2(\alpha')$$

se, e somente se, existir λ em F^ , tal que $\alpha' = \lambda^{n-6} \alpha$.*

Lema 4.65 *Seja $\mathcal{B}$ a álgebra $\mathcal{B}_1(\alpha, \theta)$. Então para cada par (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(\mathcal{B})$,*

$$b_1^2 = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} + \frac{\beta^2(\theta - (n-2)\lambda_2 \alpha)}{\lambda_1^n} a_1^{n-1}$$

e

$$\begin{aligned} a_1^2 b_1 &= \frac{\beta}{\lambda_1^{n-5}} a_1^{n-3} + \frac{(\lambda_1 \beta_{n-4} - (n-1)\lambda_2 \beta)}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-2} + \\ &\quad \frac{[-2(n-5)\lambda_1 \lambda_3 \beta - 2(n-4)\lambda_1 \lambda_2 \beta_{n-4} + \lambda_2^2 \beta(n+3)(n-2) + 2\lambda_1^2 \beta_{n-3}]}{2\lambda_1^{n-1}} a_1^{n-1}. \end{aligned}$$

Prova: Seja α em F e (a, b) em $\mathcal{P}(B)$ tal que $b^2 = \alpha a^{n-2} + \theta a^{n-1}$, $a^2 b = a^{n-3}$, $a^3 b = -a^{n-2}$, $a^4 b = a^{n-1}$ e os outros produtos não triviais são zero. Seja (a_1, b_1) em $\mathcal{P}(B)$, então por (4.24) temos que

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-4} a^{n-4} + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

portanto

$$b_1^2 = \beta^2 \alpha a^{n-2} + \beta^2 \theta a^{n-1} = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha a_1^{n-2} + \frac{\beta^2(\theta - (n-2)\lambda_2 \alpha)}{\lambda_1^n} a_1^{n-1}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_1^2 b_1 &= \lambda_1^2 \beta a^{n-3} + \lambda_1 (\lambda_1 \beta_{n-4} - 2\lambda_2 \beta) a^{n-2} + (2\lambda_1 \lambda_3 \beta + 2\lambda_1 \lambda_2 \beta_{n-4} + \lambda_1^2 \beta_{n-3} \\
 &\quad + \lambda_2^2 \beta) a^{n-1} \\
 &= \frac{\beta}{\lambda_1^{n-5}} a_1^{n-3} + \frac{(\lambda_1 \beta_{n-4} - (n-1)\lambda_2 \beta)}{\lambda_1^{n-3}} a_1^{n-2} + \\
 &\quad \frac{[-2(n-5)\lambda_1 \lambda_3 \beta - 2(n-4)\lambda_1 \lambda_2 \beta_{n-4} + \lambda_2^2 \beta (n+3)(n-2) + 2\lambda_1^2 \beta_{n-3}]}{2\lambda_1^{n-1}} a_1^{n-1}.
 \end{aligned}$$

□

Queremos ressaltar que no lema anterior tínhamos que

$$b_1 = \beta b + \beta_{n-4} a^{n-4} + \beta_{n-3} a^{n-3} + \beta_{n-2} a^{n-2} + \beta_{n-1} a^{n-1} \quad \text{com } \beta \neq 0,$$

e uma vez que $a_1 b_1 = 0$, temos pela equação (4.24) que

$$\begin{aligned}
 &(\lambda_2 \beta + \lambda_1 \beta_{n-4}) a^{n-3} + (\lambda \beta \alpha - \lambda_3 \beta + \lambda_1 \beta_{n-3} + \lambda_2 \beta_{n-4}) a^{n-2} \\
 &+ (\lambda \beta \theta + \lambda_4 \beta + \lambda_1 \beta_{n-2} + \lambda_2 \beta_{n-3} + \lambda_3 \beta_{n-4}) a^{n-1} = 0,
 \end{aligned}$$

portanto $\beta_{n-4} = -\frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1}$ e $\lambda_1 \beta_{n-4} - (n-1)\lambda_2 \beta = -n\lambda_2 \beta$. Assim utilizando esta ultima igualdade, temos que para um α' em F , a álgebra $\mathcal{B}_1(\alpha', \theta')$ é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}_1(\alpha, \theta)$ se, e somente se, $\beta = \lambda_1^{n-5}$, $\lambda_2 = \beta_{n-4} = 0$, $\beta_{n-3} = \frac{(n-5)\lambda_3 \beta}{\lambda_1}$ e em consequência, $\alpha' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^{n-2}} \alpha = \lambda_1^{n-8} \alpha$ e $\theta' = \frac{\beta^2}{\lambda_1^n} \theta = \lambda_1^{n-10} \theta$.

Corolário 4.66 *Sejam α, θ, α' e θ' em F . Então*

$$\mathcal{B}_1(\alpha, \theta) \cong \mathcal{B}_1(\alpha', \theta')$$

se, e somente se, existirem λ, λ_1 em F^ , tal que $\alpha' = \lambda^{n-8} \alpha$ e $\theta' = \lambda_1^{n-10} \theta$.*

Podemos finalmente enunciar os seguintes dois teoremas que dão uma classificação para dimensão e nilíndice n , quando n é par e quando n é ímpar.

Teorema 4.67 *Seja n par e maior ou igual a 8. Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , é isomorfa a uma e somente uma álgebra*

com base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:

$$\mathcal{A}_1(\alpha, \theta) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2} + \theta a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-3}, \quad a^3b = -a^{n-2}, \quad a^4b = a^{n-1};$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad a^2b = a^{n-2}, \quad a^3b = -a^{n-1}, \quad [\rho^{n-6}];$$

$$\mathcal{A}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-2}, \quad a^3b = -a^{n-1}, \quad [\rho^{n-7}];$$

$$\mathcal{A}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-1}, \quad [\rho^{n-5}];$$

$$\mathcal{A}_5(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad [\rho^2];$$

$$\mathcal{A}_6(\alpha) : \quad b^2 = a^{n-1};$$

e para todo α' e θ' em F , temos que $\mathcal{A}_1(\alpha, \theta) \cong \mathcal{A}_1(\alpha', \theta')$, se e somente se existirem ρ, λ não nulos tais que $\alpha' = \rho^{n-8}\alpha$ e $\theta' = \lambda^{n-10}\theta$.

Teorema 4.68 *Seja n ímpar e maior ou igual a 9. Uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , é isomorfa a uma e somente uma álgebra com base $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, e produtos não triviais e não zero conforme um dos casos que aparecem na seguinte lista:*

$$\mathcal{A}_1(\alpha, \theta) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2} + \theta a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-3}, \quad a^3b = -a^{n-2}, \quad a^4b = a^{n-1};$$

$$\mathcal{A}_2(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-2}, \quad a^2b = a^{n-2}, \quad a^3b = -a^{n-1}, \quad [\rho^{n-6}];$$

$$\mathcal{A}_3(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-2}, \quad a^3b = -a^{n-1}, \quad [\rho^{n-7}];$$

$$\mathcal{A}_4(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad a^2b = a^{n-1}, \quad [\rho^{n-5}];$$

$$\mathcal{A}_5(\alpha) : \quad b^2 = a^{n-2};$$

$$\mathcal{A}_6(\alpha) : \quad b^2 = \alpha a^{n-1}, \quad [\rho^2];$$

e para todo α' e θ' em F , temos que $\mathcal{A}_1(\alpha, \theta) \cong \mathcal{A}_1(\alpha', \theta')$, se e somente se existirem ρ, λ não nulos tais que $\alpha' = \rho^{n-8}\alpha$ e $\theta' = \lambda^{n-10}\theta$.

Referências Bibliográficas

- [1] Albert, A.A. On the Power-associativity of Rings. *Summ. Bras. Math.* **1948**, 2 (2), 21-33.
- [2] Albert, A.A. Power-associative Rings. *Trans Am. Math. Soc.* **1948**, 64, 552-593.
- [3] Correa, I. On the Index of Nilpotence of Jordan Nilalgebras. *Int. J. Math. Game Theory Algebra.* **2001**, 11 (2), 73-79.
- [4] Correa, I.; Hentzel, I.R. On Solvability of Noncommutative Power-associative Nilalgebras. *J. Algebra.* **2001**, 240, 98-102.
- [5] Correa, I.; Hentzel, I.R.; Julca, P.P.; Peresi, L.A. Nilpotent Linear Transformations and the Solvability of Power-associative Nilalgebras. *Linear Algebra Appl.* **2005**, 396, 35-53.
- [6] Correa, I.; Hentzel, I.R.; Peresi, L.A. On the Solvability of the Commutative Power-associative Nilalgebras of Dimension 6. *Linear Algebra Appl.* **2003**, 369, 185-192.
- [7] Correa, I.; Peresi, L.A. On the Solvability of the Five Dimensional Commutative Power-associative Nilalgebras. *Result. Math.* **2001**, 39, 23-27.

- [8] Correa, I.; Suazo, A. On a Class of Commutative Power-associative Nilalgebras. *J. Algebra*. **1999**, 215, 412-417.
- [9] Dedkov, A.I. Power-associative Algebras having a Nil-basis. *Algebra and Logic*. **1985**, 24 (3), 163-170.
- [10] Elgueta, L.; Suazo, A. Jordan Nilalgebras of Nilindex n and Dimension $n+1$. *Comm. Algebra*. **2002**, 30, 5547-5561.
- [11] Elgueta, L.; Suazo, A. Solvability of Commutative Power-associative Nilalgebras of Nilindex 4 and Dimension ≤ 8 . *Proyecciones*. **2004**, 23 (2), 123-129.
- [12] Gerstenhaber, M.; Myung, H.C. On Commutative Power-associative Nilalgebras of Low Dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1975**, 48, 29-32.
- [13] Gerstenhaber, M. On Nilalgebras and Linear Varieties of Nilpotent Matrices. II, *Duke Math. J.* **1960**, 27, 21-31.
- [14] Gerstenhaber, M. On Nilalgebras and Linear Varieties of Nilpotent Matrices. III. *Ann. of Math.* **1959**, 70 (1), 167-205.
- [15] Gutiérrez Fernández, J.C. On Commutative Power-associative Nilalgebras. *Comm. Algebra*. **2004**, 32 (6), 2243-2250.
- [16] Gutiérrez Fernández, J.C.; Suazo, A. Commutative Power-associative Nilalgebras of Nilindex 5. *Results Math.* **2005**, 47 (3-4), 296-304.
- [17] Jacobson, N. *Lie Algebras*; Interscience: New York, 1962.
- [18] Kuzmin, E.N.; Shestakov, I.P. Nonassociative structures, in: A.I. Kostrikin, I.R. Shafarevich (Eds.), *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 57, 197-280, 1994.
- [19] Mathes, B.; Omladic, M.; Radjavi, H. Linear Spaces of Nilpotent Matrices. *Linear Algebra Appl.* **1991**, 149, 215-225.

- [20] Schafer, R.D. *Structure and Representation of Nonassociative Algebras*; Source: Bull. Amer. Math. Soc. **1995**, 61 (6), 469-484.
- [21] Schafer, R.D. *An introduction to Nonassociative Algebras*; Academic Press: New York/London, 1966.
- [22] Shestakov, I.P. Finite-dimensional Algebras with a Nil-basis. Algebra and Logic. **1971**, 10, 58-65.
- [23] Suttles, D. A Counterexample to a Conjecture of Albert. Notices Amer. Math. Soc. **1972**, 19, A-566.
- [24] Zelmanov, E.I. On Engel Lie Algebras. Siberian Math. J. **1988**, 29 (5), 777-781.
- [25] Zhevlakov, K.A; Slinko, A.M.; Shestakov, I.P; Shirshov, A.I. *Rings that are Nearly Associative*; Academic Press: New York/London, 1992.

Índice Remissivo

- A -Bimódulo, 7
- Álgebra, 6
 - anulador de uma, 8
 - associativa, 6
 - comutativa, 6
 - de potências associativas, 10
 - Engel, 8
 - homomorfismo de, 8
 - Jordan, 8
 - não-associativa, 6
 - nilpotente, 9
 - quociente, 8
 - simples, 8
 - solúvel, 9
- Índice
 - de nilpotência
 - de uma álgebra, 9
 - de uma transformação linear, 8
 - de solubilidade, 9
- Bimódulo, 7
- decomposição, 26
- irredutível, 7, 24
- subbimódulo, 7
- Constantes de estrutura, 6
- Ideal, 7
- Identidade
 - de Jordan, 9
- Nilálgebra, 10
- Nilíndice, 10
- Nilpotente
 - elemento, 10, 11
 - transformação linear, 8
- Nilradical, 11
- Operador
 - multiplicação à direita, 8
 - multiplicação à esquerda, 8
- Potências
 - de um elemento, 9
 - de uma álgebra, 9

Radical solúvel, 10

Soma direta, 8

Subálgebra, 7

Suttles

 exemplo, 1