**O produto cruzado de uma
 C^* -álgebra por um endomorfismo
e a álgebra de Cuntz-Krieger**

Priscilla Iastremski

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática**
Orientador: **Profa. Dra. Cristina Cerri**

Durante o período de fevereiro de 2007 a janeiro de 2008,
a autora recebeu apoio financeiro do CNPq.

São Paulo, janeiro de 2011

O produto cruzado de uma C^* -álgebra por um endomorfismo e a álgebra de Cuntz-Krieger

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Priscilla Iastremski
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Cristina Cerri IME - USP
- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo IME - USP
- Prof. Dr. Fernando R. Abadie Vicens Universidad de La República
Uruguai

*Aos meus pais,
Lourdes e Daniel
e ao Sávio,
com carinho.*

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Cristina Cerri, pela sugestão do tema, orientação, pela paciência e ajuda na superação dos momentos mais difíceis.

À minha mãe, Maria de Lourdes, pela confiança e apoio nas minhas escolhas. Agradeço pela sua compreensão, amor incondicional e por me acompanhar nesta jornada enquanto foi possível.

Ao meu esposo Sávio, pelo imenso amor, pelos conselhos e pela ajuda nos momentos difíceis.

Agradeço ao meu pai, Daniel, pelo amor e pelo apoio em todos os momentos necessários.

Aos meus irmãos, Diego e Daniel, sem os quais a minha vida não teria a mesma graça.

À minha cunhada, Andréia, pelas monitorias de Cálculo, pelos conselhos, carinho e apoio.

Aos meus sogros, Darci e José, pelo carinho, compreensão e apoio nas horas difíceis.

À amiga do IME-USP, Carol, por me animar com seu sorriso, pela confiança e torcida.

Aos amigos do IME-USP, Bárbara, Cesar, Gabriela, Maria Fernanda e Renato, pelo apoio, carinho e amizade.

Às amigas, Juliana, Ivy, Deniseh e Juliana, por fazerem parte da minha vida, por compreenderem as ausências, pela torcida e amizade.

Às amigas e colegas de profissão, Sandra, Maria do Carmo, Renata, Sueli e Rosângela pelo apoio, compreensão e amizade.

Aos professores do IME-USP que contribuíram para a minha formação, em especial às Professoras Leila Maria Vasconcellos Figueiredo, Ofelia Teresa Alas e Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves. E aos Professores Sérgio Alves, Daniel Victor Tausk, Henrique Guzzo Junior e Severino Toscano do Rego Melo.

Agradeço à Banca Examinadora pelas críticas e sugestões apresentadas.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro parcial deste trabalho.

A Deus por ter dado a mim a oportunidade.

Priscilla Iastremski

Resumo

Dados A uma C^* -álgebra com unidade e $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo, um operador transferência para o par (A, α) é uma aplicação linear contínua positiva $\mathcal{L} : A \rightarrow A$ tal que $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$, para todo $a, b \in A$. Nestas condições, denotamos por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ a C^* -álgebra universal com unidade gerada por A e um elemento S sujeito às relações $Sa = \alpha(a)S$ e $S^*aS = \mathcal{L}(a)$. Uma redundância é definida como o par $(a, k) \in A \times \overline{ASS^*A}$ tal que $abS = akS$, para todo $b \in A$. Neste trabalho definimos a C^* -álgebra chamada de produto cruzado e denotada por $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ como o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ pelo ideal bilateral fechado $\mathcal{I}$ gerado pelo conjunto das diferenças $a - k$, para todas as redundâncias (a, k) tais que $a \in \overline{A\mathcal{R}A}$, onde $\mathcal{R}$ denota a $\text{Im}\alpha$. Mostramos que quando α é injetor com imagem hereditária, então o produto cruzado $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ é isomorfo à C^* -álgebra universal com unidade, denotada por $\mathcal{U}(A, \alpha)$, gerada por A e uma isometria T sujeita à relação $\alpha(a) = TaT^*$, para todo $a \in A$. Também mostramos que a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$ pode ser caracterizada como o produto cruzado definido neste trabalho.

Abstract

Given A a C^* -algebra with unit and $\alpha : A \rightarrow A$ a $*$ -endomorphism, a transfer operator for the pair (A, α) is a continuous positive linear map $\mathcal{L} : A \rightarrow A$ such that $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$, for all $a, b \in A$. Under these conditions, we denote by $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ the universal C^* -algebra with unit generated by A and an element S subject to the relations $Sa = \alpha(a)S$ and $S^*aS = \mathcal{L}(a)$. A redundancy is defined as a pair $(a, k) \in A \times \overline{ASS^*A}$ such that $abS = akS$, for all $b \in A$. In this work we define the C^* -algebra called crossed-product and which we denote by $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$, as the quotient of $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ by the closed two-sided ideal $\mathcal{I}$ generated by the set of differences $a - k$, for all redundancies (a, k) such that $a \in \overline{A\mathcal{R}A}$, where by $\mathcal{R}$ we mean $\text{Im}\alpha$. We prove that when α is injective with an hereditary range, then the crossed-product $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ is isomorphic to the universal C^* -algebra with unit, which we denote by $\mathcal{U}(A, \alpha)$, generated by A and an isometry T subject to the relation $\alpha(a) = TaT^*$, for all $a \in A$. We also prove that the Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ can be characterized as the crossed-product we define in this work.

Sumário

Introdução	vi
1 C*-álgebras	1
1.1 Preliminares	1
1.2 Representações	9
1.3 A C*-álgebra envolvente	14
1.4 A C*-álgebra universal gerada por elementos e relações	17
1.5 Módulos de Hilbert	20
2 Produto Cruzado de uma C*-álgebra por um endomorfismo	22
2.1 Operadores Transferência	22
2.2 O Produto Cruzado de uma C*-álgebra por um endomorfismo	28
2.3 Monomorfismos com imagem hereditária	35
3 Produto Cruzado Parcial	40
4 A álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$	48
4.1 O conjunto Ω_A^r	49
4.2 A estrutura de $\mathcal{O}_A$	58
5 A Álgebra de Cuntz-Krieger como produto cruzado	60
Referências Bibliográficas	77

Introdução

Desde o surgimento do trabalho de J. Cuntz [6] em 1977, diversos autores têm estudado o produto cruzado por um endomorfismo, dentre eles Exel, o qual em [10] apresenta uma outra definição que generaliza algumas construções precedentes.

Sejam A uma C^* -álgebra com unidade e $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo. O produto cruzado definido por Exel depende não apenas do par (A, α) mas também de um operador chamado de *operador transferência* para o par (A, α) , que é uma aplicação linear contínua positiva $\mathcal{L} : A \rightarrow A$ tal que $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$, para todo $a, b \in A$.

Considerando $\mathcal{L}$ um operador transferência para o par (A, α) , denotaremos por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ a C^* -álgebra universal com unidade gerada por A e um elemento S sujeito às relações $Sa = \alpha(a)S$ e $S^*aS = \mathcal{L}(a)$. Uma *redundância* será o par $(a, k) \in A \times \overline{ASS^*A}$ tal que $abS = akS$, para todo $b \in A$.

O *produto cruzado* da C^* -álgebra com unidade A pelo endomorfismo α relativo à escolha do operador transferência $\mathcal{L}$, que será denotado por $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$, é definido como o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ pelo ideal bilateral fechado $\mathcal{I}$ gerado pelo conjunto das diferenças $a - k$, para todas as redundâncias (a, k) tais que $a \in \overline{AR\mathcal{R}A}$, onde $\mathcal{R}$ denota a $\text{Im}\alpha$.

Em [17] (ver também [19]), a C^* -álgebra universal gerada por A e uma isometria T sujeita à relação $\alpha(a) = TaT^*$, para todo $a \in A$, denotada por $\mathcal{U}(A, \alpha)$, é

proposta como definição do produto cruzado de A por α . Exel prova em [10] que para α injetor com imagem hereditária, $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ é isomorfo à $\mathcal{U}(A, \alpha)$.

Sejam $\mathcal{G}$ um conjunto finito e $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(i, j)\}_{i, j \in \mathcal{G}}$ uma matriz com entradas no conjunto $\{0, 1\}$ e que não possui colunas identicamente nulas. Introduzida em [7], a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é definida como a C^* -álgebra universal gerada por uma família de isometrias parciais $\{s_i\}_{i \in \mathcal{G}}$ satisfazendo as condições

$$(I) \quad 1 = \sum_{j \in \mathcal{G}} s_j s_j^* \\ (II) \quad s_i^* s_i = \sum_{j \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(i, j) s_j s_j^*.$$

Em [11] e [22] esta C^* -álgebra é caracterizada como produto cruzado parcial. É provado em [10] que a álgebra de Cuntz-Krieger é produto cruzado da C^* -álgebra comutativa $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ por um endomorfismo, onde $\mathcal{G}$ é o conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ e $\Omega_{\mathcal{A}} = \{\xi = (\xi_i)_i \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}} : \mathcal{A}(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

O objetivo deste trabalho é apresentar de forma mais clara resultados citados anteriormente. Em especial provamos que a álgebra de Cuntz-Krieger é produto cruzado e estudamos uma caracterização do conjunto $\Omega_{\mathcal{A}}$ conveniente para a demonstração dos principais resultados aqui tratados.

No primeiro capítulo apresentamos resultados básicos sobre C^* -álgebras, importantes para o desenvolvimento do restante do trabalho. Nele destacamos definições e resultados sobre C^* -álgebras envoltentes e C^* -álgebras universais geradas por elementos e relações.

No segundo capítulo apresentamos o tema principal desta dissertação que é o produto cruzado de uma C^* -álgebra A com unidade por um endomorfismo α relativo a um operador transferência $\mathcal{L}$, denotado por $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Apresentamos também a construção, que será utilizada no último capítulo, do operador transferência $\mathcal{L}$ quando temos uma esperança condicional E . Faremos também a prova de que $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ é isomorfo a $\mathcal{U}(A, \alpha)$ para α um monomorfismo de imagem hereditária.

Para melhor compreensão da estrutura da álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, o terceiro capítulo apresenta resumidamente a teoria de produtos cruzados parciais e fibrados de Fell.

Apresentamos no quarto capítulo um estudo da estrutura da álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ tendo como referência os artigos de J. Quigg e I. Raeburn [22] e Exel [11]. Nestes $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é caracterizada como o produto cruzado parcial $C(\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}) \rtimes^p \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é o grupo livre gerado por um conjunto finito e $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Definimos o conjunto $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ como um subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ com certas condições. Mostraremos que existe uma bijeção entre $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}} \subseteq \Omega_{\mathcal{A}}^r$ e o conjunto $\Omega_{\mathcal{A}}$. Este capítulo será de grande importância na demonstração da caracterização de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ como produto cruzado por um endomorfismo.

Para finalizar este trabalho, o quinto capítulo trata da caracterização da álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ como produto cruzado de uma C^* -álgebra comutativa por um endomorfismo $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Para isso, definimos em $\Omega_{\mathcal{A}}$ um endomorfismo α e construímos uma esperança condicional E , a partir da qual obtemos o operador transferência $\mathcal{L}$, tornando possível a construção da C^* -álgebra desejada.

Capítulo 1

C^* -álgebras

O principal objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos relativos a C^* -álgebras necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos também outros conceitos e resultados essenciais para a compreensão dos principais resultados tratados aqui.

1.1 Preliminares

Definição 1.1 *Dado A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ dizemos que A é uma álgebra se existir uma aplicação bilinear $A \times A \rightarrow A$ dada por $(a, b) \mapsto ab$ tal que, para todo $a, b, c \in A$ temos $a(bc) = (ab)c$. Esta aplicação é denominada multiplicação.*

Dizemos que A tem unidade se existe $1_A \in A$ satisfazendo $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$, para todo $a \in A$.

Se B é subespaço vetorial de A satisfazendo $bb' \in B$, para todo $b, b' \in B$, então B munido da multiplicação de A restrita a B , é uma subálgebra de A .

Neste trabalho vamos considerar sempre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 1.2 *Seja A uma álgebra. Uma involução em A é uma aplicação*

$$*: A \rightarrow A$$

satisfazendo para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- (i) $(a + b)^* = a^* + b^*$
- (ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
- (iii) $(ab)^* = b^* a^*$
- (iv) $(a^*)^* = a$

Se A é uma álgebra munida de uma involução, então dizemos que A é uma $*$ -álgebra. Se A tem unidade segue de 1.2 (iii) que $1_A^* = 1_A$. De fato, temos que $1_A^* = 1_A^* 1_A = (1_A 1_A^*)^* = (1_A^*)^* = 1_A$.

Definição 1.3 *Sejam A uma $*$ -álgebra e $a \in A$. Dizemos que a é*

- (i) *auto-adjunto, se $a^* = a$*
- (ii) *idempotente, se $a^2 = a$*
- (iii) *projeção, se $a = a^* = a^2$*
- (iv) *isometria, se $a^* a = 1_A$, se A tem unidade*

Proposição 1.4 *Seja A uma $*$ -álgebra. Então para todo $a \in A$ existem únicos $b, c \in A$ auto-adjuntos tais que $a = b + ic$.*

Demonstração: Basta tomar $b = \frac{a + a^*}{2}$ e $c = \frac{a - a^*}{2i}$. □

Definição 1.5 *Sejam A e B $*$ -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ uma aplicação linear.*

Dizemos que φ é um $$ -homomorfismo se, para todo $a, a' \in A$, temos $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ e $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.*

Observe que φ é denominado $$ -isomorfismo se, e só se ele é bijetivo.*

Se φ é sobrejetor, então ele é chamado de epimorfismo. E se φ é injetor, então chamamos de monomorfismo.

Um $$ -homomorfismo de A em A é denominado $*$ -endomorfismo de A .*

Definição 1.6 *Seja A uma álgebra. Se A possui uma norma sub-multiplicativa $\|\cdot\|$, ou seja, que satisfaz a desigualdade $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para todo $a, b \in A$, então o par $(A, \|\cdot\|)$ é chamado álgebra normada.*

Além disso, se A for completo na norma $\|\cdot\|$, dizemos que A é uma álgebra de Banach.

Definição 1.7 Um ideal à esquerda em uma álgebra A é um subespaço vetorial I de A tal que, se $a \in A$ e $b \in I$, então $ab \in I$.

Um ideal à direita em uma álgebra A é um subespaço vetorial I de A tal que, se $a \in A$ e $b \in I$, então $ba \in I$.

Um ideal bilateral em A é um subespaço vetorial que é, ao mesmo tempo, ideal à esquerda e à direita em A .

Definição 1.8 Uma álgebra de Banach A munida de uma involução tal que, para todo $a \in A$, temos $\|a^*\| = \|a\|$, é chamada $*$ -álgebra de Banach.

Seja X um subconjunto de uma $*$ -álgebra A . Seja o conjunto $X^* = \{x^* : x \in X\}$. Dizemos que X é *auto-adjunto* se $X^* = X$.

Definição 1.9 Uma C^* -álgebra é uma $*$ -álgebra de Banach tal que $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$.

Se A possui unidade 1_A , dizemos que A é uma C^* -álgebra com unidade.

Uma $*$ -subálgebra fechada de uma C^* -álgebra A é denominada C^* -subálgebra de A .

Denotaremos por 1_A ou apenas 1 a unidade de A .

Proposição 1.10 Se A é uma C^* -álgebra com unidade, então $\|1\| = 1$.

Demonstração: Temos que $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$, como $1 \neq 0$ temos que $\|1\| = 1$. $\square$

Definição 1.11 Um elemento a numa C^* -álgebra A é denominado *isometria parcial* se a^*a é projeção.

Não é difícil mostrar que:

Proposição 1.12 Se A é uma C^* -álgebra, então são equivalentes:

- (i) a é isometria parcial
- (ii) aa^* é projeção
- (iii) $a = aa^*a$.

Exemplos: (1) Seja X um espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Seja $C_0(X)$ o conjunto das funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto.

Para $f, g \in C_0(X)$, $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ consideremos as operações

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

a norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

e a involução dada pela conjugação, ou seja, $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Temos que $C_0(X)$, munido destas operações é uma C^* -álgebra e observe que $C_0(X)$ tem unidade se, e somente se, X é compacto.

(2) Seja X um espaço topológico Hausdorff compacto, então $C_0(X) = C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua}\}$. De fato, para toda $f \in C(X)$ e todo $\varepsilon > 0$ temos que o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de X .

(3) Sejam G um grupo discreto e o conjunto

$$l_1(G) = \{x : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{s \in G} |x_s| < \infty\} \quad \text{onde } x_s = x(s).$$

Para $x, y \in l_1(G)$, $s \in G$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ consideremos as operações

$$\begin{aligned}(x + y)(s) &= x_s + y_s \\ (\lambda x)(s) &= \lambda x_s \\ (x \times y)(s) &= \sum_{t \in G} x_t y_{st^{-1}}\end{aligned}$$

com a norma

$$\|x\|_1 = \sum_{s \in G} |x_s|$$

e a involução dada pela conjugação, ou seja, $x^*(s) = \overline{x(s^{-1})}$.

Temos que $l_1(G)$, munido destas operações, é uma $*$ -álgebra de Banach comutativa. E observe que $l_1(G)$ tem unidade somente quando G é discreto.

(4) Seja X um conjunto. Então $l_\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é limitada}\}$ é uma C^* -álgebra comutativa com as operações pontuais como no exemplo (1), com unidade dada pela função constante $\mathbf{1}$ e a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

(5) Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados de $\mathcal{H}$. Para $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $x, y \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ consideremos as operações

$$\begin{aligned}(T + S)(x) &= T(x) + S(x) \\ (\lambda T)(x) &= \lambda T(x) \\ (ST)(x) &= (S \circ T)(x)\end{aligned}$$

com a norma usual dos operadores

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

e a involução dada pelo operador adjunto T^* , ou seja,

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Então $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma C^* -álgebra não comutativa com unidade, sendo esta o operador identidade $Id_{\mathcal{H}}$.

(6) Sejam X, Y espaços normados e B_1 a bola unitária de X . Um operador $T : X \rightarrow Y$ é compacto se $T(B_1)$ é relativamente compacto, ou seja, seu fecho é compacto.

Temos que, se T é compacto então T é limitado, pois todo conjunto relativamente compacto é limitado, assim existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$, para todo x tal que $\|x\| = 1$.

Denotamos por $K(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores compactos $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. É fato que

- (i) $K(\mathcal{H})$ é subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- (ii) $K(\mathcal{H})$ é fechado em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$
- (iii) $K(\mathcal{H})$ é auto-adjunto em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

(iv) $K(\mathcal{H})$ é ideal bilateral de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

A demonstração pode ser vista em [5], proposição 4.2. Portanto $K(\mathcal{H})$ é uma C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Temos que $Id_{\mathcal{H}}$ é a unidade de $K(\mathcal{H})$ se, e só se, $\mathcal{H}$ tem dimensão finita.

Se I é um ideal bilateral auto-adjunto de uma $*$ -álgebra A , então o quociente A/I é uma $*$ -álgebra com a multiplicação e involução dadas, respectivamente, por $(a + I)(b + I) = ab + I$ e $(a + I)^* = a^* + I$. Neste trabalho também utilizaremos a notação $\dot{a}$ para denotar a classe de a , $a + I$.

Como utilizamos ideais bilaterais fechados e o quociente de uma C^* -álgebra por um ideal, se faz útil o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.13 *Seja I um ideal bilateral fechado em uma C^* -álgebra A , então:*

(a) *I é auto-adjunto.*

(b) *o quociente A/I é uma C^* -álgebra com as operações usuais e a norma*

$$\|a + I\| = \inf_{b \in I} \|a + b\|$$

Introduziremos a seguir o conceito de raio espectral e os principais resultados relacionados.

Definição 1.14 *Sejam A uma álgebra com unidade 1 e $a \in A$. Definimos o espectro de a como o conjunto*

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ não é invertível em } A\}$$

Definição 1.15 *Sejam A uma álgebra de Banach com unidade e $a \in A$. Definimos o raio espectral de a por*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

O teorema a seguir é um resultado muito importante na teoria, cuja demonstração pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.16 *Se a é um elemento auto-adjunto de uma C^* -álgebra A , então*
 $r(a) = \|a\|$.

Como consequência temos:

Proposição 1.17 *Sejam A uma $*$ -álgebra, B uma C^* -álgebra e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Então $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$, e portanto φ é contínuo.*

Demonstração: Seja $a \in A$, é fácil ver que $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Então temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)\|^2 &= \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| \stackrel{1.16}{=} r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) \\ &= \|a^*a\| \leq \|a\|^2 \end{aligned}$$

Portanto $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. □

Os seguintes resultados tratam de $*$ -homomorfismos entre C^* -álgebras e suas demonstrações podem ser encontradas em [18].

Teorema 1.18 *Se A e B são C^* -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo injetivo, então φ é necessariamente uma isometria.*

Proposição 1.19 *Sejam A e B duas C^* -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo. Então $\ker \varphi$ é ideal bilateral auto-adjunto e $\varphi(A) = \text{Im} \varphi$ é C^* -subálgebra de B .*

Um importante conceito da teoria é o de elementos positivos de C^* -álgebras.

Definição 1.20 *Seja A uma C^* -álgebra. Um elemento $a \in A$ é denominado positivo se a é auto-adjunto e se $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.*

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [18], nos traz duas caracterizações alternativas para elementos positivos.

Teorema 1.21 *Seja A uma C^* -álgebra com unidade. Dado $a \in A$ são equivalentes:*

- (i) a é positivo.
- (ii) Existe um único elemento auto-adjunto $b \in A$ tal que $b^2 = a$.
- (iii) Existe $b \in A$ tal que $b^*b = a$.

Quando um elemento a é positivo escrevemos $a \geq 0$ e denotamos por A^+ o conjunto dos elementos positivos de A . Além disso, se $a, b \in A$ e $a - b \in A^+$, então escrevemos $a \geq b$.

Para os resultados a seguir vamos supor que A e B são C^* -álgebras.

Definição 1.22 *Seja $\varphi : A \rightarrow B$ uma aplicação linear. Dizemos que φ é positiva se $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.*

A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [18].

Proposição 1.23 *Todo elemento auto-adjunto $a \in A$ pode ser escrito como a diferença de elementos positivos a_+ e a_- tais que $a_+a_- = 0$.*

A seguinte proposição será muito útil na demonstração de alguns resultados.

Proposição 1.24 *Todo elemento $a \in A$ se escreve como combinação linear de elementos positivos de A .*

Demonstração: Segue diretamente das proposições 1.4 e 1.23. □

A próxima proposição apresenta alguns resultados básicos para elementos positivos de uma C^* -álgebra, cuja demonstração pode ser vista, por exemplo, em [18].

Proposição 1.25 *Suponha que A é uma C^* -álgebra com unidade.*

- (i) *Sejam $a \in A$ auto-adjunto e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\|a\| \leq t$. Então a é positivo se, e somente se, $\|a - t\| \leq t$.*
- (ii) *Se $a, b \in A$ são positivos, então $a + b$ é positivo.*
- (iii) *Se $a \in A$ é auto-adjunto, então $a \leq \|a\|$ no sentido de que $\|a\| - a$ é positivo.*
- (iv) *Se $0 \leq a \leq b$, então $\|a\| \leq \|b\|$.*
- (v) *Se $a, b \in A$ são auto-adjuntos e $c \in A$, então $a \leq b \Rightarrow c^*ac \leq c^*bc$*

Introduziremos o conceito de C^* -subálgebras hereditárias que será utilizado no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1.26 *Uma C^* -subálgebra B de uma C^* -álgebra A é dita hereditária se, para todos $a \in A^+$ e $b \in B^+$ temos que se $a \leq b$, então $a \in B$.*

O exemplo a seguir trata de um tipo especial de C^* -subálgebra hereditária que será abordada no capítulo 2.

Exemplo: Se P é uma projecção em uma C^* -álgebra A , então a C^* -subálgebra $PAP = \{PaP : a \in A\}$ é hereditária. De fato, seja $b \in A^+$ tal que $b \leq PaP$, para

algum $a \in A$. Suponha que $0 \leq b \leq PaP$. Temos que P é projeção e é positivo, então $0 \leq P \leq \|P\| \leq 1$, logo $0 \leq 1 - P$. Assim $0 \leq (1 - P)b(1 - P) \leq (1 - P)PaP(1 - P)$. Temos ainda que $(1 - P)PaP(1 - P) = (PaP - P^2aP)(1 - P) = 0(1 - P) = 0$. Logo $(1 - P)b(1 - P) = 0$. Como $\|b^{\frac{1}{2}}(1 - P)\|^2 = \|(1 - P)b(1 - P)\| = 0$, então $b^{\frac{1}{2}}(1 - P) = 0$, donde temos que $b(1 - P) = 0$. Logo $b = bP$ e daí $Pb = PbP$. Mas $b = b^* = (bP)^* = P^*b^* = Pb$, então $b = Pb = PbP \in PAP$.

1.2 Representações

Um resultado muito importante para C^* -álgebras, conhecido como Teorema de Gelfand-Naimark-Segal, será visto nesta seção. Veremos que toda C^* -álgebra pode ser identificada com uma C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Para isso, introduziremos o conceito de representação e alguns resultados prévios.

Definição 1.27 *Uma representação de uma $*$ -álgebra A é um par $(\mathcal{H}, \pi)$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um $*$ -homomorfismo. Se A tem unidade, então $\pi(1_A) = Id$.*

Dizemos que π é fiel se π for injetora.

Observemos que se $\pi : A \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma representação então de 1.17 temos que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, para todo $a \in A$. Do fato de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ser C^* -álgebra segue, para todo $a, b \in A$, que:

- (i) $\|\pi(ab)\| = \|\pi(a)\pi(b)\| \leq \|\pi(a)\| \cdot \|\pi(b)\|$
- (ii) $\|\pi(b^*)\| = \|\pi(b)^*\| = \|\pi(b)\|$
- (iii) $\|\pi(b^*b)\| = \|\pi(b)^*\pi(b)\| = \|\pi(b)\|^2$

Sejam A uma C^* -álgebra e $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Se $\|\tau\| = 1$, então τ é denominado *estado* de A . O conjunto de todos os estados é denotado por $S(A)$.

Lema 1.28 *Seja τ um funcional linear positivo de A uma C^* -álgebra com unidade. Então $\|\tau\| = \tau(1)$.*

Demonstração: Seja a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\langle a, b \rangle = \tau(b^*a)$. É simples verificar que esta é uma forma sesquilinear positiva em A . Assim temos que $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$ e $|\langle a, b \rangle| \leq \sqrt{\langle a, a \rangle} \sqrt{\langle b, b \rangle}$.

Seja $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$, temos que

$$|\tau(a)|^2 = |\tau(1^*a)|^2 \leq \left(\sqrt{\tau(1^*1)} \sqrt{\tau(a^*a)} \right)^2 = \tau(1)\tau(a^*a) \leq \tau(1)\|\tau\| \quad (*)$$

Como a desigualdade $(*)$ vale para todo $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$, temos que $\|\tau\|^2 \leq \tau(1)\|\tau\|$, logo $\|\tau\| \leq \tau(1)$.

Mas também sabemos que $\tau(1) \leq \|\tau\|$. Portanto $\|\tau\| = \tau(1)$. $\square$

Lema 1.29 *Seja τ um funcional linear positivo de uma C^* -álgebra com unidade A . Então*

- (i) *para cada $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ se, e somente se, $\tau(ba) = 0$ para todo $b \in A$.*
- (ii) *$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b)$, para todo $a, b \in A$.*

Demonstração: (i) Temos que a aplicação $(a, b) \mapsto \tau(b^*a)$ define uma forma sesquilinear positiva em A . Assim, $|\langle a, b \rangle| \leq \sqrt{\langle a, a \rangle} \sqrt{\langle b, b \rangle}$.

Vamos supor que $\tau(a^*a) = 0$. Daí, para todo $b \in A$,

$$|\langle a, b^* \rangle| \leq \sqrt{\langle a, a \rangle} \sqrt{\langle b^*, b^* \rangle} \Rightarrow |\tau(ba)| \leq (\tau(a^*a))^{\frac{1}{2}} (\tau(b^*b))^{\frac{1}{2}} = 0 \cdot (\tau(b^*b))^{\frac{1}{2}} = 0$$

Logo $|\tau(ba)| \leq 0$, ou seja $\tau(ba) = 0$.

Suponha agora que $\tau(ba) = 0$, para todo $b \in A$. Tomando $b = a^*$ temos que $\tau(a^*a) = 0$.

(ii) Seja $b \in A$. Se $\tau(b^*b) = 0$, então o resultado segue imediatamente de (i). Suponha $\tau(b^*b) > 0$. Vamos definir a aplicação $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\rho(c) = \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}$, para $c \in A$.

A linearidade de ρ segue da linearidade de τ . Seja $c \in A^+$. De 1.25 (v) temos que

$$0 \leq c \Rightarrow b^*0b \leq b^*cb \Rightarrow 0 \leq b^*cb$$

Então, como τ é positivo, temos $\tau(b^*cb) \geq 0$. Logo $\rho(c) = \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)} \geq 0$, ou seja, ρ é funcional linear positivo.

Mas $\rho(1) = \frac{\tau(b^*1b)}{\tau(b^*b)} = 1$, então do lema 1.28 temos que $\|\rho\| = 1$. Assim,

$$\rho(a^*a) \leq \|a^*a\| \Rightarrow \frac{\tau(b^*a^*ab)}{\tau(b^*b)} \leq \|a^*a\| \Rightarrow \tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\tau(b^*b).$$

□

Teorema 1.30 *Seja A uma C^* -álgebra. Então, para cada funcional linear positivo τ de A , podemos associar uma representação $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau)$ de A , denominada representação GNS associada a τ .*

Demonstração: Considere o conjunto $N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}$. Pelo lema 1.29 (ii), temos que N_τ é ideal à esquerda fechado de A .

Podemos então definir um produto interno no espaço quociente A/N_τ dado por $\langle \dot{a}, \dot{b} \rangle = \tau(b^*a)$, para todo $a, b \in A$. Temos então que A/N_τ é um espaço pré-hilbertiano.

Vamos definir para cada $a \in A$, $\pi(a)$ um operador em A/N_τ , dado por $\pi(a)(\dot{b}) = \dot{ab}$, para $\dot{b} \in A/N_\tau$.

É fácil ver que $\pi(a)$ é uma aplicação linear. Observe ainda que

$$\begin{aligned} \|\pi(a)(\dot{b})\|^2 &= \|\dot{ab}\|^2 = \langle \dot{ab}, \dot{ab} \rangle \\ &= \tau((ab)^*(ab)) = \tau(b^*a^*ab) \\ &\leq \|a^*a\|\tau(b^*b) = \|a\|^2\tau(b^*b) \\ &= \|a\|^2\|\dot{b}\|^2 \end{aligned}$$

Então $\|\pi(a)(\dot{b})\| \leq \|a\|\|\dot{b}\|$, portanto $\pi(a)$ é um operador limitado de A/N_τ .

Seja $\mathcal{H}_\tau$ o espaço de Hilbert obtido do completamento de A/N_τ pela norma proveniente do produto interno. Da continuidade de $\pi(a)$, este operador pode ser estendido de maneira única a um operador limitado $\pi_\tau(a)$ em $\mathcal{H}_\tau$. Então, para mostrarmos que $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau)$ é representação de A , falta provar que a aplicação π_τ de A em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\tau)$ dada por $a \mapsto \pi_\tau(a)$ é $*$ -homomorfismo.

Sejam $a, b \in A$, $\dot{c}, \dot{d} \in A/N_\tau$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} \pi_\tau(\lambda a + b)(\dot{c}) &= \widehat{(\lambda a + b)c} = \lambda \widehat{ac} + \widehat{bc} \\ &= \lambda \pi_\tau(a)(\dot{c}) + \pi_\tau(b)(\dot{c}) \end{aligned}$$

ou seja, π_τ é aplicação linear. Temos também que $\pi_\tau(ab)(\dot{c}) = \widehat{abc}$ e

$$\pi_\tau(a) \circ \pi_\tau(b)(\dot{c}) = \pi_\tau(a)(\pi_\tau(b)(\dot{c})) = \pi_\tau(a)(\widehat{bc}) = \widehat{abc}$$

Assim $\pi_\tau(ab) = \pi_\tau(a) \circ \pi_\tau(b)$. Vejamos também que

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}, \pi_\tau^*(a)(\dot{d}) \rangle &= \langle \pi_\tau(a)(\dot{c}), \dot{d} \rangle = \langle \widehat{a\dot{c}}, \dot{d} \rangle \\ &= \tau(d^*ac) = \tau((a^*d)^*c) = \langle \dot{c}, \widehat{a^*d} \rangle \\ &= \langle \dot{c}, \pi_\tau(a^*)(\dot{d}) \rangle \end{aligned}$$

Portanto $\pi_\tau(a^*) = \pi_\tau^*(a)$ e $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau)$ é representação de A . $\square$

Para o próximo teorema introduziremos as seguintes definições:

Definição 1.31 *Dada $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ uma coleção de espaços de Hilbert, a soma direta algébrica de $\mathcal{H}_i$, denotada por $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$, é o conjunto das sequências $x = (x_i)_i$ com $x_i \in \mathcal{H}_i$, para cada $i \in I$, e tal que o conjunto $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é finito.*

A soma direta algébrica torna-se um espaço pré-hilbertiano com o produto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle \quad (*)$$

Note que esta soma é finita pela definição de soma direta algébrica. Definimos $\mathcal{H}$ como o completamento de $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ com relação à norma proveniente do produto interno definido em (*). Desta forma temos que $\mathcal{H}$ é espaço de Hilbert.

Seja $(\mathcal{H}_i, \pi_i)_{i \in I}$, uma família de representações da $*$ -álgebra de Banach A . Então podemos obter uma representação $(\mathcal{H}, \pi)$ de A , denominada soma direta da família $(\mathcal{H}_i, \pi_i)_{i \in I}$ do seguinte modo:

- (1) $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i}$
- (2) $\pi(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é dado por $\pi(a)((x_i)_{i \in I}) = (\pi_i(a)(x_i))_{i \in I}$, para todo $a \in A$ e $(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$.

Definição 1.32 *Seja A uma C^* -álgebra com unidade. A representação universal de A , denotada por $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$, é a soma direta de todas as representações $(\mathcal{H}_\tau, \pi_\tau)$, para τ variando no conjunto $S(A)$ dos funcionais positivos de norma 1 de A .*

Para a demonstração do teorema de Gelfand-Naimark-Segal precisaremos da proposição a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em [18].

Proposição 1.33 *Se a é um elemento normal de A uma C^* -álgebra não nula, então existe um estado τ em A tal que $\|a\| = |\tau(a)|$.*

Teorema 1.34 (Gelfand – Naimark – Segal) *Se A é uma C^* -álgebra, então a representação universal $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ de A é fiel e π_u é uma isometria.*

Demonstração: Seja $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ a representação universal de A e suponha que a é um elemento de A tal que $\pi(a) = 0$. Pela proposição 1.33 existe um estado τ em A tal que $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$. Assim, tomando $b = (a^*a)^{1/4}$, então $\|a\|^2 = \tau(a^*a) = \tau(b^4) = \|\pi_\tau(b)(b)\|^2 = 0$, pois $\pi_\tau(b^4) = \pi_\tau(a^*a) = 0$, ou seja, $\pi_\tau(b) = 0$. Portanto $a = 0$ e π_u é injetora. E, pelo teorema 1.18, π_u é isometria. $\square$

O teorema de Gelfand-Naimark-Segal nos fornece uma caracterização para qualquer C^* -álgebra. Deste modo, temos que toda C^* -álgebra é isomorfa a uma C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Quando a C^* -álgebra é comutativa temos outra caracterização, que é dada pelo teorema de Gelfand. Neste resultado temos que toda C^* -álgebra comutativa é isometricamente isomorfa a $C_0(X)$, onde X é um espaço Hausdorff localmente compacto.

Teorema 1.35 (Gelfand) *Sejam A uma C^* -álgebra comutativa não nula e $\hat{A}$ o conjunto de todos os $*$ -homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \kappa: A &\longrightarrow C_0(\hat{A}) \\ a &\longmapsto \hat{a} \end{aligned}$$

onde $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, para $a \in A$ e $\phi \in \hat{A}$, denominada transformada de Gelfand, é um $*$ -isomorfismo isométrico.

Apesar da importância deste resultado não entraremos nos detalhes da teoria pois o teorema de Gelfand não foi diretamente utilizado neste trabalho. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [18].

1.3 A C^* -álgebra envolvente

A construção que descrevemos nesta seção é muito útil, aparecendo com bastante frequência na teoria de C^* -álgebras.

Dada B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade, vamos construir uma C^* -álgebra A que contém uma cópia de B , dada pela aplicação inclusão $i : B \rightarrow A$. Além disso, A possui a seguinte propriedade universal: se C é uma C^* -álgebra e $\psi : B \rightarrow C$ é $*$ -homomorfismo, então existe um único $*$ -homomorfismo $\tilde{\psi} : A \rightarrow C$ que faz o diagrama a seguir comutar.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & C \\ & \searrow i \quad \nearrow \tilde{\psi} & \\ & A & \end{array}$$

Definição 1.36 *Seja A uma $*$ -álgebra. Uma seminorma p em A é chamada C^* -seminorma se, para todo $a, b \in A$, temos que $p(ab) \leq p(a)p(b)$, $p(a^*) = p(a)^*$ e $p(a^*a) = p(a)^2$. Se $p(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ então chamamos p de C^* -norma.*

Exemplo: Se A é uma $*$ -álgebra, B uma C^* -álgebra e $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo, então a aplicação $p : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $p(a) = \|\varphi(a)\|$, é uma C^* -seminorma em A .

Faremos a seguir a construção de uma C^* -álgebra a partir de uma $*$ -álgebra munida de uma C^* -seminorma. Esta construção nos auxiliará a obter, posteriormente, a C^* -álgebra envolvente.

Proposição 1.37 *Sejam B uma $*$ -álgebra e p uma C^* -seminorma em B . Então o conjunto $\mathcal{N} = \{a \in B : p(a) = 0\}$ é um ideal bilateral auto-adjunto de B .*

Demonstração: Sejam $a \in \mathcal{N}$ e $b \in B$. Então

$$0 \leq p(ab) \leq p(a)p(b) = 0.p(b) = 0$$

Logo $p(ab) = 0$ e portanto $ab \in \mathcal{N}$.

E também $p(a^*) = p(a)^* = 0$. Logo $a^* \in \mathcal{N}$. □

Como $\mathcal{N}$ é um ideal bilateral auto-adjunto da $*$ -álgebra B , então o espaço quociente $B/\mathcal{N}$ é uma $*$ -álgebra. Definindo, para todo $b \in B$, $\|b\| = p(b)$, obtemos uma C^* -norma em $B/\mathcal{N}$.

Proposição 1.38 *Seja A o espaço de Banach obtido do completamento de $B/\mathcal{N}$ pela norma definida acima. Então A é uma C^* -álgebra.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [19].

No próximo resultado apresentamos uma C^* -seminorma em uma $*$ -álgebra de Banach com unidade, que será utilizada para a construção da C^* -álgebra envolvente.

Proposição 1.39 *Sejam B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade e $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as representações $(\mathcal{H}, \pi)$ de B . Se, para cada $b \in B$,*

$$\|b\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(b)\|$$

então $\|\cdot\|$ é C^ -seminorma em B .*

Demonstração: Como π é $*$ -homomorfismo e $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é C^* -álgebra, então $\|\pi(b)\| \leq \|b\|$ e, portanto $\|b\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(b)\| \leq \|b\| < \infty$, para todo $b \in B$. Segue das propriedades de supremo que, para todo $a, b \in B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

- (1) $\|b\| \geq 0$
- (2) $\|\lambda b\| = |\lambda| \cdot \|b\|$
- (3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

assim, $\|\cdot\|$ é seminorma. Além disso, para todo $(\mathcal{H}, \pi) \in \mathcal{R}$, temos, utilizando as propriedades do supremo, que

- (4) $\|\pi(ab)\| \leq \|\pi(a)\| \cdot \|\pi(b)\|$
- (5) $\|\pi(b^*)\| = \|\pi(b)\|$
- (6) $\|\pi(b^*b)\| = \|\pi(b)\|^2$

□

Definição 1.40 *Seja B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade munida da C^* -seminorma definida na proposição 1.39. O completamento de $B/\mathcal{N}$ por $\|\cdot\|$ é chamada C^* -álgebra envolvente de B e denotada por $C^*(B)$.*

Vamos mostrar que $C^*(B)$ satisfaz a propriedade universal.

Teorema 1.41 *Sejam B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade, C uma C^* -álgebra e $\psi : B \rightarrow C$ $*$ -homomorfismo. Então existe um único $*$ -homomorfismo $\tilde{\psi} : C^*(B) \rightarrow C$ que faz o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & C \\ & \searrow i & \nearrow \tilde{\psi} \\ & C^*(B) & \end{array}$$

onde $i : B \rightarrow C^*(B)$ é a aplicação quociente $i(b) = \dot{b}$.

Demonstração: Seja $(\mathcal{H}_u, \pi_u)$ a representação universal de C , que é fiel e isometria. Temos que a composição $\pi_u \circ \psi : B \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_u)$ é representação de B . Logo,

$$\|b\| = \sup_{\pi \in \mathcal{R}} \|\pi(b)\| \geq \|\pi_u \circ \psi(b)\|.$$

Portanto, se $b \in \mathcal{N}$, $(\pi_u \circ \psi)(b) = 0$ e daí, $\psi(b) = 0$. Logo $\mathcal{N} \subseteq \ker \psi$.

Como o espaço quociente $B/\mathcal{N}$ é denso em $C^*(B)$, vamos definir $\psi_0 : B/\mathcal{N} \rightarrow C$, dada por $\psi_0(\dot{b}) = \psi(b)$, para todo $b \in B$. Como $\mathcal{N} \subseteq \ker \psi$, então a aplicação ψ_0 está bem definida. E também ψ_0 é contínua pois, para todo $b \in B$

$$\|\psi_0(\dot{b})\|_C = \|\psi(b)\|_C = \|\pi_u(\psi(b))\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_u)} \leq \|b\| = \|\dot{b}\|.$$

Assim podemos tomar $\tilde{\psi}$ como extensão de ψ_0 para $C^*(B)$.

Falta provar a unicidade de $\tilde{\psi}$. Sejam ψ_1 e ψ_2 dois homomorfismos satisfazendo as condições anteriores.

Seja $b \in C^*(B)$. Existe uma sequência $(\dot{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $B/\mathcal{N}$ tal que $\dot{b}_n \rightarrow b$. Da continuidade de ψ_1 e ψ_2 , temos

$$\psi_1(b) = \lim_n \psi_1(\dot{b}_n) = \lim_n \psi(b_n) = \lim_n \psi_2(\dot{b}_n) = \psi_2(b).$$

Logo $\psi_1 = \psi_2$. □

1.4 A C^* -álgebra universal gerada por elementos e relações

Nesta seção introduziremos o conceito de C^* -álgebra universal gerada por elementos e relações. Faremos uma apresentação com detalhes suficientes para a descrição de certas álgebras que serão objetos de estudo deste trabalho.

Sejam $D = \{a_i : i \in I\}$ e $D^* = \{a_i^* : i \in I\}$. Uma *relação* é qualquer expressão com os elementos de D e D^* que pode ser formulada para operadores de um espaço de Hilbert considerando a_i^* o adjunto de a_i , para todo $i \in I$. Vamos considerar R um conjunto de relações do tipo

$$\|p(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, a_{i_1}^*, \dots, a_{i_n}^*)\| \leq M$$

onde p é um polinômio de $2n$ variáveis não comutativas, com coeficientes complexos e M é um número real não negativo. Note que se $M = 0$ então a relação pode ser escrita como uma relação algébrica entre os elementos $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, a_{i_1}^*, \dots, a_{i_n}^*$ e os escalares.

Definição 1.42 *Sejam A uma C^* -álgebra e $D = \{a_i : i \in I\}$ um subconjunto de A cujos elementos satisfazem as relações de R . Dizemos que A é universal para o par (D, R) se, dados uma C^* -álgebra A' e um subconjunto $D' = \{a'_i : i \in I\}$ de A' cujos elementos satisfazem as relações de R , existe um único $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow A'$ tal que $\varphi(a_i) = a'_i$, para todo $i \in I$.*

Quando existe tal C^* -álgebra, esta é única, a menos de isomorfismos. Esta propriedade é demonstrada a seguir.

Proposição 1.43 *Se A e A' são C^* -álgebras universais para o par (D, R) , então A e A' são isomorfas.*

Demonstração: Sejam os conjuntos $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ e $\{a'_i : i \in I\} \subseteq A'$ cujos elementos satisfazem as relações de R .

Da universalidade das C^* -álgebras A e A' , existem $*$ -homomorfismos $\varphi : A \rightarrow A'$ e $\rho : A' \rightarrow A$ tais que, para todo $i \in I$, $\varphi(a_i) = a'_i$ e $\rho(a'_i) = a_i$. Assim, $(\rho \circ \varphi)(a_i) = a_i$ e $(\varphi \circ \rho)(a'_i) = a'_i$.

Usando novamente que A é universal, temos que Id_A é o único $*$ -homomorfismo que leva a_i em a_i . Analogamente, $Id_{A'}$ é o único $*$ -homomorfismo que leva a'_i em a'_i . Portanto $\rho \circ \varphi = Id_A$ e $\varphi \circ \rho = Id_{A'}$. $\square$

As próximas definições nos darão elementos para a construção da C^* -álgebra universal para o par (D, R) .

Definição 1.44 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma representação π de (D, R) é um conjunto $\{\pi(a_i) : i \in I\}$ de operadores limitados de $\mathcal{H}$ tal que $\pi(a_i^*) = \pi(a_i)^*$, para todo $i \in I$, e seus elementos satisfazem as relações de R .*

Definição 1.45 *O par (D, R) é admissível se, para todo $i \in I$*

$$\sup\{\|\pi(a_i)\| : \pi \text{ é representação de } (D, R)\} = M_i < \infty$$

Exemplos:

(1) Sejam $D = \{x\}$ e $R = \{x = x^*\}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ seja $\pi_\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_\lambda(x) = \lambda$. Claramente π_λ é representação do par (D, R) . No entanto $\|\pi_\lambda(x)\| = |\lambda| \rightarrow \infty$. Logo o par (D, R) não é admissível.

(2) Sejam $D = \{x, 1\}$ e $R = \{xx^* = 1 = x^*x, 1 = 1^* = 1^2, x1 = 1x = x\}$. Seja $\pi : D \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação de (D, R) . Então $\pi(1) = Id$ e $\pi(x)\pi(x)^* = Id = \pi(x)^*\pi(x)$, logo $\|\pi(x)\pi(x)^*\| = \|\pi(x)\|^2 = 1$. Desta última igualdade temos que $\sup\{\|\pi(x)\| : \pi \text{ é representação de } (D, R)\} \leq 1$. Portanto o par (D, R) é admissível.

(3) Sejam $D = \{x, 1\}$ e $R = \{x = x^*, \|x\| \leq 1, \|1 - x\| \leq 1, 1 = 1^* = 1^2, x1 = 1x = x\}$. Seja $\pi : D \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação de (D, R) . Então $\pi(1) = Id$ e $\pi(x)$ satisfaz as relações de R , ou seja, $\pi(x) = \pi(x)^* = \pi(x^*)$, $\|Id - \pi(x)\| \leq 1$ e $\|\pi(x)\| \leq 1$. Desta última desigualdade temos que $\sup\{\|\pi(x)\| : \pi \text{ é representação de } (D, R)\} \leq 1$. Portanto o par (D, R) é admissível.

Dado o par admissível (D, R) , seja $\mathcal{F}(D)$ o conjunto de todos os polinômios complexos nas variáveis a_i e a_i^* não comutativas, para todo $i \in I$. Observe que $\mathcal{F}(D)$ é uma $*$ -álgebra.

É fácil ver que toda representação não degenerada de (D, R) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ pode ser estendida linearmente de maneira única a um $*$ -homomorfismo de $\mathcal{F}(D)$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Assim, se $a \in \mathcal{F}(D)$, definimos

$$\|a\|_u = \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é representação de } (D, R)\}$$

Como (D, R) é admissível, $\|\cdot\|_u$ é uma C^* -seminorma em $\mathcal{F}(D)$.

Seja $\mathcal{N} = \{x : \|x\|_u = 0\}$. Pela proposição 1.38 o completamento de $\mathcal{F}(D)/\mathcal{N}$ pela norma definida por $\|\dot{x}\| = \|x\|_u$, para todo $x \in \mathcal{F}(D)$, é uma C^* -álgebra, que denotamos por $C^*\langle D, R \rangle$.

Teorema 1.46 *Seja (D, R) admissível. Então $C^*\langle D, R \rangle$ é C^* -álgebra universal para (D, R) .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2].

Definição 1.47 *Dizemos que $C^*\langle D, R \rangle$, ou qualquer C^* -álgebra isomorfa a ela, é a C^* -álgebra universal gerada por D satisfazendo as relações de R .*

Exemplos:

(1) Sejam A uma C^* -álgebra. Tome $D = A$ e R o conjunto de todas as relações $*$ -algébricas em A . Para toda π representação de A , temos $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Logo (D, R) é admissível e $C^*\langle D, R \rangle \simeq A$.

(2) Sendo $D = \{x, 1\}$ e $R = \{xx^* = 1 = x^*x, 1 = 1^* = 1^2, x1 = 1x = x\}$, a C^* -álgebra universal gerada pelo par (D, R) é $C(S^1)$.

(3) Se $D = \{x, 1\}$ e $R = \{x = x^*, \|x\| \leq 1, \|1-x\| \leq 1, 1 = 1^* = 1^2, x1 = 1x = x\}$ temos que $C^*\langle D, R \rangle = C([0, 1])$.

1.5 Módulos de Hilbert

Nesta seção apenas apresentamos algumas definições relacionadas ao conceito de módulo de Hilbert que serão utilizadas neste trabalho. Algumas referências utilizadas foram [4], [21] e [13].

Definição 1.48 *Sejam R um anel e $(M, +)$ um grupo abeliano. Dizemos que M é um módulo à direita sobre R se existe uma aplicação de $M \times R$ em M dada por $(m, a) \mapsto ma$ satisfazendo para todo $m, n \in M$ e $a, b \in R$*

- (i) $(m + n)a = ma + na$
- (ii) $m(a + b) = ma + mb$
- (iii) $m(ab) = (ma)b$
- (iv) $m1_R = m$, se R tem unidade 1_R .

Vamos considerar A uma C^* -álgebra com unidade 1_A .

Definição 1.49 *Seja M um espaço vetorial complexo e também módulo à direita sobre A com uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \rightarrow A$. Dizemos que M é um módulo de Hilbert à direita sobre A se, para todo $m, m', n \in M$ e $a \in A$*

- (i) $\langle \lambda m + m', n \rangle = \bar{\lambda} \langle m, n \rangle + \langle m', n \rangle$
- (ii) $\langle m, \lambda n + n' \rangle = \lambda \langle m, n \rangle + \langle m, n' \rangle$
- (iii) $\langle m, m \rangle \geq 0$ no sentido de A^+
- (iv) Se $\langle m, m \rangle = 0$, então $m = 0$
- (v) $\langle m, n \rangle^* = \langle n, m \rangle$
- (vi) $\langle m, na \rangle = \langle m, n \rangle a$
- (vii) M é completo na norma $\|m\| = \|\langle m, m \rangle\|_A^{\frac{1}{2}}$

Definição 1.50 *Dados M e N módulos de Hilbert sobre a mesma C^* -álgebra A , dizemos que uma função $T : M \rightarrow N$ é adjuntável quando existe uma função $T^* : N \rightarrow M$ tal que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ para todo $x \in M$ e $y \in N$.*

A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [3].

Proposição 1.51 *Sejam M_1, M_2 e M_3 módulos de Hilbert sobre a C^* -álgebra A e $T : M_1 \rightarrow M_2$, $S : M_1 \rightarrow M_2$ e $R : M_2 \rightarrow M_3$ funções adjuntáveis e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:*

- (i) T^* é único
- (ii) T^* é adjuntável e $(T^*)^* = T$
- (iii) $T + \lambda S$ é adjuntável e $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda}S^*$
- (iv) $R \circ T$ é adjuntável e $(R \circ T)^* = T^* \circ R^*$
- (v) T e T^* são $\mathbb{C}$ -lineares
- (vi) T e T^* são A -lineares
- (vii) T e T^* são contínuos.

Quando T é adjuntável, T^* é denominado o adjunto de T .

Definição 1.52 *Sejam A uma C^* -álgebra e M um A -módulo de Hilbert à direita. Definimos $\mathcal{B}(M) = \{T : M \rightarrow M : T \text{ é adjuntável}\}$.*

Sem dificuldades prova-se que $\mathcal{B}(M)$ é C^* -álgebra com a norma

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Definição 1.53 *Denominamos bimódulo de Hilbert sobre A o par (M, ϕ) , onde M é um módulo de Hilbert à direita sobre a C^* -álgebra A , com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com valores em A , e $\phi : A \rightarrow \mathcal{B}(M)$ é um $*$ -homomorfismo isométrico que provê a M a estrutura de módulo à esquerda sobre A dada por $a.m = \phi(a)(m)$, para $a \in A$ e $m \in M$.*

Definição 1.54 *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de bimódulos de Hilbert sobre A . A soma direta de Hilbert é o completamento da respectiva soma direta algébrica $\bigoplus_{i \in I} M_i$ pela norma definida pelo produto interno*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle$$

para $x, y \in \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Para cada $i \in I$, seja ϕ_i $*$ -homomorfismo isométrico que provê a M_i a estrutura de módulo de Hilbert à esquerda sobre A . Seja o $*$ -homomorfismo isométrico $\phi : A \rightarrow \mathcal{B}\left(\overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}\right)$ onde $\phi(a) \in \mathcal{B}\left(\overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}\right)$ é dado por $\phi(a)((x_i)_{i \in I}) = (\phi_i(a)(x_i))_{i \in I}$, para todo $a \in A$ e $(x_i)_{i \in I} \in \overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}$. Deste modo, o par $\left(\overline{\bigoplus_{i \in I} M_i}, \phi\right)$ é bimódulo de Hilbert sobre A .

Capítulo 2

Produto Cruzado de uma C^* -álgebra por um endomorfismo

Neste capítulo apresentaremos o conceito principal deste trabalho, introduzido por Exel em [10]. Na primeira parte apresentamos as definições de operador transferência, esperança condicional e os resultados que relacionam estes dois conceitos para dar condições necessárias à construção do produto cruzado de uma C^* -álgebra por um endomorfismo. Na segunda parte apresentamos a construção do produto cruzado em si e na terceira parte mostramos sob que condições este produto cruzado é isomorfo a uma determinada C^* -álgebra.

2.1 Operadores Transferência

Considere A uma C^* -álgebra unitária e $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo. Apresentamos a seguir o principal conceito desta seção.

Definição 2.1 *Um operador transferência do par (A, α) é uma função linear contínua $\mathcal{L} : A \rightarrow A$ tal que*

- (i) $\mathcal{L}$ é positivo, isto é, $\mathcal{L}(A_+) \subseteq A_+$
- (ii) $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$, $\forall a, b \in A$

Dadas C^* -álgebras unitárias A e B dizemos que uma aplicação $\phi : A \rightarrow B$ é *auto-adjunta* se $\phi(a^*) = \phi(a)^*$, para todo $a \in A$.

Proposição 2.2 *Seja $\mathcal{L}$ um operador transferência para (A, α) . Então $\mathcal{L}$ é auto-adjunto e vale que $\mathcal{L}(a\alpha(b)) = \mathcal{L}(a)b$, para todo $a, b \in A$.*

Demonstração: Se $a \in A_+$, então temos que $a = a^*$ e pelo fato de $\mathcal{L}$ ser positivo, temos que $\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(a^*) \in A_+$. Então $\mathcal{L}(a^*) = \mathcal{L}(a^*)^* = \mathcal{L}(a)^*$, sendo a última igualdade pelo fato de $a = a^*$.

Dado $b \in A$ qualquer, temos por 1.24, que b se escreve como soma de elementos positivos de A , então podemos concluir que $\mathcal{L}(b^*) = \mathcal{L}(b)^*$. Portanto $\mathcal{L}$ é auto-adjunto.

Sejam $a, b \in A$ quaisquer

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a\alpha(b)) &= \mathcal{L}\left((a\alpha(b))^*\right)^* = \left(\mathcal{L}(\alpha(b)^*a^*)\right)^* \\ &= \left(\mathcal{L}(\alpha(b^*)a^*)\right)^* \stackrel{2.1(ii)}{=} \left(b^*\mathcal{L}(a^*)\right)^* = \mathcal{L}(a^*)^*b = \mathcal{L}(a)b \end{aligned}$$

□

Vejamos também que $\text{Im}(\mathcal{L})$ é um ideal bilateral de A . Claramente $0 \in \text{Im}(\mathcal{L})$ e se $u, v \in \text{Im}(\mathcal{L})$, então $u + v \in \text{Im}(\mathcal{L})$. Seja $u \in \text{Im}(\mathcal{L})$, então $u = \mathcal{L}(b)$ para algum $b \in A$. Então $a\mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(\alpha(a)b) \in \text{Im}(\mathcal{L})$ e $\mathcal{L}(b)a = \mathcal{L}(b\alpha(a)) \in \text{Im}(\mathcal{L})$.

Note que

$$a\mathcal{L}(1_A) = \mathcal{L}(\alpha(a)1_A) = \mathcal{L}(\alpha(a)) = \mathcal{L}(1_A\alpha(a)) = \mathcal{L}(1_A)a.$$

Logo $\mathcal{L}(1_A)$ é positivo e pertence ao centro de A .

Devido à importância da imagem de α neste trabalho adotaremos a notação

$$\mathcal{R} = \alpha(A)$$

e pela proposição 1.19 temos que $\mathcal{R}$ é C^* -subálgebra de A .

Definição 2.3 Uma aplicação $E : A \rightarrow A' \subseteq A$, onde A' é uma C^* -subálgebra de A , é uma esperança condicional sobre A' se:

- (i) E é positiva, ou seja, $E(A_+) \subseteq A_+$,
- (ii) $E^2 = E$, $\text{Im}(E) = A'$ e $E(1_A) = 1_{A'}$,
- (iii) $E(ab) = E(a)b$ e $E(ba) = bE(a)$, para $a \in A$ e $b \in A'$.

Dado $\mathcal{L}$, operador transferência para (A, α) , defina a aplicação $E : A \rightarrow A$ por $E = \alpha \circ \mathcal{L}$. Claramente temos que $E : A \rightarrow \mathcal{R}$. Vejamos que E é positivo.

Seja $a \in A_+$, então existe $b \in A$ tal que $a = b^*b$. Como $\mathcal{L}$ é, por definição, positivo, então $\mathcal{L}(b^*b) \in A_+$. Assim, existe $c \in A$ tal que $\mathcal{L}(b^*b) = c^*c$. Logo

$$\begin{aligned} E(a) &= E(b^*b) = \alpha(\mathcal{L}(b^*b)) = \alpha(c^*c) = \alpha(c^*)\alpha(c) = \\ &= \alpha(c)^*\alpha(c) \in A_+ \end{aligned}$$

Se $b \in \mathcal{R}$, então existe $c \in A$ tal que $b = \alpha(c)$, e se $a \in A$ segue que

$$\begin{aligned} E(ab) &= \alpha(\mathcal{L}(ab)) = \alpha(\mathcal{L}(a\alpha(c))) = \alpha(\mathcal{L}(a)c) = \alpha(\mathcal{L}(a))\alpha(c) = \\ &= E(a)\alpha(c) = E(a)b \end{aligned}$$

Analogamente $E(ba) = bE(a)$.

Acima foi verificado 2.3 (iii). Então temos que E satisfaz quase todos os axiomas de uma esperança condicional vistos em 2.3. No entanto não vale necessariamente 2.3 (ii). Para isso temos a seguinte proposição:

Proposição 2.4 Seja $\mathcal{L}$ um operador transferência para o par (A, α) . Então são equivalentes:

- (i) a composição $E = \alpha \circ \mathcal{L}$ é uma esperança condicional sobre $\mathcal{R}$
- (ii) $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$
- (iii) $\alpha(\mathcal{L}(1_A)) = \alpha(1_A)$

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sendo E esperança condicional sobre $\mathcal{R}$, temos que $E^2 = E$ e $\text{Im} E = \mathcal{R}$. Então para $a \in A$ temos $E(E(a)) = E(a)$, ou seja, $E|_{\text{Im} E} = Id_{\text{Im} E}$.

Para todo $a \in A$, $\alpha(a) \in \mathcal{R}$, então temos que $\alpha(a) = E(\alpha(a)) = \alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha(a)$. Logo $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Como já foi mostrado, $a\mathcal{L}(1_A) = \mathcal{L}(1_A\alpha(a))$. Portanto $\mathcal{L}(1_A) = 1_A\mathcal{L}(1_A) = \mathcal{L}(1_A\alpha(1_A)) = \mathcal{L}(\alpha(1_A))$. Como $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$, então

$$\alpha(1_A) = \alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha(1_A) = \alpha(\mathcal{L}(\alpha(1_A))) = \alpha(1_A\mathcal{L}(1_A)) = \alpha(\mathcal{L}(1_A)).$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Seja $a \in A$.

$$\begin{aligned} \alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha(a) &= \alpha(\mathcal{L}(\alpha(a))) = \alpha(\mathcal{L}(\alpha(a)1_A)) = \alpha(a\mathcal{L}(1_A)) = \alpha(a)\alpha(\mathcal{L}(1_A)) = \\ &= \alpha(a)\alpha(1_A) = \alpha(a1_A) = \alpha(a) \end{aligned}$$

Então $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Pelas observações feitas anteriormente falta provar 2.3 (ii).

$$E^2 = (\alpha \circ \mathcal{L}) \circ (\alpha \circ \mathcal{L}) = (\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha) \circ \mathcal{L} = \alpha \circ \mathcal{L} = E$$

Portanto $E^2 = E$.

Seja $a \in A$, como $E(\alpha(a)) = (\alpha \circ \mathcal{L})(\alpha(a)) = \alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha(a) = \alpha(a)$, então $E|_{\mathcal{R}} = Id_{\mathcal{R}}$. Portanto, dado $b \in \mathcal{R}$, temos que $b = E(b)$, donde temos que $b \in \text{Im}E$. Logo $\mathcal{R} \subseteq \text{Im}E$ e então $\text{Im}E = \mathcal{R}$.

Finalmente temos $E(1_A) = 1_{\mathcal{R}}$ pois $1_{\mathcal{R}} = E(1_{\mathcal{R}}) = E(1_{\mathcal{R}}1_A) = 1_{\mathcal{R}}E(1_A) = E(1_A)$. $\square$

Definição 2.5 Dizemos que um operador transferência é não-degenerado se as condições equivalentes da proposição 2.4 valem.

Proposição 2.6 Seja $\mathcal{L}$ um operador transferência não-degenerado. Então A pode ser escrito como soma direta de ideais:

$$A = \ker \alpha \oplus \text{Im}\mathcal{L}$$

Demonstração: Como $\mathcal{L}$ é não-degenerado então pela proposição 2.4, temos que $\alpha \circ \mathcal{L} \circ \alpha = \alpha$.

Primeiramente vejamos que $A \subseteq \ker \alpha + \text{Im}\mathcal{L}$. Seja $a \in A$, então

$$a = \left(a - \mathcal{L}(\alpha(a))\right) + \mathcal{L}(\alpha(a))$$

e temos que

$$\alpha\left(a - \mathcal{L}(\alpha(a))\right) = \alpha(a) - \alpha\left(\mathcal{L}(\alpha(a))\right) = \alpha(a) - \alpha(a) = 0$$

donde segue que $a - \mathcal{L}(\alpha(a)) \in \ker \alpha$.

Seja $b \in \ker \alpha \cap \text{Im} \mathcal{L}$, então $\alpha(b) = 0$ e existe $c \in A$ tal que $b = \mathcal{L}(c)$. Temos então

$$b^*b = b^*\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(\alpha(b^*)c) = \mathcal{L}(\alpha(b)^*c) = \mathcal{L}(0) = 0$$

Então $\|b^*b\| = \|b\|^2 = 0$, donde segue que $\|b\| = 0$ e portanto $b = 0$.

Logo $\ker \alpha \cap \text{Im} \mathcal{L} = \{0\}$ e portanto $A = \ker \alpha \oplus \text{Im} \mathcal{L}$. □

A proposição a seguir trata de como produzir um operador transferência não-degenerado.

Proposição 2.7 *Seja E uma esperança condicional de A sobre $\mathcal{R}$. Suponha que é dado um ideal $\mathcal{J}$ em A tal que $A = \mathcal{J} \oplus \ker \alpha$. Seja $\beta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{J}$ a inversa da restrição $\alpha|_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{R}$. Então a composta $\mathcal{L} = \beta \circ E$ é um operador transferência não-degenerado para o par (A, α) que também satisfaz $\alpha \circ \mathcal{L} = E$.*

Demonstração: Provaremos primeiramente que $\mathcal{L} = \beta \circ E$ é positivo. Seja $a \in A_+$ então existe $b \in A$ tal que $a = b^*b$. Como E é positiva, existe $c \in A$ tal que $E(b^*b) = c^*c$.

$$\mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b^*b) = \beta(E(b^*b)) = \beta(c^*c) = \beta(c)^*\beta(c) \in A_+$$

Sejam $a, b \in A$, queremos $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$. Temos

$$\mathcal{L}(\alpha(a)b) = \beta(E(\alpha(a)b)) = \beta(\alpha(a)E(b))$$

pois E é esperança condicional e $\alpha(a) \in \mathcal{R}$.

Temos $\beta(\alpha(a)E(b)) \in \mathcal{J}$ e como $\mathcal{J}$ é ideal de A e $\beta(E(b)) \in \mathcal{J}$, então $a\beta(E(b)) \in \mathcal{J}$. Aplicando α temos

$$\alpha(\beta(\alpha(a)E(b))) = \alpha(a)E(b)$$

$$\alpha(a\beta(E(b))) = \alpha(a)\alpha(\beta(E(b))) = \alpha(a)E(b)$$

Logo $\alpha(\beta(\alpha(a)E(b))) = \alpha(a\beta(E(b)))$. Mas como $\alpha|_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{R}$ é injetora, então $\beta(\alpha(a)E(b)) = a\beta(E(b))$. Portanto

$$\mathcal{L}(\alpha(a)b) = \beta(\alpha(a)E(b)) = a\beta(E(b)) = a\mathcal{L}(b)$$

Assim $\mathcal{L}$ é operador transferência.

Vejamos agora que $\alpha \circ \mathcal{L} = E$. Como $\alpha \circ \beta = Id_{\mathcal{R}}$, então

$$\alpha \circ \mathcal{L} = \alpha \circ (\beta \circ E) = Id_{\mathcal{R}} \circ E = E.$$

Assim $\mathcal{L}$ satisfaz 2.4 (i) e portanto $\mathcal{L}$ é não-degenerado. $\square$

A próxima proposição nos mostra que quando o ideal $\mathcal{J}$ existe, este é único.

Proposição 2.8 *Se existe um ideal $\mathcal{J}$ tal que $A = \mathcal{J} \oplus \ker \alpha$, então*

$$\mathcal{J} = \{a \in A : ab = 0, \forall b \in \ker \alpha\}$$

Demonstração: Vejamos que $\{a \in A : ab = 0, \forall b \in \ker \alpha\}$ é ideal. Sejam a e $a' \in \{a \in A : ab = 0, \forall b \in \ker \alpha\}$ e $c \in A$, então $(a + a')b = ab + a'b = 0$ e $(ca)b = c(ab) = 0$, para todo $b \in \ker \alpha$.

Mostremos que $\mathcal{J}$ é como definido acima. Sejam $a \in \mathcal{J}$ e $b \in \ker \alpha$, temos $ab \in \mathcal{J} \cap \ker \alpha$, pois são ambos ideais de A . Como temos uma soma direta, então $ab = 0$, para todo $b \in \ker \alpha$.

Seja $a \in \{a \in A : ab = 0, \forall b \in \ker \alpha\}$. Temos que $a = c + d$, com $c \in \mathcal{J}$ e $d \in \ker \alpha$. Seja $b \in \ker \alpha$, multiplicando por a temos $ab = cb + db$. Temos que $cb \in \mathcal{J} \cap \ker \alpha = \{0\}$, logo $cb = 0$. Então $ab = 0 = db$, para todo $b \in \ker \alpha$. Tome $b = d^*$, temos que $d^* \in \ker \alpha$ pois $\alpha(d^*) = \alpha(d)^* = 0$. Portanto $dd^* = 0$, donde $\|dd^*\| = \|d\|^2 = 0$, e então $d = 0$. Logo $a = c + 0 = c \in \mathcal{J}$. $\square$

2.2 O Produto Cruzado de uma C^* -álgebra por um endomorfismo

Nesta seção introduziremos a C^* -álgebra $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ que tem A como C^* -subálgebra. Apresentaremos o principal conceito deste trabalho, a C^* -álgebra $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ que será obtida através do quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ por um ideal $\mathcal{I}$.

Sejam A uma C^* -álgebra com unidade, $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo e $\mathcal{L}$ um operador transferência para (A, α) .

Definição 2.9 Denotamos por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ a C^* -álgebra universal gerada por A e um elemento S sujeito às relações:

$$(i) \quad Sa = \alpha(a)S,$$

$$(ii) \quad S^*aS = \mathcal{L}(a)$$

para todo $a \in A$.

O par de elementos e relações descritos acima é admissível. De fato, para qualquer representação π deste par tem-se $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ e

$$\|\pi(S)\|^2 = \|\pi(S^*S)\| = \|\pi(S^*1S)\| = \|\pi(\mathcal{L}(1))\| \leq \|\mathcal{L}(1)\| \Rightarrow \|\pi(S)\| \leq \|\mathcal{L}(1)\|^{1/2}.$$

Portanto, pelo teorema 1.46 deduzimos a existência da C^* -álgebra universal gerada pelos elementos e relações acima, denotada por $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a sua norma universal. Quando $\mathcal{L}(1) = 1$, temos que $S^*S = 1$, portanto S é uma isometria.

Como $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ é C^* -álgebra universal existe a aplicação canônica

$$i : A \longrightarrow \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$$

mas não temos, a princípio, uma garantia de que esta aplicação será injetiva. O nosso próximo objetivo será mostrar que a aplicação canônica i é injetora.

Seja $A_{\mathcal{L}}$ o espaço A com a estrutura de módulo à direita sobre A dada por:

$$m.a = m\alpha(a), \quad \forall m \in A_{\mathcal{L}}, a \in A$$

Também defina a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}} : A_{\mathcal{L}} \times A_{\mathcal{L}} \rightarrow A$ por

$$\langle m, n \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^*n), \quad m, n \in A_{\mathcal{L}}$$

Vejamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ satisfaz as condições de 1.49. Como $\mathcal{L}$ é linear a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ satisfaz (i) e (ii) de 1.49. E dados $m, m', n \in A_{\mathcal{L}}$, $a \in A$ temos

$$\langle m, n \cdot a \rangle_{\mathcal{L}} = \langle m, n \alpha(a) \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^* n \alpha(a)) = \mathcal{L}(m^* n) a = \langle m, n \rangle_{\mathcal{L}} a$$

$$\langle m, n \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^* n) = \mathcal{L}((n^* m)^*) = \mathcal{L}(n^* m)^* = \langle n, m \rangle_{\mathcal{L}}^*$$

$$\langle m, m \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^* m) \in A_+ \text{ pois } m^* m \in A_+$$

No entanto, esta aplicação não satisfaz necessariamente a propriedade

$$\langle m, m \rangle_{\mathcal{L}} = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Portanto temos que $A_{\mathcal{L}}$ é pré-módulo de Hilbert. Fazendo o quociente de $A_{\mathcal{L}}$ pelos vetores de norma zero e fazendo o completamento na norma proveniente de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}}$ definido anteriormente, obtemos um módulo à direita de Hilbert sobre A que denotaremos por $M_{\mathcal{L}}$.

Vamos mostrar que $M_{\mathcal{L}}$ é um bimódulo de Hilbert. Para todo $a \in M$ e $m \in A_{\mathcal{L}}$ temos:

$$\|am\|_{\mathcal{L}}^2 = \|\langle am, am \rangle_{\mathcal{L}}\| = \|\mathcal{L}((am)^* am)\| = \|\mathcal{L}(m^* a^* am)\|$$

Pela proposição 1.25 (iii) temos que $a^* a \leq \|a^* a\|$ e de 1.25 (v) segue que $m^* a^* am \leq m^* \|a^* a\| m$. E como $\mathcal{L}$ é linear e positivo, então

$$\mathcal{L}(m^* a^* am) \leq \|a^* a\| \mathcal{L}(m^* m).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|am\|_{\mathcal{L}}^2 &= \|\mathcal{L}(m^* a^* am)\| \leq \|a^* a\| \|\mathcal{L}(m^* m)\| \\ &= \|a\|^2 \|\mathcal{L}(m^* m)\| = \|a\|^2 \|\langle m, m \rangle_{\mathcal{L}}\| \quad (*) \end{aligned}$$

Então por (*) temos que a multiplicação à esquerda por $a \in A_{\mathcal{L}}$ pode ser estendida para o operador

$$\begin{aligned} \phi(a) : M_{\mathcal{L}} &\longrightarrow M_{\mathcal{L}} \\ m &\longmapsto am \end{aligned}$$

que é linear, limitado e satisfaz $\phi(a)(mb) = (\phi(a)m)b$.

Temos que $\phi(a)$ é adjuntável:

$$\langle \phi(a)(m), n \rangle_{\mathcal{L}} = \langle am, n \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(m^* a^* n) = \langle m, a^* n \rangle_{\mathcal{L}}$$

Seja $\psi(a) : A_{\mathcal{L}} \rightarrow A_{\mathcal{L}}$ dado por $\psi(a)(n) = a^*n$. Claramente ψ é operador linear.

$$\begin{aligned} \|\psi(a)(n)\|^2 &= \|\langle \psi(a)(n), \psi(a)(n) \rangle_{\mathcal{L}}\| = \|\mathcal{L}((a^*n)^*a^*n)\| = \|\mathcal{L}(n^*aa^*n)\| \\ &\leq \|aa^*\| \|\mathcal{L}(n^*n)\| = \|a\|^2 \|\mathcal{L}(n^*n)\| = \|a\|^2 \|\langle n, n \rangle_{\mathcal{L}}\| = \|a\|^2 \|n\|_{\mathcal{L}}^2 \end{aligned}$$

Portanto $\psi(a)$ pode ser estendido a $M_{\mathcal{L}}$. E, como $\phi(a)^* = \psi(a)$, então $\phi(a^*)(n) = a^*n = \psi(a)(n) = \phi(a)^*(n)$.

Isto nos faz definir

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \mathcal{B}(M_{\mathcal{L}}) \\ a &\longmapsto \phi(a) \end{aligned}$$

Observe que $\|\phi(a)\| = \|a\|$, logo ϕ é isometria.

Mostremos que ϕ é $*$ -homomorfismo. Seja $m \in M_{\mathcal{L}}$

$$\phi(a+b)(m) = (a+b)m = am + bm = \phi(a)(m) + \phi(b)(m)$$

$$\phi(ab)(m) = (ab)m = a(bm) = \phi(a)(bm) = \phi(a)(\phi(b)(m)) = \phi(a) \circ \phi(b)(m)$$

$$\phi(a^*)(m) = a^*m = \psi(a)(m) = \phi(a)^*(m)$$

Pela definição 1.53 temos que $M_{\mathcal{L}}$ é um bimódulo de Hilbert sobre A .

Lema 2.10 *Se $\mathcal{L}$ é um operador transferência para (A, α) e $n \in \{0, 1, \dots\}$, então $\mathcal{L}^n$ é um operador transferência para (A, α^n) . Além disso, a função*

$$\gamma_n : x \in A_{\mathcal{L}^n} \longmapsto \alpha(x) \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$$

se estende para uma aplicação linear adjuntável

$$\gamma_n : M_{\mathcal{L}^n} \rightarrow M_{\mathcal{L}^{n+1}}$$

com $\|\gamma_n\| \leq \|\mathcal{L}(1)\|^{\frac{1}{2}}$, cujo adjunto é dado por

$$\gamma_n^*(x) = \mathcal{L}(x), \forall x \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$$

Demonstração: • $\mathcal{L}^n$ é operador transferência.

Primeiramente temos que $\mathcal{L}^n$ é positivo pois é composição de operadores positivos.

Dados $a, b \in A$, queremos mostrar que $\mathcal{L}^n(\alpha^n(a)b) = a\mathcal{L}^n(b)$. Como $\mathcal{L}$ é operador transferência temos que $\mathcal{L}(\alpha(a)b) = a\mathcal{L}(b)$. Suponha que $\mathcal{L}^k(\alpha^k(a)b) = a\mathcal{L}^k(b)$, para $k < n$. Temos então que

$$\mathcal{L}^{k+1}(\alpha^{k+1}(a)b) = \mathcal{L}^k\left(\mathcal{L}(\alpha(\alpha^k(a))b)\right) = \mathcal{L}^k\left(\alpha^k(a)\mathcal{L}(b)\right) = a\mathcal{L}^k\left(\mathcal{L}(b)\right) = a\mathcal{L}^{k+1}(b)$$

Portanto $\mathcal{L}^n\left(\alpha^n(a)(b)\right) = a\mathcal{L}^n(b), \forall a, b \in A$.

- $\gamma_n : x \in A_{\mathcal{L}^n} \mapsto \alpha(x) \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$ se estende a uma função linear adjuntável
Sejam $x \in A_{\mathcal{L}^n}$ e $a \in A$. E $A_{\mathcal{L}^n}$ também é A -módulo à direita para $x.a = x.\alpha^n(a)$.

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n(x), \gamma_n(x) \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} &= \langle \alpha(x), \alpha(x) \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} = \mathcal{L}^{n+1}\left(\alpha(x^*)\alpha(x)\right) \\ &= \mathcal{L}^n\left(\mathcal{L}(\alpha(x^*)\alpha(x))\right) = \mathcal{L}^n\left(x^*\mathcal{L}(\alpha(x))\right) \\ &= \mathcal{L}^n\left(x^*\mathcal{L}(1\alpha(x))\right) = \mathcal{L}^n\left(x^*\mathcal{L}(1)x\right) \end{aligned}$$

Usando o fato de $\mathcal{L}(1)$ pertencer ao centro de A temos que

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n(x), \gamma_n(x) \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} &= \mathcal{L}^n\left(x^*\mathcal{L}(1)x\right) = \mathcal{L}^n\left(x^*x.\mathcal{L}(1)\right) = \mathcal{L}^n\left(x^*x\alpha^n(\mathcal{L}(1))\right) = \\ &= \mathcal{L}^n(x^*x)\mathcal{L}(1) \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \|\langle \gamma_n(x), \gamma_n(x) \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}}\|_{\mathcal{L}^{n+1}} &= \|\mathcal{L}^n(x^*x)\mathcal{L}(1)\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \leq \|\mathcal{L}(1)\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \|\mathcal{L}^n(x^*x)\|_{\mathcal{L}^n} = \\ &= \|\mathcal{L}(1)\| \|\langle x, x \rangle\|_{\mathcal{L}^n} \end{aligned}$$

Portanto γ_n é limitada e assim se estende a $M_{\mathcal{L}^n}$ com $\|\gamma_n\| \leq \|\mathcal{L}(1)\|^{\frac{1}{2}}$.

- γ_n é adjuntável e $\gamma_n^*(x) = \mathcal{L}(x), \forall x \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$

Sejam $x \in A_{\mathcal{L}^n}$ e $y \in A_{\mathcal{L}^{n+1}}$. Então

$$\langle \gamma_n(x), y \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} = \mathcal{L}^{n+1}(\gamma_n(x)^*y) = \mathcal{L}^n(\mathcal{L}(\alpha(x^*)y)) = \mathcal{L}^n(x^*\mathcal{L}(y)) = \langle x, \mathcal{L}(y) \rangle_{\mathcal{L}^n}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(y)\|_{\mathcal{L}^n}^2 &= \|\langle \mathcal{L}(y), \mathcal{L}(y) \rangle_{\mathcal{L}^n}\|_{\mathcal{L}^n} = \|\langle \gamma_n(\mathcal{L}(y)), y \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}}\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \leq \\ &\leq \|\gamma_n(\mathcal{L}(y))\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \|y\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \leq \|\gamma_n\| \|\mathcal{L}(y)\|_{\mathcal{L}^n} \|y\|_{\mathcal{L}^{n+1}} \end{aligned}$$

Logo $\|\mathcal{L}(y)\|_{\mathcal{L}^n} \leq \|\gamma_n\| \|y\|_{\mathcal{L}^{n+1}}$. Assim, para $y \in \mathcal{L}^{n+1}$, a correspondência $y \mapsto \mathcal{L}(y)$ se estende continuamente para uma aplicação linear de $A_{\mathcal{L}^{n+1}}$ em $A_{\mathcal{L}^n}$ que é o adjunto de γ_n . $\square$

Proposição 2.11 *Considere o bimódulo de Hilbert M_∞ sobre A dado pelo completamento de $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M_{\mathcal{L}^n}$ e defina $S : M_\infty \rightarrow M_\infty$ por*

$$S(x_0, x_1, \dots) = (0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1), \dots).$$

Então S é adjuntável em M_∞ e seu adjunto é dado por

$$S^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2), \dots)$$

Demonstração: É fácil ver que S é operador linear. Temos que S é contínuo pois

$$\begin{aligned} \|S(x)\|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\langle \gamma_n(x_n), \gamma_n(x_n) \rangle\| \\ &\leq \sum_{k=1}^l \|\gamma_{n_k}(x_{n_k})\|^2 \leq \sum_{k=1}^l \|\mathcal{L}(1)\| \|x_{n_k}\|^2 = \|\mathcal{L}(1)\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

Vejamos que S é adjuntável:

$$\begin{aligned} \langle S(x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots) \rangle_\infty &= \langle (0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1), \dots), (y_0, y_1, \dots) \rangle_\infty \\ &= \langle 0, y_0 \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \langle \gamma_n(x_n), y_{n+1} \rangle_{\mathcal{L}^{n+1}} \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n, \mathcal{L}(y_{n+1}) \rangle_{\mathcal{L}^n} \\ &= \langle (x_0, x_1, \dots), (\mathcal{L}(y_1), \mathcal{L}(y_2), \dots) \rangle_\infty \end{aligned}$$

Portanto S^* é a aplicação

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2), \dots)$$

e é fácil ver que é operador limitado em M_∞ . □

Teorema 2.12 *Seja α um $*$ -endomorfismo de A uma C^* -álgebra com unidade, e seja $\mathcal{L}$ um operador transferência para (A, α) . Então existe uma representação fiel Φ de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que:*

- (i) $S\Phi(a) = \Phi(\alpha(a))S$
- (ii) $S^*\Phi(a)S = \Phi(\mathcal{L}(a))$

para todo $a \in A$.

Demonstração: Considere a C^* -álgebra $\mathcal{B}(M_\infty)$ e considere em M_∞ a estrutura de módulo à esquerda sobre A . Então tome o $*$ -homomorfismo $\rho : A \rightarrow \mathcal{B}(M_\infty)$ dado por

$$\begin{aligned}\rho(a) : M_\infty &\longrightarrow M_\infty \\ x &\longmapsto ax\end{aligned}$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Cada $M_{\mathcal{L}^n}$ é invariante sobre ρ pois dado $m \in M_{\mathcal{L}^n}$ então $am \in M_{\mathcal{L}^n}$ e podemos enxergar $m \in M_{\mathcal{L}^n}$ em M_∞ como $(0, \dots, 0, m, 0, \dots)$ e assim $\rho(a)(0, \dots, 0, m, 0, \dots) = (0, \dots, 0, am, 0, \dots)$. Dado $a \in M_{\mathcal{L}^0}$ tal que $\rho(a) \equiv 0$ tome $x = (1, 0, 0, \dots)$, então $0 = \rho(a)(x) = (a \cdot 1, 0, 0, \dots) = (a, 0, 0, \dots)$, assim $a = 0$ e a restrição de ρ a $M_{\mathcal{L}^0}$ é fiel. Como $A = M_{\mathcal{L}^0}$ então ρ é fiel.

Considerando o operador S definido na proposição 2.11 mostremos que valem (i) e (ii) para todo $a \in A$:

$$\begin{aligned}S \circ \rho(a)(x) &= S(\rho(a)(x)) = S(ax_0, ax_1, ax_2, \dots) = (0, \gamma_0(ax_0), \gamma_1(ax_1), \dots) \\ &= (0, \alpha(a)\alpha(x_0), \alpha(a)\alpha(x_1), \dots) = (0, \alpha(a)\gamma_0(x_0), \alpha(a)\gamma_1(x_1), \dots) \\ &= \rho(\alpha(a))(0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1), \dots) = \rho(\alpha(a))(S(x)) \\ &= \rho(\alpha(a)) \circ S(x)\end{aligned}$$

Para (ii) lembramos que $S^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\mathcal{L}(x_1), \mathcal{L}(x_2), \dots)$.

$$\begin{aligned}S^* \circ \rho(a) \circ S(x) &= S^*(\rho(a)(0, \gamma_0(x_0), \gamma_1(x_1), \dots)) = S^*(0, a\gamma_0(x_0), a\gamma_1(x_1), \dots) \\ &= (\mathcal{L}(a\gamma_0(x_0)), \mathcal{L}(a\gamma_1(x_1)), \dots) = (\mathcal{L}(a\alpha(x_0)), \mathcal{L}(a\alpha(x_1)), \dots) \\ &= (\mathcal{L}(a)x_0, \mathcal{L}(a)x_1, \dots) = \rho(\mathcal{L}(a))(x_0, x_1, \dots) \\ &= \rho(\mathcal{L}(a))(x)\end{aligned}$$

Então fazendo a composição de ρ com uma representação fiel φ da C^* -álgebra $\mathcal{B}(M_\infty)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ temos

$$A \xrightarrow{\rho} \mathcal{B}(M_\infty) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

e a conclusão desejada. □

Corolário 2.13 *Sejam α um $*$ -endomorfismo de uma C^* -álgebra A com unidade e $\mathcal{L}$ um operador transferência para (A, α) . Então a aplicação canônica $A \rightarrow \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ é injetora.*

Demonstração: Da demonstração do teorema 2.12 existem $\rho : A \rightarrow \mathcal{B}(M_\infty)$ injetor e $S \in \mathcal{B}(M_\infty)$ satisfazendo

$$(i) \ S\rho(a) = \rho(\alpha(a))S$$

$$(ii) \ S^*\rho(a)S = \rho(\mathcal{L}(a))$$

para todo $a \in A$.

Definindo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho} : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) & \rightarrow & \mathcal{B}(M_\infty) \\ a & \mapsto & \rho(a) \\ S & \mapsto & S \end{array}$$

temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \\ & \searrow \rho & \downarrow \tilde{\rho} \\ & & \mathcal{B}(M_\infty) \end{array}$$

Como ρ é injetora, então i é injetora. □

De agora em diante, veremos A como C^* -subálgebra de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$. A representação canônica de S em $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ será também denotada por S .

Definição 2.14 Denominamos *redundância* o par

$$(a, k) \in A \times \overline{ASS^*A} \subseteq \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \times \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$$

tal que $abS = kbS$, para todo $b \in A$.

Neste trabalho, no entanto, estaremos interessados nas redundâncias (a, k) com $a \in \overline{A\mathcal{R}A} = \overline{\{arb : a, b \in A, r \in \mathcal{R}\}}$ que é o fecho do ideal bilateral gerado por $\mathcal{R} = \alpha(A)$. Segue agora nosso principal conceito:

Definição 2.15 O produto cruzado da C^* -álgebra A com unidade pelo $*$ -endomorfismo $\alpha : A \rightarrow A$ relativo à escolha do operador transferência $\mathcal{L}$, que denotaremos por $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ é definido como o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ pelo ideal bilateral fechado $\mathcal{I}$ gerado pelo conjunto das diferenças $a - k$, para todas as redundâncias (a, k) tais que $a \in \overline{A\mathcal{R}A}$.

2.3 Monomorfismos com imagem hereditária

Nosso objetivo será mostrar que, sob as hipóteses especiais que aparecem em [17], o produto cruzado $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ é isomorfo à C^* -álgebra universal gerada por A com unidade e uma isometria T sujeita à relação $\alpha(a) = TaT^*$.

Vamos considerar A uma C^* -álgebra com unidade e $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo injetor.

Denotaremos por P o idempotente $\alpha(1)$, então $P^2 = P^* = P$. A proposição a seguir nos fornece uma caracterização de $\mathcal{R}$, a imagem de α , quando esta é hereditária.

Proposição 2.16 *Se $\mathcal{R} = \text{Im}\alpha$ é uma subálgebra hereditária de A , então $\mathcal{R} = PAP$.*

Demonstração: Primeiramente $\mathcal{R}$ está contido na subálgebra hereditária PAP , pois se $x = \alpha(a)$, então $x = \alpha(1a1) = \alpha(1)\alpha(a)\alpha(1) \in PAP$.

Seja $x \in PAP$, então $x = PaP$, para algum $a \in A$. Temos que $PxP = P(PaP)P = P^2aP^2 = PaP = x$. Pela proposição 1.24 podemos supor $x \geq 0$ e então de 1.25 temos que $0 \leq x \leq \|x\|$ e $0 \leq x = PxP \leq P\|x\|P = \alpha(1\|x\|1) = \alpha(\|x\|1)$.

Como $\mathcal{R}$ é hereditária então $x \in \mathcal{R}$. □

De agora em diante vamos supor que $\mathcal{R}$ é hereditária e portanto $\mathcal{R} = PAP$. A proposição a seguir tem como objetivo construir uma esperança condicional que será utilizada na formação do operador transferência.

Proposição 2.17 *Seja a aplicação $E : a \in A \mapsto PaP \in \mathcal{R}$. Então E é uma esperança condicional sobre $\mathcal{R}$.*

Demonstração: E é positiva pois dado $a \geq 0$, temos $E(a) = PaP \geq 0$ pela proposição 1.25.

Temos que $E^2 = E$ pois $E^2(a) = E(PaP) = P^2aP^2 = PaP = E(a)$ e temos $\text{Im}E = PAP = \mathcal{R}$ pela proposição anterior.

Temos que $E(1_A) = P1_AP = P^2 = P$, assim temos que $P^* = P = 1_{\mathcal{R}}$ pois $P(PaP) = P^2aP = PaP$ e $(PaP)P = PaP^2 = PaP$, para todo $a \in A$. Logo $E(1_A) = 1_{\mathcal{R}}$.

Sejam $a \in A$ e $b \in \mathcal{R}$, então $b = PbP$. Assim $E(ab) = PabP = Pa(PbP)P = PaPbP = PaPPbP = PaPb = E(a)b$. Analogamente temos que $E(ba) = bE(a)$.

Portanto E é esperança condicional sobre $\mathcal{R}$. $\square$

Como α é injetor, então estamos sob as hipóteses da proposição 2.7, com $\mathcal{J} = A$ e a composta $\mathcal{L} = \alpha^{-1} \circ E$ define um operador transferência não-degenerado para (A, α) .

Proposição 2.18 *Sejam $\alpha : A \rightarrow A$ $*$ -endomorfismo injetor e $\mathcal{L} = \alpha^{-1} \circ E$. Então*

(i) *O elemento canônico $S \in \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ é uma isometria, e assim também sua classe $\dot{S} \in A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

(ii) *Para todo $a \in A$ tem-se que $(\alpha(a), SaS^*)$ é uma redundância.*

Demonstração: (i) Pela definição 2.9 (ii) temos $S^*aS = \mathcal{L}(a)$. Para $a = 1$, temos $S^*S = \mathcal{L}(1) = \alpha^{-1}(E(1)) = \alpha^{-1}(P1P) = \alpha^{-1}(P) = \alpha^{-1}(\alpha(1)) = 1$.

A classe de S é dada por $\dot{S} = S + \mathcal{I}$, então $\dot{S}^*\dot{S} = (S^* + \mathcal{I})(S + \mathcal{I}) = S^*S + \mathcal{I} = 1 + \mathcal{I} = \dot{1}$. Portanto $\dot{S}$ também é isometria.

(ii) Para mostrar que $(\alpha(a), SaS^*)$ é uma redundância devemos ver que $(\alpha(a), SaS^*) \in \overline{A\mathcal{R}A} \times \overline{ASS^*A}$ e que $\alpha(a)bS = SaS^*bS$, para todo $b \in A$.

Dado $a \in A$, temos claramente que $\alpha(a) \in A$. Pela definição 2.9 temos $SaS^* = \alpha(a)SS^* = \alpha(a)SS^*1$, então $SaS^* \in ASS^*A \subseteq \overline{ASS^*A}$.

Seja $b \in A$, utilizando as relações da definição 2.9 temos:

$$\begin{aligned} SaS^*bS &= Sa\mathcal{L}(b) = Sa\alpha^{-1}(E(b)) = \alpha(a\alpha^{-1}(E(b)))S = \alpha(a)E(b)S = \\ &= \alpha(a)PbPS = \alpha(a)\alpha(1)b\alpha(1)S = \alpha(a1)bS1 = \alpha(a)bS \end{aligned}$$

Portanto $(\alpha(a), SaS^*)$ é uma redundância. $\square$

Definição 2.19 *Denotamos por $\mathcal{U}(A, \alpha)$ a C^* -álgebra universal com unidade gerada por A e uma isometria T sujeita à relação $\alpha(a) = TaT^*$, para todo $a \in A$.*

Corolário 2.20 *Nas hipóteses da proposição 2.18 existe um único $*$ -epimorfismo $\phi : \mathcal{U}(A, \alpha) \rightarrow A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ tal que $\phi(a) = \dot{a}$ e $\phi(T) = \dot{S}$, onde $\dot{a}$ e $\dot{S}$ são as classes de $a \in A$ e S em $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$, respectivamente.*

Demonstração: Temos que $\alpha : A \rightarrow A$ é $*$ -endomorfismo. Definimos com a mesma notação

$$\begin{aligned} \alpha : A/\mathcal{I} &\longrightarrow A/\mathcal{I} \\ \dot{a} &\longmapsto \dot{\alpha(a)} \end{aligned}$$

Pela proposição 2.18 (ii) temos que $(\alpha(a), SaS^*)$ é uma redundância, ou seja, $\alpha(a) - SaS^* \in \mathcal{I}$, logo $\dot{\alpha(a)} = \dot{SaS^*} = \dot{S}\dot{a}\dot{S^*}$.

Sejam $a, b \in A$ tais que $\dot{a} = \dot{b}$. Então $\dot{\alpha(a)} = \dot{SaS^*} = \dot{S}\dot{a}\dot{S^*} = \dot{S}\dot{b}\dot{S^*} = \dot{SbS^*} = \dot{\alpha(b)}$. E portanto $\alpha(\dot{a}) = \dot{\alpha(a)}$.

Então é satisfeita a relação $\alpha(\dot{a}) = \dot{S}\dot{a}\dot{S^*}$, para $\dot{S}, \dot{a} \in A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Segue de 1.47 e da definição da C^* -álgebra $\mathcal{U}(A, \alpha)$ que existe um único $*$ -epimorfismo

$$\phi : \mathcal{U}(A, \alpha) \longrightarrow A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$$

com $\phi(T) = \dot{S}$ e $\phi(a) = \dot{a}$. □

Proposição 2.21 *Nas hipóteses da proposição 2.18 existe um único $*$ -epimorfismo $\psi : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{U}(A, \alpha)$ tal que $\psi(S) = T$ e $\psi(a) = a$, para todo $a \in A$.*

Demonstração: Em $\mathcal{U}(A, \alpha)$, T é uma isometria tal que $\alpha(a) = TaT^*$. Então temos $Ta = TaT^*T = \alpha(a)T$, ou seja, T satisfaz 2.9 (i).

Observando que $T^*a = T^*TT^*a$, $aT = aTT^*T$ e $\alpha(1) = TT^*$ temos

$$\begin{aligned} T^*aT &= T^*TT^*aT = T^*TT^*aTT^*T = T^*(TT^*aTT^*)T = T^*(\alpha(1)a\alpha(1))T = \\ &= T^*(PaP)T = T^*E(a)T = T^*\alpha(\alpha^{-1}(E(a)))T = T^*\alpha(\mathcal{L}(a))T = \\ &= T^*T\mathcal{L}(a)T^*T = \mathcal{L}(a) \end{aligned}$$

Assim T satisfaz 2.9 (ii). Como $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ é universal, segue que existe único $*$ -epimorfismo

$$\psi : \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{U}(A, \alpha)$$

tal que $\psi(a) = a$, $\forall a \in A$ e $\psi(S) = T$. □

Com o corolário 2.20 e a proposição 2.21, é possível ver que a aplicação quociente Φ de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ em $A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ se decompõe em $\Phi = \phi \circ \psi$ gerando o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L}) & \xrightarrow{\Phi} & A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \\
\searrow \psi & & \nearrow \phi \\
& \mathcal{U}(A, \alpha) &
\end{array}$$

O teorema a seguir apresenta o principal resultado desta seção.

Teorema 2.22 *Sejam A uma C^* -álgebra com unidade e $\alpha : A \rightarrow A$ um $*$ -endomorfismo injetor cuja imagem é uma subálgebra hereditária de A . Considere o operador transferência dado por $\mathcal{L}(a) = \alpha^{-1}(PaP)$, para todo $a \in A$. Então o $*$ -epimorfismo $\phi : \mathcal{U}(A, \alpha) \rightarrow A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$ obtido no corolário 2.20 é um isomorfismo.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que $\psi(\mathcal{I}) = 0$. Seja (a, k) uma redundância em A com $a \in \overline{A\mathcal{R}A}$. Assim temos que, para todo $b \in A$, vale $abS = kbS$. Aplicando ψ temos $\psi(a)\psi(b)\psi(S) = \psi(k)\psi(b)\psi(S)$. Mas, pela proposição 2.21 temos $\psi(a) = a$ e $\psi(S) = T$, então $abT = \psi(k)bT$. Observe que $P = \alpha(1) = T1T^* = TT^*$, assim

$$abPc = abTT^*c = \psi(k)bTT^*c = \psi(k)bPc$$

Como $bPc \in APA$, com $b, c \in A$ arbitrários, então temos que $ax = \psi(k)x, \forall x \in \overline{APA}$. Assim temos que $(a - \psi(k))x = 0, \forall x \in \overline{APA}$. Observando que $k \in \overline{ASS^*A}$, então $\psi(k) \in \overline{ATT^*A} = \overline{APA}$. Temos também que $a \in \overline{A\mathcal{R}A} = \overline{APAPA}$. Como $APA \subseteq A$, então $\overline{APAPA} \subseteq \overline{APA}$. E, dado $aPb \in APA$, temos que $aPb = aPPb = aP1Pb \in APAPA$, logo $\overline{APA} \subseteq \overline{APAPA}$. Portanto $a \in \overline{APAPA} = \overline{APA}$. Então podemos tomar $x = (a - \psi(k))^* \in \overline{APA}$ e temos

$$0 = \|(a - \psi(k))(a - \psi(k))^*\| = \|(a - \psi(k))\|^2$$

Logo temos que $\|(a - \psi(k))\| = 0$ e daí $a - \psi(k) = 0$. Como $\psi(a) = a$, então $0 = \psi(a) - \psi(k) = \psi(a - k)$. Logo ψ anula $\mathcal{I}$.

Vamos agora tomar o quociente de $\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ por $\ker \psi$ e vamos provar que a função $\tilde{\psi} : A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}(A, \alpha)$ é a inversa de ϕ . Para $x \in \mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})$ sejam

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\psi} : \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\ker \psi} & \longrightarrow & \mathcal{U}(A, \alpha) \quad \text{e} \quad \rho : A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \longrightarrow \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\ker \psi} \\
x + \ker \psi & \longmapsto & \psi(x) \quad \quad \quad x + \mathcal{I} \longmapsto x + \ker \psi
\end{array}$$

E temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\mathcal{T}(A, \alpha, \mathcal{L})}{\ker \psi} & \xleftarrow{\rho} & A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \\
 \downarrow \dot{\psi} & & \uparrow \phi \\
 & \searrow \tilde{\psi} & \mathcal{U}(A, \alpha)
 \end{array}$$

Então podemos ver que $\tilde{\psi} = \dot{\psi} \circ \rho : A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{U}(A, \alpha)$. Vamos mostrar que $\tilde{\psi} = \phi^{-1}$. Seja $x + \mathcal{I} \in A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \phi \circ \tilde{\psi}(x + \mathcal{I}) &= \phi\left(\dot{\psi}(\rho(x + \mathcal{I}))\right) = \phi\left(\dot{\psi}(x + \ker \psi)\right) = \phi\left(\psi(x)\right) = \\
 &= \begin{cases} \phi(x) = x + \mathcal{I} & , \text{ se } x \in A \\ \phi(\psi(S)) = \phi(T) = S + \mathcal{I} & , \text{ se } x = S \end{cases}
 \end{aligned}$$

Seja agora $x \in \mathcal{U}(A, \alpha)$. Se $x \in A$, então:

$$\tilde{\psi} \circ \phi(x) = \tilde{\psi}(x + \mathcal{I}) = \dot{\psi}(\rho(x + \mathcal{I})) = \dot{\psi}(x + \ker \psi) = \psi(x) = x$$

Se $x = T$, então

$$\tilde{\psi} \circ \phi(T) = \tilde{\psi}(S + \mathcal{I}) = \dot{\psi}(\rho(S + \mathcal{I})) = \dot{\psi}(S + \ker \psi) = \psi(S) = T$$

Portanto $\phi \circ \tilde{\psi} = Id_{A \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}}$ e $\tilde{\psi} \circ \phi = Id_{\mathcal{U}(A, \alpha)}$. □

Capítulo 3

Produto Cruzado Parcial

Nesta seção trataremos do produto cruzado parcial que está relacionado ao tema dos próximos capítulos, a estrutura da Álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_A$. Algumas referências são [11], [9], [13], [1] e [8].

Iniciaremos com a definição de um fibrado C^* -algébrico de Banach, também conhecido como fibrado de Fell que está relacionado com a teoria de produtos cruzados.

Seja G um grupo discreto com unidade e .

Definição 3.1 *Um fibrado de Fell sobre G é uma coleção de espaços de Banach $\{B_t\}_{t \in G}$, cada um com sua respectiva norma, junto com a operação de multiplicação*

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$$

e uma involução

$$* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$$

onde $\mathcal{B}$ é a união disjunta de todos os B_t 's, satisfazendo, para todo r, s e $t \in G$ e b e c em $\mathcal{B}$

- (i) $B_r B_s \subseteq B_{rs}$
- (ii) *O produto $\cdot$ é bilinear de $B_r \times B_s$ em B_{rs} .*
- (iii) *O produto em $\mathcal{B}$ é associativo.*
- (iv) $\|bc\| \leq \|b\| \|c\|$
- (v) $(B_t)^* \subseteq B_{t^{-1}}$

- (vi) a aplicação $*$ é linear conjugada de B_t em $B_{t^{-1}}$
- (vii) $(bc)^* = c^*b^*$
- (viii) $b^{**} = b$
- (ix) $\|b^*\| = \|b\|$
- (x) $\|b^*b\| = \|b\|^2$
- (xi) $b^*b \geq 0$ em B_e

Observe que B_e é uma C^* -álgebra. De (i), (ii) e (iii) temos uma multiplicação associativa em B_e pois $B_e B_e \subseteq B_e$ e de (v), (vi), (vii) e (viii) temos uma involução em B_e pois $(B_e)^* \subseteq B_{e^{-1}} = B_e$. Por (ix), B_e é $*$ -álgebra de Banach e com (x) temos que B_e é C^* -álgebra.

Denotamos por $C_c(\mathcal{B})$ o conjunto das funções $f : G \rightarrow \mathcal{B}$ de suporte finito tais que $f(t) \in B_t$, para $t \in G$. Podemos definir a norma dada por

$$\|f\|_1 = \sum_{t \in G} \|f(t)\|$$

que está bem definida pois estamos calculando em funções de suporte finito.

Temos que $C_c(\mathcal{B})$ é módulo à direita sobre B_e com a multiplicação à direita dada por

$$f.b(t) = f(t)b \in B_t$$

para $b \in B_e$ e $f \in C_c(\mathcal{B})$.

Seja

$$\overline{C_c(\mathcal{B})}^{\|\cdot\|_1} = l_1(\mathcal{B}) = \{f : G \rightarrow \mathcal{B} : f(t) \in B_t \text{ e } \sum_{t \in G} \|f(t)\| < \infty\}$$

Em [13] pode ser encontrada a demonstração de que $l_1(\mathcal{B})$ é $*$ -álgebra de Banach com o produto dado pela convolução

$$f \times g(t) = \sum_{s \in G} f(s)g(s^{-1}t)$$

a involução

$$f^*(t) = (f(t^{-1}))^*$$

e a norma

$$\|f\| = \sum_{s \in G} \|f(s)\|$$

onde $t \in G$ e $f, g \in l_1(\mathcal{B})$.

Temos que, para $f, g \in C_c(\mathcal{B})$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{t \in G} f(t)^* g(t)$$

é produto interno com valores em B_e . Denotamos por $l_2(\mathcal{B})$ o completamento de $C_c(\mathcal{B})$ com relação à norma proveniente do produto interno $\|f\|_2 = \left\| \sum_{t \in G} f(t)^* f(t) \right\|^{1/2}$.

Logo $l_2(\mathcal{B})$ é módulo de Hilbert à direita sobre B_e com a multiplicação à direita dada por

$$f.b(t) = f(t)b \in B_t$$

para $b \in B_e$ e $f \in l_2(\mathcal{B})$.

Seja $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$ a C^* -álgebra como definida em 1.52. E seja Λ a aplicação de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$ dada por $\Lambda(b_t)f|_s = b_t f(t^{-1}s)$, para $t, s \in G$, $b_t \in B_t$ e $f \in l_2(\mathcal{B})$. Temos que $\Lambda(b_t)f \in l_2(\mathcal{B})$ e $\|\Lambda(b_t)f\|_2 \leq \|b_t\| \|f\|_2$.

De fato, como $b_t \in B_t$ e $f(t^{-1}s) \in B_{t^{-1}s}$, então $\Lambda(b_t)f|_s = b_t f(t^{-1}s) \in B_s$. E também

$$\begin{aligned} \langle \Lambda(b_t)f, \Lambda(b_t)f \rangle &= \sum_{s \in G} (\Lambda(b_t)f|_s)^* \Lambda(b_t)f|_s = \sum_{s \in G} (b_t f(t^{-1}s))^* b_t f(t^{-1}s) \\ &= \sum_{s \in G} (f(t^{-1}s))^* b_t^* b_t f(t^{-1}s) \\ &\leq \sum_{s \in G} f(t^{-1}s)^* \|b_t^* b_t\| f(t^{-1}s) \\ &= \|b_t^* b_t\| \sum_{s \in G} f(t^{-1}s)^* f(t^{-1}s) \end{aligned}$$

Portanto

$$\|\Lambda(b_t)f\|_2^2 \leq \|b_t\|^2 \|f\|_2^2$$

Proposição 3.2 $\Lambda(b_t)$ é operador adjuntável em $l_2(\mathcal{B})$ e $\Lambda(b_t)^* = \Lambda(b_t^*)$.

Demonstração: Seja $b_t \in B_t$, vejamos que $\Lambda(b_t)$ é linear. Sejam $f, g \in l_2(\mathcal{B})$, $b \in B_e$ e $s, t \in G$:

$$\begin{aligned} \Lambda(b_t)(f+g)|_s &= b_t(f+g)(t^{-1}s) = b_t[f(t^{-1}s) + g(t^{-1}s)] \\ &= b_t f(t^{-1}s) + b_t g(t^{-1}s) = \Lambda(b_t)f|_s + \Lambda(b_t)g|_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(b_t)(f.b)|_s &= b_t(f.b)(t^{-1}s) = b_t f(t^{-1}s)b \\ &= [\Lambda(b_t)f].b|_s \end{aligned}$$

Veamos que $\Lambda(b_t)$ é adjuntável.

$$\begin{aligned}
\langle f, \Lambda(b_t)g \rangle &= \sum_{s \in G} f(s)^* \Lambda(b_t)g|_s = \sum_{s \in G} f(s)^* b_t g(t^{-1}s) \\
&\stackrel{u=t^{-1}s}{=} \sum_{u \in G} f(tu)^* b_t g(u) = \sum_{u \in G} [b_t^* f(tu)]^* g(u) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{u \in G} [\Lambda(b_t^*)f|_u]^* g(u) \Lambda(b_t)g|_s = \langle \Lambda(b_t^*)f, g \rangle
\end{aligned}$$

Observe que em $(*)$ foi utilizado que $b_t^* \in B_{t^{-1}}$ e, portanto $\Lambda(b_t^*)f|_u = b_t^* f(tu)$.

Deste modo concluímos que $\Lambda(b_t)$ é adjuntável e que $\Lambda(b_t)^* = \Lambda(b_t^*)$. $\square$

Proposição 3.3 *A aplicação $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$ é uma representação de $\mathcal{B}$ no sentido de, para $t, s \in G$*

- (i) $\Lambda|_{B_t}$ é linear para cada $t \in G$
- (ii) $\Lambda(b_t)\Lambda(b_s) = \Lambda(b_t b_s)$, para $b_t \in B_t$ e $b_s \in B_s$
- (iii) $\Lambda(b_t)$ é contínua em $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$
- (iv) Para cada $f \in l_2(\mathcal{B})$, a aplicação $b_t \mapsto \Lambda(b_t)f$ é contínua de $\mathcal{B}$ em $l_2(\mathcal{B})$
- (v) $\Lambda(b_t^*) = \Lambda(b_t)^*$

Demonstração: (i) Já foi verificado anteriormente.

(ii) Sejam $b_t \in B_t$, $b_s \in B_s$ e $f \in l_2(\mathcal{B})$. Como $b_t b_s \in B_{ts}$ temos

$$\Lambda(b_t b_s)f|_r = b_t b_s f(s^{-1}t^{-1}r) = b_t(\Lambda(b_s)f|_{t^{-1}r}) = \Lambda(b_t)\Lambda(b_s)f|_r$$

(iii) e (iv) Seguem da desigualdade já provada $\|\Lambda(b_t)f\|_2 \leq \|b_t\| \|f\|_2$.

(v) Já foi provado na proposição anterior. $\square$

Denotaremos Λ por *representação regular à esquerda* de $\mathcal{B}$.

Definição 3.4 *Dados um fibrado de Fell $\{B_t\}_{t \in G}$ e $\mathcal{B} = \bigcup_{t \in G} B_t$, a C^* -álgebra gerada por $\mathcal{B}$, denotada por $C^*(\mathcal{B})$, é a C^* -álgebra envolvente de $l_1(\mathcal{B})$.*

Existe uma aplicação natural de $\mathcal{B}$ em $l_1(\mathcal{B})$ dada por $b_t \mapsto b_t \delta_t$, onde $b_t \delta_t \in l_1(\mathcal{B})$ é definida por

$$b_t \delta_t(s) = \begin{cases} b_t & \text{se } s = t \\ 0 & \text{se } s \neq t \end{cases}$$

Assim toda função $f \in l_1(\mathcal{B})$ pode ser escrita como $f = \sum_{t \in G} f(t)\delta_t$, pois $f(t) \in B_t$.

Com esta identificação podemos construir uma aplicação $\tilde{\Lambda} : l_1(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$ definida por

$$\tilde{\Lambda}(f) = \sum_{t \in G} \tilde{\Lambda}(f(t)\delta_t)$$

onde definimos $\tilde{\Lambda}(f(t)\delta_t)(g)|_s = \Lambda(f(t))g|_s = f(t)g(t^{-1}s)$. Assim

$$\tilde{\Lambda}(f)g|_s = \sum_{t \in G} \tilde{\Lambda}(f(t)\delta_t)g|_s = \sum_{t \in G} f(t)g(t^{-1}s) = f \times g(s)$$

Construída deste modo $\tilde{\Lambda}$ é um $*$ -homomorfismo e temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{B}(l_2(\mathcal{B})) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\Lambda} & \\ l_1(\mathcal{B}) & & \end{array}$$

Pela definição 3.4 existem i , a aplicação de inclusão de $l_1(\mathcal{B})$ em $C^*(\mathcal{B})$, e $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ extensão de $\tilde{\Lambda}$ de $C^*(\mathcal{B})$ em $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{B}(l_2(\mathcal{B})) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\Lambda} & \\ l_1(\mathcal{B}) & & \\ \downarrow & \nearrow \tilde{\tilde{\Lambda}} & \\ C^*(\mathcal{B}) & & \end{array}$$

Deste modo como $C^*(\mathcal{B})$ é C^* -álgebra então $\tilde{\tilde{\Lambda}}(C^*(\mathcal{B}))$, que é sua imagem pelo $*$ -homomorfismo $\tilde{\tilde{\Lambda}}$, é uma C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.5 A C^* -álgebra reduzida gerada por $\mathcal{B}$, denotada por $C_r^*(\mathcal{B})$, é a C^* -subálgebra de $\mathcal{B}(l_2(\mathcal{B}))$ gerada pela imagem da representação regular à esquerda de $\mathcal{B}$.

Segue da definição de C^* -álgebra envolvente que existe um epimorfismo canônico

$$\Lambda : C^*(\mathcal{B}) \rightarrow C_r^*(\mathcal{B})$$

dado por $\Lambda(b_t)\xi|_s = b_t\xi(t^{-1}s)$, onde $b_t \in B_t$, $\xi \in l_2(\mathcal{B})$ e $t, s \in G$. Esta aplicação pode ou não ser um isomorfismo, mas quando Λ é um isomorfismo dizemos que $\mathcal{B}$ é um *fibrado de Fell mediável*. Quando G é um grupo mediável, Exel prova em [9] que qualquer fibrado de Fell sobre G é mediável.

Definição 3.6 *Uma ação parcial de G em A é o par*

$$\Theta = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G})$$

onde para cada $t \in G$, D_t é um ideal bilateral fechado em A e θ_t é um $*$ -isomorfismo de $D_{t^{-1}}$ em D_t satisfazendo, para todo $t, s \in G$:

- (i) $D_e = A$ e $\theta_e = Id : A \rightarrow A$
- (ii) $\theta_t(D_{t^{-1}} \cap D_s) = D_t \cap D_{ts}$
- (iii) $\theta_t(\theta_s(x)) = \theta_{ts}(x)$, $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}t^{-1}}$

Um *sistema dinâmico parcial* é uma tripla (A, G, Θ) onde A é uma C^* -álgebra, G é um grupo discreto e Θ é uma ação parcial de G em A .

Dado (A, G, Θ) um sistema dinâmico parcial, podemos construir o fibrado de Fell dado por $\mathcal{B} = \{(a, s) \in A \times G : a \in D_s\}$. Para cada $t \in G$, seja B_t o subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por todos os pares (a, s) tais que $s = t$. O par (a, t) também é denotado por $a\delta_t$, e assim podemos dizer que $B_t = D_t\delta_t$. Mais detalhes sobre esta construção podem ser encontrados em [12].

Definição 3.7 *O produto cruzado parcial denotado por $A \rtimes^p G$ é a C^* -álgebra gerada por $\mathcal{B}$ construído acima. E o produto cruzado parcial reduzido denotado por $A \rtimes_r^p G$ é a C^* -álgebra reduzida gerada por $\mathcal{B}$.*

Uma *representação parcial* de um grupo G num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma aplicação $u : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $u_e = Id$, $u_{t^{-1}} = u_t^*$ e $u_t u_s u_{s^{-1}} = u_{ts} u_{s^{-1}}$, para todo $t, s \in G$. Segue que u_t é isometria parcial, para cada $t \in G$.

Uma *representação covariante* do sistema dinâmico parcial (A, G, Θ) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um par (π, u) no qual π é uma representação não degenerada

de A em $\mathcal{H}$ e u é uma representação parcial de G em $\mathcal{H}$ tal que para cada $t \in G$ temos que $u_t u_{t^{-1}}$ é a projeção sobre o subespaço $\overline{\text{span} \pi(D_t) \mathcal{H}}$ e

$$\pi(\theta_t(a)) = u_t \pi(a) u_{t^{-1}}$$

para $a \in D_{t^{-1}}$.

As projeções $u_t u_t^*$ comutam entre si gerando uma C^* -álgebra comutativa B_e . Tem-se também que $B_t = B_e u_t$, para cada $t \in G$.

O teorema a seguir tem muita importância na teoria de produtos cruzados e a sua demonstração pode ser encontrada em [16].

Teorema 3.8 *Se (π, u) é uma representação covariante de (A, G, Θ) então existe uma representação não degenerada $(\pi \times u)$ de $l_1(\mathcal{B})$ dada por*

$$\pi \times u(f) = \sum_{t \in G} \pi(f(t)) u_t \quad \text{para } f \in l_1(\mathcal{B}).$$

Assim temos uma representação de $A \rtimes^p G$. Além disso há uma correspondência biunívoca entre as representações covariantes (π, u) e as representações não-degeneradas de $l_1(\mathcal{B})$.

Aplicando o resultado de Exel [9], quando G é mediável o produto cruzado parcial é isomorfo ao produto cruzado parcial reduzido.

A seguir apresentaremos um caso particular de ação parcial.

Definição 3.9 *Seja X um conjunto qualquer, uma ação parcial de G em X é um par $\Gamma = (\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ tal que, para cada $t \in G$, Δ_t é um subconjunto de X e $h_t : \Delta_{t^{-1}} \rightarrow \Delta_t$ é uma bijeção satisfazendo, para todo t e s em G :*

- (i) $\Delta_e = X$ e $h_e = Id : X \rightarrow X$
- (ii) $h_t(\Delta_{t^{-1}} \cap \Delta_s) = \Delta_t \cap \Delta_{ts}$
- (iii) $h_t(h_s(x)) = h_{ts}(x), \quad x \in \Delta_{s^{-1}} \cap \Delta_{s^{-1}t^{-1}}$

Considere agora X espaço localmente compacto e, para cada $t \in G$, seja Δ_t um subconjunto aberto de X . Dada uma ação parcial $(\{\Delta_t\}_{t \in G}, \{h_t\}_{t \in G})$ de G em X , para cada $t \in G$ seja o ideal bilateral $D_t = C_0(\Delta_t)$ de $C_0(X)$. Então a função

$$\begin{aligned} \theta_t : D_{t^{-1}} &\longrightarrow D_t \\ f &\longmapsto f \circ h_t^{-1} \end{aligned}$$

é um $*$ -isomorfismo. É fácil ver que θ_t é homomorfismo. É injetor, pois se $f \in \ker \theta_t$, então $f \circ h_t^{-1} = 0$, logo compondo com h_t à direita temos:

$$f \circ h_t^{-1} \circ h_t = 0 \circ h_t \Rightarrow f = 0.$$

É sobrejetor, pois se $g \in D_t$, seja $f = g \circ h_t : D_{t^{-1}} \rightarrow C$, então $\theta_t(f) = (g \circ h_t) \circ h_t^{-1} = g$. Finalmente

$$\theta_t(f^*)(x) = f^* \circ h_t^{-1}(x) = \overline{f(h_t^{-1}(x))} = (f \circ h_t^{-1})^*(x) = \theta_t(f)^*(x), \forall x \in D_t$$

Assim, por 3.6, temos que o par $(\{D_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G})$ é uma ação parcial de G em $C_0(X)$.

Esse tipo de C^* -álgebra foi usado por Exel em [11] para caracterizar a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ objeto do próximo capítulo.

Capítulo 4

A álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$

Foi provado em [11] e [22] que a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é isomorfa ao produto cruzado parcial reduzido de uma C^* -álgebra comutativa com unidade $C(X)$ por um grupo livre $\mathbb{F}$.

O objetivo da seção 4.1 é caracterizar X como o conjunto das palavras infinitas admissíveis, que será definido em 4.7. Esta identificação será fundamental na seção seguinte, na qual iremos caracterizar a estrutura de produto cruzado parcial de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.

Vamos considerar $\mathcal{G}$ um conjunto finito e $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(i, j)\}_{i, j \in \mathcal{G}}$ uma matriz com entradas no conjunto $\{0, 1\}$, sendo que $\mathcal{A}$ não possui colunas identicamente nulas.

Definição 4.1 *A álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é definida como a C^* -álgebra universal gerada por uma família de isometrias parciais $\{s_i\}_{i \in \mathcal{G}}$ satisfazendo as relações:*

$$(I) \quad 1 = \sum_{j \in \mathcal{G}} s_j s_j^* \\ (II) \quad s_i^* s_i = \sum_{j \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(i, j) s_j s_j^*$$

Segue da definição de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ a seguinte propriedade.

Proposição 4.2 *Sejam $s_1, \dots, s_n$, com $n \geq 2$, isometrias parciais numa C^* -álgebra A com unidade satisfazendo $\sum_{j=1}^n s_j s_j^* = 1$. Então $s_i^* s_j = 0$, para $i \neq j$.*

Demonstração: O corolário 3.9 de [19] estabelece que se $p_1, \dots, p_n$ são projeções em A então:

$$p_i p_j = 0, \quad i \neq j \Leftrightarrow p_1 + \dots + p_n \leq 1$$

Como $s_i s_i^*$ é projeção para cada i , temos que $(s_i s_i^*)(s_j s_j^*) = 0$, se $i \neq j$. Então $0 = s_i^* s_i s_i^* s_j s_j^* s_j \stackrel{1.12}{=} s_i^* s_j$. $\square$

4.1 O conjunto $\Omega_{\mathcal{A}}^\tau$

Antes de definirmos o conjunto principal desta seção, apresentaremos definições que serão utilizadas agora e mais adiante nesta seção.

Seja G um grupo. Denotamos por $\mathcal{P}(G)$ o conjunto das partes de G . Sendo $2^G = \{0, 1\}^G = \{f : G \rightarrow \{0, 1\}\}$ identificamos $\mathcal{P}(G)$ com 2^G da seguinte forma: se $X \subset G$, tome $(w_i)_{i \in G}$ de modo que $w_i = 1$ se $i \in X$ e $w_i = 0$ se $i \notin X$. Desta forma, em $\mathcal{P}(G)$ temos a topologia proveniente da topologia produto de 2^G . Como $\{0, 1\}$ é compacto, 2^G é compacto.

Se e é o elemento neutro de G , seja $\Omega^e = \{W \in \mathcal{P}(G) : e \in W\}$. Note que Ω^e é compacto. De fato, como $\Omega^e \subseteq 2^G$, então para provar que Ω^e é compacto basta provar que é fechado. Temos que $\Omega^e = \{(w_i)_{i \in G} : w_e = 1\}$. Seja $(w^j)_j \in \Omega^e$ tal que $w^j \rightarrow w = (w_i)_{i \in G}$ na topologia produto. Então $w_i^j \xrightarrow{j} w_i$ para todo $i \in G$. Como $w^j \in \Omega^e$, então $1 = w_e^j \rightarrow w_e = 1$. Logo $w \in \Omega^e$.

Antes de darmos continuidade às definições principais, devido ao seu uso no desenvolvimento desta seção, falaremos brevemente sobre grupos livres e como referência usamos [15].

Sejam G um grupo e S um subconjunto de G . Dizemos que G é gerado por S se todo elemento de G pode ser escrito como produto finito dos elementos de S e de S^{-1} . Os elementos de S são denominados geradores.

Definição 4.3 *Sejam S um conjunto e F um grupo. Suponha que $f : S \rightarrow F$ é tal que $f(S)$ gera F . Dizemos que F é o grupo livre gerado por S se satisfaz a seguinte propriedade universal: Se G é grupo e $g : S \rightarrow G$ é tal que $g(S)$ gera G , então existe homomorfismo $\varphi : F \rightarrow G$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow g & \swarrow \varphi \\ & G & \end{array}$$

Temos que cada elemento t no grupo livre tem uma única decomposição, denominada forma reduzida, $t = x_1 x_2 \dots x_k$, onde $x_i \in S \cup S^{-1}$ e $x_{i+1} \neq x_i^{-1}$, para todo $i = 1, \dots, k-1$.

Em [15] é provada a existência do grupo livre gerado por S .

Vamos denotar $\mathbb{F}$ o grupo livre gerado por $\mathcal{G}$.

Definição 4.4 Dizemos que $W \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é convexo se dados quaisquer $t, s \in W$ então o caminho que liga t a s , dado por $\{t, tx_1, tx_1x_2, \dots, tx_1x_2\dots x_n = s\}$, está contido em W , onde $t^{-1}s = x_1x_2\dots x_n$ na forma reduzida.

Definimos $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ como sendo o subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ dado por:

$$\Omega_{\mathcal{A}}^r = \left\{ W \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \begin{array}{l} e \in W, W \text{ é convexo,} \\ \text{se } t \in W, \text{ então existe no máximo um } x \in \mathcal{G} \text{ tal que } tx \in W \text{ e} \\ \text{se } t \in W, y \in \mathcal{G} \text{ e } ty \in W, \text{ então } tx^{-1} \in W \Leftrightarrow \mathcal{A}(x, y) = 1 \end{array} \right\}$$

Pela definição acima podemos identificar $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ com um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{F}}$ e assim $\Omega_{\mathcal{A}}^r = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$, onde:

$$\Omega_1 = \{(w_i)_{i \in \mathbb{F}} \in \Omega^e : \text{se } w_t = 1, \text{ então existe no máximo um } x \in \mathcal{G} \text{ tal que } w_{tx} = 1\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (w_i)_{i \in \mathbb{F}} \in \Omega^e : \begin{array}{l} \text{se } t \in \mathbb{F} \text{ e } y \in \mathcal{G} \text{ são tais que } w_t = w_{ty} = 1, \text{ então,} \\ w_{tx^{-1}} = 1, \forall x \in \mathcal{G} \iff \mathcal{A}(x, y) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Omega_3 = \{(w_i)_{i \in \mathbb{F}} \in \Omega^e : (w_i)_i \text{ é convexo}\}$$

Observe que $(w_i)_{i \in \mathbb{F}}$ é convexo se $W \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é convexo.

Proposição 4.5 O conjunto $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ é compacto.

Demonstração: É suficiente mostrar que Ω_i é fechado, para $i = 1, 2, 3$.

Seja $(w^j)_j \in \Omega_1$, com $w^j \rightarrow w = (w_i)_{i \in \mathbb{F}}$. Então $w_i^j \xrightarrow{j} w_i, \forall i \in \mathbb{F}$. Seja $t \in \mathbb{F}$ tal que $w_t = 1$ e suponha que existem $x \neq y$ com $w_{tx} = w_{ty} = 1$. Da convergência de $(w^j)_j$ temos $w_{tx}^j \xrightarrow{j} w_{tx} = 1$ e $w_{ty}^j \xrightarrow{j} w_{ty} = 1$. Então existe j_0 tal que $w_{tx}^j = w_{ty}^j = 1$, para $j \geq j_0$. Assim temos, para $j \geq j_0$, $w_t^j = 1$, $w_{tx}^j = w_{ty}^j$ e $x \neq y$, uma contradição pois $w^j \in \Omega_1$. Portanto $w = (w_i)_{i \in \mathbb{F}} \in \Omega_1$.

Seja $(w^j)_j \in \Omega_2$, com $w^j \rightarrow w = (w_i)_{i \in \mathbb{F}}$. Então $w_i^j \xrightarrow{j} w_i, \forall i \in \mathbb{F}$. Sejam $t \in \mathbb{F}$ e $y \in \mathcal{G}$ tais que $w_t = w_{ty} = 1$. Da convergência de $(w^j)_j$ temos que $w_t^j \xrightarrow{j} w_t = 1$ e $w_{ty}^j \xrightarrow{j} w_{ty} = 1$, logo existe j_0 tal que $w_t^j = w_{ty}^j = 1$, para $j \geq j_0$. Seja $x \in \mathcal{G}$. Se $\mathcal{A}(x, y) = 1$, então $w_{tx^{-1}}^j = 1$, portanto $w_{tx^{-1}}^j \xrightarrow{j} w_{tx^{-1}} = 1$. Se $\mathcal{A}(x, y) = 0$, então $w_{tx^{-1}}^j = 0$, assim $w_{tx^{-1}}^j \xrightarrow{j} w_{tx^{-1}} = 0$. Logo $w = (w_i)_{i \in \mathbb{F}} \in \Omega_2$.

Seja $(w^j)_j \in \Omega_3$, com $w^j \rightarrow w = (w_i)_{i \in \mathbb{F}}$. Sejam $t, s \in \mathbb{F}$ tais que $w_t = w_s = 1$. Como $w_t^j \xrightarrow{j} w_t = 1$ e $w_s^j \xrightarrow{j} w_s = 1$, então existe j_0 tal que $w_t^j = w_s^j = 1$, para $j \geq j_0$. Seja $x_1 \dots x_k = t^{-1}s$ na forma reduzida. Como $(w^j)_j \in \Omega_3$, então $w_t^j = w_{tx_1}^j = \dots = w_{tx_1 \dots x_k}^j = 1$, para $j \geq j_0$. Logo $w_{tx_1 \dots x_l}^j \xrightarrow{j} w_{tx_1 \dots x_l}$, para $l = 1, \dots, k$. Portanto $w_t = w_{tx_1} = \dots = w_{tx_1 \dots x_k} = 1$ e daí $w \in \Omega_3$. $\square$

As definições e resultados a seguir vão tratar de caracterizar $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ de outra forma, que será essencial na próxima seção e no capítulo 5.

Uma *palavra* é uma sequência finita ou infinita $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ de elementos de $\mathcal{G}$. Quando ξ é finita, definimos o comprimento de ξ , denotado por $|\xi|$, como o número de coordenadas de ξ . Quando $|\xi| = 0$, dizemos que ξ é uma palavra vazia. Para cada i , denotaremos ξ_i a i -ésima coordenada de ξ .

Dados uma palavra ξ e um número natural n , denotaremos por $\xi|_n$ a *subpalavra* de ξ dada por $\xi|_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Se ξ for uma palavra finita então será necessário que $1 \leq n \leq |\xi|$.

Definição 4.6 *O cone positivo $\mathbb{F}_+$ é o subconjunto de $\mathbb{F}$ formado pelo produto finito de elementos de $\mathcal{G}$.*

$$\mathbb{F}_+ = \{x_1 x_2 \dots x_k : x_i \in \mathcal{G}, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$$

Dada uma palavra ξ , denotaremos por $\llbracket \xi \rrbracket$ o subconjunto de $\mathbb{F}_+$ dado por

$$\llbracket \xi \rrbracket = \{e, \xi_1, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_2 \xi_3, \dots\}.$$

Se ξ é a palavra vazia teremos $\llbracket \xi \rrbracket = \{e\}$.

Definição 4.7 *Uma palavra ξ é dita admissível se $|\xi| \leq 1$ ou $\mathcal{A}(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1, \forall i \in \mathbb{N}$ quando $|\xi| \geq 2$.*

Proposição 4.8 *Se $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r$, então existe uma única palavra admissível $\delta(W)$ tal que*

$$W \cap \mathbb{F}_+ = \llbracket \delta(W) \rrbracket$$

Demonstração: Note que $e \in W \cap \mathbb{F}_+$. Se $W \cap \mathbb{F}_+ = \{e\}$ tome $\delta(W)$ a palavra vazia. Se existe $x = x_1 \dots x_k \in W \cap \mathbb{F}_+$, pela convexidade de W temos que $e, x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \dots x_k \in W \cap \mathbb{F}_+$. Como $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r$, então existe no máximo um $x_{k+1} \in \mathcal{G}$ tal que $xx_{k+1} \in W$. Se tal x_{k+1} não existir tome $\delta(W) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Observe que $\delta(W)$ é palavra admissível, pois para $i = 1, \dots, k-1$ temos $x_1 \dots x_i \in W$ e $x_{i+1} \in \mathcal{G}$ então $x_1 \dots x_i x_{i+1} \in W$, portanto pela terceira condição da definição de $\Omega_{\mathcal{A}}^r$, temos que $\mathcal{A}(x_i, x_{i+1}) = 1$. Se existe $x_{k+1} \in \mathcal{G}$ tal que $x_1 \dots x_k x_{k+1} \in W \cap \mathbb{F}_+$, então repetimos o mesmo argumento. Daí $W \cap \mathbb{F}_+ = \{e, x_1, x_1x_2, \dots\} = \llbracket x \rrbracket$.

Vamos provar a unicidade. Suponha que existe ξ palavra admissível tal que $\llbracket \xi \rrbracket = W \cap \mathbb{F}_+$, então $\{e, \xi_1, \xi_1\xi_2, \dots\} = \{e, x_1, x_1x_2, \dots\}$. Como no grupo livre cada elemento de $\mathbb{F}_+$ se escreve de maneira única como produto de elementos de $\mathcal{G}$, então só podemos ter $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots$, ou seja, $\xi = \delta(W)$. $\square$

Existe uma identificação natural entre as palavras finitas e os elementos de $\mathbb{F}_+$, onde cada palavra é identificada com o produto de suas coordenadas. Tendo em vista esta identificação, para cada $\alpha = x_1x_2 \dots x_n \in \mathbb{F}_+$, com $x_i \in \mathcal{G}$, considere a palavra $\bar{\alpha} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. E a palavra vazia será identificada com o elemento neutro do grupo livre e .

Definição 4.9 *Dado $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r$ diremos que W é limitado se $\delta(W)$ tem comprimento finito, caso contrário W será dito ilimitado.*

Definição 4.10 *Seja $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r$ e seja $t \in W$. A raiz de t relativa a W , denotada $R_W(t)$, é o subconjunto de $\mathcal{G}$ dado por*

$$R_W(t) = \{x \in \mathcal{G} : tx^{-1} \in W\}$$

A proposição a seguir nos fornece uma caracterização dos elementos de $\Omega_{\mathcal{A}}^r$ que será fundamental na demonstração da bijeção da aplicação $W \mapsto \delta(W)$.

Proposição 4.11 *Seja $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$, então $t \in W$ se, e só se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tais que $t = \alpha\beta^{-1}$ e*

$$(i) \ |\bar{t}| = |\bar{\alpha}| + |\bar{\beta}|$$

(ii) $\bar{\alpha}$ é uma subpalavra de $\delta(W)$

(iii) $\bar{\beta}$ é uma palavra admissível finita tal que, ou $\beta = e$ ou $\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} \in R_W(\alpha)$.

Demonstração: Seja $t \in W$ e escreva $t = x_1x_2 \dots x_n$ na forma reduzida.

Como todo W em $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ é convexo, então $x_1x_2 \dots x_k \in W$, para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Note que, não existe i tal que $x_i \in \mathcal{G}^{-1}$ e $x_{i+1} \in \mathcal{G}$, pois, se existisse, tomando $r = x_1x_2 \dots x_i$, $x = x_i^{-1}$ e $y = x_{i+1}$, teríamos que $r \in W$, $x, y \in \mathcal{G}$, $x \neq y$ e com ambos $rx = x_1x_2 \dots x_{i-1}$ e $ry = x_1x_2 \dots x_ix_{i+1}$ pertencendo a W , o que contradiz a segunda condição da definição de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$.

Isto prova que, para t escrito na forma reduzida, todos os elementos de $\mathcal{G}$ devem estar à esquerda dos elementos de $\mathcal{G}^{-1}$. Assim, escrevemos $t = x_1 \dots x_k y_l^{-1} \dots y_1^{-1}$, com todo x_i e y_j em $\mathcal{G}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$.

Chamando $\alpha = x_1 \dots x_k$ e $\beta = y_1 \dots y_l$, temos $t = \alpha\beta^{-1}$ e $|\bar{t}| = |\bar{\alpha}| + |\bar{\beta}|$.

Como $\alpha \in W \cap \mathbb{F}_+$, pois W é convexo e α é produto finito de elementos de $\mathcal{G}$, então $\bar{\alpha}$ é uma subpalavra de $\delta(W)$ pela definição dada na proposição 4.8.

Se $|\bar{\beta}| = 1$, então $\bar{\beta}$ é admissível por definição. Se $\beta = e$ então t satisfaz (iii). Se $\beta \neq e$, então pela convexidade de W temos que $t = \alpha y_1^{-1} \in W$, logo $y_1 = \bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} \in R_W(\alpha)$.

Se $|\bar{\beta}| \geq 2$, usando a convexidade de W , temos, para todo $i = 2, \dots, l$, que os elementos $s = \alpha y_l^{-1} \dots y_i^{-1}$, $sy_{i-1}^{-1} = \alpha y_l^{-1} \dots y_i^{-1} y_{i-1}^{-1}$ e $sy_i = \alpha y_l^{-1} \dots y_{i+1}^{-1}$ pertencem a W . Então por definição de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$, temos que $A(y_{i-1}, y_i) = 1$. Isto mostra que $\bar{\beta}$ é uma palavra admissível.

Finalmente, como $\alpha y_l^{-1} \in W$, temos que $\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} = y_l \in R_W(\alpha)$. Assim, temos que todo t pertencente a W tem a forma mencionada no enunciado desta proposição.

Reciprocamente, suponha que $t = \alpha\beta^{-1}$ como na hipótese. Então, por (ii), $\alpha = x_1x_2 \dots x_k \in \llbracket \delta(W) \rrbracket = W \cap \mathbb{F}_+$ e assim $\alpha \in W$.

Se $\beta = e$, então $t = \alpha \in W$. Se $\beta \neq e$, tome $\beta = y_1 \dots y_l$ com $y_i \in \mathcal{G}$, $\forall i = 1, \dots, l$. Então por (iii), $\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} \in R_W(\alpha)$, ou seja, $\alpha \bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} = \alpha y_l^{-1} \in W$. Para cada $k \in \{2, \dots, l\}$ vamos mostrar que

$$\alpha y_l^{-1} \dots y_k^{-1} \in W \Rightarrow \alpha y_l^{-1} \dots y_{k-1}^{-1} \in W$$

o que termina a demonstração. Suponhamos que $k \leq l$ e que $\alpha y_l^{-1} \dots y_k^{-1} \in W$.

Primeiramente, pela convexidade de W temos que $(\alpha y_l^{-1} \dots y_k^{-1}) y_k = \alpha y_l^{-1} \dots y_{k+1}^{-1} \in W$. Por hipótese $\bar{\beta}$ é uma palavra admissível e portanto $\mathcal{A}(y_{k-1}, y_k) = 1$. Então pela terceira condição da definição de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ temos que $(\alpha y_l^{-1}, \dots, y_k^{-1}) y_{k-1}^{-1} = \alpha y_l^{-1}, \dots, y_{k-1}^{-1} \in W$. Então segue que $\alpha \beta^{-1} \in W$. $\square$

A definição a seguir será uma ferramenta importante nas duas proposições que precedem a prova da bijeção entre um subconjunto de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ e o conjunto das palavras infinitas admissíveis.

Definição 4.12 *Sejam $t, s \in \mathbb{F}$ tais que $t^{-1}s \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$. Definimos o subconjunto de $\mathbb{F}$:*

$$F(t/s) = \{r \in \mathbb{F} : |r^{-1}s| = |r^{-1}t| + 1\}$$

Observe que, quando $t = s$, $F(t/s)$ é vazio.

Proposição 4.13 *Sejam $t, s \in \mathbb{F}$ distintos. Então $\mathbb{F}$ é a união disjunta de $F(t/s)$ e $F(s/t)$.*

Demonstração: Seja $r \in \mathbb{F}$ e sejam $t, s \in \mathbb{F}$ distintos tais que $t^{-1}s \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$. Então $t^{-1}s \in \mathcal{G}$ ou $t^{-1}s \in \mathcal{G}^{-1}$.

Se $t^{-1}s \in \mathcal{G}$, então $s = tx$, para $x \in \mathcal{G}$. Multiplicando por r^{-1} temos $r^{-1}s = r^{-1}tx$. Logo $|r^{-1}s| = |r^{-1}t| + 1$ e portanto $r \in F(t/s)$.

Se $t^{-1}s \in \mathcal{G}^{-1}$, então $t^{-1}s = x^{-1}$, para $x \in \mathcal{G}$, e daí temos que $s = tx^{-1}$ e assim $r^{-1}s = r^{-1}tx^{-1}$. Multiplicando por x temos $r^{-1}sx = r^{-1}t$ e então $|r^{-1}t| = |r^{-1}s| + 1$, concluindo que $r \in F(s/t)$.

Concluimos então que $\mathbb{F} = F(t/s) \cup F(s/t)$. Falta provar que trata-se de uma união disjunta.

Seja $r \in F(t/s) \cap F(s/t)$, então

$$|r^{-1}s| = |r^{-1}t| + 1 \quad \text{e} \quad |r^{-1}t| = |r^{-1}s| + 1$$

Substituindo a segunda igualdade na primeira temos:

$$|r^{-1}s| = (|r^{-1}s| + 1) + 1 = |r^{-1}s| + 2$$

o que é um absurdo. $\square$

Para provar a injetividade da aplicação $W \mapsto \delta(W)$ será necessária a seguinte proposição:

Proposição 4.14 *Sejam $t \in \mathcal{F}$ e $x \in \mathcal{G}$. Sejam também W_1 e W_2 em $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ e suponha que t e $tx \in W_1 \cap W_2$. Então $W_1 \cap F(t/tx) = W_2 \cap F(t/tx)$.*

Demonstração: Observando que

$$t \in W_i \Leftrightarrow e \in t^{-1}W_i$$

$$tx \in W_i \Leftrightarrow x \in t^{-1}W_i$$

podemos assumir que $t = e$.

Provaremos primeiramente que $W_1 \cap F(e/x) \subset W_2 \cap F(e/x)$. Seja $s \in W_1 \cap F(e/x)$, usando a proposição 4.11 escrevemos $s = \alpha\beta^{-1}$ onde $\bar{\alpha}$ é subpalavra de $\delta(W_1)$ e $\bar{\beta}$ é uma palavra admissível finita tal que $\beta = e$ ou $\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} \in R_{W_1}(\alpha)$.

Observando que $x \in \mathcal{G}$ e $x \in W_1$, temos que $\delta(W_1)$ deve começar com x . Portanto $\alpha = e$ ou $\bar{\alpha}_1 = x$ pois $\bar{\alpha}$ é subpalavra de $\delta(W_1)$. Se $\bar{\alpha}_1 = x$, então podemos escrever $\alpha = xx_2 \dots x_k$, para algum k . Como $s \in F(e/x)$, então

$$|s^{-1}x| = |s^{-1}e| + 1 \Rightarrow |s^{-1}x| = |s^{-1}| + 1 \Rightarrow |\beta\alpha^{-1}x| = |\beta\alpha^{-1}| + 1 \quad (*)$$

$$\text{Mas } \alpha^{-1}x = x_k^{-1} \dots x_2^{-1}x^{-1}x = x_k^{-1} \dots x_2^{-1}.$$

Logo a igualdade $(*)$ não é satisfeita. Portanto $\alpha = e$ e $R_{W_1}(\alpha) = R_{W_1}(e)$.

Vamos mostrar que $R_{W_1}(e) = R_{W_2}(e)$. Por hipótese temos que $x \in W_1$ e $t = e$. Temos que $R_{W_1}(e) = \{y \in \mathcal{G} : y^{-1} \in W_1\}$. Usando que $e \in W_1$, $x \in \mathcal{G}$ e $ex \in W_1$, segue da terceira condição da definição de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ que

$$y^{-1} = ey^{-1} \in W_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(y, x) = 1$$

$$\text{Então } R_{W_1}(e) = \{y \in \mathcal{G} : y^{-1} \in W_1\} = \{y \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(y, x) = 1\} = R_{W_2}(e).$$

Assim concluímos que $s = \beta^{-1}$, onde $\bar{\beta}$ é uma palavra admissível finita tal que, $\beta = e$ ou $\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|} \in R_{W_2}(e)$, donde segue que $s \in W_2$ pela proposição 4.11. Logo $s \in W_2 \cap F(e/x)$.

Analogamente, temos que $s \in W_2 \cap F(e/x) \subseteq W_1 \cap F(e/x)$. □

Proposição 4.15 *Sejam W_1 e W_2 elementos de $\Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ tais que $\delta(W_1) = \delta(W_2)$ e $\delta(W_1)$ é infinito. Então $W_1 = W_2$.*

Demonstração: Seja $\xi = \delta(W_1) = \delta(W_2)$ que é infinita por hipótese. Para $n \geq 1$ consideremos o subconjunto de $\mathbb{F}$

$$F_n = F(\xi_1 \dots \xi_n / \xi_1 \dots \xi_{n+1})$$

Temos que $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. De fato, seja $r \in \mathbb{F}$. Para qualquer $n \geq 1$ temos que

$$(\xi_1 \dots \xi_n)^{-1} \xi_1 \dots \xi_{n+1} = \xi_{n+1} \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$$

Assim, pela demonstração da proposição 4.13, $r \in F(\xi_1 \dots \xi_n / \xi_1 \dots \xi_{n+1}) = F_n$.

Portanto $\mathbb{F} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Temos também que, para $i = 1$ ou 2

$$W_i = \mathbb{F} \cap W_i = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cap W_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap W_i) \quad (4.1)$$

Pela Proposição 4.8 temos que W_1 e W_2 contêm $\xi_1 \dots \xi_n$ e $\xi_1 \dots \xi_{n+1}$. Como $\xi_1 \dots \xi_{n+1} = (\xi_1 \dots \xi_n) \xi_{n+1}$, então pela proposição 4.14 temos que $W_1 \cap F_n = W_2 \cap F_n$ para todo $n \geq 1$. Logo, por (1), $W_1 = W_2$. $\square$

Proposição 4.16 *Seja ξ uma palavra infinita admissível. Então existe um único $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$ tal que $\delta(W) = \xi$.*

Demonstração: Considere W como o subconjunto de $\mathbb{F}$ formado pelos elementos $t = \alpha\beta^{-1}$, onde $|\bar{t}| = |\bar{\alpha}| + |\bar{\beta}|$, $\bar{\alpha}$ é subpalavra de ξ e $\bar{\beta}$ é uma palavra finita admissível tal que $\beta = e$ ou $\mathcal{A}(\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|}, \xi_{|\bar{\alpha}|+1}) = 1$.

Claramente $e \in W$ e portanto $W \in \Omega^e$. Vamos provar que $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^{\tau}$.

Temos que W é convexo pois dados $t, s \in W$ estes são da forma $\alpha\beta^{-1}$ e $\lambda\mu^{-1}$, respectivamente, onde α e λ são subpalavras de ξ e β e μ são iguais a e ou são palavras finitas admissíveis satisfazendo $\mathcal{A}(\bar{\beta}_{|\bar{\beta}|}, \xi_{|\bar{\alpha}|+1}) = 1$ e $\mathcal{A}(\bar{\mu}_{|\bar{\mu}|}, \xi_{|\bar{\lambda}|+1}) = 1$. Faremos caso em que β e μ são diferentes de e . O caminho que liga t a s é $t^{-1}s = \beta\alpha^{-1}\lambda\mu = \beta_1 \dots \beta_{|\bar{\beta}|} \xi_k^{-1} \dots \xi_1^{-1} \xi_1 \dots \xi_l \mu_{|\bar{\mu}|}^{-1} \dots \mu_1^{-1} = \beta \xi_{k+1} \dots \xi_l \mu$, supondo

$l > k$. Temos que $t^{-1}s = x_1 \dots x_n$ na forma reduzida e as possibilidades para $tx_1 \dots x_j$, com $1 \leq j \leq |\overline{\beta\alpha^{-1}\lambda\mu}|$, são

$$\begin{aligned} t\beta_1 \dots \beta_j &= \alpha\beta^{-1}\beta_1 \dots \beta_j = \begin{cases} \alpha & , \text{ se } j = |\overline{\beta}| \\ \alpha\beta_{|\overline{\beta}|}^{-1} \dots \beta_{j+1}^{-1} & , \text{ se } j < |\overline{\beta}| \end{cases} \\ t\beta\xi_{k+1} \dots \xi_i &= \alpha\beta^{-1}\beta\xi_{k+1} \dots \xi_i = \xi_1 \dots \xi_i \\ t\beta\xi_{k+1} \dots \xi_l\mu_{|\overline{\mu}|}^{-1} \dots \mu_i^{-1} &= \xi_1 \dots \xi_l\mu_{|\overline{\mu}|}^{-1} \dots \mu_i^{-1}. \end{aligned}$$

Em todos os casos $tx_1 \dots x_j \in W$. O caso em que $k \geq l$ é análogo. Portanto W é convexo.

Seja $t \in W$, então $t = \alpha\beta^{-1}$ como acima e seja $x \in \mathcal{G}$.

Se $\beta \neq e$, para que $tx = \alpha\beta^{-1}x \in W$, x deve ser igual a β_1 . Se $\beta = e$ então $t = \alpha$, logo $x = \xi_{|\alpha|+1}$ é o único elemento de G tal que $tx = \alpha x \in W$.

Seja $y \in \mathcal{G}$ tal que $ty \in W$. Se $\beta \neq e$, já vimos que $y = \beta_1$. Então para cada $x \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}(x, y) = 1$, temos que $\overline{x\beta}$ é palavra admissível pois $x\beta = x\beta_1\beta_2 \dots \beta_{|\overline{\beta}|}$, e daí $tx^{-1} = \alpha\beta^{-1}x^{-1} = \alpha(x\beta)^{-1} \in W$. Caso $\mathcal{A}(x, y) = 0$, a forma reduzida de tx^{-1} é $\alpha\beta^{-1}x^{-1}$ o que mostra que $tx^{-1} \notin W$, já que $\overline{x\beta}$ não é admissível.

Se $\beta = e$, então $ty = \alpha y \in W$. Logo $\overline{\alpha y}$ também é uma subpalavra de ξ e portanto $y = \xi_{|\overline{\alpha}|+1}$. Temos que descobrir para qual $x \in \mathcal{G}$ temos $\alpha x^{-1} \in W$. Por definição de W , isto ocorre quando $\mathcal{A}(x, y) = 1$. Então $W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r$.

Finalmente vejamos que $\delta(W) = \xi$. Para isso, vamos mostrar que $W \cap \mathbb{F}_+ = \llbracket \xi \rrbracket$. Seja $t \in W \cap \mathbb{F}_+$. Temos que $t = \alpha\beta^{-1}$ onde α é subpalavra de ξ e $\beta = e$ ou $\overline{\beta}$ é palavra finita admissível. Mas pela definição de $\mathbb{F}_+$ só podemos ter $\beta = e$. Assim $t = \alpha = \xi_1 \dots \xi_k$, para algum k . Deste modo $\llbracket \delta(W) \rrbracket = W \cap \mathbb{F}_+ \subseteq \llbracket \xi \rrbracket$. A inclusão contrária é clara. Logo $\llbracket \delta(W) \rrbracket = \llbracket \xi \rrbracket$. Como em $\mathbb{F}_+$ cada elemento se escreve de maneira única teremos que $\delta(W) = \xi$. $\square$

Seja $\mathcal{G}$ o conjunto dado por $\mathcal{G} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Considere

$$\mathcal{G}^{\mathbb{N}} = \{\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} : \xi_i \in \mathcal{G}\}$$

que é Hausdorff e compacto considerando a topologia produto.

Seja $\Omega_{\mathcal{A}}$ subconjunto de $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ dado por:

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \{\xi = (\xi_i)_i \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}} : \mathcal{A}(\xi_i, \xi_{i+1}) = 1, \forall i \in \mathbb{N}\} = \{\xi \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}} : \xi \text{ é palavra infinita admissível}\}$$

Observe que $\Omega_{\mathcal{A}}$ é compacto pois é fechado em $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}$. De fato, seja $(\xi^j)_{j \in \mathbb{N}}$ sequência em $\Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $\xi^j \xrightarrow{j} \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$. Então, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $\xi_i^j \xrightarrow{j} \xi_i$. Como $\mathcal{G}$ é finito, fixado $i \in \mathbb{N}$ qualquer, existe j_0 tal que $\xi_i^j = \xi_i$ e $\xi_{i+1}^j = \xi_{i+1}$, para todo $j \geq j_0$. Portanto $\mathcal{A}(\xi_i, \xi_{i+1}) = \mathcal{A}(\xi_i^j, \xi_{i+1}^j) = 1$. Logo $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$.

Definimos $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}} = \{W \in \Omega_{\mathcal{A}}^r : W \text{ é ilimitado}\}$.

Assim, com 4.15 e 4.16, provamos que $\delta : \tilde{\Omega}_{\mathcal{A}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}$ dada por $W \mapsto \delta(W)$ é biunívoca.

4.2 A estrutura de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$

Foi provado em [11] que a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é isomorfa ao produto cruzado parcial $C(\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}) \rtimes^p \mathbb{F}$ e que coincide com o produto parcial reduzido $C(\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}) \rtimes_r^p \mathbb{F}$. De 3.6 temos que $D_e = C(\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}) = C(\Omega_{\mathcal{A}})$, sendo esta última identificação provada na seção anterior.

Para a estrutura de produto cruzado parcial de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ em [11] são definidos

$$\Delta_t = \{W \in \tilde{\Omega}_{\mathcal{A}} : t \in W\}$$

e $h_t : \Delta_{t^{-1}} \rightarrow \Delta_t$ dada por $h_t(W) = tW$, onde $tW = \{tw : w \in W\}$. Temos que o par $(\{\Delta_t\}, \{h_t\})_{t \in \mathbb{F}}$ é ação parcial de $\mathbb{F}$ em $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}$. Como foi visto no capítulo 3, $D_t = C_0(\Delta_t)$ e definimos

$$\begin{aligned} \theta_t : D_{t^{-1}} &\rightarrow D_t \\ f &\mapsto f \circ h_t^{-1} \end{aligned}$$

No capítulo 3 vimos que o par $(\{D_t\}, \{\theta_t\})_{t \in \mathbb{F}}$ é ação parcial de $\mathbb{F}$ em $C(\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}})$. E os automorfismos parciais são dados por $\theta_t(a) = u_t a u_{t^{-1}}$, para $a \in D_{t^{-1}}$, onde cada u_t é isometria parcial.

Vamos mostrar que o conjunto Δ_x , para $x \in \mathcal{G}$, é levado, pela δ , no conjunto $X_x = \{\xi \in \Omega_{\mathcal{A}} : \xi_1 = x\}$. De fato, seja $W \in \Delta_x$. Temos que $\delta(W)$ é tal que $[\delta(W)] = \mathbb{F}_+ \cap W$. Como $x \in W$ e $x \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{F}_+$, então $x \in [\delta(W)] = \{e, w_1, w_1 w_2, \dots\}$. Portanto $x = w_1$. Note que, para cada $x \in \mathcal{G}$, X_x é compacto, pois é fechado em $\Omega_{\mathcal{A}}$.

Seja $\sigma : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}$ dada por

$$\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots)$$

Se $h_x(W) = xW$, então $h_x^{-1}(W) = x^{-1}W = h_{x^{-1}}(W)$ e portanto $h_x^{-1} = h_{x^{-1}}$. Olhando em $\tilde{\Omega}_{\mathcal{A}}$ vamos denotar $\delta(W) = w$. Se $w \in X_{x^{-1}}$, então $w_1 = x^{-1}$ e assim, lembrando que podemos identificar as palavras com os elementos de $\mathbb{F}_+$, temos $xw = (x, w_1, w_2, w_3, \dots) = (x, x^{-1}, w_2, w_3, \dots) = (w_2, w_3, \dots) = \sigma(w)$. Deste modo podemos definir $\sigma_x : X_{x^{-1}} \rightarrow X_x$ dada por $\sigma_x(w) = \sigma(w)$.

Seja α o endomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \alpha : C(\Omega_{\mathcal{A}}) &\longrightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}}) \\ f &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

E do mesmo modo, dada $f \in C_0(X_{x^{-1}})$, calculando $f \circ \sigma_x^{-1}$ temos, para $w \in X_x$, ou seja, $w_1 = x$, que $f(\sigma_x(w)) = f(\sigma(w)) = \alpha(w)$. Deste modo temos que o endomorfismo $\alpha : C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}})$ é uma ação parcial. Assim definimos

$$\begin{aligned} \alpha_x : C_0(X_{x^{-1}}) &\longrightarrow C_0(X_x) \\ f &\longmapsto \alpha_x(f) = \alpha(f) \end{aligned}$$

para $f \in C_0(X_{x^{-1}})$.

O par $(\{C_0(X_t)\}, \{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{F}})$ é ação parcial de $\mathbb{F}$ em $C(\Omega_{\mathcal{A}})$. E os automorfismos parciais são dados por $\alpha_t(f) = s_t f s_t^*$, para $f \in C_0(X_{t^{-1}})$, onde cada s_t é isometria parcial.

Temos também, para $x \in \mathcal{G}$, que $s_x s_x^* = 1_x$ e $s_x^* s_x = 1_{x^{-1}}$, onde 1_x é a função característica de X_x .

Deste modo fica esclarecida a estrutura de produto cruzado parcial de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ que será utilizada no principal resultado do próximo capítulo.

Capítulo 5

A Álgebra de Cuntz-Krieger como produto cruzado

Nosso principal objetivo é mostrar que a álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ pode ser caracterizada como o produto cruzado de uma C^* -álgebra comutativa por um endomorfismo.

Lembrando que $\sigma : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}$ é dada por $\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots)$, dado $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ observe que

$$\sigma^{-1}(\{\xi\}) = \{(x, \xi_1, \xi_2, \dots) : x \in \mathcal{G}, \mathcal{A}(x, \xi_1) = 1\}.$$

Então, o número de elementos de $\sigma^{-1}(\{\xi\})$ é igual à quantidade de elementos de x em $\mathcal{G}$ tais que $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 1$. Em outras palavras:

$$\#\sigma^{-1}(\{\xi\}) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1)$$

Seja $Q : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\} = \mathcal{G}$ dada por:

$$Q(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1)$$

Como $\Omega_{\mathcal{A}}$ tem a topologia produto e Q só depende da primeira componente ξ_1 de ξ , temos que Q é uma função contínua em $\Omega_{\mathcal{A}}$.

Proposição 5.1 *Sejam σ e Q as funções definidas anteriormente. Então*

$$\sigma(\Omega_{\mathcal{A}}) = \{\xi \in \Omega_{\mathcal{A}} : Q(\xi) > 0\} = Q^{-1}(\{1, 2, \dots, n\})$$

Demonstração: Seja $y \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então existe $z \in \Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $y = \sigma(z)$, logo $z \in \sigma^{-1}(\{y\})$. Então existe $x_0 \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}(x_0, y_1) = 1$ e $z = (x_0, y_1, y_2, \dots)$. Portanto $Q(y) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y_1) > 0$.

Seja agora $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $Q(\xi) > 0$, ou seja, $\sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1) > 0$. Assim, existe $x_0 \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}(x_0, \xi_1) = 1$.

Seja $z = (x_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Então $z \in \Omega_{\mathcal{A}}$ pois $x_0 \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{A}(x_0, \xi_1) = 1$. Logo temos que $\sigma(z) = \xi$, isto é, $\xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$. $\square$

Como Q é contínua e $\{1, 2, \dots, n\}$ é aberto-fechado na topologia discreta então $\sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$ é aberto-fechado na topologia produto.

Considere agora a C^* -álgebra comutativa $C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Seja α o endomorfismo definido no capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \alpha : C(\Omega_{\mathcal{A}}) &\longrightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}}) \\ f &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

Proposição 5.2 *São equivalentes:*

- (i) $Q > 0$
- (ii) σ é sobrejetora
- (iii) α é injetora
- (iv) nenhuma coluna de $\mathcal{A}$ é nula

Demonstração: (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

Temos por 5.1 que

$$Q(\xi) > 0, \forall \xi \in \Omega_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}) = \Omega_{\mathcal{A}}$$

$$(i) \Leftrightarrow (iv)$$

$$\begin{aligned} Q > 0 &\Leftrightarrow Q(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1) > 0, \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{para cada } \xi \in \Omega_{\mathcal{A}} \text{ existe } x_{\xi} \in \mathcal{G} \text{ tal que } \mathcal{A}(x_{\xi}, \xi_1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ não tem colunas nulas.} \end{aligned}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

Suponha σ sobrejetora. Se $\alpha(f) \equiv 0$, então $\alpha(f)(\xi) = f \circ \sigma(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Portanto $f \equiv 0$.

Reciprocamente, se α é injetora, então $\ker \alpha = \{0\}$, ou seja, $\alpha(f) = f \circ \sigma \equiv 0$, então $f \equiv 0$.

Suponha que σ não é sobrejetora, então existe $y \in \Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $y \notin \text{Im} \sigma = \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$ que é fechado. Como $\Omega_{\mathcal{A}}$ é Hausdorff compacto, de 1.6.6 de [20] temos que $\Omega_{\mathcal{A}}$ é normal, então pelo Lema de Urysohn existe $f : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow [0, 1]$ tal que $f|_{\text{Im} \sigma} = 0$ e $f(y) = 1$. Deste modo, temos que $f \circ \sigma(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ mas $f \neq 0$, uma contradição. Logo σ é sobrejetora. $\square$

No resultado principal deste capítulo $\mathcal{A}$ é uma matriz sem colunas nulas, isto é, α é injetor. Porém, nas proposições a seguir permitiremos que $\mathcal{A}$ tenha colunas nulas, ou seja, permite aplicar os resultados para o caso em que α não é injetor.

O lema a seguir será utilizado na demonstração das duas proposições seguintes.

Lema 5.3 *Sejam X um espaço topológico compacto e $Y \subseteq X$ aberto e fechado. Então*

$$\{f \in C(X) : f|_{Y^c} \equiv 0\} \simeq C(Y)$$

Demonstração: Dada $f \in \{f \in C(X) : f|_{Y^c} \equiv 0\}$, tome $\tilde{f} = f|_Y \in C(Y)$. A aplicação $f \mapsto \tilde{f}$ é injetora: se $f \in \{f \in C(X) : f|_{Y^c} \equiv 0\}$ tal que $\tilde{f} \equiv 0$, então $f|_Y \equiv 0$ e também como $f|_{Y^c} \equiv 0$, logo $f \equiv 0$.

Vejam agora que a aplicação $f \mapsto \tilde{f}$ é sobrejetora. Seja $g \in C(Y)$ e tome $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ se } x \in Y \\ 0 & , \text{ se } x \in Y^c \end{cases}$$

Vejam que $f \in C(X)$. Sejam $(x_n)_n$ sequência em X e $x \in X$ tais que $x_n \rightarrow x$. Se $x \in Y^c$, como Y é fechado então Y^c é aberto, logo existe n_0 tal que $x_n \in Y^c$, $\forall n \geq n_0$. Logo $f(x_n) = f(x) = 0$, $\forall n \geq n_0$, donde temos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Se $x \in Y$, utilizando que Y é aberto temos que existe n_0 tal que $x_n \in Y$, $\forall n \geq n_0$. Logo, como g é contínua, $f(x_n) = g(x_n) \rightarrow g(x) = f(x)$, para $n \geq n_0$.

Por construção temos $f|_{Y^c} \equiv 0$ e $\tilde{f} = f|_Y \equiv g$. $\square$

Proposição 5.4 *Seja α o endomorfismo definido anteriormente, então*

$$\ker(\alpha) \simeq C_0(\Omega_A \setminus \sigma(\Omega_A))$$

Demonstração: Primeiramente mostremos que

$$\ker(\alpha) = \{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0\}.$$

Seja $f \in \ker(\alpha)$, então

$$\alpha(f) \equiv 0 \iff f \circ \sigma \equiv 0 \iff f(\sigma(\xi)) = 0, \forall \xi \in \Omega_A \iff f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0$$

de onde segue a igualdade.

Temos que $\sigma(\Omega_A)$ é aberto e fechado em Ω_A , como este é compacto, então $\sigma(\Omega_A)^c$ é compacto. Assim $C_0(\sigma(\Omega_A)^c) = C(\sigma(\Omega_A)^c)$. A bijeção entre os conjuntos $\ker(\alpha)$ e $C(\sigma(\Omega_A)^c)$ segue do lema 5.3 para $Y = \Omega_A \setminus \sigma(\Omega_A) = \sigma(\Omega_A)^c$. $\square$

A proposição a seguir tem como objetivo caracterizar $C(\Omega_A)$ para que possamos utilizar a proposição 2.7 e construir o operador transferência desejado.

Proposição 5.5 $C(\Omega_A) \simeq C_0(\sigma(\Omega_A)) \oplus C_0(\Omega_A \setminus \sigma(\Omega_A))$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que

$$C(\Omega_A) = \{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)^c} \equiv 0\} \oplus \{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0\}$$

Seja $f \in C(\Omega_A)$ e considere f_1 e f_2 dadas por:

$$f_1(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_A) \\ 0 & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_A)^c \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(\xi) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_A) \\ f(\xi) & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_A)^c \end{cases}$$

Utilizando o mesmo argumento do lema 5.3 temos que f_1 e $f_2 \in C(\Omega_A)$.

Claramente temos que $f = f_1 + f_2$.

Seja $f \in \{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)^c} \equiv 0\} \cap \{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0\}$. Então $f|_{\sigma(\Omega_A)^c} \equiv 0$ e $f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0$, portanto $f \equiv 0$. Deste modo concluímos que $C(\Omega_A)$ é a soma direta dos conjuntos.

Pelo lema 5.3 temos que $\{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)^c} \equiv 0\} \simeq C_0(\sigma(\Omega_A))$ e que $\{f \in C(\Omega_A) : f|_{\sigma(\Omega_A)} \equiv 0\} \simeq C_0(\sigma(\Omega_A)^c)$.

Deste modo concluímos que $C(\Omega_A) \simeq C_0(\sigma(\Omega_A)) \oplus C_0(\sigma(\Omega_A)^c)$. $\square$

Das proposições 5.4 e 5.5 temos que

$$C(\Omega_{\mathcal{A}}) = C_0(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}})) \oplus \ker(\alpha)$$

sendo que $C_0(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}}))$ é um ideal de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ que será denotado por $\mathcal{J}$.

Assim como na proposição 2.7 denotaremos por β a inversa da função $\alpha|_{\mathcal{J}}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{R}$ sendo $\mathcal{R} = \alpha(C(\Omega_{\mathcal{A}})) = \text{Im}\alpha$.

Dada $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$ seja $E(f) : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$E(f)|_{\xi} = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta), \quad \forall \xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$$

Observe que $E(f)|_{\xi}$ é a média dos valores de f nos elementos de $\Omega_{\mathcal{A}}$ que tem a mesma imagem que ξ por σ . E deste modo esta função está bem definida pois $\xi \in \sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})$.

A proposição a seguir tem como objetivo mostrar que a aplicação E definida anteriormente é uma esperança condicional e assim estaremos nas hipóteses da proposição 2.7.

Proposição 5.6 *Para toda $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$ tem-se que $E(f) \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Além disso, E é uma esperança condicional positiva de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ em $\mathcal{R}$.*

Demonstração: Seja $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Primeiramente vamos mostrar que $E(f): \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.

Sejam $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ e $(\xi^j)_j$ sequência em $\Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $(\xi^j)_j \rightarrow \xi$. Queremos mostrar que $E(f)|_{\xi^j} \rightarrow E(f)|_{\xi}$.

Como $\xi^j \rightarrow \xi$, então $\xi_i^j \rightarrow \xi_i, \forall i \in \mathbb{N}$. E temos também que

$$\sigma(\xi^j) = (\xi_2^j, \xi_3^j, \dots) \rightarrow (\xi_2, \xi_3, \dots) = \sigma(\xi).$$

Seja $\varepsilon > 0$.

$$\left| E(f)|_{\xi^j} - E(f)|_{\xi} \right| = \left| \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi^j)\})} \sum_{\substack{\eta^j \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta^j) = \sigma(\xi^j)}} f(\eta^j) - \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) \right|$$

Como $\xi_2^j \rightarrow \xi_2$, então existe $j_0(2)$ tal que $\xi_2^j = \xi_2$, para $j \geq j_0(2)$. Então para $j \geq j_0(2)$ temos que

$$\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\}) = \#\{x \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(x, \xi_2) = 1\} = \#\{x \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(x, \xi_2^j) = 1\} = \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi^j)\})$$

Então seja $k = \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\}) = \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi^j)\})$, para todo $j \geq j_0(2)$. Deste modo

$$\left| E(f)|_{\xi^j} - E(f)|_{\xi} \right| = \left| \frac{1}{k} \sum_{\substack{\eta^j \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta^j) = \sigma(\xi^j)}} f(\eta^j) - \frac{1}{k} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) \right|$$

Fixado $j \geq j_0(2)$. Sejam $\{\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^k\} = \{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} : \sigma(\eta) = \sigma(\xi)\}$ e $\{\eta^{j1}, \eta^{j2}, \dots, \eta^{jk}\} = \{\eta^j \in \Omega_{\mathcal{A}} : \sigma(\eta^j) = \sigma(\xi^j)\}$ para cada j . Então

$$\left| E(f)|_{\xi^j} - E(f)|_{\xi} \right| = \left| \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k f(\eta^{jl}) - \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k f(\eta^l) \right| = \frac{1}{k} \left| \sum_{l=1}^k f(\eta^{jl}) - f(\eta^l) \right| \quad (*)$$

Temos que $\sigma(\eta^{jl}) = \sigma(\xi^j) \xrightarrow{j} \sigma(\xi) = \sigma(\eta^l)$. Deste modo $\eta_i^{jl} \xrightarrow{j} \eta_i^l = \xi_i$, para $i \geq 2$ e $l = 1, \dots, k$. Observe também que, para $j \geq j_0(2)$ fixado, temos

$$\eta_1^l, \eta_1^{jl} \in \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(x, \xi_2^j) = 1\} = \{x \in \mathcal{G} : \mathcal{A}(x, \xi_2) = 1\}, \forall l = 1, \dots, k.$$

Portanto em (*), podemos supor que $\eta_1^{jl} = \eta_1^l$, para $l = 1, \dots, k$. Assim, como $\eta_i^{jl} \xrightarrow{j} \eta_i^l$, $i \geq 2$, então temos que $\eta^{jl} \xrightarrow{j} \eta^l$. Como $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$, então $f(\eta^{jl}) \xrightarrow{j} f(\eta^l)$, para cada l . E assim existe $j_0 \geq j_0(2)$ tal que $|f(\eta^{jl}) - f(\eta^l)| < \varepsilon$, para todo $l = 1, \dots, k$.

Para $j \geq j_0$ temos

$$\left| E(f)|_{\xi^j} - E(f)|_{\xi} \right| = \frac{1}{k} \left| \sum_{l=1}^k f(\eta^{jl}) - f(\eta^l) \right| \leq \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \left| f(\eta^{jl}) - f(\eta^l) \right| < \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \varepsilon = \varepsilon$$

Queremos mostrar agora que E é uma esperança condicional positiva de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ em $\mathcal{R} = \text{Im}\alpha$. Para isso devemos provar que:

- $E : C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}})$ é linear

Sejam f e g em $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} E(f+g)\Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} (f+g)(\eta) = \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \left(\sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) + \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} g(\eta) \right) = \\ &= E(f)\Big|_{\xi} + E(g)\Big|_{\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda f)\Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} (\lambda f)(\eta) = \lambda \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) = \\
&= \lambda E(f)\Big|_{\xi}
\end{aligned}$$

- E é positiva

Seja $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})^+$, ou seja, $f(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Deste modo a soma $\sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta)$ é

positiva e portanto $E(f)\Big|_{\xi} = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\mu) = \sigma(\xi)}} f(\mu) \geq 0, \forall \xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$.

- $E^2 = E$

$$\begin{aligned}
E^2(f)\Big|_{\xi} &= E(E(f))\Big|_{\xi} = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} E(f)\Big|_{\eta} = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} \left(\frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\eta)\})} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\mu) = \sigma(\eta)}} f(\mu) \right) = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} \left(\frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\mu) = \sigma(\xi)}} f(\mu) \right) = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \cdot \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\}) \cdot \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\mu) = \sigma(\xi)}} f(\mu) = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\mu \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\mu) = \sigma(\xi)}} f(\mu) = E(f)\Big|_{\xi}
\end{aligned}$$

- $\text{Im} E = \mathcal{R} = \text{Im} \alpha$

Seja $g \in \mathcal{R}$, então existe $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$ tal que $g = \alpha(f) = f \circ \sigma$. Então, para $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ temos

$$\begin{aligned}
E(g)\Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} g(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\sigma(\eta)) = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\sigma(\xi)) = \\
&= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \cdot \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\}) \cdot f(\sigma(\xi)) = \\
&= f(\sigma(\xi)) = (f \circ \sigma)(\xi) = g(\xi)
\end{aligned}$$

Portanto $g \in \text{Im}E$.

Seja $E(f) \in \text{Im}E$. Tome $g : \Omega_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} f(\eta) & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}) \\ 0 & , \text{ se } \xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}) \end{cases}$$

Queremos provar primeiramente que $g \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Sejam ξ e $(\xi^j)_j \in \Omega_{\mathcal{A}}$ com $\xi^j \rightarrow \xi$. Queremos mostrar que $g(\xi^j) \rightarrow g(\xi)$.

Se $\xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então existe j_0 tal que $\xi^j \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}}), \forall j \geq j_0$. De fato, temos que $\xi_j \rightarrow \xi$, então existe $j_0(1)$ tal que $\xi_1^j = \xi_1$, para $j \geq j_0(1)$. E como $\xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então existe $x \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 1$, logo para $j \geq j_0(1)$ temos $\mathcal{A}(x, \xi_1) = \mathcal{A}(x, \xi_1^j) = 1$ e portanto $\xi^j \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$. Deste modo, com o mesmo raciocínio da primeira parte desta proposição prova-se que $g(\xi^j) \rightarrow g(\xi)$.

Se $\xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então existe j_0 tal que $\xi_j \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, para $j \geq j_0$. De fato, como $\xi_j \rightarrow \xi$, então existe $j_0(1)$ tal que $\xi_1^j = \xi_1$, para $j \geq j_0(1)$. E como $\xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então para todo $x \in \mathcal{G}$ temos $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 0$. Logo, para $j \geq j_0(1)$ e para todo $x \in \mathcal{G}$, temos $\mathcal{A}(x, \xi_1) = \mathcal{A}(x, \xi_1^j) = 0$ e portanto $\xi^j \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$. Assim, para $j \geq j_0(1)$, temos $0 = g(\xi^j) \rightarrow 0 = g(\xi)$.

Mostremos agora que $E(f) = \alpha(g)$. Seja $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$.

$$\alpha(g(\xi)) = g(\sigma(\xi)) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) = E(f)\Big|_{\xi}$$

Portanto $\text{Im}E = \text{Im}\alpha$.

- $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$

Lembrando que $\mathbf{1} \in C(\Omega_A)$ é a função tal que $\mathbf{1}(\xi) = 1$ para todo $\xi \in \Omega_A$.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1})\Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} \mathbf{1}(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} 1 = \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \cdot \#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\}) = 1 \end{aligned}$$

- $E(f.g) = E(f).g$ e $E(g.f) = g.E(f)$, para toda $f \in C(\Omega_A)$ e $g \in \mathcal{R} = \text{Im}\alpha$

Sejam $\xi \in \Omega_A$ e $g \in \text{Im}\alpha$, então existe $h \in C(\Omega_A)$ tal que $g = h \circ \sigma$.

$$\begin{aligned} E(f.g)\Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} (f.g)(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta).g(\eta) = \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta).h(\sigma(\eta)) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta).h(\sigma(\xi)) = \\ &= \left(\frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} f(\eta) \right) . h(\sigma(\xi)) = E(f)\Big|_{\xi} . g(\xi) = (E(f).g)\Big|_{\xi} \end{aligned}$$

Analogamente temos que $E(g.f) = g.E(f)$. O que termina a demonstração. $\square$

Definindo $\mathcal{L} = \beta \circ E$ então pela proposição 2.7 temos que $\mathcal{L}$ é operador transferência para $(C(\Omega_A), \alpha)$.

Vamos mostrar que

$$\mathcal{L}(f)\Big|_{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \xi}} f(\eta) & , \text{ se } \xi \in \sigma(\Omega_A) \\ 0 & , \text{ se } \xi \notin \sigma(\Omega_A) \end{cases}$$

De fato, se $\xi \in \sigma(\Omega_A)$, então existe $z \in \Omega_A$ tal que $\xi = \sigma(z)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)\Big|_{\xi} &= \left(\beta \circ E(f) \right)\Big|_{\sigma(z)} = \beta \left(E(f) \circ \sigma \right)\Big|_z = \beta \left(\alpha(E(f)) \right)\Big|_{\xi} = E(f)\Big|_z = \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(z)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(z)}} f(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \xi}} f(\eta) \end{aligned}$$

Se $\xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$ então $E(f)|_{\xi} \notin \mathcal{R} = \text{Im}\alpha$. Como $\beta(E(f)) \in C_0(\sigma(\Omega_{\mathcal{A}}))$, então $\beta \circ E(f)|_{\xi} = 0$.

Finalmente temos condições de provar que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é isomorfa ao produto cruzado por endomorfismo $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Lembrando que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é a C^* -álgebra universal gerada por uma família de isometrias parciais $\{s_x\}_{x \in \mathcal{G}}$ satisfazendo as relações

$$(I) \quad 1 = \sum_{y \in \mathcal{G}} s_y s_y^* \\ (II) \quad s_x^* s_x = \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) s_y s_y^*.$$

Para demonstrar o teorema a seguir vamos introduzir algumas notações.

Dado $x \in \mathcal{G}$, considere P_x e Q_x as funções de $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ definidas por:

$$Q_x(\xi) = \mathcal{A}(x, \xi_1) \quad \text{e} \quad P_x(\xi) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \xi_1 = x \\ 0 & , \text{ se } \xi_1 \neq x \end{cases}$$

para todo $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Da definição temos que $P_x^* = P_x = P_x^2$ e $Q_x^* = Q_x = Q_x^2$. Logo são projeções.

Note que a função Q definida anteriormente por $Q(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, \xi_1)$ pode ser escrita como $Q = \sum_{x \in \mathcal{G}} Q_x$, e que Q é positiva.

Observe que, para todo $x \in \mathcal{G}$ temos que $Q_x = \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) P_y$, pois para todo $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$

$$\sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) P_y(\xi) = \mathcal{A}(x, \xi_1) = Q_x(\xi).$$

Lembrando que $\mathcal{T}(C(\Omega_{\mathcal{A}}), \alpha, \mathcal{L})$ é a C^* -álgebra universal gerada por S e $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ satisfazendo as relações $Sa = \alpha(a)S$ e $S^*aS = \mathcal{L}(a)$, para todo $a \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$, definida em 2.9.

Teorema 5.7 *A C^* -álgebra de Cuntz-Krieger $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é isomorfa ao produto cruzado $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$.*

Demonstração: Vamos construir primeiramente um $*$ -homomorfismo $\phi : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. Depois construiremos um $*$ -homomorfismo $\tilde{\psi} : C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ de maneira que $\phi \circ \tilde{\psi} = Id_{C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}}$ e $\tilde{\psi} \circ \phi = Id_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}$.

Para cada $x \in \mathcal{G}$ considere $S_x = P_x \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S$. Vamos mostrar primeiro que $Q_x = S_x^* S_x$. Temos que

$$\begin{aligned} S_x^* S_x &= S^* \alpha^*(Q)^{\frac{1}{2}} P_x^* P_x \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S = \mathcal{L}\left(\alpha^*(Q)^{\frac{1}{2}} P_x^* P_x \alpha(Q)^{\frac{1}{2}}\right) = \\ &= \mathcal{L}\left(\alpha^*(Q)^{\frac{1}{2}} \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_x^* P_x\right) = \mathcal{L}\left(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_x\right) = \mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \end{aligned}$$

Vejamos agora que $\mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) = Q_x$. Seja $\xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$ e suponha que $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} (\alpha(Q) P_x)(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} \alpha(Q)(\eta) P_x(\eta) \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} Q(\sigma(\eta)) P_x(\eta) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} Q(\xi) P_x(\eta) \\ &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} Q(\xi) = \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \#\sigma^{-1}(\{\xi\}) = 1 \end{aligned}$$

Para calcularmos $P_x(\eta)$ acima, tomamos η tal que $\eta_1 = x$. Como $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 1$, então para $\eta = (x, \xi_1, \xi_2, \dots)$ temos $\sigma(\eta) = \xi$ e $\eta \in \Omega_{\mathcal{A}}$, logo $P_x(\eta) = 1$. Então

$$\mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \Big|_{\xi} = 1 = \mathcal{A}(x, \xi_1) = Q_x(\xi)$$

Se $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 0$, então não existe $\eta \in \Omega_{\mathcal{A}}$ tal que $\sigma(\eta) = \xi$. Assim $P_x(\eta) = 0$ para todo η tal que $\sigma(\eta) = \xi$. Então obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \Big|_{\xi} &= \frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\xi\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_{\mathcal{A}} \\ \sigma(\eta) = \xi}} \alpha(Q)(\eta) P_x(\eta) = \\ &= 0 = \mathcal{A}(x, \xi_1) = Q_x(\xi) \end{aligned}$$

Se $\xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então $\mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \Big|_{\xi} = 0$ pela definição de $\mathcal{L}$. E, como $\mathcal{A}(x, \xi_1) = 0$, então:

$$\mathcal{L}(\alpha(Q) P_x) \Big|_{\xi} = 0 = \mathcal{A}(x, \xi_1) = Q_x(\xi)$$

Concluimos que, de fato, $S_x^* S_x = Q_x$.

Para facilitar a notação representaremos $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ por A quando for conveniente.

Vejamos que $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Seja $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$, então $\alpha(\mathbf{1})(\xi) = (\mathbf{1} \circ \sigma)(\xi) = \mathbf{1}(\sigma(\xi)) = 1$.

Então o ideal bilateral gerado por $\mathcal{R}$ é igual a A , ou seja, $\overline{A\mathcal{R}A} = A$. De fato, se $f \in A$ e $\alpha(\mathbf{1}) \in \mathcal{R}$, então

$$f \cdot \alpha(\mathbf{1}) = f \cdot \mathbf{1} = f \in \overline{A\mathcal{R}A}.$$

Vamos provar agora que $S_y S_y^* \equiv P_y$ módulo $\mathcal{I}$.

Note que $S_y S_y^* = P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S S^* \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y \in \overline{A S S^* A}$. Seja $b \in C(\Omega_A)$. Primeiramente vejamos que $S_y S_y^* b S = P_y b S$ para $y \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} S_y S_y^* b S &= P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S S^* \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y b S = P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} S \mathcal{L} \left(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y b \right) = \\ &= P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \alpha \left(\mathcal{L} \left(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y b \right) \right) S = P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} E \left(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y b \right) S \end{aligned}$$

Esta última igualdade é justificada pela construção de $\mathcal{L}$, isto é, $\mathcal{L} = (\alpha|_{\mathcal{J}})^{-1} \circ E$.

A seguir usaremos que E é uma esperança condicional. Utilizando 2.3 (iii) e observando que $\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{R} = \text{Im} \alpha$, temos:

$$\begin{aligned} S_y S_y^* b S &= P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} E \left(\alpha(Q)^{\frac{1}{2}} P_y b \right) S = P_y \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} \alpha(Q)^{\frac{1}{2}} E(P_y b) S = \\ &= P_y \alpha(Q) E(P_y b) S \end{aligned}$$

Vejamos que $P_y \alpha(Q) E(P_y b) = P_y b$. Seja $\xi \in \Omega_A$ e suponha $\xi_1 = y$.

$$\begin{aligned} \left(P_y \alpha(Q) E(P_y b) \right) (\xi) &= (P_y)(\xi) \cdot \alpha(Q)(\xi) \cdot E(P_y b)(\xi) = 1 \cdot \alpha(Q)(\xi) \cdot E(P_y b)(\xi) = \\ &= (Q \circ \sigma(\xi)) \cdot (\alpha \circ \mathcal{L})(P_y b)(\xi) = (Q \circ \sigma(\xi)) \cdot \mathcal{L}(P_y b)(\sigma(\xi)) = \\ &= Q(\sigma(\xi)) \cdot \left(\frac{1}{\#\sigma^{-1}(\{\sigma(\xi)\})} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} P_y b(\eta) \right) = \\ &= Q(\sigma(\xi)) \cdot \frac{1}{Q(\sigma(\xi))} \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} P_y b(\eta) = \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} P_y b(\eta) \end{aligned}$$

Observando que

$$P_y b(\xi) = \begin{cases} b(\xi) & , \text{ se } \xi_1 = y \\ 0 & , \text{ se } \xi_1 \neq y \end{cases}$$

e que estamos sob a hipótese de que $\xi_1 = y$, então temos:

$$\left(P_y \alpha(Q) E(P_y b) \right) (\xi) = \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi)}} P_y b(\eta) = \sum_{\substack{\eta \in \Omega_A \\ \sigma(\eta) = \sigma(\xi) \\ \eta_1 = y}} b(\eta) = b(\xi) = P_y b(\xi)$$

Se $\xi_1 \neq y$ então $\left(P_y \alpha(Q) E(P_y b) \right) (\xi) = P_y(\xi) \cdot \alpha(Q)(\xi) \cdot E(P_y b)(\xi) = 0 = P_y b(\xi)$ pois $P_y(\xi) = 0$. Portanto $\left(P_y \alpha(Q) E(P_y b) \right) (\xi) = P_y b(\xi)$ para todo $\xi \in \Omega_A$.

Portanto $S_y S_y^* b S = P_y b S$ e donde concluímos que $S_y S_y^* \equiv P_y$ módulo $\mathcal{I}$.

Para provar a relação (I) temos claramente que

$$(\mathbf{1}, \sum_{y \in \mathcal{G}} S_y S_y^*) \in A \times \overline{A S S^* A}.$$

Seja $b \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Como feito anteriormente, temos que $S_y S_y^* b S = P_y b S$. Logo

$$\sum_{y \in \mathcal{G}} S_y S_y^* b S = \sum_{y \in \mathcal{G}} P_y b S.$$

Seja $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$, então

$$\sum_{y \in \mathcal{G}} P_y(\xi) \stackrel{y=\xi_1}{=} P_{\xi_1}(\xi) = 1.$$

Logo $\sum_{y \in \mathcal{G}} S_y S_y^* b S = \sum_{y \in \mathcal{G}} P_y b S = \mathbf{1} b S$ e portanto $\mathbf{1} \equiv \sum_{y \in \mathcal{G}} S_y S_y^*$ módulo $\mathcal{I}$.

Veremos agora que, para todo $x \in \mathcal{G}$,

$$S_x^* S_x = Q_x \equiv \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) S_y S_y^*$$

módulo $\mathcal{I}$, ou seja, o par $(Q_x, \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) S_y S_y^*)$ é uma redundância.

Temos que o par $(Q_x, \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) S_y S_y^*) \in A \times \overline{A S S^* A}$.

Seja $b \in A$.

$$\sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) S_y S_y^* b S = \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) P_y b S = Q_x b S$$

Portanto temos $S_x^* S_x = Q_x \equiv \sum_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{A}(x, y) S_y S_y^*$ módulo $\mathcal{I}$.

Pela propriedade universal de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ existe um único $*$ -homomorfismo

$$\phi : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$$

que leva cada isometria parcial que gera $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, s_x , na classe de S_x em $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$.

Agora vamos definir a função no sentido contrário.

Vamos usar que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é o produto cruzado parcial $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes^p \mathbb{F}$. Do corolário 6.2 de [22] temos que a fibra sobre o elemento neutro do grupo B_e é $\overline{\text{span}\{s_t s_t^* : t \in \mathbb{F}\}}$ e é isomorfo a $C(\Omega_{\mathcal{A}})$.

Temos que o conjunto $\{S_x S_x^* : x \in \mathcal{G}\} \subseteq C(\Omega_{\mathcal{A}})$ é separante. Então por Stone-Weierstrass $\overline{\text{span}\{S_x S_x^* : x \in \mathcal{G}\}} = C(\Omega_{\mathcal{A}})$. Deste modo existe uma identificação natural entre $s_x s_x^*$ e $S_x S_x^*$.

Assim temos as identificações $s_x^* s_x = S_x^* S_x = Q_x$ e $s_x s_x^* = S_x S_x^* = P_x$.

Definindo $s = \alpha(Q)^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x$ vamos provar que s satisfaz 2.9 (i) (ii).

Primeiramente vamos mostrar que $sf = \alpha(f)s$, para todo $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$.

Vejamos que $\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcup_{x \in \mathcal{G}} X_x$. De fato, dado $\xi \in X_x \cap X_y$ temos $\xi_1 = x = y$, logo a união é disjunta. E dado $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$ temos que $\xi \in X_{\xi_1}$.

Então para toda $f \in C(\Omega_{\mathcal{A}})$ temos que $f = \sum_{x \in \mathcal{G}} f_x$, onde $f_x = f|_{X_x} \in C_0(X_x)$.

Logo basta mostrar para cada $f \in C_0(X_x)$.

Lembremos que, para $x \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \alpha_x : C_0(X_{x^{-1}}) &\longrightarrow C_0(X_x) \\ f &\longmapsto f \circ \sigma_x^{-1} \end{aligned}$$

e que $\alpha_x^{-1} = \alpha_{x^{-1}}$, pois $\alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}}(f) = \alpha_x(f \circ \sigma_x) = f \circ \sigma_x \circ \sigma_x^{-1} = f$ e também $\alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x(f) = \alpha_{x^{-1}}(f \circ \sigma_x^{-1}) = f \circ \sigma_x^{-1} \circ \sigma_x = f$.

Utilizando a estrutura de produto cruzado parcial de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, temos para $x \in \mathcal{G}$ que,

$$\alpha_x(f) = s_x f s_x^* \text{ com } f \in C_0(X_{x^{-1}}).$$

Então $\alpha_x(f)s_x = s_x f s_x^* s_x = s_x f Q_x = s_x f$, pois Q_x é a projeção em $C_0(X_{x^{-1}})$.

Portanto $s_x f = \alpha(f)s_x$ e pela definição de s temos que $sf = \alpha(f)s$.

Mostraremos agora que $s^* f s = \mathcal{L}(f)$.

Note que, para $f \in C_0(X_x)$ e $g = \alpha_x^{-1}(f) \in C_0(X_{x^{-1}})$ temos

$$s_x g s_x^* = \alpha_x(g) \Rightarrow s_x \alpha_x^{-1}(f) s_x^* = f.$$

Seja $\xi \in \Omega_{\mathcal{A}}$. Se $\xi \in \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então existe $x \in \mathcal{G}$ tal que $\xi \in X_{x^{-1}}$. Seja $f \in C_0(X_x)$. Temos que

$$\begin{aligned} s^* f s &= \sum_{x,y \in \mathcal{G}} s_x^* \alpha(Q)^{-1} f s_y = \sum_{x,y \in \mathcal{G}} s_x^* s_x \alpha_x^{-1}(\alpha_x(Q)^{-1} f) s_x^* s_y \\ &\stackrel{4.2}{=} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* s_x \alpha_x^{-1}(\alpha_x(Q)^{-1} f) s_x^* s_x = Q^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* s_x \alpha_x^{-1}(f) s_x^* s_x \\ &= Q^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* f s_x = Q^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* s_x \alpha_x^{-1}(f) \\ &= Q^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} Q_x \alpha_x^{-1}(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^*fs(\xi) &= Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} \underbrace{Q_x(\xi)}_{=1} \alpha_x^{-1}(f)(\xi) = Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} \alpha_x^{-1}(f)(\xi) \\
&= Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} f \circ \sigma_x(\xi) = Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} f(\sigma^{-1}(\xi)) \\
&= \frac{1}{\#\sigma(\{\xi\})} \sum_{\sigma(\eta)=\xi} f(\eta) = \mathcal{L}(f)(\xi)
\end{aligned}$$

Se $\xi \notin \sigma(\Omega_{\mathcal{A}})$, então observando que $Q_x(\xi) = \mathcal{A}(x, \xi_1) = 0$, para todo $x \in \mathcal{G}$, temos

$$\begin{aligned}
s^*fs(\xi) &= Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* s_x \alpha_x^{-1}(f_x)(\xi) = Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x^* s_x(\xi) \alpha_x^{-1}(f_x)(\xi) \\
&= Q(\xi)^{-1} \sum_{x \in \mathcal{G}} \underbrace{Q_x(\xi)}_{=0} \alpha_x^{-1}(f_x)(\xi) = 0
\end{aligned}$$

Portanto $s^*fs = \mathcal{L}(f)$.

Então pela propriedade universal de $\mathcal{T}(C(\Omega_{\mathcal{A}}), \alpha, \mathcal{L})$ existe um único $*$ -homomorfismo

$$\psi : \mathcal{T}(C(\Omega_{\mathcal{A}}), \alpha, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \simeq C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes^p \mathbb{F}$$

que é a identidade quando restrito a $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ e $\psi(S) = s$.

Vamos mostrar que ψ anula o ideal $\mathcal{I}$ gerado pelas diferenças $a - k$, onde o par (a, k) é redundância tal que $a \in \overline{A\mathcal{R}A} = A$. Como $k \in \overline{ASS^*A}$, então $\psi(k) \in \overline{Ass^*A}$.

Lembrando que, da estrutura de produto cruzado parcial, a fibra B_t é igual a As_t . Assim se $t = xy^{-1}$, então $B_{xy^{-1}} = As_{xy^{-1}} = As_x s_y^*$, para $x \neq y$. Logo

$$\begin{aligned}
Ass^*A &= A\alpha(Q)^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x \alpha(Q)^{-1/2} \sum_{y \in \mathcal{G}} s_y^* A = \underbrace{A\alpha(Q)^{-1}}_{\in A} \sum_{x, y \in \mathcal{G}} s_x s_y^* A \subseteq \\
&\subseteq \sum_{x, y \in \mathcal{G}} As_x s_y^* A \subseteq \sum_{x, y \in \mathcal{G}} As_x s_y^*
\end{aligned}$$

sendo a última passagem dada por 3.1 (i).

Segue então que $\sum_{x, y \in \mathcal{G}} As_x s_y^*$ é fechado pois

$$\sum_{x, y \in \mathcal{G}} As_x s_y^* = \sum_{x \in \mathcal{G}} As_x s_x^* + \sum_{x \neq y} As_x s_y^* = A + \sum_{x \neq y} B_{xy^{-1}}$$

Assim temos

$$\psi(k) \in \overline{Ass^*A} \subseteq \sum_{x,y \in \mathcal{G}} As_x s_y^* = A + \sum_{x \neq y} As_x s_y^*$$

Então $\psi(k)$ deve ser da forma $\psi(k) = \sum_{x,y \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^*$, com $k_{xy} \in A$.

Como (a, k) é uma redundância temos que $abS = kbS$, para todo $b \in A$. Então $\psi(a)\psi(b)\psi(S) = \psi(k)\psi(b)\psi(S)$. Como $\psi|_A = Id_A$, então $abs = \psi(k)bs$, para todo $b \in A$. Usando a forma de $\psi(k)$ e a definição de s temos

$$ab\alpha(Q)^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x = \sum_{x,y,z \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* b\alpha(Q)^{-1/2} s_z$$

Como b é qualquer e $\alpha(Q)^{-1/2} \in A$, então podemos substituir $b\alpha(Q)^{-1/2}$ por b .

$$ab \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x = \sum_{x,y,z \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* b s_z$$

Observe que $s_y^* b s_z = 0$ quando $y \neq z$ pois $s_y^* b s_z = s_y^* s_z \alpha^{-1}(b) \stackrel{4.2}{=} 0$. Então

$$ab \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x = \sum_{x,y \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* b s_y.$$

Portanto na fibra sobre x temos

$$abs_x = \sum_{y \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* b s_y \quad \text{para todo } x \in \mathcal{G}.$$

Tome $b = P_z = s_z s_z^* \in A$, com $z \in \mathcal{G}$. Temos então que

$$aP_z s_x = \sum_{y \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* s_z s_z^* s_y = k_{xz} s_x s_z^* s_z s_z^* s_z = k_{xz} s_x Q_z$$

Quando $x \neq z$, o lado esquerdo da igualdade se anula e obtemos $0 = k_{xz} s_x Q_z$.

Portanto

$$0 = k_{xz} s_x Q_z s_z^* = k_{xz} s_x s_z^* s_z s_z^* \stackrel{1.12}{=} k_{xz} s_x s_z^*.$$

Segue que $\psi(k) = \sum_{x \in \mathcal{G}} k_{xx} s_x s_x^* = \sum_{x \in \mathcal{G}} k_{xx} P_x$. E também, para todo $b \in C(\Omega_A)$

$$abs_x = \sum_{y \in \mathcal{G}} k_{xy} s_x s_y^* b s_y = k_{xx} s_x s_x^* b s_x,$$

e multiplicando por s_x^* à direita temos

$$abP_x = k_{xx}s_x s_x^* b s_x s_x^* = k_{xx}bP_x^2 = k_{xx}bP_x$$

Agora tomando $b = 1$ temos $aP_x = k_{xx}P_x$. Então

$$\psi(a) = a = \sum_{x \in \mathcal{G}} aP_x = \sum_{x \in \mathcal{G}} k_{xx}P_x = \psi(k)$$

e portanto, $\psi(a - k) = 0$. Assim concluímos que ψ anula $\mathcal{I}$ e, fazendo o quociente temos um $*$ -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi} : C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \\ \dot{\widehat{S}}_x \dot{\widehat{S}}_x^* & \longmapsto & s_x s_x^* \\ \dot{S} & \longmapsto & s \end{array}$$

que é a inversa de

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N} \\ s_x & \longmapsto & \dot{S}_x \end{array}$$

Para verificar que $\phi \circ \tilde{\psi} = Id_{C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}}$ observe que $\tilde{\psi}$ restrito a $C(\Omega_{\mathcal{A}})$ é a identidade, então só precisamos verificar em $\dot{S}$:

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{\psi}(\dot{S})) &= \phi(s) = \phi(\alpha(Q)^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} s_x) = \psi(P_x \alpha(Q)^{1/2} s) = \widehat{\alpha(Q)}^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} \dot{S}_x \\ &= \widehat{\alpha(Q)}^{-1/2} \sum_{x \in \mathcal{G}} \dot{P}_x \widehat{\alpha(Q)}^{1/2} \dot{S} = \dot{S} \sum_{x \in \mathcal{G}} \dot{P}_x = \dot{S} \end{aligned}$$

E para mostrar que $\tilde{\psi} \circ \phi = Id_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}$, basta verificar nos geradores de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\phi(s_x)) &= \tilde{\psi}(\dot{S}_x) = \tilde{\psi}(\dot{P}_x \alpha(Q)^{1/2} \dot{S}) = \psi(P_x \alpha(Q)^{1/2} s) = P_x \alpha(Q)^{1/2} s \\ &= P_x \alpha(Q)^{1/2} \alpha(Q)^{-1/2} \sum_{y \in \mathcal{G}} s_y = P_x \sum_{y \in \mathcal{G}} s_y = \sum_{y \in \mathcal{G}} s_x s_x^* s_y = s_x s_x^* s_x = s_x \end{aligned}$$

Concluímos portanto que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ é isomorfo a $C(\Omega_{\mathcal{A}}) \rtimes_{\alpha, \mathcal{L}} \mathbb{N}$. □

Referências Bibliográficas

- [1] F. Abadie, *On partial actions and groupoids*, Proc. Am. Math. Soc., 132, (2004), (4) 1037–1047.
- [2] B. Blackadar, *Shape theory for C^* -algebras*, Math. Scand., 56, (1985), 249–275.
- [3] G. Boava, *Caracterizações da C^* -álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais*, Dissertação de mestrado, UFSC, (2007).
- [4] L. G. Brown e J. A. Mingo e N. Shen, *Quasi Multipliers and Embeddings of Hilbert C^* -bimodules*, Can. J. Math., 46, (1994), (6), 1150–1174.
- [5] J. B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, (1990).
- [6] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys., 57, (1977).
- [7] J. Cuntz e W. Krieger, *A Class of C^* -algebras and Topological Markov Chains*, Inventiones Math., 56, (1980), 251–268.
- [8] D. Dias, *O Produto Cruzado de C^* -álgebras por Grupos Mediáveis*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, (2001).
- [9] R. Exel, *Amenability for Fell Bundles*, J. Reine Angew. Math., 492, (1997), 41–73.
- [10] R. Exel, *A New Look at the Crossed-Product of a C^* -algebra by an Endomorphism*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 23, (2003), 1733–1750.
- [11] R. Exel e M. Laca, *Cuntz-Krieger Algebras for Infinite Matrices*, J. reine angew. Math., 512, (1999), 119–172.

- [12] R. Exel, *Twisted partial actions, a classification of regular C^* -algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc., 74, (1997), 417–443.
- [13] J. M. G. Fell e R. S. Doran, *Representation of $*$ -algebras, locally compact groups and Banach $*$ -algebraic bundles*, Pure and Applied Mathematics, vol. 125 e 126, Academic Press, (1988).
- [14] A. an Huef e I. Raeburn, *The ideal structure of Cuntz-Krieger algebras*, Ergodic Theory Dyn. Syst., 17, (1997), 611–624.
- [15] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1974).
- [16] K. McClanahan, *K-theory for partial crossed products by discrete groups*, J. Funct. Anal., 130, (1995), 77–117.
- [17] G.J. Murphy, *Crossed Products of C^* -algebras by endomorphisms*, Integral Equations Oper. Theory, 24, (1996), 298–319.
- [18] G.J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, London, (1990).
- [19] F. Orfali, *O Produto Cruzado de uma C^* -álgebra por Endomorfismos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, (2004).
- [20] G. K. Pedersen, *Analysis Now*, Springer-Verlag, 118, New York (1989).
- [21] M. V. Pimsner, *A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbf{Z}$* , Fields Inst. Commun., 12, (1997), 189–212.
- [22] J. Quigg e I. Raeburn, *Characterisations of crossed products by partial actions*, J. Oper. Theory, 37, (1997), 311–340.