Uma Generalização de Γ -Estruturas

Genaro Pablo Zamudio Chauca

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Ivan Struchiner

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do
CNPq

São Paulo, abril de 2018

Uma Generalização de Γ -Estruturas

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 20/04/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Struchiner (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Cristian Ortiz - IME-USP
- Prof. Dr. Rui Loja Fernandes - UI
- Prof^ª. Dr^ª. Maria Amelia Salazar Pinzón - UFF
- Prof. Dr. Pedro Walmsley Frejlich - UFRGS

Agradecimentos

Tem muitas pessoas as quais devo agradecer por ter me ajudado a completar essa jornada. Em primeiro lugar agradecer a minha família, meus pais Abraham e Rosa, meus irmãos Abraham e Sofia e meu sobrinho Jano. Espero que essa conquista possa enorgulhecer vocês e ela seja uma forma de retribuição a todo o carinho e afeto que me deram.

Agradeço o apoio incondicional de Denisse, a minha companheira nessa longa caminhada que é a vida. Já são muitas experiencias que temos vivido juntos e sei que elas me tornaram uma melhor pessoa. Obrigado por compartilhar comigo essa alegria tão particular de viver.

Agradeço aos amigos que encontrei em São Paulo: Julio Bueno, Julio Malo, Gabriela, Carolina, Jose e Diana, German, Charlie, Elkin, Harry, Edu, Aura, Jorgito, Sergio, e aos mais próximos Alex, Diego e Diana. Obrigado pelas conversas, cafés, cervejas e por fazer me sentir em casa.

Agradeço ao meu orientador Ivan Struchiner. Sinto que Ivan foi aquele irmão mais velho que me ensino e me ajudou na base das suas experiencias. Provavelmente esse trabalho poderia ter sido bem mais sucedido se eu tivera recolhido todas as indicações do Ivan, mas também acredito que eu sentiria ele menos o meu trabalho. Obrigado Ivan por essa liberdade.

Agradeço aos colegas, professores e funcionários do IME-USP. Meu passo pelo instituto foi uma das melhores experiencias que já tive, e sou muito afortunado pelas excelentes pessoas que conheci.

Gostaria dedicar esse trabalho à memória do Prof. Holger Valqui. Foi muito afortunado de conhecer ao *Profe Valqui* quando começava a minha vida acadêmica e devo a ele grande parte da minha formação como cientista. Nunca vou esquecer a sua frase: “*Quien realmente entiende las cosas puede explicarlas de la manera más sencilla posible*”.

Finalmente, e não menos importante, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxilio financeiro durante a realização deste trabalho.

Resumo

ZAMUDIO CHAUCA, Genaro Pablo. **Uma Generalização de Γ -Estruturas**. 2018. viii + 101 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Já é bem estabelecido na geometria diferencial o uso de fibrados principais com grupo de estrutura para a definição e o estudo de algumas estruturas geométricas na base do fibrado. O uso de fibrados principais com grupoide de estrutura na definição de estruturas geométricas sobre variedades não tem sido muito explorada. O único exemplo do uso desses fibrados para definir estruturas geométricas foi dado Haefliger. Ele mostrou que folheações regulares sobre uma variedade estão em correspondência com uma classe de fibrados principais com grupoide de estrutura, e usando a classificação de fibrados principais ele obteve a classificação de folheações regulares a menos de homotopia sobre uma variedade aberta. Neste trabalho propomos uma definição a qual generaliza as folheações regulares para produzir uma classe de fibrados vetoriais ancorados e provamos para eles um teorema de classificação no espírito do teorema de Haefliger. Depois aplicamos a teoria desenvolvida aos grupoides com formas multiplicativas e mostramos como a nossa definição permite trasladar a geometria guardada na forma multiplicativa para a base do fibrado principal. Em seguida voltamos para o caso de folheações regulares e mostramos que a nossa proposta permite incluir novas estruturas transversais à folheação.

Palavras-chave: Grupoides de Lie, fibrados principais, Γ -estruturas, formas multiplicativas, folheações regulares, geometria transversal.

Abstract

ZAMUDIO CHAUCA, Genaro Pablo. **A Generalization of Γ -Structures**. 2018. viii + 101 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

It is well known in differential geometry the use of principal bundles with structure group to define and study some geometric structures on the base of the bundle. The use of principal bundle with a structure groupoid has not been extensively studied yet. The only example using this kind of bundle was provided by Haefliger in his study of regular foliations. Haefliger showed that regular foliations can be identified with some class of principal bundles with structure groupoid, then by using the classifying theorem of principal bundles he arrived to the classification theorem of regular foliations up to homotopy on open manifolds. In this work we will propose a definition that generalizes regular foliations to include anchored vector bundles and, will prove a classification theorem for these structures in the spirit of Haefliger's theorem. Then we will apply this theory to groupoids with multiplicative forms and show that our definition permits to transfer the geometry encoded in the multiplicative form to the base of the bundle. Then we will back to the case of regular foliations and show that our proposal allow new transversal structures to the foliation.

Keywords: Lie groupoids, principal bundles, Γ -structures, multiplicative forms, regular foliations, transversal geometry.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos de Lie e $\mathcal{G}$-fibrados principais	5
1.1 Grupos de Lie	5
1.2 Algebroides de Lie	8
1.2.1 Algebroides de Lie de um grupo de Lie	8
1.3 $\mathcal{G}$ -fibrados principais	10
1.3.1 Ciclos de Haefliger	13
1.3.2 $\mathcal{G}$ -morfismos e $\mathcal{G}$ -homotopias	15
1.3.3 Pullback de $\mathcal{G}$ -fibrados principais	16
1.4 Espaços classificantes	19
1.4.1 Construção do $\mathcal{G}$ -fibrado universal	22
1.4.2 Classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais	23
1.5 $\mathcal{G}$ -fibrados associados	27
1.6 Equivalência de Morita	30
1.7 Biseções e pseudogrupos generalizados	32
1.7.1 Grupo de Lie étale gerado por um pseudogrupo generalizado	34
1.7.2 Relação entre um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal e o seu $\mathcal{G}$ -fibrado principal associado .	38
1.7.3 Gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal	40
2 Fibrados vetoriais ancorados e aplicações transversais	43
2.1 Fibrados vetoriais ancorados	43
2.1.1 Pullback de fibrados vetoriais ancorados	44
2.2 Jatos e classificação de aplicações transversais a um fibrado vetorial ancorado . . .	46
2.2.1 Teorema de classificação de aplicações transversais a fibrados vetoriais anco- rados <i>à la</i> Gromov-Phillips	50
3 Uma generalização de Γ-estruturas	53
3.1 Γ -estruturas clássicas e estruturas de Haefliger	53
3.2 Γ -fibrados vetoriais ancorados	57
3.2.1 Classificação de Γ -f.v.a.	65
3.3 $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita	69
3.3.1 Pseudogrupo de soluções de uma forma multiplicativa	72

4	Γ-folheações	77
4.1	Classificação de Γ -folheações	81
4.2	Classificação de folheações transversalmente homogêneas	85
4.2.1	Conexões de Cartan	85
4.2.2	Folheações regulares transversalmente homogêneas	87
A	Noções de espaços étales	89
B	Formas básicas em uma submersão sobrejetora	93
	Referências Bibliográficas	97
	Índice Remissivo	101

Introdução

A noção de folheação regular foi introduzida por Ehresmann e Reeb[ER44], como uma generalização natural da partição de uma variedade pelas curvas integrais de um campo vetorial. Sobre uma variedade topológica B de dimensão n , uma estrutura de variedade folheada de codimensão k é definida por um atlas maximal $f_i : U_i \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow B$ tal que $f_i(U_i)$ cobrem B e as mudanças de coordenadas são homeomorfismos da forma $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi(x, y))$, onde $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. A estrutura será dita diferenciável ou analítica se as mudanças de coordenadas são diferenciáveis ou analíticas.

Em seguida Ehresmann generalizou esta noção substituindo $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$ por um par de espaços topológicos M e F quaisquer e as mudanças de coordenadas sendo elementos de um pseudogrupo de homeomorfismos locais do produto $M \times F$ localmente da forma $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi_x(y))$; onde φ e ψ_x pertencem respetivamente aos pseudogrupos de automorfismos locais de M e F .

Haefliger em [Hae58] utilizou o grupoide $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ de germes de transformações locais de $\mathbb{R}^k$ para definir e estudar propriedades de folheações regulares de codimensão k em uma variedade. De fato, Haefliger mostrou que folheações regulares em uma variedade B se correspondem com uma classe de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais sobre B . O trabalho de Haefliger teve foco no estudo da existência e da deformação dessas estruturas. Por exemplo, Haefliger mostrou em [Hae58] que não existe folheação analítica de codimensão um sobre a esfera S^3 . Gostaríamos apontar que o ponto de vista de Haefliger inclui naturalmente as Γ -estruturas em B como folheações de codimensão zero, e mais particularmente as G -estruturas integráveis, para G um subgrupo do $GL(n, \mathbb{R})$ e com $n = \dim B$.

Após alguns anos, e depois da chegada dos teoremas de classificação de submersões por Phillips em [Phi67] e de classificação de aplicações transversais a uma folheação por Phillips em [Phi70] e Gromov em [Gro69], Haefliger em [Hae70] e [Hae71a] apresentou o teorema de classificação a menos de homotopia de folheações regulares sobre uma variedade aberta. Isto equivale a responder a seguinte pergunta: Dadas duas folheações da mesma codimensão sobre uma variedade, quando pode-se deformar uma delas na outra através de folheações da mesma codimensão?

Ademais, o ponto de vista de Haefliger para definir folheações regulares permite estudar também, apos a escolha de pseudogrupos específicos de transformações locais de $\mathbb{R}^k$, certas geometrias transversais à folheação como estruturas simpléticas ou métricas riemannianas. A historia da classificação de folheações regulares em variedades não necessariamente abertas foi completada por Thurston em [Thu74] para folheações de codimensão maior que um e em [Thu76] para folheações de codimensão um. Thurston usa uma definição de equivalente de folheação regular à dada por Haefliger mas um método diferente de prova do teorema de classificação de folheações, pois os teoremas de Phillips e Gromov só são validos para variedades abertas.

O objetivo deste trabalho é utilizar os grupoides de Lie na definição e no estudo de estruturas geométricas sobre variedades, seguindo a filosofia de Haefliger no seu estudo de folheações regulares.

Grupoides de Lie são uma generalização de grupos de Lie e de variedades diferenciáveis. Como já é padrão na literatura, os grupos de Lie podem ser pensados como transformações de simetria de uma variedade; de forma semelhante os grupoides de Lie podem ser pensados como transformações de simetria de um espaço fibrado.

Na teoria de grupoides de Lie o conceito de transformação local se generaliza naturalmente para o conceito de biseção local, e pseudogrupos de transformações locais se generalizam para pseudogrupos de biseções locais, os quais são chamados de pseudogrupos generalizados. Desde esse ponto de vista os pseudogrupos de transformações locais de uma variedade M se identificam com os pseudogrupos generalizados do grupoide de pares de M , um dos grupoides mais simples na teoria de grupoides de Lie.

Nosso objetivo nesse trabalho é definir e estudar as estruturas que surgem quando substituímos pseudogrupos de transformações locais por pseudogrupos de biseções locais de um grupoide de Lie. Para isso primeiro propomos a definição dos Γ -fibrados vetoriais ancorados, abreviadamente Γ -f.v.a., onde Γ é um pseudogrupo de biseções locais. Os Γ -f.v.a serão certos fibrados principais com grupoide de estrutura o grupoide de germes de elementos em Γ e os quais tem naturalmente associado um fibrado vetorial ancorado. Esse fibrado vetorial ancorado associado é localmente isomorfo ao pullback ancorado de um fibrado vetorial ancorado modelo $a : E \rightarrow TM$ e colado globalmente de forma que o objeto global também é um fibrado vetorial ancorado.

A motivação para a introdução dos Γ -f.v.a. é a seguinte. Apesar que os grupoides de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ não possuem representações canônicas, o seu grupoide de 1-jatos $J^1\mathcal{G} \rightrightarrows M$ tem uma representação canônica sobre o algebroide $\rho : A \rightarrow TM$ de $\mathcal{G}$, o qual é um exemplo de um fibrado vetorial ancorado, e as biseções locais de $\mathcal{G}$ agem por automorfismos locais de A preservando a âncora e o colchete de Lie nas seções de A .

Em seguida desenvolvemos a teoria de pullback e homotopia de Γ -f.v.a. e apresentamos o teorema de classificação dos Γ -f.v.a. Desde certa perspectiva, os Γ -f.v.a. e o seu teorema de classificação são o maior âmbito no qual as ferramentas e o método de prova do teorema de classificação de folheações regulares devido a Haefliger continuam valendo quando substituímos pseudogrupos de transformações locais por pseudogrupos de biseções locais.

Finalmente introduzimos as Γ -folheações os quais serão uma classe de Γ -f.v.a. que ao mesmo tempo definem uma folheação regular. Assim para uma Γ -folheação o fibrado vetorial ancorado $a : E \rightarrow TM$ torna-se em um modelo para a geometria transversal à folheação regular subjacente. Dessa forma Γ -folheações serão folheações regulares com geometria transversal definida por um fibrado vetorial ancorado modelo. Logo desenvolvemos a teoria de pullback e homotopia de Γ -folheações e apresentamos o teorema de classificação de Γ -folheações. O teorema de classificação de Γ -folheações é uma extensão direta do teorema de classificação de folheações regulares devido a Haefliger em [Hae71a].

Organização do trabalho

- No Capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares da teoria de grupoides de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ e os $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Assim as Seções 1.1, 1.2 e 1.6 são brevemente dedicadas a conceitos já padrão em muitas referencias sobre grupoides de Lie. As Seções 1.3, 1.4 e 1.5 são dedicadas a conceitos um pouco menos padrão na literatura sobre grupoides de Lie, porém esses resultados são uma generalização direta dos correspondentes na teoria de fibrados principais com grupo

de estrutura. Na Seção 1.7 tratamos os pseudogrupos generalizados Γ e o seu grupoide de germes $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$. O resultado mais importante dessa seção é a construção do gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal, o qual é uma generalização de um resultado semelhante obtido para pseudogrupos de transformações locais.

- No Capítulo 2 apresentamos os resultados preliminares da teoria de fibrados vetoriais ancorados. O resultado mais importante desse capítulo é a classificação de aplicações transversais a um fibrado ancorado apresentado na Seção 2.2, esse teorema acompanhado da construção do gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal são as peças fundamentais para as provas dos teoremas de classificação apresentados nos Capítulos 3 e 4.
- O Capítulo 3 começa com uma revisão das Γ -estruturas clássicas e das estruturas de Haefliger, onde descrevemos brevemente algumas consequências do ponto de vista de Haefliger para estudar folheações regulares. Na Seção 3.2 introduzimos os Γ -f.v.a. e provamos o seu teorema de classificação. Os Γ -f.v.a. são $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais que tem canonicamente associado um fibrado vetorial ancorado o qual é localmente modelado por um fibrado vetorial ancorado $a : E \rightarrow TM$ fixado. Na Seção 3.3 introduzimos os $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita e os $\mathcal{G}$ -fibrado principais Γ -planos. Os $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita que são Γ -planos são a imagem dos Γ -f.v.a. com modelo local igual ao algebroide $\rho : A \rightarrow TM$ de $\mathcal{G}$ via o morfismo canônico $\bar{\Gamma} \rightarrow \mathcal{G}$. Em seguida mostramos que com a escolha adequada do Γ é possível transportar formas multiplicativas do grupoide $\mathcal{G}$ para formas na base do $\mathcal{G}$ -fibrado principal ou para formas multiplicativas no correspondente grupoide de gauge do $\mathcal{G}$ -fibrado principal.
- No Capítulo 4 definimos as Γ -folheações e provamos o seu teorema de classificação. Em seguida apresentamos um corolário o qual responde a seguinte pergunta: Fixada uma folheação regular, quando ela admite uma estrutura transversal localmente isomorfa a um fibrado vetorial ancorado modelo $a : E \rightarrow TM$?

Capítulo 1

Grupoides de Lie e $\mathcal{G}$ -fibrados principais

Neste capítulo iremos lembrar as definições e propriedades elementares da teoria de grupoides de Lie. As nossas principais referencias para a teoria de grupoides de Lie são os livros de MacKenzie [Mac05], de Moerdijk e Mrčun [MM03] e as notas de Crainic e Fernandes [CF11]. Para uma motivação ao estudo e introdução histórica dos grupoides de Lie recomendamos a leitura das notas do final de capítulo nas referencias [Mac05] e [CF11].

1.1 Grupoides de Lie

O objeto de estudo principal neste trabalho são os grupoides de Lie. A definição mais curta de grupoide, sem nenhuma estrutura adicional, é a seguinte.

Definição 1.1. *Um grupoide $\mathcal{G}$ é uma categoria (pequena) onde todos os morfismos são isomorfismos.*

O conjunto de morfismos do grupoide será denotado pela mesma letra $\mathcal{G}$ e o conjunto de objetos do grupoide será denotado por M . Há uma serie de aplicações entre $\mathcal{G}$ e M as quais vem da definição de grupoide

- “Source” $s : \mathcal{G} \rightarrow M$; a qual associa a cada elemento em $\mathcal{G}$ o seu domínio.
- “Target” $t : \mathcal{G} \rightarrow M$; a qual associa a cada elemento em $\mathcal{G}$ o seu codomínio.
- Unidade $u : M \rightarrow \mathcal{G}$; a qual associa a cada objeto em M o seu morfismo identidade em $\mathcal{G}$
- Inversão $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$; a qual associa a cada morfismo em $\mathcal{G}$ o seu morfismo inverso
- Multiplicação $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$; a qual associa a cada par de morfismos componíveis em $\mathcal{G}$ a sua composição, onde $\mathcal{G}^{(2)} = \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(g) = t(h)\}$.

Estas aplicações são chamadas de aplicações de estrutura e elas satisfazem algumas condições as quais são consequência da Definição 1.1, vide por exemplo a página 112 em [MM03] ou a página 4 em [CF11]. Segue dessas condições que as aplicações s e t são sobrejetoras, a aplicação u é injetora e a aplicação i é uma bijeção. Denotaremos um grupoide por $\mathcal{G} \rightrightarrows M$; os morfismos em $\mathcal{G}$

serão denotados por $g : x \rightarrow y$, onde $\mathbf{s}(g) = x$ e $\mathbf{t}(g) = y$; o morfismo inverso de g será denotado por $\mathbf{i}(g) = g^{-1}$, e o morfismo identidade em x será denotado por $\mathbf{u}(x) = 1_x$. Este trabalho será desenvolvido na categoria diferenciável, com exceção da seção referente a espaços classificantes onde as construções são feitas na categoria topológica. Por isto a nossa seguinte definição é a de grupoide diferenciável ou grupoide de Lie.

Definição 1.2. *Um grupoide de Lie é um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ onde $\mathcal{G}$ é uma variedade diferenciável (possivelmente não Hausdorff), M é uma variedade diferenciável, todas as aplicações de estrutura são diferenciáveis, e as aplicações $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ são submersões.*

Então, num grupoide de Lie as aplicações $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ são submersões sobrejetoras, a inversão $\mathbf{i}$ é um difeomorfismo e a unidade $\mathbf{u}$ é um mergulho. Assim, para cada $x \in M$, as imagens inversas $\mathbf{s}^{-1}(x)$ e $\mathbf{t}^{-1}(x)$ são subvariedades mergulhadas de $\mathcal{G}$ e são chamadas de $\mathbf{s}$ -fibra e $\mathbf{t}$ -fibra em x , respectivamente. A inversão induz a difeomorfismo entre estas duas subvariedades

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} : \mathbf{s}^{-1}(x) & \longrightarrow & \mathbf{t}^{-1}(x) \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

Dado $g : x \rightarrow y$, a multiplicação à direita pelo elemento $g \in \mathcal{G}$ é definida somente sobre a $\mathbf{s}$ -fibra em y e induz um difeomorfismo sobre a $\mathbf{s}$ -fibra em x

$$\begin{array}{ccc} R^g : \mathbf{s}^{-1}(y) & \longrightarrow & \mathbf{s}^{-1}(x) \\ h & \longmapsto & hg \end{array}$$

Analogamente, a multiplicação à esquerda por g induz um difeomorfismo entre a $\mathbf{t}$ -fibra em x e a $\mathbf{t}$ -fibra em y . Para cada $x \in M$ a restrição da multiplicação ao conjunto $\mathcal{G}_x = \mathbf{s}^{-1}(x) \cap \mathbf{t}^{-1}(x)$ induz uma estrutura de grupo em $\mathcal{G}_x$. Na verdade $\mathcal{G}_x$ é um grupo de Lie chamado de grupo de isotropia em x . Finalmente, $\mathcal{O}_x = \{\mathbf{t}(g) : g \in \mathbf{s}^{-1}(x)\} \subset M$ é uma subvariedade imersa chamada de órbita em x .

Definição 1.3. *Um grupoide de Lie é chamado de transitivo se ele tem apenas uma órbita, i.e. dado qualquer par $(y, x) \in M \times M$ então existe um elemento $g \in \mathcal{G}$ tal que $\mathbf{s}(g) = x$ e $\mathbf{t}(g) = y$.*

Definição 1.4. *Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows N$ dois grupoides de Lie. Um morfismo de grupoides de Lie é um functor diferenciável de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{H}$. De outro modo, um morfismo de grupoides de Lie é um par de aplicações diferenciáveis $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, $f : M \rightarrow N$ que comutam com todas as aplicações de estrutura dos grupoides.*

Como é mostrado na Proposição 1.2.2 em [Mac05], para que (F, f) seja um morfismo de grupoides de Lie é suficiente que elas comutem com as aplicações $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ e $\mathbf{m}$. Se $(F, f) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um morfismo de grupoides então a aplicação f envia órbitas de $\mathcal{G}$ em órbitas de $\mathcal{H}$, e F envia o grupo de isotropia de $\mathcal{G}$ em x para o grupo de isotropia de $\mathcal{H}$ em $f(x)$. Agora apresentaremos alguns exemplos de grupoides de Lie.

Exemplo 1.5. *Um grupo de Lie G é equivalente a um grupoide de Lie $G \rightrightarrows \{*\}$ onde o conjunto de objetos contém um elemento só. Sejam G, H dois grupos de Lie, então morfismos de grupoide de $G \rightrightarrows \{*\}$ em $H \rightrightarrows \{*\}$ coincidem com os morfismos de grupos de Lie de G em H .*

Exemplo 1.6. Uma variedade M é um grupoide de Lie $M \rightrightarrows M$ onde todas as aplicações de estrutura são a aplicação identidade id_M . Sejam M, N duas variedades, então morfismos de grupoides de Lie $M \rightrightarrows M$ em $N \rightrightarrows N$ coincidem com as aplicações diferenciáveis de M em N .

Exemplo 1.7. Seja M uma variedade. O produto cartesiano $M \times M$ é um grupoide de Lie sobre M , cada par (y, x) é considerado como um morfismo $x \rightarrow y$. A multiplicação e a inversa neste grupoide são definidas por

$$(z, y)(y, x) = (z, x), \quad (y, x)^{-1} = (x, y)$$

e dado $x \in M$ temos $1_x = (x, x)$. Este grupoide é chamado de grupoide dos pares de M e é denotado por $M \times M \rightrightarrows M$. O grupoide $M \times M \rightrightarrows M$ é um exemplo de um grupoide transitivo.

Exemplo 1.8. Seja $\pi : P \rightarrow B$ uma submersão sobrejetora. Então o produto fibrado $P \times_B P = \{(q, p) \in P \times P : \pi(q) = \pi(p)\}$ é uma subvariedade mergulhada de $P \times P$. A restrição das aplicações de estrutura do grupoide de pares de P para $P \times_B P$ fornece de uma estrutura de grupoide de Lie para $P \times_B P \rightrightarrows P$, esse grupoide é chamado de grupoide de submersão de $\pi : P \rightarrow B$.

Exemplo 1.9. Seja $G \times M \rightarrow M$ uma ação do grupo de Lie G sobre a variedade M . O produto cartesiano $G \times M$ é um grupoide sobre M , chamado de grupoide de transformação ou grupoide de ação, e denotado por $G \ltimes M \rightrightarrows M$. Para cada morfismo (g, x) temos definido $\mathbf{s}(g, x) = x$, $\mathbf{t}(g, x) = gx$, $\mathbf{u}(x) = (1, x)$, onde 1 é o elemento identidade em G . A multiplicação e a inversa são definidas por

$$(h, y)(g, x) = (hg, x), \quad (g, x)^{-1} = (g^{-1}, gx)$$

As órbitas e as isotropias do grupoide $G \ltimes M \rightrightarrows M$ coincidem com as órbitas e as isotropias da ação $G \times M \rightarrow M$.

Exemplo 1.10. Sejam G um grupo de Lie e $\pi : P \rightarrow B$ um G -fibrado principal. Denote por $P \otimes_G P$ o quociente de $P \times P$ pela ação diagonal de G . Assim $P \otimes_G P$ herda estrutura de variedade diferenciável e também tem estrutura de grupoide de Lie sobre B . Para cada morfismo $[p, q] \in P \otimes_G P$ temos $\mathbf{s}([p, q]) = \pi(q)$ e $\mathbf{t}([p, q]) = \pi(p)$. A multiplicação e inversa são definidas por

$$[p, q][q, r] = [p, r], \quad [p, q]^{-1} = [q, p]$$

e dado $b \in B$ temos $1_b = [p, p]$, onde $p \in \pi^{-1}(b)$. Este grupoide é chamado de grupoide de gauge do G -fibrado principal P e é denotado por $P \otimes_G P \rightrightarrows B$. Note que $P \otimes_G P \rightrightarrows B$ é um grupoide transitivo.

Exemplo 1.11. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Denote por $GL(E)$ o conjunto de isomorfismos lineares entre as fibras de E , i.e.

$$GL(E) = \{g : E_x \rightarrow E_y : x, y \in M, g \text{ é um isomorfismo linear}\}$$

O conjunto $GL(E)$ tem estrutura de variedade diferenciável induzida pelo atlas de fibrado de E e é um grupoide de Lie sobre M . Dado um morfismo $g : E_x \rightarrow E_y$ temos $\mathbf{s}(g) = x$, $\mathbf{t}(g) = y$, $\mathbf{i}(g) = g^{-1}$, $1_x = \text{id}_{E_x}$; e a multiplicação é simplesmente a composição de aplicações. Este grupoide é chamado de grupoide geral linear de E . Não é difícil verificar que $GL(E)$ é o grupoide de gauge do fibrado de referenciais de E .

Observação 1.12. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. A ancora do grupoide é a aplicação $\varrho := (\mathbf{t}, \mathbf{s}) : \mathcal{G} \longrightarrow M \times M$. Pode-se verificar que essa ancora define um morfismo de grupoides de Lie (ϱ, id_M) de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ para o grupoide de pares $M \times M \rightrightarrows M$.*

1.2 Algebroides de Lie

A contraparte infinitesimal associada a um grupoide de Lie é o algebroides de Lie, em semelhança a relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie. A terminologia usual na teoria de grupoides de Lie diz que “derivando” um grupoide de Lie obtemos um algebroides de Lie, e “integrando” um algebroides de Lie obtemos um grupoide de Lie. A principal diferença com os grupos e álgebras de Lie é que nem todo algebroides de Lie vem de um grupoide de Lie, existem algebroides de Lie não integráveis. As condições para a integrabilidade de um algebroides de Lie foram dadas por Crainic e Fernandes em [CF03]. A seguir lembramos a definição de algebroides de Lie e alguns exemplos¹.

Definição 1.13. *Um algebroides de Lie sobre M consiste de:*

1. *Um fibrado vetorial $A \longrightarrow M$,*
2. *Um morfismo de fibrados vetoriais $\rho : A \longrightarrow TM$ sobre a identidade de M chamado de âncora,*
3. *Um colchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(A)$ nas seções de A*

satisfazendo a regra de Leibniz

$$[\alpha_1, f\alpha_2] = f[\alpha_1, \alpha_2] + \mathcal{L}_{\rho(\alpha_1)}(f)\alpha_2$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(A)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Uma consequência desta definição é que a âncora induz um morfismo de álgebras de Lie ao nível das seções $\rho_* : \Gamma(A) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, e em particular $\rho_*(\Gamma(A)) \subset \mathfrak{X}(M)$ é uma subálgebra de Lie. Não é exigido que a âncora tenha posto constante, contudo $\rho(A) \subset TM$ sempre define uma distribuição generalizada integrável e portanto essa distribuição se integra para uma folheação singular em M . As orbitas desta folheação são as orbitas do algebroides A . Se ρ é injetor então $\rho(A) \subset TM$ define uma distribuição integrável e neste caso as orbitas do algebroides define uma folheação regular em M . Segue da regra de Leibniz que, para cada $x \in M$, a restrição do colchete $[\cdot, \cdot]$ para o $\text{Ker}(\rho_x) \subset A_x$ define uma estrutura de álgebra de Lie em $\text{Ker}(\rho_x)$. Essa álgebra de Lie $(\text{Ker}(\rho_x), [\cdot, \cdot]_x)$ é chamada de álgebra de isotropia.

1.2.1 Algebroides de Lie de um grupoide de Lie

Como já foi dito anteriormente, sempre é possível associar a um grupoide de Lie o seu algebroides de Lie. Essa construção será lembrada a seguir. Como a aplicação $\mathbf{s}$ é uma submersão sobrejetora então $\text{Ker}(d\mathbf{s}) \subset T\mathcal{G}$ é um subfibrado vetorial, e denotaremos por $\mathfrak{X}^s(\mathcal{G}) = \Gamma(\text{Ker}(d\mathbf{s}))$. Definimos

---

¹Nesse trabalho as seções de um fibrado vetorial $E \longrightarrow M$ serão denotadas por $\Gamma(E)$. Na ultima seção deste capítulo denotaremos por Γ aos pseudogrupos. Nesse ponto fazemos a advertência entre a semelhança nessas notações $\Gamma(\cdot)$ e Γ .

o fibrado vetorial $A := \mathbf{u}^* \text{Ker}(ds)$. Como $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathcal{G}$ é um mergulho então M e $\mathbf{u}(M) \subset \mathcal{G}$ são difeomorfos, e esse difeomorfismo induz um isomorfismo de fibrados vetoriais entre A e $\text{Ker}(ds)|_{\mathbf{u}(M)}$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\cong} & \text{Ker}(ds)|_{\mathbf{u}(M)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{u}(M) \end{array}$$

A âncora é definida por $\rho = \mathbf{u}^*(d\mathbf{t}|_{\text{Ker}(ds)})$. Para definir o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]_A$ nas seções de A , consideramos uma seção de A como uma aplicação $\alpha : \mathbf{u}(M) \rightarrow \text{Ker}(ds)|_{\mathbf{u}(M)}$ e assim cada seção α induz uma seção $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{X}^s(\mathcal{G})$ definida pela seguinte formula

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : \mathcal{G} &\longrightarrow \text{Ker}(ds) \\ g &\longmapsto d_{1_{\mathbf{t}(g)}} R^g \cdot \alpha(1_{\mathbf{t}(g)}) \end{aligned}$$

A aplicação $\alpha \in \Gamma(A) \mapsto \tilde{\alpha} \in \mathfrak{X}^s(\mathcal{G})$ é injetora e a sua imagem é o conjunto de campos vetoriais de $\mathcal{G}$ invariantes à direita

$$\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}) = \left\{ X \in \mathfrak{X}^s(\mathcal{G}) : X_{gh} = d_g R^h \cdot X_g \quad ; \forall (g, h) \in \mathcal{G}^{(2)} \right\}$$

Como o conjunto de campos vetoriais de $\mathcal{G}$ invariantes à direita forma uma subálgebra de Lie dos campos vetoriais de $\mathcal{G}$ então ele induz um colchete de Lie nas seções de A definido por

$$[\alpha_1, \alpha_2]_A := [\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2]|_{\mathbf{u}(M)}$$

Não é difícil verificar que esses colchete e âncora satisfazem a regra de Leibniz. Ante possíveis confusões, o algebroide do grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ será denotado por $A(\mathcal{G}) \rightarrow M$. Pode-se verificar que as orbitas dos algebroide $A(\mathcal{G})$ coincidem com as componentes conexas das orbitas do grupoide $\mathcal{G}$, e que as álgebras de isotropia $(\text{Ker}(\rho_x), [\cdot, \cdot]_x)$ são as álgebras de Lie dos grupos de isotropia $\mathcal{G}_x$.

Exemplo 1.14. O algebroide do grupoide $G \rightrightarrows \{*\}$ é a algebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G considerado como um fibrado vetorial sobre um ponto.

Exemplo 1.15. O algebroide do grupoide $M \rightrightarrows M$ é o fibrado vetorial zero $A = 0$, com âncora zero e colchete zero.

Exemplo 1.16. O algebroide do grupoide de pares $M \times M \rightrightarrows M$ é o fibrado tangente $A = TM$, com âncora igual a identidade $\rho = \text{id}_{TM}$ e o colchete é o colchete de campos vetoriais.

Exemplo 1.17. O algebroide do grupoide de transformação $G \ltimes M \rightrightarrows M$ tem como fibrado vetorial o fibrado trivial $A = \mathfrak{g} \times M$. A âncora é definida por $\rho(\xi, x) = d_1 \theta^x \cdot \xi$, onde $\theta : G \times M \rightarrow M$ é a ação, $\theta^x(g) = g \cdot x$, e $1 \in G$ é identidade do grupo. As seções de $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$ são identificadas com funções $C^\infty(M, \mathfrak{g})$. Os elementos de uma base $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de $\mathfrak{g}$ podem ser considerados como seções constantes do fibrado $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$ e assim $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ é um $C^\infty(M)$ -modulo gerado por $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Portanto cada seção $\alpha \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ se expressa de forma única como $\alpha = \sum_i \alpha_i \xi_i$,

onde $\alpha_i \in C^\infty(M)$. Com essas identificações podemos escrever o colchete entre as seções do algebroide $\mathfrak{g} \times M \rightarrow M$ pela expressão

$$[\alpha, \alpha'](x) = \llbracket \alpha(x), \alpha'(x) \rrbracket + \sum_{i,j} \left\{ \alpha_i(x) (d_1(\alpha'_j \circ \theta^x) \cdot \xi_i) \xi_j - \alpha'_j(x) (d_1(\alpha_i \circ \theta^x) \cdot \xi_j) \xi_i \right\}$$

onde $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$ denota o colchete de Lie de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.18. Seja $\mathbf{q}: E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma derivação de E é um par (D, X) onde $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e eles satisfazem a regra de Leibniz

$$D(f\sigma) = fD\sigma + \mathcal{L}_X(f)\sigma$$

Denotamos por $\text{Der}(E)$ o conjunto das derivações de E , ele tem estrutura de espaço vetorial, de fato é um subespaço dos endomorfismos do espaço vetorial $\Gamma(E)$. Além disso, existem um colchete de Lie em $\text{Der}(E)$ definido por

$$[(D, X), (D', X')] = (DD' - D'D, [X, X'])$$

e um $C^\infty(M)$ -módulo morfismo $\rho_*: (D, X) \in \text{Der}(E) \mapsto X \in \mathfrak{X}(M)$. Pode-se verificar que $\text{Der}(E)$ é isomorfo à álgebra de Lie das seções do algebroide de Lie $\mathfrak{gl}(E)$ do grupoide $GL(E) \rightrightarrows M$.

1.3 $\mathcal{G}$ -fibrados principais

É possível desenvolver uma teoria de fibrados principais com grupoide de estrutura, de forma completamente análoga à teoria de fibrados principais com grupo de estrutura. A seguir relembremos as definições elementares e os mais importantes resultados.

Assim como os grupos agem sobre espaços, os grupoides agem sobre espaços fibrados. Desta forma para definir a ação do grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ precisamos de uma aplicação $\mu: P \rightarrow M$. Denotamos por

$$\mathcal{G} \times_M P := \left\{ (g, p) \in \mathcal{G} \times P : \mu(p) = \mathbf{s}(g) \right\}$$

ao produto fibrado de $\mu: P \rightarrow M$ e $\mathbf{s}: \mathcal{G} \rightarrow M$. Como $\mathbf{s}$ é uma submersão então $\mathcal{G} \times_M P$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{G} \times P$.

Definição 1.19. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. Uma ação à esquerda de $\mathcal{G}$ ao longo da aplicação $\mu: P \rightarrow M$ é uma aplicação $\theta: (g, p) \in \mathcal{G} \times_M P \mapsto g \cdot p \in P$ satisfazendo as seguintes propriedades

1. $\mu(g \cdot p) = \mathbf{t}(g), \forall (g, p) \in \mathcal{G} \times_M P$.
2. $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \forall (g, h) \in \mathcal{G}^{(2)} \text{ e } \forall (h, p) \in \mathcal{G} \times_M P$.
3. $1_{\mu(p)} \cdot p = p, \forall p \in P$.

De forma análoga se define uma ação à direita. Simplificadamente, uma ação também será denotada por $\mathcal{G} \curvearrowright P$. A aplicação $\mu: P \rightarrow M$ é chamada de aplicação de momento da ação, e não estamos supondo a priori que ela seja sobrejetora. Uma ação de $\mathcal{G}$ sobre P associa a cada $g: x \rightarrow y$, com $\mathbf{s}(g) \in \mu(P)$, um homeomorfismo $\theta^g: p \in \mu^{-1}(x) \mapsto g \cdot p \in \mu^{-1}(y)$. A aplicação θ^g é um

homeomorfismo devido a que não estamos supondo alguma propriedade sobre μ que garanta que suas fibras sejam subvariedades de P . No entanto, no caso que μ seja uma submersão, a aplicação θ^g torna-se é um difeomorfismo. Seja $p \in P$, o conjunto $\mathfrak{O}_p = \{g \cdot p : g \in \mathfrak{s}^{-1}(\mu(p))\}$ é chamado de órbita da ação passando por p ou simplesmente órbita de p . O conjunto $Isop = \{g \in \mathcal{G} : g \cdot p = p\}$ é chamado de grupo de isotropia da ação em p . De forma semelhante ao caso de ações de grupos de Lie, com cada ação $\mathcal{G} \curvearrowright P$ de um grupoide de Lie temos associado o seu grupoide de ação $\mathcal{G} \ltimes P \rightrightarrows P$, cujas aplicações de estrutura são semelhantes as apresentadas no caso de ações de grupos no Exemplo 1.9. As órbitas e isotropias do grupoide $\mathcal{G} \ltimes P$ coincidem com as órbitas e isotropias da ação $\mathcal{G} \curvearrowright P$.

Definição 1.20. *Seja $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma representação de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ é uma ação $\theta : \mathcal{G} \times_M E \rightarrow E$ ao longo de $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ tal que $\theta^g : E_x \rightarrow E_y$ é um isomorfismo linear, para cada $g : x \rightarrow y$ em $\mathcal{G}$.*

Observação 1.21. *Suponha que temos uma ação de $\mathcal{G}$ ao longo de $\mu : P \rightarrow M$. Para cada $p \in P$ a aplicação de momento μ envia a órbita da ação passando por p na órbita do grupoide passando por $\mu(p)$, i.e. $\mu(\mathfrak{O}_p) = \mathcal{O}_{\mu(p)}$. Assim $\mu(P) \subset M$ é uma coleção de órbitas do grupoide $\mathcal{G}$, de fato podemos escrever $\mu(P) = \bigcup_{x \in \mu(P)} \mathcal{O}_x$. Em particular se $\mathcal{G}$ é um grupoide transitivo então $\mu : P \rightarrow M$ deve ser sobrejetora.*

Definição 1.22. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. Um $\mathcal{G}$ -fibrado principal P sobre B consiste de:*

1. *Uma ação à esquerda $\theta : \mathcal{G} \times_M P \rightarrow P$ ao longo da aplicação $\mu : P \rightarrow M$ (não necessariamente uma submersão sobrejetora),*
2. *Uma submersão sobrejetora e $\mathcal{G}$ -invariante $\pi : P \rightarrow B$*

tais que a aplicação

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{G} \times_M P &\longrightarrow P \times_B P \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Em um $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow B$ temos a seguinte nomenclatura:

- P é chamado de espaço total.
- B é chamado de espaço base.
- π é chamado de projeção.
- $\mathcal{G}$ é chamado de grupoide de estrutura.
- $P_b = \pi^{-1}(b)$ é chamada a fibra sobre $b \in B$.

A seguinte proposição enumera algumas propriedades, cuja verificação é direta, dos fibrados principais com grupoide de estrutura

Proposição 1.23. *Um $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow B$ com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$ tem as seguintes propriedades:*

1. A ação $\theta : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow P$ é livre e própria.
2. As órbitas da ação $\theta : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow P$ são as fibras da projeção $\pi : P \longrightarrow B$.
3. A órbita da ação passando por $p \in P$ é difeomorfa à $\mathbf{s}$ -fibra em $\mu(p)$. Mais explicitamente, seja $p \in P$, se denotamos por $b = \pi(p)$ e $x = \mu(p)$. Então $\theta^p : g \in \mathbf{s}^{-1}(x) \longmapsto g \cdot p \in P_b$ é um difeomorfismo.
4. $\dim \mathcal{G} - \dim M = \dim P - \dim B$
5. Os grupoides $\mathcal{G} \ltimes P \rightrightarrows P$ e $P \times_B P \rightrightarrows P$ são isomorfismo, e o isomorfismo é dado pela aplicação Δ .

Exemplo 1.24. Fibrados principais para o grupóide $G \rightrightarrows \{*\}$ coincidem com os G -fibrados principais.

Exemplo 1.25. A aplicação $\mathbf{s} : \mathcal{G} \longrightarrow M$ de qualquer grupóide de Lie é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal. A ação de $\mathcal{G}$ sobre ele mesmo é por multiplicação à esquerda e a aplicação de momento é $\mathbf{t} : \mathcal{G} \longrightarrow M$. Este fibrado é chamado de $\mathcal{G}$ -fibrado unitário.

Exemplo 1.26. Seja $f : B \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável. O $\mathcal{G}$ -fibrado principal trivial determinado pela f é aquele que tem espaço total $f^*\mathcal{G} = \{(b, g) \in B \times \mathcal{G} : f(b) = \mathbf{s}(g)\}$, projeção $\text{pr}_1 : (b, g) \in f^*\mathcal{G} \longmapsto b \in B$, aplicação de momento $\mathbf{t} \circ \text{pr}_2 : (b, g) \in f^*\mathcal{G} \longmapsto \mathbf{t}(g) \in M$; onde a ação de $\mathcal{G}$ sobre $f^*\mathcal{G}$ é por multiplicação à esquerda na segunda componente.

Exemplo 1.27. Veja que uma ação do grupóide $G \ltimes M \rightrightarrows M$ ao longo da aplicação $\mu : P \longrightarrow M$ é equivalente a uma ação de $G \times P \longrightarrow P$ que torna $\mu : P \longrightarrow M$ uma aplicação G -equivariante. Logo um $G \ltimes M$ -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B$ com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$ é equivalente a um G -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B$ e uma aplicação G -equivariante $\mu : P \longrightarrow M$.

Como a projeção π é uma submersão sobrejetora, ela sempre admite seções locais numa vizinhança de qualquer ponto da base B . Assim cada seção local $\sigma : U \longrightarrow P$ da projeção π define um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : f^*\mathcal{G} &\longrightarrow P_U \\ (b, g) &\longmapsto g \cdot \sigma(b) \end{aligned}$$

onde $f := \mu \circ \sigma : U \rightarrow M$, e $P_U = \pi^{-1}(U)$. A aplicação de divisão δ do fibrado P , definida por

$$\delta := \text{pr}_1 \circ \Delta^{-1} : P \times_B P \rightarrow \mathcal{G}$$

e a qual é caracterizada pela equação

$$q = \delta(q, p) \cdot p$$

permite escrever explicitamente a aplicação inversa de Φ^{-1}

$$\begin{aligned} \Phi : P_U &\longrightarrow f^*\mathcal{G} \\ p &\longmapsto (\pi(p), \delta(p, \sigma(\pi(p)))) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim cada seção local $\sigma : U \longrightarrow P$ da projeção π define uma carta de $\mathcal{G}$ -fibrado principal de P , i.e. um difeomorfismo de P_U para o $\mathcal{G}$ -fibrado principal trivial $f^*\mathcal{G}$ que faz com que os seguintes

diagramas sejam comutativos.

$$\begin{array}{ccc} P_U & \xrightarrow{\Phi} & f^*\mathcal{G} \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_U & \xrightarrow{\Phi} & f^*\mathcal{G} \\ \mu \searrow & & \swarrow \text{topr}_2 \\ & M & \end{array}$$

Definição 1.28. *Seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal. Um atlas de $\mathcal{G}$ -fibrado principal para P é uma coleção de seções locais $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ da projeção π tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de B .*

Assim, dado $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal, cada atlas $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ para P define uma coleção de aplicações $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{ii} : U_i & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ b & \longmapsto & 1_{f_i(b)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{ij} : U_i \cap U_j & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ b & \longmapsto & \delta(\sigma_i(b), \sigma_j(b)) \end{array}$$

Onde $f_i = \mu \circ \sigma_i$. Como vimos acima, associado a cada seção local σ_i temos um difeomorfismo Φ_i , e quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ as aplicações γ_{ij} fazem a transição entre esses difeomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (f_j^*\mathcal{G})_{U_i \cap U_j} & \longrightarrow & (f_i^*\mathcal{G})_{U_i \cap U_j} \\ (b, g) & \longmapsto & (b, g\gamma_{ji}(b)) \end{array}$$

Devido as equações acima, as aplicações γ_{ij} 's são chamadas de funções de transição do atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$.

1.3.1 Cociclos de Haefliger

Definição 1.29. *Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de uma variedade B e $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. Um cociclo de Haefliger em $\mathcal{U}$ a valores em $\mathcal{G}$ é uma coleção de aplicações $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$ que satisfazem as seguintes condições*

1. Para cada $b \in U_i$: $\gamma_{ii}(b)$ é uma unidade de $\mathcal{G}$
2. Para cada $b \in U_i \cap U_j \cap U_k$: $\gamma_{ij}(b)\gamma_{jk}(b) = \gamma_{ik}(b)$

Se denotamos por $f_i = s \circ \gamma_{ii} : U_i \longrightarrow M$ temos que $\gamma_{ii} = \mathbf{u} \circ f_i$. Além disso, o item (2) implica as seguintes relações

- $s(\gamma_{ij}(b)) = f_j(b)$,
- $t(\gamma_{ij}(b)) = f_i(b)$,
- $[\gamma_{ij}(b)]^{-1} = \gamma_{ji}(b)$

para $b \in U_i \cap U_j$.

Ora, observe que dado um atlas para o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B$, o seu conjunto de funções de transição define um cociclo de Haefliger sobre B . Por outro lado, para cada cociclo de Haefliger sobre a cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de B existe um $\mathcal{G}$ -fibrado principal para o qual o seu conjunto de funções de transição é o cociclo de Haefliger dado. Todas estas construções são análogas ao caso de fibrados principais com grupo de estrutura, mas a lembramos aqui para fixar notação.

Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de uma variedade B e seja $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$ um cociclo de Haefliger a valores em $\mathcal{G}$. Para cada $i \in I$ considere o $\mathcal{G}$ -fibrado trivial determinado pela $f_i, f_i^* \mathcal{G} \longrightarrow U_i$. Denote por (i, b, g) os elementos da união disjunta $\coprod_{i \in I} f_i^* \mathcal{G}$ e defina a relação

$$(i, b, g) \sim (j, b', g') \iff b = b' \in U_i \cap U_j \text{ e } g' = g\gamma_{ij}(b)$$

O fato que as γ_{ij} 's constituem um cociclo de Haefliger implica que essa relação é uma relação de equivalência. Denote por $\tilde{P} = \coprod_{i \in I} f_i^* \mathcal{G} / \sim$ e denote por $[i, b, g]$ os elementos de $\tilde{P}$. O espaço $\tilde{P}$ é o espaço total de um $\mathcal{G}$ -fibrado principal sobre B cuja projeção é definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \tilde{P} &\longrightarrow B \\ [i, b, g] &\longmapsto b \end{aligned}$$

A aplicação de momento de $\tilde{P}$ é definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : \tilde{P} &\longrightarrow M \\ [i, b, g] &\longmapsto \mathbf{t}(g) \end{aligned}$$

A ação de $\mathcal{G}$ em $\tilde{P}$ é definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : \mathcal{G} \times_M \tilde{P} &\longrightarrow \tilde{P} \\ (g, [i, b, h]) &\longmapsto [i, b, gh] \end{aligned}$$

A aplicação de divisão de $\tilde{P}$ é definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} : \tilde{P} \times_B \tilde{P} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ ([i, b, g], [j, b, h]) &\longmapsto g\gamma_{ij}(b)h^{-1} \end{aligned}$$

Além disso temos um atlas $\{\tilde{\sigma}_i : b \in U_i \longrightarrow [i, b, 1_{f_i(b)}] \in \tilde{P}\}_{i \in I}$ para $\tilde{P}$ sobre a mesma cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ na qual esta definida o cociclo de Haefliger dado. Não é difícil verificar que para tal atlas o seu conjunto de funções de transição coincide com o cociclo de Haefliger inicialmente dado.

Observação 1.30. *É importante assinalar que a construção descrita acima gera um $\mathcal{G}$ -fibrado principal na categoria correspondente. Isto é se B é um espaço topológico, $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ é um grupóide topológico e os cociclos $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$ são aplicações contínuas então $\tilde{\pi} : \tilde{P} \longrightarrow B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal topológico; por outro lado se B é uma variedade, $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ é um grupóide de Lie e os cociclos $\{\gamma_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$ são aplicações diferenciáveis então $\tilde{\pi} : \tilde{P} \longrightarrow B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal diferenciável.*

1.3.2 $\mathcal{G}$ -morfismos e $\mathcal{G}$ -homotopias

Definição 1.31. Sejam $\pi_i : P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicação de momento $\mu_i : P_i \rightarrow M$. Um $\mathcal{G}$ -morfismo de P_1 em P_2 é uma aplicação $F : P_1 \rightarrow P_2$ tal que

- o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ & \searrow \mu_1 & \swarrow \mu_2 \\ & M & \end{array}$$

- F é $\mathcal{G}$ -equivariante, i.e. $F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$, $\forall (g, p) \in \mathcal{G} \times_M P_1$.

Observação 1.32. Veja que na definição de $\mathcal{G}$ -morfismo precisamos apenas da ação de $\mathcal{G}$ sobre os espaços, para isto precisaríamos apenas falar da categoria dos $\mathcal{G}$ -espaços. Contudo, a propriedade de ser $\mathcal{G}$ -equivariante implica que todo $\mathcal{G}$ -morfismo entre $\mathcal{G}$ -fibrados principais $F : P_1 \rightarrow P_2$ induz uma aplicação diferenciável $f : B_1 \rightarrow B_2$ entre as bases dos $\mathcal{G}$ -fibrados principais, e essa aplicação induzida faz com que o seguinte diagrama seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

É costume dizer que $F : P_1 \rightarrow P_2$ é um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre (ou cobrindo) a $f : B_1 \rightarrow B_2$.

Definição 1.33. Sejam $\pi_i : P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicação de momento $\mu_i : P_i \rightarrow M$. Sejam $F_j : P_1 \rightarrow P_2$, $j = 0, 1$, dois $\mathcal{G}$ -morfismos. Uma $\mathcal{G}$ -homotopia entre F_0 e F_1 é uma aplicação² $H : P_1 \times \mathbb{I} \rightarrow P_2$ tal que $H_t : p \in P_1 \mapsto H(p, t) \in P_2$ é um $\mathcal{G}$ -morfismo, para cada $t \in \mathbb{I}$, e $H_0 = F_0$, $H_1 = F_1$.

Observação 1.34. Outra forma de pensar uma $\mathcal{G}$ -homotopia surge da seguinte observação: Se $\pi : P \rightarrow B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$, então $\pi \times \text{id}_{\mathbb{I}} : P \times \mathbb{I} \rightarrow B \times \mathbb{I}$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu \circ \text{pr}_1 : P \times \mathbb{I} \rightarrow M$ e onde $\mathcal{G}$ age somente na primeira componente. Assim uma $\mathcal{G}$ -homotopia entre os $\mathcal{G}$ -morfismos $F_j : P_1 \rightarrow P_2$, $j = 0, 1$, é um $\mathcal{G}$ -morfismo $H : P_1 \times \mathbb{I} \rightarrow P_2$, onde $P_1 \times \mathbb{I}$ tem a estrutura de $\mathcal{G}$ -fibrado principal indicada no início deste parágrafo, tal que $H_0 = F_0$ e $H_1 = F_1$. Com essa visão de uma $\mathcal{G}$ -homotopia fica claro que H desce para uma homotopia $h : B_1 \times \mathbb{I} \rightarrow B_2$ entre as aplicações entre as bases induzidas pelos $\mathcal{G}$ -morfismos F_0 e F_1 .

Definição 1.35. Sejam $\pi_i : P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i : P_i \rightarrow M$. Um $\mathcal{G}$ -morfismo $F : P_1 \rightarrow P_2$ é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo se existe um $\mathcal{G}$ -morfismo $F' : P_2 \rightarrow P_1$ tal que $F' \circ F = \text{id}_{P_1}$ e $F \circ F' = \text{id}_{P_2}$. Neste caso dizemos que P_1 e P_2 são isomorfos e denotamos por $P_1 \simeq P_2$.

²Denotaremos por $\mathbb{I} = [0, 1]$.

A definição acima é a definição “categórica” de $\mathcal{G}$ -isomorfismo. Em particular todo $\mathcal{G}$ -isomorfismo $F : P_1 \rightarrow P_2$ é um difeomorfismo e na definição acima $F' = F^{-1}$. Na verdade essa é a única propriedade que caracteriza aos $\mathcal{G}$ -isomorfismos entre os $\mathcal{G}$ -morfismos, ou seja

Lema 1.36. *Sejam $\pi_i : P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i : P_i \rightarrow M$. Seja $F : P_1 \rightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo que também é um difeomorfismo. Então F é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo.*

Demonstração. É claro que a inversa de F faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{F^{-1}} & P_2 \\ & \searrow \mu_2 & \swarrow \mu_1 \\ & M & \end{array}$$

Assim resta provar que F^{-1} é $\mathcal{G}$ -equivariante. Para isto note que dados $(g, q) \in \mathcal{G} \times_M P_2$ temos

$$F(g \cdot F^{-1}(q)) = g \cdot F(F^{-1}(q)) = g \cdot q$$

Portanto F^{-1} é $\mathcal{G}$ -equivariante. □

Pelo lema acima deve ficar claro que para um $\mathcal{G}$ -isomorfismo a aplicação induzida nas bases é um difeomorfismo.

1.3.3 Pullback de $\mathcal{G}$ -fibrados principais

O pullback de $\mathcal{G}$ -fibrados principais por aplicações diferenciáveis produzem novos $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Seja $\pi : P \rightarrow B'$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$ e seja $f : B \rightarrow B'$ uma aplicação diferenciável. O $\mathcal{G}$ -fibrado principal pullback é aquele que tem espaço total

$$f^*P = \{(b, p) \in B \times P : f(b) = \pi(p)\}$$

Como π é uma submersão sobrejetora então $f^*P \subset B \times P$ é uma subvariedade mergulhada. A seguir apresentamos as aplicações que tornam f^*P um $\mathcal{G}$ -fibrado principal

- Projecção $f^*\pi : (b, p) \in f^*P \mapsto b \in B$,
- Aplicação de momento $f^*\mu : (b, p) \in f^*P \mapsto \mu(p) \in M$,
- Ação $f^*\theta : \mathcal{G} \times_M f^*P \rightarrow f^*P$ é por ação à esquerda na segunda componente: $g \cdot (b, p) = (b, g \cdot p)$.

Além disso, a aplicação $\text{pr}_2 : (b, p) \in f^*P \mapsto p \in P$ define um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre a $f : B \rightarrow B'$. Cada seção local $\sigma : U \rightarrow P$ de π induz uma seção local $f^*\sigma : b \in f^{-1}(U) \mapsto (b, \sigma(f(b))) \in f^*P$ de $f^*\pi$ chamada de seção pullback de σ . Portanto cada atlas $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ de P induz um atlas pullback para f^*P dado por $\{f^*\sigma_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow f^*P\}_{i \in I}$.

Observe que todo $\mathcal{G}$ -morfismo $F : P_1 \rightarrow P_2$, sobre $f : B_1 \rightarrow B_2$, pode ser fatorado como a composição um $\mathcal{G}$ -morfismo $\bar{F} : p \in P_1 \mapsto (\pi_1(p), F(p)) \in f^*P_2$ sobre a identidade de B_1 , e do

$\mathcal{G}$ -morfismo do exemplo anterior $\text{pr}_2 : (b, q) \in f^*P_2 \mapsto q \in P_2$ cuja característica principal é que ele é uma bijeção nas fibras $(f^*P_2)_b \rightarrow (P_2)_{f(b)}$.

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\bar{F}} & f^*P_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & P_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\text{id}_{B_1}} & B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} \quad (1.2)$$

Essa fatoração é importante na classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais e motiva a seguinte proposição

Proposição 1.37. *Sejam $\pi_i : P_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i : P_i \rightarrow M$. Seja $F : P_1 \rightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre a identidade de B . Então F é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo.*

Demonstração. Vamos verificar que:

- F é injetora: Sejam $p, q \in P_1$ tais que $F(p) = F(q)$. Como $\pi_1 = \pi_2 \circ F$, então existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $q = g \cdot p$. Logo $F(p) = F(g \cdot p)$ implica $g = 1_x$, com $x = \mu_1(p)$. Portanto $p = q$.
- F é sobrejetora: Seja $q \in P_2$, escolha $p \in P_1$ tal que $\pi_1(p) = \pi_2(q)$. Logo $\pi_2(F(p)) = \pi_2(q)$, então existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $q = g \cdot F(p) = F(g \cdot p)$.
- Para cada $p \in P_1$, $d_p F$ é um isomorfismo: Segue da Proposição 1.23(4) que $\dim P_1 = \dim P_2$. Então resta verificar que $d_p F$ é injetora. Seja $v \in T_p P_1$ tal que $d_p F \cdot v = 0$, como $\pi_1 = \pi_2 \circ F$ então $v \in \ker(d_p \pi_1)$. Se θ_i denota ação de $\mathcal{G}$ em P_i , $i = 1, 2$, segue da Proposição 1.23(3) que $d_{1_x} \theta_1^p : \ker(d_{1_x} s) \rightarrow \ker(d_p \pi_1)$ é um isomorfismo, onde $x = \mu_1(p)$. Portanto existe $\xi \in \ker(d_{1_x} s)$ satisfazendo $v = d_{1_x} \theta_1^p \cdot \xi$. Como $\theta_2^{F(p)} = F \circ \theta_1^p$, para cada $p \in P_1$, obtemos que $d_{1_x} \theta_2^{F(p)} \cdot \xi = 0$. Sendo $d_{1_x} \theta_2^{F(p)}$ um isomorfismo temos $\xi = 0$ e portanto $v = 0$.

Temos provado que F é um difeomorfismo local e uma bijeção, portanto F é um difeomorfismo. $\square$

Como uma aplicação direta da proposição anterior iremos mostrar que, a menos de isomorfismo, existe um único $M \times M$ -fibrado principal.

Exemplo 1.38. *Uma ação do grupoide $M \times M \rightrightarrows M$ com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$ fica codificada numa aplicação $\theta : M \times P \rightarrow P$ que satisfaz as seguintes equações*

$$\theta(\mu(p), p) = p; \quad \mu(\theta(x, p)) = x; \quad \theta(y, \theta(x, p)) = \theta(y, p)$$

para todo $x, y \in M$ e $p \in P$. Ora, seja $\mu : P \rightarrow M$ a aplicação de momento de um $M \times M$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow B$. A invariância da projeção pela ação do grupoide fica codificada na equação

$$\pi(\theta(x, p)) = \pi(p)$$

para todo $x \in M$ e $p \in P$. De outra parte, é claro que $\text{pr}_2 : M \times B \rightarrow B$ é um $M \times M$ -fibrado principal com aplicação de momento $\text{pr}_1 : M \times B \rightarrow M$ e ação definida por

$$\theta_0 : (y, x, b) \in M \times M \times B \mapsto (y, b) \in M \times B$$

Por último, a aplicação

$$\begin{aligned} F: P &\longrightarrow M \times B \\ p &\longmapsto (\mu(p), \pi(p)) \end{aligned}$$

define um $M \times M$ -morfismo sobre a identidade de B e portanto F é um $M \times M$ -isomorfismo. Em conclusão, a menos de isomorfismo, $\text{pr}_2: M \times B \rightarrow B$ é o único $M \times M$ -fibrado principal.

Segue da decomposição de todo $\mathcal{G}$ -morfismo feita em (1.2) o seguinte corolário.

Corolário 1.39. *Sejam $\pi_i: P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i: P_i \rightarrow M$. Seja $F: P_1 \rightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre $f: B_1 \rightarrow B_2$. Então o seguinte diagrama é um pullback*

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Em particular $P_1 \simeq f^*P_2$.

Observação 1.40. *Sejam $\pi_2: P_2 \rightarrow B_2$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal e $f: B_1 \rightarrow B_2$ uma aplicação diferenciável. O corolário acima pode ser interpretado como a resposta a seguinte pergunta: Procuramos um par (P, F) , onde P seja um $\mathcal{G}$ -fibrado principal sobre B_1 e $F: P \rightarrow P_2$ seja um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre f . Quantos de tais pares existem? O corolário acima diz que, a menos de isomorfismo, existe um único par.*

Observação 1.41. *Dados $\pi_i: P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i: P_i \rightarrow M$; e seja $F: P_1 \rightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre a aplicação $f: B_1 \rightarrow B_2$. Dada uma seção local $\sigma_2: U \rightarrow P_2$ de π_2 , usando o corolário acima, podemos gerar uma seção local $\sigma_1: f^{-1}(U) \rightarrow P_1$ de π_1 . Essas seções locais fazem com que o seguinte diagrama seja comutativo*

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ \sigma_1 \uparrow & & \uparrow \sigma_2 \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

Isso implica $f_1 = f_2 \circ f$, onde $f_i = \mu_i \circ \sigma_i$, $i = 1, 2$.

Observação 1.42. *Nesse momento podemos já apontar um fato importante sobre os $\mathcal{G}$ -fibrados principais: Todos os $\mathcal{G}$ -fibrados principais são localmente isomorfismos a um pullback do $\mathcal{G}$ -fibrado unitário. Com efeito, dada uma seção local $\sigma: U \rightarrow P$ de π , o difeomorfismo Φ definido em (1.1) é um isomorfismo entre P_U e o pullback do $\mathcal{G}$ -fibrado unitário pela aplicação $f = \mu \circ \sigma$.*

Segue também da prova da Proposição 1.37 o seguinte corolário.

Corolário 1.43. *Sejam $\pi_i: P_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i: P_i \rightarrow M$. Seja $F: P_1 \rightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre um difeomorfismo $f: B_1 \rightarrow B_2$. Então F é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo.*

Como vimos acima, para cada $\mathcal{G}$ -fibrado principal e para cada atlas dele podemos associar um cociclo de Haefliger. Reciprocamente, dado um cociclo de Haefliger na Subseção 1.3.1 foi apresentado o procedimento para obter um $\mathcal{G}$ -fibrado principal e um atlas para ele cujas funções de

transição sejam o cociclo de Haefliger dado. Assim não deve surpreender que se começássemos com um $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \rightarrow B$ e um atlas $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ para ele, e se tomássemos o cociclo de Haefliger definido pelas suas funções de transição $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{G}\}_{i,j \in I}$ para construir o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\tilde{\pi} : \tilde{P} \rightarrow B$ descrito na Subseção 1.3.1 obteríamos que $P \simeq \tilde{P}$. Mais explicitamente, o seguinte $\mathcal{G}$ -morfismo sobre a identidade de B

$$\begin{aligned} F : P &\longrightarrow \tilde{P} \\ p &\longmapsto [i, \pi(p), \delta(p, \sigma_i(\pi(p)))] \end{aligned}$$

fornece um isomorfismo entre P e $\tilde{P}$. Dessa forma a noção de isomorfismo de $\mathcal{G}$ -fibrados principais sobre B se traduz em uma relação de equivalência entre cociclos de Haefliger sobre B a valores no grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$. E talvez a maneira mais simples de pensar dois cociclos de Haefliger equivalentes é como dois atlas do mesmo $\mathcal{G}$ -fibrado principal.

Observação 1.44. *Embora o nome pareça indicar o contrario, não estamos assumindo a priori que os $\mathcal{G}$ -fibrados principais sejam fibrados; i.e. não exigimos a propriedade de que a projeção $\pi : P \rightarrow B$ seja localmente trivial, e em geral não é localmente trivial no sentido clássico da palavra.*

1.4 Espaços classificantes

Cada grupoide de topológico $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ tem um $\mathcal{G}$ -fibrado universal, no sentido que qualquer $\mathcal{G}$ -fibrado principal é isomorfo ao pullback deste $\mathcal{G}$ -fibrado universal por uma aplicação contínua. A seguir apresentamos os resultados básicos da classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados. Nesta seção trabalharemos na categoria topológica, i.e. grupoides topológicos, espaços topológicos e aplicações contínuas.

Definição 1.45. *Um grupoide de topológico é um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ onde $\mathcal{G}$ e M são espaços topológicos, todas as aplicações de estrutura são contínuas, e as aplicações **s** e **t** são sobrejetoras e abertas.*

Definição 1.46. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide topológico. Um $\mathcal{G}$ -fibrado principal topológico P sobre B consiste de:*

1. *Uma ação à esquerda $\mathcal{G} \curvearrowright P$ ao longo da aplicação $\mu : P \rightarrow M$ (não necessariamente sobrejetora),*
2. *Uma aplicação sobrejetora e $\mathcal{G}$ -invariante $\pi : P \rightarrow B$ que admite seções locais ao redor de todo ponto em B ,*

tais que a aplicação

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{G} \times_M P &\longrightarrow P \times_B P \\ (g, p) &\longmapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Os $\mathcal{G}$ -fibrados principais topológicos tem propriedades semelhantes aos $\mathcal{G}$ -fibrados diferenciáveis. Isto é:

- Temos uma proposição similar à Proposição 1.23(1), (2) e (3).
- Temos aplicação divisão $\delta := \text{pr}_1 \circ \Delta^{-1} : P \times_B P \longrightarrow \mathcal{G}$, caracterizada pela equação $q = \delta(q, p) \cdot p$.
- Cada seção local $\sigma : U \longrightarrow P$ de π , cuja existência agora é exigida pela definição, induz um isomorfismo $\Phi^{-1} : (b, g) \in f^*\mathcal{G} \longmapsto g \cdot \sigma(b) \in P_U$. Da mesma forma, uma coleção de seções locais $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ de π tal que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de B será chamada de atlas de P . Para um atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ de P temos o seu conjunto de funções de transição $\gamma_{ij} : b \in U_i \cap U_j \longmapsto \delta(\sigma_i(b), \sigma_j(b)) \in \mathcal{G}$.
- Temos cociclos de Haefliger a valores em $\mathcal{G}$, e o conjunto de funções de transição de um atlas de P define um de tais cociclos. O recíproco também é verdadeiro, para cada cociclo de Haefliger existe um $\mathcal{G}$ -fibrado principal e um atlas para ele para o qual o cociclo dado é o seu conjunto de funções de transição.
- Temos $\mathcal{G}$ -morfismos e $\mathcal{G}$ -isomorfismos. Temos um lema similar ao Lema 1.36 que diz que um $\mathcal{G}$ -morfismo que é um homeomorfismo, é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo.

Para $\mathcal{G}$ -fibrados principais topológicos temos a seguinte lema

Lema 1.47. *Seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal topológico com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$. Então π é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Seja $V \subset P$ um subconjunto aberto. Dado $p_0 \in V$, denote $b_0 = \pi(p_0)$. Seja $\sigma : U \longrightarrow P$ uma seção local de π ao redor de b_0 , denote $g_0 = \delta(p_0, \sigma(b_0))$ então $p_0 = g_0 \cdot \sigma(b_0)$. Como ação $\theta : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow P$ é contínua e $(g_0, \sigma(b_0)) \in \theta^{-1}(V)$ então existem $N \subset \mathcal{G}$ vizinhança de g_0 e $W_1 \subset P$ vizinhança de $\sigma(b_0)$ tais que

$$(N \times W_1) \cap \mathcal{G} \times_M P \subset \theta^{-1}(V)$$

Como $\mathbf{s}(N) \subset M$ é um subconjunto aberto e $\mu(\sigma(b_0)) = \mathbf{s}(g_0) \in \mathbf{s}(N)$ então existe $W_2 \subset P$ vizinhança de $\sigma(b_0)$ tal que

$$W_2 \subset \mu^{-1}(\mathbf{s}(N))$$

Denote $U_1 = \sigma^{-1}(W_1 \cap W_2)$.

Afirmção: $U_1 \subset \pi(V)$. Com efeito, seja $b \in U_1$, então existe $g \in N$ tal que $\mathbf{s}(g) = \mu(\sigma(b))$. Como $(g, \sigma(b)) \in (N \times W_1) \cap \mathcal{G} \times_M P$. Logo $g \cdot \sigma(b) \in V$ e portanto $b = \pi(g \cdot \sigma(b)) \in \pi(V)$. $\square$

A seguinte proposição é semelhante à Proposição 1.37 e o seu corolário são importantes para o teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais topológicos.

Proposição 1.48. *Sejam $\pi_i : P_i \longrightarrow B$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i : P_i \longrightarrow M$. Seja $F : P_1 \longrightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre a identidade de B . Então F é um $\mathcal{G}$ -isomorfismo.*

Demonstração. A prova que neste caso F também é uma bijeção é igual a aquela feita na Proposição 1.37. Resumindo, temos que F é uma bijeção contínua e para terminar a prova desta proposição resta verificar que F é uma aplicação aberta. Seja $V \subset P_1$ um subconjunto aberto. Dado $p_0 \in V$

denotamos $q_0 = F(p_0)$ e $x_0 = \mu_1(p_0) = \mu_2(q_0)$. Como ação $\theta_1 : \mathcal{G} \times_M P_1 \longrightarrow P_1$ é continua existem $W_1 \subset P_1$ vizinhança de p_0 e $N \subset \mathcal{G}$ vizinhança de 1_{x_0} tais que

$$(N \times W_1) \cap \mathcal{G} \times_M P_1 \subset \theta_1^{-1}(V)$$

Como aplicação de divisão $\delta_2 : P_2 \times_B P_2 \longrightarrow \mathcal{G}$ é continua e $\delta_2(q_0, q_0) = 1_{x_0} \in N$ então existe uma vizinhança $W_2 \subset P_2$ de q_0 tal que

$$(W_2 \times W_2) \cap P_2 \times_B P_2 \subset \delta_2^{-1}(N)$$

Pela continuidade de F podemos assumir, sem perda de generalidade, que $F(W_1) \subset W_2$. Como π_1 é aberta então $U = \pi_1(W_1) \subset B$ é um subconjunto aberto. E podemos assumir, novamente sem perda de generalidade, que $\pi_1(W_1) = \pi_2(W_2)$.

Afirmção: $W_2 \subset F(V)$. Com efeito, para cada $q \in W_2$ existe $p \in W_1$ tal que $\pi_1(p) = \pi_2(q)$. Logo $(q, F(p)) \in (W_2 \times W_2) \cap P_2 \times_B P_2$, portanto $g = \delta_2(q, F(p)) \in N$ e $q = g \cdot F(p) = F(g \cdot p)$. Além disso note que $s(g) = \mu_2(F(p)) = \mu_1(p)$, portanto $(g, p) \in (N \times W_1) \cap \mathcal{G} \times_M P_1$. Assim $g \cdot p \in V$ o que implica $q = F(g \cdot p) \in F(V)$. $\square$

Corolário 1.49. *Sejam $\pi_i : P_i \longrightarrow B_i$, $i = 1, 2$, dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\mu_i : P_i \longrightarrow M$. Seja $F : P_1 \longrightarrow P_2$ um $\mathcal{G}$ -morfismo sobre $f : B_1 \longrightarrow B_2$. Então $P_1 \simeq f^*P_2$.*

Alguns exemplos de $\mathcal{G}$ -fibrados principais topológicos se correspondem com os exemplos apresentados na seção anterior. Em particular podemos fazer pullback de $\mathcal{G}$ -fibrados principais topológicos por aplicações continuas, e mais importante ainda é a observação que todos $\mathcal{G}$ -fibrado principal topológico é localmente isomorfo ao pullback do $\mathcal{G}$ -fibrado unitário, lembrando que esses isomorfismos locais são obtidos a partir de seções locais da projeção. Outra forma de caracterizar seções locais (ou globais) em um $\mathcal{G}$ -fibrado principal é dada na seguinte proposição.

Proposição 1.50. *Seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$. Então existe uma bijeção entre*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}\text{-morfismos} \\ \Psi : P \longrightarrow \mathcal{G} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma : B \longrightarrow P \\ \text{seções globais de } \pi \end{array} \right\}$$

Demonstração. Seja $\sigma : B \longrightarrow P$ uma seção global de π , então a aplicação $\Psi : p \in P \longmapsto \delta(p, \sigma(\pi(p))) \in \mathcal{G}$ define um $\mathcal{G}$ -morfismo. Reciprocamente, seja $\Psi : P \longrightarrow \mathcal{G}$ um $\mathcal{G}$ -morfismo. Note que $p \in P \longmapsto (\Psi(p))^{-1} \cdot p \in P$ define uma aplicação $\mathcal{G}$ -invariante e portanto ela desce para uma aplicação $\sigma : B \longrightarrow P$ que também é uma seção global de π . $\square$

Observação 1.51. *Resumindo as construções feitas na proposição acima, a relação entre um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi : P \longrightarrow \mathcal{G}$ e uma seção global $\sigma : B \longrightarrow P$ é guardada na equação*

$$\Psi(p) = \delta(p, \sigma(\pi(p)))$$

A mesma relação é valida para $\mathcal{G}$ -morfismos “locais” e seções locais de π . Em particular, dado um atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ de P obtemos uma coleção de $\mathcal{G}$ -morfismos $\{\Psi_i : P_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}\}_{i \in I}$, esses

$\mathcal{G}$ -morfismos relacionam-se com as funções de transição γ_{ij} pela equação

$$\Psi_j(p) = \Psi_i(p)\gamma_{ij}(\pi(p)) \quad ; \forall p \in P_{U_i \cap U_j}$$

O teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais mostrará que para todo $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P \rightarrow B$ existe um $\mathcal{G}$ -morfismo de P para o $\mathcal{G}$ -fibrado universal $P\mathcal{G} \rightarrow B\mathcal{G}$, e que dois de tais $\mathcal{G}$ -morfismos são $\mathcal{G}$ -homotópicos. Assim pelo Corolário 1.49 todo $\mathcal{G}$ -fibrado principal é isomorfismo ao pullback de $P\mathcal{G}$ por uma aplicação continua. A primeira versão do teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais foi dada por Haefliger em [Hae70], onde é usado o teorema de representabilidade de funtores de Brown [Bro62] para garantir a existência do espaço classificante $B\mathcal{G}$ e sem uma construção explícita do $P\mathcal{G}$. Por outro lado, é bem conhecido que para grupos topológicos Milnor [Mil56] fez uma construção explícita do fibrado universal e essa construção já é padrão em textos sobre fibrados, por exemplo [Hus94] e [tD08]. Buffet e Lor em [BL70] mostraram que é possível adaptar a construção de Milnor para obter uma descrição explícita do $\mathcal{G}$ -fibrado universal. A seguir apresentamos essa construção.

1.4.1 Construção do $\mathcal{G}$ -fibrado universal

Denote por:

- $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ uma sequência de elementos no intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$, tais que só um numero finito de t_i 's são diferentes de zero e $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$,
- $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3, \dots)$ uma sequência de elementos em $\mathcal{G}$ tais que $\mathbf{t}(g_i) = \mathbf{t}(g_j)$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

No conjunto de pares de tais sequências $\{(\vec{t}, \vec{g})\}$ definimos a relação de equivalência

$$(\vec{t}, \vec{g}) \sim (\vec{t}', \vec{g}') \iff t_i = t'_i \text{ para todo } i \geq 1 \text{ e } g_i = g'_i \text{ quando } t_i \neq 0$$

Denotamos o espaço quociente $P\mathcal{G} := \{(\vec{t}, \vec{g})\} / \sim$. Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{ll} \widehat{\tau}_i: P\mathcal{G} \longrightarrow [0, 1] & \mathbf{p}_i: \widehat{\tau}_i^{-1}((0, 1]) \longrightarrow \mathcal{G} \\ [\vec{t}, \vec{g}] \longmapsto t_i & [\vec{t}, \vec{g}] \longmapsto g_i \end{array}$$

Em $P\mathcal{G}$ escolha a menor topologia que faz as funções $\widehat{\tau}_i$ e $\mathbf{p}_i$ são continuas, para todo $i \geq 1$ ³. Observe que para essa topologia a coleção $\{\mathcal{V}_i := \widehat{\tau}_i^{-1}((0, 1])\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $P\mathcal{G}$.

Defina aplicação de momento $\mu_{\mathcal{G}} : [\vec{t}, \vec{g}] \in P\mathcal{G} \mapsto \mathbf{t}(g_i) \in M$. Assim, localmente temos os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_i & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{G}}} & M \\ & \searrow \mathbf{p}_i & \nearrow \mathbf{t} \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

e portanto $\mu_{\mathcal{G}}$ é continua.

Defina ação $\theta_{\mathcal{G}} : (g, [\vec{t}, \vec{h}]) \in \mathcal{G} \times_M P\mathcal{G} \mapsto [\vec{t}, g\vec{h}] \in P\mathcal{G}$, onde se $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3, \dots)$ então $g\vec{h} = (gh_1, gh_2, gh_3, \dots)$. Pode-se verificar que para essa ação temos que $\widehat{\tau}_i$ é $\mathcal{G}$ -invariante e $\mathbf{p}_i$ é

³Isto é, uma aplicação $f : Y \rightarrow P\mathcal{G}$ é continua se e somente se $\widehat{\tau}_i \circ f : Y \rightarrow [0, 1]$ e $\mathbf{p}_i \circ f : f^{-1}(\widehat{\tau}_i^{-1}((0, 1])) \rightarrow \mathcal{G}$ são continuas, para todo $i \geq 1$.

$\mathcal{G}$ -equivariante. Observe que temos os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_M P\mathcal{G} & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{G}}} & P\mathcal{G} \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \hat{\tau}_i \\ P\mathcal{G} & \xrightarrow{\hat{\tau}_i} & [0, 1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_M \mathcal{V}_i & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{G}}} & \mathcal{V}_i \\ \text{id}_{\mathcal{G}} \times \mathbf{p}_i \downarrow & & \downarrow \mathbf{p}_i \\ \mathcal{G}^{(2)} & \xrightarrow{\mathbf{m}} & \mathcal{G} \end{array}$$

e portanto $\theta_{\mathcal{G}}$ é continua.

Defina $B\mathcal{G} := P\mathcal{G}/\mathcal{G}$ com a topologia quociente e aplicação quociente $\pi_{\mathcal{G}} : P\mathcal{G} \rightarrow B\mathcal{G}$ como projeção. Então é claro que $\pi_{\mathcal{G}}$ é uma aplicação continua sobrejetora e $\mathcal{G}$ -invariante.

Veja que pelo fato que as aplicações $\hat{\tau}_i$'s serem $\mathcal{G}$ -invariantes temos que a coleção $\{\mathcal{U}_i := \pi_{\mathcal{G}}(\mathcal{V}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $B\mathcal{G}$. Para cada $i \geq 1$ temos a seguinte aplicação continua

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i : \mathcal{V}_i &\longrightarrow P\mathcal{G} \\ [\vec{t}, \vec{g}] &\longmapsto (\mathbf{p}_i([\vec{t}, \vec{g}]))^{-1} \cdot [\vec{t}, \vec{g}] \end{aligned}$$

Como $\bar{\sigma}_i$ é $\mathcal{G}$ -invariante ela desce para uma aplicação continua $\sigma_i : \mathcal{U}_i \rightarrow B\mathcal{G}$ que também é uma seção de $\pi_{\mathcal{G}}$.

Finalmente, para terminar de verificar que $\pi_{\mathcal{G}} : P\mathcal{G} \rightarrow B\mathcal{G}$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal resta mostrar que $(g, p) \in \mathcal{G} \times_M P\mathcal{G} \mapsto (g \cdot p, p) \in P\mathcal{G} \times_{B\mathcal{G}} P\mathcal{G}$ é um homeomorfismo, ou equivalentemente que aplicação divisão $\delta_{\mathcal{G}} : P\mathcal{G} \times_{B\mathcal{G}} P\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é continua. Para isto, se denotamos $\mathcal{V}_i \times_{B\mathcal{G}} \mathcal{V}_i := (\mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_i) \cap P\mathcal{G} \times_{B\mathcal{G}} P\mathcal{G}$ verifica-se que a coleção $\{\mathcal{V}_i \times_{B\mathcal{G}} \mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $P\mathcal{G} \times_{B\mathcal{G}} P\mathcal{G}$ e localmente temos os seguinte diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_i \times_{B\mathcal{G}} \mathcal{V}_i & \xrightarrow{\delta_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \\ & \searrow (\text{id} \times \mathbf{p}_i) \times \mathbf{p}_i & \nearrow \mathbf{m} \\ & \mathcal{G}^{(2)} & \end{array}$$

e portanto $\delta_{\mathcal{G}}$ é continua.

1.4.2 Classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais

Lembre-se que, seguindo [Dol95], uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de um espaço topológico B é dita enumerável se existe uma partição da unidade $\{u_i : B \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ tal que $u_i^{-1}((0, 1]) \subset U_i$. Em particular, para cada $b \in B$ o conjunto $\{i \in I : u_i(b) \neq 0\}$ é enumerável. De acordo com a Proposição 2.8 do Apêndice A em [Dol95] podemos supor que $\{u_i : B \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ é localmente finita. Lembre-se que para espaços Hausdorff paracompactos qualquer cobertura aberta é enumerável; na verdade nesses espaços temos uma propriedade um pouco mais forte: $\overline{u_i^{-1}((0, 1])} \subset U_i$.

Definição 1.52. *Seja $\pi : P \rightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$. Dizemos que P é enumerável se ele admite um atlas $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ onde $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura enumerável de B .*

Observação 1.53.

- Os $\mathcal{G}$ -fibrados principais com base B Hausdorff paracompacta são exemplos de $\mathcal{G}$ -fibrados principais enumeráveis.
- O $\mathcal{G}$ -fibrado universal é enumerável. Com efeito, como as aplicações $\widehat{\tau}_i$'s são $\mathcal{G}$ -invariantes elas descem para uma partição da unidade pontualmente finita $\{\tau_i : B\mathcal{G} \rightarrow [0, 1]\}_{i \in \mathbb{N}}$. Essa partição da unidade faz com que a cobertura aberta $\{\mathcal{U}_i := \pi_{\mathcal{G}}(\mathcal{V}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $B\mathcal{G}$ seja enumerável.
- Se $\pi : P \rightarrow B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal enumerável com atlas $\{\sigma_i : U_i \rightarrow P\}_{i \in I}$ e partição da unidade $\{u_i : B \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$; então podemos considerar a coleção $\{\sigma_i : u_i^{-1}((0, 1]) \rightarrow P\}_{i \in I}$ como um atlas para P .

Proposição 1.54. *Seja $\pi : P \rightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal enumerável com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$. Então existe um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi : P \rightarrow P\mathcal{G}$.*

Demonstração. De acordo com a Proposição 12.1 do Capítulo 4 em [Hus94] podemos assumir que B possui uma partição da unidade enumerável e localmente finita $\{u_i : B \rightarrow [0, 1]\}_{i \in \mathbb{N}}$ e que temos um atlas da forma $\{\sigma_i : u_i^{-1}((0, 1]) \rightarrow P\}_{i \in \mathbb{N}}$. De acordo com nossa Proposição 1.50, para cada $i \in \mathbb{N}$ temos definido um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi_i : P_i \rightarrow \mathcal{G}$, onde $P_i = \pi^{-1}(u_i^{-1}((0, 1]))$. Estendemos a definição de cada Ψ_i por $\Psi_i(p) = 1_{\mu(p)}$ quando $p \notin P_i$. Assim dado $p \in P$, denotamos

$$\vec{u}(p) = (u_1(\pi(p)), u_2(\pi(p)), \dots, u_n(\pi(p)), \dots)$$

$$\vec{\Psi}(p) = (\Psi_1(p), \Psi_2(p), \dots, \Psi_n(p), \dots)$$

Essas aplicações induzem uma aplicação bem definida e continua

$$\begin{aligned} \Psi : P &\longrightarrow P\mathcal{G} \\ p &\longmapsto [\vec{u}(\pi(p)), \vec{\Psi}(p)] \end{aligned}$$

Essa aplicação é um $\mathcal{G}$ -morfismo, pois cada Ψ_i é um $\mathcal{G}$ -morfismo. □

Agora vamos mostrar que quaisquer par de $\mathcal{G}$ -morfismos de P para $P\mathcal{G}$ são $\mathcal{G}$ -homotópicos. Para isso, considere os subespaços de $P\mathcal{G}$

$$P\mathcal{G}^{\text{od}} = \{[\vec{t}, \vec{g}] \in P\mathcal{G} : t_{2i+1} = 0; i \geq 0\}$$

$$P\mathcal{G}^{\text{ev}} = \{[\vec{t}, \vec{g}] \in P\mathcal{G} : t_{2i} = 0; i > 0\}$$

Ora, para facilitar a escritura das seguintes aplicações vamos denotar os elementos de $P\mathcal{G}$ como $[\vec{t}, \vec{g}] = \begin{bmatrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_4, \dots \end{bmatrix}$. Considere as seguintes $\mathcal{G}$ -homotopias, $s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} H_s^{(0)} : \begin{bmatrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_4, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} &\longmapsto \begin{bmatrix} st_1, (1-s)t_1, st_2, (1-s)t_2, st_3, (1-s)t_3, \dots \\ g_1, g_1, g_2, g_2, g_3, g_3, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} \\ H_s^{(1)} : \begin{bmatrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_4, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} &\longmapsto \begin{bmatrix} t_1, st_2, (1-s)t_2, st_3, (1-s)t_3, st_4, (1-s)t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_2, g_3, g_3, g_4, g_4, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_s^{(2)} : \begin{bmatrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_4, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} &\longmapsto \begin{bmatrix} t_1, t_2, st_3, (1-s)t_3, st_4, (1-s)t_4, st_5, (1-s)t_5, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_3, g_4, g_4, g_5, g_5, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} \\
 \vdots & \\
 H_s^{(n)} : \begin{bmatrix} t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \\ g_1, g_2, g_3, g_4, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} &\longmapsto \begin{bmatrix} t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n, st_{n+1}, (1-s)t_{n+1}, st_{n+2}, (1-s)t_{n+2}, \dots \\ g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, g_n, g_{n+1}, g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+2}, \dots \end{bmatrix} \in P\mathcal{G} \\
 \vdots &
 \end{aligned}$$

Observe que $H_0^{(0)}(P\mathcal{G}) = P\mathcal{G}^{\text{od}}$ e $H_1^{(0)}(P\mathcal{G}) = P\mathcal{G}^{\text{ev}}$, e para todo $[\vec{t}, \vec{g}] \in P\mathcal{G}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H_s^{(n)}([\vec{t}, \vec{g}]) = [\vec{t}, \vec{g}]$, $\forall n \geq N$ e $\forall s \in [0, 1]$. Considere as aplicações

$$\begin{aligned}
 \alpha_n : \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] &\longrightarrow [0, 1] \\
 s &\longmapsto 2^{n+1}s + 2^n - 2
 \end{aligned}$$

para $n \geq 0$. Finalmente definimos duas $\mathcal{G}$ -homotopias

$$\begin{aligned}
 H_s^{\text{od}} : P\mathcal{G} &\longrightarrow P\mathcal{G}; \quad H_s^{\text{od}} = H_{\alpha_n(s)}^{(n)}, \text{ quando } s \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right], \text{ e } H_1^{\text{od}} = \text{id}_{P\mathcal{G}} \\
 H_s^{\text{ev}} : P\mathcal{G} &\longrightarrow P\mathcal{G}; \quad H_s^{\text{ev}} = H_{\alpha_{n+1}(s)}^{(n+1)}, \text{ quando } s \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right], \text{ e } H_1^{\text{ev}} = \text{id}_{P\mathcal{G}}
 \end{aligned}$$

Assim H_s^{od} é uma $\mathcal{G}$ -homotopia entre uma aplicação H_0^{od} , cuja imagem é $P\mathcal{G}^{\text{od}}$, e a identidade de $P\mathcal{G}$. Para H^{ev} também temos uma conclusão semelhante.

Proposição 1.55. *Seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal enumerável com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$. Sejam $\Psi, \Phi : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ dois $\mathcal{G}$ -morfismos. Então existe uma $\mathcal{G}$ -homotopia $H : P \times [0, 1] \longrightarrow P\mathcal{G}$ tal que $H_0 = \Psi$ e $H_1 = \Phi$.*

Demonstração. Usando as $\mathcal{G}$ -homotopias H^{od} e H^{ev} podemos supor que $\Psi : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ tem imagem em $P\mathcal{G}^{\text{od}}$ e que $\Phi : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ tem imagem em $P\mathcal{G}^{\text{ev}}$, isto é

$$\begin{aligned}
 \Psi(p) &= \begin{bmatrix} 0, t_1(p), 0, t_2(p), 0, t_3(p), \dots \\ 0, \psi_1(p), 0, \psi_2(p), 0, \psi_3(p), \dots \end{bmatrix} \\
 \Phi(p) &= \begin{bmatrix} u_1(p), 0, u_2(p), 0, u_3(p), 0, \dots \\ \phi_1(p), 0, \phi_2(p), 0, \phi_3(p), 0, \dots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Finalmente, $H : P \times [0, 1] \longrightarrow P\mathcal{G}$ é definida por

$$H(p, s) = \begin{bmatrix} su_1(p), (1-s)t_1(p), su_2(p), (1-s)t_2(p), su_3(p), (1-s)t_3(p), \dots \\ \phi_1(p), \psi_1(p), \phi_2(p), \psi_2(p), \phi_3(p), \psi_3(p), \dots \end{bmatrix} \quad \square$$

As Proposições 1.54 e 1.55 são a parte mais importante do teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais que será provado abaixo. O $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ construído na Proposição 1.54 será chamado de $\mathcal{G}$ -morfismo classificante de P e a aplicação induzida nas bases $\psi : B \longrightarrow B\mathcal{G}$ será chamada de aplicação classificante de P . A Proposição 1.55 diz que o morfismo classificante está bem definido a menos de $\mathcal{G}$ -homotopia, e portanto a aplicação classificante está bem definida a menos de homotopia. Antes de enunciar o teorema de classificante precisamos da seguinte definição.

Definição 1.56. *Sejam $\pi_0 : P_0 \longrightarrow B$ e $\pi_1 : P_1 \longrightarrow B$ dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Dizemos que P_0 e P_1 são [enumeravelmente] homotópicos se existem: um $\mathcal{G}$ -fibrado principal [enumerável] $\pi : P \longrightarrow B \times [0, 1]$, dois $\mathcal{G}$ -morfismos $\Psi_0 : P_0 \longrightarrow P$ e $\Psi_1 : P_1 \longrightarrow P$ tais que os seguintes diagramas*

são comutativos

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\Psi_0} & P \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{i_0} & B \times [0, 1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & P \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{i_1} & B \times [0, 1] \end{array}$$

onde $i_0 : b \in B \mapsto (b, 0) \in B \times [0, 1]$ e $i_1 : b \in B \mapsto (b, 1) \in B \times [0, 1]$. Em particular: $P_0 \simeq i_0^* P$ e $P_1 \simeq i_1^* P$.

Denotaremos por $P_0 \sim P_1$ quando P_0 e P_1 sejam $\mathcal{G}$ -fibrados principais homotópicos. Lembre-se que no caso de fibrados principais com grupo de estrutura, dois fibrados principais homotópicos são isomorfos⁴. No entanto, para fibrados com grupoide de estrutura isso em geral não é verdade, como mostra a seguinte observação.

Observação 1.57. *Uma condição necessária para que exista um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi : P_0 \rightarrow P_1$ entre dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais (inclusive sobre espaços base diferentes) é que $\mu_0(P_0) \subset \mu_1(P_1)$, onde μ_i denota a aplicação de momento de P_i ; $i = 0, 1$. Logo para encontrar $\mathcal{G}$ -fibrados principais P_0 e P_1 homotópicos não isomorfos basta exibir dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais homotópicos cujas imagens pelas suas respectivas aplicações de momento não se intersectem. Isto pode ser alcançado por $\mathcal{G}$ -fibrados pullback $f^* \mathcal{G}$, para alguma $f : B \times \mathbb{I} \rightarrow M$ satisfazendo a condição que $f_0(B)$ e $f_1(B)$ caem em orbitas do grupoide diferentes.*

Contudo, também existe um teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais, só que esta classificação é a menos de homotopia. A seguir o teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais enumeráveis.

Teorema 1.58. *Seja $\pi_{\mathcal{G}} : P\mathcal{G} \rightarrow B\mathcal{G}$ o $\mathcal{G}$ -fibrado universal do grupoide topológico $\mathcal{G} \rightrightarrows M$. Então:*

1. *Para cada $\mathcal{G}$ -fibrado principal enumerável $\pi : P \rightarrow B$ existe um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Psi : P \rightarrow P\mathcal{G}$, chamado de $\mathcal{G}$ -morfismo classificante de P . Este $\mathcal{G}$ -morfismo induz uma aplicação $\psi : B \rightarrow B\mathcal{G}$, chamada de aplicação classificante de P , tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Psi} & P\mathcal{G} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{G}} \\ B & \xrightarrow{\psi} & B\mathcal{G} \end{array}$$

Em particular $P \simeq \psi^* P\mathcal{G}$. Além disso quaisquer dois $\mathcal{G}$ -morfismos classificantes de P são $\mathcal{G}$ -homotópicos.

2. *Sejam $\pi_0 : P_0 \rightarrow B$ e $\pi_1 : P_1 \rightarrow B$ dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Então P_0 e P_1 são enumeravelmente homotópicos se e somente se as suas aplicações classificantes são homotópicas.*

Demonstração. O item 1. já foi provado nas Proposições 1.54 e 1.55. Agora verificamos o item 2.

($\Rightarrow$) Seja $P \rightarrow B \times [0, 1]$ o $\mathcal{G}$ -fibrado principal que realiza a homotopia entre P_0 e P_1 , isto é existem $\mathcal{G}$ -morfismos $\Psi_0 : P_0 \rightarrow P$ e $\Psi_1 : P_1 \rightarrow P$ e se satisfazem as condições da Definição

⁴Vide, por exemplo, o Teorema 9.6 do Capítulo 4 em [Hus94]

1.56. Seja $\Phi : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ um $\mathcal{G}$ -morfismo classificante para P , com aplicação classificante $\phi : B \times [0, 1] \longrightarrow B\mathcal{G}$. A composta $\Phi \circ \Psi_0$ é um classificante para P_0 e portanto $\phi_0 := \phi \circ i_0$ é uma aplicação classificante para P_0 . De forma semelhante $\phi_1 := \phi \circ i_1$ é uma aplicação classificante para P_1 . Agora é claro que ϕ é uma homotopia entre ϕ_0 e ϕ_1 . Resta provar que esta propriedade não depende da escolha do $\mathcal{G}$ -morfismo classificante para P . Para isso suponha que $\Phi' : P \longrightarrow P\mathcal{G}$ é um outro $\mathcal{G}$ -morfismo classificante para P , o qual induz novas aplicações classificantes ϕ'_0 e ϕ'_1 para P_0 e P_1 respectivamente. Pela Proposição 1.55 existe uma $\mathcal{G}$ -homotopia $H : P \times [0, 1] \longrightarrow P\mathcal{G}$ tal que $H_0 = \Phi$ e $H_1 = \Phi'$ cuja aplicação induzida nas bases $h : (B \times [0, 1]) \times [0, 1] \longrightarrow B\mathcal{G}$ define uma homotopia entre as aplicações classificantes $h(b, t, 0) = \phi(b, t)$ e $h(b, t, 1) = \phi'(b, t)$ de P . Por fim, $h(b, 0, s)$ define uma homotopia entre ϕ_0 e ϕ'_0 e $h(b, 1, s)$ define uma homotopia entre ϕ_1 e ϕ'_1 .

($\Leftarrow$) Sejam P_0 e P_1 dois $\mathcal{G}$ -fibrados principais enumeráveis sobre B cujas aplicações classificantes $\psi_0 : B \longrightarrow B\mathcal{G}$ e $\psi_1 : B \longrightarrow B\mathcal{G}$ são homotópicas, com homotopia $h : B \times [0, 1] \longrightarrow B\mathcal{G}$. Note que, a menos de $\mathcal{G}$ -isomorfismo sobre id_B , é suficiente mostrar que $\psi_0^*P\mathcal{G}$ e $\psi_1^*P\mathcal{G}$ são homotópicos. Mas isso é simples de verificar pois o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P = h^*P\mathcal{G}$ realiza uma homotopia entre $\psi_0^*P\mathcal{G}$ e $\psi_1^*P\mathcal{G}$. $\square$

Se, como é usual, denotamos por $[B, B\mathcal{G}]$ ao conjunto de classes de homotopia de aplicações contínuas de B em $B\mathcal{G}$ e denotamos por $\text{Bun}_{\mathcal{G}}(B)$ ao conjunto de classes de isomorfismo de $\mathcal{G}$ -fibrados principais enumeráveis sobre B , então o teorema de classificação de $\mathcal{G}$ -fibrados principais diz que existe uma bijeção entre

$$[B, B\mathcal{G}] \longleftrightarrow \text{Bun}_{\mathcal{G}}(B) / \sim$$

1.5 $\mathcal{G}$ -fibrados associados

Para grupoides de Lie, de forma semelhante ao caso de grupos de Lie, dados um $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B$ e uma ação $\mathcal{G} \curvearrowright E$ ao longo de uma submersão sobrejetora $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$, podemos obter um novo “fibrado” sobre B , chamado de $\mathcal{G}$ -fibrado associado a P e denotado por $P \otimes_{\mathcal{G}} E$. Esta construção é completamente análoga ao caso de fibrados com grupo de estrutura, mas a lembramos aqui para fixar a notação.

Como $\mathbf{q}$ é uma submersão sobrejetora então o produto fibrado

$$P \times_M E = \{(p, e) \in P \times E : \mu(p) = \mathbf{q}(e)\}$$

é uma subvariedade mergulhada de $P \times E$ e sobre ele temos uma ação à esquerda do grupóide $\mathcal{G}$

$$g \cdot (p, e) = (g \cdot p, g \cdot e)$$

ao longo da aplicação $(p, e) \in P \times_M E \mapsto \mu(p) \in M$. Novamente, como $\mathbf{q}$ é submersão sobrejetora segue que $\text{pr}_1 : P \times_M E \longrightarrow P$ é uma submersão sobrejetora e além disso é uma aplicação $\mathcal{G}$ -equivariante. Segue do Lema 5.35 em [MM03] que

- o espaço quociente $P \otimes_{\mathcal{G}} E := (P \times_M E) / \mathcal{G}$ tem estrutura de variedade,
- aplicação quociente $P \times_M E \longrightarrow P \otimes_{\mathcal{G}} E$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal, e

- aplicação pr_1 desce para uma submersão sobrejetora

$$\begin{aligned} \pi_E : P \otimes_{\mathcal{G}} E &\longrightarrow B \\ [p, e] &\longmapsto \pi(p) \end{aligned}$$

tal que o seguinte diagrama é um diagrama pullback na categoria de variedades

$$\begin{array}{ccc} P \times_M E & \xrightarrow{\text{pr}_1} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \otimes_{\mathcal{G}} E & \xrightarrow{\pi_E} & B \end{array}$$

As fibras de $\pi_E : P \otimes_{\mathcal{G}} E \longrightarrow B$ são difeomorfas (não canonicamente) as fibras de $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$. Por exemplo, dado $b \in B$ e fixado $p_0 \in P_b$ temos os difeomorfismo

$$\begin{aligned} (P \otimes_{\mathcal{G}} E)_b &\longrightarrow E_{\mu(p)} \\ [p, e] &\longmapsto \delta(p_0, p) \cdot e \end{aligned}$$

Ora, cada seção local $\sigma : U \longrightarrow P$ da aplicação π induz um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : f^*E &\longrightarrow (P \otimes_{\mathcal{G}} E)_U \\ (b, e) &\longmapsto [\sigma(b), e] \end{aligned}$$

onde $f = \mu \circ \sigma$, e cuja inversa pode-se escrever explicitamente

$$\begin{aligned} \varphi : (P \otimes_{\mathcal{G}} E)_U &\longrightarrow f^*E \\ [p, e] &\longmapsto \left(\pi(p), \delta(\sigma(\pi(p)), p) \cdot e \right) \end{aligned}$$

Esta inversa faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} (P \otimes_{\mathcal{G}} E)_U & \xrightarrow{\varphi} & f^*E \\ & \searrow \pi_E & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array}$$

Assim (U, f, φ) é chamada de carta de $\mathcal{G}$ -fibrado associado de $P \otimes_{\mathcal{G}} E$. Um atlas de $\mathcal{G}$ -fibrado associado para $P \otimes_{\mathcal{G}} E$ é uma coleção $\{(U_i, f_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de cartas de $\mathcal{G}$ -fibrado associado tais que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de B . Em particular, cada atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ de fibrado principal para P induz um atlas de fibrado associado para $P \otimes_{\mathcal{G}} E$, e quando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(b, e) = (b, \gamma_{ij}(b) \cdot e)$$

onde as γ_{ij} 's são as funções de transição do atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$.

Se $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial e a ação $\mathcal{G} \curvearrowright E$ é uma representação então $\pi_E : P \otimes_{\mathcal{G}} E \longrightarrow B$ é um fibrado vetorial com posto igual ao posto de E , isto segue do fato que localmente $P \otimes_{\mathcal{G}} E$ é difeomorfo ao fibrado pullback f^*E e assim a propriedade de ser localmente trivial é herdada para

$P \otimes_{\mathcal{G}} E$. Assim, fixada uma representação $\theta : \mathcal{G} \times_M E \longrightarrow E$ temos uma aplicação induzida

$$\begin{aligned} \theta_* : \text{Bun}_{\mathcal{G}}(B) &\longrightarrow \text{Vect}(B) \\ P &\longmapsto P \otimes_{\mathcal{G}} E \end{aligned}$$

onde $\text{Vect}(B)$ denota o conjunto de classes de isomorfismo de fibrados vetoriais sobre B . Devido à invariância homotópica de fibrados vetoriais, segue que θ_* desce para $\text{Bun}_{\mathcal{G}}(B)$ modulo homotopia.

Para $\mathcal{G}$ -fibrados vetoriais associados existe outro procedimento para obtê-los, ele é baseado no Teorema 2.1.2 em [Mac05] que permite identificar as (classes de isomorfismo de) representações do grupoide de submersão de $\pi : P \longrightarrow B$ com os (classes de isomorfismo de) fibrados vetoriais sobre a base B . Para ser mais precisos, escrevemos a seguinte proposição.

Proposição 1.59. *Seja $\pi : P \longrightarrow B$ uma submersão sobrejetora. Existe uma identificação entre as representações do grupoide de submersão $P \times_B P \curvearrowright E'$ e os fibrados vetoriais E sobre B para os quais existe um morfismo de fibrados vetoriais $\Phi : E' \longrightarrow E$ cobrindo $\pi : P \longrightarrow B$ tal que o seguinte diagrama é um pullback*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\Phi} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Essa proposição é útil para estudar fibrados vetoriais sobre uma variedade quociente, como no caso dos $\mathcal{G}$ -fibrados principais e o seus fibrados vetoriais associados. Assim, se $\pi : P \longrightarrow B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$, e seja $\mathcal{G} \curvearrowright E$ uma representação, então o fibrado vetorial pullback $\mu^*E = P \times_M E$ tem uma representação do grupoide de ação $\mathcal{G} \times P$ definida por $(g, p) \cdot (p, e) = (g \cdot p, g \cdot e)$. Como os grupoides $\mathcal{G} \times P \rightrightarrows P$ e $P \times_B P \rightrightarrows P$ são isomorfismo, então pela proposição acima existe um fibrado vetorial sobre B , e tal fibrado é $P \otimes_{\mathcal{G}} E$ e além disso o seguinte diagrama é um pullback.

$$\begin{array}{ccc} P \times_M E & \xrightarrow{\text{mod-}\mathcal{G}} & P \otimes_{\mathcal{G}} E \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Como um exemplo desse procedimento de obter fibrados vetoriais na base de uma submersão sobrejetora apresentamos uma forma de obter o algebroide de Atiyah de um G -fibrado principal.

Exemplo 1.60. *Seja G um grupo de Lie, e seja $\pi : P \longrightarrow B$ um G -fibrado principal. Denote por $\theta : G \times P \longrightarrow P$ a ação do grupo. Temos a seguinte sequência exata de fibrados vetoriais sobre P*

$$0 \longrightarrow P \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\bar{\theta}} TP \xrightarrow{d\pi} \pi^*TB \longrightarrow 0$$

onde $\bar{\theta} : (p, \xi) \in P \times \mathfrak{g} \longmapsto d_1\theta^p \cdot \xi \in T_pP$. Todos os fibrados vetoriais na sequência exata acima admitem uma representação do grupoide de ação $G \ltimes P$.

- $G \ltimes P \curvearrowright P \times \mathfrak{g}$: $(g, p) \cdot (p, \xi) = (g \cdot p, \text{Ad}_g \cdot \xi)$;
- $G \ltimes P \curvearrowright TP$: $(g, p) \cdot v = d_p\theta^g \cdot v$;

$$\bullet \quad G \ltimes P \curvearrowright \pi^*TB: \quad (g, p) \cdot (p, u) = (g \cdot p, u).$$

Os morfismos $\bar{\theta}$ e $d\pi$ são equivariantes por essas representações e portanto toda a sequência exata acima desce para uma sequência exata de fibrados vetoriais sobre B

$$0 \longrightarrow P \otimes_{\text{Ad } \mathfrak{g}} \longrightarrow \text{At}[P] \longrightarrow TB \longrightarrow 0$$

As seções de $\text{At}[P]$ estão em correspondência com os campos vetoriais de P invariantes pela representação $G \ltimes P \curvearrowright TP$, e assim obtemos um colchete de Lie nas seções de $\text{At}[P]$. Dessa forma $\text{At}[P] \longrightarrow TB$ é um algebroides de Lie sobre B chamado de algebroides de Atiyah de P . Pode-se verificar que o algebroides de Atiyah é isomorfo ao algebroides do grupoide de gauge $P \otimes_G P \rightrightarrows B$.

1.6 Equivalência de Morita

Existem diferentes noções de equivalências entre grupoides, vide por exemplo a Seção 5.4 em [MM03]. A mais adequada para trabalhar com fibrados principais é a equivalência de Morita, que definimos a seguir. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows B$ dois grupoides de Lie.

Definição 1.61. Dizemos que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são Morita equivalentes se existe um bifibrado principal $\mathcal{G} \curvearrowright P \curvearrowleft \mathcal{H}$ tal que as correspondentes ações comutam. Mais explicitamente, $\mathcal{G} \curvearrowright P \xrightarrow{\pi} B$ é um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$; $M \xleftarrow{\mu} P \curvearrowleft \mathcal{H}$ é um $\mathcal{H}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\pi : P \longrightarrow B$; e as ações comutam: $g(ph) = (gp)h$, $\forall (g, p, h) \in \mathcal{G}_s \times_{\mu} P_{\pi} \times_t \mathcal{H}$.

Dados dois grupoides Morita equivalentes, existe uma bijeção entre os correspondentes conjuntos de fibrados principais. A prova desta afirmação é feita pela construção do fibrado associado apresentada na seção anterior.

$$\begin{aligned} \text{Bun}_{\mathcal{H}}(N) &\longleftrightarrow \text{Bun}_{\mathcal{G}}(N) \\ Q &\longmapsto P \otimes_{\mathcal{H}} Q \end{aligned}$$

Onde P é o bifibrado principal que realiza a equivalência de Morita entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$. Em particular, como todo grupoide transitivo $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ é Morita equivalente a um grupo de Lie, então nesse caso a classificação dos $\mathcal{G}$ -fibrado principais reduz-se ao caso de classificação de fibrados principais com grupo de estrutura. Outra consequência direta da definição de equivalência de Morita é que existe uma bijeção entre as representações de grupoides Morita equivalentes, e novamente essa bijeção é fornecida explicitamente pela construção do fibrado associado. Assim, seguindo as notações acima temos a bijeção

$$\begin{aligned} \text{Rep}(\mathcal{G}) &\longleftrightarrow \text{Rep}(\mathcal{H}) \\ E &\longmapsto P \otimes_{\mathcal{G}} E \end{aligned}$$

Segue da definição de equivalência de Morita que o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\pi : P \longrightarrow B$ tem aplicação de momento $\mu : P \longrightarrow M$ sendo uma submersão sobrejetora. Para esse tipo de $\mathcal{G}$ -fibrados principais pode ser estendida a construção do grupoide de gauge do Exemplo 1.10, e assim produzir um grupoide de Lie sobre B . Mais explicitamente, temos a ação diagonal de $\mathcal{G}$ sobre o produto fibrado $P \times_M P$, essa ação é livre e própria e portanto o quociente tem estrutura de variedade. De

fato, esse quociente é $P \otimes_{\mathcal{G}} P$ e ele herda uma estrutura de grupoide sobre B . Essa estrutura de grupoide em $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$ torna-se mais explícita pela observação de que todas as aplicações de estrutura do grupoide de submersão de $\mu : P \rightarrow M$ são $\mathcal{G}$ -equivariantes e assim elas descem para o quociente produzindo as aplicações de estrutura do grupoide $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$.

$$\begin{array}{ccc} P \times_M P & \rightrightarrows & P \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ P \otimes_{\mathcal{G}} P & \rightrightarrows & B \end{array}$$

onde $\tilde{\pi} : P \times_M P \rightarrow P \otimes_{\mathcal{G}} P$ denota a aplicação quociente. Lembrando que P fornece a equivalência de Morita entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ pode-se provar, vide Proposição 4.6.2 em [dH13], que os grupoides $P \otimes_{\mathcal{G}} P$ e $\mathcal{H}$ são isomorfos.

Agora gostaríamos ter uma descrição do algebroide do grupoide $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$ em termos das aplicações de estrutura do $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P \rightarrow B$. Infelizmente o procedimento quociente que produz o grupoide de gauge torna complicada essa tarefa. No entanto, pela Proposição 1.59 sabemos que existem um par de fibrados vetoriais sobre P e um morfismo entre eles os quais “dessingularizam” o algebroide de $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$. Assim temos a seguinte proposição.

Proposição 1.62. *Seja $\pi : P \rightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$ submersão sobrejetora. Denotaremos por $\theta : \mathcal{G} \times_M P \rightarrow P$ a ação de $\mathcal{G}$ em P , e como é usual denotaremos por $\rho : A \rightarrow TM$ o algebroide de $\mathcal{G}$. Denote por $\rho' : A' \rightarrow TB$ o algebroide do grupoide de gauge $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$. Então $\pi^* A'$ é isomorfo a $\text{Ker}(d\mu)$ e com esse isomorfismo a aplicação $\pi^* \rho' : \pi^* A' \rightarrow \pi^* TB$ torna-se $d\pi|_{\text{Ker}(d\mu)} : \text{Ker}(d\mu) \rightarrow \pi^* TB$.*

Demonstração. Lembre-se que temos o seguinte diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} P \times_M P & \xrightarrow{\text{pr}_2} & P \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ P \otimes_{\mathcal{G}} P & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

Queremos obter $\pi^*(\mathbf{u}^*(\text{Ker}(ds)))$, para isto precisamos calcular o kernel do morfismo $ds : T(P \otimes_{\mathcal{G}} P) \rightarrow \mathbf{s}^* TB$ de fibrados vetoriais sobre $P \otimes_{\mathcal{G}} P$. Como $P \otimes_{\mathcal{G}} P$ é o quociente de $P \times_M P$ pela ação de $\mathcal{G}$ ao longo da aplicação $\mu_{\Delta} : (p, q) \in P \times_M P \mapsto \mu(p) = \mu(q) \in M$. Então, pela Proposição 1.59 o morfismo ds vem do morfismo $\tilde{\pi}^* ds : \tilde{\pi}^* T(P \otimes_{\mathcal{G}} P) \rightarrow \tilde{\pi}^*(\mathbf{s}^* TB)$ de fibrados vetoriais sobre $P \times_M P$.

Por outro lado, $\tilde{\pi}^* T(P \otimes_{\mathcal{G}} P)$ é isomorfo ao quociente do fibrado vetorial $T(P \times_M P)$ pelo subfibrado imagem dos monomorfismo $(p, q, \xi) \in \mu_{\Delta}^* A \mapsto (d_{1_x} \theta^p \cdot \xi, d_{1_x} \theta^q \cdot \xi) \in T(P \times_M P)$. Com essa identificação temos que $\tilde{\pi}^*(\text{Ker}(ds))$ é o quociente do fibrado vetorial

$$TP +_{TM} \text{Ker}(d\pi) = \left\{ (v_p, w_q) \in T_{(p,q)}(P \times_M P) : d_q \pi \cdot w_q = 0 \right\}$$

pelo subfibrado $\mu_{\Delta}^* A$. Agora fazendo o pullback de $\tilde{\pi}^* \text{Ker}(ds)$ pela aplicação $\mathbf{u}_{P \times_M P} : p \in P \mapsto$

$(p, p) \in P \times_M P$ obtemos o fibrado vetorial

$$\mathbf{u}_{P \times_M P}^*(\tilde{\pi}^* \text{Ker}(ds)) = \frac{TP \oplus \text{Ker}(d\pi)}{\mu^* A}$$

onde $\mu^* A$ é a imagem do monomorfismo $(p, \xi) \in \mu^* A \mapsto (d_{1_x} \theta^p \cdot \xi, d_{1_x} \theta^p \cdot \xi) \in TP \oplus TP$. Concluimos que

$$\begin{aligned} \pi^* A' &= \frac{TP \oplus \text{Ker}(d\pi)}{\mu^* A} \\ \pi^* \rho' : [v_p, w_p] &\in \frac{TP \oplus \text{Ker}(d\pi)}{\mu^* A} \mapsto d_p \pi \cdot v_p \in \pi^* TB \end{aligned}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d\mu) &\longleftrightarrow \frac{TP \oplus \text{Ker}(d\pi)}{\mu^* A} \\ v_p &\longmapsto [v_p, 0] \\ v_p - w_p &\longmapsto [v_p, w_p] \end{aligned}$$

é o isomorfismo procurado. □

1.7 Biseções e pseudogrupos generalizados

Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie e seja $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada. Denotaremos por $i_N : N \hookrightarrow M$ ao mergulho inclusão. Um difeomorfismo $\phi : V \rightarrow W$ entre subconjuntos abertos V, W de M será chamado de transformação local de M .

Definição 1.63. *Uma biseção do grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ sobre N é uma aplicação diferenciável $\beta : N \rightarrow \mathcal{G}$ que satisfaz as seguintes condições: (i) $\mathbf{s} \circ \beta = i_N$; e (ii) $\phi_\beta := \mathbf{t} \circ \beta : N \rightarrow M$ é um mergulho. Uma biseção β sobre um subconjunto aberto $N \subset M$ será chamada de biseção local e neste caso ϕ_β é uma transformação local de M . Uma biseção β sobre M será chamada de biseção global e neste caso ϕ_β é uma difeomorfismo de M .*

Uma observação importante a se fazer é que podemos usar a multiplicação do grupoide $\mathcal{G}$ para definir uma multiplicação parcial “ $\star$ ” entre biseções. Com efeito, sejam N_1 e N_2 duas subvariedades de M e seja $\beta_i : N_i \rightarrow \mathcal{G}$ uma biseção de $\mathcal{G}$ sobre N_i , para $i = 1, 2$. Denotaremos por $\phi_i := \mathbf{t} \circ \beta_i$. Sobre o subconjunto $\phi_2^{-1}(N_1) \subset N_2$ temos definida a função

$$\beta_1 \star \beta_2 : x \in \phi_2^{-1}(N_1) \mapsto \beta_1(\phi_2(x))\beta_2(x) \in \mathcal{G}$$

É simples verificar que

$$\mathbf{s} \circ (\beta_1 \star \beta_2) = \text{id}_{\phi_2^{-1}(N_1)} \quad \mathbf{t} \circ (\beta_1 \star \beta_2) = \phi_1 \circ \phi_2 \Big|_{\phi_2^{-1}(N_1)}$$

Deve ser claro que sob a condição que $\phi_2^{-1}(N_1)$ for uma subvariedade de M então $\beta_1 \star \beta_2$ seria uma biseção de $\mathcal{G}$ sobre $\phi_2^{-1}(N_1)$. Por exemplo, tal condição é satisfeita quando $\phi_2 : N_2 \rightarrow M$ é transversal a N_1 , ou melhor ainda quando β_1 e β_2 são biseções locais. Assim o produto de biseções existe sob uma condição de transversalidade, a qual sempre é satisfeita para biseções locais. No

entanto, toda biseção β sobre N sempre admite uma biseção inversa em relação à “ $\star$ ”, esta inversa β^{-1} é uma biseção sobre $\phi_\beta(N)$ e é definida por

$$\beta^{-1}(x) = \left[\beta(\phi_\beta^{-1}(x)) \right]^{-1}$$

Essa biseção inversa satisfaz

$$\beta^{-1} \star \beta(x) = 1_x \quad , \quad \beta \star \beta^{-1}(x) = 1_{\phi_\beta^{-1}(x)} \quad , \quad \phi_{\beta^{-1}} = (\phi_\beta)^{-1}$$

Seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal, o conjunto de biseções locais de $\mathcal{G}$ age sobre o conjunto de seções locais de π . Explicitamente, seja β uma biseção local de $\mathcal{G}$ e σ uma seção local de π a qual satisfaz $\mu(\text{cod}(\sigma)) \subset \text{dom}(\beta)$, então definimos a seção local $\beta \odot \sigma$ de π por

$$(\beta \odot \sigma)(b) = \beta(f_\sigma(b)) \cdot \sigma(b) \tag{1.3}$$

onde $f_\sigma = \mu \circ \sigma$. Note que $\text{dom}(\beta \odot \sigma) = \text{dom}(\sigma)$ e

$$\begin{aligned} (\beta_1 \star \beta_2) \odot \sigma &= \beta_1 \odot (\beta_2 \odot \sigma) \\ f_{\beta \odot \sigma} &= \phi_\beta \circ f_\sigma \end{aligned}$$

Para o proposito desta tese é suficiente concentrarmo-nos em biseções locais. Lembre-se que uma biseção local de $\mathcal{G}$ gera uma transformação local de M e assim não deveria surpreender que a noção já clássica de pseudogrupo de transformações locais de uma variedade estende-se para a noção de pseudogrupo de biseções locais de um grupoide de Lie. Nós chamaremos de pseudogrupos clássicos aos pseudogrupos de transformações locais de uma variedade. A seguinte definição é tomada de [Sal13].

Definição 1.64. *Um pseudogrupo generalizado Γ é um subconjunto de biseções locais de $\mathcal{G}$ satisfazendo*

1. *Se $\beta \in \Gamma$, então $\beta^{-1} \in \Gamma$.*
2. *Se $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ e $\beta_1 \star \beta_2$ esta definida, então $\beta_1 \star \beta_2 \in \Gamma$.*
3. *Se $\beta \in \Gamma$ e U é um aberto contido no domínio de β , então $\beta|_U \in \Gamma$.*
4. *Seja $\beta : U \rightarrow \mathcal{G}$ é uma biseção local e suponha que U admite uma cobertura por abertos U_i tal que para cada $i \in I$ temos uma biseção local $\beta_i : U_i \rightarrow \mathcal{G}$ em Γ . Se $\beta = \beta_i$ em U_i , para todo i , então $\beta \in \Gamma$.*
5. *A aplicação $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathcal{G}$ pertence a Γ .*

Se β é uma biseção local de $\mathcal{G}$ que satisfaz a condição (4) da definição acima então dizemos que β é a soma das β_i 's. É imediato da Definição 1.64 que se $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de pseudogrupos generalizados de $\mathcal{G}$ então $\bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ é também um pseudogrupo generalizado de $\mathcal{G}$. Em particular, dado um subconjunto $\mathfrak{B}$ de biseções locais de $\mathcal{G}$ faz sentido falar do pseudogrupo generalizado $\langle \mathfrak{B} \rangle$ gerado ele. Se $\mathfrak{B}$ é uma coleção de biseções locais que satisfaz os axiomas (1), (2) e (3) da Definição 1.64 não é difícil verificar que uma biseção local β de $\mathcal{G}$ pertence a $\langle \mathfrak{B} \rangle$ se e somente se β expressa-se como uma soma de elementos em $\mathfrak{B}$.

Exemplo 1.65. *Existe uma bijeção entre o conjunto de transformações locais de uma variedade M e o conjunto de biseções locais do correspondente grupoide de pares $M \times M$. Essa bijeção associa a cada transformação local $\phi \in \text{Diff}_{\text{loc}}(M)$ a biseção local $\beta_\phi \in \text{BiS}_{\text{loc}}(M \times M)$ definida por*

$$\begin{aligned}\beta_\phi: \text{dom}(\phi) &\longrightarrow M \times M \\ x &\longmapsto (\phi(x), x)\end{aligned}$$

Esta bijeção identifica os pseudogrupos (clássicos) de transformações locais de M com os pseudogrupos generalizados de $M \times M \rightrightarrows M$.

Exemplo 1.66. *A restrição da bijeção do exemplo anterior permite identificar as biseções locais do grupoide de submersão de $\pi: P \longrightarrow B$ com o conjunto de transformações locais de P que preservam π , i.e.*

$$\text{BiS}_{\text{loc}}(P \times_B P) = \{\psi \in \text{Diff}_{\text{loc}}(P) : \pi \circ \psi = \pi\}$$

Exemplo 1.67. *Dado um fibrado vetorial $\mathbf{q}: E \longrightarrow M$. Um automorfismo local de E é um par de aplicações (Φ, ϕ) onde $\Phi \in \text{Diff}_{\text{loc}}(E)$ e $\phi \in \text{Diff}_{\text{loc}}(M)$ tais que: $\mathbf{q} \circ \Phi = \phi \circ \mathbf{q}$, e Φ envia linearmente a fibra E_x na fibra $E_{\phi(x)}$. Em outras palavras, Φ é um morfismo de fibrados vetoriais cobrindo ϕ . O conjunto de automorfismos locais de E forma um pseudogrupo e pode ser identificado como um pseudogrupo de biseções locais de $GL(E)$.*

1.7.1 Grupoide étale gerado por um pseudogrupo generalizado

Para cada pseudogrupo generalizado Γ de $\mathcal{G}$ temos associado o seu grupoide de germes, denotado por $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$, cujo conjunto de morfismos é

$$\bar{\Gamma} = \left\{ \text{germ}_x(\beta) : \beta \in \Gamma \text{ e } x \in \text{dom}(\beta) \right\}$$

e cujas aplicações de estrutura são

$$\begin{aligned}\bar{s}(\text{germ}_x(\beta)) &= x, & \bar{t}(\text{germ}_x(\beta)) &= \phi_\beta(x) \\ \bar{i}(\text{germ}_x(\beta)) &= \text{germ}_{\phi_\beta(x)}(\beta^{-1}), & \bar{u}(x) &= \text{germ}_x(\mathbf{u}) \\ \bar{m}(\text{germ}_y(\beta_1), \text{germ}_x(\beta_2)) &= \text{germ}_x(\beta_1 \star \beta_2)\end{aligned}$$

O conjunto $\bar{\Gamma}$ munido da topologia de feixe torna ao grupoide $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$ num grupoide topológico, onde as aplicações $\bar{s}, \bar{t}$ são étales. Em geral, a topologia de feixe faz com que $\bar{\Gamma}$ seja um espaço topológico não Hausdorff e não segundo contável. Apesar disso, pelo fato que M é uma variedade ela transfere a sua estrutura diferenciável para $\bar{\Gamma}$. Com essa estrutura diferenciável o $\bar{\Gamma}$ torna-se uma variedade não Hausdorff sem base enumerável e todas as aplicações de estrutura tornam-se diferenciáveis, e em particular as aplicações $\bar{s}$ e $\bar{t}$ tornam-se difeomorfismos locais. Apesar que $\bar{\Gamma}$ não possui a estrutura padrão de variedade diferenciável ainda é possível desenvolver muita teoria sobre ela, como é mostrado no Capítulo 3 da Parte II em [Ser06]. Para os fins desse trabalho essa estrutura diferenciável sobre $\bar{\Gamma}$ é suficiente. Outra consequência da topologia de feixe em $\bar{\Gamma}$ é que todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança aberta V_x e uma seção local $\beta_x: V_x \longrightarrow \bar{\Gamma}$ de $\bar{s}$ que também é uma biseção local de $\bar{\Gamma}$. Também, não é difícil provar que se $\Phi: V \longrightarrow \bar{\Gamma}$ é uma seção local de $\bar{s}$ então $\bar{t} \circ \Phi: V \longrightarrow M$ é uma difeomorfismo local.

Nós iremos trabalhar com cociclos de Haefliger a valores no grupoide $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$, para um pseudo-grupo generalizado Γ de $\mathcal{G}$ fixado. Assim torna-se importante ter resultados que traduzam aplicações de uma variedade B em $\bar{\Gamma}$ em aplicações de B em $\mathcal{G}$ com certas propriedades e vice-versa. Nessa subseção apresentaremos esses tipos de resultados, os quais podem ser muito técnicos porem importantes para o desenvolvimento desse trabalho. Concretamente eles serão importantes na construção de gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal apresentado na Subseção 1.7.3. No Apêndice A fazemos uma pequena exposição sobre os espaços étales e suas seções, tomando como principal referencia o livro [God73]. A seguinte proposição é uma aplicação do teorema de extensão de uma seção de um espaço étale, Proposição A.4, aplicado ao caso de biseções de um grupoide étale.

Proposição 1.68. *Seja N uma subvariedade mergulhada de M e $\beta : N \longrightarrow \bar{\Gamma}$ uma biseção continua de $\bar{\Gamma}$ sobre N . Então existe uma vizinhança aberta $V \subset M$ de N e uma biseção local continua $\bar{\beta} : V \longrightarrow \bar{\Gamma}$ tal que $\beta = \bar{\beta}$ em N .*

Demonstração. Como $\beta : N \longrightarrow \bar{\Gamma}$ é uma seção de $\bar{s}$, pela Proposição A.4 existe uma vizinhança aberta $V' \subset M$ de N e uma seção local $\Phi : V' \longrightarrow \bar{\Gamma}$ de $\bar{s}$ tal que $\beta = \Phi|_N$. Como Φ é uma seção local de $\bar{s}$ sabemos que $\hat{\phi} := \bar{t} \circ \Phi : V' \longrightarrow M$ é um difeomorfismo local. Como $\phi_\beta = \bar{t} \circ \beta : N \longrightarrow M$ é um mergulho e $\phi_\beta = \hat{\phi}|_N$, então existe uma vizinhança $V \subset V'$ de N tal que $\hat{\phi} : V \longrightarrow M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Portanto $\bar{\beta} := \Phi|_V$ é a biseção local procurada. $\square$

A proposição acima é valida para qualquer grupoide étale, não é exclusiva para grupoides de germes de biseções locais associado a um pseudogruppo generalizado. Para grupoide de germes de biseções locais temos um resultado um pouco melhor, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.69. *Seja $\beta : V \longrightarrow \bar{\Gamma}$ uma biseção local continua de $\bar{\Gamma}$. Então existe uma biseção local diferenciável $\tilde{\beta} : V \longrightarrow \mathcal{G}$ em Γ tal que $\beta = \text{germ}(\tilde{\beta})$.*

Demonstração. Existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de V e para cada $i \in I$ uma biseção local $\beta_i : V_i \longrightarrow \mathcal{G}$ em Γ tal que $\beta = \text{germ}(\beta_i)$ em V_i . Essa condição implica que $\beta_i = \beta_j$ em $V_i \cap V_j$ e portanto todas as β_i 's colam para produzir, em principio, uma seção local $\tilde{\beta} : V \longrightarrow \mathcal{G}$ de $\bar{s}$. Como $\phi_\beta = \phi_{\tilde{\beta}}$ então $\tilde{\beta}$ é de fato uma biseção local de $\mathcal{G}$. Finalmente, como $\tilde{\beta}$ é uma biseção local de $\mathcal{G}$ que se expressa como a soma das biseções locais $\beta_i \in \Gamma$ segue que $\tilde{\beta} \in \Gamma$. $\square$

Segue dessas duas proposições o seguinte corolário

Corolário 1.70. *Seja N uma subvariedade mergulhada de M e $\beta : N \longrightarrow \bar{\Gamma}$ uma biseção continua de $\bar{\Gamma}$ sobre N . Então existem uma vizinhança aberta $V \subset M$ de N , e uma biseção local diferenciável $\tilde{\beta} : V \longrightarrow \mathcal{G}$ em Γ tal que $\beta = \text{germ}(\tilde{\beta})$ em N .*

Agora nós estudaremos aplicações diferenciáveis de uma variedade B em $\bar{\Gamma}$. O nosso objetivo é tornar esse tipo de aplicação em uma biseção de um outro grupoide. Para isso considere o grupoide $B \times \mathcal{G} \rightrightarrows B \times M$ “soma direta” dos grupoides $B \rightrightarrows B$ e $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, cujas aplicações de estrutura são

$$\begin{aligned} \hat{s}(b, g) &= (b, s(g)), & \hat{t}(b, g) &= (b, t(g)) \\ \hat{i}(b, g) &= (b, g^{-1}), & \hat{u}(b, x) &= (b, 1_x) \\ \hat{m}((b, g), (b, h)) &= (b, gh) \end{aligned}$$

Observação 1.71. *As biseções locais de $B \times \mathcal{G}$ podem ser identificadas com as aplicações $\mathfrak{Z} : W \rightarrow \mathcal{G}$, onde $W \subset B \times M$ é um aberto, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $s(\mathfrak{Z}(b, x)) = x, \forall (b, x) \in W$,
- $(b, x) \in W \mapsto (b, t(\mathfrak{Z}(b, x))) \in B \times M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

Ora, seja $\mathfrak{Z} : W \rightarrow \mathcal{G}$ uma aplicação diferenciável. Denote por $W^b = \{x \in M : (b, x) \in W\}$. Pode-se verificar que $\mathfrak{Z}$ é uma biseção local de $B \times \mathcal{G}$ se e somente se $\mathfrak{Z}^b : x \in W^b \mapsto \mathfrak{Z}(b, x) \in \mathcal{G}$ é uma biseção local de $\mathcal{G}$, para cada $b \in \text{pr}_1(W)$.

Seja $f : B \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável e $\mathfrak{Z} : W \rightarrow \mathcal{G}$ uma biseção local de $B \times \mathcal{G}$ tal que o gráfico de f está contido em W . Denote por $\Gamma_{\mathcal{G}} = \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G})$ e por $\bar{\Gamma}_{\mathcal{G}} \rightrightarrows M$ o seu grupóide de germes. Suponha que a aplicação $\gamma : b \in B \mapsto \text{germ}_{f(b)}(\mathfrak{Z}^b) \in \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ é contínua. A topologia de feixe em $\bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ implica que para todo $b_0 \in B$ existem uma vizinhança U de b_0 e $\beta : V \rightarrow \mathcal{G}$ em $\Gamma_{\mathcal{G}}$ satisfazendo:

- $f(U) \subset V$;
- $\gamma(b) = \text{germ}_{f(b)}(\beta), \forall b \in U$.

Dessa forma a continuidade de γ impõe a seguinte condição em $\mathfrak{Z}$:

- ($\star$) Seja $b_0 \in B$, existem uma vizinhança U de b_0 e $\beta : V \rightarrow \mathcal{G}$ em $\Gamma_{\mathcal{G}}$ tal que $\text{germ}_{f(b)}(\mathfrak{Z}^b) = \text{germ}_{f(b)}(\beta), \forall b \in U$.

Assim chegamos ao seguinte lema.

Lema 1.72. *Nas condições e as notações deste parágrafo. Existe uma vizinhança W' do gráfico de $f|_U$ na qual $\mathfrak{Z}$ e β coincidem*

Demonstração. Primeiro, note que a condição ($\star$) é equivalente a:

- ($\star\star$) Para cada $b \in U$ existe uma vizinhança $V^b \subset W^b \cap V$ tal que $\mathfrak{Z}^b = \beta$ em V^b .

Ora, a vizinhança procurada é definida por

$$W' = \left\{ (b, x) \in W \cap (U \times M) : \text{germ}_{(b, x)}(\mathfrak{Z}) = \text{germ}_{(b, x)}(\beta) \right\}$$

É claro que W' é um subconjunto aberto de $U \times M$. Então basta provar que ele contém o gráfico de $f|_U$. Para isso, sem perda de generalidade podemos supor que $M = \mathbb{R}^m$. Assim a condição ($\star\star$) se traduz em que para cada $b \in U$ existe $r(b) > 0$ tal que $\mathfrak{Z}(b, x) = \beta(x), \forall x \in \mathcal{B}(f(b), r(b))$ ⁵. Seja $b' \in U$, considere U' uma vizinhança relativamente compacta de b' tal que $\bar{U}' \subset U$. Logo, a aplicação $r : b \mapsto r(b)$ atinge seu mínimo sobre $\bar{U}'$. Dessa forma podemos garantir que existe $r_0 > 0$ tal que

$$\mathfrak{Z}(b, x) = \beta(x) \quad ; \forall x \in \mathcal{B}(f(b), r_0), \forall b \in U'$$

Assim $\{(b, x) : b \in U', x \in \mathcal{B}(f(b), r_0)\}$ é uma vizinhança de $(b', f(b'))$ onde $\mathfrak{Z}$ e β coincidem. Portanto o gráfico de $f|_U$ está contido em W' . $\square$

⁵ $\mathcal{B}(x, r)$ denota a bola em $\mathbb{R}^m$ de centro x e raio r .

Concluimos que uma biseção local $\mathfrak{Z}$ de $B \times \mathcal{G}$ produzirá uma aplicação $\gamma : B \longrightarrow \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ se e somente se ela é localmente constante em b . Outra forma de expressar essa condição de ser localmente constante em b é por meio do diferencial da $\mathfrak{Z}$ e isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.73. *Seja $\mathfrak{Z} : W \longrightarrow \mathcal{G}$ uma biseção local de $B \times \mathcal{G}$. Dizemos que $\mathfrak{Z}$ é horizontal se $d_{(b,x)}\mathfrak{Z} \cdot (u, 0) = 0$, $\forall u \in T_b B$ e $\forall (b, x) \in W$.*

Denote por $\Gamma_{B \times \mathcal{G}}^H$ o conjunto de biseções locais horizontais de $B \times \mathcal{G}$. Pode-se verificar que $\Gamma_{B \times \mathcal{G}}^H$ é de fato um pseudogrupo generalizado de $B \times \mathcal{G}$. Por outro lado, as aplicações da forma $\text{id}_U \times \beta : (b, x) \in U \times V \mapsto (b, \beta(x)) \in B \times \mathcal{G}$, com β uma biseção local de $\mathcal{G}$, definem biseções locais de $B \times \mathcal{G}$. Ademais, o conjunto $\mathfrak{B} = \{\text{id}_U \times \beta : U \subset B \text{ é aberto e } \beta \in \Gamma_{\mathcal{G}}\}$ satisfaz os axiomas (1), (2) e (3) da Definição 1.64 e portanto define um pseudogrupo generalizado do grupoide $B \times \mathcal{G}$. Pode-se verificar que $\Gamma_{B \times \mathcal{G}}^H = \langle \mathfrak{B} \rangle$.

Agora iremos tratar o problema inverso, i.e. seja $\gamma : B \longrightarrow \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ uma aplicação contínua, denotamos por

$$\begin{aligned} f &= \bar{s} \circ \gamma : B \longrightarrow M & F &: b \in B \mapsto (b, f(b)) \in B \times M \\ g &= \bar{t} \circ \gamma : B \longrightarrow M & G &: b \in B \mapsto (b, g(b)) \in B \times M \end{aligned}$$

Observe que as aplicações f e g podem ser diferenciáveis. Mostraremos que existe uma biseção local horizontal $\mathfrak{Z} : W \longrightarrow \mathcal{G}$ de $B \times \mathcal{G}$, onde W é uma vizinhança de $F(B)$, satisfazendo $\gamma(b) = \text{germ}_{f(b)}(\mathfrak{Z}^b)$. Antes disso precisamos da seguinte definição.

Definição 1.74. *Seja $\gamma : B \longrightarrow \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ uma aplicação contínua e seja $b \in B$. Uma dessingularização de γ ao redor de b é um par (U, β) , onde U é uma vizinhança de b e $\beta : V \longrightarrow \mathcal{G}$ é uma biseção local de $\mathcal{G}$ tal que*

1. $f(U) \subset V$,
2. $\gamma(b') = \text{germ}_{f(b')}(\beta)$, $\forall b' \in U$.

A topologia de feixe em $\bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ garante que as dessingularizações existem mas elas não são únicas. Agora definimos a biseção do grupoide $\bar{\Gamma}_{B \times \mathcal{G}}^H$ sobre o gráfico da f por

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} : N_f &\longrightarrow \bar{\Gamma}_{B \times \mathcal{G}}^H \\ (b, f(b)) &\longmapsto \text{germ}_{(b, f(b))}(\text{id}_U \times \beta) \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde (U, β) é uma dessingularização de γ ao redor de b . Agora verificamos que $\mathfrak{P}$ esta bem definida. Para isso escolhemos outra dessingularização (U', β') de γ ao redor de b , como $\text{germ}_{f(b)}(\beta) = \text{germ}_{f(b)}(\beta')$, então existem uma vizinhança $\mathcal{U} \subset U \cap U'$ de b ; uma vizinhança $\mathcal{V} \subset V \cap V'$ de $f(b)$ tais que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ e $\beta = \beta'$ em $\mathcal{V}$. Portanto $\text{id}_{\mathcal{U}} \times \beta = \text{id}_{\mathcal{U}} \times \beta'$ em $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$; e isso mostra que $\mathfrak{P}$ esta bem definida. Ora, a biseção $\mathfrak{P}$ é contínua pois a Equação (1.4) define ela localmente. Além disso, note que o mergulho $\phi_{\mathfrak{P}} : N_f \longrightarrow B \times M$ tem imagem igual ao gráfico de g , de fato $\phi_{\mathfrak{P}} \circ F = G$.

Pelo Corolário 1.70 existem uma vizinhança aberta $W \subset B \times M$ de $N_f = F(B)$ e uma biseção local⁶ $\mathfrak{Z} : W \longrightarrow \mathcal{G}$ de $B \times \mathcal{G}$ satisfazendo

$$\mathfrak{P}(b, f(b)) = \text{germ}_{(b, f(b))}(\mathfrak{Z}) \quad ; \forall b \in B \tag{1.5}$$

⁶Aqui usamos a identificação feita na Observação 1.71, com abuso da notação.

Logo, a transformação local de $B \times M$ induzida pela $\mathfrak{Z}$ tem a cara $\phi(b, x) = (b, \mathfrak{t}(\mathfrak{Z}(b, x)))$ e coincide com $\phi_{\mathfrak{P}}$ sobre N_f . Assim temos que $g(b) = \mathfrak{t}(\mathfrak{Z}(b, f(b)))$, $\forall b \in B$. As equações (1.4) e (1.5) implicam que $\mathfrak{Z}$ é de fato uma biseção local horizontal de $B \times \mathcal{G}$. Resumindo este parágrafo temos a seguinte proposição.

Proposição 1.75. *Seja $\gamma : B \rightarrow \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ uma aplicação contínua. Com as notações acima, existem $W \subset B \times M$ uma vizinhança de $F(B)$ e uma biseção local horizontal $\mathfrak{Z} : W \rightarrow \mathcal{G}$ de $B \times \mathcal{G}$ tal que:*

- Para todo $b \in B$ temos que: $\gamma(b) = \text{germ}_{f(b)}(\mathfrak{Z}^b)$.
- a aplicação $\phi : (b, x) \in W \mapsto (b, \mathfrak{t}(\mathfrak{Z}(b, x))) \in B \times M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem;
- $G = \phi \circ F$.

Observação 1.76. *Nas discussões e construções acima temos trabalhado com o pseudogrupo de todas as biseções locais de $\mathcal{G}$, e definido assim biseções locais horizontais de $B \times \mathcal{G}$. Todos esses resultados continuam sendo válidos se tomamos um pseudogrupo generalizado $\Gamma \subsetneq \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G})$. Assim, uma aplicação diferenciável $\gamma : B \rightarrow \bar{\Gamma}$ gera uma biseção local horizontal $\mathfrak{Z} : W \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{Z}^b \in \Gamma$, $\forall b \in \text{pr}_1(W)$.*

1.7.2 Relação entre um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal e o seu $\mathcal{G}$ -fibrado principal associado

Para um pseudogrupo generalizado Γ de $\mathcal{G}$, existe um morfismo de grupoides de Lie

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \bar{\Gamma} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ \text{germ}_x(\beta) &\longmapsto \beta(x) \end{aligned}$$

chamado de morfismo de avaliação. Esse morfismo fornece uma aplicação do conjunto de classes de isomorfismo de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais para o conjunto de classes de isomorfismo de $\mathcal{G}$ -fibrados principais

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_* : \text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B) &\longrightarrow \text{Bun}_{\mathcal{G}}(B) \\ \bar{P} &\longmapsto \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} \end{aligned}$$

onde $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ é um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$, e $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} \rightarrow B$ é o $\bar{\Gamma}$ -fibrado associado ao $\bar{P}$ e à ação de $\bar{\Gamma}$ sobre $s : \mathcal{G} \rightarrow M$ definida por

$$\lambda \cdot g = g\mathcal{E}(\lambda^{-1})$$

Agora, lembre que o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ tem projeção definida por

$$\begin{aligned} \pi : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} &\longrightarrow B \\ [p, g] &\longmapsto \pi(p) \end{aligned}$$

Como $\bar{\Gamma}$ é um grupoide étale, então a aplicação quociente $\tilde{\pi}: \bar{P} \times_M \mathcal{G} \longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ é um difeomorfismo local; e temos o seguinte diagrama pullback.

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} \times_M \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \bar{P} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi} & B \end{array} \quad (1.6)$$

A aplicação de momento de $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ é definida por

$$\begin{aligned} \mu: \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} &\longrightarrow M \\ [p, g] &\longmapsto \mathbf{t}(g) \end{aligned}$$

e temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} \times_M \mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & M \\ \tilde{\pi} \downarrow & \nearrow \mu & \\ \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} & & \end{array}$$

A ação $\theta: \mathcal{G} \times_M (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}) \longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ é definida por

$$g_0 \cdot [p, g] = [p, g_0 g]$$

Não é difícil verificar que a aplicação de divisão $\delta: (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}) \times_B (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$ deste $\mathcal{G}$ -fibrado principal é dada por

$$\delta([p_1, g_1], [p_2, g_2]) = g_1 \mathcal{E}(\bar{\delta}(p_1, p_2)) g_2^{-1}$$

onde $\bar{\delta}: \bar{P} \times_B \bar{P} \longrightarrow \bar{\Gamma}$ é a aplicação de divisão do $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P}$. Cada seção local $\bar{\sigma}: U \longrightarrow \bar{P}$ de $\bar{\pi}$ gera uma seção local $\sigma: U \longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ de π definida por

$$\sigma(b) = [\bar{\sigma}(b), 1_{f(b)}] \quad (1.7)$$

onde $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Se verifica também que $\mu \circ \sigma = f$. Assim fica claro que todo atlas para $\bar{P}$ produz um atlas para $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$.

Seja $\{\bar{\sigma}_i: U_i \longrightarrow \bar{P}\}_{i \in I}$ um atlas para $\bar{P}$. Como já é usual, denotaremos por $f_i = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}_i: U_i \longrightarrow M$ e por $F_i: b \in U_i \longmapsto (b, f_i(b)) \in U_i \times M$. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então, de acordo com a Proposição 1.75, para a correspondente função de transição $\gamma_{ij}: U_i \cap U_j \longrightarrow \bar{\Gamma}$ existem $W_{ij} \subset (U_i \cap U_j) \times M$ uma vizinhança de $F_j(U_i \cap U_j)$ e $\mathfrak{Z}_{ij}: W_{ij} \longrightarrow \mathcal{G}$ uma biseção local horizontal de $B \times \mathcal{G}$, satisfazendo

- Para todo $b \in U_i \cap U_j$ temos que: $\gamma_{ij}(b) = \text{germ}_{f_j(b)}(\mathfrak{Z}_{ij}^b)$.
- a aplicação $\phi_{ij}: (b, x) \in W_{ij} \longmapsto (b, \mathbf{t}(\mathfrak{Z}_{ij}(b, x))) \in B \times M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem;
- Para todo $b \in U_i \cap U_j$ temos que: $F_i(b) = \phi_{ij}(F_j(b))$.

As condições de cociclo implicam em que

- Reduzindo adequadamente os conjuntos W_{ij} se necessário, podemos supor $\phi_{ij} : W_{ij} \longrightarrow W_{ji}$, $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = \text{id}_{W_{ji}}$, e $\mathfrak{Z}_{ij} \star \mathfrak{Z}_{ji} = \mathbf{u}$.
- Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então existe uma vizinhança $W_{ijk} \subset W_{ik} \cap W_{jk}$ de $F_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ onde se satisfaz $\mathfrak{Z}_{ij} \star \mathfrak{Z}_{jk} = \mathfrak{Z}_{ik}$.

Agora passamos ao $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P = \overline{P} \otimes_{\overline{\Gamma}} \mathcal{G}$. O atlas $\{\overline{\sigma}_i : U_i \longrightarrow \overline{P}\}_{i \in I}$ para $\overline{P}$ induz um atlas para P cujas funções de transição são a imagem das γ_{ij} 's pelo morfismo $\mathcal{E}$. Assim P admite um atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ cujas funções são da forma

$$\delta(\sigma_i(b), \sigma_j(b)) = \mathfrak{Z}_{ij}(b, f_j(b))$$

Observação 1.77. *Veja que é possível ter dois $\overline{\Gamma}$ -fibrados principais sobre B não isomorfos que produzam o mesmo $\mathcal{G}$ -fibrado principal. Por exemplo, para pseudogrupos generalizados Γ do grupoide de pares $M \times M \rightrightarrows M$, isto é Γ corresponde com um pseudogrupo clássico, todo $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal sobre B produz o único (a menos de isomorfismo) $M \times M$ -fibrado principal apresentado no Exemplo 1.38.*

Ora, para decidir quando um $\mathcal{G}$ -fibrado principal é o fibrado associado de um $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal não basta que ele admita um atlas com funções de transição na forma de biseções horizontais $\mathfrak{Z}_{ij}$ de $B \times \mathcal{G}$ como as de acima, além disso precisamos uma condição que garanta que o germe das $\mathfrak{Z}_{ij}$ satisfaçam a condição de cociclo. Mais especificamente, seja $\pi : P \longrightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal e suponha que ele admite um atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ cujas funções de transição são da forma

$$\delta(\sigma_i(b), \sigma_j(b)) = \mathfrak{Z}_{ij}(b, f_j(b))$$

para $\mathfrak{Z}_{ij}$ biseções locais horizontais de $B \times \mathcal{G}$. Então a condição de cociclo para tais funções de transição se escreve como

$$(\mathfrak{Z}_{ij} \star \mathfrak{Z}_{jk})(b, f_k(b)) = \mathfrak{Z}_{ik}(b, f_k(b)) \quad ; \forall b \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

Se pudéssemos garantir que a equação acima é válida em uma vizinhança do gráfico de $f_k|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$ então as aplicações $b \in U_i \cap U_j \longmapsto \text{germ}_{f_j(b)}(\mathfrak{Z}_{ij}^b)$ constituiriam um cociclo de Haefliger a valores em $\overline{\Gamma}$ e o $\mathcal{G}$ -fibrado principal P viria de um $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal.

Observação 1.78. *Veja que em toda a discussão feita nessa subseção não temos especificado se o $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal $\overline{P}$ é topológico o diferenciável, mas sempre estamos considerando que a base B é uma variedade diferenciável Hausdorff e com base enumerável. Como os elementos de Γ são biseções locais diferenciáveis, então a característica de $\overline{P}$ ser topológico ou diferenciável se reflete ao nível dos atlas $\{\overline{\sigma}_i : U_i \longrightarrow \overline{P}\}_{i \in I}$ em que as aplicações $f_i = \overline{\mu} \circ \overline{\sigma}_i : U_i \longrightarrow M$ serem continuas ou diferenciáveis. Contudo, se $\overline{P}$ é topológico então o seu $\mathcal{G}$ -fibrado principal associado P é topológico, e se $\overline{P}$ é diferenciável então o seu $\mathcal{G}$ -fibrado principal associado P é diferenciável.*

1.7.3 Gráfico de um $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal

Nesta subseção mostraremos que todo $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal [topológico/diferenciável] $\overline{P} \longrightarrow B$ é o pullback por uma aplicação [continua/diferenciável] de um $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável

$\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ com aplicação momento submersão. O fibrado $\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ é chamado o gráfico de $\bar{P}$. Esse resultado é uma generalização de um resultado semelhante para pseudogrupos clássicos devido a Haefliger [Hae70] no seu estudo de folheações regulares, e junto com teorema de classificação de aplicações transversais *à la* Gromov-Phillips apresentado no Capítulo 2 serão as peças mais importantes na prova dos teoremas de classificação que apresentaremos nos Capítulos 3 e 4. Outras referencias com uma prova mais detalhada do resultado de Haefliger encontram-se nos livros de Lawson [Law77] e Godbillon [God91]. Contrário a todo aquilo desenvolvido nesse trabalho onde as nossas construções foram globais, nesse parágrafo trabalharemos com a descrição local, i.e. coberturas abertas e cociclos de Haefliger.

Para Γ pseudogrupos clássicos, uma estrutura (ou Γ -estrutura) de Haefliger sobre B é um (uma classe de isomorfismo de) $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal sobre B . Uma Γ -folheação clássica é uma estrutura de Haefliger com aplicação de momento submersão. Se Γ é o conjunto de todas as transformações locais de $\mathbb{R}^k$ então Γ -folheações clássicas em B se correspondem com folheações de codimensão k em B . A construção do gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal mostra que toda Γ -estrutura de Haefliger é o pullback por uma aplicação de uma Γ -folheação clássica. É por isto que em algumas referencias, vide por exemplo [Thu74] e [Thu76] ou [Mil09], uma estrutura de Haefliger é definida por meio do seu gráfico.

O procedimento para construir o gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal começa com a seguinte observação: Suponha que $\bar{P} \longrightarrow B$ é trivial, i.e. existe uma aplicação $f : B \longrightarrow M$ tal que $\bar{P} \simeq f^*\bar{\Gamma}$. Então consideramos o gráfico desse $\bar{P}$ como sendo o $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável $\varpi : \mathbb{P} = B \times \bar{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{B} = B \times M$, para o qual a sua aplicação de momento $\eta : (b, \lambda) \in \mathbb{P} \longmapsto \bar{\mathbf{t}}(\lambda) \in M$ é submersão. Pode-se verificar que $\mathbf{p} : (b, x) \in \mathbb{B} \longmapsto b \in B$ é uma submersão sobrejetora, $F : b \in B \longmapsto (b, f(b)) \in \mathbb{B}$ é uma seção de $\mathbf{p}$ e $\bar{P} \simeq F^*\mathbb{P}$. Note que sempre é possível reduzir $\mathbb{B}$ para qualquer vizinhança de $F(B)$ em $B \times M$. Isto já mostra que o gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal não é único e que na verdade temos é o “germe do gráfico” de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal, esse fenômeno se repete no caso geral. Para a construção do gráfico de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal no caso geral, isto é quando $\bar{P}$ não é trivial, faremos a construção local como acima e logo usando os resultados apresentados nas Subseções 1.7.1 e 1.7.2 mostraremos que podemos colar todos esses objetos locais.

Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \longrightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \longrightarrow M$. Seja $\{\bar{\sigma}_i : U_i \longrightarrow \bar{P}\}_{i \in I}$ um atlas para $\bar{P}$. Denotamos por $f_i = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}_i$ e por $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \bar{\Gamma}$ as funções de transição desse atlas. Vamos supor que $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de B localmente finita por abertos relativamente compactos. Como B é variedade, toda cobertura aberta admite um refinamento com essas propriedades exigidas. Além disso, seja $\{U'_i\}_{i \in I}$ uma outra cobertura aberta de B com os mesmo índices e tal que $\bar{U}'_i \subset U_i, \forall i \in I$. Novamente, o fato de B ser uma variedade garante que essa segunda cobertura com tais propriedades sempre existe.

Como vimos na subseção anterior, associado com o cociclo de Haefliger $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \bar{\Gamma}\}_{i,j \in I}$ temos:

- Para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existem uma vizinhança $W_{ij} \subset (U_i \cap U_j) \times M$ do $F_j(U_i \cap U_j)$, e uma biseção local horizontal $\mathfrak{z}_{ij} : W_{ij} \longrightarrow \mathcal{G}$ de $B \times \mathcal{G}$ tal que para todo $b \in U_i \cap U_j$ temos que $\mathfrak{z}_{ij}^b \in \Gamma$, e $\gamma_{ij}(b) = \text{germ}_{f_j(b)}(\mathfrak{z}_{ij}^b)$
- A aplicação $\phi_{ij} : (b, x) \in W_{ij} \longmapsto (b, \mathbf{t}(\mathfrak{z}_{ij}(b, x))) \in B \times M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem;

- $F_i = \phi_{ij} \circ F_j$ em $U_i \cap U_j$;
- $(\phi_{ij})^{-1} = \phi_{ji}$;
- Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então existe uma vizinhança $W_{ijk} \subset W_{ik} \cap W_{jk}$ de $F_k(U_i \cap U_j \cap U_k)$ onde se satisfaz $\mathfrak{Z}_{ij} \star \mathfrak{Z}_{jk} = \mathfrak{Z}_{ik}$.

Com esses objetos e com as propriedades topológicas das coberturas abertas escolhidas acima temos o seguinte teorema.

Teorema 1.79. *Existem uma variedade $\mathbb{B}$ de dimensão igual a $\dim B + \dim M$, um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável $\varpi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ com aplicação de momento $\eta: \mathbb{P} \rightarrow M$ submersão, uma submersão sobrejetora $\mathbf{p}: \mathbb{B} \rightarrow B$ e uma seção $\psi: B \rightarrow \mathbb{B}$ de $\mathbf{p}$ tal que $\bar{P} \simeq \psi^* \mathbb{P}$. Se $\bar{P}$ é topológico então ψ é uma seção contínua de $\mathbf{p}$, e se $\bar{P}$ é diferenciável então ψ é uma seção diferenciável de $\mathbf{p}$.*

Demonstração. Afirmamos que para cada $b \in U'_i$ existe uma vizinhança W_i^b de $F_i(b)$ contida em $U'_i \times M$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- se $b \in \overline{U'_j}$ então $W_i^b \subset W_{ji}$, senão $W_i^b \cap \phi_{ji}^{-1}(U'_j \times M) = \emptyset$;
- se $b \in \overline{U'_j} \cap \overline{U'_k}$ então $\phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}$ em W_i^b , senão $W_i^b \cap \phi_{ji}^{-1}(U'_j \times M) \cap \phi_{ji}^{-1}(\phi_{kj}^{-1}(U'_k \times M)) = \emptyset$.

Seja $V_i = \bigcup_{x \in U'_i} W_i^x \subset B \times M$ e denote por (i, y) os elementos de V_i . Sobre o espaço produto $\prod_{i \in I} V_i$ temos definida a relação de equivalência $(i, b, x) \sim (j, b', x') \Leftrightarrow (b, x) = \phi_{ij}(b', x')$ e denotaremos por $\mathbb{B} = \prod_{i \in I} V_i / \sim$ o espaço quociente e por $[i, b, x]$ os elementos em $\mathbb{B}$. As propriedades topológicas das coberturas escolhidas garantem que $\mathbb{B}$ tem estrutura de variedade diferenciável Hausdorff e segundo contável. Para cada $i \in I$, a inclusão $(b, x) \in V_i \mapsto [i, b, x] \in \mathbb{B}$ determina um aberto $\tilde{V}_i$ de $\mathbb{B}$ e dessa forma temos que $\{\tilde{V}_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{B}$.

Definimos um cociclo de Haefliger em $\{\tilde{V}_i\}_{i \in I}$ a valores em $\bar{\Gamma}$ por:

- as submersões $\mathbf{f}_i: [j, b, x] \in \tilde{V}_i \mapsto \text{pr}_2(\phi_{ij}(b, x)) \in M$;
- as funções de transição $\Upsilon_{ij}: [i, b, x] \in \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j \mapsto \text{germ}_{\mathbf{f}_j([i, b, x])}(\mathfrak{Z}_{ij}^b) \in \bar{\Gamma}$

Portanto este cociclo de Haefliger corresponde com um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\varpi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ com aplicação de momento $\eta: \mathbb{P} \rightarrow M$ submersão.

A aplicação $\mathbf{p}: [i, b, x] \in \mathbb{B} \mapsto b \in B$ define uma submersão sobrejetora e a aplicação $\psi: b \in B \mapsto [i, b, \mathbf{f}_i(b)] \in \mathbb{B}$, quando $b \in U'_i$, define uma seção para $\mathbf{p}$.

Finalmente, verifica-se que o pullback do cociclo de Haefliger $\{\mathbf{f}_i, \Upsilon_{ij}\}_{i, j \in I}$ pela aplicação ψ produz o cociclo de Haefliger $\{f_i, \gamma_{ij}\}_{i, j \in I}$. $\square$

Um fato conhecido em topologia diferencial é que toda seção contínua de uma submersão é homotópica a uma seção diferenciável, vide o Teorema 6.26 em [Lee13]. Assim obtemos o seguinte corolário do Teorema 1.79.

Corolário 1.80. *Todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal topológico sobre uma variedade é homotópico a um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável.*

Capítulo 2

Fibrados vetoriais ancorados e aplicações transversais

Nesse capítulo apresentaremos o outro objeto importante para a generalização da construção de folheações regulares por meio de fibrados principais com grupoide de estrutura e do seu correspondente teorema de classificação. Trata-se dos fibrados vetoriais ancorados, os quais aparecem pela primeira vez em [Pop92] com o nome de espaços tangentes relativos. Nos fibrados vetoriais ancorados pode-se desenvolver muita geometria que é tradicionalmente desenvolvida no fibrado tangente. Nosso interesse para incluir aos fibrados vetoriais ancorados é porque eles incluem diferentes estruturas geométricas ligadas aos grupoides de Lie, por exemplo estruturas de Dirac ou geometria complexa generalizada e inclusive aos próprios algebroides de Lie. Outra motivação é que sempre é possível associar a uma distribuição generalizada diferenciável, e em particular para folheações singulares, um fibrado vetorial ancorado, porém a escolha de tal fibrado ancorado não é canônica. Esse fato é mostrado em [DLPR12]. Apesar disso, para algumas distribuições generalizadas diferenciáveis tal escolha é natural.

2.1 Fibrados vetoriais ancorados

Definição 2.1. Um fibrado vetorial ancorado sobre M é um par $(E, \mathfrak{a})$ onde $\mathfrak{q}: E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial e $\mathfrak{a}: E \rightarrow TM$ é um morfismo de fibrados vetoriais cobrindo a id_M chamado de âncora. Usualmente denotaremos o fibrado vetorial ancorado $(E, \mathfrak{a})$ pela âncora $\mathfrak{a}: E \rightarrow TM$.

Exemplo 2.2. Os exemplos mais elementares de fibrados vetoriais ancorados são:

1. Espaços vetoriais se correspondem com fibrados vetoriais ancorados sobre um ponto $M = \{*\}$.
2. O fibrado tangente $\text{id}_{TM}: TM \rightarrow TM$ é um fibrado vetorial ancorado, chamado de fibrado ancorado trivial sobre M .
3. Distribuições regulares $D \subset TM$ são exemplos de fibrados vetoriais ancorados, neste caso a âncora é a inclusão $\mathfrak{a}: D \rightarrow TM$.

Definição 2.3. Sejam $(E_1, \mathfrak{a}_1)$ um fibrado vetorial ancorado sobre M_1 e $(E_2, \mathfrak{a}_2)$ um fibrado vetorial ancorado sobre M_2 . Um morfismo de fibrados vetoriais ancorados é um morfismo de fibrados

vetoriais (Φ, ϕ) entre E_1 e E_2 tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \mathbf{a}_1 \downarrow & & \downarrow \mathbf{a}_2 \\ TM_1 & \xrightarrow{d\phi} & TM_2 \end{array}$$

Definição 2.4. Dizemos que um fibrado vetorial ancorado $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ é involutivo se $\mathbf{a}(\Gamma(E)) \subset \mathfrak{X}(M)$ é uma subálgebra de Lie.

Como é apontado em [BLM16] toda folheação (singular ou regular) em M pode ser descrita como as orbitas de $\mathbf{a}(\Gamma(E))$ para um fibrado vetorial ancorado involutivo $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$, mas as escolhas de E e $\mathbf{a}$ não são necessariamente únicas.

2.1.1 Pullback de fibrados vetoriais ancorados

Observe que o pullback (ou produto fibrado) de fibrados vetoriais não preserva a propriedade de ser um fibrado vetorial ancorado. Sem embargo podemos obter um fibrado vetorial ancorado se fazemos o pullback na categoria dos fibrados vetoriais. A seguinte definição e construção é tomada de [BLM16].

Definição 2.5. Seja $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ um fibrado vetorial ancorado e $f : B \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f transversal a $\mathbf{a}$, se

$$T_{f(b)}M = df(T_bB) + \mathbf{a}(E_{f(b)})$$

para todo $b \in B$. Nesse caso denotarmos $f \pitchfork \mathbf{a}$.

Se $f \pitchfork \mathbf{a}$ poderemos construir o fibrado ancorado pullback $\mathbf{a}^! : f^!E \rightarrow TB$, onde

$$f^!E = \left\{ (v, e) \in TB \oplus f^*E : df \cdot v = f^*\mathbf{a} \cdot e \right\}$$

e cuja âncora é definida por

$$\mathbf{a}^! : (v, e) \in f^!E \mapsto v \in TB$$

O fibrado $f^!E$ é construído com a propriedade que o seguinte diagrama seja um diagrama pullback na categoria de fibrados vetoriais sobre B .

$$\begin{array}{ccc} f^!E & \dashrightarrow & f^*E \\ \downarrow & & \downarrow f^*\mathbf{a} \\ TB & \xrightarrow{df} & f^*TM \end{array}$$

Agora apresentamos outra forma de obter o fibrado ancorado pullback. Sejam $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ um fibrado vetorial ancorado e $f : B \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Sempre podemos definir

o seguinte morfismo de fibrados vetoriais sobre id_M

$$\begin{aligned} df \ominus \mathbf{a} : TB \oplus f^*E &\longrightarrow f^*TM \\ (v, e) &\longmapsto df \cdot v - \mathbf{a} \cdot e \end{aligned}$$

É claro que $f \pitchfork \mathbf{a}$ se e somente se $df \ominus \mathbf{a}$ é um epimorfismo. Sob a condição de transversalidade temos que $f^!E = \text{Ker}(df \ominus \mathbf{a})$, e em particular concluímos que

$$\text{rank}(f^!E) = \text{rank}(E) + \dim B - \dim M$$

Exemplo 2.6. Suponha $E = 0$, então a condição de transversalidade é satisfeita com $f : B \longrightarrow M$ submersão, e neste caso $f^!E = \text{Ker}(df) \subset TB$ e $\mathbf{a}^!$ é a inclusão.

Observação 2.7. Gostaríamos de pensar o Exemplo 2.6 do seguinte modo: O fibrado vetorial ancorado $\mathbf{a} : 0 \longrightarrow TM$ induz a folheação por pontos sobre M . Sob a condição de transversalidade, a construção do fibrado vetorial ancorado permite transportar essa estrutura folheada para B preservando a geometria transversal. De fato, a folheação em B é a folheação por fibras da submersão f , e esse tipo de folheação é chamada de folheação simples. A observação importante a ser feita aqui é que toda folheação regular é localmente uma folheação simples, isto é toda folheação regular é localmente modelada pela folheação por pontos.

Exemplo 2.8. Seja $\mathbf{a} : E \longrightarrow TM$ um fibrado vetorial ancorado sobre M e seja $i : N \hookrightarrow M$ uma subvariedade mergulhada. A condição de transversalidade entre i e $\mathbf{a}$ se traduz para: $T_x M = T_x N + \mathbf{a}(E_x)$, $\forall x \in N$. Assim $i^!E = \{(\mathbf{a}(e), e) \in TN \oplus E|_N : e \in E|_N\} \simeq \mathbf{a}^{-1}(TN)$. Outra forma equivalente de obter $i^!E$ é a seguinte. Seja $\nu N = TM|_N / TN$ o fibrado normal de N e denote por $\mathbf{p} : TM|_N \longrightarrow \nu N$ a projeção canônica. Então $i \pitchfork \mathbf{a}$ se e somente se $\mathbf{p} \circ \mathbf{a}|_N$ é um epimorfismo, onde $\mathbf{a}|_N$ é a restrição $\mathbf{a}|_N : E|_N \longrightarrow TM|_N$. Finalmente $i^!E \simeq \text{Ker}(\mathbf{p} \circ \mathbf{a}|_N)$.

Exemplo 2.9. Seja $(A, \rho, [,])$ é um algebroide de Lie. Se $f : B \longrightarrow M$ é transversal a ρ então o fibrado ancorado pullback $f^!A$ herda uma estrutura de algebroide de Lie. As seções de $f^!A$ é o conjunto

$$\Gamma(f^!A) = \left\{ (X, \alpha^*) \in \mathfrak{X}(B) \oplus \Gamma(f^*A) : df \cdot X = \rho(\alpha^*) \right\}$$

Como os $C^\infty(B)$ -módulos $\Gamma(f^*A) \simeq C^\infty(B) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(A)$ são isomorfos, então para definir o colchete de Lie em $\Gamma(f^!A)$ basta defini-lo sobre os geradores de $\Gamma(f^*A)$. Assim o colchete nas seções de $f^!A$ é definido por

$$[(X, f \otimes \alpha), (X', f' \otimes \alpha')] = ([X, X'], f f' \otimes [\alpha, \alpha'] + \mathcal{L}_X(f') \otimes \alpha - \mathcal{L}_{X'}(f) \otimes \alpha')$$

As construções descritas nesse exemplo são conhecidas como pullback de um algebroide de Lie.

Exemplo 2.10. Seja $L \subset TM \oplus T^*M$ uma estrutura de Dirac em M , vide [Cou90]. Então $\mathbf{a} = \text{pr}_{TM}|_L : L \longrightarrow TM$ é um fibrado vetorial ancorado, de fato ele é um algebroide de Lie. Seja $f : B \longrightarrow M$ uma aplicação transversal a $\mathbf{a}$, pelo exemplo anterior sabemos que $f^!L$ tem pelo menos estrutura de algebroide de Lie. É um fato conhecido que na verdade $f^!L$ é uma estrutura de Dirac em B . Para obter o pullback da estrutura de Dirac L definimos a seguinte relação entre os

elementos de $\mathbb{T}B = TB \oplus T^*B$ e $\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$. Sejam $(v, \omega) \in \mathbb{T}_bB$ e $(u, \vartheta) \in \mathbb{T}_xM$, então

$$(v, \omega) \sim_f (u, \vartheta) \text{ se } x = f(b), \quad u = d_b f \cdot v, \quad \omega = (d_b f)^* \cdot \vartheta$$

Logo definimos $L' = \{(v, \omega) \in \mathbb{T}B : \exists (u, \vartheta) \in L \text{ tal que } (v, \omega) \sim_f (u, \vartheta)\}$. Pela condição de transversalidade pode-se verificar L' é um subfibrado de $\mathbb{T}B$ e ele define uma estrutura de Dirac em B . Por outro lado, também pode-se verificar que L' é isomorfo como fibrado vetorial ancorado $f^!L$. As construções descritas nesse exemplo são conhecidas como pullback de uma estrutura de Dirac.

Observação 2.11. Satisfeita a condição de transversalidade, o pullback de um fibrado vetorial ancorado involutivo é um fibrado vetorial ancorado involutivo¹. Assim, esta construção permite fazer pullback de folheações singulares e construir novas folheações singulares a partir de um modelo, de acordo com a filosofia da Observação 2.7.

2.2 Jatos e classificação de aplicações transversais a um fibrado vetorial ancorado

É interessante notar que aplicações diferenciáveis de B em M aparecem como seções do fibrado $B \times M \rightarrow B$, mas aplicações diferenciáveis satisfazendo alguma relação diferencial, por exemplo: imersões, submersões, dificilmente aparecem como seções de algum sub-fibrado de $B \times M \rightarrow B$. Isto motiva o estudo dos jatos de aplicações diferenciáveis.

Noções de fibrados de jatos

Jatos foram introduzidos na matemática por Ehresmann no começo da década de 1950 para estudar propriedades de aplicações diferenciáveis entre variedades, e são muito uteis no estudo do comportamento global de equações (relações) diferenciais parciais e portanto em problemas relacionados a geometria das variedades. Aqui apresentaremos uma breve revisão dos jatos e nossas principais referencias são [GG73] e [Sau89].

Sejam B e M duas variedades diferenciáveis. Seja $b \in B$, denotamos $\mathfrak{D}_b$ à coleção de subconjuntos abertos de B que contem ao ponto b e

$$\mathfrak{F}_b = \left\{ f : U \rightarrow M : U \in \mathfrak{D}_b \text{ e } f \text{ é diferenciável} \right\}$$

Definição 2.12. Sejam $f, g \in \mathfrak{F}_b$, e $k \in \mathbb{Z}$ maior que zero. Então:

- Dizemos que $f \sim_1 g$ em b se $f(b) = g(b)$ e $d_b f = d_b g$.
- Dizemos que $f \sim_k g$ em b se $f(b) = g(b)$ e $df \sim_{k-1} dg$ em cada $v \in T_b B$.
- Fixado $(b, x) \in B \times M$, denotamos por $J^k(B, M)_{(b, x)}$ o conjunto de classes de equivalência de aplicações $f \in \mathfrak{F}_b$, com $f(b) = x$, pela relação de equivalência “ $\sim_k$ em b ”.
- Denotamos por $J^k(B, M) = \bigsqcup_{(b, x)} J^k(B, M)_{(b, x)}$. Um elemento σ em $J^k(B, M)$ é chamado de k -jato de B em M . O numero k também é chamado de ordem do jato σ .

¹Vide Proposição 3.12 em [BLM16]

- Dado σ um k -jato, existem únicos $b \in B$ e $x \in M$ tais que $\sigma \in J^k(B, M)_{(b, x)}$. Assim temos duas aplicações

$$\begin{array}{ccc} \alpha_k: J^k(B, M) & \longrightarrow & B \\ \sigma & \longmapsto & b \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \zeta_k: J^k(B, M) & \longrightarrow & M \\ \sigma & \longmapsto & x \end{array}$$

Essas aplicações são caracterizadas por: $\alpha_k(\sigma) = b$ e $\zeta_k(\sigma) = x$ se e somente se $\sigma \in J^k(B, M)_{(b, x)}$.

- Dada $f \in C^\infty(B, M)$ existe uma aplicação canonicamente definida $j^k f : b \in B \mapsto j_b^k f \in J^k(B, M)$, onde $j_b^k f$ denota a classe de equivalência de f em $J^k(B, M)_{(b, f(b))}$. Essa aplicação é chamada de k -jato extensão de f .

Só para completar essa descrição, quase por definição consideramos $J^0(B, M) = B \times M$. No Capítulo 2 de [GG73] encontra-se uma bela e simples descrição da estrutura diferenciável nos espaços e aplicações descritas acima. Em particular temos que:

- $J^k(B, M)$ é uma variedade diferenciável,
- as aplicações α_k e ζ_k são submersões sobrejetoras,
- $j^k f$ é diferenciável para cada $f \in C^\infty(B, M)$.

Topologias em espaços de aplicações contínuas

Sejam X e Y espaços topológicos, denotarmos $C(X, Y)$ o conjunto de aplicações contínuas de X em Y . Seja $f \in C(X, Y)$ denotarmos $j^0 f : x \in X \mapsto (x, f(x)) \in X \times Y$, assim é claro que $j^0 f \in C(X, X \times Y)$. Em $C(X, Y)$ vamos considerar as seguintes topologias:

- **Compacto-aberta** cuja sub-base é dada por conjuntos da forma $\{f \in C(X, Y) : f(K) \subset V\}$, onde $K \subset X$ é compacto e $V \subset Y$ é aberto. Denotarmos $C_W(X, Y)$ ao conjunto $C(X, Y)$ dotado da topologia compacto-aberta. Para espaços minimamente razoáveis essa topologia é Hausdorff.
- **Completamente-aberta** cuja base é dada por conjuntos da forma $\{f \in C(X, Y) : f(X) \subset V\}$, onde $V \subset Y$ é aberto. Denotarmos $C_U(X, Y)$ ao conjunto $C(X, Y)$ dotado da topologia completamente-aberta. Essa topologia não é Hausdorff pois é impossível separar aplicações f, g que tem a mesma imagem $f(X) = g(X)$.
- **Gráfico-aberta** cuja base é dada por conjuntos da forma $\{f \in C(X, Y) : j^0 f(X) \subset W\}$, onde $W \subset X \times Y$ é aberto. Denotarmos $C_S(X, Y)$ ao conjunto $C(X, Y)$ dotado da topologia gráfico-aberta. A topologia gráfico-aberta é mais fina que a topologia compacto-aberta, isto segue do fato que $f(K) \subset V \iff j^0 f(X) \subset (X - K) \times Y \cup X \times V$.

A aplicação injetora $j^0 : f \in C(X, Y) \mapsto j^0 f \in C(X, X \times Y)$ serve para produzir topologias em $C(X, Y)$ apos ter escolhido uma topologia em $C(X, X \times Y)$. Desta forma a topologia completamente-aberta em $C(X, X \times Y)$ induz, via j^0 , a topologia gráfico-aberta em $C(X, Y)$. Assim $j^0 : C_S(X, Y) \longrightarrow C_U(X, X \times Y)$ é uma aplicação contínua.

Peculiarmente, independente do dito acima, temos a seguinte proposição

Proposição 2.13. *Com as notações acima, temos:*

1. A aplicação $j^0 : C_W(X, Y) \mapsto C_W(X, X \times Y)$ é contínua.
2. A aplicação $j^0 : C_U(X, Y) \mapsto C_U(X, X \times Y)$ é contínua.
3. A aplicação $j^0 : C_S(X, Y) \mapsto C_S(X, X \times Y)$ é contínua.
4. A aplicação $j^0 : C_S(X, Y) \mapsto C_W(X, X \times Y)$ é contínua.

Topologias em espaços de aplicações diferenciáveis

Sejam B e M duas variedades. Como sabemos, para cada $f \in C^\infty(B, M)$ temos que a sua k -jato extensão $j^k f : B \rightarrow J^k(B, M)$ é uma aplicação diferenciável. Isto induz a aplicação injetora $j^k : f \in C^\infty(B, M) \mapsto j^k f \in C^\infty(B, J^k(B, M))$. Em $C^\infty(B, J^k(B, M)) \subset C(B, J^k(B, M))$ colocaremos a topologia de subespaço, assim cada escolha de uma topologia em $C(B, J^k(B, M))$ produzirá, via j^k , uma topologia em $C^\infty(B, M)$. Então temos:

- **Topologia C^k -fraca em $C^\infty(B, M)$:** Induzida de $C^\infty(B, J^k(B, M))$ com a topologia compacto-aberta. Conjuntos da forma $\{f \in C^\infty(B, M) : j^k f(K) \subset W\}$, onde $K \subset B$ é compacto e $W \subset J^k(B, M)$ é aberto, constituem uma sub-base para a topologia C^k -fraca.
- **Topologia C^k -forte em $C^\infty(B, M)$:** Induzida de $C^\infty(B, J^k(B, M))$ com a topologia completamente-aberta. Conjuntos da forma $\{f \in C^\infty(B, M) : j^k f(B) \subset W\}$, onde $W \subset J^k(B, M)$ é aberto, constituem uma base para a topologia C^k -forte.

A topologia C^k -forte é mais fina que a topologia C^k -fraca, isto segue do fato que $j^k f(K) \subset W \iff j^k f(X) \subset (\alpha_k)^{-1}((X - K) \cup W)$.

Até esse ponto nós temos usado a aplicação $j^k : C^\infty(B, M) \rightarrow C^\infty(B, J^k(B, M))$ para produzir topologias C^k -forte/fraca em $C^\infty(B, M)$. Como $J^k(B, M)$ é uma variedade também podemos colocar as topologias C^k -forte/fraca em $C^\infty(B, J^k(B, M))$. É natural estudar a continuidade de j^k em tais casos, desta forma temos a seguinte proposição.

Proposição 2.14. *Considere $C^\infty(B, M)$ com a topologia C^{l+k} -forte/fraca e $C^\infty(B, J^k(B, M))$ com a topologia C^l -forte/fraca respectivamente. Então a aplicação $j^k : C^\infty(B, M) \rightarrow C^\infty(B, J^k(B, M))$ é contínua.*

Demonstração. Temos a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \xi : J^{l+k}(B, M) &\longrightarrow J^l(B, J^k(B, M)) \\ j_b^{l+k} f &\longmapsto j_b^l(j^k f) \end{aligned}$$

Essa aplicação induz a aplicação $\xi_* : F \in C^\infty(B, J^{l+k}(B, M)) \mapsto \xi \circ F \in C^\infty(B, J^l(B, J^k(B, M)))$ a qual é contínua se colocarmos ou a topologia compacto-aberta ou a topologia completamente-aberta nesses espaços de aplicações diferenciáveis.

Por outro lado, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(B, M) & \xrightarrow{j^k} & C^\infty(B, J^k(B, M)) \\
 j^{l+k} \downarrow & & \downarrow j^l \\
 C^\infty(B, J^{l+k}(B, M)) & \xrightarrow{\xi_*} & C^\infty(B, J^l(B, J^k(B, M)))
 \end{array}$$

A setas verticais induzem as topologias forte/fraca nos espaços na fila horizontal superior apos ter escolhido as correspondentes topologias na fila horizontal inferior. De modo que, se colocarmos as topologias compacto-aberta na fila horizontal inferior elas produzem as topologias fracas na fila horizontal superior, e portanto a continuidade de j^k segue da comutatividade do diagrama. Um argumento semelhante prova a continuidade de j^k para as topologias fortes. $\square$

Observação 2.15. *Como a topologia forte é mais fina que a topologia fraca, então se considerarmos $C^\infty(B, M)$ com a topologia C^{l+k} -forte e $C^\infty(B, J^k(B, M))$ com a topologia C^l -fraca, a aplicação $j^k : C^\infty(B, M) \rightarrow C^\infty(B, J^k(B, M))$ ainda é continua.*

Nesse ponto é oportuno mencionar que a imagem da aplicação j^k cai no subconjunto de seções do fibrado $\alpha_k : J^k(B, M) \rightarrow B$. É claro que se colocarmos em $\Gamma(J^k(B, M)) \subset C^\infty(B, J^k(B, M))$ a topologia de subespaço, a proposição e a observação anteriores segue sendo valida quando substituirmos $C^\infty(B, J^k(B, M))$ por $\Gamma(J^k(B, M))$.

Espaço de 1-jatos

Nós estamos interessados no caso $k = 1$. Denotamos por $\text{Hom}(TB, TM) \rightarrow B \times M$ ao fibrado vetorial cuja fibra no ponto (b, x) é o espaço vetorial das aplicações lineares de $T_b B$ em $T_x M$. Compondo este fibrado com a projeção $B \times M \rightarrow B$ obtemos um outro fibrado sobre B . Cada trivialização local $\varphi : TB_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ do fibrado tangente TB induz uma trivialização local para $\text{Hom}(TB, TM)$ definida por

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(TB, TM)_U &\longrightarrow U \times \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM) \\
 p : T_b B \rightarrow T_x M &\longmapsto (b, p \circ \varphi_b^{-1})
 \end{aligned}$$

Assim verifica-se que $\text{Hom}(TB, TM) \rightarrow B$ é um fibrado sobre B com fibra $\text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM)$, onde $\dim B = n$.

As seções deste fibrado $\Gamma(\text{Hom}(TB, TM))$ são os morfismos de fibrado vetorial de TB para TM . Existe um difeomorfismo canônico entre $J^1(B, M)$ e $\text{Hom}(TB, TM)$ definido por

$$\begin{aligned}
 J^1(B, M) &\longrightarrow \text{Hom}(TB, TM) \\
 \sigma = j_b^1 f &\longmapsto d_b f
 \end{aligned}$$

Este difeomorfismo na verdade é um isomorfismo de fibrados entre $\alpha_1 : J^1(B, M) \rightarrow B$ e $\text{Hom}(TB, TM) \rightarrow B$. Devido a essa identificação a aplicação j^1 coincide com a aplicação diferencial d . Para finalizar esta seção vamos escrever a informação a ser guardada: Coloque em $C^\infty(B, M)$ a topologia C^{l+1} -forte/fraca e em $\Gamma(\text{Hom}(TB, TM))$ a topologia C^l -forte/fraca, então

a aplicação

$$\begin{aligned} d: C^\infty(B, M) &\longrightarrow \Gamma(\text{Hom}(TB, TM)) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

é injetora e continua.

2.2.1 Teorema de classificação de aplicações transversais a fibrados vetoriais ancorados à la Gromov-Phillips

Nessa subseção apresentaremos o teorema de classificação de aplicações transversais a um fibrado vetorial ancorado. Depois de ter verificado que ser transversal a um fibrado vetorial ancorado é uma relação diferencial aberta, esse teorema de classificação será uma aplicação direta do teorema de Gromov sobre relações diferenciais abertas em variedades abertas.

Definição 2.16. *Seja $p: T_b B \longrightarrow T_x M$ um elemento de $\text{Hom}(TB, TM)$. Dizemos que p é transversal a $\mathbf{a}$ se*

$$T_x M = p(T_b B) + \mathbf{a}_x(E_x)$$

Neste caso denotamos $p \pitchfork \mathbf{a}$.

Denotamos por $\mathcal{R} = \{p \in \text{Hom}(TB, TM) : p \pitchfork \mathbf{a}\}$. Usando a trivialização local de $\text{Hom}(TB, TM)$ induzida pela trivialização local (U, φ) de TB pode-se mostrar que $\mathcal{R}_U$ está em bijeção com o conjunto $U \times \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q} = \{q \in \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM) : q \pitchfork \mathbf{a}\}$. A proposição abaixo mostra que $\mathcal{Q} \subset \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM)$ é subconjunto aberto e na verdade $\mathcal{R}_U$ é difeomorfo a $U \times \mathcal{Q}$. Isto também implica que $\mathcal{R} \subset \text{Hom}(TB, TM)$ é um subconjunto aberto e um sub-fibrado com fibra $\mathcal{Q}$.

Proposição 2.17. *$\mathcal{Q} \subset \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM)$ é um subconjunto aberto.*

Demonstração. Afirmamos que dados dois fibrados vetoriais F_1 e F_2 sobre a mesma base M , o conjunto $\text{Epi}(F_1, F_2) = \{p \in \text{Hom}(F_1, F_2) : p \text{ é sobrejetivo}\}$ é um subconjunto aberto (inclusive pode ser vazio). Isto pode ser verificado usando trivializações locais de F_1 e F_2 e o fato que para espaços vetoriais (isto é, M é um ponto) a afirmação é verdadeira.

Ora, para $\mathcal{Q}$ basta notar que a ancora $\mathbf{a}: E \longrightarrow TM$ induz a seguinte aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\oplus: \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n, TM) &\longrightarrow \text{Hom}(M \times \mathbb{R}^n \oplus E, TM) \\ q_x &\longmapsto q_x \oplus \mathbf{a}_x \end{aligned}$$

e que $\mathcal{Q} = \mathbf{a}_\oplus^{-1}(\text{Epi}(M \times \mathbb{R}^n \oplus E, TM))$. □

Denotamos por $\text{Trans}(TB, \mathbf{a})$ ao conjunto de seções diferenciáveis do fibrado $\mathcal{R} \longrightarrow B$. Assim $\text{Trans}(TB, \mathbf{a})$ é o conjunto de morfismos de fibrado vetorial de TB para TM transversais a $\mathbf{a}$. Segue-se que o conjunto de aplicações transversais a $\mathbf{a}$, de acordo com a Definição 2.5, é dado por $\text{Trans}(B, \mathbf{a}) = d^{-1}(\text{Trans}(TB, \mathbf{a}))$.

Definição 2.18. *Sejam $f, g \in \text{Trans}(B, \mathbf{a})$. Dizemos que f e g são regularmente homotópicas se elas pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $\text{Trans}(B, \mathbf{a})$.*

Definição 2.19. *Sejam $\Phi, \Psi \in \text{Trans}(TB, \mathbf{a})$. Dizemos que Φ e Ψ são regularmente homotópicos se eles pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $\text{Trans}(TB, \mathbf{a})$.*

A nossa definição de homotopia regular apresentada acima depende da escolha da topologia nos espaços $\text{Trans}(\dots)$. Mas independente dessa escolha, essa definição de homotopia regular preenche completamente a ideia de deformar uma aplicação transversal em outra através de aplicações transversais. Gostaríamos que nossa definição seja equivalente à definição usual de homotopia como uma aplicação de $B \times \mathbb{I}$ em M . Em topologia de espaços de aplicações contínuas é conhecido que a topologia compacto-aberta permite estabelecer uma equivalência entre a noção usual de homotopia e caminhos no espaço de aplicações. Nesse ponto decidimos considerar as topologias fracas em $C^\infty(B, M)$ e $\Gamma(\text{Hom}(TB, TM))$ de acordo com a nossa discussão feita no parágrafo anterior; e nos subconjuntos $\text{Trans}(B, \mathfrak{a}) \subset C^\infty(B, M)$ e $\text{Trans}(TB, \mathfrak{a}) \subset \Gamma(\text{Hom}(TB, TM))$ as correspondentes topologias de subespaço. A primeira consequência da nossa escolha da topologia fraca é que a aplicação diferencial

$$\begin{aligned} d: \text{Trans}(B, \mathfrak{a}) &\longrightarrow \text{Trans}(TB, \mathfrak{a}) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

é injetora e contínua. Outra consequência da escolha da topologia fraca é a seguinte proposição.

Proposição 2.20. *Sejam $f, g \in \text{Trans}(B, \mathfrak{a})$. Então f e g são regularmente homotópicas se e somente se existe uma aplicação diferenciável $h: B \times \mathbb{I} \rightarrow M$ transversal a $\mathfrak{a}$ tal que:*

1. $h_t: b \in B \rightarrow h(b, t) \in M$ é transversal a $\mathfrak{a}$, para todo $t \in \mathbb{I}$;
2. $h_0 = f$ e $h_1 = g$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $f, g \in \text{Trans}(B, \mathfrak{a})$ são regularmente homotópicas. Logo existe um caminho contínuo $\hat{h}: t \in \mathbb{I} \mapsto \hat{h}(t) \in \text{Trans}(B, \mathfrak{a})$ satisfazendo $\hat{h}(0) = f$ e $\hat{h}(1) = g$. Pela topologia fraca, e pelo fato que toda aplicação contínua e homotópica a uma aplicação diferenciável, existe uma homotopia diferenciável $h: B \times \mathbb{I} \rightarrow M$ tal que $\hat{h}(t) = h_t: b \in B \rightarrow h(b, t) \in M$. Como $\hat{h}(t)$ é transversal a $\mathfrak{a}$, concluímos que h_t é transversal a $\mathfrak{a}$, para cada $t \in \mathbb{I}$. Ora, veja que essa última condição implica que h é transversal a $\mathfrak{a}$. ($\Leftarrow$) Seja $h: B \times \mathbb{I} \rightarrow M$ satisfazendo as condições estabelecidas no enunciado dessa proposição, basta definir $\hat{h}(t) = h_t$. $\square$

Analogamente temos a seguinte proposição para homotopia regular em $\text{Trans}(TB, \mathfrak{a})$

Proposição 2.21. *Sejam $\Phi, \Psi \in \text{Trans}(TB, \mathfrak{a})$. Então Φ e Ψ são regularmente homotópicos se e somente se existe um morfismo de fibrados vetoriais $H: TB \times \mathbb{I} \rightarrow TM$ transversal a $\mathfrak{a}$ tal que:*

1. $H_t: v \in TB \rightarrow H(v, t) \in TM$ é transversal a $\mathfrak{a}$, para todo $t \in \mathbb{I}$;
2. $H_0 = \Phi$ e $H_1 = \Psi$.

Agora vamos enunciar o teorema de classificação de aplicações transversais ao fibrado ancorado $\mathfrak{a}: E \rightarrow TM$.

Teorema 2.22. *Se B é uma variedade aberta. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} d: \text{Trans}(B, \mathfrak{a}) &\longrightarrow \text{Trans}(TB, \mathfrak{a}) \\ f &\longmapsto df \end{aligned}$$

é uma equivalência homotópica fraca.

Essa teorema é uma consequência direta de teorema de Gromov apresentado em [Gro69], uma vez que já foi provado na Proposição 2.17 que a condição de ser transversal a $a: E \rightarrow TM$ é uma relação diferencial aberta no espaço de 1-jatos. Outras referencias para o teorema de Gromov são [Ada93], [Gei03], [Gro86], [Hae71b] e [Poe71]. Para redimir nossa falta de apresentar ao leitor uma prova simples deste teorema de classificação gostaríamos dizer algumas palavras sobre a historia dele e fornecer algumas referencias. Essa historia começa com o problema de saber quando uma variedade B^n pode ser imersa numa variedade M^m . Ehresmann [Ehr48] conjecturou em 1948 que uma condição suficiente para a existência de uma imersão de B em M era a existência de um morfismo de fibrado vetorial de TB para TM que fosse injetivo na fibra. Dez anos depois Smale [Sma59] provou que imersões da esfera S^n em $\mathbb{R}^m$, $m \geq n+1$, são classificadas a menos de homotopia regular pelo n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(\mathcal{V}_{m,n})$, onde $\mathcal{V}_{m,n}$ denota a variedade de Stiefel de n -referenciais em $\mathbb{R}^m$. A grosso modo Smale provou que certas aplicações satisfazem a propriedade de levantamento de homotopias, e esta ideia vai ser explorada em todas as generalizações do teorema de Smale. Em seguida Hirsch [Hir59] generalizou o teorema de Smale para classificar imersões, a menos de homotopia regular, entre variedades arbitrárias B^n e M^m satisfazendo $m \geq n+1$.

De acordo com Smale [Sma63] o teorema de classificação de imersões na sua forma de equivalência homotópica fraca, como no Teorema 2.22, é devido a Hirsch e Palais (referido como Teorema 3.12 em [Sma63]). Seguindo as mesmas ideias da classificação de imersões Phillips [Phi67] provou um teorema de classificação de submersões sobre variedades abertas. Depois, quase simultaneamente Gromov [Gro69] e Phillips [Phi70] provaram um teorema de classificação de aplicações transversais a uma folheação regular. A prova de Phillips em [Phi70] continuava explorando as ideias de Smale no que ele chamou de *Smale-Thom-Hirsch-Palais-Haefliger-Poénaru Theorem Proving Machine*. Enquanto isso, Gromov em [Gro69] faz uma reformulação da teoria na linguagem de feixes e prova a versão mais geral da propriedade de levantamento de homotopias do Smale estendendo assim a sua aplicação para jatos e relações diferenciais de qualquer ordem. Uma boa referencia relatando a historia desta classificação a menos de homotopia regular encontra-se em [Spr05].

O Teorema 2.22 inclui o teorema de Phillips para submersões quando $E = 0$ e o teorema de Gromov-Phillips quando $E \subset TM$ é uma distribuição integrável e a é o morfismo inclusão.

Capítulo 3

Uma generalização de Γ -estruturas

Nesse capítulo propomos uma generalização do conceito de Γ -estrutura, usualmente definidas para Γ pseudogrupos de transformações locais de uma variedade M (os quais nós chamamos de pseudogrupos clássicos), para incluir os pseudogrupos generalizados apresentados na Seção 1.7. Assim, nós chamaremos de Γ -estrutura clássica as estruturas que correspondem a um Γ pseudogrupo clássico.

3.1 Γ -estruturas clássicas e estruturas de Haefliger

Começaremos essa seção lembrando as Γ -estruturas clássicas. Seja Γ um pseudogrupo de transformações locais de uma variedade M . Seja B uma outra variedade.

Definição 3.1. *Um Γ -atlas sobre B consiste de uma coleção $\mathcal{A} = \{f_i : U_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ satisfazendo*

1. $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de B ;
2. Para cada $i \in I$, a aplicação f_i é um difeomorfismo sobre a sua imagem;
3. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $f_i \circ f_j^{-1} \in \Gamma$.

Dizemos que dois Γ -atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ de B são equivalentes se a sua união $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ é um Γ -atlas de B . Pode-se verificar que equivalência de Γ -atlas sobre B é uma relação de equivalência no conjunto de Γ -atlas sobre B . Assim chegamos à definição de Γ -estrutura clássica em B .

Definição 3.2. *Uma Γ -estrutura clássica em B é a escolha de uma classe de equivalência de Γ -atlas sobre B .*

A seguir apresentamos alguns exemplos básicos de Γ -estruturas clássicas

Exemplo 3.3. *Nos exemplos a seguir M será um espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$:*

1. *Se relaxamos a definição acima para permitir que B seja um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e que as aplicações f_i sejam homeomorfismos, e além disso Γ é o conjunto de todas as transformações locais de $\mathbb{R}^m$, então a escolha de uma dessas Γ -estruturas clássicas sobre B equivale a escolha de uma estrutura diferenciável no espaço topológico B .*
2. *Seja Γ_{Sp} o pseudogrupo de transformações locais de $\mathbb{R}^{2n}$ que preservam a forma simplética canônica ω_{can} de $\mathbb{R}^{2n}$, i.e. $\phi \in \Gamma_{\text{Sp}}$ se e somente se $\phi^* \omega_{\text{can}} = \omega_{\text{can}}$. Então uma Γ_{Sp} -estrutura clássica em B equivale a uma estrutura simplética em B .*

3. Seja Γ_{iso} o pseudogrupo de isometrias locais da métrica canônica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^m$. Então uma Γ_{iso} -estrutura clássica em B equivale a uma métrica Riemanniana plana em B .
4. Seja Γ_{cont} o pseudogrupo de transformações locais de $\mathbb{R}^{2n+1}$ que preservam a forma de contato canônica α_{can} de $\mathbb{R}^{2n+1}$, i.e. $\phi \in \Gamma_{\text{cont}}$ se e somente se $\phi^* \alpha_{\text{can}} = \alpha_{\text{can}}$. Então uma Γ_{cont} -estrutura clássica em B equivale a uma estrutura de contato em B .

A filosofia das Γ -estruturas clássicas é a seguinte: Escolhe M com uma estrutura geométrica para ser usada como modelo local, escolhe o pseudogrupo Γ de transformações locais que preservam esse modelo local. Dessa forma uma Γ -estrutura clássica em B é uma estrutura geométrica em B localmente isomorfa à estrutura modelo. Todos os exemplos apresentados acima cumprem com essa filosofia. Os dois problemas importantes na teoria de Γ -estruturas clássicas são o problema de existência e o problema de deformação, e para esses problemas tem muitos trabalhos desenvolvidos de modo que não podemos dar uma lista de referências pois, por desconhecimento do autor, ela seria incompleta. Em contrapartida sugerimos ao leitor interessado alguns nomes de autores que possam ajudar na pesquisa desses trabalhos: V. Guillemin, S. Sternberg, A.S. Pollack, P.A. Griffiths, J.F. Pommaret, K. Kodaira e D.C. Spencer.

No final dos anos 1950, André Haefliger [Hae58] mostrou que as folheações regulares admitem uma descrição muito semelhante com as Γ -estruturas clássicas. Haefliger, de fato, identificou folheações regulares de codimensão k em uma variedade B com certos elementos de $H^1(B, \bar{\Gamma})$ o primeiro conjunto de cohomologia de B a valores no feixe de germes de aplicações diferenciáveis locais no grupoide $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ de germes de elementos em Γ , onde Γ é o pseudogrupo de transformações locais de $\mathbb{R}^k$. Nos seus próximos trabalhos¹ Haefliger vá tomando parcialmente a visão equivalente de fibrados principais com grupoide de estrutura $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$. O que faltava nos trabalhos de Haefliger foi guardar a estrutura de folheação nas aplicações estruturais do fibrado, ele sempre voltava aos atlas (de fibrado principal) para especificar quais desses fibrados representavam folheações. Agora nós sabemos que essa informação pode ser guardada na aplicação de momento e assim chegamos as seguintes definições. Seja Γ o pseudogrupo (clássico) de todas as transformações locais de $\mathbb{R}^k$, e seja $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ o grupoide de germes de elementos em Γ .

Definição 3.4. Uma estrutura de Haefliger em B é a escolha de um elemento em $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$, i.e. uma estrutura de Haefliger em B é uma classe de isomorfismo de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais sobre B . Uma folheação regular de codimensão k em B é uma estrutura de Haefliger cuja aplicação de momento é submersão.

Observe que a condição da aplicação de momento ser uma submersão não depende da escolha de representante de um elemento em $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$. Daqui para frente iremos considerar estruturas de Haefliger (e folheações regulares) como $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais, sem fazer referência que na verdade estamos trabalhando com a classe de isomorfismo do $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal escolhido.

Observe que toda estrutura de Haefliger tem um fibrado vetorial associado, ele surge da representação canônica do grupoide $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ no fibrado $T\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida por

$$\text{germ}_x(\phi) \cdot v = d_x \phi \cdot v$$

---

¹Vide, por exemplo, [Hae84].

Assim, se $\bar{\pi} : \bar{Q} \rightarrow B$ uma estrutura de Haefliger sobre B com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^k$, então o seu fibrado vetorial associado é denotado por $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} T\mathbb{R}^k \rightarrow B$, de acordo com a Seção 1.5. Além disso, pelo fato que $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ é étale (ou que $\bar{\pi}$ é um difeomorfismo local) temos que a aplicação de momento $\bar{\mu}$ permite definir o seguinte morfismo de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} T\mathbb{R}^k \\ v_b &\longmapsto [\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v_b] \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{Q}$ é uma seção local de $\bar{\pi}$ ao redor de b e $f := \bar{\sigma} \circ \bar{\mu}$.

Afirmção 3.5. *O morfismo $\hat{\mu}$ em (3.1) está bem definido.*

Demonstração. Com efeito, para verificar que o morfismo em (3.1) não depende da escolha da seção local, seja $\bar{\sigma}' : U' \rightarrow \bar{Q}$ outra seção local ao redor de b . Logo existe $\text{germ}_{f(b)}(\phi) \in \bar{\Gamma}$ satisfazendo

$$\bar{\sigma}'(b) = \text{germ}_{f(b)}(\phi) \cdot \bar{\sigma}(b)$$

Pela topologia de feixe em $\bar{\Gamma}$ temos que a equação

$$\bar{\sigma}'(b') = \text{germ}_{f(b')}(\phi) \cdot \bar{\sigma}(b')$$

é satisfeita para todo b' em uma vizinhança de b contida em $U \cap U'$. Assim obtemos que $f'(b') = \phi(f(b'))$ em aquela vizinhança. Portanto se verifica que $[\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v_b] = [\bar{\sigma}'(b), d_b f' \cdot v_b]$. $\square$

O argumento apresentado na prova acima também mostra que $\text{Ker}(\hat{\mu})|_{T_b B}$ escrito como $\{v_b \in T_b B : d_b f \cdot v_b = 0\}$, para uma seção local $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{Q}$ ao redor de b e $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$, não depende da escolha de $\bar{\sigma}$. Ademais, o fato que $\bar{\pi}$ seja um difeomorfismo local também permite escrever a $\hat{\mu}$ na seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} T\mathbb{R}^k \\ v_b &\longmapsto [p, d_p \bar{\mu} \cdot (d_p \bar{\pi})^{-1} \cdot v_b] \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\bar{\pi}(p) = b$.

Agora mostraremos que a definição de folheação regular apresentada na Definição 3.4 descreve de fato folheações regulares e que nesse caso o fibrado vetorial associado à representação $\bar{\Gamma} \curvearrowright T\mathbb{R}^k$ é o fibrado normal á folheação.

Então, suponha que $\bar{\pi} : \bar{Q} \rightarrow B$ é um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal sobre B com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^k$ submersão. Como $\bar{\pi}$ é um difeomorfismo local, então $\bar{\mu}$ é submersão se e somente se $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$ é submersão, para toda seção local $\bar{\sigma}$ de $\bar{\pi}$. Neste caso o morfismo (3.1) torna-se um epimorfismo cujo kernel define uma distribuição regular em TB . Como localmente temos $\text{Ker}(\hat{\mu})|_U = \text{Ker}(df)$ para alguma seção local $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{Q}$ de $\bar{\pi}$ e $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$, então a distribuição $\text{Ker}(\hat{\mu})$ é involutiva e portanto define uma folheação regular $\mathcal{F}$ de codimensão k em B , e assim $T\mathcal{F} = \text{Ker}(\hat{\mu})$. Além disto, o epimorfismo (3.1) induz um isomorfismo entre o fibrado associado $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} T\mathbb{R}^k$ e o fibrado normal da folheação $\mathcal{F}$.

Reciprocamente, uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão k em B pode ser definida² por uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de B com submersões $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que existem transições locais ϕ_{ij} de $\mathbb{R}^k$

²Vide Seção 1.2 em [MM03].

satisfazendo as seguintes condições

- $f_i = \phi_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$;
- Se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ então $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$.

Ademais, o fibrado normal a $\mathcal{F}$ é o fibrado vetorial sobre B cujo cociclo é definido por $b \in U_i \cap U_j \mapsto d_{f_j(b)}\phi_{ij} \in GL(k, \mathbb{R})$. Observe que as funções

$$\begin{aligned}\gamma_{ii} : b \in U_i &\mapsto \text{germ}_{f_i(b)}(\text{id}_{\mathbb{R}^k}) \in \bar{\Gamma} \\ \gamma_{ij} : b \in U_i \cap U_j &\mapsto \text{germ}_{f_j(b)}(\phi_{ij}) \in \bar{\Gamma}\end{aligned}$$

determinam um cociclo de Haefliger sobre B a valores em $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$, e portanto um (classe de isomorfismo de) $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{Q}$ sobre B . Como o fibrado $\bar{Q}$ possui um atlas cujas seções locais $\bar{\sigma}_i : U_i \rightarrow \bar{Q}$ projetam para as submersões $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ então a aplicação de momento de $\bar{Q}$ é uma submersão.

Dessa forma pensar as folheações regulares como uma classe de fibrados principais com grupoide de estrutura permite chegar e estudar diretamente o fibrado normal à folheação. Uma outra consequência desse modo de pensar é que grupoide de gauge $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} \bar{Q} \rightrightarrows B$ é um grupoide que integra a folheação $\mathcal{F}$ pensada como o algebroide de Lie $T\mathcal{F} \hookrightarrow TB$, fato que é provado na seguinte afirmação.

Afirmção 3.6. *O algebroide de Lie do grupoide de gauge $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} \bar{Q} \rightrightarrows B$ é a distribuição tangente $T\mathcal{F}$.*

Demonstração. Denote por A' o algebroide de $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} \bar{Q} \rightrightarrows B$. Segue da Proposição 1.62 que $\pi^*A' \simeq \text{Ker}(d\bar{\mu})$. Por outro lado, sabemos que $T\mathcal{F} = \text{Ker}(\hat{\mu})$ e usando $\hat{\mu}$ na forma (3.2) temos que $\pi^*T\mathcal{F} = \text{Ker}(d\bar{\mu})$. Segue que $\pi^*A' \simeq \pi^*T\mathcal{F}$ e portanto $A' \simeq T\mathcal{F}$. $\square$

É um fato conhecido na teoria de grupoides e algebroides de Lie que derivando uma representação do grupoide $\mathcal{G} \curvearrowright E$ obtemos uma A -conexão plana em E^3 . Observe que o grupoide de gauge $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} \bar{Q} \rightrightarrows B$ tem uma representação no fibrado normal $\bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}} T\mathbb{R}^k$, essa é a representação induzida pela equivalência de Morita desde a representação $\bar{\Gamma} \curvearrowright T\mathbb{R}^k$. Segue da proposição acima que existe uma $T\mathcal{F}$ -conexão plana no fibrado normal, essa conexão é a conexão de Bott definida em [Bot72].

Também uma outra consequência de pensar folheações regulares como fibrados principais com grupoide de estrutura é que podemos obter um teorema de classificação de folheações regulares para algumas variedades. Esse teorema de classificação é devido a Haefliger [Hae71a], onde ele usa como ingredientes principais ao teorema de classificação de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais e ao teorema de classificação de submersões devido a Gromov e Phillips.

A seguir enunciaremos o teorema de classificação de folheações regulares devido a Haefliger, para os detalhes destas definições e construções vide o próximo capítulo. Tendo visto que folheações regulares em B se correspondem com $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais sobre B com aplicação de momento submersão, dizemos que duas folheações $\bar{Q}_0$ e $\bar{Q}_1$ de codimensão k em B são integralmente homotópicas se existe folheação $\bar{Q}$ de codimensão k em $B \times \mathbb{I}$ tal que para cada $t \in \mathbb{I}$ a inclusão

³Para definição de A -conexões e a prova do fato enunciado aqui vide as Seções 2.4 e 2.5 em [CF11].

$i_t : b \in B \mapsto (b, t) \in B \times \mathbb{I}$ é transversal à folheação $\overline{Q}$, e $\overline{Q}_0 \simeq i_0^* \overline{Q}$ e $\overline{Q}_1 \simeq i_1^* \overline{Q}$. Essa definição de homotopia integral realiza a ideia de deformar uma folheação de codimensão k em outra folheação de codimensão k através de folheações de codimensão k . Denotaremos por $\overline{Q}_0 \approx \overline{Q}_1$ quando $\overline{Q}_0$ e $\overline{Q}_1$ sejam folheações integralmente homotópicas.

Denote por $P\overline{\Gamma} \rightarrow B\overline{\Gamma}$ o $\overline{\Gamma}$ -fibrado universal. Seja $\overline{Q}$ uma folheação de codimensão k em B , a escolha de um $\overline{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\overline{Q}$ determina um epimorfismo de TB no fibrado “normal universal” $P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k$. Pode-se verificar que a escolha de outros $\overline{\Gamma}$ -morfismos classificantes determinam epimorfismos na mesma componente conexa por caminhos do espaço $\text{Epi}(TB, P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k)$ de epimorfismos de TB em $P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k$. Ademais, folheações integralmente homotópicas também determinam epimorfismos na mesma componente conexa por caminhos de $\text{Epi}(TB, P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k)$. Assim, se verifica que a seguinte aplicação está definida

$$\mathfrak{H}\mathfrak{aef}: \text{Fol}_k(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k))$$

onde $\text{Fol}_k(B)$ denota o conjunto de folheações de codimensão k em B . Por fim podemos enunciar o teorema de classificação de folheações regulares devido a Haefliger.

Teorema 3.7. *Seja B uma variedade aberta. Então a aplicação*

$$\mathfrak{H}\mathfrak{aef}: \text{Fol}_k(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\overline{\Gamma} \otimes_{\overline{\Gamma}} T\mathbb{R}^k))$$

é uma bijeção.

A seguir nesse capítulo apresentaremos uma generalização de Γ -estruturas para incluir Γ pseudogrupos generalizados de um grupoide $\mathcal{G}$ e relaxando a condição da aplicação de momento ser submersão para ser transversal a um fibrado vetorial ancorado fixado, e apresentaremos um teorema de classificação para tais estruturas. No seguinte capítulo voltaremos ao estudo de folheações regulares e a sua geometria transversal. Nós não apresentaremos nessa seção uma prova teorema de classificação de folheações regulares enunciado acima pois ele será um caso particular do teorema de classificação de Γ -folheações que provaremos no seguinte capítulo.

Observação 3.8. *Devemos apontar que todas as construções feitas acima continuam valendo se Γ é um pseudogrupo especial de transformações locais de $\mathbb{R}^k$, como aqueles apresentados nos Exemplos 3.3(2), (3) e (4); ou inclusive quando escolhemos Γ como sendo um pseudogrupo clássico de transições locais de uma variedade M como na definição de Γ -estruturas clássicas. Nesses casos as folheações definidas à la Haefliger são chamadas de Γ -folheações nas referencias, colocando ênfase na escolha no pseudogrupo clássico e essa escolha se reflete na geometria transversal à folheação. Nós chamaremos elas de Γ -folheações clássicas para diferencia-las das Γ -folheações que nós definiremos no seguinte capítulo. Além disso, desde o ponto de vista de Haefliger sempre é possível recuperar as Γ -estruturas clássicas se pensamos elas como folheações de codimensão zero.*

3.2 Γ -fibrados vetoriais ancorados

Nessa seção apresentaremos a nossa proposta para generalizar Γ -estruturas clássicas e estruturas de Haefliger, para incluir os pseudogrupos generalizados de biseções locais de um grupoide de Lie

$\mathcal{G} \rightrightarrows M$. Seja $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial, e seja $\theta : \mathcal{G} \times_M E \rightarrow E$ uma representação. Cada $\beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G})$ induz um automorfismo local $(\theta^\beta, \phi_\beta)$ de E

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta^\beta} & E \\ \mathbf{q} \downarrow & & \downarrow \mathbf{q} \\ M & \xrightarrow{\phi_\beta} & M \end{array}$$

onde se $\beta : U \rightarrow \mathcal{G}$, com $\phi_\beta = \mathbf{t} \circ \beta : U \rightarrow V$, então temos $\theta^\beta : e \in E_U \mapsto \beta(\mathbf{q}(e)) \cdot e \in E_V$.

Seja $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ um fibrado vetorial ancorado, o qual para as construções a seguir será fixado e chamaremos ele de fibrado ancorado modelo . O conjunto

$$\text{Aut}_{\mathcal{G}}(E, \mathbf{a}) = \left\{ \beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G}) : \mathbf{a}_{\phi_\beta(x)} \circ \theta^{\beta(x)} = d_x \phi_\beta \circ \mathbf{a}_x; \forall x \in \text{dom}(\beta) \right\}$$

constitui um pseudogrupo generalizado $\mathcal{G}$. Os elementos de $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(E, \mathbf{a})$ induzem automorfismos locais de $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$. Seja $\Gamma \subset \text{Aut}_{\mathcal{G}}(E, \mathbf{a})$ um subpseudogrupo, denote por $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$ o grupoide de germes de biseções locais em Γ .

Agora mostraremos que para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável sobre B podemos associar um par de fibrados vetoriais e um morfismo de fibrado vetorial entre eles. Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$. Como $\bar{\Gamma}$ tem representações em E e TM , essas representações são definidas por

$$\text{germ}_x(\beta) \cdot e = \theta^{\beta(x)} \cdot e \quad \text{germ}_x(\beta) \cdot u = d_x \phi_\beta \cdot u$$

para $e \in E$ e $u \in TM$. Seguindo o procedimento descrito na Seção 1.5 temos os fibrados vetoriais associados

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E & & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & & B \end{array}$$

e pelo fato que as representações de $\bar{\Gamma}$ em E e TM comutam com a âncora $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ temos o morfismo de fibrados vetoriais $\bar{\mathbf{a}}$ sobre a identidade de B definido por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E &\longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ [p, e] &\longmapsto [p, \mathbf{a}(e)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Exemplo 3.9. Suponha que $\bar{P}$ é um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal trivial, então a sua seção global $\bar{\sigma} : B \rightarrow \bar{P}$ define os isomorfismos $(b, e) \in f^*E \mapsto [\bar{\sigma}(b), e] \in \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E$ e $(b, u) \in f^*TM \mapsto [\bar{\sigma}(b), u] \in \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$, com $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$, e com esses isomorfismo temos que $\bar{\mathbf{a}} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ torna-se o pullback da âncora $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$ pela aplicação $f : B \rightarrow M$. Desta forma, para um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal não trivial $\bar{P}$, o objeto (3.3) é o objeto global que cola todas as possíveis construções pullback feitas a partir das seções locais de $\bar{P}$.

Observação 3.10. Outra propriedade do objeto (3.3) é que ele é functorial na categoria de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais; i.e. dados dois $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais $\bar{\pi}_1 : \bar{P}_1 \rightarrow B_1$ e $\bar{\pi}_2 : \bar{P}_2 \rightarrow B_2$, e um

$\bar{\Gamma}$ -morfismo $\Psi : \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{P}_2$ sobre $\psi : B_1 \longrightarrow B_2$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} E & \xrightarrow{\bar{a}_1} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 & \swarrow \Psi^E & & \searrow \Psi^{TM} & \searrow \\
 & & \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} E & \xrightarrow{\bar{a}_2} & \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 & \searrow & & \swarrow & \swarrow \\
 & & B_2 & & B_1
 \end{array}$$

ψ

onde Ψ^E e Ψ^{TM} são os morfismos de fibrado vetorial induzido pelo Ψ , assim eles são definidos por

$$\begin{aligned}
 \Psi^E : \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} E &\longrightarrow \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\
 [p, e] &\longmapsto [\Psi(p), e]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi^{TM} : \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM &\longrightarrow \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 [p, u] &\longmapsto [\Psi(p), u]
 \end{aligned}$$

Para cada $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \longrightarrow B$, a sua aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \longrightarrow M$ gera um morfismo de fibrados vetoriais sobre a identidade de B definido por

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 v_b &\longmapsto [\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v_b]
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma seção local de $\bar{\pi}$ ao redor de $b \in B$ e $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Essa aplicação esta bem definida pois se $\bar{\sigma}'$ e $\bar{\sigma}$ são duas seções locais de $\bar{\pi}$ ao redor de b , então pelo fato de $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$ ser um grupoide étale existe uma biseção local $\beta \in \Gamma$ tal que

$$\text{germ}_x(\beta) \cdot \bar{\sigma}(b') = \bar{\sigma}'(b')$$

para todo b' numa vizinhança de b . Logo $f' = \phi_\beta \circ f$ numa vizinhança de b e portanto

$$[\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v] = [\bar{\sigma}'(b), d_b f' \cdot v]$$

Para obter outra forma de escrever o morfismo $\hat{\mu}$ devemos lembrar que $\bar{\pi}$ é um difeomorfismo local. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 v_b &\longmapsto [p, d_p \bar{\mu} \circ (d_p \bar{\pi})^{-1} \cdot v_b]
 \end{aligned}$$

onde $\bar{\pi}(p) = b$.

Observação 3.11. A construção do $\hat{\mu}$ também é functorial. Em outras palavras, dados $\bar{\pi}_1 : \bar{P}_1 \longrightarrow B_1$ e $\bar{\pi}_2 : \bar{P}_2 \longrightarrow B_2$ dois $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais com aplicações de momento $\bar{\mu}_1 : \bar{P}_1 \longrightarrow M$ e $\bar{\mu}_2 : \bar{P}_2 \longrightarrow M$ respectivamente; e seja $\Psi : \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{P}_2$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo sobre $\psi : B_1 \longrightarrow B_2$.

Usando as seções locais relacionadas da Observação 1.41 verifica-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} TB_1 & \xrightarrow{\hat{\mu}_1} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow d\psi & & \downarrow \Psi^{TM} \\ TB_2 & \xrightarrow{\hat{\mu}_2} & \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \end{array}$$

Então seguindo o ponto de vista de Haefliger para o estudo de folheações regulares propomos a seguinte definição.

Definição 3.12. Um Γ -fibrado vetorial ancorado (Γ -f.v.a.) sobre B é uma classe de isomorfismo de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ transversal a $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$.

Observação 3.13. Como $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$ é um grupóide étale então para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ temos que $\bar{\pi}$ é um difeomorfismo local. Isto produz as seguintes equivalências

- $\bar{\mu} \pitchfork \mathbf{a}$
- Para toda seção local $\bar{\sigma}$ de $\bar{\pi}$ temos que $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$ é transversal à $\mathbf{a}$
- $\hat{\mu} \pitchfork \bar{\mathbf{a}}$

Para cada Γ -f.v.a. sobre B podemos construir um fibrado vetorial ancorado o qual chamaremos de fibrado vetorial ancorado associado a $\bar{P}$ e o denotaremos por $E[\bar{P}]$

$$E[\bar{P}] = \left\{ (v, [p, e]) \in TB \oplus (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E) : \bar{\mu}(v) = \bar{\mathbf{a}}([p, e]) \right\}$$

Esse fibrado vetorial é o pullback (na categoria de fibrados vetoriais sobre B) dos morfismos $\hat{\mu} : TB \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ definido em (3.4) e $\bar{\mathbf{a}} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ definido em (3.3).

$$\begin{array}{ccc} E[\bar{P}] & \dashrightarrow & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\mathbf{a}} \\ TB & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \end{array} \quad (3.5)$$

A âncora de $E[\bar{P}]$ é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] &\longrightarrow TB \\ (v, [p, e]) &\longmapsto v \end{aligned}$$

Exemplo 3.14. Para visualizar o que é $E[\bar{P}]$ nessa construção vejamos o caso mais simples, i.e. quando $\bar{P}$ é trivial. Seja $\bar{\sigma} : B \rightarrow \bar{P}$ uma seção global de $\bar{\pi}$. Nesse caso temos que os fibrados vetoriais $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E$ e $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ são isomorfismos aos fibrados vetoriais f^*E e f^*TM respectivamente, onde $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Com esses isomorfismos temos que $\hat{\mu}$ torna-se df e portanto $E[\bar{P}]$ é isomorfo (como fibrados vetoriais ancorados) ao fibrado ancorado pullback $f^!E$. No caso geral, a identificação anterior pode ser feita localmente e assim devemos pensar $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TB$ como o objeto global que cola todas essas possíveis construções locais.

Observação 3.15. Uma outra forma de visualizar o fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TB$ é por meio da Proposição 1.59. Observe que o diagrama (3.5) mora na categoria dos fibrados vetoriais sobre B . Ora, como B é a base da submersão sobrejetora $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ então pela Proposição 1.59 o diagrama (3.5) vem de um diagrama pullback na categoria de fibrados vetoriais sobre $\bar{P}$ o qual é obtido fazendo pullback pela $\bar{\pi}$ em todos os objetos do diagrama (3.5). Dessa forma obtemos o seguinte diagrama pullback (na categoria de fibrados vetoriais sobre $\bar{P}$)

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mu}^! E & \longrightarrow & \bar{\mu}^* E \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\mu}^* \mathbf{a} \\ T\bar{P} & \xrightarrow{d\bar{\mu}} & \bar{\mu}^* TM \end{array}$$

Logo, se fazermos o quociente desse diagrama pelo $\bar{P} \times_B \bar{P}$ recuperamos o diagrama pullback (3.5).

Exemplo 3.16. Seja G um grupo de Lie mas agora pensado como o grupoide de Lie $G \rightrightarrows \{*\}$. Neste caso representações do grupoide $G \rightrightarrows \{*\}$ coincidem com representações do grupo $G \curvearrowright \mathbb{V}$, e neste caso a única âncora possível é a aplicação nula. Então as biseções locais de $G \rightrightarrows \{*\}$ que preservam essa âncora são todos os elementos de G e o seu grupoide de germes é o próprio G como grupo mas munido da topologia discreta. Assim os Γ -f.v.a. sobre uma variedade B coincidem com os G -fibrados principais planos $P \rightarrow B$ e o seu fibrado ancorado associado é o fibrado associado $P \otimes_G \mathbb{V} \rightarrow B$.

Pullback de Γ -f.v.a.

Mais uma vez, o procedimento para obter o fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TB$ é functorial, isto segue das Observações 3.10 e 3.11. Ou seja, sejam $\bar{\pi}_1 : \bar{P}_1 \rightarrow B_1$ e $\bar{\pi}_2 : \bar{P}_2 \rightarrow B_2$ dois Γ -f.v.a. com aplicações de momento $\bar{\mu}_1 : \bar{P}_1 \rightarrow M$ e $\bar{\mu}_2 : \bar{P}_2 \rightarrow M$ respectivamente; e seja $\Psi : \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_2$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo sobre $\psi : B_1 \rightarrow B_2$. A propriedade functorial fica guardada no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & E[\bar{P}_1] & \xrightarrow{\quad} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ & \swarrow E[\Psi] & \downarrow \Psi^E & & \downarrow \bar{\mathbf{a}}_1 \\ E[\bar{P}_2] & \xleftarrow{\quad} & \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} E & \xleftarrow{\quad} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ \downarrow \mathbf{a}_{\bar{P}_2} & & \downarrow \bar{\mathbf{a}}_2 & & \downarrow \bar{\mathbf{a}}_1 \\ TB_2 & \xleftarrow{\quad} & \bar{P}_2 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xleftarrow{\quad} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ & \swarrow \hat{\mu}_2 & \downarrow d\psi & & \downarrow \hat{\mu}_1 \\ & & TB_1 & \xrightarrow{\quad} & \bar{P}_1 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \end{array} \quad (3.6)$$

Onde $E[\Psi]$ é um morfismo de fibrados vetorial ancorado sobre $\psi : B_1 \rightarrow B_2$ definido por

$$\begin{aligned} E[\Psi] : E[\bar{P}_1] &\longrightarrow E[\bar{P}_2] \\ (v, [p, e]) &\longmapsto (d\psi \cdot v, [\Psi(p), e]) \end{aligned}$$

Assim todo $\bar{\Gamma}$ -morfismo entre Γ -f.v.a. induz um morfismo de fibrado vetorial ancorado entre os correspondentes fibrados vetoriais ancorados associados. É claro que se dois Γ -f.v.a. $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$ são isomorfos como $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais então os correspondentes fibrados associados $E[\bar{P}_1]$ e $E[\bar{P}_2]$ são isomorfos como fibrados vetoriais ancorados.

Como foi apontado na Observação 1.40, seja $\psi : B_1 \rightarrow B_2$ uma aplicação diferenciável e seja $\bar{\pi}_2 : \bar{P}_2 \rightarrow B_2$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal. Então existem únicos⁴ $(\bar{P}_1, \Psi)$, onde $\bar{P}_1$ é um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal sobre B_1 e $\Psi : \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_2$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo sobre $\psi : B_1 \rightarrow B_2$, tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \bar{P}_1 & \xrightarrow{\Psi} & \bar{P}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi} & B_2 \end{array}$$

Neste momento deve ficar claro que o pullback de um Γ -f.v.a. por qualquer aplicação diferenciável não necessariamente produz um novo Γ -f.v.a. Agora nós gostaríamos fornecer as condições sobre $\psi : B_1 \rightarrow B_2$ nas quais se $\bar{P}_2$ é um Γ -f.v.a. sobre B_2 então $\bar{P}_1$ é um Γ -f.v.a. sobre B_1 . Essa condição está guardada no diagrama comutativo (3.6) e a seguir a mostramos

Afirmção 3.17. *No diagrama comutativo (3.6) os morfismos $\hat{\mu}_2 \circ d\psi$ e $\bar{a}_2$ são transversais.*

Demonstração. Com efeito, usando a comutatividade do diagrama (3.6) podemos trocar $\hat{\mu}_2 \circ d\psi$ por $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}_1$. Ora, como Ψ^E e Ψ^{TM} são isomorfismos na fibra então $\hat{\mu}_1 \pitchfork \bar{a}_1$ implica $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}_1 \pitchfork \bar{a}_2$. $\square$

Lembrando a propriedade functorial das construções dos fibrados associados $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E$, $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ e do fibrado ancorado associado $E[\bar{P}]$ vemos que a condição de transversalidade exibida na afirmação acima é uma condição necessária e suficiente para garantir que o pullback de um Γ -f.v.a. é um Γ -f.v.a. Isto motiva a nossa seguinte definição.

Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow X$ um Γ -f.v.a. sobre X com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$. Sejam $\hat{\mu} : TX \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ e $\bar{a} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ os morfismos de fibrados vetoriais sobre a identidade de X definidos em (3.4) e (3.3) respectivamente.

Definição 3.18. *Dizemos que uma aplicação diferenciável $\psi : B \rightarrow X$ é transversal a $\bar{P}$ se $\hat{\mu} \circ d\psi : TB \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é transversal a $\bar{a} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$. Nesse caso denotamos $\psi \pitchfork \bar{P}$.*

Nesse ponto devemos apontar que para um Γ -f.v.a $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow X$ temos duas noções de transversalidade. Uma delas é dada na definição acima e a outra é a Definição 2.5 onde se define a transversalidade em relação ao fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TX$. Vamos mostrar que para Γ -f.v.a. essas duas noções de transversalidade coincidem. Para isso precisamos de algumas observações elementares de álgebra linear, porém não usuais em textos sobre o assunto, que apresentamos a seguir.

Interlúdio de álgebra linear: A noção de transversalidade em álgebra linear (em dimensão finita) pode ser caracterizada de varias formas. Sejam $\phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ e $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ duas aplicações lineares. Dizemos que ϕ e ψ são transversais, e em tal caso denotamos $\phi \pitchfork \psi$, quando $\mathbb{W} = \text{Im}(\phi) + \text{Im}(\psi)$. Ora, com auxilio da aplicação linear $\phi \oplus \bar{\psi} : (u, v) \in \mathbb{U} \oplus \mathbb{V} \mapsto \phi(u) - \psi(v) \in \mathbb{W}$, podemos

⁴De fato, eles são únicos a menos de isomorfismo.

mostrar que $\phi \pitchfork \psi$ se e somente se $\phi \oplus \bar{\psi}$ é sobrejetora. Denotamos por $\mathbb{U} \oplus_{\mathbb{W}} \mathbb{V} := \text{Ker}(\phi \oplus \bar{\psi})$. Esse núcleo, junto com as suas projeções $\mathbf{p}_1 : (u, v) \in \mathbb{U} \oplus_{\mathbb{W}} \mathbb{V} \rightarrow u \in \mathbb{U}$ e $\mathbf{p}_2 : (u, v) \in \mathbb{U} \oplus_{\mathbb{W}} \mathbb{V} \rightarrow v \in \mathbb{V}$, é o pullback (na categoria correspondente) das aplicações ϕ e ψ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} \oplus_{\mathbb{W}} \mathbb{V} & \xrightarrow{\mathbf{p}_2} & \mathbb{V} \\ \downarrow \mathbf{p}_1 & & \downarrow \psi \\ \mathbb{U} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{W} \end{array}$$

Não é difícil mostrar que: $\text{Im}(\mathbf{p}_1) = \phi^{-1}(\text{Im}(\psi))$. Alternativamente, com auxílio da aplicação quociente $\pi_{\psi} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}/\text{Im}(\psi)$, podemos mostrar que $\phi \pitchfork \psi$ se e somente se $\pi_{\psi} \circ \phi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}/\text{Im}(\psi)$ é sobrejetora. Sob a condição $\phi \pitchfork \psi$, e com auxílio da aplicação quociente $\pi_{\mathbf{p}_1} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}/\text{Im}(\mathbf{p}_1)$, temos a aplicação induzida entre os espaços quocientes $\bar{\phi} : \mathbb{U}/\text{Im}(\mathbf{p}_1) \rightarrow \mathbb{W}/\text{Im}(\psi)$ a qual faz com que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{W} \\ \downarrow \pi_{\mathbf{p}_1} & & \downarrow \pi_{\psi} \\ \mathbb{U}/\text{Im}(\mathbf{p}_1) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{W}/\text{Im}(\psi) \end{array}$$

De fato, $\bar{\phi}$ é um isomorfismo. Afinal chegamos na conclusão deste paragrafo: Seja $\varphi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ uma aplicação linear. Suponha que $\phi \pitchfork \psi$. Então $\varphi \pitchfork \mathbf{p}_1$ se e somente se $\phi \circ \varphi \pitchfork \psi$. Essa conclusão pode ser resumida no seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{U} \oplus_{\mathbb{W}} \mathbb{V} & \xrightarrow{\mathbf{p}_2} & \mathbb{V} \\ & & \downarrow \mathbf{p}_1 & & \downarrow \psi \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{U} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{W} \\ & & \downarrow \pi_{\mathbf{p}_1} & & \downarrow \pi_{\psi} \\ & & \mathbb{U}/\text{Im}(\mathbf{p}_1) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \mathbb{W}/\text{Im}(\psi) \end{array}$$

O interlúdio de álgebra linear exibido acima permite mostrar que $\psi \pitchfork P$ (de acordo com a Definição 3.18) se e somente se $\psi \pitchfork \mathbf{a}_{\bar{P}}$ (de acordo com a Definição 2.5), e essa equivalência é guardada no seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} E[P] & \xrightarrow{\quad} & P \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ \downarrow \mathbf{a}_P & & \downarrow \bar{\mathbf{a}} \\ TB & \xrightarrow{d\psi} & TX & \xrightarrow{\hat{\mu}} & P \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \end{array}$$

A seguinte proposição é a recíproca da Afirmação 3.17 e mostra que aplicações transversais a um Γ -f.v.a. são aquelas que preservam a propriedade de ser Γ -f.v.a.; e que para Γ -f.v.a. o fibrado ancorado associado construído nessa seção e o fibrado ancorado pullback da Seção 2.1.1 são isomorfos.

Proposição 3.19. *Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow X$ um Γ -f.v.a. sobre X com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$.*

Se $\psi : B \rightarrow X$ é transversal a $\bar{P}$. Então $\psi^*\bar{P}$ é um Γ -f.v.a. sobre B e os fibrados ancorados $\mathbf{a}_{\psi^*\bar{P}} : E[\psi^*\bar{P}] \rightarrow TB$ e $\mathbf{a}_{\bar{P}}^! : \psi^!E[\bar{P}] \rightarrow TB$ são isomorfos.

Demonstração. Denote o $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal pullback por $\bar{P}_0 = \psi^*\bar{P}$ e sejam $\bar{\pi}_0 : \bar{P}_0 \rightarrow B$ e $\bar{\mu}_0 : \bar{P}_0 \rightarrow M$ as suas projeção e aplicação de momento respectivamente. A projeção na segunda componente $\Psi : (b, p) \in P_0 \mapsto p \in P$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo sobre a $\psi : B \rightarrow X$ e temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{P}_0 & \xrightarrow{\Psi} & \bar{P} \\ \bar{\pi}_0 \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ B & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

Pela propriedade functorial das nossas construções temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \bar{P}_0 \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ & & & \swarrow \Psi^E & \downarrow \bar{\mathbf{a}}_0 \\ & & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E & & \\ & \nearrow d\psi & \downarrow \bar{\mathbf{a}} & \searrow \Psi^{TM} & \\ TB & \xrightarrow{\hat{\mu}_0} & \bar{P}_0 \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & & \\ \downarrow d\psi & & \downarrow \bar{\mathbf{a}} & & \\ TX & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & & \end{array}$$

Pela comutatividade do diagrama podemos trocar $\hat{\mu} \circ d\psi$ por $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}_0$, logo usando o fato que Ψ^E e Ψ^{TM} são isomorfismos nas fibras temos que $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}_0 \pitchfork \bar{\mathbf{a}}$ implica $\hat{\mu}_0 \pitchfork \bar{\mathbf{a}}_0$. Portanto $\bar{P}_0$ é um Γ -f.v.a. sobre B e temos um diagrama comutativo igual ao diagrama (3.6). Finalmente, a aplicação $(v_b, [(b, p), e]) \in E[\bar{P}_0] \mapsto (v_b, (b, [p, e])) \in \psi^!E[\bar{P}]$ fornece o isomorfismo entre os fibrados vetoriais ancorados $\mathbf{a}_{\bar{P}_0} : E[\bar{P}_0] \rightarrow TB$ e $\mathbf{a}_{\bar{P}}^! : \psi^!E[\bar{P}] \rightarrow TB$. $\square$

Dessa forma podemos concluir que, sob a condição de transversalidade $\psi \pitchfork \bar{P}$, temos o isomorfismo natural $E[\psi^*\bar{P}] \simeq \psi^!E[\bar{P}]$.

Homotopia de Γ -f.v.a.

Agora vamos definir homotopia entre Γ -f.v.a.

Definição 3.20. Sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ dois Γ -f.v.a. sobre B . Dizemos que $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ são integralmente homotópicos se existem um Γ -f.v.a. $\bar{P} \rightarrow B \times [0, 1]$ e dois $\bar{\Gamma}$ -morfismos $\Psi_0 : \bar{P}_0 \rightarrow \bar{P}$ e $\Psi_1 : \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}$ tais que:

1. Para cada $t \in [0, 1]$ temos que $i_t \pitchfork \bar{P}$, e portanto $i_t^*\bar{P}$ é um Γ -f.v.a. sobre B .

2. Os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} \bar{P}_0 & \xrightarrow{\Psi_0} & \bar{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i_0} & B \times [0, 1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{P}_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & \bar{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i_1} & B \times [0, 1] \end{array}$$

Em particular $\bar{P}_0 \simeq i_0^* \bar{P}$ e $\bar{P}_1 \simeq i_1^* \bar{P}$.

Denotaremos por $\bar{P}_0 \approx \bar{P}_1$ quando $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ sejam Γ -f.v.a. sobre B integralmente homotópicos. Veja que se $\bar{P}_0 \approx \bar{P}_1$ então $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ são $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais homotópicos.

3.2.1 Classificação de Γ -f.v.a.

Nessa seção apresentaremos o teorema de classificação dos Γ -f.v.a. Seja $\pi_{\bar{\Gamma}} : P\bar{\Gamma} \rightarrow B\bar{\Gamma}$ o $\bar{\Gamma}$ -fibrado universal. Usando as representações de $\bar{\Gamma}$ em E e TM temos os fibrados vetoriais associados $P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow B\bar{\Gamma}$, $P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow B\bar{\Gamma}$ e o morfismo de fibrados vetoriais sobre a identidade de $B\bar{\Gamma}$ induzido entre eles

$$\begin{aligned} a_{\bar{\Gamma}} : P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E &\longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ [q, e] &\longmapsto [q, a(e)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Lembre-se que $P\bar{\Gamma}$ é um espaço topológico e $a_{\bar{\Gamma}}$ é um morfismo contínuo. Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável e seja $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}$ com aplicação classificante $\psi : B \rightarrow B\bar{\Gamma}$. Então Ψ induz morfismos de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \Psi^E : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E &\longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \\ [p, e] &\longmapsto [\Psi(p), e] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{TM} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM &\longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ [p, u] &\longmapsto [\Psi(p), u] \end{aligned}$$

Como esses morfismos são obtidos desde uma representação fixada, seja $\bar{\Gamma} \curvearrowright E$ ou $\bar{\Gamma} \curvearrowright TM$, então eles são isomorfismos na fibra. A propriedade functorial dessas construções se traduzem no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E & \xrightarrow{\bar{a}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ & \searrow^{\Psi^E} & & \searrow^{\Psi^{TM}} & \searrow \\ P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E & \xrightarrow{a_{\bar{\Gamma}}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & & B \\ & \searrow & \searrow & \searrow^{\psi} & \\ & & B\bar{\Gamma} & & \end{array}$$

Lembre-se que para qualquer $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ temos associado um morfismo de fibrados vetoriais $\hat{\mu} : TB \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ sobre a identidade de B , o qual foi definido em (3.4). Compondo esse morfismo com Ψ^{TM} podemos associar a cada $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal o seguinte morfismo de fibrados vetoriais

$$\begin{array}{ccc} TB & \xrightarrow{\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\psi} & B\bar{\Gamma} \end{array}$$

A seguinte proposição permite caracterizar aos Γ -f.v.a. sobre B no conjunto $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$.

Proposição 3.21. *Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ e seja $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}$. Então $\bar{P}$ é um Γ -f.v.a. sobre B se e somente se os morfismos de fibrados vetoriais $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ e $\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}} : P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ são transversais.*

Demonstração. A condição de transversalidade é uma condição pontual, logo devemos mostrar que as aplicações lineares $\Psi_b^{TM} \circ \hat{\mu}_b$ e $(\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}})_{\psi(b)}$ são transversais, para cada $b \in B$

$$\begin{array}{ccccc} (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E)_b & \xrightarrow{\Psi_b^E} & (P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E)_{\psi(b)} \\ \downarrow \bar{\mathbf{a}}_b & & \downarrow (\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}})_{\psi(b)} \\ T_b B & \xrightarrow{\hat{\mu}_b} & (\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)_b & \xrightarrow{\Psi_b^{TM}} & (P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)_{\psi(b)} \end{array}$$

Como Ψ_b^E e Ψ_b^{TM} são isomorfismos, então

$$(P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)_{\psi(b)} = \text{Im}(\Psi_b^{TM} \circ \hat{\mu}_b) + \text{Im}((\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}})_{\psi(b)})$$

se e somente se

$$(\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)_b = \text{Im}(\hat{\mu}_b) + \text{Im}(\bar{\mathbf{a}}_b)$$

Portanto esta proposição segue da Observação 3.13. $\square$

A conclusão importante desta proposição é que podemos caracterizar aos Γ -f.v.a. dentro do conjunto dos $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais. Desta forma as Γ -f.v.a. serão os $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ para os quais, apos ter escolhido um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$, temos que o morfismo $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}$ é transversal ao fibrado ancorado “universal” $\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}} : P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$, definido em (3.7). O morfismo $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}$ será chamado de morfismo transversal classificante do Γ -f.v.a $\bar{P}$. No entanto, até este momento essa forma de caracterizar os Γ -f.v.a. depende da escolha do $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante Ψ . A seguir analisaremos o que acontece quando escolhemos outro $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para o Γ -f.v.a. $\bar{P}$.

Sejam Ψ_0 e Ψ_1 dois $\bar{\Gamma}$ -morfismos classificantes para o Γ -f.v.a. $\bar{P}$. Logo existe uma $\bar{\Gamma}$ -homotopia $H : \bar{P} \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ tal que $H_0 = \Psi_0$ e $H_1 = \Psi_1$. Consideramos em $\bar{P} \times \mathbb{I}$ a estrutura de $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal de apresentada na Observação 1.34, e como a nova aplicação de momento $\bar{\mu}' = \bar{\mu} \circ \text{pr}_1 :$

$\bar{P} \times \mathbb{I} \longrightarrow M$ também é transversal a $\mathbf{a} : E \longrightarrow TM$ então $\bar{P} \times \mathbb{I}$ é um Γ -f.v.a. sobre $B \times \mathbb{I}$. Para $\bar{P} \times \mathbb{I}$ temos o seu morfismo induzido $\hat{\mu}'$ definido por

$$\begin{aligned} \hat{\mu}' : TB \times T\mathbb{I} &\longrightarrow (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ (v, r) &\longmapsto [(p, t), d_p \bar{\mu} \cdot (d_p \bar{\pi})^{-1} \cdot v] \end{aligned}$$

onde $(p, t) \in \bar{P} \times \mathbb{I}$ são tais que $(v, r) \in T_{\bar{\pi}(p)} B \times T_t \mathbb{I}$. Sabemos que $\hat{\mu}'$ é transversal a $\bar{\mathbf{a}} : (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} E \longrightarrow (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$, e pela cara de $\hat{\mu}'$ concluimos que $\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}$ também é transversal a $\bar{\mathbf{a}} : (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} E \longrightarrow (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$.

Ora, denotamos por $H^{TM} : (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ o morfismo induzido pelo $\bar{\Gamma}$ -morfismo H , lembre-se que H^{TM} é um isomorfismo na fibra. Por conseguinte a composta de H^{TM} com $\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}$ determina uma homotopia entre os morfismos transversais $\Psi_0^{TM} \circ \hat{\mu}$ e $\Psi_1^{TM} \circ \hat{\mu}$ e essa homotopia é através de morfismos transversais à âncora universal $\mathbf{a}_{\bar{\Gamma}}$.

$$\begin{array}{ccccc} TB \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}} & (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xrightarrow{H^{TM}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\text{id}_{B \times \mathbb{I}}} & B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{h} & B\bar{\Gamma} \end{array}$$

Seja $\text{Hom}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)$ o fibrado vetorial topológico sobre $B \times B\bar{\Gamma}$ cuja fibra no ponto $(b, b') \in B \times B\bar{\Gamma}$ é o conjunto de aplicações lineares de $T_b B$ em $(P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)_{b'}$. Compondo a projeção deste fibrado vetorial com a projeção na primeira componente $B \times B\bar{\Gamma} \longrightarrow B$ obtemos um novo fibrado sobre B . As seções deste fibrado $\text{Hom}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM) \longrightarrow B$ são identificadas com os morfismos de fibrado vetorial contínuos de $TB \longrightarrow B$ em $P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \longrightarrow B\bar{\Gamma}$. Em $\Gamma(\text{Hom}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM))$ consideramos a topologia compacto-aberta. Seja

$$\text{Trans}(TB, \mathbf{a}_{\bar{\Gamma}}) = \left\{ \Phi \in \Gamma(\text{Hom}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)) : \Phi \pitchfork \mathbf{a}_{\bar{\Gamma}} \right\}$$

e considere nele a topologia de subespaço.

Voltando à classificação de Γ -f.v.a. Concluimos que $H^{TM} \circ \hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}$ determina um caminho em $\text{Trans}(TB, \mathbf{a}_{\bar{\Gamma}})$ e assim obtemos uma aplicação a qual não depende da escolha do $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante de $\bar{P}$

$$\begin{aligned} \text{FVA}_{\Gamma}(B) &\longrightarrow \pi_0(\text{Trans}(TB, \mathbf{a}_{\bar{\Gamma}})) \\ \bar{P} &\longmapsto [\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}] \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\text{FVA}_{\Gamma}(B)$ denota o conjunto de (classes de isomorfismo) de Γ -f.v.a. sobre B .

Ora mostraremos que a aplicação definida em (3.8) é invariante pela relação de homotopia integral de Γ -f.v.a. Para isso, sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ dois Γ -f.v.a. sobre B integralmente homotópicos e seja $\bar{\pi} : \bar{P} \longrightarrow B \times \mathbb{I}$ o Γ -f.v.a. que realiza a homotopia entre $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\bar{P}_0 = i_0^* \bar{P}$ e $\bar{P}_1 = i_1^* \bar{P}$. Então a aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \longrightarrow M$ determina morfismo $\hat{\mu} : TB \times T\mathbb{I} \longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ o qual é transversal a $\bar{\mathbf{a}} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$. A escolha de um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante $\Psi : \bar{P} \longrightarrow P\bar{\Gamma}$ induz o morfismo de fibrados vetoriais $\Psi^{TM} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$. Consequentemente a composta de Ψ^{TM} e $\hat{\mu}$ determina um morfismo transversal à

âncora universal $\mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}$.

$$\begin{array}{ccccc} TB \times T\mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xrightarrow{\Psi^{TM}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\text{id}_{B \times \mathbb{I}}} & B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\psi} & B\bar{\Gamma} \end{array}$$

Como $\bar{P}$ é uma homotopia integral então $\hat{\mu}|_{TB \times \mathbb{I}} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é transversal a $\bar{\mathfrak{a}} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$. Veja que $\Psi_0 = \Psi \circ i_0$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}_0$ e $\Psi_1 = \Psi \circ i_1$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}_1$. Consequentemente $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}|_{TB \times \mathbb{I}} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é uma homotopia entre os morfismos transversais classificantes de $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ através de morfismos transversais à âncora universal $\mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}$. Portanto se verifica que a aplicação definida em (3.8) desce para Γ -f.v.a. modulo a relação de homotopia integral e assim fica bem definida a seguinte aplicação

$$\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f} : \text{FVA}_{\Gamma}(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Trans}(TB, \mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}))$$

Finalmente já podemos enunciar e provar o teorema de classificação de Γ -f.v.a.

Teorema 3.22. *Seja B uma variedade aberta. Então a aplicação*

$$\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f} : \text{FVA}_{\Gamma}(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Trans}(TB, \mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}))$$

é uma bijeção.

Demonstração. A prova desse teorema segue o mesmo caminho da prova do teorema de Haefliger apresentado em [Hae71a].

- $\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ é sobrejetora: Seja $\tilde{\Psi} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ um morfismo transversal à âncora universal $\mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}$. Seja $\psi : B \rightarrow B\bar{\Gamma}$ a projeção de $\tilde{\Psi}$. Seja $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ o gráfico de $\psi^* P\bar{\Gamma}$ construído no Teorema 1.79 e lembre que $\mathbb{P}$ tem aplicação de momento submersão. Dessa forma temos um epimorfismo $T\mathbb{B} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ que permite fatorar $\tilde{\Psi} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ como a composta desse epimorfismo $T\mathbb{B} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ com um morfismo $F : TB \rightarrow T\mathbb{B}$ transversal a $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}} : E[\mathbb{P}] \rightarrow T\mathbb{B}$. Como B é uma variedade aberta, pelo Teorema 2.22 o morfismo F pode ser deformado por morfismos transversais a $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$ para o diferencial df de uma aplicação $f : B \rightarrow \mathbb{B}$ transversal a $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}$. Finalmente $\bar{P} = f^* \mathbb{P}$ é o Γ -f.v.a. procurado.
- $\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ é injetora: Sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ dois Γ -f.v.a. sobre B tais que o seus correspondentes morfismos transversais classificantes pertencem a mesma componente conexa por caminhos em $\text{Trans}(TB, \mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}})$. Seja $\tilde{\Phi} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ a homotopia através de aplicações transversais a $\mathfrak{a}_{\bar{\Gamma}}$ entre os morfismos transversais classificantes de $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. Seja $\phi : B \times \mathbb{I} \rightarrow B\bar{\Gamma}$ a projeção de $\tilde{\Phi}$. Seja $\mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{B}'$ o gráfico do $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\phi^* P\bar{\Gamma}$. Então novamente temos um epimorfismo $T\mathbb{B}' \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ que permite fatorar $\tilde{\Phi}$ como a composta desse epimorfismo $T\mathbb{B}' \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ com uma homotopia $H : TB \times \mathbb{I} \rightarrow T\mathbb{B}'$ através de aplicações transversais à âncora $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}'}$: $E[\mathbb{P}'] \rightarrow T\mathbb{B}'$. Novamente, como B é uma variedade aberta, o Teorema 2.22 garante que H pode ser deformada no diferencial dh de uma homotopia $h : B \times I \rightarrow \mathbb{B}'$ por aplicações transversais a $\mathfrak{a}_{\mathbb{P}'}$. Finalmente $\bar{P} = h^* \mathbb{P}'$ realiza a homotopia integral procurada entre $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. $\square$

3.3 $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita

Nessa seção apresentaremos um exemplo, de fato uma família de exemplos, dos Γ -f.v.a. Aqui usaremos o fibrado ancorado mais naturalmente associado a um grupoide de Lie, o seu algebroide de Lie. Grupoide de Lie não agem de forma canônica sobre os seus algebroides de Lie. Porém, para cada grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, o seu grupoide de 1-jatos $J^1\mathcal{G} \rightrightarrows M$ tem uma representação canônica sobre o algebroide de Lie de $\mathcal{G}$, chamada de representação adjunta⁵ de $\mathcal{G}$, denotada por $\text{Ad} : J^1\mathcal{G} \times_M A \longrightarrow A$ e definida pela expressão

$$\text{Ad}_{\phi_g} \cdot u = d_g R^{g^{-1}} \circ d_{(g, 1_x)} \mathbf{m} \cdot (\phi_g \circ d_{1_x} \mathbf{t} \cdot u, u)$$

onde $\phi_g : T_{s(g)}M \longrightarrow T_g\mathcal{G}$ é um elemento de $J^1\mathcal{G}$. Para mais detalhes sobre o grupoide de 1-jatos e a representação adjunta vide [CF05] ou [Sal13]. Para cada $\beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G})$, seu 1-jato $j^1\beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(J^1\mathcal{G})$ produz, mediante a representação adjunta, um automorfismo local do fibrado ancorado $\rho : A \longrightarrow TM$ que também preserva o colchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \longrightarrow \Gamma(A)$ nas seções de A . Como a aplicação $j^1 : \beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(\mathcal{G}) \longmapsto j^1\beta \in \text{Bis}_{\text{loc}}(J^1\mathcal{G})$ é injetora podemos considerar os pseudogrupos generalizados de $\mathcal{G}$ como subpseudogrupos de $\text{Aut}_{J^1\mathcal{G}}(A, \rho)$.

Nessa seção estudaremos os Γ -f.v.a. onde o fibrado ancorado modelo será o algebroide $\rho : A \longrightarrow TM$ do grupoide de Lie $\mathcal{G}$, e os Γ serão pseudogrupos generalizados de $\mathcal{G}$. Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \longrightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \longrightarrow M$. Como vimos na Subseção 1.7.2 o $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P}$ induz um $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P = \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$. Denotaremos por $\pi : P \longrightarrow B$ e $\mu : P \longrightarrow M$ a projeção e a aplicação de momento de P . A proposição abaixo relaciona as aplicações de momento de P e $\bar{P}$.

Proposição 3.23. *Com as notações acima. Então a aplicação $\mu : P \longrightarrow M$ é submersão se e somente se $\bar{\mu} : \bar{P} \longrightarrow M$ é transversal a $\rho : A \longrightarrow TM$.*

Demonstração. Lembre-se que P é o quociente de $\bar{P} \times_M \mathcal{G}$ pela ação diagonal de $\bar{\Gamma}$ cuja aplicação de momento é $\tilde{\mu} : (p, g) \in \bar{P} \times_M \mathcal{G} \longmapsto \mathbf{t}(g) \in M$; e temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} \times_M \mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & M \\ \downarrow & \nearrow \mu & \\ P & & \end{array}$$

De fato, $\bar{P} \times_M \mathcal{G} \longrightarrow P$ é um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal, e em particular a aplicação quociente é um difeomorfismo local. Portanto μ é submersão se e somente se $\tilde{\mu}$ é submersão.

Lembre-se que $\bar{P} \times_M \mathcal{G}$ é o um produto fibrado e que temos o seguinte diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\mu} & & \\ & & \text{---} & & \\ \bar{P} \times_M \mathcal{G} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\mathbf{t}} & M \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \mathbf{s} & & \\ \bar{P} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & M & & \end{array}$$

⁵Esse é um abuso na linguagem, pois Ad não é uma representação de $\mathcal{G}$.

Logo, $d_{(p,g)}\tilde{\mu}$ é sobrejetora se e somente se

$$T_g\mathcal{G} = \text{Ker}(d_g\mathbf{t}) + \text{Im}(d_{(p,g)}\text{pr}_2) \quad (3.9)$$

O diagrama pullback acima também produz um diagrama pullback ao nível dos espaços tangentes, isto implica que $\text{Im}(d_{(p,g)}\text{pr}_2) = (d_g\mathbf{s})^{-1}(\text{Im}(d_p\bar{\mu}))$. Ora, pelo fato que $\mathbf{s}$ é submersão temos que a condição (3.9) é equivalente a

$$T_{\mathbf{s}(g)}M = d_g\mathbf{s}(\text{Ker}(d_g\mathbf{t})) + \text{Im}(d_p\bar{\mu})$$

Por outro lado, usando a multiplicação a esquerda pelo $g \in \mathcal{G}$, $L^g : h \in \mathbf{t}^{-1}(x) \rightarrow gh \in \mathbf{t}^{-1}(y)$ mostramos que $d_g\mathbf{s}(\text{Ker}(d_g\mathbf{t})) = d_{1_x}\mathbf{s}(\text{Ker}(d_{1_x}\mathbf{t}))$. Finalmente usando a inversa do grupoide $\mathbf{i} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ mostramos que $d_{1_x}\mathbf{s}(\text{Ker}(d_{1_x}\mathbf{t})) = d_{1_x}\mathbf{t}(\text{Ker}(d_{1_x}\mathbf{s})) = \text{Im}(\rho_x)$. $\square$

Exemplo 3.24. *Seja $\bar{P}$ o $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal trivial determinado pela $f : B \rightarrow M$. Então, de acordo com a proposição acima temos que $\bar{P} = f^*\bar{\Gamma}$ é um Γ -f.v.a. se e somente se f é transversal à âncora $\rho : A \rightarrow TM$; e sob essa condição o seu fibrado ancorado associado é o algebroid pullback $f^!A \rightarrow TB$. A condição de transversalidade garante que esse algebroid pullback é integrável, de fato o grupoide que integra $f^!A$ é o grupoide pullback $f^!\mathcal{G} \rightrightarrows B$. Por outro lado, o $\mathcal{G}$ -fibrado associado a $\bar{P}$ é o $P = f^*\mathcal{G}$ e sob a condição de transversalidade o grupoide de gauge de P é isomorfo ao grupoide pullback $f^!\mathcal{G} \rightrightarrows B$.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad} & f^*\mathcal{G} & \xleftarrow{\quad} & f^!\mathcal{G} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & M & \xleftarrow{\mu} & & \xrightarrow{\pi} & & \xrightarrow{\quad} & B \\ & & & & & & & \xleftarrow{f} & \end{array}$$

Dessa forma, no caso de Γ -f.v.a. triviais, temos que o fibrado ancorado associado é isomorfo ao algebroid do grupoide de gauge do correspondente $\mathcal{G}$ -fibrado associado.

Agora vamos estudar Γ -f.v.a. para Γ um pseudogruppo generalizado de $\mathcal{G}$ mas pensado como um subpseudogruppo de $\text{Aut}_{J^1\mathcal{G}}(A, \rho)$. Seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ um Γ -f.v.a. com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$. Então temos o fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : A[\bar{P}] \rightarrow TB$ de acordo com as construções feitas na seção anterior (vide Eq. (3.5)). Por outro lado, a Proposição 3.23 mostra que o $\mathcal{G}$ -fibrado principal $P = \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$ associado ao Γ -f.v.a. $\bar{P}$ tem aplicação de momento submersão, e portanto é possível associar ao P o seu grupoide de gauge $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$ ⁶. A seguinte proposição mostra que a conclusão do Exemplo 3.24 é válida para qualquer Γ -f.v.a.

Proposição 3.25. *Nas condições acima, o fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : A[\bar{P}] \rightarrow TB$ é isomorfo ao algebroid de $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$.*

Demonstração. Denote por $A' \rightarrow TB$ o algebroid de $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$. Como P realiza a equivalência de Morita entre (um subgrupoide aberto de) $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ e $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$, então sabemos que $\mu^!A \rightarrow TP$ e $\pi^!A' \rightarrow TP$ são algebroides isomorfos. Seja $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{P}$ uma seção local de $\bar{\pi}$ e $\sigma : U \rightarrow P$

⁶Lembre-se que não estamos assumindo que $\bar{\mu}$, e portanto μ , seja sobrejetora. Assim esse grupoide gauge é obtido pelo quociente da ação de um subgrupoide aberto de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$.

a seção de π induzida por ela. Seja $f = \mu \circ \sigma = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Localmente temos a seguinte cadeia de isomorfismos de algebroides

$$A[\bar{P}]|_U \simeq f^! A = \sigma^!(\mu^! A) \simeq \sigma^!(\pi^! A') = A'|_U$$

Isso mostra que $A[\bar{P}]$ e o algebroide de $P \otimes_{\mathcal{G}} P \rightrightarrows B$ são localmente isomorfos. Para mostrar que eles são de fato isomorfos precisamos tomar o ponto de vista da Proposição 1.59. De acordo com essa proposição é suficiente mostrar que $\pi^* A[\bar{P}]$ e $\pi^* A'$ são isomorfos.

Pela Proposição 1.62 sabemos que $\pi^* \rho': \pi^* A' \rightarrow \pi^* TB$ é isomorfo a $d\pi|_{\text{Ker}(d\mu)}: \text{Ker}(d\mu) \rightarrow \pi^* TB$

Por outro lado

$$\pi^* A[\bar{P}] = \left\{ (p, v, [\bar{p}, \xi]) \in P \times (TB \oplus \bar{P} \otimes_{\Gamma} A) : \pi(p) = \bar{\pi}(\bar{p}) = b; v \in T_b B; d_{\bar{p}} \bar{\mu} \circ (d_{\bar{p}} \bar{\pi})^{-1} \cdot v = \rho \cdot \xi \right\}$$

Então, seja $(p, v, [\bar{p}, \xi]) \in \pi^* A[\bar{P}]$, lembrando que temos o diagrama pullback (1.6), existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\tilde{\pi}(\bar{p}, g) = p$. Logo, se verifica que $((d_{\bar{p}} \bar{\pi})^{-1} \cdot v, d_{1_x} L^g \cdot d_{1_x} \mathbf{i} \cdot \xi) \in \text{Ker}(d_{(\bar{p}, g)} \tilde{\mu})$. Finalmente, como $d_{(\bar{p}, g)} \tilde{\pi}: \text{Ker}(d_{(\bar{p}, g)} \tilde{\mu}) \rightarrow \text{Ker}(d_p \mu)$ é um isomorfismo, o isomorfismo de $\pi^* A[\bar{P}]$ para $\text{Ker}(d\mu)$ é definido por

$$\begin{aligned} \pi^* A[\bar{P}] &\longrightarrow \text{Ker}(d\mu) \\ (p, v, [\bar{p}, \xi]) &\longmapsto d_{(\bar{p}, g)} \tilde{\pi} \cdot ((d_{\bar{p}} \bar{\pi})^{-1} \cdot v, d_{1_x} L^g \cdot d_{1_x} \mathbf{i} \cdot \xi) \end{aligned}$$

□

Observação 3.26. A conclusão dessas construções é que todo Γ -f.v.a. sobre B produz um algebroide sobre B o qual localmente é um algebroide pullback e globalmente é um algebroide de um grupoide de gauge. Observe que nessas construções não temos escolhido um pseudogruppo Γ em particular, elas são validas para o pseudogruppo de todas as biseções locais de $\mathcal{G}$. Assim, como veremos na seguinte subseção, a escolha de pseudogruppos específicos se reflete em estruturas adicionais no algebroide associado a um Γ -f.v.a.

A seguir introduzimos algumas definições, as quais apos ter feito as construções acima devem ter sentido.

Definição 3.27. Um $\mathcal{G}$ -fibrado principal P é chamado de Morita se a sua aplicação de momento é uma submersão.

A justificativa para o nome acima vem do fato que um $\mathcal{G}$ -fibrado principal P com aplicação de momento submersão realiza a equivalência de Morita entre (um subgrupoide aberto de) $\mathcal{G}$ e o grupoide gauge de P .

Definição 3.28. Um $\mathcal{G}$ -fibrado principal P é chamado de Γ -plano se ele é $\mathcal{G}$ -isomorfo ao fibrado associado de um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal. Em outras palavras, P é Γ -plano se e somente se existe um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P}$ satisfazendo $P \simeq \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G}$, e nesse caso chamaremos $\bar{P}$ de uma Γ -conexão planta para P .

A justificativa para o nome acima é vem do fato que para grupos de Lie G , o seu grupoide de germes de biseções locais é o próprio G (como grupo) com a topologia discreta G^δ . Assim G -fibrados principais G^δ -planos correspondem com G -fibrados principais planos.

Denotaremos por $\text{FlatMorita}_\Gamma(B)$ o conjunto de classes de isomorfismo de $\mathcal{G}$ -fibrados principais de Morita que são Γ -planos. Com as definições acima obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \text{FVA}_\Gamma(B) &\longrightarrow \text{FlatMorita}_\Gamma(B) \\ \bar{P} &\longmapsto \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \mathcal{G} \end{aligned}$$

Gostaríamos usar o teorema de classificação de Γ -f.v.a. para classificar os $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita que são Γ -planos, mas infelizmente a aplicação acima sendo sobrejetora pode ser não injetora. De fato, essa falta de injetividade deve produzir uma noção de equivalência gauge para Γ -conexões planas.

3.3.1 Pseudogruppo de soluções de uma forma multiplicativa

Nessa subseção mostraremos que os $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita que são Γ -planos permitem transportar formas multiplicativas de $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ para o correspondente grupoide de gauge, após a escolha certa do pseudogruppo generalizado Γ . A seguir lembramos os conceitos de formas multiplicativas com valores em uma representação e pseudogruppo de soluções de uma forma multiplicativa, esses conceitos são tomados de [Sal13].

Definição 3.29. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie e $\mathcal{G} \curvearrowright E$ uma representação⁷. Uma k -forma multiplicativa em $\mathcal{G}$ com valores em E é uma forma $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathfrak{t}^*E)$ satisfazendo

$$(\mathbf{m}^*\omega)_{(g,h)} = (\text{pr}_1^*\omega)_{(g,h)} + g \cdot (\text{pr}_2^*\omega)_{(g,h)}$$

para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$.

Formas multiplicativas aparecem naturalmente na integração de variedades de Poisson [Wei87] ou mais geralmente na integração de estruturas de Dirac [BCW⁺04]. Em [Sal13] se estuda o vínculo das formas multiplicativas com equações diferenciais parciais.

Definição 3.30. Seja ω uma k -forma multiplicativa em $\mathcal{G}$ com valores em E . Uma biseção local β de $\mathcal{G}$ é chamada de solução de ω se $\beta^*\omega = 0$.

O fato que a forma ω é multiplicativa implica que o seu conjunto de soluções é um pseudogruppo generalizado de $\mathcal{G}$. Então, seja Γ o pseudogruppo de soluções de uma k -forma multiplicativa $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathfrak{t}^*E)$. A seguir mostraremos que para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P}$ o seu $\mathcal{G}$ -fibrado associado P herda uma k -forma $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^*E)$ satisfazendo certa condição de compatibilidade com ω e com a ação $\theta: \mathcal{G} \curvearrowright P$.

⁷Esse fibrado vetorial E não é o fibrado ancorado modelo da seção anterior. Nessa seção o fibrado ancorado modelo é o algebroide $\rho: A \longrightarrow TM$

Afirmção 3.31. *Sejam ω uma k -forma multiplicativa em $\mathcal{G}$ com valores em E e Γ o pseudogrupo generalizado de soluções de ω . Para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P}$ o seu $\mathcal{G}$ -fibrado associado P herda uma forma $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^*E)$.*

Demonstração. Seja $\pi : P \longrightarrow B$ o $\mathcal{G}$ -fibrado principal Γ -plano associado ao $\bar{P}$. Então, de acordo com a Seção 1.7.2, ele admite um atlas $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow P\}_{i \in I}$ cujas funções de transição são da forma

$$\gamma_{ij}(b) = \mathfrak{Z}_{ij}(b, f_j(b)) \quad \forall b \in U_i \cap U_j$$

onde $\mathfrak{Z}_{ij}$ tem a propriedade de que para cada $b_0 \in U_i \cap U_j$ existe uma vizinhança W^{b_0} de $(b_0, f_j(b_0))$ em $B \times M$ e uma biseção local $\beta^{b_0} \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{Z}_{ij}(b, x) = \beta^{b_0}(x)$, para todo $(b, x) \in W^{b_0}$, isto implica que $\gamma_{ij} = \beta^{b_0}$ em uma vizinhança de $b_0 \in U_i \cap U_j$. Por outro lado, cada seção local σ_i determina um $\mathcal{G}$ -morfismo $\Phi_i : p \in P_{U_i} \longrightarrow \delta(p, \sigma_i(\pi(p))) \in \mathcal{G}$ da restrição P_{U_i} para o $\mathcal{G}$ -fibrado unitário cobrindo a aplicação $f_i = \mu \circ \sigma_i$.

$$\begin{array}{ccc} P_{U_i} & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathbf{s} \\ U_i & \xrightarrow{f_i} & M \end{array}$$

Assim fazendo o pullback da forma multiplicativa $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathbf{t}^*E)$ por cada Φ_i obtemos uma coleção de formas localmente definidas $\{\Phi_i^* \omega \in \Omega^k(P_{U_i}, \mu^*E)\}_{i \in I}$. Para verificar que de fato essa coleção define uma forma em P usamos as funções de transição. Note que para cada $p \in P_{U_i \cap U_j}$ temos

$$\Phi_j(p) = \mathbf{m}(\Phi_i(p), \gamma_{ij}(\pi(p)))$$

Logo

$$\begin{aligned} (\Phi_j^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= \omega_{\mathbf{m}(\Phi_i(p), \gamma_{ij}(\pi(p)))} \left(d\mathbf{m}(d_p \Phi_i v_1, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_1), \dots, d\mathbf{m}(d_p \Phi_i v_k, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_k) \right) \\ &= (\mathbf{m}^* \omega)_{(\Phi_i(p), \gamma_{ij}(\pi(p)))} \left((d_p \Phi_i v_1, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_1), \dots, (d_p \Phi_i v_k, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_k) \right) \end{aligned}$$

agora usamos o fato que ω é multiplicativa, então

$$\begin{aligned} (\Phi_j^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) &= (\text{pr}_1^* \omega)_{(\Phi_i(p), \gamma_{ij}(\pi(p)))} \left((d_p \Phi_i v_1, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_1), \dots, (d_p \Phi_i v_k, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_k) \right) \\ &\quad + \Phi(p) \cdot (\text{pr}_2^* \omega)_{(\Phi_i(p), \gamma_{ij}(\pi(p)))} \left((d_p \Phi_i v_1, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_1), \dots, (d_p \Phi_i v_k, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_k) \right) \\ &= \omega_{\Phi_i(p)}(d_p \Phi_i v_1, \dots, d_p \Phi_i v_k) + \Phi_i(p) \cdot \omega_{\gamma_{ij}(\pi(p))}(d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_1, \dots, d_p(\gamma_{ij} \circ \pi)v_k) \\ &= (\Phi_i^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) + \Phi_i(p) \cdot (\pi^*(\gamma_{ij}^* \omega))_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

como γ_{ij} localmente é uma solução de ω concluímos que $\Phi_j^* \omega = \Phi_i^* \omega$ em $P_{U_i \cap U_j}$. Assim, todas as formas localmente definidas $\{\Phi_i^* \omega \in \Omega^k(P_{U_i}, \mu^*E)\}_{i \in I}$ colam para produzir uma forma $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^*E)$. $\square$

Afirmção 3.32. *A k -forma $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^*E)$ construída na Afirmção 3.31 satisfaz*

$$(\theta^* \Omega)_{(g,p)} = (\text{pr}_1^* \omega)_{(g,p)} + g \cdot (\text{pr}_2^* \Omega)_{(g,p)} \quad (3.10)$$

onde denotamos por $\theta : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow P$ a ação de $\mathcal{G}$ em P , $\text{pr}_1 : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow \mathcal{G}$ e $\text{pr}_2 : \mathcal{G} \times_M P \longrightarrow P$ denotam a projeção na primeira e segunda componente respectivamente.

Demonstração. Como a condição (3.10) é pontual, logo é suficiente verificar-a localmente. Assim, suponha que $(g, p) \in \mathcal{G} \times_M P_{U_i}$, então obtemos

$$(\theta^* \Omega)_{(g,p)} = (\theta^* \Phi_i^* \omega)_{(g,p)} = ((\text{id}_{\mathcal{G}} \times \Phi_i)^* \mathbf{m}^* \omega)_{(g,p)}$$

logo, usando o fato que ω é multiplicativa temos

$$\begin{aligned} (\theta^* \Omega)_{(g,p)}(\dots, (u, v), \dots) &= (\mathbf{m}^* \omega)_{(g, \Phi_i(p))}(\dots, (u, d_p \Phi_i v), \dots) \\ &= (\text{pr}_1^* \omega)_{(g, \Phi_i(p))}(\dots, (u, d_p \Phi_i v), \dots) + g \cdot (\text{pr}_2^* \omega)_{(g, \Phi_i(p))}(\dots, (u, d_p \Phi_i v), \dots) \\ &= \omega_g(\dots, u, \dots) + g \cdot (\Phi_i^* \omega)_p(\dots, v, \dots) \\ &= (\text{pr}_1^* \omega)_{(g,p)}(\dots, (u, v), \dots) + g \cdot (\text{pr}_2^* \Omega)_{(g,p)}(\dots, (u, v), \dots) \end{aligned}$$

□

Tendo provado que $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^* E)$ satisfaz a condição de compatibilidade (3.10) gostaríamos de saber quando ela desce para uma forma em $\Omega^k(B, P \otimes_{\mathcal{G}} E)$. De acordo como Apêndice B devemos saber quando Ω é horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante. Uma condição necessária para que Ω seja horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante é que $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathbf{t}^* E)$ pensada como uma forma no $\mathcal{G}$ -fibrado unitário seja horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante. Assim temos a seguinte proposição

Proposição 3.33. *Seja $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathbf{t}^* E)$ uma forma multiplicativa, horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante. Então existe $\vartheta \in \Omega^k(B, P \otimes_{\mathcal{G}} E)$ tal que $\Omega = \pi^* \vartheta$, onde Ω é a k -forma construída na Afirmação 3.31.*

Porém, formas multiplicativas e básicas no $\mathcal{G}$ -fibrado unitário podem ser escassas e assim fica claro que não toda forma $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^* E)$ desce para uma forma em B .

Agora passamos para os Γ -f.v.a., lembre-se que nessa seção o fibrado ancorado modelo é o algebroide $\rho : A \longrightarrow TM$ de $\mathcal{G}$ e o pseudogrupo generalizado Γ é o pseudogrupo de soluções da forma multiplicativa $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathbf{t}^* E)$. Mostraremos que para um Γ -f.v.a. a forma multiplicativa $\omega \in \Omega^k(\mathcal{G}, \mathbf{t}^* E)$ induz uma forma multiplicativa no correspondente grupoide de gauge $\omega' \in \Omega^k(P \otimes_{\mathcal{G}} P, \mathbf{t}^*(P \otimes_{\mathcal{G}} E))$.

Vamos construir ω' a partir de Ω , para isso lembre que $P \otimes_{\mathcal{G}} P$ é o quociente de $P \times_M P$ pela ação diagonal $\theta_{\Delta} : \mathcal{G} \curvearrowright P \times_M P$ cuja aplicação de momento é $\mu_{\Delta} : (q, p) \in P \times_M P \mapsto \mu(q) = \mu(p) \in M$. Note que $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^* E)$ induz uma $\Omega' \in \Omega^k(P \times_M P, \mu_{\Delta}^* E)$ definida por

$$\Omega'_{(q,p)}((u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)) = \Omega_q(u_1, \dots, u_k) - \Omega_p(v_1, \dots, v_k)$$

Agora verificamos que

- Ω' é horizontal: Lembre-se que o kernel da projeção $P \times_M P \longrightarrow P \otimes_{\mathcal{G}} P$ são os vetores tangentes a órbita da ação $\mathcal{G} \curvearrowright P \times_M P$. Logo Ω' é horizontal se ela se anula em vetores da forma $(d_{1_x} \theta^q \xi, d_{1_x} \theta^p \xi) \in T_{(q,p)} P \times_M P$, onde $\xi \in A_x$ e $x = \mu(q) = \mu(p)$. Então

$$\begin{aligned} \Omega'_{(q,p)}((d_{1_x} \theta^q \xi, d_{1_x} \theta^p \xi), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)) \\ = \Omega_q(d_{1_x} \theta^q \xi, u_2, \dots, u_k) - \Omega_p(d_{1_x} \theta^p \xi, v_2, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Agora vamos calcular cada um dos somandos acima. Para isso, escrevemos $d_{1_x}\theta^q\xi = d_{(1_x,q)}\theta(\xi, 0)$ e usamos a identidade $u = d_{(1_x,q)}\theta(d_x\mathbf{u} \cdot d_q\mu \cdot u, u)$. Pela equação de compatibilidade (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}\Omega_q(d_{1_x}\theta^q\xi, u_2 \dots, u_k) &= (\theta^*\Omega)_{(1_x,q)}((\xi, 0), (d_x\mathbf{u} \cdot d_q\mu \cdot u_2, u_2), \dots, (d_x\mathbf{u} \cdot d_q\mu \cdot u_k, u_k)) \\ &= \omega_{1_x}(\xi, d_x\mathbf{u} \cdot d_q\mu \cdot u_2, \dots, d_x\mathbf{u} \cdot d_q\mu \cdot u_k)\end{aligned}$$

De forma semelhante provamos que

$$\Omega_p(d_{1_x}\theta^p\xi, v_2 \dots, v_k) = \omega_{1_x}(\xi, d_x\mathbf{u} \cdot d_p\mu \cdot v_2, \dots, d_x\mathbf{u} \cdot d_p\mu \cdot v_k)$$

Finalmente, como $d_q\mu \cdot u_i = d_p\mu \cdot v_i$, concluímos que Ω' é horizontal.

- Ω' é $\mathcal{G}$ -invariante: De acordo com a Eq. (B.1) devemos calcular

$$\begin{aligned}(\theta_\Delta^*\Omega)_{(g,q,p)}((\phi \cdot d_p\mu_\Delta \cdot (u_1, v_1), (u_1, v_1)), \dots, (\phi \cdot d_p\mu_\Delta \cdot (u_k, v_k), (u_k, v_k))) \\ = (\theta^*\Omega)_{(g,q)}((\phi \cdot d_q\mu \cdot u_1, u_1), \dots, (\phi \cdot d_q\mu \cdot u_k, u_k)) \\ - (\theta^*\Omega)_{(g,p)}((\phi \cdot d_p\mu \cdot v_1, v_1), \dots, (\phi \cdot d_p\mu \cdot v_k, v_k))\end{aligned}$$

para algum $\phi : T_{\mathbf{s}(q)}M \longrightarrow T_g\mathcal{G}$ em $J^1\mathcal{G}$. Ora, usando a equação de compatibilidade (3.10) temos que

$$\begin{aligned}(\theta^*\Omega)_{(g,q)}((\phi \cdot d_q\mu \cdot u_1, u_1), \dots, (\phi \cdot d_q\mu \cdot u_k, u_k)) \\ = \omega_g(\phi \cdot d_q\mu \cdot u_1, \dots, \phi \cdot d_q\mu \cdot u_k) + g \cdot \Omega_q(u_1, \dots, u_k) \\ (\theta^*\Omega)_{(g,p)}((\phi \cdot d_p\mu \cdot v_1, v_1), \dots, (\phi \cdot d_p\mu \cdot v_k, v_k)) \\ = \omega_g(\phi \cdot d_p\mu \cdot v_1, \dots, \phi \cdot d_p\mu \cdot v_k) + g \cdot \Omega_p(v_1, \dots, v_k)\end{aligned}$$

Como $d_q\mu \cdot u_i = d_p\mu \cdot v_i$, obtemos

$$\begin{aligned}(\theta_\Delta^*\Omega)_{(g,q,p)}((\phi \cdot d_p\mu_\Delta \cdot (u_1, v_1), (u_1, v_1)), \dots, (\phi \cdot d_p\mu_\Delta \cdot (u_k, v_k), (u_k, v_k))) \\ = g \cdot \Omega_{(q,p)}((u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k))\end{aligned}$$

Tendo verificado que Ω' é horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante então ela desce para uma forma $\omega' \in \Omega^k(P \otimes_{\mathcal{G}} P, \mathfrak{t}^*(P \otimes_{\mathcal{G}} E))$.

Exemplo 3.34. *Seja $\overline{P}$ o Γ -f.v.a. determinado pela $f : B \longrightarrow M$. Lembre-se que neste caso a fibrado ancorado associado é o algebroide pullback $f^!A$ e o grupoide de gauge é isomorfo ao grupoide pullback $f^!\mathcal{G}$, e além disso a projeção $F : f^!\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de grupoides de Lie sobre a $f : B \longrightarrow M$. Pode-se verificar que neste caso a forma $\omega' = F^*\omega \in \Omega^k(f^!\mathcal{G}, \mathfrak{t}^!(f^*E))$, em particular ω' também é multiplicativa.*

Capítulo 4

Γ -folheações

Nesse capítulo introduziremos as Γ -folheações, onde Γ é um pseudogrupo generalizado de $\mathcal{G}$, e apresentaremos o seu teorema de classificação. As Γ -folheações serão folheações regulares com estrutura na transversal à folheação, e dessa forma obteremos uma generalização das geometrias transversais estudadas por Haefliger para pseudogrupos clássicos. Desde outro ponto de vista, as Γ -folheações serão uma classe de $\mathcal{G}$ -fibrados de Morita que são Γ -planos.

Começaremos com os mesmos objetos que na Seção 3.2. Isto é, temos um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$, uma representação $\theta : \mathcal{G} \curvearrowright E$ no fibrado vetorial $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ e uma âncora $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$. Consideramos Γ um subpseudogrupo em $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(E, \mathbf{a})$.

Definição 4.1. *Uma Γ -folheação em B é uma classe de isomorfismo de $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ submersão.*

Como vimos na Seção 3.2, para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ temos o morfismo de fibrados vetoriais sobre a identidade de B definido em (3.4)

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ v_b &\longmapsto [\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v_b] \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma seção local de $\bar{\pi}$ ao redor de $b \in B$ e $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Agora, para Γ -folheações temos uma observação semelhante à Observação 3.13.

Observação 4.2. *Como $\bar{\Gamma} \rightrightarrows M$ é um grupoide étale então para todo $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ temos que $\bar{\pi}$ é um difeomorfismo local. Isto produz as seguintes equivalências*

- $\bar{\mu}$ é submersão.
- Para toda seção local $\bar{\sigma}$ de $\bar{\pi}$ temos que $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$ é submersão.
- $\hat{\mu}$ é um epimorfismo.

Afirmção 4.3. *Toda Γ -folheação em B define uma folheação regular em B .*

Demonstração. Como $\hat{\mu}$ é um epimorfismo então o seu kernel $\text{Ker}(\hat{\mu}) \subset TB$ define uma distribuição regular. Essa distribuição é integrável pois pode-se verificar que para cada seção local $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{P}$ de $\bar{\pi}$ temos que

$$\text{Ker}(\hat{\mu})|_U = \text{Ker}(df)$$

onde $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Denotaremos por $\mathcal{F}$ a folheação regular definida por $\bar{P}$, e por $T\mathcal{F}$ a sua distribuição tangente. Em particular $\text{Ker}(\hat{\mu}) = T\mathcal{F}$, e o epimorfismo (4.1) induz um isomorfismo entre o fibrado vetorial associado $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ e o fibrado normal de $\mathcal{F}$. $\square$

Observe que o pseudogrupo generalizado Γ projeta para o pseudogrupo clássico $\Gamma_M = \text{Diff}_{\text{loc}}(M)$ de todas as transformações locais de M

$$\beta \in \Gamma \longmapsto \mathbf{t} \circ \beta \in \Gamma_M$$

Em outras palavras existe um morfismo de grupoides de Lie étales

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0: \bar{\Gamma} &\longrightarrow \bar{\Gamma}_M \\ \text{germ}_x(\beta) &\longmapsto \text{germ}_x(\mathbf{t} \circ \beta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Portanto toda Γ -folheação $\bar{P}$ produz, por meio da construção do fibrado associado, um $\bar{\Gamma}_M$ -fibrado principal $\bar{Q} = \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} \bar{\Gamma}_M \longrightarrow B$, e denotaremos por $\bar{\nu}: \bar{Q} \longrightarrow M$ a sua aplicação de momento. Agora mostraremos que o $\bar{\Gamma}_M$ -fibrado principal $\bar{Q}$ define uma folheação regular em B de acordo com a Definição 3.4, de fato define a mesma folheação $\mathcal{F}$ que a Γ -folheação $\bar{P}$ construída na Afirmação 4.3.

Proposição 4.4. *A aplicação de momento $\bar{\nu}: \bar{Q} \longrightarrow M$ é uma submersão e portanto $\bar{Q}$ define uma folheação regular em B . Essa folheação coincide com a folheação regular definida por $\bar{P}$.*

Demonstração. O fibrado $\bar{Q}$ é o quociente do fibrado produto $\bar{P} \times_M \bar{\Gamma}_M$ pela ação diagonal de $\bar{\Gamma}$ definida ao longo da aplicação $\tilde{\mu}: (p, g) \in \bar{P} \times_M \bar{\Gamma}_M \longmapsto \mathbf{t}(g) \in M$, e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \bar{P} \times_M \bar{\Gamma}_M & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & M \\ \downarrow & \nearrow \bar{\nu} & \\ \bar{Q} & & \end{array}$$

Ademais, lembre-se que temos o seguinte diagrama pullback

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\mu} & & \\ & & \text{---} & & \\ \bar{P} \times_M \bar{\Gamma}_M & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \bar{\Gamma}_M & \xrightarrow{\mathbf{t}} & M \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \bar{s} & & \\ \bar{P} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & M & & \end{array}$$

Logo, como $\bar{\mu}$ é submersão então $\tilde{\mu}$ é submersão e portanto $\bar{\nu}$ também é submersão. Portanto $\bar{Q}$ é uma folheação regular sobre B de acordo com a Definição 3.4.

Ora, sendo $\bar{\nu}$ submersão ela induz o epimorfismo

$$\begin{aligned} \hat{\nu}: TB &\longrightarrow \bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}_0} TM \\ v_b &\longmapsto [\bar{\sigma}_0(b), d_b f \cdot v_b] \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $\bar{\sigma}_0$ é uma seção local de $\bar{\pi}' : \bar{Q} \rightarrow B$, e $f = \bar{\nu} \circ \bar{\sigma}_0$. Além disso, o kernel $\text{Ker}(\hat{\nu})$ é a distribuição tangente da folheação definida por $\bar{Q}$.

Por outro lado temos um $\mathcal{E}_0$ -morfismo entre $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ definido por

$$\begin{aligned} \Psi : \bar{P} &\longrightarrow \bar{Q} \\ p &\longmapsto [p, \text{germ}_{\bar{\mu}(p)}(\text{id}_M)] \end{aligned}$$

Esse morfismo induz um isomorfismo entre os fibrados vetoriais associados à representação em TM

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM &\longrightarrow \bar{Q} \otimes_{\bar{\Gamma}_0} TM \\ [p, v] &\longmapsto [\Psi(p), v] \end{aligned}$$

O isomorfismo $\hat{\Psi}$ comuta com os epimorfismos (4.1) e (4.3), i.e. $\hat{\Psi} \circ \hat{\mu} = \hat{\nu}$. Portanto, tanto $\bar{P}$ através de $\hat{\mu}$ quanto $\bar{Q}$ através de $\hat{\nu}$ definem a mesma folheação $\mathcal{F}$ em B . $\square$

Dada uma folheação $\mathcal{F}$ em uma variedade B , dizemos que uma aplicação diferenciável $f : B \rightarrow X$ é básica se ela é constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$. Seguindo Molino [Mol72] ou Vaisman [Vai74], um fibrado vetorial $E' \rightarrow B$ é folheado sobre $\mathcal{F}$ se as suas funções de transição são funções básicas em $(B, \mathcal{F})$. Por exemplo, se $\psi : B \rightarrow M$ é uma submersão e $E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial então o fibrado pullback $\psi^*E \rightarrow B$ é um fibrado vetorial folheado para a folheação simples em B definida pelas fibras de ψ .

Das construções feitas na Seção 1.5 temos que, fixada uma seção local $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{P}$ de $\bar{\pi}$, o fibrado vetorial $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é localmente difeomorfo ao fibrado vetorial pullback f^*TM , onde $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}$. Ora, seja $\bar{P}$ uma Γ -folheação em B e seja $\mathcal{F}$ a folheação regular definida por $\bar{P}$. Neste caso temos que f é uma submersão e $\mathcal{F}|_U$ são as fibras de submersão $f : U \rightarrow M$. Portanto $f^*TM \rightarrow U$ torna-se um fibrado vetorial folheado sobre $\mathcal{F}|_U$ no sentido de Molino [Mol72] ou Vaisman [Vai74]. Pode-se verificar que, após escolher trivializações locais adequadas para o fibrado $TM \rightarrow M$, o fibrado $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow B$ é um fibrado vetorial folheado sobre $\mathcal{F}$. Analogamente, temos que $\bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E \rightarrow B$ também é um fibrado vetorial folheado sobre $\mathcal{F}$.

É claro, uma Γ -folheação produz outra estrutura além da folheação regular $\mathcal{F}$. Essa estrutura adicional vem do fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TB$ que sempre temos ligado a todo Γ -f.v.a., e em particular a toda Γ -folheação.

$$\begin{array}{ccccccc} E[\bar{P}] & \longrightarrow & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} E & & & & \\ \mathbf{a}_{\bar{P}} \downarrow & & \downarrow \bar{\mathbf{a}} & & & & \\ 0 & \dashrightarrow & T\mathcal{F} & \dashrightarrow & TB & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \dashrightarrow 0 \end{array}$$

A estrutura adicional que produz a Γ -folheação $\bar{P}$ é uma estrutura de fibrado ancorado na transversal à folheação $\mathcal{F}$. Para verificar isto, basta escolher uma seção local $\bar{\sigma} : U \rightarrow \bar{P}$ de $\bar{\pi}$ e logo uma seção local $\mathcal{T} : V \rightarrow U$ da submersão $f = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma} : U \rightarrow M$. Assim $\mathcal{T}(V) \subset B$ é uma subvariedade transversal à $\mathcal{F}$, e verifica-se $\mathcal{T}^!E[\bar{P}] = E|_V$.

Observação 4.5. *Pela discussão acima gostaríamos de chamar ao fibrado ancorado associado $\mathbf{a}_{\bar{P}} : E[\bar{P}] \rightarrow TB$ de estrutura transversal à Γ -folheação $\bar{P}$, e dizer que uma Γ -folheação $\bar{P}$ em*

B define uma folheação regular $\mathcal{F}$ com uma estrutura transversal localmente modelada no fibrado vetorial ancorado $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$.

Pullback de Γ -folheações

Agora gostaríamos de saber quando o pullback de uma Γ -folheação por uma aplicação diferenciável produz uma nova Γ -folheação. Para isto, seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow X$ uma Γ -folheação sobre X com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$, e denote por $\mathcal{F}$ a folheação em X definida por $\bar{P}$. Seja $\psi : B \rightarrow X$ uma aplicação diferenciável e considere o $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal pullback $\bar{P}' = \psi^*\bar{P}$, denote por $\bar{\mu}'$ a sua aplicação de momento e por $\Psi : \bar{P}' \rightarrow \bar{P}$ o $\bar{\Gamma}$ -morfismo definido entre estes $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais. Seguindo as construções da Seção 3.2 e em particular a Observação 3.11 temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} TB & \xrightarrow{\hat{\mu}'} & \bar{P}' \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ d\psi \downarrow & & \downarrow \Psi^{TM} \\ TX & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\Gamma} TM \end{array}$$

Nesse diagrama lembramos que Ψ^{TM} é um isomorfismo na fibra pois é o morfismo de fibrados vetoriais associado ao Ψ , e que $\hat{\mu}$ é epimorfismo pois $\bar{P}$ é uma Γ -folheação em X . Do diagrama acima concluímos que $\hat{\mu}'$ é epimorfismo, e portanto $\bar{P}'$ é uma $\bar{\Gamma}$ -folheação, se e somente se $\hat{\mu} \circ d\psi$ é um epimorfismo. Por sua vez, essa ultima condição é equivalente a dizer que a aplicação $\psi : B \rightarrow X$ é transversal à distribuição tangente $T\mathcal{F}$ da folheação definida por $\bar{P}$. Dessa forma temos provado a seguinte proposição

Proposição 4.6. $\psi^*\bar{P}$ é uma $\bar{\Gamma}$ -folheação se e somente se $\psi \pitchfork T\mathcal{F}$.

Observe que a conclusão do parágrafo anterior coincide com a definição usual de quando uma aplicação diferenciável $\psi : B \rightarrow X$ é transversal a uma folheação¹ $\mathcal{F}$, e nesse caso sempre podemos construir a folheação pullback, e que nas notações acima essa folheação pullback é a folheação $\mathcal{F}'$ definida por $\bar{P}' = \psi^*\bar{P}$. A observação importante aqui é que com essa mesma definição, se a folheação $\mathcal{F}$ vem com alguma estrutura transversal, i.e. é uma Γ -folheação, então a folheação pullback mantém a mesma estrutura transversal. Essa estrutura transversal é o fibrado ancorado associado à Γ -folheação. Lembramos que, de acordo com a Proposição 3.19, para a Γ -folheação pullback $\bar{P}' = \psi^*\bar{P}$ temos duas formas equivalentes de obter a sua estrutura transversal $\mathbf{a}_{\bar{P}'} : E[\bar{P}'] \rightarrow TB$, uma delas é como o fibrado ancorado associado a $\bar{P}'$ e a outra é como pullback ancorado do fibrado ancorado associado a $\bar{P}$.

Homotopia de Γ -folheações

Agora vamos a definir homotopia de Γ -folheações

Definição 4.7. Sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ duas Γ -folheações em B . Dizemos que $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ são integralmente homotópicas se existem um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{P} \rightarrow B \times \mathbb{I}$ e dois $\bar{\Gamma}$ -morfismos $\Psi_0 : \bar{P}_0 \rightarrow \bar{P}$ e $\Psi_1 : \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}$ tais que:

¹Vide, por exemplo, a Seção 1.3 em [MM03].

1. Para cada $t \in \mathbb{I}$ temos que $i_t \lhd \bar{P}$, e portanto $i_t^* \bar{P}$ é uma Γ -folheação em B .
2. Os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} \bar{P}_0 & \xrightarrow{\Psi_0} & \bar{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i_0} & B \times [0, 1] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{P}_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & \bar{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i_1} & B \times [0, 1] \end{array}$$

Em particular $\bar{P}_0 \simeq i_0^* \bar{P}$ e $\bar{P}_1 \simeq i_1^* \bar{P}$.

Novamente, denotaremos por $\bar{P}_0 \approx \bar{P}_1$ quando $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ sejam Γ -folheações em B integralmente homotópicas. Observe que se $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ são Γ -folheações integralmente homotópicas então $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ são Γ -f.v.a. integralmente homotópicos, e portanto $\bar{\Gamma}$ -fibrados principais homotópicos.

4.1 Classificação de Γ -folheações

Nessa seção apresentaremos o teorema de classificação de Γ -folheações, o qual será um extensão direta do teorema de classificação de Γ -folheações clássicas de Haefliger apresentado em [Hae71a]. Seja $\pi_{\bar{\Gamma}} : P\bar{\Gamma} \rightarrow B\bar{\Gamma}$ o $\bar{\Gamma}$ -fibrado universal, usando a representação de $\bar{\Gamma}$ em TM temos o fibrado vetorial associado $P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow B\bar{\Gamma}$. Seja $\pi : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal diferenciável e seja $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}$ com aplicação classificante $\psi : B \rightarrow B\bar{\Gamma}$. Então Ψ induz o morfismo de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \Psi^{TM} : \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM &\longrightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ [p, u] &\longmapsto [\Psi(p), u] \end{aligned}$$

Por outro lado, lembre-se que a aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ induz o morfismo de fibrados vetoriais

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : TB &\longrightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ v_b &\longmapsto [\bar{\sigma}(b), d_b f \cdot v_b] \end{aligned}$$

A seguinte afirmação permite caracterizar as Γ -folheações em B no conjunto $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$.

Afirmção 4.8. *Seja $\pi : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ e seja $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}$. Então $\bar{P}$ é uma Γ -folheação em B se e somente se o morfismo de fibrados vetoriais $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é um epimorfismo.*

A prova dessa afirmação é uma consequência direta do fato que Ψ^{TM} é um isomorfismo na fibra. O epimorfismo $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}$ será chamado de epimorfismo classificante para a Γ -folheação $\bar{P}$. A caracterização de Γ -folheações dentro de $\text{Bun}_{\bar{\Gamma}}(B)$ apresentada na afirmação acima depende da escolha de $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante, o qual é definido a menos de $\bar{\Gamma}$ -homotopia. Agora analisaremos o que acontece ao escolher outro $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante.

Sejam Ψ_0 e Ψ_1 dois $\bar{\Gamma}$ -morfismos classificantes para a Γ -folheação $\bar{P}$. Então existe uma $\bar{\Gamma}$ -homotopia $H : \bar{P} \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ tal que $H_0 = \Psi_0$ e $H_1 = \Psi_1$. Consideramos em $\bar{P} \times \mathbb{I}$ a estrutura de $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal de apresentada na Observação 1.34, e como a nova aplicação de momento $\bar{\mu}' = \bar{\mu} \circ \text{pr}_1 : \bar{P} \times \mathbb{I} \rightarrow M$ também é submersão então $\bar{P} \times \mathbb{I}$ é uma Γ -folheação em $B \times \mathbb{I}$, de fato

a folheação definida em $B \times \mathbb{I}$ é por subvariedades da forma $L \times \mathbb{I}$ onde L é uma folha de $\mathcal{F}$. Para $\bar{P} \times \mathbb{I}$ o seu epimorfismo induzido $\hat{\mu}'$ é definido por

$$\begin{aligned} \hat{\mu}' : TB \times T\mathbb{I} &\longrightarrow (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ (v, r) &\longmapsto [(p, t), d_p \bar{\mu} \cdot (d_p \bar{\pi})^{-1} \cdot v] \end{aligned}$$

onde $(p, t) \in \bar{P} \times \mathbb{I}$ são tais que $(v, r) \in T_{\bar{\pi}(p)} B \times T_t \mathbb{I}$. Da cara do epimorfismo $\hat{\mu}'$ concluímos que sua restrição a $\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}$ também é um epimorfismo. Ora, denotamos por $H^{TM} : (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ o morfismo induzido pelo $\bar{\Gamma}$ -morfismo H , e lembre-se que H^{TM} é um isomorfismo na fibra. Por conseguinte a composta de H^{TM} com $\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}$ determina uma homotopia entre os epimorfismos $\Psi_0^{TM} \circ \hat{\mu}$ e $\Psi_1^{TM} \circ \hat{\mu}$ e essa homotopia é através de epimorfismos.

$$\begin{array}{ccccc} TB \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\mu}'|_{TB \times \mathbb{I}}} & (\bar{P} \times \mathbb{I}) \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xrightarrow{H^{TM}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\text{id}_{B \times \mathbb{I}}} & B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{h} & B\bar{\Gamma} \end{array}$$

Consequentemente obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} \text{Fol}_{\Gamma}(B) &\longrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)) \\ \bar{P} &\longmapsto [\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}] \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\text{Fol}_{\Gamma}(B)$ denota o conjunto de (classes de isomorfismo) de Γ -folheações em B , e $\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)$ é o conjunto dos epimorfismos de $TB \rightarrow B$ em $P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow B\bar{\Gamma}$ munido da topologia compacto-aberta.

Ora mostraremos que a aplicação (4.4) é invariante pela relação de homotopia integral. Para isso, sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ duas Γ -folheações em B integralmente homotópicas e seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B \times \mathbb{I}$ a Γ -folheação que realiza a homotopia entre $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. Então a aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ e um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ determinam o seguinte epimorfismo

$$\begin{array}{ccccc} TB \times T\mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xrightarrow{\Psi^{TM}} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\text{id}_{B \times \mathbb{I}}} & B \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\psi} & B\bar{\Gamma} \end{array}$$

Como $\bar{P}$ é uma homotopia integral então $\hat{\mu}|_{TB \times \mathbb{I}} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow \bar{P} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é um epimorfismo. Note que $\Psi_0 = \Psi \circ i_0$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}_0$ e $\Psi_1 = \Psi \circ i_1$ é um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}_1$. Consequentemente $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}|_{TB \times \mathbb{I}} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é uma homotopia através de epimorfismos entre os epimorfismos classificantes de $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. Portanto a aplicação (4.4) desce para Γ -folheações modulo homotopia integral e assim obtemos uma aplicação bem definida

$$\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f} : \text{Fol}_{\Gamma}(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM))$$

Finalmente já podemos enunciar e provar o teorema de classificação de Γ -folheações.

Teorema 4.9. *Seja B uma variedade aberta. Então a aplicação*

$$\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f}: \text{Fol}_\Gamma(B) / \approx \longrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM))$$

é uma bijeção.

Demonstração. A prova desse teorema segue o mesmo caminho da prova do Teorema 3.22 e muito próxima da prova do teorema de Haefliger apresentado em [Hae71a].

- $\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ é sobrejetora: Seja $\tilde{\Psi} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ um epimorfismo e denote por $\psi : B \rightarrow B\bar{\Gamma}$ a projeção de $\tilde{\Psi}$. Seja $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ o gráfico de $\psi^*P\bar{\Gamma}$ construído no Teorema 1.79 e lembre que $\mathbb{P}$ tem aplicação de momento submersão, isto é $\mathbb{P}$ é uma Γ -folheação em $\mathbb{B}$. Dessa forma temos um epimorfismo $T\mathbb{B} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ que permite fatorar $\tilde{\Psi} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ como a composta desse epimorfismo $T\mathbb{B} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ com um morfismo $F : TB \rightarrow T\mathbb{B}$ transversal à distribuição tangente da folheação $\mathbb{F}$ definida por $\mathbb{P}$. Como B é uma variedade aberta, pelo Teorema 2.22 o morfismo F pode ser deformado por morfismos transversais à $T\mathbb{F}$ para o diferencial df de uma aplicação $f : B \rightarrow \mathbb{B}$ transversal a $T\mathbb{F}$. Finalmente $\bar{P} = f^*\mathbb{P}$ é o Γ -folheação procurada.
- $\mathfrak{H}\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ é injetora: Sejam $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$ duas Γ -folheações em B tais que o seus correspondentes epimorfismos classificantes pertencem a mesma componente conexa por caminhos em $\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)$. Seja $\tilde{\Phi} : TB \times \mathbb{I} \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ a homotopia através de epimorfismos entre os epimorfismos classificantes de $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$. Seja $\phi : B \times \mathbb{I} \rightarrow B\bar{\Gamma}$ a projeção de $\tilde{\Phi}$. Seja $\mathbb{P}' \rightarrow \mathbb{B}'$ o gráfico do $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\phi^*P\bar{\Gamma}$, o qual define uma Γ -folheação em $\mathbb{B}'$. Então novamente temos um epimorfismo $T\mathbb{B}' \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ que permite fatorar $\tilde{\Phi}$ como a composta desse epimorfismo $T\mathbb{B}' \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ com uma homotopia $H : TB \times \mathbb{I} \rightarrow T\mathbb{B}'$ através de aplicações transversais à distribuição tangente da folheação $\mathbb{F}'$ definida por $\mathbb{P}'$. Novamente, como B é uma variedade aberta, o Teorema 2.22 garante que H pode ser deformada no diferencial dh de uma homotopia $h : B \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{B}'$ por aplicações transversais a $T\mathbb{F}'$. Finalmente $\bar{P} = h^*\mathbb{P}'$ realiza a homotopia integral procurada entre $\bar{P}_0$ e $\bar{P}_1$.

□

Se no Teorema 4.9 escolhemos Γ como sendo um pseudogrupo generalizado do grupoide $M \times M \rightrightarrows M$, isto é Γ sendo um pseudogrupo clássico, recuperamos o teorema de classificação de Γ -folheações clássicas devido a Haefliger.

Agora gostaríamos usar o Teorema 4.9 para estudar o problema de quando uma folheação regular admite uma estrutura transversal localmente modelada no fibrado ancorado $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$. Antes de tudo, devemos apontar que uma resposta a tal problema é obtida a menos de homotopia. Agora, observe que não há diferença se na Definição 3.4 de folheações regulares de codimensão k em B usamos o grupoide de germes $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ de todas as transformações locais de $\mathbb{R}^k$ ou se usamos o grupoide de germes $\bar{\Gamma}_M \rightrightarrows M$ de todas as transformações locais de M quando $\dim M = k$. Isto segue da equivalência de Morita entre os grupoides $\bar{\Gamma} \rightrightarrows \mathbb{R}^k$ e $\bar{\Gamma}_M \rightrightarrows M^2$. Desta forma, fixada uma variedade M de $\dim M = k$, de acordo com o Teorema 4.9 temos que folheações regulares de

²Vide o Exercício 5.18 em [MM03].

codimensão k sobre uma variedade aberta B são classificadas a menos de homotopia integral pelo conjunto $\pi_0(\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM))$

$$\text{Fol}_{\Gamma_M}(B) / \approx \longleftrightarrow \pi_0(\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM))$$

Ora, o morfismo de grupoides $\mathcal{E}_0$ definido em (4.2) induz um $\mathcal{E}_0$ -morfismo entre os fibrados universais $P\bar{\Gamma}$ e $P\bar{\Gamma}_M$.

$$\begin{array}{ccc} P\bar{\Gamma} & \xrightarrow{\Xi} & P\bar{\Gamma}_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\bar{\Gamma} & \xrightarrow{\chi} & B\bar{\Gamma}_M \end{array}$$

Esse $\mathcal{E}_0$ -morfismo induz um morfismo de fibrados vetoriais nos fibrados vetoriais associados a representação sobre TM

$$\begin{array}{ccc} P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \xrightarrow{\Xi^{TM}} & P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\bar{\Gamma} & \xrightarrow{\chi} & B\bar{\Gamma}_M \end{array}$$

De fato, o morfismo Ξ^{TM} é um isomorfismo na fibra.

Observe que um epimorfismo classificante para uma Γ -folheação determina um epimorfismo classificante para a folheação regular por ela definida. Com efeito, seja $\bar{P} \rightarrow B$ uma Γ -folheação com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$, e seja $\Psi : \bar{P} \rightarrow P\bar{\Gamma}$ um $\bar{\Gamma}$ -morfismo classificante para $\bar{P}$. Então $\Psi^{TM} \circ \bar{\mu} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ é o epimorfismo classificante para a Γ -folheação, e a sua composta com $\Xi^{TM} : P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \rightarrow P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM$ determina um epimorfismo classificante para a folheação regular definida por $\bar{P}$.

$$\begin{array}{ccc} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \\ \nearrow \Psi^{TM} \circ \bar{\mu} & \downarrow \Xi^{TM} & \\ TB & \xrightarrow{\Xi^{TM} \circ \Psi^{TM} \circ \bar{\mu}} & P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM \end{array}$$

Reciprocamente, seja $\bar{Q} \rightarrow B$ uma folheação regular $\mathcal{F}$ em B com aplicação de momento $\bar{\nu} : \bar{Q} \rightarrow M$, e seja $\Psi_0 : \bar{Q} \rightarrow P\bar{\Gamma}_M$ um $\bar{\Gamma}_M$ -morfismo classificante para $\bar{Q}$, então $\Psi_0^{TM} \circ \bar{\nu} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM$ é um epimorfismo classificante de $\mathcal{F}$. Suponha que existe uma aplicação $\tilde{\Psi} : TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ que torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM & \\ \nearrow \tilde{\Psi} & \downarrow \Xi^{TM} & \\ TB & \xrightarrow{\Psi_0^{TM} \circ \bar{\nu}} & P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM \end{array}$$

Seguindo a mesma estratégia da prova do Teorema 4.9 prova-se que existe uma Γ -folheação $\bar{P} \rightarrow$

B , com aplicação de momento $\bar{\mu}$, cujo epimorfismo classificante $\Psi^{TM} \circ \hat{\mu}$ é homotópico a $\tilde{\Psi}$ através de epimorfismos em $\text{Epi}(TB, P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM)$. Portanto a folheação regular $\mathcal{F}'$ em B definida por $\bar{P}$ é integralmente homotópica à folheação regular $\mathcal{F}$. Assim obtemos o seguinte corolário do Teorema 4.9.

Corolário 4.10. *Seja B uma variedade aberta, e seja $\mathcal{F}$ uma folheação regular em B com epimorfismo classificante $\Psi_0^{TM} \circ \hat{\nu}$. Existe uma correspondência 1-1 entre as classes de homotopia de levantamentos $TB \rightarrow P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM$ do epimorfismo classificante $\mathcal{F}$ e folheações regulares integralmente homotópicas a $\mathcal{F}$ que admitem estrutura transversal localmente modelada por $\mathbf{a} : E \rightarrow TM$, de acordo com a Observação 4.5.*

$$\begin{array}{ccc}
 & & P\bar{\Gamma} \otimes_{\bar{\Gamma}} TM \\
 & \nearrow & \downarrow \Xi^{TM} \\
 TB & \xrightarrow{\Psi_0^{TM} \circ \hat{\nu}} & P\bar{\Gamma}_M \otimes_{\bar{\Gamma}_M} TM
 \end{array}$$

4.2 Classificação de folheações transversalmente homogêneas

Nessa seção aplicaremos teorema de classificação de Γ -folheações para classificar folheações regulares sobre uma variedade aberta cuja transversal é localmente modelada por um espaço homogêneo G/H , e em particular obteremos a classificação das estruturas de variedade localmente homogênea modelada por G/H sobre uma variedade aberta. Antes disso faremos uma revisão de alguns conceitos.

4.2.1 Conexões de Cartan

Uma conexão de Cartan em um grupoide de Lie $\mathcal{G}$ é uma seção $\bar{\mathcal{S}} : \mathcal{G} \rightarrow J^1\mathcal{G}$ da projeção canônica $\text{pr} : J^1\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ que também é um morfismo de grupoides de Lie. Conexões de Cartan em grupoides foram introduzidas em [AAC13], outras referencias são [CSS15] e [Bla16]. Equivalentemente, uma conexão de Cartan em $\mathcal{G}$ determina um morfismo de fibrados vetoriais $\mathcal{S} : \mathbf{s}^*TM \rightarrow T\mathcal{G}$ que é uma seção de $d\mathbf{s}$ que também é multiplicativa no sentido que temos

$$\mathcal{S}_{gh}(v) = d_{(g,h)}\mathbf{m}(\mathcal{S}_g \cdot d_h\mathbf{t} \cdot \mathcal{S}_h \cdot v, \mathcal{S}_h \cdot v)$$

para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^{(2)}$ e $v \in T_{\mathbf{s}(h)}M$. Em particular, a imagem de $\mathcal{S}$ determina uma distribuição em $T\mathcal{G}$ de posto $\dim M$ que também é um subgrupoide de $T\mathcal{G} \rightrightarrows TM$. Dizemos que a conexão de Cartan é plana se a distribuição $\text{Im}(\mathcal{S}) \subset T\mathcal{G}$ é integrável.

Exemplo 4.11. *Seja $G \ltimes M \rightrightarrows M$ um grupoide de ação. Existe uma conexão de Cartan canônica em $G \ltimes M$ definida por $\bar{\mathcal{S}} : (g, x) \in G \ltimes M \mapsto j_x^1\beta_g \in J^1(G \ltimes M)$, onde $\beta_g : x \in M \mapsto (g, x) \in G \ltimes M$. Essa conexão é plana e determina a folheação $\{\{g\} \times M\}_{g \in G}$ em $G \ltimes M$.*

Cada forma de Cartan $\mathcal{S}$ em $\mathcal{G}$ determina uma 1-forma multiplicativa $\omega_{\mathcal{S}} \in \Omega^1(\mathcal{G}, \mathbf{t}^*A)$ definida por

$$\begin{aligned}
 \omega_{\mathcal{S}} : T\mathcal{G} &\longrightarrow \mathbf{t}^*A \\
 v_g &\longmapsto d_g R^{g^{-1}} \cdot (v_g - \mathcal{S}_g \cdot d_g \mathbf{s} \cdot v_g)
 \end{aligned}$$

Assim, de acordo com a Subseção 3.3.1, toda forma de Cartan em $\mathcal{G}$ determina um pseudogrupo generalizado de $\mathcal{G}$. Desde um ponto de vista mais geométrico, uma biseção local β é uma solução de $\omega_{\mathcal{G}}$ se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes

- $\bar{\mathcal{S}} \circ \beta = j^1 \beta$.
- $d_x \beta(T_x M) = \mathcal{S}_{\beta(x)}$, para todo $x \in \text{dom} \beta$.

Exemplo 4.12. *Seja $G \ltimes M \rightrightarrows M$ um grupoide de ação e seja $\bar{\mathcal{S}}$ a sua forma de Cartan canônica apresentada no Exemplo 4.11. O pseudogrupo generalizado Γ de soluções da 1-forma multiplicativa associada a $\mathcal{S}$ é o pseudogrupo gerado pelas biseções $\beta_g : x \in M \mapsto (g, x) \in G \ltimes M$, com $g \in G$. Ora, para este pseudogrupo um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ com aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ se corresponde com um G -fibrado principal plano $\pi : P \rightarrow B$ e um G -morfismo $\mu : P \rightarrow M$.*

Já é mais amplamente conhecida a definição de conexões de Cartan em fibrados principais com grupo de estrutura, vide por exemplo [Sha97]. Blaom chama de conexões de Cartan clássicas as conexões de Cartan definidas em fibrados principais. Blaom mostra, vide Teorema 1.1 em [Bla16], que existe uma correspondência entre conexões de Cartan clássicas em um G -fibrado principal $P \rightarrow B$ e conexões de Cartan no seu grupoide de gauge associado $P \otimes_G P \rightrightarrows B$.

O protótipo de conexões de Cartan clássicas é a 1-forma de Maurer-Cartan em fibrados principais sobre espaços homogêneos, a qual apresentamos a seguir. Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado, e considere a ação a direita $G \curvearrowright H$ induzida pela multiplicação do grupo. Dessa maneira o espaço quociente $M = G/H$ herda uma estrutura de variedade diferenciável e a aplicação projeção $\mathbf{p} : G \rightarrow M$ torna-se um H -fibrado principal (a direita). Assim a 1-forma de Maurer-Cartan $\omega_{MC} : v_g \in TG \mapsto d_g L^{g^{-1}} \cdot v_g \in \mathfrak{g}$ é uma conexão de Cartan no H -fibrado principal $\mathbf{p} : G \rightarrow M$. Então, de acordo com a correspondência entre formas de Cartan clássicas e formas de Cartan em grupoides, existe uma forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$ no grupoide de gauge $G \otimes_H G \rightrightarrows M$.

Antes de identificar a forma de Cartan em $G \otimes_H G$ estabeleceremos um pouco de notação. Os elementos em $M = G/H$ serão denotados por $[k]$. O espaço tangente $T_{[k]}M$ pode ser descrito como o quociente $\frac{T_k G}{d_e L^k(\mathfrak{h})}$, onde $\mathfrak{h}$ denota a álgebra de Lie de H . Os elementos em $T_{[k]}M$ serão denotados por $[v_k]$, onde $v_k \in T_k G$. Semelhantemente, os elementos em $G \otimes_H G = (G \times G)/H$ serão denotados por $[g, k]$. O espaço tangente $T_{[g, k]}(G \otimes_H G)$ pode ser descrito como o quociente $\frac{T_g G \times T_k G}{d_e(L^g \times L^k)(\mathfrak{h})}$, e os elementos em $T_{[g, k]}(G \otimes_H G)$ serão denotados por $[v_g, w_k]$.

Afirmção 4.13. *A forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$ no grupoide $G \otimes_H G$ é definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{MC} : \mathbf{s}^* TM &\longrightarrow T(G \otimes_H G) \\ [v_k] &\longmapsto \mathcal{S}_{[g, k]}^{MC} \cdot [v_k] = [d_k L^{gk^{-1}} \cdot v_k, v_k] \end{aligned}$$

Demonstração. A 1-forma de Maurer-Cartan induz uma forma de Cartan no grupoide de pares de G definida por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} : \mathbf{s}^* TG &\longrightarrow T(G \times G) \\ v_k &\longmapsto \tilde{\mathcal{S}}_{(g, k)} \cdot v_k = (d_k L^{gk^{-1}} \cdot v_k, v_k) \end{aligned}$$

Esse morfismo satisfaz $\tilde{\mathcal{S}}_{(g,k)}(d_e L^k(\mathfrak{h})) \subset d_e(L^g \times L^k)(\mathfrak{h})$. Portanto induz um morfismo entre os correspondentes espaços quocientes, e esse morfismo é a forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$ procurada. $\square$

De outro lado, o quociente $M = G/H$ herda uma ação (a esquerda) transitiva do grupo G definida por $(g, [k]) \in G \times M \mapsto [gk] \in M$, e dessa forma temos o grupoide de ação $G \ltimes M \rightrightarrows M$.

Afirmção 4.14. *Os grupoides $G \otimes_H G \rightrightarrows M$ e $G \ltimes M \rightrightarrows M$ são isomorfos.*

Demonstração. Vamos a considerar duas ações (a direita) de H em $G \times G$. A primeira é a ação diagonal $(g, k) \cdot h = (gh, kh)$ cujo quociente produz o grupoide de gauge $G \otimes_H G$ e denotaremos $(G \times G)_1$ o correspondente H -espaço. A segunda ação é definida por $(g, k) \cdot h = (g, kh)$ cujo quociente é o grupoide de ação e denotaremos $(G \times G)_2$ o correspondente H -espaço. Finalmente o H -isomorfismo $\Psi : (g, k) \in (G \times G)_1 \mapsto (gk^{-1}, k) \in (G \times G)_2$ induz o isomorfismo entre os grupoides $G \otimes_H G \rightrightarrows M$ e $G \ltimes M \rightrightarrows M$. $\square$

Portanto, esse isomorfismo de grupoides transporta a forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$ em $G \otimes_H G$ para uma forma de Cartan em $G \ltimes M$. Segue das nossas construções explícitas apresentadas acima que aquela forma é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{MC} : \mathfrak{s}^* TM &\longrightarrow T(G \ltimes M) \\ [v_k] &\longmapsto \mathcal{S}_{(g, [k])} \cdot [v_k] = (0_g, [v_k]) \end{aligned}$$

Assim obtemos a forma de Cartan canônica associada a qualquer ação do grupo G apresentada no Exemplo 4.11. Denotamos por $\mathcal{S}^{MC}$ a esta forma de Cartan em $G \ltimes M$ para simplificar a notação e também para lembrar ela é determinada desde a forma de Maurer-Cartan em $\mathfrak{p} : G \rightarrow M = G/H$. Então o pseudogruppo de soluções de $\mathcal{S}^{MC}$ é o pseudogruppo generalizado gerado pelas biseções $\beta_g : [k] \in M \mapsto (g, [k]) \in G \ltimes M$. Esse pseudogruppo generalizado induz o pseudogruppo de transformações locais de $M = G/H$ o qual é gerado pelos difeomorfismos de M induzidos pela multiplicação a esquerda pelos elementos de G .

4.2.2 Folheações regulares transversalmente homogêneas

De acordo com [Bla13] e [Gol10], dizemos que uma variedade B tem uma estrutura de variedade localmente homogênea modelada pelo $M = G/H$ se ela admite um atlas de variedade $\{f_i : U_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ tal que a mudança de coordenadas $f_i \circ f_j^{-1}$ pertence ao pseudogruppo de transformações locais de M induzidos pela multiplicação a esquerda dos elementos de G . Isto é, se denotamos por $\overline{L}^g : [k] \in M \mapsto [gk] \in M$, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então existe $g_{ij} \in G$ tal que $f_i = \overline{L}^{g_{ij}} \circ f_j$. A coleção $\{f_i : U_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ é chamada de um (G, M) -atlas para B .

Observe que um (G, M) -atlas de B define uma cociclo de Haefliger a valores no grupoide $\overline{\Gamma} \rightrightarrows M$, onde Γ é o pseudogruppo generalizado de soluções da forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$ em $G \ltimes M$. Com efeito, seja $\{f_i : U_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ um (G, M) -atlas de B , então as funções

$$\gamma_{ij} : b \in U_i \cap U_j \mapsto \text{germ}_{f_j(b)}(\beta_{g_{ij}}) \in \overline{\Gamma}$$

determinam um cociclo de Haefliger. Associado com esse cociclo existe um $\overline{\Gamma}$ -fibrado principal $\overline{\pi} : \overline{P} \rightarrow B$ com aplicação de momento $\overline{\mu} : \overline{P} \rightarrow M$. Como as aplicações $f_i : U_i \rightarrow M$ são difeomorfismos sobre as suas imagens então a aplicação de momento $\overline{\mu}$ é um difeomorfismo local.

Reciprocamente, seja $\bar{\pi} : \bar{P} \rightarrow B$ um $\bar{\Gamma}$ -fibrado principal cuja aplicação de momento $\bar{\mu} : \bar{P} \rightarrow M$ é um difeomorfismo local. Então existe um atlas $\{\bar{\sigma}_i : U_i \rightarrow \bar{P}\}_{i \in I}$ para $\bar{P}$ tal que as aplicações $f_i = \bar{\mu} \circ \bar{\sigma}_i : U_i \rightarrow M$ são difeomorfismos sobre as suas imagens. Além disto, para cada $b \in U_i \cap U_j$ existe uma biseção $\beta_{g^b} \in \Gamma$ tal que $\gamma_{ij}(b') = \text{germ}_{f_j(b')}(\beta_{g^b})$ para todo b' em uma vizinhança de b , e portanto $f_i(b') = \overline{L^{g^b}} \circ f_j(b')$ para todo b' em uma vizinhança de b . Portanto $\bar{P}$ induz em B uma estrutura de variedade localmente homogênea modelada pelo $M = G/H$.

Dessa forma temos uma correspondência entre estruturas de variedade localmente homogênea modelada pelo $M = G/H$ sobre B e Γ -folheações em B , com $\dim B = \dim M$, onde Γ é o pseudo-grupo generalizado de soluções da forma de Cartan $\mathcal{S}^{MC}$. Por extensão, definimos uma folheação regular transversalmente homogênea modelada pelo M sobre B como uma Γ -folheação em B , quando $\dim B > \dim M$.

Dessa forma, com as substituições adequadas, o Teorema 4.9 classifica folheações transversalmente homogêneas em uma variedade aberta.

Apêndice A

Noções de espaços étales

Espaços étales são uma forma “geométrica” para estudar feixes sobre espaços topológicos ou variedades. O nosso interesse está focado nos feixes de seções locais de submersões, ou ainda mais particularmente em feixes de seções locais de fibrados, e nesses casos o correspondente espaço étale é o espaço étale de germes de seções locais. Então vamos começar com um pouco de notação, seja $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ uma submersão sobrejetora. Denote por $\mathcal{E}$ o espaço étale dos germes de seções locais diferenciáveis de $\mathbf{q}$ munido da topologia de feixe e denote por $\bar{\mathbf{q}} : \mathcal{E} \rightarrow M$ a sua projeção canônica. Neste parágrafo vamos a enunciar alguns resultados que permitem traduzir resultados ou propriedades entre o feixe (i.e. seções locais de $\mathbf{q}$) e o correspondente espaço étale $\bar{\mathbf{q}} : \mathcal{E} \rightarrow M$. A primeira dessas propriedades surge imediatamente da definição de feixes. Na definição de um feixe¹ é exigida uma condição de “colagem”, i.e. se termos uma coleção de seções locais definidas sobre uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ da base M e essas seções locais coincidem nas interseções U_{ij} então elas colam para uma seção global. O seguinte lema é uma releitura do Teorema 1.3.1 do Capítulo 2 em [God73], e estabelece uma condição na qual seções locais definidas sobre uma cobertura fechada colam para uma seção global.

Lema A.1. *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma cobertura fechada de M localmente finita. Suponha que para cada $i \in I$ temos uma seção local $\sigma_i : M_i \rightarrow E$ de $\mathbf{q} : E \rightarrow M$ tal que para todo par $i, j \in I$ temos $\sigma_i = \sigma_j$ em M_{ij} . Então existe uma seção global $\sigma : M \rightarrow E$ satisfazendo $\sigma|_{M_i} = \sigma_i$, para todo $i \in I$.*

Demonstração. Definimos $\sigma : M \rightarrow E$ como $\sigma(x) = \sigma_i(x)$ quando $x \in M_i$. Como as σ_i ’s coincidem nas interseções M_{ij} então a aplicação σ está bem definida. Resta verificar que ela é diferenciável. Para isso, dado um subconjunto $\mathcal{O} \subset M$ denotamos por $I(\mathcal{O}) = \{i \in I : \mathcal{O} \cap M_i \neq \emptyset\}$; e em particular denotamos por $I(x) = I(\{x\})$. Note que se $x \in \mathcal{O}$ então $I(x) \subset I(\mathcal{O})$. O fato que a cobertura $\{M_i\}_{i \in I}$ seja fechada e localmente finita garante que para cada $x \in M$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}_x$ tal que $I(x) = I(\mathcal{O}_x)$. Logo $\sigma = \sigma_i$ em $\mathcal{O}_x$ e para qualquer $i \in I(x)$. Portanto σ é localmente diferenciável. $\square$

A seguinte proposição é uma releitura do teorema de extensão de seções de Godement, Teorema 3.3.1 em [God73], aplicada ao caso do espaço étale de germes de seções locais de $\mathbf{q} : E \rightarrow M$.

Proposição A.2. *Sejam $N \subset M$ uma subvariedade e $f : N \rightarrow \mathcal{E}$ uma seção contínua de $\bar{\mathbf{q}} : \mathcal{E} \rightarrow M$. Então existem uma vizinhança aberta $V \subset M$ de N e uma seção diferenciável*

¹Vide, por exemplo, a Seção 1.1.1 do Capítulo 2 em [God73].

$F : V \longrightarrow E$ de $\mathbf{q}$ satisfazendo

$$f(x) = \text{germ}_x(F) \quad ; \forall x \in N$$

Demonstração. Como a aplicação $\bar{\mathbf{q}}$ é um homeomorfismo local então para cada ponto em $\mathcal{E}$ ela admite “essencialmente” uma única seção local da forma $\text{germ}(\phi)$, onde ϕ é uma seção local diferenciável de $\mathbf{q}$. Dessa forma podemos afirmar que existe uma coleção de subconjuntos abertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de M tal que $N \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e para cada $i \in I$ existe uma seção $\phi_i : U_i \longrightarrow E$ de $\mathbf{q}$ satisfazendo $f = \text{germ}(\phi_i)$ em $N \cap U_i$. Sem perda de generalidade podemos supor que a coleção $\{U_i\}_{i \in I}$ é localmente finita, e pensar essa coleção como uma cobertura aberta da subvariedade aberta $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ de M . Agora, pelo Lema 41.6 em [Mun00], temos uma outra cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de X que é localmente finita e satisfaz $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada $i \in I$. Considere o seguinte conjunto

$$V = \left\{ x \in X : \text{germ}_x(\phi_i) = \text{germ}_x(\phi_j) \quad ; \forall i, j \in I(x) \right\}$$

onde $I(x) = \{i \in I : x \in \bar{V}_i\}$. Ora iremos verificar que

- $V \subset M$ é aberto: Como $\{\bar{V}_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura fechada e localmente finita de X então para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{O}_x$ satisfazendo $I(x) = I(\mathcal{O}_x)$, onde $I(\mathcal{O}_x) = \{i \in I : \mathcal{O}_x \cap \bar{V}_i \neq \emptyset\}$. Ainda por cima, como o conjunto $I(x)$ é finito podemos supor que para todo $i, j \in I(x)$ temos que $\phi_i = \phi_j$ em $\mathcal{O}_x$. Note que para qualquer $y \in \mathcal{O}_x$ temos $I(y) \subset I(x)$ e isso implica em

$$\text{germ}_y(\phi_i) = \text{germ}_y(\phi_j) \quad \forall i, j \in I(y)$$

Portanto $\mathcal{O}_x \subset V$.

- $N \subset V$: Seja $x \in N$, é claro que $f(x) = \text{germ}_x(\phi_i)$ para todo $i \in I(x)$. Portanto $x \in V$.

Ora, note que $\{V \cap \bar{V}_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura fechada e localmente finita de V e para cada $i \in I$ temos a seção local $\phi_i : V \cap \bar{V}_i \longrightarrow E$ de $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$, e essas seções locais coincidem nas interseções $(V \cap \bar{V}_i) \cap (V \cap \bar{V}_j)$. Pelo Lema A.1 elas colam para uma seção $F : V \longrightarrow E$. $\square$

Observação A.3. É claro que na obtenção da vizinhança V e da aplicação $F : V \longrightarrow E$ da proposição anterior temos feito algumas escolhas e portanto essa construção não é canonicamente associada à $f : N \longrightarrow \mathcal{E}$. Porém, ante outras possíveis escolhas aquilo que fica bem definido é o germe da aplicação F ao longo da subvariedade N .

O seguinte passo é estudar aplicações de uma outra variedade B em $\mathcal{E}$. Para isso considere a submersão $\text{id}_B \times \mathbf{q} : B \times E \longrightarrow B \times M$. Uma seção global desta submersão é equivalente a uma aplicação $F : B \times M \longrightarrow E$ que faz com que o seguinte diagrama seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} B \times M & \xrightarrow{F} & E \\ & \searrow \text{pr}_M & \swarrow \mathbf{q} \\ & M & \end{array}$$

Note que este diagrama comutativo equivale a dizer que, para cada $b \in B$, a aplicação $F_b : x \in M \longmapsto F(b, x) \in E$ é uma seção global de $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$. Mais geralmente, dada uma subvariedade

$N \subset B \times M$, uma seção de $\text{id}_B \times \mathbf{q} : B \times E \longrightarrow B \times M$ sobre N é equivalente a uma aplicação $F : N \longrightarrow E$ que faz com que o seguinte diagrama seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{F} & E \\ & \searrow & \swarrow \mathbf{q} \\ \text{pr}_M|_N & & M \end{array}$$

Denotaremos por $\mathcal{E}'$ o espaço étale de germes de seções locais de $B \times E \longrightarrow B \times M$. A seguinte proposição caracteriza aplicações de B em $\mathcal{E}$ e é uma consequência direta da Proposição A.2.

Proposição A.4. *Seja $\bar{f} : B \longrightarrow \mathcal{E}$ uma aplicação contínua. Então existem uma vizinhança $V \subset B \times M$ do gráfico de $f := \bar{\mathbf{q}} \circ \bar{f} : B \longrightarrow M$ e uma aplicação diferenciável $F : V \longrightarrow E$, tal que para cada $b \in B$ a aplicação $F_b : x \in V_b \longmapsto F(b, x) \in E$ é uma seção local de $\mathbf{q} : E \longrightarrow M$, e satisfazendo*

$$\bar{f}(b) = \text{germ}_{f(b)}(F_b) \quad ; \forall b \in B$$

Demonstração. Sabemos que para cada $b \in B$ existe uma seção local $\phi_b : V_b \longrightarrow E$ de $\mathbf{q}$ tal que

$$\bar{f}(b) = \text{germ}_{f(b)}(\phi_b)$$

Note que $f^{-1}(V_b) \times V_b$ é uma vizinhança de $(b, f(b))$ e sobre essa vizinhança temos definida a seção local $(b, x) \in f^{-1}(V_b) \times V_b \longmapsto \phi_b(x) \in E$ de $\text{id}_B \times \mathbf{q}$. Todas essas seções locais geram uma seção de $\mathcal{E}' \longrightarrow B \times M$ sobre $N_f = \{(b, f(b)) : b \in B\}$ o gráfico de f , essa seção é definida por

$$\bar{F}(b, f(b)) = \text{germ}_{(b, f(b))}(\phi_b)$$

Pela Proposição A.2 existem uma vizinhança $V \subset B \times M$ de N_f e uma seção $F : V \longrightarrow E$ de $B \times E \longrightarrow B \times M$ tal que $\bar{F} = \text{germ}(F)$ em N_f . Então para cada $b \in B$ temos

$$\text{germ}_{(b, f(b))}(\phi_b) = \text{germ}_{(b, f(b))}(F)$$

e isso implica em $\bar{f}(b) = \text{germ}_{f(b)}(F_b); \forall b \in B$. □

Devemos notar, de forma semelhante ao dito na Observação A.3, que na proposição acima a vizinhança V e a aplicação $F : V \longrightarrow E$ não são canonicamente associadas à $\bar{f} : B \longrightarrow \mathcal{E}$. Contudo, a $\bar{f}$ determina apenas um germe de seção local de $B \times E \longrightarrow B \times M$ ao longo do gráfico da f .

Apêndice B

Formas básicas em uma submersão sobrejetora

Seja $\pi : P \longrightarrow B$ uma submersão sobrejetora. Temos a seguinte sequência exata de fibrados vetoriais sobre P

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(d\pi) \longrightarrow TP \xrightarrow{d\pi} \pi^*TB \longrightarrow 0$$

ou equivalentemente o seguinte diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} \frac{TP}{\text{Ker}(d\pi)} & \longrightarrow & TB \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Logo, de acordo com a Proposição 1.59 deve existir uma representação do grupoide de submersão $P \times_B P \rightrightarrows P$ em $\frac{TP}{\text{Ker}(d\pi)}$. De fato, essa representação é a representação normal $\eta : P \times_B P \curvearrowright \frac{TP}{\text{Ker}(d\pi)}$ do grupoide $P \times_B P$ sobre o fibrado normal à folheação definida pelas suas orbitas, isto é as fibras da submersão π .

Note que as biseções locais do grupoide $P \times_B P$ podem ser identificadas com as transformações locais de P que comutam com π , i.e.

$$\text{Bis}_{\text{loc}}(P \times_B P) = \left\{ \psi \in \text{Diff}_{\text{loc}}(P) : \pi \circ \psi = \pi \right\}$$

Com essa identificação temos que o grupoide de 1-jatos de $P \times_B P$ é

$$J^1(P \times_B P) = \left\{ \phi : T_p P \rightarrow T_q P : \pi(p) = \pi(q), \phi \text{ é isomorfismo linear}, d_q \pi \circ \phi = d_p \pi \right\}$$

Ora, podemos usar o grupoide $J^1(P \times_B P) \rightrightarrows P$ para “dessingularizar” a representação normal η . Isto é, seja $\phi : T_p P \rightarrow T_q P$ um elemento em $J^1(P \times_B P)$, então podemos escrever

$$\begin{array}{ccc} \eta^{(q,p)} : \frac{T_p P}{\text{Ker}(d_p \pi)} & \longrightarrow & \frac{T_q P}{\text{Ker}(d_q \pi)} \\ [v] & \longmapsto & [\phi \cdot v] \end{array}$$

e pode-se verificar que esta expressão não depende da escolha do elemento $\phi \in J^1(P \times_B P)$ que projeta para o elemento $(q, p) \in P \times_B P$.

Seja $E \rightarrow B$ um fibrado vetorial. Como π é uma submersão sobrejetora então $\pi^* : \Omega^\bullet(B, E) \rightarrow \Omega^\bullet(P, \pi^*E)$ é injetora. Dizemos que $\Omega \in \Omega^\bullet(P, \pi^*E)$ é básica se existe $\omega \in \Omega^\bullet(B, E)$ tal que $\Omega = \pi^*\omega$. Assim, uma pergunta a ser respondida é como identificar as formas básicas em $\Omega^\bullet(P, \pi^*E)$. Para isso introduzimos duas definições

- Dizemos que $\Omega \in \Omega^\bullet(P, \pi^*E)$ é horizontal se ela se anula em vetores no fibrado vertical $\text{Ker}(d\pi) \subset TP$.
- Dizemos que uma forma horizontal $\Omega \in \Omega^\bullet(P, \pi^*E)$ é $P \times_B P$ -invariante se para cada $(q, p) \in P \times_B P$ se verifica que

$$\Omega_q(\phi \cdot v_1, \dots, \phi \cdot v_k) = \Omega_p(v_1, \dots, v_k) \quad ; \forall v_i \in T_p P$$

para algum $\phi : T_p P \rightarrow T_q P$ em $J^1(P \times_B P)$.

Colocamos primeiro a definição de forma horizontal porque essa é uma condição necessária para que uma forma em $\Omega^\bullet(P, \pi^*E)$ seja básica. Deve ser evidente que, para cada $\omega \in \Omega^\bullet(B, E)$, $\pi^*\omega$ é horizontal e $P \times_B P$ -invariante. A seguinte proposição mostra a recíproca.

Proposição B.1. *Seja $\Omega \in \Omega^k(P, \pi^*E)$ uma forma horizontal e $P \times_B P$ -invariante. Então existe $\omega \in \Omega^k(B, E)$ tal que $\pi^*\omega = \Omega$.*

Demonstração. Como Ω é horizontal, ela induz um morfismo $\bar{\Omega} : \bigwedge^k \frac{TP}{\text{Ker}(d\pi)} \rightarrow \pi^*E$ definido por

$$\bar{\Omega}_p([v_1], \dots, [v_k]) = \Omega_p(v_1, \dots, v_k)$$

Como Ω é $P \times_B P$ -invariante, então o morfismo $\bar{\Omega}$ é $P \times_B P$ -equivariante, portanto desde o ponto de vista da Proposição 1.59 ele desce para um morfismo $\omega : \bigwedge^k TB \rightarrow E$ e temos o seguinte diagrama pullback.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bigwedge^k \frac{TP}{\text{Ker}(d\pi)} & \xrightarrow{\bar{\Omega}} & \pi^*E \\
 & \swarrow & \searrow & & \swarrow \\
 \bigwedge^k TB & \xrightarrow{\omega} & E & \xleftarrow{\quad} & P \\
 \searrow & & \swarrow & \nearrow & \searrow \\
 & B & & &
 \end{array}$$

π

Portanto $\omega = \pi^*\Omega$. □

Agora passamos ao caso de $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Seja $\pi : P \rightarrow B$ um $\mathcal{G}$ -fibrado principal com aplicação de momento $\mu : P \rightarrow M$ e ação $\theta : \mathcal{G} \times_M P \rightarrow P$. Sabemos que neste caso temos que os grupoides $\mathcal{G} \ltimes P \rightrightarrows P$ e $P \times_B P \rightrightarrows P$ são isomorfos. Seja $\mathcal{G} \curvearrowright E$ uma representação, então temos uma representação de $\mathcal{G} \ltimes P$ em μ^*E definida por $(g, p) \cdot (p, e) = (g \cdot p, g \cdot e)$. Gostaríamos de saber quando uma forma $\Omega \in \Omega^\bullet(P, \mu^*E)$ desce para uma forma em $\Omega^\bullet(B, P \otimes_{\mathcal{G}} E)$, ou seja

sob quais condições Ω é uma forma básica. É claro que a condição de ser horizontal segue sendo uma condição necessária para que Ω desça uma forma em B , assim falta traduzir a condição de ser $P \times_B P$ -invariante. Tal condição é a seguinte

- Dizemos que uma forma horizontal $\Omega \in \Omega^\bullet(P, \mu^*E)$ é $\mathcal{G}$ -invariante se para cada $(g, p) \in \mathcal{G} \ltimes P$ se verifica que

$$\Omega_{gp}(d_{(g,p)}\theta(\phi \cdot d_p\mu \cdot v_1, v_1), \dots, d_{(g,p)}\theta(\phi \cdot d_p\mu \cdot v_k, v_k)) = g \cdot \Omega_p(v_1, \dots, v_k) \quad ; \forall v_i \in T_pP$$

para algum $\phi : T_{\mathbf{s}(g)}M \longrightarrow T_g\mathcal{G}$ em $J^1\mathcal{G}$.

Note que a condição acima também pode escrever-se como

$$(\theta^*\Omega)_{(g,p)}((\phi \cdot d_p\mu \cdot v_1, v_1), \dots, (\phi \cdot d_p\mu \cdot v_k, v_k)) = g \cdot \Omega_p(v_1, \dots, v_k) \quad (\text{B.1})$$

Agora podemos traduzir a Proposição B.1 para o caso de $\mathcal{G}$ -fibrados principais. Assim obtemos

Proposição B.2. $\Omega \in \Omega^k(P, \mu^*E)$ é uma forma básica, i.e. existe única $\omega \in \Omega^k(B, P \otimes_{\mathcal{G}} E)$ satisfazendo $\Omega = \pi^*\omega$, se e somente se Ω é horizontal e $\mathcal{G}$ -invariante.

A prova dessa proposição é semelhante à prova da Proposição B.1. Finalmente gostaríamos apontar que podemos usar a Proposição B.2 para estudar formas sobre o quociente de ações livres e próprias de $\mathcal{G}$.

Referências Bibliográficas

- [AAC13] Camilo Arias Abad e Marius Crainic. Representations up to homotopy and Bott’s spectral sequence for Lie groupoids. *Adv. Math.*, 248:416–452, 2013. [85](#)
- [Ada93] M. Adachi. *Embeddings and immersions*, volume 124 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. Translated from the 1984 Japanese original by Kiki Hudson. [52](#)
- [BCW⁺04] Henrique Bursztyn, Marius Crainic, Alan Weinstein, Chenchang Zhu et al. Integration of twisted dirac brackets. *Duke Mathematical Journal*, 123(3):549–607, 2004. [72](#)
- [BL70] J. Buffet e J. Lor. Une construction d’un universal pour une classe assez large de Γ -structures. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270:A640–A642, 1970. [22](#)
- [Bla13] Anthony D. Blaom. The infinitesimalization and reconstruction of locally homogeneous manifolds. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 9:Paper 074, 19, 2013. [87](#)
- [Bla16] Anthony D. Blaom. Cartan connections on Lie groupoids and their integrability. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 12:Paper No. 114, 26, 2016. [85](#), [86](#)
- [BLM16] H. Bursztyn, H. Lima e E. Meinrenken. Splitting theorems for Poisson and related structures. *ArXiv e-prints*, Maio 2016. [44](#), [46](#)
- [Bot72] Raoul Bott. Lectures on characteristic classes and foliations. páginas 1–94. Lecture Notes in Math., Vol. 279, 1972. Notes by Lawrence Conlon, with two appendices by J. Stasheff. [56](#)
- [Bro62] E. Brown. Cohomology theories. *Ann. of Math. (2)*, 75:467–484, 1962. [22](#)
- [CF03] Marius Crainic e Rui Loja Fernandes. Integrability of Lie brackets. *Ann. of Math. (2)*, 157(2):575–620, 2003. [8](#)
- [CF05] M. Crainic e R. L. Fernandes. Secondary characteristic classes of Lie algebroids. Em *Quantum field theory and noncommutative geometry*, volume 662 of *Lecture Notes in Phys.*, páginas 157–176. Springer, Berlin, 2005. [69](#)
- [CF11] Marius Crainic e Rui Loja Fernandes. Lectures on integrability of Lie brackets. Em *Lectures on Poisson geometry*, volume 17 of *Geom. Topol. Monogr.*, páginas 1–107. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2011. [5](#), [56](#)
- [Cou90] Theodore James Courant. Dirac manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):631–661, 1990. [45](#)
- [CSS15] Marius Crainic, Maria Amelia Salazar e Ivan Struchiner. Multiplicative forms and Spencer operators. *Math. Z.*, 279(3-4):939–979, 2015. [85](#)

- [dH13] Matias L. del Hoyo. Lie groupoids and their orbispaces. *Port. Math.*, 70(2):161–209, 2013. [31](#)
- [DLPR12] Lance D. Drager, Jeffrey M. Lee, Efton Park e Ken Richardson. Smooth distributions are finitely generated. *Ann. Global Anal. Geom.*, 41(3):357–369, 2012. [43](#)
- [Dol95] A. Dold. *Lectures on algebraic topology*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1972 edition. [23](#)
- [Ehr48] Ch. Ehresmann. Sur les variétés plongées dans une variété différentiable. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 226:1879–1880, 1948. [52](#)
- [ER44] Ch. Ehresmann e G. Reeb. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuellement différentiable V_n . *C. R. Acad. Sci. Paris*, 218:955–957, 1944. [1](#)
- [Gei03] H. Geiges. h -principles and flexibility in geometry. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 164(779):viii+58, 2003. [52](#)
- [GG73] M. Golubitsky e V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. [46](#), [47](#)
- [God73] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973. Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. [35](#), [89](#)
- [God91] Claude Godbillon. *Feuilletages*, volume 98 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. Études géométriques. [Geometric studies], With a preface by G. Reeb. [41](#)
- [Gol10] William M. Goldman. Locally homogeneous geometric manifolds. Em *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, páginas 717–744. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010. [87](#)
- [Gro69] M. L. Gromov. Stable mappings of foliations into manifolds. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 33:707–734, 1969. [1](#), [52](#)
- [Gro86] Mikhael Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. [52](#)
- [Hae58] André Haefliger. Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides. *Comment. Math. Helv.*, 32:248–329, 1958. [1](#), [54](#)
- [Hae70] A. Haefliger. Feuilletages sur les variétés ouvertes. *Topology*, 9:183–194, 1970. [1](#), [22](#), [41](#)
- [Hae71a] A. Haefliger. Homotopy and integrability. Em *Manifolds—Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 197, páginas 133–163. Springer, Berlin, 1971. [1](#), [2](#), [56](#), [68](#), [81](#), [83](#)
- [Hae71b] A. Haefliger. Lectures on the theorem of Gromov. Em *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970)*, páginas 128–141. Lecture Notes in Math., Vol. 209. Springer, Berlin, 1971. [52](#)
- [Hae84] André Haefliger. Groupoides d'holonomie et classifiants. *Astérisque*, (116):70–97, 1984. Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982). [54](#)

- [Hir59] M. W. Hirsch. Immersions of manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:242–276, 1959. [52](#)
- [Hus94] D. Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edição, 1994. [22](#), [24](#), [26](#)
- [Law77] H. Blaine Lawson, Jr. *The quantitative theory of foliations*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1977. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Washington University, St. Louis, Mo., January 6–10, 1975, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 27. [41](#)
- [Lee13] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edição, 2013. [42](#)
- [Mac05] Kirill C. H. Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, volume 213 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. [5](#), [6](#), [29](#)
- [Mil56] J. Milnor. Construction of universal bundles. II. *Ann. of Math. (2)*, 63:430–436, 1956. [22](#)
- [Mil09] J. Milnor. Foliations and foliated vector bundles. Em *Collected papers of John Milnor. IV - Homotopy, homology and manifolds*, Edited by John McCleary, páginas 279–320. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. [41](#)
- [MM03] I. Moerdijk e J. Mrčun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. [5](#), [27](#), [30](#), [55](#), [80](#), [83](#)
- [Mol72] Pierre Molino. Feuilletages et classes caractéristiques. *Sympos. math.* 10 (1971/1972), 199–209 (1972)., 1972. [79](#)
- [Mun00] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000. [90](#)
- [Phi67] A. Phillips. Submersions of open manifolds. *Topology*, 6:171–206, 1967. [1](#), [52](#)
- [Phi70] A. Phillips. Smooth maps transverse to a foliation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:792–797, 1970. [1](#), [52](#)
- [Poe71] V. Poenaru. Homotopy theory and differentiable singularities. Em *Manifolds–Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 197, páginas 106–132. Springer, Berlin, 1971. [52](#)
- [Pop92] Paul Popescu. On the geometry of relative tangent spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 37(8):727–733, 1992. [43](#)
- [Sal13] Maria A. Salazar. Pfaffian groupoids. *PhD Thesis, Utrecht University*, Junho 2013. [33](#), [69](#), [72](#)
- [Sau89] D. J. Saunders. *The geometry of jet bundles*, volume 142 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. [46](#)
- [Ser06] J. P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition. [34](#)

- [Sha97] R. W. Sharpe. *Differential geometry*, volume 166 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program, With a foreword by S. S. Chern. 86
- [Sma59] S. Smale. The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces. *Ann. of Math. (2)*, 69:327–344, 1959. 52
- [Sma63] S. Smale. A survey of some recent developments in differential topology. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:131–145, 1963. 52
- [Spr05] D. Spring. The golden age of immersion theory in topology: 1959–1973. A mathematical survey from a historical perspective. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42(2):163–180, 2005. 52
- [tD08] T. tom Dieck. *Algebraic topology*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. 22
- [Thu74] William Thurston. The theory of foliations of codimension greater than one. *Comment. Math. Helv.*, 49:214–231, 1974. 1, 41
- [Thu76] W. P. Thurston. Existence of codimension-one foliations. *Ann. of Math. (2)*, 104(2):249–268, 1976. 1, 41
- [Vai74] Izu Vaisman. Remarks about differential operators on foliate manifolds. *An. Şti. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi Sect. I a Mat. (N.S.)*, 20(2):327–350, 1974. 79
- [Wei87] Alan Weinstein. Symplectic groupoids and poisson manifolds. *Bulletin of the American mathematical Society*, 16(1):101–104, 1987. 72

Índice Remissivo

- $\mathcal{G}$ -fibrado
  - principal, [11](#)
  - enumerável, [23](#)
  - topológico, [19](#)
  - unitário, [12](#)
- $\mathcal{G}$ -fibrados principais homotópicos, [25](#)
- $\mathcal{G}$ -homotopia, [15](#)
- $\mathcal{G}$ -morfismo, [15](#)
  - classificante, [26](#)
- ação, [10](#)
- algebroide de Lie, [8](#)
- aplicação
  - classificante, [26](#)
  - de divisão, [12](#)
  - de momento, [10](#)
- atlas de $\mathcal{G}$ -fibrado principal, [13](#)
- biseção, [32](#)
  - global, [32](#)
  - local, [32](#)
  - horizontal, [37](#)
- cociclo de Haefliger, [13](#)
- epimorfismo classificante, [81](#)
- fibrado ancorado
  - associado, [60](#)
  - modelo, [58](#)
- fibrado vetorial ancorado, [43](#)
- grupoide, [5](#)
  - de Lie, [6](#)
  - topológico, [19](#)
  - transitivo, [6](#)
- morfismo
  - de fibrados vetoriais ancorados, [43](#)
  - de grupoides, [6](#)
  - transversal classificante, [66](#)
- pseudogrupo
  - clássico, [33](#)
  - generalizado, [33](#)
- representação, [11](#)
- transformação local, [32](#)