**Cohomologia de Feixes em
Estruturas O-Minimais**

Jonas Renan Moreira Gomes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Bianconi

São Paulo, junho de 2018

Cohomologia de feixes em Estruturas O-minimais

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/06/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Vinícius Cifú Lopes - UFABC
- Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio - UNICAMP

Agradecimentos

Há de se agradecer a muitas pessoas pelo apoio continuado através dos tantos meses compondo o processo de escrita de uma dissertação em Matemática e a tantas outras que contribuíram para que tal processo se iniciasse.

Primeiro, agradeço a minha família: A meus avós que, apesar dos poucos anos de estudo, sempre priorizaram minha educação e lutaram para que eu tivesse acesso àquela instrução que lhes foi negada; a minha mãe por tantos e tão longos sacrifícios e por ter me ensinado a valorizar minha educação e o trabalho árduo e digno; a meu tio, que me mostrou o caminho do meio e o conhecimento antigo; ao Guilherme Milani, que sempre me estimulou com todo amor que um pai motiva um filho.

Agradeço aos meus primeiros mestres: a Gustavo Miragaia, que me ensinou que a aparência e a essência das coisas não se confundem; a Carlos Soares (o Peixe), que me mostrou a beleza do método dedutivo e o prazer da análise aprofundada e meticulosa; a Edgard Fernandes, que me fez companhia pelas bordas do pensamento e mostrou todo um mundo desconhecido; a Zé Maria, que desde i^i me levou às conclusões de todas as minhas indagações, não importando quão longo o caminho.

Agradeço aos matemáticos que me acolheram tão bem na capital e na USP: a Fernanda Cardona, que me iniciou e orientou como estudante e pessoa; a Lucia Junqueira, que me ensinou a pensar como um matemático; ao meu orientador Ricardo Bianconi pelo apoio, pela paciência e pela sensibilidade na escolha de um tema ideal; ao Odilon Luciano, grande mestre, amigo e artista, frequente inspiração na busca do pensamento mais elegante.

Agradeço ainda a três guardiões: a Michel Gaspar, que me acompanhou, inspirou e iluminou quando as coisas pareciam escuras; a Cecília de Arruda, que sempre me incentivou e que gentilmente me cedeu horários preciosos para minhas empreitadas acadêmicas; a Gabriella, que esteve ao meu lado em todos os momentos e foi a força para muitos dos meus passos.

Resumo

Este trabalho estuda a demonstração de existência de uma teoria de cohomologia em estruturas o-minimais arbitrárias, conforme o trabalho de Edmundo, Jones e Peatfield.

Palavras-chave: estrutura o-minimal, cohomologia de feixes.

Abstract

This work studies the proof of the existence of sheaf cohomology theory in arbitrary o-minimal structures, following the work of Edmundo, Jones and Peatfield.

Keywords: o-minimal structures, sheaf cohomology.

Sumário

Lista de Abreviaturas	ix
Lista de Símbolos	xi
Prefácio	xiv
1 Estruturas O-Minimais	1
1.1 Topologia Moderada	2
1.2 Tipos em Estruturas O-minimais	3
2 Espaços Espectrais	7
2.1 Espaços Espectrais	7
2.2 Dimensão de Krull	8
3 O Espectro O-Minimal	11
3.1 O Espectro	11
3.2 Especializações, Retrações e Pontos Fechados	14
3.3 Espectro de uma função definível	18
4 Feixes em Conjuntos Definíveis	21
4.1 Categoria dos Conjuntos Definíveis	21
5 Cohomologia de Feixes em Estruturas O-Minimais	27
5.1 Mudança de Base e Teorema de Vietoris-Biegler	30
5.2 Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod	31
5.3 Conclusões	34
Apêndice	35
A Lógica e Teoria de Modelos	37
A.1 Teoria de Modelos	37
A.1.1 Estruturas e Linguagens	37
A.1.2 Modelos e Teorias	40
A.1.3 Tipos	42
B Topologia	45
B.0.1 Axiomas de Separação	45

C	Categorias e Feixes	47
C.1	Categorias	47
C.1.1	Construções e Categorias Relevantes	48
C.2	Feixes	49
C.2.1	Imagem direta e Imagem Inversa de Feixes	54
	Referências Bibliográficas	57
	Índice Remissivo	59

Lista de Abreviaturas

DLO (Ordens Lineares Densas sem Extremos - *Dense Linear Order without endpoint*)

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Números inteiros não negativos
$\mathbb{R}$	Números reais
ϕ_A	Fórmula que define o conjunto A
$cl(A)$	Fecho topológico do conjunto A
$S_k^{\mathcal{N}}(A)$	Conjunto dos k -tipos (completos) sobre $A \subset N$

Prefácio

Sobre a nomenclatura

Esse é um trabalho acadêmico de matemática e, no espírito de contribuição e formação de uma literatura matemática lusófona, decidi traduzir todos os termos em língua estrangeira, mesmo quando não havia um consenso quanto a essa tradução. Quando ausente tal consenso, traduzi o mais fielmente possível.

Capítulo 1

Estruturas O-Minimais

O-minimalidade é a área analítica de teoria de Modelos que estuda estruturas linearmente ordenadas e densas $\mathcal{N} = (N, <, \dots)$, onde os conjuntos definíveis $D \subset N$ são uniões finitas de intervalos (com extremos em $N \cup \{-\infty, \infty\}$) e pontos. Um conjunto $A \subset N^k$ é dito definível se existe uma fórmula ϕ_A com k -variáveis livres na linguagem de $\mathcal{N}$, expandida com as constantes retiradas do domínio N , em que os elementos de A são precisamente aqueles que satisfazem ϕ_A . Consulte o Apêndice A para um resumo da Teoria dos Modelos necessária para esta dissertação.

O-minimalidade pode ser vista como uma generalização de geometria semialgébrica, uma vez que um corpo real fechado satisfaz a condição de O-minimalidade e os conjuntos definíveis nessas estruturas são, pelo teorema de Tarski-Seidenberg, precisamente os conjuntos semialgébricos. Generaliza também a chamada geometria subanalítica global e é vista como uma formalização da noção de topologia moderada (*topologie modérée*) de Grothendieck.

O desenvolvimento da teoria O-minimal remonta às investigações lógicas acerca do corpo ordenado dos números reais acrescido do símbolo de função exponencial. No artigo [VdD84], van den Dries nota que os conjuntos definíveis em N^k (para uma estrutura com domínio $N \subset \mathbb{R}$) compartilham muitas das propriedades geométrico-topológicas de conjuntos semialgébricos, como finitude de componentes conexas. Outros fenômenos relacionados à finitude podem ser deduzidos da condição o-minimal e muitos dos comportamentos ditos patológicos são eliminados numa topologia descrita como *moderada*.

No caso dos corpos reais fechados, realiza-se o estudo da geometria dos conjuntos semialgébricos e das funções contínuas semialgébricas (aquelas cujo gráfico é um conjunto semialgébrico), ou seja, o estudo da categoria SA . Analogamente, para estruturas O-minimais, podemos estudar a geometria dos espaços definíveis ligados por funções definíveis. Esse tipo de investigação é frutífera porque se aplica não só a estruturas clássicas o-minimais como $\overline{\mathbb{R}}_{an}$ (adicionando-se funções analíticas), $\overline{\mathbb{R}}_{exp}$ (adicionando-se uma função exponencial não restrita), mas também diversas outras estruturas, já que o-minimalidade é preservada em equivalências elementares (Cf. [KPS86]). Esse processo é análogo à passagem que os algebristas fazem entre $\mathbb{R}$ e um corpo real fechado arbitrário, passando a modelos não-standard nessa teoria.

Pode-se distinguir dois caminhos distintos no estudo de estruturas o-minimais. O primeiro caminho é o do desenvolvimento da geometria o-minimal partindo-se dos axiomas e o segundo é o da descoberta de novas classes de estruturas que obedecem aos axiomas O-minimais. O presente trabalho está firmemente posicionado na primeira categoria.

As maiores aplicações dessa visão modelo-teórica de geometria subanalítica incluem, por um

lado, um entendimento do comportamento no infinito de classes importantes de conjuntos subanalíticos (Cf. [Wil96]) e, por outro, a primeira demonstração irrestrita da conjectura de André-Oort em um cenário específico de Geometria Algébrica (Cf. [Pil11]), na qual um dos principais componentes da demonstração é um resultado de contagem diofantina devido a J.Pila e Alex Wilkie.

1.1 Topologia Moderada

Sobre *moderação* da topologia O-minimal, podemos observar resultados como:

Teorema 1.1. (*Teorema da Monotocidade*) *Seja $f: (a, b) \rightarrow N$ uma função definível¹. Então existe uma partição $P = \{a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = b\}$ de (a, b) tal que $f|_{(a_i, a_{i+1})}$ é contínua e também ou constante ou estritamente monótona.*

Esse teorema pode ser expandido com o uso de células para as dimensões superiores, assim como no caso semi-algébrico. Uma célula em N^k de dimensão m é definida indutivamente (sobre k): em N , as células de dimensão zero são os pontos e as de dimensão 1 são os intervalos abertos. Se C é uma n -célula (célula de dimensão n) em N^k , então o gráfico de uma função definível e contínua de C em N é n -célula em N^{k+1} . Se f e g são funções definíveis e contínuas de C em N , com $f < g$, então o conjunto dos pontos (x, y) , com x em C e $f(x) < y < g(x)$ formam uma $(n+1)$ -célula em N^{k+1} .

Teorema 1.2. (*Teorema da Decomposição Celular*) *Se $A \subset N^k$ é um conjunto definível, então existe uma decomposição de N^k em células² compatível com A . Se $f: A \rightarrow N$ é uma função contínua definível, existe uma decomposição de N^k em células, compatível com A , tal que, para cada célula C nessa decomposição, $f|_C$ é contínua.*

Demonstração. Conferir [VdD98, 2.11 p.52] □

A decomposição celular é suficiente para provar o resultado supramencionado de finitude das componentes conexas, mas, para o nosso trabalho, a próxima proposição será suficiente.

Proposição 1.3. *Seja $A \subset M^n$ um conjunto definível, então existe um natural n e conjuntos U_i e F_i para $1 \leq i \leq n$ tais que $A = \bigcup_{i \leq n} U_i \cap F_i$, U_i, F_i são definíveis e respectivamente abertos e fechados de M^n .*

Demonstração. Segue do fato de que toda célula é aberta em seu fecho [VdD98, p. 51]. □

O teorema da decomposição celular é talvez o mais importante da teoria o-minimal. As células também permitem a definição de um conceito moderado de dimensão:

Definição 1. Se $A \subset N^k$ é um conjunto definível não vazio, a dimensão (o-minimal) de A é definida por:

$$\dim(A) = \max\{\dim C : C \text{ é uma célula e } C \subset A\}$$

Enquanto que

$$\dim(\emptyset) = -\infty$$

¹Uma função é definível se, e somente se, seu gráfico é definível. Consulte o Apêndice A para a definição de Conjunto Definível.

²Uma decomposição celular de X é dita compatível com $Y \subset X$ se toda célula C_i dessa partição é disjunta de Y ou está contida em Y .

Esse conceito de dimensão é moderado graças às seguintes proposições:

Proposição 1.4. *Seja $f: D \rightarrow N^k$ uma função definível. Então $\dim(D) \geq \dim f(D)$ e $\dim(D) = \dim(f(D))$ quando f é injetora.*

Demonstração. Item 3, (1.6) de [VdD98, p. 66]. □

Note que na proposição anterior não precisamos sequer da hipótese de f ser contínua.

Proposição 1.5. *Se D é um conjunto definível, $\dim(\text{cl}(D) \setminus D) < \dim(D)$.*

Demonstração. Corolário 1.9 de [VdD98, p. 68]. □

As duas proposições anteriores combinadas mostram que a dimensão o-minimal comporta-se de fato como uma dimensão. Uma invariante definível mais sutil, mas também muito útil, é a característica de Euler.

Apesar da moderação da topologia, é importante reduzir alguns conceitos apenas a conjuntos definíveis. Da topologia geral sabemos que todo conjunto conexo com a topologia da ordem satisfaz a propriedade do supremo. No artigo [KPS86], os autores mostram que todo um anel ordenado o-minimal é, na verdade, um corpo real fechado. Esses resultados indicam que a noção de conexidade clássica será frutífera somente no caso em que o domínio é $\mathbb{R}$, o que limita o conceito de conexidade nesses espaços. Esse problema (espaços totalmente desconexos) também nos leva a redefinir normalidade de uma forma mais adequada ao nosso cenário. Nesse espírito, definimos:

Definição 2. Se C é um conjunto definível, dizemos que é definivelmente conexo se C não pode ser escrito como a união de dois conjuntos abertos definíveis e disjuntos.

De forma análoga definimos um conjunto definivelmente normal:

Definição 3. Se C é um conjunto definível, dizemos que é definivelmente normal se todo par disjunto de conjuntos fechados definíveis possuem vizinhanças abertas definíveis e disjuntas.

1.2 Tipos em Estruturas O-minimais

O espaço dos ultrafiltros sobre a álgebra de Boole dos conjuntos definíveis de uma estrutura o-minimal desempenhará um papel crucial em todo o restante do trabalho e, para estabelecermos os fatos básicos sobre esses espaços, provaremos abaixo algumas propriedades básicas sobre os tipos (como são conhecidos esses ultrafiltros em teoria dos modelos) nesses espaços e introduziremos um conceito de dimensão (que se mostrará equivalente à dimensão o-minimal). Todos os resultados foram indicados em [EJP06]. Para mais detalhes sobre Tipos, consulte o Apêndice A.

Seja $\mathcal{N} = (N, <, \dots)$ uma estrutura o-minimal arbitrária e p um 1-tipo sobre N . Como toda $\phi \in p$ define um conjunto $S = \{x \in N \mid \phi(x)\}$, então toda ϕ é equivalente a $\bigvee_{i=1}^n \phi_i$ onde cada ϕ_i define um intervalo ou um ponto. Da mesma forma que feito em [Mar06, Exemplo 4.1.12], classificamos todos os 1-tipos possíveis. Para isso, considere os conjuntos $L_p = \{a \in N : (a < x) \in p\}$ e $U_p = \{a \in N : (x < a) \in p\}$.

No caso referenciado a teoria possui eliminação de quantificadores, que não é o caso para teorias o-minimais, mas perceba que para dois tipos não principais: se $p \neq q$, então existe $\phi \in p$ e que $\phi \notin q$, com ϕ sendo a união finita de pontos e intervalos. Como o tipo é não-principal, podemos

desconsiderar os pontos. Logo, para algum $a, b \in N$, devemos ter $(a < x < b) \in p$ e $(a < x) \notin q$ ou $(x < b) \notin q$ (caso contrário teríamos $(a < x < b) \in q$ e eles conteriam exatamente as mesmas fórmulas). Assim $U_p \neq U_q$ ou $L_p \neq L_q$ e, portanto, podemos analisar os 1-tipos através dos conjuntos U_p e L_p .

Proposição 1.6. *Se $\mathcal{N}$ é uma estrutura o-minimal e se $p \in S_1^{\mathcal{N}}(N)$, então p necessariamente cai em uma das categorias abaixo:*

1. $p = tp(a/N)$ com $a \in N$
2. p é do tipo de ∞ ou $-\infty$
3. p é definido sobre um elemento transcendente em N (transcendente como em não definível)
4. p está infinitesimalmente acima ou abaixo de algum elemento de N , representado por a^+ ou a^- respectivamente.

Definição 4 (Dimensão de um Tipo). Se $\mathcal{N}$ é uma estrutura o-minimal e se $p \in S_m^{\mathcal{N}}(N)$, definimos

$$\dim(p) = \min\{\dim(A) : \phi_A \in p\}$$

Proposição 1.7. *Se $\mathcal{N}$ é uma estrutura o-minimal e se $p \in S_m^{\mathcal{N}}(N)$ for um m -tipo sobre N com $\dim(p) \leq 1$, então p tem as seguintes possibilidades:*

1. $p = tp(\vec{a}/N)$ com $\vec{a} \in N^m$
2. p é do tipo ∞ ou $-\infty$ em uma de suas coordenadas
3. p é definido sobre um elemento transcendente em uma de suas coordenadas.
4. p é do tipo a^+ ou a^- para algum $a \in N$ em uma de suas coordenadas

Demonstração. Se $(\vec{x} = \vec{a}) \in p$ então a primeira condição está satisfeita. Caso contrário, como $\dim(p) = 1$ existe A definível tal que $\phi_A \in p$ que contém C uma 1-célula. Por [VdD98, 2.7,p.51] sabemos que C é homeomorfo a $I \subset N$ intervalo (já que as 1-células em N são precisamente os intervalos), por uma projeção π . Usando a mesma técnica de [Mar06, Exemplo 4.1.12], seja $L_p = \{a \in N : \phi_A \in p \text{ para } A = \pi^{-1}[(a, +\infty)]\}$ e $U_p = \{a \in N : \phi_A \in p \text{ para } A = \pi^{-1}[(-\infty, a)]\}$. Se $a \in U_p$ e $b \in L_p$ então como $p \cup Th(\mathcal{N})$ é consistente $\pi^{-1}[(b, +\infty)] \cap \pi^{-1}[(-\infty, a)] = \pi^{-1}[(b, a)] \neq \emptyset$ e portanto $b < a$, ou seja, p determina um corte em $\pi(N^m)$.

Ainda, se q é outro m -tipo sobre N com $\dim(q) = 1$ seja π_q a projeção obtida do homeomorfismo da 1-célula contida em algum definível A determinado por $\phi_a \in q$. Se $\pi_q \neq \pi$ então $\pi(A) = \{r\}$ e assim $U_q = (r, \infty)$ enquanto $L_q = (-\infty, r)$. Se fosse o caso de $U_q = U_p$ e $L_q = L_p$ então teríamos $\pi(C) = \{r\}$ para C a 1-célula usada para definir a dimensão de p . Mas nesse caso teríamos $C = \{\vec{r}\}$ para algum $\vec{r} \in N^m$ e portanto p seria principal. A mesma consideração se aplica caso q seja um tipo principal.

Supondo então que $\pi_q = \pi$. Seja $A \subset N^m$ tal que $\phi_A \in p \setminus q$, assim $A' = A \cap C$ e temos $\phi_{A'} \in p \setminus q$. Ainda, se $B \subset A'$, então $\phi_B \notin q$. Como $\pi(A') \subset N$ é definível, deve ser a união finita de intervalos. Seja $J \subset \pi(A')$ e $C' = C \cap \pi^{-1}[J]$. Como $C' \subset A'$, então $\phi_{C'} \notin q$. Assim, como $\{x : x > a, \forall a \in J\} \subset U_p$ e $\{x : x < a, \forall a \in J\} \subset L_p$, se $U_p = U_q$, devemos ter $L_p \neq L_q$, caso contrário $\phi_{C'} \in q$.

Isso prova que os tipos são determinados por U_p e L_p e o resultado segue. □

Capítulo 2

Espaços Espectrais

A geometria semialgébrica trata das propriedades espaciais dos conjuntos formados por combinações booleanas (união, intersecção e complementação) de soluções de sistemas finitos de equações e inequações polinomiais sobre um corpo real fechado (corpos que possuem as mesmas propriedades de primeira ordem que o corpo dos números reais $\mathbb{R}$), isso é, combinação de conjuntos da forma

$$\{x \in R^k : P(x) = 0\} \text{ ou } \{x \in R^k : G(x) > 0\}$$

para R um corpo real fechado e P e G elementos de $R[x_1, \dots, x_k]$. Por construção, a classe de tais conjuntos é fechada por operações booleanas e, pelo Teorema de Tarski–Seidenberg, também por projeções. Esse teorema é utilizado na demonstração da eliminação de quantificadores para a teoria dos corpos reais fechados e é uma das inspirações para a definição de teoria o-minimal.

Uma das principais ferramentas para o estudo da geometria no contexto semialgébrico é a teoria de cohomologia desenvolvida por Delfs e Knebusch. Para o desenvolvimento dessa teoria é necessário trabalhar sobre os sítios (que generalizam o conceito de cobertura da topologia) semialgébricos ao invés de espaços topológicos. A primeira dificuldade para estudar esses sítios aparece na demonstração de que a categoria $\text{Sh}_{SA}(X)$ dos feixes sobre sítios semialgébricos em X é uma categoria abeliana com objetos injetores o suficiente. Essa dificuldade é superada definindo um funtor entre a categoria dos espaços semialgébricos e a categoria dos subconjuntos construtíveis de $\text{Spec}_r(K[X_1, \dots, X_n])$, onde $\text{Spec}_r(A)$ denota o espectro real de A .

Os espaços $\text{Spec}_r(A)$ e seus subconjuntos construtíveis são espaços topológicos no sentido usual e para esses espaços podemos desenvolver uma teoria satisfatória para feixes sobre espaços topológicos e transferir, através da associação funtorial, os resultados para a categoria dos espaços semialgébricos. No trabalho [EJP06] essa associação entre SA e $\text{Spec}_r(SA)$ é estendida a um espaço o-minimal arbitrário e $\text{Spec}_r(SA)$ é substituído por $\widehat{\text{DTOP}}$, o espaço dos m -tipos que, assim como $\text{Spec}_r(SA)$, é um espaço espectral. Neste capítulo, vamos estabelecer os fatos básicos sobre esses espaços, que serão utilizados posteriormente.

2.1 Espaços Espectrais

Uma nota sobre nomenclatura: na literatura de geometria algébrica, o termo *quasi-compacto* (*quasi-compact*) é usado para referir-se à condição que é usualmente chamada de compacidade (Def. 38, p. 45). Isso se deve a razões históricas, uma vez que alguns textos clássicos de topologia

(e.g. [Eng89]) usam *compacto* para se referir a compacto Hausdorff.

Definição 5. Seja X um espaço topológico. Dados $x, y \in X$, dizemos que x é uma especialização de y ou que y é uma generalização de x se, e somente se, $x \in cl(\{y\})$

É claro que se o espaço em questão for também T_1 então x é especialização de y se, e somente se, $x = y$, já que em todo espaço T_1 temos $cl(\{y\}) = \{y\}$. Vale notar também que a relação

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ é uma especialização de } y$$

forma uma pré-ordem no espaço topológico.

Definição 6 (Espaço Irredutível). Seja X um espaço topológico. Dizemos que X não vazio é irredutível se X não pode ser escrito como a união disjunta de dois fechados próprios de X .

Alternativamente, poderíamos ter definido espaço irredutível como aquele em que todo aberto não vazio é denso. Caso houvesse um aberto não vazio e não denso O , então $O \cap U = \emptyset$ para algum outro aberto não vazio U e daí $(X \setminus O) \cup (X \setminus U) = X$, o que mostra que tais espaços são (exceto em casos triviais) não Hausdorff.

Definição 7 (Espaço Espectral). Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um espaço espectral se:

1. X é T_0 e compacto;
2. A topologia de X possui uma base de abertos compactos fechados por intersecção finita;
3. Todo conjunto fechado irredutível de X é o fecho de um único ponto.

Hochster ([Hoc69]) mostrou que todo espaço espectral é homeomorfo ao espectro primo de algum anel comutativo.

Todos os espaços finitos T_0 são espectrais. A base de abertos compactos gera a *topologia espectral* e combinações booleanas finitas de elementos dessa base são os conjuntos construtíveis de X . Esses conjuntos formam a base de uma outra topologia no conjunto X , a topologia dos construtíveis ou Topologia de Stone.

2.2 Dimensão de Krull

Definição 8. Seja X um espaço topológico e $U \subset X$. Uma *cadeia de especializações* de tamanho k em U é uma sequência $C = (a_n)_{0 \leq n \leq k}$ de elementos de U tal que $a_n \neq a_{n+1}$ e a_{n+1} é uma especialização de a_n .

Definição 9. Seja X um espaço topológico e $U \subset X$, a dimensão de Krull¹ de U é definida por:

$$\dim_{\text{Krull}}(U) = \max\{k : U \text{ possui uma cadeia de especializações de tamanho } k\}$$

caso esse máximo exista. Caso contrário, diremos que $\dim_{\text{Krull}}(U) = \infty$. A dimensão de Krull do conjunto vazio é definida como $-\infty$.

¹Em álgebra comutativa, a dimensão de Krull de um anel é definida como o supremo do tamanho das cadeias de ideais primos.

Com a definição anterior está claro que todo espaço topológico T_1 possui dimensão de Krull igual a zero. Nossas próximas proposições nos garantem que a dimensão de Krull se comporta como uma dimensão.

Proposição 2.1. *Se X e Y são espaços topológicos, $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua e injetora, o $\dim_{\text{Krull}}(X) \leq \dim_{\text{Krull}}(Y)$*

Demonstração. Suponha que existam pontos $x_0, x_1, \dots, x_k$ em X com a propriedade que x_l é uma especialização de x_{l+1} (para $l + 1 < k$). Então, a sequência $f(x_0), \dots, f(x_k)$ em Y é tal que: $f(x_l) \neq f(x_{l+1})$ (já que f é injetora) e também $f(x_l) \in f(\text{cl}(\{x_{l+1}\})) \subset \text{cl}(f(x_{l+1}))$. Portanto, $f(x_0), \dots, f(x_k)$ é uma sequência em Y em que cada ponto está na especialização do ponto subsequente. Portanto, $\dim_{\text{Krull}}(X) \leq \dim_{\text{Krull}}(Y)$. $\square$

Corolário 2.2. A dimensão de Krull é um invariante topológico.

Corolário 2.3. Se $X \subset Y$ então $\dim_{\text{Krull}}(X) \leq \dim_{\text{Krull}}(Y)$.

Proposição 2.4. *Se $C \subset \tilde{X}$ é construtível, então C é fechado se, e somente se, C é estável por especializações.*

Demonstração. Se C é fechado e se $\alpha \in C$ é tal que $\beta \in \text{cl}\{\alpha\}$, então $\beta \in C$ já que $\overline{\{\alpha\}} \subset C$.

Por outro lado, se C é estável por especializações, seja $\alpha \in \overline{C}$. Para todo aberto básico $\tilde{O}$ que contém α temos $\tilde{O} \cap C \neq \emptyset$. Se $\mathcal{O}$ for a coleção de todos os abertos básicos que contém α , então $\bigcap \mathcal{O} \cap C \neq \emptyset$ pela compacidade na topologia de Stone. Seja então $\beta \in \bigcap \mathcal{O} \cap C$. Se K é fechado e $\beta \in K$, então necessariamente $\alpha \in K$, caso contrário teríamos $\tilde{X} \setminus K \in \mathcal{O}$. Assim, $\alpha \in \overline{\{\beta\}}$ e, portanto, $\alpha \in C$ e, logo, C é fechado. $\square$

Proposição 2.5. *Um espaço espectral é normal se, e somente se, todo ponto tem uma especialização fechada única.*

Demonstração. Suponha que X é um espaço espectral, seja $p \in X$ e sejam α, β especializações fechadas de p . Se $\alpha \neq \beta$, então existem abertos disjuntos U e V que os separam (i.e., $\alpha \in U$, $\beta \in V$). Mas, como $p \in U \cap V$, isso é absurdo.

Por outro lado, se cada ponto tem uma especialização fechada única, sejam F e G dois fechados distintos. Se todo aberto construtível U que contém F e todo aberto construtível V que contém G se intersectam, então necessariamente essas famílias de abertos têm a propriedade da intersecção finita (já que as famílias são fechadas por intersecção finita). Como esses conjuntos são compactos na topologia construtível e o espaço base também é compacto, isso implica que existe $x \in X$ em sua intersecção. Mas, então, $\text{cl}(\{x\})$ intersecta F e G , absurdo. Assim, existem abertos U e V construtíveis que separam F e G . $\square$

Se E é um espaço espectral normal, a Prop. 2.5 nos garante que cada ponto possui uma única especialização fechada. Seja $E^c \subset E$ o subespaço dos pontos fechados de E , vamos definir:

Definição 10. Seja E um espaço espectral normal. A retração $\rho: E \rightarrow E^c$ é definida como a função que associa cada $p \in E$ sua única especialização fechada $\rho(p)$.

Segue então o seguinte corolário:

Corolário 2.6. Se E é um espaço espectral normal, então E^c é um espaço Hausdorff compacto e ρ é uma retração contínua e fechada e a imagem de cada construtível de E é um fechado de E^c .

Demonstração. Dados $a, b \in E^c$ temos que $\{a\}$ e $\{b\}$ são fechados de E e, como E é normal, existem abertos U e V de E que separam a e b . Logo, os abertos $U' = U \cap E^c$ e $V' = V \cap E^c$ de E^c separam a e b e, portanto, E^c é Hausdorff.

Além disso, E^c é compacto: Se $E^c \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ para U_i aberto, então dado $x \in E$ temos $\rho(x) \in E^c$ e, portanto, existe $i \in I$ tal que $\rho(x) \in U_i$. Mas, como $\rho(x)$ é uma especialização de x , isso implica $x \in U_i$ e, portanto, $E = \bigcup_{i \in I} U_i$. Como E é compacto existe uma subfamília finita $I' \subset I$ com $E = \bigcup_{i \in I'} U_i$ e, portanto, E^c está na mesma união.

Se U é aberto de E e $x \in \rho^{-1}[U \cap E^c]$ pelo lema B.1 (p.45), temos um aberto O de E com $\rho(x) \in O \subset cl(O) \subset U$. Mas, se $y \in O$, então $\rho(y) \in cl(\{y\}) \subset cl(O) \subset U$ e, portanto, $x \in O \subset \rho^{-1}[U \cap E^c]$.

ρ é fechada: Vamos provar que se $F \subset E$ é fechado, então $\rho(F) = F \cap E^c$. Tome $x \in F \cap E^c$, então $\rho(x) = x \in \rho(F)$. Por outro lado, se $x \in \rho(F)$, então $x = \rho(z)$ com $z \in F$. Mas, nesse caso, $x \in cl(\{z\}) \subset F$ e, logo, $x \in F \cap E^c$.

Se C é construtível e $y \in E^c \setminus \rho[C]$, então $y \notin C$ e, portanto, existe U aberto de $\tilde{X}$ com $y \in U \subset \tilde{X} \setminus C$. Passando para O aberto com $y \in O \subset cl(O) \subset U$, temos que para todo $z \in O$, $\rho(z) \in cl(O)$ e, portanto, $y \in O \subset E^c \setminus \rho(C)$, logo $\rho(C)$ é fechado. $\square$

Capítulo 3

O Espectro O-Minimal

Neste capítulo, trabalharemos em uma $\mathcal{L}$ -estrutura o-minimal arbitrária $\mathcal{N} = (N, <, \dots)$ e em um subconjunto definível $X \subset N^m$.

Quando nos referirmos a uma topologia em N^m , será a topologia produto, sendo que a topologia em N é a topologia induzida pela ordem. A topologia em X , por sua vez, será a topologia induzida de subespaço.

3.1 O Espectro

Definição 11. Se $X \subset N^m$ é um conjunto definível, o espaço de tipos de X é o conjunto

$$\tilde{X} = \{p \in S_m(\mathcal{N}) \mid \phi_X \in p\}$$

onde ϕ_X é uma $\mathcal{L}$ -fórmula em n -variáveis livres tal que $X = \{\bar{a} \in N^m \mid \mathcal{N} \models \phi_X(\bar{a})\}$

Fixado X definível, o operador til é dado por $\tilde{\cdot}: \text{def}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{X})$, $U \mapsto \{p \in \tilde{X} \mid \phi_U \in p\}$

onde ϕ_U é alguma fórmula que define U .

Essa definição só faz sentido caso a escolha de ϕ_X seja irrelevante. Vamos provar tal fato na próxima proposição:

Proposição 3.1. Se ϕ e ψ são duas fórmulas com n variáveis livres tais que $\{\bar{a} \in N^m \mid \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})\} = \{\bar{a} \in N^m \mid \mathcal{N} \models \psi(\bar{a})\}$ então dado $p \in S_m(\mathcal{N})$ temos que $\phi \in p$ se, e somente se, $\psi \in p$.

Demonstração 3.2. Observamos que $\forall \bar{x}(\phi \Leftrightarrow \psi) \in Th(\mathcal{N})$, então $\phi \Leftrightarrow \psi \in p$, caso contrário $p \cup Th(\mathcal{N})$ não seria finitamente satisfazível. Como p é maximal se $\psi \notin p$ então $\neg\psi \in p$ e, portanto, $p \cup Th(\mathcal{N})$ não seria finitamente satisfazível.

A mesma observação se aplica para a definição do operador $\tilde{\cdot}$.

Proposição 3.3. O operador $\sim$ goza das seguintes propriedades:

1. $\tilde{\emptyset} = \emptyset$
2. $\tilde{X} \setminus \tilde{A} = \widetilde{(X \setminus A)}$
3. $\widetilde{(A \cup B)} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$
4. $\widetilde{(A \cap B)} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$

Demonstração 3.4. 1. Para uma fórmula ϕ definindo $\emptyset$, teremos $\mathcal{N} \models \forall x(\neg\phi)$ e, portanto, $\phi \notin p$ para todo $p \in S_m(\mathcal{N})$.

2. $p \in \tilde{X} \setminus \tilde{A}$ implica que para toda ϕ definindo A , $\phi \notin p$ e, portanto, como p é completo $\neg\phi \in p$. Ainda se ψ for uma fórmula definindo X , como p é maximal $\psi \wedge \neg\phi \in p$, que é uma fórmula que define $X \setminus A$. De forma contrária, se $p \in \widetilde{(X \setminus A)}$, então se ψ é uma fórmula que define A , então $\psi \in p$ implica que existe um modelo $\mathcal{U}$ que satisfaz ψ e $\phi \wedge \neg\psi$ onde ϕ é uma fórmula que define X .

3. Se ϕ for uma fórmula que define A e ψ uma fórmula que define B , então $\phi \vee \psi$ é uma fórmula que define $A \cup B$. E, se $\phi \vee \psi \in p$, com $p \in S_m(\mathcal{N})$, então $\psi \notin p$ implica $\neg\psi \in p$ e, caso $\phi \notin p$, teríamos um modelo $\mathcal{U}$ de $Th_N(\mathcal{N}) \cup p$ que satisfaz $\mathcal{U} \models \neg(\phi \vee \psi)$ e $\mathcal{U} \models \phi \vee \psi$. Da mesma forma, se $\phi \in p$ ou se $\psi \in p$, então se $\phi \vee \psi \notin p$, teríamos um modelo que satisfaz $\phi \vee \psi$ e $\neg(\phi \vee \psi)$.

4. Segue dos anteriores.

Proposição 3.5. *Seja $\mathcal{B} = \{\tilde{U} \mid U \subset X \text{ é aberto de } X \text{ e definível}\}$. Então $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em $\tilde{X}$.*

Demonstração 3.6. Como $\tilde{X} \in \mathcal{B}$, a proposição segue da Prop. 3.3.

Definição 12. Chamamos de *espectro O-minimal* de X o espaço $\tilde{X}$ com a topologia descrita na Prop 3.5. Chamamos essa topologia de topologia espectral.

Definição 13. Seja B a menor álgebra de Boole em $\mathcal{P}(\tilde{X})$ contendo a base da topologia espectral (Prop 3.5). Chamamos os conjuntos de B de conjuntos construtíveis.

Sob a perspectiva da definição anterior e da Prop. 3.3, vemos que o operador $\sim$ é um isomorfismo¹ de álgebras de Boole.

Nota 3.7. Se tomarmos em $\tilde{X}$ o conjunto $Im(\sim)$ como base para uma topologia, teremos o tradicional espaço de Stone, que é um espaço Hausdorff, compacto e totalmente desconexo [Mar06, Lemma 4.1.8, p. 119]. Doravante, no entanto, consideraremos $\tilde{X}$ sempre munido da topologia espectral, salvo menção contrária.

O espectro o-minimal é o análogo ao espectro real da geometria semialgébrica real. Mais precisamente: se K é um corpo real fechado, então os n tipos sobre K coincidem com o espectro real de $K[X_1, \dots, X_n]$

Proposição 3.8. *Seja $\Gamma: X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $x \mapsto tp(x/N)$, então Γ é uma função injetiva e induz um homeomorfismo em sua imagem.*

Demonstração 3.9. Γ é injetiva: Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Logo, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $\pi_i(x) \neq \pi_i(y)$. Seja ϕ a $\mathcal{L}_N$ -fórmula $\bigwedge_{j=1}^m (v_j = v_j) \wedge (v_i = c)$ onde $c = \pi_i(x)$. Então $\phi \in \Gamma(x) \setminus \Gamma(y)$.

Γ é contínua: Se $\tilde{U}$ é aberto básico de $\tilde{X}$, então $x \in U$ implica que $\mathcal{N} \models \phi[x]$ onde ϕ é uma fórmula que define U e, portanto, $\Gamma[U] \subset \tilde{U}$. Assim, $U = \Gamma^{-1}[\Gamma[U]]$ e, portanto, $U \subset \Gamma^{-1}[\tilde{U}]$. Para a inclusão contrária, basta notar que se $\Gamma(x) \in \tilde{U}$, então $U \in tp(x/N)$ e, portanto, $x \in U$.

Γ é homeomorfismo sobre sua imagem: Segue da igualdade $\tilde{U} \cap \Gamma[X] = \Gamma[U]$.

¹Tecnicamente, precisamos restringir o contradomínio.

Proposição 3.10. *O operador $\sim$ comuta com o operador de interior e o operador de fecho.*

Demonstração 3.11. Se A é definível e $\tilde{A}$ é aberto, temos $\tilde{A} = \bigcup_{\lambda \in L} \tilde{V}_\lambda$ para alguma família de abertos (V_λ) de X . Se $x \in V_\lambda$, então $\Gamma(x) \in \tilde{V}_\lambda \subset \tilde{A}$ e, portanto, $x \in A$ o que mostra que $V_\lambda \subset A$. Se $x \in A \setminus \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$, teríamos $tp(x/N) \in \tilde{A}$ e $tp(x/N) \notin \tilde{V}_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Assim, $A = \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$. Logo, A é aberto se, e somente se, $\tilde{A}$ é aberto. Da mesma forma, A é fechado se, e somente se, $\tilde{A}$ é fechado.

Como $\widetilde{\text{int}(A)}$ é aberto, está contido em $\text{int}(\tilde{A})$. Se $W \subset \tilde{A}$ é aberto, supondo $W = \bigcup_{l \in L} \tilde{U}_l$ com $\{U_l\}_{l \in L}$ abertos de X , temos que cada $U_l \subset A$ e, portanto, $U_l \subset \text{int}(A)$. Assim, $\tilde{U}_l \subset \widetilde{\text{int}(A)}$ para todo l e, portanto, $W \subset \widetilde{\text{int}(A)}$.

Proposição 3.12. *$A \subset X$ é definivelmente conexo se, e somente se, $\tilde{A}$ é conexo.*

Demonstração 3.13. Se A definível não for conexo, então isso determina uma cisão para $\tilde{A}$ por abertos básicos de $\tilde{X}$. Se $\tilde{A}$ não for conexo, então existem abertos V e W de $\tilde{X}$ tais que $V \cap W = \emptyset$ e $\tilde{A} = V \cup W$. Se $V = \bigcup_{l \in L} \tilde{V}_l$ e $W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{W}_\lambda$ e se $V' = \bigcup_{l \in L} V_l$, $W' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$, temos que: como $\tilde{W}_\lambda \cap \tilde{V}_l = \emptyset$, pela proposição 3.3 $W_\lambda \cap V_l = \emptyset$ para todos λ e l e, portanto, $V' \cap W' = \emptyset$. Além disso, V' e W' são abertos. Agora, se $x \in A$, então $\Gamma(x) \in \tilde{A}$ e, portanto, $\Gamma(x) \in \tilde{W}_\lambda$ para algum λ ou $\Gamma(x) \in \tilde{V}_l$ para algum l . De qualquer forma, $x \in V' \cup W'$. Por outro lado, se $x \in V' \cup W'$, então $x \in W_\lambda$ ou $x \in V_l$ para algum λ ou algum l e, portanto, $\Gamma(x) \in V \cup W$ e assim $x \in A$.

Proposição 3.14. *Se U (respectivamente F) é aberto (respectivamente fechado) de X , então $\tilde{U}$ (respectivamente $\tilde{F}$) é o maior (respectivamente menor) aberto (respectivamente fechado) de $\tilde{X}$ cuja intersecção com $\Gamma(X)$ é U (respectivamente F).*

Demonstração 3.15. Suponha que O aberto de $\tilde{X}$ é tal que $O \cap \Gamma(X) = \Gamma(U)$. Como $O = \bigcup_{l \in L} \tilde{V}_l$, onde V_l é um aberto de X para cada $l \in L$. Isso implica que $\bigcup_{l \in L} \Gamma(V_l) = \Gamma(U)$. Portanto, $V_l \subset U$ para todo $l \in L$, $\tilde{V}_l \subset \tilde{U}$ e, assim, $O \subset \tilde{U}$. O resultado para fechados obtém-se através de complementação.

Proposição 3.16. *Seja X um conjunto definível. O espaço $\tilde{X}$ é um espaço T_0 , compacto e espectral.*

Demonstração. Dados $a, b \in \tilde{X}$, suponha que para todo U aberto de X , se ϕ_U for uma fórmula definindo U , então $\phi_U \in a \Leftrightarrow \phi_U \in b$. Tomando complementos, segue que para todo F fechado de X , se ϕ_F define F , então $\phi_F \in a \Leftrightarrow \phi_F \in b$. Da Proposição 1.3 segue que $\phi \in a \Leftrightarrow \phi \in b$ e, portanto, $a = b$. Assim, se $a \neq b$ existe U aberto de X tal que (sem perda de generalidade) $\phi_U \in a \setminus b$. Logo $a \in \tilde{U}$, enquanto $b \notin \tilde{U}$ e, logo, $\tilde{X}$ é T_0 .

Uma vez que a topologia espectral é mais fraca que a topologia de $\tilde{X}$ como espaço de Stone e esse é compacto, então $\tilde{X}$ é compacto. Além disso, os abertos básicos de $\tilde{X}$ são também compactos pelo mesmo motivo e são fechados por intersecção finita.

Seja agora F um subconjunto fechado irreduzível de $\tilde{X}$. Considere a coleção $\Phi = \{\phi_K\}$ das fórmulas que definem os $K \subset X$ fechados tais que $F \subset \tilde{K}$. Considere a coleção $\Phi_2 = \{\phi_O\}$ das fórmulas que definem abertos $O \subset X$ tais que $F \cap O \neq \emptyset$. Se $\bigcap_{\phi_O \in \Phi_2} \tilde{O} \cap \bigcap_{\phi_K \in \Phi} \tilde{K} = \emptyset$, então $K \cap \bigcap_{\phi_O \in \Phi_2} \tilde{O} = \emptyset$. Na topologia de Stone, cada $\tilde{O}$ é fechado e, portanto, por compacidade existe $O_1, \dots, O_n$ tais que $K \cap O_1 \cap \dots \cap O_n = \emptyset$. Mas, então, $K = (K \cap (X \setminus O_1)) \cup \dots \cup (K \cap (X \setminus O_n))$. Como $O_i \cap K \neq \emptyset$, então $K \neq K_i = K \cap (X \setminus O_i)$ e cada K_i é um fechado próprio de K , contrariando sua

irredutibilidade. Portanto, $\Phi \cup \Phi_2$ é consistente e assim determina um tipo p . Vamos agora mostrar que $F = \overline{\{p\}}$.

Como $F = \bigcap_{\alpha \in A} \tilde{F}_\alpha$ (F pode ser escrito como intersecção de fechados básicos), se $p \notin F$, então $p \notin \tilde{F}_\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Absurdo. Assim como F é fechado $\overline{\{p\}} \subset F$.

Da mesma forma, se $x \in F$ e K é fechado tal que $p \in K$, então $K \supset F$, caso contrário teríamos $F \cap (X \setminus K) \neq \emptyset$ e p não seria consistente. Logo $x \in K$ e logo $x \in \overline{\{p\}}$.

Ainda, o tipo é unicamente determinado, já que se x, y em $\tilde{X}$ são tais que $x \neq y$, então como $\tilde{X}$ é T_0 , temos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. $\square$

3.2 Especializações, Retrações e Pontos Fechados

Seguindo a Proposição 1.6, vamos estudar agora quais tipos são pontos fechados ou abertos em $\tilde{X}$.

Proposição 3.17. *Se $X \subset N$ é um subconjunto definível, os únicos pontos não fechados em $\tilde{X}$ são os tipos definidos infinitesimalmente acima ou abaixo de um ponto.*

Demonstração. Seja p um 1-tipo com parâmetros em N . Se $p = \Gamma[a]$, tome $O = X \setminus \{a\}$, então $X \setminus \{p\} = \tilde{O}$ e, logo, p é fechado. Se p é do tipo ∞ , então se $q \neq p$ existe $a \in N$ tal que $(x < a) \in q$. Se $O = (-\infty, a)$ $p \notin \tilde{O}$ enquanto $q \in \tilde{O}$. Similarmente para p do tipo $-\infty$.

Se p é um corte sobre um elemento transcendente em N , seja $q \neq p$. Vamos mostrar que $(U_q \cap L_p) \cup (U_p \cap L_q) \neq \emptyset$. Se $U_q \cap L_p = \emptyset$, então para todo $a \in U_q$ devemos ter $a \notin L_p$ e, como o corte é transcendente, $a \in U_p$, o que mostra que $U_q \subset U_p$. Se $U_q \neq U_p$ seja $b \in U_p \setminus U_q$. Como $b \notin U_q$ temos as opções $(x = b) \in q$ ou $(b < x) \in q$. Se $(b < x) \in q$, então $b \in U_p \cap L_q$. Se $(b = x) \in q$, então, se para todo $a < b$ temos $(a < x) \in L_p$, p seria $tp(b/N)$. Portanto, existe $a < b$ tal que $(x < a) \in U_p$ e $a \in U_p \cap L_q$. Vamos mostrar que o caso $U_p = U_q$ não pode ocorrer. Suponha que $U_p = U_q$ e $L_p \neq L_q$. Se $x \in L_q$, então $x \notin U_q$ e, portanto, $x \notin U_p$ e, como o corte é transcendente, $x \in L_p$, o que mostra que $L_q \subset L_p$. Seja $a \in L_p \setminus L_q$. A única opção possível é que $(x = a) \in q$ e, portanto, se $b > a$ temos $b \in U_q = U_p$ e q seria $tp(a/N)$, absurdo. Portanto, $(U_q \cap L_p) \cup (U_p \cap L_q) \neq \emptyset$.

Tome $b \in (U_q \cap L_p) \cup (U_p \cap L_q)$, então podemos definir um aberto $O = (-\infty, b)$ se a primeira intersecção é não vazia ou (b, ∞) caso seja a segunda) de forma que $q \in \tilde{O}$ e $p \notin \tilde{O}$.

Suponha agora que $p = a^+$, ou seja, $(b < x) \in p$ para $b \leq a$ enquanto $(x < b) \in p$ para $b > a$. É suficiente demonstrarmos para os abertos básicos que se O é aberto de X tal que $a \in O$, então $p \in \tilde{O}$. Como O é aberto de X e $a \in O$, pela definição da topologia em N temos algum intervalo (c, d) com $a \in (c, d)$ tal que $(c, d) \subset O$. Como $a < d$, então $(a < x < d) \in p$, e como $(a, d) \subset O$ e p é maximal consistente, $\phi_O \in p$ e, portanto, $p \in \tilde{O}$ e, portanto, $\Gamma[a] \in \overline{\{p\}}$. Analogamente para $p = a^-$. $\square$

Corolário 3.18. Se $a \in N$, então $\overline{\{a^+\}} = \{\Gamma[a], a^+\}$ e $\overline{\{a^-\}} = \{\Gamma[a], a^-\}$.

Demonstração. Já provamos na proposição anterior que $\{\Gamma[a], a^+\} \subset \overline{\{a^+\}}$. Seja $q \notin \{\Gamma[a], a^+\}$ algum 1-tipo sobre N . Vamos mostrar que $q \notin \overline{\{a^+\}}$. Primeiro, se $q = a^-$, então se $U = (-\infty, a)$ temos $q \in \tilde{U}$ enquanto $a^+ \notin \tilde{U}$. Se q for algum outro 1-tipo, então ou $U_q \subset U_p$ ou $L_q \subset L_p$ e sabemos que a inclusão é estrita. Vamos supor que $U_q \subset U_p$. Seja $b \in U_p \setminus U_q$ e $b > a$, que deve existir, caso contrário $U_q = (a, \infty)$. Então, se $O = (b, \infty)$, temos $q \in \tilde{O}$ enquanto $p \notin \tilde{O}$. De forma análoga para a^- . $\square$

Proposição 3.19. *Se $X \subset N^m$ é um conjunto definível e $p \in \tilde{X}$ tem dimensão 1, então p é fechado se, e somente se, p não está definido infinitesimalmente acima ou abaixo de um ponto em uma de suas coordenadas.*

Demonstração. Vamos usar a classificação da Prop. 1.7. Nas condições da proposição, seja p um tipo tal que $\dim(p) = 1$. Se $p = \Gamma[\vec{a}]$ escolha $U = N^m \setminus \{a\} \cap X$. Então U é aberto e $\alpha \in \tilde{U}$ se, e somente se, $(x \neq a) \in \alpha$, portanto, $\{p\} = \tilde{U} \setminus \tilde{X}$ é fechado.

Caso p não seja principal, vamos fixar C uma 1-célula tal que $p \in \tilde{C}$, π a projeção associada à célula (que a faz homeomorfa a um intervalo) e $1 \leq i \leq m$ a coordenada associada à essa projeção. Se $\text{box}(X) \subset \text{def}(X)$ for a coleção de todas as caixas (produto de intervalos) de X , a operação $\sigma': \text{box}(X) \rightarrow \text{box}(X)$ mapeia U a U' onde a i -ésima coordenada de U se transforma em $N \cap \pi(X)$.

Se $U_p = \emptyset$ (p é do tipo $+\infty$ em uma de suas coordenadas), considere a família de abertos $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}[(a, \infty)], a \in N\}$. Então $p \in \tilde{G}$ para todo $G \in \mathcal{F}$. Seja $c \in C$. Seja $\mathcal{C} \subset \text{box}(X)$ a coleção de todas as caixas em X que contém c . A coleção $\mathcal{O} = \{U' \cap F : U \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{F}\}$ é tal que: se $q \in \tilde{Y}$ para todo $Y \in \mathcal{O}$, então $q \in \tilde{C}'$ e, portanto, q tem no máximo dimensão 1. Se $\dim(q) = 1$, então $U_p = U_q$, $L_p = L_q = N$ e assim $p = q$ pela proposição 1.7. Se $\dim(q) = 0$, então q é um tipo principal, digamos $q = \Gamma[\vec{d}]$, mas, nesse caso, se $a < \pi(\vec{d})$ $q \notin \pi^{-1}[(a, \infty)]$ e assim $q \notin \tilde{Y}$ para todo $Y \in \mathcal{O}$. O caso para p do tipo $-\infty$ em uma de suas coordenadas é análogo.

Se p determina um corte transcendente em uma de suas coordenadas, seja $c \in C$ e $\mathcal{F} = \{C' : C \in \text{box}(X) \text{ e } c \in C\}$ e a família de abertos $\mathcal{O} = \{\pi^{-1}[(a, b)] : a \in L_p, b \in U_p\}$. A coleção $\mathcal{C} = \{F \cap O : O \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F}\}$ é tal que se $q \in \tilde{Y}$ para todo $Y \in \mathcal{C}$ e, portanto, $q \in \tilde{C}$, assim $\dim(q) = 0$ ou $\dim(q) = 1$. Se $\dim(q) = 0$, então $q = \Gamma[\vec{d}]$ é principal. Se $a = \pi(\vec{d})$, então $a \in U_p$ ou $a \in L_p$ e, portanto, $q \notin \pi^{-1}[I]$ onde I é um intervalo com a em um de seus extremos. Se $\dim(q) = 1$, então novamente podemos deduzir que $p = q$.

Se p determina um corte infinitesimal em i , suponha que $L_p = (-\infty, a]$ (p é do tipo a^+ na coordenada i - o caso a^- é análogo). Se $\vec{c} \in C$, considere $\vec{a}$ obtido de $\vec{c}$ pela substituição da coordenada i por a . Se U é caixa aberta de X que contém $\vec{a}$, então $a \in \pi(U)$, como $\pi(U)$ é aberto, existem $c, d \in N$ com $c < a < d$, $a \in (c, d) \subset \pi(U)$. Como $C \subset C'$, então $\phi_{C'} \in p$. Portanto, se $D = \pi^{-1}[(c, d)] \cap C'$, temos $\phi_D \in p$. Mas, como $D \subset U$, isso implica que $p \in \tilde{U}$, ou seja, se O é aberto que contém $\Gamma[\vec{a}]$, então O contém p . $\square$

Corolário 3.20. *Se p é um m -tipo de dimensão 1 não fechado sobre N e se $\vec{a}$ é o elemento definido como na demonstração da Prop. 3.19, então $\text{cl}(\{p\}) = \{p, \Gamma[\vec{a}]\}$.*

Demonstração. Usando as mesmas definições da proposição supracitada, suponha que a está definido infinitesimalmente acima de a na coordenada i . Considere $K = \text{cl}(C)$. Se $q \in \tilde{K}$, então q tem dimensão 1 ou q tem dimensão 0. Se $q \in \pi^{-1}[(r, \infty)]$ para todo $r \leq a$, então $(a, \infty) \subset U_q$. Se $a \in U_q$, então o aberto $V = \pi^{-1}[(a, \infty)]$ contém q e não contém p . Se $a \notin U_q$, a análise das possibilidades para tipos de dimensão 1 (Prop. 1.7) nos dá $q = \Gamma[\vec{a}]$ ou $q = p$. $\square$

Vamos provar agora que, sem alguns pré-requisitos, as especializações podem não formar uma cadeia e que a especialização fechada pode não ser única.

Exemplo 3.21. Seja $\mathcal{N} = (\mathbb{Q}, <)$ e considere $X = \mathbb{Q}^2$. Seja p em $\tilde{X}$ definido pelo par $< 0^-, 0^- >$, ou seja, p contém todas as fórmulas $(c < x < d \wedge e < y < f)$ para $c < 0 \leq d$ e $e < 0 \leq f$. Perceba que se O for aberto de $\mathbb{Q}^2$ tal que $\tilde{O}$ contém $< 0^-, 0^- >$, então $0 \in \pi_2(O)$, e, da mesma forma,

como argumentamos na demonstração da proposição 3.17 (lembrando que a projeção é aberta), devemos ter $0 \in]c, d[\subset \pi_2(O)$ para algum $c < 0$. Como $(e < x < 0 \wedge c < y < 0) \in p$ (para todo $e < 0$) isso implica que $p \in \tilde{O}$. Da mesma forma, $\langle 0, 0^- \rangle$ também é uma especialização de $\langle 0^-, 0^- \rangle$. Mas essas especializações não formam uma cadeia. Se $c < 0 < d$ e $e < 0 < f$, então se $O = (-\infty, 0) \times (e, f)$ e $U = (c, d) \times (-\infty, 0)$, então $\langle 0^-, 0 \rangle$ pertence a $\tilde{O}$ e não pertence a $\tilde{U}$, enquanto $\langle 0, 0^- \rangle$ pertence a $\tilde{U}$ e não pertence a $\tilde{O}$.

Exemplo 3.22. Usando a mesma estrutura do Exemplo 3.21 mas $X = \mathbb{Q}^2 \setminus \langle 0, 0 \rangle$, se $\alpha = \langle 0^-, 0^- \rangle$ pelo exemplo anterior sabemos que tanto $\langle 0^-, 0 \rangle$ quanto $\langle 0, 0^- \rangle$ são especializações de α . Além disso, se $p \in \tilde{Q}^2$ é um tipo e $p \in \overline{\{\langle 0^-, 0 \rangle\}}$, já provamos que $p \neq \langle 0, 0^- \rangle$, e, como $\tilde{Q}^2$ é T_0 , sabemos que $\langle 0^-, 0^- \rangle$ também não é especialização de $\langle 0^-, 0 \rangle$. Se $p = \Gamma[\langle 0, 0 \rangle]$, seja O aberto de $\mathbb{Q}^2$ que contém $\langle 0, 0 \rangle$. Então existe $U \subset O$, $U = (c, d) \times (e, f)$ com $c < 0 < d$ e $e < 0 < f$. Mas como $(c < x < 0 \wedge e < y < f) \in \langle 0^-, 0 \rangle$, devemos ter $\langle 0^-, 0 \rangle \in \tilde{U}$ e, portanto, $\langle 0, 0 \rangle$ é uma especialização de $\langle 0^-, 0 \rangle$.

Similarmente ao feito no Corolário 3.18, vamos mostrar que os únicos tipos $p \in \tilde{Q}^2$ que são especializações de $\langle 0^-, 0 \rangle$ são precisamente ele mesmo e $\langle 0, 0 \rangle$. Seja p algum outro tipo. Se p possui a fórmula $(x = x) \wedge (y = 0)$, p deve conter alguma fórmula do tipo $(x = d) \wedge (y = 0)$ para $d \neq 0$ ou $(x < d) \wedge (y = 0)$ para $d < 0$ ou ainda $(x > d) \wedge (y = 0)$ para $d > 0$ (caso contrário, p seria $\Gamma[\langle 0, 0 \rangle]$ ou $\langle 0^-, 0 \rangle$). Se p contém $(x = d) \wedge (y = 0)$ para $d \neq 0$, supondo $d > 0$ (o outro caso é análogo) podemos tomar o aberto $U = (\frac{d}{2}, \frac{3d}{2}) \times (-1, -1)$ e teremos $p \in \tilde{U}$, enquanto $\langle 0^-, 0 \rangle \notin \tilde{U}$. Nos demais casos, podemos tomar $(d, \infty) \times \mathbb{Q}$ ou $(-\infty, d) \times \mathbb{Q}$ como abertos tais que $p \in \tilde{U}$, mas $\langle 0^-, 0 \rangle \notin \tilde{U}$. Caso não possua a fórmula $y = 0$, então deve possuir $(x = x) \wedge (y > 0)$ ou $(x = x) \wedge (y < 0)$. Essas fórmulas também definem abertos como no caso anterior. Isso mostra que $\overline{\{\langle 0^-, 0 \rangle\}} = \{\Gamma[\langle 0, 0 \rangle], \langle 0^-, 0 \rangle\}$.

Mas em $\tilde{X}$ não existe o tipo associado a $\langle 0, 0 \rangle$ e, portanto, $\langle 0, 0^- \rangle$ e $\langle 0^-, 0 \rangle$ são tipos fechados. O que mostra que em $\tilde{X}$ temos $\langle 0^-, 0^- \rangle$ com duas especializações fechadas distintas.

Vamos encontrar condições sobre um conjunto definível qualquer X em uma estrutura o-minimal arbitrária para que cada elemento de X seja a generalização de apenas um ponto fechado.

Proposição 3.23. *Seja $X \subset N^m$ definível e $\alpha \in \tilde{X}$ um ponto que não é fechado. Então existe algum tipo fechado (i.e. um ponto fechado na topologia espectral) β que é uma especialização de α e, para todo $A \in \alpha \setminus \beta$, temos $fr(A) \in \beta$ (onde $fr(A)$ é a fronteira de A).*

Demonstração. Essa demonstração prossegue por indução na dimensão de α . Se $\dim(\alpha) = 1$, então pela Prop. 3.19 e o Corolário 3.20, ou α é fechado e nesse caso é sua única especialização fechada ou α é do tipo a^+ ou a^- em alguma coordenada. Nesse caso, a sua única especialização fechada é $\Gamma[\vec{a}]$ (cf. Cor. 3.20). Se $\phi_A \in \alpha \setminus \beta$, então $\pi(A) = (a, \infty)$ e, portanto, $fr(A) = \{\vec{a}\}$.

Se $\dim(\alpha) > 1$ e α é fechado, então como no caso unidimensional, α seria sua única especialização fechada. Suponha que α não é fechado. Se β for uma especialização de α distinta de α , tome A' tal que $\alpha \in \tilde{A}'$ mas $\beta \notin \tilde{A}'$ e A'' célula tal que $\alpha \in \tilde{A}''$ e $\dim(A'') = \dim(\alpha)$.

Considere $A = A' \cap A''$. Se $\beta \notin fr(A)$, então, como $V = N^k \setminus fr(A) = (N^k \setminus cl(A)) \cup A$ e como $U = N^k \setminus A$ são tais que ϕ_U e ϕ_V estão em β , devemos ter $\phi_{U \cap V} = \phi_U \wedge \phi_V \in \beta$, ou seja, $\beta \in \tilde{W}$ com $W = N^k \setminus cl(A)$. Mas como W é aberto e β é especialização de α , teríamos $\alpha \in W$, absurdo. Assim, $fr(A) \in \beta$ e, portanto, $\dim(\beta) \leq \dim(fr(A)) < \dim(A) \leq \dim(\alpha)$ e, por indução, β possui uma especialização fechada γ . Mas γ também é especialização de α . $\square$

Como o espectro o-minimal de um definível é sempre um espaço espectral, podemos trabalhar com a sua dimensão de Krull (Cf. Def. 9). O próximo resultado (indicado em [EJP06] e cuja demonstração segue as observações em [CC83]) nos garante que a dimensão de Krull do espectro de um espaço definível coincide com a sua dimensão no sentido o-minimal:

Proposição 3.24. *Se $X \subset N^m$ for um conjunto definível, então $\dim X = \dim_{\text{Krull}} \tilde{X}$*

Demonstração. Seja $C \subset X$ uma célula tal que $\dim C = \dim X$. Uma vez que C é homeomorfo a N^d , temos um homeomorfismo correspondente entre $\tilde{C}$ e $\tilde{N}^d$. Em $\tilde{N}^d$ considere a sequência de pontos $(x_n)_{1 \leq n \leq d}$ onde x_n é 0^- nas primeiras n coordenadas e 0 nas demais. Assim como fizemos no Ex. 3.22, x_n é uma especialização de x_{n+1} e, portanto, $d \leq \dim_{\text{Krull}}(\tilde{N}^d) = \dim_{\text{Krull}}(\tilde{C})$. Como $\tilde{C} \subset \tilde{X}$, $\dim X \leq \dim_{\text{Krull}}(\tilde{X})$. Por outro lado, se $\dim_{\text{Krull}} = d$, seguindo o espólio da demonstração do Lema 3.23, a sequência $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ é tal que $\dim x_i < \dim x_{i+1}$, de forma que $\dim x_d \geq d$. Assim, existe C uma célula de X e $x_d \in \tilde{C}$ e C tem dimensão d . Portanto, $\dim_{\text{Krull}} \tilde{X} \leq \dim X$. $\square$

Teorema 3.25. *Seja $X \subset N^k$ um conjunto definível. Então são equivalentes:*

- (1) $\tilde{X}$ é normal
- (2) X é definivelmente normal
- (3) Cada $x \in \tilde{X}$ tem uma única especialização fechada

Demonstração. Pelas Prop. 3.16 e Prop. 2.5, temos $(1) \Leftrightarrow (3)$. Vamos mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$.

Seja $X \subset N^k$ com $\tilde{X}$ normal e sejam F e G dois fechados definíveis de X . Pelo espólio da demonstração da Prop. 2.5, existem abertos construtíveis $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ que separam $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$. Então U e V são abertos definíveis disjuntos que separam F e G .

Para demonstrarmos $(2) \Rightarrow (3)$, seguiremos por indução na $\dim(X)$ da seguinte forma: mostraremos que se para todo X com $\dim(X) \leq m$ vale $(1)_m \Leftrightarrow (2)_m \Leftrightarrow (3)_m$ (onde $(i)_m$ é o enunciado i com a condição de $\dim(X) \leq m$), então $(2)_{m+1} \Rightarrow (3)_{m+1}$.

Vamos mostrar inicialmente que sempre vale $(3)_1$: Se $\dim(X) = 1$, então cada $x \in \tilde{X}$ tem uma única especialização fechada. Mas, se $\dim(X) = 1$, então o teorema da decomposição celular nos dá $X = \cup_{i=1}^n U_i$ onde cada U_i é uma célula e $\dim(U_i) \in \{0, 1\}$. Se $\alpha \in \tilde{X}$, então $\alpha \in \tilde{U}_i$ para um único i , que é definivelmente totalmente ordenado e, portanto, valem as classificações de tipo da Prop. 3.19 e o Corolário 3.20 e assim ou α é fechado ou α tem uma única especialização fechada.

Suponha agora que para todo $k \leq m$ vale $(i)_k \Leftrightarrow (j)_k$ para $i, j \in 1, 2, 3$. Vamos mostrar que $(2)_{m+1} \Rightarrow (3)_{m+1}$ por contradição.

Suponha que X é definivelmente normal e seja $\alpha \in \tilde{X}$ com duas especializações fechadas distintas β e γ . Seja $\tilde{A}'$ tal que $\alpha \in \tilde{A}'$ e $\dim A' = \dim(\alpha)$ e sejam B e C definíveis de X tais que $\phi_B \in \alpha \setminus \beta$ e $\phi_C \in \alpha \setminus \gamma$. Como α é maximal consistente, então $\alpha \in \tilde{B} \cap \tilde{C} \cap \tilde{A}'$. Seja A uma célula em $A' \cap B \cap C$. Como $\alpha \in \tilde{A}$, devemos ter $\dim(A) \geq \dim(\alpha)$, mas como $A \subset A'$ também $\dim(A) \leq \dim(A') = \dim(\alpha)$ e, portanto, $\dim(A) = \dim(\alpha)$. Ainda, $\phi_A \in \alpha \setminus \beta$, $\phi_A \in \alpha \setminus \gamma$. Pela Prop. 3.23, temos $\phi_{fr(A)} \in \beta \cap \gamma$. Mas $fr(A)$ é fechada definível e, portanto, $fr(A)$ é definivelmente normal. Como $\dim(fr(A)) \leq m$ em $fr(A)$ vale $(1)_m$ por indução. Sejam $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$ dois abertos construtíveis que separam β e γ em $fr(\tilde{A})$. Pelo Lema B.1 (p. 45), obtemos dois abertos construtíveis (se na demonstração do Lema pudermos tomar os abertos dados pela normalidade como construtíveis, então o aberto que a demonstração fornece também é construtível) W_β e W_γ com $\beta \in W_\beta \subset$

$cl(W_\beta) \subset \tilde{U}$ e $\gamma \in W_\gamma \subset cl(W_\gamma) \subset \tilde{V}$. Como W_β e W_γ são construtíveis, pela proposição 3.10 existem fechados de $fr(A)$, C_β e C_γ tais que $cl(W_\beta) = C_\beta$ e $cl(W_\gamma) = C_\gamma$. Como $fr(A)$ é fechado, C_β e C_γ são fechados de X e, portanto, existem abertos disjuntos V_β e V_γ que separam C_β e C_γ . Mas, $\beta \in V_\beta$ e $\gamma \in V_\gamma$ e, portanto, $\alpha \in V_\beta \cap V_\gamma$. Absurdo. Assim vale $(3)_{m+1}$ e a demonstração segue por indução. $\square$

Retomando o Ex. 3.22, vemos que ele falha na unicidade da especialização fechada justamente por não ser definivelmente normal (Cf. Prop 2.5). As retas $\{(x, 0), x \in \mathbb{Q}^*\}$ e $\{(0, y), y \in \mathbb{Q}^*\}$ são fechados definíveis que não podem ser separadas por abertos disjuntos.

Se X é um espaço definivelmente normal, segue da Prop. 3.25 que $\tilde{X}$ é normal, mas como $\tilde{X}$ é um espaço espectral, pela proposição 2.5, a cada $p \in \tilde{X}$ existe uma única especialização fechada $\rho(p)$.

Corolário 3.26. [Lema do Encolhimento] Seja X definivelmente normal, se $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ é uma cobertura por abertos de $\tilde{X}$, então existe uma cobertura de abertos construtíveis $\{W_i\}_{1 \leq i \leq n}$ com $cl(W_i) \subset U_i$.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução em n . Se $n = 1$, não há nada a mostrar. Dada uma cobertura $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de $\tilde{X}$, suponha que para $1 \leq i \leq m$, com $1 \leq m < n$, tenhamos construído W_i definíveis e abertos com $cl(W_i) \subset U_i$ tais que $\{W_1, \dots, W_m, U_{m+1}, \dots, U_n\}$ seja uma cobertura $\tilde{X}$. Então, os conjuntos $A = \tilde{X} \setminus U_{m+1}$ e $B = \tilde{X} \setminus (\bigcup_{i=1}^m W_i \cup \bigcup_{i=m+2}^n U_i)$ são fechados e disjuntos de $\tilde{X}$. Como X é definivelmente normal, o Teorema 3.25 nos garante que $\tilde{X}$ é normal e, portanto, existem abertos disjuntos O e W_{m+1} com $A \subset O$ e $B \subset W_{m+1}$. Ainda, como $cl(W_{m+1}) \subset X \setminus O \subset X \setminus A \subset U_{m+1}$ o resultado segue. $\square$

3.3 Espectro de uma função definível

Vamos definir a extensão de uma função do espaço para o seu espectro. Para tanto, precisamos da seguinte proposição:

Proposição 3.27. Se $f: X \rightarrow Y$ for uma função definível, então se $\alpha \in \tilde{X}$, $U = \{\phi_B | \alpha \in \widetilde{f^{-1}(B)}\} \in \tilde{Y}$.

Demonstração. Vamos provar que U é consistente: se $\phi_B, \phi_C \in U$, então $\alpha \in \widetilde{f^{-1}(B)} \cap \widetilde{f^{-1}(C)} = \widetilde{f^{-1}(B \cap C)}$ e, logo, U é finitamente satisfazível. Ainda, se $\phi_B \in U$ e $B \subset A$, então $\alpha \in \widetilde{f^{-1}(B)}$. Como $B \subset A$, então $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$ e, portanto, $\alpha \in \widetilde{f^{-1}(A)}$ e, logo, $\phi_A \in U$. Ainda, se $\phi_A \notin U$, então $\alpha \in \widetilde{f^{-1}(Y \setminus A)}$ e, logo, $\neg \phi_A \in U$. Assim, $U \in \tilde{Y}$. $\square$

Definição 14. Se $f: X \rightarrow Y$ for uma função definível, então existe uma única função $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ (chamada de espectro de f) definida por $\tilde{f}(\alpha) = \{\phi_B | \alpha \in \widetilde{f^{-1}(B)}\}$.

Segue diretamente da definição as seguintes propriedades:

Proposição 3.28. Se X e Y são conjuntos definíveis e $f: X \rightarrow Y$ é uma função definível

1. $\tilde{f}^{-1}(\tilde{B}) = \widetilde{f^{-1}(B)}$ para todo definível $B \subset Y$
2. $\tilde{f}(\tilde{A}) = \widetilde{f(A)}$ para todo definível $A \subset X$

Da Prop. 3.14 e das propriedades do espectro de uma função segue o próximo corolário:

Corolário 3.29. Se $f: X \rightarrow Y$ for definível, então f é contínua se, e somente se, $\tilde{f}$ for contínua.

A próxima proposição será necessária para provarmos nosso teorema de mudança de base.

Proposição 3.30. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função definível contínua, então $\tilde{f}^{-1}(\alpha)$ é compacto para todo $\alpha \in \tilde{Y}$.

Demonstração. Basta notar que $\tilde{f}^{-1}(\alpha) = \bigcap \{\widetilde{f^{-1}(B)} : \alpha \in \tilde{B}\}$. Na topologia dos construtíveis, $\widetilde{f^{-1}(B)}$ é compacto, já que nessa topologia o espaço é Hausdorff compacto e cada $\widetilde{f^{-1}(B)}$ é fechado. Sendo compacto na topologia dos construtíveis, também deve ser na topologia espectral, que possui menos abertos. $\square$

Capítulo 4

Feixes em Conjuntos Definíveis

Neste capítulo, vamos detalhar a construção de feixes sobre sítios de um conjunto definível. A necessidade de utilizar sítios ao invés de espaços topológicos advém do excesso de conjuntos abertos: na topologia herdada de N^k , os conjuntos definíveis são totalmente desconexos (exceto quando $N = \mathbb{R}$) e nunca são localmente compactos (com exceção dos conjuntos finitos).

Outro motivo para não utilizarmos a topologia herdada é porque as funções contínuas definíveis de X em N não formam um feixe sobre um conjunto definível X com essa topologia, mas tais funções de fato definem um feixe, denotado por $\mathcal{O}_X$, com relação ao sítio o-minimal DTOP_X .

No que se segue, $\mathcal{N}$ é uma estrutura O-minimal fixa, porém arbitrária.

4.1 Categoria dos Conjuntos Definíveis

Definição 15 (Categoria dos Definíveis). Dado $\mathcal{N}$, designaremos por $\text{DTOP}_{\mathcal{N}}$ (ou simplesmente DTOP) a categoria cujos objetos são os conjuntos definíveis em $\mathcal{N}$ (com parâmetro) e cujos morfismos são aplicações contínuas e definíveis.

Da mesma forma, designaremos por $\widetilde{\text{DTOP}}$ a categoria cujos objetos são os espectros de conjuntos definíveis (considerados apenas como conjuntos, como na definição 11) e cujos morfismos são os espectros de funções contínuas definíveis entre conjuntos definíveis.

Quando $\mathcal{N} = (N, <, 0, 1, +, \times)$ for um corpo real fechado, então DTOP é simplesmente SA , a categoria dos espaços semialgêbricos de N onde os morfismos são as funções contínuas e semialgêbricas ligando esses espaços (cf. [VdD98]).

Quando $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, <, 0, 1, \times, (f)_{f \in \text{an}})$, o corpo dos números reais expandido por funções analíticas restritas, então DTOP é a categoria cujos objetos são espaços subanalíticos globais e os morfismos são funções contínuas com gráfico globalmente subanalíticos. (cf. [DVdD88]).

Quando $\mathcal{N}$ é um espaço vetorial ordenado sobre um anel de divisão ordenado D , então DTOP é a categoria cujos objetos são espaços lineares por partes ¹ e os morfismos são funções contínuas com gráficos lineares por partes (cf. [VdD98, Chapter 1]).

Proposição 4.1. *A aplicação $\tilde{\circ}: \text{DTOP} \rightarrow \widetilde{\text{DTOP}}$ que associa $X \in \text{Obj}(\text{DTOP})$ a $\tilde{X} \in \text{Obj}(\widetilde{\text{DTOP}})$ (como na definição 11) e $f: X \rightarrow Y$ em $\text{Hom}(\text{DTOP})$ a $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ em $\text{Hom}(\widetilde{\text{DTOP}})$ (como na definição 14) é um funtor (covariante).*

¹Piecewise linear spaces.

Demonstração. Temos que mostrar que para todo X definível, $\widetilde{\text{id}_X} = \text{id}_{\tilde{X}}$ e que se f, g em $\text{Hom}(\text{DTOP})$ são componíveis, $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.

Se $p \in \tilde{X}$, então $\widetilde{\text{id}_X}(p) = \{\varphi_B | p \in \tilde{B}\} = p$. Ainda, $\widetilde{f \circ g}(x) = \{\varphi_B | x \in (f \circ g)^{-1}[B]\} = \{\varphi_B | \varphi_{f^{-1}[B]} \in \widetilde{g(x)}\} = \{\varphi_B | \tilde{g}(x) \in \widetilde{f^{-1}[B]}\}.$ $\square$

Definição 16. Chamaremos a aplicação definida na proposição 4.1 de **functor til o-minimal**.

Proposição 4.2. *Seja X um conjunto definível. Se DTOP_X denota a categoria cujos objetos são os abertos definíveis de X , os morfismos são inclusões entre definíveis abertos e se $\text{Cov}(\text{DTOP}_X)$ for o conjunto de todas as coberturas (por abertos definíveis) que admitem subcobertura finita, então $(\text{DTOP}_X, \text{Cov}(\text{DTOP}_X))$ é um sítio. Chamamos $(\text{DTOP}_X, \text{Cov}(\text{DTOP}_X))$ de sítio o-minimal sobre X .*

Demonstração. Primeiro notamos que se os morfismos são inclusões de abertos definíveis, então se $U \rightarrow V$ é um isomorfismo, $U = V$ e, portanto, $\{V\}$ é uma cobertura finita de U . Pela nota C.2, $U_i \times_U W = U_i \cap W$. Assim, se $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ for uma cobertura de U que admite subcobertura finita, $\{U_i \cap W \rightarrow W\}_{i \in I}$ é uma cobertura de W que admite subcobertura finita. Por último, se $\{U_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J}$ for uma cobertura com subcobertura finita de U_i e se $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ for uma cobertura de U com subcobertura finita, então $\{U_{ij} \rightarrow U\}_{(i,j) \in I \times J}$ também admite subcobertura finita, já que a união finita de conjuntos finitos é finita. $\square$

Definição 17. Denotaremos por $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ a categoria dos feixes de grupos abelianos em X , com respeito a DTOP_X . Como $\tilde{X}$ é um espaço topológico, utilizamos a notação $\text{Sh}(\tilde{X})$ para a categoria dos feixes de grupos abelianos em $\tilde{X}$.

Uma vez que a topologia em $\tilde{X}$ é gerada por $\tilde{U}$, com U aberto de X , um feixe em $\tilde{X}$ é completamente determinado por seu valor nessa base (c.f. [Sta17, Tag 009N]).

Definição 18 (Operador $\tilde{\cdot}$ em Feixes). Se $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, definimos $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U}) = \mathcal{F}(U)$ para U um aberto definível de X . Se $O \subset U$, O aberto definível, então $\rho_{UO} = \rho_{\tilde{U}\tilde{O}}$ (os mapas de restrição são idênticos). Dessa forma, para X um conjunto definível, o functor de feixes de grupo abeliano $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X) \rightarrow \text{Sh}(\tilde{X})$ será definido por $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X) \mapsto \tilde{\mathcal{F}} \in \text{Sh}(\tilde{X})$.

Proposição 4.3. *O functor $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X) \rightarrow \text{Sh}(\tilde{X})$ é um isomorfismo de categorias com inversa dada por $\text{Sh}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, portanto $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ é uma categoria abeliana com injetores suficientes.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, U um conjunto aberto definível de X . Vamos mostrar que $\tilde{\mathcal{F}}$ é um feixe. Suponha que $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ seja uma cobertura de $\tilde{U}$ em $\tilde{X}$ por abertos definíveis e que

$$(4.1) \quad s_i|_{\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j} = s_j|_{\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j}$$

para i, j em I . Uma vez que $\tilde{U}$ é compacto, sabemos que $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ admite subcobertura finita e, portanto, $\{U_i \rightarrow U : i \in I\} \in \text{Cov}(\text{DTOP}_X)$. Mas então, como $\mathcal{F}$ é um feixe e $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \widetilde{U_i \cap U_j}$, temos que o mapa de restrição $\tilde{\mathcal{F}}$ para $\widetilde{U_i \cap U_j}$ é o mesmo que de U para $U_i \cap U_j$ e, portanto, a equação 4.1 se transforma em:

$$(4.2) \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

E portanto existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|i = s_i$. Como $\mathcal{F}(U) = \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{U})$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ é um feixe.

É imediato verificar que $\text{Sh}(\widetilde{X}) \rightarrow \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ é inverso de $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X) \rightarrow \text{Sh}(\widetilde{X})$. Uma vez que a categoria de feixes de grupos abelianos em um espaço topológico é uma categoria abeliana com injetores suficientes e $\widetilde{X}$ é um espaço topológico, segue do isomorfismo $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X) \rightarrow \text{Sh}(\widetilde{X})$ que o mesmo vale para $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$. $\square$

A última proposição nos mostra que a categoria dos feixes em $\text{DTOP}(X)$ e em $\widetilde{X}$ são isomórficas e, portanto, todas as perguntas sobre feixes em $\text{DTOP}(X)$, incluindo suas teorias de cohomologia de feixes, podem ser respondidas em $\widetilde{X}$, usando a teoria clássica de feixes em espaços topológicos. Faremos uso dessa correspondência exaustivamente no que se segue.

Dados dois conjuntos definíveis X e Y , podemos estar interessados em comparar feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ e $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(Y)$ respectivamente. A dificuldade técnica se encontra em comparar feixes com espaços base diferentes e é similar àquela enfrentada quando o feixe encontra-se em um espaço topológico. Se existe uma aplicação contínua e definível $f: X \rightarrow Y$, podemos definir o feixe $f_*\mathcal{F}$ usando o isomorfismo com o espaço $\text{Sh}(\widetilde{X})$ e posteriormente a imagem direta (Cf. Def. 54) para $\text{Sh}(\widetilde{Y})$ e usando o isomorfismo deste com $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(Y)$. Da mesma forma, definiremos a imagem inversa de feixes:

Definição 19. Sejam X e Y conjuntos definíveis e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua definível. Se $\mathcal{F}$ é um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, trabalhando com o feixe correspondente $\widetilde{\mathcal{F}}$ em $\text{Sh}(\widetilde{X})$, podemos utilizar a imagem direta (Def. 54) de feixes em espaços topológicos para obter um feixe em $\text{Sh}(\widetilde{Y})$ e, através do isomorfismo da Prop. 4.3, um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(Y)$:

$$f_*\mathcal{F}(V) = \widetilde{f_*\mathcal{F}}(\widetilde{V}) = \widetilde{f}_*\widetilde{F}(\widetilde{V}) = \widetilde{F}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{V})) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

definimos a imagem inversa analogamente.

Do isomorfismo da Prop. 4.3, temos que $\text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{f_*\mathcal{F}})$ e, similarmente, que $\text{Hom}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\widetilde{f^*\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{F}})$. Da adjunção da imagem inversa e da imagem direta para espaços topológicos, deduzimos que

$$(4.3) \quad \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \cong \text{Hom}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

Ainda, do fato de $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ para todos os pares componíveis de funções definíveis e de que $\widetilde{\text{id}} = \text{id}$, segue que $\text{id}_* = \text{id}$, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $\text{id}^* = \text{id}$ e $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$.

Ainda, escolhendo $\mathcal{F} = f^*\mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} = f_*\mathcal{F}$ temos:

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, f_*f^*\mathcal{G}) \cong \text{Hom}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{G})$$

E também

$$\text{Hom}(f_*\mathcal{F}, f_*\mathcal{F}) \cong \text{Hom}(f^*f_*\mathcal{F}, \mathcal{F})$$

Denominando o isomorfismo da Eq. 4.3 por ϕ , isso nos dá

$$\phi(\text{id}): \mathcal{G} \rightarrow f_*f^*\mathcal{G}$$

E

$$\phi^{-1}(\text{id}): f^*f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

Definição 20. Seja $X \in \text{DTOP}$, $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ e $Z \subset X$ definível. A restrição de $\mathcal{F}$ para Z , $\mathcal{F}|_Z$ é definida por

$$\mathcal{F}|_Z = j^* \mathcal{F}$$

onde $j: Z \rightarrow X$ é a inclusão.

Definição 21. Seja $X \in \text{DTOP}$, $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ e $Z \subset X$ definível fechado. A extensão por zero, $\mathcal{F}_Z = j_* j^* \mathcal{F}$ é o feixe tal que a sequência $0 \rightarrow \mathcal{F}_Z(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U/Z) \rightarrow 0$ é exata para todo aberto definível U de X .

Lema 4.4. Suponha que X seja um subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$, $\mathcal{F}$ é um feixe em $\text{Sh}(X)$ e Y é um subconjunto compacto de X . Então, para todo $s \in \Gamma(Y, \mathcal{F}|_Y)$, existe uma vizinhança W de Y em X e $t \in \Gamma(W, \mathcal{F}|_W)$ tal que $t|_Y = s$.

Demonstração. Essa demonstração é análoga a [Del85, Lemma 2.2]. Seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura de Y por abertos construtíveis em X . Pela definição de $\mathcal{F}|_Y$, existem seções $s_i \in \Gamma(X \cap U_i, \mathcal{F})$ tais que $s_i|_{Y \cap U_i} = s|_{Y \cap U_i}$, para todo $i \in I$. Como Y é compacto, podemos assumir que I é finito. Seja $U = \cup_{i \in I} U_i$. Pelo Corolário 3.26, existem abertos construtíveis W_i com $\text{cl}(W_i) \subset U_i$ e $\cup_{i \in I} W_i = U$. Considere o conjunto $W = \{x \in U | x \in \text{cl}(W_i) \cap \text{cl}(W_j) \Rightarrow s_i(x) = s_j(x)\}$, onde $s_k(x)$ representa a classe de s_k em $\mathcal{F}_x$. Pela escolha das s_i , temos $Y \subset W$, ainda, como o conjunto $A_{ij} = \{x \in U | s_i(x) = s_j(x)\}$ é aberto para todo i, j , segue que W é aberto. Como $\mathcal{F}$ é feixe, existe seção t em W tal que $t|_{W_i} = s_i$ e, portanto, $t|_Y = s$. $\square$

O lema 4.4 implica, no jargão da Def. 55 (p. 55 - ver apêndice C), que todo feixe mole sobre um espaço X , subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$, é macio, uma vez que se $Y \subset X$ é fechado em X , como $X \subset U$, com U normal e compacto (já que $U \in \widetilde{\text{DTOP}}$), então Y é compacto.

Proposição 4.5. Se X é um subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$ então a subcategoria completa aditiva de $\text{Sh}(X)$ de feixes injetivos (ou moles, ou macios) é $\Gamma(X; -)$ -injetiva, isto é:

1. Para todo $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$ existe um feixe injetivo (respec. mole, respec. macio) $\mathcal{F}' \in \text{Sh}(X)$ e uma sequência exata $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$
2. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ é uma sequência exata em $\text{Sh}(X)$, com $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ injetivos (respec. moles, respec. macios), então a seguinte sequência é exata:

$$0 \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

3. Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ é uma sequência exata em $\text{Sh}(X)$, com $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ injetivos (respec. moles, respec. macios), então $\mathcal{F}''$ é injetivo (respec. mole, respec. macio).

Demonstração. Como $\text{Sh}(X)$ é uma categoria com injetores suficientes, (1) vale para feixes injetivos. Como todo feixe injetivo é mole (Cf. [Bre97, Chapter 2, Proposition 5.3]) e pelo lema 4.4, nesse caso, também macio.

(2) e (3) seguem de [Bre97, Chapter 2, Theorem 5.4] para o caso mole (e, portanto, injetivo).

Para o caso macio, precisamos provar apenas que $\Gamma(X; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{F}'')$ é sobrejetora, porque o funtor $\Gamma(X; -)$ é exato à esquerda. Considere $s \in \Gamma(X; \mathcal{F}'')$. Seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura de X por abertos construtíveis e seções $s_i \in \Gamma(U_i \cap X, \mathcal{F})$ tais que $s_i \mapsto s|_{U_i \cap X}$ (que sempre existem já que

$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ é sobrejetora). Pelo lema 3.26 (p. 18), existem fechados construtíveis K_i com $K_i \subset U_i$, tais que $X \subset \bigcup_{i \in I} K_i$. Então $F_i = \bigcup_{1 \leq j \leq i} K_j \cap X$ é um fechado de X e $F_n = X$. Definindo indutivamente as seções $t_i \in \Gamma(F_i, \mathcal{F}|_{F_i})$ com $t_i \mapsto s|_{F_i}$ e $t_i|_{F_j} \mapsto t_j$ para $j > i$. O conjunto $F_1 = K_1 \cap X$ está em $U_1 \cap X$ e definimos $t_1 = s_1|_{F_1}$. Para $i \geq 2$, supondo t_j já definido para $j < i$, $[t_{i-1}|_{K_i \cap F_{i-1}} - s_i|_{K_i \cap F_{i-1}}]$ é mapeado em 0 e, portanto, é a imagem de uma seção $r' \in \Gamma(K_i \cap F_{i-1}, \mathcal{F}'|_{K_i \cap F_{i-1}})$. Uma vez que $\mathcal{F}'$ é mole, r' pode ser estendido a $r \in \Gamma(K_i \cap X; \mathcal{F}'|_{K_i \cap X})$. As seções t_{i-1} em $\Gamma(F_{i-1}; \mathcal{F}|_{F_{i-1}})$ e $[(s_i|_{K_i \cap X}) + f(r)] \in \Gamma(K_1 \cap X, \mathcal{F}|_{K_1 \cap X})$, onde $f(r)$ é a imagem de r , colam em uma seção $t_i \in \Gamma(F_i; \mathcal{F}|_{F_i})$, que possui as propriedades desejadas.

Por fim, (3) para o caso macio segue de [Bre97, Chapter 2, Proposition 9.10]. $\square$

Corolário 4.6. Se X é um subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$, então a subcategoria completa aditiva de $\text{Sh}(X)$ de feixes injetivos (ou moles, ou macios) é $\Gamma_Y(X; -)$ -injetiva para todo $Y \subset X$ fechado.

Demonstração.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U, F') & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U, F) & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U, F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(U, F') & \longrightarrow & \Gamma(U, F) & \longrightarrow & \Gamma(U, F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(U/Z, F') & \longrightarrow & \Gamma(U/Z, F) & \longrightarrow & \Gamma(U/Z, F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Pela proposição 4.5, a segunda e a terceira linhas são exatas. Pela definição da extensão por zero, as colunas são exatas. Pelo lema dos Cinco, a primeira linha também é exata. $\square$

Tanto o Lema 4.4 quanto o corolário anterior são uma consequência imediata do Lema do Encohlimento (Lema 3.26) e valem em todo espaço espectral normal. O mesmo também vale em quaisquer espaços Hausdorff X e Y se Y possui um sistema fundamental de vizinhanças paracompactas em X e a demonstração é a mesma.

Capítulo 5

Cohomologia de Feixes em Estruturas O-Minimais

Seguindo o espírito do tratamento de feixes em estruturas o-minimais através do tratamento dos feixes sobre seus espectros, nosso objetivo neste capítulo é desenvolver a teoria de cohomologia de feixes sobre tais estruturas.

Neste capítulo, fixamos uma estrutura o-minimal $\mathcal{N}$ e trabalhamos com conjuntos definíveis em $\text{DTOP}_{\mathcal{N}}$.

Definição 22. Um feixe $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, definimos o grupo o-minimal de cohomologia de $\mathcal{F}$ por:

$$H^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$$

e $H^n(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$ é a cohomologia clássica de feixes.

Alternativamente poderíamos ter definido $H^n(X, \mathcal{F})$ da forma usual, isto é

$$H^n(X, \mathcal{F}) = R^n\Gamma(X, \mathcal{F})$$

onde $R^n\Gamma(X, -)$ é o n -ésimo funtor derivado a direita do funtor de seções globais $\Gamma(X, -)$. Da proposição 4.3, temos que $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$ é uma categoria abeliana com objetos injetores suficientes e, portanto, para calcular $H^n(X, \mathcal{F})$ poderíamos tomar uma resolução injetora de $\mathcal{F}$

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

e então o grupo $H^n(X, \mathcal{F})$ é o n -ésimo grupo de cohomologia da corrente de complexos:

$$0 \rightarrow {}^i\Gamma(X, I^0) \rightarrow \Gamma(X, I^1) \rightarrow \Gamma(X, I^2) \rightarrow \dots$$

como usual, $0 \rightarrow {}^i\Gamma(X, I^0)$ é a composição $0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0)$. Em virtude do isomorfismo da proposição 4.3, teríamos:

$$R^n\Gamma(X, \mathcal{F}) = R^n\Gamma(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$$

portanto não há nenhum prejuízo em nossa definição e o isomorfismo ainda nos garante que podemos calcular $H^n(X, \mathcal{F})$ tomando uma resolução mole de $\mathcal{F}$ (ou seja, uma resolução por feixes

$\mathcal{F}'$ moles, onde $\Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}')$ é sobrejetor para todo U aberto), já que feixes moles são acíclicos (ou seja, eventualmente $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $n > k$ para k suficientemente grande).

Definição 23. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua e definível entre conjuntos definíveis, definimos o homomorfismo induzido na cohomologia

$$f^*: H^*(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(X, f^*\mathcal{F})$$

por

$$f^* = \tilde{f}^*: H^*(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H^*(\tilde{X}, \tilde{f}^*\tilde{\mathcal{F}})$$

onde $\tilde{f}^*$ é o homomorfismo induzido na cohomologia (clássica) por $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$.

Proposição 5.1. *Dados dois conjuntos definíveis X e Y , $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua definível e um feixe $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{D TOP}}(Y)$, então o homomorfismo induzido na cohomologia $f^*: H^*(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(X, f^*\mathcal{F})$ é uma transformação natural de funtores compatível com homomorfismos conectores.*

Demonstração. Segue porque o funtor imagem inversa é exato no caso topológico (cf. [Bre97, Chapter 1, Section 3 e Chapter 2, Section 6]). $\square$

Definição 24. Se X é um conjunto definível e $A \subset X$ é um conjunto fechado e definível e um feixe $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{D TOP}}(X)$, os grupos de cohomologia de feixes o-minimal relativos $H^n(X, A; \mathcal{F})$ são definidos por $H^n(X \setminus A; \mathcal{F}_{X \setminus A})$. Se $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função contínua definível entre pares de conjuntos definíveis fechados (i.e. $A \subset X$, $B \subset Y$ são fechados definíveis e $f: X \rightarrow Y$ é uma função contínua definível com $f(A) \subset B$) e $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}_{\text{D TOP}}(Y)$, então o homomorfismo induzido

$$f^*: H^*(Y, B; \mathcal{F}) \rightarrow H^*(X, A; \mathcal{F})$$

na cohomologia é definido substituindo $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}_{Y \setminus B}$.

Proposição 5.2. *Seja X um conjunto definivelmente normal e $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{D TOP}}(X)$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, os grupos de cohomologia $H^n(X; \mathcal{F})$ são isomorfos aos grupos de cohomologia de Čech, $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ relativos ao sítio o-minimal em X , i.e., calculado usando coberturas finitas por abertos definíveis de X .*

Demonstração. Essa demonstração é a versão o-minimal de [CC83, Proposition 5] e será provada mostrando:

1. Se $i: X^c \rightarrow \tilde{X}$ for a inclusão dos pontos fechados de $\tilde{X}$ em $\tilde{X}$ e $\rho: \tilde{X} \rightarrow X^c$ for a retração da Def. 10, então o funtor imagem direta $\rho_*: \text{Sh}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Sh}(X^c)$ é isomorfo ao funtor restrição $i^*: \text{Sh}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Sh}(X^c)$ (análogo a [CC83, Proposition 4]).
2. Se $\mathcal{F}$ for um feixe em $\tilde{X}$ e $\mathcal{G}$ for um feixe em X^c então para todo $n \in \mathbb{N}$, $H^n(\tilde{X}; \mathcal{F}) = H^n(X^c; \mathcal{F}|_{X^c})$ e $H^n(X^c; \mathcal{G}) = H^n(\tilde{X}; i_*\mathcal{G})$ (análogo a [CC83, Corollary 1]).
3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $H^n(\tilde{X}; \mathcal{F}) = \check{H}^n(\tilde{X}, \mathcal{F})$.

(1): Se $\mathcal{F}$ é um feixe em $\tilde{X}$, o feixe $i^*\mathcal{F}$ é aquele que associa $U \subset X^c$ aberto a $\lim_{V \supset U} \mathcal{F}(V)$, mas $\lim_{V \supset U} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(\rho^{-1}(U)) = \rho_*\mathcal{F}(U)$

(2): $H^n(X^C; \mathcal{F}|_{X^C}) = H^n(X^C; \rho_* \mathcal{F})$ e ρ_* é um funtor exato.

(3): Como X^c é um espaço compacto, Hausdorff, $H^n(X^C; \mathcal{F}|_{X^C}) = \check{H}^n(X^C, \mathcal{F}|_{X^C})$, portanto é suficiente mostrar que $\check{H}^n(X^C, \mathcal{F}|_{X^C}) = \check{H}^n(\tilde{X}, \mathcal{F})$. Seja $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura de $\tilde{X}$ por abertos, então

$$\check{H}^n((U_i \cap X^C), \mathcal{F}|_{X^C}) = \check{H}^n((U_i \cap X^C), \rho_* \mathcal{F}) = \check{H}^n(\rho^{-1}(U_i \cap X^C), \mathcal{F})$$

e $\{\rho^{-1}(U_i \cap X^C) : i \in I\}$ é uma cobertura mais fina que U_i . □

Proposição 5.3. *Seja X um conjunto definivelmente normal, então*

$$\dim_{\text{coh}} \tilde{X} \leq \dim_{\text{cov}} \tilde{X} \leq \dim_{\text{Knull}} \tilde{X}$$

Demonstração. Pela Prop 5.2, $H^n(\tilde{X}; \mathcal{F}) = H^n(X^C; \rho^* \mathcal{F})$. Como X^c é Hausdorff, $\dim_{\text{coh}} X^C \leq \dim_{\text{cov}} X^C$. Como $\dim_{\text{cov}} X^C \leq \dim_{\text{cov}} \tilde{X}$, a primeira inequação segue. Mostraremos que a segunda inequação é válida para $\tilde{X}$ um espaço espectral qualquer, por indução em $d = \dim_{\text{Knull}} \tilde{X}$. Se $d = 0$, então $\tilde{X}$ é T_1 e, portanto, é um espaço booleano e daí $\dim_{\text{cov}} \tilde{X} = 0$. Suponha que o resultado esteja provado para todo $\tilde{X}$ espaço espectral de dimensão menor que d . Seja $(U_i)_{i \in I}$ uma cobertura de X por abertos, podemos supor que I é finito e todos U_i são compactos. Seja F_i a fronteira de U_i e seja $F = \bigcup_I F_i$. F é um espaço espectral normal de dimensão menor que d , já que qualquer ponto de F_i tem uma generalização em U_i . Então existe uma cobertura $(V_i)_{i \in I}$ mais fina que $(U_i \cap F)$. Pela Prop 2.5, qualquer ponto fechado $x \in F$ possui uma vizinhança fechada G_x em $\tilde{X}$ tal que $G_x \cap F$ está contido em algum V_j . Como $X^C \cap F$ é compacto, é coberto por um número finito de $\text{int}(G_x)$ e, portanto, temos $F \subset \bigcup_{k \in K} \text{int}(G_{x_k})$, para algum K finito. Seja

$$G_j = \bigcup_{(G_{x_k} \cap F) \subset V_j} G_{x_k}$$

A família $(G_j \cap F)_{j \in J}$ é de ordem menor que d , e, portanto, se G é a união da família de intersecções de $d + 1$ distintos G_j , G e F são fechados disjuntos. Se $\omega_j = \text{int}(G_j) \setminus G$, a família $(\omega_j)_{j \in J}$ é uma família de abertos de ordem menor que d que cobre F e tal que $(\omega_j \cap F)_{j \in J}$ é mais fina que $(U_i \cap F)_{i \in I}$. Podemos ainda supor que qualquer ω_j está contido em algum U_i . Seja agora $U_i^0 = U_i$ e $U_i^1 = \text{int}(X \setminus U_i)$ e para $\epsilon : I \rightarrow \{0, 1\}$, $U^\epsilon = \bigcap_{i \in I} U_i^{\epsilon(i)}$. Então a família $(U^\epsilon)_{\epsilon \in \{0, 1\}^I} \cup (\omega_j)_{j \in J}$ é uma cobertura por abertos de X , mais fina que $(U_i)_{i \in I}$ e de ordem $\leq d$, uma vez que $U^\epsilon \cap U^{\epsilon'} = \emptyset$ para $\epsilon \neq \epsilon'$ e $(\omega_j)_{j \in J}$ é de ordem menor que d . □

Como corolário da última demonstração, temos a seguinte proposição:

Proposição 5.4. *Seja X definivelmente normal e $\mathcal{F} \in \text{Sh}_{\text{DTop}}(X)$. Então*

$$H^n(X; \mathcal{F}) = 0 \quad \forall n > \dim X$$

Demonstração. Segue porque $\dim_{\text{coh}}(\tilde{X}) = \dim_{\text{coh}} X$ e $\dim_{\text{Knull}} \tilde{X} = \dim X$. □

5.1 Mudança de Base e Teorema de Vietoris-Biegler

Proposição 5.5. *Seja X um subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$, $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$ e Y um subespaço compacto de X . Então o homomorfismo canônico*

$$\lim_{\substack{Y \subset U \\ U \text{ aberto}}} H^q(U; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(Y; \mathcal{F}|_Y)$$

é um isomorfismo para todo $q \geq 0$.

Demonstração. Para $q = 0$, o resultado segue da definição de $\mathcal{F}|_Y$ que o homomorfismo é injetor. Por outro lado, como cada $s \in \Gamma(Y, \mathcal{F}|_Y) = H^0(Y; \mathcal{F}|_Y)$ de $\mathcal{F}$ sobre Y pode ser estendido para uma vizinhança aberta de Y em X , pelo Lema 4.4, então, o homomorfismo também é sobrejetor e, portanto, é um isomorfismo. Para o caso geral, considere uma resolução

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2 \rightarrow \dots$$

de $\mathcal{F}$ por feixes injetores. Uma vez que a restrição $\mathcal{J}^k|_U$ de $\mathcal{J}^k$ em qualquer subconjunto aberto U de X também é injetivo, o grupo $H^q(U, \mathcal{F})$ é o q -ésimo grupo de cohomologia de complexo de co-correntes

$$0 \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{J}^0) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{J}^1) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{J}^2) \rightarrow \dots$$

Feixes injetivos são moles. Então, concluímos do Lema 4.4 que a restrição $\mathcal{J}^k|_Y$ de $\mathcal{J}^k$ em Y é macia. (Uma seção sobre um subconjunto fechado Y' de Y pode ser estendido para uma seção global sobre X), portanto,

$$0 \rightarrow \mathcal{F}|_Y \rightarrow \mathcal{J}^0|_Y \rightarrow \mathcal{J}^1|_Y \rightarrow \dots$$

é uma resolução macia de $\mathcal{F}|_Y$. Vemos que $H^q(Y, \mathcal{F}|_Y)$ é o q -ésimo grupo de cohomologia da co-corrente de complexos

$$0 \rightarrow \Gamma(Y; \mathcal{F}|_Y) \rightarrow \Gamma(Y; \mathcal{J}^0|_Y) \rightarrow \Gamma(Y; \mathcal{J}^1|_Y) \rightarrow \dots$$

Que já sabemos do caso $q = 0$ que $\Gamma(Y; \mathcal{J}^k|_Y) = \lim \Gamma(U, \mathcal{J}^k)$. Uma vez que o funtor de homologia comuta com limites indutivos de correntes de complexos, o teorema está provado. $\square$

Teorema 5.6 (Teorema da Mudança de Base). *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função definível e contínua, onde X e Y são elementos de $\widetilde{\text{DTOP}}$, tal que a imagem de todo conjunto fechado construtível de X é fechada em Y . Seja $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}(X)$ e suponha que Y seja subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$. Então, para todo $\beta \in Y$, o homomorfismo canônico*

$$(R^q f_* \mathcal{F})_\beta \rightarrow H^q(f^{-1}(\beta); \mathcal{F}|_{f^{-1}(\beta)})$$

é um isomorfismo, onde $(R^q f_ \mathcal{F})_\beta$ é a fibra de β sobre a imagem direta de ordem superior $R^q f_* \mathcal{F}$.*

Pela Prop 3.30, $f^{-1}(\beta)$ é compacto e, portanto, possui um sistema fundamental de vizinhanças abertas e construtíveis em X . Se U é uma vizinhança aberta e construtível de $f^{-1}(\beta)$, então $X \setminus U$ é mapeado em um subconjunto fechado de Y que não contém β . Portanto a coleção $f^{-1}(U)$ com U

construtível e aberto contendo β forma um sistema fundamental de vizinhanças para $f^{-1}(\beta)$. Como um pré-feixe, temos que

$$R^q f_* \mathcal{F}(U) = H^q(f^{-1}(U); \mathcal{F})$$

e, portanto, o resultado segue da Prop. 5.5.

Teorema 5.7 (Vietoris-Biegler). *Seja $f: X \rightarrow Y$ um morfismo sobrejetor em $\widetilde{\text{DTOP}}$ que mapeia subconjuntos construtíveis fechados de X em fechados de Y . Seja $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}(Y)$ e suponha que Y é um subespaço de um espaço normal em $\widetilde{\text{DTOP}}$. Assuma que $f^{-1}(\beta)$ seja conexo e $H^q(f^{-1}(\beta); f^* \mathcal{F}|_{f^{-1}(\beta)}) = 0$ para todo $q > 0$ e todo $\beta \in Y$. Então, vale:*

1. $R^q f_*(f^* \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.
2. O homomorfismo de adjunção $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ é um isomorfismo.
3. $f^*: H^*(Y; \mathcal{F}) \rightarrow H^*(X; f^* \mathcal{F})$ é um isomorfismo.

Demonstração. Como feixes sobre espaços topológicos são determinados por suas fibras, para (1) e (2) é suficiente mostrar que para todo $\beta \in Y$ e todo $q > 0$

$$(R^q f_*(f^* \mathcal{F}))_\beta = 0 \text{ e } \mathcal{F}_\beta \rightarrow (f_* f^* \mathcal{F})_\beta \text{ é isomorfismo}$$

Pelo teorema da mudança de base (Teo. 5.6) e pelas hipóteses

$$(R^q f_*(f^* \mathcal{F}))_\beta = H^q(f^{-1}(\beta); f^* \mathcal{F}|_{f^{-1}(\beta)}) = 0$$

para todo $q > 0$ e, uma vez que $f^* \mathcal{F}|_{f^{-1}(\beta)}$ é o feixe constante em $\mathcal{F}_\beta$ (porque $f \circ k = l \circ f$ onde $k: f^{-1}(\beta) \rightarrow X$ e $l: \{\beta\} \rightarrow Y$ são inclusões). Seja ϵ o homomorfismo canônico de borda $E_2^{p,0} \rightarrow E^p$ na sequência espectral de Leray,

$$\epsilon: H^p(Y; f_* f^* \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X; f^* \mathcal{F})$$

Nós temos, por (1) que a sequência espectral de Leray cinde e o homomorfismo de borda é um isomorfismo. Por (2), o homomorfismo $v: H^p(Y; \mathcal{F}) \rightarrow H^p(Y; f_* f^* \mathcal{F})$ induzido pela adjunção $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ é um isomorfismo. Portanto, $f^* = \epsilon \circ v: H^*(Y; \mathcal{F}) \rightarrow H^*(X; f^* \mathcal{F})$ é um isomorfismo. $\square$

5.2 Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Nesta seção, vamos provar que o funtor o-minimal de cohomologia H^* construído acima satisfaz as versões o-minimais dos axiomas de Eilenberg-Steenrod:

Teorema 5.8. *Se X é um conjunto definível e $\mathcal{F}$ é um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, então valem:*

Axioma da Exatidão: *Seja $A \subset X$ um conjunto fechado e definível. Se $i: (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ e $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ são inclusões, então temos a seguinte sequência exata natural:*

$$\dots \longrightarrow H^n(X, A; \mathcal{F}) \xrightarrow{j^*} H^n(X; \mathcal{F}) \xrightarrow{i^*} H^n(A; \mathcal{F}) \xrightarrow{d^n} H^{n+1}(X, A; \mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Axioma da Remoção: Para qualquer fechado definível $A \subset X$ e qualquer conjunto aberto definível $U \subset X$ tal que $U \subset A$, a inclusão $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induz isomorfismos

$$H^n(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X \setminus U, A \setminus U; \mathcal{F})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axioma da Homotopia: Seja $[a, b] \subset N$ um intervalo fechado e $A \subset X$ um fechado definível. Assuma que $\mathcal{N}$ tem funções de Skolem definíveis, X é definivelmente normal e a projeção $X \times [a, b] \rightarrow X$ mapeia sobrejetivamente fechados definíveis de $X \times [a, b]$ em fechados definíveis de X . Se para $c \in [a, b]$,

$$i_c: (X, A) \rightarrow (X \times [a, b], A \times [a, b])$$

é a função contínua definível dada por $i_c(x) = (x, c)$ para todo $x \in X$, então

$$i_a^* = i_b^*: H^n(X \times [a, b], A \times [a, b]; \pi^* \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, A; \mathcal{F})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axioma da Dimensão: Se X é um conjunto unitário, então $H^n(X; \mathcal{F}) = 0$ para todo $n > 0$ e $H^0(X; \mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Demonstração. Os Axiomas da Exatidão, Remoção e Dimensão seguem pelo uso do isomorfismo da Prop 4.3 e dos resultados de [Bre97, Chapter II].

Por outro lado, o axioma da Homotopia seguirá do homomorfismo entre $H^n(X, A; \mathcal{F})$ e $H^n(X \times I, A \times I; \pi^* \mathcal{F})$, onde $\pi: X \times I \rightarrow X$ é o mapa de projeção, uma vez que funtorialmente obtemos

$$i_b^* = i_a^* = (\pi^{-1})^*: H^n(X \times I, A \times I; \pi^* \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, A; \mathcal{F})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo axioma da exatidão, isto equivale a demonstrar que $\pi^*: H^n(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X \times I; \pi^* \mathcal{F})$ é um isomorfismo. Da equivalência de categorias, equivale a provar que o isomorfismo de $\tilde{\pi}^*: H^n(\tilde{X}; \tilde{\mathcal{F}}) \rightarrow H^n(\tilde{X} \times \tilde{I}; \tilde{\pi}^* \tilde{\mathcal{F}})$. Para tanto, basta mostrar que estamos nas condições do Teorema 5.7. Por suposição, $\tilde{\pi}$ mapeia sobrejetivamente fechados construtíveis em fechados construtíveis. Como para cada $x \in I$, $\tilde{\pi}^* \tilde{\mathcal{F}}|_{\tilde{\pi}^{-1}(x)}$ é o feixe constante, resta mostrarmos que $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ é conexa para todo $x \in \tilde{I}$ e que $\tilde{I}$ é acíclico, isso é, que $H^q(\tilde{\pi}^{-1}x, F) = 0$ para todo grupo abeliano F e todo $q > 0$ e faremos isto no próximo lema.

Lema 5.9. Seja $x \in X$ e seja N^* o modelo primo de $Th(\mathcal{N})$ sobre $N \cup \{e\}$, onde e é um elemento realizando o tipo x . Então existe um homeomorfismo $t: \tilde{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \widehat{[a, b]^*}$ e, portanto, $\tilde{\pi}^{-1}$ é compacto, conexo e acíclico.

Demonstração. Seja $(x, c) \in \tilde{\pi}^{-1}(x)$ e considere um elemento (e, c) que realiza (x, c) em uma extensão saturada de $\mathcal{N}^*$. Uma vez que $\mathcal{N}$ possui funções de Skolem definíveis, todos os elementos de N^* são definíveis sobre $N \cup \{e\}$ e, portanto, $tp(c/N^*) = tp(d/N^*)$ para qualquer d tal que (e, d) realize (x, c) em uma extensão saturada de $\mathcal{N}^*$. Caso haja uma fórmula $\phi(u, m)$ com parâmetros $m \in N^*$ tal que $\phi(c, m)$ vale, enquanto $\phi(d, m)$ não vale, como m é definível em $N \cup \{e\}$, existe

uma fórmula de primeira ordem $\psi(v, w)$ com parâmetros em N tal que $\psi(v, e)$ define m . Mas então, $\exists v \psi(v, e) \wedge \phi(u, v)$ é realizado por (e, c) mas não é realizado por (e, d) . Logo, a associação $t(x, c) = tp(c/N^*)$ é funcional e um argumento similar mostra que t também é injetora.

Para mostrar a sobrejetividade de t , seja y um tipo em $\widetilde{[a, b]^*}$. Como acima, toda fórmula $\phi(u, m)$ em β com parâmetros em N^* é equivalente a uma fórmula $\tau(e, u)$, onde $\tau(w, u)$ tem parâmetros em N . Ainda, x é consistente com a coleção $\Sigma(w, u)$ de todas as fórmulas obtidas de β nesse processo e $x \cup \Sigma(w, u)$ determina um tipo γ sobre N tal que $t(\gamma) = \beta$. De fato, seja $\theta(u, w)$ uma fórmula de primeira ordem com parâmetros em N e seja c uma realização de β . Então ou $\theta(e, c)$ vale, e nesse caso $\theta(e, u) \in \beta$ e $\theta(w, u) \in \Sigma(w, u)$, ou $\theta(e, c)$ não vale e, portanto, $\neg\theta(e, u) \in \beta$ e, logo, $\neg\theta(w, u) \in \Sigma(w, u)$.

Se U for um aberto definível de $X \times I$ e $r: X \times I \rightarrow I$ for mapa de projeção, então $t(\widetilde{U \cap \tilde{\pi}^{-1}(x)}) = \widetilde{r^*(U^*)}$, o que mostra que t é uma função aberta. Para provarmos o homeomorfismo, resta provar a continuidade.

Sejam c_1, c_2 em I^* sobre N^* com $a < c_1 < c_2 < b$. Uma vez que c_1, c_2 são definíveis em $N \cup \{e\}$, existem funções definíveis f_i tais que $f_i(e) = c_i$, para $i \in \{1, 2\}$. Por [Pil88, Prop. 2.1], existe um aberto definível U de X , com $A \subset U$ e funções contínuas e definíveis $g_1, g_2: U \rightarrow [a, b]$ sobre N tais que $f_i = g_i|_A$ ($i \in \{1, 2\}$). Mas, então $t(\widetilde{W \cap \tilde{\pi}^{-1}(x)}) = \widetilde{(c_1, c_2)}$, onde $W = (g_1, g_2)_U$ é um aberto definível de $X \times [a, b]$ sobre N . Da mesma forma, existem abertos definíveis W_1, W_2 de $X \times [a, b]$ tais que $t(\widetilde{W_1 \cap \tilde{p}_1^{-1}(x)}) = \widetilde{[a, c_1]}$ e $t(\widetilde{W_2 \cap \tilde{p}_2^{-1}(x)}) = \widetilde{(c_2, b]}$.

Uma vez que t é um homeomorfismo, $\widetilde{[a, b]^*}$ é compacto e conexo, $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ também o é. Ainda, $H^*(\tilde{\pi}^{-1}(x); F) \simeq H^*(\widetilde{[a, b]^*}; F) \simeq H^*([a, b]^*; F)$. Pela proposição 5.2, $H^*([a, b]^* \simeq \check{H}^*([a, b]^*, F)$ e da mesma forma que em [Del85, Prop. 4.7], concluímos que $\check{H}^q([a, b]^*; F) = 0$ para todo $q > 0$. $\square$

$\square$

Repare que, se $\mathcal{N}$ for a expansão o-minimal de um grupo ordenado, todo conjunto definível é definivelmente normal, $\mathcal{N}$ tem funções de Skolem definíveis e satisfaz os pré-requisitos do Axioma da Homotopia (cf [VdD98, 10, p.97]).

Se $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são funções contínuas e definíveis com $A \subset X$ e $B \subset Y$, fechados definíveis e suponha que $s: (X \times [a, b], A \times [a, b]) \rightarrow (Y, B)$ seja uma homotopia definível entre f e g (s é uma função contínua e definível tal que $s \circ i_a = f$ e $s \circ i_b = g$). Se X satisfaz as suposições do axioma da Homotopia e F é o feixe constante em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$, então funtorialmente nós obtemos

$$f^* = g^*: H^n(Y, B; F) \rightarrow H^n(X, A; F)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 5.10 (Exatidão para Triplas). *Seja X um conjunto definível, $B \subset A \subset X$ fechado e definível e $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$. Então existe uma sequência exata, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\rightarrow H^n(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X, B; \mathcal{F}) \rightarrow H^n(A, B; \mathcal{F}) \rightarrow H^{n+1}(X, A; \mathcal{F}) \rightarrow$$

Demonstração. A prova utiliza o isomorfismo com $\widetilde{\text{DTOP}}$ e então aplicamos [Bre97, Prop 4.8, Ch II]. Se X é definível e $B \subset A \subset X$ são fechados definíveis, então, pelo Axioma da Remoção, $(X, ; A, B)$ é uma tríade excisiva, i.e., a inclusão $(A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$ induz o isomorfismo

$$H^*(A \cup B, B; \mathcal{F}) \simeq H^*(A, A \cap B; \mathcal{F})$$

para todo feixe $\mathcal{F}$ em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$. $\square$

Proposição 5.11 (Mayer-Vietoris). *Sejam X e Z conjuntos definíveis e suponha que $X_2 \subset X_1$ e $Z_2 \subset Z_1$ sejam conjuntos fechados definíveis com $X = X_1 \cup X_2$ e $Z = Z_1 \cup Z_2$. Seja $\mathcal{F}$ um feixe em $\text{Sh}_{\text{DTOP}}(X)$. Assuma que tenhamos o seguinte diagrama comutativo de inclusões*

$$\begin{array}{ccc} (X_1 \cap X_2, Z_1 \cap Z_2) & \longrightarrow & (X_1, Z_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X_2, Z_2) & \longrightarrow & (X, Z) \end{array}$$

Então existe uma sequência exata para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^n(X, Z; \mathcal{F}) &\rightarrow H^n(X_1, Z_1; \mathcal{F}) \oplus H^n(X_2, Z_2; \mathcal{F}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^n(X_1 \cap X_2, Z_1 \cap Z_2; \mathcal{F}) \rightarrow H^{n+1}(X, Z; \mathcal{F}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

5.3 Conclusões

Cohomologia é uma ferramenta importante para o estudo da geometria em geral e em particular no estudo da geometria de grupos definíveis em expansões o-minimais de corpos. Em [EO04] a torsão de um grupo definivelmente compacto e definivelmente conexo é calculada computando-se primeiro o anel de cohomologia de tal grupo (equipado com a sua topologia de grupo). Usando esse resultado, Hrushovski, Peterzil e Pillay (cf [HPP08]) completaram a demonstração da conjectura de Pillay sobre recobrimentos de grupos de Lie por grupos definivelmente compactos. Ao tentar generalizar esses resultados para estruturas o-minimais que não expandem um corpo, encontra-se o problema de que a construção dos grupos de (co)homologia por Woerheide [Woe96] faz uso pesado de triangulação. O principal resultado no trabalho de Edmundo, Jonas e Peatfield é que essas suposições podem ser enfraquecidas de um corpo para um grupo. De fato, aplicando-se o teorema 5.8 para o feixe constante $\mathbb{Z}$, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.12. *Suponha que $\mathcal{N}$ é uma expansão o-minimal de um grupo. Se X é um conjunto definível em $\mathcal{N}$, existem grupos de cohomologia $H^i(X, \mathbb{Z})$ que satisfazem as versões o-minimais dos axiomas de Eilenberg-Steenrod*

Se $\mathcal{N}$ é a expansão o-minimal de um corpo e se $\mathcal{N}$ é um corpo real fechado, por construção a cohomologia de feixes coincide com a cohomologia de feixes do caso semialgébrico. Por outro lado, na categoria DTOP, Woerheide construiu em sua tese de doutorado ([Woe96]) a homologia singular o-minimal, de onde constrói-se a cohomologia o-minimal singular (H^*, d^*) com coeficientes constantes (essa construção e o respectivo teorema de unicidade estão em [EW08]) e, portanto, a cohomologia de feixes detalhada nesse trabalho coincide com a cohomologia singular o-minimal quando restrita a feixes de coeficiente constante.

Apêndice

Apêndice A

Lógica e Teoria de Modelos

"Of course, a sign doesn't mean anything unless you know how to interpret it."

- Arthur Golden, *Memoirs of a Geisha*

O material que segue na próxima seção é clássico na literatura e a sua presença aqui tem a intenção de fixar nomenclatura e reapresentar resultados que serão utilizados ao longo desse texto, mantendo-o autocontido.

A.1 Teoria de Modelos

Teoria de Modelos é a área da matemática que trata da relação entre linguagens e estruturas. Apesar de suas inúmeras ramificações, todas as diferentes espécies de Teoria de Modelos têm como paradigma a definição clássica de uma fórmula ser verdade segundo uma interpretação, devido ao trabalho seminal de Alfred Tarski(c.f. [Tar33]), referido como *teoria da verdade de Tarski*. Esse tratamento e suas posteriores elaborações forneceram uma ferramenta de estudo de linguagens através de estruturas conjuntistas. A teoria de Modelos clássica, que constitui um dos pilares desse trabalho, trata dessas relações no contexto de linguagens formais de primeira ordem, que contém variáveis e relações, além de quantificação limitada.

A.1.1 Estruturas e Linguagens

Iniciamos com a noção de estrutura, que fornece as ferramentas para a semântica da teoria dos Modelos, adicionando a um universo não vazio (o chamado domínio), funções e relações finitárias que servirão para interpretar símbolos para funções e relações de uma linguagem.

Definição 25. Uma **estrutura** consiste em

1. Um conjunto não vazio, chamado de domínio;
2. Constantes pertencentes ao domínio;
3. Funções (como especificadas abaixo);
4. Predicados (como especificados abaixo).

Estruturas são uma quádrupla ordenada, que contém o domínio, conjunto de constantes, conjunto de funções e conjunto de predicados.

$$\mathcal{M} = (M, (c_i^M)_{i \in I}, (f_j^M)_{j \in J}, (P_k^M)_{k \in K})$$

Onde: $c_i^M \in M$ para todo $i \in I$, para cada $j \in J$ e para cada $k \in K$ existem n_j e n_k números naturais (chamados de aridade da função f_j^M e do predicado P_k^M , respectivamente), sendo f_j^M uma função de M^{n_j} em M e P_k^M uma relação em M^{n_k} .

Como abuso de notação escreveremos sentenças como:

$$\text{Seja } \mathcal{M} = (M, <, \dots) \text{ uma estrutura}$$

estando claro nesse caso que $<$ é um dos predicados da estrutura $\mathcal{M}$. Via de regra, denotaremos domínio e estrutura pela mesma letra, diferenciando a estrutura pela fonte caligráfica.

Definição 26. Uma **linguagem de primeira ordem** $\mathcal{L}$ para uma estrutura $\mathcal{M}$ consiste em

1. Para cada constante c^M um símbolo de constante c ;
2. Para cada função f^M um símbolo de função f ;
3. Para cada predicado P^M um símbolo de predicado P ;
4. Símbolos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \forall$ e $\exists$;
5. Parênteses: $($ e $)$;
6. Um conjunto infinito enumerável $\mathbf{Var}(\mathcal{L})$ de variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Quando $\mathcal{L}$ for uma linguagem para a estrutura $\mathcal{M}$, diremos ainda que $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$ -estrutura. Também é possível destacar algum conjunto não vazio $C \subset M$ como conjunto de constantes e inserir um símbolo de constante para cada $c \in C$. Essa linguagem expandida será chamada de $\mathcal{L}_C$. Em particular, podemos escolher $C = M$ e formarmos uma linguagem $\mathcal{L}_M$, onde todos os elementos de M podem ser referidos utilizando uma constante apropriada.

Também é usual que se comece definindo um conjunto de constantes, funções e predicados para uma linguagem (chamado de *assinatura* da linguagem) e que posteriormente se refira a estruturas nessa linguagem. Essa abordagem é particularmente útil quando queremos nos referir a várias estruturas em uma mesma assinatura.

Com uma linguagem de primeira ordem, construiremos fórmulas que serão, por sua vez, interpretadas na estrutura. Fórmulas são sequências finitas de símbolos da linguagem, construídas usando regras sintáticas rígidas e finitárias. Por exemplo, a fórmula $(0 < 1)$ é puramente sintática e os símbolos 0 e 1 são constantes da linguagem, mas tal fórmula será considerada verdadeira em estruturas que possuam a interpretação usual do símbolo de desigualdade e dessas constantes. Para lidar com situações em que as fórmulas contêm variáveis ($(x = 0 \rightarrow x < 1)$ por exemplo), precisamos de atribuições de valores para as variáveis. Além disso, caso tenhamos símbolos de funções na linguagem, precisaremos interpretar esses símbolos de funções aplicados em variáveis ou constantes iteradas vezes. Por exemplo, se na nossa linguagem $+$ for um símbolo binário funcional, então $0 + 0$, $0 + 1$, $1 + (1 + 1)$ são todos termos nessa linguagem.

Uma definição recursiva possível é:

Definição 27. Um **termo** t em uma linguagem $\mathcal{L}$ é o resultado de uma sequência $t_1, \dots, t_n = t$ (para algum n natural) onde:

1. t_1 é uma variável ou constante;
2. Cada t_i com $1 < i \leq n$ é uma variável ou constante ou $t_i = f(t_{j_1}, \dots, t_{j_k})$ onde $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, i-1\}$ e f é um símbolo de função com aridade k .

Definição 28. Se $\mathcal{M}$ é uma $\mathcal{L}$ -estrutura, uma **interpretação** $\mathcal{I}$ é uma atribuição de valores para as variáveis da linguagem no domínio, ou, formalmente:

$$\mathcal{I}: \mathbf{Var}(\mathcal{L}) \rightarrow M$$

Essa interpretação é estendida aos termos da seguinte forma:

1. $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(x_k)$, se t for a variável x_k ;
2. $\mathcal{I}(t) = c^M$, se t for a constante c ;
3. $\mathcal{I}(t) = f^m(\mathcal{I}(t_{j_1}), \dots, \mathcal{I}(t_{j_k}))$ se $t = f(t_{j_1}, \dots, t_{j_k})$ para algum símbolo de função f de aridade k e termos $t_{j_1}, \dots, t_{j_k}$.

Nota A.1. A interpretação associa um elemento de m para cada elemento $x \in \mathbf{Var}(\mathcal{L})$, o que pode não ser necessário. Se as únicas variáveis que ocorrem no termo t são $x_1, \dots, x_n$ e se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são duas interpretações com $\mathcal{I}(x_k) = \mathcal{J}(x_k)$ para $1 \leq k \leq n$, então $\mathcal{I}(t) = \mathcal{J}(t)$ (que pode ser provado por indução na sequência formadora do termo¹). Dessa forma podemos especificar $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$ e quando escrevermos $t[\mathbf{m}]$ estaremos nos referindo a $\mathcal{I}(t)$, onde $\mathcal{I}$ é uma interpretação tal que $\mathcal{I}(x_i) = m_i$, $1 \leq i \leq n$.

Uma vez que todos os termos da linguagem estejam definidos podemos trabalhar com fórmulas envolvendo esses termos. Vamos definir fórmulas e a relação de *satisfação* por recorrência:

Definição 29. Uma **fórmula** ϕ em uma linguagem $\mathcal{L}$ é o resultado uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_m = \phi$ definida de forma recursiva, onde

1. α_1 é $t_1 = t_2$ para t_1 e t_2 termos ou α_1 é $R(t_1, \dots, t_n)$ se R for um símbolo de relação n -ário e se $t_1, \dots, t_n$ forem termos. Nesse caso diremos que ϕ é satisfeita na interpretação $\mathcal{I}$ na estrutura $\mathcal{M}$, em símbolos

$$\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \phi$$

ou podemos também utilizar a notação da Nota A.1 e se $x_1, \dots, x_n$ forem as variáveis que ocorrem livres nos termos da fórmula ϕ , e $\mathbf{m} \in \mathbf{M}^n$ escreveremos

$$\mathcal{M} \models \phi[\mathbf{m}]$$

quando

$\mathcal{I}(t_1) = \mathcal{I}(t_2)$ (ou $t_1[\mathbf{m}] = t_2[\mathbf{m}]$) - caso a fórmula seja $t_1 = t_2$ ou quando $(\mathcal{I}(t_1), \dots, \mathcal{I}(t_n)) \in R^M$ (ou $(t_1[\mathbf{m}], \dots, t_n[\mathbf{m}]) \in R^m$) - caso a fórmula seja $R(t_1, \dots, t_n)$;

¹Demonstrações dessa natureza - recursões sobre complexidade de termos e fórmulas - serão omitidas.

2. α_i é $\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2}$ se j_1 e j_2 são menores que i . Nesse caso $\mathcal{M} \models \alpha_i[\mathbf{m}]$ se $\mathcal{M} \models \alpha_{j_1}[\mathbf{m}]$ e se $\mathcal{M} \models \alpha_{j_2}[\mathbf{m}]$;
3. α_i é $\alpha_{j_1} \vee \alpha_{j_2}$ se j_1 e j_2 são menores que i . Nesse caso $\mathcal{M} \models \alpha_i[\mathbf{m}]$ se $\mathcal{M} \models \alpha_{j_1}[\mathbf{m}]$ ou se $\mathcal{M} \models \alpha_{j_2}[\mathbf{m}]$;
4. α_i é $\neg \alpha_j$ e j é menor que i , nesse caso $\mathcal{M} \models \alpha_i[\mathbf{m}]$ se, e somente se, não ocorre $\mathcal{M} \models \alpha_j[\mathbf{m}]$;
5. α_i é $\exists x_k(\alpha_j)$ e x_k é variável e j é menor que i . Nesse caso dizemos que α_j ocorre no escopo de $\exists x_k$ em ϕ e $\mathcal{M} \models \alpha_i[\mathbf{m}]$ caso exista $\mathbf{n} \in \mathbf{M}^l$ (para algum l natural) que difira de $\mathbf{m}$ no máximo na coordenada k e $\mathcal{M} \models \alpha_j[\mathbf{n}]$.

Ou, alternativamente, $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \alpha_i$ caso exista interpretação $\mathcal{J}$ que difere de $\mathcal{I}$ apenas na variável x_k e $\mathcal{M} \models_{\mathcal{J}} \alpha_j$.

6. α_i é $\forall x_k(\alpha_j)$ e x_k é variável e j é menor que i . Nesse caso dizemos que α_j ocorre no escopo de $\forall x_k$ em ϕ e $\mathcal{M} \models \alpha_i[\mathbf{m}]$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models \neg(\exists x_k \neg \alpha_j)[\mathbf{m}]$.

Se $m = 1$ diremos que ϕ é **fórmula atômica**. Se uma variável ocorre em uma fórmula fora do escopo de um quantificador, diremos que essa ocorrência da variável é **livre**. Caso contrário, diremos que a variável é **ligada**. Uma fórmula na qual não existam variáveis que ocorram livres é chamada de **sentença**. O conjunto de todas as $\mathcal{L}$ -fórmulas será denotado por $\mathcal{L} - \text{Form}$ e o das $\mathcal{L}$ -sentenças por $\mathcal{L} - \text{Sent}$.

Nota A.2. Se ϕ for uma sentença na linguagem $\mathcal{L}$, então para uma $\mathcal{L}$ -estrutura $\mathcal{M}$ se $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \phi$ para uma interpretação $\mathcal{I}$, então $\mathcal{M} \models_{\mathcal{J}} \phi$ para qualquer interpretação $\mathcal{J}$. Nesse caso, escreveremos simplesmente $\mathcal{M} \models \phi$ sem qualquer menção à interpretação.

Para uma fórmula ϕ podemos construir o conjunto dos valores em M que satisfazem-na. Isso nos dá o conceito de conjunto definível:

Definição 30. Dada uma $\mathcal{L}$ -estrutura $\mathcal{M}$ e ϕ uma fórmula nas variáveis livres $(x_1 \dots, x_l)$, chamamos de conjunto definido por ϕ o menor conjunto $S \subset M^l$ tal que $\mathcal{M} \models \phi[\mathbf{s}]$ para todo $\mathbf{s} \in S$. Se $A \subset M$ e ϕ for uma fórmula na linguagem $\mathcal{L}_A$, então se S for definido por ϕ , dizemos que S é definível com parâmetros em A . Caso $A = M$, diremos apenas que S é definível com parâmetros.

Duas fórmulas ϕ_1 e ϕ_2 nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ são ditas equivalentes se para todo $a \in M^n$ temos $\mathcal{M} \models \phi_1[a]$ se, e somente se, $\mathcal{M} \models \phi_2[a]$. Se S for um conjunto definível com parâmetros, utilizaremos ϕ_S para representar alguma fórmula da classe de equivalência sobre essa relação, ou seja:

$$S = \{s \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi_S[s]\}$$

A.1.2 Modelos e Teorias

No espírito de tratar das relações entre linguagens e estruturas, podemos estar interessados em quais diferentes universos de estruturas podem obedecer a um determinado conjunto de sentenças, como é comumente feito em Álgebra, embora a prática seja adotada por toda a matemática.

Um conjunto de sentenças em uma mesma linguagem é chamado de Teoria e uma estrutura que o satisfaça é chamada de Modelo:

Definição 31. Uma teoria é um conjunto de sentenças T em uma linguagem $\mathcal{L}$. Dizemos que uma teoria T é satisfazível caso exista uma $\mathcal{L}$ -estrutura tal que $\mathcal{M} \models \phi$ para toda $\phi \in T$. Nesse caso, escrevemos $\mathcal{M} \models T$ e dizemos que $\mathcal{M}$ é um **modelo** para a teoria T .

Dada uma teoria T , pode acontecer de todo modelo de T satisfizer uma sentença ϕ , nesse caso dizemos que ϕ é uma consequência semântica de T :

$$T \models \phi$$

Como é comum em matemática, uma demonstração que $T \models \phi$ não envolve trabalhar com todos os modelos de T , mas sim mostrar, através de etapas lógicas, que é necessário que todo modelo de T também satisfaça ϕ . Se a nossa teoria forem adicionados axiomas lógicos e regras de inferência, podemos trabalhar com a noção de prova. Diremos que a fórmula ϕ se deduz de uma teoria T :

$$T \vdash \phi$$

caso exista uma sequência $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ de fórmulas nessa linguagem, onde cada $\phi_i \in T$ ou ϕ_i é obtido através de alguma operação lógica das fórmulas antecedentes e onde a conclusão ϕ_n é a fórmula ϕ . Por exemplo, ϕ_1 poderia ser a fórmula $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$, na teoria, ϕ_2 a fórmula $H(s)$, também na teoria, ϕ_3 a fórmula $H(s) \rightarrow M(s)$, obtida através de ϕ_1 por regras de substituição e ϕ_4 a fórmula $M(s)$, obtida através de ϕ_2 e ϕ_3 por uma regra de destacamento (conhecida como *modus ponens*).

Uma das relações entre os conceitos semânticos de teoria dos Modelos e os sintáticos de teoria da prova é o teorema da Completude de Gödel, que nos garante que o conceito sintático de prova é o suficiente para capturar a consequência semântica:

Teorema A.3 (Teorema da Completude). *Se T é uma $\mathcal{L}$ -Teoria e $T \models \phi$ então $T \vdash \phi$.*

Como o sistema de dedução é correto, a recíproca também é verdadeira (o chamado teorema da Correção) e portanto segue o próximo corolário:

Corolário A.4. *Se T é uma $\mathcal{L}$ -teoria, T é consistente, se, e somente se, T é satisfazível.*

Nesse contexto, podemos entender que T é consistente como a afirmação de que T não deduz logicamente nenhuma contradição, isto é, para toda $\phi \in \mathcal{L} - \text{Form}$, não ocorre que $T \vdash \phi \wedge (\neg\phi)$. Também como consequência do teorema da completude, dada uma teoria consistente T , podemos mergulhá-la em uma teoria maximal $\bar{T}$, bastando para isso considerar $\bar{T} = \{\sigma \in \mathcal{L} - \text{Sent} \mid \mathcal{A} \models \sigma\}$, onde $\mathcal{A} \models T$ é uma estrutura que o teorema da Completude garante a existência.

Por um lado, podemos pensar em todas as estruturas que satisfazem uma determinada teoria, a chamada classe elementar da teoria², e, por outro, podemos pensar na teoria satisfeita por uma determinada estrutura.

Definição 32. Dada uma teoria T , $\text{Mod}(T)$ é definido como a classe de estruturas que satisfazem T , isto é, $\mathcal{M} \in \text{Mod}(T)$, $\mathcal{M} \models T$.

²O teorema de Lowehein-Skolem garante que, na presença de modelos infinitos, a classe de estruturas que satisfaz uma determinada teoria é própria. O melhor cenário possível é a chamada λ -categoricidade, onde, a partir do cardinal λ , a teoria possui apenas um modelo a menos de isomorfismos.

Dada uma estrutura $\mathcal{M}$, chamamos de *teoria da estrutura* $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as sentenças satisfeitas por $\mathcal{M}$:

$$Th(\mathcal{M}) = \{\sigma \in \mathcal{L} - \text{Sent} \mid \mathcal{M} \models \sigma\}$$

Se K for uma classe qualquer de $\mathcal{L}$ -estruturas, então $Th(K) = \{\sigma \in \mathcal{L} - \text{Form} \mid \mathcal{M} \models \sigma \text{ para toda } \mathcal{M} \in K\}$.

Caso trabalhemos com estruturas diferentes dentro de uma mesma linguagem, podemos compará-las. Por exemplo, na linguagem $\mathcal{L}_c$ de corpos, poderíamos estar interessados em mostrar que $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$, o que envolve mostrar que existe uma correspondência de funções e constantes. Tais funções que preservam as informações da estrutura são chamadas de mergulhos:

Definição 33 (Mergulho). Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são estruturas, $i: A \rightarrow B$ é dito um mergulho se:

1. i é uma função injetora;
2. Para todo símbolo de função f na linguagem $\mathcal{L}$ temos $i(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(i(a_1), i(a_2), \dots, i(a_n))$;
3. Para todo símbolo de predicado P na linguagem $\mathcal{L}$ temos $P^A(a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, $P^B(i(a_1), i(a_2), \dots, i(a_n))$.

Para simbolizarmos que existe um mergulho de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$, escrevemos $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$.

Caso o mergulho seja a aplicação inclusão, então diremos que $\mathcal{A}$ é uma subestrutura de $\mathcal{B}$.

De particular interesse nos será o seguinte teorema (Cf. [Mar06, Teorema 2.1.4]).

Teorema A.5 (Teorema da Compacidade). *Se T é uma teoria, então T é satisfazível se, e somente se, para todo $T_0 \subset T$ finito T_0 for satisfazível.*

A.1.3 Tipos

Lema A.6. Um conjunto $\Gamma[x_1, \dots, x_n]$ de fórmulas nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ é consistente com $T \subset L\text{-Sent}$ se, e somente se, cada $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito é consistente com T .

Demonstração. O resultado segue do teorema A.5 na linguagem $\tilde{L} = L \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ onde cada c_i é símbolo de constante, já que $T \cup \Gamma[x_1, \dots, x_n]$ é consistente (em L) se, e somente se, $T \cup \Gamma[c_1, \dots, c_n]$ for consistente em $\tilde{L}$. $\square$

Definição 34. Seja $\mathfrak{A}$ uma L estrutura e $B \subset A$. Se $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$ é um conjunto de $L(B)$ -fórmulas cujas variáveis livres estão contidas em $\{x_1, \dots, x_n\}$, dizemos que $\bar{a} \in A^n$ realiza Γ se $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}]$ para toda $\varphi \in \Gamma$. Nesse caso, escrevemos $\mathfrak{A} \models \Gamma[\bar{a}]$ e dizemos que Γ é realizado em $\mathfrak{A}$.

Lema A.7. Seja $\mathfrak{A}$ uma L -estrutura. Se Γ_0 for um conjunto finito de $L(A)$ -fórmulas nas variáveis livres $(x_1, \dots, x_n)$, então Γ_0 é realizado em $\mathfrak{A}$ se, e somente se, é consistente com $Th(\mathfrak{A})$.

Demonstração. Se Γ_0 é realizado em $\mathfrak{A}$, então, como $\mathfrak{A} \models_{L(A)} Th(\mathfrak{A})$ e $\mathfrak{A} \models_{L(A)} \Gamma_0[\bar{a}]$, segue que $Th(\mathfrak{A}) \cup \Gamma_0$ tem modelo e, portanto, é consistente.

Por outro lado, se Γ_0 é consistente com $Th(\mathfrak{A})$, então $\phi = \bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi$ também o é e, dessa forma, a sentença ψ dada por $\exists x_1 \dots \exists x_n \phi$ pertence a $Th(\mathfrak{A})$ (que é completa). Assim, existe $\bar{a} \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}]$ e, portanto, Γ_0 é realizado em $\mathfrak{A}$. $\square$

Lema A.8. O conjunto $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ de L fórmulas é finitamente satisfazível em $\mathfrak{A}$ se, e somente se, existe uma extensão elementar de $\mathfrak{A}$ em que $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ é realizado.

Demonstração. Se $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ é realizado em alguma extensão elementar de $\mathfrak{A}$, então existe um modelo de $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \cup Th(\mathfrak{A})$ (já que toda extensão elementar satisfaz $Th(\mathfrak{A})$) e, portanto, cada parte finita de Γ é consistente com $Th(\mathfrak{A})$. Por outro lado, se Γ é finitamente satisfazível em $\mathfrak{A}$, cada parte finita é consistente com $Th\mathfrak{A}$ e, pelo teorema da compacidade, Γ é consistente com $Th(\mathfrak{A})$. $\square$

Definição 35 (Tipos). Se $\mathfrak{A}$ for uma L -estrutura e $B \subset A$, um n -tipo em B é um conjunto maximal de $L(B)$ -fórmulas finitamente satisfazíveis em $\mathfrak{A}$ cujas variáveis livres pertencem a $\{x_1, \dots, x_n\}$. O conjunto de todos os n -tipos em B é designado por $S_n^{\mathfrak{A}}(B)$.

Todo elemento $\bar{a} \in A^n$ induz um n -tipo em B dado por

$$tp(\bar{a}/B) = \{\phi(x_1, \dots, x_n) \in L(B) - Form : \mathfrak{A} \models \phi[\bar{a}]\}$$

de forma que $\bar{a}$ realiza $p \in S_n^{\mathfrak{A}}(B)$ quando $p = tp(\bar{a}/B)$.

Proposição A.9. Para toda L -estrutura $\mathfrak{A}$ existe uma extensão elementar $\mathfrak{B}$ que realiza todos os n -tipos.

Demonstração. Para cada $p \in S_n^{\mathfrak{A}}(A)$ adicione constantes novas $c_p^1, \dots, c_p^n$ a L . Se Γ_0 for um subconjunto finito de

$$Th(\mathfrak{A}) \cup \bigcup_{p \in S_n^{\mathfrak{A}}} \{\varphi(c_p^1, \dots, c_p^n) : \varphi \in p\}$$

então tal conjunto é satisfazível (pela definição de n -tipo) e, portanto, segue do Lema A.8 que existe uma extensão elementar que satisfaz todos os n -tipos. $\square$

Definição 36. Se T é uma L -Teoria e $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ é um conjunto de fórmulas, dizemos que $\mathfrak{A}$ modelo de T omite Γ se não realiza Γ . Uma fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ consistente com T isola Γ se

$$T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \rightarrow \psi)$$

para toda $\psi \in \Gamma$. Nesse caso dizemos que Γ é isolado em T .

Teorema A.10 (Omissão de Tipos). Se T é uma teoria enumerável consistente e Γ enumerável e não é isolado em T , então existe um modelo $\mathfrak{A}$ de T que omite Γ .

Demonstração. Seja $T_0 = T$, vamos construir T_∞ maximal consistente em uma linguagem estendida tal que todo modelo de T_∞ omita Γ . Seja D um conjunto enumerável de novas constantes, $(\bar{c}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de D^n e $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de Γ . Dado T_n , faremos T'_n e T_{n+1} da seguinte forma:

1. Se $T_n \cup \{\varphi_n\}$ for inconsistente, $T'_n = T_n$;
2. Se $T_n \cup \{\varphi_n\}$ for consistente e φ_n não for existencial, $T'_n = T_n \cup \{\varphi_n\}$;
3. Se $T_n \cup \{\varphi_n\}$ for consistente e φ for $\exists x \psi$, então, se $c \in D$ for uma constante que não aparece em $T_n \cup \{\varphi_n\}$, o conjunto $T_n \cup \{\varphi_n, \psi(c)\}$ será consistente. Caso contrário, teríamos $T_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \neg \psi(c)$ e, portanto, $T_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \forall x \neg \psi$ e assim $T_n \cup \{\varphi_n\}$ não seria consistente.

Nesse caso, tomamos $T'_n = T_n \cup \{\varphi_n\}$;

4. Como Γ não é isolado em T , existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $T'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{c}_n)\}$ é consistente. Tomamos $T_{n+1} = T'_n \cup \{\neg\sigma(\bar{c}_n)\}$.

Como $T_\infty = \cup_n T_n$ é consistente, possui modelo $\mathfrak{A}$ em $L(D)$ e, pela condição 4, omite Γ . Ainda, como é modelo de $T_\infty \supset T$, $\mathfrak{A}$ é modelo de T . $\square$

O espaço dos n -Tipos

Definição 37. Dada T uma L -teoria, um n -tipo em T é um conjunto maximal consistente com T de fórmulas cujas variáveis livres estão contidas em $\{x_1, \dots, x_n\}$.

A ligação entre os tipos definidos para estruturas e para teorias é que se $\mathfrak{B}$ é subestrutura de $\mathfrak{A}$, então $S_n^{\mathfrak{A}}(B) = S_n(Th(\mathfrak{B}))$ e, se T é completa, então $S_n^{\mathfrak{A}}(\emptyset) = S_n(T)$ para qualquer modelo $\mathfrak{A}$ de T .

Seja $\varphi \in L - Form$ cujas variáveis livres estão contidas em $\{x_1, \dots, x_n\}$. Considere $[\varphi] = \{p \in S_n(T) : \varphi \in p\}$.

Lema A.11. 1. $[\varphi] = [\psi]$ se, e somente se, $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$;

2. $[\varphi] \cup [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;

3. $[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;

4. $S_n(T) \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$.

Demonstração. 1. Se não fosse o caso, então $\varphi \wedge \neg\psi$ ou $\neg\varphi \wedge \psi$ seria consistente com T e daí $[\varphi] \neq [\psi]$;

2. $p \in [\varphi] \cup [\psi] \Leftrightarrow \varphi \in p$ ou $\psi \in p \Leftrightarrow$ (usando que p é maximal consistente) $\varphi \vee \psi \in p$;

3. Igual a 2;

4. Se p é tal que $\varphi \notin p$, como p é maximal consistente $\neg\varphi \in p$ e a volta é imediata por 1. $\square$

Corolário A.12. $\mathcal{B} = \{[\varphi] : \varphi \in L - Form \wedge VL(\varphi) \subset \{x_1, \dots, x_n\}\}$ é base de uma topologia compacta Hausdorff, totalmente desconexa e zero-dimensional em S_n .

Demonstração. Pelo lema A.11 $\mathcal{B}$ é base de uma topologia (propriedade 3 do Lema supracitado). O espaço S_n é zero-dimensional, já que, pela propriedade 4, todo aberto básico é um aberto-fechado. Ainda, se $q \neq p$ são tipos, então existe $\phi \in q \setminus p$ e, portanto, $q \in [\phi]$ enquanto $p \in [\neg\phi]$, ou seja, o espaço é Hausdorff e totalmente desconexo.

Para a compacidade, tome $F_n = [\varphi_m]$ uma sequência de fechados com intersecção finita. Então para qualquer coleção Γ_0 finita de $\Gamma = \{\varphi_m : m \in \mathbb{N}\}$ existe p um n -tipo tal que $\Gamma_0 \subset p$ e portanto Γ_0 é consistente com T . Pelo Lema A.6, Γ é consistente com T e pode ser estendida a um tipo q e, portanto, $q \in \bigcap_n F_n$. $\square$

Apêndice B

Topologia

Definição 38. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é compacto se uma das condições equivalentes a seguir for satisfeita:

1. Toda cobertura $\{U_i : i \in I\}$ de X por abertos admite uma subcobertura finita;
2. Se $\{F_i : i \in I\}$ é uma família de fechados em X tal que $\bigcap \{F_j : j \in J\} \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$ finito, então $\bigcap \{F_i : i \in I\} \neq \emptyset$.

Definição 39. Seja X um espaço topológico. Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma cobertura de X por abertos, chamamos de ordem dessa cobertura o menor número $n \in \mathbb{N}$ tal que cada ponto de X está contido em no máximo n elementos da cobertura.

Definimos a dimensão por cobertura de X como o menor n tal que qualquer cobertura de X por abertos admite um refinamento com ordem $n + 1$ ou inferior e escrevemos $\dim_{\text{cov}} X = n$. Caso não exista um mínimo, dizemos que a dimensão por cobertura de X é infinita.

B.0.1 Axiomas de Separação

Lema B.1. Se T é um espaço topológico normal (não necessariamente Hausdorff) e $x \in T$ é um ponto fechado, então para cada aberto O que contém x existe um aberto U tal que $x \in U \subset \text{cl}(U) \subset O$.

Demonstração. Basta usar a normalidade em $\{x\}$ e $X \setminus O$ e obtemos abertos disjuntos U e W tais que $x \in U$, $X \setminus O \subset W$ e, logo, $x \in U \subset \text{cl}(U) \subset X \setminus W \subset O$. $\square$

Apêndice C

Categorias e Feixes

C.1 Categorias

Nesta seção, vamos apresentar as definições que concernem à teoria das categorias, feixes e cohomologias e foram baseadas em [Sta17] e [Bre97].

Definição 40. Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em:

1. Uma classe de objetos $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
2. Uma classe de morfismos $\text{Hom}(\mathcal{C})$;
3. Duas operações: dom e cod, que associam cada elemento f de $\text{Hom}(\mathcal{C})$ a um objeto $\text{dom}(f) = X$ e um objeto $\text{cod}(f) = Y$, representado por $f: X \rightarrow Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$. Nesse caso, dizemos que f é um elemento de $\text{Hom}(X, Y)$.

Uma coleção de objetos e morfismos é chamada de diagrama. Dizemos que um diagrama é comutativo se todos os morfismos com o mesmo domínio e codomínio desse diagramas são iguais.

Que satisfazem:

CAT1 Se f é um elemento de $\text{Hom}(X, Y)$ e se g é um elemento de $\text{Hom}(Y, Z)$, existe um elemento $g \circ f$ de $\text{Hom}(X, Z)$ chamado composição de morfismos, denotado pela comutatividade do seguinte diagrama

$$(C.1) \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \end{array}$$

ainda, se X, Y, Z, W são elementos de $\text{Obj}(\mathcal{C})$, com h em $\text{Hom}(X, Y)$, g em $\text{Hom}(Y, Z)$, f em $\text{Hom}(Z, W)$, então $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, ou na comutatividade do seguinte diagrama

$$(C.2) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h} & Y & & \\ & \searrow g \circ h & \nearrow f \circ g & & \\ \downarrow (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) & & & & \downarrow g \\ W & \xleftarrow{f} & Z & & \end{array}$$

CAT2 Para cada X em Obj existe um elemento $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$ tal que, para todos objetos Y e Z e f em $\text{Hom}(Y, X)$ e g em $\text{Hom}(X, Z)$, temos $\text{id}_X \circ g = g$ e $f \circ \text{id}_Y = f$, ou na comutatividade do seguinte diagrama

$$(C.3) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow f & \downarrow \text{id}_X \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & g \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Z \end{array}$$

Exemplo C.1. Algumas categorias e seus nomes usuais:

Set: A categoria cujos objetos são todos os conjuntos e dados $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$, $f: X \rightarrow Y$ é uma função de X para Y ;

Ab: A categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos.

Definição 41. Dadas duas categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, um funtor (covariante) $\mathcal{F}$ da categoria $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ consiste em:

1. Uma função $\mathcal{F}: \text{Obj}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{B})$;
2. Dados $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ uma função $\mathcal{F}: \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$.

Ainda, dizemos que um funtor é contravariante se, ao invés da condição 2. acima, o funtor satisfizer:

- 2* Dados $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ uma função $\mathcal{F}: \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$.

ou seja, um funtor contravariante inverte os morfismos.

Tais que $\mathcal{F}(\text{id}_X) = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$ e, se f, g são morfismos componíveis, $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ ou $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$, caso o funtor seja contravariante.

C.1.1 Construções e Categorias Relevantes

Definição 42. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, se X_1 e X_2 são objetos de $\mathcal{C}$, o **produto** (quando existe) designa o objeto $X_1 \times X_2$ e os morfismos $\pi_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$) tais que, para qualquer outro objeto Y e qualquer par de morfismos $f_i: Y \rightarrow X_i$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \swarrow f_1 & \downarrow \exists! f & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X_1 \times X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \end{array}$$

Nota C.2. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria cujos objetos são conjuntos (possivelmente com alguma estrutura) e para objetos X, Y em $\text{Obj}(\mathcal{C})$ $X \rightarrow Y$ se, e somente se, $X \subset Y$, então, dados quaisquer X, Y objetos, existe $X \times Y$ e $X \times Y = X \cap Y$. Basta notar que $X \cap Y$ satisfaz a propriedade universal da definição 42.

Definição 43. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, um **objeto inicial** é algum $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe exatamente um morfismo $I \rightarrow X$. De forma contrária, um **objeto terminal** T é aquele para o qual existe exatamente um morfismo $X \rightarrow T$ para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. Um **objeto nulo** é um objeto inicial e final.

Definição 44. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $\phi \in \text{Hom}(A, B)$ é dito constante se para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e todas $f, g \in \text{Hom}(X, A)$ temos $\phi \circ f = \phi \circ g$. De forma similar, ϕ é dito co-constante se para todo $f, g \in \text{Hom}(B, Y)$ temos $f \circ \phi = g \circ \phi$. Um **zero morfismo** é aquele ao mesmo tempo constante e co-constante.

Dizemos ainda que uma categoria possui zero morfismos se para todos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe um morfismo $0_{AB} \in \text{Hom}(A, B)$ tal que, para todos objetos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e para todos os morfismos $f \in \text{Hom}(Y, Z)$, $g \in \text{Hom}(X, Y)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \downarrow g & \searrow 0_{XZ} & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\quad} & Z \end{array}$$

0_{XY} 0_{YZ}

Ou seja, dizemos que uma categoria possui zero morfismos se todo $\text{Hom}(A, B)$ possui um zero morfismo, para todo par $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Definição 45. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria com zero morfismos, dizemos que $f \in \text{Hom}(A, B)$ possui **núcleo** (K, k) , onde $K \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $k \in \text{Hom}(K, A)$ se $f \circ k$ é o zero morfismo $0_{KB} \in \text{Hom}(K, B)$ e é universal para essa propriedade, isso é, para qualquer par (K', k') com essa propriedade, existe um único morfismo $\phi \in \text{Hom}(K', K)$ tal que $k \circ \phi = k'$ e $0_{KY} \circ \phi = 0_{K'Y}$ (ver diagrama abaixo).

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow & \uparrow k & \searrow f & \\ & & K & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \nearrow k' & \uparrow \exists! \phi & \searrow 0_{KB} & \\ K' & & & & \end{array}$$

$0_{K'Y}$

O conceito dual é o de conúcleo. Dizemos que um par (Q, q) é o **conúcleo** do morfismo f se $Q \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $q \in \text{Hom}(B, Q)$ e se $q \circ f$ é zero morfismo 0_{AQ} e se (Q, q) é universal em relação a essa propriedade.

Vale notar que, a despeito da Def. 45, é frequente nos referirmos apenas ao objeto K e não ao morfismo k .

C.2 Feixes

Definição 46. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, um **pré-feixe** (de grupos abelianos) é um funtor $\mathcal{F}$ contravariante de $\mathcal{C}$ em **Ab**. Se $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, então $\mathcal{F}(U)$ é chamado de grupo de seções sobre U . Se $s \in \mathcal{F}(U)$, chamamos s de seção, e se $f: V \rightarrow U$, sabemos que existe um morfismo $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. Esse morfismo é chamado de **mapa de restrição**, e frequentemente escreveremos $\mathcal{F}(f)(s) = s|_V$.

Quando nos referimos a um pré-feixe sobre um espaço topológico X , queremos dizer um pré-feixe sobre a categoria cujos objetos são os abertos de X e os morfismos são as inclusões. Nesse caso

$f: V \rightarrow U$ significa que $V \subset U$ e se $s \in \mathcal{F}(U)$, podemos trabalhar com s *restrito* a V , daí o nome mapa de restrição.

A próxima definição serve para axiomatizar o conceito de cobertura e será necessária para tratar de sítios.

Definição 47. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, uma **cobertura** sobre $\mathcal{C}$ consiste em uma classe $\text{Cov}(\mathcal{C})$ cujos elementos são famílias de morfismos com codomínio fixo, representados por $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ tal que:

1. Para todo $U \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, se $f: U \rightarrow V$ é um isomorfismo $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$;
2. Se existe um morfismo $f: W \rightarrow U$ e se $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$, então $\{U_i \times_U W \rightarrow W\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$;
3. Se $\{U_{ij} \rightarrow U_i\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ e se $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$, então $\{U_{ij} \rightarrow U\}_{(i,j) \in I \times J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.

Chamamos $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ de **sítio** sobre $\mathcal{C}$.

Definição 48. Um **feixe** é um pré-feixe sobre um sítio $(\mathcal{C}, \text{Cov}(\mathcal{C}))$ (respect. sobre um espaço topológico $\mathcal{C}$) tal que, para qualquer família de morfismos com alvo fixo $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ em $\text{Cov}(\mathcal{C})$ (respect. qualquer cobertura de um aberto U por abertos $(U_i)_{i \in I}$), então:

1. Se para todo $i \in I$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e para todo $i, j \in I$, $s_i|_{U_i \times U_j} = s_j|_{U_i \times U_j}$ (respect. $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$), então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$;
2. Se $s, t \in \mathcal{F}(U)$ são tais que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para todo $i \in I$, então $s = t$.

Para alguma coesão na definição de feixes precisamos conseguir discernir quando dois feixes se comportam similarmente, para isso definimos o conceito de morfismos de pré-feixes¹

Definição 49. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$ dois pré-feixes sobre $\mathcal{C}$. Dizemos que f é um morfismo de pré-feixes $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}$ se para todo objeto U existe um morfismo $f_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$, e se V for outro objeto, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{P}(V) \\ \rho_{VU} \downarrow & & \downarrow \rho'_{VU} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{P}(U) \end{array}$$

Onde ρ_{VU} e ρ'_{VU} são os mapas de restrição dos pré-feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$. Com tal estrutura, definimos $\text{PSh}(\mathcal{C})$, a **categoria dos pré-feixes** sobre $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$ forem feixes, dizemos que f é um morfismo de feixes e, similarmente, definimos $\text{Sh}(\mathcal{C})$, a **categoria dos feixes** sobre $\mathcal{C}$.

Dados $f, g \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{P})$, podemos formar o morfismo $f - g \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ por $(f - g)|_U(s) = f|_U(s) - g|_U(s)$ e $0 \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ sendo o morfismo que associa $0|_U(s) = 0_{\mathcal{P}(U)}$. Com essa estrutura, $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ se torna um grupo abeliano.

¹Na verdade, esse é só um caso particular de morfismos em uma categoria de funtores, que são transformações naturais.

Espaço Étalé e feixe de Seções

Dado um pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre um espaço topológico X , é frequente que $\mathcal{F}$ tenha uma estrutura simples *localmente*. Nesse caso, pode ser proveitoso trabalhar com uma versão equivalente da definição de feixe, chamada de *espaço étalé*. No que se segue nesta seção, X será um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre X , e as próximas definições e teoremas restringir-se-ão a pré-feixes sobre espaços topológicos.

Definição 50. Dado $x \in X$, a fibra² de $\mathcal{F}$ sobre x , $\mathcal{F}_x$ é $\dot{\bigcup}_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim_x$, onde a união disjunta é tomada sobre todos os abertos U que contêm x e onde a relação $\sim_x$ é definida por

$$\text{Se } s_i \in U_i, s_j \in U_j, \text{ então } s_i \sim_x s_j \Leftrightarrow \exists W \subset U_i \cap U_j, x \in W, W \text{ aberto e } s_i|_W = s_j|_W$$

$\mathcal{F}_x$ herda a estrutura de grupo de $\mathcal{F}(U)$ da seguinte forma:

$$[s_i, U_i] + [s_j, U_j] = [s_i + s_j, U_i \cap U_j]$$

ou,

$$s_x + t_x = (s + t)_x$$

e também

$$-(s_x) = (-s)_x$$

A verificação da independência de representantes é trivial. Para o primeiro caso: se $[s'_i, U'_i] = [s_i, U_i]$ e $[s'_j, U'_j] = [s_j, U_j]$, de modo que, se W_i for o aberto tal que $s'_i|_{W_i} = s_i|_{W_i}$ e W_j o aberto tal que $s'_j|_{W_j} = s_j|_{W_j}$, então $(s'_i + s'_j)|_{W_i \cap W_j} = (s_i + s_j)|_{W_i \cap W_j}$.

Definição 51. O **espaço étalé** do pré-feixe $\mathcal{F}$ é um espaço topológico $E\mathcal{F}$ e uma função $\pi: E\mathcal{F} \rightarrow X$, onde $E\mathcal{F}$ é o conjunto $\dot{\bigcup}_{x \in X} \mathcal{F}_x$ (reunião disjunta) dotado da topologia gerada pelos abertos básicos $\{s_x : x \in W\}$ para todos os pares W aberto e $s \in \mathcal{F}(W)$ e com a projeção $\pi: E\mathcal{F} \rightarrow X$ que mapeia $s_x \mapsto x$.

Com a definição 51, temos as seguintes propriedades:

Proposição C.3. *Se $(E\mathcal{F}, \pi)$ é o espaço étalé do pré-feixe $\mathcal{F}$, então:*

1. π é um homeomorfismo local;
2. $\pi^{-1}(x)$ é um grupo para todo $x \in X$;
3. As operações de grupo são contínuas, i.e., se $u, v \in E\mathcal{F}$ são tais que $\pi(u) = \pi(v)$, então $(u, v) \mapsto u - v$ é uma função contínua.

Demonstração. 1. Dado $f \in E\mathcal{F}$, existe $x \in X$ tal que $f \in \mathcal{F}_x$. Seja $W \ni x$ aberto de X . Então, o conjunto $V = \{f_x : x \in W\}$ é um aberto básico de $E\mathcal{F}$, e se $U \subset W$ é aberto, então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em V (e de fato aberto em $E\mathcal{F}$), assim, π é contínua. $\pi|_V$ tem inversa π^{-1} que $x \mapsto f_x$, e se $O \subset V$ é aberto (de V e de $E\mathcal{F}$), então podemos supor sem perda de generalidade que $O = \{f_x : x \in A\}$ para algum $A \subset W$ e, portanto, a imagem inversa de π^{-1} por O é precisamente A , assim π^{-1} também é contínua e π é um homeomorfismo local;

²Na literatura anglófona, *stalk*.

2. Segue porque $\pi^{-1}(x) = \mathcal{F}_x$;
3. Considere $S \subset E\mathcal{F}^2$ o subespaço formado por todos os pares (u, v) com $\pi(u) = \pi(v)$ e $\varphi: S \rightarrow E\mathcal{F}$ que leva $(u, v) \mapsto u - v$. Se $U \subset E\mathcal{F}$ é aberto básico, então $U = \{g_x : x \in O_U\}$ para algum $O_U \in X$ e alguma $g \in \mathcal{F}(O_U)$. Se $f \in \mathcal{F}(O_U)$, então,

$$\{g_x + f_x : x \in O_U\} \text{ e } \{f_x : x \in O_U\}$$

são abertos de $E\mathcal{F}$, de forma que

$$\{(g_x + f_x, f_x), x \in O_U\} = (\{g_x + f_x : x \in O_U\} \times \{f_x : x \in O_U\}) \cap S$$

ou seja, $\{(g_x + f_x, f_x), x \in O_U\}$ é aberto em S . Logo

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(O_U)} \{(g_x + f_x, f_x), x \in O_U\}$$

□

Definição 52. Dado $Y \subset X$, uma seção sobre/em Y é uma função $s: Y \rightarrow E\mathcal{F}$ contínua que associa cada $y \in Y$ a um elemento em $\mathcal{F}_y$, ou seja $f \in E\mathcal{F}$ tal que $\pi(f) = y$. Se s, v são seções em Y , então definimos: $s + v$ como a função que associa $y \in Y$ a $s(y) + v(y)$. Da mesma forma, podemos definir a seção oposta de s . A seção $0_Y: Y \rightarrow E\mathcal{F}$ que associa $y \mapsto 0_y \in \mathcal{F}_y$, onde 0_y é o elemento neutro do grupo $\mathcal{F}_y$, existe para todo $Y \subset X$, e isso torna o conjunto $E\mathcal{F}(Y)$ de todas as seções sobre Y um grupo de forma natural.

Se $Y' \subset Y$, considere $\varphi_{Y'Y}: E\mathcal{F}(Y) \rightarrow E\mathcal{F}(Y')$ que $\varphi_{Y'Y}(s) = s|_{Y'}$. É imediato verificar que $\varphi_{Y'Y}$ é um homomorfismo de grupos. Em particular, a associação funtorial de U aberto com $E\mathcal{F}(U)$ é um pré-feixe sobre $E\mathcal{F}$, chamado de pré-feixe de seções.

Vamos listar algumas consequências da proposição C.3 e da definição de seção.

Proposição C.4. Se $(E\mathcal{F}, \pi)$ é o espaço étalé do pré-feixe $\mathcal{F}$, então:

1. π é uma aplicação aberta;
2. Para todo $x \in X$ existe $U \ni x$ aberto tal que $s: U \rightarrow E\mathcal{F}$ é uma seção.

Demonstração. 1. Segue porque π é homeomorfismo local: Se $s \in \pi(U)$, com U aberto, então cada $x \in U$ possui uma vizinhança U_x onde $\pi|_{U_x}$ é um homeomorfismo. Mas, então, $\pi(U_x \cap U)$ é aberto em $\pi(U)$ e, consequentemente, em X , portanto, $\pi(U) = \bigcup_{x \in U} \pi(U_x \cap U)$ também é aberto.

2. Seja U_x vizinhança de x com $\pi|_{U_x}$ homeomorfismo. Então $s = (\pi|_{U_x})^{-1}: \pi(U_x) \rightarrow U_x$ é uma seção aberta sobre x . Ademais, s é uma aberta.

□

Teorema C.5. Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe sobre X , então o pré-feixe de seções de $E\mathcal{F}$ é um feixe.

Demonstração. Seja U aberto de EF e $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura de U por abertos e $s_i \in EF(U_i)$ tal que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Seja $s : Y \rightarrow EF$ definido por $s(y) = s_i(y)$, se $y \in U_i$. Como π é um homeomorfismo local e $\pi \circ s = Id_U$, então s é contínua e, portanto, $s \in EF(U)$. Ademais, s é única.

Suponha agora que $s, t \in EF(U)$ são seções tais que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para todo $i \in I$. Em se tratando de uma restrição de funções, isso torna $s = t$. $\square$

Definição 53. Dado espaço étalé EF e um pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre X , o morfismo de pré-feixes θ (chamado doravante de morfismo natural) será definido para cada $U \subset X$ aberto como

$$\begin{aligned} \theta_U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow EF(U) \\ s &\mapsto \theta_U(s) \\ x &\mapsto s_x \in EF(U) \end{aligned}$$

Para verificar que o morfismo natural é de fato um morfismo de pré-feixes, ainda é necessário verificar que se $s \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subset U$, então $\theta_U(s)|_V = \theta_V(s|_V)$, mas a verificação é imediata, porque s_x é definido localmente.

Teorema C.6. $\mathcal{F}$ é um pré-feixe sobre X , então o morfismo natural θ é um isomorfismo se, e somente se, $\mathcal{F}$ é um feixe.

Demonstração. Vamos mostrar que se θ_U é monomorfismo para todo $U \subset X$ aberto se, e somente se, para toda cobertura $\{U_i\}$ por abertos de U e todos $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tais que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ (para todo $i \in I$) temos $s = t$.

Suponha que θ_U é um monomorfismo, isto é, $\ker(\theta_U) = 0_{\mathcal{F}(U)}$, e seja $\{U_i\}$ uma cobertura por abertos de U com s, t nas condições acima. Então, como θ_U é homomorfismo e $(s-t)|_{U_i} = 0|_{U_i}$, temos $\theta_U(s-t) = 0_{EF(U)}$ e, portanto, $s-t = 0_{\mathcal{F}(U)}$, ou seja, $s = t$. Por outro lado, se $s_x = \theta_U(s)(x) = 0_x$ para todo $x \in U$, i.e., para cada $x \in U$ existe uma vizinhança V_x de x em U com $s|_{V_x} = 0|_{V_x}$, considere a cobertura $\{V_x : x \in U\}$ de U . Nesse caso, a condição de unicidade nos garante que $s = 0$ e, portanto, θ_U é monomorfismo.

Vamos mostrar agora que se θ_U for monomorfismo para todo $U \subset X$ aberto, então θ_U é sobrejetora se, e somente se, $\mathcal{F}$ é um feixe.

Primeiro, se θ_U for sobrejetora e se para todo $i \in I$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ e para todo $(i, j) \in I^2$ $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, considere a seção $s \in EF(U)$ definida por $s(x) = \theta_{U_i}(s_i)(x)$ se $x \in U_i$ ($s|_{U_i} = \theta_{U_i}(s_i)$). Para cada $x \in U$, se $x \in U_i$ como $\pi \circ (\theta_{U_i}(s_i)) = id_{U_i}$ e π é homeomorfismo local, então s é contínua em x . Assim, s é contínua e, portanto, $s \in EF(U)$. Como θ_U é sobrejetora, existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\theta_U(t) = s$. Mas para essa t devemos ter $\theta_{U_i}(t|_{U_i}) = \theta_U(t)|_{U_i} = s|_{U_i} = \theta_{U_i}(s_i)$. Como θ_U é monomorfismo, isso implica que $t|_{U_i} = s_i$, como desejado.

Por outro lado, se $\mathcal{F}$ for feixe e se $s \in EF(U)$, vamos mostrar que existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\theta_U(t) = s$. Como s é seção e U é aberto, então $s(U)$ é aberto de $EF(U)$, ou seja, existem abertos U_i de U tais que $s = \bigcup_{i \in I} \{s_{i_x} : x \in U_i\}$ para $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Se $x \in U_i \cap U_j$, então $s(x) \in \mathcal{F}_x$ e, portanto, $s_{i_x} = s(x) = s_{j_x}$ e, portanto, para toda vizinhança V de x em $U_i \cap U_j$ temos $s_i|_V = s_j|_V$. Da condição de θ ser monomorfismo, concluímos que $s|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Portanto, como $\mathcal{F}$ é feixe, existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{U_i} = s_i$. Fixado $i \in I$, se $x \in U_i$, temos $\theta_U(t)|_{U_i}(x) = \theta_{U_i}(t|_{U_i})(x) = \theta_{U_i}(s_i)(x) = s_{i_x} = s(x)$. Dessa forma, $\theta_U(t) = s$ e θ_U é sobrejetora. $\square$

Proposição C.7. *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes sobre o espaço topológico X , então $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes (como definido na Def. C.2) se, e somente se, ϕ induz de forma natural uma função contínua entre $E\mathcal{F}$ e $E\mathcal{G}$, $\phi(\mathcal{F}_x) \subset \mathcal{G}_x$ e $\phi|_{\mathcal{F}_x} = \phi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ sendo um homomorfismo de grupos para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponha que $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ seja uma função contínua que preserva fibras e sejam θ e μ os morfismos naturais de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ respectivamente. Se $s \in \mathcal{F}(U)$, definiremos $\Phi_U(s)$ impondo a comutatividade no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \theta_U \downarrow & & \uparrow \mu_U \\ E\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi} & E\mathcal{G}(U) \end{array}$$

Como todos os componentes são homomorfismos, também o é Φ_U . Ainda precisamos mostrar que Φ_U respeita restrições, mas isso é imediato, já que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & \mathcal{G}(U) & \\ & \uparrow \theta_U & & \uparrow \mu_U & \\ & E\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi} & E\mathcal{G}(U) & \\ \rho_{UV} \swarrow & \downarrow res_{UV} & & \downarrow res_{UV} & \searrow \rho'_{UV} \\ & E\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi} & E\mathcal{G}(U) & \\ & \uparrow \theta_V & & \uparrow \mu_V & \\ & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\Phi_V} & \mathcal{G}(V) & \end{array}$$

Por outro lado, suponha que Φ seja uma transformação natural entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Dado $x \in X$, $F \in \mathcal{F}_x$ é à classe de equivalência de (f, U) segundo a relação $\sim_x$ (conferir Def. 50). Considere ϕ_x que associa $F \in \mathcal{F}_x$ a classe de equivalência de $(\Phi_U(f), U)$ segundo a relação $\sim_x$. Dessa forma, ϕ_x preserva fibras por definição e, sendo Φ_U um homomorfismo e a estrutura de grupo de $\mathcal{F}_x$ herdada das classes de equivalência, então ϕ_x é um homomorfismo. Como a união disjunta dos $\mathcal{F}_x$ forma $E\mathcal{F}$, considere a função ϕ tal que $\phi|_{\mathcal{F}_x} = \phi_x$. Se $f \in \mathcal{F}(U)$, então ϕ associa $\theta_U(f)$ a $\mu_U(\Phi_U(f))$, portanto ϕ é contínua, uma vez que as projeções em U são homeomorfismos locais e levam ϕ na identidade. $\square$

Embasados nos resultados dessa seção, utilizaremos de forma intercambiável a definição de feixe apresentada na Def. 48 e a de espaço étalé relacionado a um feixe, Def. 51, alternando conforme a conveniência da situação e, portanto, não mais utilizaremos a notação $E\mathcal{F}$, utilizando de forma ambígua (porém justificável) $\mathcal{F}$.

C.2.1 Imagem direta e Imagem Inversa de Feixes

A teoria de feixes desenvolvida até esse ponto nos permite alguma coesão com o conceito de morfismo de feixes, criando a categoria de feixes $\text{Sh}(X)$ sobre o espaço topológico X . Porém, ainda não possuímos ferramentas para compararmos feixes em espaços topológicos diferentes. No caso de

existir uma função contínua ligando os dois espaços topológicos, no entanto, isso pode ser feito e esta será nossa próxima definição:

Definição 54. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$, definimos $f_*\mathcal{F} \in \text{PSh}(Y)$ como o pré-feixe que associa o aberto $U \subset Y$ com o grupo abeliano $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$, chamado de **imagem direta** de $\mathcal{F}$. Como essa associação funtorial satisfaz trivialmente as propriedades de feixe, na verdade $f_*\mathcal{F} \in \text{Sh}(Y)$.

Da mesma forma, se $\mathcal{G} \in \text{Sh}(Y)$, definimos $f^*\mathcal{G}$ como o feixe dado por:

$$f^*\mathcal{G} = \{(x, s) \in X \times \mathcal{G} \mid f(x) = \pi_{\mathcal{G}}(s)\}$$

onde $\pi_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow Y$ é a projeção canônica de $\mathcal{G}$. A projeção de $f^*\mathcal{G}$ é definida por $\pi(x, s) = s$. $f^*\mathcal{G}$ é chamado de **imagem inversa** de $\mathcal{G}$. À luz do teorema C.6, $f^*\mathcal{G}$ é um feixe (mostraremos na próxima proposição que π é um homeomorfismo local e detalharemos a estrutura de grupo de $\pi^{-1}(x)$).

Proposição C.8. *Nas condições da Def. 54, a projeção $\pi: f^*\mathcal{G} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local e a estrutura de grupo em $f^*\mathcal{G}$ é obtida através da imposição que a função $f_x^*(b) = (x, b)$ seja um isomorfismo de grupos:*

$$f_x^*: \mathcal{G}_{f(x)} \rightarrow f^*\mathcal{G}_x$$

E com tal estrutura as operações de grupo são contínuas.

Demonstração. Seja $x \in X$. Considere $y = f(x) \in Y$ e uma seção $s: U \rightarrow \mathcal{G}$ aberta sobre y (que existe em virtude da Prop. C.4). Então, o aberto $V = (f^{-1}(U) \times s(U)) \cap f^*\mathcal{G}$ é tal que $\pi|_V(x, b) = \{(x, sf(x)) : x \in f^{-1}(U)\}$ e, assim, π é homeomorfismo local. $\square$

Usaremos sem demonstração o fato de que f^* e f_* são adjuntos, isto é (Cf. [Bre97, Cap I, Seção 4])

$$\text{Hom}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$$

Definição 55. Se X é um espaço topológico e $\mathcal{F} \in \text{Sh}(X)$, dizemos que $\mathcal{F}$ é dito **macio** (respect. **mole**)³ se para todo fechado U (respect. aberto) de X o mapa de restrição $\Gamma(X) \rightarrow \Gamma(U)$ é sobrejetor.

³O termo utilizado na literatura anglófona é *flabby* (mole) ou *soft* (macio).

Referências Bibliográficas

- [Bre97] G Bredon. *Sheaf Theory (Graduate Texts in Mathematics, 170)*. Springer, New York, 1997. 24, 25, 28, 32, 33, 47, 55
- [CC83] Michel Carral e Michel Coste. Normal spectral spaces and their dimensions. *Journal of Pure and applied Algebra*, 30(3):227–235, 1983. 17, 28
- [Del85] Hans Delfs. The homotopy axiom in semialgebraic cohomology. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 355:108–128, 1985. 24, 33
- [DVdD88] Jan Denef e Lou Van den Dries. P-adic and real subanalytic sets. *Annals of Mathematics*, 128(1):79–138, 1988. 21
- [EJP06] Mário J Edmundo, Gareth O Jones e Nicholas J Peatfield. Sheaf cohomology in o-minimal structures. *Journal of Mathematical Logic*, 6(02):163–179, 2006. 3, 7, 17
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. 8
- [EO04] Mário J Edmundo e Margarita Otero. Definably compact abelian groups. *Journal of Mathematical Logic*, 4(02):163–180, 2004. 34
- [EW08] Mário Edmundo e Arthur Woerheide. Comparison theorems for o-minimal singular (co) homology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(9):4889–4912, 2008. 34
- [Hoc69] Melvin Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142:43–60, 1969. 8
- [HPP08] Ehud Hrushovski, Ya’acov Peterzil e Anand Pillay. Groups, measures, and the nip. *Journal of the American Mathematical Society*, 21(2):563–596, 2008. 34
- [KPS86] Julia F Knight, Anand Pillay e Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(2):593–605, 1986. 1, 3
- [Mar06] David Marker. *Model theory: an introduction*, volume 217. Springer Science & Business Media, 2006. 3, 4, 12, 42
- [Pil88] Anand Pillay. Sheaves of continuous definable functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(4):1165–1169, 1988. 33
- [Pil11] Jonathan Pila. O-minimality and the andré-oort conjecture for $\mathbb{C}^n$. *Annals of mathematics*, páginas 1779–1840, 2011. 2
- [Sta17] The Stacks Project Authors. Stacks project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2017. 22, 47
- [Tar33] Alfred Tarski. O conceito de verdade na linguagem das ciências dedutivas. *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych*, 34(13-172):198, 1933. 37

- [VdD84] Lou Van den Dries. Remarks on tarski's problem concerning $(\mathbb{R}, +, *, \exp)$. 112:97–121, 1984. [1](#)
- [VdD98] Lou Van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*. Cambridge university press, 1998. [2](#), [3](#), [4](#), [21](#), [33](#)
- [Wil96] Alex J Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential function. páginas 1051–1094, 1996. [2](#)
- [Woe96] Arthur Anderson Woerheide. *O-minimal homology*. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996. [34](#)

Índice Remissivo

- Categoria, 47
- Cobertura, 50
- Cohomologia
 - Grupo O-minimal de, 27
- Diagrama, 47
 - Comutativo, 47
- Dimensão
 - de Krull, 8
- Espaço
 - Espectral, 8
 - Irredutível, 8
- Espaço Étalé, 51
- Especialização, 8
- Espectro O-Minimal, 12
- Estrutura, 37
- Extensão por zero, 24
- Fórmula, 39
- Atômica, 40
- Feixe, 50
 - Categoria de Pré-Feixes, 50
 - Categoria dos, 50
 - Imagem direta, 55
 - Imagem inversa, 55
 - Pré-feixe, 49
- Functor, 48
 - Til O-Minimal, 22
- Generalização, *veja* Especialização
- Interpretação, 39
- Linguagem
 - de Primeira Ordem, 38
- Mapa de Restrição, 49
- Morfismo
 - Zero, 49
- Morfismos, 47
- Núcleo, 49
- Objeto
 - Inicial, 48
 - Nulo, 48
 - Terminal, 48
- Objetos, 47
 - Produto de, 48
- Sítio, 50
- Sentença, 40
- Teorema
 - da Completude, 41
- Termo, 39
- Tipo, 43
- Variável
 - Ligada, 40
 - Livre, 40