Combinações de Lógicas Modais Não-normais

Rogério Augusto dos Santos Fajardo

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Finger**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP (processo 02/10369-7).

São Paulo, setembro de 2004

Combinações de Lógicas Modais Não-normais

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação de mestrado devidamente
corrigida e defendida por Rogério Fajardo
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, setembro de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Marcelo Finger - IME-USP
- Profa. Dra. Maria Ângela Weiss - IME-USP
- Prof. Dr. Mario Roberto Folhadela Benevides - UFRJ

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, por toda ajuda que me deram.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Marcelo Finger, pelo imenso apoio e incentivo que tem me dado desde os primeiros meses da Graduação.

Agradeço à FAPESP, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos os meus colegas, pelo companheirismo e amizade sincera em todos os momentos.

Agradeço a todos os professores do IME, não só pelos excelentes ensinamentos passados, mas por todo carinho e atenção que nos têm concedido.

Por fim, um agradecimento especial a todos os meus ex-professores, de matemática ou não. A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas formas de combinar sistemas de Lógica Modal, analisando quando a combinação preserva propriedades como correção, completude e decidibilidade. Estendemos um estudo já realizado sobre combinações de sistemas de Lógica Modal Normal para sistemas de Lógica Modal Não-normal. O principal resultado deste trabalho é a preservação de completude da aplicação externa de um sistema de Lógica Modal Não-normal M em um sistema lógico L . Outro resultado importante é um exemplo de interação forte na combinação independente, ou fusão, de dois sistemas de Lógica Modal Não-normal.

Abstract

In this work, we study a few ways of combining Modal Logic systems, analysing when the combination preserves properties like soundness, completeness and decidability. We extend a study of the combination of Normal Modal Logic systems to Non-normal Modal Logic systems. The main result of this work is the completeness preservation in the external application of a Non-normal Modal Logic system M to a logic system L . Another important result is an example of strong interactions arising in the fusion of two Non-normal Modal Logic system.

Conteúdo

1	Introdução	3
1.1	Objetivos	3
1.2	Lógica Modal Normal	4
1.3	Lógica Temporal	8
2	Combinações de Lógicas Modais Normais	9
2.1	Fusão de Lógicas Monomodais	10
2.2	Fusão de Lógicas Modais Normais em Todos os Argumentos . . .	11
2.3	Temporalização	13
2.4	Fusão de Lógicas Modais e Temporais	15
2.5	Noções de Produto de Lógicas	16
3	Lógica Modal Não-normal	17
3.1	Semântica	18
3.2	Axiomatização	18
3.3	Algumas Propriedades Básicas	19
3.3.1	Incompletude	25
4	Álgebras de Boole na Lógica Modal	26
4.1	Estruturas e Modelos Gerais para Lógica Modal	26
4.2	Álgebras de Boole	28
4.3	Teorema de Representação de Stone	31
4.4	Álgebras de Boole com Operador	34
5	Modalização Não-normal	37
5.1	Correção	38
5.2	Completude	38
5.3	Decidibilidade	43
6	Fusão de Lógicas Modais Não-normais	44
6.1	Definições e Resultados Preliminares	44
6.2	Interações Fortes na Fusão de Lógicas Não-normais	47

7	O Problema da Preservação de Completude na Fusão	52
7.1	Conseqüências da Interação Forte no Problema da Fusão	52
7.2	Alguns Exemplos de Preservação de Completude	54

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo encontram-se a definição e as propriedades básicas de Lógica Modal Normal e o propósito do trabalho, que é estudar a preservação de correção e completude em combinações de Lógicas Modais Não-normais.

A definição encontrada na Seção 1.2 refere-se à *Lógica Monomodal*, isto é, que possui apenas um operador (primitivo) modal. No Capítulo 2 iremos ver uma generalização de Lógica Modal Normal para mais de um operador, e de aridade arbitrária.

A Seção 1.3 traz as definições básicas de Lógica Temporal, úteis para quando falarmos de temporalização, no Capítulo 2.

Como referência para a Seção 1.2 temos os livros básicos de Lógica Modal [BdRV01, Che80, HC96]. Para a Seção 1.3 temos [GHR94].

1.1 Objetivos

Nosso objetivo é estudar as combinações de sistemas de Lógica Modal, analisando quando ocorre transferência de propriedades como correção, completude e decidibilidade. Isto é, dados dois sistemas de Lógica Modal, M_1 e M_2 , obtemos um sistema lógico M , que de alguma forma combina a sintaxe (axiomatização) e semântica de M_1 e M_2 . Se M_1 e M_2 satisfazem uma propriedade P , queremos saber se M também a satisfaz (a isso chamamos *transferência* ou *preservação* da propriedade P).

Três formas de combinar Lógicas Modais ¹ serão abordadas. Na primeira, a mais fraca das três, um sistema é aplicado externamente a outro, não permitindo que, na linguagem, operadores da lógica externa fiquem no escopo de um operador da lógica interna. Na segunda, chamada de *combinação independente*, ou *fusão*, simplesmente unimos os operadores dos dois sistemas, na linguagem, e unimos as duas axiomáticas, sem supor nenhuma interação entre os operadores de um sistema com os do outro. Finalmente, o *produto* de Lógicas Modais supõe

¹Referiremos a sistemas de Lógica Modal simplesmente por Lógicas Modais

alguma interação entre os operadores das duas lógicas, sendo a mais forte (isto é, com mais teoremas) das três formas de combinação.

O principal objetivo de combinar sistemas lógicos é evitar que, para cada modelagem de um problema prático, seja necessário criar um novo sistema lógico exclusivo, e ter que analisar novamente as suas propriedades. A combinação fornece um método sistemático de produzir novos sistemas lógicos a partir dos que já temos, e os resultados de transferências nos fornecem as propriedades que queremos sem ter que estudá-las novamente, para cada novo sistema.

A maior parte dos estudos de Lógica Modal assume o axioma **K** e a regra de inferência da *Necessitação*, e baseia-se na semântica de Kripke, como mostraremos na seção seguinte deste capítulo. A isso chamamos *Lógica Modal Normal*. No Capítulo 3 iremos definir *Lógica Modal Não-normal*, que generaliza a Lógica Modal Normal.

Para o caso da Lógica Modal Normal, como iremos mencionar no Capítulo 2, já foram estudadas as transferências de correção, completude e decidibilidade nas três formas de combinações citadas, encontrando respostas positivas para a aplicação externa e a fusão, e negativa para o produto. Nosso propósito é estudar a transferência dessas propriedades em combinações de Lógicas Modais Não-normais.

1.2 Lógica Modal Normal

A Lógica Modal Normal baseia-se na semântica dos “mundos possíveis”. Verificar se uma proposição é verdadeira ou não depende do “mundo” em que ela está sendo analisada. São acrescentados a lógica proposicional clássica, operadores modais de “necessidade” e “possibilidade”. Uma proposição é *necessária* em um mundo se for verdadeira em todos os mundos acessíveis a esse. Uma proposição é *possível* em um mundo quando for verdadeira em algum mundo acessível a esse.

O alfabeto da Lógica Modal consiste nas fórmulas atômicas (ou, átomos): $p, q, r, \dots$; os conectivos booleanos binários: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$; e unário: $\neg$; e os operadores modais (unários) $\Box$ (que significa “necessariamente”) e $\Diamond$ (“possivelmente”); além dos delimitadores “(” e “)”. A linguagem é o menor conjunto $\mathcal{L}$ contendo as fórmulas atômicas e tal que, se $A, B \in \mathcal{L}$, então as fórmulas $\neg A$, $(A \wedge B)$ e $\Box A$ estão em $\mathcal{L}$. Os conectivos $\vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$ podem ser definidos a partir de $\neg$ e $\wedge$ da maneira usual ($A \vee B$ abrevia $\neg(\neg A \wedge \neg B)$; $A \rightarrow B$ abrevia $(\neg A) \vee B$; e $A \leftrightarrow B$ indica $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$).

Usaremos $\top$ para indicar constante verdadeira ($p \vee \neg p$) e $\perp$ para a constante falsa ($p \wedge \neg p$).

Semântica da Lógica Modal Normal

A semântica da Lógica Modal Normal é baseada no *modelo de Kripke*. Uma *estrutura de Kripke* é um par $\langle W, R \rangle$, onde W é um conjunto não-vazio, o

conjunto dos “mundos possíveis”, e R é uma relação binária sobre W , isto é, $R \subseteq W \times W$.

Um *modelo* sobre uma estrutura $\langle W, R \rangle$ é uma tripla $\langle W, R, V \rangle$ onde $\langle W, R \rangle$ é uma estrutura e $V : \mathcal{L} \rightarrow 2^W$ é uma função, chamada *valoração*, que a cada fórmula atômica associa um subconjunto de W , que é o conjunto de mundos em que a dada fórmula atômica é verdadeira.

Dados um elemento $w \in W$ e uma fórmula A , denotamos $\langle W, R, V, w \rangle \models A$ se $\langle W, R, V \rangle$ *satisfaz* A em w , e definimos por:

1. Se p é atômica, $\langle W, R, V, w \rangle \models p$ sse $w \in V(p)$;
2. $\langle W, R, V, w \rangle \models \neg A$ sse não ocorre $\langle W, R, V, w \rangle \models A$;
3. $\langle W, R, V, w \rangle \models A \wedge B$ sse $\langle W, R, V, w \rangle \models A$ e $\langle W, R, V, w \rangle \models B$;
4. $\langle W, R, V, w \rangle \models \Box A$ sse $\langle W, R, V, w' \rangle \models A$, para todo $w' \in W$ tal que wRw' (isto é, $(w, w') \in R$);
5. $\langle W, R, V, w \rangle \models \Diamond A$ sse $\langle W, R, V, w' \rangle \models A$, para algum $w' \in W$ tal que wRw' .

Uma outra forma equivalente de definir satisfazibilidade, é estender a função de valoração para todas as fórmulas, de modo a satisfazer:

1. $V(\neg A) = W \setminus V(A)$;
2. $V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B)$;
3. $V(\Box A) = \{w \in W : w' \in V(A) \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw'\}$;
4. $V(\Diamond A) = \{w \in W : w' \in V(A) \text{ para algum } w' \in W \text{ tal que } wRw'\}$.

Definimos, então, $\langle W, R, V, w \rangle \models A$ sse $w \in V(A)$. É fácil verificar que as duas definições são equivalentes. Usando 4 e 5 e a definição de $\neg$, temos que o operador $\Diamond$ pode ser definido a partir de $\Box$ por $\neg\Box\neg A$ no lugar de $\Diamond A$, ou o contrário, $\Box$ como $\neg\Diamond\neg$. Assim, para simplificar as demonstrações e definições, a partir de agora usaremos apenas o operador $\Box$ como primitivo.

Dizemos que uma fórmula A é *válida* em um modelo $\langle W, R, V \rangle$ (denotamos por $\langle W, R, V \rangle \models A$) se $\langle W, R, V, w \rangle \models A$, para todo $w \in W$. Da mesma forma, dizemos que A é válida em uma estrutura $\langle W, R \rangle$ (denotamos por $\langle W, R \rangle \models A$) se $\langle W, R, V \rangle \models A$, para toda valoração V .

Axiomática para a Lógica Modal Normal

Um sistema de axiomas é um conjunto de axiomas e regras de inferência para uma linguagem lógica. Os axiomas são fórmulas e as regras de inferências são relações entre fórmulas². Uma *demonstração* é uma seqüência finita de fórmulas

²Formalmente, subconjuntos de $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}$, para $n \geq 1$ onde $\mathcal{L}$ é a linguagem. Uma fórmula A é consequência de $A_1, \dots, A_n$ por uma regra de inferência R se $(A_1, \dots, A_n, A) \in R$.

em que cada fórmula ou é um axioma ou é obtido por fórmulas anteriores na seqüência através de uma regra de inferência. Um *teorema* é a última fórmula que ocorre em uma demonstração. Uma fórmula A é *consistente* se $\neg A$ não é um teorema. Quando necessário especificarmos o sistema, dizemos que uma fórmula é um S -teorema (ou, S -consistente) quando for um teorema (ou, consistente) no sistema S .

Denotamos por $\vdash_S A$ se A é um teorema do sistema S . Suprimiremos o índice S quando estiver claro o sistema usado.

Um sistema de axiomas para Lógica Modal Normal contém, pelo menos, os seguintes axiomas e regras de inferências:

Axiomas:

1. As tautologias proposicionais;
2. Axioma **K**: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

Regras de Inferência:

1. *Substituição Uniforme*: Se A é um teorema, p é uma fórmula atômica e B é uma fórmula, a fórmula obtida substituindo todas as ocorrências de p em A por B é um teorema;
2. *Modus Ponens*: Se $\vdash A$ e $\vdash A \rightarrow B$ então $\vdash B$;
3. *Necessitação*: Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$.

O sistema minimal para Lógica Modal Normal, isto é, o que contém apenas os axiomas e regras de inferência acima mencionados, é denotado por **K**.

Correção e Completude

Seja $\mathcal{K}$ uma classe de estruturas e S um sistema para Lógica Modal Normal. Dizemos que S é *correto* com relação a $\mathcal{K}$ se todo teorema de S é válido em todas as estruturas de $\mathcal{K}$. Dizemos que S é *completo* com relação a $\mathcal{K}$ se toda fórmula válida em todas as estruturas de $\mathcal{K}$ é um teorema de S (equivalentemente, se para toda fórmula S -consistente A existe uma estrutura $\langle W, R \rangle \in \mathcal{K}$ tal que $\langle W, R, V, w \rangle \models A$, para alguma valoração V e algum $w \in W$, ou seja, se toda fórmula consistente tem modelo).

O sistema **K** é correto e completo com relação à classe de todas as estruturas. Uma estrutura $\langle W, R \rangle$ é:

- *Serial* se para todo $w \in W$ existe $w' \in W$ tal que wRw' ;
- *Reflexiva* se wRw , para todo $w \in W$;
- *Simétrica* se wRw' implica $w'Rw$, para todos $w, w' \in W$;
- *Transitiva* se wRw' e $w'Rw''$ implicam wRw'' , para todos $w, w', w'' \in W$;
- *Euclideana* se wRw' e wRw'' implicam $w'Rw''$, para todos $w, w', w'' \in W$.

Axiomas adicionais ao sistema **K** correspondem a restrições na classe de estruturas. A tabela seguinte mostra os axiomas mais usados e as restrições correspondentes:

Axioma		Estruturas
D	$\Box p \rightarrow \Diamond p$	Seriais
T	$\Box p \rightarrow p$	Reflexivas
B	$p \rightarrow \Box \Diamond p$	Simétricas
4	$\Box p \rightarrow \Box \Box p$	Transitivas
5	$\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$	Euclidianas

Prova-se que o sistema **K** adicionado de um dos axiomas acima é correto e completo com relação à classe de estruturas correspondentes. Por exemplo, o sistema **K** adicionado do axioma **D** é correto e completo com relação à classe de todas as estruturas seriais. Mais ainda, adicionando ao sistema **K** mais de um dos axiomas acima, obtemos correção e completude com relação à classe de todas as estruturas com as propriedades correspondentes. Por exemplo, o sistema **K** adicionado dos axiomas **T** e **B** é correto e completo com relação à classe de todas as estruturas reflexivas e simétricas.

Para mostrar a correção, basta verificarmos a validade dos axiomas e mostrarmos que as regras de inferência preservam validade (em estruturas) ³. O axioma **K** é válido em todas as estruturas.

Para a correção dos sistemas obtidos acrescentando ao sistema **K** alguns dos axiomas acima, basta verificarmos que cada um desses axiomas é válido nas estruturas com a propriedade correspondente.

A demonstração da completude utiliza o método do *modelo canônico*. Um conjunto Γ de fórmulas é *consistente* em relação a um sistema S se toda conjunção $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, com $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$, for S -consistente. Um conjunto de fórmulas é *maximalmente consistente* em S se for consistente e maximal (em relação à inclusão) com essa propriedade. Um modelo canônico para um sistema S é um modelo $\langle W, R, V \rangle$ em que:

1. W é o conjunto de todos os conjuntos maximalmente consistentes em S ;
2. wRw' se e somente se, para toda fórmula A , se $\Box A \in w$ então $A \in w'$;
3. $V(p) = \{w \in W : p \in w\}$.

Prova-se que o modelo canônico $\langle W, R, V \rangle$ satisfaz uma fórmula A no ponto w se e somente se $A \in w$. Ou seja, $V(A) = \{w \in W : A \in w\}$. Usando o Lema de Zorn (vide Fato 4.11), podemos estender qualquer conjunto consistente de fórmulas a um conjunto maximalmente consistente. Com isso já obtemos a completude do sistema **K**, pois se uma fórmula A é consistente, existe $w \in W$ tal que $A \in w$, e, portanto, $\langle W, R, V, w \rangle \models A$.

Para a completude dos outros sistemas mencionados, basta verificarmos que, se um sistema S contém o axioma A (entre os axiomas **D**, **T**, **B**, **4** e **5**) então

³Se $\langle W, R \rangle \models A$ então $\langle W, R \rangle \models \Box A$. Se $\langle W, R \rangle \models A$ e $\langle W, R \rangle \models A \rightarrow B$ então $\langle W, R \rangle \models B$. Se $\langle W, R \rangle \models A$ e B é obtido pela Substituição Uniforme de uma fórmula atômica em A , então $\langle W, R \rangle \models B$.

a estrutura do modelo canônico de S possui a propriedade correspondente ao axioma A .

Observe que, pelo fato de podermos estender qualquer conjunto consistente a um maximalmente consistente, os resultados de completude que usam construção de modelo canônico são resultados de *completude forte*, isto é, dado um conjunto de fórmulas Γ consistente, existe um modelo para Γ .

Os detalhes das demonstrações da correção e completude encontram-se em [HC96, Che80, BdRV01].

1.3 Lógica Temporal

A Lógica Temporal é uma ramificação da Lógica Modal em que, no lugar do único operador primitivo unário $\Box$, temos dois operadores binários: S (“desde que”) e U (“até que”), onde $S(A, B)$ significa “ B é verdadeiro desde quando A foi verdadeiro”, e $U(A, B)$ “ B será verdadeiro até que A seja verdadeiro”.

Uma estrutura para a Lógica Temporal (ou *fluxo de tempo*) é um par $\langle T, < \rangle$, onde T é um conjunto e $<$ é uma relação (em geral, uma ordem parcial significando “antes de”). Usaremos $>$ para representar a ordem inversa de $<$. Como na Lógica Modal, um *modelo* é uma estrutura acrescentada de uma valoração $V : \mathcal{P} \longrightarrow 2^T$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto das fórmulas proposicionais atômicas e 2^T é o conjunto dos subconjuntos de T . Para um instante $t \in T$, definimos a semântica dos operadores S e U por:

1. $\langle T, <, V, t \rangle \models S(A, B)$ sse existe $s < t$ tal que $\langle T, <, V, s \rangle \models A$ e para todo $x \in T$, com $s < x < t$, temos $\langle T, <, V, x \rangle \models B$;
2. $\langle T, <, V, t \rangle \models U(A, B)$ sse existe $s > t$ tal que $\langle T, <, V, s \rangle \models A$ e para todo $x \in T$, com $t < x < s$, temos $\langle T, <, V, x \rangle \models B$.

A partir dos operadores S e U , definimos os operadores unários F (*em algum momento no futuro*), G (*sempre no futuro*), P (*em algum momento no passado*) e H (*sempre no passado*) por:

$$\begin{aligned} FA &:= U(A, \top); \\ GA &:= \neg F(\neg A); \\ PA &:= S(A, \top); \\ HA &:= \neg P(\neg A). \end{aligned}$$

Nota-se que a semântica dos operadores F e G na estrutura $\langle T, < \rangle$ é idêntica à dos operadores $\Diamond$ e $\Box$, respectivamente, considerando $\langle T, < \rangle$ como estrutura de Lógica Modal. Da mesma forma, os operadores P e H correspondem, respectivamente, a $\Diamond$ e $\Box$ na estrutura com a ordem inversa: $\langle T, > \rangle$.

Uma descrição da axiomática da Lógica Temporal e propriedades de correção e completude podem ser encontradas em [GHR94].

Capítulo 2

Combinações de Lógicas Modais Normais

Neste capítulo, iremos descrever os principais resultados de combinações de Lógicas Modais Normais encontrados na literatura. A abordagem utilizada aqui é baseada em [FG92, FG96, FW00, FW02], incluindo as próximas definições.

Nos referimos por uma *Lógica Modal* a um par $(\mathcal{K}, S)$, onde $\mathcal{K}$ é uma classe de estruturas e S é um sistema de axiomas para Lógica Modal. Dizemos que uma Lógica Modal $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, S)$ é *correta* (*completa*) se S for correto (completo) em relação à classe de estruturas $\mathcal{K}$. Definições análogas se aplicam a Lógica Temporal e, posteriormente, a Lógica Multimodal e Lógica Modal Não-normal.

Chamamos de *sistema lógico* (ou, simplesmente, uma *lógica*) uma quádrupla $L = (\mathcal{L}_L, \vdash_L, \mathcal{K}_L, \models_L)$, onde $\mathcal{L}_L$ é a linguagem do sistema lógico, $\vdash_L$ é o sistema de axiomas para L , $\mathcal{K}_L$ é a classe de modelos e $\models \subseteq \mathcal{K}_L \times \mathcal{L}_L$ é uma relação semântica (onde $M \models_L A$ significa que o modelo $M \in \mathcal{K}_L$ satisfaz a fórmula A). Para uma fórmula $A \in \mathcal{L}_L$, denotamos $\vdash_L A$ se A é um teorema do sistema de axiomas $\vdash_L$ (neste caso, dizemos também que A é um teorema de L).

Uma fórmula $A \in \mathcal{L}_L$ é *válida* em uma lógica L se para todo modelo $M \in \mathcal{K}_L$ temos $M \models_L A$. Uma lógica é *correta* se todo teorema for uma fórmula válida, e é *completa* se toda fórmula válida for um teorema.

Dizemos que L *estende a lógica clássica* se contiver os conectivos booleanos $\neg$ e $\wedge$ com o sentido clássico, isto é, $\vdash_L$ contém a regra *Modus Ponens* e todas as instâncias tautológicas como teoremas, e, para todos $M \in \mathcal{K}_L$ e $A, B \in \mathcal{L}_L$, temos $M \models \neg A$ sse $M \not\models A$, e $M \models A \wedge B$ sse $M \models A$ e $M \models B$. Dizemos que L *estende a lógica proposicional clássica* se, além disso, sua linguagem contiver um conjunto infinito enumerável de átomos: $\{p_1, \dots, p_n, \dots\}$.

Uma Lógica Modal $(\mathcal{K}, S)$ pode ser vista como um sistema lógico $M = (\mathcal{L}_M, \vdash_M, \mathcal{K}_M, \models_M)$, onde $\mathcal{L}_M$ é a linguagem da Lógica Modal, $\vdash_M$ é o sistema S , $\mathcal{K}_M$ é a classe de todos os modelos $\langle W, R, V, w \rangle$, com $\langle W, R \rangle \in \mathcal{K}$, e $\models_M$ é a relação de satisfazibilidade em modelos, já definido na Seção 1.2. Nesta

definição, uma Lógica Modal estende a lógica (proposicional) clássica.

2.1 Fusão de Lógicas Monomodais

A definição de Lógica Modal encontrada no Capítulo 1 pode ser generalizada para mais de um operador modal. Definimos uma *Lógica Multimodal* (com n operadores) como um sistema lógico formado por:

Linguagem A linguagem da lógica proposicional clássica, acrescida dos operadores modais unários $\Box_1, \dots, \Box_n$. A partir desses definimos os operadores $\Diamond_1, \dots, \Diamond_n$ da maneira usual: $\Diamond_i$ é $\neg\Box_i\neg$, para cada $i = 1, \dots, n$;

Axiomatização O sistema de axiomas minimal para uma Lógica Multimodal de n operadores consiste nas tautologias proposicionais, as regras *Modus Ponens* e Substituição Uniforme e, para cada $i = 1, \dots, n$, o axioma **K** e a regra da Necessitação referente ao operador $\Box_i$;

Semântica Uma estrutura para Lógica Multimodal de n operadores é da forma $\langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, onde cada R_i é uma relação sobre W . A satisfazibilidade de uma fórmula é análoga ao caso Monomodal, onde cada relação R_i dita a semântica de $\Box_i$.

Considere $\langle W, R \rangle$ uma estrutura. Seja $\sim_R$ a menor relação de equivalência em W contendo R (que pode ser definida como a intersecção de todas as relações de equivalências que contêm R). Chamamos de *componentes conexas* de $\langle W, R \rangle$ as estruturas $\langle X, R \cap (X \times X) \rangle$, onde $X \subseteq W$ é uma classe de equivalência da relação $\sim_R$. Uma estrutura é *conexa* se possuir uma única componente conexa.

A idéia da conexidade é a existência de um “caminho”, via relação R , entre dois pontos quaisquer. Dois pontos w e w' em W estão na mesma componente conexa de $\langle W, R \rangle$ se e somente se existe uma seqüência $w = w_1, \dots, w_n = w'$ em W tal que, para cada i , $1 \leq i < n$, temos $w_i R w_{i+1}$ ou $w_{i+1} R w_i$. Com isso, mostra-se que uma fórmula (em Lógica Monomodal) é válida em uma estrutura se e somente se for válida em todas suas componentes conexas. Tudo isso vale também para Lógica Temporal. Para Lógica Multimodal, precisamos tomar a menor relação de equivalência contendo todas as relações R_i , com $i = 1, \dots, n$, para a estrutura $\langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$.

Dadas duas Lógicas Monomodais M_1 e M_2 , chamamos de *fusão* de M_1 e M_2 , à Lógica Bimodal $M_1 \circ M_2$ formada por:

Axiomatização O menor sistema de axiomas para Lógica Bimodal que contém os teoremas de M_1 e M_2 , onde o operador $\Box_i$, com $i = 1, 2$ interpreta o operador $\Box$ de M_i ;

Semântica Sendo $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ as classes de estruturas de M_1 e M_2 , respectivamente, definimos a classe de estruturas de $M_1 \circ M_2$ como a classe de todas as estruturas $\langle W, R_1, R_2 \rangle$ em que as componentes conexas de $\langle W, R_i \rangle$ estão em $\mathcal{K}_i$, para $i = 1, 2$.

A rigor, pela definição acima, a classe de estruturas de $M_1 \circ M_2$ pode ser vazia, pois precisamos tomar uma estrutura $\langle W, R_1 \rangle$ de $\mathcal{K}_1$ e $\langle W, R_2 \rangle$ de $\mathcal{K}_2$, ambas sobre o mesmo conjunto W . As estruturas de $\mathcal{K}_1$ podem ter domínios diferentes das estruturas de $\mathcal{K}_2$. Para garantirmos que isso não acontece, podemos acrescentar algumas hipóteses sobre as classes de M_1 e M_2 . Por exemplo, supor que são fechadas por isomorfismos ¹ e que todas as suas estruturas são conexas.

Kracht e Wolter [KW91] e Finger e Weiss [FW02] demonstraram a preservação de correção e completude, na fusão de Lógicas Monomodais:

Teorema 2.1 *Se M_1 e M_2 são Lógicas Monomodais corretas e completas, então $M_1 \circ M_2$ é correta e completa.*

Kracht e Wolter definem a classe de estruturas de uma Lógica Modal como a classe daquelas que validam todos os teoremas do sistema dado. Teorema 2.1 foi provado por eles usando essa definição de semântica. Finger e Weiss provam para o caso geral.

2.2 Fusão de Lógicas Modais Normais em Todos os Argumentos

Na seção anterior generalizamos Lógica Modal para uma quantidade arbitrária de operadores unários (Lógica Multimodal). Nesta seção iremos estudar o caso em que temos uma quantidade arbitrária de operadores, e cada operador tem uma quantidade arbitrária de argumentos. As próximas definições, sobre Lógica Multimodal, encontram-se em [BdRV01].

Chamamos de *tipo de similaridade modal* um par $\tau = (O, f)$, onde $O = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ é um conjunto finito de operadores modais² e $f : O \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função que associa, a cada operador modal, a sua *aridade*.

A τ -*linguagem* é o menor conjunto $\mathcal{L}$ que contém as fórmulas atômicas da lógica proposicional, é fechado pelos operadores booleanos $\neg$ e $\wedge$ e, para todo $\Delta_i \in O$, com $f(\Delta_i) = k$, dados $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}$, temos $\Delta_i(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{L}$.

Um τ -*sistema* para Lógica Modal é um sistema de axiomas para a τ -linguagem contendo as tautologias proposicionais, as regras *Modus Ponens* e Substituição Uniforme e a regra da *Congruência*:

- Para cada $\Delta_i \in O$, com $f(\Delta_i) = k$, e $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k$ fórmulas da τ -linguagem, se $\vdash A_j \leftrightarrow B_j$, para todo $1 \leq j \leq k$, então $\vdash \Delta_i(A_1, \dots, A_k) \leftrightarrow \Delta_i(B_1, \dots, B_k)$.

¹Duas classes $\langle W, R \rangle$ e $\langle W', R' \rangle$ são isomorfas se existe uma função $i : W \rightarrow W'$ bijetora tal que wRw' se e somente se $i(w)Ri(w')$, para todo $w, w' \in W$. Uma classe é fechada por isomorfismos se todas as estruturas isomorfas a uma que pertence à classe, também pertencem à classe.

²Aqui, os operadores Δ_i correspondem ao operador $\Diamond$, da Lógica Monomodal, e não ao operador $\Box$, como foi feito em [BdRV01] e [Wol96]

No Capítulo 3 veremos o correspondente dessa regra para Lógica Modal Não-normal.

Dizemos que um τ -sistema é *normal em todos os argumentos* quando, para cada $\Delta_i \in O$, com $f(\Delta_i) = k$, e para cada $1 \leq j \leq k$, temos os axiomas:

- $\Delta_i(p_1, \dots, p_j \vee q_j, \dots, p_k) \leftrightarrow \Delta_i(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k) \vee \Delta_i(p_1, \dots, q_j, \dots, p_k)$;
- $\neg \Delta_i(p_1, \dots, p_{j-1}, \perp, p_{j+1}, \dots, p_k)$.

No caso dos operadores serem unários, um τ -sistema normal em todos os argumentos é (equivalente a) um sistema para Lógica Multimodal Normal, onde os operadores Δ_i correspondem aos operadores $\Diamond_i$ (e define-se $\Box_i$ por $\neg \Diamond_i \neg$). Detalhes disso encontram-se no Capítulo 3, quando falamos dos axiomas de normalidade em Lógica Modal Não-normal.

Uma τ -estrutura é uma $(n+1)$ -upla $\langle W, R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n} \rangle$, com $R_{\Delta_i} \subseteq W^{f(\Delta_i)+1}$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Uma valoração em $\langle W, R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n} \rangle$, é uma função $V : \mathcal{P} \rightarrow 2^W$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de fórmulas atômicas. Para uma valoração V , chamamos $\langle W, R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n}, V \rangle$ de um τ -modelo.

A satisfazibilidade de uma fórmula em um τ -modelo e um ponto $w \in W$, é definida como na Lógica Monomodal, para as fórmulas atômicas e os operadores booleanos. Para um operador $\Delta_i \in O$, com $f(\Delta_i) = k$, definimos

$$\langle W, R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n}, V, w \rangle \models \Delta_i(A_1, \dots, A_n)$$

se e somente se, para algum $(w_1, \dots, w_k) \in W^k$ tal que $(w, w_1, \dots, w_k) \in R_{\Delta_i}$, temos:

$$\langle W, R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n}, V, w_i \rangle \models A_i, \forall i = 1, \dots, k.$$

Uma τ -lógica normal é um sistema lógico $L = (\mathcal{L}_L, \vdash_L, \mathcal{K}_L, \models_L)$, onde $\mathcal{L}_L$ é a τ -linguagem, $\vdash_L$ é um τ -sistema normal em todos os argumentos, $\mathcal{K}_L$ é uma classe de τ -estruturas (ou, mais precisamente, a classe de todos os modelos baseados nos elementos de uma classe de τ -estruturas) e $\models_L$ é a relação de satisfazibilidade em modelos acima descrita.

Sejam $\tau_1 = (O_1, f_1)$ e $\tau_2 = (O_2, f_2)$ tipos de similaridade modal, com $|O_1| = n$ e $|O_2| = m$. Denotamos por $\tau_1 \cup \tau_2$ o tipo de similaridade modal (O, f) , onde $O = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{n+m}\}$ e $f(\Delta_i) = f_1(\Delta_i)$, para $1 \leq i \leq n$, e $f(\Delta_i) = f_2(\Delta_{i-n})$, para $n < i \leq n + m$. Ou seja, é simplesmente a união (disjunta) dos operadores de τ_1 e τ_2 .

Dados um τ_1 -sistema $\vdash_1$ e um τ_2 -sistema $\vdash_2$, normais em todos os argumentos, a *fusão* de $\vdash_1$ e $\vdash_2$, denotada por $\vdash_1 \circ \vdash_2$, é o menor $\tau_1 \cup \tau_2$ -sistema (normal em todos os argumentos) contendo $\vdash_1$ e $\vdash_2$, onde Δ_{n+i} , para $1 \leq i \leq m$, refere-se ao operador Δ_i , de τ_2 .

Em [Wol96], Wolter estuda transferência de algumas propriedades na fusão de sistemas de Lógica Multimodal, com esta definição sintática de normalidade, usando a semântica algébrica (vide Capítulo 4), e não a semântica de Kripke.

A Lógica Temporal, como foi mostrado em [FW02], não satisfaz a definição de normalidade em todos os argumentos. Os operadores temporais binários S e

U satisfazem as propriedades de normalidade na primeira coordenada, mas não na segunda. Por exemplo, a fórmula $S(p, \perp)$ é verdadeira no modelo $\langle \mathbb{Z}, <, V \rangle$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros, $<$ é a ordem estrita dos inteiros, e $V(p) = \mathbb{Z}$. Dado um instante t , p é verdadeiro em $t - 1$ e $\perp$ é verdadeiro em todo ponto $s \in \mathbb{Z}$ tal que $t - 1 < s < t$ (pois não existe tal s). Logo $\langle \mathbb{Z}, <, V, t \rangle \models S(p, \perp)$. Também podemos falsificar $S(p, \top)$, pois S poderia ser dual a um operador Δ_i , isto é, $S(A, B)$ seria $\neg \Delta_i(\neg A, \neg B)$, com o mesmo exemplo, fazendo $V(p) = \emptyset$.

Portanto, a demonstração da preservação da completude para fusão de Lógicas Modais normais em todos os argumentos não prova a preservação da completude na fusão de Lógicas Temporais.

2.3 Temporalização

A *temporalização* de um sistema lógico consiste em aplicar externamente uma Lógica Temporal T a um sistema lógico L (retomemos a definição de sistema lógico apresentada no início deste capítulo), obtendo o sistema $T(L)$, conforme é feito em [FG92, FG96, FW00, FW02]. Pensamos na Lógica Temporal como uma lógica proposicional clássica que sofre “variações” com o tempo. No sistema temporalizado $T(L)$, é a lógica L que sofre alterações conforme o decorrer do tempo. Cada instante de um fluxo de tempo da lógica $T(L)$ corresponde a uma instância da lógica L .

Exigimos sobre a lógica interna L apenas que seja uma extensão da lógica proposicional clássica e que não contenha os operadores U e S da lógica T . Assim, se L for uma Lógica Temporal, temos que renomear os operadores temporais de L .

Particionamos a linguagem $\mathcal{L}_L$, de uma lógica L que estende a lógica clássica, em dois conjuntos:

- BC_L , o conjunto das *combinações booleanas*, consiste em todas as fórmulas em $\mathcal{L}_L$ da forma $A \wedge B$ ou $\neg A$, com $A, B \in \mathcal{L}_L$;
- ML_L , o conjunto das *fórmulas monolíticas*, é $\mathcal{L}_L \setminus BC_L$.

Como exemplo dessa definição, se L é uma Lógica Modal, ML_L é o conjunto formado pelas fórmulas atômicas e pelas fórmulas da forma $\Box A$.

Agora iremos definir o sistema $T(L) = (\mathcal{L}_{T(L)}, \vdash_{T(L)}, \mathcal{K}_{T(L)}, \models_{T(L)})$.

Linguagem A linguagem $\mathcal{L}_{T(L)}$ é o menor conjunto tal que:

1. Se $A \in ML_L$ então $A \in \mathcal{L}_{T(L)}$;
2. Se $A, B \in \mathcal{L}_{T(L)}$ então $\neg A \in \mathcal{L}_{T(L)}$ e $A \wedge B \in \mathcal{L}_{T(L)}$;
3. Se $A, B \in \mathcal{L}_{T(L)}$ então $S(A, B) \in \mathcal{L}_{T(L)}$ e $U(A, B) \in \mathcal{L}_{T(L)}$.

Por essa definição, os conectivos da lógica externa U e S não podem estar no escopo dos conectivos da lógica interna L . Por exemplo, se L é uma Lógica Monomodal e $\Box$ é o seu operador modal, $S(\Box p, \Box q)$ é uma fórmula de $T(L)$, mas $\Box S(p, q)$ não é.

Semântica Um modelo para a lógica $T(L)$ é uma tripla $\mathcal{M} = \langle T, <, g \rangle$, onde $\langle T, < \rangle \in \mathcal{K}_T$ e g é uma função $g : T \rightarrow \mathcal{K}_L$, que a cada $t \in T$ associa um modelo da lógica L .

Sejam $\mathcal{M} = \langle T, <, g \rangle$ um modelo e $t \in T$. Denotamos $\mathcal{M}, t \models A$, para $\mathcal{M}$ satisfaz a fórmula A no instante t ³. A relação de satisfazibilidade $\models$, de $T(L)$, é definida, recursivamente, por:

1. $\mathcal{M}, t \models A$, para $A \in ML_L$ sse $g(t) \models A$;
2. $\mathcal{M}, t \models \neg A$ sse $\mathcal{M}, t \not\models A$;
3. $\mathcal{M}, t \models A \wedge B$ sse $\mathcal{M}, t \models A$ e $\mathcal{M}, t \models B$;
4. $\mathcal{M}, t \models S(A, B)$ sse existe $s < t$ tal que $\mathcal{M}, s \models A$ e, para todo r , com $s < r < t$, temos $\mathcal{M}, r \models B$;
5. $\mathcal{M}, t \models U(A, B)$ sse existe $t < s$ tal que $\mathcal{M}, s \models A$ e, para todo r , com $t < r < s$, temos $\mathcal{M}, r \models B$.

Axiomatização O sistema de axiomas de $T(L)$ é formado por:

- Os axiomas de T ;
- As regras de inferência de T ;
- A regra de inferência *Preservação*: Para todo $A \in \mathcal{L}_L$, se $\vdash_L A$ então $\vdash_{T(L)} A$.

A rigor, precisamos tomar alguns cuidados com a definição de regra de inferência. Se definirmos regra de inferência apenas como relação entre fórmulas, nem *Modus Ponens* estaria em $T(L)$, pois, sendo uma regra de inferência de T , só relaciona fórmulas de T , e não todas as fórmulas de $T(L)$. Para corrigir isso, Sernadas [MSSV03] propõe uma definição rigorosa de regra de inferência em que esta se torna livre da linguagem. Por exemplo, a regra *Modus Ponens* nos diz que de A e $A \rightarrow B$ deduzimos B , mesmo que A e B sejam fórmulas de linguagem de $T(L)$.

O seguinte resultado foi demonstrado por Finger e Gabbay [FG92, FG96] para o caso linear (quando $<$ é uma ordem total, para todo fluxo de tempo $\langle T, < \rangle \in \mathcal{K}_T$) e por Finger e Weiss [FW00, FW02] para o caso geral:

Teorema 2.2 *Se L e T são corretos e completos, então $T(L)$ é correto e completo. Se L e T são decidíveis, então $T(L)$ é decidível.*

³Lembramos que, para enquadrarmos $T(L)$ na definição de sistema lógico (que estende lógica clássica), podemos considerar um modelo como sendo o par $(\mathcal{M}, t)$.

Lembramos que uma lógica é *decidível* se existe um algoritmo que, dada uma fórmula A , decide se A é um teorema ou não.

2.4 Fusão de Lógicas Modais e Temporais

Dadas duas Lógicas Temporais T_1 e T_2 , definimos a *fusão* $T_1 \circ T_2$ analogamente ao que fizemos na Seção 2.1. A linguagem é formada por uma quantidade enumerável de átomos, os operadores booleanos e os operadores temporais binários S_1 , U_1 , S_2 e U_2 , onde S_1 e U_1 são os operadores S e U de T_1 , e S_2 e U_2 , os operadores S e U de T_2 . O sistema de axiomas de $T_1 \circ T_2$ é a união das axiomatizações de T_1 e T_2 . A classe de estruturas é formada pelas estruturas $\langle T, <_1, <_2 \rangle$, onde as componentes conexas de $\langle T, <_1 \rangle$ e $\langle T, <_2 \rangle$ estão em $\mathcal{K}_{T_1}$ e $\mathcal{K}_{T_2}$, respectivamente.

A preservação da correção, completude e decidibilidade na fusão de Lógicas Temporais foi mostrada por Finger e Gabbay [FG96], para o caso linear, e por Finger e Weiss [FW02], para o caso geral:

Teorema 2.3 *Se T_1 e T_2 são Lógicas Temporais corretas e completas, então $T_1 \circ T_2$ é correta e completa. Se T_1 e T_2 são decidíveis então $T_1 \circ T_2$ é decidível.*

Em [FW02] encontra-se uma generalização do teorema acima para Lógica Multimodal Normal, com uma definição de normalidade diferente da mencionada na Seção 2.2, de normalidade em todos os argumentos. A noção de normalidade usada por Finger e Weiss é semântica, e não puramente sintática, como a de Wolter. Seja M uma Lógica Multimodal, com operadores $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ de aridades $r_1, \dots, r_n$. Conforme [FW02], dizemos que M é *normal* quando:

- A semântica das fórmulas é baseada em estruturas $\langle W, R_1, \dots, R_m \rangle$, onde cada R_j é uma relação binária sobre W ;
- A semântica de $\Delta_i(p_1, \dots, p_{r_i})$ é dada por uma fórmula de primeira ordem, construída a partir de predicados unários $P_1, \dots, P_{r_i}$, símbolos relacionais $R_1, \dots, R_m$ e igualdade;
- Para cada símbolo relacional R_j podemos derivar um operador $\Box_j$ tal que $\Box_j p$ expressa $\forall x (tR_j x \Rightarrow P(x))$.

A definição acima engloba a apresentada na Seção 2.2. Porém, a Lógica Temporal enquadra-se nesta definição de normalidade, apesar de, como vimos em 2.2, não ser normal em todos os argumentos.

A estratégia utilizada para demonstrar a completude é considerar temporalizações sucessivas, e utilizar o resultado da preservação da completude na temporalização. Assim, uma fórmula $A \in \mathcal{L}_{T_1 \circ T_2}$ pode ser vista como uma fórmula da linguagem de $T_1(T_2(T_1(\dots)))$, para uma quantidade finita de iterações. Usando a completude da lógica temporalizada, obtemos um modelo para A em $T_1(T_2(T_1(\dots)))$, a que manipulamos para obter um modelo para A em $T_1 \circ T_2$. Há, porém, alguns cuidados a tomar, pois a lógica interna $T_2(T_1(\dots))$ possui

operadores de T_1 , o que supusemos não acontecer. Uma das maiores dificuldades da demonstração é contornar esse problema.

2.5 Noções de Produto de Lógicas

Na fusão de Lógicas Modais (ou Temporais), não supomos qualquer interação entre os dois sistemas. Por isso chamamos a fusão também de combinação independente. Por exemplo, dadas duas Lógicas Monomodais M_1 e M_2 com operadores $\Box_1$ e $\Box_2$, respectivamente, duas formas de interações que podemos desejar, numa combinação mais forte das duas lógicas, são:

Comutatividade $\Box_1\Box_2A \leftrightarrow \Box_2\Box_1A$

Confluência de Church-Rosser $\Diamond_1\Box_2A \rightarrow \Box_1\Diamond_2A$

Uma forma de combinação de Lógicas Modais mais forte que a fusão, é o *produto*. Dadas duas Lógicas Monomodais M_1 e M_2 , designamos por $M_1 \times M_2$ o produto de M_1 e M_2 . Para cada par de estruturas, $\langle W_1, R_1 \rangle$ em M_1 e $\langle W_2, R_2 \rangle$ em M_2 , associamos a estrutura $\langle W_1 \times W_2, \overline{R}_1, \overline{R}_2 \rangle$ em $M_1 \times M_2$, onde:

$$\overline{R}_1 = \{((w_1, w), (w_2, w)) \in (W_1 \times W_2)^2 : (w_1, w_2) \in R_1\}$$

$$\overline{R}_2 = \{((w, w_1), (w, w_2)) \in (W_1 \times W_2)^2 : (w_1, w_2) \in R_2\}$$

Ou seja, $(x, u)\overline{R}_1(y, v)$ se e somente se $u = v$ e xR_1y , e analogamente para $\overline{R}_2$.

O produto de Lógicas Modais satisfaz as propriedades de comutatividade e confluência de Church-Rosser. Mas respeitar essas propriedades não é suficiente para tratar-se de um produto. Isto é, unir as axiomatizações de M_1 e M_2 e acrescentar, como axioma, a comutatividade e a confluência de Church-Rosser, em geral não basta para axiomatizar a semântica do produto.

Seguindo os passos do que foi feito até agora, precisamos definir um sistema de axiomas para o produto de forma a obtermos preservação de correção e completude. Mas, em [FG96] encontra-se uma demonstração para produto de Lógicas Temporais de que isso não é possível de ser feito, de maneira geral. Qualquer que seja a definição que dermos para o sistema de axiomas do produto, ou não preservaremos a correção, ou não preservaremos a completude.

Alguns resultados de preservação de completude para classes de estruturas específicas e discussões sobre outras formas de combinações fortes de Lógicas Temporais, podem ser vistos em [FG96].

Capítulo 3

Lógica Modal Não-normal

No Capítulo 1 introduzimos a definição de Lógica Modal Normal, baseada na semântica de Kripke, em que temos um conjunto de mundos possíveis e uma relação de acessibilidade entre eles. Uma fórmula é necessariamente verdadeira em um mundo se for verdadeira em todos mundos acessíveis a esse. Com essa semântica, a Lógica Modal Normal é útil na modelagens de diversos problemas, como conhecimento, fluxo de tempo, obrigação, demonstrabilidade (Teorema de Gödel) e lógica intuicionista. Comentários sobre essas aplicações encontra-se na bibliografia básica [HC96, Che80, BdRV01].

Porém, para algumas aplicações baseadas na noção de mundos possíveis, a relação de acessibilidade entre os mundos pode não ser suficiente para modelar o problema. Por exemplo, em alguma aplicação prática, o acesso entre dois mundos eventualmente pode “falhar”. Neste e em outros casos semelhantes, podemos considerar que uma fórmula seja necessariamente verdadeira em um mundo se ela for verdadeira em uma “grande parte” dos mundos acessíveis a esse. Para modelagem de situações como essa, foi criada a Lógica Modal Não-normal, baseada na *semântica de vizinhanças*, também chamada por Chellas [Che80] de *modelos mínimos*.

Essencialmente, na semântica não-normal, que é a semântica de vizinhanças, também temos um conjunto de mundos possíveis. Mas a única restrição sobre a semântica do operador modal é que a valoração de uma fórmula da forma $\Box A$ depende unicamente da valoração da fórmula A , isto é, o conjunto de mundos em que A é verdadeira. Por isso, como veremos, no Capítulo 4, na Lógica Modal Não-normal o operador modal pode ser traduzido como uma função entre valorações. Na abordagem apresentada aqui, baseada em [Che80], temos uma função que para cada mundo possível w nos diz para quais valorações de A teremos $\Box A$ verdadeiro em w .

Com essa semântica, o operador $\Box$ ganha inúmeras possibilidades de significado, que podem diferir muito da noção de necessidade. Na semântica de Kripke, quanto mais mundos satisfizer A , mais “chance” $\Box A$ tem de ser verdadeira. Na semântica não-normal isso pode não acontecer. O axioma **K** e a

regra da Necessitação podem falhar.

Pouco foi estudada a Lógica Modal Não-normal. Os resultados apresentados neste capítulo foram baseados em [Che80].

3.1 Semântica

Uma estrutura para Lógica Modal Não-normal é um par $\langle W, F \rangle$, onde W é um conjunto e F é uma função $F : W \longrightarrow 2^{2^W}$ (associa, a cada $w \in W$, uma família $F(w)$ de subconjuntos de W).

Um modelo para a estrutura $\langle W, F \rangle$ é uma tripla $\langle W, F, V \rangle$ em que V (dita *valoração*) é uma função $V : \mathcal{L} \longrightarrow 2^W$ (onde $\mathcal{L}$ é a linguagem da Lógica Modal) satisfazendo:

$$V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B);$$

$$V(\neg A) = W \setminus V(A);$$

$$V(\Box A) = \{w \in W : V(A) \in F(w)\}.$$

As noções de satisfazibilidade e validade das fórmulas em estruturas e modelos são análogas ao caso Normal: $\langle W, F, V, w \rangle \models A$ se e somente se $w \in V(A)$.

Vejam os como uma estrutura Normal $\langle W, R \rangle$, com $R \subseteq W \times W$, pode ser vista como caso particular de estrutura não-normal. Considere a função $F_R : W \longrightarrow 2^{2^W}$ dada por:

$$F_R(w) = \{X \subseteq W : R_w \subseteq X\},$$

onde $R_w = \{w' \in W : wRw'\}$

É fácil verificar que V é uma valoração da estrutura Normal $\langle W, R \rangle$ se e somente se é uma valoração da estrutura não-normal $\langle W, F_R \rangle$. Ou seja, se duas valorações, uma para cada estrutura, coincidem nos átomos, então coincidem para todas as fórmulas.

No entanto, veremos na Seção 3.3 que nem toda estrutura não-normal é da forma descrita acima, mesmo que valide o sistema **K**, da Lógica Normal.

3.2 Axiomatização

O sistema minimal para Lógica Modal Não-normal, ao qual chamaremos de *Snn*, ou, simplesmente, *nn*, é formado por:

Axiomas: Todas as tautologias proposicionais.

Regras de Inferência:

1. *Modus Ponens*;

2. *Substituição Uniforme*;

3. *Congruência*: Se $\vdash A \leftrightarrow B$ então $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Teorema 3.1 *O sistema S_{nn} é correto com relação à classe de todas as estruturas de Lógica Modal Não-normal.*

Demonstração: É imediato que as tautologias são válidas e que *Modus Ponens* preserva validade. A demonstração de que a Substituição Uniforme preserva validade em estruturas é idêntica ao caso Normal. Portanto, basta provarmos que a regra da Congruência preserva validade de fórmulas. Se A e B são fórmulas válidas em $\langle W, F \rangle$, então $V(A) = V(B)$, para toda valoração V . Logo $V(\Box A) = \{w \in W : V(A) \in F(w)\} = \{w \in W : V(B) \in F(w)\} = V(\Box B)$, para toda valoração V . Logo $V(\Box A \leftrightarrow \Box B) = W$ e, portanto, $\Box A \leftrightarrow \Box B$ é válido em $\langle W, F \rangle$. ■

Proposição 3.2 *Se $\vdash_{S_{nn}} A$ então $\vdash_K A$.*

Demonstração: Basta verificarmos que a regra da Congruência pode ser derivada da regra da Necessitação e do axioma **K** (na presença das tautologias, *Modus Ponens* e Substituição Uniforme).

De fato, suponha $\vdash A \leftrightarrow B$. Teremos $\vdash A \rightarrow B$. Por Necessitação, temos $\vdash \Box(A \rightarrow B)$. Pelo axioma **K** e Substituição Uniforme (trocando p por A e q por B) temos $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$. Por *Modus Ponens* concluímos $\vdash \Box A \rightarrow \Box B$. Analogamente obtemos $\vdash \Box B \rightarrow \Box A$. ■

Proposição 3.3 *Em S_{nn} (e, portanto, em **K**), vale a regra da Substituição por Equivalência: Se $\vdash A \leftrightarrow B$ então, para qualquer fórmula C , $\vdash C \leftrightarrow C[A/B]$, onde $C[A/B]$ é a fórmula obtida pela substituição de todas as ocorrências de A em C pela fórmula B .*

Demonstração: Por indução na construção de C a partir de A (o passo inicial é a hipótese: $\vdash A \leftrightarrow B$). Usa-se a regra da Congruência no passo do operador $\Box$. ■

3.3 Algumas Propriedades Básicas

Iremos mostrar a completude do sistema minimal para Lógica Modal Não-normal, e propriedades de alguns axiomas. Para a completude, utilizaremos a técnica dos modelos canônicos, como na Seção 1.2. Nesta seção, denotaremos sempre por $\mathcal{L}$ a linguagem da Lógica Modal.

Completude

Seja S um sistema de axiomas para Lógica Modal Não-normal. Um *modelo canônico* para S é uma tripla $\langle W, F, V \rangle$ onde:

W é o conjunto dos conjuntos maximalmente S -consistentes;

V é uma função $V : \mathcal{L} \longrightarrow 2^W$ definida por $V(A) = \{w \in W : A \in w\}$;

F é uma função $F : W \longrightarrow 2^{2^W}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{L}$ e todo $w \in W$,

$$V(A) \in F(w) \Leftrightarrow \Box A \in w.$$

Neste momento, precisamos mostrar que V é, de fato, uma valoração, e que sempre podemos escolher F satisfazendo a condição acima.

Para a existência de F , notemos que, se $V(A) = V(B)$, temos $A \leftrightarrow B \in w$, para todo $w \in W$ (pois teremos $A \in w$ se e somente se $B \in w$). Logo $\vdash_S A \leftrightarrow B$. Pela regra da Congruência, temos $\vdash_S \Box A \leftrightarrow \Box B$ e, portanto, $\Box A \in w$ se e somente se $\Box B \in w$, para todo $w \in W$. Com isso, $F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\}$ satisfaz a condição requerida.

Observe que, na nossa definição, $F(w)$ não é, necessariamente, o conjunto $\{V(A) : \Box A \in w\}$. A cada $X \subseteq W$ que não é da forma $V(A)$, para alguma fórmula A , podemos tomar a liberdade de incluir ou não X em $F(w)$, o que não compromete a condição $V(A) \in F(w) \Leftrightarrow \Box A \in w$. Por isso um modelo canônico para S não é único. Veremos que isso será útil na demonstração de alguns resultados de completude.

Mostremos que V é uma valoração. As condições $V(\neg A) = W \setminus V(A)$ e $V(A \wedge B) = V(A) \cap V(B)$, seguem de que, num conjunto maximalmente consistente w , temos $A \in w$ se e só se $\neg A \notin w$, e $A \wedge B \in w$ se e só se $A \in w$ e $B \in w$. A condição $V(\Box A) = \{w \in W : V(A) \in F(w)\}$ segue da definição $V(\Box A) = \{w \in W : \Box A \in w\}$ e da condição $V(A) \in F(w)$ se e só se $\Box A \in w$.

Com isso, estamos prontos para mostrar a completude de Snn .

Teorema 3.4 *O sistema Snn é completo com relação à classe de todas as estruturas de Lógica Modal Não-normal.*

Demonstração: Dada uma fórmula consistente A , tomemos um conjunto maximalmente consistente w que contém A . Teremos que um modelo canônico para Snn irá satisfazer A no ponto w . ■

Os axiomas D, T, B, 4 e 5

Retomemos as definições dos axiomas **D**, **T**, **B**, **4** e **5**, na Seção 1.2. A esses axiomas, associaremos as seguintes condições sobre uma estrutura $\langle W, F \rangle$ (denotamos $W \setminus X$ por $\neg X$):

D* Para todo $w \in W$, se $X \in F(w)$ então $\neg X \notin F(w)$;

T* Para todo $w \in W$, se $X \in F(w)$ então $w \in X$;

B* Para todo $w \in W$, se $w \in X$ então $\{w' \in W : -X \notin F(w')\} \in F(w)$;

4* Para todo $w \in W$, se $X \in F(w)$ então $\{w' \in W : X \in F(w')\} \in F(w)$;

5* Para todo $w \in W$, se $X \notin F(w)$ então $\{w' \in W : X \notin F(w')\} \in F(w)$.

Teorema 3.5 *A estrutura $\langle W, F \rangle$ satisfaz a condição D^* (T^* , B^* , 4^* ou 5^*) se e somente se o axioma D (T , B , 4 ou 5) é válido em $\langle W, F \rangle$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ A demonstração desta direção encontra-se em [Che80] e é uma simples aplicação da definição de valoração para Lógica Modal Não-normal.

$(\Leftarrow)$ Basta supor que a estrutura não satisfaça a condição correspondente, e escolher uma valoração conveniente que falsifique o axioma.

Se $\langle W, F \rangle$ é tal que existem um $w \in W$ e um $X \in F(w)$ tal que $-X \in F(w)$, tomando uma valoração V tal que $V(p) = X$, teremos $w \in V(\Box p)$, pois $X \in F(w)$ e $w \in V(\Box(\neg p))$, pois $V(\neg p) = -X \in F(w)$. Assim, $\langle W, F, V, w \rangle \models \Box p \wedge \Box(\neg p)$, contradizendo o axioma **D**: $\Box p \rightarrow \Diamond p$.

Para o axioma **B**, suponha que $w \in X$ e $\{w' \in W : -X \notin F(w')\} \notin F(w)$. Tomando V tal que $V(p) = X$, temos $V(\Diamond p) = V(\neg \Box \neg p) = -V(\Box \neg p) = -\{w' \in W : V(\neg p) \in F(w')\} = \{w' \in W : -X \notin F(w')\}$. Logo, por hipótese, $V(\Diamond p) \notin F(w)$, de onde segue que $w \notin V(\Box \Diamond p)$. Como $w \in V(p)$, temos $w \notin V(p \rightarrow \Box \Diamond p)$, contradizendo a validade do axioma **B**.

Para os outros axiomas, o procedimento é semelhante. ■

Mostraremos a completude de cada um desses axiomas (adicionado a Snn) com relação à classe das estruturas correspondentes. Como na Lógica Modal Normal, mostraremos que a estrutura do modelo canônico (ou de um modelo canônico) para cada sistema satisfaz a condição correspondente.

Teorema 3.6 *O sistema Snn acrescido do axioma D (T , B , 4 ou 5) é completo em relação à classe das estruturas $\langle W, F \rangle$ que satisfazem D^* (T^* , B^* , 4^* ou 5^*)*

Demonstração: Seja S o sistema $Snn + \mathbf{A}$, sendo $\mathbf{A}$ um dos cinco axiomas acima. Dados W o conjunto dos conjuntos maximalmente S -consistentes e $V : \mathcal{L} \longrightarrow 2^W$ tal que $V(A) = \{w \in W : A \in w\}$, seja

$$\mathfrak{X} = 2^W \setminus \{V(A) : A \in \mathcal{L}\}.$$

Pela nossa definição de modelo canônico, $\langle W, F, V \rangle$ será um modelo canônico para S se e somente se F for tal que, para todo $w \in W$:

$$F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\} \cup \mathcal{C},$$

para algum $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{X}$.

Para os axiomas **D**, **T** e **4** trabalharemos com $\mathcal{C} = \emptyset$.

Considere $S = Snn + \mathbf{D}$. Seja $X \in F(w)$. Vamos mostrar $\neg X \notin F(w)$. Suponha $\neg X \in F(w)$. Como $X \in F(w)$, temos $X = V(A)$, com $\Box A \in w$. De $\neg X = V(\neg A) \in F(w)$ concluímos $\Box \neg A \in w$, contradizendo o axioma **D** (trocando p por A , pela regra da Substituição Uniforme): $\Box A \rightarrow \neg \Box \neg A$. Isso conclui a completude de $Snn + \mathbf{D}$.

Para $S = Snn + \mathbf{T}$, suponha $X \in F(w)$. Temos $X = V(A)$, com $\Box A \in w$. Por **T**, $A \in w$, de onde segue $w \in V(A) = X$, como queríamos.

Para o sistema $S = Snn + \mathbf{4}$, suponha $X \in F(w)$, isto é, $X = V(A)$, com $\Box A \in w$. Pelo axioma **4** temos $\Box \Box A \in w$, isto é, $V(\Box A) \in F(w)$. Mas $V(\Box A) = \{w' \in W : V(A) \in F(w')\}$. Como $V(A) = X$, concluímos $\{w' \in W : X \in F(w')\} \in F(w)$.

Para a demonstração da completude $Snn + \mathbf{5}$, partiremos para o outro extremo, isto é, considerar $\mathcal{C} = \mathfrak{X}$. Assim, se $X \notin F(w)$, em particular $X \notin \mathfrak{X}$ e, portanto, $X = V(A)$, para alguma fórmula A , com $\Box A \notin w$. Logo $\neg \Box A \in w$, isto é, $\Diamond \neg A \in w$. Por **5** temos $\Box \Diamond \neg A \in w$, de onde segue $V(\Diamond \neg A) \in F(w)$. Mas $V(\Diamond \neg A) = \neg V(\Box A) = \{w' \in W : V(A) \notin F(w')\}$. Como $V(A) = X$ concluímos a demonstração.

Finalmente, para a completude de $Snn + \mathbf{B}$, tomamos F tal que

$$F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\} \cup \{X \in \mathfrak{X} : w \in X\}.$$

Assim, suponha $w \in X$. Vamos mostrar $\{w' \in W : \neg X \notin F(w')\} \in F(w)$. Temos dois casos a analisar. Se $X = V(A)$, para uma fórmula A , temos $A \in w$ e, por **B**, $\Box \Diamond A \in w$. Logo $V(\Diamond A) = \{w' \in W : \neg V(A) \notin F(w')\} \in F(w)$, como queríamos. Se X não é da forma $V(A)$, isto é, $X \in \mathfrak{X}$, como $w \in X$ temos $X \in F(w)$. Mas, como $\neg X \in \mathfrak{X}$ (pois $X \in \mathfrak{X}$), $\{w' \in W : \neg X \notin F(w')\} = \{w' \in W : w' \notin \neg X\} = X \in F(w)$, como queríamos. ■

Axiomas de Normalidade

Apresentaremos alguns axiomas que, acrescentados ao sistema Snn , recuperam o sistema Normal **K**. Iniciaremos com dois pequenos lemas.

Lema 3.7 *Em $Snn + \Box \top$ vale a regra da Necessitação.*

Demonstração: Se $\vdash A$ temos $\vdash A \leftrightarrow \top$. Por Congruência, $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box \top$. Pelo axioma $\Box \top$ e *Modus Ponens* obtemos $\vdash \Box A$. ■

O próximo lema nos dá uma equivalência ao axioma **K**.

Lema 3.8 *Se S contém Snn e a regra da Necessitação, então $\vdash_S \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ se e somente se $\vdash_S \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha o axioma **K**. Como $(p \wedge q) \rightarrow p$ é tautologia, por Necessitação temos $\vdash \Box((p \wedge q) \rightarrow p)$. Por **K** e Substituição Uniforme temos $\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$. Analogamente obtemos $\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$ e, portanto,

$\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$. Para a outra direção, usamos que $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ é tautologia. Portanto, por Necessitação e **K** (usando Substituição Uniforme em **K**), temos $\vdash \Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$. Mas, por **K** e Substituição Uniforme, temos $\vdash \Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$. Logo, $\vdash \Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$, do qual concluímos $\vdash (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$.

($\Leftarrow$) Suponha o axioma **A**: $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ em um sistema S contendo Snn e Necessitação. Mostraremos o axioma **K**. Observe que **K** é tautologicamente equivalente a $(\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box p) \rightarrow \Box q$. Por Congruência e a tautologia $((p \rightarrow q) \wedge p) \leftrightarrow (p \wedge q)$ temos $\vdash \Box((p \rightarrow q) \wedge p) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$. Por **A** temos $\vdash \Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$. Logo $\vdash \Box((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \Box q$. Por **A** e Substituição Uniforme, $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box p) \rightarrow \Box((p \rightarrow q) \wedge p)$. Portanto $\vdash (\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box p) \rightarrow \Box q$. ■

Com esses dois lemas, concluímos que o sistema **K** é equivalente ¹ ao sistema Snn acrescido dos axiomas:

M $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

C $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$

N $\Box \top$

Note que de **C** concluímos $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$, usando Congruência em $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ e Substituição Uniforme (para trocar p e q).

A exemplo do que fizemos com os axiomas **D**, **T**, **B**, **4** e **5**, aos axiomas **M**, **C** e **N** associaremos as seguintes condições sobre uma estrutura $\langle W, F \rangle$:

M* Para todo $w \in W$, se $X, Y \in F(w)$, então $X \cap Y \in F(w)$;

C* Para todo $w \in W$, se $X \in F(w)$ e $X \subseteq Y \subseteq W$, então $Y \in F(w)$;

N* Para todo $w \in W$, $W \in F(w)$.

Chamamos essas condições de, respectivamente, *fechado por intersecções finitas*, *suplementado* (ou *fechado por superconjuntos*) e *contém a unidade*.

Teorema 3.9 *O axioma **M** (**C** ou **N**) é válido em uma estrutura $\langle W, F \rangle$ se e somente se esta satisfaz **M*** (**C*** ou **N***).*

Demonstração: A condição para **N** é claramente necessária e suficiente, uma vez que $V(\top) = W$.

Mostremos que as condições **M*** e **C*** são suficientes para a validade de **M** e **C**, respectivamente.

Assumamos **M***. Se $w \in V(\Box p \wedge \Box q)$, para uma valoração V , temos $V(p) \in F(w)$ e $V(q) \in F(w)$. Por hipótese, $V(p) \cap V(q) = V(p \wedge q) \in F(w)$. Portanto $w \in V(\Box(p \wedge q))$, provando **M**.

Assumindo **C***, vamos provar a validade de **C**. Se $w \in V(\Box(p \wedge q))$, temos $V(p \wedge q) \in F(w)$. Como $V(p \wedge q) \subseteq V(p)$, por hipótese $V(p) \in F(w)$. Logo $w \in V(\Box p)$, como queríamos.

¹Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando possuem os mesmos teoremas

Reciprocamente, suponha **M** válido em $\langle W, F \rangle$. Dados $X, Y \in F(w)$, para algum $w \in W$, considere uma valoração V tal que $V(p) = X$ e $V(q) = Y$. Como $V(p) \in F(w)$ e $V(q) \in F(w)$, temos $w \in V(\Box p \wedge \Box q)$. Logo, por **M**, $w \in V(\Box(p \wedge q))$, isto é, $V(p) \cap V(q) = X \cap Y \in F(w)$.

Da mesma forma, se **C** é válido em $\langle W, F \rangle$, dado $X \in F(w)$ e $Y \subseteq W$ com $X \subseteq Y$, tome V tal que $V(q) = X$ e $V(p) = Y$. Temos $V(p \wedge q) = X \cap Y = X \in F(w)$. Por **C** concluímos que $V(p) = Y \in F(w)$. ■

Teorema 3.10 *O sistema Snn acrescido de um ou mais dos axiomas M, C ou N é completo com relação à classe das estruturas que satisfazem a(s) propriedade(s) correspondente(s).*

Demonstração: Seja S um sistema como no enunciado. Se S não contém o axioma C considere $\langle W, F, V \rangle$ um modelo canônico para S em que, para todo $w \in W$,

$$F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\}.$$

Se S contém o axioma C considere $\langle W, F, V \rangle$ um modelo canônico para S em que, para todo $w \in W$:

$$F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\} \cup \{X \in \mathfrak{X} : (\exists A \in \mathcal{L}) \Box A \in w \text{ e } V(A) \subseteq X\},$$

lembrando que $\mathfrak{X} = 2^W \setminus \{V(A) : A \in \mathcal{L}\}$. Argumentos padrões, semelhantes aos usados até agora, mostram que:

1. Se S contém **M**, então $\langle W, F \rangle$ é fechado por intersecções finitas;
2. Se S contém **C**, então $\langle W, F \rangle$ é suplementado;
3. Se S contém **N**, então $\langle W, F \rangle$ contém a unidade.

Isso conclui a completude desses sistemas, pois basta, agora, tomarmos um conjunto maximalmente consistente que contenha uma dada fórmula consistente A . ■

Em particular, o sistema **K** = Snn+**M**+**C**+**N** é correto e completo com relação à classe de todas as estruturas que são fechadas por intersecções finitas, suplementadas e que contém a unidade. Ou seja, as estruturas em que cada $F(w)$ é um *filtro* (não necessariamente próprio) sobre 2^W .

Na Seção 3.1 comparamos estruturas para Lógica Modal Normal e para Lógica Modal Não-normal. Vimos como cada estrutura Normal pode ser vista como caso particular de não-normal. Essas estruturas Não-normais que representam as Normais são aquelas em que, para cada $w \in W$, $F(w)$ é da forma $\{X \subseteq W : R_w \subseteq X\}$, para algum $R_w \subseteq W$.

Estruturas dessa forma satisfazem a condição de cada $F(w)$ ser um filtro, mas nem todos filtros são dessa forma (superconjuntos de um conjunto fixo). Assim, apesar de toda estrutura Normal ser representada por uma não-normal, existem estruturas Não-normais que satisfazem os axiomas de normalidade, mas não representam estruturas Normais.

3.3.1 Incompletude

Em [HC96] encontramos um exemplo de incompletude em Lógica Modal Normal, isto é, um sistema de Lógica Modal Normal que não é correto e completo com relação a nenhuma classe de estruturas de Kripke. É o sistema KH , formado pelo sistema $\mathbf{K}$ acrescentado do axioma $\mathbf{H}$:

$$\Box(\Box p \leftrightarrow p) \rightarrow \Box p.$$

Prova-se a incompletude de KH mostrando que toda estrutura de Kripke que satisfaz $\mathbf{H}$ também satisfaz $\mathbf{4}$, mas $\mathbf{4}$ não é um teorema de KH . Portanto, se KH for correto com relação a uma classe de estruturas $\mathcal{K}$, teremos que $\mathbf{4}$ será válido em $\mathcal{K}$, mas não é um teorema de KH . Logo KH será incompleto com relação a $\mathcal{K}$.

Como vimos que a semântica de vizinhanças é mais forte que a semântica de Kripke, mesmo supondo os axiomas de normalidade, isso não nos dá um exemplo de incompletude em Lógica Modal Não-normal. Poderíamos ter a esperança de que, com a semântica de vizinhanças, para todo sistema não-normal, pudéssemos encontrar uma classe de estruturas para a qual o sistema fosse correto e completo, e obteríamos um resultado geral de completude.

Gerson [Ger75] mostrou dois exemplos de incompletude em Lógica Modal Não-normal, com a semântica de vizinhanças. Ambos sistemas contêm os axiomas de normalidade. Porém, esses sistemas são extremamente mais complexos que o sistema KH , pois a semântica de vizinhanças é bem mais expressiva que a de Kripke.

Capítulo 4

Álgebras de Boole na Lógica Modal

As álgebras de Boole se tornaram uma ferramenta extremamente útil para diversos ramos da Matemática, especialmente para a Lógica. Em [Kop89] encontra-se uma demonstração da completude da lógica de primeira ordem usando álgebras de Boole. Em Lógica Modal, diversos resultados foram obtidos com o uso dessas álgebras, principalmente no que se refere a construções de modelos a partir de elementos sintáticos (a linguagem e a axiomatização), como ocorre em diversos resultados de completude.

Neste capítulo estudaremos o tratamento algébrico para Lógica Modal. Concentraremos no caso não-normal, que é mais geral e, em alguns momentos, mais natural. Veremos a definição de estruturas gerais para Lógica Modal, e como identificá-las com álgebras de Boole com operadores. Na Seção 4.2 concluímos com um resultado geral de completude, que é a principal vantagem do tratamento algébrico da Lógica Modal.

Para simplificar a notação, trabalharemos apenas com operadores modais unários, mas podemos generalizar para operadores de aridade arbitrária. Um estudo geral sobre álgebras de Boole, incluindo a demonstração detalhada do Teorema de Stone, pode ser visto em [Kop89], no qual se baseia este capítulo. O tratamento algébrico da Lógica Modal (caso normal) encontra-se em [BdRV01], e também no artigo de Wolter [Wol96]. O caso não-normal, que será tratado aqui, é uma simples adaptação do caso normal.

4.1 Estruturas e Modelos Gerais para Lógica Modal

Na definição usual de valoração em estruturas para Lógica Modal, podemos tomar qualquer subconjunto de W para ser a valoração de uma fórmula atômica p . Nosso intuito, aqui, é restringir as possibilidades de valorações, fornecendo

uma noção mais geral de semântica, com resultados muito mais fortes. As noções de estruturas gerais são apresentadas em [BdRV01] e adaptadas aqui para o caso não-normal.

Uma *estrutura geral* para Lógica Modal Não-normal é uma tripla $\langle W, F, P \rangle$ onde $\langle W, F \rangle$ é uma estrutura usual e $P \subseteq 2^W$ é uma família de subconjuntos de W satisfazendo:

1. $W \in P$;
2. Se $X, Y \in P$ então $X \cap Y \in P$;
3. Se $X \in P$, $W \setminus X \in P$;
4. Se $X \in P$, $\{w \in W : X \in F(w)\} \in P$.

Um *modelo geral* é uma quádrupla $\langle W, F, P, V \rangle$ onde $\langle W, F, P \rangle$ é uma estrutura geral e $V : \mathcal{L} \longrightarrow P$ é uma valoração como a usual. As condições 1, 2, 3 e 4 sobre P garante que $V(\top)$, $V(A \wedge B)$, $V(\neg A)$ e $V(\Box A)$, respectivamente, continuam em P . Ou seja, podemos estender qualquer função das fórmulas atômicas em P a uma valoração, sabendo que a imagem permanecerá em P .

Os elementos de $F(w)$ que não estão em P são irrelevantes para a valoração. Por isso, podemos considerar sempre $F : W \longrightarrow 2^P$.

A definição de estruturas gerais para Lógica Modal Normal é análoga. No lugar da função F temos uma relação R e, no lugar da condição 4 sobre P , temos a condição

$$X \in P \implies \{w \in W : (\forall w') wRw' \Rightarrow w' \in X\} \in P,$$

que é a valoração de $V(\Box A)$, quando $V(A) = X$.

A relação $\models$ em modelos e estruturas gerais é definida como nos modelos e estruturas usuais, isto é, $\langle W, F, P, V, w \rangle \models A$ se e somente se $w \in V(A)$, e $\langle W, F, P \rangle \models A$ se e somente se $\langle W, F, P, V, w \rangle \models A$, para toda valoração $V : \mathcal{L} \longrightarrow P$ e todo $w \in W$.

Retomemos a definição de modelo canônico para Lógica Modal Não-normal, no Capítulo 3. Iremos adaptá-la ao contexto de estruturas gerais.

Definição 4.1 Seja S um sistema para Lógica Modal Não-normal. Definimos o *modelo geral canônico para S* como o modelo $\langle W, F, P, V \rangle$ em que

- W é o conjunto dos conjuntos maximalmente S -consistentes;
- $V : \mathcal{L} \longrightarrow 2^W$ é dada por $V(A) = \{w \in W : A \in w\}$;
- $P = \{V(A) : A \in \mathcal{L}\}$;
- $F : W \longrightarrow 2^P$ é dada por $F(w) = \{V(A) : \Box A \in w\}$.

A estrutura $\langle W, F, P \rangle$ do modelo geral canônico é chamada *estrutura geral canônica de S* .

Analogamente ao que foi mostrado em 3.3, podemos verificar que F está bem definida e que $\langle W, F, P, V \rangle$ é de fato um modelo geral.

O seguinte resultado, que possui um correspondente para estruturas gerais em Lógica Modal Normal, nos dá um resultado geral de correção e completude.

Proposição 4.2 *Seja S um sistema de Lógica Modal Não-normal, e seja $\langle W, F, P \rangle$ a estrutura geral canônica para S . Então, para toda fórmula A , temos $\langle W, F, P \rangle \models A$ se e somente se $\vdash_S A$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha $\not\vdash_S A$, isto é, $\neg A$ é S -consistente. Considere V a valoração do modelo canônico e tome w tal que $\neg A \in w$. Temos $\langle W, F, P, V, w \rangle \models \neg A$ e, portanto, $\langle W, F, P \rangle \not\models A$.

$(\Leftarrow)$ Suponha, por absurdo, $\vdash_S A$ mas $\langle W, F, P \rangle \not\models A$. Seja V' uma valoração e $w \in W$ tal que

$$\langle W, F, P, V', w \rangle \models \neg A.$$

Sejam $p_1, \dots, p_n$ as fórmulas atômicas que ocorrem em A . Para cada $i = 1, \dots, n$, considere A_i tal que

$$V'(p_i) = V(A_i),$$

onde V é a valoração do modelo canônico. Note que A_i existe, pois V' está definida em P , e é neste ponto que usamos o fato de estarmos trabalhando com estruturas gerais. Seja

$$B = A[p_1/A_1, \dots, p_n/A_n]$$

a fórmula obtida pela substituição de p_i por A_i , em A , para cada $i = 1, \dots, n$. Uma simples indução na construção de B nos dá

$$\langle W, F, P, V, w \rangle \models \neg B,$$

isto é, $w \in V(\neg B)$ e, portanto, $\neg B \in w$. Logo, teríamos $\neg B$ consistente, absurdo, pois B é obtido de A pela regra da Substituição Uniforme. ■

4.2 Álgebras de Boole

Uma álgebra de Boole é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$, onde $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em A , $-$ é uma operação unária e 0 e 1 são dois elementos distintos de A , que satisfaz, para todo $x, y, z \in A$:

$$B1 \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z; \text{ (associatividade)}$$

$$B1' \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

$$B2 \quad x \vee y = y \vee x; \text{ (comutatividade)}$$

$$B2' \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

$$B3 \quad x \vee (x \wedge y) = x; \text{ (absorção)}$$

$$B3' \quad x \wedge (x \vee y) = x;$$

$$B4 \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \text{ (distributividade)}$$

$$B4' \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

$$B5 \quad x \vee (-x) = 1; \text{ (complementação)}$$

$$B5' \quad x \wedge (-x) = 0.$$

Nota-se que os axiomas de álgebra de Boole são apresentados aos pares, sendo o axioma A' obtido de A pela substituição de $\wedge$ por $\vee$ e $\vee$ por $\wedge$, e 0 por 1 e 1 por 0. Há, portanto, uma dualidade entre $\wedge$ e $\vee$ e 0 e 1.

Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$, chamamos o conjunto A de *domínio* de $\mathcal{A}$. Por abuso de notação, eventualmente denotaremos a álgebra $\mathcal{A}$ pelo seu domínio A .

Definição 4.3 Dadas duas álgebras de Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, de domínios A e B , respectivamente, um *homomorfismo* entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é uma função $h : A \longrightarrow B$ satisfazendo

$$h(0) = 0, \quad h(1) = 1$$

e, para todo $x, y \in A$,

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y), \quad h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \quad h(-x) = -h(x).$$

Um *isomorfismo* é um homomorfismo bijetor. Se existir um isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *isomorfas*, e denotamos por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Definição 4.4 Numa álgebra de Boole A , definimos a relação $\leq$ por $x \leq y$ se e somente se $x = x \vee y$, para todo $x, y \in A$.

Lembramos que uma relação $\leq$ em um conjunto X é uma *ordem parcial* sobre X se é reflexivo ($x \leq x$), antissimétrico (se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$) e transitivo (se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$). Denotamos a ordem por $(X, \leq)$.

Dados x, y em uma ordem parcial $(X, \leq)$, denotamos por $\sup\{x, y\}$ um elemento z (único, se existir) tal que $z \leq x$, $z \leq y$ e, para todo $w \in X$, se $w \leq x$ e $w \leq y$ então $w \leq z$ (ou seja, z é o maior elemento que é menor que x e y). Da mesma forma, z é o $\inf\{x, y\}$ se $x \leq z$, $y \leq z$ e, para todo $w \in X$, se $x \leq w$ e $y \leq w$ então $z \leq w$ (z é o menor elemento que é maior que x e y). A uma ordem que sempre contém $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ chamamos *reticulado*. A proposição seguinte nos diz que a relação $\leq$, definida acima, é uma ordem parcial que forma um reticulado em A .

Proposição 4.5 A relação $\leq$ da Definição 4.4 é uma ordem parcial sobre A . Além disso, dados $x, y \in A$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e $x \vee y = \sup\{x, y\}$.

A demonstração dessa proposição encontra-se em [Kop89] e é uma simples aplicação dos axiomas.

Álgebras de Conjuntos

Uma álgebra de conjuntos sobre X é uma família $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ que contém X e é fechado por intersecções finitas e complementos, isto é:

- $X \in \mathcal{A}$;
- Se $X, Y \in \mathcal{A}$ então $X \cap Y \in \mathcal{A}$;
- Se $X \in \mathcal{A}$ então $W \setminus X \in \mathcal{A}$.

Dessas três propriedades, usando leis de Morgan, podemos concluir:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- Se $X, Y \in \mathcal{A}$ então $X \cup Y \in \mathcal{A}$.

Proposição 4.6 *Uma álgebra de conjuntos sobre X é uma álgebra de Boole, onde $0 = \emptyset$, $1 = X$ e as operações $\wedge$, $\vee$ e $-$ são, respectivamente, intersecção, união e complemento em relação a X .*

Suprimiremos a demonstração desta proposição, que é uma simples verificação dos axiomas. Na Seção 4.3, estudaremos uma espécie de recíproca da proposição: todas álgebras de Boole são, a menos de isomorfismos, álgebras de conjuntos.

Observe que a ordem apresentada na definição 4.4, quando aplicada a uma álgebra de conjuntos, é a ordem da inclusão: $\subseteq$, uma vez que $A \cup B = B$ se e somente se $A \subseteq B$.

Álgebras de Lindenbaum-Tarski

Depois das álgebras de conjuntos, o mais importante exemplo de álgebra de Boole, principalmente no estudo de Lógica, são as álgebras de Lindenbaum-Tarski. Essas fornecem uma das maneiras mais elegantes que se conhecem hoje em dia de provar a completude da Lógica de primeira ordem.

Seja L um sistema de axiomas para uma lógica que estende a lógica clássica. Seja $\mathcal{L}_L$ a sua linguagem. Definimos a relação $\equiv_L$ em $\mathcal{L}_L$ por:

$$\phi \equiv_L \psi \Leftrightarrow \vdash_L \phi \leftrightarrow \psi.$$

O seguinte fato segue imediatamente da definição:

Fato 4.7 *A relação $\equiv_L$ é uma relação de equivalência.*

Dada uma fórmula ϕ em $\mathcal{L}$, definimos $[\phi]$ como a classe de equivalência de ϕ , isto é,

$$[\phi] = \{\psi \in \mathcal{L} : \phi \equiv_L \psi\}.$$

Finalmente, definimos $Alg(L)$ o quociente de $\mathcal{L}$ por $\equiv_L$, isto é,

$$Alg(L) = \{[\phi] : \phi \in \mathcal{L}\}.$$

Proposição 4.8 *Dado um sistema de axiomas L , $\text{Alg}(L)$ é uma álgebra de Boole com as operações dadas por $[\phi] \wedge [\psi] = [\phi \wedge \psi]$, $[\phi] \vee [\psi] = [\phi \vee \psi]$ e $\neg[\phi] = [\neg\phi]$, tomando $0 = [\perp]$ e $1 = [\top]$. A álgebra $\text{Alg}(L)$, com essas operações, é chamada álgebra de Lindenbaum-Tarski de L .*

Demonstração: Precisamos mostrar que as operações estão bem definidas. Ou seja, precisamos mostrar que se $[\phi] = [\phi']$ e $[\psi] = [\psi']$, então $[\phi \wedge \psi] = [\phi' \wedge \psi']$, $[\phi \vee \psi] = [\phi' \vee \psi']$ e $[\neg\phi] = [\neg\psi']$. Se $[\phi] = [\phi']$ e $[\psi] = [\psi']$, temos $\vdash_L \phi \leftrightarrow \phi'$ e $\vdash_L \psi \leftrightarrow \psi'$. Logo $\vdash_L \phi \wedge \psi \leftrightarrow \phi' \wedge \psi'$, $\vdash_L \phi \vee \psi \leftrightarrow \phi' \vee \psi'$ e $\vdash_L \neg\phi \leftrightarrow \neg\phi'$, de onde temos $[\phi \wedge \psi] = [\phi' \wedge \psi']$, $[\phi \vee \psi] = [\phi' \vee \psi']$ e $[\neg\phi] = [\neg\phi']$, como queríamos.

Com uma simples verificação de cada axioma podemos verificar que essas operações definem uma álgebra de Boole. ■

Como fizemos com álgebras de conjunto, vejamos como é a ordem nas álgebras de Lindenbaum-Tarski.

Proposição 4.9 *Numa álgebra de Lindenbaum-Tarski $\text{Alg}(L)$, temos $[\phi] \leq [\psi]$ se e somente se $\vdash_L \phi \rightarrow \psi$.*

Demonstração: Se $[\phi] \leq [\psi]$ temos $\vdash_L \phi \vee \psi \leftrightarrow \psi$ e, portanto, $\vdash_L \phi \rightarrow \psi$ ■

4.3 Teorema de Representação de Stone

Nesta seção, apresentaremos um dos principais resultados da teoria das álgebras de Boole: o teorema de representação de Stone, que afirma que toda álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de conjuntos. Não só esse resultado é importante, mas a construção da álgebra de conjuntos isomorfa a uma álgebra dada, nos irá interessar.

Antes de entrarmos na representação de Stone, precisamos da definição de filtros e ultrafiltros.

Definição 4.10 Seja A uma álgebra de Boole. Dizemos que $F \subseteq A$ é um *filtro* em A se

- $1 \in F$;
- $0 \notin F$;
- Se $x, y \in F$ então $x \wedge y \in F$;
- Para todo $x, y \in A$, se $x \in F$ e $x \leq y$, então $y \in F$.

Um *ultrafiltro* em A é um filtro maximal, isto é, um filtro que não está contido propriamente em nenhum filtro.

Antes de demonstrarmos alguns lemas fundamentais sobre ultrafiltros, necessários para o Teorema de Representação de Stone, iremos enunciar o Lema de Zorn, que, na presença dos outros axiomas de Teoria dos Conjuntos, é equivalente ao Axioma da Escolha.

Fato 4.11 (Lema de Zorn) *Seja $(P, \leq)$ uma ordem parcial não-vazia tal que toda cadeia tenha majorante em P , isto é, se $C \subseteq P$ é totalmente ordenado por $\leq \cap (C \times C)$, existe $p \in P$ tal que $x \leq p$, para todo $x \in C$. Então P possui um elemento maximal, isto é, existe $m \in P$ tal que não existe $x \in P$ satisfazendo $m < x$.*

Na maior parte das aplicações do Lema de Zorn, inclusive a que apresentaremos agora, P é uma família de conjuntos ordenada pela inclusão.

Lema 4.12 *Se $F \subseteq A$ é tal que para todos $x_1, \dots, x_n \in F$ temos $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \neq 0$, então existe um ultrafiltro que contém F .*

Demonstração: Seja F como no enunciado. Podemos supor F não-vazio. Defina $F' = \{a \in A : \exists x_1, \dots, x_n \in F (x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a)\}$. Claramente $F \subseteq F'$. Mostremos que F' é um filtro.

Como $F \neq \emptyset$ e, pela Proposição 4.5, 1 é o elemento máximo de A , temos que $1 \in F'$. Vamos verificar que $0 \notin F'$. Suponha $0 \in F'$ e sejam $x_1, \dots, x_n \in F$ tais que $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq 0$. Como 0 é o mínimo de A , temos $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 0$, contradizendo a hipótese sobre F .

Sejam $a, b \in F'$ e considere $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in F$ tais que $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$ e $y_1 \wedge \dots \wedge y_m \leq b$. Sejam $x = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ e $y = y_1 \wedge \dots \wedge y_m$. Pela Proposição 4.5, temos $x \wedge y \leq x \leq a$ e $x \wedge y \leq y \leq b$, de onde concluímos $x \wedge y \leq a \wedge b$ e, portanto, $a \wedge b \in F'$.

Finalmente, se $a \in F'$ e $b \in A$ é tal que $a \leq b$, tomando $x_1, \dots, x_n \in F$ tais que $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq a \leq b$, obtemos $b \in F'$, concluindo que F' é um filtro.

Seja $P = \{S \subseteq A : S \text{ é um filtro e } F' \subseteq S\}$. Tudo que precisamos agora é mostrar que P , com a ordem da inclusão, satisfaz a hipótese do Lema de Zorn.

Considere $C \subseteq P$ uma subconjunto não-vazio de P totalmente ordenado pela inclusão. Para acharmos um majorante de C em P , basta mostrarmos que $\bigcup C \in P$, ou seja, que é um filtro. De fato, $1 \in \bigcup C$, pois $\bigcup C$ é um conjunto não-vazio de filtros. Como $0 \notin S$, para todo $S \in C$, temos $0 \notin \bigcup C$. Se $a \in \bigcup C$ e $b \in A$ é tal que $a \leq b$, tome $S \in C$ tal que $a \in S$. Como S é filtro, $b \in S$ e, portanto, $b \in \bigcup C$. Finalmente, se $a, b \in \bigcup C$, considere $S_1, S_2 \in C$ tais que $a \in S_1$ e $b \in S_2$. Como C é totalmente ordenado pela inclusão, considere S o maior conjunto entre S_1 e S_2 . Temos $a, b \in S$ e, como S é filtro, $a \wedge b \in S \subseteq \bigcup C$. Logo $\bigcup C$ é filtro.

Pelo Lema de Zorn, P possui um elemento maximal U . que é um ultrafiltro que contém F' e, portanto, F , como queríamos. ■

Dizemos que uma família F como no lema 4.12 tem a *propriedade da intersecção finita* (p.i.f.).

Lema 4.13 *Um filtro F em uma álgebra A é um ultrafiltro se e somente se para todo $a \in A$, ou $a \in F$ ou $-a \in F$.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Suponha que exista um filtro $F' \supset F$ contendo propriamente F . Seja $a \in F' \setminus F$. Como $a \notin F$, temos $-a \in F$, logo $0 = a \wedge (-a) \in F'$, absurdo.

($\Rightarrow$) Seja $a \in A$. Pelo argumento apresentado acima, não podemos ter ambos a e $-a$ em F . Mostraremos que $F \cup \{a\}$ ou $F \cup \{-a\}$ possui a p.i.f. Isso será suficiente, pois, pelo Lema 4.12, teremos a existência de um ultrafiltro contendo $F \cup \{a\}$ ou $F \cup \{-a\}$. Se a e $-a$ não pertencem a F , encontramos um filtro que estende propriamente F , contradizendo que F é um ultrafiltro.

Suponha que nem $F \cup \{a\}$ nem $F \cup \{-a\}$ possua a p.i.f. Pelo fato de F ser filtro, se $x_1, \dots, x_n \in F$, então $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in F$. Logo, por $F \cup \{a\}$ e $F \cup \{-a\}$ não possuírem a p.i.f., concluímos que existem $x, y \in F$ tais que $x \wedge a = 0$ e $y \wedge (-a) = 0$. Tomando $z = x \wedge y \in F$, temos $z \wedge a = 0$ e $z \wedge (-a) = 0$.

Note que $x \vee 0 = x$, para todo $x \in A$. De fato, usando os axiomas $B5'$ e $B3$, temos que $x \vee 0 = x \vee (x \wedge (-x)) = x$. Assim, usando que $z \wedge (-a) = 0$, temos $z \wedge a = (z \wedge a) \vee (z \wedge (-a)) = z \wedge (a \vee (-a)) = z \wedge 1 = z$ (pois $z \leq 1$), obtendo $z \leq a$. Analogamente, usando que $z \wedge a = 0$, obtemos $z \leq -a$. Da Proposição 4.5 obtemos $z \leq a \vee (-a)$, logo $z = 0$. Absurdo, pois $z \in F$. ■

Lema 4.14 *Dados $a, b \in A$ distintos, existe um ultrafiltro u em A tal que $a \in u$ e $b \notin u$, ou $b \in u$ e $a \notin u$.*

Demonstração: Repetindo o argumento usado no último parágrafo da demonstração do Lema 4.13, se $a \wedge (-b) = 0$ temos $a \leq b$. Da mesma forma, se $b \wedge (-a) = 0$ temos $b \leq a$.

Portanto, $\{a, -b\}$ ou $\{b, -a\}$ tem a p.i.f., pois caso contrário teríamos $a = b$. Se $\{a, -b\}$ tem a p.i.f., pelo Lema 4.12 existe um ultrafiltro u tal que $a \in u$ e $-b \in u$, isto é, $a \in u$ e $b \notin u$. Se $\{b, -a\}$ tem a p.i.f. encontramos um ultrafiltro u tal que $b \in u$ e $a \notin u$. ■

Definição 4.15 Dada uma álgebra A , definimos o *espaço de Stone de A* , denotado $S(A)$, como o conjunto dos ultrafiltros em A . Dado $a \in A$, definimos $a^* = \{u \in S(A) : a \in u\}$. Chamamos de A^* o conjunto $\{a^* : a \in A\}$.

O espaço de Stone é assim chamado por ser um espaço topológico¹, com a topologia gerada por A^* . Os ultrafiltros em A , que são subconjuntos de A , são pontos de $S(A)$, e os elementos de A identificamos com subconjuntos de $S(A)$, uma vez que, para $u \in S(A)$ e $a \in A$, temos $a \in u$ se e somente se $u \in a^*$.

Teorema 4.16 (Stone) *Seja A uma álgebra. A família A^* , como na definição anterior, forma uma álgebra de conjuntos sobre $S(A)$ tal que $A \cong A^*$. Portanto, toda álgebra de Boole é isomorfa a uma álgebra de conjuntos.*

¹ $S(A)$ é um espaço Hausdorff, Compacto e 0-dimensional (possui base de abertos-fechados). Detalhes sobre a dualidade de Stone, que associa propriedades algébricas de A com propriedades topológicas de $S(A)$, encontram-se em [Kop89].

Demonstração: Vamos provar que A^* é uma álgebra de conjuntos. Para isso, é suficiente mostrar que $1^* = S(A)$, $(a \wedge b)^* = (a^*) \cap (b^*)$ e $-(a^*) = (-a)^*$. De fato, como, por definição, todo ultrafiltro contém 1, temos $1^* = S(A)$. Como $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$, da definição de filtro segue imediatamente que, para todo ultrafiltro u , temos $a \wedge b \in u$ se e somente se $a \in u$ e $b \in u$. Portanto $(a \wedge b)^* = \{u \in S(A) : a \wedge b \in u\} = \{u \in S(A) : a \in u\} \cap \{u \in S(A) : b \in u\} = (a^*) \cap (b^*)$. Do lema 4.13 segue $-(a^*) = (-a)^*$.

Com isso, já provamos que a função $h : A \longrightarrow A^*$ dada por $h(a) = a^*$ é um homomorfismo, pois as condições $h(0) = 0$ e $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ seguem da demais usando as leis de Morgan. O homomorfismo h é sobrejetor, por definição de A^* . Se a e b são dois elementos de A distintos, pelo lema 4.14 existe um ultrafiltro que contém um e não contém outro. Logo, $a^* \neq b^*$. Portanto h é injetor, concluindo que h é um isomorfismo de A em A^* . ■

4.4 Álgebras de Boole com Operador

Uma *álgebra de Boole com operador* é uma estrutura $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1, f \rangle$, onde $\langle A, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$ é uma álgebra de Boole e $f : A \longrightarrow A$ é uma função qualquer (o operador de $\mathcal{A}$). Como em álgebras de Boole sem operador, iremos nos referir à álgebra $\mathcal{A}$ pelo seu domínio A .

Um *homomorfismo* entre duas álgebras com operadores A e B é um homomorfismo h entre as álgebras de Boole A e B tal que, para todo $a \in A$, $h(f_A(a)) = f_B(h(a))$, onde f_A e f_B são os operadores de A e B , respectivamente.

Se S é um sistema de Lógica Modal Não-normal, $Alg(S)$ é uma álgebra com o operador $\Box$ dado por $\Box[\phi] = [\Box\phi]$. Observe que o operador $\Box$ está bem definido, pois, pela regra da Congruência, se $[\phi] = [\phi']$ então $[\Box\phi] = [\Box\phi']$.

Lembramos que chamamos de *Snn* o sistema minimal para Lógica Modal Não-normal, apresentado no Capítulo 3. Iremos definir satisfatibilidade em álgebras de Boole.

Definição 4.17 Seja ϕ uma fórmula da Lógica Modal e A uma álgebra de Boole com operador. Dizemos que A *satisfaz* ϕ , e denotamos $A \models \phi$, se para todo homomorfismo de álgebras com operador $v : Alg(Snn) \longrightarrow A$, temos $v([\phi]) = 1$.

Intuitivamente, um homomorfismo de $Alg(Snn)$ em A é uma valoração definida em A . Como $v(1) = 1$, para todo homomorfismo v , e o elemento 1 de $Alg(Snn)$ é o conjunto dos teoremas de *Snn*, temos que toda álgebra com operador satisfaz os teoremas de *Snn*.

Note que, pela caracterização de normalidade dada pelos Lemas 3.7 e 3.8, podemos mostrar que uma álgebra com operador A satisfaz o sistema **K** de Lógica Modal Normal se e somente se o operador f satisfaz:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1; \\ f(a \wedge b) &= f(a) \wedge f(b). \end{aligned}$$

Estruturas Gerais como Álgebras de Boole

Seja $\Lambda = \langle W, F, P \rangle$ uma estrutura geral. Definimos a álgebra com operador $\mathcal{A}^\Lambda$ como a álgebra de conjuntos P com o operador f definido por

$$f(X) = \{w \in W : X \in F(w)\},$$

para todo $X \in P$.

Mostremos que a relação de satisfatibilidade em estruturas gerais coincide com a satisfatibilidade da álgebra correspondente.

Lema 4.18 *Seja $\Lambda = \langle W, F, P \rangle$ uma estrutura geral. Para toda fórmula ϕ , $\Lambda \models \phi$ se e somente se $\mathcal{A}^\Lambda \models \phi$.*

Demonstração: Se $\Lambda \not\models \phi$, isto é, existe uma valoração V tal que $V(\phi) \neq W$, tome $v : \text{Alg}(Snn) \rightarrow P$ o homomorfismo dado por $v([\psi]) = V(\psi)$. Observe que v está bem definido, pois se $[\psi] = [\psi']$ temos $\vdash_{Snn} \psi \leftrightarrow \psi'$ e, portanto, $V(\psi) = V(\psi')$, e que é de fato um homomorfismo. Como $v([\phi]) = V(\phi) \neq 1$, $\mathcal{A}^\Lambda \not\models \phi$.

Reciprocamente, dado um homomorfismo $v : \text{Alg}(Snn) \rightarrow P$ tal que $v([\phi]) \neq 1$, tome V uma valoração dada por $V(\psi) = v([\psi])$, e teremos $V(\phi) \neq W$. ■

O próximo teorema diz que toda álgebra com operador está associada a alguma estrutura geral.

Teorema 4.19 *Para toda álgebra com operador A , existe uma estrutura geral Λ tal que $A \cong \mathcal{A}^\Lambda$.*

Demonstração: Seja $f : A \rightarrow A$ o operador de A . Defina a estrutura $\Lambda = \langle W, F, P \rangle$ onde $W = S(A)$ é o espaço de Stone de A , $P = A^* = \{a^* : a \in A\}$ e $F : S(A) \rightarrow 2^P$ é dada por

$$F(u) = \{a^* : f(a) \in u\},$$

para todo $u \in S(A)$. Temos que A^Λ é a álgebra A^* do Teorema de Stone, com o operador $f^* : A^* \rightarrow A^*$ dado por:

$$f^*(a^*) = \{u \in S(A) : a^* \in F(u)\} = \{u \in S(A) : f(a) \in u\} = (f(a))^*.$$

Portanto, o isomorfismo de álgebras $h : A \rightarrow A^*$ dado por $h(a) = a^*$ também é um isomorfismo de álgebras com operador. ■

Completude Algébrica

Apresentaremos um resultado geral de completude, análogo à Proposição 4.2, mas para álgebras com operador. Usando a dualidade entre álgebras com operador e estruturas gerais, apresentada nesta seção, mostraremos a relação desses

dois resultados, traçando um paralelo entre álgebras de Lindenbaum-Tarski com operadores e estruturas gerais para Lógica Modal Não-normal, via representação de Stone.

Teorema 4.20 *Seja S um sistema de Lógica Modal Não-normal, e seja $Alg(S)$ a álgebra de Lindenbaum-Tarski de S com o operador $\Box$ dado por $\Box[\phi] = [\Box\phi]$. Então, para toda fórmula ϕ , $Alg(S) \models \phi$ se e somente se $\vdash_S \phi$.*

Demonstração: A demonstração é análoga à da Proposição 4.2. Nas duas direções, chamaremos de h o homomorfismo $h : Alg(Snn) \rightarrow Alg(S)$ dado por $h([\phi]) = [\phi]_S$, onde $[\phi]_S$ é a classe de equivalência de ϕ na relação $\equiv_S$. Como S contém Snn , h está bem definida, pois se $[\phi] = [\phi']$, isto é, $\vdash_{Snn} \phi \leftrightarrow \phi'$, então $[\phi]_S = [\phi']_S$, isto é, $\vdash_S \phi \leftrightarrow \phi'$. Está claro que h é sobrejetor. Compare h com a valoração do modelo geral canônico, definido em 4.1. Iniciemos a demonstração.

($\Rightarrow$) Se $\not\vdash_S \phi$, então $[\phi]_S \neq 1$. Logo $h([\phi]) = [\phi]_S \neq 1$, de onde concluímos que $Alg(S) \not\models \phi$.

($\Leftarrow$) Seja ϕ um teorema de S . e seja $v : Alg(Snn) \rightarrow Alg(S)$ um homomorfismo. Sejam $p_1, \dots, p_n$ as fórmulas atômicas que ocorrem em $[\phi]$. Como h é sobrejetor, para cada $i = 1, \dots, n$ seja ψ_i tal que $v([p_i]) = h([\psi_i])$. Seja $\psi = \phi[p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n]$ a fórmula obtida de ϕ pela substituição de p_i por ψ_i . Uma simples indução sobre a construção de ψ mostra que $v([\phi]) = h([\psi]) = [\psi]_S$. Pela regra da Substituição Uniforme, como ϕ é teorema de S , ψ é teorema de S . Portanto, $[\psi]_S = 1$. ■

Há uma equivalência entre ultrafiltros em álgebras de Lindenbaum-Tarski e conjuntos maximalmente consistentes. De fato, se u é um ultrafiltro em $Alg(S)$, então $\bigcup u = \{\phi : [\phi] \in u\}$ é um conjunto maximalmente S -consistente. Reciprocamente, se Γ é um conjunto maximalmente S -consistente, o conjunto $\{[\phi] : \phi \in \Gamma\}$ é um ultrafiltro.

Seja $\langle W, F, P \rangle$ a estrutura geral associada a $Alg(S)$, como no Teorema 4.19. Isto é, W é o conjunto dos ultrafiltros em $Alg(S)$, $P = \{[\phi]^* : [\phi] \in Alg(S)\}$, onde $[\phi]^* = \{u \in W : [\phi] \in u\}$ e

$$F(u) = \{[\phi]^* : \Box[\phi] \in u\},$$

para todo $u \in W$. Observe que essa é exatamente a definição de estrutura geral canônica de S (Definição 4.1), onde a função $(.)^* : [\phi] \mapsto [\phi]^*$ faz o papel da valoração do modelo canônico, trocando fórmulas ϕ por classes de equivalência $[\phi]$ e conjuntos maximalmente consistente por ultrafiltros.

Capítulo 5

Modalização Não-normal

A exemplo do que foi feito na Seção 2.3, iremos aplicar uma Lógica Modal Não-normal externamente a um sistema lógico L . As definições e resultados apresentados neste capítulo, incluindo o Mapeamento de Preservação de Consistência, são novos, e encontram-se publicados em [FF02].

Retomemos as definições de sistema lógico do Capítulo 2. Como na temporalização, supomos que L é uma extensão da lógica proposicional clássica e que o operador $\Box$, da Lógica M , não está na linguagem de L .

Definimos $M(L) = \langle \mathcal{L}_{M(L)}, \vdash_{M(L)}, \mathcal{K}_{M(L)}, \models_{M(L)} \rangle$ por:

Linguagem A linguagem¹ $\mathcal{L}_{M(L)}$ é o menor conjunto tal que:

- Se $A \in ML_L$ então $A \in \mathcal{L}_{M(L)}$;
- Se $A, B \in \mathcal{L}_{M(L)}$ então $\neg A \in \mathcal{L}_{M(L)}$ e $A \wedge B \in \mathcal{L}_{M(L)}$;
- Se $A \in \mathcal{L}_{M(L)}$ então $\Box A \in \mathcal{L}_{M(L)}$.

Axiomatização O sistema de axiomas de $M(L)$ é formado por:

- Os axiomas de M ;
- As regras de inferência de M ;
- A regra da *Preservação*: se $\vdash_L A$ então $\vdash_{M(L)} A$.

Semântica Um modelo de $M(L)$ é uma tripla $\mathcal{M} = \langle W, F, g \rangle$, onde $\langle W, F \rangle$ é uma estrutura de M e g é uma função $g : W \rightarrow \mathcal{K}_L$. A relação de satisfazibilidade $\models_{M(L)}$ é definida, para $w \in W$, por:

- Se $A \in ML_L$, $\mathcal{M}, w \models A$ sse $g(w) \models A$;

¹A definição de ML_L encontra-se em 2.3

- $\mathcal{M}, w \models A \wedge B$ sse $\mathcal{M}, w \models A$ e $\mathcal{M}, w \models B$;
- $\mathcal{M}, w \models \neg A$ sse $\mathcal{M}, w \not\models A$.
- $\mathcal{M}, w \models \Box A$ sse $\{w' \in W : \mathcal{M}, w' \models A\} \in F(w)$.

5.1 Correção

A modalização não-normal transfere correção.

Teorema 5.1 *Se L é uma lógica correta, e M é uma Lógica Modal Não-normal correta, então a lógica $M(L)$ é correta.*

Demonstração: Pela correção de L , as fórmulas obtidas pela regra da Preservação são válidas nos modelos de L e, portanto, nos modelos de $M(L)$. Pela correção de M , os axiomas de M são válidos nas estruturas de M e suas regras de inferência preservam validade nas estruturas de M . Como os modelos de $M(L)$ são baseados em estruturas de M , segue que $\mathcal{K}_{M(L)}$ satisfaz os axiomas e preserva as regras de inferências de M , de onde segue a correção de $M(L)$. ■

5.2 Completude

Iremos mostrar que a modalização de uma lógica completa e correta preserva a completude. A estratégia utilizada é mapear uma sentença ψ de $M(L)$ para uma sentença de M , substituindo cada subfórmula de ψ que pertence a ML_L por uma fórmula proposicional. Usando a completude de M , obtemos um modelo para o mapeamento de ψ e, usando a completude de L , manipulamos esse modelo, obtendo um modelo de $M(L)$ para ψ .

A grande diferença entre a demonstração da transferência de completude na modalização não-normal para o caso normal é a introdução deste novo método de mapearmos fórmulas de um sistema lógico genérico na lógica proposicional clássica, a que chamamos *mapeamento de preservação de consistência*. Pelo fato da semântica não-normal ser muito mais difícil de manipular do que a semântica de Kripke, precisamos que o mapeamento preserve muitas informações das fórmulas mapeadas, facilitando a construção do modelo que procuramos para uma dada fórmula consistente.

Queremos que a sentença obtida pelo mapeamento se comporte, na lógica M , exatamente como a sentença original se comporta em $M(L)$. A primeira tentativa seria enumerar o conjunto ML_L e mapear cada $\varphi_i \in ML_L$ em uma proposição atômica p_i . Considere, como exemplo, a lógica L sendo o sistema **KT** para Lógica Modal Normal (o sistema das estruturas reflexivas), renomeando o operador $\Box$ para **■**, para não ser confundido com o operador modal da lógica externa M . Seja ψ a fórmula:

$$\mathbf{■}p \rightarrow p$$

Figura 5.1: Estratégia da demonstração da completude

Temos que ψ possui as seguintes subfórmulas em ML_L : *blacksquarep* e p . Se mapearmos ψ como descrevemos acima obtemos:

$$p_1 \rightarrow p_2$$

Mas sabemos que esta fórmula não é um teorema do cálculo proposicional, embora $\text{blacksquarep} \rightarrow p$ seja um teorema do sistema KT de Lógica Modal Normal (é o próprio axioma **T**). Para que a fórmula mapeada se comporte exatamente como a fórmula original, precisamos de algo mais: mapear cada elemento de ML_L em fórmulas proposicionais mais complexas, com características semânticas semelhantes a das fórmulas mapeadas. Analisemos as subfórmulas de ψ que estão em ML_L , e verifiquemos quais são as combinações de verdadeiro e falso delas que são permitidas pelo sistema KT . Na tabela abaixo, indicamos por 1 como verdadeiro e 0 como falso. Verifica-se que as combinações abaixo são exatamente aquelas que são possíveis em um modelo do sistema KT (um modelo $\langle W, R, V \rangle$ onde R é reflexivo):

$\blacksquare p$	p
1	1
0	1
0	0

De fato, é fácil verificar que a única combinação inconsistente das fórmulas acima é $\blacksquare p \wedge \neg p$, que não consta na tabela.

Para fazer um mapeamento que preserve tanto consistência quanto inconsistência de uma fórmula em $M(L)$, buscaremos fórmulas proposicionais (provavelmente não todas atômicas) que se comportem exatamente como a tabela acima. Nosso objetivo principal será, dada uma configuração de possíveis verdadeiros e falsos de uma n -upla de fórmulas em ML_L , achar n fórmulas proposicionais com exatamente a mesma configuração de possíveis verdadeiros e falsos. Isso nos dará a ferramenta principal que usaremos para demonstrar a preservação da completude de $M(L)$.

A nossa definição do mapeamento $\sigma : \mathfrak{L}_{M(L)} \longrightarrow \mathfrak{L}_M$ dependerá de um conjunto finito $\Phi \subseteq ML_L$ fixado, que é o conjunto das subfórmulas monolíticas de uma fórmula $\psi \in \mathfrak{L}_{M(L)}$. Ou seja, nosso mapeamento será construído especialmente para uma dada fórmula de $M(L)$.

Mapeamento de Preservação de Consistência

Dada uma fórmula $A \in \mathcal{L}_{M(L)}$ definimos o conjunto $Mon(A)$ das subfórmulas monolíticas de A por:

- Se $A \in ML_L$, então $Mon(A) = \{A\}$;
- $Mon(\neg A) = Mon(A)$;
- $Mon(\Box A) = Mon(A)$;
- $Mon(A \wedge B) = Mon(A) \cup Mon(B)$.

Assim, $Mon(A)$ é o conjunto das fórmulas de L a partir da qual A é construída, usando $\wedge$, $\neg$ e $\Box$.

Seja $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ um conjunto finito de fórmulas de ML_L com uma enumeração fixada (na demonstração da completude, tomaremos $\Phi = Mon(\phi)$, onde ϕ é uma fórmula consistente para a qual queremos construir um modelo). Definimos o mapeamento σ , que associa, a cada fórmula φ de $M(L)$ construída a partir de Φ (isto é, tal que $Mon(\varphi) \subseteq \Phi$) uma fórmula de M , por:

- $\sigma(\varphi_i) = A_i$;
- $\sigma(\neg\psi) = \neg\sigma(\psi)$;
- $\sigma(\psi_1 \wedge \psi_2) = \sigma(\psi_1) \wedge \sigma(\psi_2)$;
- $\sigma(\Box\psi) = \Box\sigma(\psi)$.

Precisamos, ainda, definir as fórmulas proposicionais clássicas $A_1, \dots, A_n$. Este mapeamento de fórmulas de L em fórmulas proposicionais clássicas independe do processo de modalização, pois é inerente a própria lógica L . Antes, porém, precisamos de algumas definições.

Denotamos por $\mathcal{P}(\Phi)$ o conjunto de todas *combinações literais* de Φ , isto é, todas as fórmulas da forma $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \overline{\varphi}_i$, onde cada $\overline{\varphi}_i$ é φ_i ou $\neg\varphi_i$. Definimos $Con(\Phi) = \{\psi \in \mathcal{P}(\Phi) : \not\vdash_L \neg\psi\}$.

Dado $m \leq n$, definimos $\Phi_m = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ a restrição de Φ aos m primeiros elementos. As definições de $\mathcal{P}(\Phi_m)$ e $Con(\Phi_m)$ são como acima.

Fixe n átomos $q_1, \dots, q_n$. Vamos definir, recursivamente, $A_1, \dots, A_n$. Para o passo inicial, a fórmula A_1 é definida por:

- $A_1 = q_1 \wedge \neg q_1$, se $\vdash_L \neg\varphi_1$;
- $A_1 = q_1 \vee \neg q_1$, se $\vdash_L \varphi_1$;
- $A_1 = q_1$, caso contrário.

Suponha que, para $m < n$, temos definidos $A_1, \dots, A_m$, ou seja, σ está definido para o conjunto Φ_m . Vamos construir A_{m+1} . Como fizemos para A_1 , analisaremos quais combinações literais de Φ_m implicam φ_{m+1} , quais implicam $\neg\varphi_{m+1}$, e quais não decidem o valor de φ_{m+1} . Definimos:

$$B^+(\Phi_m) = \bigvee \{ \sigma(\psi) \mid \psi \in \text{Con}(\Phi_m) \text{ e } \vdash_L \psi \rightarrow \varphi_{m+1} \};$$

$$B^-(\Phi_m) = \bigvee \{ \sigma(\psi) \mid \psi \in \text{Con}(\Phi_m) \text{ e } \vdash_L \psi \rightarrow \neg\varphi_{m+1} \};$$

$$B^0(\Phi_m) = \bigvee \{ \sigma(\psi) \wedge q_{m+1} \mid \psi \wedge \varphi_{m+1}, \psi \wedge \neg\varphi_{m+1} \in \text{Con}(\Phi_{m+1}) \}.$$

Nota-se que só ocorre uma nova fórmula atômica q_{m+1} em $B^0(\Phi_m)$. Finalmente, definimos:

$$A_{m+1} = \neg B^-(\Phi_m) \wedge (B^+(\Phi_m) \vee B^0(\Phi_m)).$$

Cada uma das disjunções (mas não todas) $B^+(\Phi_m)$, $B^-(\Phi_m)$ e $B^0(\Phi_m)$ pode ser vazia, sendo, neste caso, suprimida da fórmula A_{m+1} (ou definida como $\perp$). Se $B^0(\Phi_m)$ for vazia, A_{m+1} não conterá nova fórmula atômica. Neste caso, o valor de A_{m+1} estará completamente determinado pelos valores de $A_1, \dots, A_n$, assim como o valor de φ_{m+1} estará completamente determinado pelos valores de $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (pois toda combinação literal de Φ_m implica φ_{m+1} ou $\neg\varphi_{m+1}$).

A construção do mapeamento σ pode ser construída a partir de um conjunto Φ infinito enumerável. Em particular, se a linguagem de L é enumerável, podemos construir σ para a linguagem toda. Mas, para o propósito de demonstrar a preservação da completude, basta considerarmos conjuntos finitos.

Exemplo: Considere L sendo sistema **KT**, renomeando o operador modal $\Box$ por $\blacksquare$, para não ser confundido com o operador de M . Seja $\Phi = \{\blacksquare p, p\}$. Temos $\text{Con}(\Phi) = \{\blacksquare p \wedge p, \neg\blacksquare p \wedge p, \neg\blacksquare p \wedge \neg p\}$ (pelo axioma **T**, $\blacksquare p \wedge \neg p$ é inconsistente). Com essa enumeração de Φ , $\text{Con}(\Phi_1) = \{\blacksquare p, \neg\blacksquare p\}$. Portanto $\sigma(\blacksquare p) = A_1 = q_1$.

Precisamos encontrar A_2 . Note que $B^+(\Phi_1) = q_1$, pois $\vdash_L \blacksquare p \rightarrow p$, $B^-(\Phi_1) = \perp$ é uma disjunção vazia, e $B^0(\Phi_1) = \neg q_1 \wedge q_2$. Portanto

$$A_2 = q_1 \vee (\neg q_1 \wedge q_2).$$

Precisamos que o mapeamento σ leve teoremas de L em tautologias proposicionais. Vamos ver que isso acontece para o axioma **T**: $\blacksquare p \rightarrow p$. De fato, $\sigma(\blacksquare p \rightarrow p) = A_1 \rightarrow A_2 = q_1 \rightarrow (q_1 \vee (\neg q_1 \wedge q_2))$, que é uma tautologia.

Se tomarmos outra enumeração para Φ , isto é, $\Phi = \{p, \blacksquare p\}$, obtemos outros valores para A_1 e A_2 , mas também teremos que $\sigma(\mathbf{T})$ é uma tautologia.

O lema seguinte, que é fundamental para o mapeamento de preservação de consistência, mostra que σ leva fórmulas consistentes de L em fórmulas classicamente consistentes, e teoremas de L em tautologias.

Lema 5.2 *Uma fórmula $\psi \in \mathcal{P}(\Phi)$ é L -consistente se e somente se $\sigma(\psi)$ é classicamente consistente.*

Demonstração: Por indução em $m < n$. Para $m = 1$, o resultado é imediato da definição de A_1 . Suponha que o resultado vale para Φ_m . Mostraremos para Φ_{m+1} . Tomando $\psi \in \mathcal{P}(\Phi_{m+1})$, temos $\psi = \mu \wedge \varphi_{m+1}$ ou $\psi = \mu \wedge \neg\varphi_{m+1}$, com $\mu \in \mathcal{P}(\Phi_m)$. Usaremos a hipótese de indução sobre μ .

Suponha que ψ é L -consistente. Então μ é L -consistente. Por hipótese de indução, $\sigma(\mu)$ é consistente. Seja v uma valoração clássica satisfazendo $\sigma(\mu)$. Temos três casos a analisar. Se $\vdash_L \mu \rightarrow \varphi_{m+1}$ (neste caso, $\psi = \mu \wedge \varphi_{m+1}$, pela consistência de ψ) então $\sigma(\mu)$ ocorre na disjunção $B^+(\Phi_m)$. Logo, a valoração v satisfaz $B^+(\Phi_m)$. Mas não satisfaz $B^-(\Phi_m)$, pois cada $\sigma(\mu')$, com $\mu' \in \mathcal{P}(\Phi_m)$, é uma combinação de literais de $\{A_1, \dots, A_n\}$, e cada valoração clássica satisfaz uma única combinação literal de um conjunto. Portanto, como v satisfaz $\sigma(\mu)$, que ocorre em $B^+(\Phi_m)$ e não em $B^-(\Phi_m)$, temos que v não satisfaz $B^-(\Phi_m)$. Logo v satisfaz A_{m+1} e, portanto, $\sigma(\mu) \wedge A_{m+1} = \sigma(\psi)$.

O segundo caso é quando $\vdash_L \mu \rightarrow \neg\varphi_{m+1}$. Neste caso, $\psi = \mu \wedge \neg\varphi_{m+1}$. Analogamente ao caso anterior, uma valoração clássica v que satisfaz $\sigma(\mu)$ irá satisfazer $B^-(\Phi_m)$. Logo, falsificará A_{m+1} , de onde temos que $\sigma(\mu) \wedge A_{m+1} = \sigma(\psi)$ é classicamente consistente. No terceiro caso, quando $\nvdash_L \mu \rightarrow \varphi_{m+1}$ e $\nvdash_L \mu \rightarrow \neg\varphi_{m+1}$, temos que $\sigma(\mu)$ ocorre em $B^0(\Phi_m)$. Tomando uma valoração v satisfazendo $\sigma(\mu)$, como mostramos no primeiro caso, essa não satisfaz $B^+(\Phi_m)$ nem $B^-(\Phi_m)$. Portanto, irá satisfazer A_{m+1} se e somente se $v(q_{m+1}) = 1$. Como q_{m+1} não ocorre em $\sigma(\mu)$, basta escolhermos $v(q_{m+1})$ conveniente, dependendo se ψ é $\mu \wedge \varphi_{m+1}$ ou $\mu \wedge \neg\varphi_{m+1}$, de modo a satisfazer $\sigma(\psi)$.

Para a recíproca, suponha ψ inconsistente. Suponhamos, por absurdo, que v é uma valoração clássica satisfazendo $\sigma(\psi)$. Em particular, v satisfaz $\sigma(\mu)$. Por hipótese de indução, μ é L -consistente. Se $\psi = \mu \wedge \varphi_{m+1}$, pela inconsistência de ψ temos $\vdash_L \mu \rightarrow \neg\varphi_{m+1}$. Assim, $\sigma(\mu)$ ocorre em $B^-(\Phi_m)$. Portanto v satisfaz $B^-(\Phi_m)$ e, portanto, v não satisfaz A_{m+1} , absurdo, pois $\sigma(\psi) = \sigma(\mu) \wedge A_{m+1}$. O caso $\psi = \mu \wedge \neg\varphi_{m+1}$ é análogo. ■

O próximo lema estende 5.2 para todo $M(L)$.

Lema 5.3 *Seja ψ uma fórmula de $M(L)$ e σ um mapeamento definido sobre $\Phi = \text{Mon}(\psi)$. Então ψ é $M(L)$ -consistente se e somente se $\sigma(\psi)$ é M -consistente.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos $\sigma(\psi)$ é inconsistente, isto é, $\vdash_M \neg\sigma(\psi)$. Segue, do Lema 5.2, que para todas as sentenças φ de L construídas a partir dos elementos de Φ , temos $\vdash_L \varphi$ se e somente se $\sigma(\varphi)$ é uma tautologia. Mas todas as tautologias são teoremas de M e todos os teoremas de L , pela regra da preservação, são teoremas de $M(L)$. Como todas as regras de inferência de M estão em $M(L)$, a demonstração de $\neg\sigma(\psi)$ em M pode ser copiada para uma demonstração de $\neg\psi$ em $M(L)$, contradizendo que ψ é $M(L)$ -consistente.

($\Leftarrow$) Suponha que ψ é $M(L)$ -inconsistente, isto é, $\vdash_{M(L)} \neg\psi$. Pelo Lema 5.2, para todas as sentenças φ de L construídas a partir de Φ , temos $\vdash_L \varphi$ se e somente se $\sigma(\varphi)$ é uma tautologia. Logo, uma fórmula $\varphi \in ML_L$ é teorema de $M(L)$ se e somente se $\sigma(\varphi)$ é um teorema de M . Como os axiomas e as

outras regras de inferência de $M(L)$ estão em M (pela definição da axiomatização de $M(L)$), a demonstração de $\neg\psi$ em $M(L)$ pode ser copiada para uma demonstração de $\neg\sigma(\psi)$ em M , obtendo que $\sigma(\psi)$ é M -inconsistente. ■

Completude de $M(L)$

Agora estamos prontos para provar o principal resultado deste capítulo, que é a transferência de completude na modalização.

Teorema 5.4 *Se M e L são lógicas completas, então $M(L)$ é completa.*

Demonstração: Seja ψ uma fórmula $M(L)$ -consistente e considere σ o mapeamento de preservação de consistência definido a partir de $\Phi = Mon(\psi)$. Pelo Lema 5.3, $\sigma(\psi)$ é M -consistente. Pela completude de M , existe um modelo $\mathcal{M}_M = \langle W, F, V \rangle$ tal que, para algum $w \in W$, $\mathcal{M}_M, w \models \sigma(\psi)$. Definimos um modelo $\mathcal{M}_{M(L)} = \langle W, F, g \rangle$ de $M(L)$ do seguinte modo: para cada $\varphi \in \Phi$ e cada $w' \in W$, $g(w') \models \varphi$ se e somente se $\mathcal{M}_M, w' \models \sigma(\varphi)$.

Para mostrar que isso é possível, considere a (única) conjunção de literais $\phi \in \mathcal{P}(\Phi)$ tal que $\mathcal{M}_M, w' \models \sigma(\phi)$. Temos que $\sigma(\phi)$ é classicamente consistente (note que $\sigma(\phi)$ é uma fórmula proposicional). Pelo Lema 5.2, ϕ é L -consistente. Pela completude de L , existe um modelo $g(w') \in \mathcal{M}_L$ que satisfaz ϕ .

Uma simples indução na construção de ψ mostra que, para todo $w' \in W$, $\mathcal{M}_{M(L)}, w' \models \psi$ se e somente se $\mathcal{M}_M, w' \models \sigma(\psi)$. Como, por hipótese, $\mathcal{M}_M, w \models \sigma(\psi)$, temos $\mathcal{M}_{M(L)}, w \models \psi$, concluindo a completude de $M(L)$. ■

Observe que apenas uma direção do Lema 5.3 foi usada para a demonstração da completude. A outra direção será útil para a transferência da decidibilidade.

5.3 Decidibilidade

Lembramos que uma lógica é *decidível* se existe um algoritmo que decide se uma dada fórmula é teorema ou não. O próximo teorema, que é uma consequência simples do Lema 5.3, mostra que modalização não-normal também transfere decidibilidade.

Teorema 5.5 *Se M e L são decidíveis, então $M(L)$ é decidível.*

Demonstração: Dada uma fórmula ψ de $M(L)$, existe um algoritmo para construir $\Phi = Mon(\psi)$, de onde construímos $\mathcal{P}(\Phi)$. Pela decidibilidade de L , podemos construir, algoritmicamente, o conjunto $Con(\Phi)$, verificando quais fórmulas de $\mathcal{P}(\Phi)$ são consistentes. Assim, existe um algoritmo para a construção de $\sigma(\psi) \in \mathcal{L}_M$. Pelo Lema 5.3, ψ é um $M(L)$ -teorema se e somente se $\sigma(\psi)$ é um M -teorema. Portanto, da decidibilidade de M segue a decidibilidade de $M(L)$. ■

Capítulo 6

Fusão de Lógicas Modais Não-normais

Neste capítulo estudaremos a combinação independente de Lógicas Modais Não-normais. Na Seção 6.1 encontram-se a definição da fusão $M_1 \circ M_2$ e alguns resultados iniciais. A Seção 6.2 mostra um caso de um sistema de Lógica Modal Não-normal em que, na fusão, ocorre interações fortes entre os operadores (comutatividade e confluência de Church-Rosser).

6.1 Definições e Resultados Preliminares

Sejam M_1 e M_2 duas Lógicas Modais Não-normais. Definimos a *fusão* de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \circ M_2$, como no caso Normal. A linguagem de $M_1 \circ M_2$ é a linguagem da Lógica Bimodal (Normal). O sistema de axiomas de $M_1 \circ M_2$ é a união das axiomatizações de M_1 e M_2 , com o operador $\Box_1$ referindo-se ao sistema de M_1 , e $\Box_2$ ao de M_2 .

Um *isomorfismo* entre as estruturas Não-normais $\langle W, F \rangle$ e $\langle W', F' \rangle$ é uma função bijetora $i : W \rightarrow W'$ tal que, para todo $w \in W$ e todo $X \subseteq W$, temos $X \in F(w)$ se e somente se $\{i(x) : x \in X\} \in F'(i(w))$. Dizemos que duas estruturas são isomorfas se existe um isomorfismo entre elas.

Se $\langle W, F \rangle$ é uma estrutura e i é uma bijeção entre W e um conjunto W' , podemos definir F' de maneira natural, de forma que i seja um isomorfismo entre $\langle W, F \rangle$ e $\langle W', F' \rangle$.

Para definirmos a semântica de $M_1 \circ M_2$, foi necessário criarmos um conceito novo, que substitua, na Lógica Modal Não-normal, a noção de componente conexa, apresentada na Seção 2.1, que chamaremos de *união disjunta*.

Apesar de ser uma noção simples, de unirmos estruturas de forma independente, sem “comunicação” entre elas, a semântica de vizinhanças torna essa

construção bem mais complicada. A Definição 6.1 será feita de maneira a obtermos o Lema 6.1.

Definição 6.1 (União Disjunta) *Seja $\{\langle W_i, F_i \rangle\}_{i \in I}$ uma família de estruturas onde $\{W_i\}_{i \in I}$ são dois a dois disjuntos. A união disjunta de $\{\langle W_i, F_i \rangle\}_{i \in I}$ é a estrutura $\langle W, F \rangle$ onde $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ e, dado $w_i \in W_i$, $F(w_i)$ é definido por:*

$$F(w_i) = \{X \subseteq W : X \cap W_i \in F_i(w_i)\}.$$

Denotamos a união disjunta de $\{\langle W_i, F_i \rangle\}_{i \in I}$ por:

$$\coprod_{i \in I} \langle W_i, F_i \rangle$$

A função F está bem definida, pois os $\{W_i\}_{i \in I}$ são dois a dois disjuntos. Logo, dado $w \in W$, existe um único W_i a quem w pertença.

Se $\{W_i\}_{i \in I}$ não é dois a dois disjunto, podemos disjuntá-lo tomando $\{i\} \times W_i$ e a estrutura dada pelo isomorfismo natural, para cada $i \in I$.

A união disjunta de estruturas pode ser estendida a modelos. Dada uma família de modelos $\{\langle W_i, F_i, V_i \rangle\}_{i \in I}$ definimos a união disjunta

$$\coprod_{i \in I} \langle W_i, F_i, V_i \rangle$$

como o modelo $\langle W, F, V \rangle$, onde $\langle W, F \rangle = \coprod_{i \in I} \langle W_i, F_i \rangle$ e $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$, para cada átomo p .

O lema seguinte mostra que, de fato, $V(A) = \bigcup_{i \in I} V_i(A)$, para toda fórmula A .

Lema 6.2 *Seja $\{\langle W_i, F_i, V_i \rangle\}_{i \in I}$ uma família de modelos para Lógica Modal Não-normal e tome $\langle W, F, V \rangle = \coprod_{i \in I} \langle W_i, F_i, V_i \rangle$.*

Então, dada uma fórmula A e $w \in W$, $\langle W, F, V, w \rangle \models A$ se e somente se $\langle W_i, F_i, V_i, w \rangle \models A$, onde $w \in W_i$.

Demonstração: Por indução na complexidade de A . Se A é atômica, o resultado segue direto da definição de V . O passo indutivo para os operadores booleanos $\neg$ e $\wedge$ é imediato. Resta analisar para o operador $\Box$. Suponha que o lema vale para A , isto é, $V(A) = \bigcup_{i \in I} V_i(A)$. Vamos prová-lo para $\Box A$.

Por definição, $\langle W, F, V, w \rangle \models \Box A$ se e somente se $V(A) \in F(w)$. Tome W_i contendo w . Temos que $F(w) = \{X \subseteq W : X \cap W_i \in F_i(w)\}$. Logo, $V(A) \in F(w)$ se e somente se $V(A) \cap W_i \in F_i(w)$. Mas, como pela hipótese indutiva, $V(A) = \bigcup_{i \in I} V_i(A)$, temos $V(A) \cap W_i = V_i(A)$. Portanto, $V(A) \in F(w)$ se e somente se $V_i(A) \in F_i(w)$, de onde segue o passo indutivo para $\Box A$. ■

Semântica da fusão: Retomemos a fusão de duas Lógicas Modais Não-normais. A definição de Lógica Bimodal apresentada em 2.1 pode ser facilmente generalizada para o caso não-normal. Uma estrutura para a Lógica Bimodal Não-normal é uma tripla $\langle W, F_1, F_2 \rangle$, onde cada $\langle W, F_i \rangle$ é uma estrutura para Lógica Monomodal Não-normal. A semântica é definida de forma análoga, usando F_1 para o operador $\Box_1$ e F_2 para $\Box_2$.

A classe de estruturas de $M_1 \circ M_2$ é formada por todas as estruturas $\langle W, F, \bar{F} \rangle$, onde

$$\begin{aligned}\langle W, F \rangle &= \coprod_{i \in I} \langle W_i, F_i \rangle, \\ \langle W, \bar{F} \rangle &= \coprod_{j \in J} \langle \bar{W}_j, \bar{F}_j \rangle\end{aligned}$$

e cada $\langle W_i, F_i \rangle$ é isomorfa a uma estrutura de M_1 , e cada $\langle \bar{W}_j, \bar{F}_j \rangle$ a uma de M_2 .

A classe de estruturas de $M_1 \circ M_2$ é não-vazia. Dadas estruturas $\langle W_1, F_1 \rangle$ e $\langle W_2, F_2 \rangle$, tome conjuntos I e J tal que $|\bigcup_{i \in I} W_1 \times \{i\}| = |\bigcup_{j \in J} W_2 \times \{j\}|$ (se W_1 e W_2 são finitos, podemos tomar $I = J = \mathbb{N}$, senão, tome $I = J = \max\{|W_1|, |W_2|\}$). Através da bijeção entre $\bigcup_{i \in I} W_1 \times \{i\}$ e $\bigcup_{j \in J} W_2 \times \{j\}$ construímos, a menos de isomorfismos, uniões disjuntas de cópias de $\langle W_1, F_1 \rangle$ e de cópias de $\langle W_2, F_2 \rangle$ baseadas em um mesmo conjunto W .

Teorema 6.3 *Se M_1 e M_2 são Lógicas Modais Não-normais corretas, então $M_1 \circ M_2$ é correta.*

Demonstração: Pelo Lema 6.2, os teoremas de M_1 e os teoremas de M_2 são válidos em $M_1 \circ M_2$. As regras *Modus Ponens*, Substituição Uniforme e Congruência preservam validade em estruturas bimodais não-normais. Como o sistema de axiomas de $M_1 \circ M_2$ é o menor sistema bimodal que contém os sistemas M_1 e M_2 , temos a correção de $M_1 \circ M_2$. ■

Baader, Ghilardi e Tinelli [BGT03] mostraram que a fusão de Lógicas Modais Não-normais transfere decidibilidade.

Teorema 6.4 *Se M_1 e M_2 são Lógicas Modais Não-normais decidíveis, então $M_1 \circ M_2$ é decidível.*

A demonstração é feita para um caso mais geral. Mostra-se a preservação de decidibilidade na fusão de duas *teorias equacionais* E_1 e E_2 , cuja intersecção E_0 satisfaz determinadas propriedades. Uma teoria equacional é uma teoria de lógica de primeira ordem (isto é, um conjunto de fórmulas fechado por conseqüências lógicas) baseada em axiomas que são igualdades de termos. A fusão é definida como a menor teoria que contém ambas, na linguagem de primeira ordem que une as constantes e símbolos funcionais de E_1 e E_2 . O algoritmo de decisão para a fusão $E_1 \circ E_2$ baseia-se num *sistema de reescrita*.

Sistemas de Lógica Modal Não-normal são teorias equacionais, se interpretarmos os conectivos booleanos $\wedge$ e $\neg$, bem como o operador modal $\Box$, como

símbolos funcionais de linguagem de primeira ordem. Dessa forma, um sistema de Lógica Modal Não-normal, semelhantemente ao que foi feito no Capítulo 4, pode ser visto como uma teoria da linguagem das álgebras de Boole com operador. Isto é, se interpretamos um sistema de Lógica Modal Não-normal $\mathbf{M}$ como uma teoria equacional, um modelo de lógica de primeira ordem para $\mathbf{M}$ será uma álgebra de Boole com operador.

Dados dois sistemas de Lógica Modal Não-normal, E_1 e E_2 , em que supomos que o operador modal de E_1 é diferente do de E_2 , a intersecção dos dois sistemas é o cálculo proposicional, que, no contexto de teorias equacionais, é a teoria das álgebras de Boole. Baader, Ghilardi e Tinelli mostram que essa satisfaz as hipóteses sobre a intersecção de E_1 e E_2 , e concluem a transferência de decidibilidade. A demonstração aplica-se para Lógicas Modais Não-normais com operadores de aridades arbitrárias.

6.2 Interações Fortes na Fusão de Lógicas Não-normais

Veremos, nesta seção, um exemplo de um sistema lógico em que, ao fazermos a combinação independente, já obtemos uma interação forte entre as lógicas. A saber, a comutatividade dos operadores modais e a confluência de Church-Rosser, mencionadas em 2.5. Esperava-se que essas interações, a menos de casos triviais, só ocorresse numa forma mais forte de combinação, como o produto. Dentre as conseqüências dessa interação, destaca-se o problema da preservação da completude na fusão de Lógicas Modais Não-normais.

Vimos que a fusão de Lógicas Modais Normais preserva correção e completude. Na demonstração da completude, consideramos uma fórmula ϕ da fusão como uma fórmula de sucessivas modalizações alternadas entre as lógicas M_1 e M_2 . Como sabemos que modalização preserva completude, de um modelo para ϕ em $M_1(M_2(M_1(...)))$ construímos um modelo em $M_1 \circ M_2$.

Para a Lógica Modal Normal, a grande dificuldade na demonstração da preservação de completude na fusão está em mostrá-la para modalização. No caso da Lógica Modal Não-normal, mostramos a preservação de correção e completude na modalização, usando uma técnica semelhante à usada para Lógica Modal Normal. Esperava-se que, para a fusão, a mesma técnica de considerar modalizações sucessivas funcionaria. O que veremos é que esse exemplo de sistema (que é não-normal) em que ocorre interação forte na fusão, traz problemas na aplicação dessa técnica.

Essencialmente, esse sistema, que é semanticamente bem simples, é particionado em dois sistemas distintos e discordantes. Em cada mundo de uma estrutura, estamos em uma ou em outra partição, mas não em ambas simultaneamente, pois elas entram em conflito. No caso, o operador $\Box$ ou tem a semântica trivial, que não altera o valor da fórmula que está no seu escopo, podendo ser simplesmente suprimido, ou tem a semântica contrária da trivial,

isto é, sempre inverte o valor da fórmula, funcionando como uma negação. O que não podemos ter é que, em um mesmo mundo da estrutura, ele se comporte ora como trivial, ora como a negação. Ou seja, $\Box$ vale sempre “sim” ou sempre “não”. É como aqueles jogos lógicos em que alguém fala sempre a verdade, ou sempre mente, mas não sabemos em qual situação ele se enquadra.

Quando tomamos modalizações alternadas, por exemplo uma fórmula ϕ em $M_1(M_2(M_1))$, o operador $\Box_1$ pode pertencer à lógica mais interna ou à mais externa. Um modelo em $M_1(M_2(M_1))$ é da forma $\langle W_1, F_1, g \rangle$, em que g é uma função que, a cada elemento de W_1 associa um modelo de $M_2(M_1)$ da forma $\langle W_2, F_2, h \rangle$, onde h associa, a cada elemento de W_2 , um modelo de M_1 . No caso do sistema particionado, neste modelo mais interno o operador $\Box_1$ pode significar “sim”, enquanto, no modelo mais externo, pode significar “não”. Com isso, torna-se impossível identificar esses modelos, que estão dispostos numa árvore e são independentes uns dos outros, num modelo para a fusão $M_1 \circ M_2$, em que temos um único conjunto de mundos possíveis, com uma única função F_1 que nos dá a semântica de $\Box_1$, e uma única função F_2 para $\Box_2$.

Em outras palavras, se olharmos para a fórmula ϕ em $M_1(M_2(M_1))$, podemos ter que $\Box_1$ é “sim” se estiver dentro do escopo de $\Box_2$, e “não” se $\Box_2$ estiver no seu escopo. Mas quando olhamos para ϕ em $M_1 \circ M_2$, temos que $\Box_1$ deve ser sempre “sim” ou sempre “não”.

O sistema apresentado aqui, a que chamaremos *sistema lógico particionado*, foi descoberto durante a tentativa de provar a transferência de completude na fusão de Lógicas Modais Não-normais. A sua definição e os principais resultados, como interações fortes, correção, completude, decidibilidade e a complexidade do algoritmo de decisão encontram-se no artigo (não publicado) [FF04].

O sistema lógico particionado

Considere o axioma P : $(\Box p \leftrightarrow p) \vee (\Box q \leftrightarrow \neg q)$; e a classe de estruturas $\mathcal{K}$ formada pelas estruturas $\langle W, F \rangle$ em que, para cada $w \in W$, ocorre um dos casos abaixo:

1. $F(w) = \{X \subseteq W \mid w \in X\}$; ou
2. $F(w) = \{X \subseteq W \mid w \notin X\}$.

Seja M o sistema de Lógica Modal Não-normal com os axiomas e regras de inferências usuais (tautologias e regras *Modus Ponens*, substituição uniforme e substituição por equivalências) mais o axioma P , e com a classe de estruturas $\mathcal{K}$.

Teorema 6.5 *A lógica M é correta e completa. Além disso, a classe de estruturas $\mathcal{K}$ é a maior (com relação à inclusão) para a qual temos a correção.*

Demonstração: Para a correção, considere um modelo $\langle W, F, V, w \rangle$ cuja estrutura está em $\mathcal{K}$. Se $F(w)$ for como no caso 1, temos $p \leftrightarrow \Box p$ verdadeiro e,

portanto, temos o axioma P . Se $F(w)$ for como no caso 2, temos $q \leftrightarrow \neg \Box q$, de onde temos, novamente, P .

Para a maximalidade da classe de estruturas, considere $\langle W, F \rangle$ e $w \in W$ em que $F(w)$ não satisfaz nem o caso 1 nem o caso 2. Por não satisfazer o caso 1, vamos mostrar que podemos falsificar $p \leftrightarrow \Box p$ em w . De fato, temos duas condições a analisar: se existir $X \in F(w)$ tal que $w \notin X$, façamos $V(p) = X$. Teremos $\langle W, F, V, w \rangle \models \neg p \wedge \Box p$. Se existir $X \subseteq W$ tal que $w \in W$ mas $X \notin F(w)$, fazendo $V(p) = X$ teremos $\langle W, F, V, w \rangle \models p \wedge \neg \Box p$. Em ambos casos falsificamos $p \leftrightarrow \Box p$. Por um procedimento análogo, usando que $F(w)$ não satisfaz o caso 2, concluímos que podemos falsificar $q \leftrightarrow \Box q$ em w e, portanto, o axioma P (nota-se que a escolha de $V(q)$ independe da de $V(p)$, o que nos permite defini-los como quaisquer subconjuntos de W).

Para a completude, notemos que o operador $\Box$ comporta-se ora como uma negação proposicional simples, ora como uma afirmação, ou seja, pode ser simplesmente “apagado” da fórmula.

Seja ϕ uma fórmula M -consistente. Seja A_ϕ a fórmula proposicional obtida simplesmente pela eliminação de $\Box$ em ϕ . Seja B_ϕ a fórmula proposicional obtida pela substituição de $\Box$ por $\neg$, em ϕ . Se pelo menos uma das fórmula A_ϕ e B_ϕ não for contradição, digamos, A_ϕ , construímos um modelo para ϕ da seguinte forma: tome $W = \{w\}$ um conjunto unitário e V uma valoração que satisfaça A_ϕ (existe, pela completude do cálculo proposicional). Tome $F(w) = \{\{w\}\}$. Temos que $F(w)$ está no caso 1 e, portanto, $\langle W, F, V, w \rangle \models A \leftrightarrow \Box A$, para toda fórmula A . Assim, por indução na complexidade da fórmula provamos $\langle W, F, V, w \rangle \models A_\phi \leftrightarrow \phi$, isto é, podemos eliminar todos os operadores $\Box$ da fórmula ϕ . Portanto $\langle W, F, V, w \rangle \models \phi$. O mesmo procedimento se aplica ao caso de B_ϕ não ser contradição, usando $F(w) = \{\emptyset\}$.

Agora, se A_ϕ e B_ϕ fossem contradições, vamos mostrar que ϕ seria M -inconsistente. Iremos, em M , provar $(\Box \top \rightarrow \neg \phi) \wedge (\neg \Box \top \rightarrow \neg \phi)$, de onde concluímos $\neg \phi$. De fato, se tivermos $\Box \top$ não teremos $\top \leftrightarrow \neg \Box \top$ e, dada uma fórmula A qualquer, teremos $A \leftrightarrow \Box A$ (usando axioma P e substituição uniforme de p por $\top$ e q por A). Assim, procedendo por indução na complexidade de ϕ , obtemos $\phi \leftrightarrow A_\phi$. Como $\neg A_\phi$ é tautologia, obtemos $\neg \phi$. Analogamente, assumindo $\neg \Box \top$, concluímos $A \leftrightarrow \neg \Box A$, para toda fórmula A , e, portanto, $\phi \leftrightarrow B_\phi$, e, finalmente, $\neg \phi$, provando que ϕ é M -inconsistente. ■

Lema 6.6 $\vdash_M \Box p \leftrightarrow \Diamond p$

Demonstração: Como mostramos a completude, basta-nos uma demonstração semântica. É fácil ver que se $F(w)$ estiver no caso 1, temos $\Box p$ é equivalente a p e $\neg \Box \neg p$ a $\neg \neg p$ (e, portanto, a p e a $\Box p$). No caso 2, temos $\Box p$ equivalente a $\neg p$, que é equivalente a $\neg \neg \neg p$, que é equivalente a $\neg \Box \neg p$. ■

A interação na fusão

Considere a lógica $M_1 \circ M_2$, onde M_1 e M_2 são a lógica M com os operadores $\Box_1$ e $\Box_2$, respectivamente.

Teorema 6.7 (Comutatividade) $\vdash_{M_1 \circ M_2} \Box_1 \Box_2 p \leftrightarrow \Box_2 \Box_1 p$.

Demonstração: Assumindo $\Box_1 \Box_2 p$, analisaremos 4 casos, conforme os valores de p e $\Box_2 p$, e em todos eles mostraremos que vale $\Box_2 \Box_1 p$. A recíproca é análoga.

Caso 1 *Valem p e $\Box_2 p$.*

Usando o axioma P em M_1 , substituindo q por $\Box_2 p$ e p por $\Box_1 p$, concluímos que vale $p \leftrightarrow \Box_1 p$ (pois não vale $\Box_1 \Box_2 p \leftrightarrow \neg \Box_2 p$) e, portanto, $\Box_1 p$. Por P em M_2 , de $(\Box_2 \Box_1 p \leftrightarrow \Box_1 p) \vee (\Box_2 p \leftrightarrow \neg p)$ concluímos $(\Box_2 \Box_1 p \leftrightarrow \Box_1 p)$ e, portanto, $\Box_2 \Box_1 p$.

Caso 2 *Valem p e $\neg \Box_2 p$.*

Temos $\neg(\Box_1 \Box_2 p \leftrightarrow \Box_2 p)$, logo (de P em M_1) $\Box_1 p \leftrightarrow \neg p$ e, da hipótese, obtemos $\neg \Box_1 p$. De $\neg(\Box_2 p \leftrightarrow p)$ temos (de P em M_2) $\Box_2 \Box_1 p \leftrightarrow \neg \Box_1 p$ e, portanto, $\Box_2 \Box_1 p$.

Caso 3 *Valem $\neg p$ e $\Box_2 p$.*

Temos $\neg(\Box_1 \Box_2 p \leftrightarrow \neg \Box_2 p)$, logo $\Box_1 p \leftrightarrow p$ e, da hipótese, obtemos $\neg \Box_1 p$. De $\neg(\Box_2 p \leftrightarrow p)$ temos $\Box_2 \Box_1 p \leftrightarrow \neg \Box_1 p$ e, portanto, $\Box_2 \Box_1 p$.

Caso 4 *Valem $\neg p$ e $\neg \Box_2 p$.*

Temos $\neg(\Box_1 \Box_2 p \leftrightarrow \Box_2 p)$, logo $\Box_1 p \leftrightarrow \neg p$ e, da hipótese, obtemos $\Box_1 p$. De $\neg(\Box_2 p \leftrightarrow \neg p)$ temos $\Box_2 \Box_1 p \leftrightarrow \Box_1 p$ e, portanto, $\Box_2 \Box_1 p$. ■

Corolário 6.8 (Confluência de Church-Rosser)

$$\vdash_{M_1 \circ M_2} \Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow \Box_2 \Diamond_1 p$$

Demonstração: Imediata do Teorema 6.7 e Lema 6.6. ■

Teorema 6.9 $M_1 \circ M_2$ é correta e completa.

Demonstração: Análoga à do Teorema 6.5. Para a completude, usamos a mesma estratégia de construir modelos unitários, analisando 4 casos (os valores de $\Box_1 \top$ e $\Box_2 \top$) ao invés de 2 (os valores de $\Box \top$). Também consideramos 4 fórmulas, ao invés das duas fórmulas A_ϕ e B_ϕ , em que cada um dos operadores $\Box_1$ e $\Box_2$ ou é eliminado ou é trocado pela negação. O resto do procedimento é análogo. ■

Decidibilidade

Vamos estudar a decidibilidade da lógica M e da fusão $M_1 \circ M_2$, e a complexidade do algoritmo de decisão. As definições rigorosas de algoritmos e das classes de complexidade, podem ser vistas em [Pap94]. Um estudo sobre complexidades de alguns sistemas clássicos de Lógica Modal encontra-se em [BdRV01].

Teorema 6.10 *As lógicas M e $M_1 \circ M_2$ são decidíveis, e seus algoritmos de decisão são NP-completos.*

Demonstração: Dada uma fórmula ϕ , de M , considere as fórmulas proposicionais A_ϕ e B_ϕ obtidas, respectivamente, pela eliminação de todas as ocorrências de $\Box$ em ϕ e pela substituição de todas as ocorrências de $\Box$ em ϕ por $\neg$. Como no Teorema 6.5, ϕ é um teorema de M se e somente se A_ϕ e B_ϕ são tautologias. Da decidibilidade da lógica proposicional obtemos a decidibilidade de M , e o algoritmo de decisão de M tem a mesma complexidade do da lógica proposicional, ou seja, é NP-completo.

Para a lógica $M_1 \circ M_2$ a demonstração é a mesma, considerando, no lugar de A_ϕ e B_ϕ , quatro fórmulas proposicionais, em que, para cada $i = 1, 2$, os operadores $\Box_i$ ou são apagados ou substituídos por $\neg$, em ϕ . ■

Capítulo 7

O Problema da Preservação de Completude na Fusão

O Teorema 6.3 nos diz que a fusão de Lógicas Modais Não-normais preserva a correção. A pergunta natural seria: a fusão preserva também a completude? Isto é, dadas duas Lógicas Modais Não-normais M_1 e M_2 completas, $M_1 \circ M_2$ será completa?

No caso normal, a demonstração da preservação de completude na fusão, feita por Finger e Weiss [FW02] considera uma fórmula da fusão como uma fórmula de modalizações alternadas, isto é, $M_1(M_2(M_1(...)))$. Da preservação da completude na modalização segue a completude na fusão. Alguns cuidados precisam ser tomados, pois a semântica da modalização é diferente da semântica da fusão. Se A é uma fórmula de $M_1(M_2)$ ela também será uma fórmula de $M_1 \circ M_2$. Porém, um modelo para A em $M_1(M_2)$ é diferente de um modelo para A em $M_1 \circ M_2$. Além disso, na modalização supomos que a linguagem da lógica interna não possua operadores da lógica externa, além dos operadores booleanos. Esse não é o caso de $M_1(M_2(M_1))$, em que o operador $\Box_1$ aparece tanto em M_1 quanto em $M_2(M_1)$. Isso causa problema mesmo na preservação de correção.

Como será discutido na próxima seção, o exemplo de interação forte mostra como o caso não-normal de transferência de completude na fusão pode ser bem mais complicado que o normal.

7.1 Conseqüências da Interação Forte no Problema da Fusão

Justificaremos com mais detalhes porque a interação forte traz complicações quando olhamos uma fórmula da fusão como uma fórmula de modalizações alternadas.

Primeiro vejamos que as complicações só aparecem a partir do momento

que consideramos pelo menos duas alternâncias entre M_1 e M_2 . Isto é, para fórmulas da fusão que estão em $M_1(M_2)$ ou em $M_2(M_1)$, temos a preservação da completude.

Teorema 7.1 *Sejam M_1 e M_2 Lógicas Modais completas. Seja ψ uma fórmula de $M_1(M_2)$ que é $M_1 \circ M_2$ -consistente. Então ψ tem modelo em $M_1 \circ M_2$.*

Demonstração: Seja ψ como no enunciado. Observe que ψ é $M_1(M_2)$ -consistente. Se não fosse, considere a demonstração de $\neg\psi$ em $M_1(M_2)$. Como os axiomas e regras de inferência estão em $M_1 \circ M_2$, bem como os teoremas de M_2 são teoremas de $M_1 \circ M_2$, teríamos uma demonstração de $\neg\psi$ em $M_1 \circ M_2$, contradizendo a $M_1 \circ M_2$ -consistência de ψ .

Pelo Teorema 5.4, ψ tem um modelo em $M_1(M_2)$. Seja $\langle W_1, F_1, g, o \rangle$ esse modelo, com $o \in W$. Para cada $w \in W_1$, considere $g(w) = \langle W^w, F_2^w, V^w, o^w \rangle$ um modelo de M_2 . Seja

$$\langle W, F_2, V \rangle = \prod_{w \in W_1} \langle W^w, F_2^w, V^w \rangle.$$

Considere $W_1^* = \{o^w : w \in W_1\} \subseteq W$ e, para cada $w \in W_1$,

$$F_1^*(o^w) = \{X^* : X \in F_1(w)\},$$

onde $X^* = \{o^{w'} : w' \in X\}$.

Observe que $\langle W_1^*, F_1^* \rangle$ nada mais é do que uma cópia de $\langle W_1, F_1 \rangle$ ao longo de W , nos “pontos de observação” dos modelos $g(w)$.

Precisamos construir cópias de $\langle W_1, F_1 \rangle$ ao longo de todo W . Podemos supor que $|W| = |W_1 \times I|$, para algum conjunto I . Para isso, podemos tomar todos os conjuntos W_2^w com a mesma cardinalidade, o que pode ser feito tomando uniões disjuntas. Ou basta tomarmos, usando uniões disjuntas, W infinito, e teremos $|W| = |W_1 \times W|$. Assim, podemos considerar

$$W = \bigcup_{i \in I} W_1^i,$$

onde W_1^i são disjuntos e têm a mesma cardinalidade de W_1 e, para algum $i \in I$, $W_1^i = W_1^*$. Considerando, para cada $i \in I$, uma função F_1^i de modo que $\langle W_1^i, F_1^i \rangle$ é isomorfa a $\langle W_1, F_1 \rangle$ (como fizemos na definição de F_1^*), definimos F_1' por

$$\langle W, F_1' \rangle = \prod_{i \in I} \langle W_1^i, F_1^i \rangle.$$

Está claro que $\langle W, F_1', F_2, V \rangle$ é um modelo de $M_1 \circ M_2$. Dada uma fórmula A de $M_1(M_2)$, mostremos, por indução na complexidade de A , que, para todo $w \in W_1$,

$$\langle W_1, F_1, g, w \rangle \models A \iff \langle W, F_1', F_2, V, o^w \rangle \models A. \quad (7.1)$$

Se $A \in \mathcal{L}_{M_2}$, pelo Lema 6.2 temos 7.1. O passo indutivo para os operadores $\wedge$ e $\neg$ é imediato. Falta o passo indutivo para o operador $\Box_1$. Suponhamos

que 7.1 vale para uma fórmula A , para todo $w \in W_1$. Do Lema 6.2, desta vez considerando $\langle W, F_1 \rangle = \coprod_{i \in I} \langle W_1^i, F_1^i \rangle$, temos que vale 7.1 para $\Box_1 A$. Isso é suficiente para concluirmos o teorema, pois teremos $\langle W, F_1', F_2, V, o^o \rangle \models \psi$. ■

A mesma estratégia usada no Teorema 7.1 não funciona se tomarmos uma fórmula de $M_2(M_1(M_2))$. Vejamos como a interação forte na fusão de sistemas de Lógica Modal Não-normal traz complicações para esse caso.

Sejam M_1 e M_2 o sistema lógico particionado com o operador $\Box_1$ e $\Box_2$, respectivamente, conforme apresentado na Seção 6.2. Trabalhemos em $M_1 \circ M_2$.

Considere ϕ a fórmula $\Box_1 \Box_2 p \wedge \neg \Box_2 \Box_1 p$. Essa fórmula é inconsistente, pelo Teorema 6.7. Porém, considere ϕ em $M_1(M_2(M_1))$ e σ o mapeamento de preservação de consistência para ϕ . As subfórmulas monolíticas de ϕ são $\Box_2 p$ e $\Box_2 \Box_1 p$. É fácil ver que essas fórmulas são independentes, no sentido de que qualquer combinação de verdade e falso entre elas é consistente, pois basta escolhermos $\Box_1$ e $\Box_2$ como “sim” ou “não” apropriadamente. Logo são mapeadas em fórmulas atômicas r e s . Portanto $\sigma(\phi) = \Box_1 r \wedge \neg s$, que é claramente consistente. Temos, então, que σ mapeou uma fórmula inconsistente numa consistente.

Talvez precisemos melhorar um pouco nosso mapeamento σ para que possamos corrigir isso. Uma tentativa seria construir σ não só sobre as subfórmulas monolíticas de ϕ em $M_1(M_2(M_1))$ que estão em $M_2(M_1)$, mas sobre todas as subfórmulas dessas subfórmulas monolíticas. São elas: p , $\Box_1 p$, $\Box_2 p$ e $\Box_2 \Box_1 p$. Da mesma forma que no caso anterior, σ leva as três primeiras fórmulas em fórmulas atômicas q , r e s . Já o valor $\Box_2 \Box_1 p$ é unicamente determinado pelos valores das outras três, ou seja, $\sigma(\Box_2 \Box_1 p)$ não tem outras variáveis senão q , r e s . Seja A essa fórmula (proposicional). Tudo que precisamos saber sobre A é que não é tautologia. De fato, temos $\neg p \wedge \neg \Box_2 p \wedge \Box_1 p \rightarrow \neg \Box_2 \Box_1 p$, logo $\neg q \wedge \neg r \wedge \neg s \rightarrow \neg A$. Se A fosse tautologia, pela contrapositiva da fórmula anterior teríamos $q \vee r \vee s$ tautologia, absurdo. Portanto $\sigma(\phi) = \Box_1 r \wedge \neg A$ é consistente (tomo um modelo proposicional para $\neg A$, verifico se vale r e tomo $\Box_1$ “sim” ou “não” convenientemente).

Podemos observar que ϕ também pode ser considerada uma fórmula de $M_2(M_1(M_2))$. Mas o raciocínio anterior é totalmente análogo para mostrar que, neste caso, também temos $\sigma(\phi)$ consistente.

Enfim, o sistema particionado não é um contra-exemplo para a preservação da completude, pois os teoremas 6.5 e 6.9 nos dizem que, neste caso, a completude é preservada. Mas sugere que, devido à interação forte na fusão, o método de olharmos modalizações alternadas não deve funcionar.

7.2 Alguns Exemplos de Preservação de Completude

Iremos mostrar a completude de fusões de alguns sistemas estudados no Capítulo 3. Usaremos a técnica do modelo canônico.

Teorema 7.2 A fusão $M_1 \circ M_2$ é completa, onde cada M_i , $i = 1, 2$, é um dos sistemas abaixo, com a semântica correspondente apresentada no Capítulo 3:

1. O sistema Snn ;
2. O sistema Snn acrescido de um ou mais dos axiomas de normalidade: **M**, **C** e **N**;
3. O sistema Snn acrescido de um dos axiomas: **D**, **T**, **B**, **4** e **5**.

Demonstração: Iremos proceder como nos Teoremas 3.4, 3.6 e 3.10. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de $M_1 \circ M_2$ e seja W o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{L}$ que são maximalmente $M_1 \circ M_2$ -consistentes. Considere $V : \mathcal{L} \longrightarrow 2^W$ dada por

$$V(A) = \{w \in W : A \in w\}.$$

Para cada $i = 1, 2$, e cada $w \in W$, definimos

$$F_i(w) = \{V(A) : \Box_i A \in w\} \cup \mathcal{C}_i^w,$$

onde $\mathcal{C}_i^w \subseteq \mathfrak{X} = 2^W \setminus \{V(A) : A \in \mathcal{L}\}$.

Analogamente ao que vimos no Capítulo 3, $\langle W, F_1, F_2, V \rangle$ é um modelo bimodal não-normal, chamado de *modelo canônico* de $M_1 \circ M_2$. Se A é uma fórmula $M_1 \circ M_2$ -consistente, existe um conjunto $w \in W$ maximalmente $M_1 \circ M_2$ -consistente tal que $A \in w$. Teremos $\langle W, F_1, F_2, V, w \rangle \models A$. Tudo que precisamos, agora, é definir $\mathcal{C}_1^w$ e $\mathcal{C}_2^w$, para cada $w \in W$, de forma a termos $\langle W, F_1 \rangle$ na classe de estruturas de M_1 , e $\langle W, F_2 \rangle$ na classe de estruturas de M_2 .

Para cada $i = 1, 2$, definimos:

- Se o sistema de M_i é Snn , tomamos $\mathcal{C}_i^w$ qualquer. Por exemplo, $\mathcal{C}_i^w = \emptyset$;
- Se o sistema de M_i é Snn acrescido de um ou mais dos axiomas **M** e **N**, tomamos $\mathcal{C}_i^w = \emptyset$;
- Se o sistema de M_i é $Snn + \mathbf{C}$ acrescido de um ou mais dos axiomas **M** e **N**, tomamos

$$\mathcal{C}_i^w = \{X \in \mathfrak{X} : (\exists A \in \mathcal{L}) \Box_i A \in w \text{ e } V(A) \subseteq X\};$$

- Se o sistema de M_i é Snn acrescido do axioma **D**, **T** ou **4**, tomamos $\mathcal{C}_i^w = \emptyset$;
- Se o sistema de M_i é $Snn + \mathbf{5}$, tomamos $\mathcal{C}_i^w = \mathfrak{X}$;
- Se o sistema de M_i é $Snn + \mathbf{B}$, tomamos

$$\mathcal{C}_i^w = \{X \in \mathfrak{X} : w \in X\}.$$

Cada $\langle W, F_i \rangle$ pertence à classe de estruturas de M_i , isto é, satisfaz as condições dentre **M**^{*}, **C**^{*}, **N**^{*}, **D**^{*}, **T**^{*}, **B**^{*}, **4**^{*} e **5**^{*} cujos axiomas correspondentes estão no sistema de M_i . A demonstração disso é totalmente análoga às demonstrações apresentadas nos Teoremas 3.6 e 3.10. ■

Bibliografia

- [BdRV01] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, Reino Unido, 2001.
- [BGT03] F. Baader, S. Ghilardi, and C. Tinelli. A new combination procedure for the word problem that generalizes fusion decidability results in modal logics. Technical Report 03-03, Department of Computer Science, The University of Iowa, Dezembro 2003.
- [Che80] B. F. Chellas. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [FF02] Rogério Fajardo and Marcelo Finger. Non-normal modalisation. In *Advances in Modal Logic*, volume 4, pages 83–95, Toulouse, 2002.
- [FF04] Rogério Fajardo and Marcelo Finger. Strong interactions arising in the fusion of non-normal modal logics. 2004.
- [FG92] M. Finger and D.M. Gabbay. Adding a temporal dimension to a logic system. *Journal of Logic Language and Information* 1, pages 203–233, 1992.
- [FG96] M. Finger and D.M. Gabbay. Combining temporal logic systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37, no. 2, pages 204–232, 1996.
- [FW00] M. Finger and M. Angela Weiss. The unrestricted addition of a temporal dimension to a logic system. *3rd International Conference on Temporal Logic*, Outubro 2000.
- [FW02] M. Finger and M. Angela Weiss. The unrestricted combination of temporal logic systems. *Logic Journal of the IGPL*, 10(2):165–190, Março 2002.
- [Ger75] Martin Gerson. *The inadequacy of the neighbourhood semantics for modal logic*, volume Junho. The Journal of Symbolic Logic, 2, 1975.
- [GHR94] D. M. Gabbay, I. M. Hodkinson, and M. A. Reynolds. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, volume 1. Oxford University Press, 1994.

- [HC96] G. E. Hughes and M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, Londres, 1996.
- [Kop89] S. Koppelberg. General theory of boolean algebras. In J. D. Monk, editor, *Handbook of Boolean Algebras*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.
- [KW91] M. Kracht and F. Wolter. Properties of independently axiomatizable bimodal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 56(4):1469–1485, 1991.
- [MSSV03] P. Mateus, A. Sernadas, C. Sernadas, and L. Viganò. Modal sequent calculi labelled with truth values: Completeness, duality and analyticity. *CLC, Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico*, 2003.
- [Pap94] C. H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [Wol96] Frank Wolter. Fusion of modal logics revisited. In Heinrich Wansing Michael Zakharyashev Marcus Kracht, Maarten de Rijke, editor, *Advances in Modal Logic*, volume 1, pages 361–379, Stanford, CA, 1996. CSLI Publications.