Clasificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin

Luis Enrique Ramírez

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq processo 142407/2009-7

São Paulo, Março de 2013

Clasificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 08/03/2013. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi - IME-USP
- Prof. Dr. Adriano Moura - UNICAMP
- Prof. Dr. Yuly Billig - Carleton University, Ottawa Canadá
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

Gostaria de agradecer o meu orientador Vyacheslav Futorny pelos 4 anos de paciência, amizade e continuo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho. Ao professor Dimitar Grantcharov com quem em um trabalho conjunto foi possível desenvolver grande parte deste trabalho. Ao professor Volodymyr Mazorchuk, quem durante a minha estada no instituto de matemáticas da Universidade de Uppsala no ano 2011, me fez muitas sugestões que ajudaram para ter uma melhor perspectiva de grande parte dos problemas que forem resolvidos nesta tese. Agradeço aos meus amigos em São Paulo que por uma ou outra razão me ajudaram a conhecer a cultura brasileira. Agradeço a minha mãe pelo contínuo apoio. Aos meus irmãos por acompanhar a minha mãe.

Obrigado!!

Resumo

RAMÍREZ, L.E. **Clasificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin**. 2013. 92 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Neste trabalho construímos e apresentamos realizações explicitas de todos os $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis.

Palavras-chave: Módulos de Gelfand-Tsetlin, Bases de Gelfand-Tsetlin, Módulos de peso.

Abstract

RAMÍREZ, L. E. **Classification of irreducible Gelfand-Tsetlin $\mathfrak{sl}(3)$-modules**. 2013. 92 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

In this work we construct and give explicit realizations for all irreducible Gelfand-Tsetlin modules for the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3)$.

Keywords: Gelfand-Tsetlin modules, Gelfand-Tsetlin bases, Weight modules.

Sumário

Introdução ix

Preliminares xiii

1 Módulos de Gelfand-Tsetlin 1
- 1.1 $\mathfrak{gl}(n)$-módulos de dimensão finita e genéricos . . . 1
- 1.2 Módulos de Gelfand-Tsetlin . . . 2

2 $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin 7
- 2.1 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{sl}(3)$ . . . 7
- 2.2 Bases para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos . . . 9
- 2.3 Espaços de peso . . . 13
- 2.4 $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Harish-Chandra . . . 18
- 2.5 Existência e unicidade de extensões de caracteres para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis . . . 19

3 Blocos Genéricos 23
- 3.1 Descrição dos blocos genéricos . . . 24

4 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin Singulares 39
- 4.1 Tabelas derivadas . . . 39
- 4.2 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares . . . 41

5 Blocos Singulares 47
- 5.1 Descrição dos blocos singulares . . . 47
- 5.2 Teorema de Classificação . . . 59

6 Funtor de Localização para Módulos de Gelfand-Tsetlin 61
- 6.1 Funtor de Localização . . . 61
- 6.2 Operadores injetores e sobrejetores . . . 62
  - 6.2.1 Injetividade e sobrejetividade de e_{21} . . . 62
  - 6.2.2 Injetividade e sobrejetividade de e_{31} . . . 63
  - 6.2.3 Injetividade e sobrejetividade de e_{32} . . . 66
- 6.3 Localização para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos . . . 67

Referências Bibliográficas 73

Introdução

A teoria de representações de álgebras é um dos ramos mais ativos da álgebra moderna. Ela tem numerosas conexões e aplicações a outros ramos da matemática. Em particular, tanto as representações de álgebras associativas como as representações de álgebras de Lie são de uso fundamental na geometria, física matemática, álgebra linear e topologia. O desenvolvimento recente da geometria não comutativa e física matemática sugere a necessidade do estudo de módulos de dimensão infinita não necessariamente de peso máximo sobre álgebras de Lie, em particular, módulos induzidos parabolicamente e os seus quocientes, módulos de peso com espaços de peso de dimensão finita [Ma00], e módulos de Gelfand-Tsetlin [Zh74], [DFO89], [DFO94], [DFO92]. Uma definição geral de módulos de Gelfand-Tsetlin surgiu com o propósito de aplicar certos métodos da teoria de representações de álgebras associativas de dimensão infinita a representações de álgebras de Lie. A construção de módulos de Gelfand-Tsetlin vai muito além do conceito clássico de bases de Gelfand-Tsetlin para representações de dimensão finita de álgebras de Lie simples. No caso da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, uma subálgebra de Gelfand-Tsetlin é gerada pelos centros das álgebras envolventes de uma cadeia de Gelfand-Tsetlin.

A teoria de módulos de peso com multiplicidades finitas foi desenvolvida por S. Fernando, [Fer90], quem reduziu a classificação de tais módulos irredutíveis a determinar os módulos irredutíveis livres de torção e mostrou que as únicas álgebras de Lie simples que admitem módulos livres de torção são as álgebras de tipos A ou C. O. Mathieu, [Ma00], classificou e deu realizações explícitas para todos os módulos de peso irredutíveis, livres de torção e de grau finito. Previamente, o caso de grau 1 tinha sido estudado em [BL82(1)]. No caso dos módulos de peso com espaços de peso de dimensão infinita, existe uma redução similar. A classificação destes módulos irredutíveis reduz-se à classificação dos módulos irredutíveis densos (os quais existem para todas as álgebras de Lie simples). Ao contrário do caso de espaços de peso de dimensão finita, a classificação dos módulos densos irredutíveis é conhecida somente para a álgebra de Lie simples $sl(2)$, onde os módulos densos irredutíveis tem grau 1 e a classificação é fácil.

Para abordar o problema de classificação dos módulos densos no caso da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$, é natural considerar a subcategoria plena dos $\mathfrak{gl}(n)$-módulos de Gelfand-Tsetlin com respeito a uma *subálgebra de Gelfand-Tsetlin*, [DFO94]. Essa classe de módulos é baseada nas propriedades naturais das bases de Gelfand-Tsetlin para representações de dimensão finita das álgebras de Lie simples clássicas [GT50], [Maz98], [Maz01], [Mo06], [Zh74].

A teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin começou com o artigo [GT50] de I. Gelfand e M. Tsetlin, no qual os autores construíram bases e fórmulas explícitas para a ação dos geradores de

$\mathfrak{gl}(n)$ em cada módulo irredutível de dimensão finita. A ideia de usar o resultado de Gelfand e Tsetlin para construir novos $\mathfrak{gl}(n)$-módulos vem de Y. Drozd, S. Ovsienko e V. Futorny [DFO92], [DFO94]. Baseados na observação de que as fórmulas de Gelfand-Tsetlin contêm somente funções racionais nos parâmetros das tabelas, eles usaram o mesmo tipo de bases e as fórmulas de Gelfand-Tsetlin para construir uma classe de módulos de dimensão infinita para $\mathfrak{gl}(n)$ chamados de módulos genéricos. Além das fórmulas e tipo de descrição das bases, os módulos genéricos tem propriedades em comum com os módulos de dimensão finita. Tais propriedades vem da construção das bases de Gelfand-Tsetlin e são abstraídas na definição dos módulos de Gelfand-Tsetlin.

O principal objetivo desta tese é o estudo dos módulos de Gelfand-Tsetlin para a álgebra $\mathfrak{sl}(3)$. Como resultado principal, vamos dar uma classificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis; tal classificação é obtida por meio da descrição de bases e fórmulas explícitas para cada um dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis. Previamente, tinham sido obtidos vários resultados parciais para $\mathfrak{sl}(3)$ [BFL95], [F86]. Usando estes resultados e as construções feitas durante o trabalho, vamos mostrar que de fato temos todos os possíveis módulos de Gelfand-Tsetlin.

A descrição que vamos apresentar dos módulos irredutíveis de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{sl}(3)$ vai dar uma realização por tabelas, a qual é um análogo ao caso dos $\mathfrak{sl}(2)$-módulos; onde para cada módulo sempre é possível escolher uma base de autovetores com respeito a uma subálgebra de Cartan e escrever fórmulas explícitas para a ação dos elementos da base de $\mathfrak{sl}(2)$.

O trabalho esta estruturado da seguinte forma. Nas preliminares vamos fixar algumas notações e definir alguns conceitos básicos, dando especial atenção a propriedades e notações para as álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ e suas representações. Começamos o Capítulo 1 apresentando o Teorema de Gelfand-Tsetlin [GT50], o qual descreve explicitamente todos os módulos irredutíveis de dimensão finita sobre $\mathfrak{gl}(n)$; explicitando bases e fórmulas para a ação dos geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ em cada um de tais módulos. Apresentamos o resultado de Drozd, Ovsienko e Futorny que garante a existência dos módulos genéricos. Finalizando o capítulo com as definições de subálgebra de Gelfand-Tsetlin e módulos de Gelfand-Tsetlin, [DFO94]. Junto com algumas das propriedades básicas das subálgebras de Gelfand-Tsetlin [Zh74] e dos módulos de Gelfand-Tsetlin. No Capítulo 2 e até o final deste trabalho, vamos centrar a nossa atenção nos módulos de Gelfand-Tsetlin sobre a álgebra $\mathfrak{sl}(3)$. No começo do Capítulo vamos enunciar resultados sobre existência e unicidade de extensões de caracteres de Gelfand-Tsetlin a módulos irredutíveis. O resto do Capítulo vai ser dedicado ao estudo de extensões de caracteres genéricos (caracteres associados com tabelas em módulos genéricos) a módulos irredutíveis. Em particular mostramos que para caracteres genéricos a extensão é única e construímos bases explícitas para cada módulo irredutível gerado por caracteres genéricos. Já no Capítulo 3, com ajuda dos resultados obtidos na Seção 2.2, estudamos os módulos genéricos do ponto de vista de blocos, descrevendo as componentes irredutíveis e reticulado de pesos de cada um dos módulos nos diferentes blocos. Embora temos uma descrição dos blocos genéricos, a classificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin está longe, pois não é possível encaixar os módulos de dimensão finita em nenhum bloco genérico. O problema é que aplicando as fórmu-

las de Gelfand-Tsetlin vamos ter funções racionais nos parâmetros das tabelas, portanto, não é possível usá-las para qualquer carácter. No Capítulo 4 usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin e por meio da introdução de novas tabelas, as quais vamos chamar de tabelas derivadas, é possível induzir novas fórmulas para a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ (que vamos chamar de fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares) para caracteres críticos. Tendo as fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares faz sentido a noção de bloco singular, o qual vai ser definido de maneira similar ao caso dos blocos genéricos. No Capítulo 5 vamos usar as ideias apresentadas na Seção 2.2 e Capítulo 3 para dar uma descrição dos blocos singulares. Uma vez finalizada a descrição dos blocos singulares, vamos usar os resultados da Seção 2.5 para mostrar que temos uma descrição de todos os módulos de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{sl}(3)$, completando assim a classificação dos módulos irredutíveis. Finalmente, o Capítulo 6 é dedicado ao estudo do funtor de localização, o qual vai ser a principal ferramenta para relacionar os diferentes blocos. Vamos aproveitar a descrição explícita de bases e fórmulas para verificar para o caso de $\mathfrak{sl}(3)$, que cada módulo de Gelfand-Tsetlin pode ser obtido de módulos de peso máximo usando o funtor de localização torcido e quocientes.

Preliminares

Neste capítulo vamos fixar as notações e alguns conceitos básicos que vão ser necessários neste trabalho; prestando especial atenção nos conceitos e resultados associados com as álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ e $\mathfrak{sl}(n)$, sobre as quais vamos falar durante grande parte do trabalho.

Todas as álgebras e espaços vetoriais vão ser consideradas sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$; vamos usar $\mathbb{Z}^{\geq 0} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ para denotar o conjunto dos inteiros não negativos e usaremos $\mathbb{Z}^{<0} := \{\ldots, -2, -1\}$ para denotar o conjunto dos inteiros negativos. Vamos dizer que um conjunto de números complexos $\{c_1, \ldots, c_n\}$ satisfaz **relações inteiras** se existem $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $c_i - c_j \in \mathbb{Z}$.

Uma **álgebra de Lie** consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto bilinear

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1 $[,]$ é um produto anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para cada $X \in \mathfrak{g}$; o qual é equivalente a $[X, Y] = -[Y, X]$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$ (pois o corpo de escalares é $\mathbb{C}$, de característica diferente de 2).

2 Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, é valida a identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

A **dimensão de uma álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ vai ser a dimensão de $\mathfrak{g}$ como espaço vetorial. O **centro** de $\mathfrak{g}$ é definido como $Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ para cada } y \in \mathfrak{g}\}$. Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{f}$ são álgebras de Lie, um **homomorfismo de álgebras de Lie** é uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{f}$ tal que $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 0.0.1. *Toda álgebra associativa A com produto $\star : A \times A \longrightarrow A$ induz uma álgebra de Lie $A^- := (A, [,])$ onde a estrutura de $A^{(-)}$ como espaço vetorial é a mesma de A e o produto $[,]$ é definido por $[a, b] = a \star b - b \star a$.*

Seja V um espaço vetorial, vamos denotar por $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie $End(V)^{(-)}$, onde $End(V)$ denota a álgebra associativa dos endomorfismos de V (o produto é a composição usual de funções).

No caso em que V é um espaço vetorial de dimensão finita n, vamos denotar $\mathfrak{gl}(V)$ por $\mathfrak{gl}(n)$. Também, denotaremos por $\mathfrak{sl}(n)$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$ dos operadores de traço zero. Podemos identificar a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$ com a álgebra das matrizes de tamanho $n \times n$ e produto de Lie dado por $[A, B] = AB - BA$. Se E_{ij} denota a matriz de tamanho $n \times n$ com entradas $a_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, uma base de $\mathfrak{gl}(n)$ como espaço vetorial é $\{E_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$; e dado que $[E_{ij}, E_{kl}] = E_{il}\delta_{jk} - E_{kj}\delta_{li}$; um conjunto de geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ como álgebra de Lie é $\{E_{i,j} : i = 1, 2, \ldots, n;\ \text{e}\ j \in \{i-1, i, i+1\}\}$. Da mesma maneira que no caso de $\mathfrak{gl}(n)$, é possível identificar a álgebra $\mathfrak{sl}(n)$ com a álgebra das matrizes de tamanho $n \times n$ de traço zero. Uma base de $\mathfrak{sl}(n)$ como espaço vetorial é $\{E_{ij} : i \neq j\} \cup \{h_k : k = 1, \ldots, n-1\}$; onde $h_k := E_{k,k} - E_{k+1,k+1}$. Um conjunto de geradores de $\mathfrak{sl}(n)$ como álgebra de Lie é $\{E_{i,i+1} : i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{E_{i,i-1} : i = 2, 3, \ldots, n\}$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um **$\mathfrak{g}$-módulo** é um espaço vetorial V juntamente com uma operação de multiplicação $* : \mathfrak{g} \times V \to V$ tal que, para $X, Y \in \mathfrak{g}$, $u, v \in V$ e α escalar, são satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $(X + Y) * v = X * v + Y * v$
2. $X * (u + v) = X * u + X * v$
3. $\alpha X * v = X * (\alpha v)$
4. $[X, Y] * v = X * (Y * v) - Y * (X * v)$

A **dimensão do $\mathfrak{g}$-módulo** $(V, *)$ é a dimensão do espaço vetorial V.

Observação 0.0.2. *Se $(V, *)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo, para cada $X \in \mathfrak{g}$ a aplicação $f_X := X * _ : V \longrightarrow V$ definida por $f_X(v) = X * v$ é linear e a aplicação $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ definida por $\phi(X) = f_X$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Se V é um espaço vetorial, uma **representação de $\mathfrak{g}$ em** V é um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$; vamos denotar por (V, ϕ).

Observação 0.0.3. *Se (V, ϕ) é uma representação de $\mathfrak{g}$, a operação $* : \mathfrak{g} \times V \to V$ definida por $X * v = \phi(X)(v)$ define sobre V uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo.*

Assim, todo módulo V sobre $\mathfrak{g}$ induz uma representação sobre V e vice-versa, portanto os conceitos de módulo e de representação são equivalentes. Neste texto vamos preferir usar o conceito de $\mathfrak{g}$-módulo.

Dado um espaço vetorial V, definimos $T^k(V)$ como; $T^0(V) = \mathbb{C}$ e uma vez definido $T^n(V)$, definimos $T^{n+1}(V) := T^n(V) \bigotimes_{\mathbb{C}} V$. A **álgebra tensorial** em V é definida como $T(V) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}} T^k(V)$; com o produto definido em componentes homogêneas por concatenação. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, a **álgebra envolvente universal** de $\mathfrak{g}$ é definida como $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$, onde J é o ideal de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ para cada $x, y \in \mathfrak{g}$. As principais propriedades da álgebra envolvente universal são descritas na seguinte proposição

Proposição 0.0.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $U(\mathfrak{g})$ a sua álgebra envolvente universal, então:*

1. *$U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com unidade.*
2. *A aplicação canônica $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ é injetora e satisfaz*

$$(\ * \ )\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$$

3. *Se $\mathfrak{B}$ é uma álgebra associativa com unidade e $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{B}$ satisfaz (*), existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $\phi\rho = \sigma$.*

Um $\mathfrak{g}$-módulo $(V, *)$ é dito **irredutível** se para cada $0 \neq v \in V$ temos $V = U(\mathfrak{g}) * v := \{X * v : X \in U(\mathfrak{g})\}$ Isto é, qualquer vetor não nulo gera V.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ uma **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$ (subálgebra maximal abeliana agindo semisimples em $\mathfrak{g}$) e $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ um sistema de raízes relativo a $\mathfrak{h}$. A subálgebra $\mathfrak{h}$ induz uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

e $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h,x] = \alpha(h)x \text{ para cada } h \in \mathfrak{h}^*\}$. Se $\alpha \in \Phi^+$, os subespaços $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ tem dimensão 1, e fixando $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, e escrevendo $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$, a álgebra $\langle e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha \rangle$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Exemplo 0.0.5. *Para a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$, a subálgebra $\mathfrak{h} = \langle \{E_{11}, \ldots, E_{nn}\} \rangle$ é uma subálgebra de Cartan, e sempre que falemos de uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{gl}(n)$ vamos nos referir a $\mathfrak{h}$.*
No caso da álgebra $\mathfrak{sl}(3)$, vamos fixar a base $\mathcal{B}$ definida por:

$$e_\alpha := E_{12} \qquad f_\alpha := E_{21} \qquad h_\alpha := E_{11} - E_{22} \qquad e_{\alpha+\beta} := E_{13}$$

$$e_\beta := E_{23} \qquad f_\beta := E_{32} \qquad h_\beta := E_{22} - E_{33} \qquad f_{\alpha+\beta} := E_{31}$$

Vamos fixar a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle$ e sistema de raízes $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$.

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo, vamos dizer que V é um **módulo de peso** com respeito de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ se é possível decompor V na forma

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

onde para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos $V_\lambda := \{v \in V : hv = \lambda(h)v \text{ para cada } h \in \mathfrak{h}^*\}$. Os elementos $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tais que $V_\lambda \neq 0$ são chamados de **pesos**, e V_λ é chamado **espaço de peso** associado com λ. Um elemento $0 \neq v \in V_\lambda$ é chamado **vetor de peso máximo** se $U(\mathfrak{n}^+)v = 0$. O módulo V é um **módulo de peso máximo** se V é gerado por um vetor de peso máximo.

Observação 0.0.6. *Note-se que na definição de módulo de peso não foi imposta a condição de que os espaços de peso V_λ sejam de dimensão finita.*

Observação 0.0.7. *Os módulos de dimensão finita irredutíveis sobre $\mathfrak{gl}(n)$ estão em correspondência com n-uplas de números complexos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tais que $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ para $i = 1, \ldots, n$. Tais n-uplas λ correspondem ao peso máximo do módulo, o qual vamos denotar por $L(\lambda)$.*

Capítulo 1

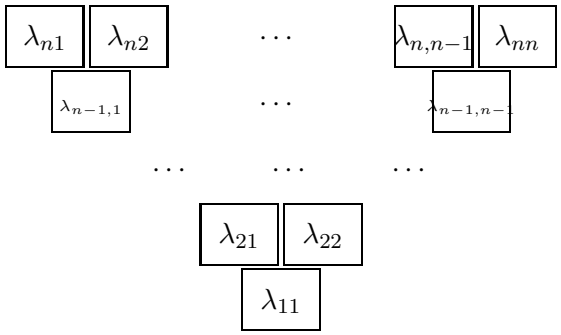
Módulos de Gelfand-Tsetlin

1.1 $\mathfrak{gl}(n)$-módulos de dimensão finita e genéricos

Nesta seção vamos apresentar um resultado de I.Gelfand e M. Tsetlin, o qual descreve explicitamente todos os módulos irredutíveis de dimensão finita sobre $\mathfrak{gl}(n)$; explicitando bases e fórmulas para a ação de $\mathfrak{gl}(n)$ para cada um de tais módulos. Usando este resultado, e aproveitando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin, Y.Drozd, V.Futorny e S.Ovsienko construíram uma classe de módulos de dimensão infinita para $\mathfrak{gl}(n)$ chamados de módulos genéricos.

Para a descrição das bases vamos precisar de objetos combinatórios chamados de tabelas de Gelfand-Tsetlin.

Definição 1.1.1. *Uma configuração de fileiras com entradas complexas λ_{ij} :*



*é chamada de **tabela de Gelfand-Tsetlin**. A tabela é chamada **standard** se para cada $1 \leq i \leq k \leq n-1$, as suas entradas satisfazem as relações:*

$$\begin{cases} \lambda_{ki} - \lambda_{k-1,i} \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \\ \lambda_{k-1,i} - \lambda_{k,i+1} \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \end{cases}$$

Para o caso de módulos irredutíveis de dimensão finita temos o seguinte resultado clássico [GT50], o qual vai ser o nosso ponto de partida no desenvolvimento deste trabalho:

Teorema 1.1.2 (Gelfand-Tsetlin). *Se $L(\lambda)$ é um $\mathfrak{gl}(n)$-módulo irredutível de dimensão finita com peso máximo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, existe uma base $\{[L]\}$ de $L(\lambda)$ parametrizada pelo conjunto das tabelas de Gelfand-Tsetlin standard com primeira fileira $\lambda_{n1} = \lambda_1, \ldots, \lambda_{nn} = \lambda_n$ e os geradores de $\mathfrak{gl}(n)$ agindo segundo as seguintes fórmulas:*

$$E_{k,k+1}([L]) = -\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\prod_{j=1}^{k+1}(l_{ki}-l_{k+1,j})}{\prod_{j\neq i}^{k}(l_{ki}-l_{kj})}\right)[L+\delta^{ki}],$$

$$E_{k+1,k}([L]) = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\prod_{j=1}^{k-1}(l_{ki}-l_{k-1,j})}{\prod_{j\neq i}^{k}(l_{ki}-l_{kj})}\right)[L-\delta^{ki}],$$

$$E_{kk}([L]) = \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{k-1,i}\right)[L],$$

Onde $l_{ki} = \lambda_{ki} - i + 1$, $[L \pm \delta^{ki}]$ *é a tabela obtida de* $[L]$ *somando* ± 1 *à posição* ki *de* $[L]$*; e* $[L \pm \delta^{ki}] := 0$ *se não for uma tabela standard.*

As fórmulas do teorema anterior são chamadas de **fórmulas de Gelfand-Tsetlin** para $\mathfrak{gl}(n)$ e vamos nos referir às bases descritas neste teorema como **bases de Gelfand-Tsetlin** para $\mathfrak{gl}(n)$.

No caso em que não temos denominadores inteiros quando aplicamos as fórmulas de Gelfand-Tsetlin, segue de [DFO94] o seguinte resultado, o qual garante a existência dos chamados **módulos genéricos** sobre a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$.

Teorema 1.1.3 (Drozd-Futorny-Ovsienko)**.** *Seja* $[L]$ *uma tabela de Gelfand-Tsetlin que satisfaz* $\lambda_{i,j} - \lambda_{i,k} \notin \mathbb{Z}$ *para cada* $1 \leq i < n$ *e* $1 < j \neq k \leq i$*. Se* $P([L])$ *denota o conjunto das tabelas de Gelfand-Tsetlin* $[T]$ *com entradas* $t_{i,j}$ *satisfazendo,* $\lambda_{n,j} = t_{n,j}$*,* $1 \leq j \leq n$ *e* $\lambda_{i,j} - t_{i,j} \in \mathbb{Z}$ *para* $1 \leq i \leq n-1$ *e* $1 \leq j \leq n$*, então, o espaço vetorial com base* $P([L])$ *tem estrutura de* $\mathfrak{gl}(n)$*-módulo com a ação dos geradores de* $\mathfrak{gl}(n)$ *dada pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin.*

Observação 1.1.4. *Note-se que cada módulo genérico é de dimensão infinita e que não necessariamente são módulos irredutíveis.*

1.2 Módulos de Gelfand-Tsetlin

Os módulos genéricos tem propriedades em comum com os módulos de dimensão finita. Tais propriedades vem da construção das bases de Gelfand-Tsetlin e são abstraídas na definição dos módulos de Gelfand-Tsetlin, [DFO94].

Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo; para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vamos denotar por $\mathfrak{g}_k := \mathfrak{gl}(k)$; $U_k := U(\mathfrak{g}_k)$ a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}_k$ e $Z_k := Z(\mathfrak{g}_k)$ o centro de U_k; seja também $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_n$ e $U := U(\mathfrak{g})$. Se $\{E_{ij}\}$ denota a base canônica de $\mathfrak{g}$, temos uma identificação natural entre $\mathfrak{g}_k$ e a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada pelas matrizes $\{E_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,k}$; isto é, consideramos $\mathfrak{g}_i$ como uma subálgebra de $\mathfrak{g}_{i+1}$ com

respeito da inclusão no canto superior esquerdo.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]$$

A cadeia de inclusões: $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ induz uma cadeia de inclusões das correspondentes álgebras envolventes.

Definição 1.2.1. *Seja Γ a subálgebra de U gerada por $\{Z_k : k = 1, \dots, n\}$. Esta subálgebra é chamada de* ***subálgebra de Gelfand-Tsetlin standard*** *de U.*

O seguinte Teorema [Zh74] descreve um conjunto de geradores para Γ e descreve a ação destes geradores em bases de Gelfand-Tsetlin.

Teorema 1.2.2 (Zhelobenko)**.** *Sejam Γ a subálgebra de Gelfand-Tsetlin standard e Z_m o centro de $\mathfrak{gl}(m)$, então:*

1. *Z_m é uma álgebra polinomial nas variáveis $\{c_{mk} : k = 1, 2, \dots, m\}$, onde*

$$c_{mk} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \cdots E_{i_k i_1}$$

2. *A álgebra Γ é uma subálgebra polinomial maximal comutativa de $U(\mathfrak{g})$ nas $\frac{n(n+1)}{2}$ variáveis $\{c_{ij} : 1 \leq j \leq i \leq n\}$.*
3. *$c_{ij}([L]) = \gamma_{ij}(l_{i1}, \dots, l_{ii})[L] := (\sum_{k=1}^{i} (l_{ik} + i - 1)^j \prod_{s \neq k} (1 - \frac{1}{l_{ik} - l_{is}}))[L]$*
4. *$\gamma_{ij}(l_{i1}, \dots, l_{ii})$ é um polinômio simétrico nas variáveis $l_{i1}, \dots, l_{ii}$.*
5. *Para cada i, o conjunto de polinômios $\{\gamma_{ij}\}_{j=1,\dots,i}$ gera o espaço de todos os polinômios simétricos nas variáveis $l_{i1}, \dots, l_{ii}$.*

Definição 1.2.3. *[DFO94] Seja M um $\mathfrak{g}$-módulo; e defina*

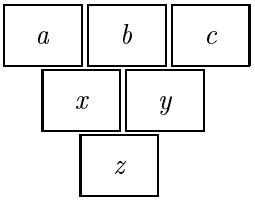
$$M_\chi = \{v \in M : \forall g \in \Gamma, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (g - \chi(g))^k v = 0\}$$

para cada carácter $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}$. O módulo M é chamado ***módulo de Gelfand-Tsetlin*** *(com respeito a Γ) se $M = \bigoplus_{\chi \in \Gamma^*} M_\chi$ e $dim(M_\chi) < \infty$ para todo $\chi \in \Gamma^*$.*

Observação 1.2.4. *Cada módulo de Gelfand-Tsetlin é um módulo de peso com respeito à subálgebra de Cartan standard* $\mathfrak{h}$*, pois* $\mathfrak{h} \subset \Gamma$.

Exemplo 1.2.5. *No caso de* $\mathfrak{gl}(3)$*, suponhamos que* $x - y \notin \mathbb{Z}$ *e*

$[L] =$



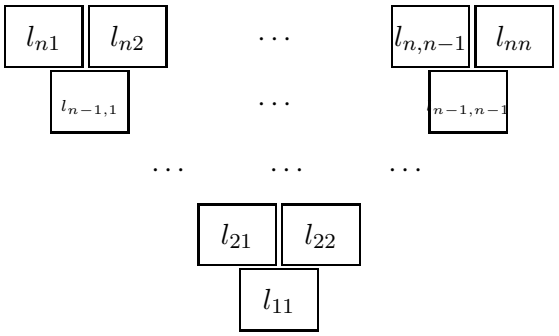
então, os geradores de Γ *agem em* $[L]$ *como:*

$$\begin{cases} c_{11}([L]) = z[L] \\ c_{21}([L]) = (x+y+1)[L] \\ c_{22}([L]) = (x^2+y^2+x+y)[L] \\ c_{31}([L]) = (a+b+c+3)[L] \\ c_{32}([L]) = (a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+1)[L] \\ c_{33}([L]) = (a^3+b^3+c^3+4a^2+4b^2+4c^2+a+b+c+2)[L] \end{cases}$$

Exemplo 1.2.6. *Como mostra o Teorema 1.2.2, as bases de Gelfand-Tsetlin são bases de autovetores para a ação dos geradores de* Γ*. Assim, cada* $\mathfrak{gl}(n)$*-módulo de dimensão finita* V *é um módulo de Gelfand-Tsetlin. Mais ainda,* $dim(V_\chi) \leq 1$ *para cada* $\chi \in \Gamma^*$*. De fato, se* $V_\chi \neq 0$*, existe uma tabela standard* $[L]$ *tal que* $V_\chi = \langle [L] \rangle$.

Exemplo 1.2.7. *Para cada um dos módulos genéricos (Teorema 1.1.3) a ação dos geradores de* Γ *é dada pela mesma expressão que para módulos de dimensão finita; assim, cada* $\mathfrak{gl}(n)$*-módulo genérico* V *é um módulo de Gelfand-Tsetlin. Mais ainda,* $dim(V_\chi) \leq 1$ *para cada* $\chi \in \Gamma^*$.

Pelo Teorema 1.2.2, os autovalores dos geradores de Γ são polinômios simétricos nas entradas deslocadas l_{ij}. Em vista disso e para simplificar a nossa descrição, de agora em adiante vamos considerar somente tabelas de Gelfand-Tsetlin deslocadas; isto é, com entradas l_{ij}.



Uma outra razão para escolher trabalhar com tabelas com entradas l_{ij} é que as fórmulas de Gelfand-Tsetlin são simétricas com respeito aos l_{ij}. Isto é, se R_i denota a fila i da tabela $[L]$ e S_i o

grupo simétrico em i elementos, temos uma ação natural do grupo $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ no conjunto de tabelas de Gelfand-Tsetlin (com entradas l_{ij}): $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)([L])$ é a tabela com entradas $\sigma_i(R_i)$ na fila i , para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 1.2.8. *As tabelas $[L_1]$ e $[L_2]$ são equivalentes se existe $\sigma := (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ tal que $\sigma([L_1]) = [L_2]$ e neste caso vamos escrever $[L_1] \approx [L_2]$.*

Proposição 1.2.9. *Se um módulo de Gelfand-Tsetlin tem base definida por tabelas e ação de $\mathfrak{gl}(n)$ dada pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin, existe uma correspondência entre caracteres e tabelas de Gelfand-Tsetlin (modulo equivalência de tabelas).*

Demonstração. Note-se que, pelo Teorema 1.2.2, tabelas na mesma classe de equivalência definem o mesmo caracter, definido por $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}$, $\chi(c_{ij} = \gamma_{ij})$. Agora, se temos um caracter $\overline{\chi}$ definido por $\overline{\chi}(c_{ij}) = t_{ij}$, associada com este caracter vamos ter a tabela $[L]$ com entradas l_{ij} satisfazendo o sistema de equações:

$$\{\gamma_{ij}(x_{i1}, \ldots, x_{ii}) = t_{ij} \ : \ 1 \leq j \leq i \leq n \ \}$$

□

Observação 1.2.10. *Algumas vezes vai ser útil conhecer a tabela com coeficientes λ_{ij}; mas para isso somente precisamos lembrar as relações $l_{ki} = \lambda_{ki} - i + 1$.*

Capítulo 2

$\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin

A partir desde capítulo vamos focalizar a nossa atenção no estudo dos módulos de Gelfand-Tsetlin para a álgebra $\mathfrak{sl}(3)$. Para começar, para cada tabela em um módulo genérico, vamos descrever uma base para um módulo irredutível que contém esta tabela, isto é, dado um carácter $\chi \in \Gamma^*$, vamos construir um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível M tal que $M_\chi \neq \emptyset$. Vamos aproveitar as bases explícitas para obter alguns resultados sobre módulos genéricos. No final deste capítulo vamos enunciar resultados sobre existência e unicidade de extensões de caracteres de Gelfand-Tsetlin a módulos irredutíveis [DFO89], [DFO92], [BFL95], concluindo em particular que os caracteres genéricos admitem uma única extensão irredutível e, portanto, temos uma descrição de todos os módulos genéricos irredutíveis.

2.1 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{sl}(3)$

No caso de $\mathfrak{gl}(3)$, vamos fixar $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{C}$; e vamos denotar por $[L]$ a tabela;

$$[L] := \begin{array}{ccccc} & & a & & b & & c \\ & & & x & & y & \\ & & & & z & & \end{array}$$

Definição 2.1.1. *A tabela $[L]$ é chamada **genérica** se $x - y \notin \mathbb{Z}$, **singular** se $x - y \in \mathbb{Z}$ e **crítica** se $x - y = 0$. Dado que temos correspondência entre tabelas e caracteres, vamos chamar o carácter associado com a tabela $[L]$ genérico, singular ou crítico se $[L]$ é genérica, singular ou crítica, respectivamente.*

As fórmulas de Gelfand-Tsetlin para os geradores de $\mathfrak{gl}(3)$ são:

$$\begin{cases} E_{11}([L]) = z[L] \\ E_{12}([L]) = -(x-z)(y-z)[L+\delta^{11}] \\ E_{22}([L]) = (x+y+1-z)[L] \\ E_{21}([L]) = [L-\delta^{11}] \\ E_{33}([L]) = (a+b+c+2-x-y)[L] \\ E_{32}([L]) = \frac{(x-z)}{(x-y)}[L-\delta^{21}] - \frac{(y-z)}{(x-y)}[L-\delta^{22}] \\ E_{23}([L]) = \frac{(a-x)(b-x)(c-x)}{(x-y)}[L+\delta^{21}] - \frac{(a-y)(b-y)(c-y)}{(x-y)}[L+\delta^{22}]. \end{cases}$$

Como queremos restringir a nossa atenção a $\mathfrak{sl}(3)$, vamos considerar somente tabelas tais que $E_{11}([L]) + E_{22}([L]) + E_{33}([L]) = 0$; o qual implica $a+b+c+3=0$. Portanto, as fórmulas de Gelfand-Tsetlin para os geradores de $\mathfrak{sl}(3)$ estão dadas por:

$$\textbf{GT-fórmulas:} \begin{cases} h_1([L]) = (2z-(x+y+1))[L] \\ h_2([L]) = (2(x+y+1)-z)[L] \\ E_{12}([L]) = -(x-z)(y-z)[L+\delta^{11}] \\ E_{21}([L]) = [L-\delta^{11}] \\ E_{32}([L]) = \frac{(x-z)}{(x-y)}[L-\delta^{21}] - \frac{(y-z)}{(x-y)}[L-\delta^{22}] \\ E_{23}([L]) = \frac{(a-x)(b-x)(c-x)}{(x-y)}[L+\delta^{21}] - \frac{(a-y)(b-y)(c-y)}{(x-y)}[L+\delta^{22}]. \end{cases}$$

O seguinte resultado é a versão do Teorema 1.1.3 para o caso de $\mathfrak{sl}(3)$, e implica a existência de $sl(3)$-módulos associados com tabelas genéricas.

Teorema 2.1.2 (Drozd-Futorny-Ovsienko)**.** *Seja $[L]$ a tabela fixada; se $x-y \notin \mathbb{Z}$ então o espaço vetorial $V([L])$ gerado pelo conjunto de vetores $\{[L+m\delta_{21}+n\delta_{22}+k\delta_{11}] : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ tem uma estrutura de $\mathfrak{gl}(3)$-módulo de Gelfand-Tsetlin; onde os geradores de $\mathfrak{gl}(3)$ agem em $V([L])$ pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin.*

Agora vamos introduzir alguma notação que será útil na hora de simplificar a descripção dos módulos irredutíveis genéricos.

Notação 2.1.3. *Seja*

$$[T] = \begin{array}{ccccc} \boxed{t_{31}} & & \boxed{t_{32}} & & \boxed{t_{33}} \\ & \boxed{t_{21}} & & \boxed{t_{22}} & \\ & & \boxed{t_{11}} & & \end{array}$$

uma tabela arbitrária, $B_1([T]) := \{t_{31}-t_{21}, t_{32}-t_{21}, t_{33}-t_{21}\}$ e $B_2([T]) := \{t_{31}-t_{22}, t_{32}-t_{22}, t_{33}-t_{22}\}$. Consideremos as seguintes funções:

- $t_0([T]) := t_{21} - t_{22}$; $t_3([L]) := t_{21} - t_{11}$; $t_3^-([T]) := t_{22} - l_{11}$
- $t_i([T]) := \min\{\{B_i([T]) \cap \mathbb{Z}^{\geq 0}\} \cup \{+\infty\}\}$; $i = 1, 2$
- $t_i^-([T]) := \max\{\{B_i([T]) \cap \mathbb{Z}^{<0}\} \cup \{-\infty\}\}$; $i = 1, 2$.

No caso que $t_i([T]) = +\infty$ ou $t_i^-([T]) = -\infty$ para algum $i = 1, 2$, escrevemos $t_i([T]) \notin \mathbb{Z}$ ou $t_i^-([T]) \notin \mathbb{Z}$ respectivamente. Daqui em frente vamos simplificar a notação escrevendo $t_0, t_1, t_2, t_1^-, t_2^-, t_3, t_3^-$ no lugar de $t_0([L])$, $t_1([L])$, $t_2([L])$, $t_1^-([L])$, $t_2^-([L])$, $t_3([L])$, $t_3^-([L])$, onde $[L]$ é a tabela fixa como antes.

2.2 Bases para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos

No que resta deste capítulo, vamos supor $t_0 = x - y \notin \mathbb{Z}$. Nesta seção, dado um carácter χ associado com a tabela $[L]$, vamos descrever explicitamente uma base para um módulo irredutível que contém $[L]$ em termos das constantes $t_1, t_2, t_1^-, t_2^-, t_3, t_3^-$ descritas antes [Ram12]. O primeiro passo vai ser a descrição do reticulado de tabelas associado com a tabela $[L]$:

Definição 2.2.1. *Vamos dizer que $[\tilde{L}]$ é obtida de $[L]$ usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin se existe $X \in U(\mathfrak{sl}(3))$ tal que $[\tilde{L}]$ aparece como somando na decomposição de $X([L])$ com coeficiente não nulo. O reticulado de tabelas associado com $[L]$ é definido como:*

$$Latt([L]) := \{[\tilde{L}] : [\tilde{L}] \text{ é obtida de } [L] \text{ usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin}\}$$

Notação 2.2.2. *Se $V([L])$ é o módulo descrito no Teorema 2.1.2; o submódulo de $V([L])$ gerado por $Latt([L])$ vai ser denotado por $V_{[L]}$.*

Pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin, para cada tabela $[L]$ o reticulado de tabelas associado com $[L]$ satisfaz

$$Latt([L]) \subset \{[L]_{(m,n,k)} : m, n, k \in \mathbb{Z}\},$$

onde a tabela $[L]_{(m,n,k)}$ é definida como:

$[L]_{(m,n,k)}$:=

a	b	c	
	x+m	y+n	
	z+k		

Lema 2.2.3. *Sejam $m, n, k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin a $[L]$ temos que:*

1. *$[L]_{(m,0,0)}$ aparece na decomposição de $E_{23}^m[L]$ com coeficiente*

$$\prod_{i=0}^{m-1} \frac{(a - x - i)(b - x - i)(c - x - i)}{(x - y + i)}$$

2. $[L]_{(-m,0,0)}$ *aparece na decomposição de* $E_{32}^m[L]$ *com coeficiente*

$$\prod_{i=0}^{m-1} \frac{(x-z-i)}{(x-y-i)}$$

3. $[L]_{(0,n,0)}$ *aparece na decomposição de* $E_{23}^n[L]$ *com coeficiente*

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(a-y-i)(b-y-i)(c-x-i)}{(x-y-i)}$$

4. $[L]_{(0,-n,0)}$ *aparece na decomposição de* $E_{32}^n[L]$ *com coeficiente*

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(y-z-i)}{(x-y+i)}$$

5. $E_{21}^k([L]) = [L]_{(0,0,-k)}$

6. $E_{12}^k([L]) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-z-i)(y-z-i)[L]_{(0,0,k)}$

Como consequência imediata do Lema anterior e a definição de $Latt([L])$, temos o seguinte lema:

Lema 2.2.4. *Para* $i = 1,2,3$ *denotamos por* A_i *as condições* $t_i \notin \mathbb{Z}^{\geq 0}$ *e por* A_3^- *a condição* $t_3^- \notin \mathbb{Z}^{\geq 0}$. *Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. $[L]_{(m,0,0)} \in Latt([L])$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}^+$ *se* A_1.

2. $[L]_{(-m,0,0)} \in Latt([L])$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}^+$ *se* A_3.

3. $[L]_{(0,0,-k)} \in Latt([L])$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}^+$.

4. $[L]_{(0,0,k)} \in Latt([L])$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}^+$ *se* A_3 *e* A_3^-.

5. $[L]_{(0,n,0)} \in Latt([L])$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se* A_2.

6. $[L]_{(0,-n,0)} \in Latt([L])$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se* A_3^-.

Agora vamos responder a seguinte pergunta: quais condições nas entradas de $[L]$ garantem que $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ (isto é, quando $Latt([L])$ é o maior possível)?

Definição 2.2.5. *Dados* $m,n,k \in \mathbb{Z}$, *dizemos que a tabela* $[L]_{m,n,k}$, *pode ser obtida da tabela* $[L]$ *pelo caminho* $r \to s \to t$, *com* $\{r,s,t\} = \{1,2,3\}$ *se:*
de $[L]$ *podemos obter* $[L]_{(m,0,0)}$ *se* $r = 1$ *(respectivamente* $[L]_{(0,n,0)}$ *se* $r = 2$ *e* $[L]_{(0,0,k)}$ *se* $r = 3$*); de* $[L]_{(m,0,0)}$ *obtemos* $[L]_{(m,n,0)}$ *se* $s = 2$ *ou* $[L]_{(m,0,k)}$ *se* $s = 3$ *(respectivamente, de* $[L]_{(0,n,0)}$ *obtemos* $[L]_{(m,n,0)}$ *se* $s = 1$ *ou* $[L]_{(0,n,k)}$ *se* $s = 3$ *e de* $[L]_{(0,0,k)}$ *obtemos* $[L]_{(m,0,k)}$ *se* $s = 1$ *ou* $[L]_{(0,n,k)}$ *se* $s = 2$*) e no ultimo passo obtemos a tabela* $[L]_{(m,n,k)}$.

Exemplo 2.2.6. $[L]_{7,-1,4}$ *é obtida da tabela* $[L]$ *pelo caminho* $3 \to 1 \to 2$ *significa: de* $[L]$ *obtemos a tabela* $[L]_{0,0,4}$*; desta tabela obtemos a tabela* $[L]_{7,0,4}$ *e a partir desta obtemos finalmente* $[L]_{7,-1,4}$.

Proposição 2.2.7. $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ *se e somente se*

$$t_1, t_2, t_3, t_3^- \notin \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Sejam $m,n,k \in \mathbb{Z}$. Usando o Lema 2.2.4 em cada passo do caminho indicado na tabela abaixo, é possível obter a tabela $[L]_{(m,n,k)}$ de $[L]$. Em cada caso, o caminho vai depender da tripla ordenada de sinais de m, n e k:

$(+,+,+)$	$(-,-,-)$	$(+,-,+)$
$\begin{cases} 3 \to 2 \to 1; & \text{se } n \geq m \\ 3 \to 1 \to 2; & \text{se } m \geq n \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \to 2 \to 3; & \text{se } m \geq n \\ 2 \to 1 \to 3; & \text{se } n \geq m \end{cases}$	$3 \to 1 \to 2$

$(+,+,-)$	$(-,-,+)$	$(+,-,-)$
$\begin{cases} 1 \to 2 \to 3; & \text{se } m \geq n \\ 2 \to 1 \to 3; & \text{se } n \geq m \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \to 2 \to 3; & \text{se } m \geq n \\ 2 \to 1 \to 3; & \text{se } n \geq m \end{cases}$	$1 \to 2 \to 3$

$(-,+,+)$	$(-,+,-)$
$3 \to 2 \to 1$	$1 \to 2 \to 3$

($\Rightarrow$) Suponhamos que alguma das constantes $t_1,\ t_2,\ t_3$ ou t_3^- é um inteiro não negativo. Sem perda de generalidade, podemos supor que a constante que está em $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ é zero, concluindo que:

1. Se $t_1 = 0$ não é possível obter $[L]_{(1,0,0)}$ de $[L]$. De fato, $\{[L]_{(0,n,k)} : n,k \in \mathbb{Z}\}$ forma um plano no reticulado de Gelfand-Tsetlin impossível de ultrapassar usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin. Isto é, $\{[L]_{(m,n,k)} : m \leq 0,\ n,\ k \in \mathbb{Z}\}$ é um sub-espaço invariante pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin.

2. Se $t_2 = 0$ então, $[L]_{(0,1,0)} \notin Latt([L])$.

3. Se $t_3 = 0$ ou $t_3^- = 0$ então, $[L]_{(0,0,1)} \notin Latt([L])$.

□

Observação 2.2.8. *Os módulos irredutíveis podem ser caracterizados como aqueles que são gerados por qualquer vetor não nulo. Em termos de tabelas, temos que o módulo* $V_{[L]}$ *é irredutível se, e somente se,* $V_{[\tilde{L}]} = V_{[L]}$ *para cada* $[\tilde{L}] \in Latt([L])$.

Teorema 2.2.9. *Seja* $[L]$ *tal que* $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$. *Então,* $V_{[L]}$ *é irredutível se e somente se*

$$t_1, t_1^-, t_2, t_2^-, t_3, t_3^- \notin \mathbb{Z}.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Com estas condições é possível aplicar as fórmulas de Gelfand-Tsetlin a qualquer tabela em $Latt([L])$ e nunca vamos obter coeficientes nulos. Portanto, para cada $[\tilde{L}] \in Latt([L])$ temos $Latt([\tilde{L}]) = Latt([L])$ o qual implica $V_{[L]}$ irredutível.
($\Rightarrow$) Suponhamos que $t_1^- \in \mathbb{Z}^{<0}$ (respectivamente $t_2^- \in \mathbb{Z}^{<0}$ ou $t_3^- \in \mathbb{Z}^{<0}$), sem perda de generalidade podemos supor que $t_1^- = -1$ (respectivamente $t_2^- = -1$ ou $t_3^- = -1$) então, usando a Proposição 2.2.7, $[L] \notin Latt([L]_{(-1,0,0)})$ (respectivamente $[L] \notin Latt([L]_{(0,-1,0)})$ ou $[L] \notin Latt([L]_{(0,0,-1)})$). Portanto, $V_{[L]}$ não pode ser irredutível. □

Observação 2.2.10. *Note-se que é possível obter $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$ no caso em que algumas das constantes são inteiros negativos, mas não necessariamente obtemos um módulo irredutível.*

Notação 2.2.11. *Para algum subconjunto A de $\{t_1, t_1^-, t_2, t_2^-, t_3, t_3^-\}$, a notação $A \subset \mathbb{Z}$ significará de agora em diante que $A \subset \mathbb{Z}$ e o complementar de A em $\{t_1, t_1^-, t_2, t_2^-, t_3, t_3^-\}$ tem interseção vazia com $\mathbb{Z}$. Por exemplo, a notação $\{t_1, t_2\} \subset \mathbb{Z}^{\geq 0}$ significará também que $\{t_1^-, t_2^-, t_3, t_3^-\} \bigcap \mathbb{Z} = \emptyset$.*

Proposição 2.2.12. *Seja $[L]$ a tabela fixa como antes e $V_{[L]}$ o $\mathfrak{sl}(3)$-módulo gerado por $Latt([L])$. Usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin, temos*

1. *Se $\{t_1\} \subset \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $V_{[L]}$ é um módulo irredutível com base parametrizada por $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : m \leq t_1\}$.*
2. *Se $\{t_2\} \subset \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $V_{[L]}$ é um módulo irredutível com base parametrizada por $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : n \leq t_2\}$.*
3. *Se $\{t_3\} \subset \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $V_{[L]}$ é um módulo irredutível com base parametrizada por $Latt([L]) = \{[L]_{(m,n,k)} : k - m \leq t_3\}$.*
4. *Se $\{t_1^-\} \subset \mathbb{Z}^{<0}$, o módulo irredutível que contém $[L]$ pode ser obtido como um módulo quociente de $V_{[L]}$ e a base é parametrizada pelo conjunto de tabelas $\{[L]_{m,n,k} : m > t_1^-\}$.*
5. *Se $\{t_1^-\} \subset \mathbb{Z}^{<0}$, o módulo irredutível que contém $[L]$ pode ser obtido como um módulo quociente de $V_{[L]}$ e a base é parametrizada pelo conjunto de tabelas $\{[L]_{m,n,k} : n > t_2^-\}$.*
6. *Se $\{t_3\} \subset \mathbb{Z}^{<0}$, o módulo irredutível que contém $[L]$ pode ser obtido como um módulo quociente de $V_{[L]}$ e a base é parametrizada pelo conjunto de tabelas $\{[L]_{m,n,k} : k - m > t_3\}$.*

Demonstração. Os casos $1, 2, 3$ são óbvios usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin, e a irredutibilidade é pelo Lema 2.2.4. Em cada um dos casos $4, 5, 6$ podemos aplicar as fórmulas de Gelfand-Tsetlin e obter em $Latt([L])$ uma tabela $[\widetilde{L}]$ que satisfaz $t_1([\tilde{L}]) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ (respectivamente $t_2([\tilde{L}]) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ou $t_3([\tilde{L}]) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$). Então, o módulo irredutível que contém $[L]$ é isomorfo ao módulo quociente $V_{[L]}/V_{[\widetilde{L}]}$.

□

Corolário 2.2.13. *Usando a Proposição 2.2.12 podemos caracterizar o conjunto de tabelas que parametrizam a base do módulo irredutível que contém $[L]$ como:*

1. *Para* $t_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_1([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$.
2. *Para* $t_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_2([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$.
3. *Para* $t_3 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_3([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$.
4. *Para* $t_1^- \in \mathbb{Z}^{<0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_1^-([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{<0}\}$.
5. *Para* $t_2^- \in \mathbb{Z}^{<0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_2^-([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{<0}\}$.
6. *Para* $t_3^- \in \mathbb{Z}^{<0}$; $\{[L]_{(m,n,k)} : t_3^-([L]_{(m,n,k)}) \in \mathbb{Z}^{<0}\}$.

O seguinte teorema descreve uma base para o módulo irredutível que contém $[L]$, [Ram12].

Teorema 2.2.14. *Se A denota o conjunto $\{t_1, t_2, t_1^-, t_2^-, t_3, t_3^-\}$, $[L]$ satisfaz as condições $A_1 := A \bigcap \mathbb{Z}^{\geq 0}$ e $A_2 := A \bigcap \mathbb{Z}^{<0}$ e $t_0 \notin \mathbb{Z}$, então uma base do módulo irredutível que contém $[L]$ pode ser parametrizada por:*

$$\{[L]_{(m,n,k)} : A_1([L]_{(m,n,k)}) \subset \mathbb{Z}^{\geq 0} \text{ e } A_2([L]_{(m,n,k)}) \subset \mathbb{Z}^{<0}\}$$

2.3 Espaços de peso

Agora é possível tomar vantagem da descrição explicita das bases para cada módulo irredutível genérico e calcular as dimensões dos espaços de peso.
Seja $I_{[L]}$ o módulo descrito no Teorema 2.2.14. Para descrever a ação de h_1 e h_2 em $I_{[L]}$ é suficiente conhecer a ação de h_1 e h_2 em tabelas do tipo $[L]_{(m,n,k)}$.

$$\begin{cases} h_1([L]_{(m,n,k)}) = (2(z+k) - (x+y+1+n+m))[L]_{(m,n,k)} \\ h_2([L]_{(m,n,k)}) = (2(x+y+1+n+m) - (z+k))[L]_{(m,n,k)}. \end{cases}$$

Teorema 2.3.1. *Se M é um módulo com base $\mathcal{B}_M$, $[T] \in M$ é uma tabela com peso $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, então, o espaço de peso M_λ é o espaço gerado pelo conjunto de tabelas*

$$\{[T]_{(t,-t,0)} : t \in \mathbb{Z}\} \bigcap \mathcal{B}_M$$

Demonstração. É suficiente notar que temos uma base de auto-vetores para M e que o peso do vetor associado com a tabela $[T]_{(m,n,k)}$ é $(\lambda_1 + 2k - (m+n), \lambda_2 + 2(m+n) - k)$; portanto $[T]_{(m,n,k)} \in M_\lambda$ se, e somente se, $m + n = 0$ e $k = 0$. □

Observação 2.3.2. *Pelo Teorema 2.2.14, o módulo irredutível que contém uma tabela $[L]$ está completamente determinado pelas condições nos coeficientes (quais diferenças são positivas ou negativas). Porém, algumas condições nos coeficientes definem módulos isomorfos no sentido da definição 4. Por exemplo, um módulo definido por uma tabela $[L]$ que satisfaz $t_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ é naturalmente isomorfo ao módulo definido pela tabela $\sigma([L])$ onde $\sigma \in S_1 \times S_2 \times S_3$; em particular, a um módulo definido por uma tabela que satisfaz as condições $t_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$*

Vamos considerar todas as combinações possíveis de condições nos coeficientes da tabela $[L]$ que definam módulos não isomorfos; e para cada caso vamos descrever o reticulado de pesos do correspondente módulo irredutível.

Definição 2.3.3. *Vamos dizer que um conjunto de números complexos $\{c_1, \ldots, c_n\}$ satisfaz relações inteiras se existem $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $c_i - c_j \in \mathbb{Z}$.*

Usando a descrição das bases dos módulos genéricos irredutíveis dada no Teorema 2.2.14 e o Teorema 2.3.1, para cada combinação possível de coeficientes para tabelas genéricas vamos descrever o reticulado de pesos e respectivas multiplicidades dos espaços de peso associados com o módulo irredutível que contém tal tabela.

Até o fim dessa seção vamos supor que o conjunto $\{a, b, c, x, y, z\}$ não satisfaz relações inteiras. Sendo assim, todos os possíveis tipos de tabelas não críticas são:

1. **Módulos com dimensões de espaços de peso infinitas**:

$[T_0]:=$ a b c / x y / z $[T_1]:=$ a b c / x b / z $[T_2]:=$ a b c / x y / x

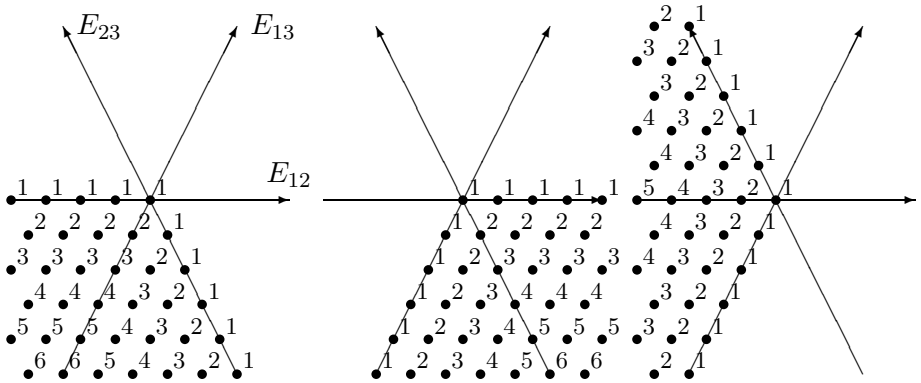
$[T_3]:=$ a b c / a+1 y / z $[T_4]:=$ a b c / x y / y+1 $[T_5]:=$ a b c / x b / x

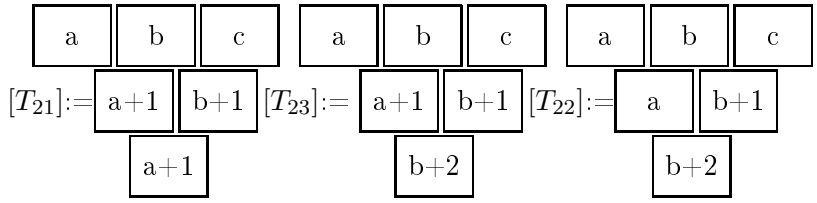
$[T_6]:=$ a b c / x b / b+1 $[T_7]:=$ a b c / a+1 y / y+1 $[T_8]:=$ a b c / a b+1 / z

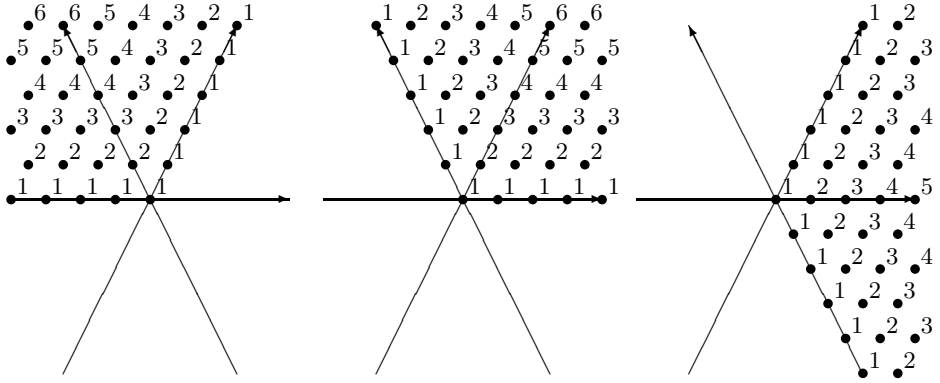
$[T_9]:=$ a b c / a+1 y / a+1 $[T_{10}]:=$ a b c / a+1 b / a+1 $[T_{11}]:=$ a b c / a+1 b / b+1

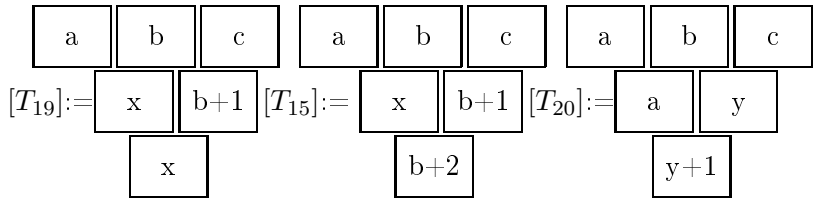
2. **Módulos com espaços de peso de dimensão finita mas não limitada**:

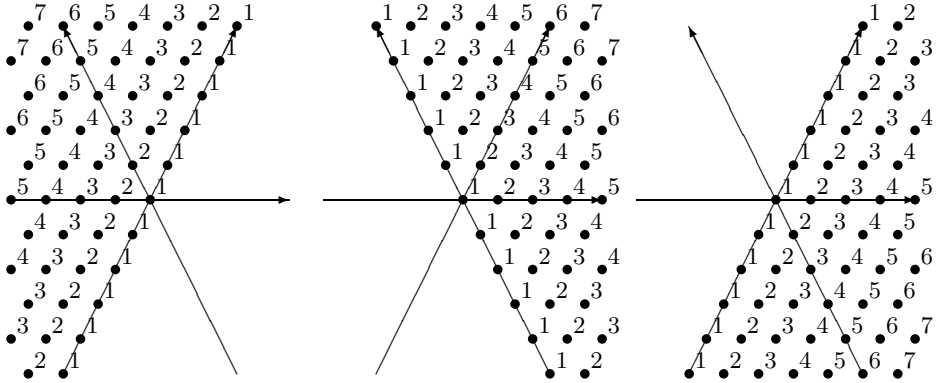
$[T_{17}]:=$ a b c / a b / a $[T_{30}]:=$ a b c / a b / b+1 $[T_{31}]:=$ a b c / a b+1 / a

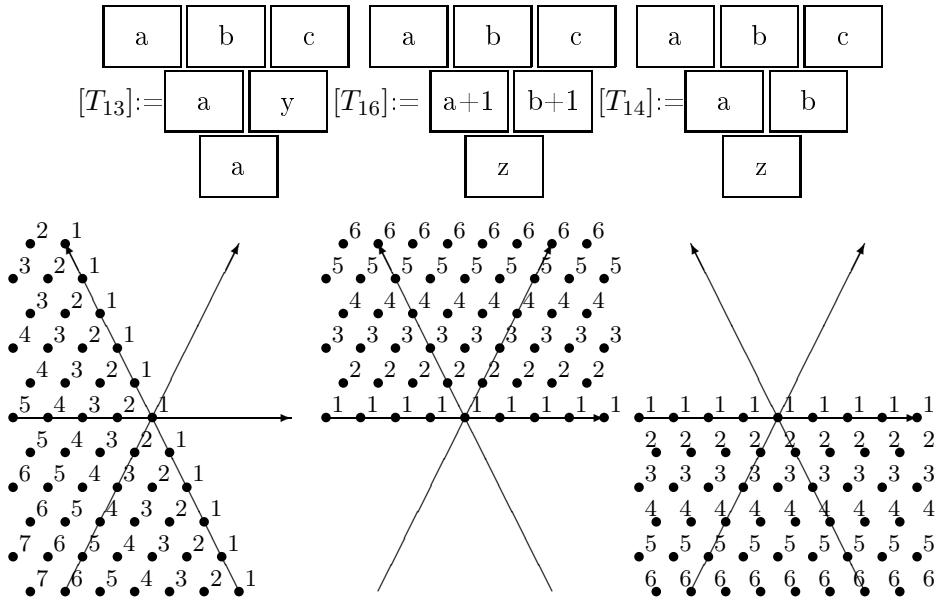

E_{23}
E_{13}
E_{12}


a b c
$[T_{21}]$:= a+1 b+1 a+1
$[T_{23}]$:= a+1 b+1 b+2
$[T_{22}]$:= a b+1 b+2

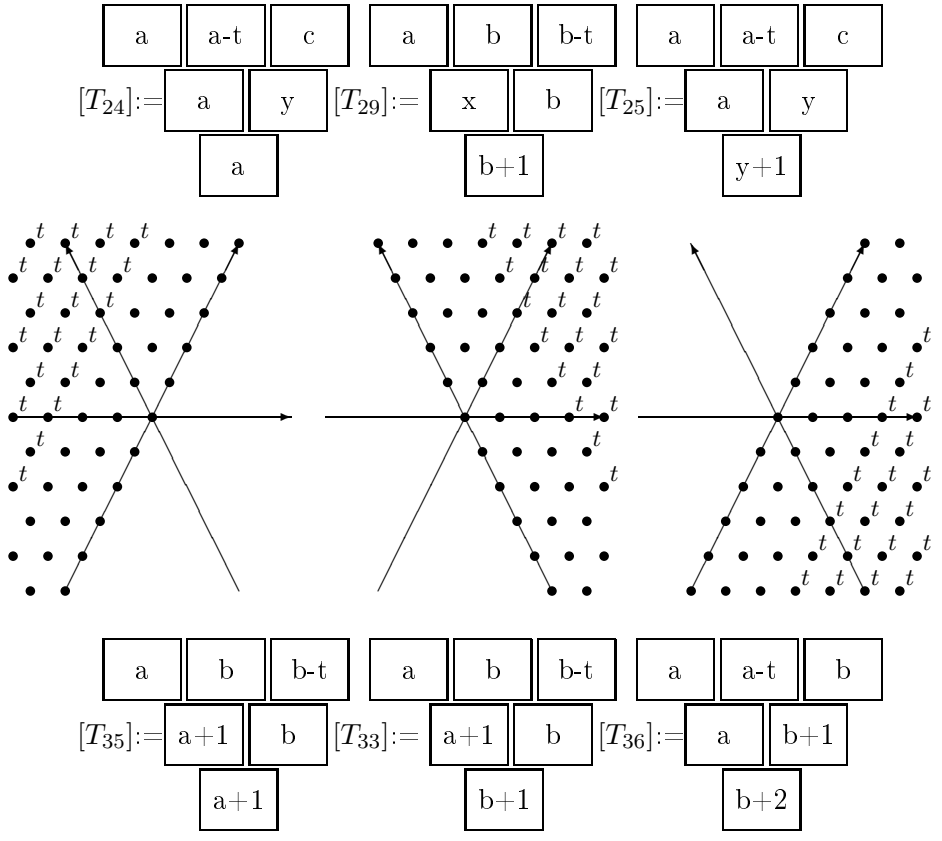


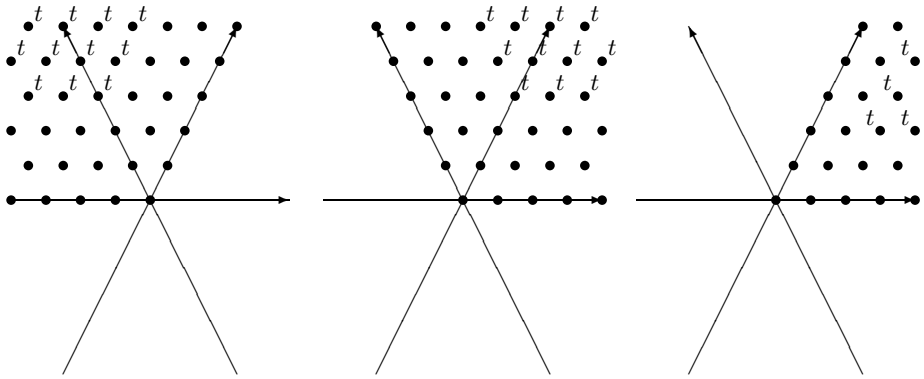

a b c
$[T_{19}]$:= x b+1 x
$[T_{15}]$:= x b+1 b+2
$[T_{20}]$:= a y y+1





3. **Módulos com multiplicidades dos espaços de peso limitadas**:
   Para cada inteiro positivo t as seguintes tabelas descrevem módulos irredutíveis M tais que $dim(M_\lambda) \leq t$ para cada $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.





a	b	a-t

$[T_{40}]:=$

a	b
a	

a	b	a-t

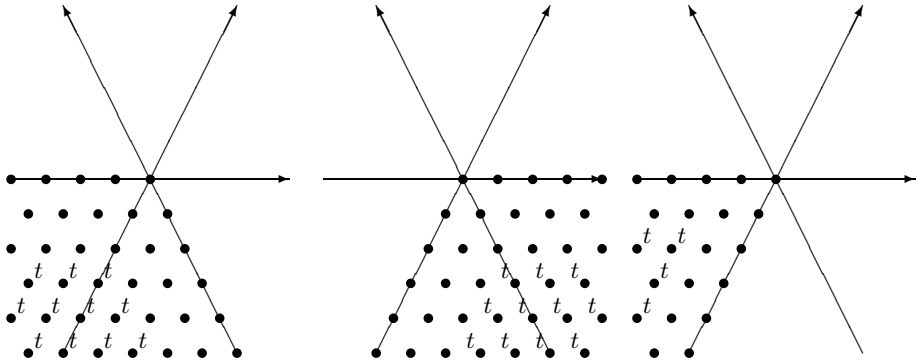
$[T_{41}]:=$

a	b
b+1	

a	b	b-t

$[T_{37}]:=$

a	b
a	



a	a-t	b

$[T_{34}]:=$

a	b+1
a	

a	b	b-t

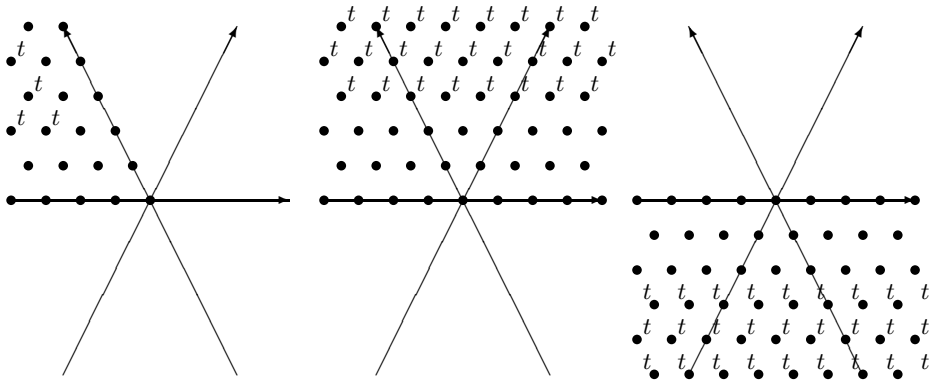
$[T_{26}]:=$

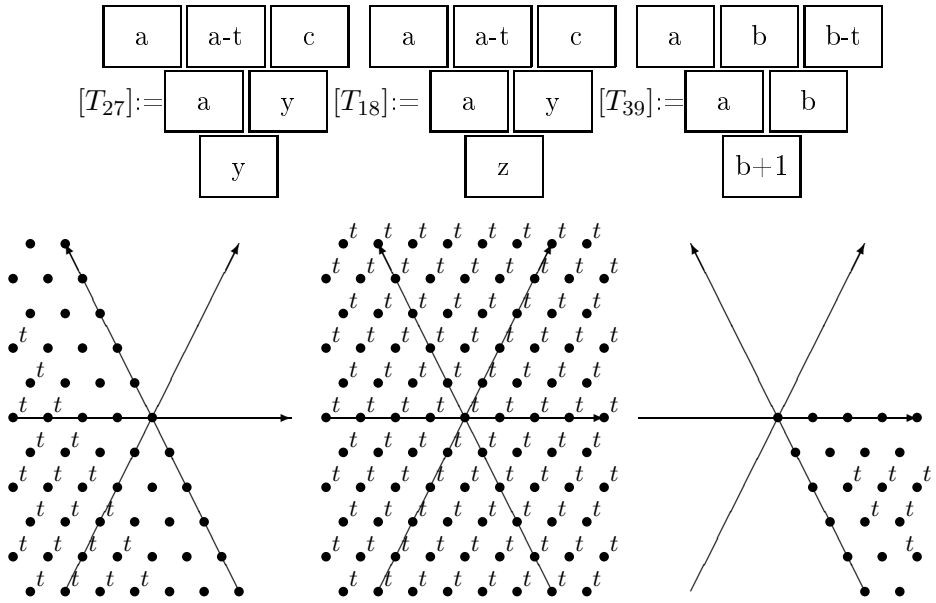
a+1	b
z	

a	b	b-t

$[T_{28}]:=$

a	b
z	





Como consequência imediata da descrição anterior é possível caracterizar os módulos irredutíveis genéricos com espaços de peso de dimensão 1 e módulos com dimensões de espaços de peso limitadas.

Definição 2.3.4. *Um $\mathfrak{g}$-módulo de peso V é chamado **pontilhado** se $dim(V_\lambda) \leq 1$ para todo peso λ.*

Corolário 2.3.5. *O $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível gerado por $[L]$ é um módulo pontilhado se, e somente se, $[L]$ satisfaz as seguintes condições:*

$$t_1 = 0, \quad t_1^- = -1 \qquad ou\ t_2 = 0,\ t_2^- = -1.$$

Definição 2.3.6. *Um $\mathfrak{g}$-módulo de peso V é chamado **limitado** se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $dim(V_\lambda) \leq N$ para cada peso λ.*

Corolário 2.3.7. *O $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível gerado por $[L]$ é limitado se, e somente se, $[L]$ satisfaz as seguintes condições:*

$$t_1 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}; \quad t_1^- \in \mathbb{Z}^{<0} \qquad ou\ t_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0},\ t_2^- \in \mathbb{Z}^{<0}$$

2.4 $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Harish-Chandra

Seja $\mathcal{B}$ uma base de Chevalley para $\mathfrak{sl}(3)$ dada por:

$$e_\alpha := E_{12} \qquad f_\alpha := E_{21} \qquad H_\alpha := E_{11} - H_{22} \qquad e_{\alpha+\beta} := E_{13}$$

$$e_\beta := E_{23} \qquad f_\beta := E_{32} \qquad H_\beta := E_{22} - E_{33} \qquad f_{\alpha+\beta} := E_{31}$$

e seja $\tilde{\mathfrak{g}}$ a subálgebra de Lie $\langle X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \rangle \cong \mathfrak{sl}(2)$.

Definição 2.4.1. *Um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo V é chamado* ***módulo de Harish-Chandra à esquerda (respectivamente direita)*** *se pode ser expresso como uma soma de $\mathfrak{sl}(2)$-módulos de peso mínimo (respectivamente, peso máximo) .*

Definição 2.4.2. *Um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo V é chamado* ***módulo de Harish-Chandra*** *se pode ser expresso como uma soma de $\mathfrak{sl}(2)$-módulos de dimensão finta. Equivalentemente, se o módulo é um módulo de Harish-Chandra à direita e à esquerda.*

Lema 2.4.3. *Seja V um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível e $0 \neq v \in V$. Se existe $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ (respectivamente $n \in \mathbb{Z}^{<0}$) tal que $e_\alpha^n v = 0$ então, para cada $u \in V$, existe $r = r(u) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ (respectivamente $r \in \mathbb{Z}^{<0}$) tal que $e_\alpha^r u = 0$.*

Demonstração. Como V é irredutível, cada $u \in V$ pode ser expresso como $u = \sum_k a_k v$ onde a_k são elementos de $U(\mathfrak{sl}(3))$. Assim, o lema é consequência de que para cada $N \in \mathbb{Z}$ temos:

$$e_\alpha^N e_\beta = N e_{\alpha+\beta} e_\alpha^{N-1} + e_\beta e_\alpha^N, \qquad e_\alpha^N H_\alpha = H_\alpha e_\alpha^N - 2N e_\alpha^N$$

$$e_\alpha^N f_{\alpha+\beta} = f_{\alpha+\beta} e_\alpha^N - 2 f_\beta e_\alpha^{N-1}, \qquad e_\alpha^N H_\beta = H_\beta e_\alpha^N + N e_\alpha^N$$

$$e_\alpha^N f_\alpha = f_\alpha e_\alpha^N + N H_\alpha e_\alpha^{N-1} - 2N e_\alpha^{N-1}.$$

□

Corolário 2.4.4. *Um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível V é um módulo de Harish-Chandra (com respeito a $\tilde{\mathfrak{g}}$) se, e somente se, existe $0 \neq v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $e_\alpha^{\pm n} v = 0$.*

Como consequência da descrição das bases dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis genéricos temos os seguintes corolários:

Corolário 2.4.5. *O $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível gerado por $[L]$ é um módulo de Harish-Chandra (com respeito de $\tilde{\mathfrak{g}}$) à esquerda (respectivamente direita) se, e somente se,*

$$t_3 \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \qquad \text{(respectivamente } t_3^- \in \mathbb{Z}^{<0})$$

Corolário 2.4.6. *O $\mathfrak{sl}(3)$-módulo irredutível gerado por $[L]$ é um módulo de Harish-Chandra (com respeito a $\tilde{\mathfrak{g}}$) se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

$$t_3 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \qquad t_3^- \in \mathbb{Z}^{<0}$$

2.5 Existência e unicidade de extensões de caracteres para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos irredutíveis

Nesta seção vamos enunciar algumas das propriedades básicas dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin obtidas em [F86], [BFL95].

Teorema 2.5.1 (Existência de extensões)**.** *Para cada carácter de Gelfand-Tsetlin χ existe pelo menos um módulo irredutível V tal que $V_\chi \neq 0$. Mais ainda, o número de módulos irredutíveis W não isomorfos tais que $W_\chi \neq 0$ é no máximo dois*[1]

Sejam $H_1 = E_{11} - E_{22}$; $H_2 = E_{22} - E_{33}$; $A = E_{12}E_{21}$ e $B = E_{23}E_{32}$ e $\mathfrak{h}$ a álgebra de Cartan gerada por H_1 e H_2.

Lema 2.5.2. *[F86, BL87] O centralizador $C(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ é uma álgebra associativa gerada por H_1, H_2, A, B e o centro de $U(\mathfrak{g})$.*

Lema 2.5.3. *Para cada $C(\mathfrak{h})$-módulo irredutível W existe um $\mathfrak{g}$-módulo de peso V tal que $V_\lambda \simeq W$ para algum $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Reciprocamente, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de peso irredutível então V_λ é um $C(\mathfrak{h})$-módulo de peso irredutível.*

Seja V um módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível (em particular V é um módulo de peso). Considere qualquer $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ do suporte de pesos de V. Os elementos centrais c_1 e c_2 agem em V, e portanto em V_λ, como multiplicação por certos escalares γ_1 e γ_2. Também temos que em V_λ H_1 age como multiplicação pelo escalar $h_1 := \lambda(H_1)$ e H_2 age como multiplicação pelo escalar $h_2 := \lambda(H_2)$. Dado que V é um módulo de Gelfand-Tsetlin, cada componente V_χ é de dimensão finita. Portanto, é possível escolher uma base de V_λ com respeito a qual A tem uma forma canônica de Jordan A_λ.

Considere o seguinte polinômio em 2 variáveis: $g_\lambda(x, y) = (x - y)^2 - 2(x + y) - (h_1^2 - 2h_1)$.

Definição 2.5.4. *Dizemos que os autovalores de A_λ formam uma **cadeia conectada** se todos os diferentes autovalores $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ podem ser ordenados de tal maneira que $g_\lambda(\mu_i, \mu_{i+1}) = 0$ para cada i.*

Definição 2.5.5. *[F86] Seja $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ uma cadeia conectada, a cadeia é chamada **degenerada** se $\mu_i = -\frac{1}{4}(h_1^2 - 2h_1)$ para algum i; **crítica** se $|\mu_{i+1} - \mu_i| = 1$ para algum i e **regular** se não é crítica nem degenerada.*

Segue também de [F86] o seguinte resultado, que descreve o comportamento dos autovalores de A_λ.

Teorema 2.5.6. *Seja V um módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível.*

- *Para cada λ no suporte de V, a multiplicidade de qualquer autovalor μ de A_λ é no máximo 2.*
- *É possível ordenar os autovalores de A_λ de tal maneira que os autovalores diferentes formam uma cadeia conectada. Mais ainda, uma das seguintes possibilidades é válida:*

[1] Em [Ov02] é provada a existência de extensões para qualquer carácter de Gelfand-Tsetlin para $\mathfrak{gl}(n)$. Mais ainda, mostra-se que o número de extensões a menos de isomorfismo é finito. Em [FO06] mostra-se que para $\mathfrak{gl}(n)$ existem no máximo $1!2!\ldots(n-1)!$ extensões irredutíveis a menos de isomorfismo.

(i) Se a cadeia é regular todos os autovalores de A_λ são diferentes;

(ii) Se a cadeia é degenerada, os diferentes autovalores podem ser ordenados da seguinte maneira:

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots\},$$

onde $\mu_1 = -\frac{1}{4}(h_1^2 - 2h_1)$, e se a multiplicidade de μ_i é 1, então a multiplicidade de μ_{i+1} é também 1.

(iii) Se a cadeia é crítica, os diferentes autovalores podem ser ordenados da seguinte maneira:

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots\},$$

onde $\mu_1 + 1 = \mu_2$, a multiplicidade de μ_1 é 1 e, se a multiplicidade de μ_i é 1 para $i > 1$, então a multiplicidade de μ_{i+1} é também 1.

Definição 2.5.7. *Dado que $A \in \Gamma$, é possível estender o conceito de regular para módulos de Gelfand-Tsetlin. Um módulo de Gelfand-Tsetlin V é chamado **regular** de para cada peso λ os autovalores de A_λ formam uma cadeia conectada regular. O módulo é chamado **degenerado** se existe um peso λ tal que os autovalores de A_λ formam uma cadeia conectada degenerada. O módulo é chamado **crítico** se existe um peso λ tal que os autovalores de A_λ formam uma cadeia conectada crítica.*

Para módulos genéricos temos o seguinte resultado de [F86].

Teorema 2.5.8. *Se V é um módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível e regular, então para cada carácter $\chi \in \Gamma^*$ o subespaço V_χ é de dimensão 1 e V é o único módulo irredutível tal que $V_\chi \neq 0$.*

Para módulos não regulares o sub-espaço V_χ pode ser de dimensão 2. Também, nestes casos pode acontecer que existem 2 módulos irredutíveis V^1 e V^2 com $V_\chi^i \neq 0$, $i = 1, 2$. Tais exemplos são exibidos em [F86]. Mas para caracteres críticos é possível estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 2.5.9. *Se χ é um carácter crítico, existe um único módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível V não-regular tal que $V_\chi \neq 0$.*

Para finalizar o capítulo vamos mostrar que temos uma classificação completa dos módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis genéricos.

Por enquanto, para cada carácter χ genérico conseguimos construir um módulo irredutível V tal que $V_\chi \neq 0$. Agora vamos usar o Teorema 2.5.8 para mostrar tal módulo é único.

Teorema 2.5.10. *Sejam V um módulo de Gelfand-Tsetlin genérico, λ um peso de V e $[L]$ uma tabela com peso λ; então:*

1. *O operador $A = E_{12}E_{21}$ age em uma tabela $[L]_{(i,-i,0)} \in V_\lambda$ como multiplicação pelo escalar $\mu_i := -(x + i - z - k)(y - i - z - k)$.*

2. $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \bigcap Spec(A_\lambda)$ *são todos os diferentes autovalores do operador* A *quando restrito a* V_λ.

3. $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \bigcap Spec(A_\lambda)$ *forma uma cadeia conectada regular de autovalores de* A.

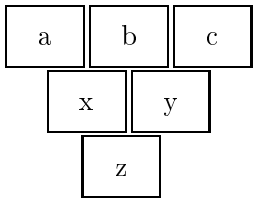
Demonstração. Só precisamos lembrar que V é genérico e portanto a tabela $[L]$ é também genérica (isto é, $x - y \neq 0$). O resto da demonstração segue de um cálculo directo usando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin. □

Corolário 2.5.11. *Cada carácter genérico admite uma única extensão a um módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível.*

Capítulo 3

Blocos Genéricos

Os caracteres genéricos estão em correspondência com tabelas da forma:

$[L]:=$ 

onde $x-y \notin \mathbb{Z}$. Se $[L]$ é uma tabela associada com um carácter $\chi([L])$, denotamos por $\chi([L])_{(m,n,k)}$ o carácter associado com a tabela $[L]_{(m,n,k)}$. Pelo teorema 1.1.3 faz sentido a seguinte definição:

Definição 3.0.12. *Dada uma tabela genérica $[L]$ o **bloco associado com** $[L]$ é o conjunto de todos os módulos de Gelfand-Tsetlin V tais que o suporte de Gelfand-Tsetlin de V esta contido no conjunto $\{\chi([L])_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$.*

Pelo Teorema 2.5.8, dado um carácter genérico χ, existe um único módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível que contém um vetor com tal carácter. Por tanto, na descrição de todos os possíveis blocos, vamos descrever todos os módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis que contêm vetores com caracteres genéricos.

Neste capítulo, para cada tipo de tabela genérica possível, vamos usar os resultados obtidos no capítulo anterior para descrever o bloco associado; a descrição vai incluir todos os módulos irredutíveis no bloco junto com as respectivas dimensões dos espaços de peso e a correspondente decomposição do bloco, no sentido da seguinte definição.

Definição 3.0.13. *Sejam $M := M_0$ e $M_1, \ldots, M_k$ módulos sobre $\mathfrak{g}$; vamos dizer que $M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_k$ é uma **decomposição** de M se; $Q_0 := M_0$, M_i é um submódulo maximal de Q_{i-1}, $Q_i := Q_{i-1}/M_i$ para $i = 1, \ldots, k$ e $M_k = Q_{k-1}$.*

Na descrição das bases vamos usar a seguinte notação:

Notação 3.0.14. *Se $\mathcal{B}$ é um conjunto de desigualdades inteiras em m,n,k vamos denotar por $M(\mathcal{B})$ o módulo gerado pelo conjunto de tabelas $\{[T]_{(m,n,k)} : m,n,k$ satisfazem as desigualdades em $\mathcal{B}\}$. Se $M(\mathcal{B})$ é **irredutível** gerado pela tabela $[S]$, vamos denotar tal módulo por $L(\mathcal{B})$ ou por $L([S];\mathcal{B})$ se queremos destacar um gerador $[S]$.*

Observação 3.0.15. *Pela descrição dada no Capítulo 3, sempre é possível escolher uma tabela no bloco tal que as desigualdades que definem cada um dos módulos irredutíveis no bloco é um subconjunto das seguintes:*

$$\begin{cases} m \leq -t & m \leq 0 & n \leq -t \\ k \leq m & k \leq n & n \leq 0 \\ m > -t & n > -t & m > 0 \\ n > 0 & k > m & k > n \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

3.1 Descrição dos blocos genéricos

Para cada bloco vamos dar bases para os módulos irredutíveis, descrição dos espaços de peso junto com as correspondentes multiplicidades dos espaços de peso e a decomposição em irredutíveis do bloco.

(1) Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	b	c
x	y	
z		

O bloco associado com $[L]$ está composto por 1 módulo irredutível com espaços de peso de dimensão infinita e base

$$L_1 := \{[L]_{(m,n,k)} : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	b	c
x	y	
x		

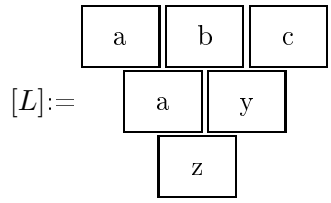
O bloco associado com $[L]$ está composto por 2 módulos irredutíveis com espaços de peso de dimensão infinita. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

$$L_1 = L\left(\{k \leq m \quad\right); L_2 = L\left(\{k > m \quad\right)$$

Com decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_2$$

(3) Se consideramos a seguinte tabela:



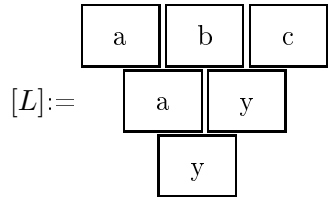
O bloco associado com $[L]$ está composto por 2 módulos irredutíveis com espaços de peso de dimensão infinita. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

$$L_1 = L\left(\left\{m \leq 0 \quad\right); L_2 = L\left(\left\{m > 0 \quad\right)\right.\right.$$

Com decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_2$$

(4) Se consideramos a seguinte tabela:



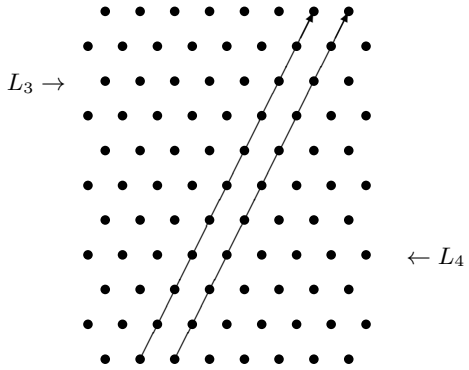
O bloco associado com $[L]$ está composto por 4 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq 0 \\ k \leq n \end{Bmatrix}\right); L_2 = L\left(\begin{Bmatrix} m > 0 \\ k > n \end{Bmatrix}\right)$$

ii) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{Bmatrix} m > 0 \\ k \leq n \end{Bmatrix}\right); L_4 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq 0 \\ k > n \end{Bmatrix}\right)$$



iii) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_3 \bigoplus L_4 \longrightarrow L_2$$

(5) Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	b	c
a	y	
a		

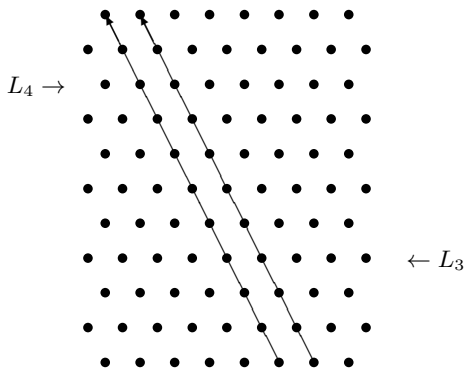
O bloco associado com $[L]$ está composto por 4 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$

ii) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$



iii) Decomposição:

$$L_4 \longrightarrow L_1 \bigoplus L_2 \longrightarrow L_3$$

(6) Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]=$

a	b	c
a	b	
a		

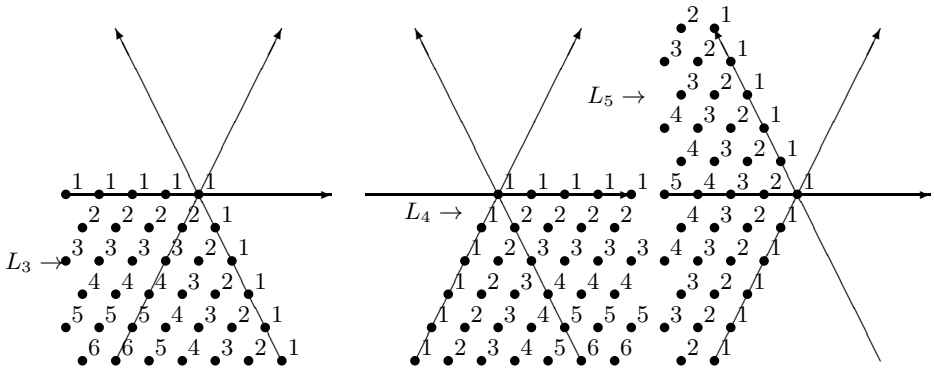
O bloco associado com $[L]$ está composto por 8 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) 2 módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

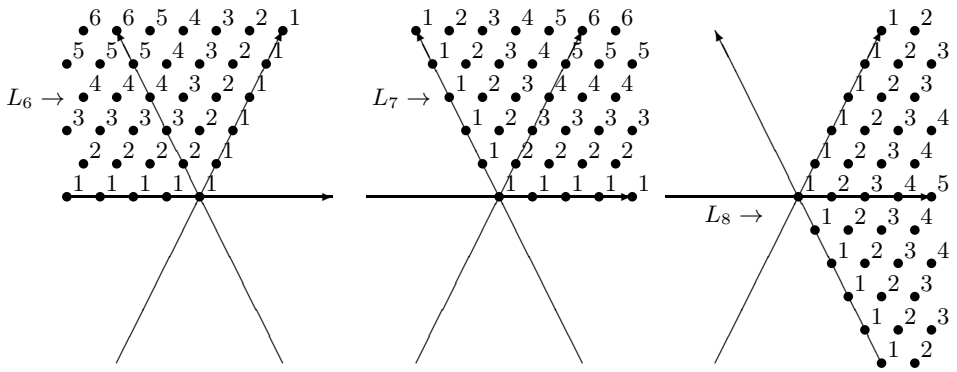
$$L_1 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$

ii) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_5 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$



$$L_6 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_7 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_8 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$



iii) Decomposição:

$$L_3 \longrightarrow L_1 \bigoplus L_4 \bigoplus L_5 \longrightarrow L_2 \bigoplus L_6 \bigoplus L_8 \longrightarrow L_7$$

Demonstração. Se denotamos por M o módulo gerado pelo conjunto de tabelas $\{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in \mathbb{Z}\}$, vamos mostrar que L_3 é um submódulo irredutível de M, depois que L_1, L_4, L_5 são submódulos irredutíveis de $M_1 := M/L_3$, que L_2, L_6, L_8 são submódulos irredutíveis de $M_2 := M_1/(L_1 \oplus L_4 \oplus L_5)$ e finalmente que $L_7 = M_2/(L_2 \oplus L_6 \oplus L_8)$ é um módulo irredutível.

- Usando o Teorema 2.2.14 vemos que, L_3 (respectivamente $L_1, L_4, L_5, L_2, L_6, L_8$ e L_7) é um módulo irredutível que contém a tabela $[L]$ (respectivamente $L_{(1,0,1)}$, $L_{(0,0,1)}$, $L_{(0,1,0)}$, $L_{(0,1,1)}$,$L_{(1,1,1)}$, $L_{(1,0,2)}$ e $L_{(1,1,2)}$)
- Aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin a uma tabela da forma $[L]_{(m,n,k)}$ obtemos:

$$(*) \begin{cases} E_{12}([L]_{(m,n,k)}) = -(m-k)(b+n-a-k)[L]_{(m,n,k+1)} \\ E_{21}([L]_{(m,n,k)}) = [L]_{(m,n,k-1)} \\ E_{32}([L]_{(m,n,k)}) = \frac{(m-k)}{(a+m-b-n)}[L]_{(m-1,n,k)} - \frac{(b+n-a-k)}{(a+m-b-n)}[L]_{(m,n-1,k)} \\ E_{23}([L]_{(m,n,k)}) = \frac{(-m)(b-a-m)(c-a-m)}{(a+m-b-n)}[L]_{(m+1,n,k)} \\ \qquad\qquad - \frac{(a-b-n)(-n)(c-b-n)}{(a+m-b-n)}[L]_{(m,n+1,k)} \end{cases}$$

- Vamos ver que L_3 é invariante pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin. Seja $[L]_{(m,n,k)} \in L_3$; então $m \leq 0, n \leq 0$ e $k \leq m$, aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin $(*)$ obtemos combinações de tabelas em L_3 e para os casos $m = 0, n = 0$ e $k = m$ os coeficientes das tabelas $[L]_{(1,n,k)}, [L]_{(m,1,k)}$ e $[L]_{(m-1,n,m)}$ (as quais não são tabelas em L_3) são zero. Assim L_3 é um submódulo de M.
- Agora vamos mostrar que L_1, L_4 e L_5 são invariantes (modulo L_3) pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin. Se consideramos $[L]_{(m,n,k)} \in L_1$ isto é, $m > 0, n \leq 0$ e $k \leq m$, aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin $(*)$ aos casos $m = 1, n = 0$ e $k = m$ temos $[L]_{(0,n,k)} = 0$ modulo L_3 e os coeficientes de $[L]_{(m,1,k)}$ e $[L]_{(m-1,n,m)}$ são zero. Assim, temos combinações lineares de tabelas em L_1 modulo L_3. Se consideramos $[L]_{(m,n,k)} \in L_4$ (i.e. $m \leq 0, n \leq 0$ e $k > m$) quando aplicamos as fórmulas de Gelfand-Tsetlin aos casos $m = 0, n = 0$ e $k = m + 1$ obtemos que os coeficientes de $[L]_{(1,n,k)}$ e $[L]_{(m,1,k)}$ são zero e

$[L]_{m,n,m} = 0$ modulo L_3, assim, obtemos combinações lineares de tabelas em L_4 modulo L_3. Considerando $[L]_{(m,n,k)} \in L_5$ (i.e. $m \leq 0, n > 0$ e $k \leq m$) quando aplicamos as fórmulas de Gelfand-Tsetlin aos casos $m = 0,\ n = 1$ e $k = m$ o coeficiente de $[L]_{(1,n,k)}$ é zero, $[L]_{(m,0,k)} = 0$ modulo L_3 e o coeficiente de $[L]_{(m,n,k+1)}$ é zero, obtendo assim combinações lineares de tabelas em L_5 modulo L_3. Portanto, L_1, L_4 e L_5 são submódulos irredutíveis de $M_1 := M/L_3$.

- Agora vamos mostrar que L_2, L_6 e L_8 são invariantes (modulo $L_1 \oplus L_4 \oplus L_5$) pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin. Seja $[L]_{(m,n,k)} \in L_2$ (i.e. $m \leq 0,\ n > 0$ e $k > m$) aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin $(*)$ aos casos $m = 0, n = 1$ e $k = m + 1$ temos que: o coeficiente de $[L]_{(1,n,k)}$ é zero, a tabela $[L]_{(m,0,k)}$ é zero (modulo L_4) e a tabela $[L]_{(m,n,m)}$ é zero (modulo L_5), obtendo assim combinações lineares de tabelas em L_2. Seja $[L]_{(m,n,k)} \in L_6$ (i.e. $m > 0,\ n > 0$ e $k \leq m$) aplicando as fórmulas de Gelfand-Tsetlin $(*)$ aos casos $m = 1, n = 1$ e $k = m$ temos que: $[L]_{(0,n,k)}$ é zero (modulo L_5), a tabela $[L]_{(m,0,k)}$ é zero (modulo L_4) e o coeficiente da tabela $[L]_{(m,n,m+1)}$ é zero, portanto, pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin obtemos combinações lineares de tabelas em L_6. Seja $[L]_{(m,n,k)} \in L_8$ (i.e. $m > 0,\ n \leq 0$ e $k > m$) quando aplicamos as fórmulas de Gelfand-Tsetlin $(*)$ aos casos $m = 1, n = 0$ e $k = m + 1$temos que $[L]_{(0,n,k)}$ é zero (modulo L_4), o coeficiente da tabela $[L]_{(m,1,k)}$ é zero e a tabela $[L]_{(m,n,m)}$ é zero (modulo L_1), da onde L_8 é invariante pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin. Portanto, L_2, L_6 e L_8 são submódulos irredutíveis de $M_2 := M_1/(L_1 \oplus L_4 \oplus L_5)$.
- Finalmente vamos mostrar que L_7 é invariante pela ação das fórmulas de Gelfand-Tsetlin (modulo $L_2 \oplus L_6 \oplus L_8$). Seja $[L]_{m,n,k} \in L_7$ (i.e. $m > 0,\ n > 0$ e $k > m$) quando aplicamos as fórmulas de Gelfand-Tsetlin aos casos $m = 1,\ n = 1$ e $k = m+1$ obtemos $[L]_{(0,n,k)} = 0$ (modulo L_2), $[L]_{(m,0,k)} = 0$ (modulo L_8) e $[L]_{(m,n,m)} = 0$ (modulo L_6). Assim, L_7 é um submódulo irredutível de $M_3/(L_2 \oplus L_6 \oplus L_8)$.

□

(7) Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	b	c
a	b	
z		

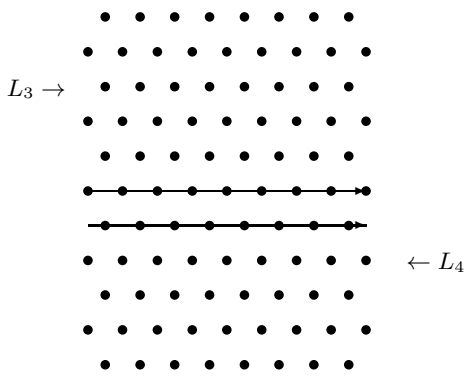
O bloco associado com $[L]$ está composto por 4 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq 0 \\ n > 0 \end{Bmatrix}\right); L_2 = L\left(\begin{Bmatrix} m < 0 \\ n \leq 0 \end{Bmatrix}\right)$$

ii) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \end{cases}\right)$$

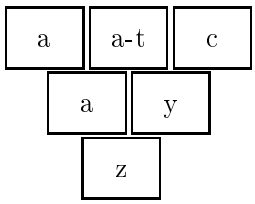


iii) Decomposição:

$$L_4 \longrightarrow L_1 \bigoplus L_2 \longrightarrow L_3$$

(8) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$, consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=



O bloco associado com $[L]$ está composto por 3 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m > 0 \end{cases}\right)$$

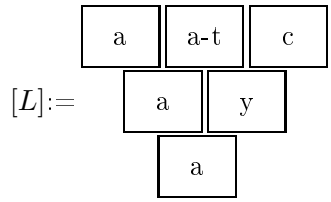
ii) 1 módulo denso com espaços de peso de dimensão t:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \end{cases}\right)$$

iii) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_2$$

(9) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$ consideramos a seguinte tabela:



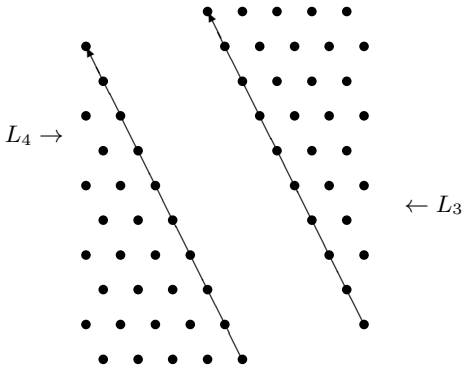
O bloco associado com $[L]$ está composto por 6 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ k > m \end{cases}\right)$$

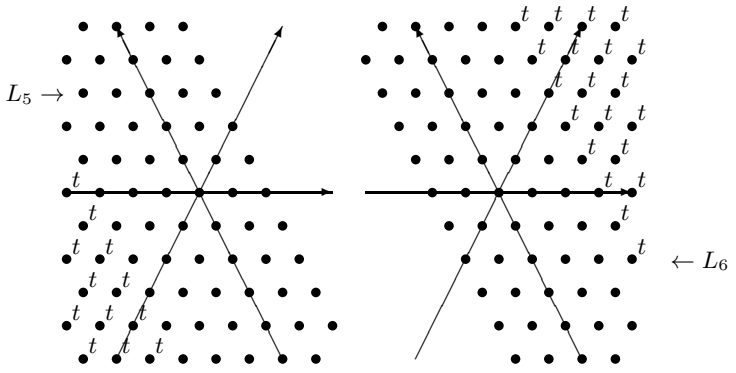
ii) Dois módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ k \leq m \end{cases}\right)$$



iii) Dois módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas (no máximo t):

$$L_5 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_6 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$



iv) Decomposição:

$$L_4 \longrightarrow L_2 \bigoplus L_5 \longrightarrow L_1 \bigoplus L_6 \longrightarrow L_3$$

(10) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$ consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	a-t	c
a	y	
y		

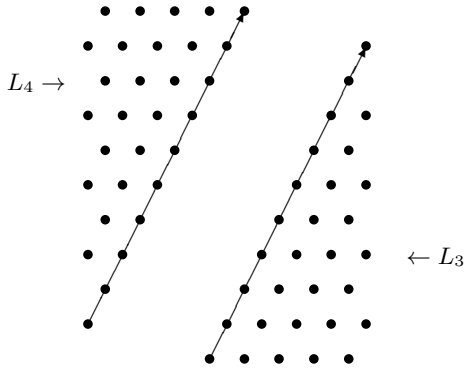
O bloco associado com $[L]$ está composto por 6 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ k \leq n \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k > n \end{cases}\right)$$

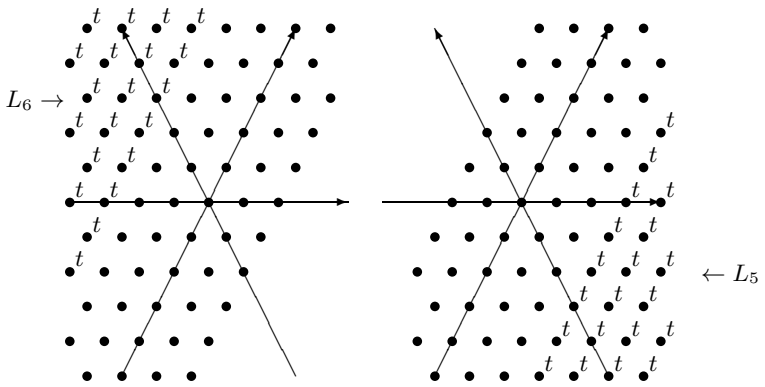
ii) Dois módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ k > n \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ k \leq n \end{cases}\right)$$



iii) Dois módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas (no máximo t):

$$L_5 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ k > n \end{cases}\right); L_6 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ k \leq n \end{cases}\right)$$



iv) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_4 \bigoplus L_6 \longrightarrow L_3 \bigoplus L_5 \longrightarrow L_2$$

(11) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$ consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=

a	a-t	b
a	b	
a		

O bloco associado com $[L]$ está composto por 12 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

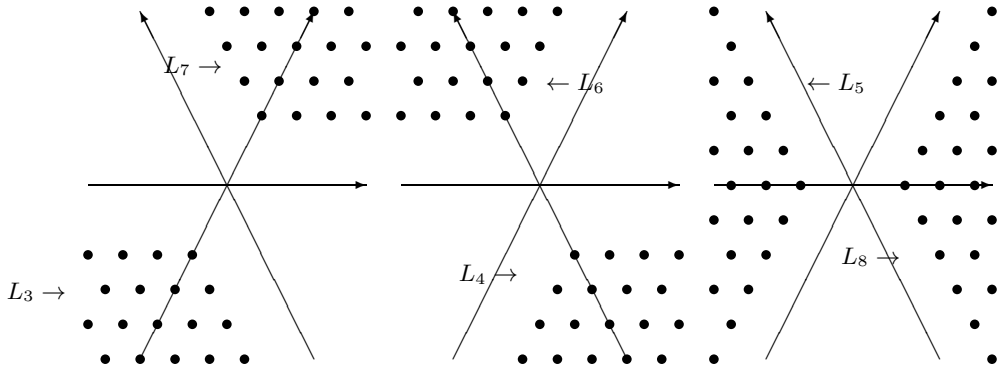
i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

ii) 6 módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

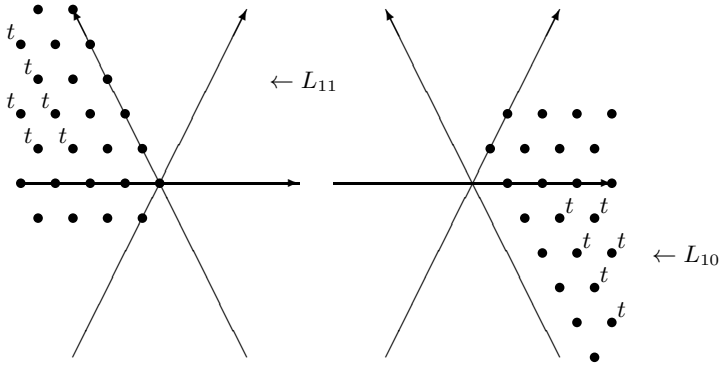
$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_5 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right);$$

$$L_6 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_7 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_8 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$

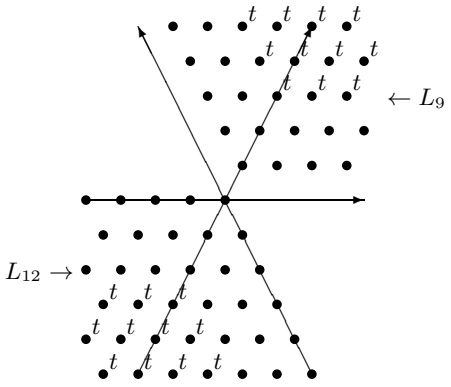


iii) 4 módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas (no máximo t):

$$L_{10} = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_{11} = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$



$$L_9 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_{12} = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

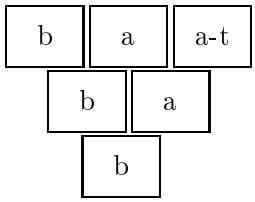


iv) Decomposição:

$$L_3 \longrightarrow L_4 \bigoplus L_5 \bigoplus L_{12} \longrightarrow L_1 \bigoplus L_2 \bigoplus L_{10} \bigoplus L_{11} \longrightarrow L_6 \bigoplus L_8 \bigoplus L_9 \longrightarrow L_7$$

(12) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$ consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=



O bloco associado com $[L]$ está composto por 12 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

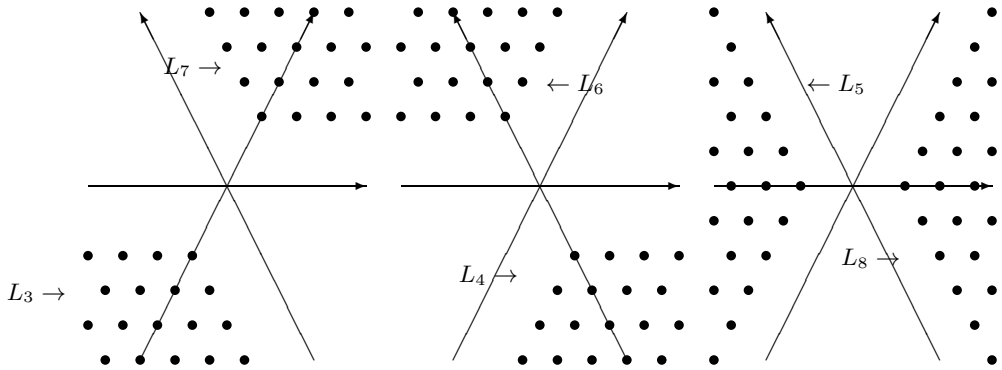
i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq -t \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

ii) 6 módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

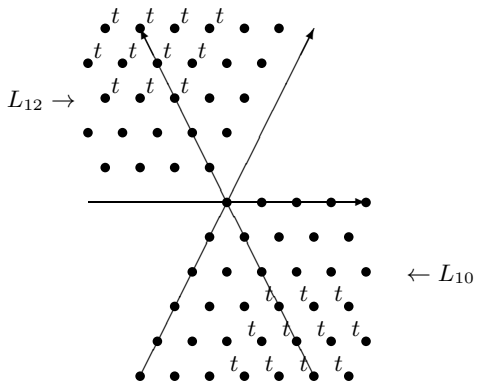
$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq -t \\ k \leq m \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq -t \\ k > m \end{cases}\right); L_5 = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

$$L_6 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right); L_7 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_8 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq -t \\ k > m \end{cases}\right)$$

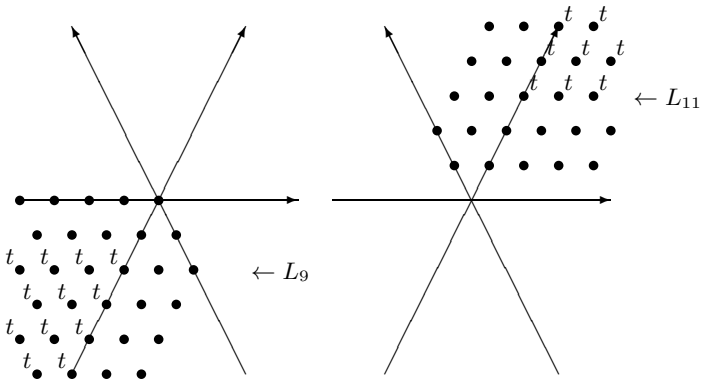


iii) 4 módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas (no máximo t):

$$L_{10} = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ -t < n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_{12} = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ -t < n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$



$$L_{11} = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ -t < n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_9 = L\left(\begin{cases} -t < n \leq 0 \\ m \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

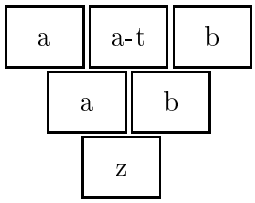


iv) Decomposição:

$$L_3 \longrightarrow L_2 \bigoplus L_4 \bigoplus L_9 \longrightarrow L_5 \bigoplus L_8 \bigoplus L_{10} \bigoplus L_{12} \longrightarrow L_1 \bigoplus L_6 \bigoplus L_{11} \longrightarrow L_7$$

(13) Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$ consideramos a seguinte tabela:

$[L]$:=



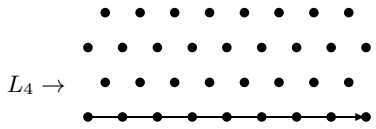
O bloco associado com $[L]$ está composto por 6 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

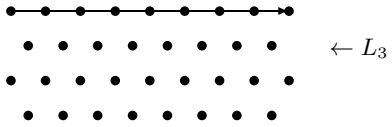
i) Módulos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n > 0 \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \end{cases}\right)$$

ii) Dois módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

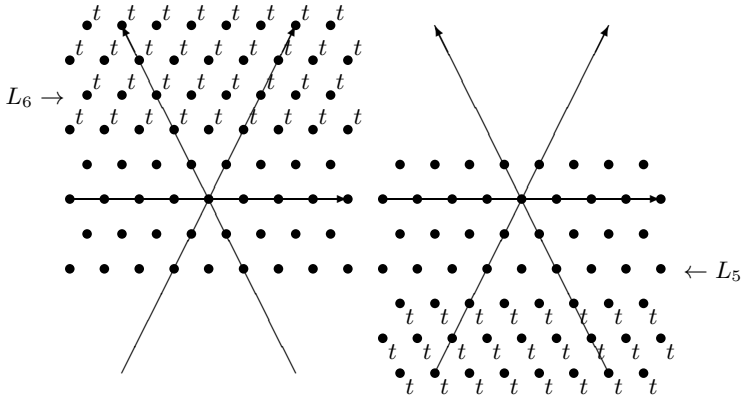
$$L_4 = L\left(\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases}\right); L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq -t \\ n \leq 0 \end{cases}\right)$$





iii) Dois módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas (no máximo t):

$$L_5 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n \leq 0 \end{cases}\right); L_6 = L\left(\begin{cases} -t < m \leq 0 \\ n > 0 \end{cases}\right)$$



iv) Decomposição:

$$L_3 \longrightarrow L_1 \bigoplus L_5 \longrightarrow L_2 \bigoplus L_6 \longrightarrow L_4$$

Capítulo 4

Fórmulas de Gelfand-Tsetlin Singulares

No capítulo anterior foi feita uma descrição dos blocos genéricos, mas o nosso objetivo principal, que é a classificação de todos os módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis para $\mathfrak{sl}(3)$ ainda está longe. Os módulos de dimensão finita não podem ser encaixados em nenhum bloco genérico, além disso, em [F86] são dados exemplos de módulos de Gelfand-Tsetlin sobre $\mathfrak{sl}(3)$ com caracteres de Gelfand-Tsetlin de dimensão 2; mas nos módulos descritos até agora, cada carácter é de dimensão 1 e admite uma única extensão a um módulo irredutível. O nosso principal impedimento é que as fórmulas de Gelfand-Tsetlin não podem ser aplicadas em tabelas críticas.

Neste capítulo vamos obter, a partir das fórmulas de Gelfand-Tsetlin, fórmulas para a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ em tabelas singulares (tabelas tais que $l_{21} - l_{22} \in \mathbb{Z}$).

4.1 Tabelas derivadas

Podemos expressar as tabelas singulares como limite de tabelas genéricas como segue:

$$[L]_{(m,n,k)} := [L](x,x)_{(m,n,k)} := \lim_{y \to x} [L](x,y)_{(m,n,k)}$$

onde

$$[L]_{(\mathrm{m,n,k})}(x,y) := \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x+m & y+n \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline z+k \\ \hline \end{array}$$

Definição 4.1.1. *Para cada $m, n, k \in \mathbb{Z}$, vamos definir **tabelas derivadas** como o seguinte limite formal:*

$$[L]'_{(m,n,k)} := \lim_{y \to x} \left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x - y} \right)$$

Proposição 4.1.2. *Sejam $[L] := [L]_{(m,n,k)} = [L](x,x)_{(m,n,k)}$ uma tabela singular e $[L]' := [L]'_{(m,n,k)}$ a tabela definida anteriormente. Se o carácter de Gelfand-Tsetlin associado com $[L]$ é χ então, $[L]'$ tem o mesmo carácter de Gelfand-Tsetlin.*

Demonstração. Lembremos que se $[T]$ é uma tabela em um bloco genérico, os geradores de Γ agem em $[T]$ como:

$$\begin{cases} c_{11}([T]) = z[T] \\ c_{21}([T]) = (x+y+1)[T] \\ c_{22}([T]) = \gamma_{22}(x+m, y+n)[T] := ((x+m)^2 + (y+n)^2 + x + m + y + n)[T] \\ c_{31}([T]) = \gamma_{33}(a,b,c).[T] := (a+b+c+3)[T] \\ c_{32}([T]) = \gamma_{32}(a,b,c).[T] := (a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+1)[T] \\ c_{33}([T]) = \gamma_{33}(a,b,c).[T] := (a^3+b^3+c^3+4a^2+4b^2+4c^2+a+b+c+2)[T] \end{cases}$$

Então, quando passamos no limite $y \to x$, para tabelas da forma $[L] := [L](x,x)_{(m,n,k)}$ os geradores de Γ agem como:

$$\begin{cases} c_{11}([L]) = (z+k)[L] \\ c_{21}([L]) = (2x+m+n+1)[L] \\ c_{22}([L]) = \gamma_{22}(x+m, x+n)[L] := ((x+m)^2 + (x+n)^2 + (2x+m+n))[L] \\ c_{31}([L]) = \gamma_{33}(a,b,c).[L] := (a+b+c+3)[L] \\ c_{32}([L]) = \gamma_{32}(a,b,c).[L] := (a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+1)[L] \\ c_{33}([L]) = \gamma_{33}(a,b,c).[L] := (a^3+b^3+c^3+4a^2+4b^2+4c^2+a+b+c+2)[L] \end{cases}$$

Para $i = 1, 2, 3$ temos que:

$$\begin{aligned} c_{3i}[L]' &= \lim_{y \to x} \left(\frac{c_{3i}[L](x,y)_{(m,n,k)} - c_{3i}[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y} \right) \\ &= \gamma_{3i}(a,b,c) \lim_{y \to x} \left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y} \right) \\ &= \gamma_{3i}(a,b,c)[L]' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_{21}[L]' &= \lim_{y\to x}\left(\frac{c_{21}[L](x,y)_{(m,n,k)} - c_{21}[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{(x+m+y+n+1)[L](x,y)_{(m,n,k)} - (x+n+y+m+1)[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= \lim_{y\to x}(x+m+y+n+1)\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= (2x+m+n+1)[L]'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{11}[L]' &= \lim_{y\to x}\left(\frac{c_{11}[L](x,y)_{(m,n,k)} - c_{11}[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= (z+k)\lim_{y\to x}\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= (z+k)[L]'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{22}[L]' &= \lim_{y\to x}\left(\frac{c_{22}[L](x,y)_{(m,n,k)} - c_{22}[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{\gamma_{22}(x+m,y+n)[L](x,y)_{(m,n,k)} - \gamma_{22}(x+n,y+m)[L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\\
&= \lim_{y\to x}\gamma_{22}(x+n,y+m)\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y} + \frac{2(x-y)(m-n)[L](x,y)_{(m,n,k)}}{x-y}\right)\\
&= \gamma_{22}(x+n,x+m)[L]' + 2(m-n)[L].
\end{aligned}
$$

Portanto, $(c_{22} - \gamma_{22}(x+m,x+n))^2([L]') = 0$; pois $c_{22}[L] = \gamma_{22}(x+m,x+n)[L]$.

□

4.2 Fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares

Graças à introdução das tabelas derivadas, agora é possível usar as fórmulas de Gelfand-Tsetlin para descrever a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ em tabelas críticas (tabelas com $x = y$). De fato, vamos dar fórmulas explícitas para a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ em tabelas da forma $[L]_{(m,n,k)}$, onde $[L]$ é uma tabela crítica qualquer

$[L]:=$

a	b	c
x	x	
z		

- $e_{21}([L]_{(m,n,k)}) = [L]_{(m,n,k-1)}$.
- $e_{12}([L]_{(m,n,k)}) = -(x+m-z-k)(x+n-z-k)[L]_{(m,n,k+1)}$.
- $e_{31}([L]_{(m,n,k)}) = \begin{cases} [L]'_{(m-1,m,k-1)} & \text{se } n = m \\ \frac{1}{m-n}\left([L]_{(m-1,n,k-1)} - [L]_{(m,n-1,k-1)}\right) & \text{se } m \neq n \end{cases}$

- $e_{32}([L]_{(m,n,k)}) = \begin{cases} [L]_{(m-1,m,k)} + (x+m-z-k)[L]'_{(m-1,m,k)} & \text{se } m = n \\ \frac{x+m-z-k}{m-n}[L]_{(m-1,n,k)} - \frac{x+n-z-k}{m-n}[L]_{(m,n-1,k)} & \text{se } m \neq n \end{cases}$

- $e_{23}([L]_{(m,n,k)}) =$
$\begin{cases} \text{-((a-x-m)(b-x-m)+(a-x-m)(c-x-m)+(b-x-m)(c-x-m))}[L]_{(m,m+1,k)} \\ \text{-(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}[L]'_{(m,m+1,k)} & \text{se } m = n \\ \\ \frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}{(m-n)}[L]_{(m+1,n,k)} - \frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)}{(m-n)}[L]_{(m,n+1,k)} & \text{se } m \neq n \end{cases}$

- $e_{13}([L]_{(m,n,k)}) =$
$\begin{cases} (\{\text{(a-x-m)(b-x-m)+(a-x-m)(c-x-m)+(b-x-m)(c-x-m)}\}\text{(x+m-z-k)} \\ +\text{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}[L]_{(m+1,m,k+1)} - \\ \text{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)(x+m-z-k)}[L]'_{(m+1,m,k+1)} & \text{se } n = m \\ \\ -\frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)(x+n-z-k)}{(m-n)}[L]_{(m+1,n,k+1)} \\ +\frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)(x+m-z-k)}{(m-n)}[L]_{(m,n+1,k+1)} & \text{se } m \neq n \end{cases}$

Pela definição das tabelas derivadas, temos que $[L]'_{(m,m,k)} := 0$. Portanto, vamos considerar $m \neq n$; a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ nas tabelas derivadas induzida pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin é dada por:

- $e_{21}([L]'_{(m,n,k)}) = [L]'_{(m,n,k-1)}$.

- $e_{12}([L]'_{(m,n,k)}) = -(x+m-z-k)(x+n-z-k)[L]'_{(m,n,k+1)} + (m-n)[L]_{(m,n,k+1)}$.

- $e_{31}([L]'_{(m,n,k)}) = \frac{1}{m-n}\left([L]'_{(m-1,n,k-1)} - [L]'_{(m,n-1,k-1)}\right) - \frac{2}{(m-n)^2}\left([L]_{(m-1,n,k-1)} - [L]_{(m,n-1,k-1)}\right)$.

- $e_{32}([L]'_{(m,n,k)}) = \frac{x+m-z-k}{m-n}[L]'_{(m-1,n,k)} - \frac{x+n-z-k}{m-n}[L]'_{(m,n-1,k)} \left(\frac{1}{m-n} - \frac{2(x+m-z-k)}{(m-n)^2}\right)[L]_{(m-1,n,k)} - \left(\frac{1}{n-m} - \frac{2(x+n-z-k)}{(n-m)^2}\right)[L]_{(m,n-1,k)}$.

- $e_{23}([L]'_{(m,n,k)}) = -\frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}{n-m}[L]'_{(m+1,n,k)} - \frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)}{m-n}[L]'_{(m,n+1,k)} - \left(\frac{(a-x-n)(b-x-n)+(a-x-n)(c-x-n)+(b-x-n)(c-x-n)}{m-n} - 2\frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)}{(m-n)^2}\right)[L]_{(m,n+1,k)} + \left(\frac{(a-x-m)(b-x-m)+(a-x-m)(c-x-m)+(b-x-m)(c-x-m)}{n-m} - 2\frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}{(m-n)^2}\right)[L]_{(m+1,n,k)}$

- $e_{13}([L]'_{(m,n,k)}) = -\frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)(x+n-z-k)}{m-n}[L]'_{(m+1,n,k+1)} + \frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)(x+m-z-k)}{m-n}[L]'_{(m,n+1,k+1)} - \{\frac{\{(a-x-m)(b-x-m)+(a-x-m)(c-x-m)+(b-x-m)(c-x-m)\}(x+n-z-k)}{n-m} + \frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)}{n-m} - 2\frac{(a-x-m)(b-x-m)(c-x-m)(x+n-z-k)}{(m-n)^2}\}[L]_{(m+1,n,k+1)} +$

$$\{\frac{\{(a-x-n)(b-x-n)+(a-x-n)(c-x-n)+(b-x-n)(c-x-n)\}(x+m-z-k)}{m-n}+\frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)}{m-n}$$
$$-2\frac{(a-x-n)(b-x-n)(c-x-n)(x+m-z-k)}{(m-n)^2}\}[L]_{(m,\,n+1,\,k+1)}$$

Demonstração. Vamos escrever alguns dos calculos, os outros podem ser feitos usando o mesmo tipo de argumento.

(*I*) Se $p(r,s,t) := r-t$, $X := x+m$, $Y := y+n$ e $Z := z+k$ podemos reescrever a ação de E_{32} em tabelas genéricas como:

$$E_{32}([L](x,y)_{(m,n,k)}) = \frac{p(X,Y,Z)[L](x,y)_{(m-1,n,k)} - p(Y,X,Z)[L](x,y)_{(m,n-1,k)}}{X-Y}$$

Assim, para tabelas singulares podemos escrever a ação de E_{32} como segue:

$$E_{32}([L](x,x)_{(m,n,k)}) = E_{32}\left(\lim_{y\to x}[L](x,y)_{(m,n,k)}\right) := \lim_{y\to x} E_{32}([L](x,y)_{(m,n,k)})$$
$$= \lim_{y\to x}\left(\frac{p(X,Y,Z)[L](x,y)_{(m-1,n,k)} - p(Y,X,Z)[L](x,y)_{(m,n-1,k)}}{X-Y}\right)$$

- Se $m \neq n$, $y \to x$ implica $X - Y \to m - n \neq 0$. Da onde:
  $E_{32}([L](x,x)_{(m,n,k)}) =$
  $\frac{p(x+m,x+n,z+k)[L](x,x)_{(m-1,n,k)} - p(x+n,x+m,z+k)[L](x,y)_{(m,n-1,k)}}{m-n}$
  $= \frac{(x+m-z-k)[L](x,x)_{(m-1,n,k)} - (x+n-z-k)[L](x,x)_{(m,n-1,k)}}{m-n}$
- No caso $m = n$, $y \to x$ implica $Y \to X$, assim:

$$E_{32}([L](x,x)_{(m,m,k)}) =$$
$$= \lim_{y\to x}\left(\frac{p(X,Y,Z)([L](x,y)_{(m-1,m,k)} - [L](x,y)_{(m,m-1,k)})}{X-Y}\right) +$$
$$\lim_{y\to x}\frac{(p(X,Y,Z) - p(Y,X,Z))[L](x,y)_{(m,m-1,k)}}{X-Y}$$
$$= \lim_{y\to x}\left(p(X,Y,Z)\frac{([L](x,y)_{(m-1,m,k)} - [L](x,y)_{(m,m-1,k)})}{x-y}\right) +$$
$$\lim_{Y\to X}\left(\frac{p(X,Y,Z) - p(Y,Y,Z) + p(Y,Y,Z) - p(Y,X,Z)}{X-Y}\right)[L](x,y)_{(m,m-1,k)}$$
$$= p(X,X,Z)[L]'_{(m-1,m,k)} - \left(\frac{\partial p}{\partial r}(X,X,Z) - \frac{\partial p}{\partial s}(X,X,Z)\right)[L](x,x)_{(m,m-1,k)}$$
$$= [L]_{(m-1,m,k)} + (x+m-z-k)[L]'_{(m-1,m,k)}$$

Então,

$$E_{32}([L](x,x)_{(m,n,k)}) = \begin{cases} [L]_{(m-1,m,k)} + (x+m-z-k)[L]'_{(m-1,m,k)} & \text{if } m = n \\ \frac{x+m-z-k}{m-n}[L]_{(m-1,n,k)} - \frac{x+n-z-k}{m-n}[L]_{(m,n-1,k)} & \text{if } m \neq n \end{cases}$$

(II) Para m, n, k inteiros fixos definimos $q_{m,n}(r,s,t) := \frac{r+m-t-k}{r+m-s-n}$. Da onde reescrevemos a ação de E_{32} em tabelas genéricas como:

$$E_{32}([L](x,y)_{(m,n,k)}) = q_{m,n}(x,y,z)[L](x,y)_{(m-1,n,k)} + q_{n,m}(y,x,z)[L](x,y)_{(m,n-1,k)}$$

Assim, a ação em tabelas derivadas é dada por:

$$\begin{aligned}
&E_{32}([L]'_{(m,n,k)}) = E_{32}\left(\lim_{y\to x}\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\right) \\
&:= \lim_{y\to x}\left(\frac{E_{32}([L](x,y)_{(m,n,k)}) - E_{32}([L](x,y)_{(n,m,k)})}{x-y}\right) \\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{1}{x-y}\right)\{q_{m,n}(x,y,z)[L](x,y)_{(m-1,n,k)} + q_{n,m}(y,x,z)[L](x,y)_{(m,n-1,k)} - \\
&\quad - q_{n,m}(x,y,z)[L](x,y)_{(n-1,m,k)} - q_{m,n}(y,x,z)[L](x,y)_{(n,m-1,k)}\} \\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{1}{x-y}\right)\{q_{m,n}(x,y,z)([L](x,y)_{(m-1,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m-1,k)}) + \\
&\quad (q_{m,n}(x,y,z) - q_{m,n}(y,x,z))[L](x,y)_{(n,m-1,k)} + \\
&\quad q_{n,m}(y,x,z)([L](x,y)_{(m,n-1,k)} - [L](x,y)_{(n-1,m,k)}) - \\
&\quad (q_{n,m}(y,x,z) - q_{n,m}(x,y,z))[L](x,y)_{(n-1,m,k)}\} \\
&= \lim_{y\to x}\left\{q_{m,n}(x,y,z)\left(\frac{[L](x,y)_{(m-1,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m-1,k)}}{x-y}\right)\right\} + \\
&\quad \lim_{y\to x}\left\{\left(\frac{q_{m,n}(x,y,z) - q_{m,n}(x,x,z) + q_{m,n}(x,x,z) - q_{m,n}(y,x,z)}{x-y}\right)[L](x,y)_{(n,m-1,k)}\right\} + \\
&\quad \lim_{y\to x}\left\{q_{n,m}(y,x,z)\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n-1,k)} - [L](x,y)_{(n-1,m,k)}}{x-y}\right)\right\} - \\
&\quad \lim_{y\to x}\left\{\left(\frac{q_{n,m}(y,x,z) - q_{n,m}(x,x,z) + q_{n,m}(x,x,z) - q_{n,m}(x,y,z)}{x-y}\right)[L](x,y)_{(n-1,m,k)}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q_{m,n}(x,x,z)[L]'_{(m-1,n,k)} + \left(\frac{\partial q_{m,n}}{\partial r}(x,x,z) - \frac{\partial q_{m,n}}{\partial s}(x,x,z)\right)[L](x,x)_{(n,m-1,k)} + \\
&\quad q_{n,m}(x,x,z)[L]'_{(m,n-1,k)} + \left(\frac{\partial q_{n,m}}{\partial s}(x,x,z) - \frac{\partial q_{n,m}}{\partial r}(x,x,z)\right)[L](x,x)_{(n-1,m,k)} \\
&= \frac{x+m-z-k}{m-n}[L]'_{(m-1,n,k)} - \frac{x+n-z-k}{m-n}[L]'_{(m,n-1,k)} + \\
&\left(\frac{z+k-x-n}{(m-n)^2} - \frac{(x+m-z-k)}{(m-n)^2}\right)[L]_{(n,m-1,k)} - \left(\frac{z+k-x-m}{(n-m)^2} - \frac{(x+n-z-k)}{(n-m)^2}\right)[L]_{(n-1,m,k)} \\
&= \frac{x+m-z-k}{m-n}[L]'_{(m-1,n,k)} - \frac{x+n-z-k}{m-n}[L]'_{(m,n-1,k)} + \\
&\left(\frac{1}{m-n} - \frac{2(x+m-z-k)}{(m-n)^2}\right)[L]_{(n,m-1,k)} - \left(\frac{1}{n-m} - \frac{2(x+n-z-k)}{(n-m)^2}\right)[L]_{(n-1,m,k)}
\end{aligned}
$$

(III)

$$
\begin{aligned}
&E_{31}([L]'_{(m,n,k)}) = E_{31}\left(\lim_{y\to x}\left(\frac{[L](x,y)_{(m,n,k)} - [L](x,y)_{(n,m,k)}}{x-y}\right)\right) \\
&:= \lim_{y\to x}\left(\frac{E_{31}([L](x,y)_{(m,n,k)}) - E_{31}([L](x,y)_{(n,m,k)})}{x-y}\right) \\
&= \lim_{y\to x}\left(\frac{\frac{[L](x,y)_{(m-1,n,k-1)} - [L](x,y)_{(m,n-1,k-1)}}{x+m-y-n} - \frac{[L](x,y)_{(n-1,m,k-1)} - [L](x,y)_{(n,m-1,k-1)}}{x+n-y-m}}{x-y}\right) \\
&= \lim_{y\to x}\frac{1}{(x-y)}\left(\frac{1}{x+m-y-n} + \frac{1}{x+n-y-m}\right)[L](x,y)_{(m-1,n,k-1)} + \\
&\quad \lim_{y\to x}\frac{[L](x,y)_{(n,m-1,k-1)} - [L](x,y)_{(m-1,n,k-1)}}{(x+n-y-m)(x-y)} - \\
&\quad \lim_{y\to x}\frac{1}{(x-y)}\left(\frac{1}{x+m-y-n} + \frac{1}{x+n-y-m}\right)[L](x,y)_{(n-1,m,k-1)} - \\
&\quad \lim_{y\to x}\frac{[L](x,y)_{(m,n-1,k-1)} - [L](x,y)_{(n-1,m,k-1)}}{(x+m-y-n)(x-y)} \\
&= \frac{-2}{(m-n)^2}[L]_{(m-1,n,k-1)} - \frac{[L]'_{(n,m-1,k-1)}}{m-n} + \\
&\quad \frac{2}{(m-n)^2}[L]_{(n-1,m,k-1)} - \frac{[L]'_{(m,n-1,k-1)}}{m-n}
\end{aligned}
$$

□

Estas fórmulas vão ser chamadas de **fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares** e vamos escreve GTS-fórmulas.

Notação 4.2.1. *Para tabelas críticas temos que:* $[L]_{(m,n,k)} = [L]_{(n,m,k)}$ *e* $[L]'_{(m,n,k)} = -[L]'_{(n,m,k)}$. *Portanto, é possível usar a convenção seguinte: a notação* $[T]_{(m,n,k)}$ *será usada somente quando* $m \leq n$ *e vamos usar* $[T]'_{(m,n,k)}$ *quando* $m > n$.

Para cada tabela crítica $[L]$ definimos $V_{[L]}$ como o espaço vetorial gerado pelo conjunto de tabelas:

$$\{[L]_{(m,n,k)} : m \leq n\} \bigcup \{[L]'_{(m,n,k)} : m > n\}$$

Teorema 4.2.2. *Se $[L]$ é uma tabela crítica. O espaço $V_{[L]}$ munido com a ação de $\mathfrak{gl}(3)$ definida pelas GTS-fórmulas tem estrutura de $\mathfrak{gl}(3)$-módulo.*

Definição 4.2.3. *Para cada tabela singular $[T]$ denotamos por $\chi([T])_{(m,n,k)}$ o carácter associado com $[T]_{(m,n,k)}$ e por $\Theta_{[T]}$ o conjunto $\{\chi([T])_{(m,n,k)} : m, n, k \in \mathbb{Z}\}$. O bloco singular de GT associado com $[T]$ é*

$$\Theta([T]) := \{V \text{ tal que } Supp(V)_{GT} \subset \Theta_{[T]}\}$$

Capítulo 5

Blocos Singulares

Para cada tabela crítica $[T]$ vamos descrever os módulos irredutíveis no bloco singular associado com $[T]$. Para blocos singulares as desigualdades que vamos considerar vão ser subconjuntos do seguinte conjunto de desigualdades:

$$\begin{cases} m \leq n; & m \leq -s; & n \leq -s \\ m > -s; & n > -s; & m > n \\ m \leq -t; & m \leq 0; & n \leq -t \\ k \leq m; & k \leq n; & n \leq 0 \\ m > -t; & n > -t; & m > 0 \\ n > 0; & k > m; & k > n \end{cases}$$

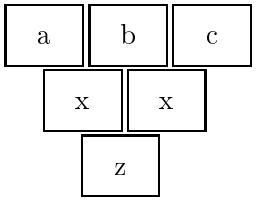
onde $t < s$ são inteiros positivos.

5.1 Descrição dos blocos singulares

Como no caso genérico, vamos supor que a, b, c, x, y, z são números complexos que não satisfazem relações inteiras. A descrição dos blocos genéricos vai incluir bases dos módulos irredutíveis, reticulados de pesos com as correspondentes multiplicidades dos espaços de peso e decomposição.

$(C1)$ Se consideramos a seguinte tabela:

$[T]=$



O bloco associado com $[T]$ está composto por 1 módulo irredutível com espaços de peso de dimensão infinita e a base é dada por:

$$\{[L]_{(m,n,k)} : m, n, k \in \mathbb{Z}\} := \{[L]_{(m,n,k)} : m \leq n\} \bigcup \{[L]'_{(m,n,k)} : m > n\}$$

($C2$) Se consideramos a seguinte tabela:

$[T]=$

a	b	c
x	x	
x		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 2 módulos irredutíveis com espaços de peso de dimensão infinita. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

$$L_1 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq n \\ k \leq n \end{Bmatrix} \bigcup \begin{Bmatrix} m > n \\ k \leq n \end{Bmatrix}\right); L_2 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq n \\ k > n \end{Bmatrix} \bigcup \begin{Bmatrix} m > n \\ k > n \end{Bmatrix}\right)$$

Com decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_2$$

($C3$) Se consideramos a seguinte tabela:

$[T]=$

a	b	c
a	a	
z		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 2 módulos irredutíveis com espaços de peso de dimensão infinita. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

$$L_1 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq n \\ m \leq 0 \end{Bmatrix} \bigcup \begin{Bmatrix} m > n \\ m \leq 0 \end{Bmatrix}\right); L_2 = L\left(\begin{Bmatrix} m \leq n \\ m > 0 \end{Bmatrix} \bigcup \begin{Bmatrix} m > n \\ m > 0 \end{Bmatrix}\right)$$

Com decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_2$$

($C4$) Se consideramos a seguinte tabela:

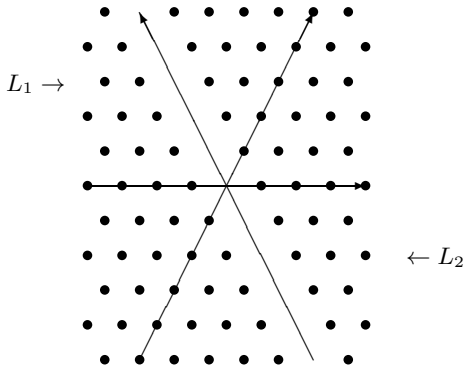
$[T]=$

a	b	c
a	a	
a		

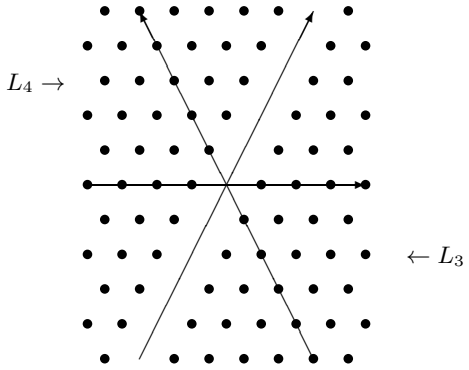
O bloco associado com $[T]$ está composto por 6 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le 0 \\ n > 0 \\ k \le m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m \le n \\ n \le 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le 0 \\ k \le n \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ n \le 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$



$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le 0 \\ k > n \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases}\right)$$



ii) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

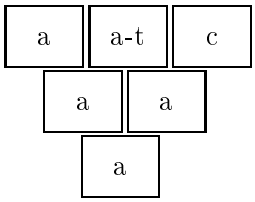
$$L_5 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le 0 \\ n > 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le 0 \\ m > 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_5$$

iii) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_5 \longrightarrow L_3 \bigoplus L_4 \longrightarrow L'_5 \longrightarrow L_2$$

$(C5)$ Para cada $t \in \mathbb{Z}^{>0}$, vamos considerar a tabela:

$[T]=$

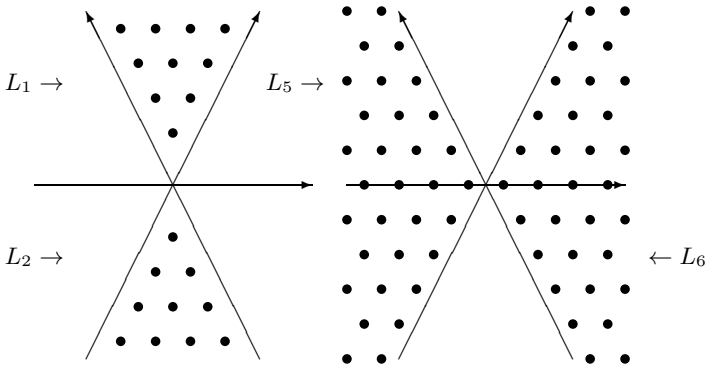


O bloco associado com $[T]$ está composto por 16 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com dimensões dos espaços de peso limitadas:

$$L_1 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ -t < m \le 0 \\ n > -t \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -t < n \le 0 \\ m > -t \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L_1'; L_2 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ -t < n \le 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -t \\ -t < m \le 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L_2'$$

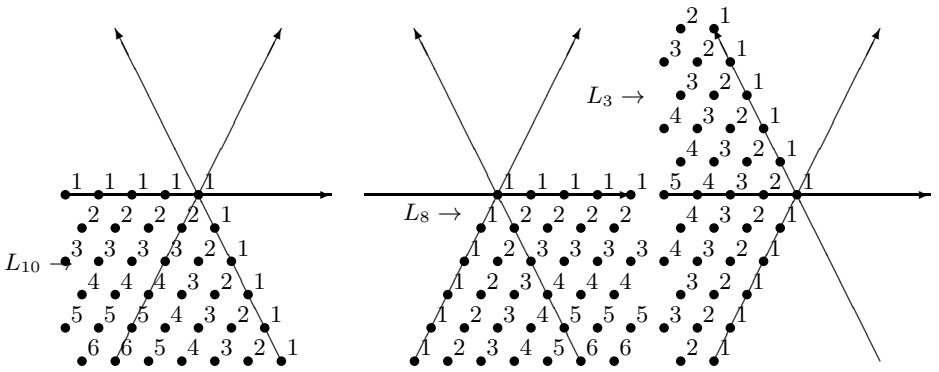
$$L_5 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ -t < m \le 0 \\ k \le m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -t < m \le 0 \\ n \le -t \\ k \le n \end{cases}\right); L_6 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ -t < m \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -t < m \le 0 \\ n \le -t \\ k > m \end{cases}\right)$$



ii) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

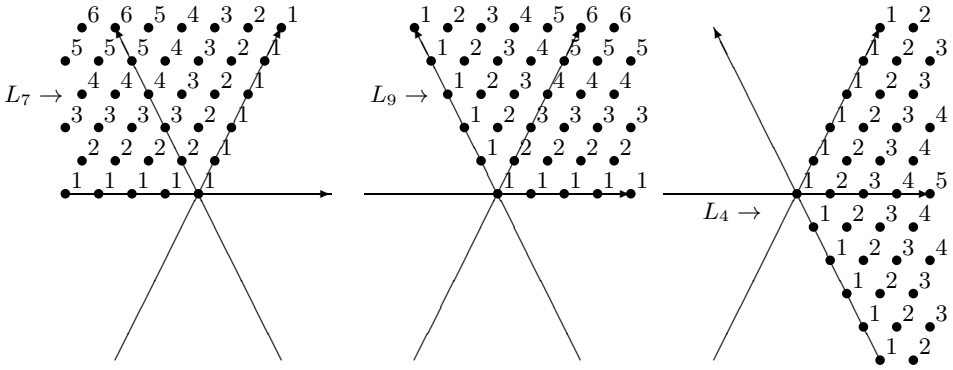
$$L_3 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ n > 0 \\ k \le m \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -t \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases}\right) = L_3';\ L_8 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ n \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le -t \\ k > n \end{cases}\right);$$

$$L_{10} := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ -t < n \le 0 \\ k \le m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m \le n \\ n \le -t \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le -t \\ k \le n \end{cases}\right)$$



$$L_4 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -t \\ m > 0 \\ k > m \end{cases}\right) = L'_4;\ L_7 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ n > -t \\ k \le n \end{cases}\right)$$

$$L_9 := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ -t < n \le 0 \\ k > m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right)$$



iii) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

$$L_{11} := L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -t \\ n > 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -t \\ m > 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_{11}$$

iv) Decomposição:
$L_{10} \longrightarrow L_2 \bigoplus L_3 \longrightarrow L_5 \bigoplus L_8 \bigoplus L_{11} \longrightarrow L_1 \bigoplus L'_2 \bigoplus L'_3 \bigoplus L_4 \longrightarrow L_6 \bigoplus L_7 \bigoplus L'_{11} \longrightarrow L'_1 \bigoplus L'_4 \longrightarrow L_9$

($C6$) Se consideramos a seguinte tabela:

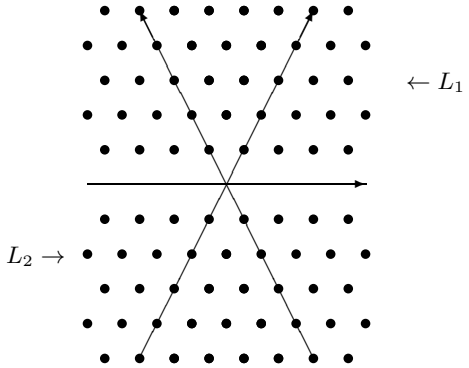
$[L]=$

a	a-t	c
a	a	
z		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 5 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ n > -t \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq -t \\ n \leq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \leq -t \end{cases}\right)$$



ii) 1 módulo denso com espaços de peso de dimensão t:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ -t < m \leq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -t < m \leq 0 \end{cases}\right)$$

iii) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

$$L_4 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq -t \\ n > 0 \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \leq -t \\ m > 0 \end{cases}\right) = L_4'$$

iv) Decomposição:

$$L_2 \longrightarrow L_4 \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_4' \longrightarrow L_1$$

$(C7)$ Se consideramos a seguinte tabela:

$[L]=$

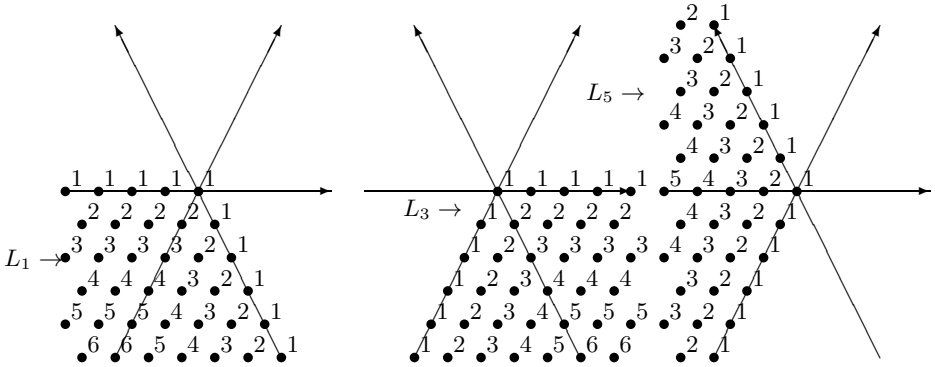
a	a	c
a	a	
a		

(Aqui é permitido $c = a$). O bloco associado com $[T]$ está composto por 10 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

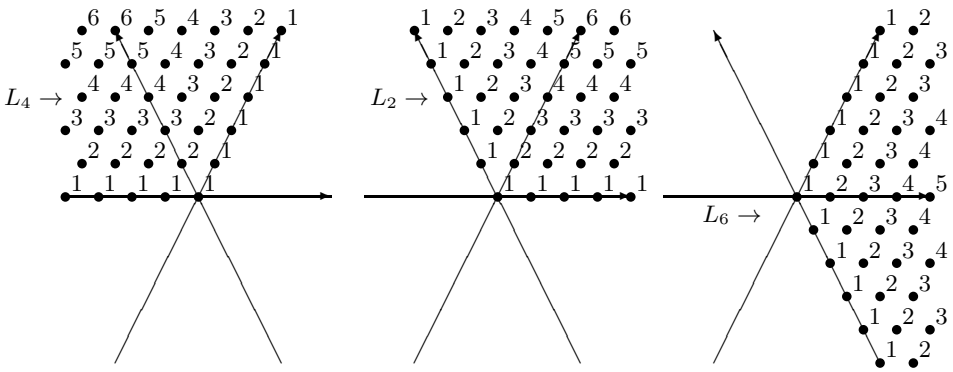
$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ n \le 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le 0 \\ k \le n \end{cases}\right); L_3 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ n \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le 0 \\ k > n \end{cases}\right);$$

$$L_5 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le 0 \\ n > 0 \\ k \le m \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le 0 \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases}\right) = L_5'$$



$$L_2 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right); \; L_4 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \\ k \le n \end{cases}\right);$$

$$L_6 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le 0 \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le 0 \\ m > 0 \\ k > m \end{cases}\right) = L_6'$$



ii) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

$$L_7 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq 0 \\ n > 0 \\ m < k \leq n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \leq 0 \\ m > 0 \\ n < k \leq m \end{cases}\right) = L_7'$$

iii) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_3 \bigoplus L_5 \longrightarrow L_7 \longrightarrow L_5' \bigoplus L_6 \longrightarrow L_7' \longrightarrow L_4 \bigoplus L_6' \longrightarrow L_2$$

($C8$) Se consideramos a seguinte tabela:

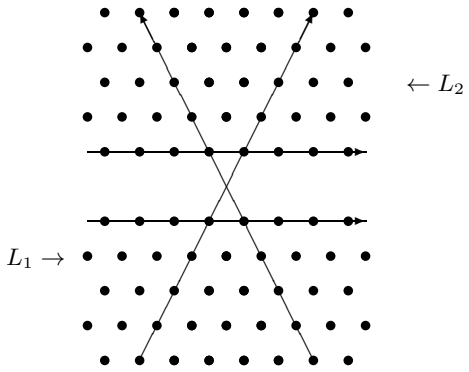
$[L]=$

a	a	c
a	a	
z		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 4 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ n \leq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \leq 0 \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \end{cases}\right)$$



ii) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

$$L_3 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq 0 \\ n > 0 \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}\right) = L_3'$$

iii) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_3' \longrightarrow L_2$$

($C9$) Para cada $s,t \in \mathbb{Z}^{>0}$ tais que $t<s$, consideramos a seguinte tabela:

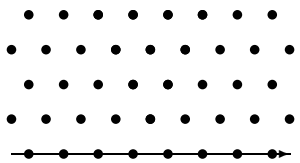
$[L]=$

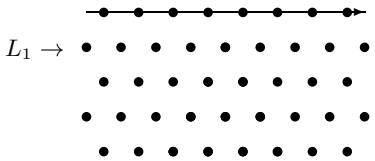
a	a-t	a-s
a	a	
z		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 10 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

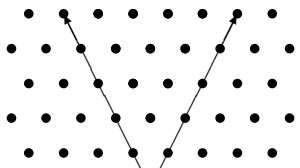
$$L_1 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ m\leq -s \\ n\leq -t \end{cases} \bigcup \begin{cases} m>n \\ m\leq -s \\ n\leq -t \end{cases}\right); L_2 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ m>0 \\ n>0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m>n \\ m>0 \\ n>-t \end{cases}\right)$$

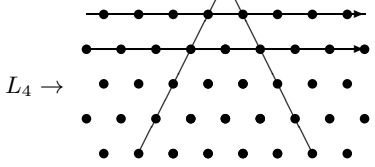




ii) Módulos com espaços de peso de grau t:

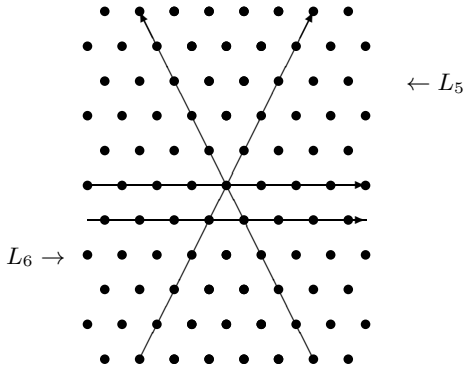
$$L_3 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ -t<m\leq 0 \\ n>-t \end{cases} \bigcup \begin{cases} m>n \\ -t<m\leq 0 \\ -s<n\leq -t \end{cases}\right); L_4 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ m\leq -s \\ -t<n\leq 0 \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m>n \\ n\leq -s \\ -t<m\leq 0 \end{cases}\right) = L'_4$$





iii) Módulos com espaços de peso de grau $(s-t)$:

$$L_5 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ -s<m \\ m\leq -t \\ n>0 \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m>n \\ -s<n \\ n\leq -t \\ m>0 \end{cases}\right) = L'_5; L_6 = L\left(\begin{cases} m\leq n \\ -s<m\leq -t \\ n\leq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} m>n \\ -s<m\leq -t \\ n\leq -s \end{cases}\right)$$



iv) Dois módulos isomorfos com espaços de peso de dimensão infinita:

$$L_7 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq -s \\ n > 0 \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \leq -s \\ m > 0 \end{cases}\right) = L'_7$$

v) Decomposição:

$$L_1 \longrightarrow L_4 \longrightarrow L_6 \bigoplus L_7 \longrightarrow L_5 \bigoplus L'_4 \longrightarrow L'_7 \bigoplus L_3 \longrightarrow L'_5 \longrightarrow L_2$$

($C10$) Sejam $t, s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ com $t < s$. O bloco determinado pela seguinte tabela contém uma copia do módulo de dimensão finita com peso máximo $\lambda = (t-1, s-t-1)$.

$[T]=$

a	a-t	a-s
a	a	
a		

O bloco associado com $[T]$ está composto por 32 módulos irredutíveis. As bases dos diferentes módulos irredutíveis no bloco são:

i) Dois módulos isomorfos de dimensão finita:

$$L_0 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ -s < m \leq -t \\ -t < n \leq 0 \\ m < k \leq n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -s < n \leq -t \\ -t < m \leq 0 \\ n < k \leq m \end{cases}\right) = L'_0$$

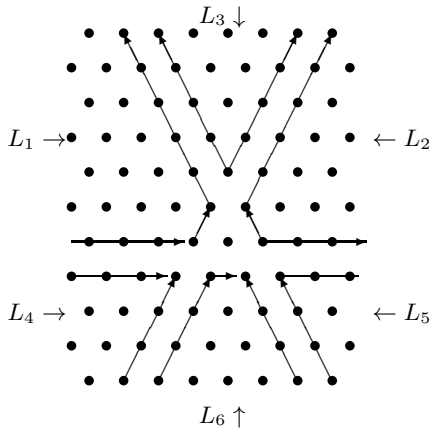
ii) Módulos com espaços de peso de grau t:

$$L_1 = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ -t < m \leq 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m \leq n \\ -t < m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -t < m \leq 0 \\ -s < n \leq 0 \\ k \leq n \end{cases}\right)$$

$$L_2 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -t < m \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -t < m \le 0 \\ -s < n \le 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_3 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -t < m \le 0 \\ n > 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -t < n \le 0 \\ m > 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_3$$

$$L_4 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ -t < n \le 0 \\ k \le m \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -s \\ -t < m \le 0 \\ k \le n \end{cases}\right) = L'_4; L_5 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ -t < n \le 0 \\ k > n \end{cases}\right)$$

$$L'_5 := L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -s \\ -t < m \le 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_6 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ -t < n \le 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -s \\ -t < m \le 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_6$$



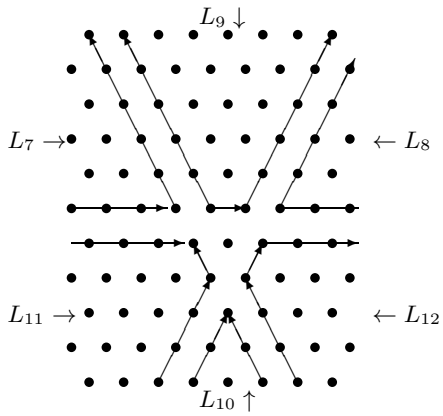
iii) Módulos com espaços de peso de grau $s - t$

$$L_7 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < m \le -t \\ n > 0 \\ k \le m \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -s < n \le -t \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases}\right) = L'_7; L_8 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < m \le -t \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right)$$

$$L'_8 := L\left(\begin{cases} m > n \\ -s < n \le -t \\ m > 0 \\ k > m \end{cases}\right); L_9 = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < m \le -t \\ n > 0 \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -s < n \le -t \\ m > 0 \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_9$$

$$L_{10} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < n \le -t \\ m < k \le n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ -s < m \le -t \\ n < k \le m \end{cases}\right) = L'_{10}; L_{11} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < m \le -t \\ n \le 0 \\ k \le m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -s < m \le -t \\ k \le n \end{cases}\right)$$

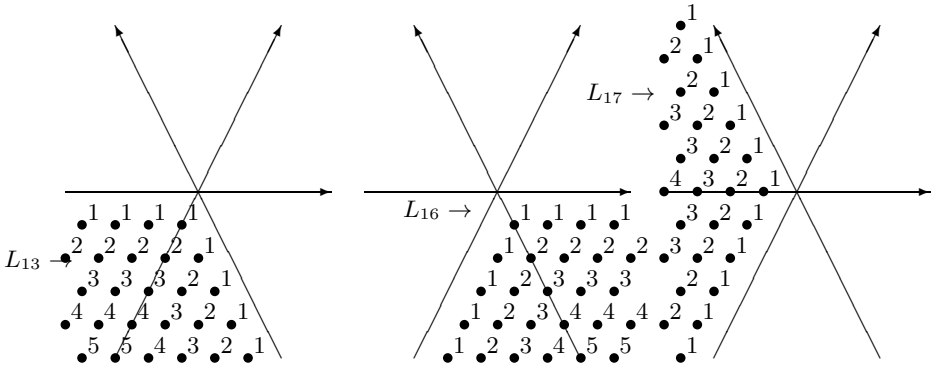
$$L_{12} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ -s < m \le -t \\ n \le 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -s < m \le -t \\ n \le -s \\ k > m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ -s < m \le -t \\ n > -s \\ k > m \end{cases}\right)$$



iv) Módulos com espaços de peso de dimensão finita, mas não limitada:

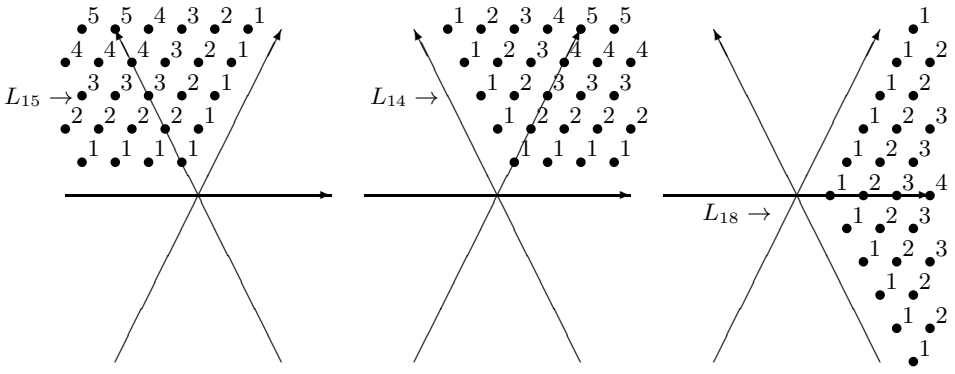
$$L_{13} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ -s < n \le -t \\ k \le m \end{cases} \bigcup \begin{cases} m \le n \\ n \le -s \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le -s \\ k \le n \end{cases}\right)$$

$$L_{16} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ n \le -t \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m \le -s \\ k > n \end{cases}\right); L_{17} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ n > 0 \\ k \le m \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -s \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases}\right) = L'_{17}$$



$$L_{14} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ n > 0 \\ k > n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ -t < n \le 0 \\ k > m \end{cases}\right)$$

$$L_{15} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m > 0 \\ k \le n \end{cases} \bigcup \begin{cases} m > n \\ m > 0 \\ n > -t \\ k \le n \end{cases}\right); L_{18} = L\left(\begin{cases} m \le n \\ m \le -s \\ n > 0 \\ k > n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \le -s \\ m > 0 \\ k > m \end{cases}\right) = L'_{18}$$



v) Dois módulos isomorfos com dimensões dos espaços de peso infinitas:

$$L_{19} = L\left(\begin{cases} m \leq n \\ m \leq -s \\ n > 0 \\ m < k \leq n \end{cases}\right) \cong L\left(\begin{cases} m > n \\ n \leq -s \\ m > 0 \\ n < k \leq m \end{cases}\right) = L'_{19}$$

vi) Decomposição:
$L_{13} \longrightarrow L_4 \bigoplus L_{10} \longrightarrow L_6 \bigoplus L_{11} \bigoplus L_{16} \bigoplus L_{17} \longrightarrow L_0 \bigoplus L'_4 \bigoplus L_5 \bigoplus L_7 \bigoplus L'_{10} \bigoplus L_{19}$
$\longrightarrow L_1 \bigoplus L'_6 \bigoplus L_9 \bigoplus L_{12} \bigoplus L'_{17} \bigoplus L_{18} \longrightarrow L'_0 \bigoplus L_3 \bigoplus L'_5 \bigoplus L'_7 \bigoplus L_8 \bigoplus L'_{19} \longrightarrow$
$L_2 \bigoplus L'_9 \bigoplus L_{15} \bigoplus L'_{18} \longrightarrow L'_3 \bigoplus L'_8 \longrightarrow L_{14}$

5.2 Teorema de Classificação

Neste ponto já é possível enunciar o Teorema de classificação dos $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis.

Teorema 5.2.1. *Cada $\mathfrak{sl}(3)$-módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível admite uma realização por tabelas com ação de $\mathfrak{sl}(3)$ dada pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin se o módulo admite carácter genérico ou pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares se o módulo admite caracteres singulares.*

Para a demonstração vamos usar os resultados da Seção 2.5.

Depois da descrição dos blocos genéricos e singulares, dado um carácter χ foram construídas extensões irredutíveis de χ em alguma das seguintes situações:

(1) χ admite duas extensões irredutíveis não isomorfas e $dim(V_\chi) = 1$ para cada extensão irredutível V.

(2) χ admite uma extensão irredutível V tal que para cada carácter $\chi' \in \Gamma^*$, $dim(V_\chi) \leq 1$ e V não admite caracteres críticos.

(3) χ admite uma única extensão irredutível V tal que $dim(V_\chi) = 2$.

(4) χ é um carácter crítico e temos uma única extensão irredutível.

No caso da situação (1), não pode ter mais extensões irredutíveis pelo Teorema 2.5.1.

Vamos ver para cada uma das situações (2), (3) e (4) que o módulo de tabelas que foi descrito e satisfaz tais condições é de fato o único tal que $V_\chi \neq 0$.

I) Para caracteres na situação (2), a extensão V é um módulo regular e assim o Teorema 2.5.8 garante a unicidade.

II) Para caracteres na situação (4), o Teorema 2.5.9 garante a unicidade.

Agora vamos mostrar que para extensões de caracteres na situação (3) que existe um carácter crítico χ' tal que toda extensão irredutível de χ satisfaz $V_{\chi'} \neq 0$, o qual implica a unicidade na situação (3).

Lema 5.2.2. *Seja χ um carácter de Gelfand-Tsetlin e V uma extensão irredutível de χ tal que $dim(V_\chi) = 2$. Então existe um carácter crítico χ' tal que $W_{\chi'} \neq 0$ para cada extensão irredutível de χ.*

Demonstração. Seja χ associado com o peso λ, como $dim(V_\chi) = 2$, os diferentes autovalores de A_λ formam uma cadeia conectada não-regular [F86].

- Se a cadeia é crítica, pelo Teorema 2.5.6, os diferentes autovalores de A_λ podem ser ordenados da seguinte maneira:

  $$\{\mu_1, \mu_2, \ldots\},$$

  onde $\mu_1 + 1 = \mu_2$, a multiplicidade de μ_1 é 1 e se a multiplicidade de μ_i é 1 para $i > 1$ então a multiplicidade de μ_{i+1} é também 1. Portanto, no módulo V existe um autovetor crítico, que seria o associado com o autovalor μ_1 tem multiplicidade 1. Seja então χ' o carácter crítico associado. Assim, cada extensão irredutível de χ admite o carácter crítico χ'.

- Se a cadeia conectada é degenerada, pelo Teorema 2.5.6, é possível ordenar os diferentes autovalores de A_λ da seguinte forma:

  $$\{\mu_1, \mu_2, \ldots\},$$

  onde $\mu_1 = -\frac{1}{4}(\lambda(h_1)^2 - 2\lambda(h_1))$, e se a multiplicidade de μ_i é 1 então a multiplicidade de μ_{i+1} é também 1. Portanto, no módulo V existe um vetor v associado com o autovalor μ_1 e μ_1 tem multiplicidade 2. Se $\widetilde{\chi}$ é o carácter associado com v, temos $dim(V_\chi) = 2$. É possível verificar que existe um operador $f \in \{e_{23}, e_{32}, e_{31}, e_{13}\}$ que age injetor em V_χ para cada módulo irredutível que contem v, se $f(v)$ tem peso μ, os autovalores de A_μ formam uma cadeia crítica, e temos um carácter $\overline{\chi}$ de dimensão 2 em uma cadeia crítica. Assim, estamos na situação da primeira parte do Lema.

□

Capítulo 6

Funtor de Localização para Módulos de Gelfand-Tsetlin

Neste capítulo vamos usar o funtor de localização como ferramenta para relacionar os $\mathfrak{sl}(3)$-módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis. Aproveitando que temos uma descrição explícita das bases para cada módulo irredutível, vamos verificar que cada $\mathfrak{sl}(3)$-módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível pode ser obtido a partir de módulos de peso máximo usando localização torcida e quocientes[1].

6.1 Funtor de Localização

Nesta seção vamos relembrar a construção da localização e localização torcida para módulos sobre a álgebra $\mathfrak{gl}(n)$ e descrever algumas das suas principais propriedades.

Sejam $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ e $U = U(\mathfrak{g})$ a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. Para cada $\alpha \in \Phi^+$, o conjunto multiplicativo $F_\alpha := \{f_\alpha^n : n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$ satisfaz as condições para a localização de Ore[2] pois o operador $ad(f_\alpha)$ age localmente nilpotente em U. Seja U_α a localização de U relativa a F_α. Para cada U-módulo M vamos denotar por $D_\alpha(M)$ a **localização na direção** α de M, definida como $D_\alpha(M) = U_\alpha \bigotimes_U M$. Vamos listar algumas das propriedades de D_α.

- Se f_α é injetor em M, então M é um submódulo de $D_\alpha(M)$.
- f_α age injetivamente em $D_\alpha(M)$ e $D_\alpha^2(M) = D_\alpha(M)$
- Se f_α age injetivamente em M, então f_α é bijetivo em M se, e somente se, $D_\alpha(M) = M$.
- Se $[f_\alpha, f_\beta] = 0$ e f_α, f_β agem injetivamente em M, então $D_\alpha D_\beta(M) = D_\beta D_\alpha(M)$.

Agora vamos relembrar a definição de conjugação generalizada em U_α introduzida em [Ma00]. Para $x \in \mathbb{C}$ e $u \in U_\alpha$ temos

$$\Theta_x(u) := \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} ad(f_\alpha)^i(u) f_\alpha^{-i}$$

[1] Para módulos de peso com espaços de peso de dimensão finita, vide [Ma00].

[2] Se R é uma álgebra associativa (não necessariamente comutativa) e S é um subconjunto multiplicativo, um elemento $s \in S$ satisfaz as condições de localização de Ore, se para cada $r \in R$, existem $s', s'' \in S$, $r', r'' \in R$ tais que $sr' = rs'$ e $r''s = rs''$. O conjunto multiplicativo S satisfaz as condições de localização de Ore se cada $s \in S$ satisfaz as condições.

onde $\binom{x}{i} := \frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}$. Dado que $ad(f_\alpha)$ é localmente nilpotente em U_α, a soma anterior é finita. Note também que para $x \in \mathbb{Z}$ temos que $\Theta_x(u) = f_\alpha^x u f_\alpha^{-x}$. Para um U_α-módulo M vamos denotar por $\Phi_\alpha^x M$ o U_α-módulo M torcido pela ação

$$u \cdot v^x := (\Theta_x(u) \cdot v)^x,$$

onde $u \in U_\alpha$, $v \in M$ e v^x é o elemento v considerado como elemento de $\Phi_\alpha^x M$. Em particular, $v^x \in M_{\lambda+x\alpha}$ para qualquer $v \in M_\lambda$. Dado que $v^n = f_\alpha^{-n} \cdot v$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, é conveniente escrever $f_\alpha^x \cdot v := v^{-x}$ para cada $x \in \mathbb{C}$.

Lema 6.1.1. *Na categoria de U_α-módulos temos:*

i) $\Phi_\alpha^x = Id$ *para qualquer* $x \in \mathbb{Z}$.

ii) $\Phi_\alpha^x \circ \Phi_\alpha^y = \Phi_\alpha^{x+y}$ *para cada* $x, y \in \mathbb{C}$. *Em particular,* $\Phi_\alpha^x \circ \Phi_\alpha^{-x} = \Phi_\alpha^{-x} \circ \Phi_\alpha^x = Id$ *para cada* $x \in \mathbb{C}$.

iii) $f_\alpha^x \cdot (f_\alpha^y \cdot v) = f_\alpha^{x+y} \cdot v$ *para cada* $x, y \in \mathbb{C}$.

iv) $f_\alpha^x \cdot (u \cdot (f_\alpha^{-x} \cdot v)) = \Theta_x(u)$ *para cada* $x \in \mathbb{C}$.

De agora em diante vamos escrever $D_\alpha^x M := \Phi^x(D_\alpha M)$ e vamos chamar de **localização torcida** do módulo M.

6.2 Operadores injetores e sobrejetores

Antes de começar a trabalhar com localizações vamos dar condições nas bases dos diferentes módulos irredutíveispara que faça sentido aplicar o funtor de localização; ou para garantir a existência de inversos. Para isso vamos estudar condições de injetividade e sobrejetividade dos operadores $f_\alpha = e_{21}$, $f_{\alpha+\beta} = e_{31}$ e $f_\beta = e_{32}$.

Observação 6.2.1. *Dado que cada módulo de Gelfand-Tsetlin é um módulo de peso, para mostrar que algum dos operadores é injetor ou sobrejetor, é suficiente fazer a prova em espaços de peso. Assim, se consideramos um módulo M com base $\mathcal{B}_M$ e $[L] \in \mathcal{B}_M$. Então, pelo Teorema 2.3.1 se $[L]$ é um vetor de peso λ, temos*

$$M_\lambda = \langle \{[L]_{(-i,i,0)} : i \in \mathbb{Z}\} \bigcap \mathcal{B}_M \rangle$$

Definição 6.2.2. *Uma tabela $[L]$ será chamada de* ***tabela crítica*** *se $l_{21} = l_{22}$.*

6.2.1 Injetividade e sobrejetividade de e_{21}

(I) Injetividade.

Lema 6.2.3. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{21} age injetivamente em M se, e somente se, $[T] \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]_{(0,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se existe $[T] \in \mathcal{B}_M$ tal que $[T]_{(0,0,-1)} \notin \mathcal{B}_M$, então $e_{21}([T]) = [T]_{(0,0,-1)} = 0$ em M, o qual implica que e_{21} não é injetor. ($\Leftarrow$) Seja $v := \sum_{i=-N}^{N} \alpha_i [L]_{(-i,i,0)} \in M_\lambda$ tal que $0 = e_{21}(v) = \sum_{i=-N}^{N} \alpha_i [L]_{(-i,i,-1)}$. Pela hipótese, temos que $\{[L]_{(-i,i,-1)} : i = -N, \ldots, N\}$ é um conjunto de vetores independentes em $\mathcal{B}_M$, de onde podemos concluir que $\alpha_i = 0$ para $i = -N, \ldots, N$. □

(II) Sobrejetividade.

Lema 6.2.4. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{21} age sobrejetivamente em M se, e somente se, $[T] \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]_{(0,0,1)} \in \mathcal{B}_M$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se existe $[T] \in \mathcal{B}_M$ tal que $[T]_{(0,0,1)} \notin \mathcal{B}_M$ então $e_{21}^{-1}([T]) = [T]_{(0,0,1)} \notin \mathcal{B}_M$, o qual implica que e_{21} não é sobrejetor. ($\Leftarrow$) Seja $[T]$ uma tabela em $\mathcal{B}_M$, então $e_{21}^{-1}([T]) = [T]_{(0,0,1)} \in \mathcal{B}_M$; assim e_{21} é sobrejetor. □

6.2.2 Injetividade e sobrejetividade de e_{31}

Escrevendo a ação de e_{31} em uma tabela arbitrária $[L]$, temos:

$$\begin{aligned} e_{31}([L]) =& c([L])([L]_{(-1,0,-1)} - [L]_{(0,-1,-1)}) \\ e_{31}([L]') =& c([L])([L]'_{(-1,0,-1)} - [L]'_{(0,-1,-1)}) + c'([L])([L]_{(-1,0,-1)} - [L]_{(0,-1,-1)}) \\ e_{31}([L]) =& [L]'_{(-1,0,-1)} \text{ ; se } [L] \text{ é uma tabela crítica} \end{aligned}$$

onde os coeficientes são dados pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares. Se definimos $c_i := c([L]_{(i,-i,0)}); c'_i := c'([L]_{(i,-i,0)})$, temos $c_k, c'_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

(I) Injetividade.

Lema 6.2.5. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{31} age injetivamente em M se, e somente se,*

a) Para cada $[T] \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$ ou para cada $[T] \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]_{(0,-1,-1)} \in \mathcal{B}_M$.

b) i) Para cada $[T]' \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]'_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$ ou para cada $[T]' \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]'_{(0,-1,-1)} \in \mathcal{B}_M$. Ou, ii) se $[T]' \in \mathcal{B}_M$ e $[T]'_{(-1,0,-1)}, [T]'_{(0,-1,-1)} \notin \mathcal{B}_M$ então $[T]_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$ ou $[T]_{(0,-1,-1)} \in \mathcal{B}_M$.

c) Se $[T]$ é uma tabela crítica em $\mathcal{B}_M$ então $[T]'_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$.

Demonstração. Temos que considerar dois casos. A saber, se M_λ contém ou não uma tabela crítica.

i) Suponhamos que $[L] \in M_\lambda$ é uma tabela crítica, e

$$v := \sum_{i=-N}^{-1} \alpha_i [L]_{(i,-i,0)} + \alpha_0 [L]_{(0,0,0)} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [L]'_{(i,-i,0)}.$$

$$\begin{aligned} e_{31}(v) = &\sum_{i=-N}^{-1} \alpha_i e_{31}([L]_{(i,-i,0)}) + \alpha_0 e_{31}([L]_{(0,0,0)}) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_{31}([L]'_{(i,-i,0)}) \\ =&\alpha_{-N} c_{-N} [L]_{(-N-1,N,-1)} - \alpha_{-1} c_{-1} [L]_{(-1,0,-1)} + \alpha_1 c_1 [L]'_{(0,-1,-1)} \\ &+ \alpha_0 [L]'_{(-1,0,-1)} - \alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} + \alpha_1 c'_1 [L]_{(0,-1,-1)} \\ &+ \sum_{i=-N}^{-2} (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]_{(i,-i-1,-1)} + \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]'_{(i,-i-1,-1)} \\ &- \alpha_N c'_N [L]_{(N,-N-1,-1)} + \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]_{(i,-i-1,-1)} \end{aligned}$$

Assim, $e_{31}(v) = 0$ implica que:

$$\begin{cases} (\alpha_1 c'_1 - \alpha_{-1} c_{-1}) [L]_{(0,-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_1 c_1 - \alpha_0) [L]'_{(0,-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_{-N} c_{-N} - \alpha_N c'_N) [L]_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ \alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = -N, \dots, -2 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]'_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \dots, N-1 \\ (\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i) [L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Agora, como para tabelas críticas é válido $[L]_{(m,n,k)} = [L]_{(n,m,k)}$ e $[L]'_{(m,n,k)} = -[L]'_{(n,m,k)}$, as condições (a) e (b) são equivalentes às condições:

a') Para cada $[T] \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$.

b') *i)* Para cada $[T]' \in \mathcal{B}_M$ temos $[T]'_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$. Ou, *(ii)* se $[T]' \in \mathcal{B}_M$ e $[T]'_{(-1,0,-1)} \notin \mathcal{B}_M$, então $[T]_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$.

Agora, como $c_k, c'_k \neq 0$ para todo k; $(b')(i)$ implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0$; (c) implica $\alpha_0 = 0$ e a condição (a') implica $\alpha_{-N} = \cdots = \alpha_{-1} = 0$. Ou $(b')(ii)$ implica $\alpha_{-N} = 0$ que junto com a condição (a') implica $\alpha_{-N} = \cdots = \alpha_{-1}, \alpha_0 = 0$; (c) implica $\alpha_1 = 0$ e de novo (a') implica $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0$. Portanto, o operador e_{31} age injetivamente em M.

ii) Suponhamos que M_λ não contém tabelas críticas, e

$$v := \sum_{i=-N}^{0} \alpha_i [L]_{(i,-i,0)} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [L]'_{(i,-i,0)}$$

$$
\begin{aligned}
e_{31}(v) = &\sum_{i=-N}^{0} \alpha_i e_{31}([L]_{(i,-i,0)}) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_{31}([L]'_{(i,-i,0)}) \\
=&\alpha_{-N} c_{-N} [L]_{(-N-1,N,-1)} - \alpha_0 c_0 [L]_{(0,-1,-1)} + \alpha_1 c_1 [L]'_{(0,-1,-1)} \\
&- \alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} + \alpha_1 c'_1 [L]_{(0,-1,-1)} - \alpha_N c'_N [L]_{(N,-N-1,-1)} \\
&+ \sum_{i=-N}^{-1} (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} + \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]'_{(i,-i-1,-1)} \\
&+ \sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)}
\end{aligned}
$$

Então, $e_{31}(v) = 0$ implica que:

$$
\begin{cases}
(\alpha_1 c'_1 - \alpha_0 c_0)[L]_{(0,-1,-1)} = 0 \\
\alpha_1 c_1 [L]'_{(0,-1,-1)} = 0 \\
\alpha_{-N} c_{-N} [L]_{(-N-1,N,-1)} = 0 \\
\alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\
\alpha_N c'_N [L]_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\
(\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 \quad \text{for } i = -N, \ldots, -1 \\
(\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]'_{(i,-i-1,-1)} = 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, N-1 \\
(\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, N-1
\end{cases}
$$

Neste caso, (b) implica que $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_N = 0$ e $\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i$ para $i = 1, \ldots, N-1$; assim temos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0$. Por ultimo, (a) implica que $\alpha_{-N} = \cdots = \alpha_0 = 0$. Portanto, e_{31} age injetivamente em M.

□

(II) Sobrejetividade.

Lema 6.2.6. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{31} age sobrejetivamente em M se, e somente se,*

a) Se $[T] \in \mathcal{B}_M$ então, $[T]_{(1,0,1)} \in \mathcal{B}_M$ ou $[T]_{(0,1,1)} \in \mathcal{B}_M$.

b) Se $[T]' \in \mathcal{B}_M$ então, $[T]'_{(1,0,1)} \in \mathcal{B}_M$ ou $[T]'_{(0,1,1)} \in \mathcal{B}_M$.

c) $[T] \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]_{(t,-t,0)} \notin \mathcal{B}_M$ para algum $t \in \mathbb{Z}$.

d) $[T]' \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]'_{(s,-s,0)} \notin \mathcal{B}_M$ para algum $s \in \mathbb{Z}$.

e) Se $[T]$ é uma tabela crítica e $[T]'_{(0,-1,-1)} \in \mathcal{B}_M$ então $[T] \in \mathcal{B}_M$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos $[T] = [L]_{(-1,0,-1)} \in \mathcal{B}_M$, vamos mostrar a existência de $v \in \mathcal{B}_M$ tal que $e_{31}(v) = [T]$. Da mesma maneira que no caso da injetividade, vamos considerar dois casos, a saber, se M_λ cantem ou não uma tabela crítica.

i) Suponhamos que $[L] \in M_\lambda$ é uma tabela crítica, e

$$v := \sum_{i=-N}^{-1} \alpha_i [L]_{(i,-i,0)} + \alpha_0 [L]_{(0,0,0)} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [L]'_{(i,-i,0)}$$

Então, $e_{31}(v) = [T]$ implica que:

$$\begin{cases} (\alpha_1 c'_1 - \alpha_{-1} c_{-1})[L]_{(0,-1,-1)} = [L]_{(0,-1,-1)} \\ (\alpha_1 c_1 - \alpha_0)[L]'_{(0,-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_{-N} c_{-N} - \alpha_N c'_N)[L]_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ \alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = -N, \ldots, -2 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]'_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \ldots, N-1 \\ (\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

As condições (a) e (b) garantem que v é um vetor não nulo em $\mathcal{B}_M$ e (b) implica que podemos escolher livremente o valor de α_N ou α_{-N} o qual garante a existência de solução para o sistema de equações.

ii) Suponhamos que M_λ não contém tabelas críticas, e

$$v := \sum_{i=-N}^{0} \alpha_i [L]_{(i,-i,0)} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i [L]'_{(i,-i,0)}$$

Então, $e_{31}(v) = [L]_{(0,-1,-1)}$ implica que:

$$\begin{cases} (\alpha_1 c'_1 - \alpha_0 c_0)[L]_{(0,-1,-1)} = [L]_{(0,-1,-1)} \\ \alpha_1 c_1 [L]'_{(0,-1,-1)} = 0 \\ \alpha_{-N} c_{-N} [L]_{(-N-1,N,-1)} = 0 \\ \alpha_N c_N [L]'_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ \alpha_N c'_N [L]_{(N,-N-1,-1)} = 0 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = -N, \ldots, -1 \\ (\alpha_{i+1} c_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]'_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \ldots, N-1 \\ (\alpha_{i+1} c'_{i+1} - \alpha_i c_i)[L]_{(i,-i-1,-1)} = 0 & \text{para } i = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

De novo, as condições (a) e (b) garantem que v é um vetor não nulo em $\mathcal{B}_M$ e (c) implica que podemos escolher livremente o valor de α_N ou α_{-N}; o qual implica que o sistema de equações tem solução.

□

6.2.3 Injetividade e sobrejetividade de e_{32}

Podemos escrever a ação de e_{32} como:

$$\begin{cases} e_{32}([L]) = c([L])[L]_{(-1,0,0)} - d([L])[L]_{(0,-1,0)} \\ e_{32}([L]') = c([L])[L]'_{(-1,0,0)} - d([L])[L]'_{(0,-1,0)} + c'([L])[L]_{(-1,0,0)} - d'([L])[L]_{(0,-1,0)} \\ e_{32}([L]) = [L]_{(-1,0,0)} - \tilde{c}([L])[L]'_{(-1,0,0)} \text{ ; se } [L] \text{ é uma tabela crítica} \\ c_i := c([L]_{(i,-i,0)}); \; c'_i := c'([L]_{(i,-i,0)}); \; d_i := d([L]_{(i,-i,0)}); \; d'_i := d'([L]_{(i,-i,0)}) \end{cases}$$

Onde os coeficientes são dados pelas fórmulas de Gelfand-Tsetlin singulares.

(I) Injetividade.

Lema 6.2.7. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{32} age injetivamente em M se, e somente se,*

(a) Para cada $[T] \in \mathcal{B}_M$ temos $c([T])[T]_{(-1,0,0)} \neq 0$ em M ou para cada $[T] \in \mathcal{B}_M$ temos $d([T])[T]_{(0,-1,0)} \neq 0$ em M.

(b) i) Para cada $[T]' \in \mathcal{B}_M$ temos $c([T]')[T]'_{(-1,0,0)} \neq 0$ em M ou para cada $[T]' \in \mathcal{B}_M$ temos $d([T]')[T]'_{(0,-1,0)} \neq 0$ em M. Ou, ii) se $[T]' \in \mathcal{B}_M$ e $c([T]')[T]'_{(-1,0,0)} = d([T]')[T]'_{(0,-1,0)} = 0$ em M, então $c'([T]')[T]_{(-1,0,0)} \neq 0$ ou $d([T]')[T]_{(0,-1,0)} \neq 0$.

(c) Se $[T]$ é uma tabela crítica em $\mathcal{B}_M$ então, $[T]_{(-1,0,0)} \in \mathcal{B}_M$ ou $\tilde{c_0}([T])[T]'_{(0,-1,0)} \neq 0$.

Demonstração. A prova é análoga à demonstração da injetividade para o operador e_{31} no Lema 6.2.5. □

(II) Sobrejetividade.

Lema 6.2.8. *Seja M um módulo de Gelfand-Tsetlin com base $\mathcal{B}_M$. O operador e_{32} age sobrejetivamente em M se, e somente se,*

a) Se $[T] \in \mathcal{B}_M$ então, $[T]_{(1,0,0)} \in \mathcal{B}_M$ ou $[T]_{(0,1,0)} \in \mathcal{B}_M$.

b) Se $[T]' \in \mathcal{B}_M$ então, $[T]'_{(1,0,0)} \in \mathcal{B}_M$ ou $[T]'_{(0,1,0)} \in \mathcal{B}_M$.

c) $[T] \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]_{(t,-t,0)} \notin \mathcal{B}_M$ para algum $t \in \mathbb{Z}$.

d) $[T]' \in \mathcal{B}_M$ implica $[T]'_{(s,-s,0)} \notin \mathcal{B}_M$ para algum $s \in \mathbb{Z}$.

e) Se $[T]$ é uma tabela crítica $[T]'_{(0,-1,0)} \in \mathcal{B}_M$ então $[T] \in \mathcal{B}_M$

Demonstração. A prova usa os mesmos argumentos e é análoga à demonstração da sobrejetividade para o operador e_{32} no Lema 6.2.6. □

6.3 Localização para $\mathfrak{sl}(3)$-módulos

Como primeiro passo na descrição do funtor de localização dos módulos de Gelfand-Tsetlin, vamos caracterizar a localização de módulos irredutíveis nos blocos genéricos.

Notação 6.3.1. *Se $f_\alpha = e_{21}$, $f_{\alpha+\beta} = e_{31}$ e $f_\beta = e_{32}$; para cada $\gamma \in \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$ vamos escrever $D_{f_\gamma}(M)$ no lugar de $D_\gamma(M)$ para denotar a localização de M na direção de γ. Para cada $r \in \mathbb{C}$, denotamos por $TD^r_{f_\gamma}(M)$ a localização torcida de M pela conjugação generalizada Θ_r com respeito a f_γ. Seja também $QD_{f_\gamma}(M) := D_{f_\gamma}(M)/M$.*

Teorema 6.3.2. *Seja M um $\mathfrak{sl}(3)$-módulo de Gelfand-Tsetlin genérico irredutível com base $\mathfrak{B}_M = \{[L]_{(m,n,k)} : m,n,k \in B\}$ onde B é a região do espaço definida por desigualdades em m,n,k como foi descrito no Capítulo 3.*

1. *Se e_{21} age injetivamente em M, a localização de M na direção de α é o módulo $M(k)$ com base $\mathfrak{B}^{(k)}_M = \{[L]_{(m,n,k)} : k \in \mathbb{Z}$ e (m,n,k) satisfaz as desigualdades em$B\}$.*

2. *Se e_{31} age injetivamente em M, a localização de M na direção de $\alpha+\beta$ é o módulo $M(m)$ com base $\mathfrak{B}^{(m)}_M = \{[L]_{(m,n,k)} : m \in \mathbb{Z}$ e (m,n,k) satisfaz as desigualdades em$B\}$.*

3. *Se e_{32} age injetivamente em M, a localização de M na direção de β é o módulo $M(n)$ com base $\mathfrak{B}^{(n)}_M = \{[L]_{(m,n,k)} : n \in \mathbb{Z}$ e (m,n,k) satisfaz as desigualdades em$B\}$.*

Demonstração. A demonstração é uma verificação direta usando as condições dadas na Seção 6.2 de que o módulo M é um submódulo de $M(_)$ e que o correspondente operador age bijetivo em $M(_)$. □

Notação 6.3.3. *Denotaremos por $L_i^{(j)}$ o módulos irredutível L_i no bloco j para módulos genéricos e $L_i^{(Cj)}$ o módulo irredutível L_i no bloco j para módulos singulares.*

Exemplo 6.3.4. *O módulo $L_3^{(6)}$ é um módulo de peso máximo no qual e_{21}, e_{31} e e_{32} agem injetivamente. Este módulo é definido por:*

$$L_3^{(6)} = L\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$$

Assim, pelo Teorema 6.3.2 temos:

1. $D_{e_{21}}(L_3^{(6)}) = M(k) := M\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \end{cases}\right)$ e $QD_{e_{21}}(L_3^{(6)}) = M\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n \leq 0 \\ k > m \end{cases}\right) \simeq L_4^{(6)}$

2. $D_{e_{31}}(L_3^{(6)}) = M(m) := M\left(\begin{cases} n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$ e $QD_{e_{31}}(L_3^{(6)}) = M\left(\begin{cases} m > 0 \\ n \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right) \simeq L_1^{(6)}$

3. $D_{e_{32}}(L_3^{(6)}) = M(n) := M\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ k \leq m \end{cases}\right)$ e $QD_{e_{21}}(L_3^{(6)}) = M\left(\begin{cases} m \leq 0 \\ n > 0 \\ k \leq m \end{cases}\right) \simeq L_5^{(6)}$

Usando o Teorema 6.3.2, obtemos informação sobre o funtor de localização torcido ao nível dos blocos.

Teorema 6.3.5. *Sejam $r \in \mathbb{C}$, $[L]$ uma tabela genérica e M o módulo irredutível que contém $[L]$.*

Se e_{21} age injetivamente em M então $TD^r_{e_{21}}(M)$ é um módulo no bloco associado com a tabela $[L]_{(0,0,r)}$ no qual e_{21} age bijetivamente.

Se e_{31} age injetivamente em M então $TD^r_{e_{31}}(M)$ é um módulo no bloco associado com a tabela $[L]_{(0,r,0)}$ no qual e_{31} age bijetivamente.

Se e_{32} age injetivamente em M então $TD^r_{e_{32}}(M)$ é um módulo no bloco associado com a tabela $[L]_{(r,0,0)}$ no qual e_{32} age bijetivamente.

Exemplo 6.3.6. *Vamos considerar de novo o módulo $L_3^{(6)}$, no qual e_{21}, e_{31} e e_{32} agem injetivamente e vamos escolher $r = z - a$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Este módulo está no bloco associado com a tabela*

$[L] :=$

a	b	c
a	b	
a		

Assim, o Teorema 6.3.5 garante que $TD^r_{e_{21}}(L_3^{(6)})$ é um módulo contendo a tabela

$[L] :=$

a	b	c
a	b	
z		

no qual e_{21} age bijetivamente. De onde $TD^r_{e_{21}}(L_3^{(6)}) = L_4^{(7)}$

Agora temos suficientes ferramentas para verificar o seguinte resultado:

Teorema 6.3.7. *Cada módulo de Gelfand-Tsetlin para a álgebra $\mathfrak{sl}(3)$ pode ser obtido por meio de módulos de peso máximo usando funtor de localização torcido e quocientes.*

Nos capítulos 3 e 5 forem descritas explicitamente realizações para cada um dos módulos de Gelfand-Tsetlin irredutíveis para $\mathfrak{sl}(3)$. Usando esta descrição sabemos que os módulos de peso máximo com respeito ao sistema de raízes $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ são:

- $L_3^{(6)}$.
- $L_3^{(11)}$, $L_{12}^{(11)}$.
- $L_3^{(12)}$, $L_9^{(12)}$.
- $L_2^{(C5)}$, $L_2^{\prime(C5)}$, $L_{10}^{(C5)}$.
- $L_1^{(C7)}$.
- $L_4^{(C10)}$, $L_4^{\prime(C10)}$, $L_6^{(C10)}$, $L_6^{\prime(C10)}$, $L_{10}^{(C10)}$, $L_{10}^{\prime(C10)}$, $L_{11}^{(C10)}$, $L_{13}^{(C10)}$.
- $L_0^{(C10)}$, $L_0^{\prime(C10)}$.

Usando estes módulos e localização torcida vamos obter módulos de outros blocos como segue:

- $L_4^{(5)} = TD_{e_{32}}(L_3^{(6)})$.
- $L_4^{(7)} = TD_{e_{21}}(L_3^{(6)})$; $L_1^{(3)} = TD_{e_{32}}(L_4^{(7)})$; $L_1^{(2)} \hookrightarrow TD_{e_{31}}(L_1^{(3)})$; $L_1^{(4)} \hookrightarrow TD_{e_{21}}(L_1^{(3)})$ e $L_1^{(1)} = TD_{e_{21}}(L_1^{(2)})$.
- $L_1^{(C2)} \hookrightarrow TD_{e_{31}}(L_1^{(2)})$ e $L_1^{(C1)} = TD_{e_{21}}(L_1^{(C2)})$
- $L_4^{(9)} = TD_{e_{32}}(L_3^{(11)})$ e $L_1^{(8)} = TD_{e_{21}}(L_4^{(9)})$.
- $L_5^{(9)} = TD_{e_{32}}(L_{12}^{(11)})$ e $L_3^{(8)} = TD_{e_{21}}(L_5^{(9)})$.
- $L_6^{(10)} = TD_{e_{31}}(L_9^{(12)})$
- $L_3^{(13)} = TD_{e_{21}}(L_3^{(12)})$ e $L_1^{(10)} \hookrightarrow TD_{e_{32}}(L_3^{(13)})$
- $L_5^{(13)} = TD_{e_{21}}(L_9^{(12)})$.
- $L_1^{(C4)} = TD_{e_{32}}(L_3^{(6)})$, $L_4^{(C4)} = TD_{e_{31}}(L_5^{(6)})$ e $L_1^{(C3)} = TD_{e_{21}}(L_1^{(C4)})$.
- $L_2^{(C6)} = TD_{e_{21}}L_5^{(C5)}$.
- $L_3^{(C6)} = TD_{e_{21}}L_{10}^{(C5)}$.
- $L_1^{(C8)} = TD_{e_{21}}L_1^{(C7)}$.
- $L_1^{(C9)} = TD_{e_{21}}L_{13}^{(C10)}$.
- $L_4^{(C9)} = TD_{e_{21}}L_4^{(C10)}$.
- $L_6^{(C9)} = TD_{e_{21}}L_{11}^{(C10)}$.

Agora, com os módulos obtidos, vamos usar o funtor de localização e quocientes em cada bloco e vemos como é possível obter todo módulo de Gelfand-Tsetlin irredutível por este processo:

Bloco	Módulos irredutíveis como localização e quocientes
1	
2	$L_2^{(2)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(2)})$
3	$L_2^{(3)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(3)})$
4	$L_2^{(4)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(4)}); L_3^{(4)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(4)}); L_4^{(4)} = QD_{e_{21}}(L_3^{(4)})$
5	$L_2^{(5)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(5)}); L_1^{(5)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(5)}); L_3^{(5)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(5)})$
6	$\begin{cases} L_5^{(6)} = QD_{e_{32}}(L_3^{(6)}); L_4^{(6)} = QD_{e_{21}}(L_3^{(6)}); L_1^{(6)} = QD_{e_{31}}(L_3^{(6)}) \\ L_2^{(6)} = QD_{e_{21}}(L_5^{(6)}); L_6^{(6)} = QD_{e_{31}}(L_5^{(6)}); L_8^{(6)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(6)}) \\ L_7^{(6)} = QD_{e_{21}}(L_6^{(6)}) \end{cases}$
7	$L_1^{(7)} = QD_{e_{32}}(L_4^{(7)}); L_2^{(7)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(7)}); L_3^{(7)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(7)})$
8	$L_2^{(8)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(8)})/L_3^{(8)}$
9	$\begin{cases} L_2^{(9)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(9)}); L_6^{(9)} = QD_{e_{21}}(L_5^{(9)}); L_1^{(9)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(9)})/L_5^{(9)} \\ L_3^{(9)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(9)}) \end{cases}$
10	$\begin{cases} L_2^{(10)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(10)}); L_5^{(10)} = QD_{e_{21}}(L_6^{(10)}); L_4^{(10)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(10)})/L_6^{(10)} \\ L_2^{(10)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(10)}) \end{cases}$
11	$\begin{cases} L_{10}^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_{12}^{(11)}); L_{11}^{(11)} = QD_{e_{32}}(L_{12}^{(11)}); L_9^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_{11}^{(11)}) \\ L_5^{(11)} = QD_{e_{32}}(L_3^{(11)}); L_4^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_3^{(11)}); L_2^{(11)} = QD_{e_{31}}(L_3^{(11)})/L_{12}^{(11)} \\ L_8^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_2^{(11)}); L_1^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_5^{(11)}); L_6^{(11)} = QD_{e_{31}}(L_5^{(11)})/L_{11}^{(11)} \\ L_7^{(11)} = QD_{e_{21}}(L_6^{(11)}) \end{cases}$
12	$\begin{cases} L_{10}^{(12)} = QD_{e_{21}}(L_9^{(12)}); L_{12}^{(12)} = QD_{e_{31}}(L_9^{(12)}); L_{11}^{(12)} = QD_{e_{21}}(L_{12}^{(12)}) \\ L_5^{(12)} = QD_{e_{32}}(L_3^{(12)})/L_9^{(12)}; L_4^{(12)} = QD_{e_{21}}(L_3^{(12)}); L_2^{(12)} = QD_{e_{31}}(L_3^{(12)}) \\ L_8^{(12)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(12)}); L_6^{(12)} = QD_{e_{31}}(L_5^{(12)}); L_1^{(12)} = QD_{e_{21}}(L_5^{(12)}) \\ L_7^{(12)} = QD_{e_{21}}(L_6^{(12)}) \end{cases}$
13	$\begin{cases} L_6^{(13)} = QD_{e_{32}}(L_5^{(13)}); L_1^{(13)} = QD_{e_{32}}(L_3^{(13)}); L_2^{(13)} = QD_{e_{31}}(L_3^{(13)})/L_5^{(13)} \\ L_4^{(13)} = QD_{e_{32}}(L_2^{(13)}) \end{cases}$

Bloco singular	Módulos irredutíveis como localização e quocientes
$C1$	
$C2$	$L_2^{(C2)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(C2)})$
$C3$	$L_2^{(C3)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(C3)})$
$C4$	$\begin{cases} L_2^{(C4)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(C4)})/L_5^{'(C4)}; L_5^{(C4)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(C4)}) \\ L_3^{(C4)} = QD_{e_{21}}/(L_5^{(C4)}) \end{cases}$
$C5$	$\begin{cases} L_3^{(C5)} = QD_{e_{32}}(L_{10}^{(C5)}); L_5^{(C5)} = QD_{e_{32}}(L_2^{(C5)}) \\ L_6^{(C5)} = QD_{e_{31}}(L_2^{'(C5)}); L_{11}^{(C5)} = QD_{e_{31}}(L_{10}^{(C5)})/(L_2^{(C5)} \bigoplus L_3^{(C5)}) \\ L_8^{(C5)} = QD_{e_{21}}(L_{10}^{(C5)})/L_2^{(C5)}; L_4^{(C5)} = QD_{e_{32}}(L_3^{(C5)})/L_{11}^{(C5)} \\ L_1^{(C5)} = QD_{e_{32}}(L_5^{(C5)}); L_4^{'(C5)} = QD_{e_{32}}(L_3^{'(C5)})/L_{11}^{'(C5)} \end{cases}$
$C6$	$\begin{cases} L_4^{(C6)} = QD_{e_{32}}(L_2^{(C6)}) \end{cases}$
$C7$	$\begin{cases} L_3^{(C7)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(C7)}); L_5^{(C7)} = QD_{e_{32}}(L_1^{(C7)}) \\ L_4^{(C7)} = QD_{e_{31}}(L_5^{'(C7)}); L_2^{(C7)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(C7)}) \\ L_6^{(C7)} = QD_{e_{21}}(L_5^{(C7)})/L_7^{(C7)}; L_7^{(C7)} \hookrightarrow QD_{e_{21}}(L_5^{(C7)}) \end{cases}$
$C8$	$\begin{cases} L_3^{(C8)} = QD_{e_{32}}(L_1^{(C8)}); L_3^{'(C8)} = QD_{e_{31}}(L_1^{(C8)}); L_2^{(C8)} = QD_{e_{31}}(L_3^{'(C8)}) \end{cases}$
$C9$	$\begin{cases} L_7^{(C9)} = QD_{e_{32}}(L_1^{(C9)})/L_4^{(C9)}; L_5^{(C9)} = QD_{e_{31}}(L_6^{(C9)}) \\ L_3^{(C9)} = QD_{e_{31}}(L_4^{(C9)}); L_2^{(C9)} = QD_{e_{32}}(L_7^{'(C9)})/L_5^{'(C9)} \end{cases}$
$C10$	$\begin{cases} L_{16}^{(C10)} = QD_{e_{21}}(L_{13}^{(C10)})/L_{10}^{(C10)}; L_{17}^{(C10)} = QD_{e_{32}}(L_{13}^{(C10)})/L_4^{(C10)} \\ L_5^{(C10)} = QD_{e_{21}}(L_4^{(C10)})/L_6^{(C10)}; L_{19}^{(C10)} \hookrightarrow QD_{e_{21}}(L_{17}^{(C10)}) \\ L_{18}^{(C10)} = QD_{e_{21}}(L_{17}^{(C10)})/L_{19}^{(C10)}; L_1^{(C10)} \hookrightarrow QD_{e_{31}}(L_4^{'(C10)}) \\ L_9^{(C10)} = QD_{e_{31}}(L_{11}^{(C10)})/(L_0^{(C10)} \bigoplus L_7^{(C10)}) \\ L_{12}^{(C10)} = QD_{e_{21}}(L_{11}^{(C10)})/(L_0^{(C10)} \bigoplus L_{10}^{'(C10)}) \\ L_5^{'(C10)} = QD_{e_{21}}(L_4^{'(C10)})/L_6^{'(C10)}; L_8^{(C10)} = QD_{e_{31}}(L_{10}^{'(C10)})/L_{12}^{(C10)} \\ L_{15}^{(C10)} = QD_{e_{32}}(L_{17}^{'(C10)})/L_7^{'(C10)}; L_{18}^{'(C10)} = QD_{e_{21}}(L_{17}^{'(C10)})/L_{19}^{'(C10)} \\ L_{19}^{'(C10)} \hookrightarrow QD_{e_{21}}(L_{17}^{'(C10)}); L_8^{'(C10)} = QD_{e_{21}}(L_7^{'(C10)})/L_9^{'(C10)} \\ L_2^{(C10)} = QD_{e_{21}}(L_1^{(C10)})/(L_0^{'(C10)} \bigoplus L_3^{(C10)}); L_9^{'(C10)} \hookrightarrow QD_{e_{21}}(L_7^{'(C10)}) \\ L_{14}^{(C10)} = QD_{e_{32}}(L_{18}^{'(C10)})/L_8^{'(C10)} \end{cases}$

Referências Bibliográficas

[BL82(1)] D.J. Britten, F.W. Lemire. Irreducible representations of A_n with one-dimensional weight space. Trans. Amer. Math. Soc., 273. no. 2, (1982). pp. 509-540. ix

[BL82(2)] D.J. Britten, F.W. Lemire. A classification of pointed A_n-modules. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 933 (1982), pp. 63-70.

[BL87] D.J. Britten, F.W. Lemire. A classification of simple Lie modules having a 1-dimensional weight space. Trans. Amer. Math. Soc., 299. (1987). pp. 111-121. 20

[BFL95] D.J. Britten, V. Futorny, F.W. Lemire. Simple A_2-modules with a finite-dimensional weight space. Communications in Algebra, v. 23, n.2, (1995), pp. 467-510. x, 7, 19

[DFO89] Yu. Drozd, S. Ovsienko, V. Futorny. Irreducible weighted $\mathfrak{sl}(3)$-modules. Funksionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya, 23 (1989), pp. 57-58. ix, 7

[DFO92] Yu. Drozd, S. Ovsienko, V. Futorny. Gelfand-Tsetlin modules over Lie algebra $\mathfrak{sl}(3)$. Contemporary Mathematics, 131 (1992) pp. 23-29. ix, x, 7

[DFO94] Yu. Drozd, S. Ovsienko, V. Futorny. Harish-Chandra subalgebras and Gelfand-Zetlin modules. Math. and Phys. Sci., 424 (1994), pp. 72-89. ix, x, 2, 3

[Fer90] S. Fernando. Lie algebra modules with finite dimensional weight spaces I. Trans. Amer. Math. Soc. 322 (1990), pp. 757-781. ix

[F86] V. Futorny. A generalization of Verma modules and irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(3)$. Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 38, No. 4, pp. 492-497, July-August, (1986). x, 19, 20, 21, 39, 60

[FO06] V. Futorny, S.Ovsienko. Fibers of characters in Harish-Chandra categories. (2006). 20

[GT50] I.M Gelfand, M.L. Tsetlin. Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.s.), 71 (1950), 825-828. ix, x, 1

[Hum78] J. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in Mathemetics, 9, Springer. (1978).

[Hum78] J. Humphreys. Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$. Graduate Studies in Mathemetics, 94, American Mathematical Society. (2008).

[Ma00] O. Mathieu. Classification of irreducible weight modules. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50, 2, (2000) pp. 537-592. ix, 61

[Maz98] V. Mazorchuk. Tableaux realization of generalized Verma modules. Can. J. Math. Vol. 50(4) (1998), pp. 816-828. ix

[Maz01] V. Mazorchuk. On Categories Of Gelfand-Tsetlin modules. Noncommutative Structures in Mathematics and Physics, (2001), pp. 299-307. ix

[Maz10] V. Mazorchuk. Lectures on $sl(2)$-modules. Imperial College Press, London, (2010).

[Mo06] A.I. Molev. Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras. Handbook of Algebra", Vol. 4, (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier, (2006), pp. 109-170. ix

[Ov02] S. Ovsienko. Finiteness statements for Gelfand-Tsetlin modules. Algebraic structures and their applications, Math. Inst., Kiev, (2002). 20

[Ram12] L.E. Ramirez. Combinatorics of irreducible Gelfand-Tsetlin $sl(3)$-modules. Algebra and Discrete Mathematics. Volume 14 (2012). Number 2. pp. 276-296. 9, 13

[SMar99] L. San Martin. Álgebras de Lie. Editora da Unicamp, (1999).

[Zh74] D.P. Zhelobenko. Compact Lie groups and their representations. Transl. Math. Monographs 40, Amer. Math. Soc. (1974) ix, x, 3