Operadores p -Compactos e a Propriedade de p -Aproximação

Ricardo Correa da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Mestrado em Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a. Mary Lilian Lourenço

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu parcialmente auxílio
financeiro do CNPq

São Paulo, 21 de agosto de 2013

Operadores p -Compactos e a Propriedade de p -Aproximação

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 21 de agosto de 2013.

Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a. Dr^a. Mary Lilian Lourenço- IME-USP
- Prof^o. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui - IMECC-UNICAMP
- Prof^o. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - FAMAT-UFU

Agradecimentos

À minha família pelo apoio; à minha orientadora pelo dedicação; aos amigos e colegas pelas proveitosas discussões, em especial, ao colega Ewerton Ribeiro Torres e ao CNPq pelo apoio financeiro parcial.

“A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.”

(Stefan Banach)

Resumo

Ricardo Correa da Silva **Operadores p -Compactos e a Propriedade de p -Aproximação**. 2013. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

O objetivo desse trabalho é o estudo dos operadores p -compactos e da propriedade de p -aproximação. Estes conceitos estão relacionados a importantes resultados de A. Gröthendieck sobre compacidade e a propriedade de aproximação que foram generalizados em [21] e estudados em [3], [6] e [7].

Palavras-chave: propriedade de aproximação, propriedade de p -aproximação, operadores p -compactos.

Abstract

Ricardo Correa da Silva **p -Compact Operators and the p -Approximation Property**. 2013. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

The purpose of this work is the study of p -compact operators and the p -approximation property. These concepts are connected with important results by A. Gröthendieck about compactness and approximation property that were generalized in [21] and studied in [3], [6] and [7].

Keywords: approximation property, p -approximation property, p -compact operators.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de Abreviaturas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Introdução	xvii
1 Tópicos de Análise Funcional	19
1.1 Espaços de Banach	19
1.2 Espaços Vetoriais Topológicos	32
1.3 Operador Adjunto e Espaço Quociente	42
2 Conjuntos e Operadores p-compactos	45
2.1 Caracterização de Conjuntos Relativamente Compactos	45
2.2 Conjuntos p -compactos	50
2.3 Operadores p -compactos	54
3 A Propriedade de p-Aproximação	67
3.1 Propriedade de Aproximação Clássica e Propriedade de p -Aproximação . .	67
3.2 Caracterização via ω_p -densidade	71
3.3 Caracterização via Traço	76
3.4 Existência de Espaços que não Possuem a p -a.p.	85
Referências Bibliográficas	91

Lista de Abreviaturas

a.p.	Propriedade de Aproximação (<i>Approximation Property</i>)
p -a.p.	Propriedade de p -Aproximação (<i>p-Approximation Property</i>)
D.Y.	Desigualdade de Young
D.H.	Desigualdade de Hölder
D.M.	Desigualdade de Minkowski

Lista de Símbolos

$\mathbb{K}$	Corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou complexos ($\mathbb{C}$).
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
A^c	Complementar do conjunto A .
$[A]$	Subespaço do espaço vetorial V gerado pelos vetores de $A \subset V$.
X, Y, Z	Denotam espaços de Banach.
$(V, \tau)^*$	Dual topológico do espaço vetorial V , quando ficar claro a topologia será omitida.
B_X	Bola unitária fechada em X .
$B_r(a)$	Bola aberta de centro $a \in V_1$ e raio $r > 0$
τ_p	Denota a topologia da convergência uniforme sobre conjuntos p -compactos.
$\mathcal{B}(V_1, V_2)$	Conjunto dos operadores lineares contínuos entre os espaços normados V_1 e V_2 .
$\mathcal{B}(V)$	$\mathcal{B}(V, V)$
$\mathcal{F}(V_1, V_2)$	Subespaço de $\mathcal{B}(V_1, V_2)$ formado pelos operadores de posto finito.
$\mathcal{F}(V)$	$\mathcal{F}(V, V)$
$\mathcal{K}_p(X, Y)$	Subespaço de $\mathcal{B}(X, Y)$ formado pelos operadores p -compactos.
κ_p	Norma em $\mathcal{K}_p(X, Y)$ definida na página 59.
$\mathcal{W}_p(X, Y)$	Subespaço de $\mathcal{B}(X, Y)$ formado pelos operadores fracamente p -compactos.
ω_p	Norma em $\mathcal{W}_p(X, Y)$ definida na página 61.
$\overline{A}^\tau$	Fecho do conjunto $A \subset V$, onde (V, τ) é um espaço vetorial topológico, quando ficar claro a topologia será omitida.
$\overset{\circ}{A}^\tau$	Interior do conjunto $A \subset V$, onde (V, τ) é um espaço vetorial topológico, quando ficar claro a topologia será omitida.
ℓ_p	Conjunto das sequências de elementos de $\mathbb{K}$ p -somáveis.
$\ell_p^s(X)$	Conjunto das sequências de elementos de X fortemente p -somáveis.
$\ell_\infty^s(X)$	Conjunto das sequências limitadas de elementos de X .
$c_o^s(X)$	Conjunto das sequências de elementos de X convergentes a zero.
$\ell_p^w(X)$	Conjunto das sequências de elementos de X fracamente p -somáveis.

$co(A)$	Envoltória convexa de $A \subset V$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.
$\Gamma(A)$	Envoltória absolutamente convexa de $A \subset V$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.
$p - conv(A)$	Envoltória p -convexa do conjunto $A \subset X$.
ρ_A	Funcional de Minkowski do aberto $A \subset V$, onde V é um espaço vetorial topológico.

Introdução

Em 1955, em seu famoso livro [13], A. Gröthendieck demonstra que todo conjunto compacto em um espaço de Banach está contido na envoltória (absolutamente) convexa de uma sequência convergindo a zero. Apesar de o próprio Gröthendieck ter dito que este resultado estava implicitamente contido em um artigo de Dieudonné e Schwartz conhecemos esse resultado como *Princípio de Compacidade de Gröthendieck* ou *Lema de Gröthendieck*. Além disso, no mesmo livro, Gröthendieck apresenta um importante teorema que caracteriza quando um espaço de Banach tem a propriedade de aproximação.

Mais recentemente, em 2002, Sinha e Karn em [21] usando as ideias de Gröthendieck, generalizam o conceito de conjunto compacto introduzindo as definições de conjunto p -compacto, operador p -compacto e propriedade de p -aproximação e, com isso, o principal resultado obtido por eles generaliza um teorema de Gröthendieck e caracteriza quando um espaço de Banach tem a propriedade de p -aproximação.

Desde a introdução desses conceitos em 2002, o interesse nesse tema tem crescido, observamos isto através dos artigos publicados. Alguns deles, como [3], [6] e [7], cujos resultados também serão abordados neste trabalho, dão continuidade ao desenvolvimento da teoria iniciada em [21]. Outros, expandem a teoria em outras direções, tais como polinômios p -compactos como por exemplo [1], no entanto, esses temas não serão tratados neste trabalho.

Dividiremos este trabalho em três capítulos: no primeiro deles, apresentaremos as definições e os resultados que precisaremos para os demais capítulos e que podem ser encontrados na literatura clássica de Análise Funcional. Trataremos de alguns tópicos em espaços de Banach, espaços vetoriais topológicos e espaços localmente convexos, podemos destacar nesse capítulo os teoremas de separação de convexos, que serão de vital importância neste trabalho, propriedades do funcional de Minkowski, do operador adjunto e a caracterização dos duais de alguns espaços de Banach.

No capítulo 2, apresentaremos o Lema de Gröthendieck e a motivação que levou os autores de [21] a introduzir a definição de conjuntos e operadores p -compactos. Mostraremos a relação entre conjuntos p -compactos e q -compactos, daremos exemplos de operadores p -compactos que precisaremos no decorrer do trabalho além de um exemplo de um operador p -compacto que não é r -compacto para $p > r$. Os conjuntos $\mathcal{K}_p(X, Y)$ e $\mathcal{W}_p(X, Y)$ dos operadores p -compactos e fracamente p -compactos, respectivamente, entre os espaços de Banach X e Y também são espaços de Banach quando munidos com as normas κ_p e ω_p respectivamente.

No capítulo final, trataremos exclusivamente da propriedade de p -aproximação. Apresentaremos condições suficientes para um espaço ter a propriedade de aproximação, as quais foram importantes para a solução do famoso *problema da base de Banach*, baseado em [3]. Apresentamos a caracterização do espaço $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)^*$ e da propriedade de

p -aproximação apresentada em [21] baseada na ω_p -densidade de $\mathcal{F}(Y, X)$ em $\mathcal{K}_p(X, Y)$ e outra no traço funcional, para a qual nos baseamos em [3] e [6]. Sempre enfatizaremos a relação dessas caracterizações com o teorema obtido por Gröthendieck em 1955.

Finalizaremos mostrando que todo espaço de Banach tem a propriedade de p -aproximação para $p \leq 2$ e, depois de reproduzir uma construção feita por Davie em [5] como uma simplificação do artigo [10] escrito por Enflo em 1973, apresentamos a demonstração do artigo [21] de que para $p > 2$ sempre existe um espaço de Banach que não possui a p -aproximação.

1

Tópicos de Análise Funcional

Neste capítulo, apresentaremos noções básicas e imprescindíveis ao nosso trabalho, assim como, resultados que nos serão úteis para os capítulos que se seguirão.

1.1 Espaços de Banach

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, dizemos que $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional sublinear se é subaditivo e homogeneamente positivo, isto é,*

$$(i) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in V.$$

$$(ii) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall x \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Definição 1.1.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, chamamos de seminorma uma função $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:*

$$SN1 \quad \rho(x) \geq 0, \forall x \in V.$$

$$SN2 \quad \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x), \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in V$$

$$SN3 \quad \rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in V.$$

Note que, em especial, toda seminorma é um funcional subaditivo e positivamente homogêneo. Nessa mesma linha, definiremos o conceito de *norma*, que será um caso especial de seminorma.

Definição 1.1.3. Chamamos de norma uma função definida em um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ que para cada vetor associa um número real $(\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R})$ e que satisfaz:

$$N1 \quad \|x\| \geq 0, \forall x \in V \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{positividade}).$$

$$N2 \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in V \quad (\text{homogeneidade}).$$

$$N3 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V \quad (\text{Desigualdade Triangular}).$$

Um espaço vetorial normado nada mais é que em espaço vetorial no qual foi definida uma norma.

Definição 1.1.4. Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, uma sequência $(x_n)_n \subset V$ é dita de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Definição 1.1.5. Um espaço vetorial normado V é dito completo com relação a uma norma se toda sequência de Cauchy em V for convergente. Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo.

Exemplo 1.1.6. O conjunto das sequências de escalares limitadas, que representaremos por ℓ_∞ , munido das operações usuais e da norma

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

é um espaço de Banach.

De fato, seja $(x_n)_n \subset \ell_\infty$, onde $x_n = (x_i^n)_i$, uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m \geq N$ temos

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^n - x_i^m| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Portanto,

$$|x_i^n - x_i^m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

e consequentemente, para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência $(x_i^n)_n \subset \mathbb{K}$ é de Cauchy donde segue que $x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i \in \mathbb{K}$ uma vez que $\mathbb{K}$ é completo.

Note que

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^N| + |x_i^N| \leq \varepsilon + \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i^N| = \varepsilon + \|x_N\|_\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

e portanto $x = (x_i)_i \in \ell_\infty$, além disso, tomando o limite $m \rightarrow \infty$ na equação (1.1) temos que

$$|x_i^n - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x - x_n\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - x_i^n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Antes do próximo exemplo, demonstraremos três desigualdades clássicas da Análise Funcional, mas destacamos que tais desigualdades não servirão apenas neste capítulo, elas serão usadas em todo esse trabalho, especialmente no que se refere aos capítulos 2 e 3, já que são muito úteis para lidar com séries e são imprescindíveis no estudo de espaços de sequências, objeto esse, que está intimamente relacionado com nossos objetivos aqui.

Proposição 1.1.7 (Desigualdade de Young). *Sejam $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a$ e $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ estritamente crescente com $f(0) = 0$ então se $\alpha \in [0, a]$ e $\beta \in [0, f(a)]$*

$$\alpha\beta \leq \int_0^\beta f^{-1}(x)dx + \int_0^\alpha f(x)dx$$

Demonstração. Notemos inicialmente que o fato de f ser estritamente crescente implica na existência de uma inversa $f^{-1} : [0, f(a)] \rightarrow [0, a]$. Além disso, como f é crescente, se $f^{-1}(\beta) < a$, o valor mínimo que f assume no intervalo $[f^{-1}(\beta), a]$ é $f(f^{-1}(\beta)) = \beta$ e portanto

$$\int_{f^{-1}(\beta)}^\alpha f(x)dx \geq \int_{f^{-1}(\beta)}^\alpha \beta dx = \beta(\alpha - f^{-1}(\beta)).$$

Como

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \beta f^{-1}(\beta) + \beta(\alpha - f^{-1}(\beta)) \\ &= \left(\beta f^{-1}(\beta) - \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx \right) + \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx + \beta(\alpha - f^{-1}(\beta)) \end{aligned}$$

usando agora integração por partes e posteriormente chamando $y = f(x)$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \int_0^{f^{-1}(\beta)} x f'(x)dx + \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx + \beta(\alpha - f^{-1}(\beta)) \\ &= \int_0^\beta f^{-1}(y)dy + \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx + \beta(\alpha - f^{-1}(\beta)) \\ &\leq \int_0^\beta f^{-1}(y)dy + \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx + \int_{f^{-1}(\beta)}^\alpha f(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\beta f^{-1}(x)dx + \int_0^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx + \int_{f^{-1}(\beta)}^\alpha f(x)dx \\
&= \int_0^\beta f^{-1}(x)dx + \int_0^\alpha f(x)dx
\end{aligned}$$

temos a tese.

□

Corolário 1.1.8. *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazendo $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e sejam $\alpha, \beta > 0$ então $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.*

Demonstração. No resultado anterior escolha

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
x &\longmapsto x^{p-1}
\end{aligned}$$

que atende as hipóteses da Proposição 1.1.7. Teremos então

$$\begin{aligned}
f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
x &\longmapsto x^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}$$

e se tomarmos $\alpha, \beta > 0$ a Desigualdade de Young nos dá

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha x^{\frac{1}{p-1}} dx + \int_0^\beta x^{p-1} dx = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}.$$

Notemos agora que

$$q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} = \frac{p-1+1}{p-1} = \frac{1}{p-1} + 1 \quad (1.2)$$

e portanto

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

□

Proposição 1.1.9 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $x, y \in \mathbb{K}^n$ com $x = (x_i)_{i=1}^n$ e $y = (y_i)_{i=1}^n$ e sejam $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazendo $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Pelo Corolário 1.1.8 temos que

$$\frac{|x_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|x_j|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{|y_j|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q}$$

Somando ambos os lados da desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{|x_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{|x_j|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{|y_j|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{j=1}^n |x_j| |y_j|}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}{p \sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}{q \sum_{i=1}^n |y_i|^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.10 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $x, y \in \mathbb{K}^n$ com $x = (x_i)_{i=1}^n$ e $y = (y_i)_{i=1}^n$ e sejam $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazendo $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{D.H.}{\leq} \left[\left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Usando agora a Equação 1.2 temos que $q(p-1) = p$ e dividindo ambos os lados por $\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}(1-\frac{1}{q})} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

E temos a tese bastando usar que $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ e elevar ambos os lados da desigualdade a p . $\square$

Exemplo 1.1.11. *Seja $1 \leq p < \infty$, o conjunto das seqüências de $\mathbb{K}$ p -somáveis, que representaremos por*

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_n \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

com as operações usuais e a norma dada por

$$\|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

Mostrar que a função $\|\cdot\|_p$ é uma norma é bem simples uma vez que a desigualdade triangular segue diretamente da Desigualdade de Minkowski (Proposição 1.1.10).

Para verificar a completude tomemos uma seqüência de Cauchy $(x_n)_n \subset \ell_p$ onde $x_n = (x_k^n)_k \in \ell_p$, assim, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n|^p < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\|x_n - x_m\|_p^p = \|(x_k^n - x_k^m)_k\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p \geq |x_k^n - x_k^m|^p \forall k \in \mathbb{N}$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a seqüência $(x_k^n)_n \subset \mathbb{K}$ também é de Cauchy e como $\mathbb{K}$ é completo segue que $x_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_k \in \mathbb{K}$. Nosso candidato natural para limite da seqüência $(x_n)_n$ é $x = (\alpha_k)_k$. Vamos agora verificar que isso de fato ocorre.

Note agora que como $(x_n)_n$ é de Cauchy, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$ temos

$$\sum_{k=1}^N |x_k^n - x_k^m|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - x_k^m|^p = \|x_n - x_m\|_p^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

e tomando o limite para $n \rightarrow \infty$ temos $\sum_{k=1}^N |\alpha_k - x_k^m|^p \leq \varepsilon^p$. Agora para $N \rightarrow \infty$ temos

finalmente que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - x_k^m|^p < \varepsilon^p$.

Isso significa ao mesmo tempo que $x - x_m \in \ell_p$ e como este é espaço vetorial concluímos que $x = x_m + (x - x_m) \in \ell_p$ e $x_m \rightarrow x \in \ell_p$.

Note que na demonstração anterior, utilizamos apenas que $\mathbb{K}$ era completo com a norma que nele estava definida, segue então de maneira inteiramente análoga, a seguinte generalização.

Exemplo 1.1.12. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então o conjunto das sequências p -somáveis de X , que representaremos por*

$$\ell_p^s(X) = \left\{ (x_n)_n \subset X \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}$$

com as operações usuais e a norma dada por

$$\|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p},$$

é um espaço de Banach.

Outro exemplo importante o das sequências limitadas do espaço de Banach X .

Exemplo 1.1.13. *Sejam X um espaço de Banach, então o conjunto das sequências limitadas de X , que representaremos por*

$$\ell_{\infty}^s(X) = \left\{ (x_n)_n \subset X \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|x_n\|\} < \infty \right\}$$

com as operações usuais e a norma dada por

$$\|(x_n)_n\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|x_n\|\},$$

é um espaço de Banach.

Definiremos a seguir outro espaço que permeará todo nosso trabalho.

Exemplo 1.1.14. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$, então o conjunto das sequências fracamente p -somáveis de X , que representaremos por*

$$\ell_p^w(X) = \left\{ (x_n)_n \subset X \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p < \infty \quad \forall f \in X^* \right\}$$

com as operações usuais e a norma dada por

$$\|(x_n)_n\|_p^w = \sup_{f \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p \right)^{1/p} \right\},$$

é um espaço de Banach. Além disso é óbvio que $\ell_p^w(X) \supset \ell_p^s(X)$ e se $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ então $\|(x_n)_n\|_p^w \leq \|(x_n)_n\|_p$.

Proposição 1.1.15. *Se X é um espaço de Banach e $Y \subset X$ é um subespaço fechado, então Y é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(y_n) \subset Y$ uma sequência de Cauchy, então (y_n) é de Cauchy em X , como X é completo $\exists y \in X$ tal que $y_n \rightarrow y$. Mas então $y \in \bar{Y}$ e como Y é fechado $\bar{Y} = Y$ o que implica $y \in Y$ e portanto Y é um espaço de Banach. $\square$

Para o próximo resultado, precisaremos do conceito de série *absolutamente convergente*.

Definição 1.1.16. *Sejam V um espaço vetorial normado uma série cujos termos são $(x_n)_n \subset V$ é dita absolutamente convergente se $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$.*

Teorema 1.1.17. *X é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $(x_n)_n \subset X$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m \geq N \Rightarrow \sum_{i=n}^m \|x_i\| < \varepsilon$, portanto,

$$\forall n \geq m \geq N \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^n x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n}^m x_i \right\| \leq \sum_{i=n}^m \|x_i\| < \varepsilon$$

ou seja, $(s_n)_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)_n$ é uma sequência de Cauchy e como por hipótese X é um espaço de Banach, essa série converge.

$(\Leftarrow)$ Dada uma sequência de Cauchy $(x_m)_m \subset X$, para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\exists \tilde{m}_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq l \geq \tilde{m}_n \quad \|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{2^n}$$

tome então

$$m_n = \min \left\{ \tilde{m}_n \mid \|x_k - x_l\| \leq \frac{1}{2^n} \forall k \geq l \geq \tilde{m}_n \right\}.$$

Essa escolha garante que $(x_{m_n})_n$ é uma subsequência de $(x_m)_m$ e, se definirmos $y_{i+1} = x_{m_{i+1}} - x_{m_i}$, teremos que $\sum_{i=1}^M \|y_i\| \leq 1 \quad \forall M \in \mathbb{N}$, ou seja, $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \leq 1$ e então $\sum_{i=1}^n y_i$ é convergente por hipótese, desta forma,

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_{m_{i+1}} - x_{m_i} = x_{m_n} - x_{m_1} \rightarrow x \in X$$

consequentemente $x_{m_n} \rightarrow x + x_{m_1}$ e, portanto, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy com uma subsequência convergente, então $(x_m)_m$ também é convergente. $\square$

Vamos agora definir *base de Schauder* que dará origem à uma classe especial de espaços de Banach que será de nosso interesse mais adiante neste trabalho.

Definição 1.1.18. Uma sequência $(e_n)_n \subset X$ é dita uma *base de Schauder* de X se, para todo $x \in X$, existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Exemplo 1.1.19. Seja $1 \leq p < \infty$ e considere $e_n = (\delta_{ni})_i \in \ell_p$ onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é o delta de Kronecker. Então $(e_n)_n$ é uma base de Schauder de ℓ_p e de c_0 .

Teorema 1.1.20 (Banach). Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $(e_i)_i$ uma base de Schauder de X , então as projeções canônicas

$$P_n : X \rightarrow [\{e_i\}_{i=1}^n] \\ x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

são uniformemente limitadas.

Demonstração. A linearidade de cada P_n é óbvia.

Como $(e_i)_i$ é uma base de Schauder de X , para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_i)_i$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Defina então $||| \cdot ||| : X \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$|||x||| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|$$

e note que

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| = |||x||| \quad (1.3)$$

Disso segue, em especial, que $||| \cdot ||| \geq 0 \ \forall x \in X$ e que $|||x||| = 0 \Rightarrow x = 0$, além disso, pela linearidade de P_n e pelas propriedades do supremo, seguem trivialmente a homogeneidade e a desigualdade triangular, ou seja, $||| \cdot |||$ é outra norma em X .

Mostremos primeiramente que $(e_i)_i$ é uma base de Schauder para $(X, ||| \cdot |||)$. Se tomarmos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - P_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq m$ teremos que

$$|||x - P_m(x)||| = \sup_k \{ \|P_k(x) - P_m(x)\|\} = \sup_k \{ \|P_k(x) - P_{\min(k,m)}(x)\|\} =$$

$$\sup_{k \geq m} \{ \|P_k(x) - P_m(x)\|\} \leq \sup_{k \geq m} \{ \|P_k(x) - x\|\} + \sup_{k \geq m} \{ \|x - P_m(x)\|\} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

Para vermos a unicidade, basta notar que, se $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, teremos $\alpha_j e_j = P_j(x) - P_{j-1}(x) = \beta_j e_j$.

Gostaríamos agora que $(X, ||| \cdot |||)$ seja também um espaço de Banach. De fato, se $(x_n)_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n e_i \right) \subset X$ é uma sequência de Cauchy com relação a norma $||| \cdot |||$, então pela equação (1.3) $(x_n)_n$ é de Cauchy com relação a norma original $\| \cdot \|$ e segue da completude de X com tal norma que $x_n \xrightarrow{\| \cdot \|} x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in X$. Mas acabamos de

mostrar que podemos escrever $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i e_i$ onde a série converge na norma $||| \cdot |||$ e pela equação (1.3) esse série também converge com a norma $\| \cdot \|$. Assim segue da unicidade da representação de $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i e_i$ que $\alpha'_j = \alpha_j \ \forall j \in \mathbb{N}$.

Finalmente, note que

$$|\alpha_1 - \alpha_1^m| \leq \frac{\sup_n \{ \|\sum_{i=1}^n (\alpha_n - \alpha_n^m) e_i\| \}}{\|e_1\|} = \frac{\|x - x_m\|}{\|e_1\|} e$$

$$|\alpha_j - \alpha_j^m| \leq \frac{\sup_n \{ \|\sum_{i=1}^n (\alpha_n - \alpha_n^m) e_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_n^m) e_i\| \}}{\|e_j\|} \leq \frac{2\|x - x_m\|}{\|e_j\|}$$

portanto a sequência dos coeficientes é de Cauchy. Tome agora $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_\varepsilon$ tenhamos

$$\left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i^n e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

e tome $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq M$ tenhamos

$$\left\| \sum_{i=1}^M (\alpha_i - \alpha_i^k) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então $\forall k \geq \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$ temos

$$\|x - x_k\| \leq \sup_n \left\{ \left\| \sum_{i=1}^M (\alpha_i - \alpha_i^k) \right\| \right\} + \left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i^n e_i \right\| + \left\| \sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Concluimos então que a inclusão $I : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ é uma aplicação linear bijetora entre espaços de Banach, logo I é um isomorfismo e portanto existe $R > 0$ tal que $\|x\| < R\|x\|$ para todo $x \in X$, ou seja, $\sup_n \{ \|P_n(x)\| \} \leq R\|x\|$ para todo $x \in X$ e segue que as projeções são uniformemente limitadas, como queríamos. $\square$

Corolário 1.1.21. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $(e_i)_i$ uma base de Schauder de X . Então os funcionais de coordenada $e_i^* : X \rightarrow \mathbb{K}$ definidos por $e_i^* \left(x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i \right) = \alpha_i$ são uniformemente limitadas.*

Enunciaremos agora algumas formas do *Teorema de Hahn-Banach*, comumente chamadas de versões analíticas desse teorema. As demonstrações desses teoremas podem ser facilmente encontradas em livros de Análise Funcional, por exemplo em [15].

Teorema 1.1.22 (Hahn-Banach). *Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear definido em um subespaço $V_0 \subset V$ tal que*

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V_0.$$

Então existe um funcional linear $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ de f tal que

$$\tilde{f}|_{V_0} = f \text{ e } \tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V.$$

Teorema 1.1.23 (Hahn-Banach para Normados). *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado e $f : V_0 \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear limitado definido em um subespaço $V_0 \subset V$. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$\tilde{f}|_{V_0} = f \text{ e } \sup_{x \in V; \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| = \sup_{x \in V_0; \|x\|=1} |f(x)|.$$

Corolário 1.1.24. *Sejam $(V, \|\cdot\|)$ espaço vetorial normado e $x \in V$, $x \neq 0$, então existe um funcional linear limitado $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$\|f\| = 1 \text{ e } f(x) = \|x\|.$$

Definição 1.1.25. *Seja (T, τ) um espaço topológico. Dizemos que $K \subset T$ é compacto se toda cobertura de K por abertos de τ admite subcobertura finita, ou seja, se $\mathcal{U} \subset \tau$ é tal que $K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ então existe $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ finito tal que $K \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.*

Além disso, dizemos que $K \subset T$ é relativamente compacto se $\overline{K}$ é compacto.

Teorema 1.1.26. *Sejam X um espaço de Banach e $K \subset X$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *K é compacto.*

(ii) *Toda sequência $(x_i)_i \subset K$ possui uma subsequência convergente para $x \in K$.*

Demonstração. Seja $(x_i)_i \subset K$ e tome $\mathcal{U}_n = \{B_{\frac{1}{n}}(y)\}_{y \in K}$, por hipótese existem

$$\{B_{\frac{1}{n}}(y_i^n)\}_{i=1}^{j_n} \text{ tais que } K \subset \bigcup_{i=1}^{j_n} B_{\frac{1}{n}}(y_i^n).$$

Note que $\exists k_1$, $1 \leq k_1 \leq j_1$ tal que $B_1 = B_{\frac{1}{2}}(y_{k_1}^1) \cap \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tem infinitos elementos, assim, escolho $x_{i_1} \in B_1$. Procedendo indutivamente e supondo que B_n tem infinitos elementos, temos que $\exists k_{n+1}$, $1 \leq k_{n+1} \leq j_{n+1}$ tal que $B_{n+1} = B_n \cap B_{\frac{1}{n+1}}(y_{k_{n+1}}^{n+1})$ tem infinitos elementos e escolho

$$x_{i_n} \in B_n \cap \{x_j\}_{j=i_{n-1}}^\infty \neq \emptyset.$$

Construimos então uma subsequência $(x_{i_n})_n$ tal que $\forall n > N \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{i_n} \in B_N \subset B_{\frac{1}{N}}(y)$ para algum $y \in K$. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $N > 2\varepsilon$ e concluímos que

$$\forall n, m > N \quad \|x_{i_n} - x_{i_m}\| \leq \|x_{i_n} - y\| + \|y - x_{i_m}\| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon,$$

ou seja, $(x_{i_n})_n$ é de Cauchy e como X é completo, segue que $(x_{i_n})_n$ é convergente para algum $x \in X$.

Devemos ter que $x \in K$, pois caso contrário $\mathcal{U} = \{B_{\frac{\|x-y\|}{2}}(y)\}_{y \in K}$ possuiria uma subcobertura finita $\{B_{\frac{\|x-y\|}{2}}(y_i)\}_{i=1}^n$ e dessa forma

$$x \in \bigcap_{i=1}^n B_{\frac{\|x-y\|}{2}}(x) \subset K^c$$

o que não é possível.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Começaremos mostrando que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall y \in K \exists U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset U_\alpha$.

Suponha tal afirmação falsa, então, para todo $n \in \mathbb{N} \exists y_n \in K$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset U_\lambda \forall \lambda \in \Lambda$, mas por hipótese $(x_n)_n$ admite subsequência $(x_{n_i})_i$ convergente para $x \in K$. Como $\mathcal{U}$ é uma cobertura de K , existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ com $x \in U_\alpha$, mas como U_α é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Tome agora $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $1/n_i < \frac{\varepsilon}{2}$ então

$$y \in B_{\frac{1}{n_i}}(x_{n_i}) \Rightarrow \|y - x\| \leq \|y - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - x\| < \varepsilon,$$

ou seja, $B_{\frac{1}{n_i}}(x_{n_i}) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ o que contraria a hipótese.

Agora note que existe uma cobertura de K por bolas de raio ε . De fato, se isso não fosse verdade poderíamos construir uma sequência escolhendo

$$x_n \in K \setminus \bigcap_{i=1}^{n-1} B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset$$

uma vez que estamos supondo por absurdo que $\{B_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^{n-1}$ não é uma cobertura de K . No entanto, $(x_n)_n$ não pode ter uma subsequência convergente pois $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ se $i \neq j$, contradizendo a hipótese.

Dessas duas conclusões temos que existe uma cobertura $\{B_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ de K e cada $B_\varepsilon(x_i) \subset U_{\alpha(x_i)}$ e portanto $\{U_{\alpha(x_i)}\}_{i=1}^n \subset \mathcal{U}$ é a subcobertura finita que procurávamos.

□

1.2 Espaços Vetoriais Topológicos

Dedicaremos essa seção ao estudo dos espaços vetoriais topológicos, apesar de apresentarmos alguns resultados de forma bastante geral, temos interesse principalmente nos espaços localmente convexos que serão aqueles que aparecerão no capítulo 3. O principal resultado desse capítulo será um resultado conhecido como versão geométrica do Teorema de Hahn-Banach.

Definição 1.2.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subset V$ um conjunto.*

- (i) *Dizemos que A é convexo se $\forall x, y \in A$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$ temos que $(1 - \alpha)x + \alpha y \in A$.*
- (ii) *Dizemos que A é equilibrado se $\forall x \in A$ e $\forall \alpha \in B_{\mathbb{K}}$ temos que $\alpha x \in A$.*
- (iii) *Dizemos que A é absolutamente convexo se A é convexo e equilibrado.*

Proposição 1.2.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, a intersecção de uma família de subconjuntos convexos de V é um subconjunto convexo de V e a intersecção de uma família de subconjuntos equilibrados de V é um subconjunto equilibrado de V .*

Omitiremos a demonstração dessa proposição, mas ela pode ser encontrada na referência [14]. Dessa proposição segue trivialmente que a intersecção de uma família de conjuntos absolutamente convexos é absolutamente convexo. Isso nos sugere fazer a seguinte definição:

Definição 1.2.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subset V$ um subconjunto, chamaremos de:*

- (i) *Envoltória convexa de A o conjunto*

$$co(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \text{ onde } \mathcal{C} = \{C \subset V | A \subset C \text{ e } C \text{ é convexo}\}.$$

- (ii) *Envoltória absolutamente convexa de A o conjunto*

$$\Gamma(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C \text{ onde } \mathcal{C}' = \{C \subset V | A \subset C \text{ e } C \text{ é absolutamente convexo}\}.$$

Note que os conjuntos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são sempre não vazios uma vez que V pertence a ambos. Dessa definição e da Proposição 1.2.2, $co(A)$ e $\Gamma(A)$ são, respectivamente, o menor subconjunto convexo de V que contém A e o menor subconjunto absolutamente convexo de V que contém A .

Proposição 1.2.4. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $A \subset V$ então*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, \{a_i\}_{i=1}^m \in A \text{ e } \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq 1 \right\}.$$

Demonstração. Chamemos de

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid m \in \mathbb{N}, \{a_i\}_{i=1}^m \in A \text{ e } \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq 1 \right\},$$

vamos mostrar primeiramente que B é absolutamente convexo.

É obvio que B é equilibrado. Para mostrar que é convexo, sejam $x, y \in B$ e $\theta \in [0, 1]$, então existem $n, m \in \mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_j\}_{j=1}^m \subset A$ e tais que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \text{ e } y = \sum_{i=1}^m \beta_i b_i \text{ com } \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1, \sum_{i=1}^m |\beta_i| \leq 1.$$

Definamos

$$c_k = \begin{cases} a_k & \text{se } k \leq n \\ b_{k-n} & \text{se } n < k \leq n+m \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_k = \begin{cases} (1-\theta)\alpha_k & \text{se } k \leq n \\ \theta\beta_{k-n} & \text{se } n < k \leq n+m \end{cases}$$

Desta forma

$$(1-\theta)x + \theta y = (1-\theta) \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \theta \sum_{i=1}^m \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{n+m} \gamma_i c_i \in A$$

pois $c_k \in A$ para todo $1 \leq k \leq n+m$ e

$$\sum_{i=1}^{n+m} |\gamma_i| = \sum_{i=1}^n |1-\theta| |\alpha_i| + \sum_{i=1}^m |\theta\beta_i| \leq (1-\theta) \sum_{i=1}^n |\alpha_i| + \theta \sum_{i=1}^m |\beta_i| \leq (1-\theta) + \theta = 1.$$

Portanto $\Gamma(A) \subset B$ e resta agora mostrarmos a outra inclusão. Para isso, procederemos por indução: claro que vale para o caso $n = 1$ pois $\alpha a \in \Gamma(A)$ para todo $a \in A$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$ uma vez que $\Gamma(A)$ é equilibrado. Suponha agora que $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in \Gamma(A)$ quaisquer que sejam $\{a_i\}_{i=1}^n \subset A$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$ com $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$. Seja $\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \subset A$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{K}$ com $\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \leq 1$. Se $\alpha_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n+1$, teríamos o resultado desejado pois $\Gamma(A)$ é equilibrado, caso contrário,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|} + \frac{\alpha_{n+1} a_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|} \in \Gamma(A),$$

pois segue da hipótese de indução que essa é uma combinação convexa de elementos de $\Gamma(A)$ e além disso, como $\Gamma(A)$ é equilibrado temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i| \left(\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|} + \frac{\alpha_{n+1} a_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|} \right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i \in \Gamma(A).$$

Logo $B \subset \Gamma(A)$ e como já havíamos checado a outra inclusão, segue a tese. $\square$

Definição 1.2.5. Chamamos de espaço vetorial topológico o par (V, τ) onde V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e τ é uma topologia tal que as operações $S : V \times V \rightarrow V$ e $M : (\mathbb{K}, V) \rightarrow V$ são contínuas.

$$(x, y) \mapsto x + y \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

Proposição 1.2.6. Sejam V um espaço vetorial topológico e $A \subset V$:

(i) Se A é equilibrado então $\overline{A}$ é equilibrado.

(ii) Se A é convexo então $\overline{A}$ é convexo.

Demonstração. (i) Sejam $x \in \overline{A}$ e $\alpha \in B_{\mathbb{K}}$. Segue da definição de espaço vetorial topológico que $u \mapsto \alpha u$ é contínua, portanto, para qualquer vizinhança V de αx existe uma vizinhança U de x tal que $\alpha U \subset V$.

Como $x \in \overline{A}$, devemos ter $U \cap A \neq \emptyset$. Tome $y \in U \cap A$, então $\alpha y \in \alpha U \subset V$ e $\alpha y \in A$ pois A é equilibrado. Portanto $V \cap A \neq \emptyset$ e $\alpha x \in \overline{A}$.

(ii) Sejam $x, y \in \overline{A}$ e $\alpha \in [0, 1] \subset \mathbb{K}$. Segue facilmente da definição de espaço vetorial topológico que o operador $(u, v) \mapsto (1 - \alpha)u + \alpha v$ é contínuo.

Se W é uma vizinhança de $(1 - \alpha)x + \alpha y$, então existem U e V vizinhanças de x e y respectivamente tais que $(1 - \alpha)U + \alpha V \subset W$. Como $x, y \in \overline{A}$ sabemos que $U \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap A \neq \emptyset$, podemos então tomar $z \in U \cap A$ e $w \in V \cap A$.

Assim, $(1 - \alpha)z + \alpha w \in A$ pois A é convexo e $(1 - \alpha)z + \alpha w \in (1 - \alpha)U + \alpha V \subset W$ e portanto $W \cap A \neq \emptyset$ e consequentemente $(1 - \alpha)x + \alpha y \in \overline{A}$. $\square$

Esse resultado nos mostra que o conjunto $\overline{\text{co}}(A)$ ($\overline{\Gamma}(A)$) é o menor fechado (absolutamente) convexo que contém A . Nos referiremos a esses conjuntos como envoltória (absolutamente) convexa fechada.

Definição 1.2.7. Seja (V, τ) um espaço vetorial topológico. Chamaremos de espaço dual de (V, τ) o conjunto

$$(V, \tau)^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ é um funcional linear contínuo}\}.$$

Mostraremos agora um resultado bastante semelhante a um resultado bem conhecido que é comumente apresentado em livros de Análise Funcional e.g. [15], mas mais geral. Faremos isso pois necessitaremos deste resultado adiante.

Exemplo 1.2.8. *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\ell_p^s(X)$ e $\ell_q^s(X^*)$ definidos como no Exemplo 1.1.12, então $\ell_p^s(X)^* = \ell_q^s(X^*)$.*

De fato, se $x^* = (x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$, defina então o funcional linear $f_{x^*} : \ell_p^s(X) \rightarrow \mathbb{K}$ por $f_{x^*}((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)$. Claro que f_{x^*} está bem definida e é contínua pois, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=1}^N x_n^*(x_n) \right| \leq \sum_{n=1}^N |x_n^*(x_n)| \leq \sum_{n=1}^N \|x_n^*\| \|x_n\| \leq \|(x_n^*)_n\|_q \|(x_n)_n\|_p < \infty.$$

Disso também já segue que $\|f_{x^*}\| \leq \|(x_n^*)_n\|_q$.

Além disso, $f_{x^*} = 0$ com $x^* = (x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ se, e somente se

$$f_{x^*}((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0 \quad \forall (x_n)_n \in \ell_p^s(X),$$

em especial, se tomarmos para cada $i \in \mathbb{N}$ a sequência tal que $x_n = 0$ se $n \neq i$ e $x_i = x \in X$ qualquer, concluímos que $x_i^*(x) = 0 \quad \forall x \in X$ e, portanto $x_i^* = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x^* = 0$.

Dado agora $f \in \ell_p^s(X)^*$, denotamos por $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base Schauder canônica de ℓ_p e definimos $x_n^* \in X^*$ por $x_n^*(x) = f(xe_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (a linearidade e continuidade seguem de que $f \in \ell_p^s(X)^*$). Tome agora $i \in \mathbb{N}$ e $x_n \in B_X$ para cada $1 \leq n \leq i$ e defina $y_i = (y_n^i)_n \in \ell_p^s(X)$ por

$$y_n^i = \begin{cases} |x_n^*(x_n)|^q \frac{x_n}{x_n^*(x_n)} & \text{se } 1 \leq n \leq i \text{ e } x_n \notin \ker(x_n^*) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$f(y_i) = \sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \frac{f(x_n e_n)}{x_n^*(x_n)} = \sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \quad (1.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 f(y^i) &\leq \|f\| \|y^i\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=1}^i \|y_n^i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|f\| \left(\sum_{n=1}^i \left(|x_n^*(x_n)|^q \frac{\|x_n\|}{|x_n^*(x_n)|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Juntando as equações (1.4) e (1.5) temos que

$$\begin{aligned}
 f(y^i) &= \sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \\
 \left(\sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^i |x_n^*(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|
 \end{aligned}$$

Tomamos agora o supremo sobre para todos $x_i \in B_X$ para $1 \leq i \leq N$ e obtemos que

$$\left(\sum_{n=1}^i \|x_n^*\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

e tomando agora o limite $i \rightarrow \infty$ concluímos que $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X)$.

Finalmente, observamos que

$$f((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = f_{(x_n^*)_n}((x_n)_n) \quad \forall (x_n)_n \in \ell_p^s(X).$$

Pelo que foi feito, concluímos que a aplicação $\ell_q^s(X^*) \ni x^* \mapsto f_{x^*}$ é um isomorfismo isométrico.

Exemplo 1.2.9. *Sejam $\ell_1^s(X)$ e $\ell_\infty^s(X^*)$ definidos como no exemplo 1.1.12, então $\ell_1^s(X)^* = \ell_\infty^s(X^*)$.*

Note que disso decorre que se $X = X^*$, em especial, se X é de dimensão finita, $\ell_p^s(X)^* = \ell_q^s(X)$ o que nos remete também ao resultado clássico que mencionamos $\ell_p^* = \ell_q$.

Definição 1.2.10. *Sejam (V, τ) um espaço vetorial topológico e $A \subset V$ um aberto com*

$0 \in A$, chamaremos de funcional de Minkowski de A a função $\rho_A : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$\rho_A(x) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | x \in \lambda A \}$$

Escolhemos A com essas propriedades pois são elas que garantem que ρ_A fica bem definido. De fato, se A é um aberto que contém o vetor nulo, pela definição de espaço vetorial topológico, qualquer que seja $x \in V$ a função $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ é contínua e portanto existe $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda x \in A \forall \lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, em especial, $x \in \frac{1}{\varepsilon}A$, assim, fica garantido que

$$\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | x \in \lambda A \} \neq \emptyset,$$

que é o que necessitávamos, uma vez que esse conjunto é sempre limitado inferiormente.

Proposição 1.2.11. *Sejam (V, τ) um espaço vetorial topológico e $A \subset V$ então:*

- (i) *se A é aberto, convexo e $0 \in A$, então o funcional de Minkowski de A é subaditivo, contínuo e $A = \{x \in V | \rho_A(x) < 1\}$;*
- (ii) *se $A \neq \emptyset$ é aberto e absolutamente convexo, então o funcional de Minkowski de A é uma seminorma;*
- (iii) *se (V, τ) um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{R}$ e A é aberto, convexo e $0 \in A$, então o funcional de Minkowski de A é sublinear.*

Demonstração.

(i) Precisamos mostrar as propriedades (i) e (ii) da Definição 1.1.1.

Sejam $x, y \in V$, segue da convexidade de A que

$$\frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_A(y)}A + \frac{\rho_A(y)}{\rho_A(x) + \rho_A(y)}A \subset A \Rightarrow$$

$$\rho_A(x)A + \rho_A(y)A \subset (\rho_A(x) + \rho_A(y))A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho_A(x+y) &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | x+y \in \lambda A \} \\ &= \inf \{ \lambda_1 + \lambda_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, x+y \in (\lambda_1 + \lambda_2)A \} \\ &\leq \inf \{ \lambda_1 + \lambda_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, x+y \in \lambda_1 A + \lambda_2 A \} \\ &\leq \inf \{ \lambda_1 + \lambda_2 | x \in \lambda_1 A \text{ e } y \in \lambda_2 A \} \\ &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | x \in \lambda A \} + \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | y \in \lambda A \} \\ &= \rho_A(x) + \rho_A(y) \end{aligned}$$

Claro que se $x \in A$ então $\rho_A(x) \leq 1$, mas como $\lambda \xrightarrow{M} \lambda x$ é contínua, $M^{-1}(A \cap [x])$ é um aberto de $\mathbb{K}$ que contém o 1, logo existe $\lambda < 1$ tal que $x \in \lambda A$, portanto, $\rho_A(x) < 1$, ou seja, $A \subset \{x \in V | \rho_A(x) < 1\}$.

Por outro lado, se $x \in V$ é tal que $\rho_A(x) < 1$, deve existir $0 \leq \lambda < 1$ com $x \in \lambda A \subset A$, uma vez que A é convexo e contém a origem. Portanto $\{x \in V | \rho_A(x) < 1\} \subset A$ e das duas inclusões segue a igualdade do enunciado.

Segue da subaditividade de ρ_A que $|\rho_A(x) - \rho_A(y)| \leq \rho_A(x - y)$, basta então mostrar a continuidade no 0. Seja $\varepsilon > 0$ dado, sabemos que εA é aberto que contém o 0 e $x \in \varepsilon A \Rightarrow \rho(x) < \varepsilon$.

(ii) Precisamos mostrar as propriedades (SN2) e (SN3) da Definição 1.1.2, mas (SN3) segue diretamente do item (i). Provemos (SN2):

Sejam $\mu \in \mathbb{K}$ e $x \in V$, caso $\mu = 0$ é trivial, suponhamos então $\mu \neq 0$ então

$$\begin{aligned} \rho_A(\mu x) &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | \mu x \in \lambda A \} \\ &= \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ | \mu x \in \lambda A \} \\ &= \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \frac{\lambda}{|\mu|} \frac{|\mu|}{\mu} A \right. \right\}, \end{aligned}$$

mas uma vez que A é equilibrado $\frac{|\mu|}{\mu} A = A$ e segue que

$$\begin{aligned} \rho_A(\mu x) &= \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \frac{\lambda}{|\mu|} A \right. \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda' |\mu| \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \lambda' A \right. \right\} \\ &= |\mu| \inf \left\{ \lambda' \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \lambda' A \right. \right\} \\ &= |\mu| \rho_A(x). \end{aligned}$$

(iii) Seja $\mu \in \mathbb{R}_+$, o caso $\mu = 0$ é trivial suporemos então que $\mu > 0$, então

$$\begin{aligned} \rho_A(\mu x) &= \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \frac{\lambda}{\mu} A \right. \right\} = \inf \left\{ \lambda' \mu \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \lambda' A \right. \right\} \\ &= \mu \inf \left\{ \lambda' \in \mathbb{R}_+ \left| x \in \lambda' A \right. \right\} \\ &= \mu \rho_A(x). \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.12. *Seja V um espaço vetorial topológico, chamaremos de plano afim ou variedade linear afim ao conjunto da forma $y + M$ onde $y \in V$ e $M \subset V$ é um subespaço próprio de V e chamamos de hiperplano uma variedade afim $y + M$ onde $M \subset V$ é um subespaço próprio maximal de V .*

Proposição 1.2.13. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então $M \subset V$ é subespaço maximal próprio se, e somente se, existe $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ linear e não identicamente nula, tal que $M = \ker(f)$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que M seja maximal próprio e seja $a \in V \setminus M$. Pela maximalidade de M , todo $x \in V$ pode ser escrito de maneira única como $x = \lambda a + m$, com $m \in M$. Defina então $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(\lambda a + m) = \lambda$, dessa forma, $m \in M \Rightarrow f(m) = 0$, de forma que $M \subset \ker(f)$. Por outro lado, $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0.a + m \Rightarrow x \in M$.

$(\Leftarrow)$ Seja $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ linear e não identicamente nula. É claro que $\ker(f)$ é um subespaço e como f é não nula, existe $a \in V$ tal que $f(a) = 1$. Assim, qualquer que seja $x \in M$, $x - f(x)a \in \ker(f) = M \Rightarrow V = [M \cup \{a\}]$.

□

Corolário 1.2.14. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então $H \subset V$ é um hiperplano se, e somente se, existe um funcional linear $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ não identicamente nulo e $c \in \mathbb{K}$ tal que $M = \{x \in V | f(x) = c\}$.*

Proposição 1.2.15. *Seja (V, τ) um espaço vetorial topológico, então $H \subset V$ é hiperplano fechado se, e somente se, existem $f \in V^*$ e $c \in \mathbb{K}$, $f \neq 0$, tais que $H = f^{-1}(\{c\})$.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.2.14 sabemos que existem um funcional linear f e $c \in \mathbb{K}$ tal que $H = f^{-1}(\{c\})$, vamos mostrar f é contínuo se, e somente se, H é fechado.

Claro que se f é contínuo $H = f^{-1}(\{c\})$ é fechado já que $\{c\}$ é fechado em $\mathbb{K}$.

Para a recíproca, uma vez que H é um subespaço próprio, existe $y \in V \setminus H$ e como $V \setminus H$ é aberto, existe uma vizinhança aberta U de 0 tal que $y + U \subset V \setminus H$. Sabendo que $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ é contínua, existe $\delta > 0$ e V vizinhança aberta da origem tal que $\lambda V \subset U \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| < \delta$, desta forma

$$W = \bigcup_{|\lambda| < \delta} \lambda V$$

é um aberto equilibrado contido em U .

Segue disso que existe $M > 0$ tal que $|f(w)| < M \quad \forall w \in W$, pois caso contrário teríamos $f(W) = \mathbb{K}$ e seguiria que existiria $w \in W$ tal que $f(w) = c - f(y)$ e consequentemente $y + w \in f^{-1}(\{c\}) = H$ e $y + w \in y + U \subset V \setminus H$, o que claramente não pode ocorrer.

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\frac{\varepsilon}{M}W$ como vizinhança aberta do zero para concluir que

$$|f(\bar{w})| = \left| f\left(\frac{\varepsilon}{M}w\right) \right| = \frac{\varepsilon}{M} |f(w)| \leq \varepsilon \quad \forall \bar{w} \in \frac{\varepsilon}{M}W$$

Segue que f é contínua na origem e portanto contínua. $\square$

Teorema 1.2.16 (da Separação de Mazur-Dieudonné). *Sejam V um espaço vetorial topológico, M um subespaço de V e $A \subset V$ um conjunto aberto e convexo com $A \cap M = \emptyset$, então existe um subespaço maximal fechado H de V que contém M e é disjunto de A .*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que V seja um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{R}$.

Seja $a \in A$, então, $A - a$ é um subconjunto aberto e convexo que contém a origem, assim pela Proposição 1.2.11 o funcional de Minkowski ρ_{A-a} é contínuo, sublinear e

$$A - a = \{x \in V \mid \rho_{A-a}(x) < 1\} \text{ e } A = \{x \in V \mid \rho_{A-a}(x - a) < 1\} \quad (1.6)$$

Assim, como $M \cap A = \emptyset$, segue que $\rho_{A-a}(x - a) \geq 1 \ \forall x \in M$.

Defina agora $N = \langle M \cup \{a\} \rangle$ e seja $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\phi(x + \lambda a) = \lambda$ que é claramente linear e:

$$\text{Se } x \in M \text{ e } \lambda > 0 \text{ então } \phi(x + \lambda a) = \lambda \leq \lambda \rho_{A-a}\left(\frac{x}{\lambda} + a\right) = \rho_{A-a}(x + \lambda a)$$

$$\text{Se } x \in M \text{ e } \lambda < 0 \text{ então } \phi(x + \lambda a) = \lambda \leq \lambda < 0 \rho_{A-a}(x + \lambda a)$$

Isso significa que ϕ é dominada por ρ_{A-a} em N e, usando o Teorema 1.1.22, obtemos uma extensão $\tilde{\phi}$ de ϕ tal que $\tilde{\phi}(x) \leq \rho_{A-a}(x) \ \forall x \in V$, em especial, $\tilde{\phi}$ é contínuo, e por isso e pela equação (1.6), deve valer que $\tilde{\phi}(x) < 1 \ \forall x \in A - a$.

Defina o subespaço maximal $H = \ker(\tilde{\phi})$, que é fechado já que $\tilde{\phi}$ é contínua, e contém $M = \ker(\phi)$. Além disso,

$$x \in H \Rightarrow 0 = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(x - a) + \tilde{\phi}(a) = \tilde{\phi}(x - a) + \phi(a) \leq \rho_{A-a}(x - a) - 1$$

$$\text{Ou seja, } \rho_{A-a}(x - a) \geq 1 \ \forall x \in H \Rightarrow H \cap A = \emptyset \text{ por (1.6).}$$

Para o caso de V ser um espaço vetorial topológico complexo, então $M_{\mathbb{R}} \subset V_{\mathbb{R}}$ é um subespaço, e pelo que acabamos de mostrar existe um subespaço maximal H de $V_{\mathbb{R}}$ disjunto de A tal que $M \subset H$. Pela Proposição 1.2.15, existe $\phi \in V_{\mathbb{R}}^*$ tal que $H = \ker(\phi)$. Considere $\tilde{H} = H \cap iH$, que é também disjunto de A , e o funcional $\tilde{\phi} \in V^*$ dada por $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$.

$$\ker(\tilde{\phi}) = \{x \in V \mid \phi(x) = 0 \text{ e } \phi(ix) = 0\} = H \cap iH$$

e portanto $\tilde{H}$ é um subespaço maximal de V .

$$M = iM \subset iH \text{ e } M \subset H \Rightarrow M \subset H \cap iH.$$

□

Corolário 1.2.17. *Sejam V um espaço vetorial topológico, M uma variedade afim de V e $A \subset V$ um conjunto aberto e convexo disjunto de M , então existe um hiperplano fechado H de V que contém M e é disjunto de A .*

Vamos agora definir uma classe especial de espaços vetoriais topológicos que será a que de fato estará presente neste trabalho, além disso, daremos uma caracterização para o fecho de subconjuntos nesses espaços a partir de seu dual que será de grande valia para nosso trabalho.

Definição 1.2.18. *Um espaço vetorial topológico V é dito um espaço localmente convexo se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças convexas.*

Como sabemos, basta que 0 possua um sistema fundamental de vizinhanças convexas, uma vez que uma vizinhança U de um elemento arbitrário $x \in V$ é da forma $U = x + \tilde{U}$ onde $\tilde{U}$ é uma vizinhança de 0 .

Corolário 1.2.19. *Sejam V um espaço localmente convexo, M uma variedade linear afim fechada de V e $K \subset V$ um conjunto convexo e compacto disjunto de M , então existe um hiperplano fechado H de V que contém M e é disjunto de K .*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de 0 tal que $(K+U) \cap M = \emptyset$. Como V é localmente convexo, podemos supor U convexo, consequentemente $K+U$ é um convexo e aberto (não-vazio) de V disjunto de M . Pelo Corolário 1.2.17, existe um hiperplano H que contém M e é disjunto de K .

□

Corolário 1.2.20. *Sejam V um espaço localmente convexo e $M \subset V$ um subespaço. Então $x \in \overline{M}$ se, e somente se, $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in V^*$ que se anula em M .*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ óbvio.

$(\Leftarrow)$ Claro que $\overline{M}$ é uma subespaço fechado de V , se $x \notin \overline{M}$ então recaímos nas condições do Corolário 1.2.19 uma vez que $\{x\}$ é um compacto convexo que não intercepta M . Concluimos então que existe $x^* \in V^*$ tal que $M \subset \ker(x^*)$ e $x \notin \ker(x^*) \Rightarrow x^*(x) \neq 0$.

□

1.3 Operador Adjunto e Espaço Quociente

Dedicaremos essa seção ao estudo das propriedades básicas do que chamaremos de operador adjunto, posteriormente, mais especificamente na seção 2.3, faremos uso desses resultados.

Definição 1.3.1. *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$. Chamaremos de operador adjunto e denotaremos por $T^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ o operador definido por*

$$T^*(y^*)(x) = y^*(T(x)) \quad \forall x \in V_1 \text{ e } \forall y^* \in V_2^*.$$

Proposição 1.3.2. *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais normados, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T, S \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$, então*

$$(i) \quad T^* \in \mathcal{B}(V_2^*, V_1^*) \text{ e } \|T^*\| = \|T\|.$$

$$(ii) \quad (\lambda T + S)^* = \lambda T^* + S^*.$$

$$(iii) \quad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*.$$

Demonstração. (i) Dado um operador limitado T o seu adjunto T^* é, de fato, linear pois

$$T^*(\lambda y_1^* + y_2^*)(x) = \lambda y_1^*(T(x)) + y_2^*(T(x)) = \lambda T^*(y_1^*)(x) + T^*(y_2^*)(x) \quad \forall x \in V_1$$

Note que para todo $y^* \in B_{V_2^*}$ e $x \in B_{V_1}$ temos que

$$\|T^*y^*(x)\| = \|y^*(T(x))\| \leq \|y^*\| \|T\| \|x\| \leq \|T\|$$

ou seja,

$$\|T^*y^*\| \leq \|T\| \quad \forall y^* \in B_{V_2^*}$$

e conseqüentemente $T^* \in \mathcal{B}(V_2^*, V_1^*)$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Para a outra desigualdade, sabemos pelo Teorema 1.1.23 que para todo $x \in V_1$ tal que $T(x) \neq 0$ existe $y_x^* \in V_2^*$ tal que

$$\|y_x^*\| = 1 \text{ e } y_x^*(T(x)) = \|T(x)\|$$

assim,

$$\|T(x)\| = y_x^*(T(x)) = T^*y_x^*(x) \leq \|T^*y_x^*\| \|x\| \leq \|T^*\| \|y_x^*\| \|x\| = \|T^*\| \|x\|$$

Como a desigualdade é claramente válida no caso $T(x) = 0$ segue que $\|T(x)\| \leq \|T^*\| \|x\| \forall x \in X$, mas por definição $\|T\|$ é a menor constante que satisfaz essa desigualdade, portanto, $\|T\| \leq \|T^*\|$. Das duas desigualdades segue a tese.

$$(ii) (\lambda T + S)^*(y^*)(x) = y^*((\lambda T + S)(x)) = y^*(\lambda T(x) + S(x)) = y^*(\lambda T(x)) + y^*(S(x)) =$$

$$\lambda T^* y^*(x) + S^* y^*(x) = (\lambda T^* + S^*)(y^*)(x) \forall x \in V_1 \text{ e } \forall y^* \in V_2^*.$$

$$(iii) (T \circ S)^* y^*(x) = y^*(T(S(x))) = T^* y^*(S(x)) = S^* T^* y^*(x) \forall x \in X \text{ e } \forall y^* \in Y^*.$$

□

Corolário 1.3.3. *Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais normados, então*

$$\begin{array}{ccc} * : \mathcal{B}(V_1, V_2) & \rightarrow & \mathcal{B}(V_2^*, V_1^*) \text{ é um isomorfismo isométrico de } \mathcal{B}(V_1, V_2) \text{ em sua imagem.} \\ T & \mapsto & T^* \end{array}$$

Demonstração. Pelo que já vimos na Proposição 1.3.2 já sabemos que esse é um operador linear que preserva norma, basta então mostrar a injetividade.

Se $T^* = 0$ então, $\forall f \in V_2^*$ e $\forall x \in V_1$ temos que $T^*(f)(x) = f(T(x)) = 0$. Assim, pela arbitrariedade de f segue que $T(x) = 0 \forall x \in V_1$. Logo $T = 0$ e portanto esse operador é injetivo.

□

Definição 1.3.4. *Seja V_1 um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $V_2 \subset V_1$ um subespaço e definina uma relação de equivalência em V_1 por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in V_2$ e as classes de equivalência $[x] = \{y \in V_1 \mid y \sim x\}$. Definina o espaço (vetorial) quociente $V_1/V_2 = \{[x] \mid x \in V_1\}$ munido das operações $[x] + [y] = [x + y]$ e $\alpha[x] = [\alpha x]$.*

Denotaremos a aplicação quociente por $\pi : V_1 \rightarrow V_1/V_2$

$$x \mapsto [x]$$

Definição 1.3.5. *Seja V_1 um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $V_2 \subset V_1$ um subespaço fechado. Então*

$$\| [x] \| = \inf \{ \|y\| \mid y \in [x] \} = \inf_{y \in V_2} \{ \|x + y\| \}$$

é uma norma em V_1/V_2 munido das operações $[x] + [y] = [x + y]$ e $\alpha[x] = [\alpha x]$.

Além disso, se X é um espaço de Banach e $Y \subset X$ é um subespaço fechado então X/Y é um espaço de Banach munido com a norma definida acima.

Omitiremos detalhes, mas vamos indicar as referências [14] e [15] para maiores informações e discussões sobre esse tema.

No que segue, vamos apresentar um resultado famoso da teoria de grupos que é especialmente útil quando trabalhamos com quocientes. Por conveniência esse resultado será apresentado aqui no contexto de espaços vetoriais, o que será um pouco mais simples, uma vez que todo espaço vetorial é um grupo abeliano, evitando assim ter que provar que o núcleo de um operador é normal.

Teorema 1.3.6. *Sejam V_1, V_2 espaços de vetoriais normados e $T \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$, então existe um único $\tilde{T} \in \mathcal{B}(V_1/\ker(T), \text{Im}(T))$ bijetor que faz comutar o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{T} & \text{Im}(T) \subset V_2 \\ & \searrow \pi & \nearrow \tilde{T} \\ & V_1/\ker(T) & \end{array} .$$

Além disso, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Demonstração. Tome $\tilde{T} : V_1/\ker(T) \rightarrow \text{Im}(T)$ tal que $\tilde{T}([x]) = \tilde{T}(\pi(x)) = T(x)$.

Claro que temos que verificar que tal função está bem definida, uma vez que fizemos uso de um representante. Se $[x_1] = [x_2] \in V_1/\ker(T)$ temos que $x_1 = x_2 + z$ com $z \in \ker(T)$ e então

$$\tilde{T}([x_1]) = T(x_1) = T(x_1) + T(z) = T(x_1 + z) = T(x_2) = \tilde{T}([x_2]).$$

$\tilde{T}$ é linear pois

$$x_1, x_2 \in V_1 \Rightarrow \tilde{T}([x_1 + x_2]) = T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = \tilde{T}([x_1]) + \tilde{T}([x_2]).$$

Para mostrarmos que $\tilde{T} \in \mathcal{B}(V_1/\ker(T), \text{Im}(T))$, basta notar que

$$\|\tilde{T}([x])\| = \inf_{\tilde{x} \in \ker(T)} \|T(x + \tilde{x})\| \leq \inf_{\tilde{x} \in \ker(T)} \|T\| \|x + \tilde{x}\| = \|T\| \inf_{\tilde{x} \in \ker(T)} \|x + \tilde{x}\| = \|T\| \| [x] \|.$$

Portanto $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Além disso,

$$\|T(x)\| = \|\tilde{T} \circ \pi(x)\| = \|\tilde{T}([x])\| \leq \|\tilde{T}\| \| [x] \| \leq \|\tilde{T}\| \|x\|$$

e das suas desigualdades segue que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Finalmente a bijetividade segue de $\tilde{T}([x]) = T(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(T) \Leftrightarrow [x] = [0]$ e de $y \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow y = T(x)$ para algum $x \in V_1$ e portanto $\tilde{T}([x]) = T(x) = y$.

Definimos $\tilde{T}$ de forma que $T = \tilde{T} \circ \pi$ e, além disso, se $\tilde{S}$ é outro operador limitado satisfazendo essa identidade temos que $(\tilde{T} - \tilde{S})\pi(x) = 0 \forall x \in V_1$ e segue que $\tilde{T} = \tilde{S}$. $\square$

2

Conjuntos e Operadores p -compactos

Este capítulo é de crucial importância, sendo que os resultados que serão apresentados aqui fazem parte do artigo científico [21] e servirão de motivação para dar sentido ao termo p -compacto.

Ressaltamos que X e Y sempre denotarão espaços de Banach.

2.1 Caracterização de Conjuntos Relativamente Compactos

Dedicaremos essa primeira seção à apresentação do Teorema de Gröthendieck que servirá de base para todas as generalizações que se seguirão.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Mazur). *Sejam X um espaço de Banach e $K \subset X$ um conjunto compacto então $\overline{\text{co}}(K)$ e $\overline{\Gamma}(K)$ são compactos.*

Demonstração. Como K é limitado existe $M > 0$ tal que $\|k\| \leq M \forall k \in K$. Assim, se $(k_n)_n \subset K$ e $(\lambda_n)_n \in \ell_1$

$$\sum_{n=1}^N \|\lambda_n k_n\| \leq \sum_{n=1}^N M |\lambda_n| \leq M \|(\lambda_n)_n\|_1 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

donde segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n$ converge absolutamente.

Definamos então

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \mid (k_n)_n \subset K \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \right\}$$

e mostremos que A é compacto.

Seja $(y^i)_i \in A$ então, para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $y^i = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^i k_n^i$ para algum $\lambda^i = (\lambda_n^i)_n \in$

B_{ℓ_1} . Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^i| \in [0, 1] \forall i \in \mathbb{N}$, a sequência $(\lambda^i)_i \subset \prod_{n \in \mathbb{N}} B_{\mathbb{K}} = B_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$. Pelo Teorema de Tychonoff sabemos que $B_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ é compacto, portanto, deve existir subsequência $(\lambda^{i_j})_j \subset B_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$, convergente para $\lambda = (\lambda_n)_n \in B_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ na topologia produto, ou seja, para cada j fixado podemos escrever $\lambda^{i_j} = (\lambda_n^{i_j})_n$ e $\lambda_n^{i_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \lambda_n$.

Voltamos agora nossa atenção para a sequência $(k_n^{i_j})_j \subset K$. Como K é compacto, existe $(k_n^{i_{j_l}})_l$ convergente para $k_n \in K$.

Queremos mostrar que a subsequência $(y^{i_{j_l}})_l$ converge. É razoável esperar que o ponto de convergência seja $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n$ e como também queremos que $y \in A$, precisamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1.$$

De fato, $\sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}}| \leq 1$ e como se trata de uma soma finita temos que

$$1 \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}}| = \sum_{n=1}^N \lim_{l \rightarrow \infty} |\lambda_n^{i_{j_l}}| = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|,$$

assim, como os termos da série são positivos e as somas parciais limitadas temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{i_{j_l}}| \leq 1$, segue que cada $|\lambda^{i_{j_l}}| \leq 1$ e já vimos que $\|k_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$, então, dado um $\varepsilon > 0$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes quatro condições

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}}| < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

$$\sum_{n=1}^N \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| < \frac{\varepsilon}{6} \text{ e para } l \geq N \Rightarrow \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

Assim, para qualquer $l \geq N$, temos que

$$\begin{aligned}
\|y^{i_{j_l}} - y\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n^{i_{j_l}} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n^{i_{j_l}} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n^{i_{j_l}} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} k_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n k_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{i_{j_l}} (k_n^{i_{j_l}} - k_n) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n) k_n \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}}| \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| \|k_n\| \\
&= \sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}}| \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}}| \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| \\
&\quad + \sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| \|k_n\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| \|k_n\| \\
&\leq \sum_{n=1}^N \|k_n^{i_{j_l}} - k_n\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}}| 2M + \sum_{n=1}^N |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| M + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n^{i_{j_l}} - \lambda_n| \frac{\varepsilon}{6} \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6M} 2M + \frac{\varepsilon}{6M} M + 2\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon
\end{aligned}$$

E assim, concluímos que $y^{i_{j_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} y$ e portanto toda sequência possui uma subsequência convergente, donde segue que A é compacto, como queríamos.

Finalmente, note que pela Proposição 1.2.4 e pela definição de envoltória convexa, $co(K) \subset \Gamma(K) \subset A$, logo $\overline{co}(K)$ e $\overline{\Gamma}(K)$ são fechados contidos no compacto A , portanto são também compactos.

□

Corolário 2.1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $K \subset X$ um compacto, então*

$$\overline{\Gamma}(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k_i \left| (k_n)_n \subset K \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq 1 \right. \right\}.$$

Demonstração. Chamaremos de

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k_i \left| (k_n)_n \subset K \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq 1 \right. \right\}.$$

Tome $x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i$ com $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq 1$, usando a Proposição 1.2.4 vemos que $(x_n)_n \subset \Gamma(K)$. Além disso, como $\|k\| \leq M \forall k \in K$ e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0}^{\infty} |\lambda_i| < \frac{\varepsilon}{M}$, concluímos que se $n_0 < m < n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n - x_m\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i k_i - \sum_{i=1}^m \lambda_i k_i \right\| \leq \sum_{i=m}^n \|\lambda_i k_i\| < \varepsilon$$

Portanto, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X e como este é um espaço de Banach, $x_n \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k_i = x \in X$. Disso segue que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k_i \in \bar{\Gamma}(K)$ e desta última $A \subset \bar{\Gamma}(K)$.

Novamente pela Proposição 1.2.4, fica claro que $\Gamma(K) \subset A$, mas, pelo Teorema 2.1.1, A é compacto e consequentemente fechado, então $\bar{\Gamma}(K) \subset \bar{A} = A$. Das duas inclusões segue a igualdade $\bar{\Gamma}(K) = A$.

□

Corolário 2.1.3. *Seja $K \subset X$ um conjunto relativamente compacto então $\overline{co}(K)$ e $\bar{\Gamma}(K)$ são compactos.*

Demonstração. Note que como $\bar{\Gamma}(K)$ é fechado e $K \subset \bar{\Gamma}(K)$, então $\overline{K} \subset \bar{\Gamma}(K)$. Assim, $\bar{\Gamma}(\overline{K}) \subset \bar{\Gamma}(\bar{\Gamma}(K)) = \bar{\Gamma}(K)$ e como obviamente $\bar{\Gamma}(K) \subset \bar{\Gamma}(\overline{K})$, segue que $\bar{\Gamma}(\overline{K}) = \bar{\Gamma}(K)$ que é compacto pelo Teorema 2.1.1. Como anteriormente, o resultado passa a ser trivial para $\overline{co}(K)$.

□

Teorema 2.1.4 (Lema de Gröthendieck). *Seja $K \subset X$, então K é relativamente compacto $\Leftrightarrow \exists (x_n)_n \in c_0^s(X)$ tal que $K \subset \overline{co}(\{x_n\}_n)$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) É fácil ver que se existe $(x_n)_n \in c_0^s(X)$ tal que $K \subset \overline{co}(\{x_n\}_n)$ então K é relativamente compacto, uma vez $\overline{K} \subset \overline{co}(\{x_n\}_n)$ é fechado e este último é compacto pelo Corolário 2.1.3.

($\Rightarrow$) Se $\overline{K}$ é compacto então $2\overline{K}$ também o é, então existem $\{x_i\}_{i=1}^{n_1} \subset 2\overline{K}$ tais que $2K \subset 2\overline{K} \subset \bigcup_{k=1}^{n_1} B_{\frac{1}{2}}(x_k)$.

Podemos então definir indutivamente, tomando $K_1 = K$ e $n_0 = 0$, uma sequência de conjuntos relativamente compactos dados por

$$K_j = \bigcup_{k=n_{j-2}+1}^{n_{j-1}} (2K_{j-1} - x_k) \cap B_{\frac{1}{2^j}}(0), \text{ para } j \geq 2 \quad (2.1)$$

Note que o primeiro passo da indução segue da hipótese de $K = K_1$ ser relativamente compacto. Seja $j > 1$, então, pela hipótese de indução, K_{j-1} é relativamente compacto,

desta forma, devem existir $\{x_i\}_{i=n_{j-2}+1}^{n_{j-1}} \subset \overline{2K_{j-1}}$ tais que $\overline{2K_{j-1}} \subset \bigcup_{k=n_{j-2}+1}^{n_{j-1}} B_{\frac{1}{2^j}}(x_k)$. Portanto, K_j é relativamente compacto uma vez que cada termo da união finita na equação (2.1) é relativamente compacto. Isso encerra a indução.

Note que $k \geq n_j \Rightarrow x_k \in B_{\frac{1}{2^j}}(0) \Rightarrow \|x_k\| < \frac{1}{2^j}$ donde segue que a sequência $(x_k)_k \in c_0^s(X)$.

Mostraremos agora que existem $\{x_{k_j}\}_{j=1}^n \subset \{x_k\}_{k=1}^\infty$ tais que

$$x - \sum_{k=1}^n \frac{x_{k_j}}{2^k} \in \frac{K_{n+1}}{2^n}.$$

De fato, se $x \in K \subset \overline{K}$ então $2x \in 2K \Rightarrow \exists x_{k_1} \in \{x_i\}_{i=1}^{n_1}$ tal que $2x \in B_{\frac{1}{2}}(x_{k_1}) \Rightarrow 2x - x_{k_1} \in K_2 \Rightarrow x - \frac{x_{k_1}}{2} \in \frac{K_2}{2}$. Suponhamos agora que $x - \sum_{k=1}^n \frac{x_{k_j}}{2^k} \in \frac{K_{n+1}}{2^n}$, então

$$2^{n+1}x - \sum_{k=1}^n 2^{n-k+1}x_{k_j} \in 2K_{n+1} \Rightarrow \exists x_{k_{j+1}} \in \{x_k\}_{k=n_{j+1}}^{n_{j+1}+1}$$

tal que

$$2^{n+1}x - \sum_{k=1}^n 2^{n-k+1}x_{k_j} \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x_{k_{n+1}})$$

portanto

$$2^{n+1}x - \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n-k+1}x_{k_j} \in B_{\frac{1}{2^{n+1}}}(0) \cap 2K_{n+1} \subset K_{n+2} \Rightarrow x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_{k_j}}{2^k} \in \frac{K_{n+2}}{2^{n+1}}$$

e isso conclui a indução.

Desse fato concluímos trivialmente que $\left\| x - \sum_{k=1}^n \frac{x_{k_j}}{2^k} \right\| < 2^{-n}$, uma vez que $K_{n+1} \subset B_1(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $x = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_{k_j}}{2^k} \in \overline{co}(\{x_n\}_n)$. Logo $K \subset \overline{co}(\{x_n\}_n)$ e isso conclui a demonstração. □

Esse resultado de Gröthendieck foi apresentado em [13] em 1955, é a principal motivação para quase cinquenta anos depois, em 2002, fosse proposta em [21] uma generalização de ideia de compacidade: a p -compacidade.

Corolário 2.1.5. *Seja $K \subset X$, então K é relativamente compacto $\Leftrightarrow \exists (x_n)_n \in c_0^s(X)$ tal que $K \subset \overline{\Gamma}(\{x_n\}_n)$.*

Demonstração. A implicação direta é consequência do Teorema 2.1.4 e de trivialmente $\overline{co}(\{x_n\}_n) \subset \overline{\Gamma}(\{x_n\}_n)$. A recíproca segue do mesmo argumento do Teorema 2.1.4.

□

Incluimos esse último resultado, que apesar de também ser uma caracterização, é mais fraco que o Teorema de Gröthendieck pois apresentamos uma caracterização utilizando $\overline{\Gamma}(\{x_n\}_n)$, a finalidade de colocarmos esse resultado é que ele será a base para novas definições.

2.2 Conjuntos p -compactos

O último resultado da seção anterior foi, segundo os autores de [21], a inspiração para dar a definição de conjunto p -compacto, mas antes disso precisaremos de alguns resultados.

Proposição 2.2.1. *Sejam X um espaço de Banach, $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então a função*

$$\begin{aligned} E : \ell_p^w(X) &\rightarrow \mathcal{B}(\ell_q, X) & \text{onde} & & E_x : \ell_q &\rightarrow X \\ x = (x_n)_n &\mapsto E_x & & & (\alpha_n)_n &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Seja $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, vamos mostrar que E_x está bem definido. Dado $(\alpha_n)_n \in \ell_q$, mostraremos que $(s_m)_m$ definida por $s_m = \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n$ é uma sequência de Cauchy em X , portanto convergente, uma vez que X é um espaço de Banach.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, fixe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_n)_{n=n_0}^\infty\|_p^w < \frac{\varepsilon}{\|(\alpha_n)_n\|_q}$. Sejam $m > k > n_0$, pelo Teorema 1.1.23, existe $f \in B_{X^*}$ tal que

$$\left\| \sum_{n=k}^m \alpha_n x_n \right\| = \left| f \left(\sum_{n=k}^m \alpha_n x_n \right) \right|$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|s_m - s_k\| &= \left\| \sum_{n=k+1}^m \alpha_n x_n \right\| = \left| f \left(\sum_{n=k+1}^m \alpha_n x_n \right) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^m \alpha_n f(x_n) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |\alpha_n| |f(x_n)| \\ &\leq \|(\alpha_n)_n\|_q \|(f(x_n))_{n=n_0}^\infty\|_p \leq \|(\alpha_n)_n\|_q \|(x_n)_{n=n_0}^\infty\|_p^w < \varepsilon. \end{aligned}$$

A linearidade de E_x é consequência da definição.

Seja $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, para cada $(\alpha_n)_n \in \ell_q$ existe $f \in B_{X^*}$ tal que

$f(E_x((\alpha_n)_n)) = \|E_x((\alpha_n)_n)\|$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \|E_x((\alpha_n)_n)\| &= |f(E_x((\alpha_n)_n))| = \left| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| |f(x_n)| \leq \|(\alpha_n)_n\|_q \|(f(x_n))_n\|_p \\ &\leq \|(\alpha_n)_n\|_q \|(x_n)_n\|_p^w \end{aligned} \quad (2.2)$$

e, portanto, E_x é contínua.

Afirmamos que E é linear. De fato considere $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in \ell_p^w(X)$ então

$$E(\lambda x + y)((\alpha_n)_n) = E_{\lambda x + y}((\alpha_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n =$$

$$\lambda E_x((\alpha_n)_n) + E_y((\alpha_n)_n) = \lambda E(x)((\alpha_n)_n) + E(y)((\alpha_n)_n) \quad \forall (\alpha_n)_n \in \ell_q.$$

Portanto

$$E(\lambda x + y) = \lambda E(x) + E(y).$$

Mostraremos agora que E é uma bijeção. Seja $(e_n)_n$ a base de Schauder canônica de ℓ_q , então

$$E_x = 0 \Leftrightarrow E_x((\alpha_n)_n) = 0 \quad \forall (\alpha_n)_n \in \ell_q \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0 \quad \forall (\alpha_n)_n \in \ell_q,$$

em especial, para $e_k = (\delta_n^k)_n$ portanto

$$x_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0$$

e temos a injetividade de E .

Considere $F \in \mathcal{B}(\ell_q, X)$. Para cada $f \in X^*$ temos que $f \circ F \in \ell_p = \ell_q^*$ e podemos chamar $f \circ F = (\lambda_n)_n$ e $x_n = F(e_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$f(x_n) = f(F(e_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_k^n = \lambda_n,$$

portanto $\|(f(x_n))_n\|_p = \|(\lambda_n)_n\|_p$.

Desta forma, $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ e, para cada $(\alpha_n)_n \in \ell_q$,

$$E_x((\alpha_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F(e_n) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = F((\alpha_n)_n)$$

donde concluimos que $E(x) = E_x = F$ e portanto E é sobrejetora. Note que $E^{-1}(F) = x = (F(e_n))_n$.

Finalmente vamos mostrar que E é uma isometria. Utilizando a equação (2.2) concluímos que $\|E(x)\| = \|E_x\| \leq \|x\|_p^w$.

Para cada $f \in X^*$, $f \circ F \in \ell_p$. Chamamos $f \circ F = (\beta_n)_n$, assim $f \circ F(e_n) = \beta_n$ e $\|f \circ F\| = \|(\beta_n)_n\|_p$. Então

$$\|(f \circ F(e_n))_n\| = \|(\beta_n)_n\|_p = \|f \circ F\| \leq \|f\| \|F\|.$$

Portanto

$$\|E^{-1}(F)\|_p^w \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\| \|F\| = \|F\|$$

Consequentemente

$$\|x\|_p^w = \|E^{-1}(E(x))\|_p^w \leq \|E(x)\|.$$

Dessas duas desigualdades segue que E é uma isometria. □

Observação 2.2.1. Seja X um espaço de Banach, o isomorfismo isométrico acima continua válido nos casos $E : \ell_\infty^w(X) \longrightarrow \mathcal{B}(\ell_1, X)$ e $E : \ell_1^w(X) \longrightarrow \mathcal{B}(c_0, X)$. As demonstrações são análogas utilizando as normas apropriadas, sendo que, por zelo, decidimos enunciar separadamente.

Note que se $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ e $S \in \mathcal{B}(X, Z)$ temos que $S(x) = (S(x_n))_n \in \ell_p^w(Z)$ e $S \circ E_x = E_{S(x)}$. Esse resultado será utilizado nas próximas seções do capítulo 2 e no capítulo 3.

Definição 2.2.2. (i) Sejam $1 \leq p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $x = (x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ uma sequência dada. Chamamos de envoltória p -convexa de x o conjunto $E_x(B_{\ell_q})$. Denotamos $E_x(B_{\ell_q}) = p - \text{conv}(x)$.

(ii) Seja $x \in \ell_1^s(X)$ uma sequência dada. Chamamos de envoltória 1-convexa de x o conjunto $E_x(B_{c_0})$. Denotamos $E_x(B_{c_0}) = 1 - \text{conv}(x)$.

(iii) Seja $x \in c_0^s(X)$ uma sequência dada. Chamamos de envoltória ∞ -convexa de x o conjunto $E_x(B_{\ell_1})$. Denotamos $E_x(B_{\ell_1}) = \infty - \text{conv}(x)$.

Pela caracterização da envoltória absolutamente convexa feita no Corolário 2.1.3, se $x \in c_0(X)$ então $\bar{\Gamma}(x) = E_x(B_{\ell_1}) = \infty - \text{conv}(x)$.

O Lema de Gröthendieck (Teorema 2.1.4) diz que um conjunto $K \subset X$ é relativamente compacto se, e somente se, $K \subset \bar{\Gamma}(x) = \infty - \text{conv}\{x\}$ para algum $x \in c_0^s(X)$. Com base nisto os autores de [21] apresentam a seguinte definição:

Definição 2.2.3. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um conjunto $K \subset X$ é dito relativamente (fracamente) p -compacto se $K \subset p\text{-conv}((x_n)_n)$ para algum $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ ($\in \ell_p^w(X)$).*

A partir das definições apresentadas, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.4. *Sejam $1 \leq p < r \leq \infty$ e K um conjunto relativamente p -compacto, então K é relativamente r -compacto.*

Demonstração. Se $1 < p < r < \infty$, considere $1 < q, s < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Como K é p -compacto existe $x = (x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ tal que $K \subset E_x(B_{\ell_q})$. Considere $\tilde{x} = (\tilde{x}_n)_n$ definido por

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} \left(\|x_n\|^{\frac{(p-r)}{r}} x_n \right) & \text{se } \|x_n\| \neq 0 \\ 0 & \text{se } \|x_n\| = 0 \end{cases}.$$

Assim $\tilde{x} \in \ell_r^s(X)$ pois

$$\sum_{n=1}^N \|\tilde{x}_n\|^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \leq \infty.$$

Seja $y \in E_x(B_{\ell_q})$, então existe $(\lambda_n)_n \in B_{\ell_q}$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$

defina $\tilde{\lambda}_n = \|x_n\|^{\frac{r-p}{r}} \lambda_n$ disto segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_n \tilde{x}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\tilde{\lambda}_n|^s &= \sum_{n=1}^N \left(\|x_n\|^{\frac{r-p}{r}} |\lambda_n| \right)^s = \sum_{n=1}^N \|x_n\|^{\frac{s(r-p)}{r}} |\lambda_n|^s \\ &\stackrel{D.H.}{\leq} \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|^{\frac{-s(p-r)}{r} \frac{q}{q-s}} \right)^{\frac{q-s}{q}} \left(\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \right)^{\frac{s}{q}} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{q-s}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q \right)^{\frac{s}{q}} \\ &\leq \|x\|_p^{\frac{(q-s)p}{q}} \quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Observe que em $(*)$ usamos que o expoente do primeiro somatório é

$$\frac{(r-p)s}{r} \cdot \frac{q}{q-s} = \frac{r-p}{r-1} \cdot \frac{\frac{p}{p-1}}{\frac{p}{p-1} - \frac{r}{r-1}} = p$$

Chamaremos $\alpha = \|x\|_p^{\frac{(q-s)p}{q}}$, assim $y \in E_{\tilde{x}}(\alpha B_{\ell_s}) = E_{\alpha \tilde{x}}(B_{\ell_s})$ para todo $y \in E_x(B_{\ell_q})$. Consequentemente $K \subset E_x(B_{\ell_q}) \subset E_{\alpha \tilde{x}}(B_{\ell_s})$.

Os casos $p = 1$ e $q = \infty$ são análogos.

□

Apesar de simples esse resultado nos ajuda a ver que, da forma como definimos, um conjunto é ∞ -compacto se, e somente se, ele é p -compacto para todo p , onde $1 \leq p < \infty$.

A partir de agora, sempre apresentaremos as demonstrações para o caso $1 < p < \infty$ sendo que os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem de forma análoga tomando os devidos cuidados com a norma.

2.3 Operadores p -compactos

Podemos agora estender outros conceitos que dependam da ideia de compacidade. O mais natural e o primeiro do qual trataremos é o de operadores p -compactos e, mais adiante no capítulo 3, o de propriedade de p -aproximação que depende da definição de operador p -compacto.

Um operador linear é dito compacto se $T(B_X)$ é um conjunto relativamente compacto. Em analogia com esse conceito, é natural fazer a seguinte definição:

Definição 2.3.1. *Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é dito (fracamente) p -compacto se $T(B_X)$ é um conjunto relativamente (fracamente) p -compacto.*

Note que se um operador linear $T : X \rightarrow Y$ leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente (fracamente) p -compactos, em especial, esses serão também limitados, ou seja, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Definição 2.3.2. *Denotaremos por $\mathcal{K}_p(X, Y)$ o conjunto dos operadores p -compactos e por $\mathcal{W}_p(X, Y)$ o conjunto dos operadores fracamente p -compactos.*

Também denotaremos o subespaço de $\mathcal{B}(X, Y)$ formado pelos operadores compactos por $\mathcal{K}(X, Y)$. Note que o conjunto $\mathcal{K}(X, Y)$ coincide com o conjunto $\mathcal{K}_\infty(X, Y)$.

Uma consequência da Proposição 2.2.4 é que, se $1 \leq p < q \leq \infty$, um operador que é p -compacto será também q -compacto e portanto temos a inclusão $\mathcal{K}_p(X, Y) \subset \mathcal{K}_q(X, Y)$. No Exemplo 2.3.6, inspirado por uma ideia apresentada em [1], mostraremos que de forma geral essa inclusão é estrita.

Apresentaremos agora um resultado do caso particular $p = \infty$ pois, vamos utilizá-lo no decorrer do trabalho.

Proposição 2.3.3. *$\mathcal{K}(Y, X)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(Y, X)$*

Demonstração. Seja $T \in \overline{\mathcal{K}(Y, X)}$, então existe $(T_n)_n \in \mathcal{K}(Y, X)$ tal que $T_n \rightarrow T$. Vamos provar que se $(T(y_n))_n \subset \overline{T(B_Y)}$, então $(T(y_n))_n$ possui uma subsequência convergente e teremos a tese a partir do Teorema 1.1.26.

Como T_1 é compacto, $(T_1(y_n))_n$ possui uma subsequência convergente $(T_1(y_{1,n}))_n$ tal que $T(y_{1,n}) \rightarrow x_1 \in X$. Indutivamente para todo $i > 1$, como T_i é compacto, $(T_i(y_{i-1,n}))_n$ possui uma subsequência convergente $(T_i(y_{i,n}))_n$ tal que $T_i(y_{i,n}) \rightarrow x_i \in X$.

Defina $\tilde{y}_j = y_{j,j}$, fica então claro que $T_n(\tilde{y}_j) \rightarrow x_n$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $(T_n)_n$ é de Cauchy, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon \forall n, m > n_0$ e então

$$\|x_n - x_m\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|T_n(\tilde{y}_j) - T_m(\tilde{y}_j)\| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

Concluimos que $(x_n)_n \subset X$ é uma sequência de Cauchy e portanto convergente para $x \in X$ já que X é um espaço de Banach.

Vejam os que de fato $T(\tilde{y}_n) \rightarrow x$. Para isso, dado $\varepsilon > 0$, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T - T_m\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall m \geq n_0$$

$$\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall m \geq n_0$$

Tome agora $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_{n_0}(\tilde{y}_n) - x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \forall n > n_1.$$

Daí, segue então que $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$

$$\|T(\tilde{y}_n) - x\| \leq \|T(\tilde{y}_n) - T_{n_0}(\tilde{y}_n)\| + \|T_{n_0}(\tilde{y}_n) - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| < \varepsilon.$$

□

Exemplo 2.3.4. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$, então o operador $M_\lambda : \ell_p \rightarrow \ell_p$ dado por $M_\lambda((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$ é compacto.

Considere $\lambda^m = (\lambda_n^m)_n \in c_{00}$ dadas por

$$\lambda_n^m = \begin{cases} \lambda_n & \text{se } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{se } n > m \end{cases}$$

onde estamos denotando por c_{00} o espaço das sequências quase nulas.

Sabemos que os operadores M_{λ^m} são compactos pois têm posto finito.

Vejamos agora que $M_{\lambda^m} \rightarrow M_\lambda$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > n_0$.

Assim, quaisquer que sejam $m > n_0$ e $(\alpha_n)_n \in B_{\ell_p}$

$$\|(M_\lambda - M_{\lambda^m})(\alpha_n)_n\|_p = \|(\lambda_n \alpha_n)_{n=m+1}^\infty\| \leq \sup_{n>m} \{\lambda_n\} \|(\alpha_n)_{n=m+1}^\infty\| < \varepsilon.$$

Segue da Proposição 2.3.3 que $M_\lambda \in \mathcal{K}(\ell_p, \ell_p)$.

Passaremos agora a mostrar alguns exemplos ligados à definição de p -compacidade.

Exemplo 2.3.5. *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$, então o operador $M_\lambda : \ell_q \rightarrow \ell_1$ dado por $M_\lambda((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$ é p -compacto.*

Considere $(e_n)_n$ a base de Schauder canônica de ℓ_1 . Então $(\lambda_n e_n)_n \in \ell_p^s(\ell_1)$ e

$$M_\lambda(B_{\ell_q}) = \{(\alpha_n \lambda_n)_n \mid (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\lambda_n e_n) \mid (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q} \right\} = p\text{-conv}((\lambda_n e_n)_n).$$

Exemplo 2.3.6. *Sejam $1 \leq p < r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ e $(a_n)_n \in \ell_r \setminus \ell_p$. Considere $a = (a_n e_n)_n \in \ell_r^s(\ell_p)$, então o operador $E_a : \ell_s \rightarrow \ell_p$ é obviamente r -compacto, mas não é p -compacto.*

Denote por $(e_n)_n$ a base de Schauder canônica de ℓ_p , mostraremos que o conjunto $K = \{E_a(e_n)\}_n = \{a_n e_n\}_n \subset E_a(B_{\ell_s})$ não é p -compacto.

Suponha por absurdo que exista $(x_n)_n \in \ell_p^s(\ell_p)$ tal que $K \subset p\text{-conv}((x_n)_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, deveria existir $(\lambda_m^n)_m \in B_{\ell_q}$ tal que $a_n e_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_i$, mas então

$$a_n e_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n \sum_{j=1}^{\infty} x_j^i e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_j^i \right) e_j \Rightarrow$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_n^i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_j^i = 0 \text{ para todo } j \neq n.$$

Assim, pela Proposição 1.1.9,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_n^i \right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i^n|^q \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i|^p \right)^{\frac{p}{p}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|_p^p < \infty \Rightarrow (a_n)_n \in \ell_p \end{aligned}$$

Mas isso é um absurdo, pois contradiz a escolha inicial de $(a_n)_n$, portanto, como $K \subset E_a(B_{\ell_s})$ e o primeiro não é p -compacto, tão pouco o segundo e segue que $E_a \notin \mathcal{K}_p(\ell_s, \ell_p)$.

A próxima proposição nos auxiliará, após definir uma norma conveniente em $\mathcal{K}_p(X, Y)$, a mostrar que este será um espaço de Banach.

Antes de enunciar tal resultado, vamos fixar a notação que usaremos daqui para frente.

Seja $y = (y_n) \in \ell_p^s(Y)$. Denotaremos por $\pi : \ell_q \rightarrow \ell_q / \ker(E_y)$ a operação quociente e por $\tilde{E}_y : \ell_q / \ker(E_y) \rightarrow \text{Im}(E_y) \subset Y$ o único operador limitado entre esses espaços satisfazendo $E_y = \tilde{E}_y \circ \pi$ conforme Teorema 1.3.6.

Proposição 2.3.7. *Sejam X, Y espaços de Banach e $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$.
- (ii) Existem $y \in \ell_p^s(Y)$ e $T_y \in \mathcal{B}(X, \ell_q / \ker(E_y))$ tais que $T = \tilde{E}_y \circ T_y$.
- (iii) Existem $y \in \ell_p^s(Y)$ e $S_y \in \mathcal{B}(\overline{\text{Im}(E_y^*)}, X^*)$ tais que $T^* = S_y \circ \tilde{E}_y^*$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$, então existe $y \in \ell_p^s(Y)$ tal que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$. Portanto, para cada $x \in B_X$, existe $\alpha \in B_{\ell_q}$ tal que $T(x) = E_y(\alpha)$.

Considere o operador $T_y : X \rightarrow \ell_q / \ker(E_y)$ definido $T_y(x) = [\alpha]$. Caso exista $\beta \in B_{\ell_q}$ tal que $T(x) = E_y(\beta)$, teremos $E_y(\alpha - \beta) = 0$, isto é, $\alpha - \beta \in \ker(E_y)$. Assim, T_y fica bem definido. Segue da construção que $T = \tilde{E}_y \circ T_y$ e T_y é contínua pois $T_y(B_X) \subset B(\ell_q / \ker(E_y))$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $y \in \ell_p^s(Y)$ e $T_y \in \mathcal{B}(X, \ell_q / \ker(E_y))$ tais que $T = \tilde{E}_y \circ T_y$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\|T_y\| \leq 1$. De fato, se $T_y \neq 0$,

$$T = \tilde{E}_{\|T_y\|y} \circ \left(\frac{T_y}{\|T_y\|} \right).$$

Consequentemente

$$T(B_X) \subset E_{\|T_y\|y}(B_{\ell_q}) = p\text{-conv}(\|T_y\|y).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $y = (y_n)_n \in \ell_p^s(Y)$, afirmamos que $(\ell_q / \ker(E_y))^*$ pode ser identificado com $\overline{Im(E_y^*)}$. De fato, seja $\beta \in Im(E_y^*) \subset \ell_p$, então existe $f \in Y^*$ tal que $\beta = (f(y_n))_n$. Para cada $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ker(E_y) \subset \ell_q$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(y_n \alpha_n) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \alpha_n\right) = f(0) = 0.$$

Portanto,

$$(f(y_n))_n \in \left\{ f = (f_i)_i \in \ell_p \left| f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \alpha_i = 0 \ \forall \alpha = (\alpha_n)_n \in \ker(E_y) \right. \right\}$$

isto é, $\beta \in \ker(E_y)^\perp$. Assim, $Im(E_y^*) \subset \ker(E_y)^\perp$ e como $\ker(E_y)^\perp$ é fechado, concluímos que $\overline{Im(E_y^*)} \subset \ker(E_y)^\perp$.

Reciprocamente, seja $f = (\alpha_n)_n \in \ker(E_y)^\perp$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere o subespaço $F_i = [\{y_j\}_{j=1}^i]$ e o funcional $f_i : F_i \rightarrow \mathbb{K}$ linear definido por $f_i(y_j) = \alpha_j \ \forall 1 \leq j \leq i$.

Primeiramente, afirmamos que f_i fica bem definido. De fato, suponha que existem escalares $\tilde{\beta}_n$, $1 \leq n \leq i$, tais que $\sum_{n=1}^i \tilde{\beta}_n y_n = 0$. Considere a sequência $(\beta_n)_n \in \ell_q$ definida por

$$\beta_n = \begin{cases} \tilde{\beta}_n & \text{se } 1 \leq n \leq i \\ 0 & \text{se } n > i \end{cases}$$

então $(\beta_n)_n \in \ker(E_y) \Rightarrow f((\beta_n)_n) = \sum_{n=1}^i \alpha_n \beta_n = 0$.

Utilizando o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.23), para cada $i \in \mathbb{N}$ obtemos uma extensão $\tilde{f}_i \in Y^*$ de f_i . Fica claro então que $(\tilde{f}_i(y_j))_j \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{i \rightarrow \infty} f$ e segue que $f \in \overline{Im(E_y^*)}$.

Portanto $\ker(E_y)^\perp \subset \overline{Im(E_y^*)}$.

Finalmente da identificação $\ker(E_y)^\perp = (\ell_q / \ker(E_y))^*$ o que queríamos.

Por hipótese, existem $y \in \ell_p^s(Y)$ e $T_y \in \mathcal{B}(X, \ell_q / \ker(E_y))$ tais que $T = \tilde{E}_y \circ T_y$. Pela Proposição 1.3.2, $T^* = T_y^* \circ \tilde{E}_y^*$. Basta então tomar $S_y = T_y^*$.

(ii) $\Leftarrow$ (iii) Por hipótese, existem $y \in \ell_p^s(Y)$ e $S_y \in \mathcal{B}(\overline{Im(E_y^*)}, X^*)$ tais que $T^* = S_y \circ \tilde{E}_y^*$. Já vimos que $(\ell_q / \ker(E_y))^* = \overline{Im(E_y^*)}$.

Seja $f \in Y^*$, então $E_y^*(f) = (f(y_n))_n$. Portanto $S_y(\tilde{E}_y^*(f)) = S_y((f(y_n))_n) = T^*(f) = T_y^*(E_y^*(f))$, disso segue a igualdade $S_y = T_y^*$.

Assim, $T^* = S_y \circ E_y^* = (E_y \circ T_y)^*$ e segue do Corolário 1.3.3 que $T = E_y \circ T_y$ como queríamos.

□

Destacamos agora algo que nos será útil no capítulo 3: note que a identificação

$\ker(E_y)^\perp = \overline{\text{Im}(E_y^*)}$, que apresentamos no item (ii) $\Rightarrow$ (iii), nos diz que se E_y é injetora se e somente se $\text{Im}(E_y^*)$ é denso em Y^* .

Vemos que se $T \in \mathcal{W}_p(X, Y)$, então existe $y \in \ell_p^w(Y)$ tal que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ e seguindo os mesmos passos da demonstração anterior podemos demonstrar a proposição a seguir.

Proposição 2.3.8. *Sejam X, Y espaços de Banach e $1 \leq p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{W}_p(X, Y)$.

(ii) *Existem $y \in \ell_p^w(Y)$ e $T_y \in \mathcal{B}(X, \ell_q/\ker(E_y))$ tais que $T = \tilde{E}_y \circ T_y$.*

(iii) *Existem $y \in \ell_p^w(Y)$ e $S_y \in \mathcal{B}(\overline{\text{Im}(E_y^*)}, X^*)$ tais que $T^* = S_y \circ \tilde{E}_y^*$.*

Proposição 2.3.9. *Sejam X e Y espaços de Banach, então $\mathcal{K}_p(X, Y)$ munido com as operações usuais é um espaço vetorial. Para cada $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$, considere*

$$\kappa_p(T) = \inf \{ \|y\|_p \mid y \in \ell_p^s(X) \text{ e } T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q}) \},$$

então κ_p é uma norma em $\mathcal{K}_p(X, Y)$ tal que $\|T\| \leq \kappa_p(T)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathcal{K}_p(X, Y)$ é um espaço vetorial. Como $\mathcal{K}_p(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$, necessitamos mostrar apenas que este é um subespaço.

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$, então existe $y \in \ell_p(Y)$ tal que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$. Pela Proposição 2.2.1, temos que $\lambda T(B_X) \subset \lambda E_y(B_{\ell_q}) = E_{\lambda y}(B_{\ell_q})$. Como $\lambda y \in \ell_p(Y)$ e $\lambda T(B_X) \subset E_{\lambda y}(B_{\ell_q})$, temos que $\lambda T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$.

Sejam $T, S \in \mathcal{K}(X, Y)$, então existem $y = (y_n)_n, z = (z_n)_n \in \ell_p^s(Y)$ tais que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ e $S(B_X) \subset E_z(B_{\ell_q})$.

Considere

$$w_n = \begin{cases} y_k & \text{se } n = 2k - 1 \\ z_k & \text{se } n = 2k \end{cases} \quad (2.3)$$

temos então que

$$\sum_{n=1}^N \|w_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^p = \|y\|_p^p + \|z\|_p^p < \infty, \quad (2.4)$$

portanto $w = (w_n)_n \in \ell_p^s(X)$.

Mostremos agora que existe $T_w \in \mathcal{B}(X, \ell_q/\ker(E_w))$ tal que $T + S = \tilde{E}_w \circ T_w$ e o resultado seguirá da Proposição 2.3.7. Para cada $x \in B_X$ existem $\alpha = (\alpha_n)_n, \beta = (\beta_n)_n \in B_{\ell_q}$ tais que $T(x) = E_y(\alpha)$ e $S(x) = E_z(\beta)$.

Consideremos o operador $T_w : X \rightarrow \ell_q / \ker(E_w)$ definido por

$$T_w(x) = [(\gamma_n)_n]$$

onde $(\gamma_n)_n$ é dada por

$$\gamma_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{se } n = 2k - 1 \\ \beta_n & \text{se } n = 2k \end{cases}.$$

T_w está bem definido pois se $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_n)_n, \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_n)_n \in B_{\ell_q}$ são tais que $T(x) = E_y(\tilde{\alpha})$ e $S(x) = E_z(\tilde{\beta})$, temos que $(\tilde{\gamma}_n)_n \in \ell_q$ dada por

$$\tilde{\gamma}_n = \begin{cases} \tilde{\alpha}_n & \text{se } n = 2k - 1 \\ \tilde{\beta}_n & \text{se } n = 2k \end{cases},$$

é tal que $E_w((\tilde{\gamma}_n)_n) = E_y(\alpha) + E_z(\beta) = (T + U)(x) = E_w((\gamma_n)_n)$. Portanto $(\gamma_n)_n - (\tilde{\gamma}_n)_n \in \ker E_w$.

Assim, $T + S = \tilde{E}_w \circ T_w$ e $T_w \in \mathcal{B}(X, \ell_q / \ker(E_w))$.

Para finalizar, vamos mostrar que κ_p é uma norma. Sejam $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $y \in \ell_p^s(Y)$ tal que $\kappa_p(T) \leq \|y\|_p < \kappa_p(T) + \varepsilon$ e $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$. Assim, $\|T\| \leq \|E_y\| = \|y\|_p^w \leq \|y\|_p < \kappa_p(T) + \varepsilon$, portanto $\|T\| \leq \kappa_p(T)$.

Usando agora que $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{B}(X, Y)$, $\kappa_p(T) = 0 \Rightarrow \|T\| = 0 \Rightarrow T = 0$. Portanto vale (N1).

(N2) segue utilizando o que provamos na Proposição 2.2.1.

Sejam $T, S \in \mathcal{K}(X, Y)$, então existem $y, z \in \ell_p^s(Y)$ tais que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ e $S(B_X) \subset E_z(B_{\ell_q})$.

Considere $w = (w_n)_n \in \ell_p^s(Y)$ definido como na equação (2.3). Já vimos que dessa definição segue que $T + S = \tilde{E}_w \circ T_w$, além disso, a equação (2.4) nos diz que $\|w\|_p \leq \|y\|_p + \|z\|_p$.

Portanto,

$$\kappa_p(T + S) = \inf \{ \|\tilde{w}\|_p \mid \tilde{w} \in \ell_p^s(Y) \text{ e } (T + S)(B_X) \subset E_{\tilde{w}}(B_{\ell_q}) \} \leq \|w\|_p \leq \|y\|_p + \|z\|_p$$

Podemos agora tomar o ínfimo sobre os $y, z \in \ell_p^s(Y)$ tais que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ e $S(B_X) \subset E_z(B_{\ell_q})$.

Assim,

$$\begin{aligned} \kappa_p(T + S) &\leq \inf \{ \|y\|_p \mid T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q}) \text{ e } y \in \ell_p^s(X) \} + \\ &\quad \inf \{ \|w\|_p \mid S(B_X) \subset E_w(B_{\ell_q}) \text{ e } w \in \ell_p^s(X) \} \\ &= \kappa_p(T) + \kappa_p(S) \end{aligned}$$

□

Note que o principal resultado usado nessa demonstração é a Proposição 2.3.7. Utilizando a versão para operadores fracamente p -compactos dessa proposição (Proposição 2.3.8) podemos obter um resultado inteiramente análogo para os operadores fracamente p -compactos.

Proposição 2.3.10. *Sejam X e Y espaços de Banach, então $\mathcal{W}_p(X, Y)$ munido com as operações usuais é um espaço vetorial. Para cada $T \in \mathcal{W}_p(X, Y)$, considere*

$$\omega_p(T) = \inf \{ \|y\|_p^w | y \in \ell_p^w(X) \text{ e } T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q}) \},$$

então ω_p é uma norma em $\mathcal{W}_p(X, Y)$ tal que $\|T\| \leq \omega_p(T) \leq \kappa_p(T)$.

Note que acrescentamos uma relação entre as normas κ_p e ω_p que segue da inclusão $\ell_p^s(Y) \subset \ell_p^w(Y)$.

Lema 2.3.11. (i) *Se X, Y, Z e W são espaços de Banach, $F \in \mathcal{B}(Y, Z)$, $G \in \mathcal{B}(W, X)$ e $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$ então $F \circ T \circ G \in \mathcal{K}_p(W, Z)$ e $\kappa_p(FTG) \leq \|F\| \kappa_p(T) \|G\|$.*

$$(ii) \quad \kappa_p(T) = \inf \left\{ \|S_y\| \|y\|_p \mid y \in \ell_p^s(Y) \text{ e } T^* = S_y \tilde{E}_y^* \right\}.$$

Demonstração. (i) Seja $y \in \ell_p^s(Y)$ é tal que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$, então

$$FTG(B_W) \subset FT(\|G\|B_X) \subset F(\|G\|E_y(B_{\ell_q})) = E_{\|G\|F(y)}(B_{\ell_q}),$$

Portanto $\kappa_p(FTG) \leq \|G\| \|F(y)\| \leq \|G\| \|F\| \|y\|_p$. Tomando agora o ínfimo sobre os $y \in \ell_p^s(Y)$ tais que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ concluímos que

$$\kappa_p(FTG) \leq \|G\| \|F(y)\| \leq \|F\| \kappa_p(T) \|G\|$$

(ii) Sejam $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$ e $\varepsilon > 0$, então existe $y \in \ell_p^s(X)$ tal que $\kappa_p(T) \leq \|y\| < \kappa_p(T) + \varepsilon$. Pela construção feita na Proposição 2.3.7, $T = \tilde{E}_y \circ T_y$ com $\|T_y\| = \|S_y\| < 1$.

Assim, devemos ter

$$\kappa_p(T) = \kappa_p(\tilde{E}_y \circ T_y) \leq \kappa_p(\tilde{E}_y) \|T_y\| \leq \|S_y\| \|(y_n)_n\|_p,$$

mas por outro lado,

$$\|S_y\| \|(y_n)_n\|_p < \kappa_p(T) + \varepsilon$$

Tomando então o ínfimo sobre $y \in Y$ tais que $T(B_X) \subset E_y(B_{\ell_q})$ segue que

$$\kappa_p(T) = \inf \left\{ \|S_y\| \|y\|_p \mid y \in \ell_p^s(Y) \text{ e } T^* = S_y \tilde{E}_y^* \right\}.$$

□

Lema 2.3.12. *Seja $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$ então, dado $\varepsilon > 0$, existem $y \in \ell_p^s(Y)$ e $S_y \in \mathcal{B}(\overline{\text{Im}(E_y^*)}, X^*)$ tais que $T^* = S_y \circ \tilde{E}_y^*$ e satisfazendo simultâneamente*

$$\|y\|_p < (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|S_y\| < (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$. Caso T seja identicamente nula, o resultado é óbvio.

Suponha que T é não nula. Pelo Lema 2.3.11,

$$\kappa_p(T) = \inf_{y \in \ell_p^s(Y)} \left\{ \|S_y\| \|y\|_p \mid T^* = S_y \tilde{E}_y^* \right\}$$

então, existem $\tilde{y} = (\tilde{y}_k)_k \in \ell_p^s(Y)$ não nulo e $S_{\tilde{y}} \in \mathcal{B}(\overline{\text{Im}(E_{\tilde{y}}^*)}, X^*)$ tais que

$$T^* = S_{\tilde{y}} \tilde{E}_{\tilde{y}}^* \text{ e } \|S_{\tilde{y}}\| \|T_{\tilde{y}}\| - \kappa_p(T) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\|S_{\tilde{y}}\| \|T_{\tilde{y}}\| < (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{q}} (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

Considere $\mu \in (0, 1)$ tal que $\frac{\|S_{\tilde{y}}\| \|\tilde{y}\|}{1 - \mu} < \kappa_p(T) + \varepsilon$, $\alpha = \frac{(\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \mu)}{\|\tilde{y}\|}$ e $y = (y_k)_k = \alpha \tilde{y}$, então

$$\|y\| = |\alpha| \|\tilde{y}\| = (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \mu) < (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

Note que $\text{Im}(E_y^*) = \text{Im}(E_{\tilde{y}}^*)$, portanto,

$$S_y((f(\tilde{y}_k))_k) = S_y\left(\frac{1}{\alpha}(f(y_k))_k\right) = \frac{1}{\alpha}S_y((f(y_k))_k) = \frac{1}{\alpha}T^*f = \frac{1}{\alpha}S_{\tilde{y}}((f(\tilde{y}_k))_k) \Rightarrow$$

$$S_y = \frac{1}{\alpha}S_{\tilde{y}} \Rightarrow T^* = S_y E_y^*$$

além disso,

$$\|S_y\| = \frac{1}{\alpha} \|S_{\tilde{y}}\| = \frac{\|\tilde{y}\| \|S_{\tilde{y}}\|}{(\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \mu)} < \frac{\kappa_p(T) + \varepsilon}{(\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}} = (\kappa_p(T) + \varepsilon)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposição 2.3.13. $(\mathcal{K}_p(X, Y), \kappa_p)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Vamos usar a caracterização de espaços de Banach dada no Teorema 1.1.17.

Seja $(T_n)_n \subset \mathcal{K}_p(X, Y)$ uma sequência tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, o Lema 2.3.12 diz que existem $y_n = (y_m^n)_m \in \ell_p^s(Y)$ e $S_n \in \mathcal{B}(\text{Im}(E_y^*), X^*)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$T^* = S_n E_{y_n}^*, \|y_n\|_p < \left(\kappa_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|S_n\| < \left(\kappa_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Note que

$$\sum_{n=1}^N \|y_n\|_p^p < \sum_{n=1}^N \kappa_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon < \infty \Rightarrow (y_n)_n \in \ell_p^s(\ell_p^s(Y)).$$

Seja $\phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção e considere $y = (\tilde{y}_k)_k \in \ell_p^s(Y)$ definido por $\tilde{y}_{\phi(n,m)} = y_m^n$. Para tal y temos:

$$\begin{aligned} E_y^*(f)((\alpha_n)_n) &= f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{y}_k \alpha_k\right) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y_m^n \alpha_{\phi(n,m)}\right) \\ &= f\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{y_n}((\alpha_{\phi(n,m)})_m)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{y_n}^*(f)((\alpha_{\phi(n,m)})_m) \quad \forall (\alpha_n)_n \in \ell_q \end{aligned} \tag{2.5}$$

Definamos agora $S_y : \overline{\text{Im}(E_y^*)} \rightarrow X^*$ dado por

$$\begin{aligned} S_y(E_y^*(f)((\alpha_n)_n)) &= S_y\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{y_n}^*(f)((\alpha_{\phi(n,m)})_m)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n E_{y_n}^*(f)((\alpha_{\phi(n,m)})_m) \quad \forall (\alpha_n)_n \in \ell_q \text{ e } \forall f \in Y^*. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Afirmamos que $S_y \in \mathcal{B}(\overline{Im(E_y^*)}, X^*)$. De fato, sejam $f \in X^*$ e $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell_q$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^N S_n E_{y_n}^*(f)((\alpha_{\phi(n,m)})) \right\| &\leq \|\alpha\|_p \|f\| \sum_{n=1}^N \|S_n E_{y_n}^*(f)\| \\
&\leq \|\alpha\|_p \|f\| \sum_{n=1}^N \|S_n\| \|y_n\|_p \\
&\leq \|\alpha\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^N \|S_n\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^N \|x_n\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\alpha\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^N \kappa_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^N \kappa_p(T_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\alpha\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right) < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

o que mostra que S está bem definida.

Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ na equação (2.7) obtemos que

$$\|S_y(E_y^*(f)((\alpha_n)_n))\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} S_n E_{y_n}^*(f)((\alpha_{\phi(n,m)})) \right\| \leq \|\alpha\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right)$$

então

$$\begin{aligned}
\|S_y(E_y^*(f))\| &= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}} \|S_y(E_y^*(f)((\alpha_n)_n))\| \\
&\leq \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}} \|\alpha\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right) = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\|S_y(E_y^*(f))\| &= \sup \{ \|S_y(E_y^*(f))\| \mid \|E_y^*(f)\| \leq 1 \} \leq \sup_{f \in B_{X^*}} \{ \|y\|_p \|S_y(E_y^*(f))\| \} \\
&= \sup_{f \in B_{X^*}} \left\{ \|y\|_p \|f\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right) \right\} \\
&= \|y\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_p(T_n) + \varepsilon \right) < \infty
\end{aligned} \tag{2.9}$$

portanto S_y é limitada.

Finalmente,

$$T^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n E_{y_n}^*(f) = S_y E_y^*(f).$$

Segue da Proposição 2.3.7 que $T \in \mathcal{K}_p(X, Y)$.

Fixe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} \kappa_p(T_n) < \varepsilon$. Para todo $n > N$ temos que

$$\kappa_p \left(T - \sum_{n=1}^N T_n \right) = \kappa_p \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} T_n \right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \kappa_p(T_n) < \varepsilon$$

e portanto $\sum_{n=1}^N T_n \xrightarrow{k_p} T$.

□

Seguindo o mesmo procedimento, mas desta vez utilizando a Proposição 2.3.8, que é análoga à Proposição 2.3.7 teremos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.14. $(\mathcal{W}_p(X, Y), \omega_p)$ é um espaço de Banach.

3

A Propriedade de p -Aproximação

Este capítulo é dedicado ao estudo da Teoria de p -aproximação, que assim como aconteceu no capítulo anterior, surge como uma generalização do que nos referiremos como *propriedade de aproximação (clássica)* (a.p.). A a.p. foi amplamente estudada por Gröthendieck entre os anos de 1953 e 1955.

Assim, o foco desse capítulo é apresentar análogos do Teorema de Gröthendieck para o caso da propriedade de p -aproximação. Apresentaremos as definições e resultados publicados em [21].

3.1 Propriedade de Aproximação Clássica e Propriedade de p -Aproximação

Daremos início definindo a *propriedade de aproximação* (a.p.) e tratando de alguns resultados que precisaremos futuramente. Posteriormente, definiremos, em analogia com a a.p., a *propriedade de p -aproximação* (p -a.p.) e suas equivalências seguindo a referência [21].

Definição 3.1.1. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de aproximação* se dados um conjunto compacto $K \subset X$ e $\varepsilon > 0$ existe $T \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\|Tx - x\| < \varepsilon \forall x \in K$.

Vamos agora apenas enunciar o Teorema de Gröthendieck, afinal, foi com o intuito de encontrar uma generalização que foram feitas todas as definições de [21] e que apresentaremos a seguir.

Teorema 3.1.2 (Gröthendieck). *Seja X um espaço de Banach, então são equivalentes:*

- (i) X tem a propriedade de aproximação.
- (ii) Para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é denso em $\mathcal{B}(Y, X)$ com a topologia da convergência uniforme sobre conjuntos compactos.
- (iii) Para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é denso em $\mathcal{K}(Y, X)$ com a topologia da norma usual em $\mathcal{B}(Y, X)$.
- (iv) Se $(x_n)_n \subset X$ e $(x_n^*)_n \subset X^*$ são tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| \|x_n\| < \infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0 \quad \forall x \in X, \text{ então } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Não apresentaremos tal demonstração neste momento, pois, como dissemos, esse será um caso particular dos teoremas que apresentaremos mais adiante, uma vez que escolheremos nossas definições de forma que o caso $p = \infty$ recaia no caso clássico.

Apresentaremos agora um resultado que além de gerar toda uma classe de exemplos de espaços com a a.p. servirá para mostrar um interessante resultado proposto em 1932 por S. Banach em [2] cuja solução foi dada por P. Enflo em [10].

Proposição 3.1.3. *Seja X um espaço de Banach, se X admite uma base de Schauder, então X tem a propriedade de aproximação.*

Demonstração. Seja $(e_i)_i$ uma base de Schauder de X . Para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

Considere as projeções canônicas $P_n : X \rightarrow [\{e_i\}_{i=1}^n]$ dadas por $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Sabemos pelo Teorema 1.1.20 que existe $M > 0$ tal que $\|P_n\| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dados $\varepsilon > 0$ e K um conjunto compacto, existem $\{y_i\}_{i=1}^n \subset K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{3(M+1)}}(y_i)$ e existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{n_\varepsilon} y_i - y_i\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Seja $x \in K$, então existe $y_j \in \{y_i\}_{i=1}^n$ tal que $\|x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$. Consequentemente,

$$\|P_{n_\varepsilon} x - x\| \leq \|P_{n_\varepsilon} x - P_{n_\varepsilon} y_j\| + \|P_{n_\varepsilon} y_j - y_j\| + \|y_j - x\| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\|P_{n_\varepsilon}x - x\| < \varepsilon, \quad \forall x \in K.$$

□

Vamos agora demonstrar um resultado do qual seguirá que todo espaço de Hilbert tem a a.p..

Teorema 3.1.4. *Seja H um espaço de Hilbert, então $\overline{\mathcal{F}(X, H)} = \mathcal{K}(X, H)$ para qualquer espaço de Banach X .*

Demonstração. Claro que $\overline{\mathcal{F}(X, H)} \subset \mathcal{K}(X, H)$ uma vez que todo operador de posto finito é compacto e $\mathcal{K}(X, H)$ é fechado.

Sejam $T \in \mathcal{K}(X, H)$ e $\varepsilon > 0$, então $T(B_X)$ é relativamente compacto e portanto existem $\{h_i\}_{i=1}^n$ tais que $T(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{2}}(h_i)$.

Seja $P : H \rightarrow [\{h_i\}_{i=1}^n] \subset H$ a projeção ortogonal sobre $[\{h_i\}_{i=1}^n]$, então $P \circ T \in \mathcal{F}(X, H)$.

Observamos que como $\|P\| \leq 1$,

$$\|P \circ T(x) - h_i\| = \|P \circ T(x) - P(h_i)\| \leq \|T(x) - h_i\| \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Assim, para cada $x \in B_X$, então $\exists h_j \in \{h_i\}_{i=1}^n$ tal que $\|T(x) - h_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e

$$\|T(x) - P \circ T(x)\| \leq \|T(x) - h_j\| + \|h_j - P \circ T(x)\| \leq 2\|T(x) - h_j\| < \varepsilon$$

Finalmente, como a última desigualdade vale para $x \in B_X$ arbitrário, temos a tese.

□

Segue também do Teorema de Gröthendieck (Teorema 3.1.2) e do Teorema 3.1.4 o seguinte resultado:

Corolário 3.1.5. *Todo espaço de Hilbert tem a propriedade de aproximação clássica.*

Definição 3.1.6. *Seja $1 \leq p \leq \infty$, dizemos que um espaço de Banach X tem a propriedade de p -aproximação se para todo conjunto p -compacto $K \subset X$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $T \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\|Tx - x\| < \varepsilon \quad \forall x \in K$.*

Definição 3.1.7. *Sejam X, Y espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, chamaremos de topologia da convergência uniforme sobre conjuntos p -compactos a topologia localmente convexa sobre $\mathcal{B}(Y, X)$, que denotaremos por τ_p , gerada pela família de seminormas*

$$\|\cdot\|_K = \sup \{ \|T(y)\| \mid y \in K \}$$

onde K percorre todos os conjuntos p -compactos de Y .

Lembramos ainda que τ_p é uma topologia Hausdorff uma vez que subconjuntos finitos são sempre p -compactos.

Note que se podemos aproximar o operador identidade por operadores de posto finito uniformemente sobre conjuntos p -compactos, podemos aproximar qualquer operador limitado nas mesmas condições e temos o seguinte resultado que é o análogo da equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii) no Teorema de Gröthendieck.

Proposição 3.1.8. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, então são equivalentes:*

(i) *X tem a propriedade de p -aproximação.*

(ii) *Para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_p -denso em $\mathcal{B}(Y, X)$.*

Uma conclusão imediata é que se $p \leq q$ e X tem a propriedade de q -aproximação então X tem a propriedade de p -aproximação. Isso se dá pois, como X tem a q -aproximação, $\mathcal{B}(Y, X) = \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_q}$ por hipótese, mas pela Proposição 2.2.4, $\tau_p \leq \tau_q$, assim $\mathcal{B}(Y, X) = \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_q} \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_p} \subset \mathcal{B}(Y, X)$ e portanto $\mathcal{B}(Y, X) = \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_p}$.

Um último comentário, é que se um espaço tem a propriedade de aproximação ele tem a propriedade de p -aproximação para qualquer $p \geq 1$.

Novamente o conceito de propriedade de ∞ -aproximação coincide com a propriedade de aproximação clássica (a.p.) estudada por Gröthendieck e nosso grande objetivo agora é conseguir um resultado que generalize o Teorema de Gröthendieck para a p -a.p. em lugar apenas da a.p., trabalho esse começado em [21] e que se seguiu em [6].

Vejamos agora o primeiro resultado nesse sentido.

Proposição 3.1.9. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, então são equivalentes:*

(i) *X tem a propriedade de p -aproximação.*

(ii) *Para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é $\|\cdot\|$ -denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$ e $\varepsilon > 0$ dados, então $T(B_Y)$ é um conjunto relativamente p -compacto de X . Como X é um espaço que possui a p -a.p., existe $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\|F(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in T(B_Y) \Rightarrow \|F \circ T(y) - T(y)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall y \in B_Y.$$

Assim, $F \circ T \in \mathcal{F}(Y, X)$ é tal que $\|F \circ T - T\| < \varepsilon$, portanto $\mathcal{F}(Y, X)$ é $\|\cdot\|$ -denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dados $\varepsilon > 0$ e K um conjunto relativamente p -compacto, existe $x = (x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ tal que $K \subset p\text{-conv}((x_n)_n)$. Considere $Y = \ell_q / \ker(E_x)$ e $\tilde{E}_x : Y \rightarrow X$ como na Proposição 2.3.7. O operador $\tilde{E}_x$ é p -compacto por definição e $K \subset \tilde{E}_x(B_Y)$.

Por hipótese, existe $F \in \mathcal{F}(Y, X)$ tal que

$$\|F(y) - \tilde{E}_x(y)\| < \varepsilon \quad \forall y \in B_Y \Rightarrow \|F \circ \tilde{E}_x^{-1}(x) - x\| < \varepsilon \quad \forall x \in \tilde{E}_x(B_Y) \supset K$$

e temos a tese uma vez que $F \circ \tilde{E}_x^{-1} \in \mathcal{F}(X)$.

□

3.2 Caracterização via ω_p -densidade

Começaremos agora a apresentar a demonstração da versão generalizada do Teorema de Gröthendieck (Teorema 3.1.2), mas para isso precisaremos do seguinte lema bastante útil.

Lema 3.2.1. *Seja $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ então existe uma sequência $(t_n)_n$ de números positivos, estritamente crescente e com $t_n \rightarrow \infty$ tal que $(y_n)_n = (t_n x_n)_n \in \ell_p^s(X)$.*

Demonstração. O caso em que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0 \quad \forall n > N$ é trivial, então iremos supor que isso não acontece.

Como $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$, podemos definir $M_0 = 0$ e tomar, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$M_k = \max \left\{ \min \left\{ N \in \mathbb{N} \left| \sum_{n=i}^{\infty} \|x_n\|^p < \frac{1}{2^k k} \quad \forall i > N \right\}, M_{k-1} + 1 \right\}.$$

Note que $(M_k)_k$ é uma sequência de números inteiros estritamente crescente, portanto, ilimitada. Considere

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq M_1 \\ k^{\frac{1}{p}} & \text{se } M_k < n \leq M_{k+1} \end{cases}$$

que é claramente estritamente crescente, ilimitada e de termos positivos.

Desta forma, a sequência $(y_n) = (t_n x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ pois

$$\sum_{n=1}^N \|y_n\|^p = \sum_{n=1}^N |t_n|^p \|x_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{M_1} \|x_n\|^p + \sum_{k=1}^N \sum_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} |t_n|^p \|x_n\|^p =$$

$$\sum_{n=1}^{M_1} \|x_n\|^p + \sum_{k=1}^N t_{M_k+1}^p \sum_{n=M_k+1}^{M_{k+1}} \|x_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{M_1} \|x_n\|^p + \sum_{k=1}^N k \frac{1}{2^k k} \leq \sum_{n=1}^{M_1} \|x_n\|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Tomando agora o limite para $N \rightarrow \infty$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p \leq \sum_{n=1}^{M_1} \|x_n\|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

□

Antes de continuarmos, vamos estabelecer algumas notações. Sejam y_n^* funcionais lineares de Y e $x_n \in X$ com $1 \leq n \leq N$. Escreveremos $\sum_{n=1}^N y_n^* \otimes x_n$ para simbolizar o operador linear definido por

$$\sum_{n=1}^N y_n^* \otimes x_n(y) = \sum_{n=1}^N y_n^*(y) x_n \quad \forall y \in Y$$

Um operador $F \in \mathcal{F}(Y, X)$ se, e somente se, existem $y_n^* \in Y^*$ e $x_n \in X$, $1 \leq n \leq N$ tais que

$$F = \sum_{n=1}^N y_n^* \otimes x_n.$$

Vamos agora apresentar um importante resultado demonstrado em [21] que é o análogo da equivalência de (i) $\Leftrightarrow$ (iii) no Teorema de Gröthendieck.

Teorema 3.2.2. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X tem a propriedade de p -aproximação.

(ii) $\mathcal{F}(Y, X)$ é w_p -denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$ para todo espaço de Banach Y .

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam Y um espaço de Banach e $\varepsilon > 0$ dados. Para cada $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$, $\exists x \in \ell_p^s(X)$ tal que $T(B_Y) \subset E_x(B_{\ell_q})$.

Uma vez que $E_x(B_{\ell_q})$ é p -compacto, por hipótese $\exists F \in \mathcal{F}(X)$ com

$$\|(F - I)(\tilde{x})\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \tilde{x} \in E_x(B_{\ell_q}) \Rightarrow$$

$$\|(F - I)E_x\| = \sup \{ \|(F - I)E_x((\alpha_n)_n)\| \mid (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q} \} < \varepsilon$$

Denote por $\tilde{F} = F \circ T \in \mathcal{F}(Y, X)$, pela escolha de $\tilde{F}$ temos que

$$(\tilde{F} - T)(B_Y) = (F - I)(T(B_Y)) \subset (F - I)(E_x(B_{\ell_q})) = E_{((F-I)(x_n))_n}(B_{\ell_q}),$$

portanto,

$$\omega_p(\tilde{F} - T) \leq \|((F - I)(x_n))_n\|_p^w = \|E_{((F-I)(x_n))_n}\| = \|(F - I)E_x\| < \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $\varepsilon > 0$ e K um conjunto relativamente p -compacto dados, então existe $x = (x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ tal que $K \subset p\text{-conv}(x) \subset X$.

Pelo Lema 3.2.1, existe uma sequência de escalares $(t_n)_n$ tal que $t_n > 0$, $t_n \rightarrow \infty$ e $\tilde{x} = (t_n x_n)_n \in \ell_p^s(X)$. Considere $U = p\text{-conv}(\tilde{x})$ e $Y = [U]$, note que pela linearidade de $E_{\tilde{x}}$, se $\lambda \in [-1, 1]$ e $u \in U$, então $\lambda x \in U$, portanto $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$, além disso, U é compacto e convexo.

Vamos mostrar que Y é um espaço de Banach quando munido da norma dada pelo funcional de Minkowski de $\mathring{U} \neq \emptyset$,

$$\|y\|_Y = \rho_{\mathring{U}}(y) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid y \in \lambda \mathring{U} \right\}.$$

Pela Proposição 1.2.11, segue que $\|\cdot\|_Y$ é uma norma em Y com $B_Y = U$ uma vez que U é convexo e $Y = [U]$.

Afirmamos que Y é um espaço de Banach. De fato, dada uma sequência de Cauchy $(x_n)_n \subset Y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $\|x_n - x_N\|_Y < 1 \Rightarrow x_n - x_N \in U$. Logo, a sequência $(\tilde{x}_n)_n = (x_{n+N} - x_N)_n$ está contida em U . Como U é um conjunto compacto, $(\tilde{x}_n)_n$ possui uma subsequência $(\tilde{x}_{n_i})_i$ convergente para $x \in U \subset Y \Rightarrow x_{n_i+N} \rightarrow x - x_N$, ou seja, $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy com uma subsequência convergente, donde está também converge e, portanto Y é Banach.

Dessa forma a aplicação que leva cada elemento de Y em X é um operador p -compacto e pela hipótese existe $F \in \mathcal{F}(Y, X)$ tal que $\omega_p(F - I) < \frac{\varepsilon}{2}$. Usando agora a desigualdade da Proposição 2.3.9

$$\|(F - I)(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in K \subset U = B_Y.$$

Como $F \in \mathcal{F}(Y, X)$, existe $\{e_i\}_{i=1}^N$ uma base normal para $\text{Im}(F)$, então podemos escrever $F(y) = \sum_{i=1}^N y_i^*(y) e_i \quad \forall y \in Y$, onde $y_i^* = e_i^* \circ F \in Y^*$ e $\{e_i^*\}_{i=1}^N$ é a base dual de $\{e_i\}_{i=1}^N$.

Seja $(\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}$, então

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n t_n x_n \in U \Rightarrow \left\| \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n t_n x_n \right\|_Y \leq 1 \Rightarrow \left\| \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|_Y \leq t_m^{-1} \rightarrow 0.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$\left| y_i^* \left(\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n x_n \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4N},$$

uma vez que $y_i^* \in Y^* \forall 1 \leq i \leq N$ (ressaltamos que a continuidade é com relação a norma $\|\cdot\|_Y$).

Considere o conjunto $K_0 = \frac{4N}{\varepsilon}p - \text{conv}((x_n)_{n=n_0+1}^{\infty})$ e a variedade linear afim $H_i = \{x \in X \mid x \in [\{x_n\}_{n=1}^{n_0}] \text{ e } y_i^*(x) = 1\}$.

Note que K_0 é $\|\cdot\|$ -compacto em consequência do Lema 2.1.4 e H_i é $\|\cdot\|$ -fechado, além disso, esses conjuntos são disjuntos, portanto existe um hiperplano fechado $\tilde{H}_i \subset X$ disjunto de K_0 tal que $H_i \subset \tilde{H}_i$ em consequência do Corolário 1.2.19.

Pela Proposição 1.2.15, existe um funcional $x_i^* \in X^*$ tal que $\tilde{H}_i = \{x \in X \mid x_i^*(x) = 1\}$. Note que

$$\frac{x_n}{y_i^*(x_n)} \in H_i \forall n \leq n_0$$

assim,

$$x_i^* \left(\frac{x_n}{y_i^*(x_n)} \right) = 1 \Leftrightarrow x_i^*(x_n) = y_i^*(x_n) \forall n \leq n_0. \quad (3.1)$$

Como K_0 é equilibrado, convexo e disjunto de $\tilde{H}_i$ devemos ter $|x_i^*(x)| < 1 \forall x \in K_0$. Isso é verdade pois, se existisse $x \in K_0$ com $|x_i^*(x)| > 1$, então $\frac{x}{|x_i^*(x)|} \in K_0$ uma vez que K_0 é convexo e $\frac{x}{|x_i^*(x)|} \in \tilde{H}_i$ uma vez que $x_i^* \left(\frac{x}{|x_i^*(x)|} \right) = 1$, mas isso seria um absurdo, pois $K_0 \cap \tilde{H}_i = \emptyset$.

Note que

$$\frac{4N \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n x_n}{\varepsilon} \in K_0 \forall (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q} \Rightarrow \left| x_i^* \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n x_n \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4N} \forall (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q},$$

assim, usando a equação (3.1), segue que

$$|x_i^*(x) - y_i^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2N} \forall x \in K.$$

Finalmente, seja $x \in K \subset E_x(B_{\ell_q})$, então existe $(\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$,

portanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^N x_i^*(x) e_i - x \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^N x_i^*(x) e_i - \sum_{i=1}^N y_i^*(x) e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N y_i^*(x) e_i - x \right\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i^*(x) - y_i^*(x)| \right) + \|(F - I)(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in K. \end{aligned}$$

Assim, o operador procurado é

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^N x_n^* \otimes e_n \in \mathcal{F}(X).$$

□

Note que a topologia τ_{ω_∞} gerada pela norma ω_∞ coincide com a topologia τ_{κ_∞} gerada pela norma κ_∞ e com a topologia da convergência uniforme sobre conjuntos compactos.

Uma comparação cuidadosa entre o Teorema de Gröthendieck (Teorema 3.1.2) e sua “generalização” apresentada no Teorema 3.2.2 nos revela um detalhe crucial: no resultado clássico a topologia usada pode ser a gerada por ω_∞ , κ_∞ ou $\|\cdot\|$ (note que ordenamo-las da mais fina para a menos fina e como o Teorema de Gröthendieck apresenta os extremos, a equivalência deve seguir também na topologia intermediária), assim, poderíamos achar que é possível generalizar ainda mais o resultado do Teorema 3.2.2 enfraquecendo a densidade na topologia τ_{ω_p} para a densidade na topologia τ_{κ_p} ou mesmo $\tau_{\|\cdot\|}$. Não trataremos desse assunto neste trabalho, mas foi provado em [7] que de fato tais condições não são equivalentes, ou seja, essa é uma outra gradação da a.p..

Teorema 3.2.3. *Todo espaço de Banach X tem a propriedade de p -aproximação para $1 \leq p \leq 2$.*

Demonstração. Como já discutimos, basta mostrar o resultado para $p = 2$.

Sejam $T \in \mathcal{K}_2(Y, X)$ e $\varepsilon > 0$, então pelo item (ii) da Proposição 2.3.7 sabemos que existe $x \in \ell_2^s(X)$ tal que $T = \tilde{E}_x \circ T_x$. Pelo Lema 3.2.1, existe $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ com termos positivos tal que $(\frac{1}{\lambda_n} x_n)_n = (z_n)_n = z \in \ell_2^s(X)$.

$H = \ell_2 / \ker(E_x)$ é um espaço de Hilbert e $M_\lambda : \ell_2 / \ker(E_x) \rightarrow \ell_2 / \ker(E_x)$ definido por $M_\lambda([(\alpha_n)_n]) = [(\lambda_n \alpha_n)_n]$ é um operador compacto conforme mostramos no Exemplo 2.3.4, portanto $M_\lambda(T_x(B_Y))$ é um conjunto relativamente compacto.

Segue então do Teorema 3.1.4 que existe $F \in \mathcal{F}(H)$ tal que

$$\|F(\tilde{x}) - \tilde{x}\| < \frac{\varepsilon}{2\|z\|_2} \quad \forall \tilde{x} \in M_\lambda(T_x(B_Y)) \Rightarrow \|F \circ M_\lambda \circ T_x(y) - M_\lambda \circ T_x(y)\| < \frac{\varepsilon}{2\|z\|_2} \quad \forall y \in B_Y$$

$$\Rightarrow \|(F - Id) \circ M_\lambda \circ T_x\| < \frac{\varepsilon}{\|z\|_2}$$

Defina $S = \tilde{E}_z \circ F \circ M_\lambda \circ T_x \in \mathcal{F}(Y, X)$, então

$$S - T = \tilde{E}_z \circ F \circ M_\lambda \circ T_x - \tilde{E}_x \circ T_x = \tilde{E}_z \circ F \circ M_\lambda \circ T_x - \tilde{E}_z \circ M_\lambda \circ T_x = \tilde{E}_z \circ (F - Id) \circ M_\lambda \circ T_x$$

de forma que $(S - T)(B_Y) \subset \|(F - Id) \circ M_\lambda \circ T_x\| E_z(B_{\ell_2})$ e consequentemente $\omega_2(S - T) \leq \kappa_2(S - T) \leq \|z\|_2 \|(F - Id) \circ M_\lambda \circ T_x\| < \varepsilon$.

Segue do Teorema 3.2.2 que X tem a propriedade de 2-proximização.

□

3.3 Caracterização via Traço

Esta seção destina-se a obtenção de um análogo do item (iv) do Teorema 3.1.2. Neste ponto, nos pareceu que o caminho mais natural a ser seguido não é o cronológico, assim, iniciaremos com uma caracterização de $(\mathcal{B}(Y, X), \tau_p)^*$ obtida em [3]. Com essa caracterização em mãos, mostraremos um análogo ao item (iv) do Teorema 3.1.2 (Teorema 3.3.2) e usamos este para apresentar demonstrações diferentes de dois teoremas, sendo um deles apresentado em [6] e o outro em [3].

Teorema 3.3.1. *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $(\mathcal{B}(Y, X), \tau_p)^*$ é o conjunto dos funcionais da forma*

$$\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(Ty_n) \quad \forall T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$$

onde $(y_n)_n \in \ell_p^s(Y)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ é tal que existe $M > 0$ com

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{x}_n) \right| \leq M \|(\tilde{x}_n)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X).$$

Demonstração. Devido à continuidade de ψ , devem existir $\tilde{M} > 0$ e um conjunto relativamente p -compacto K tais que

$$|\psi(T)| \leq \tilde{M} \sup_{y \in K} \{\|T(y)\|\} \quad \forall T \in \mathcal{B}(Y, X).$$

Como K é relativamente p -compacto, existe $y = (y_n)_n \in \ell_p^s(Y)$ tal que

$K \subset p - \text{conv}(y) \subset Y$, logo

$$\begin{aligned} |\psi(T)| &\leq \tilde{M} \sup_{y \in K} \{||T(y)||\} \leq \tilde{M} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_q}} \{||T \circ E_y((\alpha_n)_n)||\} \\ &= \tilde{M} ||E_{(T y_n)_n}|| = \tilde{M} ||(T(y_n))_n||_p^w \leq \tilde{M} ||(T(y_n))_n||_p. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considere $S : \mathcal{B}(Y, X) \rightarrow \ell_p^w(Y)$ definido por $S(T) = (T(y_n))_n$ e $\phi : \text{Im}(S) \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $\phi(S(T)) = \psi(T)$. Essa função está bem definida, de fato, sejam $T, U \in \mathcal{B}(Y, X)$ tais que $S(T) = (T(y_n))_n = (U(y_n))_n = S(U)$ então

$$|\phi(S(T - U))| = |\psi(T - U)| \leq \tilde{M} ||(T(y_n))_n - (U(y_n))_n||_p^w = 0.$$

Usando novamente a continuidade de ψ segue que

$$|\phi(S(T))| = |\psi(T)| \leq \tilde{M} ||(T(y_n))_n||_p^w = \tilde{M} ||S(T)||_p^w.$$

Utilizando o Teorema 1.1.23, existe $\tilde{\phi} \in \ell_p^w(X)^*$ contínua que estende ϕ e tal que $||\tilde{\phi}|| \leq \tilde{M}$.

Em especial, a restrição $\tilde{\phi}|_{\ell_p^s(X)} \in \ell_p^s(X)^* = \ell_q^s(X^*)$, portanto $\tilde{\phi}|_{\ell_p^s(X)} = (x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$. Além disso, como $\tilde{\phi} \in \ell_p^w(X)^*$ sabemos que existe $M > 0$ tal que

$$\tilde{\phi}((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \leq M ||(x_n)_n||_p^w \quad \forall (x_n)_n \in \ell_p^s(X).$$

Segue das definições de S e ϕ que

$$\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T(y_n)) \quad \forall T \in \mathcal{B}(Y, X).$$

Reciprocamente, sejam $(y_n)_n \in \ell_p^s(Y)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ satisfazendo as hipóteses do teorema. Então,

$$\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T y_n) \quad \forall T \in \mathcal{K}_p(Y, X),$$

portanto ψ é um funcional linear.

Seja $T \in \mathcal{B}(Y, X)$, então $(T(y_n))_n \in \ell_p^s(X)$. Como existe $M > 0$ tal que

$$|\psi(T)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T(y_n)) \right| \leq M ||(T(y_n))_n||_p^w = M \sup_{z \in K} \{||T(z)||\}$$

onde $K = p - \text{conv}(y)$, ϕ é τ_p -contínua. Concluimos então que $\psi \in (\mathcal{B}(Y, X), \tau_p)^*$.

□

Observação 3.3.1. O resultado acima continua válido nos casos $p = 1$ tomando $(y_n)_n \in \ell_1^s(Y)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_\infty^s(X^*)$ e $p = \infty$ tomando $(y_n)_n \in \ell_\infty^s(Y)$ e $(x_n^*)_n \in c_0^s(X^*)$. As demonstrações são análogas utilizando as normas apropriadas, sendo que, novamente por zelo, decidimos enunciar separadamente.

Note que no caso $p = \infty$ não precisamos da existência de um $M > 0$ satisfazendo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{y}_n) \right| \leq M \|(\tilde{y}_n)_n\|_\infty^w \quad \forall (\tilde{y}_n)_n \in \ell_\infty^s(X)$$

já que essa condição é satisfeita automaticamente. Mais adiante vamos indicar como isso se relaciona com o Teorema 3.1.2.

Teorema 3.3.2. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X tem a propriedade de p -aproximação.

(ii) Se $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ são tais que $\exists M > 0$ com

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{x}_n) \right| \leq M \|(\tilde{x}_n)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0 \quad \forall x \in X, \text{ então}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se X tem a p -a.p. e as sequências $(x_n)_n$ e $(x_n^*)_n$ satisfazem as hipóteses de (ii), então existe $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\sup_{x \in p\text{-conv}((x_n)_n)} \|F(x) - x\| = \|(F(x_n) - x_n)_n\|_p^w < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Como $F \in \mathcal{F}(X)$, existem $\{u_m\}_{m=1}^N \subset X$ e $\{\psi_m\}_{m=1}^N \subset X^*$ tais que $F = \sum_{m=1}^N \psi_m \otimes u_m$,

assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(F(x_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \left(\sum_{m=1}^N \psi_m(x_n) u_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \psi_m(x_n) x_n^*(u_m) \\ &= \sum_{m=1}^N \psi_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_m) x_n \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos então que,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(F(x_n)) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*((F - Id)(x_n)) \right| \\ &< M \| (F(x_n) - x_n)_n \|_p^w < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

e segue da arbitrariedade de ε que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Seja $\psi \in (\mathcal{B}(X), \tau_p)^*$ um funcional que se anula em $\mathcal{F}(X)$. Pelo Teorema 3.3.1, existem $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ satisfazendo as hipóteses do item (ii) tais que $\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T(x_n)) \ \forall T \in \mathcal{B}(X)$.

Como esse funcional se anula em $\mathcal{F}(X)$, em especial

$$\begin{aligned} \forall x \in X \text{ e } \forall x^* \in X^*, \ 0 = \psi(x^* \otimes x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x^* \otimes x(x_n)) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x^*(x_n)x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^*(x) \\ &= x^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n \right) \end{aligned}$$

Como $x^* \in X^*$ é arbitrário, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0 \ \forall x \in X.$$

Se usarmos agora a hipótese, obtemos

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = \psi(Id_X).$$

Ou seja, todo funcional τ_p -contínuo que se anula em $\mathcal{F}(Y, X)$ também se anula na identidade. Pelo Corolário 1.2.20, $Id_X \in \overline{\mathcal{F}(X)}^{\tau_p}$, ou seja, X tem a p -a.p..

□

Proposição 3.3.3. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Se X^* tem a propriedade de p -aproximação então X também tem a propriedade de p -aproximação.*

Demonstração. Considere $1 \leq q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e denotemos por $c : X \rightarrow X^{**}$ a imersão canônica do espaço em seu bidual. Note que $\|c\| = 1$.

Sejam $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$, $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ e $M > 0$ tais que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{x}_n) \right| \leq M \|(\tilde{x}_n)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0 \quad \forall x \in X.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, caso contrário a sequência $(x_n)_n$ seria, na verdade, finita. O mesmo vale para $(x_n^*)_n$.

Considere

$$\left(\frac{\|x_n^*\|}{\|x_n\|} c(x_n) \right)_n \in \ell_q^s(X^{**}) \text{ e } \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_n^*\|} x_n^* \right)_n \in \ell_p^s(X^*).$$

Afirmamos que essas sequências satisfazem as propriedades necessárias. De fato, sejam $x^* \in X^*$ e $x \in X$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|x_n^*\|}{\|x_n\|} c(x_n) \right) (x^*) \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_n^*\|} x_n^* \right) \right) (x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n) x_n^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n^*(x) x_n) = 0 \Rightarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|x_n^*\|}{\|x_n\|} c(x_n) \right) (x^*) \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_n^*\|} x_n^* \right) &= 0 \quad \forall x^* \in X^* \end{aligned}$$

Para a outra propriedade, tomemos $(\tilde{x}_n)_n \in B_{\ell_p^s(X)}$ e $(\tilde{x}_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ quaisquer, então

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n^*(\tilde{x}_n)}{\|x_n\|} c(x_n) \right) (\tilde{x}_n^*) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^*(\tilde{x}_n)}{\|x_n\|} \tilde{x}_n^*(x_n) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \left(\frac{\tilde{x}_n^*(x_n) \tilde{x}_n}{\|x_n\|} \right) \right| \leq M \left\| \left(\tilde{x}_n^* \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \tilde{x}_n \right)_n \right\|_p^w \\ &\leq M \|(\tilde{x}_n^*)_n\|_p^w. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tomando o supremo sobre todos os $(\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X)$, concluímos o que desejamos, ou seja, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n^*\|}{\|x_n\|} c(x_n) (\tilde{x}_n^*) \leq M \|(\tilde{x}_n^*)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$$

Como X^* tem a p -a.p. por hipótese, o Teorema 3.3.2 diz que devemos ter

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|x_n^*\|}{\|x_n\|} c(x_n) \right) \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_n^*\|} x_n^* \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c(x_n) (x_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n)$$

A tese segue do Teorema 3.3.2. □

Mostraremos agora o quão útil é essa caracterização da Proposição 3.3.2 enfraquecendo as condições do Teorema 3.2.2.

Teorema 3.3.4. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) X tem a propriedade de p -aproximação.
- (ii) Para todo espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_∞ -denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$.
- (iii) Para todo espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_p -denso em $\mathcal{K}(Y, X)$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Considere $1 \leq q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e sejam Y um espaço de Banach, $\varepsilon > 0$, $K \subset Y$ um conjunto compacto e $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$ dados. Como $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$, $T(K)$ é um conjunto relativamente p -compacto. Assim, por hipótese, existe $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\|F(x) - x\| < \varepsilon \quad \forall x \in T(K) \Rightarrow \|F \circ T(k) - T(k)\| < \varepsilon \quad \forall k \in K.$$

Uma vez que $F \circ T \in \mathcal{F}(Y, X)$, temos a tese.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$, $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ e $M > 0$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{x}_n) \right| \leq M \|(\tilde{x}_n)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0 \quad \forall x \in X.$$

Como $(x_n)_n \in \ell_p^s$, existe uma sequência de números estritamente positivos $\lambda = (\lambda_n)_n \in c_0$ tal que $\tilde{x} = (\lambda_n^{-1} x_n)_n \in \ell_p^s(X)$ pelo Lema 3.2.1.

Considere $\pi : \ell_q \rightarrow \ell_q / \ker(E_{\tilde{x}})$ a aplicação quociente e os operadores $M_\lambda : \ell_q \rightarrow \ell_q$ definido por $M_\lambda((\alpha_n)_n) = (\lambda_n \alpha_n)_n$ e $\tilde{E}_{\tilde{x}} : \ell_q / \ker(E_{\tilde{x}}) \rightarrow \text{Im}(E_{\tilde{x}})$. Pelo Exemplo 2.3.4, M_λ é um operador compacto e o operador $\tilde{E}_{\tilde{x}}$ é p -compacto pelo Teorema 2.3.7.

Seja $\varepsilon > 0$, como por hipótese para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_∞ -denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$, existe $F \in \mathcal{F}(\ell_q / \ker(E_{\tilde{x}}), X)$ tal que

$$\begin{aligned} \|F(x) - \tilde{E}_{\tilde{x}}(x)\| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \pi \circ M_\lambda(B_{\ell_q}) \Rightarrow \\ \|F \circ \pi \circ M_\lambda((\alpha_n)_n) - E_x((\alpha_n)_n)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n) \right\| \\ &= \|E_{(F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n)_n}((\alpha_n)_n)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall (\alpha_n)_n \in B_{\ell_q} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|E_{F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n}\| = \|(F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n)_n\|_p^w \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.4)$$

Como $F \in \mathcal{F}(\ell_q/\ker(E_{\tilde{x}}), X)$, existem $\{u_m\}_{m=1}^N \subset \ell_q/\ker(E_{\tilde{x}})$ e $\{\psi_m\}_{m=1}^N \subset (\ell_q/\ker(E_{\tilde{x}}))^*$ tais que $F = \sum_{m=1}^N \psi_m \otimes u_m$.

Como $\tilde{E}_{\tilde{x}}$ é injetivo, $\text{Im}(\tilde{E}_{\tilde{x}}^*)$ é denso em $(\ell_q/\ker(E_{\tilde{x}}))^*$. Para cada $1 \leq n \leq N$, tome $\tilde{\psi}_m \in X^*$ tal que

$$\|\tilde{E}_{\tilde{x}}^*(\tilde{\psi}_n) - \psi_n\| < \frac{\varepsilon}{2\|M_\lambda\| \sum_{m=1}^N \|u_m\|}.$$

Considere também $\tilde{F} = \sum_{m=1}^N \tilde{\psi}_m \otimes u_m \in \mathcal{F}(X)$, assim

$$\begin{aligned} \|(\tilde{F}(x_n) - x_n)_n\|_p^w &\leq \left\| (\tilde{F}(x_n) - F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n))_n \right\|_p^w \\ &\quad + \|(F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n)_n\|_p^w \\ &\leq \left\| \left(\tilde{F} \left(\tilde{E}_{\tilde{x}} \circ \pi(M_\lambda(e_n)) \right) - F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) \right)_n \right\|_p^w + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{m=1}^N \left(\tilde{E}_{\tilde{x}}^*(\tilde{\psi}_m) - \psi_m \right) (\pi \circ M_\lambda(e_n)) u_m \right)_n \right\|_p^w + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{F}(x_n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \left(\sum_{m=1}^N \psi_m(x_n) u_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \psi_m(x_n) x_n^*(u_m) \\ &= \sum_{m=1}^N \psi_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_m) x_n \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{F}(x_n)) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{F}(x_n) - x_n) \right| \\ &\leq M \|F \circ M_\lambda(e_n) - x_n\|_p^w \\ &< \varepsilon \end{aligned} \tag{3.7}$$

e pela arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ devemos ter $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0$ e a tese segue do Teorema 3.3.2.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Se X tem a p -a.p. sabemos que, para todo espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_p -denso em $\mathcal{B}(Y, X) \supset \mathcal{K}_p(Y, X)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) O caso $p = \infty$ já foi feito, podemos supor então que $1 \leq p < \infty$.

Sejam $(x_n)_n \in \ell_p^s(X)$, $(x_n^*)_n \in \ell_q^s(X^*)$ e $M > 0$ tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{x}_n) \right| \leq M \|(\tilde{x}_n)_n\|_p^w \quad \forall (\tilde{x}_n)_n \in \ell_p^s(X) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0 \quad \forall x \in X.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é linearmente independente. Como $(x_n)_n \in \ell_p^s$, existe uma sequência de números estritamente positivos $(\lambda_n)_n \in c_0$ tal que $(\lambda_n^{-1} x_n)_n \in \ell_p^s(X)$.

Considere $\lambda = (\lambda_n^{-1} \|x_n\|)_n \in \ell_p$ e $\tilde{x} = \left(\lambda_n \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)_n \in c_0(X)$. Além disso, considere o operador $M_\lambda : \ell_q \rightarrow \ell_1$ definido por $M_\lambda((\alpha)_n) = (\lambda_n \|\alpha_n\|)_n$ e o operador $E_{\tilde{x}}$. Pelo Exemplo 2.3.5, M_λ é um operador p -compacto (no caso $p = 1$ é necessário usar o Exemplo 2.3.4 e o Lema 3.2.1) e $E_{\tilde{x}}$ é um operador compacto pelo Lema 2.1.4.

Seja $\varepsilon > 0$, como por hipótese para qualquer espaço de Banach Y , $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_p -denso em $\mathcal{K}(Y, X)$, existe $F \in \mathcal{F}(\ell_q / \ker(E_{\tilde{x}}), X)$ que, de maneira análoga à equação (3.4), satisfaz

$$\|E_{F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n}\| = \|(F \circ \pi \circ M_\lambda(e_n) - x_n)_n\|_p^w < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Assim como fizemos no item anterior, podemos definir $\tilde{F} \in \mathcal{F}(X)$ que satisfaça a seguinte condição que é análoga a equação (3.5)

$$\|(\tilde{F}(x_n) - x_n)_n\|_p^w < \varepsilon.$$

Como $\tilde{F} \in \mathcal{F}(X)$, existem $\{u_m\}_{m=1}^N \subset X$ e $\{\tilde{\psi}_m\}_{m=1}^N \subset X^*$ tais que $\tilde{F} = \sum_{m=1}^N \tilde{\psi}_m \otimes u_m$.

Assim, procedendo como no item anterior para obter a equação (3.6), obtemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\tilde{F}(x_n)) = 0$$

e de maneira análoga à equação (3.7), temos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \leq \varepsilon$$

portanto, pela arbitrariedade de ε devemos ter $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0$ e a tese segue o Teorema 3.3.2. □

Note que a “simetria” em p e q que aparece no enunciado é refletida na semelhança das demonstrações, mudando apenas os papéis que o conjunto e o operador desempenham, pois ora o operador é p -compacto e achamos uma aproximação de posto finito em um conjunto compacto e ora o operador é compacto e achamos uma aproximação de posto finito em um conjunto p -compacto.

Corolário 3.3.5. *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$ então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X tem a propriedade de p -aproximação.

(ii) Para qualquer sequência p -compacta $(x_n)_n \subset X$ e qualquer $(x_n^*)_n \in \ell_1^s(X^*)$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0 \quad \forall x \in X \quad \text{vale que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) basta usar a mesma construção do Teorema 3.3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (i) seja $\psi \in (\mathcal{B}(Y, X))$ que se anula no subespaço $\mathcal{F}(Y, X)$, então pela Teorema 3.3.1, existem $(y_n)_n \in \ell_{\infty}^s(Y)$ e $(x_n^*)_n \in \ell_1^s(X)$ tais que

$$\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T(y_n)) \quad \forall T \in \mathcal{B}(Y, X).$$

Como ψ se anula em $\mathcal{F}(Y, X)$, quaisquer que sejam $x \in X$, $x^* \in X^*$ e $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$ vale que

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(T^*(x^*) \otimes x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T^*(x^*) \otimes x(y_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x^*(T(y_n))x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x^*(T(y_n)) \\ &= x^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)T(y_n) \right) \quad \forall x \in X \quad \forall x^* \in X^* \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)T(y_n) = 0 \quad \forall x \in X$$

já que $T \in \mathcal{K}_p(Y, X)$ e $(y_n)_n$ é limitada, $(T(y_n))_n$ é uma sequência p -compacta e segue da hipótese que

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(T(y_n)) = \psi(T).$$

Portanto, pelo Corolário 1.2.20, $\mathcal{F}(Y, X)$ é τ_∞ denso em $\mathcal{K}_p(Y, X)$ e do Teorema 3.3.4 segue a tese. $\square$

3.4 Existência de Espaços que não Possuem a p -a.p.

Vimos na seção 3.2 que para $p \leq 2$ todo espaço de Banach tem a p -a.p., mostraremos nessa seção que esse é o melhor que podemos fazer, ou seja, mostraremos que para $p > 2$ sempre existe um espaço de Banach que falha em ter a p -a.p..

Para isso, usaremos um resultado apresentado em [5] como uma simplificação do artigo [10], mas antes precisamos de algumas definições em teoria de probabilidades.

Definição 3.4.1. *Seja Ω um espaço amostral e $\mathcal{E}$ um espaço de eventos associado à Ω , chamamos de probabilidade uma função $Prob : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ tal que:*

$$(i) \text{ } Prob(\Omega) = 1;$$

$$(ii) \text{ } Prob\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Prob(\Omega_n) \text{ onde } \Omega_n \in \mathcal{E} \text{ e } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \forall i \neq j.$$

Definição 3.4.2. *Uma variável aleatória é uma função $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ onde Ω é o espaço amostral de um processo aleatório. Dizemos que duas variáveis aleatórias x e y são independentes se $Prob(x = a \text{ e } y = b) = Prob(x = a)Prob(y = b)$.*

Definição 3.4.3. *Seja $x : \Omega \rightarrow \{a_n\}_{n=1}^N$ uma variável aleatória e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a esperança de $f(x)$ por $E(f(x)) = \sum_{n=1}^N f(a_n)Prob(x = a_n)$.*

Lema 3.4.4. *Sejam $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$ e $\{x_i\}_{i=1}^n$ um conjunto de variáveis aleatórias independentes que tomam valores em $\{-1, 1\}$ com $Prob\{x_i = -1\} = \frac{1}{2}$ e $Prob\{x_i = 1\} = \frac{1}{2}$ $\forall 1 \leq i \leq n$, então, existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$Prob\left\{\left|\sum_{i=1}^n x_i a_i\right| > K \left(\ln n \sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} < \frac{K}{n^3}$$

A conclusão também é válida se as variáveis assumirem valores em $\{-1, 2\}$ com $\text{Prob}\{x_i = -1\} = \frac{2}{3}$ e $\text{Prob}\{x_i = 2\} = \frac{1}{3}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$ e $\{a_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ (caso fossem complexos, poderíamos usar o resultado para as partes real e imaginária).

Considere $x = (x_i)_{i=1}^n$, $f(x) = \left| \sum_{i=1}^n x_i a_i \right|$ e $\lambda > 0$, então o valor esperado da função $e^{\lambda f(x)}$ é

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda f(x)}) &\leq E\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i} + e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i}\right) \\ &= \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}} \left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i} + e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i}\right) \text{Prob}(x_1 = \epsilon_1, \dots, x_n = \epsilon_n) \\ &= \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}} 2^{-n} \left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i} + e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i}\right) \\ &= 2 \prod_{i=1}^n \frac{(e^{\lambda a_i} + e^{-\lambda a_i})}{2} \leq 2e^{\lambda^2} \end{aligned}$$

Onde usamos que $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{x^2}$ o que pode ser verificado notando que a expansão em série da diferença dessas funções só tem termos com expoente par.

Note que,

$$\text{Prob}\{\lambda f(x) - \lambda^2 - 3 \ln n > 0\} \leq E\left(e^{\lambda f(x) - \lambda^2 - 3 \ln n}\right) \leq 2e^{-3 \ln n} = 2n^{-3}$$

Basta agora tomar $\lambda = (3 \ln n)^{\frac{1}{2}}$ para concluir que $\text{Prob}\{f(x) > \frac{6}{\sqrt{3}} \ln n^{\frac{1}{2}} > 0\} \leq 2n^{-3} < \frac{6}{\sqrt{3}} n^{-3}$.

Para o outro caso, o mesmo procedimento nos leva à

$$E(e^{\lambda f(x)}) \leq E\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i} + e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i}\right) = 2 \prod_{i=1}^n \frac{(e^{\lambda a_i} + e^{-\lambda a_i})}{2} \leq 2e^{\lambda^2}$$

Usamos agora que $\frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{3} < e^{2x^2}$, consequentemente,

$$\text{Prob}\{\lambda f(x) - 2\lambda^2 - 3 \ln n > 0\} \leq E\left(e^{\lambda f(x) - 2\lambda^2 - 3 \ln n}\right) \leq 2e^{3 \ln n} = 2n^{-3}$$

Basta agora tomar $\lambda = (3 \ln n)^{\frac{1}{2}}$ para concluir que $\text{Prob}\{f(x) > \frac{9}{\sqrt{3}} \ln n^{\frac{1}{2}} > 0\} \leq 2n^{-3} < \frac{9}{\sqrt{3}} n^{-3}$.

□

Lema 3.4.5. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a_j^m = e^{\frac{-2\pi i m \cdot j}{3 \cdot 2^k}}$ com $0 \leq j < 3 \cdot 2^k$ e $0 \leq m < 3 \cdot 2^k$. Existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $L > 0$ tais que para todo $k > k_0$ é possível dividir o conjunto $\{a_j^m\}_{j=0}^{3 \cdot 2^k - 1}$ em*

outros dois $\{\tau_j^m\}_{j=1}^{2^{k+1}}$ e $\{\sigma_j^m\}_{j=1}^{2^k}$ satisfazendo

$$\left| 2 \sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j^m - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j^m \right| \leq L(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \quad \forall 1 \leq m < 3 \cdot 2^k.$$

Demonstração. Denote $n = 3 \cdot 2^k$. Usando o Lema 3.4.4, para cada $1 \leq m < n$ fixado existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\text{Prob} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n-1} x_j a_j^m \right| > K (\ln(3 \cdot 2^k) \cdot 3 \cdot 2^k)^{\frac{1}{2}} > K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \right\} < \frac{K}{n^3}$$

Somando as probabilidades temos que,

$$\text{Prob} \left\{ \exists m \in \mathbb{N}, 1 \leq m < n \text{ tal que } \left| \sum_{j=0}^{n-1} x_j a_j^m \right| > K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \right\} < \frac{Kn}{n^3}$$

e concluimos que para n suficientemente grande ($k > k_0$), deve existir $\{x_j\}_{j=0}^{n-1} \subset \{-1, 2\}$ tal que

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j a_j^m \right| \leq K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \quad \forall 1 \leq m < n. \quad (3.9)$$

Em especial, no caso $m = 0$ a equação (3.9) nos diz que

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} x_j \right| \leq K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}}$$

portanto, trocando no máximo

$$\max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq \frac{1}{3} K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \right\}$$

podemos obter uma sequência $\{\tilde{x}_j\}_{j=0}^{n-1} \subset \{-1, 2\}$ tal que $\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{x}_j = 0$.

Disso concluimos que há exatamente 2^{k+1} dos $\tilde{x}_j$ assumem o valor -1 e 2^k assumem o valor 2 . Além disso,

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{x}_j a_j^m \right| \leq 2K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \quad \forall 1 \leq m < n.$$

Se denotarmos por $\{\tau_j^m\}_{j=1}^{2^{k+1}} = \{a_j^m \mid \tilde{x}_j = -1\}$ e $\{\sigma_j^m\}_{j=1}^{2^k} = \{a_j^m \mid \tilde{x}_j = 2\}$ podemos

escrever que

$$\left| 2 \sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j^m - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j^m \right| \leq 2K(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \quad \forall 1 \leq m < n.$$

□

Proposição 3.4.6. *Existe uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ com $a_{ij} \in \mathbb{K} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ tal que:*

(i) *Para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado, $\{a_{ij} | a_{ij} \neq 0\}$ é finito.*

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\max_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| \right)^r < \infty$ para todo $r > \frac{2}{3}$.

(iii) $A^2 = 0$.

(iv) $Tr(A) \neq 0$, onde $Tr(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.4.5, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k > k_0$, podemos obter divisões $\{\tau_j^{(k)m}\}_{j=1}^{2^{k+1}}$ e $\{\sigma_j^{(k)m}\}_{j=1}^{2^k}$ do conjunto $\{a_j^m\}_{j=0}^{3 \cdot 2^k - 1}$ onde $a_j^m = e^{\frac{-2\pi i m \cdot j}{3 \cdot 2^k}}$ $1 \leq j < 3 \cdot 2^k$.

Ainda pelo Lema 3.4.5, cada uma dessas divisões satisfaz

$$\left| 2 \sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j^{(k)m} - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j^{(k)m} \right| \leq L_1(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} \quad \forall 1 \leq m < 3 \cdot 2^k \text{ para alguma constante } L_1 > 0$$

Usando agora o Lema 3.4.4, para os $(3 \cdot 2^k) \cdot (3 \cdot 2^{k-1}) < 5 \cdot 2^{2k}$ números complexos $\{\overline{\sigma_{jm_1}^k} \tau_{jm_2}^{k-1}\}_{m_1=1, m_2=1}^{3 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^{k-1}}$, existem uma constante $L_2 > 0$ e $\{\theta_j^k\}_{j=1}^{2^k} \subset \{-1, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left| \sum_{j=1}^{2^k} \theta_j^k \overline{\sigma_{jm_1}^k} \tau_{jm_2}^{k-1} \right| < L_2(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-3k}{2}} \quad \forall 1 \leq m_1 \leq 3 \cdot 2^k \text{ e } \forall 1 \leq m_2 \leq 3 \cdot 2^{k-1}$$

desde que $2^{3k} > K \cdot 5 \cdot 2^{2k}$ onde K é a constante do Lema 3.4.4, ou seja, para todo $k > k_0 = \max\{\tilde{k}_0, \bar{k}_0\}$ onde $\tilde{k}_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $2^{3k_0} > K \cdot 5 \cdot 2^{2k_0}$.

Defina as matrizes $P_k = (p_{jm}^k)$ e $Q_k = (q_{jm}^k)$ de tamanho $2^{k+1} \times 3 \cdot 2^k$ e $2^k \times 3 \cdot 2^k$ respectivamente, cujos elementos são, para $k > k_0$, $p_{jm}^k = 3^{\frac{-1}{2}} 2^{\frac{-(2k+1)}{2}} \tau_{mj}^k$ e $q_{jm}^k = 3^{\frac{-1}{2}} 2^{-k} \theta_j^k \sigma_{mj}^k$. Para $k \leq k_0$ não há com que se preocupar e podemos tomar $P_k = Q_k = Id_k$.

Note agora que

$$P_k^* P_k = 2^{-(k+1)} I_{2^{k+1} \times 2^{k+1}} \text{ e } Q_k^* Q_k = 2^{-k} I_{2^{k+1} \times 2^{k+1}} \quad (3.10)$$

De fato, basta notar que, para fixado k ,

$$\sum_{m=1}^n \overline{\tau_{j_1 m}^k} \tau_{j_2 m}^k = \sum_{m=1}^n e^{\frac{2\pi i m \cdot j_1}{3 \cdot 2^k}} e^{\frac{-2\pi i m \cdot j_2}{3 \cdot 2^k}} = \sum_{m=1}^n e^{\frac{-2\pi i m \cdot (j_2 - j_1)}{3 \cdot 2^k}} = e^{\frac{-2\pi i (j_2 - j_1)}{3 \cdot 2^k}} \sum_{m=1}^n e^{\frac{-2\pi i (m-1) \cdot (j_2 - j_1)}{3 \cdot 2^k}}$$

$$= e^{\frac{-2\pi i(j_2-j_1)}{3.2^k}} \sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{-2\pi i m.(j_2-j_1)}{3.2^k}} = e^{\frac{-2\pi i(j_2-j_1)}{3.2^k}} \sum_{m=1}^n \overline{\tau_{j_1 m}^k} \tau_{j_2 m}^k$$

Disso segue trivialmente que $\sum_{m=1}^n \overline{\tau_{j_1 m}^k} \tau_{j_2 m}^k = 0$ se $j_1 \neq j_2$ e $\sum_{m=1}^n \overline{\tau_{j_1 m}^k} \tau_{j_2 m}^k = 3.2^k$.

A demonstração para Q_k é inteiramente análoga, uma vez que θ_j^k atua como uma constante.

Tome agora A como sendo a seguinte matriz que claramente satisfaz (i)

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} P_1^* P_1 & P_1^* Q_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -Q_2^* P_1 & P_2^* P_2 - Q_2^* Q_2 & P_2^* Q_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -Q_3^* P_2 & P_3^* P_3 - Q_3^* Q_3 & P_3^* Q_4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -Q_4^* P_3 & P_4^* P_4 - Q_4^* Q_4 & P_4^* Q_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Usando os blocos dessa matriz, fica claro pelo que vimos na equação (3.10) que $A^2 = 0$ e $Tr(A) = Tr(P_1^* P_1) = 1$ donde já garantimos (iii) e (iv).

Para verificarmos (ii), perceba que os blocos dispostos nas linhas de A são, a menos de sinal, $Q_k^* P_{k-1}$, $P_k^* P_k - Q_k^* Q_k$ e $P_k^* Q_{k+1}$ e além disso $P_k^* Q_{k+1} = (Q_{k+1}^* P_k)^*$, e portanto basta analisar um deles. Não precisamos nos preocupar com $k \leq k_0$ e para $k > k_0$

$$|(P_k^* P_k - Q_k^* Q_k)_{jm}| = 3^{-1} \cdot 2^{-2k-1} \left| 2 \sum_{j=1}^{2^k} \sigma_{m,j}^k - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_{m,j}^k \right| < L_1(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-3k}{2}}$$

$$\forall 1 \leq j \leq 3.2^k \text{ e } \forall 1 \leq m \leq 3.2^{k-1}$$

$$|(Q_k^* P_{k-1})_{jm}| = 3^{-1} \cdot 2^{\frac{-1}{2}-2k} \left| \sum_{i=1}^{2^k} \theta_j^k \overline{\sigma_{ij}^k} \tau_{im}^{k-1} \right| < L_2(k+1)^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-3k}{2}}$$

$$\forall 1 \leq j \leq 3.2^k \text{ e } \forall 1 \leq m \leq 3.2^{k-1}$$

Chamando de $C = \max\{L_1, L_2\}$ e usando essas equações, uma vez que o k -ésimo bloco contém 3.2^k colunas temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\max_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| \right)^r \leq \sum_{i=1}^{\infty} 3.2^k C^r (k+1)^{\frac{r}{2}} 2^{\frac{-3rk}{2}} < \infty$$

□

Teorema 3.4.7. *Se $p > 2$, existe um espaço de Banach que não tem a propriedade de p -aproximação.*

Demonstração. Seja $r = \frac{p}{p+1} > \frac{2}{3}$, e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz como na Proposição 3.4.6,

então se tomarmos $a_i = \max_{j \in \mathbb{N}} \{|a_{ij}|\}$ a sequência $(a_i)_i \in \ell_r$. Defina agora

$$\lambda_n = \begin{cases} |a_n|^r & \text{se } a_n \neq 0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} \frac{a_n}{|a_n|^r} & \text{se } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, $a_i = \lambda_i b_i$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|a_i|}{|a_i|^{\frac{p}{p+1}}} \right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{(1-\frac{p}{p+1})p} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^r < \infty$$

Ou seja, $(b_i)_i \in \ell_p$ e é claro que $\lambda_i > 0$ e $(\lambda_i)_i \in \ell_1$.

Considere agora, para dada $i \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$, $b_j^i = \lambda_i^{-1} a_{ij}$, como para cada i fixado $a_{ij} \neq 0$ apenas para um número finito de j 's, segue que $b^i = (b_j^i)_j \in c_0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Mais que isso, $\|b^i\|_{\infty} = b_i$, portanto $(b^i)_i \in \ell_p^s(c_0)$. Tome também $X = \overline{[\{b^i\}_{i \in \mathbb{N}}]} \subset c_0$ e $f_i = \lambda_i e_i$ onde $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é a base canônica de c_0 . Fica claro dessa definição que $(f_i)_i \in \ell_1^s(X)$.

Note agora que como $A^2 = 0$, devemos ter

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(b^j) b^i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i^j b_k^i \right)_k = \lambda_j^{-1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} a_{ji} \right)_k = 0$$

Consequentemente,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) b^i = 0 \quad \forall x \in X$$

No entanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(b^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i^i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = \text{Tr}(A) \neq 0$$

Segue do Corolário 3.3.5 que X não tem a p -a.p..

□

Note que o resultado de [10] é um caso particular do Teorema 3.4.7 para o caso $p = \infty$ (como era de se esperar). Nesse caso o teorema nos diz que existe um subespaço de c_0 que não possui a a.p., mas pelo que vimos na Proposição 3.1.3 esse subespaço não pode ter base de Schauder. Assim, como comentamos no início desse capítulo, essa construção, feita em [5] como uma simplificação do artigo [10], dá uma resposta negativa para o *problema da base* proposto pelo próprio Banach em 1932.

Referências Bibliográficas

- [1] R. M. Aron, M. Maestre and P. Rueda, *p*-compact holomorphic mappings, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. **104** (2010), no. 2, 353–364.
- [2] S. Banach, *Theory of Linear Operations*, 1st ed., Elsevier, 1987.
- [3] Y. S. Choi and J. M. Kim, *The dual space of $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_p)$ and the *p*-approximation property*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 2437–2454.
- [4] P. M. Cohn, *Algebra*, 2nd ed., vol. 2, John Wiley & Sons, 1989.
- [5] A.M. Davie, *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. Lond. Math. Soc. **5** (1973), 261–266.
- [6] J.M. Delgado, C. Piñero and E. Serrano, *The p-approximation property in terms of density of finite rank operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 159–164.
- [7] J.M. Delgado, C. Piñero and E. Serrano, *Density of finite rank operators in the Banach space of p-compact operators*, J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), 498–505.
- [8] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, 1984.
- [9] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [10] P. H. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.
- [11] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory*, 1st ed., Springer, 2011.
- [12] P. Garrett, *Compact operators on Hilbert space*, http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/04b_cpt_ops_hsp.pdf, 2012.
- [13] A. Gröthendieck, *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*, no. 16, Mem. Amer. Math. Soc., 1955.
- [14] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley, 1966.
- [15] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [16] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer, 1977.
- [17] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer, 1979.

- [18] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.
- [19] J. Rozendaal, *The approximation property*, http://www.math.leidenuniv.nl/~mdejeu/FA_sem_Jan_Rozendaal_120427.pdf, 2012.
- [20] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.
- [21] D. P. Sinha and A. K. Karn, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of l_p* , *Studia Math.* **150** (2002), no. 1, 17–33.