**Divisão de distribuições
temperadas por polinômios**

Mariana Smit Vega Garcia

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, julho de 2008

Divisão de distribuições temperadas por polinômios

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Mariana Smit Vega Garcia e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello - IME-USP.
- Prof. Dr. Gerson Petronilho - UFSCar.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Paulo Cordaro toda a ajuda e inspiração que estiveram sempre presentes, não somente durante o mestrado, como também durante minha graduação.

Cabe ainda agradecer à minha mãe a paciência e a compreensão durante este processo, e ao meu pai os conselhos.

Finalmente, gostaria de agradecer ao Rodrigo, que sempre esteve presente me ajudando e incentivando ao longo da minha jornada pela matemática.

*Voor Moma,
van jouw meissie.*

Resumo

Este trabalho apresenta uma demonstração completa do Teorema de L. Hörmander sobre a divisão de distribuições (temperadas) por polinômios. O caso $n = 1$ é apresentado detalhadamente e serve como motivação para as técnicas utilizadas no caso geral. Todos os pré-requisitos para a demonstração de Hörmander (os Teoremas de Seidenberg-Tarski, de Puiseux e da Extensão de Whitney) são discutidos com detalhes. Como consequência do Teorema, segue que todo operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes não nulo admite solução fundamental temperada.

Palavras-chave: Distribuições, divisão, polinômios, distribuições temperadas.

Abstract

This dissertation presents a thorough proof of L. Hörmander's theorem on the division of (tempered) distributions by polynomials. The case $n = 1$ is discussed in detail and serves as a motivation for the techniques that are utilised in the general case. All the prerequisites for Hörmander's proof (the Theorems of Seidenberg-Tarski, of Puiseux and Whitney's Extension Theorem) are discussed in detail. As a consequence of this theorem, it follows that every non zero partial differential operator with constant coefficients has a tempered fundamental solution.

Keywords: Distributions, division, polynomials, tempered distributions.

Sumário

1	Introdução	11
2	Topologia do espaço $\mathcal{S}$	19
3	Teorema de Seidenberg-Tarski	23
4	Séries de Puiseux	29
5	Lema algébrico	39
6	Teorema da Extensão de Whitney	45
7	Prova do Teorema principal	63
8	Apêndice	85
9	Notações	93
	Referências Bibliográficas	95

Capítulo 1

Introdução

Após o desenvolvimento da Teoria das Distribuições por Schwartz em 1950 surgiu a seguinte questão: dados um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e uma distribuição $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, existe uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $fT = S$?

Esse resultado é falso, como se pode ver considerando, por exemplo, uma função f que se anula em um aberto $U \subseteq \Omega$ não vazio e uma distribuição S que não se anula nesse aberto.

Na verdade, se f se anular somente em um ponto de Ω a resposta continua sendo, em geral, negativa. Vejamos um exemplo. Consideremos a função $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ definida a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Suponhamos por absurdo que existe uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $fT = 1$. Sejam $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{j=0}^N \sup_{x \in [-1,1]} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([-1,1]).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$. Então

$$T(\varphi) = T(e^{-\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi) = e^{\frac{-1}{x^2}} T(e^{\frac{1}{x^2}} \varphi) = 1(e^{\frac{1}{x^2}} \varphi) = \int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx.$$

Conseqüentemente,

$$\left| \int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx \right| \leq C \sum_{j=0}^N \sup_{x \in [-1,1]} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ em uma vizinhança de $[1/(n+2), 1/(n+1)]$ e, além disso, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_n^{(m)}\|_\infty = O(n^m).$$

Podemos afirmar, então, que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x) dx \leq K \cdot n^N$$

Entretanto

$$\int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x) dx \geq \int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}} e^{\frac{1}{x^2}} dx \geq e^{(n+1)^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Dessas duas últimas afirmações concluiríamos que existe uma constante K' tal que $e^{(n+1)^2} \leq K' n^{N+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que não é possível.

Continuando com a história do problema da divisão, em 1932 Hadamard estudou as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$, onde $a \in \mathbb{C}$:

$$x_+^a = \begin{cases} x^a, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Pode-se provar que se $\operatorname{Re}(a) > -1$, então $x_+^a \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quanto aos outros casos, através de continuação analítica é possível dar significado para x_+^a , para todo $a \in \mathbb{C}$ (como por exemplo para x_+^{-1}).

Em 1956 Schwartz resolveu o problema da divisão se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ e $f = f(z_1, \dots, z_n)$ é uma função não nula e holomorfa em cada uma de suas variáveis. Tal resultado encontra-se em [10].

Pouco tempo depois, em 1958, Łojasiewicz provou em [9] que o resultado é verdadeiro se f for uma função real analítica. No mesmo período Hörmander provou em [7] que o resultado vale no caso em que f é um polinômio; embora o resultado de Łojasiewicz implique o de Hörmander, a prova do último é consideravelmente mais simples e envolve técnicas muito interessantes. Do Teorema de Hörmander segue que todo operador diferencial parcial linear não nulo de coeficientes constantes admite solução fundamental temperada.

Ambas as provas de Łojasiewicz e de Hörmander se baseiam na seguinte desigualdade fundamental: dada Q uma função não nula (para Hörmander será um polinômio, para Łojasiewicz uma função real analítica), seja $\mathcal{N}$ o conjunto de seus zeros. Então existem constantes $c, \mu > 0$ tais que

$$c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq |Q(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1.$$

Hörmander provou esse resultado utilizando o Teorema de Seidenberg-Tarski enquanto Łojasiewicz conseguiu prová-lo para funções reais analíticas após um estudo detalhado da estratificação do conjunto de zeros de Q .

Finalmente, Atiyah provou em 1970 que é possível dividir distribuições por polinômios através da Resolução de Singularidades (o leitor mais interessado pode consultar [1]).

Depois dessa introdução histórica, vale relembrar que o principal objetivo desse trabalho é provar o seguinte teorema:

Teorema 1.0.1 *Sejam $P(D)$ um operador diferencial parcial com coeficientes constantes não nulo e T uma distribuição temperada. Então existe uma distribuição temperada S tal que*

$$P(D)S = T.$$

Em particular, sempre existe solução fundamental temperada de $P(D)$.

Para provar esse resultado utilizaremos outro teorema, cuja prova ocupará o resto do trabalho. Para enunciá-lo vamos introduzir a seguinte definição: diremos que uma função $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}$, se, e somente se,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Trataremos brevemente da topologia desse espaço no capítulo seguinte.

O enunciado do teorema mencionado acima é:

Teorema 1.0.2 *Seja P um polinômio não-nulo em n variáveis. Então a aplicação multiplicação*

$$\mathcal{S} \ni f \longmapsto Pf \in \mathcal{S}$$

tem uma inversa contínua, isto é, dada uma semi-norma contínua $\mathcal{R}$ definida em $\mathcal{S}$ existe uma semi-norma contínua $\mathcal{Q}$ definida em $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{R}(f) \leq \mathcal{Q}(Pf)$, $\forall f \in \mathcal{S}$.

Vejamos algumas conseqüências desse teorema.

Teorema 1.0.3 *Sejam T uma distribuição temperada e P um polinômio não nulo em n variáveis. Então existe uma distribuição temperada S tal que*

$$PS = T.$$

Demonstração: Consideremos a aplicação linear definida no subespaço $PS \subseteq \mathcal{S}$ dada por

$$PS \ni Pf \longmapsto T(f).$$

Pelo teorema 1.0.2 essa aplicação é contínua: de fato, se $Pf \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$ então $f \rightarrow 0$ em $\mathcal{S}$, e portanto $T(f) \rightarrow 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach podemos estender a aplicação acima a uma aplicação linear contínua $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definida em todo o espaço $\mathcal{S}$. Mas então

$$PS(f) = S(Pf) = T(f), \forall f \in \mathcal{S},$$

e portanto $PS = T$. ■

Teorema 1.0.4 *Sejam T uma distribuição definida num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e P um polinômio não nulo em n variáveis. Então existe uma distribuição S definida em Ω tal que*

$$PS = T.$$

Demonstração: Vejamos inicialmente que dado um ponto $x_0 \in \Omega$ existem uma vizinhança U de x_0 em Ω e $S_0 \in \mathcal{D}'(U)$ tais que $PS_0 = T$ em U . De fato, sejam $U \subseteq \Omega$ um aberto com $x_0 \in U$ e $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi = 1$ em U . Então $\phi T \in \mathcal{S}'$ e portanto, pelo teorema anterior, existe $R \in \mathcal{S}'$ tal que $PR = \phi T$. Seja $S_0 = R|_{\mathcal{C}_c^\infty(U)}$. Assim $S_0 \in \mathcal{D}'(U)$ e $PS_0 = \phi T = T$ em U .

Vamos considerar agora uma cobertura enumerável $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de Ω tais que:

1. Cada aberto U_m é aberto relativamente compacto em Ω .
2. A cobertura $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é localmente finita.

3. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $S_m \in \mathcal{D}'(U_m)$ tal que $PS_m = T$ em U_m .

Sejam $\phi_m \in \mathcal{C}_c^\infty(U_m)$ tais que $\sum_{m=1}^\infty \phi_m = 1$. Definamos

$$S = \sum_{m=1}^\infty \phi_m S_m.$$

Temos que

$$PS = \sum_{m=1}^\infty (\phi_m PS_m) = \left(\sum_{m=1}^\infty \phi_m \right) T = T. \quad \blacksquare$$

Vejamos agora a prova do teorema 1.0.1.

Demonstração: Sejam $P(D)$ um operador linear parcial diferencial com coeficientes constantes e T uma distribuição temperada. Queremos encontrar uma distribuição temperada S tal que

$$P(D)S = T.$$

Se tal distribuição temperada existir, aplicando a transformada de Fourier na equação acima obtemos:

$$P(\xi)\hat{S} = \hat{T},$$

onde $\hat{S}$ e $\hat{T}$ denotam as transformadas de Fourier de S e de T . Pelo teorema 1.0.3 essa equação tem uma solução $\hat{S}$, uma distribuição temperada. Invertendo a transformada de Fourier obtemos nossa solução S . $\blacksquare$

Agora vamos dar uma idéia dos passos necessários para provar o teorema 1.0.2. A prova desse teorema será feita por indução, mas começaremos por provar um caso particular (o que será feito sem utilizar a hipótese de indução). No momento em que formos provar o passo da indução precisaremos do caso particular e de um outro teorema importante, o Teorema da Extensão de Whitney, que será provado no capítulo 6. Para provarmos esse teorema utilizaremos o seguinte lema, que será provado no capítulo 5:

Lema 1.0.1 *Sejam Q um polinômio em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{N}$ o conjunto dos seus zeros. Então ou $\mathcal{N} = \emptyset$ e existem constantes $C, a > 0$ tais que*

$$C(1 + |\xi|^2)^{-a} \leq |Q(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ou $\mathcal{N} \neq \emptyset$ e existem constantes $C, a, b > 0$ tais que

$$C(1 + |\xi|^2)^{-a} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^b \leq |Q(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A prova desse resultado utiliza, por sua vez, os Teoremas de Seidenberg-Tarski e de Puiseux, que aparecem nos capítulos 3 e 4. No capítulo 2 vamos estudar um pouco mais a topologia do espaço $\mathcal{S}$, o que será útil no restante do trabalho. No capítulo 9 se encontra uma breve descrição das notações utilizadas durante este trabalho.

Para finalizar esse capítulo, vale a pena descrever a prova do teorema 1.0.2 no caso $n = 1$.

Para prová-lo devemos mostrar que se P é um polinômio real e $m, p \in \mathbb{N}$, existem $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$, constantes $m_i \in \mathbb{N}$, para $0 \leq i \leq k$ tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^p f(x)| \leq C \sum_{i=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{m_i} D^i(Pf)(x)|, \forall f \in \mathcal{S}.$$

Começemos a prova com um caso mais simples.

Lema 1.0.2 *Dado $p \in \mathbb{N}$, existem $q \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tais que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |D^p f(x)| \leq C \sum_{j=0}^q \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^j(Pf)(x)|, \forall f \in \mathcal{S}.$$

Demonstração: Vejamos inicialmente que o resultado é verdadeiro se $P(x) = (x - a)^r$, onde $a \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$. Escrevendo a fórmula de Taylor da função $g(x) = f(x)(x - a)^r$ no ponto a de ordem $r - 1$ teremos que

$$(x - a)^r f(x) = \int_0^1 \frac{(1 - t)^{r-1}}{(r - 1)!} D^r \{(x - a)^r f(x)\}(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^r dt,$$

e portanto

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(1 - t)^{r-1}}{(r - 1)!} D^r \{(x - a)^r f(x)\}(a + t(x - a)) dt.$$

Após derivarmos essa expressão vemos que existe uma constante C (independente de f) tal que

$$|D^p f(x)| \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^{r+p}(Pf)(y)| \quad (1.0.1)$$

Dado P um polinômio qualquer, vamos escrevê-lo como

$$P(x) = q(x) \cdot (x - x_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - x_l)^{r_l},$$

onde $q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$ e $r_i \geq 1$. Seja $r > 0$ tal que $B_r[x_i] \cap B_r[x_j] = \emptyset$, se $i \neq j$. Sejam $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tais que $\text{supp } \varphi_i \subseteq B_r[x_i]$ e $\varphi_i(x) = 1, \forall x \in B_{\frac{r}{2}}[x_i]$. Temos que

$$\begin{aligned} f &= f\varphi_1 + (1 - \varphi_1)f \\ &= f\varphi_1 + (1 - \varphi_1)\varphi_2 f + (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2)f \\ &= f\varphi_1 + (1 - \varphi_1)\varphi_2 f + \dots + (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_l)f. \end{aligned}$$

Derivando teremos que

$$D^p f = D^p(f\varphi_1) + D^p((1 - \varphi_1)\varphi_2 f) + \dots + D^p((1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_l)f).$$

Por (1.0.1), existe uma constante $C_1 > 0$, independente de f , tal que

$$\begin{aligned}
|D^p(f\varphi_1)(x)| &\leq C_1 \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^{p+r_1}\{(y-x_1)^{r_1}\varphi_1(y)f(y)\}| \\
&= C_1 \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| D^{p+r_1} \left\{ \frac{\varphi_1(y)}{q(y)(y-x_2)^{r_2} \dots (y-x_l)^{r_l}} P(y)f(y) \right\} \right| \\
&\leq C'_1 \sup_{y \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{p+r_1} |D^j(Pf)(y)| \\
&\leq C'_1 \sum_{j=0}^{p+r_1} \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^j(Pf)(y)|
\end{aligned}$$

Tratamos analogamente todos os termos, menos $D^p\{(1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_l)f\}$. Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}} |D^p\{(1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_l)f(x)\}| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| D^p \left\{ \frac{(1-\varphi_1(x))\dots(1-\varphi_l(x))}{P(x)} (Pf)(x) \right\} \right| \\
&\leq C_0 \sum_{j=0}^p \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^j(Pf)(y)|.
\end{aligned}$$

Concluimos que existe uma constante $C > 0$ (independente de f) tal que se $s = r_1 + \dots + r_l$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |D^p f(x)| \leq C \sum_{j=0}^{p+s} \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^j(Pf)(y)|. \quad \blacksquare$$

Falta provar o caso geral, isto é, dados $m, p \in \mathbb{N}$, existem $k \in \mathbb{N}$, $C > 0$ e constantes $m_i \in \mathbb{N}$, com $0 \leq i \leq k$, tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^p f(x)| \leq C \sum_{i=0}^k \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^{m_i} D^i(Pf)(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Faremos o caso $m = 1$, pois para provar o caso geral basta utilizar a mesma idéia e a hipótese de que o fato já foi provado para os m menores. Temos que

$$xD^p f(x) = D^p(xf) - pD^{p-1}f(x).$$

Assim, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que se $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|xD^p f(x)| &\leq |D^p(xf)| + |pD^{p-1}f(x)| \\
&\leq C_1 \sum_{j=0}^{p+s} \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^j(Pxf)(y)| + C_2 \sum_{i=0}^{p-1+s} \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^i(Pf)(y)| \\
&\leq C_1 \sum_{j=0}^{p+s} \sup_{y \in \mathbb{R}} (|jD^{j-1}(Pf)(y)| + |yD^j(Pf)(y)|) + C_2 \sum_{i=0}^{p-1+s} \sup_{y \in \mathbb{R}} |D^i(Pf)(y)|,
\end{aligned}$$

e segue o resultado.

Finalmente apresentamos uma descrição das referências bibliográficas utilizadas na elaboração deste trabalho.

O capítulo 3 é baseado no Apêndice A de [6]. O capítulo 4 é baseado em [8], com uma nova demonstração do Teorema 4.0.7 (Lema de Hensel), além do Apêndice A de [6]. O restante da dissertação é quase que todo baseado em [7], com exceção do Teorema 6.0.14, que foi baseado em [11], sofrendo algumas alterações adicionais.

Ao longo deste trabalho procuramos apresentar o assunto com o maior número possível de detalhes visando, principalmente, tornar claro ao leitor menos experiente este assunto tão interessante.

Capítulo 2

Topologia do espaço $\mathcal{S}$

Vamos começar relembando alguns fatos que podem ser interessantes para o leitor.

Definição 2.0.1 Uma função $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertence ao espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}$, se, e somente se,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Lema 2.0.3 Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos que $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: De fato, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} \leq |x|^{\alpha_1} \dots |x|^{\alpha_n} = |x|^{|\alpha|}. \quad \blacksquare$$

Lema 2.0.4 Valem as seguintes afirmações, para $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$:

1. $\varphi \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
2. $\varphi \in \mathcal{S}$ se, e somente se, $\sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| < \infty$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Provemos que se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, então $\varphi \in \mathcal{S}$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, existe $R > 0$ tal que

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < 1, \forall x : |x| > R$$

Como $\sup_{|x| \leq R} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = A < \infty$, então é claro que $\varphi \in \mathcal{S}$.

Quanto ao outro lado da equivalência, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Para cada $1 \leq j \leq n$, existe $C_j = C_{j, \alpha, \beta} > 0$ tal que

$$|x^\alpha x_j^2 \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_j, \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

assim,

$$|x|^2 |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_1 + \dots + C_n = C,$$

e portanto $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C/|x|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Concluimos que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$.

Provemos 2. Vejamos que se $\sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| < \infty$, $\forall m \in \mathbb{N}$, então $\varphi \in \mathcal{S}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Podemos assumir que $|x| > 1$ pois $\sup_{|x| \leq 1} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty$. Definamos $|\alpha| + |\beta| = m$.

$$\begin{aligned}
|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| &\leq |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\
&\leq |x|^{2|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\
&\leq (1 + |x|^2)^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\
&\leq (1 + |x|^2)^{|\alpha|+|\beta|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^m |\partial^\beta \varphi(y)| \\
&\leq \sup_{|\gamma| \leq m} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^m |\partial^\gamma \varphi(y)| = A < \infty.
\end{aligned}$$

Assim $|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq A < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1$. Quanto ao outro lado da desigualdade, vamos assumir que $\varphi \in \mathcal{S}$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\beta| \leq m$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |x|^{2j} |\partial^\beta \varphi(x)| \leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{2j} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Mas para cada $0 \leq j \leq m$, $|x|^{2j} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^j$ é uma soma de termos do tipo $c|x^\gamma|$, para certos $\gamma \in \mathbb{N}^n$ e constantes c . Como $\varphi \in \mathcal{S}$, então é claro que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| < \infty$, e como isso vale para todo β com $|\beta| \leq m$, segue o resultado. ■

É simples de se notar que:

1. Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$, a função dada por $g(x) = x^\gamma \varphi(x)$ é elemento de $\mathcal{S}$.
2. $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dada uma família de semi-normas definidas em $\mathcal{S}$, existe uma topologia na qual todas as semi-normas da família dada são funções contínuas. Além disso, munido dessa topologia $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável e completo, ou seja, um espaço de Fréchet. Se nossa família é dada por $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$, uma base local para essa topologia é dada pelos conjuntos $A_{\varepsilon, L} = \{f \in \mathcal{S} : F_i(f) < \varepsilon, \forall i \in L\}$, onde $L \subseteq I$ é finito e $\varepsilon > 0$. Vejamos como se relacionam algumas topologias definidas desse modo.

Lema 2.0.5 *As seguinte famílias de semi-normas definem a mesma topologia em $\mathcal{S}$.*

1. $\{ \|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\|_\infty \}_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n}$.
2. $\{ \|(1 + |x|)^m \partial^\gamma \varphi(x)\|_\infty \}_{m \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}^n}$.
3. $\{ \|(1 + |x|^2)^m \partial^\gamma \varphi(x)\|_\infty \}_{m \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}^n}$.
4. $\{ \|(1 + |x|)^m \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|\|_\infty \}_{m, p \in \mathbb{N}}$.

Demonstração: Vamos comparar 1 e 2. Dados $m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^m |\partial^\gamma \varphi(x)|) \leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k |\partial^\gamma \varphi(x)|).$$

Temos que $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)$, donde $|x|^k \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^k$, que é uma soma de termos do tipo $b|x^\alpha|$, onde b é uma constante positiva, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = k$. Assim existem $s \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}^n$ e uma constante $K > 0$ independente de φ tais que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m |\partial^\gamma \varphi(x)| \leq K \sum_{j=1}^s \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha_j} \partial^\gamma \varphi(x)|$$

e podemos concluir que a topologia gerada por 1 é mais fina que a gerada por 2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)|,$$

donde concluímos que as topologias geradas por 1 e 2 são iguais.

Comparemos agora 1 e 3. O argumento para mostrar que a topologia gerada por 1 é mais fina que a gerada por 3 é análogo ao argumento feito para 1 e 2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \frac{(1 + |x|)^{|\alpha|}}{(1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}} |\partial^\beta \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{|\alpha|} \frac{(1 + |x|)^{|\alpha|}}{(1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}} |\partial^\beta \varphi(x)|. \end{aligned}$$

Como existe $K > 0$ tal que $(1 + |x|)^{|\alpha|} / (1 + |x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \leq K, \forall x \in \mathbb{R}^n$, segue que as topologias geradas por 1 e 3 são iguais. Quanto à 1 e 4, dados $m, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^m \sup_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^m \sum_{|\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|) \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|). \end{aligned}$$

Pelo que já vimos com relação à família 2, a topologia gerada por 1 é mais fina que a gerada por 4. Da mesma forma, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, se $p = |\beta|, m = |\alpha|$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{|\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((1 + |x|)^m \sup_{|\gamma| \leq p} |\partial^\gamma \varphi(x)|). \end{aligned}$$

Conseqüentemente as topologias geradas pelas famílias 1 e 4 são iguais. ■

Capítulo 3

Teorema de Seidenberg-Tarski

Definição 3.0.2 Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **semi-algébrico** se ele puder ser escrito como uma reunião finita de intersecções finitas de conjuntos do tipo:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}, \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}, \quad (3.0.1)$$

onde P é um polinômio. Isto é, conjuntos semi-algébricos são reuniões finitas de conjuntos do tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = 0 = \dots = P_l(x), Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\},$$

onde cada P_i e cada Q_j é um polinômio.

Lema 3.0.6 Valem as seguintes propriedades:

1. A reunião finita de conjuntos semi-algébricos é um conjunto semi-algébrico.
2. A intersecção finita de conjuntos semi-algébricos é um conjunto semi-algébrico.
3. O complementar de um conjunto semi-algébrico é um conjunto semi-algébrico.

Demonstração: Vejamos a prova.

1. É suficiente mostrar que a reunião de dois conjuntos semi-algébricos é um conjunto semi-algébrico, o que decorre da definição.
2. Vejamos que se A, B são semi-algébricos, então $A \cap B$ também o é. De fato, digamos que $A = \cup_{i=1}^p A_i, B = \cup_{j=1}^q B_j$, onde A_i, B_j são intersecções finitas de conjuntos como os de (3.0.1). Então

$$A \cap B = \cup_{i,j} (A_i \cap B_j).$$

Como cada $A_i \cap B_j$ pode ser escrito como uma intersecção finita de conjuntos como os de (3.0.1), $A \cap B$ é semi-algébrico pelo item 1.

3. Seja A semi-algébrico. Escrevendo $A = \cup_{k=1}^l A_k$, onde $A_k = \cap_{i=1}^{n_k} B_i^k$, e cada B_i^k é como algum dos conjuntos de (3.0.1), então

$$\begin{aligned} A^c &= \cap_{k=1}^l A_k^c \\ &= \cap_{k=1}^l \left(\cup_{i=1}^{n_k} (B_i^k)^c \right) \end{aligned}$$

Pelos itens 1 e 2 é suficiente notar que cada $(B_i^k)^c$ é semi-algébrico. ■

Agora enunciaremos e provaremos um dos teoremas centrais desse trabalho.

Teorema 3.0.5 (Seidenberg-Tarski) *Se $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ é semi-algébrico, então a projeção de A em $\mathbb{R}^m$ também é um conjunto semi-algébrico.*

Provaremos inicialmente o teorema 3.0.5 para $n = 1$. Vamos denotar as variáveis em $\mathbb{R}$ por x e em $\mathbb{R}^m$ por y . Queremos provar que

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$$

é um conjunto semi-algébrico, se $A \subseteq \mathbb{R}^{1+m}$ é semi-algébrico. Como a imagem de uma reunião por uma função é a reunião das imagens, podemos supor, sem perda de generalidade, que A é descrito por

$$P_1(x, y) > 0, \dots, P_s(x, y) = 0, \quad (3.0.2)$$

onde os P_i são polinômios. Provaremos o teorema 3.0.5 por indução no grau máximo dos polinômios que aparecem em (3.0.2) com relação à x .

Definição 3.0.3 *Dado $x \in \mathbb{R}$, vamos definir o sinal de x como:*

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x > 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Começaremos fazendo algumas observações sobre polinômios em $\mathbb{R}$. Sejam $Q_1, \dots, Q_s$ polinômios em uma variável real de grau no máximo k , não identicamente nulos. Sejam

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N$$

os pontos de $\mathbb{R}$ onde ao menos um dos polinômios $Q_1, \dots, Q_s$ se anula. Digamos que $x_0 = -\infty$, $x_{N+1} = \infty$ e $I_k =]x_k, x_{k+1}[$, $k = 0, \dots, N$. Dados $1 \leq i \leq s$, $0 \leq k \leq N$, $\text{sgn}Q_i(x)$ independe de x quando $x \in I_k$. Escreveremos então

$$\text{sgn}Q_i(I_k) = \text{sgn}Q_i(x), \forall x \in I_k.$$

Vamos resumir todas as informações sobre zeros e mudanças de sinal em

$$SGN(Q_1, \dots, Q_s) = \{ \text{sgn}Q_i(x_j), \text{sgn}Q_i(I_k), i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, N; k = 0, \dots, N \}$$

Mais especificamente,

$$SGN(Q_1, \dots, Q_s) = \{ \text{sgn}Q_1(x_1), \text{sgn}Q_1(I_0), \dots, \text{sgn}Q_s(x_1), \text{sgn}Q_s(I_0), \text{sgn}Q_1(x_2), \\ \text{sgn}Q_1(I_1), \dots, \text{sgn}Q_s(x_N), \text{sgn}Q_s(I_{N-1}), \text{sgn}Q_1(I_N), \dots, \text{sgn}Q_s(I_N) \}$$

Esse é um elemento da reunião disjunta

$$W = \cup_{p=0}^{ks} \{-1, 0, 1\}^{s(2p+1)},$$

onde ks é o número máximo de raízes (que ocorre se todos os polinômios tiverem grau k e raízes distintas, todas reais.) Vale notar que nem todo elemento $w \in W$ pode ocorrer, pois se, por exemplo, $\text{sgn}Q_i(x_j) \neq 0$, então devemos ter que

$$\text{sgn}Q_i(x_j) = \text{sgn}Q_i(I_{j-1}) = \text{sgn}Q_i(I_j).$$

Conhecendo $SGN(Q_1, \dots, Q_s)$ podemos decidir se algum sistema do tipo

$$Q_1(x) > 0, \dots, Q_s(x) = 0 \quad (3.0.3)$$

é satisfeito para algum $x \in \mathbb{R}$. De fato, se algum polinômio Q_i aparece em (3.0.3) como $Q_i(x) = 0$, então (3.0.3) é equivalente a

$$0 \in \{ \text{sgn}Q_1(x_1), \dots, \text{sgn}Q_s(x_1), \dots, \text{sgn}Q_1(x_N), \dots, \text{sgn}Q_s(x_N) \}$$

Se, do contrário, todos os polinômios Q_j em (3.0.3) aparecem como $Q_j(x) > 0$, (3.0.3) é equivalente a existir k tal que $0 \leq k \leq N$ e

$$\text{sgn}Q_1(I_k) = 1, \dots, \text{sgn}Q_s(I_k) = 1.$$

Tendo em vista as observações feitas acima, o seguinte resultado implicará o teorema 3.0.5 no caso em que $n = 1$ e o grau máximo dos polinômios $P_1, \dots, P_s$ com relação a x é k .

Teorema 3.0.6 *Sejam $P_1(x, y), \dots, P_s(x, y)$ polinômios. Então*

$$E = \{y \in \mathbb{R}^m : SGN(P_1(., y), \dots, P_s(., y)) = w\}$$

é semi-algébrico, para todo $w \in W$.

O seguinte lema nos auxiliará a provar o teorema 3.0.6 por indução em k , onde k é o grau máximo dos polinômios $P_1, \dots, P_s$ com relação a x .

Lema 3.0.7 *Sejam $P_1, \dots, P_s$ polinômios reais de grau no máximo $k > 0$ tais que P_s tem grau exatamente k e nenhum deles é identicamente nulo. Se $g_1, \dots, g_s$ são os restos obtidos quando dividimos P_s por $P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s$, então*

$$SGN(P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s, g_1, \dots, g_s)$$

determina $SGN(P_1, \dots, P_s)$.

Demonstração: Sejam $x_1 < \dots < x_N$ os pontos de $\mathbb{R}$ onde algum dos polinômios

$$P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s, g_1, \dots, g_s$$

se anula (desconsideraremos os polinômios identicamente nulos). Conhecer

$$SGN(P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s, g_1, \dots, g_s)$$

nos permite concluir quais desses pontos, digamos

$$x_{i_1} < \dots < x_{i_l},$$

são zeros de $P_1, \dots, P_s, P'_s$ (mesmo sem saber quais são, de fato, esses pontos). Como $P_s(x) = g_j(x)$ se $P_j(x) = 0$, para $1 \leq j \leq s-1$, e $P_s(x) = g_s(x)$ se $P'_s(x) = 0$, podemos determinar $\text{sgn}P_s(x_{i_j})$.

Observe que o sinal do coeficiente dominante de P_s é igual à $\text{sgn}P'_s(I_N)$ (se $\text{sgn}P'_s(I_N) = 0$, então P_s é constante, e portanto não tem zeros).

Nos intervalos $]-\infty, x_{i_1}[, \dots,]x_{i_l}, \infty[$ o polinômio P_s é monótono (uma vez que as raízes de P'_s são elementos de $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\}$). Assim sendo, P_s tem um zero em um desses intervalos se, e somente se, P_s tem sinais opostos nos extremos (onde os sinais em ∞ e em $-\infty$ são dados pelo sinal do coeficiente dominante de P_s).

Dessa forma podemos checar quais desses intervalos contém um zero de P_s (note que se houver, há um único zero). Esses zeros, juntamente com os pontos $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ que não são somente zeros de P'_s nos fornecem todos os zeros relevantes de $P_1, \dots, P_s$; considerando também as informações sobre $\text{sgn}P_s(x_{i_j})$ e o fato de que conhecemos os sinais dos P_i nos intervalos que contém os zeros de P , podemos obter $SGN(P_1, \dots, P_s)$. ■

Observe que quando substituímos $P_1, \dots, P_s$ por $P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s, g_1, \dots, g_s$ estamos aumentando o número de polinômios, mas diminuindo o número de polinômios cujos graus são exatamente k .

Demonstração: (do teorema 3.0.6) Para isso faremos uma indução dupla: assumiremos que o resultado é válido para todo natural menor do que k e também para k , desde que o número de polinômios cujo grau com relação a x é k seja menor.

Sejam $P_1(x, y), \dots, P_s(x, y)$ polinômios de grau no máximo k em x .

Fixando $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ entre 0 e k , o seguinte conjunto é semi-algébrico:

$$\{y \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } P_1(., y) \text{ tem grau } m_1, \dots, P_s(., y) \text{ tem grau } m_s\}$$

De fato, podemos escrever que

$$P_i(x, y) = Q_0^i(y) + xQ_1^i(y) + \dots + x^{m_i}Q_{m_i}^i(y) + \dots + x^kQ_k^i(y),$$

onde todos os $Q_j^i(y)$ são polinômios em y . Assim, o grau de $P_i(., y)$ é m_i se, e somente se, $Q_{m_i}^i(y) \neq 0$ e $Q_j^i(y) = 0, \forall j > m_i$.

Como

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{0 \leq c_l \leq k} \{y \in \mathbb{R}^m : \text{grau de } P_j(., y) \text{ é } c_j, \forall 1 \leq j \leq s\}$$

e $E = E \cap \mathbb{R}^m$, então basta provar que se $0 \leq c_1, \dots, c_s \leq k$, então

$$E \cap \{y \in \mathbb{R}^m : P_j(., y) \text{ tem grau } c_j, \forall 1 \leq j \leq s\}$$

é semi-algébrico. Sejam $m_1, \dots, m_s$ entre 0 e k . Seja

$$B = \{y \in \mathbb{R}^m : P_j(., y) \text{ tem grau } m_j, \forall 1 \leq j \leq s\}.$$

Então

$$B = \{y \in \mathbb{R}^m : Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^s \{y \in \mathbb{R}^m : Q_j^i(y) = 0, \forall j > m_i\} \right),$$

donde é suficiente provarmos que

$$E \cap \{y \in \mathbb{R}^m : Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\}$$

é um conjunto semi-algébrico.

Alterando a ordem dos P_j , se necessário, podemos assumir que $m_s = \max\{m_i : 1 \leq i \leq s\}$.

Vamos considerar os polinômios P_i como polinômios em x . Dividindo formalmente P_s por $P_1, \dots, P_{s-1}, P'_s$ teremos

$$P_s(x, y) = P_j(x, y) \cdot q_j(x, y) + r_j(x, y), \forall j \leq s-1;$$

$$P_s(x, y) = P'_s(x, y) \cdot q_s(x, y) + r_s(x, y).$$

Multiplicando por $(Q_{m_j}^j(y))^2$ teremos novamente expressões bem definidas. Podemos escrever

$$(Q_{m_j}^j(y))^2 P_s(x, y) = P_j(x, y) \cdot q_j^*(x, y) + (Q_{m_j}^j(y))^2 r_j(x, y), \forall j \leq s-1;$$

$$(Q_{m_s}^s(y))^2 P_s(x, y) = P'_s(x, y) \cdot q_s^*(x, y) + (Q_{m_s}^s(y))^2 r_s(x, y).$$

Sejam $g_j(x, y) = (Q_{m_j}^j(y))^2 r_j(x, y)$. Assim sendo,

$$\{y \in E : Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{SGN}(P_1(\cdot, y), \dots, P_s(\cdot, y)) = w \text{ e } Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\}$$

se escreve, pelo lema 3.0.7, como uma reunião finita de conjuntos da forma

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \text{SGN}\left(\frac{P_1(\cdot, y)}{Q_{m_1}^1(y)^2}, \dots, \frac{P_{s-1}(\cdot, y)}{Q_{m_{s-1}}^{s-1}(y)^2}, \frac{P'_s(\cdot, y)}{Q_{m_s}^s(y)^2}, \frac{g_1(\cdot, y)}{(Q_{m_1}^1(y))^2}, \dots, \frac{g_s(y)}{(Q_{m_s}^s(y))^2}\right) = w' \text{ e } Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\}$$

Como $\text{sgn}(Q_{m_j}^j(y))^2 = 1$, então $E \cap B$ se escreve como uma reunião finita de conjuntos do tipo

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \text{SGN}\left(P_1(\cdot, y), \dots, P_{s-1}(\cdot, y), P'_s(\cdot, y), g_1(\cdot, y), \dots, g_s(\cdot, y)\right) = w' \text{ e } Q_{m_1}^1(y) \dots Q_{m_s}^s(y) \neq 0\}$$

Pela Hipótese de Indução concluímos a prova. ■

Observação Com essa prova provamos o teorema 3.0.5 no caso em que $E \subseteq \mathbb{R}^{1+m}$ é semi-algébrico. Resta ver para n qualquer. Vejamos como fazer se $n = 2$, já que o mesmo argumento nos possibilita provar por indução o caso geral. Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{2+m}$ um conjunto semi-algébrico. Pelo que acabamos de provar,

$$A = \{(y, z) \in \mathbb{R}^{1+m} : \exists x \in \mathbb{R} : (x, y, z) \in E\}$$

é semi-algébrico. Mas então aplicando novamente o teorema 3.0.5 para o caso $n = 1$ temos que

$$B = \{z \in \mathbb{R}^m : \exists y \in \mathbb{R} : (y, z) \in A\} = \{z \in \mathbb{R}^m : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in E\}$$

é semi-algébrico.

Corolário 3.0.1 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ semi-algébrico. Então*

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \forall x \in \mathbb{R}^n, (x, y) \notin E\}$$

é semi-algébrico.

Demonstração: De fato,

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \forall x \in \mathbb{R}^n, (x, y) \notin E\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}^c. \quad \blacksquare$$

Corolário 3.0.2 *Se $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ é semi-algébrico, então o conjunto*

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \forall x \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in E\}$$

é semi-algébrico.

Demonstração: De fato,

$$\{y \in \mathbb{R}^m : \forall x \in \mathbb{R}^n, (x, y) \in E\} = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E^c\}^c. \quad \blacksquare$$

Definição 3.0.4 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma função $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **semi-algébrica** se o seu subgráfico for semi-algébrico, isto é, se o conjunto*

$$F = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y \leq g(x)\}$$

for semi-algébrico.

Corolário 3.0.3 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{2+n}$ um conjunto semi-algébrico. Vamos denotar as coordenadas de $\mathbb{R}^{2+n}$ por (x, y, z) , onde $x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$. Seja*

$$f(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^n : (x, y, z) \in E\},$$

com a convenção de que $f(x) = -\infty$ se não existirem y, z tais que $(x, y, z) \in E$. Então f é semi-algébrica.

Demonstração: De fato,

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0, \exists y', z : y' \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n : y - \varepsilon < y', (x, y', z) \in E\}.$$

Pelo teorema 3.0.5 o seguinte conjunto é semi-algébrico:

$$A = \{(x, y) : \exists z \in \mathbb{R}^n : (x, y, z) \in E\}.$$

Segue-se que também é semi-algébrico o seguinte conjunto:

$$B = \{(x, y, y', \varepsilon) \in \mathbb{R}^4 : \varepsilon > 0, y - \varepsilon < y', (x, y') \in A\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0, \exists y' \in \mathbb{R} : y' > y - \varepsilon, (x, y') \in A\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \varepsilon > 0, \exists y' \in \mathbb{R} : (x, y, y', \varepsilon) \in B\} \end{aligned}$$

é semi-algébrico. $\blacksquare$

Capítulo 4

Séries de Puiseux

Lema 4.0.8 *Seja $P(x, y)$ um polinômio em $y \in \mathbb{R}$ da forma*

$$P(x, y) = y^n + B_1(x)y^{n-1} + \dots + B_n(x),$$

onde cada B_j é um polinômio em $\mathbb{R}^N$. Vamos assumir que $P(0, y)$ se escreve como o produto de dois fatores relativamente primos de graus p e q , isto é,

$$P(0, y) = g_0(y)h_0(y),$$

onde g_0, h_0 são polinômios reais que não tem fatores comuns.

Então $P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y)$, onde $G(x, y)$ e $H(x, y)$ são polinômios em y cujos respectivos graus são p e q e cujos coeficientes são polinômios em x . Além disso,

$$G(0, y) = g_0(y), H(0, y) = h_0(y).$$

Demonstração: Podemos escrever que

$$P(x, y) = P(0, y) + xf_1(y) + \dots + x^r f_r(y),$$

onde todos os f_j são polinômios reais de grau menor ou igual a $n - 1$. Desejamos escrever

$$G(x, y) = g_0(y) + xg_1(y) + \dots + x^r g_r(y),$$

$$H(x, y) = h_0(y) + xh_1(y) + \dots + x^r h_r(y),$$

onde $g_1(y), \dots, g_r(y)$ são polinômios de grau no máximo $p - 1$, enquanto $h_1(y), \dots, h_r(y)$ são polinômios de grau no máximo $q - 1$. Multiplicando as expressões de G e de H , vemos que as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$P(0, y) = g_0(y)h_0(y),$$

$$f_1(y) = g_0(y)h_1(y) + g_1(y)h_0(y),$$

...

$$f_r(y) = g_0(y)h_r(y) + \dots + g_r(y)h_0(y).$$

Provaremos por indução que existem funções $g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_r$ que satisfazem essas equações.

A primeira equação é verificada por hipótese.

Suponhamos que existam funções $g_1, \dots, g_{l-1}, h_1, \dots, h_{l-1}$ que satisfazem as l primeiras equações. Existe um polinômio C_l , de grau menor ou igual a $n-1$, tal que a equação que g_l e h_l devem verificar pode ser escrita como

$$g_0(y)h_l(y) + h_0(y)g_l(y) = C_l(y)$$

Como g_0 e h_0 são relativamente primos, então existem polinômios g_l, h_l cujos graus não ultrapassam $p-1$ e $q-1$, respectivamente, tais que a equação acima é satisfeita. ■

Teorema 4.0.7 (Lema de Hensel) *Seja $P(x, y)$ um polinômio em $y \in \mathbb{R}$ da forma*

$$P(x, y) = y^n + B_1(x)y^{n-1} + \dots + B_n(x),$$

onde cada B_i é uma função real analítica em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$. Se

$$P(0, y) = g_0(y)h_0(y),$$

onde g_0 e h_0 são polinômios reais sem fatores comuns cujos graus são p e q (com $p+q=n$), então podemos escrever, para x pequeno,

$$P(x, y) = G(x, y)H(x, y),$$

onde $G(x, y)$ e $H(x, y)$ são polinômios em y de graus p e q cujos coeficientes são funções analíticas reais para x pequeno. Além disso,

$$G(0, y) = g_0(y), H(0, y) = h_0(y).$$

Demonstração: Seja $E(k)$ o conjunto dos polinômios mônicos de grau k com coeficientes reais. Podemos supor que $P(0, y) = g_0 h_0$, onde $g_0 \in E(p), h_0 \in E(q)$. Seja

$$\Lambda : \mathbb{R} \times E(p) \times E(q) \longrightarrow E(p+q)$$

dada por $\Lambda(x, R, S) = P(x, \cdot) - R.S$. Temos, por hipótese, que $\Lambda(0, g_0, h_0) = 0$. Queremos provar que podemos resolver a equação

$$\Lambda(x, R(x), S(x)) = 0, R(0) = g_0, S(0) = h_0.$$

Como os espaços $E(n)$ não são espaços vetoriais, não podemos simplesmente utilizar o Teorema da Função Implícita. Denotaremos por $\mathbb{R}_m[y]$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a m com coeficientes reais. A função

$$\pi_m : E(m) \longrightarrow \mathbb{R}_{m-1}[y]$$

dada por $\pi_m(R) = R - y^m$ é uma bijeção. Além disso, dados $R \in E(p), S \in E(q)$,

$$\pi_{p+q}(R.S) = \pi_p(R).\pi_q(S) + y^q\pi_p(R) + y^p\pi_q(S). \quad (4.0.1)$$

De fato, se

$$\begin{aligned} R &= a_0 + \dots + a_{p-1}y^{p-1} + y^p, \\ S &= b_0 + \dots + b_{q-1}y^{q-1} + y^q, \end{aligned}$$

$\pi_p(R) = a_0 + \dots + a_{p-1}y^{p-1}$, $\pi_q(S) = b_0 + \dots + b_{q-1}y^{q-1}$, donde $\pi_p(R) \cdot \pi_q(S) = a_0b_0 + (a_0b_1 + b_0a_1)y + \dots + a_{p-1}b_{q-1}y^{p+q-2}$. Além disso,

$$\begin{aligned}\pi_{p+q}(R.S) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)y + \dots + (a_{p-1} + b_{q-1})y^{q+p-1} \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)y + \dots + a_{p-1}b_{q-1}y^{p+q-2} + \\ &\quad + y^q(a_0 + \dots + a_{p-1}y^{p-1}) + y^p(b_0 + \dots + b_{q-1}y^{q-1}).\end{aligned}$$

Consideremos agora

$$\Gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{p-1}[y] \times \mathbb{R}_{q-1}[y] \longrightarrow \mathbb{R}_{p+q-1}[y]$$

dada por

$$\Gamma(x, g, h) = \pi_{p+q}(P(x, \cdot)) - gh - y^qg - y^ph.$$

Temos que $\Gamma(0, \pi_p(g_0), \pi_q(h_0)) = 0$ por (4.0.1), pois

$$\begin{aligned}\Gamma(0, \pi_p(g_0), \pi_q(h_0)) &= \pi_{p+q}(P(0, \cdot)) - \pi_p(g_0)\pi_q(h_0) - y^q\pi_p(g_0) - y^p\pi_q(h_0) \\ &= \pi_{p+q}(g_0h_0) - \pi_p(g_0)\pi_q(h_0) - y^q\pi_p(g_0) - y^p\pi_q(h_0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, basta provarmos que a derivada de Γ com relação a (g, h) no ponto $(0, \pi_p(g_0), \pi_q(h_0))$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}_{p-1}[y] \times \mathbb{R}_{q-1}[y]$ e $\mathbb{R}_{p+q-1}[y]$.

Dados $(g, h) \in \mathbb{R}_{p-1}[y] \times \mathbb{R}_{q-1}[y]$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(0, \pi_p(g_0) + tg, \pi_q(h_0) + th) - \Gamma(0, \pi_p(g_0), \pi_q(h_0)) \\ &= \pi_{p+q}(P(0, \cdot)) - (\pi_p(g_0) + tg)(\pi_q(h_0) + th) - y^q(\pi_p(g_0) + tg) - y^p(\pi_q(h_0) + th) \\ &\quad - [\pi_{p+q}(P(0, \cdot)) - \pi_p(g_0)\pi_q(h_0) - y^q\pi_p(g_0) - y^p\pi_q(h_0)] \\ &= t\pi_p(g_0)h - t\pi_q(h_0)g - t^2gh - ty^qg - ty^ph.\end{aligned}$$

Dessa forma vemos que a derivada de Γ com relação a (g, h) no ponto $(0, \pi_p(g_0), \pi_q(h_0))$ é a aplicação

$$(g, h) \longrightarrow -\pi_p(g_0)h - \pi_q(h_0)g - y^qg - y^ph = -g_0h - h_0g.$$

Essa aplicação tem como domínio $\mathbb{R}_{p-1}[y] \times \mathbb{R}_{q-1}[y]$, e como contradomínio $\mathbb{R}_{p+q-1}[y]$ (que têm a mesma dimensão: $p + q = n$). Como $\text{mdc}(g_0, h_0) = 1$, então essa aplicação é sobrejetora, e portanto bijetora. ■

Teorema 4.0.8 (Decomposição) *Seja $P(x, y)$ um polinômio em $y \in \mathbb{R}$ da forma*

$$P(x, y) = y^n + B_1(x)y^{n-1} + \dots + B_n(x), \quad (4.0.2)$$

onde cada B_i é uma função real analítica em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que P pode ser escrito, em uma vizinhança de 0, como

$$P(x^p, y) = (y - R_1(x))(y - R_2(x)) \dots (y - R_m(x))G(x, y),$$

onde as funções $R_1, \dots, R_m$ são funções analíticas em uma vizinhança de 0, $G(x, y)$ é um polinômio em y que não tem raízes reais para $x \neq 0$ pequeno e cujos coeficientes são funções analíticas (em x) em uma vizinhança de 0.

Demonstração: Faremos a prova por indução no grau do polinômio P . Se o grau é $n = 1$, então $P(x, y) = y - (-B_1(x))$, e o resultado é imediato.

Dado $n > 1$, vamos assumir que a decomposição enunciada é possível para todo polinômio como em (4.0.2) cujo grau é menor que n . Seja $y' = y + \frac{B_1(x)}{n}$; substituindo em $P(x, y)$ obtemos um novo polinômio:

$$\begin{aligned} P'(x, y') &= (y')^n - (y')^{n-1}B_1(x) + \sum_{j < n-1} \binom{n}{j} (y')^j \left(\frac{-B_1(x)}{n} \right)^{n-j} + \\ &+ B_1(x)(y')^{n-1} + B_1(x) \left(\sum_{j < n-1} \binom{n-1}{j} (y')^j \left(\frac{-B_1(x)}{n} \right)^{n-1-j} \right) + \dots + B_n(x) \\ &= (y')^n + B'_2(x)(y')^{n-2} + \dots + B'_{n-1}(x)y' + B'_n(x), \end{aligned}$$

onde as funções $B'_2, \dots, B'_n$ são analíticas em x . Se elas se anularem identicamente, então $P(x, y) = (y + \frac{1}{n}B_1(x))^n$, e conseguimos decompor P da forma desejada.

Podemos assumir, então, que existe j tal que a função B'_j não se anula identicamente. Para cada j tal que B'_j não se anula identicamente, seja p_j a menor potência de x que aparece em B_j . Seja $\sigma = \min\{\frac{p_j}{j} : B'_j \text{ não é nula}\}$; vamos escrever que $\sigma = \frac{l}{k}$, onde $l, k \in \mathbb{N}$ e $\frac{l}{k}$ é irredutível. Sejam $x = (x'')^k, y' = (x'')^l y''$. Substituindo em $P'(x, y')$ obtemos um novo polinômio (aqui $B''_j(x'') = B'_j((x'')^k)$):

$$\begin{aligned} &(y'')^n (x'')^{nl} + B''_2(x'') (y'')^{n-2} (x'')^{(n-2)l} + \dots + y'' (x'')^l B''_{n-1}(x'') + B''_n(x'') \\ &= (x'')^{nl} \left((y'')^n + (y'')^{n-2} (x'')^{-2l} B''_2 + \dots + (x'')^{-nl} B''_n \right). \end{aligned}$$

Notemos que $p_j - j\frac{l}{k} \geq 0, \forall j$ e que existe (ao menos) um j_* tal que $p_{j_*} - j_*\frac{l}{k} = 0$. Como a menor potência de x'' que aparece em B'_j é $p_j \cdot k$ e $p_j \cdot k \geq l \cdot j$,

$$P''(x'', y'') = (y'')^n + (y'')^{n-2} (x'')^{-2l} B''_2 + \dots + y'' (x'')^{(1-n)l} B''_{n-1} + (x'')^{-nl} B''_n$$

é um polinômio em y'' cujos coeficientes são funções reais analíticas em x'' . Consideremos as raízes de $P''(0, y'')$. Como $l \cdot j_* = p_{j_*} \cdot k$, segue que o coeficiente de $(y'')^{n-j_*}$ não se anula em $x'' = 0$, donde concluímos que $P''(0, y'')$ não pode ter uma raiz de multiplicidade n . Vamos escrever

$$P''(0, y'') = f_1(y'') f_2(y'') g(y''),$$

onde f_1 e f_2 são polinômio de graus menores que n que não têm raízes em comum e g é um polinômio sem raízes reais. Vamos assumir que f_1, f_2 e g são mônimos.

Se f_1 e f_2 são constantes, então $P''(0, y'')$ tem somente raízes complexas. Como as raízes de um polinômio dependem continuamente de seus coeficientes, segue que $P''(x'', y'')$ tem somente raízes complexas, se x'' for suficientemente pequeno. Então

$$\begin{aligned} P((x'')^k, y) &= (x'')^{nl} P''(x'', y'') \\ &= (x'')^{nl} P'' \left(x'', \frac{y + \frac{1}{n}B_1((x'')^k)}{(x'')^l} \right), \end{aligned}$$

onde o polinômio P'' (com relação a y) só tem raízes complexas para x'' pequeno, e a decomposição vale nesse caso.

Vamos assumir agora que os graus de f_1, f_2 e g são menores que n . Pelo teorema anterior aplicado inicialmente à $f_1 f_2, g$ e depois à f_1, f_2 , existem polinômios em y'' , F_1, F_2 e G cujos coeficientes são funções analíticas de x'' tais que, para x'' pequeno,

$$P''(x'', y'') = F_1(x'', y'') F_2(x'', y'') G(x'', y''),$$

onde

$$f_1(y'') = F_1(0, y''), f_2(y'') = F_2(0, y''), g(y'') = G(0, y'').$$

Novamente pelo fato de que as raízes de um polinômio dependem continuamente de seus coeficientes, como todas as raízes de $g(y'')$ são complexas, $G(x'', y'')$ também não tem raízes reais para x'' pequeno. Como os graus de F_1 e de F_2 são menores do que n , pela hipótese de indução existem $k_1, k_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que, em uma vizinhança de 0,

$$F_1(z^{k_1}, y'') = (y'' - R_{1,1}(z))(y'' - R_{1,2}(z)) \dots (y'' - R_{1,m_1}(z)) G_1(z, y''),$$

$$F_2(w^{k_2}, y'') = (y'' - R_{2,1}(w))(y'' - R_{2,2}(w)) \dots (y'' - R_{2,m_2}(w)) G_2(w, y'').$$

Sejam $p = k \cdot \text{mmc}\{k_1, k_2\}$ e a, b tais que $M = \text{mmc}\{k_1, k_2\} = a \cdot k_1 = b \cdot k_2$. Se $z = x^a, w = x^b$ e $x'' = x^M$, então $(x'')^{nl} = x^{Mnl}$ e

$$P(x^p, y) = x^{Mln} F_1(x^{ak_1}, y'') \cdot F_2(x^{bk_2}, y'') G(x^M, y'').$$

Suponhamos que o grau de G é m com relação à y'' . Como

$$G(x^M, y'') = G\left(x^M, \frac{y + \frac{1}{n} B_1(x^p)}{x^{Ml}}\right),$$

então $x^{l \cdot m \cdot M} G(x^M, y'')$ é um polinômio em y cujos coeficientes são funções analíticas de x que não tem zeros se x for pequeno. Como

$$\begin{aligned} F_1(x^M, y'') &= (y'' - R_{1,1}(x^a))(y'' - R_{1,2}(x^a)) \dots (y'' - R_{1,m_1}(x^a)) G_1(x^a, y'') \\ &= \frac{1}{x^{Ml \cdot m_1}} \left(y - \left(x^{Ml} R_{1,1}(x^a) - \frac{1}{n} B_1(x^p) \right) \right) \dots G_1\left(x^a, \frac{y - \frac{1}{n} B_1(x^p)}{x^{Ml}}\right), \end{aligned}$$

se o grau de F_1 é s , então $x^{M \cdot l \cdot s} F_1(x^M, y'')$ pode ser escrito como

$$(y - S_1(x)) \dots (y - S_{s_1}(x)) G'_1(x, y),$$

onde as funções S_i são analíticas em x e $G'_1(x, y)$ é um polinômio em y cujos coeficientes são funções analíticas de x e para x pequeno $G'_1(x, y)$ não tem raízes reais. ■

Podemos escrever ainda $R'_i(x) = R_i(x^{\frac{1}{p}})$, $G'(x, y) = G(x^{\frac{1}{p}}, y)$,

$$P(x, y) = (y - R'_1(x)) \dots (y - R'_m(x)) G'(x, y),$$

onde para cada $i \leq m$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$R'_i(x) = \sum_{j=n_i}^{\infty} c_j (x^{\frac{1}{p}})^j.$$

Em particular, se $R'_i \neq 0$, podemos escrever que

$$R'_i(x) = c_{n_i} x^{\frac{n_i}{p}} (1 + O(1)), x \rightarrow 0.$$

Teorema 4.0.9 (Teorema de Puiseux) *Seja f uma função contínua, definida para $\xi \in \mathbb{R}$ positivo pequeno, tal que $y = f(\xi)$ satisfaz uma equação polinomial da forma*

$$A_0(\xi)y^n + A_1(\xi)y^{n-1} + \dots + A_{n-1}(\xi)y + A_n(\xi) = 0,$$

onde os coeficientes $A_0(\xi), \dots, A_n(\xi)$ são funções analíticas. Então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que a restrição de f a algum intervalo do tipo $(0, \varepsilon)$ pode ser escrita como

$$\xi^q f(\xi) = g(\xi^{\frac{1}{p}}),$$

onde g é uma função analítica em um intervalo pequeno em torno da origem.

Demonstração: Vamos escrever que $A_0(\xi) = \xi^q B_0(\xi)$, onde $q \in \mathbb{N}$ e $B_0(\xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$. Definindo $B_j(\xi) = \frac{A_j(\xi)}{B_0(\xi)}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^q y^n + B_1(\xi)y^{n-1} + \dots + B_{n-1}(\xi)y + B_n(\xi) \\ &= \xi^{q-Nn}(\xi^N y)^n + B_1(\xi)\xi^{-N(n-1)}(\xi^N y)^{n-1} + \dots + B_{n-1}(\xi)\xi^{-N}(\xi^N y) + B_n(\xi). \end{aligned}$$

Dividindo por ξ^{q-Nn} obtemos que

$$0 = (\xi^N y)^n + B_1(\xi)\xi^{N-q}(\xi^N y)^{n-1} + \dots + B_{n-1}(\xi)\xi^{N(n-1)-q}(\xi^N y) + B_n(\xi)\xi^{Nn-q}$$

Logo, se $N = q$ a equação acima é igual a

$$0 = (\xi^q y)^n + B_1(\xi)(\xi^q y)^{n-1} + B_2(\xi)\xi^q(\xi^q y)^{n-2} + \dots + B_{n-1}(\xi)\xi^{q(n-2)}(\xi^q y) + B_n(\xi)\xi^{q(n-1)}$$

Pelo Teorema da Decomposição existem uma função g analítica em um intervalo em torno do 0 e um natural p tal que

$$\xi^q f(\xi) = g(\xi^{\frac{1}{p}}). \quad \blacksquare$$

Nas condições do teorema anterior, se

$$g(\xi) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j \xi^j,$$

então

$$f(\xi) = \sum_{j=m-pq}^{\infty} c_{j+pq} (\xi^{\frac{1}{p}})^j,$$

e a menos que f seja nula, podemos escrever que $f(\xi) = c_m \xi^{\frac{m-pq}{p}} (1 + o(1))$, se $\xi \rightarrow 0$. Podemos obter uma expressão semelhante para quando $\xi \rightarrow \infty$ fazendo

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{j=m-pq}^{\infty} c_{j+pq} (\xi^{-\frac{1}{p}})^j.$$

Definição 4.0.5 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **algébrica** se $y = f(x)$ for solução de uma equação do tipo

$$P_n(x)y^n + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

onde cada P_j é um polinômio.

Lema 4.0.9 Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto semi-algébrico. Então A pode ser escrito como uma reunião finita de intervalos (onde vamos considerar que um ponto é um intervalo).

Demonstração: Podemos supor que A é dado por uma intersecção finita de conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R} : P_1(x) > 0\}, \dots, \{x \in \mathbb{R} : P_k(x) = 0\}$, onde $k \geq 1$ e cada P_i é um polinômio. Como cada um desses conjuntos se escreve como uma reunião finita de intervalos, segue o lema. ■

Vamos tratar agora do discriminante de um polinômio.

Definição 4.0.6 Um polinômio $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ é dito **simétrico** se

$$p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n), \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Os exemplos mais importantes de polinômios simétricos são

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \dots + x_n \\ \sigma_2(x_1, \dots, x_n) &= (x_1x_2 + \dots + x_1x_n) + (x_2x_3 + \dots + x_2x_n) + \dots + (x_{n-1}x_n) \\ &\dots \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

Pode-se provar o seguinte resultado bastante importante:

Teorema 4.0.10 Seja $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio simétrico. Então existe exatamente um polinômio Q de n variáveis com coeficientes inteiros tal que

$$p(x_1, \dots, x_n) = Q(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Outro polinômio simétrico muito importante é o dado pelo determinante de Vandermonde:

$$D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2.$$

Vale notar que $D(x_1, \dots, x_n) = 0$ se, e somente se, existem i e j distintos com $x_i = x_j$.

Definição 4.0.7 Seja $p(x) = (-1)^n a_n + \dots + a_2 x^{n-2} - a_1 x^{n-1} + x^n$ um polinômio com coeficientes complexos.

Sabemos que existe exatamente um polinômio $Q \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$D(x_1, \dots, x_n) = Q(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Então $\Delta(p) = Q(a_1, \dots, a_n)$ é chamado o **discriminante** de p .

Outro resultado bastante útil é o seguinte:

Teorema 4.0.11 *Seja $p(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j) \in \mathbb{C}[x]$. Então p tem uma raiz múltipla se, e somente se, $\Delta(p) = 0$. Além disso,*

$$\Delta(p) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2,$$

e $p(x) = (-1)^n a_n + \dots + a_2 x^{n-2} - a_1 x^{n-1} + x^n$, onde

$$a_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n), \forall k.$$

Teorema 4.0.12 *Seja f uma função semi-algébrica definida em $\mathbb{R}$. Então $\mathbb{R}$ pode ser decomposto em um número finito de intervalos (onde consideramos que um intervalo pode ser só um ponto) nos quais $f = \infty$, $f = -\infty$ ou f é igual a uma função algébrica e contínua. Além disso, se f for finita para x positivo suficientemente grande, e não identicamente nula, então existem constantes $C \neq 0, q \in \mathbb{Q}$ tais que*

$$f(x) = Cx^q(1 + O(1)), x \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Vimos que f é semi-algébrica se, e somente se, seu sub-gráfico for semi-algébrico. Como seu sub-gráfico, isto é, o conjunto $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ é semi-algébrico, então sua projeção em $\mathbb{R}$ é semi-algébrica, isto é, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$$

é semi-algébrico. Pelo lema 4.0.9 ele pode ser escrito como uma reunião finita de intervalos. Como o complementar da projeção é semi-algébrico, ele também é uma reunião finita de intervalos. Sabemos ainda que

$$A^c = \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x) < y\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = -\infty\}.$$

Como F^c é semi-algébrico, sua projeção em $\mathbb{R}$ é semi-algébrica, donde o complementar dessa projeção também o é, e portanto se escreve como uma reunião finita de intervalos. Notemos que a projeção em $\mathbb{R}$ de F^c é o conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$$

Assim,

$$B^c = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}.$$

Temos que $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$ pode ser escrito como uma reunião finita de intervalos e $B = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$ também. Digamos que $A = \cup_{i=1}^m L_i$, $B = \cup_{j=1}^s I_j$. Então

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = (\cup_{j=1}^s I_j) \cap (\cup_{i=1}^m L_i) = \cup_{i,j} (I_j \cap L_i),$$

portanto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$ se escreve como uma reunião finita de intervalos. Digamos que F seja definido por

$$P_1(x, y) > 0, \dots, P_r(x, y) = 0. \quad (4.0.3)$$

Seja I um intervalo aberto no qual f é finita. Considere $g(x, y) = P_1(x, y) \dots P_r(x, y)$. O discriminante de $g(x, \cdot)$ é um polinômio em x ; tirando os seus zeros que estão em I obteremos novos intervalos nos quais $\Delta(g) \neq 0$, para todo x nesses intervalos. Seja I' um dos novos (finitos)

intervalos contidos em I obtidos dessa forma. Segue do teorema anterior que em I' as equações $P_j(x, y) = 0$ definem um número finito de funções $y = f_j(x)$ tais que $f_1(x) < f_2(x) < \dots < f_l(x)$. Sejam

$$C_i = \{(x, y) : x \in I', y \in \mathbb{R} : f_i(x) < y < f_{i+1}(x)\}.$$

Dessa forma podemos afirmar que ou todo $(x, y) \in C_i$ satisfaz (4.0.3), ou nenhum $(x, y) \in C_i$ satisfaz (4.0.3), pois C_i é um conjunto conexo no qual nenhum P_j tem zero, e no qual os P_j não mudam de sinal (se em (4.0.3) aparecer um polinômio P_j como $P_j(x, y) = 0$, então nenhum ponto de C_i satisfaz (4.0.3)). De modo similar, os seguintes conjuntos ou estão contidos em F , ou são disjuntos de F :

$$\{(x, f_j(x)) : x \in I'\}, \{(x, y) : x \in I', y < f_1(x)\}$$

A seguir veremos que podemos concluir que existe algum i tal que $f = f_i$ em I' .

Vejam inicialmente porque dado $x_0 \in I'$, existe i (que a princípio poderia depender de x_0) tal que $f(x_0) = f_i(x_0)$. Se $f(x_0) < f_1(x_0)$, como $(x_0, f(x_0)) \in F$ teríamos que todo y tal que $y < f_1(x_0)$ é tal que $(x_0, y) \in F$, um absurdo, pois existe y_0 tal que $f(x_0) < y_0 < f_1(x_0)$, e portanto $(x_0, y_0) \notin F$. Analogamente, não pode existir i tal que $f_i(x_0) < f(x_0) < f_{i+1}(x_0)$ pois teríamos por um lado que $C_i \subseteq F$, mas por outro existiria $y : f_i(x_0) < f(x_0) < y < f_{i+1}(x_0)$, isto é, $(x_0, y) \notin F$. Finalmente, se $f_k(x_0) < f(x_0)$, por um lado teríamos que $\{(x, y) : f_k(x) < y\} \subseteq F$, mas por outro lado existe y tal que $f_k(x_0) < f(x_0) < y$ e portanto $(x_0, y) \notin F$.

Vejam agora porque o i não depende de x . Suponhamos por absurdo que existam $x, z \in I'$ tais que $f(x) = f_i(x), f(z) = f_j(z)$, com $i < j$. Seja y tal que $f_{j-1}(x) < y < f_j(x)$. Como $f(z) = f_j(z)$, segue que $\{(w, v) : w \in I', v \in \mathbb{R}, f_{j-1}(w) < v < f_j(w)\} \subseteq F$, e portanto $(x, y) \in F$, donde $f_{j-1}(x) < f(x)$, um absurdo, pois $f_i(x) \leq f_{j-1}(x)$.

Em particular, se f for finita não nula para x suficientemente grande, então existe i tal que $f = f_i$ em um intervalo ilimitado à direita. Pelo Teorema de Puiseux existem constantes $C \neq 0, q \in \mathbb{Q}$ tais que

$$f(x) = f_i(x) = Cx^q(1 + o(1)), x \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Corolário 4.0.4 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^{2+n}$ um conjunto semi-algébrico tal que*

$$f(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^n : (x, y, z) \in E\}$$

está definida e é finita para x suficientemente grande. Então ou $f(x) = 0$ para todo x grande, ou existem $C \neq 0, q \in \mathbb{Q}$ tais que

$$f(x) = Cx^q(1 + o(1)), x \rightarrow \infty. \quad (4.0.4)$$

Demonstração: Vimos que como E é semi-algébrico, f é semi-algébrica. O resultado segue então imediatamente do teorema anterior.

Vale notar que (4.0.4) também vale se $x \rightarrow 0$, e também se definirmos f como

$$f(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : \exists z \in \mathbb{R}^n : (x, y, z) \in E\}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 5

Lema algébrico

Antes de provarmos o lema (1.0.1), vejamos como é a prova desse resultado no caso unidimensional.

Lema 5.0.10 *Sejam Q um polinômio em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{N}$ o conjunto de seus zeros. Se $\exists x \in \mathcal{N}$ tal que $|x| \leq 1$, então existem constantes positivas C, l tais que*

$$C \operatorname{dist}(x, \mathcal{N})^l \leq |Q(x)|, \forall x \in [-1, 1].$$

Demonstração: Escreva

$$Q(x) = (x - x_1)^{l_1} \dots (x - x_p)^{l_p} q(x),$$

onde $\{x_1, \dots, x_p\} = \{x \in [-1, 1] : Q(x) = 0\}$, $l_i \geq 1, p \geq 1$ e $q(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1]$. Seja $r > 0$ tal que $B_r[x_i] \cap B_r[x_j] = \emptyset$ se $i \neq j$. Seja $M > 0$ tal que $M \leq |q(x)|, \forall x \in [-1, 1]$. Sejam ainda $R = \min\{r, \frac{1}{2}\}$, $l = \max\{l_1, \dots, l_p\}$,

$$N = \min\{|Q(x)| : x \in [-1, 1] \cap (\cup_{i=1}^p B_R(x_i))^c\}.$$

Se $x \in B_R[x_j]$ e $x \in [-1, 1]$, então

$$\begin{aligned} |Q(x)| &= |x - x_1|^{l_1} \dots |x - x_p|^{l_p} |q(x)| \\ &\geq R^{l_1} \dots R^{l_{j-1}} R^{l_{j+1}} \dots R^{l_p} |x - x_j|^{l_j} M \\ &= M \cdot R^{l_1 + \dots + l_{j-1} + l_{j+1} + \dots + l_p} \operatorname{dist}(x, \mathcal{N})^{l_j} \\ &\geq M \cdot R^{l \cdot p} \operatorname{dist}(x, \mathcal{N})^l \\ &= C_1 \operatorname{dist}(x, \mathcal{N})^l. \end{aligned}$$

Se $x \in [-1, 1]$ e $x \notin \cup_{i=1}^p B_R(x_i)$, então

$$\frac{N}{2^l} \operatorname{dist}(x, \mathcal{N})^l \leq \frac{N}{2^l} \cdot 2^l = N \leq |Q(x)|.$$

Basta definir $C = \min\{C_1, \frac{N}{2^l}\}$. ■

Vejamos agora a versão do resultado anterior para um polinômio em m variáveis.

Lema 5.0.11 *Sejam Q um polinômio em $\mathbb{R}^m$ e $\mathcal{N}$ o conjunto de seus zeros. Se existir $\xi \in \mathcal{N} : |\xi| \leq 1$, então existem constantes positivas C, μ tais que*

$$C \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq |Q(\xi)|, \forall |\xi| \leq 1.$$

Vale observar que se $\mathcal{N} \neq \emptyset$ e $\mathcal{N} \cap B_1[0] = \emptyset$, então esse resultado é imediato. De fato, se $M > 0$ é tal que $M \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in B_1[0]$, e se $K > 0$ for tal que $\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq K, \forall \xi \in B_1[0]$, então

$$\frac{M}{K} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq M \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in B_1[0].$$

Demonstração: Vamos estudar inicialmente as condições sobre ξ de modo que, se $\delta > 0$,

$$\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) < \delta. \quad (5.0.1)$$

Temos que ξ satisfaz (5.0.1) se, e somente se,

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^m : Q(\eta) = 0 \text{ e } |\eta - \xi|^2 < \delta^2. \quad (5.0.2)$$

Seja então

$$A = \{(\delta, \xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m} : \delta > 0, Q(\eta) = 0, |\eta - \xi|^2 < \delta^2\}.$$

Como A é um conjunto semi-algébrico, decorre do Teorema de Seidenberg-Tarski que o seguinte conjunto também é semi-algébrico:

$$\{(\delta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : \exists \eta \in \mathbb{R}^m : (\delta, \xi, \eta) \in A\}.$$

Assim existe um número finito de conjuntos $G_1(\delta, \xi), \dots, G_r(\delta, \xi)$, cada um deles escrito por igualdades ou desigualdades polinomiais, tais que (5.0.2) vale se, e somente se, (δ, ξ) satisfizer as equações que definem $G_i(\delta, \xi)$, para algum $i \leq r$.

Sejam $H_1(\delta, \xi), \dots, H_s(\delta, \xi)$ os conjuntos obtidos da seguinte forma: primeiramente negamos uma condição em cada $G_i(\delta, \xi)$ e depois interceptamos esses novos conjuntos. Dessa forma teremos que $\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta$ se, e somente se, (δ, ξ) for elemento de ao menos um $H_j(\delta, \xi)$.

Consideramos agora os valores de $|Q(\xi)|$ quando $\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta$ e $|\xi| \leq 1$. Temos que $\tau = |Q(\xi)|$, para algum ξ tal que $\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta$ e $|\xi| \leq 1$ se, e somente se,

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^m : \tau^2 = |Q(\xi)|^2, \tau > 0, |\xi|^2 \leq 1, (\delta, \xi) \in H_j(\delta, \xi) \text{ para ao menos um } j \leq s. \quad (5.0.3)$$

Seja

$$T(\delta) = \inf\{|Q(\xi)| : |\xi| \leq 1, \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta\},$$

isto é, $T(\delta)$ é o ínfimo de $|Q|$ no compacto $K = \{\xi : |\xi| \leq 1, \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta\}$, que não é vazio se δ for pequeno e Q não for nulo. Podemos ver que T é uma função crescente.

Veremos que existe $\delta_0 > 0$ tal que T algébrica em $]0, \delta_0[$. Seja

$$B = \{(\delta, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{2+m} : \tau > 0, \tau^2 = |Q(\xi)|^2, |\xi|^2 \leq 1, (\delta, \xi) \in H_j(\delta, \xi) \text{ para algum } j \leq s\}.$$

Como B é semi-algéblico e $T(\delta) = \inf\{\tau \in \mathbb{R} : \exists \xi \in \mathbb{R}^m : (\delta, \tau, \xi) \in B\}$, segue pelo Corolário 3.0.3 que T é semi-algéblica. Prosseguindo como na prova do teorema 4.0.12 provamos que existe $\delta_0 > 0$ tal que, em $(0, \delta_0)$, T é igual a uma função algéblica e contínua.

Tudo foi feito para que nesse momento possamos utilizar o Teorema de Puiseux. Por esse teorema podemos escrever, para δ pequeno, que

$$T(\delta) = d\delta^\mu(1 + O(1)),$$

onde d e $\mu \in \mathbb{Q}$ são positivos pela definição de T . Dessa forma existe $\delta' > 0$ tal que $0 < \delta \leq \delta'$ implica

$$\frac{d}{2}\delta^\mu \leq T(\delta). \quad (5.0.4)$$

Assim o lema vale com $C = \frac{d}{2}$ se $|\xi| \leq 1$ e $0 < \text{dist}(\xi, \mathcal{N}) < \delta'$ pois fazendo $\delta = \text{dist}(\xi, \mathcal{N})$ em (5.0.4) vem:

$$\begin{aligned} C \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu &\leq T(\text{dist}(\xi, \mathcal{N})) \\ &= \inf\{|Q(z)| : |z| \leq 1, \text{dist}(z, \mathcal{N}) \geq \text{dist}(\xi, \mathcal{N})\} \\ &\leq |Q(\xi)|. \end{aligned}$$

Obviamente o lema vale se $|\xi| \leq 1$ e $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) = 0$. Resta ver se $|\xi| \leq 1$ e $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \geq \delta'$. Seja $M > 0$ tal que $M \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in B_1[0]$ tais que $\delta' \leq \text{dist}(\xi, \mathcal{N})$. Como $\text{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq 2^\mu, \forall \xi \in B_1[0]$, então

$$\frac{M}{2^\mu} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^\mu \leq M \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in B_1[0] : \delta' \leq \text{dist}(\xi, \mathcal{N}).$$

Definimos então $C = \min\{\frac{d}{2}, \frac{M}{2^\mu}\}$. ■

Convém agora excluirmos a hipótese de que $|\xi| \leq 1$.

Teorema 5.0.13 *Sejam Q um polinômio em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{N}$ o conjunto dos seus zeros. Então ou $\mathcal{N} = \emptyset$ e existem constantes $C, a > 0$ tais que*

$$C(1 + |\xi|^2)^{-a} \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ou $\mathcal{N} \neq \emptyset$ e existem constantes $C, a, b > 0$ tais que

$$C(1 + |\xi|^2)^{-a} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^b \leq |Q(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Notemos que se Q for constante o resultado é imediato. Vamos analisar inicialmente o caso em que $|\xi| > 1$. Seja $\xi^* = \frac{\xi}{|\xi|^2}$. Assim sendo, $|\xi^*|^2 = \frac{1}{|\xi|^2}$ e $\xi = \frac{\xi^*}{|\xi^*|^2}$.

Se o grau de Q é $m \geq 1$, seja

$$Q^*(\xi^*) = |\xi^*|^{2m} Q(\xi) = |\xi^*|^{2m} Q\left(\frac{\xi^*}{|\xi^*|^2}\right).$$

Seja $\mathcal{N}^*$ o conjunto dos zeros de Q^* . Temos que $0 \neq \xi^* \in \mathcal{N}^*$ se, e somente se, $\xi \in \mathcal{N}$. Além disso $0 \in \mathcal{N}^*$ e portanto podemos aplicar o lema anterior. Consequentemente, existem constantes $C^*, \mu^* > 0$ tais que

$$|Q^*(\xi^*)| \geq C^* \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*)^{\mu^*}, \forall \xi^* : |\xi^*| \leq 1.$$

Dessa forma,

$$|\xi^*|^{2m}|Q(\xi)| = |\xi|^{-2m}|Q(\xi)| \geq C^* \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*)^{\mu^*}, \forall \xi : |\xi| \geq 1. \quad (5.0.5)$$

Notemos que $|\theta - \rho|^2 = |\theta|^2 + |\rho|^2 - 2 < \theta, \rho >$. Assim,

$$|\eta|\xi|^2 - \xi|\eta|^2|^2 = |\xi|^4|\eta|^2 + |\xi|^2|\eta|^4 - 2|\xi|^2|\eta|^2 < \eta, \xi >.$$

Por sua vez, $|\xi - \eta|^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2 - 2 < \xi, \eta >$, e assim

$$|\xi|^2|\eta|^2|\xi - \eta|^2 = |\xi|^4|\eta|^2 + |\xi|^2|\eta|^4 - 2|\xi|^2|\eta|^2 < \xi, \eta >.$$

Disso segue que $|\eta|\xi|^2 - \xi|\eta|^2|^2 = |\xi|^2|\eta|^2|\xi - \eta|^2$.

$$\begin{aligned} \frac{|\eta - \xi|}{|\eta^* - \xi^*|} &= \frac{|\eta - \xi|}{\left| \frac{\eta}{|\eta|^2} - \frac{\xi}{|\xi|^2} \right|} \\ &= \frac{|\eta - \xi|}{|\eta|\xi|^2 - \xi|\eta|^2|} |\eta|^2|\xi|^2 \\ &= \frac{|\eta - \xi|}{|\xi\eta||\xi - \eta|} |\eta|^2|\xi|^2 \\ &= |\eta||\xi|. \end{aligned}$$

Assim

$$|\xi|^2|\eta^* - \xi^*| = |\xi| \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|}, \forall \xi, \forall \eta \neq 0.$$

Pelo visto acima teremos que para todo $\xi \neq 0$,

$$|\xi|^2 \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*) = \inf_{\eta^* \in \mathcal{N}^*} |\xi|^2|\eta^* - \xi^*| = \inf \left\{ |\xi|, |\xi| \frac{|\xi - \eta|}{|\eta|} : \eta \in \mathcal{N} \setminus \{0\} \right\}. \quad (5.0.6)$$

Suponhamos que $\mathcal{N} \neq \emptyset$. Sejam ξ, η tais que $|\xi| \geq 1, \eta \in \mathcal{N}, |\eta| \leq 2|\xi|$ e $\eta \neq 0$. Temos que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq |\xi - \eta|$ e $\frac{1}{2|\xi|} \leq \frac{1}{|\eta|}$, donde $\frac{1}{2|\xi|^2} \leq \frac{1}{|\xi||\eta|}$ e portanto

$$\frac{\text{dist}(\xi, \mathcal{N})}{2|\xi|^2} \leq \frac{|\eta - \xi|}{|\eta||\xi|}, \forall \xi, \eta : \eta \in \mathcal{N}, |\xi| \geq 1, |\eta| \leq 2|\xi|, \eta \neq 0. \quad (5.0.7)$$

Vejamos que

$$\frac{1}{2|\xi|} \leq \frac{|\eta - \xi|}{|\eta||\xi|}, \forall \xi, \eta : |\xi| \geq 1, 2|\xi| \leq |\eta|. \quad (5.0.8)$$

Seja $\zeta = \frac{\eta}{|\xi|}$. Então para provar (5.0.8) é suficiente mostrar que

$$\frac{|\zeta|}{2} \leq |\zeta - w|, \forall \zeta, w : |\zeta| \geq 2, |w| = 1. \quad (5.0.9)$$

Mas

$$|\zeta - w|^2 = |\zeta|^2 - 2(\zeta \cdot w) + 1 = \frac{|\zeta|^2}{4} + A,$$

onde

$$A = \frac{3|\zeta|^2}{4} - 2(\zeta \cdot w) + 1 \geq \frac{3|\zeta|^2}{4} - 2|\zeta| + 1,$$

pois, como $|w| = 1$, $(\zeta \cdot w) \leq |\zeta|$. A equação (5.0.9) é equivalente a $A \geq 0$, o que é verdade pois as raízes de $\frac{3t^2}{4} - 2t + 1$ são $\frac{2}{3}$ e 2 e portanto $A \geq 0$ se $|\zeta| \geq 2$.

Vejam agora que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq C_1 |\xi|$, $\forall |\xi| \geq 1$. De fato, tome $\xi_0 \in \mathcal{N}$ e defina $C_1 = 1 + |\xi_0|$. Se $|\xi| \geq 1$,

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq |\xi - \xi_0| \leq |\xi| + |\xi_0| \leq C_1 |\xi|. \quad (5.0.10)$$

Afirmamos que existe $C > 0$ tal que $\forall |\xi| \geq 1$,

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq C |\xi|^2 \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*).$$

De fato, se $|\xi| \geq 1$, $0 \neq \eta \in \mathcal{N}$ e $|\eta| \leq 2|\xi|$, então por (5.0.7),

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq 2 \frac{|\xi|^2 |\eta - \xi|}{|\eta| |\xi|}.$$

Analogamente, pelas equações (5.0.8) e (5.0.10) concluímos que se $|\xi| \geq 1$ e $|\eta| \geq 2|\xi|$, então

$$\frac{|\xi|^2 |\eta - \xi|}{|\eta| |\xi|} \geq \frac{|\xi|}{2} \geq \frac{\text{dist}(\xi, \mathcal{N})}{2C_1}.$$

Assim sendo, $\forall \xi$ tal que $|\xi| \geq 1$, $\forall \eta \in \mathcal{N}$ tal que $0 \neq \eta$,

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq (2C_1 + 2) \frac{|\xi|^2 |\eta - \xi|}{|\eta| |\xi|}.$$

Seja $C = \max\{2C_1 + 2, C_1\}$, onde $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq C_1 |\xi|$, $\forall |\xi| \geq 1$. Pela equação (5.0.6) concluímos que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}) \leq C |\xi|^2 \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*)$, $\forall \xi$ tal que $|\xi| \geq 1$.

Pela equação (5.0.5) e usando a última desigualdade concluímos que

$$|Q(\xi)| \geq C^* |\xi|^{2m} \text{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*)^{\mu^*} \geq C^* C^{-\mu^*} |\xi|^{2m} |\xi|^{-2\mu^*} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^{\mu^*}, \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Afirmamos que

$$\frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{|m - \mu^*|}} \leq |\xi|^{2m - 2\mu^*}, \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Se $|m - \mu^*| = m - \mu^*$, então

$$\frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{m - \mu^*}} \leq 1 \leq |\xi|^{2m - 2\mu^*};$$

se, por outro lado, $|m - \mu^*| = \mu^* - m$, então

$$|\xi|^{2\mu^* - 2m} = |\xi|^{2(\mu^* - m)} \leq (1 + |\xi|^2)^{\mu^* - m}.$$

Assim,

$$|Q(\xi)| \geq C^* C^{-\mu^*} (1 + |\xi|^2)^{-|m - \mu^*|} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^{\mu^*}, \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Pelo lema anterior existem constantes $C_2, \mu' > 0$ tais que

$$|Q(\xi)| \geq C_2 \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^{\mu'} \geq C_2 (1 + |\xi|^2)^{-|m - \mu^*|} \text{dist}(\xi, \mathcal{N})^{\mu'}, \forall \xi : |\xi| \leq 1.$$

Em resumo, existem constantes $K_1, K_2, a_1, a_2, b > 0$ tais que

$$|Q(\xi)| \geq K_1 \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^{a_1} (1 + |\xi|^2)^{-b}, \forall |\xi| \leq 1,$$

$$|Q(\xi)| \geq K_2 \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^{a_2} (1 + |\xi|^2)^{-b}, \forall |\xi| \geq 1.$$

Nosso objetivo é encontrar constantes que sirvam para os dois casos. Sejam $y \in \mathcal{N}$ e $\lambda = 2(1 + |y|)$. Então se $a = \max\{a_1, a_2\}$, $K = \min\{K_1 \lambda^{a_1-a}, K_2 \lambda^{a_2-a}\}$,

$$\begin{aligned} K_i \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^{a_i} \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^b &\geq K_i \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^{a_i} \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^{b+a_1+a_2} \\ &= K_i \cdot \lambda^{a_i} \left(\frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \right)^{a_i} \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^{b+a_1+a_2-a_i} \\ &\geq K_i \cdot \lambda^{a_i} \left(\frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \right)^a \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^{b+a_1+a_2-a_i} \\ &= K_i \lambda^{a_i-a} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^a \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^{b+a_1+a_2-a_i+a} \\ &\geq K \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N})^a \left(\frac{1}{1 + |\xi|^2} \right)^{b+a_1+a_2+a}. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{N} = \emptyset$, então $\mathcal{N}^* = \{0\}$ e portanto $\operatorname{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*) = |\xi^*| = \frac{1}{|\xi|}$. Pela equação (5.0.5) concluimos que

$$|Q(\xi)| \geq C^* |\xi|^{2m} \operatorname{dist}(\xi^*, \mathcal{N}^*)^{\mu^*} = C^* |\xi|^{2m-2\mu^*}, \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Assim

$$|Q(\xi)| \geq C^* \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{|m-\mu^*|}}, \forall \xi : |\xi| \geq 1.$$

Como $\mathcal{N} = \emptyset$, existe uma constante $K > 0$ tal que $K \leq |Q(\xi)|, \forall \xi : |\xi| \leq 1$. Então

$$\frac{K}{(1 + |\xi|^2)^{|m-\mu^*|}} \leq K \leq |Q(\xi)|, \forall \xi : |\xi| \leq 1.$$

Basta definir então $C = \min\{K, C^*\}$ e $a = |m - \mu^*|$. ■

Capítulo 6

Teorema da Extensão de Whitney

Nesse capítulo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ será um fechado, α denotará um multi-índice, isto é, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, onde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Denotaremos $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_1^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n^{\alpha_n}}$.

Whitney encontrou condições necessárias e suficientes na classe das funções f^α definidas em A , $|\alpha| \leq m$, para que exista uma função $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça

$$D^\alpha g(\xi) = f^\alpha(\xi), \forall \xi \in A, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m.$$

Utilizando o método da extensão de Whitney provaremos que dada uma função $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, existe uma função $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi), \forall \xi \in A, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m,$$

e tal que é possível estimar o valor das derivadas de g de ordem menor ou igual a m em todo $\mathbb{R}^n$ em função dos valores das derivadas de f de ordem menor ou igual a m em A .

Teorema 6.0.14 *Existe uma seqüência de funções $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(A^c)$ tal que:*

1. $\varphi_j(\xi) \geq 0$ e $\sum_j \varphi_j(\xi) = 1, \forall \xi \notin A$.
2. *Todo compacto contido em A^c intercepta somente um número finito de suportes das funções φ_j .*
3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante C_α tal que*

$$\sum_j |D^\alpha \varphi_j(\xi)| \leq C_\alpha (\text{dist}(\xi, A)^{-|\alpha|} + 1), \forall \xi \notin A.$$

4. *Existe uma constante C independente de j e de A tal que*

$$\text{diam}(\text{supp}(\varphi_j)) \leq C \text{dist}(\text{supp}(\varphi_j), A).$$

Para provar esse teorema lançaremos mão de mais alguns resultados.

Definição 6.0.8 *Diremos que $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **cubo** se Q for um cubo fechado com lados paralelos aos eixos. Dois cubos são ditos **disjuntos** se seus interiores foram disjuntos. Além disso, se Q é um cubo, denotaremos por $\text{diam}(Q)$ o seu diâmetro.*

Lema 6.0.12 *Existe uma seqüência de cubos $\mathcal{F} = \{Q_1, \dots, Q_k, \dots\}$ tal que:*

1. $\cup_i Q_i = A^c$.
2. Os cubos Q_k são mutualmente disjuntos.
3. $\text{diam}(Q_k) \leq \text{dist}(Q_k, A) \leq 4 \text{diam}(Q_k), \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Consideremos o reticulado de pontos de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são inteiras. Tomemos a coleção de cubos cujos lados têm comprimento 1 e cujos vértices pertencem ao reticulado. Chamemos tal coleção de μ_0 . Por indução formamos novas coleções μ_k , de tal forma que cada cubo em μ_k dá origem a 2^n cubos em μ_{k+1} por meio da divisão de seus lados em duas partes iguais.

Os cubos de μ_k têm lados de comprimento $\frac{1}{2^k}$, e portanto seus diâmetros têm comprimento $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$. Seja

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{c}{2^k} < \text{dist}(x, A) \leq \frac{c}{2^{k-1}}\}, \quad (6.0.1)$$

onde $c > 0$. É claro que $A^c = \cup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$.

Seja

$$\mathcal{F}_0 = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \{Q \in \mu_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}.$$

Vejamos que

$$A^c \subseteq \cup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

De fato, se $x \in A^c$, então existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \Omega_k$. Como $\cup_{Q \in \mu_k} Q = \mathbb{R}^n$, então existe $Q \in \mu_k$ tal que $x \in Q$, donde $x \in Q \in \mathcal{F}_0$.

Vejamos agora que para uma escolha apropriada de c ,

$$\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, A) \leq 4 \text{diam}(Q), \forall Q \in \mathcal{F}_0.$$

Dado $Q \in \mathcal{F}_0$, suponhamos que $Q \in \mu_k$. Sabemos que o diâmetro de Q é $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$ e que existe $x \in Q \cap \Omega_k$. Pela equação (6.0.1) podemos dizer que

$$\text{dist}(Q, A) \leq \text{dist}(x, A) \leq \frac{c}{2^{k-1}}. \quad (6.0.2)$$

Vejamos agora que

$$\text{dist}(x, A) \leq \text{diam}(Q) + \text{dist}(Q, A).$$

Para provar isso, basta ver que $\text{dist}(x, A) \leq \text{diam}(Q) + \text{dist}(y, A), \forall y \in Q$. Como a função $z \mapsto \text{dist}(z, A)$ é Lipschitziana, então $\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) \leq \text{dist}(x, y) \leq \text{diam}(Q)$, pois $x, y \in Q$.

Assim,

$$\text{dist}(Q, A) \geq \text{dist}(x, A) - \text{diam}(Q) \geq \frac{c}{2^k} - \frac{\sqrt{n}}{2^k}. \quad (6.0.3)$$

Seja $c = 2\sqrt{n}$. Obteremos por (6.0.2) e (6.0.3) que

$$\begin{aligned}
\text{diam}(Q) &= \frac{\sqrt{n}}{2^k} \\
&\leq \text{dist}(x, A) - \text{diam}(Q) \\
&\leq \text{dist}(Q, A) \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k-2}} \\
&= 4 \text{diam}(Q).
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, A) \leq 4 \text{diam}(Q). \quad (6.0.4)$$

A equação (6.0.4) nos permite concluir que os cubos de $\mathcal{F}_0$ não interceptam A e que vale o item 3 do lema 6.0.12. Como tínhamos que $A^c \subseteq \cup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q$, podemos concluir que vale o item 1 também. Resta retirar alguns cubos de $\mathcal{F}_0$ para obtermos cubos disjuntos.

Vale observar o seguinte fato: se $Q_1 \in \mu_{k_1}$ e $Q_2 \in \mu_{k_2}$ são tais que Q_1 e Q_2 não são disjuntos (isto é, seus interiores não são disjuntos) e $k_2 \leq k_1$, então $Q_1 \subseteq Q_2$.

Tomemos agora $Q \in \mathcal{F}_0$ e consideremos um cubo maximal em $\mathcal{F}_0$ que contém Q . A primeira observação a ser feita é que realmente podemos falar em um cubo maximal: digamos que $C, D \in \mathcal{F}_0$ e $Q \subseteq C \cap D$. Como C e D não são disjuntos, pela observação acima podemos afirmar que ou $C \subseteq D$ ou vice-versa, de modo que cada cubo em $\mathcal{F}_0$ tem um único cubo maximal que o contém (os cubos de $\mathcal{F}_0$ que contém Q não podem ser arbitrariamente grandes, uma vez que eles não interceptam A). Por (6.0.4), se $C \in \mathcal{F}_0$ contém Q , então

$$\text{diam}(Q) \leq \text{dist}(Q, A) \leq 4 \text{diam}(Q),$$

$$\text{diam}(C) \leq \text{dist}(C, A) \leq d(Q, A) \leq 4 \text{diam}(Q),$$

donde $\text{diam}(C) \leq 4 \text{diam}(Q)$. Seja $\mathcal{F}$ a coleção de tais cubos maximais que pertencem a $\mathcal{F}_0$. Os cubos de $\mathcal{F}$ são disjuntos (portanto vale o item 2) e $\text{diam}(G) \leq \text{dist}(G, A) \leq 4 \text{diam}(G), \forall G \in \mathcal{F}$ (vale o item 3). Como $\cup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q = A^c$ e os cubos de $\mathcal{F}$ são maximais, essa propriedade é preservada e obtemos o item 1. ■

Definição 6.0.9 Diremos que dois cubos distintos Q_1 e Q_2 de $\mathcal{F}$ se tocam se suas fronteiras tiverem ao menos um ponto em comum.

Proposição 6.0.1 Sejam Q_1 e Q_2 elementos de $\mathcal{F}$ que se tocam. Então

$$\frac{1}{4} \text{diam}(Q_2) \leq \text{diam}(Q_1) \leq 4 \text{diam}(Q_2).$$

Demonstração: Seja $p \in Q_1 \cap Q_2$. Temos que dado $q \in Q_1$,

$$\text{dist}(p, A) \leq \text{dist}(p, a) \leq \text{dist}(p, q) + \text{dist}(q, a), \forall a \in A.$$

Dessa forma $\text{dist}(p, A) \leq \text{dist}(p, q) + \text{dist}(q, A)$. Podemos concluir então que

$$d(Q_2, A) \leq \text{dist}(p, A) \leq \text{dist}(q, A) + \text{dist}(p, q), \forall q \in Q_1,$$

e portanto

$$\text{dist}(Q_2, A) \leq \text{dist}(q, A) + \text{diam}(Q_1).$$

Como isso vale para todo $q \in Q_1$, tomando o ínfimo e utilizando o item 3 do lema 6.0.12 concluímos que

$$\text{diam}(Q_2, A) \leq \text{diam}(Q_1, A) + \text{diam}(Q_1) \leq 4 \text{diam}(Q_1) + \text{diam}(Q_1).$$

Pelo item 3 do lema 6.0.12, $\text{diam}(Q_2) \leq \text{dist}(Q_2, A)$. Então $\text{diam}(Q_2) \leq 5 \text{diam}(Q_1)$. Além disso, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{diam}(Q_1) = 2^k \text{diam}(Q_2).$$

Dessa forma,

$$\text{diam}(Q_2) = \frac{1}{2^k} \text{diam}(Q_1) \leq 5 \text{diam}(Q_1).$$

Concluimos que $-2 \leq k$ e, conseqüentemente, $\text{diam}(Q_1) \geq \frac{1}{4} \text{diam}(Q_2)$. Analogamente provamos que $4 \text{diam}(Q_2) \geq \text{diam}(Q_1)$. ■

Lema 6.0.13 *Existe um número k_0 , independente de A , tal que se $Q \in \mathcal{F}$, então existem no máximo k_0 cubos em $\mathcal{F}$ que interceptam Q .*

Demonstração: Sejam $Q, C \in \mathcal{F}$ cubos que se tocam. Pela Proposição anterior temos que $\frac{1}{4} \text{diam}(Q) \leq \text{diam}(C) \leq 4 \text{diam}(Q)$, e portanto

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(C)} \leq 4.$$

Se $\text{diam}(Q) = \frac{\sqrt{n}}{2^p}$, e $\text{diam}(C) = \frac{\sqrt{n}}{2^q}$, então $|p - q| \leq \log_2 4 = 2$. Assim sendo, para um p fixado, podemos ter $q = p$, $q = p - 1$, $q = p - 2$, $q = p + 1$ ou $q = p + 2$.

Notemos que valem as seguintes estimativas:

1. Se $K \in \mu_k$, existem no máximo 3^n cubos em μ_k que o interceptam.
2. Existem no máximo 2^n cubos em μ_{k-1} que interceptam K .
3. O número de cubos em μ_{k-2} que interceptam K também é no máximo 2^n .
4. O número de cubos de μ_{k+1} que interceptam K só depende de n (e não de k).
5. O número de cubos de μ_{k+2} que interceptam K também só depende de n .

Tais relações mostram que de fato existe um número k_0 de modo que dado um cubo de $\mathcal{F}$, existem no máximo k_0 cubos de $\mathcal{F}$ que o tocam. ■

Voltando a nossa prova inicial, denotemos por Q_k um cubo qualquer de $\mathcal{F}$, por x_k seu centro e por l_k o comprimento de seus lados. Então $\text{diam}(Q_k) = \sqrt{n}l_k$. Seja ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ (que manteremos fixo). Denotemos por Q_k^* o cubo de mesmo centro que Q_k mas expandido pelo fator $1 + \varepsilon$, isto é, $Q_k^* = (1 + \varepsilon)[Q_k - x_k] + x_k$. Temos que $Q_k \subseteq Q_k^*$, mas os cubos Q_k^* podem não ter interiores disjuntos.

Proposição 6.0.2 *Cada ponto de A^c está contido em no máximo k_0 cubos Q_j^* , onde $Q_j \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: Sejam $Q, Q_j \in \mathcal{F}$. Afirmamos que $Q_j^* \cap Q \neq \emptyset$ se, e somente se, Q_j toca Q .

É claro que se Q_j toca Q , então Q_j^* e Q têm intersecção não vazia. Quanto à recíproca, consideremos a união de Q_j com todos os cubos de $\mathcal{F}$ que tocam Q_j . Como esses cubos tocam Q_j , segue da Proposição 6.0.1 que seus diâmetros são maiores ou iguais a $\frac{1}{4} \text{diam}(Q_j)$; dessa forma o interior de tal união contém Q_j^* (vale notar que dado um ponto na fronteira de Q_j , há ao menos mais um cubo de $\mathcal{F}$ que o contém).

Assim, suponhamos que exista $x \in Q \cap Q_j^*$ mas Q não toca Q_j . Sabemos que existe um cubo C que toca Q_j tal que $x \in C^\circ$, uma vez que $x \in Q_j^*$. Dessa forma obteríamos dois cubos distintos (Q e C) de $\mathcal{F}$ cujos interiores não são disjuntos, o que não é possível.

Dado $x \in A^c$, existe um cubo $Q \in \mathcal{F}$ que o contém. Pelo lema 6.0.13 e pelo observado acima existem no máximo k_0 cubos Q_j^* que contém x . ■

Lema 6.0.14 Dado $Q_k \in \mathcal{F}$,

$$\text{dist}(Q_k^*, A) \leq 4 \text{diam} Q_k^*,$$

e existe uma constante C independente de k e de A tal que

$$\text{diam} Q_k^* \leq C \text{dist}(Q_k^*, A).$$

Demonstração: Suponhamos que $Q_k \in \mu_k$. Seja $x \in Q_k \cap \Omega_k$ (temos que $x \in Q_k^*$). Pela definição de Ω_k obtemos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q_k^*, A) &\leq \text{dist}(x, A) \\ &\leq \frac{2\sqrt{n}}{2^{k-1}} = 4 \frac{\sqrt{n}}{2^k} \\ &\leq 4 \text{diam} Q_k^*. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{diam} Q_k^* &= \frac{\sqrt{n}(\varepsilon + 1)}{2^k} \\ &\leq \frac{5\sqrt{n}}{4 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Além disso, sejam $q \in Q_k, q^* \in Q_k^*$ tais que $\text{dist}(q, A) = \text{dist}(Q_k, A)$, $\text{dist}(q^*, A) = \text{dist}(Q_k^*, A)$. Então

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q_k, A) &= \text{dist}(q, A) \\ &= \text{dist}(q, A) + \text{dist}(q^*, A) - \text{dist}(q^*, A) \\ &\leq \text{dist}(Q_k^*, A) + \text{dist}(q, q^*) \\ &\leq \text{dist}(Q_k^*, A) + \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Com essa informação concluiremos o lema:

$$\begin{aligned} \text{dist}(Q_k^*, A) &\geq \text{dist}(Q_k, A) - \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k} \\ &\geq \text{diam} Q_k - \frac{\sqrt{n}}{8 \cdot 2^k} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2^k} - \frac{\sqrt{n}}{8 \cdot 2^k} \\ &= \frac{7}{8} \frac{\sqrt{n}}{2^k}. \end{aligned}$$

Assim, basta definir $C = \frac{10}{7}$. ■

Seja Q_0 o cubo de centro na origem cujos lados têm comprimento unitário. Fixemos uma função $\psi \in C_c^\infty$ com as seguintes propriedades:

1. $0 \leq \psi \leq 1$.
2. $\psi(x) = 1, \forall x \in Q_0$.
3. $\psi(x) = 0, \forall x \notin (1 + \varepsilon)Q_0$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja ψ_k a função dada por:

$$\psi_k(x) = \psi\left(\frac{x - x_k}{l_k}\right).$$

Temos que $\psi_k(x) = 1$, para todo $x \in Q_k$ e $\psi_k(x) = 0$, se $x \notin Q_k^*$. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$(D^\alpha \psi_k)(x) = \frac{1}{l_k^{|\alpha|}} (D^\alpha \psi)\left(\frac{x - x_k}{l_k}\right).$$

Seja

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x), \forall x \in A^c.$$

Φ está bem definida, pois para cada $x \in A^c$ existem no máximo k_0 cubos Q_j^* tais que $x \in Q_j^*$. Além disso, sempre existe algum cubo Q_j que contém x , donde $1 \leq \Phi(x) \leq k_0, \forall x \in A^c$. Para $k \in \mathbb{N}$, seja

$$\varphi_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\Phi(x)}, \forall x \in A^c.$$

É claro que $\varphi_k \in C^\infty(A^c)$. Além disso, $\text{supp } \varphi_k \subseteq Q_k^*$, e portanto é um compacto. Temos ainda que $\varphi_k(x) \geq 0, \forall x \in A^c$ e que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = 1, \forall x \in A^c.$$

Lema 6.0.15 Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe uma constante C_α tal que

$$|(D^\alpha \Phi)(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\text{dist}(x, A)^{|\alpha|}}, \forall x \in A^c. \quad (6.0.5)$$

Demonstração: Dado $x \in A^c$, existe um conjunto finito $J_x \subseteq \mathbb{N}$ tal que se $k \notin J_x$, então $x \notin Q_k^*$. Adicionalmente, sabemos que o número de elementos de J_x é no máximo $k_0, \forall x \in A^c$. Assim sendo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (D^\alpha \psi_k)(x) = \sum_{k \in J_x} \frac{1}{l_k^{|\alpha|}} D^\alpha \psi\left(\frac{x - x_k}{l_k}\right).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |D^\alpha \Phi(x)| &\leq \|D^\alpha \psi\|_\infty \sum_{k \in J_x} \frac{1}{l_k^{|\alpha|}} \\ &\leq k_0 \|D^\alpha \psi\|_\infty \sup_{k \in J_x} \frac{1}{l_k^{|\alpha|}}. \end{aligned}$$

Seja $y \in Q_k^*$ tal que $\text{dist}(y, A) = \text{dist}(Q_k^*, A)$. Pelo lema 6.0.14 podemos afirmar que $\text{dist}(y, A) \leq 4 \text{diam}(Q_k^*)$. Segue que para todo $x \in Q_k^*$,

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, A) &= \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) + \text{dist}(y, A) \\ &\leq \text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A) + 4 \text{diam}(Q_k^*) \\ &\leq \text{dist}(x, y) + 4 \text{diam}(Q_k^*) \\ &\leq 5 \text{diam}(Q_k^*) \\ &= 5\sqrt{n}l_k(1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Concluimos que para todo $x \in Q_k^*$,

$$\frac{1}{l_k} \leq \frac{5\sqrt{n}(1 + \varepsilon)}{\text{dist}(x, A)},$$

e portanto

$$\begin{aligned} |(D^\alpha \Phi)(x)| &\leq k_0 \|D^\alpha \psi\|_\infty \left(\frac{5\sqrt{n}(1 + \varepsilon)}{\text{dist}(x, A)} \right)^{|\alpha|} \\ &= \frac{C_\alpha}{\text{dist}(x, A)^{|\alpha|}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 6.0.16 Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe uma constante M_α tal que

$$\left| \left(D^\alpha \frac{1}{\Phi} \right) (x) \right| \leq M_\alpha \frac{1}{\text{dist}(x, A)^{|\alpha|}}, \quad \forall x \in A^c.$$

Demonstração: Faremos a prova por indução em $|\alpha|$. A afirmação é imediata se $|\alpha| = 0$. Suponhamos que o resultado é verdadeiro se $|\alpha| = l - 1$, onde $l \geq 1$, e provemos que vale se $|\alpha| = l$. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = l$.

$$\begin{aligned} 0 &= D^\alpha \left(\Phi \frac{1}{\Phi} \right) (x) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \frac{1}{\Phi} (x) D^\beta \Phi(x) \\ &= \Phi(x) D^\alpha \frac{1}{\Phi} (x) + \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \frac{1}{\Phi} (x) D^\beta \Phi(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$D^\alpha \frac{1}{\Phi} (x) = - \left[\sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \frac{1}{\Phi} (x) D^\beta \Phi(x) \right] \frac{1}{\Phi(x)}.$$

Utilizando primeiramente a equação (6.0.5) e depois a hipótese de indução obtemos:

$$\begin{aligned}
\left| D^\alpha \frac{1}{\Phi(x)} \right| &\leq \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left| D^{\alpha-\beta} \frac{1}{\Phi}(x) \right| \frac{C_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \\
&\leq \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{M_{\alpha-\beta}}{\text{dist}(x, A)^{|\alpha-\beta|}} \frac{C_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \\
&\leq M_\alpha \text{dist}(x, A)^{-|\alpha|}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 6.0.17 Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante E_α tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| D^\alpha \left(\frac{\psi_k}{\Phi} \right) (x) \right| \leq E_\alpha (\text{dist}(x, A)^{-|\alpha|} + 1), \quad \forall x \in Q_k^*.$$

Demonstração: Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e $x \in Q_k^*$. Temos que

$$\begin{aligned}
\left| D^\alpha \left(\frac{\psi_k}{\Phi} \right) (x) \right| &\leq C \sum_{\beta \leq \alpha} \left| \left(D^\beta \frac{1}{\Phi} \right) (x) D^{\alpha-\beta} \psi_k(x) \right| \\
&\leq C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{M_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \left| D^{\alpha-\beta} \psi_k(x) \right| + C \left| \frac{D^\alpha \psi_k(x)}{\Phi(x)} \right| \\
&\leq C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{M_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \|D^{\alpha-\beta} \psi_k\|_\infty + C \|D^\alpha \psi_k\|_\infty \\
&\leq C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{M_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \frac{1}{l_k^{|\alpha-\beta|}} \|D^{\alpha-\beta} \psi\|_\infty + \frac{C}{l_k^{|\alpha|}} \|D^\alpha \psi\|_\infty \\
&\leq C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{M_\beta}{\text{dist}(x, A)^{|\beta|}} \|D^{\alpha-\beta} \psi\|_\infty \left(\frac{5\sqrt{n}(1+\varepsilon)}{\text{dist}(x, A)} \right)^{|\alpha-\beta|} + \\
&\quad + C \left(\frac{5\sqrt{n}(1+\varepsilon)}{\text{dist}(x, A)} \right)^{|\alpha|} \|D^\alpha \psi\|_\infty \\
&\leq E_\alpha \text{dist}(x, A)^{-|\alpha|}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 6.0.18 Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe uma constante C_α tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |D^\alpha \varphi_k(x)| \leq C_\alpha (\text{dist}(x, A)^{-|\alpha|} + 1), \quad \forall x \in A^c.$$

Demonstração: Seja $x \in A^c$. Utilizaremos o lema anterior.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |D^\alpha \varphi_k(x)| &= \sum_{k \in J_x} |D^\alpha \varphi_k(x)| \\
&\leq \sum_{k \in J_x} E_\alpha (\text{dist}(x, A)^{-|\alpha|} + 1) \\
&\leq k_0 E_\alpha (\text{dist}(x, A)^{-|\alpha|} + 1). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 6.0.19 *Se $K \subseteq A^c$ é um compacto, K intercepta somente um número finitos de suportes das funções φ_k .*

Demonstração: Como $\text{supp } \varphi_k \subseteq Q_k^*, \forall k \in \mathbb{N}$, é suficiente mostrarmos que K intercepta somente um número finito de cubos Q_k^* . Como $K \subseteq A^c$ é compacto e $\{(Q_k^*)^\circ\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de A^c , existem $i_1, \dots, i_l$ tais que

$$K \subseteq (Q_{i_1}^*)^\circ \cup \dots \cup (Q_{i_l}^*)^\circ.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, $K \cap Q_k^* \neq \emptyset$ se, e somente se, existir $j \leq l$ tal que $Q_k^* \cap Q_{i_j}^* \neq \emptyset$. Como o número máximo de $k \in \mathbb{N}$ que satisfazem isso é k_0 , segue que K intercepta no máximo $k_0 \cdot l$ cubos Q_k^* . ■

Para concluir o teorema 6.0.14 resta provar o seguinte:

Lema 6.0.20 *Existe uma constante C que não depende de j , nem de A , tal que o diâmetro do suporte de φ_j é menor ou igual a C vezes sua distância até A .*

Demonstração: Sabemos que $\text{supp } \varphi_j \subseteq Q_j^*$. Pelo lema 6.0.14,

$$\text{diam}(\text{supp } \varphi_j) \leq \text{diam } Q_j^* \leq C \text{ dist}(Q_j^*, A) \leq C \text{ dist}(\text{supp } \varphi_j, A). \quad \blacksquare$$

A partir de agora continuaremos a trabalhar com as funções φ_k e com os cubos Q_k^* para provar que dada uma função $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, existe uma função $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi), \forall \xi \in A, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m,$$

e tal que é possível estimar o valor das derivadas de g de ordem menor ou igual a m em todo $\mathbb{R}^n$ em função dos valores das derivadas de f de ordens menores ou iguais a m em A .

Para cada j , seja $\xi^j \in A$ de tal modo que

$$\text{dist}(\text{supp } (\varphi_j), A) = \text{dist}(\text{supp } (\varphi_j), \xi^j),$$

Note que tal escolha é possível pois $\text{supp } \varphi_j$ é compacto e A é fechado.

Dada uma função $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, seja

$$g(\xi) = \begin{cases} \sum^* \varphi_j(\xi) f_m(\xi, \xi^j), & \text{se } \xi \notin A, \\ f(\xi), & \text{se } \xi \in A \end{cases}$$

onde

$$f_m(\xi, \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\alpha}{\alpha!}$$

é a expansão de Taylor de f de ordem m em η e $\sum^*$ indica que estamos somando apenas sobre os j tais que $l_j < 1$.

Lema 6.0.21 *Se $\text{dist}(\xi, A) > \frac{21\sqrt{n}}{8}$, então $g(\xi) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\xi \in Q^*$, onde $Q \in \mathcal{F}$ e $Q \in \mu_k$. Pela construção de $\mathcal{F}$ existe um ponto $y \in Q$ tal que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \text{dist}(y, A) \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k-2}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{21\sqrt{n}}{8} &< \text{dist}(\xi, A) \\ &\leq \text{dist}(y, A) + \text{diam}(Q^*) \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k-2}} + \frac{\sqrt{n}(1+\varepsilon)}{2^k} \\ &\leq \frac{16\sqrt{n}}{4 \cdot 2^k} + \frac{5\sqrt{n}}{4 \cdot 2^k} \\ &\leq \frac{21\sqrt{n}}{4 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Assim vem que $1 < \frac{1}{2^{k-1}}$, isto é, $k \leq 0$. Assim sendo, $l_k = \frac{1}{2^k} \geq 1$, donde $g(\xi) = 0$. ■

Lema 6.0.22 *Com as definições acima, $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha g = D^\alpha f$ em A , $\forall |\alpha| \leq m$.*

Demonstração: Vamos introduzir mais algumas notações. Seja $R_m(\xi; \eta)$ o resto da fórmula de Taylor, isto é,

$$f(\xi) = f_m(\xi, \eta) + R_m(\xi; \eta).$$

Diferenciando (sempre com relação a ξ) obtemos:

$$f^{(\alpha)}(\xi) = f_m^{(\alpha)}(\xi, \eta) + R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta),$$

Fixemos $\xi \notin A$ e seja $\xi^* \in A$ tal que

$$|\xi^* - \xi| = \text{dist}(\xi, A).$$

Desejamos comparar $g^{(\alpha)}(\xi)$ com $f_m^{(\alpha)}(\xi, \xi^*)$.

Lema 6.0.23 *Se $\text{dist}(\xi, A) < \frac{3}{4}$, então $\sum^* \varphi_j(\xi) = 1$.*

Demonstração: Suponhamos que $\xi \in Q^*$, onde $Q \in \mathcal{F}$ e que $Q \in \mu_k$. Seja $y \in Q$ tal que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \text{dist}(y, A) \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k-2}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} &< \text{dist}(y, A) \leq \text{dist}(\xi, A) + \text{diam}(Q^*) \\ &\leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{n}(1+\varepsilon)}{2^k} \\ &\leq \frac{3}{4} + \frac{5\sqrt{n}}{4 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{1}{2^k} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^k} < 1$, isto é, $1 < 2^k$ e, portanto $k > 0$. Dessa forma $l_k = \frac{1}{2^k} < 1$ e então pelo teorema 6.0.14,

$$\sum_j^* \varphi_j(\xi) = \sum_j \varphi_j(\xi) = 1. \quad \blacksquare$$

Conseqüentemente, se $\text{dist}(\xi, A) < \frac{3}{4}$ e $\xi \notin A$, então

$$g(\xi) = f_m(\xi, \xi^*) + \sum_j^* \varphi_j(\xi)(f_m(\xi; \xi^j) - f_m(\xi, \xi^*)) \quad (6.0.6)$$

Diferenciando e utilizando a fórmula de Leibniz teremos:

$$g^{(\alpha)}(\xi) = f_m^{(\alpha)}(\xi; \xi^*) + \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_j^* \varphi_j^{(\beta)}(\xi)(f_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^j) - f_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^*)). \quad (6.0.7)$$

Vamos assumir que $\xi \in \text{supp } \varphi_j$. Temos que

$$\text{dist}(\text{supp } \varphi_j, A) \leq \text{dist}(\text{supp } \varphi_j, \xi^*) \leq |\xi - \xi^*|,$$

e, pelo teorema 6.0.14, item 4. existe uma constante $C > 0$ (independente de j e de A) tal que

$$\text{diam}(\text{supp } \varphi_j) \leq C|\xi - \xi^*|$$

Seja $y \in \text{supp } \varphi_j$ tal que $\text{dist}(\text{supp } \varphi_j, \xi^j) = |y - \xi^j|$. Assim,

$$\begin{aligned} |\xi - \xi^j| &\leq |\xi - y| + |y - \xi^j| \\ &\leq \text{diam}(\text{supp } \varphi_j) + |y - \xi^j| \\ &= \text{diam}(\text{supp } \varphi_j) + \text{dist}(\text{supp } \varphi_j, \xi^j) \\ &= \text{diam}(\text{supp } \varphi_j) + \text{dist}(\text{supp } \varphi_j, A) \\ &\leq C|\xi - \xi^*| + |\xi - \xi^*| \\ &= (C + 1) \text{dist}(\xi, A). \end{aligned} \quad (6.0.8)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} |\xi^j - \xi^*| &\leq |\xi^j - \xi| + |\xi - \xi^*| \\ &\leq (C + 1)|\xi - \xi^*| + |\xi - \xi^*| \\ &= (C + 2) \text{dist}(\xi, A). \end{aligned}$$

Na equação (6.0.7), substituindo expressões teremos:

$$g^{(\alpha)}(\xi) = f^{(\alpha)}(\xi) - R_m^{(\alpha)}(\xi; \xi^*) + \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_j^* \varphi_j^{(\beta)}(\xi)(R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^*) - R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^j)).$$

Lema 6.0.24 *Se ξ, η são elementos de um compacto fixo, então*

$$|R_m^{(\gamma)}(\xi; \eta)| \leq |\xi - \eta|^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \eta),$$

onde $\varepsilon(z, w) \xrightarrow{u} 0$ quando $|z - w| \rightarrow 0$.

Demonstração: Digamos que $\xi, \eta \in K$, onde K é compacto. Pela fórmula de Taylor,

$$f(\xi) = \sum_{|\beta| \leq m-1} D^\beta f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} + m \int_0^1 \sum_{|\gamma|=m} D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) (\xi - \eta)^\gamma \frac{(1-t)^{m-1}}{\gamma!} dt.$$

Podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 R_m(\xi; \eta) &= f(\xi) - f_m(\xi, \eta) \\
 &= f(\xi) - \sum_{|\beta| \leq m-1} D^\beta f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} - \sum_{|\beta|=m} D^\beta f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \\
 &= m \int_0^1 \sum_{|\gamma|=m} D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) (\xi - \eta)^\gamma \frac{(1-t)^{m-1}}{\gamma!} dt - \sum_{|\beta|=m} D^\beta f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \\
 &= m \int_0^1 \sum_{|\gamma|=m} (D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) - D^\gamma f(\eta)) \frac{(\xi - \eta)^\gamma}{\gamma!} (1-t)^{m-1} dt.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|R_m(\xi; \eta)| \leq m \int_0^1 \sum_{|\gamma|=m} |D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) - D^\gamma f(\eta)| (1-t)^{m-1} \frac{|\xi - \eta|^m}{\gamma!} dt.$$

Seja

$$\varepsilon(\xi, \eta) = m \sum_{|\gamma|=m} \sup_{0 \leq t \leq 1} |D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) - D^\gamma f(\eta)| \frac{(1-t)^{m-1}}{\gamma!}.$$

Vejamos que $\varepsilon(\xi, \eta) \xrightarrow{u} 0$ se $|\xi - \eta| \rightarrow 0$. Para isso basta provarmos que para cada γ fixado com $|\gamma| = m$, a função abaixo tende uniformemente a zero quando $|\xi - \eta| \rightarrow 0$:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) - D^\gamma f(\eta)| (1-t)^{m-1}.$$

Como a função f é de classe $\mathcal{C}^m$, a seguinte função, h , é contínua:

$$K \times K \times [0, 1] \ni (\xi, \eta, t) \mapsto D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta))(1-t)^{m-1}.$$

Como $[0, 1]$ é compacto, então $K \times K \times [0, 1]$ é um compacto e portanto h é uniformemente contínua. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|(\xi, \eta, t) - (\xi', \eta', t')| < \delta$, então $|h(\xi, \eta, t) - h(\xi', \eta', t')| < \varepsilon$. Sejam então $\xi, \eta \in K : |\xi - \eta| < \delta$. Para todo $t \in [0, 1]$, $|(\xi, \eta, t) - (\eta, \eta, t)| = |\xi - \eta| < \delta$, donde

$$|D^\gamma f(\eta + t(\xi - \eta)) - D^\gamma f(\eta)| (1-t)^{m-1} < \varepsilon.$$

Para provarmos o caso geral (isto é, $|\gamma| \leq m$), utilizamos o argumento acima com $D^\gamma f$ no lugar de f , notando que teremos então uma função de classe $m - |\gamma|$. ■

Sejam $d = |\xi - \xi^*| = \text{dist}(\xi, A)$ e $d_1 = (C + 1)d$. Pelo teorema 6.0.14 item 3 e por (6.0.8),

$$\begin{aligned}
|g^{(\alpha)}(\xi) - f^{(\alpha)}(\xi)| &\leq |R_m^{(\alpha)}(\xi; \xi^*)| + \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_j^* |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| \left(|R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^j)| + |R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^*)| \right) \\
&\leq d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) + K_1 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_j^* |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| \left(|R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^j)| + |R_m^{(\gamma)}(\xi; \xi^*)| \right) \\
&\leq d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) + \\
&\quad + K_1 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_j^* |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| \left(|\xi - \xi^j|^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^j) + d^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^*) \right) \\
&\leq d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) + K_1 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_j^* |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| (d_1^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^j) + d^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^*)) \\
&\leq d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) + K_1 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\beta (d^{-|\beta|} + 1) (d_1^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^j) + d^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^*)).
\end{aligned}$$

Em resumo:

$$|g^{(\alpha)}(\xi) - f^{(\alpha)}(\xi)| \leq d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) + K_1 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\beta (d^{-|\beta|} + 1) (d_1^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^j) + d^{m-|\gamma|} \varepsilon(\xi, \xi^*)). \quad (6.0.9)$$

Vejamos que (6.0.9) tende a 0 quando $d \rightarrow 0$. Como $|\alpha| \leq m$, $d^{m-|\alpha|} \varepsilon(\xi, \xi^*) \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0$. Além disso, $|\xi - \xi^j| \leq (C + 1) \text{dist}(\xi, A)$ e portanto $\varepsilon(\xi, \xi^j) \rightarrow 0$ quando $d \rightarrow 0$. Finalmente, $-|\beta| + m - |\gamma| = m - |\alpha| \geq 0$ e portanto vale a afirmação acima.

Seja $h = f - g$. Temos que $h = 0$ em A e que $h \in \mathcal{C}^m(A^c)$; além disso, suas derivadas de ordem menor ou igual a m tendem a 0 se $\text{dist}(\xi, A) \rightarrow 0$. Isso será suficiente para provar que $h \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ e que suas derivadas de ordem menor ou igual a m se anulam em A (com isso concluiremos o lema).

Basta provarmos que as derivadas parciais de h existem e se anulam nos pontos da fronteira de A .

Lema 6.0.25 *Sejam I um intervalo fechado, $F \subseteq I$ um fechado. Seja f uma função contínua definida em I tal que f é diferenciável fora de F e f se anula em F . Se para todo $x \in F$, $f'(y) \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow x, y \in I \cap F^c$, então $f'(x)$ existe e é igual a 0.*

Demonstração: Fixado $x \in F$, queremos estudar o seguinte limite:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Se $y \in F$, então $f(y) = 0$, donde $|f(y) - f(x)| = 0$. Se $y \notin F$, seja $z \in F \cap [x, y]$ o ponto mais próximo de y (esse ponto existe pois $F \cap [x, y]$ é um fechado). Lembrando que $x, z \in F$ e aplicando a Desigualdade do Valor Médio, temos:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(z)| \\
&\leq |y - z| \sup_{0 < t < 1} |f'(z + t(y - z))| \\
&\leq |x - y| \sup_{0 < t < 1} |f'(z + t(y - z))|.
\end{aligned}$$

Como $f'(y) \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow x$, então f é derivável em x e $f'(x) = 0$. ■

Isso conclui a prova do lema 6.0.22 ■

Definição 6.0.10 Se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, denotamos por $|f|_{m,B}$ o supremo dos valores:

$$|f^{(\alpha)}(\xi)|, |\alpha| \leq m, \xi \in B,$$

$$\frac{|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)|}{|\xi - \eta|^{m-|\alpha|}}, |\alpha| \leq m, \xi, \eta \in B, \xi \neq \eta.$$

Se B for vazio, definimos $|f|_{m,B} = 0$ e se $B = \{\xi\}$ escrevemos $|f|_{m,\xi}$, isto é,

$$|f|_{m,\xi} = \sup\{|f^{(\alpha)}(\xi)| : |\alpha| \leq m\}.$$

Vamos definir também

$$A_\xi = \left\{ x \in A : |x - \xi| \leq R = (C+1) \frac{21\sqrt{n}}{8} \right\}.$$

Nosso objetivo é provar que existe uma constante K independente de f e de ξ tal que

$$|g|_{m,\xi} \leq K |f|_{m,A_\xi}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Notemos inicialmente que essa desigualdade é imediata se $\text{dist}(\xi, A) > \frac{21\sqrt{n}}{8}$. De fato, vimos que existe uma vizinhança U de ξ na qual $g = 0$, e portanto o lado esquerdo da igualdade é 0.

Se $\text{dist}(\xi, A) \leq \frac{21\sqrt{n}}{8}$, então $\xi^* \in A_\xi$ pois escolhemos $\xi^* \in A$ de modo que $|\xi^* - \xi| = \text{dist}(\xi, A)$. Se $\xi \in \text{supp } \varphi_j$, então $\xi^j \in A_\xi$ pois

$$|\xi - \xi^j| \leq (C+1) \text{dist}(\xi, A) \leq R.$$

Vamos supor inicialmente que

$$\frac{3}{4} \leq \text{dist}(\xi, A) \leq \frac{21\sqrt{n}}{8}.$$

Não podemos usar (6.0.6), mas

$$g^{(\alpha)}(\xi) = \sum_j^* \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varphi_j^{(\beta)}(\xi) f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j).$$

Se γ não é menor ou igual a α , então $f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) = 0$, mas se $\gamma \leq \alpha$,

$$\begin{aligned} f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) &= \sum_{|\alpha| \leq m} f^{(\alpha)}(\xi^j) \frac{(\xi - \xi^j)^{\alpha-\gamma}}{\alpha!} \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!} \\ &= \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} f^{(\gamma+\beta)}(\xi^j) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!}. \end{aligned}$$

Se $\xi \in \text{supp } \varphi_j$ e $\varphi_j^{(\beta)}(\xi) \neq 0$, queremos estimar $f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j)$ por $|f|_{m, A_\xi}$. Isso será possível pois $\xi^j \in A_\xi$ e $|\xi - \xi^j| \leq R$. De fato,

$$\begin{aligned} |f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j)| &\leq \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} \left| f^{(\gamma+\beta)}(\xi^j) \right| \frac{|\xi - \xi^j|^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} \left| f^{(\beta+\gamma)}(\xi^j) \right| \frac{R^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq C_1 \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} \left| f^{(\gamma+\beta)}(\xi^j) \right| \leq C_2 \sup_{|\lambda| \leq m} \left| f^{(\lambda)}(\xi^j) \right| \leq C_2 |f|_{m, A_\xi}. \end{aligned}$$

Pelo item 3 do teorema 6.0.14 temos que

$$\sum_j |D^\alpha \varphi_j(\xi)| \leq C_\alpha (\text{dist}(\xi, A)^{-|\alpha|} + 1) \leq C_\alpha \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{|\alpha|} + 1 \right) = C'_\alpha.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |g^{(\alpha)}(\xi)| &\leq \sum_j^* \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| |f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j)| \\ &\leq C \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sum_j^* |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| |f|_{m, A_\xi} \\ &\leq C \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C'_\beta |f|_{m, A_\xi} \\ &= K_\alpha |f|_{m, A_\xi}. \end{aligned}$$

O último caso para considerarmos é $0 \leq \text{dist}(\xi, A) = |\xi - \xi^*| < \frac{3}{4}$.

Se $\text{dist}(\xi, A) = 0$, então $\xi \in A$ e assim

$$|D^\alpha g(\xi)| = |D^\alpha f(\xi)| \leq |f|_{m, A_\xi}, \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Nesse caso segue que $|g|_{m, \xi} \leq |f|_{m, A_\xi}$.

Se $\text{dist}(\xi, A) \neq 0$, vejamos que $f_m^{(\alpha)}(\xi, \xi^*) \leq C_1 |f|_{m, A_\xi}$, onde C_1 é uma constante:

$$\begin{aligned} \left| f_m^{(\alpha)}(\xi, \xi^*) \right| &\leq \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \left| f^{(\alpha+\beta)}(\xi^*) \right| \frac{|\xi - \xi^*|^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \left(\frac{3}{4} \right)^{|\beta|} \frac{|f^{(\alpha+\beta)}(\xi^*)|}{\beta!} \\ &\leq C_1 |f|_{m, A_\xi}. \end{aligned}$$

O que falta estimar é

$$f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) - f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*).$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) &= \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} f_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!} \\
 &= \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} \left(f_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) + R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \right) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!} \\
 &= \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} f_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!} + \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!}.
 \end{aligned}$$

Vejamos que

$$f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*) = \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} f_m^{(\beta+\gamma)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!}.$$

Como ambos são polinômios em ξ de mesmo grau, basta verificar que suas derivadas em um mesmo ponto coincidem. Vejamos que elas coincidem em $\xi = \xi^j$.

$$D^\phi f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*) = \sum_{|\lambda| \leq m-|\gamma|, \phi \leq \lambda} f^{(\gamma+\lambda)}(\xi^*) \frac{(\xi - \xi^*)^{\lambda-\phi}}{(\lambda - \phi)!}.$$

Assim, em $\xi = \xi^j$ vem:

$$D^\phi f_m^{(\gamma)}(\xi^j, \xi^*) = \sum_{|\lambda| \leq m-|\gamma|, \phi \leq \lambda} f^{(\gamma+\lambda)}(\xi^*) \frac{(\xi^j - \xi^*)^{\lambda-\phi}}{(\lambda - \phi)!}.$$

Definamos

$$H(\xi) = \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} f_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!},$$

então

$$D^\Phi H(\xi) = \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|, \Phi \leq \beta} f_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^{\beta-\Phi}}{(\beta - \Phi)!}.$$

Em $\xi = \xi^j$ obtemos:

$$D^\Phi H(\xi^j) = f_m^{(\Phi+\gamma)}(\xi^j, \xi^*) = \sum_{|\lambda| \leq m-|\gamma|} f^{(\gamma+\lambda)}(\xi^*) \frac{(\xi^j - \xi^*)^{\lambda-\Phi}}{(\lambda - \Phi)!}.$$

Dessa forma,

$$\left| f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) - f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*) \right| = \left| \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \frac{(\xi - \xi^j)^\beta}{\beta!} \right|.$$

Veremos a seguir que

$$\left| R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \right| \leq |f|_{m, A_\xi} |\xi^j - \xi^*|^{m-|\gamma|-|\beta|}.$$

Se $\xi^j = \xi^*$ isso é verdade: o lado direito da desigualdade é nulo e

$$\begin{aligned} R_m^{(\lambda)}(\xi^*, \xi^*) &= f^{(\lambda)}(\xi^*) - f_m^{(\lambda)}(\xi^*, \xi^*) \\ &= f^{(\lambda)}(\xi^*) - \sum_{|\beta| \leq m-|\lambda|} f^{(\lambda+\beta)}(\xi^*) \frac{(\xi^* - \xi^*)^\beta}{\beta!} \\ &= f^{(\lambda)}(\xi^*) - f^{(\lambda)}(\xi^*) = 0. \end{aligned}$$

Se $\xi^j, \xi^* \in A$, são distintos, então

$$\left| R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \right| = \left| R_m^{(\gamma+\beta)}(\xi^j, \xi^*) \right| \frac{|\xi^j - \xi^*|^{m-|\gamma|-|\beta|}}{|\xi^j - \xi^*|^{m-|\gamma|-|\beta|}} \leq |f|_{m, A_\xi} |\xi^j - \xi^*|^{m-|\gamma|-|\beta|}.$$

Assim, assumindo que $\xi \in \text{supp } \varphi_j$,

$$\begin{aligned} \left| f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) - f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*) \right| &\leq |f|_{m, A_\xi} \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} |\xi^j - \xi^*|^{m-|\gamma|-|\beta|} \frac{|\xi - \xi^j|^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq c |f|_{m, A_\xi} \sum_{|\beta| \leq m-|\gamma|} \text{dist}(\xi, A)^{m-|\gamma|-|\beta|} \frac{\text{dist}(\xi, A)^{|\beta|}}{\beta!} \\ &\leq C' |f|_{m, A_\xi} \text{dist}(\xi, A)^{m-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} |g^{(\alpha)}(\xi)| &\leq |f_m^{(\alpha)}(\xi, \xi^*)| + c \sum_{\beta+\gamma=\alpha}^* \sum_j |\varphi_j^{(\beta)}(\xi)| |f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^j) - f_m^{(\gamma)}(\xi, \xi^*)| \\ &\leq C_1 |f|_{m, A_\xi} + c \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\beta (\text{dist}(\xi, A)^{-|\beta|} + 1) C' \text{dist}(\xi, A)^{m-|\gamma|} |f|_{m, A_\xi} \\ &= C_1 |f|_{m, A_\xi} + C_2 \sum_{\beta+\gamma=\alpha} (\text{dist}(\xi, A)^{-|\beta|} + 1) \text{dist}(\xi, A)^{m-|\gamma|} |f|_{m, A_\xi}. \end{aligned}$$

Como $m - |\beta| - |\gamma| = m - |\alpha| \geq 0$, então $\text{dist}(\xi, A)^{m-|\alpha|} < 1$ e portanto

$$|g^{(\alpha)}(\xi)| \leq K |f|_{m, A_\xi}.$$

Teorema 6.0.15 (Teorema da Extensão de Whitney) *A aplicação linear $f \mapsto g$ definida como antes aplica $C^m(\mathbb{R}^n)$ em $C^m(\mathbb{R}^n)$ de modo que valem:*

$$D^\alpha g(x) = D^\alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m, \quad \forall x \in A,$$

e existe uma constante K , independente de f e de ξ de modo que

$$|g|_{m, \xi} \leq K |f|_{m, A_\xi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Capítulo 7

Prova do Teorema principal

Nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 7.0.16 *Se P é um polinômio em $\mathbb{R}^n$ que não se anula identicamente, então a aplicação multiplicação M definida por*

$$\mathcal{S} \ni f \mapsto Pf \in \mathcal{S}$$

tem uma inversa contínua (definida na imagem de M).

Relembrando as observações feitas no início do capítulo sobre a Topologia de $\mathcal{S}$, a aplicação M está de fato bem definida.

Vale notar que se P é um polinômio constante não nulo, então a aplicação M tem uma inversa contínua. Isto é imediato pois $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial topológico.

Por conta dessa observação podemos assumir que o polinômio P não é constante, e que tem grau positivo μ . Seja $\mathcal{N}^k$ o conjunto dos pontos ξ nos quais P têm um zero de ordem pelo menos k , isto é,

$$\mathcal{N}^k = \bigcap_{|\alpha| < k} \{\xi \in \mathbb{R}^N : P^{(\alpha)}(\xi) = 0\}.$$

Podemos notar que $\mathcal{N}^k$ é um conjunto fechado.

Como o grau de P é μ , existe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| = \mu$ tal que $P^{(\alpha)} = C$, C constante não nula. Dessa forma, $\mathcal{N}^{\mu+1} = \emptyset$. Além disso, é claro que $\mathcal{N}^{k+1} \subseteq \mathcal{N}^k$, donde obtemos que

$$\emptyset = \mathcal{N}^{\mu+1} \subseteq \mathcal{N}^{\mu} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{N}^2 \subseteq \mathcal{N}^1 \subseteq \mathcal{N}^0 = \mathbb{R}^N.$$

A idéia da prova do teorema 7.0.16 consiste em estimar f em termos de Pf primeiro em $\mathcal{N}^{\mu}$, depois em $\mathcal{N}^{\mu-1}$ e assim sucessivamente.

Provaremos sucessivamente, para k decrescente, a seguinte afirmação:

Lema 7.0.26 *Para todos $n, m, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq \mu + 1$, existem $n', m' \in \mathbb{N}$ e uma constante K tais que*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_{\xi}} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N). \quad (7.0.1)$$

Na expressão acima pode ocorrer que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} = \infty$, ou ainda que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi} = \infty$.

Iniciaremos com a prova de um resultado que será bastante útil.

Lema 7.0.27 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C > 0$ (que depende de m) tal que*

$$(1 + |\xi|)^n |h|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^N} (1 + |y|)^n |h|_{m, y}, \quad \forall h \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Como $(\mathcal{N}^k)_\xi = B_R[\xi] \cap \mathcal{N}^k \subseteq B_R[\xi]$, $(1 + |\xi|)^n |h|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq (1 + |\xi|)^n |h|_{m, B_R[\xi]}$. Pelo corolário 8.0.5 do Apêndice, existe uma constante $S > 0$ tal que

$$|h|_{m, B_R[\xi]} \leq S \sup_{|\beta| \leq m, y \in B_R[\xi]} |D^\beta h(y)|.$$

Assim,

$$(1 + |\xi|)^n |h|_{m, B_R[\xi]} \leq S \sup_{|\beta| \leq m, y \in B_R[\xi]} (1 + |\xi|)^n |D^\beta h(y)|$$

Dado $y \in B_R[\xi]$, como $1 + |\xi| \leq 1 + |\xi - y| + |y| \leq (R + 1)(1 + |y|)$,

$$(1 + |\xi|)^n |h|_{m, B_R[\xi]} \leq S(R + 1)^n \sup_{|\beta| \leq m, y \in B_R[\xi]} (1 + |y|)^n |D^\beta h(y)| \leq S(R + 1)^n \sup_{y \in \mathbb{R}^N} (1 + |y|)^n |h|_{m, y},$$

uma vez que para cada $y \in B_R[\xi]$ e para cada $\beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq m$,

$$\begin{aligned} (1 + |y|)^n |D^\beta h(y)| &\leq (1 + |y|)^n \sup_{|\gamma| \leq m} |D^\gamma h(y)| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^N} (1 + |z|)^n |h|_{m, z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 7.0.28 *O lema 7.0.26 é verdadeiro se $k = \mu + 1$, e $n, m \in \mathbb{N}$ são quaisquer.*

Demonstração: Seja $m' \in \mathbb{N}$ qualquer. Temos que $\mathcal{N}^k = \emptyset$, donde $(\mathcal{N}^k)_\xi = \emptyset$, e portanto $|f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} = 0$, $\forall f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$. $\blacksquare$

Lema 7.0.29 *A afirmação do lema 7.0.26 com $k = 0$ implica o teorema 7.0.16, isto é, se para todos $n, m \in \mathbb{N}$ existirem $n', m' \in \mathbb{N}$ e uma constante K tais que*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, \mathcal{N}^0_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N),$$

então vale o teorema 7.0.16. Além disso, o teorema 7.0.16 implica que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ existem $m', n' \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva K tais que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, \mathcal{N}^0_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi}, \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e $L \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito. Para cada $(m, n) \in L$, sejam $K_{m,n}$ e $m', n' \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, \mathcal{N}_\xi^0} \leq K_{m,n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi}, \quad \forall g \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N).$$

Dados $o, p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $F_{o,p}$ a seguinte função (que é uma semi-norma em $\mathcal{S}$): $F_{o,p}(f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^p \sup_{|\beta| \leq o} |D^\beta f(\xi)|$. Como $\mathcal{N}_\xi^0 = \mathbb{R}_\xi^N = B_R[\xi]$, segue que

$$\begin{aligned} F_{m,n}(g) &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, \mathcal{N}_\xi^0} \\ &\leq K_{m,n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi} \\ &= K_{m,n} F_{m',n'}(Pg), \quad \forall g \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Sejam $K = \max\{K_{m,n} : (m,n) \in L\}$, $L' = \{(m', n') : (m,n) \in L\}$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Para todo $(m,n) \in L$ e toda $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$F_{m,n}(g) \leq K F_{m',n'}(Pg) \leq K \sup_{(m',n') \in L'} F_{m',n'}(Pg).$$

Sejam $g \in \mathcal{S}$ e $f = Pg$. Se

$$\sup_{(m',n') \in L'} F_{m',n'}(f) = \sup_{(m',n') \in L'} F_{m',n'}(Pg) < \frac{\varepsilon}{K},$$

então $\sup_{(m,n) \in L} F_{m,n}(g) < \varepsilon$, e a aplicação inversa de M é contínua.

Quanto à outra afirmação, suponhamos que o teorema 7.0.16 vale. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, existem $\delta > 0$ e $L \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito tais que se $f \in \mathcal{S}$ é tal que $\sup_{(o,p) \in L} F_{o,p}(Pf) < \delta$, então $F_{m,n}(f) < 1$. Sejam $m' = \max\{o : \exists p \text{ tal que } (o,p) \in L\}$ e $n' = \max\{p : \exists o \text{ tal que } (o,p) \in L\}$ e $K = \frac{2}{\delta}$. Note que

$$\sup_{(o,p) \in L} F_{o,p}(g) \leq F_{m',n'}(g), \quad \forall g \in \mathcal{S}.$$

Tome $f \in \mathcal{S}$. Se $F_{m',n'}(Pf) = 0$, então $Pf = 0$, donde $f = 0$ e o resultado vale obviamente. Caso contrário, sejam $g = Pf$ e $h = \frac{\delta}{2} \frac{g}{F_{m',n'}(g)}$. Dado $(o,p) \in L$,

$$F_{o,p}(h) = \frac{\delta}{2} \frac{F_{o,p}(g)}{F_{m',n'}(g)} \leq \frac{\delta}{2} < \delta,$$

e assim $F_{m,n} \left(\frac{\delta}{2} \frac{f}{F_{m',n'}(Pf)} \right) < 1$, isto é, $F_{m,n}(f) \leq \frac{2}{\delta} F_{m',n'}(Pf)$. Pelo lema 7.0.27 existe uma constante $C > 0$ tal que $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, \mathcal{N}_\xi^0} \leq C F_{m,n}(f)$, e portanto

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, \mathcal{N}_\xi^0} \leq \frac{2C}{\delta} F_{m',n'}(Pf), \quad \forall f \in \mathcal{S}. \quad \blacksquare$$

Para provar o lema 7.0.26 vamos fixar $n, m, k \in \mathbb{N}$, onde k é tal que $k + 1 \leq \mu + 1$. Vamos assumir que a afirmação já foi provada para $k + 1$. O valor de m' será determinado depois, a partir de alguns cálculos que faremos. Por ora vamos assumir que $m' \geq 2km + 2m + 2k$ (assim ele é grande o suficiente para que as contas a seguir façam sentido).

As desigualdades essenciais que provaremos são as seguintes:

- Existem constantes $n', K > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem l em $\mathcal{N}^{k+1}$ (para l suficientemente grande), então

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{l, B_1[\xi]}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

- Existem constantes $K'', n'' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem s em $\mathcal{N}^{k+1}$ (onde s é suficientemente grande) e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|,$$

então se $S(\xi, \eta) = B_1[\xi] \cup B_1[\eta]$, teremos que

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K''(1 + |\xi| + |\eta|)^{n''} |\xi - \eta|^m |Pf|_{s, S(\xi, \eta)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m$$

- Existem constantes $K''', n''' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem p em $\mathcal{N}^{k+1}$, (onde p é suficientemente grande) e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que

$$2|\xi - \eta| < \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}),$$

então, se $S_1(\xi, \eta)$ é o conjunto dos pontos cuja distância ao segmento que une ξ e η é no máximo 1,

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K''' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n'''} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Dada uma função $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$, definamos

$$F(\xi) = P(\xi)f(\xi).$$

Aplicando o operador diferencial D^β , com $|\beta| = k$, temos:

$$F^{(\beta)}(\xi) = P^{(\beta)}(\xi)f(\xi), \forall \xi \in \mathcal{N}^k,$$

pois se $\xi \in \mathcal{N}^k$, $P^{(\gamma)}(\xi) = 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\gamma| < k$.

Com o intuito de obter uma fórmula semelhante para $f^{(\alpha)}(\xi)$, onde $|\alpha| \leq m$, escrevemos

$$f(\xi) = \frac{F(\xi)}{P(\xi)}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N : P(\xi) \neq 0.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$. Quando $P(\xi) \neq 0$ aplicamos o operador diferencial D^α em ambos os lados. Teremos:

$$f^{(\alpha)}(\xi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^{\alpha-\gamma} F(\xi) D^\gamma \frac{1}{P}(\xi).$$

Para cada $\gamma \leq \alpha$, $D^\gamma \frac{1}{P}(\xi)$ pode ser escrito como uma soma de termos cujos denominadores são da forma $P(\xi)^{|\lambda|}$, onde $|\lambda| \leq |\gamma| + 1 \leq |\alpha| + 1$. Multiplicando então ambos os lados por $P(\xi)^{|\alpha|+1}$ podemos escrever:

$$P(\xi)^{|\alpha|+1} f^{(\alpha)}(\xi) = L_{|\alpha|}(\xi, F), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (7.0.2)$$

onde $L_s(\xi, \cdot)$ denotará um operador diferencial de ordem no máximo s cujos coeficientes são polinômios em ξ , isto é,

$$L_s(\xi, \cdot) = \sum_{|\gamma| \leq s} Q_\gamma(\xi) D^\gamma,$$

sendo cada Q_γ um polinômio em ξ .

Note que podemos escrever que (7.0.2) vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ pois se $P(\xi) = 0, F(\xi) = 0$.

Aplicando agora o operador diferencial D^β , com $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, teremos:

$$D^\beta \{P(\xi)^{|\alpha|+1} f^{(\alpha)}(\xi)\} = L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}(\xi, F) = D^\beta \{P(\xi)^{|\alpha|+1}\} f^{(\alpha)}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k,$$

uma vez que $P^{(\gamma)}(\xi) = 0$ se $|\gamma| < k$ quando $\xi \in \mathcal{N}^k$.

Como vimos,

$$R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = f^{(\alpha)}(\xi) - \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} f^{(\alpha+\beta)}(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!}.$$

Multiplicando a linha de cima por $P(\xi)^{|\alpha|+1} P(\eta)^{m+1}$ teremos:

$$\begin{aligned} & P(\eta)^{m+1} L_{|\alpha|}(\xi, F) - P(\xi)^{|\alpha|+1} \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} P(\eta)^{|\alpha+\beta|+1} P(\eta)^{-|\alpha+\beta|+m} f^{(\alpha+\beta)}(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \\ &= P(\eta)^{m+1} L_{|\alpha|}(\xi, F) - P(\xi)^{|\alpha|+1} \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} P(\eta)^{m-|\alpha|-|\beta|} L_{|\alpha|+|\beta|}(\eta, F) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \\ &= P(\xi)^{|\alpha|+1} P(\eta)^{m+1} R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = L_{|\alpha|,m}(\xi, \eta, F), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

se definirmos que $L_{s,t}(\xi, \eta, F)$ é uma combinação linear das derivadas de F em ξ e em η de ordens respectivamente menores ou iguais a s e a t com coeficientes que são polinômios em ξ e em η , isto é,

$$L_{s,t}(\xi, \eta, F) = \sum_{|\gamma| \leq s} Q_\gamma(\xi, \eta) D^\gamma F(\xi) + \sum_{|\lambda| \leq t} R_\lambda(\xi, \eta) D^\lambda F(\eta),$$

onde $Q_\gamma(\xi, \eta)$ e $R_\lambda(\xi, \eta)$ são polinômios em ξ e em η .

Vejamos que as derivadas de

$$L_{|\alpha|,m}(\xi, \eta, F) = P(\xi)^{|\alpha|+1} P(\eta)^{m+1} R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) \quad (7.0.3)$$

com respeito a ξ e a η de ordens totais menores que $k(|\alpha| + 1) + k(m + 1) + m - |\alpha|$ se anulam em (ξ, η) , para todo $\xi \in \mathcal{N}^k$.

Para obter um termo não nulo na expressão dada pela fórmula de Leibniz devemos diferenciar o fator $P(\xi)^{|\alpha|+1}$ com relação a ξ de modo que o comprimento total seja pelo menos $k(|\alpha| + 1)$; devemos diferenciar o fator $P(\eta)^{m+1}$ com relação a η de modo que o comprimento seja ao menos

$k(m+1)$. Quanto ao último fator, segue do lema 8.0.39 do Apêndice que as derivadas de $R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)$ com respeito a ξ e a η de ordens menores ou iguais a $m - |\alpha|$ se anulam em (ξ, ξ) , se $\xi \in \mathcal{N}^k$.

Aplicando em (7.0.3) os operadores diferenciais D^β com relação a ξ e D^γ com relação a η em $L_{|\alpha|,m}(\xi, \eta, F)$, com $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, $|\gamma| = (m + 1)k$, vamos definir

$$L_{k|\alpha|+k+|\alpha|,km+k+m}(\xi, \eta, F) = D_\xi^\beta D_\eta^\gamma L_{|\alpha|,m}(\xi, \eta, F).$$

Assim

$$L_{k|\alpha|+k+|\alpha|,km+k+m}(\xi, \eta, F) = \{D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})\}\{D^\gamma(P(\eta)^{m+1})\}R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta), \forall \xi, \eta \in \mathcal{N}^k.$$

Voltando ao lema 7.0.26, provaremos que ele é verdadeiro desde que acrescentemos a hipótese adicional de que f se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$. Note que se $\mathcal{N}^{k+1} = \emptyset$ isso não é nenhuma restrição. A prova de tal afirmação seguirá do teorema 5.0.13 e de algumas fórmulas que provaremos. O Teorema da Extensão de Whitney e a hipótese de indução de que (7.0.1) é válida com $k + 1$ no lugar de k nos permitirão concluir a prova.

Inicialmente vamos supor que $\mathcal{N}^{k+1} \neq \emptyset$. Para $j \in \mathbb{N}^*$, seja

$$Q_j(\xi) = \sum_{|\beta| \leq jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2.$$

Pelo lema 8.0.40 do Apêndice, $\{x \in \mathbb{R}^N : Q_j(x) = 0\} = \mathcal{N}^{k+1}$. Pelo teorema 5.0.13 existem constantes positivas c_j, a_j, μ_j'' tais que

$$|Q_j(\xi)| \geq c_j(1 + |\xi|^2)^{-\mu_j''} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{a_j}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

isto é, se $\mu_j' = \frac{a_j}{2}$,

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta| \leq jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 &\geq c_j(1 + |\xi|^2)^{-\mu_j''} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{a_j} \\ &= c_j(1 + |\xi|^2)^{-\mu_j''} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu_j'}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c_j \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu_j'} (1 + |\xi|^2)^{-\mu_j''}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k,$$

pois as derivadas de P^j de ordens menores que jk se anulam em $\xi \in \mathcal{N}^k$. Pelo lema 8.0.41 do Apêndice, existem constantes $c, \mu', \mu'' > 0$ tais que

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |\xi|^2)^{-\mu''}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall j \leq (m + 1).$$

Seja $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mu' + km + k + m \leq l$.

Lema 7.0.30 *Existem constantes $n', K > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem l em $\mathcal{N}^{k+1}$,*

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^{n'} |F|_{l, B_1[\xi]}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m,$$

Demonstração: Começemos fixando $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$. Pelo lema 8.0.42 do Apêndice, existem constantes $K_1 > 0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem l em $\mathcal{N}^{k+1}$ e $\beta \in \mathbb{N}^N$ é tal que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, então

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| \leq K_1(1 + |\xi|)^{n_1} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|} |F|_{l, B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (7.0.4)$$

onde escrevemos $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)$ para frisar que $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}(\xi, F)$ depende de β .

Se $\beta \in \mathbb{N}^N$ é tal que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$ e $\xi \in \mathcal{N}^k$,

$$|\{D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})\}f^{(\alpha)}(\xi)|^2 = |L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)|^2.$$

Somando a igualdade de cima para todos os $\beta \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$ e tirando a raiz quadrada teremos, como consequência de (7.0.4), que existe uma constante K_2 tal que se $f \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem l em $\mathcal{N}^{k+1}$, então para todo $\xi \in \mathcal{N}^k$,

$$\left\{ \sum_{|\beta|=(|\alpha|+1)k} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K_2(1 + |\xi|)^{n_1} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|} |F|_{l, B_1[\xi]}.$$

Como

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |\xi|^2)^{-\mu''}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \quad \forall j \leq (m+1),$$

fazendo $j = |\alpha| + 1$ teremos que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$

$$\sqrt{c} \cdot \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{\mu'} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\mu''}{2}} |f^{(\alpha)}(\xi)| \leq \left\{ \sum_{|\beta|=(|\alpha|+1)k} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |f^{(\alpha)}(\xi)|, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k.$$

Sejam $K_3 = K_2 c^{\frac{-1}{2}}$ e $n_2 = n_1 + 2\mu''$.

$$\begin{aligned} |f^{(\alpha)}(\xi)| &\leq K_3(1 + |\xi|)^{n_1} (1 + |\xi|^2)^{\frac{\mu''}{2}} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|-\mu'} |F|_{l, B_1[\xi]} \\ &\leq K_3(1 + |\xi|)^{n_1} (1 + |\xi|^2)^{\mu''} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|-\mu'} |F|_{l, B_1[\xi]} \\ &\leq K_3(1 + |\xi|)^{n_1} (1 + |\xi|^2)^{2\mu''} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|-\mu'} |F|_{l, B_1[\xi]} \\ &\leq K_3(1 + |\xi|)^{n_2} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{l-k|\alpha|-k-|\alpha|-\mu'} |F|_{l, B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k. \end{aligned}$$

Assim, se assumirmos que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 1$, como $0 \leq l - k|\alpha| - k - |\alpha| - \mu'$ segue que

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K_3(1 + |\xi|)^{n_2} |F|_{l, B_1[\xi]}.$$

Se $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1$, é simples de se ver, analisando a prova do lema 8.0.42 do Apêndice, que existem constantes $H > 0, p \in \mathbb{N}$ independentes de f tais que

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| \leq H(1+|\xi|)^p |F|_{l, B_1[\xi]}, \forall \beta \in \mathbb{N}^N : |\beta| = (|\alpha|+1)k, \forall \xi \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1.$$

Conseqüentemente, existe $L > 0$ tal que

$$\left\{ \sum_{|\beta|=(|\alpha|+1)k} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |f^{(\alpha)}(\xi)| \leq L(1+|\xi|)^p |F|_{l, B_1[\xi]}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k : \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1,$$

donde

$$\begin{aligned} |f^{(\alpha)}(\xi)| &\leq \frac{L}{\sqrt{c}} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{-\mu'} (1+|\xi|)^{\frac{\mu''}{2}+p} |F|_{l, B_1[\xi]} \\ &\leq \frac{L}{\sqrt{c}} (1+|\xi|)^{\mu''+p} |F|_{l, B_1[\xi]}, \end{aligned}$$

uma vez que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{-\mu'} \leq 1$.

Sejam $K_\alpha = \max\{\frac{L}{\sqrt{c}}, K_3\}$, $n'_\alpha = \max\{p + \mu'', n_2\}$, $K = \max\{K_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ e } |\alpha| \leq m\}$ e $n' = \max\{n'_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ e } |\alpha| \leq m\}$. Com essas constantes o lema é verdadeiro. ■

Agora desejamos obter estimativas semelhantes à do último lema para

$$\frac{R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)}{|\xi - \eta|^{m-|\alpha|}} : \xi, \eta \in \mathcal{N}^k : \xi \neq \eta.$$

Inicialmente, vamos assumir que $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que $\xi \neq \eta$ e, além disso,

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|.$$

Lema 7.0.31 *Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $m + \mu' + km + k + m \leq r$. Existem constantes K', n'_1 positivas tais que se $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$,*

$$|f^{(\alpha)}(z)| \leq K' (1+|z|)^{n'_1} \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^m |Pf|_{r, B_1[z]}, \forall z \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Demonstração: Fixe $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$. Na prova do lema anterior vimos que existem constantes $n'', K'' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$, então

$$|f^{(\alpha)}(z)| \leq K'' (1+|z|)^{n''} \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^{r-\mu'-k|\alpha|-k-|\alpha|} |Pf|_{r, B_1[\xi]}, \forall z \in \mathcal{N}^k.$$

Se $\text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 1$, como $m + \mu' + km + k + m \leq r$, então $\text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^{r-\mu'-k|\alpha|-k-|\alpha|} \leq \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^m$. Conseqüentemente,

$$|f^{(\alpha)}(z)| \leq K'' (1+|z|)^{n''} \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^m |Pf|_{r, B_1[\xi]}.$$

Por outro lado, se $\text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1$, vimos também na prova do lema anterior que existem constantes positivas L e n^* tais que se $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$, então

$$|f^{(\alpha)}(z)| \leq L(1+|z|)^{n^*} |F|_{r, B_1[z]} \leq L(1+|z|)^{n^*} |F|_{r, B_1[z]} \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^m.$$

Fazendo $K_\alpha = \max\{K'', L\}$, $n_\alpha = \max\{n'', n^*\}$ teremos que se $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$,

$$|f^{(\alpha)}(z)| \leq K_\alpha (1 + |z|)^{n_\alpha} \text{dist}(z, \mathcal{N}^{k+1})^m |Pf|_{r, B_1[\xi]}, \forall z \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Definindo K' como o máximo dos K_α e n' como o máximo dos n_α quando $|\alpha| \leq m$ obtemos o resultado. ■

Lema 7.0.32 *Seja $s \in \mathbb{N}$ tal que $m + \mu' + km + k + m \leq s$. Então existem constantes $K'', n'' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem s em $\mathcal{N}^{k+1}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que*

$$\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|,$$

então se $S(\xi, \eta) = B_1[\xi] \cup B_1[\eta]$, teremos que

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K'' (1 + |\xi| + |\eta|)^{n''} |\xi - \eta|^m |Pf|_{s, S(\xi, \eta)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m$$

Demonstração: Pelo lema 7.0.31 existem constantes positivas K', n'_1 tais que se $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem s em $\mathcal{N}^{k+1}$ e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|$ e $\text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|$,

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K' (1 + |\xi|)^{n'_1} (2|\xi - \eta|)^m |Pf|_{s, B_1[\xi]}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m,$$

$$|f^{(\alpha)}(\eta)| \leq K' (1 + |\eta|)^{n'_1} (2|\xi - \eta|)^m |Pf|_{s, B_1[\eta]}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Temos que $R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)$ é uma combinação linear de derivadas de f em ξ e em η de ordens menores ou iguais a m multiplicadas por polinômios em ξ e em η . Digamos que

$$R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = \sum_{|\beta| \leq m} Q_\beta(\xi, \eta) D^\beta f(\xi) + \sum_{|\gamma| \leq m} T_\gamma(\xi, \eta) D^\gamma f(\eta),$$

onde $Q_\beta(\xi, \eta), T_\gamma(\xi, \eta)$ são polinômios em ξ e η .

Então existem constantes $C_\beta, O_\gamma, p_\beta, q_\gamma$ tais que

$$\begin{aligned} |R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| &\leq \sum_{|\beta| \leq m} C_\beta (1 + |\xi| + |\eta|)^{p_\beta} |D^\beta f(\xi)| + \sum_{|\gamma| \leq m} O_\gamma (1 + |\xi| + |\eta|)^{q_\gamma} |D^\gamma f(\eta)| \\ &\leq 2^m K' \sum_{|\beta| \leq m} C_\beta (1 + |\xi| + |\eta|)^{p_\beta} (1 + |\xi|)^{n'_1} |\xi - \eta|^m |Pf|_{s, B_1[\xi]} + \\ &\quad + 2^m K' \sum_{|\gamma| \leq m} O_\gamma (1 + |\xi| + |\eta|)^{q_\gamma} (1 + |\eta|)^{n'_1} |\xi - \eta|^m |Pf|_{s, B_1[\eta]} \\ &\leq C' (1 + |\xi| + |\eta|)^p |\xi - \eta|^m |Pf|_{s, S(\xi, \eta)}, \end{aligned}$$

onde $p = n'_1 + \max\{p_\beta, q_\gamma : |\beta| \leq m, |\gamma| \leq m\}$.

Basta então definir K'' como o máximo das constantes C' quando $|\alpha| \leq m$ e n'' o máximo dos p quando $|\alpha| \leq m$. ■

Lema 7.0.33 *Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $2m + 2k + 2km + 2\mu' \leq p$. Existem constantes $K''', n''' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem p em $\mathcal{N}^{k+1}$, e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que*

$$2|\xi - \eta| < \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}), \quad (7.0.5)$$

então, se $S_1(\xi, \eta)$ é o conjunto dos pontos cuja distância ao segmento que une ξ e η é no máximo 1,

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K''' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n'''} \|F\|_{p, S_1(\xi, \eta)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Demonstração: Como

$$|\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) - \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})| \leq |\xi - \eta|,$$

temos que

$$-2|\xi - \eta| \leq 2 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) - 2 \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|\xi - \eta|.$$

Por (7.0.5) segue que

$$\frac{\text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})}{3} \leq \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 3 \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}). \quad (7.0.6)$$

Seja ζ um elemento do segmento que une ξ e η . Digamos que $\zeta = (1-t)\xi + t\eta$, onde $0 \leq t \leq 1$. Notemos que $|\zeta - \xi| = |(1-t)\xi + t\eta - \xi| = t|\eta - \xi| \leq |\eta - \xi|$.

Pelas equações (7.0.5) e (7.0.6),

$$\begin{aligned} 2|\xi - \eta| &< \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &\leq \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + 3 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &= 4 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) &\leq |\zeta - \xi| + \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &\leq |\eta - \xi| + \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &\leq 2 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &\leq 3 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}). \end{aligned}$$

Utilizando esse argumento obtemos:

$$\text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 3 \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}), \quad \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 3 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}). \quad (7.0.7)$$

Para $\eta \in \mathcal{N}^k$ fixado, seja

$$H(\zeta) = L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\zeta, \eta, F).$$

Vimos que H se anula de ordem $m - |\alpha|$ para $\zeta = \eta$. Definindo $v = \xi - \eta$, vejamos qual é a Fórmula de Taylor de H .

$$H(\xi) = H(\eta) + H'(\eta).v + \frac{1}{2}H''(\eta).v^{(2)} + \dots + \frac{1}{(m-|\alpha|-1)!}H^{(m-|\alpha|-1)}(\eta).v^{(m-|\alpha|-1)} +$$

$$+ \frac{1}{(m - |\alpha| - 1)!} \int_0^1 (1 - t)^{m - |\alpha| - 1} H^{(m - |\alpha|)}(\eta + t(\xi - \eta)) \cdot v^{(m - |\alpha|)} dt.$$

Assim existem $C > 0$ (independente de η) e ζ no segmento unindo ξ e η tais que:

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\xi, \eta, F)| \leq C |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} |H^{(m-|\alpha|)}(\zeta)|. \quad (7.0.8)$$

Existe uma constante $C^* > 0$ tal que

$$|H^{(m-|\alpha|)}(z)| \leq C^* \sum_{|\gamma|=m-|\alpha|} |D^\gamma H(z)|.$$

Pela definição de H , cada $D^\gamma H(\zeta)$ é uma combinação de polinômios em ζ e em η multiplicados por derivadas de F em ζ e em η de ordens menores ou iguais à $km + k + m$, uma vez que

$$\begin{aligned} k|\alpha| + k + |\alpha| + m - |\alpha| &= m + k + k|\alpha| \\ &\leq m + k + km. \end{aligned}$$

O próximo passo da prova do lema é provar que existem constantes $K, n_4 > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem p em $\mathcal{N}^{k+1}$, se $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são como antes e $|\beta| = (|\alpha|+1)k$, $|\gamma| = (m+1)k$, então

$$\begin{aligned} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})| |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})| |R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| &= |L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\xi, \eta, F)| \leq \\ K |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\eta| + |\zeta|)^{n_4} (\text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}))^{2\mu'} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)}. \end{aligned} \quad (7.0.9)$$

Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\gamma| = m - |\alpha|$, podemos escrever que

$$|D^\gamma H(w)| \leq \sum_{|\gamma| \leq km+k+m} |Q_\gamma(w, \eta) D^\gamma F(w)| + \sum_{|\lambda| \leq km+k+m} |P_\lambda(w, \eta) D^\lambda F(\eta)|.$$

Pelo lema 8.0.43 do Apêndice, existem constantes $K, n^* > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |D^\gamma H(\zeta)| &\leq K \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |\zeta| + |\eta|)^{n^*} |F|_{p, B_1[\zeta]} + \\ &\quad + K \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |\zeta| + |\eta|)^{n^*} |F|_{p, B_1[\eta]} \\ &\leq K (1 + |\zeta| + |\eta|)^{n^*} |F|_{p, S(\zeta, \eta)} (\text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'}) \\ &\leq K (1 + |\zeta| + |\eta|)^{n^*} |F|_{p, S(\zeta, \eta)} (\text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}))^{2\mu'}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, existem constantes positivas $C' > 0, n_4$ tais que

$$|H^{(m-|\alpha|)}(\zeta)| \leq C' (1 + |\zeta| + |\eta|)^{n_4} |F|_{p, S(\zeta, \eta)} (\text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}))^{2\mu'}. \quad (7.0.10)$$

Notemos que por (7.0.6) e (7.0.7),

$$\begin{aligned} (\text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}))^2 &= \\ &= \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})^2 + 2 \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\zeta, \mathcal{N}^{k+1})^2 \\ &\leq 3 \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + 2.3. \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \\ &\quad + 9 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}) \\ &= 18 \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 1 + |\eta| + |\zeta| &= 1 + |\eta| + |(1-t)\xi + t\eta| \\ &\leq 1 + 2|\eta| + |\xi| \\ &\leq 2(1 + |\xi| + |\eta|). \end{aligned}$$

Utilizando essas estimativas em (7.0.10) teremos que:

$$\begin{aligned} &|D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})||D^\gamma(P(\eta)^{m+1})||R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq \\ &K' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}))^{\mu'} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, somando para todos os $\beta \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, em seguida para os $\gamma \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\gamma| = (m+1)k$ e tirando a raiz quadrada, teremos, para alguma constante M , que

$$\begin{aligned} &|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \sqrt{\sum_{\beta} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2 \sum_{\gamma} |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})|^2} \leq \\ &M |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}))^{\mu'} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)}. \end{aligned} \quad (7.0.11)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{\beta} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2} &\geq \sqrt{c} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{\mu'} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\mu''}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \\ \sqrt{\sum_{\gamma} |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})|^2} &\geq \sqrt{c} \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1})^{\mu'} (1 + |\eta|^2)^{-\frac{\mu''}{2}}, \quad \forall \eta \in \mathcal{N}^k \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} |R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi|^2)^{\frac{\mu''}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{\mu''}{2}} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)} \\ &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi|)^{\mu''} (1 + |\eta|)^{\mu''} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)} \\ &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{2\mu''} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)} \\ &= \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4+2\mu''} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)} \end{aligned}$$

Assim sendo, existem constantes positivas K''' e n''' tais que se $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem p em $\mathcal{N}^{k+1}$, e $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$ são tais que

$$2|\xi - \eta| < \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(\eta, \mathcal{N}^{k+1}),$$

então

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K''' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n'''} |F|_{p, S_1(\xi, \eta)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m. \quad \blacksquare$$

Finalmente podemos definir m' : tome $m' \in \mathbb{N}$ tal que

$$2\mu' + 2km + 2k + 2m \leq m'.$$

Lema 7.0.34 *Existem $G > 0, p > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, então*

$$(1 + |\xi|)^n |f^{(\alpha)}(\eta)| \leq G \sup_{z \in \mathbb{R}^N} (1 + |z|)^p |F|_{m', z}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi], \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Demonstração: Pelo lema 7.0.30 existem constantes $K, n' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, então

$$|f^{(\alpha)}(\eta)| \leq K(1 + |\eta|)^{n'} |F|_{m', B_1[\eta]}, \forall \eta \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Sejam $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $\eta \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi]$. Pelo Corolário 8.0.5 do Apêndice segue que

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^n |f^{(\alpha)}(\eta)| &\leq K(1 + |\xi|)^n (1 + |\eta|)^{n'} |F|_{m', B_1[\eta]} \\ &\leq K'(1 + |\xi|)^n (1 + |\eta|)^{n'} \sup_{|\beta| \leq m', w \in B_1[\eta]} |D^\beta F(w)| \end{aligned}$$

Dado $w \in B_1[\eta]$,

$$1 + |\eta| \leq 1 + |\eta - w| + |w| \leq 1 + 1 + |w| \leq 2(1 + |w|).$$

Analogamente, se $w \in B_1[\eta]$ e $|\eta - \xi| \leq R$,

$$\begin{aligned} 1 + |\xi| &\leq 1 + |\xi - w| + |w| \leq 1 + |\xi - \eta| + |\eta - w| + |w| \leq 1 + R + 1 + |w| \\ &\leq (R + 2)(1 + |w|). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^n |f^{(\alpha)}(\eta)| &\leq K' \sup_{|\beta| \leq m', w \in B_1[\eta]} (1 + |\xi|)^n (1 + |\eta|)^{n'} |D^\beta F(w)| \\ &= K' \sup_{|\beta| \leq m', w \in B_1[\eta]} \left(\frac{1 + |\xi|}{1 + |w|} \right)^n (1 + |w|)^n \left(\frac{1 + |\eta|}{1 + |w|} \right)^{n'} (1 + |w|)^{n'} |D^\beta F(w)| \\ &\leq K'' \sup_{|\beta| \leq m', w \in B_1[\eta]} (1 + |w|)^{n+n'} |D^\beta F(w)| \\ &\leq K'' \sup_{z \in \mathbb{R}^N} (1 + |z|)^{n+n'} |F|_{m', z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 7.0.35 *Existem constantes positivas A e q tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, se $\xi \in \mathbb{R}^N$, $x, y \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi]$ são tais que $x \neq y$ e $2|x - y| < \text{dist}(x, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(y, \mathcal{N}^{k+1})$, então*

$$(1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} \leq A \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^q |F|_{m', w}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Demonstração: Pelo lema 7.0.33 existem constantes $K''', n''' > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, e se $x, y \in \mathcal{N}^k$ são distintos e tais que

$$2|x - y| < \text{dist}(x, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(y, \mathcal{N}^{k+1}),$$

então

$$\frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} \leq K''' (1 + |x| + |y|)^{n'''} |F|_{m', S_1(x, y)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Fixemos $\xi \in \mathbb{R}^N$. Como $S_1(x, y)$ é convexo, podemos aplicar o Corolário 8.0.5 do Apêndice, e podemos afirmar que existe uma constante $S > 0$ (independente de f , de x , de y e de ξ) tal que

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} &\leq K''' (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n'''} |F|_{m', S_1(x, y)} \\ &\leq S.K''' (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n'''} \sup_{|\beta| \leq m', w \in S_1(x, y)} |D^\beta F(w)| \\ &= S.K''' \sup_{|\beta| \leq m', w \in S_1(x, y)} |D^\beta F(w)| (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n'''} . \end{aligned}$$

Vamos adicionar agora a hipótese que $x, y \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi]$. Dado $w \in S_1(x, y)$, existe $z \in [x, y]$ tal que $w \in B_1[z]$, e portanto

$$|x - w| \leq |x - z| + |z - w| \leq 2R + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + |\xi| &\leq 1 + |\xi - w| + |w| \leq 1 + |\xi - x| + |x - w| + |w| \leq 1 + R + 2R + 1 + |w| \\ &\leq (2 + 3R)(1 + |w|). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} 1 + |x| + |y| &\leq 1 + |x - w| + |w| + |y - w| + |w| \\ &\leq 1 + 4R + 2 + 2|w| \\ &\leq (3 + 4R)(1 + |w|). \end{aligned}$$

Podemos então concluir que existe uma constante A independente de ξ , de x e de y tal que

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} &\leq A \sup_{|\beta| \leq m', w \in S_1(x, y)} |D^\beta F(w)| (1 + |w|)^{n+n'''} \\ &\leq A \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^{n+n'''} |F|_{m', w}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 7.0.36 *Existem constantes positivas q' e C tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, se $\xi \in \mathbb{R}^N$, $x, y \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi]$, $x \neq y$, e $2|x - y| \geq \text{dist}(x, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(y, \mathcal{N}^{k+1})$, então*

$$(1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} \leq C \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^{q'} |F|_{m', w}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Demonstração: Pelo lema 7.0.32, existem constantes positivas K'' e n'' tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$ e $x, y \in \mathcal{N}^k$ são tais que

$$\text{dist}(x, \mathcal{N}^{k+1}) + \text{dist}(y, \mathcal{N}^{k+1}) \leq 2|x - y|,$$

então

$$|R_m^{(\alpha)}(x; y)| \leq K'' (1 + |x| + |y|)^{n''} |x - y|^m |Pf|_{m', S(x, y)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Assim, dados $\xi \in \mathbb{R}^N$ e x, y como antes tais que $x, y \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi]$,

$$(1 + |\xi|)^n |R_m^{(\alpha)}(x; y)| \leq K'' (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n''} |x - y|^m |F|_{m', S(x, y)}.$$

Seja $t \in S(x, y)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $t \in B_1[x]$. Então

$$|t - \xi| \leq |t - x| + |x - \xi| \leq 1 + R,$$

e portanto $S(x, y) \subseteq B_{R+1}[\xi]$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} (1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} &\leq K'' (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n''} |x - y|^{|\alpha|} |F|_{m', B_{R+1}[\xi]} \\ &\leq K'' . S(1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n''} (2R)^{|\alpha|} \sup_{|\beta| \leq m', t \in B_{R+1}[\xi]} |D^\beta F(t)| \\ &\leq K'' . S(2R)^m \sup_{|\beta| \leq m', t \in B_{R+1}[\xi]} (1 + |\xi|)^n (1 + |x| + |y|)^{n''} |D^\beta F(t)|. \end{aligned}$$

Dado $t \in B_{R+1}[\xi]$,

$$\begin{aligned} 1 + |\xi| &\leq 1 + |\xi - t| + |t| \leq 1 + R + 1 + |t| = 2 + R + |t| \\ &\leq (2 + R)(|t| + 1). \end{aligned}$$

Além disso,

$$|x - t| \leq |x - \xi| + |\xi - t| \leq R + R + 1 = 2R + 1,$$

e portanto

$$\begin{aligned} 1 + |x| + |y| &\leq 1 + |x - t| + |t| + |y - t| + |t| \\ &\leq 3 + 4R + 2|t| \\ &\leq (3 + 4R)(1 + |t|). \end{aligned}$$

Assim,

$$(1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} \leq C \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^{n+n''} |F|_{m', w}. \quad \blacksquare$$

Lema 7.0.37 *Supondo que $\mathcal{N}^{k+1} \neq \emptyset$, dados $n, m \in \mathbb{N}$, existem constantes $n' \in \mathbb{N}$ e $K > 0$ tais que para toda $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ que se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$,*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi}.$$

Demonstração: Dado $\xi \in \mathbb{R}^N$, sejam

$$A = \left\{ (1 + |\xi|)^n |D^\alpha f(x)| : x \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi], |\alpha| \leq m \right\}$$

$$B = \left\{ (1 + |\xi|)^n \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} : x, y \in \mathcal{N}^k \cap B_R[\xi], x \neq y, |\alpha| \leq m \right\}$$

Temos que

$$(1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} = \sup A \cup B$$

Pelos últimos três lemas sabemos que existem constantes $K > 0$ e $n' \in \mathbb{N}$ tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, então

$$(1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^{n'} |F|_{m', w}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

e portanto

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{w \in \mathbb{R}^N} (1 + |w|)^{n'} |F|_{m', w}. \quad \blacksquare$$

Resta provar o lema acima se $\mathcal{N}^{k+1} = \emptyset$. A prova é muito parecida (mas mais simples) à feita anteriormente.

Lema 7.0.38 *Se $\mathcal{N}^{k+1} = \emptyset$ e $n, m \in \mathbb{N}$, existem constantes $n' \in \mathbb{N}$ e $K > 0$ tais que*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi}, \forall g \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Dado $j \in \mathbb{N}$, seja

$$Q_j(\xi) = \sum_{|\beta| \leq jk} \left| D^\beta (P(\xi)^j) \right|^2.$$

Como vimos, o conjunto de zeros de Q_j é $\mathcal{N}^{k+1}$. Dessa forma, o teorema 5.0.13 nos permite afirmar que existem constantes $C_j, a_j > 0$ tais que

$$\frac{C_j}{(1 + |\xi|^2)^{a_j}} \leq |Q_j(\xi)|, \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Sejam $c = \min\{C_j : 1 \leq j \leq m+1\}$ e $\mu'' = \max\{a_j : 1 \leq j \leq m+1\}$. Assim

$$\frac{c}{(1 + |\xi|^2)^{\mu''}} \leq |Q_j(\xi)| = \sum_{|\beta| \leq jk} \left| D^\beta (P(\xi)^j) \right|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall 1 \leq j \leq m+1.$$

Em particular, como as derivadas de P^j de ordens menores que jk se anulam em $\mathcal{N}^k$, então

$$\frac{c}{(1 + |\xi|^2)^{\mu''}} \leq \sum_{|\beta|=jk} \left| D^\beta (P(\xi)^j) \right|^2, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall 1 \leq j \leq m+1. \quad (7.0.12)$$

Seja, como antes, $F(\xi) = P(\xi)f(\xi)$. Vejamos que existem constantes $n', K > 0$ tais que

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^{n'} |F|_{m', B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Fixemos $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$. Na prova do lema 8.0.42 do Apêndice mostramos que existem constantes $K_1, n_1 > 0$ tais que

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| \leq K_1(1 + |\xi|)^{n_1} |F|_{m', B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall \beta \in \mathbb{N}^N : |\beta| = (|\alpha| + 1)k.$$

Pelo mesmo argumento feito anteriormente, existe uma constante $K_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{|\beta|=(|\alpha|+1)k} |L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)|^2} &= \left\{ \sum_{|\beta|=(|\alpha|+1)k} \left| D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1}) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} |f^{(\alpha)}(\xi)| \\ &\leq K_2(1 + |\xi|)^{n_1} |F|_{m', B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k. \end{aligned}$$

Pela equação acima e por (7.0.12) concluimos que existem constantes $n_2, K_3 > 0$ tais que

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K_3(1 + |\xi|)^{n_2} |F|_{m', B_1[\xi]}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k.$$

As constantes acima dependem de α . Tomando seus máximos, quando $|\alpha| \leq m$, obteremos o desejado.

Nos resta estimar os termos

$$\frac{R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)}{|\xi - \eta|^{m-|\alpha|}}, \quad \text{onde } \xi, \eta \in \mathcal{N}^k, \xi \neq \eta, \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k, |\gamma| = (m + 1)k$. Relembremos que $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\xi, \eta, F) = D_\xi^\beta D_\eta^\gamma L_{|\alpha|, m}(\xi, \eta, F)$. Para $\eta \in \mathcal{N}^k$ fixado, seja

$$H(\zeta) = L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\zeta, \eta, F).$$

Vimos que H se anula de ordem $m - |\alpha|$ para $\zeta = \eta$. Seja $v = \xi - \eta$ e vejamos qual é a fórmula de Taylor de H .

$$\begin{aligned} H(\xi) &= H(\eta) + H'(\eta).v + \frac{1}{2}H''(\eta).v^{(2)} + \dots + \frac{1}{(m - |\alpha| - 1)!} H^{(m-|\alpha|-1)}(\eta).v^{(m-|\alpha|-1)} + \\ &\quad + \frac{1}{(m - |\alpha| - 1)!} \int_0^1 (1 - t)^{m-|\alpha|-1} H^{(m-|\alpha|)}(\eta + t(\xi - \eta)).v^{(m-|\alpha|)} dt. \end{aligned}$$

Assim existem ζ no segmento unindo ξ e η e uma constante $C > 0$ independente de η tais que:

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\xi, \eta, F)| \leq C|\xi - \eta|^{m-|\alpha|} \left| H^{(m-|\alpha|)}(\zeta) \right|.$$

Existe uma constante $C^* > 0$ tal que

$$\left| H^{(m-|\alpha|)}(z) \right| \leq C^* \sum_{|\gamma|=m-|\alpha|} |D^\gamma H(z)|.$$

Cada $D^\gamma H(\zeta)$ é uma combinação de polinômios em ζ e em η multiplicados por derivadas de F em ζ e em η de ordens menores ou iguais à $km + k + m$, uma vez que

$$k|\alpha| + k + |\alpha| + m - |\alpha| = m + k + k|\alpha| \leq m + k + km.$$

Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\gamma| \leq m - |\alpha|$, podemos escrever que

$$|D^\gamma H(w)| \leq \sum_{|\kappa| \leq km+k+m} |Q_\kappa(w, \eta) D^\kappa F(w)| + \sum_{|\lambda| \leq km+k+m} |P_\lambda(w, \eta) D^\lambda F(\eta)|.$$

Pelo mesmo argumento feito anteriormente, existem constantes $C, n_4 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |H^{(m-|\alpha|)}(\zeta)| &\leq C(1 + |\zeta| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', B_1[\zeta]} + \\ &\quad + C(1 + |\zeta| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', B_1[\eta]} \\ &\leq C(1 + |\zeta| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', S(\zeta, \eta)} \\ &\leq C(1 + |\zeta| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)}. \end{aligned}$$

Além disso, como vimos, $1 + |\eta| + |\zeta| \leq 2(1 + |\xi| + |\eta|)$. Assim obtemos que se $\xi, \eta \in \mathcal{N}^k$,

$$\begin{aligned} L_{k|\alpha|+k+|\alpha|, km+k+m}(\xi, \eta, F) &= |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})| |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})| |R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \\ &\leq K' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, somando para todos os $\beta \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, em seguida para os $\gamma \in \mathbb{N}^N$ tais que $|\gamma| = (m + 1)k$ e tirando a raiz quadrada, teremos, para alguma constante M que

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \sqrt{\sum_{\beta} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2 \sum_{\gamma} |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})|^2} \leq M |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{\beta} |D^\beta(P(\xi)^{|\alpha|+1})|^2} &\geq \sqrt{c} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\mu''}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}^k \\ \sqrt{\sum_{\gamma} |D^\gamma(P(\eta)^{m+1})|^2} &\geq \sqrt{c} (1 + |\eta|^2)^{-\frac{\mu''}{2}}, \quad \forall \eta \in \mathcal{N}^k. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\mu''}{2}} (1 + |\eta|^2)^{-\frac{\mu''}{2}} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)} \\ &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi|)^{\mu''} (1 + |\eta|)^{\mu''} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)} \\ &\leq \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{2\mu''} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)} \\ &= \frac{M}{c} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n_4+2\mu''} |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)} \end{aligned}$$

Assim sendo, existem constantes positivas K''' e n''' tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$, então

$$|R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)| \leq K''' |\xi - \eta|^{m-|\alpha|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{n'''} |F|_{m', S_1(\xi, \eta)}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m.$$

Pelo mesmo argumento do caso $\mathcal{N}^{k+1} \neq \emptyset$ terminamos a prova. ■

Tendo feito tudo isso poderíamos retornar ao lema 7.0.27 e nos perguntarmos se era realmente necessário encontrar estimativas para

$$\frac{R_m^{(\alpha)}(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|^{m-|\alpha|}},$$

uma vez que já sabemos que existem constantes $n', K > 0$ tais que se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$,

$$|f^{(\alpha)}(\xi)| \leq K(1 + |\xi|)^{n'} |F|_{m', B_1[\xi]}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N : |\alpha| \leq m. \quad (7.0.13)$$

Vejamos onde está a dificuldade: Pelo lema 7.0.27 existe uma constante $C^* > 0$ tal que se $\xi \in \mathbb{R}^N$, e se $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$,

$$(1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq C^* \sup_{y \in \mathbb{R}^N} (1 + |y|)^n |f|_{m, y}.$$

Poderíamos pensar em utilizar (7.0.13), mas precisaríamos de uma estimativa em todo $\mathbb{R}^N$, e não só para $\mathcal{N}^k$.

Concluiremos agora a demonstração do lema 7.0.26. Relembrando nossos passos, estamos fazendo a prova por indução em k (para k decrescente). Assumimos que o lema é verdadeiro com $k + 1$ e estamos provando para k . Nessa etapa acrescentamos a hipótese adicional de que f se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, onde m' foi definido acima. Vimos que nesse caso o lema é verdadeiro; falta, então, provar o lema sem a hipótese adicional de que f se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$. Seja $f \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ qualquer.

Utilizaremos o Teorema da Extensão de Whitney com $A = \mathcal{N}^{k+1}$ e com m substituído por m' . Assim, existe uma função $g \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ tal que $D^\alpha g(\xi) = D^\alpha f(\xi)$, $\forall \xi \in \mathcal{N}^{k+1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq m'$ e além disso existe uma constante K_1 tal que

$$|g|_{m', \xi} \leq K_1 |f|_{m', (\mathcal{N}^{k+1})_\xi}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (7.0.14)$$

Pelo caso que já provamos do lema 7.0.26 existem constantes positivas K e n' (que assumiremos ser tal que $n \leq n'$) tais que se $\varphi \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ e φ se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$, então

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |\varphi|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |P\varphi|_{m', \xi}.$$

Seja $h = f - g$. Então $h \in \mathcal{C}^{m'}(\mathbb{R}^N)$ e $h = 0$ de ordem $m' + 1$ em $\mathcal{N}^{k+1}$. Como P tem grau μ , temos:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi} \leq K_2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n' + \mu} |g|_{m', \xi}. \quad (7.0.15)$$

Mas então por (7.0.14) e (7.0.15),

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi} \leq K_3 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n' + \mu} |f|_{m', (\mathcal{N}^{k+1})_\xi}. \quad (7.0.16)$$

Pela hipótese de indução, existem naturais n'', m'' (que vamos assumir que são tais que $n' \leq n''$ e $m' \leq m''$) e $L_2 > 0$ tais que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n' + \mu} |f|_{m', (\mathcal{N}^{k+1})_\xi} \leq L_2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}. \quad (7.0.17)$$

Por (7.0.16) existe K_3 tal que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi} \leq K_3 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}.$$

Como $h = f - g$,

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Ph|_{m', \xi} &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pf|_{m', \xi} + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Pg|_{m', \xi} \\ &\leq (K_4 + 1) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}, \end{aligned}$$

já que $n' \leq n''$ e $m' \leq m''$.

Como h se anula de ordem m' em $\mathcal{N}^{k+1}$ podemos aplicar o resultado já provado. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |h|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} &\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n'} |Ph|_{m', \xi} \\ &\leq C(K_4 + 1) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}. \end{aligned}$$

Como $f = h + g$,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |h|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi}. \quad (7.0.18)$$

O lema 7.0.27 nos permite afirmar que existe $C^* > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} &\leq C^* \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, \xi} \\ &\leq C^* \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m', \xi}. \end{aligned}$$

Utilizando então (7.0.14) e (7.0.17) obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |g|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} &\leq K_5 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m', (\mathcal{N}^{k+1})_\xi} \\ &\leq K_5 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n' + \mu} |f|_{m', (\mathcal{N}^{k+1})_\xi} \\ &\leq K_6 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}, \end{aligned}$$

Concluimos finalmente, por (7.0.18) e pelas observações acima, que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^n |f|_{m, (\mathcal{N}^k)_\xi} \leq K \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} (1 + |\xi|)^{n''} |Pf|_{m'', \xi}. \quad \blacksquare$$

Capítulo 8

Apêndice

Lema 8.0.39 *As derivadas de $R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta)$ com respeito a ξ e a η de ordens menores ou iguais a $m - |\alpha|$ se anulam em $\xi = \eta \in \mathcal{N}^k$.*

Demonstração: Relembrando,

$$R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = f^{(\alpha)}(\xi) - \sum_{|\beta| \leq m - |\alpha|} f^{(\alpha+\beta)}(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\beta}{\beta!}.$$

Sejam $p, q \in \mathbb{N}^N$ com $|p + q| \leq m - |\alpha|$. Temos que

$$\partial_\xi^p R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = f^{(\alpha+p)}(\xi) - \sum_{p \leq \beta; |\beta| \leq m - |\alpha|} f^{(\alpha+\beta)}(\eta) \frac{(\xi - \eta)^{\beta-p}}{(\beta - p)!}.$$

Aplicando o operador ∂_η^q na expressão acima obteremos:

$$\partial_\eta^q \partial_\xi^p R_m^{(\alpha)}(\xi; \eta) = - \sum_{p \leq \beta; |\beta| \leq m - |\alpha|} \sum_{r \leq q, r \leq \beta - p} \binom{q}{r} f^{(\alpha+\beta+q-r)}(\eta) \partial_\eta^r \left\{ \frac{(\xi - \eta)^{\beta-p}}{(\beta - p)!} \right\}. \quad (8.0.1)$$

Fazendo $\xi = \eta \in \mathcal{N}^k$ teremos:

$$\begin{aligned} \partial_\eta^q \partial_\xi^p R_m^{(\alpha)}(\eta; \eta) &= - \sum_{|\beta| \leq m - |\alpha|, p \leq \beta \leq p+q} \binom{q}{\beta - p} f^{(\alpha+q+p)}(\eta) (-1)^{|\beta-p|} \\ &= -f^{(\alpha+p+q)}(\eta) \sum_{p \leq \beta \leq p+q} (-1)^{|\beta-p|} \binom{q}{\beta - p}. \end{aligned}$$

Resta ver que

$$\sum_{p \leq \beta \leq p+q} (-1)^{|\beta-p|} \binom{q}{\beta - p} = 0.$$

Fazendo $\beta - p = \lambda$ teremos que

$$\sum_{p \leq \beta \leq p+q} (-1)^{|\beta-p|} \binom{q}{\beta - p} = \sum_{0 \leq \lambda \leq q} (-1)^{|\lambda|} \binom{q}{\lambda}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
0 &= (1-1)^q = (1-1, \dots, 1-1)^q \\
&= (1-1)^{q_1} \dots (1-1)^{q_N} \\
&= \left(\sum_{\gamma_1=0}^{q_1} \binom{q_1}{\gamma_1} (-1)^{\gamma_1} \right) \dots \left(\sum_{\gamma_N=0}^{q_N} \binom{q_N}{\gamma_N} (-1)^{\gamma_N} \right) \\
&= \sum_{\gamma_1=0}^{q_1} \dots \sum_{\gamma_N=0}^{q_N} \binom{q}{(\gamma_1, \dots, \gamma_N)} (-1)^{|\gamma|} = \sum_{\gamma \leq q} \binom{q}{\gamma} (-1)^{|\gamma|}.
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. $\blacksquare$

Lema 8.0.40 Dado $j \in \mathbb{N}^*$, seja

$$Q_j(\xi) = \sum_{|\beta| \leq jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2.$$

Então $\{\xi \in \mathbb{R}^N : Q_j(\xi) = 0\} = \mathcal{N}^{k+1}$.

Demonstração: Vejamos inicialmente que $\{\xi \in \mathbb{R}^N : Q_j(\xi) = 0\} \subseteq \mathcal{N}^{k+1}$. Queremos provar que se $D^\beta(P^j)(\xi) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq jk$, então $(D^\alpha P)(\xi) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq k$. Seja $\eta \in \mathbb{R}^N$ tal que $D^\beta P^j(\eta) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq jk$. Escrevendo a Fórmula de Taylor de P^j em η vemos que $P^j(\xi) = O(|\xi - \eta|^{jk+1})$. Consequentemente,

$$P(\xi) = O(|\xi - \eta|^{k+\frac{1}{j}}).$$

Disso concluiremos que $D^\alpha P(\eta) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq k$. Suponhamos inicialmente que $\eta = 0$. Então

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha P(0) \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} + O(|\xi|^{k+1}) = \sum_{l=0}^k q_l(\xi) + O(|\xi|^{k+1}),$$

onde $q_l(\xi) = \sum_{|\beta|=l} D^\beta P(0) \frac{\xi^\beta}{\beta!}$. Temos que as funções q_l são homogêneas de grau l . Veremos que as funções q_l são nulas. Suponhamos por absurdo que existe algum $l \leq k$ tal que q_l não é nula. Sejam l_0 o menor valor de l tal que q_l não é nula e $v \in \mathbb{R}^N$ tal que $q_{l_0}(v) \neq 0$. Dessa forma, se t for pequeno,

$$P(tv) = t^{l_0} \left(\sum_{l=l_0}^k t^{l-l_0} q_l(v) + \frac{O(|tv|^{k+1})}{t^{l_0}} \right) = a(t)t^{l_0},$$

onde $a(0) \neq 0$, já que $q_{l_0}(v) \neq 0$. Mas temos que

$$P(tv) = O(|t|^{k+\frac{1}{j}}),$$

o que não é possível. Concluimos que as funções q_l são nulas. Como elas são polinômios podemos concluir que $D^\alpha P(0) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\alpha| \leq k$.

No caso geral, se $P(\xi) = O(|\xi - \eta|^{k+\frac{1}{j}})$, seja $Q(\xi) = P(\xi + \eta)$. Temos que $Q(\xi) = O(|\xi|^{k+\frac{1}{j}})$, e portanto, pelo caso anterior, $D^\beta Q(0) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq k$. Mas $D^\beta Q(0) = D^\beta P(\eta)$.

Quanto à recíproca, queremos ver que $\mathcal{N}^{k+1} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^N : Q_j(\xi) = 0\}$. Seja $\eta \in \mathcal{N}^{k+1}$. Escrevendo a Fórmula de Taylor de P em η temos que $P(\xi) = O(|\xi - \eta|^{k+1})$, e portanto $P^j(\xi) = O(|\xi - \eta|^{jk+j})$. Concluiremos por um argumento análogo ao do outro lado da igualdade que $D^\beta P^j(\eta) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq jk$. Suponhamos inicialmente que $\eta = 0$ e escrevamos, como antes, que

$$P^j(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq jk} D^\alpha(P^j)(0) \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} + O(|\xi|^{jk+1}) = \sum_{l=0}^{jk} q_l(\xi) + O(|\xi|^{jk+1}),$$

onde cada q_l é um polinômio e também uma função homogênea de grau l . Suponhamos por absurdo que existe $l \leq jk$ tal que $q_l \neq 0$ e seja l_0 o menor valor de l que satisfaz essa propriedade. Seja $v \in \mathbb{R}^N$ tal que $q_{l_0}(v) \neq 0$. Temos que, para t pequeno,

$$P^j(tv) = t^{l_0} \left(\sum_{l=l_0}^{jk} t^{l-l_0} q_l(v) + \frac{O(|tv|^{jk+1})}{t^{l_0}} \right) = a(t)t^{l_0},$$

onde $a(0) \neq 0$, uma vez que $q_{l_0}(v) \neq 0$. Mas $P^j(tv) = O(|tv|^{jk+j})$, o que não é possível. Concluimos então que as funções q_l são nulas; como elas são polinômios podemos concluir que $D^\beta(P^j)(0) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq jk$. No caso geral, se $P^j(\xi) = O(|\xi - \eta|^{jk+j})$, seja $Q(\xi) = P^j(\xi + \eta)$. Temos que $Q(\xi) = O(|\xi|^{jk+j})$, donde pelo caso anterior $D^\beta Q(0) = 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\beta| \leq jk$. Mas $D^\beta Q(0) = D^\beta P^j(\eta)$, e portanto segue o resultado. ■

Lema 8.0.41 *Existem constantes $c, \mu', \mu'' > 0$ tais que*

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |\xi|^2)^{-\mu''}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall j \leq (m+1).$$

Demonstração: Sabemos que para cada $1 \leq j \leq m+1$, existem constantes $c_j, a_j, b_j > 0$ tais que

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c_j \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2a_j} (1 + |\xi|^2)^{-b_j}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k.$$

Dado $y \in \mathcal{N}^{k+1}$, faça $\lambda = 2(1 + |y|)$. Dado $\xi \in \mathcal{N}^k$, se $|\xi| \leq 1$, então $|\xi| \leq 1 + |\xi|^2$, e se $1 \leq |\xi|$ então $|\xi| \leq |\xi|^2 \leq |\xi|^2 + 1$. Assim,

$$\frac{|\xi|}{1 + |\xi|^2} \leq 1.$$

Além disso, $|y|/\lambda(1 + |\xi|^2) \leq |y|/\lambda$. Com essas desigualdades em mente, seja $\xi \in \mathcal{N}^k$. Temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \right| &= \left| \frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) - \operatorname{dist}(y, \mathcal{N}^{k+1})}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \right| \\ &\leq \frac{|\xi - y|}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \\ &\leq \frac{|\xi|}{\lambda(1 + |\xi|^2)} + \frac{|y|}{\lambda(1 + |\xi|^2)} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} + \frac{|y|}{\lambda} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Sejam $a = \max\{a_i : 1 \leq i \leq m+1\}$ e $b = \max\{b_i : 1 \leq i \leq m+1\}$. Para $1 \leq j \leq m+1$,

$$\begin{aligned} c_j \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2a_j} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{b_j} &\geq c_j \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2a_j} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^b \\ &= c_j \lambda^{2a_j} \left(\frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})}{\lambda(1+|\xi|^2)} \right)^{2a_j} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{b-2a_j} \\ &\geq c_j \lambda^{2a_j} \left(\frac{\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})}{\lambda(1+|\xi|^2)} \right)^{2a} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{b-2a_j} \\ &= c_j \frac{\lambda^{2a_j}}{\lambda^{2a}} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2a} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{b-2a_j+2a}. \end{aligned}$$

Sejam $c = \min\{c_i \lambda^{2(a_i-a)} : 1 \leq i \leq m+1\}$, $\mu'' = b + 2a$ e $\mu' = a$,

$$c_j \frac{\lambda^{2a_j}}{\lambda^{2a}} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2a} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{b-2a_j+2a} \geq c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{\mu''},$$

donde concluimos que

$$\sum_{|\beta|=jk} |D^\beta(P(\xi)^j)|^2 \geq c \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1+|\xi|^2)^{-\mu''}, \forall \xi \in \mathcal{N}^k, \forall j \leq (m+1). \quad \blacksquare$$

Lema 8.0.42 *Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mu' + k|\alpha| + k + |\alpha| \leq r$. Existem constantes $K_1 > 0, n_1 \in \mathbb{N}$ tais que se $f \in C^r(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$, e $\beta \in \mathbb{N}^N$ é tal que $|\beta| = (|\alpha| + 1)k$, então*

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| \leq K_1 (1+|\xi|)^{n_1} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{r-k|\alpha|-k-|\alpha|} |F|_{r, B_1[\xi]}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (8.0.2)$$

onde $F(\xi) = P(\xi)f(\xi)$.

Demonstração: Podemos escrever que

$$L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F) = \sum_{|\lambda| \leq k|\alpha|+k+|\alpha|} Q_{\beta, \lambda}(\xi) D^\lambda F(\xi),$$

onde cada $Q_{\beta, \lambda}$ é um polinômio que não depende de f . Então existem constantes $C_{\beta, \lambda} > 0$ e $n_{\beta, \lambda} \in \mathbb{N}$ tais que $|Q_{\beta, \lambda}(x)| \leq C_{\beta, \lambda} (1+|x|)^{n_{\beta, \lambda}}, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Sejam $C_\beta = \max\{C_{\beta, \lambda} : |\lambda| \leq k|\alpha| + k + |\alpha|\}$ e $p_\beta = \max\{n_{\beta, \lambda} : |\lambda| \leq k|\alpha| + k + |\alpha|\}$. Suponhamos inicialmente que $\operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} |L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| &\leq \sum_{|\lambda| \leq k|\alpha|+k+|\alpha|} |Q_{\beta, \lambda}(\xi) D^\lambda F(\xi)| \\ &\leq \sum_{|\lambda| \leq k|\alpha|+k+|\alpha|} C_{\beta, \lambda} (1+|\xi|)^{n_{\beta, \lambda}} |D^\lambda F(\xi)| \\ &\leq C_\beta (1+|\xi|)^{p_\beta} \sum_{|\lambda| \leq k|\alpha|+k+|\alpha|} |D^\lambda F(\xi)| \\ &\leq C_\beta (1+|\xi|)^{p_\beta} \sum_{|\lambda| \leq r} |D^\lambda F(\xi)| \\ &\leq C_\beta \cdot C' (1+|\xi|)^{p_\beta} |F|_{r, B_1[\xi]} \\ &\leq C_\beta \cdot C' (1+|\xi|)^{p_\beta} \operatorname{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{r-k|\alpha|-k-|\alpha|} |F|_{r, B_1[\xi]}. \end{aligned}$$

Se, ao contrário, $\text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) < 1$, então existe $\xi^* \in \mathcal{N}^{k+1}$ tal que $|\xi^* - \xi| = \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1}) < 1$, e portanto $\xi^* \in B_1[\xi]$.

Como f se anula de ordem r em $\mathcal{N}^{k+1}$, então $F = Pf$ se anula de ordem r em $\xi^* \in \mathcal{N}^{k+1}$. Consequentemente, a função $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)$ se anula de ordem $r - k|\alpha| - k - |\alpha|$ em ξ^* . Para simplificar seja $p = r - k|\alpha| - k - |\alpha|$. Escrevendo a fórmula de Taylor da função $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)$ no ponto ξ^* teremos:

$$\begin{aligned} L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F) &= \sum_{|\gamma| < p} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi^*, F) (\xi - \xi^*)^\gamma + \\ &+ p \int_0^1 (1-t)^{p-1} \sum_{|\gamma|=p} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi^* + t(\xi - \xi^*)) (\xi - \xi^*)^\gamma dt. \end{aligned}$$

Notemos que $|\xi^* + t(\xi - \xi^*) - \xi| = |(t-1)(\xi - \xi^*)| \leq |\xi - \xi^*| \leq 1$. Além disso, como $L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)$ se anula em ξ^* de ordem p , existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} |L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| &\leq M |\xi - \xi^*|^p \sup_{|\gamma|=p} \sup_{\eta \in B_1[\xi]} |\partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\eta, F)| \\ &= M \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{r-k|\alpha|-k-|\alpha|} \sup_{|\gamma|=r-k|\alpha|-k-|\alpha|} \sup_{\eta \in B_1[\xi]} |\partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\eta, F)|. \end{aligned}$$

Se $|\gamma| = r - k|\alpha| - k - |\alpha|$, podemos escrever

$$|\partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\eta, F)| = \left| \sum_{|\lambda| \leq r} R_{\beta, \lambda}(\eta) D^\lambda F(\eta) \right|$$

onde cada $R_{\beta, \lambda}$ é um polinômio (independente de f). Assim existem constantes $T_{\beta, \gamma} > 0, n_{\beta, \gamma} \in \mathbb{N}$ tais que, para $\eta \in B_1[\xi]$,

$$\begin{aligned} |\partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\eta, F)| &\leq T_{\beta, \gamma} (1 + |\eta|)^{n_{\beta, \gamma}} \sum_{|\lambda| \leq r} |D^\lambda F(\eta)| \\ &\leq T_{\beta, \gamma} (1 + |\eta - \xi| + |\xi|)^{n_{\beta, \gamma}} \sum_{|\lambda| \leq r} |D^\lambda F(\eta)| \\ &\leq T_{\beta, \gamma} 2^{n_{\beta, \gamma}} (1 + |\xi|)^{n_{\beta, \gamma}} \sum_{|\lambda| \leq r} |D^\lambda F(\eta)|. \end{aligned}$$

Portanto existem constantes $A_\beta > 0$ e $n_\beta \in \mathbb{N}$, independentes de ξ , tais que

$$\sup_{|\gamma|=r-k|\alpha|-k-|\alpha|} \sup_{\eta \in B_1[\xi]} |\partial^\gamma L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\eta, F)| \leq A_\beta (1 + |\xi|)^{n_\beta} |F|_{r, B_1[\xi]},$$

donde existem constantes $B_\beta > 0$ e $l_\beta \in \mathbb{N}$ tais que

$$|L_{k|\alpha|+k+|\alpha|}^\beta(\xi, F)| \leq B_\beta (1 + |\xi|)^{l_\beta} \text{dist}(\xi, \mathcal{N}^{k+1})^{r-k|\alpha|-k-|\alpha|} |F|_{r, S(\xi)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Definindo $K_1 = \max\{B_\beta : |\beta| = (|\alpha|+1)k\}$ e $n_1 = \max\{n_\beta : |\beta| = (|\alpha|+1)k\}$ segue o resultado. ■

Lema 8.0.43 *Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m+k+km+2\mu' \leq p$. Para cada $\gamma \in \mathbb{N}^N$ tal que $|\gamma| \leq km+k+m$, seja $Q_\gamma(w, \eta)$ um polinômio. Existem constantes $C > 0, q \in \mathbb{N}$ tais que se $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^N)$ se anula de ordem p em $\mathcal{N}^{k+1}$, então,*

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq km+k+m} Q_\gamma(w, \eta) D^\gamma F(w) \right| \leq C(1 + |w| + |\eta|)^q \text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} |F|_{p, B_1[w]}, \forall w, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Se $\text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1}) \geq 1$ isso é imediato. Caso contrário, existe $\xi^* \in \mathcal{N}^{k+1}$ tal que $\text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1}) = |w - \xi^*| < 1$. No ponto ξ^* a função

$$L(w) = \sum_{|\gamma| \leq km+k+m} Q_\gamma(w, \eta) D^\gamma F(w)$$

se anula de ordem $2\mu'$. Calculando sua fórmula de Taylor em ξ^* obtemos:

$$\begin{aligned} L(w) &= \sum_{|\gamma| < 2\mu'} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma L(\xi^*) (w - \xi^*)^\gamma + \\ &+ 2\mu' \int_0^1 (1-t)^{2\mu'-1} \sum_{|\gamma|=2\mu'} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma L(\xi^* + t(w - \xi^*)) (w - \xi^*)^\gamma dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq C' \text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} \sup_{|\gamma| \leq 2\mu', z \in [\xi^*, w]} |D^\gamma L(z)| \\ &\leq C \text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |w| + |\eta|)^q \sup_{|\gamma| \leq p, z \in B_1[w]} |D^\gamma F(w)| \\ &\leq C \text{dist}(w, \mathcal{N}^{k+1})^{2\mu'} (1 + |w| + |\eta|)^q |F|_{p, B_1[w]}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 8.0.44 *Se F é convexo e $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)$, então existe uma constante C tal que se $x, y \in F$ são distintos e $|\beta| \leq m$,*

$$\frac{|R_m^{(\beta)}(x, y)|}{|x - y|^{m-|\beta|}} \leq C \sum_{|\gamma| \leq m} \sup_{z \in F} |D^\gamma g(z)|.$$

Demonstração: Como vimos anteriormente,

$$|R_m^{(\beta)}(x, y)| \leq C \int_0^1 \sum_{|\gamma|=m} |D^\gamma g(y + t(x - y)) - D^\gamma g(y)| |x - y|^{m-|\beta|} dt.$$

Assim, existe uma constante K tal que

$$\begin{aligned} \frac{|R_m^{(\beta)}(x, y)|}{|x - y|^{m-|\beta|}} &\leq K \sum_{|\gamma|=m} \sup_{z \in [x, y]} |D^\gamma g(z) - D^\gamma g(y)| \\ &\leq 2K \sum_{|\gamma|=m} \sup_{z \in [x, y]} |D^\gamma g(z)| \\ &\leq 2K \sum_{|\gamma| \leq m} \sup_{z \in F} |D^\gamma g(z)|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 8.0.5 *Se $F \subseteq \mathbb{R}^N$ é convexo e $g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $S > 0$ tal que:*

$$|g|_{m,F} \leq S \sup_{|\beta| \leq m, y \in F} |D^\beta g(y)|.$$

Demonstração: Por definição,

$$|g|_{m,F} = \sup\{|D^\beta g(y)|, \frac{|R_m^{(\beta)}(y; z)|}{|y - z|^{m-|\beta|}} : |\beta| \leq m; y, z \in F, y \neq z\}.$$

Como vimos, existe $C > 0$ tal que se $y, z \in F$, $y \neq z$, $|\beta| \leq m$,

$$\begin{aligned} \frac{|R_m^{(\beta)}(y, z)|}{|y - z|^{m-|\beta|}} &\leq C \sum_{|\gamma| \leq m} \sup_{w \in F} |D^\gamma g(w)| \\ &\leq S \sup_{|\gamma| \leq m, w \in F} |D^\gamma g(w)|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 9

Notações

Vamos listar algumas das notações utilizadas durante este trabalho.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \text{ se } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ é escrito como } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

$$F_{m,n}(f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^n \sup_{|\beta| \leq m} |D^\beta f(\xi)|, \text{ onde } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \text{ é compacto e } \text{supp } \varphi \subseteq \Omega\}, \text{ onde } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ é um aberto.}$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) \text{ é o conjunto das distribuições: funcionais lineares contínuos definidos em } \mathcal{D}(\Omega).$$

$$A_\xi = \{w \in A : |\xi - w| \leq R = (\frac{10}{7} + 1)^{\frac{21\sqrt{n}}{8}}\}, \text{ onde } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$\mathcal{N}^k = \cap_{|\alpha| < k} \{\xi \in \mathbb{R}^n : P^{(\alpha)}(\xi) = 0\}, \text{ se } P \text{ é um polinômio em } \mathbb{R}^n.$$

$$f_m(\xi; \eta) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f(\eta) \frac{(\xi - \eta)^\alpha}{\alpha!}, \text{ se } f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n).$$

$$R_m(\xi; \eta) = f(\xi) - f_m(\xi; \eta), \text{ se } f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n).$$

$$|f|_{m,A} = \sup C \cup D, \text{ se } A \subseteq \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n),$$

$$C = \{|D^\alpha f(x)| : x \in A, |\alpha| \leq m\},$$

$$D = \left\{ \frac{|R_m^{(\alpha)}(x; y)|}{|x - y|^{m-|\alpha|}} : x, y \in A, x \neq y, |\alpha| \leq m \right\}.$$

$$S(x, y) = B_1[x] \cup B_1[y], \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$S_1(x, y) = \cup_{w \in [x, y]} B_1[w], \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ATIYAH, M.F. *Resolution of singularities and division of distributions*. Communications on pure and applied mathematics vol. 23, p. 145-150, 1970.
- [2] LIMA, E.L. *Análise no espaço $\mathbb{R}^n$* . Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [3] GRAUERT, H. *Several complex variables*. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [4] GRAUERT, H., FRITZSCHE, K. *Several Complex Variables*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [5] HÖRMANDER, L. *The analysis of linear partial differential operators I: distribution theory and Fourier analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [6] HÖRMANDER, L. *The analysis of linear partial differential operators II: differential operators with constant coefficients*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [7] HÖRMANDER, L. *On the division of distributions by polynomials*. Arkiv för Matematik, vol.3, n.53, p.555-568, 1958.
- [8] KRANTZ, S.G. *A primer of analytic functions*. Basel: Birkhäuser, 1992. Puiseux series and Separate real analyticity, p. 80-87. (Baster Lehrbücher, 4).
- [9] LOJASIEWICZ, S. *Sur le problème de la division*. Studia Mathematica, vol. 28, p. 87-136, 1959.
- [10] SCHWARTZ, L. *Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique complexe*. Summa Brasil. Math, vol. 3, p. 181-209, 1955.
- [11] STEIN, E.M. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton: Princeton University Press, 1970.
- [12] TREVES, F. *Hypo-analytic structures: local theory*. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- [13] TREVES, F. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Mineola: Dover, 1995.
- [14] VILLARREAL ALVARADO, F. *Teorema de Seidenberg-Tarski e algumas de suas aplicações às equações diferenciais parciais lineares*. São Paulo, 1978. Dissertação - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.