Extrapolação em espaços de Köthe

Víctor Juan Hernández Del Toro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, novembro de 2014

Extrapolação em espaços de Köthe

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/01/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Valentin Ferenczi (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Eloi Medida Galego-IME-USP
- Prof. Dr. Jordi Lopez-Abad -ICMAT

Resumo

Extrapolação em espaços de Köthe

Neste trabalho apresentamos alguns resultados da teoria de extrapolação desenvolvida por Nigel Kalton em [16].

Nós introduzimos o conceito de *Soma torcida* e apresentamos algumas das suas propriedades. Em seguida descrevemos um método de construção de somas torcidas ideado pelo Kalton e Peck para dar uma solução alternativa ao problema 3SP de espaços de Hilbert (ver [19]).

Nós estudamos um tipo de função $\Omega : X \longrightarrow L_0(\mu)$ definida em um espaço de Köthe chamada de *Centralizador*, que satisfaz:

- $\Omega(\alpha x) = \alpha\Omega(x)$ para todo $x \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Existe uma constante $\rho(\Omega) > 0$ tal que

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X.$$

para todo $u \in L_\infty(\mu)$ e todo $x \in X$.

Além disso, se $\Omega(f)$ é uma função real sempre que f seja uma função real, dizemos que Ω é um *Centralizador real*.

Seja $0 < \theta < 1$. Se $X = [X_0, X_1]_\theta$ é um espaço interpolado de Calderón (ver [1]), então definimos um Centralizador neste espaço, chamado de *Centralizador induzido*, por $\Omega_\theta(x) = F'(\theta)$, onde $F : \bar{\mathbb{S}} \longrightarrow X_0 + X_1$ é uma função definida na faixa $\bar{\mathbb{S}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$ que satisfaz:

- F é analítica no interior de $\bar{\mathbb{S}}$,
- $F(it) \in X_0$ e $F(1 + it) \in X_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e as funções $t \mapsto F(it)$ e $t \mapsto F(1 + it)$ são contínuas.

- F verifica

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) < \infty.$$

Logo, damos o conceito de *função indicadora*, que foi inicialmente introduzido por Gillespie (ver [25]) e usado pelo Kalton para resolver alguns problemas de extrapolação. Nós apresentamos as provas dos seguintes resultados:

Um de eles demonstrado pelo Pisier em [13]:

Se X é um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{q}$ e $0 < \theta < 1$ existe um único espaço de Köthe Y tal que

$$X = L_2^\theta Y^{1-\theta}.$$

Nós vamos apresentar a prova deste teorema usando como ferramenta as funções indicadoras (prova de Kalton).

E outro resultado usando centralizadores:

Seja X um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $1/p + 1/q = 1$, com $1 < p \leq 2$. Se $\Omega : X \rightarrow L_0(\mu)$ é um centralizador real, com $\rho(\Omega) \leq 1/200q$, então existem espaços de Köthe X_0 e X_1 tais que $X = [X_0, X_1]_{1/2}$ e se Ω_0 é o centralizador induzido em X , então

$$\|\Omega(x) - \Omega_0(x)\|_X \leq C \|x\|_X, \text{ para todo } x \in X$$

e alguma constante positiva C .

Palavras-chave: Espaço de Köthe, Espaço interpolado, Indicador de um espaço de Köthe, Centralizador.

Abstract

Extrapolation in Köthe spaces

In this work we present some results in the Extrapolation Theory of Banach Spaces develop by Nigel Kalton in [16].

We introduce the concept of *Twisted sums* and we present some properties. we describe a method of construction of twisted sums develop by Kalton and Peck to give an alternate solution to the problem 3SP for Hilbert spaces (ver [19]).

We study a type of function $\Omega : X \longrightarrow L_0(\mu)$ defined on a Köthe space, called *Centralizer*, that satisfies:

- $\Omega(\alpha x) = \alpha\Omega(x)$ for all $x \in X$ and $\alpha \in \mathbb{C}$.
- There exists a constant $\rho(\Omega) > 0$ such that

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X.$$

for all $u \in L_\infty(\mu)$ and $x \in X$,

furthermore, if $\Omega(f)$ is a real function whenever f is a real function, then Ω is called Real centralizer.

Let $0 < \theta < 1$. If $X = [X_0, X_1]_\theta$ is a Calderón interpolation space (see [1]), then we define a Centralizer in X , called *Induced centralizer*, by $\Omega_\theta(x) = F'(\theta)$, where $F : \bar{\mathbb{S}} \longrightarrow X_0 + X_1$ is a function defined on $\bar{\mathbb{S}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Re}(z) \leq 1\}$, that satisfies:

- F is analytic in the interior of $\bar{\mathbb{S}}$ and bounded on $\partial\bar{\mathbb{S}}$.
- $F(it) \in X_0$ and $F(1 + it) \in X_1$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $t \mapsto F(it)$ and $t \mapsto F(1 + it)$ are continuous functions.

-
- F satisfies

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) < \infty.$$

We introduce the concept of *Indicator function*, which was initially introduced by Gilliespie (ver [25]) and used by Kalton to solve some extrapolation problems. We present the proofs of the following theorems :

Pisier proved the following theorem (ver [13]):

Let X be a Köthe space which is p -convex and q -concave where $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. Then there is a Köthe space Y such that

$$X = L_2^\theta Y^{1-\theta},$$

where $1/q = \theta/2$.

We use indicator functions to prove this theorem (Kalton's proof).

Using centralizers, we proved the following extrapolation theorem:

Let X be a Köthe space which is p -convex and q -concave where $1 < p < 2$ and $1/p + 1/q = 1$. If Ω is a real centralizer on X with $\rho(\Omega) \leq 1/200q$, then there is a pair of Köthe spaces X_0, X_1 such that $X = [X_0, X_1]_{1/2}$ and if Ω_0 is the induced centralizer, then

$$\|\Omega(x) - \Omega_0(x)\|_X \leq C\|x\|_X, \text{ for all } x \in X$$

and some $C > 0$.

Keywords: Köthe space, Interpolation space, Indicator of a Köthe space, Centralizer.

Índice

Índice	v
1 Introdução	1
2 Resultados preliminares	5
2.1 Teoria da medida	5
2.1.1 Integração	5
2.1.2 Tipos de convergências	8
2.1.3 Integral de Bochner	9
2.2 Funções diferenciáveis	10
2.2.1 Funções analíticas	10
2.2.2 Funções de Lipschitz	11
2.3 Espaços de Banach reticulados	11
2.3.1 p -potências de espaços de funções	12
2.3.2 Normas de ordem contínua	13
2.3.3 Espaço de Banach de sequências (E.B.S)	13
2.4 Espaços quase-normados	14
2.5 Outros resultados	16
3 Somas torcidas	21
4 Interpolação em espaços de Banach	28
4.1 Generalidades da teoria de interpolação	28
4.2 Interpolação Complexa	29
5 Espaços de Köthe e espaços de funções g-convexos	47

ÍNDICE

6	O indicador de um espaço de funções g-convexo	62
6.1	Propriedades dos indicadores	63
6.2	Aproximação de funcionais semilineares	91
7	Centralizadores em espaços de Köthe	121
7.1	Propriedades dos centralizadores	121
7.2	Auto-extensões de espaços interpolados	127
8	Teoremas de extrapolação	137
	Bibliografia	144

Capítulo 1

Introdução

Sabemos que uma auto-extensão de um espaço de Banach Y , é um espaço de Banach X tal que Y está mergulhado em X e o espaço quociente X/Y é isomorfo a Y (ver [9]). O estudo das auto-extensões de um espaço nos conduz ao estudo das somas torcidas (ver Capítulo 3). Uma soma torcida X de Y e Z tem associada uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0.$$

Em [19], Kalton e Peck apresentam um método para construir somas torcidas de espaços de Banach Y e Z . Eles consideram uma função $F : Z \rightarrow W$, onde W é um espaço vetorial com $Y \subset W$, que verifica

- (i) F é homogênea,
- (ii) existe K positivo, tal que para todo $z_1, z_2 \in Z$

$$\|F(z_1 + z_2) - F(z_1) - F(z_2)\|_Y \leq K(\|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z)$$

e demonstram que

$$Z \oplus_F Y = \{(z, w) \in Z \times W : w - F(z) \in Y\}$$

munido da quase-norma

$$\|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y} = \|z\|_Z + \|w - F(z)\|_Y$$

é uma soma torcida de Y e Z . Reciprocamente, Kalton e Peck demonstram que toda soma torcida X de Y e Z é equivalente a uma soma torcida da forma $Z \oplus_F Y$ no seguinte sentido: existe um operador linear limitado $T : X \rightarrow Z \oplus_F Y$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i'} & Z \oplus_F Y & \xrightarrow{j'} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

No caso $Y = Z$, denotamos $Y \oplus_F Y$ por $d_F Y$.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo do método de interpolação complexa desenvolvido por Calderón em [1].

Calderón usa o espaço $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X_0, X_1)$ de funções analíticas no interior da faixa $\bar{\mathbb{S}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ com valores em $X_0 + X_1$ tais que as funções $t \mapsto F(it)$, $t \mapsto F(1 + it)$ são contínuas e

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) < \infty,$$

para definir o espaço intermédio entre X_0 e X_1 como

$$[X_0, X_1]_{\theta} = X_{\theta} = \{F(\theta) : F \in \mathcal{F}\}$$

com norma

$$\|x\|_{X_{\theta}} = \inf \{\|F\|_{\mathcal{F}} : F(\theta) = x\},$$

onde $0 < \theta < 1$.

Quando ou X_0 ou X_1 são espaços reflexivos, o espaço X_{θ} pode-se fatorar da forma $X_{\theta} = X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$, onde $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ é definido por

$$X_0^{1-\theta} X_1^{\theta} = \{x \in L_0 : \text{existem } u_0 \in X_0, u_1 \in X_1, \text{ tais que } |x| = |u_0|^{1-\theta} |u_1|^{\theta}\},$$

munido da norma

$$\|x\| = \inf \{\|u_0\|_{X_0}^{1-\theta} \cdot \|u_1\|_{X_1}^{\theta} : |x| = |u_0|^{1-\theta} |u_1|^{\theta}\}.$$

Nós sempre vamos supor que $X_{\theta} = X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$.

No Capítulo 5 damos os conceitos de espaço de Banach de funções g -convexo e espaço de Köthe. Também apresentamos algumas propriedades destes espaços.

No Capítulo 7 relacionamos as teorias de interpolação e somas torcidas de espaço de Köthe.

Nós consideramos as somas torcidas $d_{\Omega_0} X_{\theta}$ de X_{θ} , onde $\Omega_0 : X_{\theta} \rightarrow L_0(\mu)$ verifica (i), (ii) e é obtida por diferenciação complexa, i.e., dado $C > 1$ fixo, escolhemos $F \in \mathcal{F}$ tal que $\|F\|_{\mathcal{F}} < C\|x\|_{X_{\theta}}$ e $x = F(\theta)$, pondo assim $\Omega_0(x) = F'(\theta)$. A função Ω_0 tem propriedades interessantes como:

- Se $\bar{\Omega}_0$ é uma função obtida por diferenciação complexa definida por outra escolha de F , então as somas torcidas $d_{\Omega_0} X_{\theta}$ e $d_{\bar{\Omega}_0} X_{\theta}$ são equivalentes. Além disso, podemos dar uma fórmula explícita para Ω_0 , i.e.,

$$\Omega(x) = x (\log x_1 - \log x_0),$$

onde $|x| = x_0^{1-\theta} x_1^{\theta}$ e $\|x\|_{X_{\theta}} = \|x_0\|_{X_0} = \|x_1\|_{X_1}$.

- A soma torcida $d_{\Omega_0} X_\theta$ pode ser munida de uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{d_{\Omega_0} X_\theta}$.

Neste capítulo vemos que a função Ω_0 satisfaz:

- (iii) Existe uma constante $\rho(\Omega_0) > 0$ tal que

$$\|\Omega_0(ux) - u\Omega_0(x)\|_{X_\theta} \leq \rho(\Omega_0) \|u\|_\infty \|x\|_{X_\theta}.$$

para todo $u \in L_\infty(\mu)$ e todo $x \in X_\theta$.

O estudo de auto-extensões de um espaço de Köthe X , nos conduz a estudar funções $\Omega : X \rightarrow L_0(\mu)$ que verificam as condições (i) e (iii). Estas funções são chamadas de Centralizadores em X , as quais também verificam (ii). Esta situação nos leva à seguinte questão :

Dado um centralizador Ω em X , encontrar espaços de Köthe X_0, X_1 tais que $X = [X_0, X_1]_\theta$ e as somas torcidas $d_{\Omega_0} X_\theta, d_\Omega X$ sejam equivalentes.

Portanto, o estudo das auto-extensões de um espaço de Köthe é reduzido a um problema de extrapolação. Para abordar este problema, nós estudamos um funcional semilinear convexo e K -contínuo definido por Gillespie em [25], que chamamos de Indicador de um espaço de Köthe (ver Capítulo 6). Este foi definido por

$$\Phi_X(f) = \sup_{x \in B_X} \int_S f \log |x| d\mu,$$

onde X é um espaço de Köthe e f está em um semi-ideal $\mathcal{T}_X$ de $L_1^+ = \{f \in L_1 : f \geq 0 \text{ q.s.}\}$. Este funcional está associado a um único espaço de Köthe, i.e., se $\Phi_X = \Phi_Y$, então $X = Y$.

Também provaremos algumas propriedades deste funcional, por exemplo:

- Se $[X_0, X_1]_\theta = X_\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$, então

$$\Phi_{X_\theta} = (1 - \theta)\Phi_{X_0} + \theta\Phi_{X_1},$$

- para todo funcional semilinear Φ convexo em um semi-ideal de L_1 , tal que $\Phi_{L_1} - \Phi$ seja convexo, existe um espaço de Köthe X tal que $\Phi = \Phi_X$.

A importância que desempenha o Indicador de um espaço de Köthe na teoria de extrapolação é que permite reduzir um problema de extrapolação a “solucionar uma equação”. Por exemplo, para demonstrar o resultado de Pisier

Teorema 1.1 (Pisier 1979) [16, pag.498] *Se X é um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{q}$, $0 < \theta < 1$ existe um espaço de Köthe Y tal que*

$$X = L_2^\theta Y^{1-\theta},$$

basta encontrar um funcional semilinear convexo Φ , com $\Phi_{L_1} - \Phi$ convexo, tal que

$$\Phi_X = \frac{\theta}{2} \Phi_{L_1} + (1 - \theta)\Phi.$$

Finalmente, no Capítulo 8, além do teorema acima, apresentamos um resultado de extrapolação provado pelo Kalton em 1992.

Capítulo 2

Resultados preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns resultados omitindo suas provas, as quais podem ser encontradas nas referências citadas, pois o objetivo deste capítulo de nosso trabalho é fixar notações e terminologias.

2.1 Teoria da medida

Os resultados apresentados nesta seção podem ser consultados em qualquer livro de teoria da medida, ver por exemplo [5] e [28].

2.1.1 Integração

Definição 2.1 (σ -álgebra) *Seja S um conjunto. Uma coleção Ω de subconjuntos de S , é uma σ -álgebra sobre S se*

- $S \in \Omega$,
- Se $A \in \Omega$, então $A^c \in \Omega$,
- Se $A_1, A_2, \dots \in \Omega$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$.

A dupla (S, Ω) é chamada de espaço mensurável. Todo subconjunto de S que pertence a Ω é dito mensurável.

A proposição seguinte dá um jeito de construção de σ -álgebra.

Proposição 2.2 *Seja S um conjunto e $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos de S . Então existe a menor σ -álgebra sobre S que contém $\mathcal{F}$. Esta σ -álgebra é chamada de σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}$.*

2.1 Teoria da medida

A Proposição 2.2 nos conduz a definir dois tipos de σ -álgebra geradas:

Definição 2.3 (σ -álgebra gerada em forma enumerável) *Seja Ω uma σ -álgebra gerada por uma coleção enumerável de conjuntos $\mathcal{F}$. Dizemos que Ω é gerada em forma enumerável.*

Definição 2.4 (σ -álgebra de Borel) *Seja S um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de S é chamada de σ -álgebra de Borel.*

Definição 2.5 (Função mensurável) *Sejam (S, Ω) e (T, Ω_0) espaços mensuráveis. A função $f : (S, \Omega) \rightarrow (T, \Omega_0)$ é dita mensurável, se $f^{-1}(A) \in \Omega$ para todo $A \in \Omega_0$. Um caso particular desta definição é quando Ω_0 é um σ -álgebra de Borel. Neste caso $f : (S, \Omega) \rightarrow (T, \Omega_0)$ é dita Borel mensurável.*

Quando $T = \mathbb{C}$ na Definição 2.5 temos que:

Proposição 2.6 *Se $f, g : (S, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda f, |f|, f + g, fg, \max(|f|, |g|)$ e $\frac{f}{g}$ (sempre que o quociente esteja bem definido) são funções Borel mensuráveis.*

Definição 2.7 (σ -álgebra gerada por funções) *Seja $\{(S_i, \Omega_i)\}_{i \in I}$ uma classe indexada de espaços mensuráveis e seja $f_i : (S, \Omega) \rightarrow (S_i, \Omega_i)$ uma coleção de funções mensuráveis. A σ -álgebra gerada pelo conjunto*

$$\{f_i^{-1}(B) : i \in I, B \in \Omega_i\},$$

é chamada de σ -álgebra gerada pelas funções $(f_i)_{i \in I}$.

Definição 2.8 (Função medida) *Seja S um conjunto e Ω uma σ -álgebra sobre S . Uma função medida em S ou simplesmente uma medida em S , é uma função $\mu : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para qualquer coleção enumerável de conjuntos de S disjuntos dois a dois,

A tripla (S, Ω, μ) é chamada de espaço de medida.

Definição 2.9 *Seja (S, Ω, μ) um espaço de medida. A medida μ é dita σ -finita se existe uma sequência $A_1, A_2, \dots \in \Omega$ com $\mu(A_i) < \infty$ e $A_i \subseteq A_{i+1}$ tal que $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.*

2.1 Teoria da medida

Definição 2.10 (Função simples) *Seja (S, Ω) um espaço mensurável e μ uma medida sobre (S, Ω) . Uma função $f : (S, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada simples não negativa em S se existem conjuntos disjuntos dois a dois $A_i \in \Omega$ com $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$ e números reais $a_i \geq 0$, para $i = 0, \dots, n$ tais que*

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i},$$

onde 1_{A_i} é a função característica do conjunto A_i . Definimos a integral em S de uma função simples não negativa f em relação a μ como

$$\int_S f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Na definição acima pode ser provado que a integral não depende dos A_i e a_i .

Definição 2.11 *Vamos definir a integral de uma função $f : (S, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável.*

- *Primeiro consideremos o caso $f : (S, \Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ mensurável. Definimos a integral de f em S como*

$$\int_S f d\mu = \sup \left\{ \int_S g d\mu : g \text{ simples não negativa e } g \leq f \right\}.$$

- *Consideremos o caso $f : (S, \Omega) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ mensurável. Seja $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$. Então definimos a integral de f em S como*

$$\int_S f d\mu = \int_S f^+ d\mu - \int_S f^- d\mu.$$

- *Seja $f : (S, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Note que $f = f_1 + if_2$. Dizemos que f é integrável em S , se f_1, f_2 são integráveis em S . Definimos*

$$\int_S f d\mu = \int_S f_1 d\mu + i \int_S f_2 d\mu.$$

- *Seja $A \in \Omega$. Dizemos que $f : (S, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável em A , se $f \cdot 1_A$ é integrável em S . Sua integral está dada por*

$$\int_A f d\mu = \int_S f \cdot 1_A d\mu.$$

2.1 Teoria da medida

Definição 2.12 (Espaço L_p) Seja (S, Ω, μ) um espaço mensurável. Para $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço normado

$$L_p(S, \mu) = \left\{ f : S \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} : \int_S |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

com norma $\|f\|_{L_p} = \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

O espaço $L_p(S, \mu)$ é um espaço de Banach. Também denotamos $L_p(S, \mu)$ simplesmente por $L_p(\mu)$ ou L_p .

2.1.2 Tipos de convergências

Vamos definir alguns tipos de convergência de funções que aparecem no trabalho.

Definição 2.13 (Convergências de funções) Seja (S, Ω, μ) um espaço de medida e $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções mensuráveis.

- *Convergência quase-sempre.* Diz-se que a sequência de funções $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ converge quase-sempre em S (converge q.s.) para uma função mensurável $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, se existe um conjunto mensurável A satisfazendo $\mu(A) = 0$, tal que $(f_n)_n$ converge pontualmente para f em $S \setminus A$.

Denotamos esta convergência por $f_n \rightarrow f$ q.s. ou $f_n \xrightarrow{q.s.} f$

- *Convergência em medida.* Diz-se que a sequência de funções $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ converge em medida para uma função mensurável $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo A mensurável, com $\mu(A) < \infty$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\{s \in A : |f(s) - f_n(s)| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$

Proposição 2.14 [5, pág. 173, 180] Seja $f_n : (S, \Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{C}$ uma sequência de funções em um espaço de medida.

- Se μ é uma medida σ -finita e $(f_n)_n$ converge em medida para uma função f , então existe uma subsequência de $(f_n)_n$ que converge q.s. para f .
- Se $(f_n)_n$ converge q.s. para uma função f , então $(f_n)_n$ converge em medida para f .

Definição 2.15 (Espaço L_0) Seja (S, Ω, μ) um espaço mensurável. Definimos o espaço vetorial

$$L_0(S, d\mu) = \{f : S \rightarrow \mathbb{C} \text{ função} : f \text{ é mensurável}\}$$

munido da topologia da convergência em medida.

2.1 Teoria da medida

Também denotamos $L_0(S, d\mu)$ simplesmente por $L_0(\mu)$ ou L_0 .

Proposição 2.16 [5, pág. 178] *Seja (S, Ω, μ) um espaço mensurável. Se $1 \leq p < \infty$, então $L_p(S, \mu)$ é mergulhado em $L_0(S, \mu)$.*

Teorema 2.17 [28, pág. 67] *Seja $(f_n)_n$ uma sequência em L_p tal que $\|f_n - f\|_{L_p} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Então existe uma subsequência de $(f_n)_n$ que converge q.s. para f .*

Teorema 2.18 [4, pág. 102] *O espaço $L_p(S, \Omega, \mu)$ é separável, se μ é uma medida σ -finita e Ω é gerada em forma enumerável.*

2.1.3 Integral de Bochner

Nesta subseção nós apresentamos alguns resultado da teoria de integração em espaços normados que podem ser encontrados na referência [7].

Definição 2.19 (Função simples) *Sejam (S, Ω, μ) um espaço de medida e X um espaço normado. Uma função $f : S \rightarrow X$ é chamada de simples, se existem $x_1, \dots, x_n \in X$ e $S_1, \dots, S_n \in \Omega$ tais que $f = \sum_{k=1}^n x_k \cdot 1_{S_k}$. A integral de uma função simples em S é definida por*

$$\int_S f d\mu = \sum_{k=1}^n x_k \mu(S_k).$$

Definição 2.20 (Função fortemente mensurável) *Uma função $f : S \rightarrow X$ é fortemente mensurável ou μ -mensurável, se existe uma sequência de funções simples f_n tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s) - f_n(s)\|_X = 0 \text{ q.s.}$$

Definição 2.21 (Função fracamente mensurável) *Uma função $f : S \rightarrow X$ é fracamente mensurável ou fraca μ -mensurável, se para todo $\varphi \in X'$ a função $\varphi \circ f$ é fortemente mensurável.*

Definição 2.22 (Função essencialmente separável) *Uma função $f : S \rightarrow X$ é essencialmente separável, se existe $A \subset S$, com $\mu(A) = 0$ e tal que $f(S \setminus A)$ é um subconjunto separável (em norma) de X .*

Teorema 2.23 (Teorema de Pettis) [7, pág. 42] *Uma função $f : S \rightarrow X$ é fortemente mensurável se, e somente se, f é fracamente mensurável e essencialmente separável.*

Observação 2.24 *Quando X é um espaço separável, a definição de fracamente mensurável e fortemente mensurável são equivalentes.*

2.2 Funções diferenciáveis

Definição 2.25 (Função Bochner integrável) Uma função $f : S \longrightarrow X$ é chamada de Bochner integrável em S , se existe uma sequência de funções simples $(f_n)_n$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X d\mu = 0.$$

A integral de Bochner de f em S é definida por

$$\int_S f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu.$$

A integral de Bochner de f em S não depende da escolha da sequência de funções simples $(f_n)_n$.

Teorema 2.26 Seja $f : S \longrightarrow X$ uma função fortemente mensurável. A função f é Bochner integrável em S se, e somente se,

$$\int_S \|f(s)\|_X d\mu < \infty.$$

2.2 Funções diferenciáveis

2.2.1 Funções analíticas

Para o estudo desta seção pode-se ver [15].

Definição 2.27 (Função holomorfa) Seja X um quase-espço de Banach e $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto. Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow X$ é holomorfa em $z_0 \in U$, se existe uma sequência $(a_n)_n$ de X e U_0 subconjunto aberto de U tais que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in U_0$.

Proposição 2.28 Seja X um quase-espço de Banach, $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $f_n : U \longrightarrow X$ uma sequência de funções holomorfas. Se f_n converge uniformemente em todo subconjunto compacto de U para uma função f , então f é holomorfa em U .

Proposição 2.29 Seja $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é aberto e conexo. Se f é zero em uma sequência de pontos distintos de U que tem ponto limite em U , então f é zero em U .

Teorema 2.30 (Teorema da aplicação de Riemann) [23, pág. 306] Seja A um subconjunto próprio de $\mathbb{C}$ simplesmente conexo e $\mathbb{D}$ o disco unitário. Se $z_0 \in A$, então existe uma única aplicação conforme $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi'(z_0) > 0$.

2.3 Espaços de Banach reticulados

2.2.2 Funções de Lipschitz

Definição 2.31 (Função de Lipschitz) *Sejam X e Y espaços de Banach. A função $f : X \rightarrow Y$ é uma função de Lipschitz, se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|f(x_0) - f(x_1)\|_Y \leq K\|x_0 - x_1\|_X$$

para todo $x_0, x_1 \in X$.

Teorema 2.32 [27, pág. 19] *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Então toda função de Lipschitz $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ é quase-sempre diferenciável.*

2.3 Espaços de Banach reticulados

Para o estudo desta seção, ver a referência [11, cap. 1].

Definição 2.33 (Espaços de Banach reticulados) *Um espaço de Banach X sobre $\mathbb{R}$, com uma ordem parcial $\leq$, é chamado de espaço de Banach reticulado, se*

- $x \leq y$, implica que $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in X$,
- $a \cdot x \geq 0$, para todo $x \geq 0$ e todo real $a \geq 0$,
- para todo $x, y \in X$, existem o supremo e o infimo de $\{x, y\}$, que denotamos respectivamente por $x \vee y$ e $x \wedge y$,
- se $|x| \leq |y|$, então $\|x\|_X \leq \|y\|_X$, onde $|x| = x \vee (-x)$.

Denotamos por $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$.

Definição 2.34 (Elementos disjuntos) *Seja X um espaço de Banach reticulado. Os elementos $x, y \in X$ são disjuntos, se $|x| \wedge |y| = 0$.*

Definição 2.35 (Cone) *Seja X um espaço de Banach reticulado. Um Cone de X é um subconjunto C de X tal que para todo $x, y \in C$ e $\lambda \geq 0$ temos que $\lambda \cdot x \in C$ e $x + y \in C$.*

Definição 2.36 (Cone $L_1^+(\mu)$) *Definimos um cone de $L_1(\mu)$ por*

$$L_1^+(\mu) = \{f \in L_1(\mu) : f \geq 0 \text{ q.s.}\}.$$

Simplemente denotamos $L_1^+(\mu)$ por L_1^+ .

2.3 Espaços de Banach reticulados

Definição 2.37 (Espaço de Banach de função) *Seja (S, μ) um espaço de medida. Um espaço de Banach cujos elementos são funções μ -mensuráveis de valores reais ou complexos, e tal que*

$$|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_X \leq \|g\|_X,$$

é chamado de espaço de Banach de funções.

Observe que um espaço de Banach de funções é um espaço de Banach reticulado.

Definição 2.38 (Espaços p -convexos e q -côncavos) *Seja X um espaço de Banach de funções com valores em $\mathbb{C}$ e $1 \leq p < \infty$. O espaço X é dito p -convexo se*

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \right\|_X \leq C_0 \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma constante $C_0 > 0$.

O espaço X é dito q -côncavo, com $1 \leq q < \infty$, se

$$C_1 \left\| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|_X \geq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{1/q}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e alguma constante $C_1 > 0$.

Neste trabalho, vamos assumir que $C_0 = C_1 = 1$.

Proposição 2.39 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se X é um espaço p -convexo (respectivamente q -côncavo), então o espaço dual X' é um espaço q -côncavo (respectivamente p -convexo).*

Proposição 2.40 *Seja X e Y espaços de Banach de funções e assumamos que Y é isomorfo (em sentido topológico) a um subespaço de X . Então*

- *Se X é p -convexo e q -côncavo para algum $1 < p \leq 2$ e $q < \infty$, então Y é p -convexo.*
- *Se X é q -côncavo para algum $q \geq 2$, então Y é q -côncavo.*

2.3.1 p -potências de espaços de funções

As definições e a prova dos resultados desta seção podem ser consultados em [24, Pág. 55].

Definição 2.41 *Dado $0 < p < \infty$ e X um espaço de Banach de função, definimos a p -potências de X por*

$$X^{(p)} = \{ x \text{ mensurável: } |x|^{1/p} \in X \}.$$

2.3 Espaços de Banach reticulados

Observação 2.42 *O conjunto $X^{(p)}$ é um espaço vetorial.*

Proposição 2.43 *Seja X um espaço de Banach de funções. Definimos uma função em $X^{(p)}$ por*

$$\|x\|_{X^{(p)}} = \left\| |x|^{1/p} \right\|_X^p.$$

Se $0 < p \leq 1$, então $(X^{(p)}, \|\cdot\|_{X^{(p)}})$ é um espaço de Banach funções.

2.3.2 Normas de ordem contínua

Para consultar a prova dos resultados ver a referência [20, pág. 86]

Definição 2.44 *Seja X um espaços de Banach reticulado. A norma $\|\cdot\|_X$ é chamada de norma de ordem contínua, se para toda rede decrescente $(x_\alpha)_\alpha$ tal que $\inf\{x_\alpha\} = 0$, temos que $\inf \|x_\alpha\|_X = 0$.*

Proposição 2.45 *Seja X um espaços de Banach reticulado. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. $\|\cdot\|_X$ é uma norma de ordem contínua.
2. Toda sequência monótona limitada é convergente.
3. Toda sequência disjunta limitada de X^+ converge em norma para zero.

Exemplo 2.46 *O espaço $L_p(\mu)$ munido da norma usual, onde $1 \leq p < \infty$, tem norma de ordem contínua.*

2.3.3 Espaço de Banach de sequências (E.B.S)

As definições desta seção podem ser encontradas [29, pág. 1161].

Um *espaço de Banach de sequências (E.B.S)* X , é um espaço de sequências normado e completo tal que

- Os vetores da base canônica e_n pertencem a X .
- Se $|y_n| \leq |x_n|$, onde $x \in X$, então $y \in X$ e $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, o funcional $x \mapsto x_n$ é contínuo.

2.4 Espaços quase-normados

- A bola unitária B_X é fechada na topologia da convergência pontual.

Definimos o espaço dual de Köthe ou dual de Köthe de um E.B.S, que denotamos por X^* , como

$$X^* = \left\{ x^* : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n^*| < \infty, \text{ para todo } x \in B_X \right\}$$

munido da norma

$$\|x\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n^*|.$$

2.4 Espaços quase-normados

Definição 2.47 *Seja X um espaço vetorial. Uma função $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$ é chamada quase-norma em X , se verifica:*

- se $\|x\|_X = 0$, então $x = 0$,
- $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$ para todo λ escalar e $x \in X$,
- existe um $C > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, temos

$$\|x + y\|_X \leq C \cdot (\|x\|_X + \|y\|_X).$$

O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado de espaço quase-normado. A menor constante que verifica a desigualdade acima é chamada módulo de concavidade da quase-norma.

Definição 2.48 (Quase-normas equivalentes) *Seja X um espaço quase-normado e $\|\cdot\|, |||\cdot|||$ duas quase-normas em X . Dizemos que $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ são quase-normas equivalentes se existem constantes positivas M e m tais que*

$$m \cdot \|x\| \leq |||x||| \leq M \cdot \|x\|$$

para todo $x \in X$.

Sejam $r > 0$ e $x_0 \in X$. Os conjuntos da forma $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$ induzem uma topologia em X , que chamamos de topologia induzida por $\|\cdot\|_X$. Note que uma quase-norma nem sempre é uma métrica (pode não verifica a desigualdade triangular). Então para definir uma noção de completude em um espaço quase-normado, precisamos de uma métrica que induza a mesma topologia que induz $\|\cdot\|_X$. O seguinte teorema soluciona este problema:

2.4 Espaços quase-normados

Teorema 2.49 (Teorema de Aoki-Rolewicz) [2] *Se X é um espaço quase-normado cuja quase-norma satisfaz*

$$\|x + y\|_X \leq C \cdot (\|x\|_X + \|y\|_X)$$

para algum $C > 1$ e para todo $x, y \in X$, então $\|\cdot\|$ dada por

$$|||x||| = \inf \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^p \right)^{1/p} : x = \sum_{k=1}^n x_k \right\}$$

para todo $x \in X$, é uma quase-norma em X que verifica

$$|||x||| \leq \|x\|_X \leq 2C \cdot |||x||| \text{ para todo } x \in X$$

e

$$|||x + y|||^p \leq |||x|||^p + |||y|||^p$$

para todo $x, y \in X$, onde p é o número tal que $C = 2^{1/p-1}$.

Observação 2.50 *O Teorema de Aoki-Rolewicz garante que a função d definida por*

$$d(x, y) = |||x - y|||^p \text{ para todo } x, y \in X,$$

define uma métrica em X que induz a mesma topologia que $\|\cdot\|_X$.

Este fato motiva a seguinte definição :

Definição 2.51 (Espaço quase-Banach) *Seja X um espaço quase-normado. Dizemos que X é um espaço quase-Banach, se (X, d) é um espaço métrico completo, onde*

$$d(x, y) = |||x - y|||^p \text{ para todo } x, y \in X$$

e $|||\cdot|||$, p são dados pelo Teorema de Aoki-Rolewicz.

Definição 2.52 (Operador linear limitado) *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços quase-normados. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$ é chamado limitado, se*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y < \infty.$$

Definição 2.53 (Isomorfismo entre espaços quase-normados) *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços quase-normados. Um operador linear limitado bijetor $T : X \rightarrow Y$ é chamado isomorfismo de X em Y , se T^{-1} é um operador linear limitado. Dizemos que dois espaços quase-normados X e Y são isomorfos, se existe um isomorfismo de X em Y .*

Outras definições, como espaço quociente de espaços quase-normados são definidas de maneira análoga ao caso de espaços normados. Resultados como os teoremas da aplicação aberta e do grafo fechado também são válidos para espaços quase-Banach (Ver [28, Pág. 43-54]).

2.5 Outros resultados

Proposição 2.54 (Existência de função de escolha homogênea limitada) *Seja $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear sobrejetor entre espaços quase-Banach complexos. Então existe uma função $\phi : Y \longrightarrow X$ e uma constante $C > 0$ tal que:*

1. $\|\phi(y)\|_X \leq C \|y\|_Y$ para todo $y \in Y$,
2. $T(\phi(y)) = y$ para todo $y \in Y$,
3. $\phi(\lambda \cdot y) = \lambda \cdot \phi(y)$ para todo $y \in Y$ e λ complexo.

Demonstração. Dado que T é sobrejetora, pelo teorema da aplicação aberta temos que existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}B_Y \subseteq T(B_X)$. Vamos definir inicialmente uma função ϕ em $S_Y = \{y \in Y : \|y\|_Y = 1\}$. Considere sobre S_Y a relação de equivalência $y_1 \sim y_2$ se, e somente se, existe λ complexo com $|\lambda| = 1$ tal que $y_2 = \lambda y_1$. Escrevemos como $\bar{y}$ a classe de equivalência do elemento y . O axioma da escolha garante a existência de um conjunto $J = \cup_{\alpha \in I} \{y_\alpha\}$ que contém um único elemento de cada classe de equivalência. Seja $A_\alpha = \{x \in B_X : y_\alpha = T(Cx_\alpha)\}$. Note que $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma coleção de conjuntos não vazios disjuntos dois a dois, portanto, pelo axioma da escolha, existe um conjunto $A = \cup_{\alpha \in I} \{x_\alpha\}$ que contém um único elemento de A_α , isto é, $A \cap A_\alpha = \{x_\alpha\}$. Para cada $y_\alpha \in J$, definamos $\phi(y_\alpha) = Cx_\alpha$. Deste modo $\|\phi(y_\alpha)\|_X \leq C$ para todo $\alpha \in I$. Agora dado $y \in S_Y$, definamos $\phi(y) = y_\alpha$ se $y \in \bar{y}_\alpha$. Também, para cada λ escalar e $y \in S_Y$ definamos $\phi(\lambda y) = \lambda \phi(y)$. Logo, para $y \in Y$ não nulo, seja

$$\phi(y) = \|y\|_Y \phi\left(\frac{y}{\|y\|_Y}\right).$$

É imediato ver que ϕ satisfaz as condições 1, 2 e 3. □

2.5 Outros resultados

Teorema 2.55 (Desigualdade de Jensen) [28, pág. 61] *Seja (S, Ω, μ) um espaço de medida tal que $\mu(S) < \infty$. Seja $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, onde I é um intervalo. Se $g : S \rightarrow I$ é uma função integrável, então*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(S)} \cdot \int_S g \, d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(S)} \cdot \int_S (\varphi \circ g) \, d\mu.$$

O próximo corolário é uma consequência da desigualdade de Jensen

Corolário 2.56 (Versão da desigualdade de Jensen para funções de densidades) *Seja (S, Ω, μ) onde S é um subconjunto da reta real. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = 1.$$

2.5 Outros resultados

Seja g uma função de valor real mensurável e $\varphi : \text{Im}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então

$$\varphi \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t) dt \right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi \circ g)(t)f(t) dt.$$

Teorema 2.57 (Teorema de Komlós) [10] *Seja μ uma medida σ -finita. Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $L_1(\mu)$ limitada, então existe uma subsequência $(g_n)_n$ de $(f_n)_n$ e uma função $g \in L_1(\mu)$ tal que toda subsequência $(h_n)_n$ de $(g_n)_n$ é Cesàro-convergente para g , isto é,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h_k \xrightarrow{q.s.} g.$$

Teorema 2.58 (Teorema de Convergência Monótona) [28, pág. 21] *Seja $(f_n)_n$ uma sequência crescente de funções em $L_1(S, \mu)$ tal que*

$$\sup_n \int f_n d\mu < \infty.$$

Se $(f_n)_n$ converge q.s. em S para uma função f , então $f \in L_1(S, \mu)$ e $\|f_n - f\|_{L_1} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.59 (Teorema de Convergência Dominada) [28, pág. 26] *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis em S de valores complexos tais que $f_n \rightarrow f$ q.s. Se existe uma função $g \in L_1(\mu)$ tal que $|f_n(s)| \leq g_n(s)$ para todo $s \in S$, então $f \in L_1(\mu)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_1} = 0,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Teorema 2.60 (Desigualdade de Hölder) [28, pág. 62] *Se $f \in L_p$ e $g \in L_q$ com $1/p + 1/q = 1$, então $fg \in L_1$ e*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}.$$

Teorema 2.61 (Teorema de Egorov) [4, pág. 81] *Seja (S, μ) um espaço de medida e E um conjunto tal que $\mu(E) < \infty$. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n \rightarrow f$ q.s. em E , onde f é uma função mensurável. Então para $\varepsilon > 0$, existe um conjunto mensurável $A \subseteq E$ tal que $\mu(E \setminus A) < \varepsilon$ e $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em A .*

2.5 Outros resultados

Usando o teorema acima demostramos o seguinte resultado:

Corolário 2.62 *Seja (S, μ) um espaço de medida, onde μ é σ -finita. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n \rightarrow f$ q.s. em S , onde f é uma função mensurável. Então, existe uma sequência de conjuntos $(A_n)_n$ mensuráveis, tais que, $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\mu(S \setminus \cup_n A_n) = 0$ e $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em cada A_n .*

Teorema 2.63 [5, pág. 180] *Seja μ uma medida σ -finita. Então a bola unitária $B_{L_1(\mu)} \subseteq L_0(\mu)$ é fechada na topologia da convergência em medida.*

Teorema 2.64 (Teorema de Hahn-Banach para funcionais contínuos) [12, pág. 40] *Seja X um espaço normado real (ou complexo) e Y um subespaço normado de X . Se φ é um funcional linear contínuo em Y , então existe um funcional linear contínuo $\bar{\varphi}$ em X , tal que $\bar{\varphi}(y) = \varphi(y)$ para todo $y \in Y$ e $\|\bar{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Teorema 2.65 (Teorema de Hahn-Banach geométrico) [12, pág. 43] *Seja X um espaço de Banach real. Sejam A, B subconjuntos convexos e disjuntos de X . Se A é aberto, então existe um funcional linear contínuo $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(b) < \varphi(a) \text{ para todo } a \in A \text{ e todo } b \in B.$$

Teorema 2.66 (Teorema de Separação) [12, pág. 43] *Seja X um espaço normado real ou complexo e $C \subset X$ fechado convexo. Se $x_0 \notin C$, então existe $\varphi \in X'$ tal que*

$$\operatorname{Re}(\varphi(x_0)) > \sup_{x \in C} \operatorname{Re}(\varphi(x)).$$

Teorema 2.67 [7, pág. 59] *Seja μ é uma medida σ -finita e $\varphi \in (L_1(\mu))'$. Então existe $u \in L_\infty(\mu)$ único tal que*

$$\varphi(f) = \int u f d\mu.$$

Proposição 2.68 [6, pág. 97] *Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear sobrejetora entre espaços vetoriais. Então existe uma aplicação linear $S : Y \rightarrow X$ tal que $TS = \operatorname{id}_Y$.*

Proposição 2.69 [9, pág. 3] *Sejam Y, X, Z, R, W e S espaços quase-Banach. Suponha que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i_1} & X & \xrightarrow{j_1} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i_2} & W & \xrightarrow{j_2} & S \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde i_k é injetor e j_k é sobrejetor com $\operatorname{Im}(i_k) = \ker(j_k)$ para $k = 1, 2$. Se α, β são isomorfismos topológicos, então γ é um isomorfismo topológico.

2.5 Outros resultados

Teorema 2.70 [21] *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $T(X)$ é fechado.
2. $X/\ker(T)$ é isomorfo a $T(X)$.
3. Existe uma constante C tal que para todo $x \in X$, existe $y \in X$ com $T(x) = T(y)$ e $\|y\|_X \leq C \|T(x)\|_Y$.

Teorema 2.71 (Banach-Dieudonné) [12, pág. 125] *Seja X um espaço de Banach e K um subconjunto convexo em X' . Se $K \cap nB_X$ é w^* -fechado para todo $n \in \mathbb{N}$, então K é w^* -fechado.*

Teorema 2.72 [12, pág. 70] *Seja X um espaço de Banach real. Se K é um subconjunto convexo w^* -fechado de X' e $\varphi \in X' \setminus K$, então existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) > \sup_{\Psi \in K} \Psi(x_0)$.*

Definição 2.73 (Funcional de Minkowski) [28, pág. 24] *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Seja K um subconjunto de X . O funcional de Minkowski do conjunto K , $\rho_K : X \mapsto [0, \infty]$, é definido por*

$$\rho_K(x) = \begin{cases} \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in K \}, & \text{se } \alpha^{-1}x \in K, \text{ para algum } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha^{-1}x \notin K, \text{ para todo } \alpha > 0. \end{cases}$$

Definição 2.74 [28, pág. 6,24-25] *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Seja K um subconjunto de X .*

- K é chamado de *balanceado*, se para todo $|\lambda| \leq 1$ e $x \in K$, temos que $\lambda x \in K$
- K é chamado de *absorvente*, se para $x \in X$, existe $\lambda > 0$ escalar tal que $\lambda^{-1}x \in K$.

Proposição 2.75 (Propriedades do funcional de Minkowski) [28, pág. 25] *Seja ρ_K o funcional de Minkowski e suponha que K é absorvente e convexo. Então*

- $\rho_K(\lambda x) = \lambda \rho_K(x)$ para todo $\lambda \geq 0$ escalar e $x \in X$,
- $\rho_K(x + y) \leq \rho_K(x) + \rho_K(y)$, para todo $x, y \in X$,
- ρ_K é uma seminorma, se K é balanceado.

2.5 Outros resultados

Lema 2.76 [18, pág. 256] Suponha $\varepsilon > 0$ e

$$B_\varepsilon = \log \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^{1+\varepsilon} \right).$$

Se $\xi_1 \geq \xi_2, \dots \geq \xi_n \geq 0$ e $\sum_{k=1}^n \xi_k = 1$, então

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \log k \leq \sum_{k=1}^n \xi_k \log \frac{1}{\xi_k} \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^n \xi_k \log k + B_\varepsilon.$$

Proposição 2.77 [3] Se $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ são seqüências de números positivos tais que $a_n = b_n c_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \right) = b$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} (c_1 + c_2 + \dots + c_n) \right) = c,$$

então $a \leq bc$.

Definição 2.78 (Subespaço normante) Seja X' o espaço dual usual de X . Um subespaço normado Y de X' , é chamado de subespaço normante de X' se

$$\|x\|_X = \sup_{x' \in B_Y} |x'(x)|.$$

Definição 2.79 (Predual) [26] Seja Y um espaço de Banach. Um espaço de Banach Y_* é um predual para Y , se o dual Y'_* é isométrico a Y .

Teorema 2.80 (Extensão uniformemente contínua de funções) [14, pág. 176] Seja M um subespaço métrico de algum espaço métrico X e Y um espaço métrico completo.

Se $f : M \rightarrow Y$ é uma função uniformemente contínua, então existe uma única extensão $\bar{f} : \overline{M} \rightarrow Y$ uniformemente contínua. A extensão está definida por

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

onde $(x_n)_n$ é qualquer seqüência de M que converge para x .

Teorema 2.81 (Teorema da interseção de Cantor) [22, pág. 134] Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se, para qualquer seqüência $(C_n)_n$ de subconjuntos não vazio fechado, limitados e convexos de X tais que $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$

Teorema 2.82 [22, pág. 245] Um espaço normado X é reflexivo se, e somente se, a bola unitária B_X é fracamente compacta.

Capítulo 3

Somas torcidas

Começamos este capítulo dando as definições de soma torcida e sequência exata curta. Vamos apresentar o método de construção de somas torcidas de Kalton e Peck por meio de funções quase-lineares.

Definição 3.1 (Soma torcida e extensão) *Seja Y e Z espaços de Banach. Uma soma torcida de Y e Z é um quase-espaço normado X que contém um espaço Y' isomorfo a Y tal que X/Y' é isomorfo a Z . Se X é um espaço de Banach, dizemos que X é uma extensão de Y por Z . Quando $Y = Z$ e X é um espaço de Banach, dizemos que X é uma auto-extensão de Y .*

Definição 3.2 (Sequência exata curta) *Sejam Y, Z espaços de Banach e X um quase-espaço de Banach. Um diagrama*

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

onde

- i é linear, contínua e injetora,
- $i(Y) = \ker(j)$,
- j é linear, contínua e sobrejetora

é chamado de sequência exata curta.

A seguinte proposição mostra que uma soma torcida induz uma sequência exata curta.

Proposição 3.3 *Seja Y e Z espaços de Banach. O espaço quase-normado X é uma soma torcida de Y e Z se, e somente se, existem funções i e j como na Definição 3.2 tais que*

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$$

seja uma sequência exata curta.

Demonstração. Seja X uma soma torcida de Y e Z . Seja Y' um subespaço de X tal que existem $T : Y' \rightarrow Y$ e $S : X/Y' \rightarrow Z$ isomorfismos lineares. Se $\pi : X \rightarrow X/Y'$ é a aplicação quociente, então

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i=T} X \xrightarrow{j=S \circ \pi} Z \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

Agora suponha que $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$ seja uma sequência exata curta. Além disso, $j(X)$ é um subespaço fechado de Z . O Teorema da Aplicação Aberta implica que Y é isomorfo a $i(Y)$ e $X/i(Y)$ (lembre-se que $\ker(j) = i(Y)$) é isomorfo a Z . Pondo $Y' = i(Y)$, obtemos que Y é isomorfo Y' e X/Y' é isomorfo a Z , assim X é soma torcida de Y e Z . $\square$

Proposição 3.4 *Uma soma torcida é um espaço quase-Banach.*

Demonstração. Sejam Y, Z espaços de Banach e X uma soma torcida de Y e Z . Seja

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i=T} X \xrightarrow{j=S \circ \pi} Z \rightarrow 0$$

a sequência exata curta definida como na Proposição 3.3. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em (X, d) , onde $d(x, y) = |||x - y|||^p$ é a métrica definida em Definição 2.51. Vejamos que $(x_n)_n$ converge em (X, d) . De fato, o Teorema 2.49 garante que $||| \cdot |||$ e $\| \cdot \|_X$ são quase-normas equivalentes, portanto, $\| \cdot \|_X$ verifica que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon,$$

se $n, m \geq N$. Este fato implica que $j(x_n)$ é uma sequência de Cauchy em Z , portanto convergente em Z , sem perda de generalidade assumamos que converge para 0. Note que $j(x_n) = S(x_n + i(Y))$. Por S ser um isomorfismo, temos que a sequência $(x_n + i(Y))_n$ converge (na quase-norma de $X/i(Y)$) para $i(Y)$, portanto, encontramos uma subsequência de $(x_n)_n$, que denotamos por $(x_{k_n})_n$, tal que $\|x_{k_n} - i(y_n)\|_X \leq \frac{1}{n^{1/p}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $d(x_{k_n}, i(y_n)) \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Teorema de Aoki-Rolewicz). Afirmamos que $i(y_n)$ é uma sequência de Cauchy em (X, d) . De fato,

$$\begin{aligned} d(i(y_n), i(y_m)) &\leq d(i(y_n), x_{k_n}) + d(i(y_m), x_{k_m}) + d(x_{k_n}, x_{k_m}) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d(x_{k_n}, x_{k_m}), \end{aligned}$$

isto mostra que $i(y_n)$ é uma sequência de Cauchy em (X, d) . Agora como $i : Y \rightarrow i(Y)$ é um isomorfismo entre espaços quase-lineares, demonstramos que (y_n) é uma sequência de Cauchy de Y , portanto, converge para algum $y \in Y$. Note que $(i(y_n))_n$ converge para $i(y)$ em (X, d) .

Pelo fato $d(x_{k_n}, i(y_n)) \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, demonstramos que $(x_{k_n})_n$ é uma subsequência de $(x_n)_n$ convergente, portanto, $(x_n)_n$ converge, concluindo assim que (X, d) é um espaço métrico completo. $\square$

Definição 3.5 (Sequências exatas curtas equivalentes) *Seja $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{j'} Z \rightarrow 0$ duas sequências exatas curtas. Dizemos que são equivalentes, se existe um operador linear limitado $T : X \rightarrow X'$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i'} & X' & \xrightarrow{j'} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

Proposição 3.6 *T na Definição 3.5 é um isomorfismo entre espaços quase-normados.*

Demonstração. O resultado é imediato da Proposição 2.69. $\square$

Definição 3.7 (Somas torcidas equivalentes) *Seja Y e Z espaços de Banach e X, X' somas torcidas de Y e Z . Dizemos que X e X' são somas torcidas equivalentes, se existem duas sequências exatas curtas $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{j'} Z \rightarrow 0$ equivalentes.*

Definição 3.8 (Aplicação quase-linear) *Sejam Y, Z espaços de Banach e W um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Dizemos que $F : Z \rightarrow W$ é uma aplicação quase-linear em Y , se Y é subespaço vetorial de W , onde a inclusão de Y em W é contínua e F verifica*

1. $F(\lambda z) = \lambda F(z)$ para todo $z \in Z$ e λ complexo,
2. $F(z_0 + z_1) - F(z_0) - F(z_1) \in Y$ para todo $z_0, z_1 \in Z$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|F(z_0 + z_1) - F(z_0) - F(z_1)\|_Y \leq K(\|z_0\|_Z + \|z_1\|_Z)$$

para todo $z_0, z_1 \in Z$. Quando $W = Y$, dizemos que $F : Z \rightarrow Y$ é quase-linear.

O seguinte teorema dá uma forma de construir somas torcidas usando aplicações quase-lineares.

Teorema 3.9 *Seja $F : Z \rightarrow W$ uma aplicação quase-linear em Y . Seja*

$$Z \oplus_F Y = \{(z, w) \in Z \times W : w - F(z) \in Y\}$$

e definamos para $(z, w) \in Z \oplus_F Y$

$$\|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y} = \|z\|_Z + \|w - F(z)\|_Y.$$

O espaço $(Z \oplus_F Y, \|\cdot\|_{Z \oplus_F Y})$ é uma soma torcida de Y e Z .

Demonstração. Note que $\|\lambda \cdot (z, w)\|_{Z \oplus_F Y} = |\lambda| \cdot \|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y}$ e $\|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y} = 0$ se, e somente se, $(z, w) = (0, 0)$. Agora

$$\begin{aligned}
\|(z, w) + (u, v)\|_{Z \oplus_F Y} &= \|z + u\|_Z + \|w + v - F(z + u)\|_Y \\
&\leq (\|z\|_Z + \|u\|_Y) + \|w - F(z)\|_Y + \|v - F(u)\|_Y \\
&\quad + \|F(z) + F(u) - F(z + u)\|_Y \\
&\leq (\|z\|_Z + \|u\|_Y) + \|w - F(z)\|_Y + \|v - F(u)\|_Y \\
&\quad + K \cdot (\|z\|_Z + \|u\|_Y) \\
&\leq (K + 1) (\|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y} + \|(u, v)\|_{Z \oplus_F Y})
\end{aligned}$$

isto mostra que $Z \oplus_F Y$ é um espaço quase-normado.

Agora definamos o subespaço $Y_0 = \{(0, y) : y \in Y\}$ de $Z \oplus_F Y$. Este subespaço é isométrico a Y , pois $\|(0, y)\|_{Z \oplus_F Y} = \|y\|_Y$. Demonstraremos que $(Z \oplus_F Y)/Y_0$ é isométrico a Z . De fato,

$$\begin{aligned}
\|(z, w) + Y_0\|_{(Z \oplus_F Y)/Y_0} &= \inf \{ \|(z, w) + (0, v)\|_{Z \oplus_F Y} : v \in Y \} \\
&= \inf \{ \|v - F(z)\|_Y + \|z\|_Z : v \in Y \} \\
&= \|z\|_Z.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.10 *A sequência exata curta*

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} Z \oplus_F Y \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$$

onde $i(y) = (0, y)$ e $j(z, w) = z$, é chamada de sequência exata associada a $Z \oplus_F Y$.

Teorema 3.11 *Toda soma torcida X de Y e Z é equivalente a $Z \oplus_F Y$ para $F : Z \rightarrow Y$ quase-linear oportuna.*

Demonstração. Considere a sequência exata curta $0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} Z \rightarrow 0$. Dado que j é sobrejetora, temos que existe uma aplicação linear $\theta : Z \rightarrow X$ tal que $j\theta = id_Z$ (ver Proposição 2.68) e pela Proposição 2.54 temos que existe uma constante $C > 0$ e uma função $\phi : Z \rightarrow X$ que satisfaz

- $\|\phi(z)\|_X \leq C \|z\|_Z$ para todo $z \in Z$,
- $j(\phi(z)) = z$, para todo $z \in Z$,
- $\phi(\lambda z) = \lambda \phi(z)$, para todo $z \in Z$ e λ escalar.

Os fatos $\phi(z) - \theta(z) \in \ker(j) = \text{Im}(i)$ e i injetora, conduzem a definir $F : Z \rightarrow Y$ por $F(z) = i^{-1}(\phi(z) - \theta(z))$. Seja $\|i^{-1}\|$ uma constante tal que $\|i^{-1}(x)\|_Y \leq \|i^{-1}\| \|x\|_X$ para todo $x \in \text{Im}(i)$. Para $z_1, z_2 \in Z$

$$\begin{aligned}
\|F(z_1 + z_2) - F(z_1) - F(z_2)\|_Y &= \|i^{-1}(\phi(z_1 + z_2) - \phi(z_1) - \phi(z_2))\|_Y \\
&\leq \|i^{-1}\| \|\phi(z_1 + z_2) - \phi(z_1) - \phi(z_2)\|_X \\
&\leq \|i^{-1}\| K_1 (\|\phi(z_1 + z_2)\|_X + \|\phi(z_1)\|_X + \|\phi(z_2)\|_X) \\
&\leq \|i^{-1}\| K_1 C (\|z_1 + z_2\|_Z + \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z) \\
&\leq 2\|i^{-1}\| K_1 C (\|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z).
\end{aligned}$$

logo, F é uma aplicação quase-linear, pois, $F(\lambda z) = \lambda F(z)$ para todo λ escalar. Definamos um operador $T : X \rightarrow Z \oplus_F Y$ por

$$T(x) = (j(x), i^{-1}(x - \theta(jx))).$$

Demonstraremos que T é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_{Z \oplus_F Y} &= \|j(x)\|_Z + \|i^{-1}(x - \theta(jx)) - i^{-1}(\phi(jx)) - \theta(jx)\|_Y \\
&= \|j(x)\|_Z + \|i^{-1}(x - \phi(jx))\|_Y \\
&\leq \|j(x)\|_Z + \|i^{-1}\| \|x - \phi(j(x))\|_X \\
&\leq \|j(x)\|_Z + K \|i^{-1}\| (\|x\|_X + \|\phi(j(x))\|_X) \\
&\leq \|j\| \|x\|_X + K \|i^{-1}\| (\|x\|_X + C \|j\| \|x\|_X) \\
&= (\|j\| + K \|i^{-1}\| + C K \|i^{-1}\| \|j\|) \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Provemos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i'} & Z \oplus_F Y & \xrightarrow{j'} & Z \longrightarrow 0
 \end{array}$$

onde $i'(y) = (0, y)$ e $j'(z, y) = z$. De fato,

$$\begin{aligned}
 T(i(y)) &= \left(j(i(y)), i^{-1}(i(y) - \theta(j(iy))) \right), \text{ como } \text{Im}(i) = \ker(j) \text{ temos que} \\
 &= (0, y) \\
 &= i'(y) \text{ para todo } y \in Y
 \end{aligned}$$

e $j'T(x) = j(x)$ para todo $x \in X$. □

Definição 3.12 (Aplicações quase-lineares equivalentes) *Sejam $F, G : Z \longrightarrow W$ aplicações quase-lineares em Y . Dizemos que elas são equivalentes, se existe $M > 0$ e uma aplicação linear $A : Z \longrightarrow Y$ tais que $F(z) - G(z) + A(z) \in Y$ e*

$$\|F(z) - G(z) + A(z)\|_Y \leq M\|z\|_Z$$

para todo $z \in Z$.

Na próxima proposição damos uma condição necessária para que duas aplicações quase-lineares sejam equivalentes.

Proposição 3.13 *Se $F, G : Z \longrightarrow W$ são aplicações quase-lineares em Y equivalentes, então $Z \oplus_F Y$ e $Z \oplus_G Y$ são somas torcidas equivalentes.*

Demonstração. Suponha que F e G são funções quase-lineares em Y equivalentes, i.e., existe $M > 0$ e uma aplicação linear $A : Z \longrightarrow Y$ tal que $F(z) - G(z) + A(z) \in Y$ e $\|F(z) - G(z) + A(z)\|_Y \leq M\|z\|_Z$ para todo $z \in Z$. Note que $w - F(z) \in Y$ se, e somente se, $w + A(z) - G(z) \in Y$. Seja $T : Z \oplus_F Y \longrightarrow Z \oplus_G Y$ definida por $T(z, w) = (z, w + A(z))$

$$\begin{aligned}
 \|T(z, w)\|_{Z \oplus_G Y} &= \|z\|_Z + \|w + A(z) - G(z)\|_Y \\
 &\leq \|z\|_Z + \|w - F(z)\|_Y + \|A(z) + F(z) - G(z)\|_Y \\
 &\leq (M + 1)\|z\|_Z + \|w - F(z)\|_Y \\
 &\leq (M + 1)\|(z, w)\|_{Z \oplus_F Y}
 \end{aligned}$$

Isto mostra que T é contínuo. Observe que as sequências associadas de $Z \oplus_F Y$ e $Z \oplus_G Y$ são equivalentes, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i} & Z \oplus_F Y & \xrightarrow{j} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{i'} & Z \oplus_G Y & \xrightarrow{j'} & Z \longrightarrow 0
 \end{array}$$

comuta.

□

Interpolação em espaços de Banach

Na primeira parte deste capítulo fornecemos algumas definições e resultados da teoria de interpolação (ver [8]).

Na segunda parte do capítulo abordamos o método de interpolação complexa definido por Calderón em [1]. Provaremos que todo espaço interpolado pode ser fatorado de certa maneira como o produto de dois espaços

4.1 Generalidades da teoria de interpolação

Definição 4.1 (Par interpolado) *Sejam X_0 e X_1 espaços de Banach reais ou complexos. O par $[X_0, X_1]$ é chamado de par interpolado, se X_0 e X_1 estão mergulhados continuamente em V , onde V é um espaço topológico de Hausdorff.*

A definição acima permite definir dois subespaços lineares normados de V , os quais são: o espaço interseção $X_0 \cap X_1 = \{v \in V : v \in X_0 \text{ e } v \in X_1\}$ dotado pela norma

$$\|v\|_{X_0 \cap X_1} = \max(\|v\|_{X_0}, \|v\|_{X_1})$$

e o espaço soma $X_0 + X_1 = \{v \in V : \text{existem } x_0 \in X_0 \text{ e } x_1 \in X_1 \text{ tais que } v = x_0 + x_1\}$ dotado pela norma

$$\|v\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : v = x_0 + x_1\}.$$

Os espaços definidos acima são de Banach e

$$X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1.$$

Definição 4.2 (Espaço intermédio) *Seja $[X_0, X_1]$ um par interpolado. Um espaço intermédio entre X_0 e X_1 , é um espaço de Banach E tal que*

$$X_0 \cap X_1 \subset E \subset X_0 + X_1.$$

4.2 Interpolação Complexa

Definição 4.3 (Espaço interpolado) *Um espaço interpolado é um espaço intermédio E entre X_0 e X_1 com a seguinte propriedade:*

se $T : X_0 + X_1 \rightarrow X_0 + X_1$ é um operador linear tal que as restrições a X_0 e X_1 , respectivamente, são $T : X_0 \rightarrow X_0$ e $T : X_1 \rightarrow X_1$, então a restrição de T a E é $T : E \rightarrow E$.

4.2 Interpolação Complexa

O método de interpolação complexa desenvolvida por Calderón em [1] será usado ao longo do nosso trabalho.

O seguinte teorema dá condições para que uma função holomorfa de valores em um espaço de Banach verifique o Princípio do Módulo Máximo na faixa $\bar{\mathbb{S}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Nós denotamos o interior de $\bar{\mathbb{S}}$ por $\mathbb{S}$.

Teorema 4.4 (Princípio do Módulo Máximo) *Seja X um espaço de Banach complexo e $F : \bar{\mathbb{S}} \rightarrow X$ uma função holomorfa em $\mathbb{S}$, contínua e limitada. Então*

$$\sup_{z \in \bar{\mathbb{S}}} \|F(z)\|_X \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_X \right).$$

Demonstração. Primeiro provemos o teorema para $X = \mathbb{C}$, assumindo que F verifica $\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} F(z) = 0$. Consideremos a aplicação $h : \bar{\mathbb{S}} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$h(z) = \frac{e^{i\pi z} - i}{e^{i\pi z} + i}.$$

A aplicação h é uma bijeção entre $\bar{\mathbb{S}}$ e $\bar{\mathbb{D}} - \{\pm 1\}$, holomorfa em $\mathbb{S}$ e $h(\partial\bar{\mathbb{S}}) = \partial\bar{\mathbb{D}} - \{\pm 1\}$. Observe que $g(z) = F(h^{-1}(z))$ é contínua, limitada em $\bar{\mathbb{D}} - \{\pm 1\}$ e holomorfa em $\mathbb{D}$. Pelo fato $\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} F(z) = 0$, obtemos que $\lim_{z \rightarrow \pm 1} g(z) = 0$ e portanto estendemos g continuamente a $\bar{\mathbb{D}}$. Aplicando o Princípio do Módulo Máximo no disco temos

$$|g(z)| \leq \max_{w \in \partial\bar{\mathbb{D}}} |g(w)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1 + it)| \right).$$

Com isso terminamos a prova para este caso.

Agora seja F uma função qualquer. Definamos $F_{\varepsilon, z_0}(z) = e^{\varepsilon(z-z_0)^2} F(z)$ onde $\varepsilon > 0$ e z_0 é arbitrário em $\mathbb{S}$. Como $|e^{\varepsilon(z-z_0)^2}| \leq e^{\varepsilon(x^2-y^2)}$ com $z - z_0 = x + iy$ e $-1 \leq x \leq 1$, temos $\lim_{|\operatorname{Im}(z)| \rightarrow \infty} F_{\varepsilon, z_0}(z) = 0$. A aplicação F_{ε, z_0} assim definida satisfaz as condições do caso anterior, portanto

4.2 Interpolação Complexa

$$\begin{aligned}
|F(z_0)| &= |F_{\varepsilon, z_0}(z_0)| \\
&\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_{\varepsilon, z_0}(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_{\varepsilon, z_0}(1 + it)| \right) \\
&\leq e^\varepsilon \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1 + it)| \right)
\end{aligned}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Como z_0 foi escolhido arbitrariamente, obtemos

$$\sup_{z \in \bar{\mathbb{S}}} |F(z)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(1 + it)| \right).$$

Isto mostra o teorema para o caso $X = \mathbb{C}$.

Demonstraremos o caso geral, onde X é um espaço de Banach complexo. De fato, seja $z_0 \in \mathbb{S}$ arbitrário. O teorema de Hahn-Banach garante a existência de um funcional linear φ de norma 1 em X tal que $|\varphi(F(z_0))| = \|F(z_0)\|_X$. Definamos $g_\varphi(z) = \varphi(F(z))$ para $z \in \bar{\mathbb{S}}$. Como F é holomorfa em $\mathbb{S}$, para $w \in \mathbb{S}$, escrevemos $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - w)^n$, onde $a_n \in X$. Então

$$\begin{aligned}
g_\varphi(z) &= \varphi(F(z)) \\
&= \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - w)^n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(a_n)(z - w)^n
\end{aligned}$$

assim g_φ é holomorfa em $\mathbb{S}$. Também g_φ é contínua e limitada, além disso g_φ verifica as condições do caso $X = \mathbb{C}$, logo

$$\begin{aligned}
\|F(z_0)\|_X &= |g_\varphi(z_0)| \\
&\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |g_\varphi(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |g_\varphi(1 + it)| \right) \\
&\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_X, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_X \right)
\end{aligned}$$

para z_0 arbitrário em $\mathbb{S}$. Isto termina a prova do teorema. $\square$

Definição 4.5 (Espaço de funções holomorfas) *Seja $[X_0, X_1]$ um par interpolado. Seja $\bar{\mathbb{S}} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$. Denotemos por $\mathcal{F}$ o conjunto das funções $F : \bar{\mathbb{S}} \rightarrow X_0 + X_1$ tais que*

4.2 Interpolação Complexa

1. F é holomorfa em $\mathbb{S}$, contínua e limitado no bordo de $\bar{\mathbb{S}}$.
2. $F(it) \in X_0$ e $F(1 + it) \in X_1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. As funções $t \mapsto F(it)$ e $t \mapsto F(1 + it)$ são contínuas e

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) < \infty.$$

Notemos que o espaço $\mathcal{F}$ assim definido é um espaço vetorial. A expressão que aparece em (3) na Definição 4.5 define uma norma. De fato, se $\|F\|_{\mathcal{F}} = 0$, então $\|F(1 + it)\|_{X_1} = \|F(it)\|_{X_0} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como

$$\|F(1 + it)\|_{X_0+X_1} \leq \|F(1 + it)\|_{X_1} \text{ e } \|F(it)\|_{X_0+X_1} \leq \|F(it)\|_{X_0},$$

temos que $\|F(it)\|_{X_0+X_1} = \|F(1 + it)\|_{X_0+X_1} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, assim o Teorema 4.4 implica que $F = 0$. É imediato provar que $\|\lambda F\|_{\mathcal{F}} = |\lambda| \|F\|_{\mathcal{F}}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. A desigualdade triangular é uma consequência da igualdade de números positivos

$$\max(a + b, c + d) = \max(a, c) + \max(b, d).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|F + G\|_{\mathcal{F}} &= \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F + G)(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F + G)(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &= \|F\|_{\mathcal{F}} + \|G\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Observação 4.6 Vamos dar algumas observações em relação a $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$

- Algumas vezes denotamos o espaço $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ para indicar que as aplicações de $\mathcal{F}$ são definidas de $\mathbb{S}$ em $X_0 + X_1$.
- Se $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}$ é uma aplicação conforme que pode ser estendida continuamente a $\partial\bar{\mathbb{S}}$, então $\|\varphi F\|_{\mathcal{F}} = \|F\|_{\mathcal{F}}$, pois $\varphi(\partial\bar{\mathbb{S}}) = \partial\bar{\mathbb{D}} - \{\pm 1\}$ e

$$\begin{aligned} \|\varphi F\|_{\mathcal{F}} &= \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(it)F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(it + 1)F(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &= \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(it)| \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(it + 1)| \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &= \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &= \|F\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

4.2 Interpolação Complexa

Teorema 4.7 $\mathcal{F}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Suponha que $(F_n)_n$ seja uma sequência de Cauchy em $\mathcal{F}$. Pelo Teorema 4.4 temos para cada $z \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} \|F_n(z) - F_m(z)\|_{X_0+X_1} &\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F_n - F_m)(it)\|_{X_0+X_1}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F_n - F_m)(1 + it)\|_{X_0+X_1} \right) \\ &\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F_n - F_m)(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(F_n - F_m)(1 + it)\|_{X_1} \right) \\ &= \|F_n - F_m\|_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

por $X_0 + X_1$ ser de Banach, temos que $F_n(z)$ converge para algum $F(z) \in X_0 + X_1$.

Demonstraremos que a sequência $(F_n)_n$ converge uniformemente em norma de $X_0 + X_1$ para F .

De fato, seja $z \in \mathbb{S}$. Então existe $N(z) \in \mathbb{N}$, que depende de z , tal que

$$n \geq N(z) \Rightarrow \|F_n(z) - F(z)\|_{X_0+X_1} < \varepsilon.$$

Também existe $N \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$n, m \geq N \Rightarrow \|F_n(z) - F_m(z)\|_{X_0+X_1} < \varepsilon,$$

para qualquer z . Agora

$$\begin{aligned} \|F_n(z) - F(z)\|_{X_0+X_1} &\leq \|F_n(z) - F_m(z)\|_{X_0+X_1} + \|F(z) - F_m(z)\|_{X_0+X_1} \\ &< \|F_n(z) - F_m(z)\|_{X_0+X_1} + \varepsilon \quad \text{se } m \geq N(z), N \\ &< 2\varepsilon \quad \text{se } n \geq N. \end{aligned}$$

Isto mostra que $(F_n)_n$ converge uniformemente em norma de $X_0 + X_1$ para F .

A Proposição 2.28 garante que F é holomorfa em $\mathbb{S}$. Como $F_n(it) \in X_0$ e $F_n(1 + it) \in X_1$ convergem uniformemente em norma de $X_0 + X_1$ para $F(it)$ e $F(1 + it)$ respectivamente, então devido a que X_0 e X_1 são espaços de Banach temos que $F(it) \in X_0$ e $F(1 + it) \in X_1$.

Provaremos a continuidade da função $t \mapsto F(it)$. Seja t_0 real fixo e $\varepsilon > 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|F_N(it) - F(it)\|_{X_0} < \varepsilon$ para qualquer t . Por $t \mapsto F_N(it)$ ser contínua, temos que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F_N(it) - F_N(it_0)\|_{X_0} < \varepsilon,$$

4.2 Interpolação Complexa

usando este fato temos

$$\begin{aligned}
 \|F(it) - F(it_0)\|_{X_0} &\leq \|F(it_0) - F_N(it_0)\|_{X_0} + \|F_N(it) - F(it)\|_{X_0} + \|F_N(it_0) - F_N(it)\|_{X_0} \\
 &< \varepsilon + \varepsilon + \|F_N(it_0) - F_N(it)\|_{X_0} \\
 &< 3\varepsilon \text{ sempre que } |t - t_0| < \delta.
 \end{aligned}$$

Isto termina a prova da continuidade de $t \mapsto F(it)$. Similarmente provamos que a função $t \mapsto F(1+it)$ é contínua.

Como $(F_n)_n$ é uma sequência de funções limitadas no bordo que converge uniformemente em norma para F , temos que F é limitada no bordo, assim $F \in \mathcal{F}$. $\square$

Definição 4.8 *Seja $[X_0, X_1]$ um par interpolado. Seja $0 < \theta < 1$. Definimos um subespaço linear X_θ de $X_0 + X_1$ por*

$$X_\theta = \{x \in X_0 + X_1 : x = F(\theta) \text{ para algum } F \in \mathcal{F}\}.$$

O subespaço X_θ é denotado por $[X_0 X_1]_\theta$.

A expressão $\|x\|_{X_\theta} = \inf \{ \|F\|_{\mathcal{F}} : x = F(\theta) \}$ é uma norma no espaço X_θ .

Proposição 4.9 *X_θ é um espaço intermédio.*

Demonstração. Primeiro demonstraremos que se $0 < \theta < 1$, então

$$X_0 \cap X_1 \subseteq X_\theta \subseteq X_0 + X_1.$$

De fato, seja $x \in X_0 \cap X_1$ e considere a função constante $F(z) = x$ para todo $z \in \mathbb{S}$. Note que $F \in \mathcal{F}$, portanto, $x \in X_\theta$ e $\|x\|_{X_\theta} \leq \|F\|_{\mathcal{F}} = \max(\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}) = \|x\|_{X_0 \cap X_1}$ e assim $X_0 \cap X_1 \subseteq X_\theta$. Provemos que $X_\theta \subseteq X_0 + X_1$. Suponha que $x \in X_\theta$ e $x = F(\theta)$. Então pelo Princípio do Módulo Máximo temos

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{X_0+X_1} &\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0+X_1}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1+it)\|_{X_0+X_1} \right) \\
 &\leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1+it)\|_{X_1} \right) \\
 &= \|F\|_{\mathcal{F}},
 \end{aligned}$$

assim $\|x\|_{X_0+X_1} \leq \|x\|_{X_\theta}$.

Para terminar a prova da proposição, basta demonstrar que X_θ é Banach. Consideremos uma função $\delta_\theta : \mathcal{F} \rightarrow X_0 + X_1$ definida por $\delta_\theta(F) = F(\theta)$. Como $\|F(\theta)\|_{X_0+X_1} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}$, temos que

4.2 Interpolação Complexa

δ_θ é contínuo, portanto $\mathcal{N} = \ker(\delta_\theta) = \{F \in \mathcal{F} : F(\theta) = 0\}$ é fechado, além disso $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ é de Banach. Consideremos $C > 1$ e $F \in \mathcal{F}$. Então existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G(\theta) = F(\theta)$ e $\|G\|_{\mathcal{F}} \leq C\|F(\theta)\|_{X_\theta}$, isto é, $\|G\|_{\mathcal{F}} \leq C\|\delta_\theta(F)\|_{X_\theta}$, portanto δ_θ verifica (3) do Teorema 2.70, assim $\delta_\theta(\mathcal{F}) = X_\theta$ é isomorfo a $\mathcal{F}/\mathcal{N}$. $\square$

O seguinte teorema mostra que X_θ é um espaço interpolado entre X_0 e X_1 .

Teorema 4.10 *Seja $[X_0, X_1]$ e $[Y_0, Y_1]$ pares interpolados. Seja $T : X_0 + X_1 \longrightarrow Y_0 + Y_1$ um operador linear contínuo tal que T seja contínuo de X_i em Y_i para $i = 0, 1$. Então T é um operador contínuo de X_θ em Y_θ e sua norma, que denotamos por $\|T\|_\theta$, verifica*

$$\|T\|_\theta \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta,$$

onde $\|T\|_i$ denota a norma de $T : X_i \longrightarrow Y_i$, para $i = 0, 1$.

Demonstração. Denotemos por $\|T\|_i$ a norma do operador $T : X_i \longrightarrow Y_i$ para $i = 0, 1$. Primeiro assumamos que as normas são não nulas. Seja $x \in X_\theta$. Então existe $F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ tal que $F(\theta) = x$. Definamos uma função G no conjunto $\mathbb{S}$ por

$$G(z) = \left(\frac{\|T\|_0}{\|T\|_1} \right)^{z-\theta} T(F(z)).$$

Demonstraremos que $G \in \mathcal{F}(Y_0, Y_1)$. De fato, como $T : X_0 \longrightarrow Y_0$ e $F(it) \in X_0$, então $T(F(it)) \in Y_0$, portanto $G(it) \in Y_0$. Do mesmo modo mostramos que $G(1+it) \in Y_1$. Como T é contínua e a função $t \mapsto F(it)$ é contínua, obtemos que $t \mapsto G(it)$ é contínua. Analogamente demonstramos que a função $t \mapsto G(1+it)$ é contínua. Vejamos que G é holomorfa em $\mathbb{S}$. Como F é holomorfa em $\mathbb{S}$, para $w \in \mathbb{S}$, escrevemos $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-w)^n$, onde $a_n \in X_0 + X_1$, portanto

$$\begin{aligned} G(z) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m(z-w)^m \right) T(F(z)) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m(z-w)^m \right) T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-w)^n \right) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m(z-w)^m \right) \sum_{n=1}^{\infty} T(a_n)(z-w)^n \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_m T(a_n)(z-w)^{n+m}, \end{aligned}$$

onde

$$\left(\frac{\|T\|_0}{\|T\|_1} \right)^{z-\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m(z-w)^m$$

4.2 Interpolação Complexa

e $\zeta_m \in \mathbb{C}$, assim G é holomorfa em $\mathbb{S}$. Agora

$$\begin{aligned}\|G(it)\|_{Y_0} &= \left\| \left(\frac{\|T\|_0}{\|T\|_1} \right)^{it-\theta} T(F(it)) \right\|_{Y_0} \\ &= \left(\frac{\|T\|_0}{\|T\|_1} \right)^{-\theta} \|T(F(it))\|_{Y_0} \\ &\leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \|F(it)\|_{X_0}.\end{aligned}$$

Similarmente mostramos que

$$\|G(1+it)\|_{Y_1} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \|F(1+it)\|_{X_1}.$$

Isto prova que G é limitado no bordo de $\bar{\mathbb{S}}$ e além disso

$$\|G\|_{\mathcal{F}(Y_0, Y_1)} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \|F\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)}.$$

Observe que $T(x) = T(F(\theta)) = G(\theta)$ e assim

$$\|T(x)\|_{Y_\theta} \leq \|G\|_{\mathcal{F}(Y_0, Y_1)} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \|F\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)},$$

tomando o ínfimo sobre os $F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ tais que $x = F(\theta)$, deduzimos

$$\|T(x)\|_{Y_\theta} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \|x\|_{X_0}.$$

Agora, suponha sem perda de generalidade que $\|T\|_0 \neq 0$ e $\|T\|_1 = 0$. Definamos para $\varepsilon > 0$

$$G(z) = \left(\frac{\|T\|_0}{\varepsilon} \right)^{z-\theta} T(F(z)).$$

De uma maneira similar ao caso anterior provamos que $G \in \mathcal{F}(Y_0, Y_1)$, $G(\theta) = T(x)$,

$$\|G(it)\|_{Y_0} = \|T\|_0^{1-\theta} \varepsilon^\theta \|F(it)\|_{X_0}$$

e

$$\|G(1+it)\|_{Y_1} = 0,$$

assim,

$$\|G\|_{\mathcal{F}(Y_0, Y_1)} = \|T\|_0^{1-\theta} \varepsilon^\theta \|F\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)},$$

logo

$$\|T(x)\|_{Y_\theta} \leq \|G\|_{\mathcal{F}(Y_0, Y_1)} \leq \|T\|_0^{1-\theta} \varepsilon^\theta \|F\|_{\mathcal{F}(X_0, X_1)}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ o que implica $T = 0$, e portanto limitado.

Se $\|T\|_0 = \|T\|_1 = 0$, defina $G(z) = T(F(z))$. Como $G(\theta) = T(x)$ e $G(it) = G(1+it) = 0$ temos que $G = 0$, portanto $T = 0$ e assim limitada. $\square$

Agora vamos dar um exemplo de espaço interpolado de Calderón.

4.2 Interpolação Complexa

Exemplo 4.11 (Interpolação de espaços L_p) Seja μ uma medida σ -finita em S e consideremos os espaços L_{p_0} e L_{p_1} mergulhados em $L_{p_0} + L_{p_1}$. Se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, então $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta = L_p$, onde p verifica

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

De fato, seja f uma função de suporte compacto. Sem perda de generalidade assumamos que $\|f\|_{L_p} = 1$. Definamos uma função em $F : \tilde{\mathbb{S}} \rightarrow L_{p_0} + L_{p_1}$ por

$$F(z)(s) = \begin{cases} |f(s)|^p \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \right) \cdot \frac{f(s)}{|f(s)|} & \text{se } s \in S, f(s) \neq 0. \\ 0 & \text{se } s \in S, f(s) = 0. \end{cases}$$

A função F é holomorfa em $\mathbb{S}$ e contínua em $\tilde{\mathbb{S}}$, com

$$|F(it)(s)| = |f(s)|^{p/p_0}, \text{ se } f(s) \neq 0$$

$$|F(1+it)(s)| = |f(s)|^{p/p_1}, \text{ se } f(s) \neq 0,$$

isto é, $F(it) \in L_{p_0}$ e $F(1+it) \in L_{p_1}$, com

$$\|F(it)\|_{L_{p_0}} \leq \|f\|_{L_p}^{p/p_0} = 1,$$

$$\|F(1+it)\|_{L_{p_1}} \leq \|f\|_{L_p}^{p/p_1} = 1.$$

Também as funções $t \in \mathbb{R} \mapsto F(it)$ e $t \in \mathbb{R} \mapsto F(1+it)$ são contínuas, portanto, $F \in \mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})$, com $\|F\|_{\mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})} \leq 1$. Como $F(\theta) = f$, obtemos que $f \in [L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta$ e $\|f\|_{[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta} \leq 1 = \|f\|_{L_p}$. Isto prova que $L_p \subset [L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta$.

Demostraremos que $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta \subset L_p$. De fato, seja $f \in [L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta$ e sem perda de generalidade suponha que $1 = \|f\|_{[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta}$. Então existe $F \in \mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})$ tal que $f = F(\theta)$. Sejam q, q_0 e q_1 os conjugados de p, p_0 e p_1 , respectivamente, e y uma função simples, com $\|y\|_{L_q} = 1$. Definamos uma função G em $\tilde{\mathbb{S}}$ por

$$G(z)(s) = \begin{cases} |y(s)|^q \left(\frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1} \right) \cdot \frac{y(s)}{|y(s)|} & \text{se } s \in S, y(s) \neq 0. \\ 0 & \text{se } s \in S, y(s) = 0. \end{cases}$$

Note que G assim definida é holomorfa em $\mathbb{S}$ verifica $G(it) \in L_{q_0}$ e $G(1+it) \in L_{q_1}$, com

$$\|G(it)\|_{L_{q_0}} \leq \|y\|_{L_q}^{q/q_0} = 1,$$

4.2 Interpolação Complexa

$$\|G(1 + it)\|_{L_{q_1}} \leq \|y\|_{L_q}^{q/q_1} = 1.$$

Definamos outra função H em $\bar{\mathbb{S}}$ de valor complexo por

$$H(z) = \int_S F(z)(s)G(z)(s) d\mu.$$

Por F e G ser funções holomorfas em $\mathbb{S}$, obtemos que a função H é holomorfa em $\mathbb{S}$. Também a função H é contínua e limitada em $\bar{\mathbb{S}}$. Então pelo Teorema 4.4 obtemos que

$$|H(z)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |H(it)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |H(1 + it)| \right) \text{ para todo } z \in \bar{\mathbb{S}}.$$

A desigualdade de Hölder implica que

$$|H(it)| \leq \|F(it)\|_{L_{p_0}} \cdot \|G(it)\|_{L_{q_0}} \leq \|F(it)\|_{L_{p_0}} \cdot \|y\|_{L_q}^{q/q_0} = \|F(it)\|_{L_{p_0}}.$$

Similarmente

$$|H(1 + it)| \leq \|F(1 + it)\|_{L_{p_1}} \cdot \|G(1 + it)\|_{L_{q_1}} \leq \|F(1 + it)\|_{L_{p_1}} \cdot \|y\|_{L_q}^{q/q_1} = \|F(1 + it)\|_{L_{p_1}},$$

isto é,

$$|H(z)| \leq \max \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(it)\|_{L_{p_0}}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(1 + it)\|_{L_{p_1}} \right) = \|F\|_{\mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})}, \text{ para todo } z \in \bar{\mathbb{S}},$$

em particular para $z = \theta$, temos que

$$\left| \int_S f(s)y(s) d\mu \right| = |H(\theta)| \leq \|F\|_{\mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})},$$

para toda função simples y em L_q com $\|y\|_{L_q} = 1$, portanto, $f \in L_p$ e

$$\|f\|_{L_p} = \sup \left\{ \left| \int_S f(s)y(s) d\mu \right| : y \text{ função simples com } \|y\|_{L_q} = 1 \right\} \leq \|F\|_{\mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})},$$

como F foi escolhida arbitrariamente em $\mathcal{F}(L_{p_0}, L_{p_1})$ com $F(\theta) = f$, obtemos que $\|f\|_{L_p} \leq \|f\|_{[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta}$. Assim temos que $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta \subset L_p$ e portanto $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta = L_p$. $\square$

Se aplicamos o Teorema 4.10 ao Exemplo 4.11, obtemos um resultado interessante:

Teorema 4.12 (Teorema de Riesz-Thorin) *Seja μ uma medida σ -finita sobre S e $0 < \theta < 1$. Se $T : L_{p_0} + L_{p_1} \longrightarrow L_{q_0} + L_{q_1}$ é um operador linear limitado tal que*

$$T : L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0} \text{ e } T : L_{p_1} \longrightarrow L_{q_1}$$

4.2 Interpolação Complexa

são operadores limitados, com normas respectivas $\|T\|_0$ e $\|T\|_1$, então a restrição de T ao espaço L_p , com

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

é limitada e

$$T : L_p \longrightarrow L_q,$$

onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

A norma da restrição de T a L_p , que denotamos por $\|T\|_p$, é estimada por

$$\|T\|_p \leq \|T\|_0^{1-\theta} \cdot \|T\|_1^\theta.$$

Definição 4.13 Sejam X_0, X_1 espaços de Köthe e $0 < \theta < 1$. Definamos um espaço de Banach por

$$X_0^{1-\theta} X_1^\theta = \{x \in L_0 : \text{existem } u_0 \in X_0, u_1 \in X_1, \text{ tais que } |x| = |u_0|^{1-\theta} |u_1|^\theta\},$$

normado por

$$\|x\| = \inf \{ \|u_0\|_{X_0}^{1-\theta} \cdot \|u_1\|_{X_1}^\theta : |x| = |u_0|^{1-\theta} |u_1|^\theta \}.$$

Note que espaço $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ pode ser escrito como

$$X_0^{1-\theta} X_1^\theta = \{x \in L_0 : \text{existem } u_0 \in B_{X_0}, u_1 \in B_{X_1}, \lambda \geq 0 \text{ tais que } |x| \leq \lambda |u_0|^{1-\theta} |u_1|^\theta\},$$

com norma

$$\|x\| = \inf \{ \lambda : \text{existem } u_0 \in B_{X_0}, u_1 \in B_{X_1} \text{ tais que } |x| \leq \lambda |u_0|^{1-\theta} |u_1|^\theta \}.$$

Vamos comentar a prova de um resultado apresentado por Calderón em [1].

Teorema 4.14 Sejam X_0 e X_1 espaços de Banach de funções, tais que ou X_0 ou X_1 é reflexivo. Então

$$X_\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta,$$

onde a igualdade é no sentido isométrico.

Demonstração. Vamos provar o teorema em partes:

Passo 1. Vamos estabelecer algumas notações e definições .

Seja X um espaço de Banach de funções (ver Definição 2.37) e B um espaço de Banach. Uma função $f : S \longrightarrow B$ é chamada de *função com B-valores*. Denotamos por $X(B)$, o conjunto de

4.2 Interpolação Complexa

todas as funções com B -valores f tais que $\|f(\cdot)\|_B \in X$. Note que o conjunto $X(B)$ é um espaço de Banach, com

$$\|f\|_{X(B)} = \left\| \|f(\cdot)\|_B \right\|_X.$$

Sejam X_0, X_1 espaços de Banach de funções de valores reais contidos em $L_0(S, \mu)$ e seja $[B_0, B_1]$ um par interpolado. Denotamos por $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ o subconjunto de $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ de todas as funções F da forma

$$F(s, \xi) = e^{\delta \xi^2} \sum_{k=1}^N e^{\lambda_n \xi} f(s),$$

onde as f_n são funções em $X_0(B_0) \cap X_1(B_1)$, λ_n são números reais, $\delta > 0$, $s \in S$ e $\xi \in \bar{\mathbb{S}}$. O subconjunto $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ é denso em $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$. Definamos outro espaço de funções, que denotamos por $\mathcal{G}(Y_0, Y_1)$, como o conjunto das funções $G : \bar{\mathbb{S}} \rightarrow Y_0 + Y_1$ tais que

1. G é holomorfa em $\mathbb{S}$ e contínua no bordo $\bar{\mathbb{S}}$.
2. $\|G(z)\|_{Y_0+Y_1} \leq c(1 + |z|)$, para alguma constante $c > 0$.
3. A função G verifica $G(it_1) - G(it_2) \in Y_0$, $G(1 + it_1) - G(1 + it_2) \in Y_1$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\|G\|_{\mathcal{G}} = \max \left(\sup_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \left\| \frac{G(it_1) - G(it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{Y_0}, \sup_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \left\| \frac{G(1 + it_1) - G(1 + it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{Y_1} \right) < \infty.$$

O espaço $X_{[\theta]} = \{G'(\theta) : G \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)\}$ munido da norma

$$\|x\|_{X_{[\theta]}} = \inf\{\|G\|_{\mathcal{G}} : G'(\theta) = x\}$$

define um espaço interpolado entre Y_0 e Y_1 . Também denotamos o espaço $X_{[\theta]}$ por $[X_0 X_1]_{[\theta]}$.

Vamos denotar $X = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ e $B = [B_0, B_1]_\theta$.

Vamos provar o resultado para espaços de funções com B -valores.

Passo 2. Os espaços interpolados verificam

$$[X_0(B_0), X(B_1)]_\theta \subset X(B) \subset [X_0(B_0), X(B_1)]_{[\theta]},$$

onde as inclusões são contínuas.

4.2 Interpolação Complexa

Passo 2.A. Demostremos que $[X_0(B_0), X_1(B_1)]_\theta \subset X(B)$. De fato, consideremos uma função em $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ da forma

$$F(s, \xi) = e^{\delta \xi^2} \sum_{k=1}^N e^{\lambda_k \xi} f_k(s),$$

onde as f_k são funções em $X_0(B_0) \cap X_1(B_1)$, λ_k são números reais, $\delta > 0$, $s \in S$ e $\xi \in \bar{\mathbb{S}}$. As f_k são funções com B -valores, pois $B_0 \cap B_1 \subset B$. Agora damos uma estimativa da norma de $F(s, \xi)$, demonstrando as desigualdades seguintes:

$$\begin{aligned} \bullet \log \|F(s, \theta)\|_B &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \log \|F(s, it)\|_{B_0} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \log \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} \rho_1(\theta, t) dt \\ \bullet \|F(s, \theta)\|_B &\leq \left(\frac{1}{1 - \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, it)\|_{B_0} \rho_0(\theta, t) dt \right)^{1-\theta} \cdot \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} \rho_1(\theta, t) dt \right)^\theta \end{aligned}$$

onde

$$\rho_0(\xi, t) = \frac{e^{-\pi(t-r)} \sin \pi \tau}{\sin^2 \pi \tau + (\cos \pi \tau - e^{-\pi(t-r)})^2}, \text{ onde } \xi = \tau + ir$$

e

$$\rho_1(\xi, t) = \frac{e^{-\pi(t-r)} \sin \pi \tau}{\sin^2 \pi \tau + (\cos \pi \tau + e^{-\pi(t-r)})^2}, \text{ onde } \xi = \tau + ir,$$

são os kernel de Poisson (ver [23]).

Demonstraremos a primeira desigualdade. De fato, seja $M \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Calderón encontrou duas funções $\varphi_{0,n,\varepsilon}$ e $\varphi_{1,n,\varepsilon}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi_{j,n,\varepsilon}(t) = -n + \varepsilon$

$$\max \left(\log \|F(\cdot, j + it)\|_{B_j}, -n \right) \leq \varphi_{j,n,\varepsilon}(t) \leq \max \left(\log \|F(\cdot, j + it)\|_{B_j}, -n \right) + 2\varepsilon \quad (4.1)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $j = 0, 1$. Ele demonstrou que existe uma função analítica, limitada e contínua em $\bar{\mathbb{S}}$, que denotamos por ϕ , tal que $\text{Re}(\phi(it)) = \varphi_{0,n,\varepsilon}(t)$, $\text{Re}(\phi(1 + it)) = \varphi_{1,n,\varepsilon}(t)$ e

$$\text{Re}(\phi(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\xi, t) \varphi_{0,n,\varepsilon}(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(\xi, t) \varphi_{1,n,\varepsilon}(t) dt.$$

Note que

4.2 Interpolação Complexa

$$\begin{aligned} \|e^{-\phi(it)} F(s, j + it)\|_{B_j} &= e^{\operatorname{Re}(-\phi(j+it))} \cdot \|F(s, j + it)\|_{B_j} \\ &= e^{-\varphi_{j,n,\varepsilon}(t)} \cdot \|F(s, j + it)\|_{B_j} \text{ pela desigualdade} \\ &\quad (4.1) \text{ temos que} \end{aligned}$$

$$\leq 1$$

para $j = 0, 1$ e todo $s \in S$. Isto implica que $e^{-\phi(\cdot)} F(s, \cdot) \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$ e

$$\|e^{-\phi(\cdot)} F(s, \cdot)\|_{\mathcal{F}(B_0, B_1)} \leq 1,$$

portanto,

$$\|F(s, \theta)\|_B \leq e^{\operatorname{Re}(\phi(\theta))},$$

que equivale a

$$\log \|F(s, \theta)\|_B \leq \operatorname{Re}(\phi(\theta)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \varphi_{0,n,\varepsilon}(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{1,n,\varepsilon}(\theta, t) \varphi_1(t) dt.$$

Se $n \rightarrow \infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos pela desigualdade (4.1) que

$$\log \|F(s, \theta)\|_B \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \log \|F(s, it)\|_{B_0} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \log \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} \rho_1(\theta, t) dt. \quad (4.2)$$

Isto mostra a primeira desigualdade.

Agora demonstraremos a segunda desigualdade. De fato, o kernel de Poisson verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) dt = 1 - \theta \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(\theta, t) dt = \theta,$$

portanto, pela desigualdade de Jensen (ver Corolário 2.56) obtemos que

$$\exp\left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \log \|F(s, it)\|_{B_0} dt\right) \leq \frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \|F(s, it)\|_{B_0} dt$$

e

$$\exp\left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(\theta, t) \log \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} dt\right) \leq \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(\theta, t) \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} dt.$$

Aplicando logaritmo nas duas desigualdades acima, multiplicado a primeira por $(1 - \theta)$ e a segunda por θ , somando as desigualdades obtidas e por último aplicando (4.2), temos que

$$\log \|F(s, \theta)\|_B \leq \log \left[\left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(\theta, t) \|F(s, it)\|_{B_0} dt \right)^{1-\theta} \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(\theta, t) \|F(s, 1 + it)\|_{B_1} dt \right)^\theta \right],$$

4.2 Interpolação Complexa

demonstrando assim que

$$\|F(s, \theta)\|_B \leq \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, it)\|_{B_0} \rho_0(\theta, t) d\mu \right)^{1-\theta} \cdot \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, 1+it)\|_{B_1} \rho_1(\theta, t) dt \right)^{\theta}.$$

Se definirmos

$$g(s) = \frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, it)\|_{B_0} \rho_0(\theta, t) d\mu,$$

e

$$h(s) = \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \|F(s, 1+it)\|_{B_1} \rho_1(\theta, t) dt,$$

temos que $g \in X_0$ e $h \in X_1$, pois $\|F(\cdot, it)\|_{B_0} \in X_0$ e $\|F(\cdot, 1+it)\|_{B_1} \in X_1$, resumindo

$$\|F(s, \theta)\|_B \leq g(s)^{1-\theta} h(s)^{\theta},$$

para todo $s \in S$. Por X ser um espaço de Banach de funções, obtemos que $\|F(\cdot, \theta)\|_B \in X$ e $\|g\|_{X_0}, \|h\|_{X_1} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}$, assim

$$\left\| \|F(\cdot, \theta)\|_B \right\|_X \leq \|g^{1-\theta} h^{\theta}\|_X,$$

logo

$$\|F(\theta)\|_{X(B)} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}, \text{ se } F \in \mathcal{F}_0(X_0(B_0), X_1(B_1)).$$

Seja $x \in [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{\theta}$. Então, existe $F \in \mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ tal que $x = F(\theta)$ com $\|F\|_{\mathcal{F}} \leq \|x\|_{\theta} + \varepsilon$. Por $\mathcal{F}_0(X_0(B_0), X_1(B_1))$ ser denso em $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$, temos que existe uma sequência $(F_n)_n$ em $\mathcal{F}_0(X_0(B_0), X_1(B_1))$ tal que $F_n \rightarrow F$ em $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$. Além disso,

$$\|F_n(\theta) - F(\theta)\|_{\theta} \leq \|F_n - F\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado,

$$\|F_n(\theta) - F_m(\theta)\|_{X(B)} \leq \|F_n - F_m\|_{\mathcal{F}},$$

isto prova que $(F_n(\theta))_n$ é uma sequência de Cauchy em $X(B)$, portanto, converge em $X(B)$, assim $F(\theta) \in X(B)$. Também

$$\|F_n(\theta)\|_{X(B)} \leq \|F_n\|_{\mathcal{F}}$$

e se $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|F(\theta)\|_{X(B)} \leq \|F\|_{\mathcal{F}} \leq \|x\|_{\theta} + \varepsilon.$$

Isto demonstra que

$$\|x\|_{X(B)} \leq \|x\|_{\theta} + \varepsilon,$$

4.2 Interpolação Complexa

para ε arbitrário, logo $\|x\|_{X(B)} \leq \|x\|_\theta$. Em conclusão $[X_0(B_0), X_1(B_1)]_\theta \subset X(B)$.

Passo 2.B. Demonstraremos que $X(B) \subset [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$. De fato, seja $f \in X(B)$ uma função cuja imagem seja um conjunto enumerável, isto é, f toma os valores $u_1, \dots, u_n, \dots \in B$. Escolhamos $g \in X_0$ e $h \in X_1$, com $\|g\|_{X_0}, \|h\|_{X_1} \leq 1$ e

$$\|f(\cdot)\|_B = \|f\|_{X(B)}(1 + \varepsilon)g(\cdot)^{1-\theta}h(\cdot)^\theta.$$

Seja $S_j = \{s \in S : f(s) = u_j\}$. Como $u_j \in B = [B_0, B_1]_\theta$, então existe $\varphi \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$, com $\|\varphi_j\|_{\mathcal{F}} \leq 1 + \varepsilon$, tal que $\varphi(\theta) = \frac{u_j}{\|u_j\|_B}$. Definamos uma função F por

$$F(s, \xi) = \begin{cases} \|f\|_{X(B)}(1 + \varepsilon)g(s)^{1-\xi}h(s)^\xi \sum_{j=1}^{\infty} 1_{S_j}(s) \cdot \varphi(\xi) & \text{se } h(s)g(s) \neq 0, \\ 0 & \text{se } h(s)g(s) = 0 \end{cases}$$

Seja Γ um caminho contido na faixa $\{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ que liga os pontos $1/2$ e ξ . Definamos uma função $F_1(s, \xi) = \int_\Gamma F(s, \eta) d\eta$. A definição de F_1 não depende da escolha do caminho Γ . A função F_1 pertence a $\mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ e $\|F_1\|_{\mathcal{F}} \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_{X(B)}$. Também satisfaz que

$$\frac{d}{d\xi} F_1(s, \theta) = F(s, \theta) = f(s),$$

portanto, $f \in [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$ e $\|f\|_{[\theta]} \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_{X(B)}$, como ε é arbitrário, obtemos que $\|f\|_{[\theta]} \leq \|f\|_{X(B)}$. Resumindo, se $f \in X(B)$ tem imagem enumerável, então $f \in \mathcal{F}(X_0(B_0), X_1(B_1))$ e $\|f\|_{[\theta]} \leq \|f\|_{X(B)}$.

Vamos demonstrar o caso geral. Seja $f \in X(B)$ arbitrário. Como o conjunto das funções em $X(B)$ com imagem enumerável é denso em $X(B)$, então existe uma sequência de funções $(f_n)_n$ com imagem enumerável tal que $\|f_n - f\|_{X(B)} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Note que $f_n - f_m \in [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$, com $\|f_n - f\|_{[\theta]} \leq \|f_n - f\|_{X(B)}$. Isto prova que $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $[X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$, portanto, convergente em $[X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$, isto é, $f \in [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}$. Agora

$$\|f\|_{[\theta]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{[\theta]} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{X(B)} = \|f\|_{X(B)}.$$

Em conclusão

$$X(B) \subset [X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]}.$$

Passo 3. Vejamos que se ou $X_0(B_0)$ ou $X_1(B_1)$ é reflexivo, então $X(B) = [X_0(B_0), X_1(B_1)]_\theta$. Basta provar que $[X_0(B_0), X_1(B_1)]_{[\theta]} \subset [X_0(B_0), X_1(B_1)]_\theta$.

Denotemos por $X_0(B_0) = Y_0$ e $X_1(B_1) = Y_1$. Neste passo usamos o seguinte lema provado pelo Calderón em [1, pág. 118].

4.2 Interpolação Complexa

Lema 4.15 Se $F \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)$ e

$$\frac{F(it + ih) - F(it)}{h}$$

converge em Y_0 em um conjunto de medida positiva quando $h \rightarrow 0$ (h real), então $F'(\theta) \in [Y_0, Y_1]_\theta = Y_\theta$, para todo $0 < \theta < 1$.

Suponha que Y_0 é reflexivo. Seja $F \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)$. Então $p(t) = F(it)$ é uma função contínua em relação a t , portanto, a imagem de p está contida em um subespaço separável de Y_0 (tome o espaço gerado pela imagem de p), que denotamos por V . Sejam

$$F_n(z) = \left(F\left(z + \frac{i}{n}\right) - F(z) \right) \cdot \frac{n}{i},$$

$R_m(t)$ o fecho fraco do conjunto $\{F_n(it) : n \geq m\}$ e $R(t) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} R_m(t)$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, os conjuntos $R_m(t)$ e $R(t)$ estão contidos em um conjunto limitado de Y_0 , pois como $F \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|F_n(it)\|_{Y_0} &= \left\| F\left(it + \frac{1}{n}\right) - F(it) \right\|_{Y_0} \cdot n \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{G}} \left| t + \frac{1}{n} - t \right| \cdot n \\ &= \|F\|_{\mathcal{G}}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Agora como $R_m(t)$ é um conjunto limitado, então existe uma bola centrada em zero, que denotamos por D_0 , tal que $R_m(t) \subset D_0$, pelo fato de Y_0 ser reflexivo, obtemos que D_0 é fracamente compacta (ver Teorema 2.82). Devido a que $R_m(t)$ é fracamente fechado e está contido em um conjunto fracamente compacto, então $R_m(t)$ é fracamente compacto, portanto, convexo e limitado. O teorema da interseção de Cantor (ver Teorema 2.81) implica que $R(t)$ é não vazio. Seja g uma função tal que $g(t) \in R(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Note que $R(t) \subset V$, logo a imagem de g é separável.

Demonstraremos que

$$F(it) = F(0) + i \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Seja L um funcional linear contínuo em Y_0 e $\varphi(t) = -iL(F(it))$. Como $F \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)$, então φ é uma função de Lipschitz. Agora

$$L(F_n(it)) = n \left(\varphi\left(t + \frac{1}{n}\right) - \varphi(t) \right).$$

Note que a imagem do conjunto $R_m(t)$ pelo operador L é o fecho fraco do conjunto

$$\left\{ n \left(\varphi\left(t + \frac{1}{n}\right) - \varphi(t) \right) : n \geq m \right\},$$

4.2 Interpolação Complexa

portanto, a imagem de $R(t)$ por L é a interseção dos conjuntos acima. Como φ é uma função de Lipschitz, então φ é quase-sempre diferenciável em $\mathbb{R}$ (ver Teorema 2.32), isto é, existe um conjunto de medida zero A , tal que $\varphi'(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R} \setminus A$, e φ' é fortemente mensurável. Isto equivale a dizer que $L(g(t))$ existe quase-sempre e é fortemente mensurável, em consequência g é fracamente mensurável. Devido a que a imagem de g é separável, da Observação 2.24 deduzimos que g é fortemente mensurável. Lembre-se que a imagem de g está contida em $R(t)$, portanto, g é uma função limitada, em particular, limitada em qualquer intervalo finito real, assim o Teorema 2.26 garante que g é Bochner integrável em todo intervalo finito real. Note que

$$L(F(it)) = i\varphi(t) = i\varphi(0) + i \int_0^t \varphi'(\tau) d\tau = L(F(0)) + i \int_0^t L(g(\tau)) d\tau,$$

para todo L operador linear contínuo em Y_0 , assim

$$F(it) = F(0) + i \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Da igualdade acima temos que $F(it)$ é quase-sempre diferenciável em relação a t , portanto,

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{F(it + ih) - F(it)}{h} \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0$ em um conjunto de medida positiva de $\mathbb{R}$. Daqui deduzimos que $F'(\theta) \in [Y_0, Y_1]_{[\theta]}$. Vejamos que a inclusão é contínua. De fato, seja $x \in X_{[\theta]}$, isto é, existe $F \in \mathcal{G}(Y_0, Y_1)$ tal que $x = F'(\theta)$ e $\|F\|_{\mathcal{G}} \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Consideremos a função

$$h_n(z) = e^{\varepsilon z^2} F_n(z),$$

onde

$$F_n(z) = \left(F\left(z + \frac{i}{n}\right) - F(z) \right) \cdot \frac{n}{i}.$$

Observe que $h_n \in \mathcal{F}(Y_0, Y_1)$ e

$$\begin{aligned} \|h_n(it)\|_{Y_0} &= \|e^{-\varepsilon t^2} F_n(it)\|_{Y_0} \\ &= n \cdot e^{-\varepsilon t^2} \|F(it + \frac{i}{n}) - F(it)\|_{Y_0} \\ &\leq e^{-\varepsilon t^2} \|F(it + \frac{i}{n}) - F(it)\|_{Y_0} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

4.2 Interpolação Complexa

Similarmente provamos que $\|h_n(1 + it)\|_{Y_1} \leq e^\varepsilon \|F\|_{\mathcal{G}}$, portanto,

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{\mathcal{F}} &\leq (1 + e^\varepsilon) \|F\|_{\mathcal{G}} \\ &\leq (1 + e^\varepsilon) (\|x\|_{[\theta]} + \varepsilon), \end{aligned}$$

logo

$$\|h_n(\theta)\|_\theta \leq (1 + e^\varepsilon) (\|x\|_{[\theta]} + \varepsilon).$$

Agora

$$\begin{aligned} \|h_n(\theta) - e^{\varepsilon\theta^2} x\|_\theta &= e^{\varepsilon\theta^2} \left\| \left(F\left(\theta + \frac{i}{n}\right) - F(\theta) \right) \cdot \frac{n}{i} - F'(\theta) \right\|_\theta \\ &= e^{\varepsilon\theta^2} \left\| \frac{F(\theta + \lambda_n) - F(\theta)}{\lambda_n} - F'(\theta) \right\|_\theta, \text{ onde } \lambda_n = \frac{i}{n} \\ &\rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|x\|_\theta &= \|h_n(\theta)e^{-\varepsilon\theta^2} - h_n(\theta)e^{-\varepsilon\theta^2} + e^{-\varepsilon\theta^2} \cdot e^{\varepsilon\theta^2} x\|_\theta \\ &\leq e^{-\varepsilon\theta^2} \|h_n(\theta)\|_\theta + e^{-\varepsilon\theta^2} \|h_n(\theta) - e^{\varepsilon\theta^2} x\|_\theta \\ &\leq e^{-\varepsilon\theta^2} (1 + e^\varepsilon) (\|x\|_{[\theta]} + \varepsilon) + e^{-\varepsilon\theta^2} \|h_n(\theta) - e^{\varepsilon\theta^2} x\|_\theta \\ &\rightarrow e^{-\varepsilon\theta^2} (1 + e^\varepsilon) (\|x\|_{[\theta]} + \varepsilon), \text{ se } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$, então $\|x\|_\theta \leq \|x\|_{[\theta]}$, portanto, a inclusão é contínua. Em conclusão $[Y_0, Y_1]_{[\theta]} \subset [Y_0, Y_1]_\theta$. $\square$

Neste trabalho, nós sempre vamos assumir que $X_\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$.

Espaços de Köthe e espaços de funções g -convexos

Definição 5.1 (Espaço admissível) *Seja S um espaço polonês e μ uma medida σ -finita de Borel em S . Dizemos que a função $f \mapsto \|f\|_X$ ($L_0 \mapsto [0, \infty]$) é uma norma admissível, se o conjunto $X = \{x \in L_0 : \|x\|_X < \infty\}$ verifica as seguintes condições :*

1. $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado.
2. $B_X = \{x : \|x\|_X \leq 1\}$ é fechado em L_0 e contém um elemento positivo.
3. Existe h positivo em L_0 tal que

$$\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_X$$

para todo $x \in L_0$.

O espaço X assim definido é chamado de espaço admissível.

Definição 5.2 (Espaço de Köthe) *Um espaço admissível é chamado de espaço de Köthe se $|x(s)| \leq |y(s)|$ para todo $s \in S$ com x mensurável e $y \in X$, então $x \in X$ e $\|x\|_X \leq \|y\|_X$.*

Observação 5.3 *Se uma norma (ou quase-norma) verifica esta propriedade, então dizemos que a norma (ou quase-norma) $\|\cdot\|_X$ preserva ordem.*

Definição 5.4 (Espaço de funções g -convexo) *Seja $x \mapsto \|x\|_X$ ($L_0 \mapsto [0, \infty]$) uma função e $X = \{x \in L_0 : \|x\|_X < \infty\}$. O espaço X é chamado de espaço de funções g -convexo, se verifica:*

1. $B_X = \{x : \|x\|_X \leq 1\}$ é fechado em L_0 e contém um elemento positivo.
2. $\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \cdot \|x\|_X$ para todo $x \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

-
3. Para todo $x, u, v \in L_0$ e $0 \leq \theta \leq 1$, com $|x| \leq |u|^{1-\theta}|v|^\theta$, temos que $\|x\|_X \leq \|u\|_X^{1-\theta}\|v\|_X^\theta$.
 4. Para cada $0 < \tau < \infty$, existe um número $N(\tau)$, com $\lim_{\tau \rightarrow 0} N(\tau) = 0$, tal que, se $x, y \in X$, com $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$ e $\|x\|_X \leq 1$, $\|y\|_X \leq \tau$, então $\|x + y\|_X \leq 1 + N(\tau)$. Denotemos o menor número $N(\tau) \geq 0$ que verifica as condições acima por $\eta(\tau)$.

Observação 5.5 Seja X um espaço de funções g -convexo.

1. Se $\theta = 0$ e $x, u \in X$ em 3 na definição acima, temos que $|x| \leq |u|$ implica $\|x\|_X \leq \|u\|_X$.
2. Um espaço de Köthe X é um espaço de funções g -convexo. De fato:

Note que X satisfaz 1. e 2. da Definição 5.4, portanto, basta apenas provar 3 e 4. Para demonstrar 3, nós usamos a desigualdade

$$a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1 - \theta)b,$$

onde $a, b \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\begin{aligned} |u|^\theta |v|^{1-\theta} &= |c^{1/\theta} u|^\theta \cdot |c^{-1/(1-\theta)} v|^{1-\theta} \\ &\leq \theta \cdot |c^{1/\theta} u| + (1 - \theta) \cdot |c^{-1/(1-\theta)} v|, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in L_0$ e $c \geq 0$, o que implica

$$\left\| |u|^\theta |v|^{1-\theta} \right\|_X \leq \theta c^{1/\theta} \cdot \|u\|_X + (1 - \theta) c^{1/(1-\theta)} \cdot \|v\|_X.$$

Em particular, se $c = (\|v\|_X / \|u\|_X)^{\theta(1-\theta)}$, obtemos que

$$\left\| |u|^\theta \cdot |v|^{1-\theta} \right\|_X \leq \|u\|_X^\theta \cdot \|v\|_X^{1-\theta}.$$

Agora, supondo que $|x| \leq |u|^\theta |v|^{1-\theta}$, temos imediatamente que $\|x\|_X \leq \|u\|_X^\theta \cdot \|v\|_X^{1-\theta}$.

Demonstraremos que X verifica a parte 4. da Definição 5.4. Sejam $0 < \tau < \infty$ e $x, y \in X$, com $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$ e $\|x\|_X \leq 1$, $\|y\|_X \leq \tau$. Por $\|\cdot\|_X$ ser uma norma, temos que $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \leq 1 + \tau$ e pela definição de $\eta(\tau)$ (ver Definição 5.4, parte 4.), segue que $0 \leq \eta(\tau) \leq \tau$, assim $\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta(\tau) = 0$. $\square$

Observação 5.6 Se X é um espaço g -convexo, então toda função f de X , é quase-finita, isto é, o conjunto dos elementos $E = \{s : f(s) = \infty\}$ tem medida zero. De fato:

Se $f \in X$, então $\|f\|_X < \infty$. Observe que $n \cdot |1_E| \leq |f|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, $n \cdot |1_E| \in X$ e $n \cdot \|1_E\|_X \leq \|f\|_X$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $1_E = 0$, isto é, $\mu(E) = 0$. $\square$

Proposição 5.7 *Todo espaço g -convexo é um espaço quase-normado de Banach. Em particular, todo espaço de Köthe é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vejamos que X é um espaço quase-normado. De fato, sejam $x, y \in X$ e definamos duas funções como

$$x_0(s) = \begin{cases} x(s) + y(s) & \text{se } |x(s)| \leq |y(s)| \\ 0 & \text{se } |x(s)| > |y(s)| \end{cases}$$

e,

$$y_0(s) = \begin{cases} x(s) + y(s) & \text{se } |x(s)| > |y(s)|, \\ 0 & \text{se } |x(s)| \leq |y(s)|. \end{cases}$$

Observe que $\text{supp}(x_0) \cap \text{supp}(y_0) = \emptyset$ e $x_0 + y_0 = x + y$.

Agora pela parte 4. da Definição 5.4 temos

$$\left\| \frac{x_0}{2(\|x\|_X + \|y\|_X)} + \frac{y_0}{2(\|x\|_X + \|y\|_X)} \right\|_X \leq 1 + \eta(1),$$

logo

$$\|x + y\|_X \leq 2(1 + \eta(1)) \cdot (\|x\|_X + \|y\|_X),$$

para todo $x, y \in X$.

Demonstraremos que $\|x\|_X = 0$, implica $x = 0$. De fato, suponha por contradição que $x \neq 0$. Observe que $\|nx\|_X = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto, $nx \in B_X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolha $y \notin B_X$. Se $x_n = \min(n|x|, |y|)$, então $x_n \leq n|x|$ e pelo item 1. desta observação, temos que $x_n \in B_X$. Também $x_n \rightarrow |y|$ q.s., isto é, $(x_n)_n$ converge em medida para $|y|$. Como X é um espaço de funções g -convexos, temos que B_X é fechada em L_0 , assim $|y| \in B_X$, o que contradiz a escolha de y .

Com isto, nós concluímos que $\|\cdot\|_X$ é uma quase-norma.

Vamos demonstrar que X é um espaço quase-Banach. Para isso demonstraremos que o espaço (X, d) é completo, onde d é a métrica definida em Definição 2.51, para facilitar os cálculos, escrevamos $\|x - y\| = d(x, y) = \| \|x - y\|^p$. De fato, seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $(X, \|\cdot\|)$. Vejamos que ela é convergente. De fato, por $(x_n)_n$ ser de Cauchy, encontramos uma subsequência de $(x_n)_n$, que denotamos por $(y_n)_n$, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| < \infty.$$

Definamos uma função y por

$$y(s) = |y_1(s)| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1}(s) - y_k(s)|,$$

a qual pode tomar o valor ∞ para alguns s .

Seja $\vartheta_n(s) = |y_1(s)| + \sum_{k=1}^n |y_{k+1}(s) - y_k(s)|$. Note que $(\vartheta_n)_n$ é uma sequência de X , com $\vartheta_n \rightarrow y$ q.s. (portanto, converge em medida), se definimos $\rho_m(s) = \inf_{n \geq m} \vartheta_n(s)$, então $\rho_m \leq \vartheta_n$, se $n \geq m$, e $\rho_m \rightarrow y$ q.s. quando $m \rightarrow \infty$, portanto, $\rho_m \in X$ e $\|\rho_m\|_X \leq \|\vartheta_n\|_X$ para $n \geq m$, assim $\|\rho_m\|_X \leq \liminf \|\vartheta_n\|_X$, como B_X é fechada na topologia da medida, temos que $y \in X$ e $\|y\|_X \leq \liminf \|\vartheta_n\|_X$. Pela Observação 5.6, obtemos que o conjunto $E = \{s : y(s) = \infty\}$ tem medida zero, logo a série $\sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1}(s) - y_k(s)|$ converge em $s \in S \setminus E$, assim para $s \in S \setminus E$ a série $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1}(s) - y_k(s))$ é convergente. Definamos uma função x por

$$x(s) = \begin{cases} y_1(s) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1}(s) - y_k(s)) & \text{se } s \in S \setminus E, \\ 0 & \text{se } s \in E. \end{cases}$$

Note que $|x| \leq y$, portanto, $x \in X$. Observe que

$$|x(s) - y_m(s)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |y_{k+1}(s) - y_k(s)|, \text{ se } s \in S \setminus E,$$

logo,

$$\|x - y_m\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \|y_{k+1} - y_k\| \rightarrow 0, \text{ se } m \rightarrow \infty.$$

Por outro lado,

$$\|x - x_n\| \leq \|x - y_m\| + \|x_n - y_m\| \rightarrow 0,$$

se $m \rightarrow \infty$ e se $n \rightarrow \infty$. Isto mostra que $(X, \|\cdot\|)$, isto é, (X, d) é completo, portanto $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço quase-Banach. $\square$

Definição 5.8 (Dual de Köthe) *Seja X um espaço de Köthe. Definimos X^* , o Dual de Köthe de X , como o espaço de funções mensuráveis x^* tais que*

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} \int_S |x x^*| d\mu$$

existe.

A função $\|\cdot\|_{X^*}$ define uma norma em X^* . Observe que X^* pode ser visto como subespaço de X' , identificando o elemento $x^* \in X^*$ pelo funcional linear $y(x) = \int_S x x^* d\mu$. De fato,

$$\begin{aligned} \|y\|_{X'} &= \sup_{x \in B_X} |y(x)| \\ &= \sup_{x \in B_X} \left| \int_S x x^* d\mu \right| \\ &= \sup_{x \in B_X} \int_S |x x^*| d\mu \\ &= \|x^*\|_{X^*}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.9 Se $1 \leq p < \infty$, temos que $L_p^*(\mu) = L_q(\mu)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Existem espaços X , tais que $X^* \neq X'$, por exemplo, $L_\infty^*(\mu) = L_1(\mu)$.

Como é de esperar, X^* é um espaço de Köthe sempre que X seja um espaço de Köthe. A proposição abaixo prova esse fato.

Proposição 5.10 Se X é um espaço de Köthe, então X^* é um espaço de Köthe.

Demonstração. Provemos que B_{X^*} é fechada na topologia da convergência em medida. De fato, seja $(x_n^*)_n$ uma sequência de B_{X^*} que converge em medida para x^* . Como μ é uma medida σ -finita, então encontramos uma subsequência de $(x_n^*)_n$ que converge q.s. para x^* , denotamos essa subsequência como $(x_n^*)_n$. Assumiremos que $|(x_n^*)_n|$ é uma sequência crescente que converge q.s. para x^* (basta tomar a sequência $y_n^* = \inf_{k \geq n} |x_k^*|$). Seja $x \in B_X$ qualquer, observe que $|x_n^*||x|$ é uma sequência crescente que converge q.s. para $|x^*||x|$, com

$$\sup_n \int |x_n^*||x| d\mu \leq \sup_n \|x_n^*\|_{X^*} \leq 1.$$

Pelo Teorema 2.59 temos que $|x^*||x| \in L_1$ e $|x_n^*||x|$ converge para $|x^*||x|$ em norma de L_1 , assim

$$\begin{aligned} \int |x^*||x| d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int |x_n^*||x| d\mu \\ &\leq \sup_n \|x_n^*\|_{X^*} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

para todo $x \in B_X$, concluindo que

$$\sup_{x \in B_X} \int |x^*||x| d\mu \leq 1,$$

e assim $x^* \in B_{X^*}$.

Note que B_{X^*} contém um elemento positivo, pois existe uma função positiva h tal que $\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Pela definição de X^* , temos que $h \in X^*$, logo $h/\|h\|_{X^*} \in B_{X^*}$.

É imediato ver que se $|y| \leq |x|$ com $x \in X^*$, então $y \in X^*$ e $\|y\|_{X^*} \leq \|x\|_{X^*}$. Com isso acaba a prova desta proposição. $\square$

Vejamos que X^* é isométrico a um subespaço normante (ver Definição 2.78) de X' .

Proposição 5.11 X^* é um isométrico a um subespaço normante de X' .

Demonstração. Como X é um espaço de Köthe, então existe h positivo em L_0 , tal que para todo $x \in X$, temos que $hx \in L_1$ e $\|xh\|_{L_1} \leq \|x\|_X$, isto é, $X \subseteq L_1(hd\mu)$.

Vejamos que B_X é fechado em $L_1(hd\mu)$. De fato, seja $(x_n)_n$ sequência em B_X tal que $x_n \rightarrow x$ em norma de $L_1(hd\mu)$, isto é, $\|hx_n - hx\|_{L_1} \rightarrow 0$, portanto, existe uma subsequência de $(x_n)_n$, que denotamos por $(x_n)_n$, tal que $(x_n)_n$ converge q.s. para x , assim pela Proposição 2.14 temos que $(x_n)_n$ converge em medida relativa a x , logo $x \in B_X$, pois B_X é fechada na topologia da convergência em medida.

Seja $\|x_0\|_X > 1$ fixo. Agora, como B_X é fechado em $L_1(hd\mu)$, pelo teorema de separação de Hahn-Banach (Teorema 2.66), existe $x^* \in (L_1(hd\mu))'$ tal que

$$\sup_{y \in B_X} |x^*(y)| = \sup_{y \in B_X} \operatorname{Re}(x^*(y)) \leq 1$$

e $|x^*(x_0)| > 1$. Porém, os funcionais x^* em $(L_1(hd\mu))'$ são representados por

$$x^*(y) = \int y h^{-1} u d\mu$$

para alguma função $u \in L_\infty(h^{-1}d\mu)$, assim $h^{-1}u = x^* \in X^*$ e $x^* \in B_{X^*}$. Lembre-se que nós queremos demonstrar que

$$\|x\|_X = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)|,$$

para isso, é suficiente provar que para $\varepsilon > 0$, existe $x^* \in B_{X^*}$ tal que

$$|x^*(x)| > \|x\|_X - \varepsilon. \quad (5.1)$$

Se tomamos $x_0 = \frac{x}{\|x\|_X - \varepsilon}$, temos que $\|x_0\|_X > 1$, logo existe $x^* \in B_{X^*}$ tal que $x^*(x_0) > 1$, deste fato, deduzimos a desigualdade (5.1). $\square$

Proposição 5.12 Se X_0 e X_1 são espaços de Köthe, então

$$(X_0^*)^{1-\theta} \cdot (X_1^*)^\theta \subset (X_0^{1-\theta} \cdot X_1^\theta)^*.$$

Demonstração. Sejam $x^* \in (X_0^*)^{1-\theta} \cdot (X_1^*)^\theta$ e $x_0^* \in X_0^*$, $x_1^* \in X_1^*$, tais que $|x^*| = |x_0^*|^{1-\theta} |x_1^*|^\theta$. Seja $x \in B_{X_0^{1-\theta} \cdot X_1^\theta}$ arbitrário. Então existem $x_0 \in X_0$ e $x_1 \in X_1$, tais que $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$ e $\|x_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|x_1\|_{X_1}^\theta \leq 1$. Como $x_0^* \in X_0^*$ e $x_1^* \in X_1^*$, então $|x_0^*||x_0|, |x_1^*||x_1| \in L_1$, com

$$\int |x_0^*||x_0| d\mu \leq \|x_0^*\|_{X_0^*} \text{ e } \int |x_1^*||x_1| d\mu \leq \|x_1^*\|_{X_1^*}.$$

Agora pelos fatos de $(|x_0^*||x_0|)^{1-\theta} \in L_{1/(1-\theta)}$, $(|x_1^*||x_1|)^\theta \in L_{1/\theta}$ e pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \int |x||x^*| d\mu &= \int (|x_1||x_1^*|)^\theta \cdot (|x_0||x_0^*|)^{1-\theta} d\mu \\ &\leq \left(\int |x_1^*||x_1| d\mu \right)^\theta \cdot \left(\int |x_0^*||x_0| d\mu \right)^{1-\theta} \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*}^\theta \cdot \|x_0^*\|_{X_0^*}^{1-\theta} \cdot \|x_1\|_{X_1}^\theta \cdot \|x_0\|_{X_0}^{1-\theta} \\ &\leq \|x_1^*\|_{X_1^*}^\theta \cdot \|x_0^*\|_{X_0^*}^{1-\theta}, \end{aligned}$$

para todo $x \in B_X$, portanto, $\|x^*\|_{(X_0^{1-\theta} \cdot X_1^\theta)^*} \leq \|x_1^*\|_{X_1^*}^\theta \cdot \|x_0^*\|_{X_0^*}^{1-\theta}$ para todo $x_0^* \in X_0^*$ e $x_1^* \in X_1^*$, tais que $|x^*| = |x_0^*|^{1-\theta} |x_1^*|^\theta$, assim

$$\|x^*\|_{(X_0^{1-\theta} \cdot X_1^\theta)^*} \leq \|x^*\|_{(X_0^*)^{1-\theta} \cdot (X_1^*)^\theta}.$$

Isto prova que

$$(X_0^*)^{1-\theta} \cdot (X_1^*)^\theta \subset (X_0^{1-\theta} \cdot X_1^\theta)^*.$$

□

Lema 5.13 *Seja X um espaço de Köthe e $0 < \theta < 1$. Então o espaço θ -potência $X^{(\theta)}$ (ver Definição 2.41) satisfaz a seguintes propriedades:*

- A bola fechada unitária em $X^{(\theta)}$ é fechada na topologia da convergência q.s.
- Existe um h positivo em L_0 tal que

$$\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_{X^{(\theta)}},$$

para todo $x \in X^{(\theta)}$.

Demonstração. Para provar a primeira parte tomemos uma sequência $(z_n)_n$ em $B_{X^{(\theta)}}$ tal que converge q.s. para z . Imediatamente obtemos que $|z_n|^{1/\theta} \rightarrow |z|^{1/\theta}$ q.s., isto implica que $|z_n|^{1/\theta}$ converge em medida relativa para $|z|^{1/\theta}$. Como $|z_n|^{1/\theta}$ é uma sequência na bola unitária de X , nós concluímos pelo fato de X ser um espaço de Köthe, que $z^{1/\theta} \in X$ e assim $z \in X^{(\theta)}$.

Provaremos agora a segunda parte. De fato, seja $z \in X^{(\theta)}$. Como X é um espaço de Köthe, então existe $\bar{h} > 0$ tal que

$$\|\bar{h}\bar{x}\|_{L_1} \leq \|\bar{x}\|_X \text{ para todo } \bar{x} \in X,$$

em particular

$$\left\| \bar{h}|z|^{1/\theta} \right\|_{L_1} \leq \left\| |z|^{1/\theta} \right\|_X,$$

consequentemente,

$$\left\| \bar{h}|z|^{1/\theta} \right\|_{L_1} \leq \left\| |z|^{1/\theta} \right\|_X,$$

portanto,

$$\left\| \bar{h}|z|^{1/\theta} \right\|_{L_1}^\theta \leq \|z\|_{X^{(\theta)}},$$

logo,

$$\left(\int \bar{h}|z|^{1/\theta} d\mu \right)^\theta \leq \|z\|_{X^{(\theta)}}.$$

Como S é σ -finita, então existe uma sequência de conjuntos mensuráveis disjuntos $(S_n)_n$ tal que $0 < \mu(S_k) < \infty$ e $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$, portanto,

$$\left\| \bar{h}1_{S_k}|z|^{1/\theta} \right\|_{L_1} \leq \left\| 1_{S_k}|z|^{1/\theta} \right\|_X,$$

logo,

$$\left\| \bar{h}1_{S_k}|z|^{1/\theta} \right\|_{L_1}^\theta \leq \left\| 1_{S_k}|z|^{1/\theta} \right\|_X^\theta,$$

consequentemente,

$$\left(\int_{S_k} \bar{h}|z|^{1/\theta} d\mu \right)^\theta \leq \|z\|_{X^{(\theta)}}^\theta,$$

finalmente,

$$\left(\mu(S_k) \cdot \frac{1}{\mu(S_k)} \int_{S_k} \bar{h}|z|^{1/\theta} d\mu \right)^\theta \leq \|z\|_{X^{(\theta)}}^\theta,$$

e como $0 < \theta < 1$, a desigualdade de Jensen (ver Teorema 2.55) garante que

$$\mu(S_k)^{\theta-1} \int_{S_k} \bar{h}^\theta |z| d\mu \leq \left(\mu(S_k) \cdot \frac{1}{\mu(S_k)} \int_{S_k} \bar{h}|z|^{1/\theta} d\mu \right)^\theta,$$

escrevendo $c_k = \frac{1}{\mu(S_k)^{\theta-1}}$, obtemos que

$$\|\bar{h} \cdot 1_{S_k} z\|_{L_1} \leq c_k \|z\|_{X^{(\theta)}}.$$

Definindo

$$h(s) = \frac{1_{S_k} \cdot \bar{h}(s)}{2^k \cdot c_k}, \text{ se } s \in S_k,$$

temos que

$$\begin{aligned} \|hz\|_{L_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot c_k} \|\bar{h} 1_{S_k} z\|_{L_1} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot c_k} \cdot c_k \|z\|_{X^{(\theta)}} \\ &= \|z\|_{X^{(\theta)}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 5.14 *Se (X_0, X_1) é um par interpolados de espaços de Köthe, então $X_\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ é um espaço de Köthe para $0 < \theta < 1$.*

Demonstração. Vamos aprovar o teorema por partes:

Passo 1. Primeiro, encontremos $h \in L_0$ positivo tal que $\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_{X_\theta}$ para todo $x \in X_\theta$. Pela hipótese de X_0 e X_1 serem espaços de Köthe, existem $h_0, h_1 \in L_0$ positivos tais que $\|h_0 x_0\|_{L_1} \leq \|x_0\|_{X_0}$ para todo $x_0 \in X_0$ e $\|h_1 x_1\|_{L_1} \leq \|x_1\|_{X_1}$ para todo $x_1 \in X_1$. Então, para todo x_0 e x_1 tais que $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$ e pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|x_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|x_1\|_{X_1}^\theta &\geq \|h_0 x_0\|_{L_1}^{1-\theta} \|h_1 x_1\|_{L_1}^\theta \\ &= \left(\int (|h_0 x_0|^{1-\theta})^{1/(1-\theta)} d\mu \right)^{1-\theta} \left(\int (|h_1 x_1|^\theta)^{1/\theta} d\mu \right)^\theta \\ &\geq \int |h_0 x_0|^{1-\theta} |h_1 x_1|^\theta d\mu \\ &= \|h_0^{1-\theta} h_1^\theta x\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Se $h = h_0^{1-\theta} h_1^\theta$, nós concluímos que $\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_{X_\theta}$ para todo $x \in X_\theta$.

Passo 2. A bola unitária B_{X_θ} contém um elemento positivo. De fato, como X_0 e X_1 são espaços de Köthe, então existem elementos positivos x_0 e x_1 em B_{X_0} e B_{X_1} , respectivamente. Definindo $|x| = |x_0|^{1-\theta}|x_1|^\theta$, temos que $|x|$ é um elemento positivo de B_{X_θ} .

Passo 3. Afirmamos que

$$\text{se } |y| \leq |x|, \text{ com } x \in X_\theta, \text{ então } y \in X_\theta \text{ e } \|y\|_{X_\theta} \leq \|x\|_{X_\theta}.$$

De fato, sejam x_0 e x_1 tais que $|x| = |x_0|^{1-\theta}|x_1|^\theta$. Agora

$$\left(|y||x_1|^{-\theta}\right)|x_1|^\theta \leq |x_0|^{1-\theta}|x_1|^\theta,$$

o que implica $|y_0| = \left(|y||x_1|^{-\theta}\right)^{1/(1-\theta)} \leq |x_0|$, assim $y_0 \in X_0$ e $\|y_0\|_{X_0} \leq \|x_0\|_{X_0}$. Se escrevemos $|y_1| = |x_1|$, obtemos que $|y| = |y_0|^{1-\theta}|y_1|^\theta$, isto é, $y \in X_\theta$. É imediato ver que

$$\|y\|_{X_\theta} \leq \|y_0\|_{X_0}^{1-\theta}\|y_1\|_{X_1}^\theta \leq \|x_0\|_{X_0}^{1-\theta}\|x_1\|_{X_1}^\theta,$$

portanto, $\|y\|_{X_\theta} \leq \|x_0\|_{X_0}^{1-\theta}\|x_1\|_{X_1}^\theta$ para todo x_0 e todo x_1 tais que $|x| = |x_0|^{1-\theta}|x_1|^\theta$, logo $\|y\|_{X_\theta} \leq \|x\|_{X_\theta}$.

Passo 4. Provaremos que B_{X_θ} é fechada em L_0 . Seja $(x_n)_n$ uma sequência em B_{X_θ} que converge em medida para x . Vejamos que $x \in B_{X_\theta}$. De fato, como $(x_n)_n$ converge em medida para x , então, existe uma subsequência de $(x_n)_n$ que converge q.s. para x , que denotamos por $(x_n)_n$. Existem sequências $(v_n)_n$ e $(w_n)_n$ não negativas em X_0 e X_1 , respectivamente, tais que $\|v_n\|_{X_0}^{1-\theta} = 1$ e $\|w_n\|_{X_1}^\theta \leq 1 + \frac{1}{2^n}$ com $|x_n| = v_n^{1-\theta}w_n^\theta$. Seja $X_1^{(\theta)}$ o espaço θ -potência de espaço X_1 (ver Subseção 2.3.1). Lembre-se que o espaço $X_1^{(\theta)}$ é definido por

$$X_1^{(\theta)} = \{x \in L_0 : |x|^{1/\theta} \in X_1\}$$

e normado por

$$\|x\|_{X_1^{(\theta)}} = \left\| |x|^{1/\theta} \right\|_{X_1}.$$

Se denotamos $\bar{w}_n = w_n^\theta$, temos que $\bar{w}_n \in X_1^{(\theta)}$ e $\|\bar{w}_n\|_{X_1^{(\theta)}} = \|w_n\|_{X_1}^\theta$, portanto $\|\bar{w}_n\|_{X_1^{(\theta)}} \leq 1 + \frac{1}{2^n}$. Doravante, dividimos a prova do Passo 4. para facilitar sua compreensão.

Passo 4.A. Sejam $(v_n)_n$ e $(w_n)_n$ do Passo 4. Demonstraremos que existem subsequências $(\bar{w}_{(n,n)})_n$ e $(\bar{v}_{(n,n)})_n$, de $(\bar{w}_n)_n$ e $(\bar{v}_n)_n$, respectivamente, com $|x| = \bar{w}_{(n,n)}\bar{v}_{(n,n)}$ e elementos $\bar{w} \geq 0$ e $\bar{v} \geq 0$ em $B_{X_1^{(\theta)}}$ e $B_{X_0^{(1-\theta)}}$, respectivamente, tais que para toda subsequência $(g_{n_k})_k$ de $(\bar{w}_{(n,n)})_n$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_{n_k} \xrightarrow{q.s.} \bar{w}$$

e toda para toda subsequência $(f_{n_k})_k$ de $(\bar{v}_{(n,n)})_n$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{n_k} \xrightarrow{q.s.} \bar{v}.$$

De fato, o espaço S pode-se escrever como $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$, onde $S_k \subseteq S_{k+1}$ e $\mu(S_k) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (lembre-se que μ é σ -finita). Pelo Lema 5.13, item 2 e pelo fato de ser $(\bar{w}_n)_n$ uma sequência limitada em $X_1^{(\theta)}$, obtemos que $(h\bar{w}_n)_n$ é uma sequência limitada em $L_1(S, \mu)$, portanto, limitada em $L_1(S_1, \mu)$, assim, pelo teorema de Komlós (ver Teorema 2.57), encontramos uma subsêquência $(\bar{w}_{(1,n)})_n$ de $(\bar{w}_n)_n$ tal que para qualquer subsequência $(g_n)_n$ de $(\bar{w}_{(1,n)})_n$, a sequência $(hg_n)_n$ é Cesàro-convergente para algum $\bar{g}_1 \in L_1(S_1, \mu)$ em S_1 , isto é,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n hg_k \xrightarrow{q.s.} \bar{g}_1,$$

se $n \rightarrow \infty$.

Similarmente $(h\bar{w}_{(1,n)})_n$ é limitada em $L_1(S_2, \mu)$, usando novamente o teorema de Komlós, encontramos uma subsêquência $(\bar{w}_{(2,n)})_n$ de $(\bar{w}_{(1,n)})_n$ tal que para qualquer subsequência $(g_n)_n$ de $(\bar{w}_{(2,n)})_n$, a sequência $(hg_n)_n$ é Cesàro-convergente para algum $\bar{g}_2 \in L_1(S_2, \mu)$ em S_2 , isto é,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n hg_k \xrightarrow{q.s.} \bar{g}_2,$$

se $n \rightarrow \infty$.

Observe que $\bar{g}_2 = \bar{g}_1$ em S_1 , pois $S_1 \subseteq S_2$. Usando indução, encontramos para $j \in \mathbb{N}$ fixo, uma subsequência $(\bar{w}_{(j,n)})_n$ de $(\bar{w}_{(j-1,n)})_n$, portanto de $(\bar{w}_n)_n$, e $\bar{g}_j \in L_1(S_j, \mu)$, com $\bar{g}_j = \bar{g}_{j-1}$ em S_{j-1} , tal que para toda subsequência $(g_n)_n$ de $(\bar{w}_{(j,n)})_n$ a sequência $(hg_n)_n$ é Cesàro-convergente para $\bar{g}_j$ em S_1 , isto é,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n hg_k \xrightarrow{q.s.} \bar{g}_j,$$

se $n \rightarrow \infty$.

Assumamos sem perda de generalidade que $\bar{w}_{(j+1,n)} = \bar{w}_{(j,n)}$ para todo $n \leq j+1$. Definamos uma função $\bar{g}$ em S como $\bar{g}(s) := \bar{g}_j(s)$ se $s \in S_j$. Ela está bem definida, pois se $s \in S_j \cap S_{j+1}$, então $\bar{g}_j(s) = \bar{g}_{j+1}(s)$. Também, $\bar{g}$ assim definida está em L_0 . Agora tomando a subsequência diagonal $(\bar{w}_{(n,n)})_n$, obtemos uma subsequência de $(\bar{w}_{(j,n)})_n$ para $j \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer subsequência $(g_n)_n$ de $(\bar{w}_{(n,n)})_n$, obtemos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n hg_k \xrightarrow{q.s.} \bar{g}$$

em S . Demonstraremos agora que $\bar{g}h^{-1} \in X_1^{(\theta)}$. De fato, seja $G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_k$

$$\begin{aligned}
\|G_n\|_{X_1^{(\theta)}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|g_k\|_{X_1^{(\theta)}} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Fixemos $j \in \mathbb{N}$. Então $\|G_n\|_{X_1^{(\theta)}} \leq 1 + \frac{1}{j}$ sempre que $n \geq j$. Se definimos a subsequência $\tilde{G}_n = G_{j+n}$, de $(G_n)_n$, temos que $\|\tilde{G}_n\|_{X_1^{(\theta)}} \leq 1 + \frac{1}{j}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também obtemos que $\tilde{G}_n \xrightarrow{q.s.} h^{-1}\bar{g}$, e por $B_{X_1^{(\theta)}}$ ser fechada na topologia da convergência q.s. (ver Lema 5.13, item 1), concluimos que $h^{-1}\bar{g} \in X_1^{(\theta)}$ e

$$\|h^{-1}\bar{g}\|_{X_1^{(\theta)}} \leq 1 + \frac{1}{j}$$

para j natural arbitrário, logo $\|h^{-1}\bar{g}\|_{X_1^{(\theta)}} \leq 1$. Denotemos por $\bar{w} = h^{-1}\bar{g} \geq 0$. Resumindo, existe uma subsequência $(\bar{w}_{(n,n)})_n$ de $(\bar{w}_n)_n$ e um elemento $\bar{w} \geq 0$ em $B_{X_1^{(\theta)}}$ tal que para toda subsequência $(g_{n_k})_k$ de $(\bar{w}_{(n,n)})_n$, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_{n_k} \xrightarrow{q.s.} \bar{w}.$$

Usando o mesmo argumento, encontramos uma subsequência $(\bar{v}_{(n,n)})_n$ de $(\bar{v}_n)_n$ e um elemento $\bar{v} \geq 0$ em $B_{X_0^{(1-\theta)}}$ tal que para toda subsequência $(f_{n_k})_k$ de $(\bar{v}_{(n,n)})_n$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{n_k} \xrightarrow{q.s.} \bar{v}$$

com $|x| = \bar{w}_{(n,n)}\bar{v}_{(n,n)}$.

Passo 4.B. Vejamos que $x \in B_{X_\theta}$. De fato, Como $|x| = \bar{w}_{(n,n)}\bar{v}_{(n,n)}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{w}_{(k,k)} \xrightarrow{q.s.} \bar{w}$$

e

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{v}_{(k,k)} \xrightarrow{q.s.} \bar{v},$$

a Proposição 2.77 implica que $|x| \leq \bar{w}\bar{v}$. Afirmamos que existe $\bar{w} \in X_1^{(\theta)}$ tal que $|x| = \bar{w}\bar{v}$. De fato, pela desigualdade $\frac{|x|}{\bar{v}} \leq \bar{w}$ e pelo fato de ser $X_1^{(\theta)}$ um espaço de Banach reticulado, temos que $\frac{|x|}{\bar{v}} \in X_1^{(\theta)}$ e

$$\left\| \frac{|x|}{\bar{v}} \right\|_{X_1^{(1/\theta)}} \leq \|\bar{w}\|_{X_1^{(1/\theta)}} \leq 1.$$

Nós demonstramos que existem $\bar{w} \in X_1^{(\theta)}$ e $\bar{v} \in X_1^{(1-\theta)}$ tais que $|x| = \bar{w}\bar{v}$, com $\bar{w} \in B_{X_1^{(\theta)}}$ e $\bar{v} \in B_{X_0^{(1-\theta)}}$. Se escrevemos $\bar{w}^{1/\theta} = u_1$ e $\bar{v}^{1/(1-\theta)} = u_0$, temos que $u_i \in B_{X_i}$ para $i = 0, 1$ e

$$|x| = u_0^{1-\theta} u_1^\theta,$$

daquí $x \in B_{X_\theta}$. □

Proposição 5.15 *Se X é um espaço de Köthe p -convexo, então o espaço $X^{(p)}$, que denotamos por X^p , é um espaço de Köthe.*

Demonstração. Vamos dividir a prova em partes:

Passo 1. X^p é um espaço normado com $\|\cdot\|_{X^p}$. De fato,

$$0 = \|x\|_{X^p} = \left\| |x|^{\frac{1}{p}} \right\|_X^p \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Para λ escalar, temos que

$$\|\lambda x\|_{X^p} = \left\| |\lambda x|^{\frac{1}{p}} \right\|_X^p = |\lambda| \left\| |x|^{\frac{1}{p}} \right\|_X^p = |\lambda| \|x\|_{X^p}.$$

Vamos provar a desigualdade triangular. De fato, como X é um espaço p -convexo, segue-se

$$\left\| (|x_0|^p + |y_0|^p)^{1/p} \right\|_X \leq \left(\|x_0\|_X^p + \|y_0\|_X^p \right)^{1/p} \quad (5.2)$$

para todo $x_0, y_0 \in X$. Se $x, y \in X^p$, então $|x|^{1/p}, |y|^{1/p} \in X$, substituindo x_0, y_0 respectivamente por $|x|^{1/p}, |y|^{1/p}$ em (5.2), obtemos que

$$\left\| (|x| + |y|)^{1/p} \right\|_X \leq \left(\left\| |x|^{1/p} \right\|_X^p + \left\| |y|^{1/p} \right\|_X^p \right)^{1/p} \quad (5.3)$$

Por outro lado, $|x+y|^{1/p} \leq (|x|+|y|)^{1/p}$ e por X ser um espaço de Köthe, deduzimos $\left\| |x+y|^{1/p} \right\|_X \leq \left\| (|x| + |y|)^{1/p} \right\|_X$, desta desigualdade e (5.3), segue-se que

$$\left\| |x + y|^{1/p} \right\|_X \leq \left(\left\| |x|^{1/p} \right\|_X^p + \left\| |y|^{1/p} \right\|_X^p \right)^{1/p} \quad (5.4)$$

e assim

$$\|x + y\|_{X^p} \leq \|x\|_{X^p} + \|y\|_{X^p}.$$

Passo 2. A bola unitária B_{X^p} é fechada em L_0 . De fato, seja $(x_n)_n$ uma sequência em B_{X^p} que converge em medida para x . Note que $|x_n|^{1/p}$ converge em medida para $|x|^{1/p}$. Como $(|x_n|^{1/p})_n$ é uma sequência em B_X , segue-se que $|x|^{1/p} \in B_X$, assim $x \in B_{X^p}$.

Passo 3. Demonstraremos que existe h positivo tal que

$$\|hx\|_{L_1} \leq \|x\|_{X^p}$$

para todo $x \in X^p$. De fato, por X ser um espaço de Köthe, existe $\bar{h}$ positiva tal que

$$\|\bar{h}y\|_{L_1} \leq \|y\|_X$$

para todo $y \in X$. Suponha $x \in X^p$ tal que $\|x\|_{X^p} = 1$. Então $|x|^{1/p} \in X$ e segue-se que

$$\left\| \bar{h}|x|^{1/p} \right\|_{L_1} \leq 1,$$

isto implica que existe um conjunto A , com $\mu(A) = 0$, tal que

$$\bar{h}(s) |x(s)|^{1/p} \leq 1$$

para todo $s \in S/A$, portanto

$$\bar{h}^p(s) |x(s)| \leq 1,$$

se $s \in S/A$. Agora, por μ ser uma medida σ -finita, escrevemos $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$, onde $0 < \mu(S_k) < \infty$ e $(S_k)_k$ é uma sequência de conjuntos disjuntos. Note que

$$\|\bar{h}^p x 1_{S_k}\|_{L_1} \leq \mu(S_k).$$

Definindo

$$h(s) = \frac{\bar{h}^p(s)}{2^k \cdot \mu(S_k)}, \text{ se } s \in S_k,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \|xh\|_{L_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} |x(s)| h(s) d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| x \cdot \frac{\bar{h}^p \cdot 1_{S_k}}{2^k \cdot \mu(S_k)} \right\|_{L_1} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Agora para $x \in X^p$, com $x \neq 0$, temos que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_{X^p}} \cdot h \right\|_{L_1} \leq 1,$$

assim $\|xh\|_{L_1} \leq \|x\|_{X^p}$.

Passo 4. Verifiquemos a condição da definição de espaço de Köthe. De fato, suponhamos $|x(s)| \leq |y(s)|$ para quase todo $s \in S$ com x mensurável e $y \in X^p$. Observe que $|x(s)|^{1/p} \leq |y(s)|^{1/p}$ para quase todo $s \in S$, onde $|y|^{1/p} \in X$, pelo fato de X ser um espaço de Köthe, temos que $|x|^{1/p} \in X$ e

$$\left\| |x|^{1/p} \right\|_X^p \leq \left\| |y|^{1/p} \right\|_X^p$$

isto mostra $x \in X^p$ e $\|x\|_{X^p} \leq \|y\|_{X^p}$. □

Capítulo 6

O indicador de um espaço de funções g -convexo

Neste capítulo introduzimos o conceito de indicador de um espaço de funções g -convexo e provamos algumas das suas propriedades.

Definição 6.1 (Semi-ideal) *Um subconjunto $\mathcal{T}$ do cone L_1^+ é chamado de semi-ideal, se $\mathcal{T}$ é um cone e verifica que*

$$\text{se } 0 \leq f \leq g, \text{ com } g \in \mathcal{T}, \text{ implica que } f \in \mathcal{T}.$$

Além disso, se $\mathcal{T}$ contém um elemento estritamente positivo, então $\mathcal{T}$ é chamado semi-ideal estrito.

Definição 6.2 (Semi-ideal associado a um espaço de funções g -convexos) *Seja X um espaço de funções g -convexos. Para cada $x \in X$, consideremos o conjunto $A = \{s \in S : |x(s)| > 1\}$. Nós definimos $\mathcal{T}_X$ como o semi-ideal de todos os $f \in L_1^+$ tais que*

•

$$\sup_{x \in B_X} \int_A f \log |x| d\mu < \infty, \quad (6.1)$$

• e existe $x \in B_X$ tal que

$$\int_A f |\log |x|| d\mu < \infty. \quad (6.2)$$

Denotamos simplesmente por $\int f \log_+ |x| d\mu$ a integral $\int_A f \log |x| d\mu$, onde $A = \{s \in S : |x(s)| > 1\}$.

6.1 Propriedades dos indicadores

Definição 6.3 (Indicador de um espaço de funções g -convexo) Para $f \in \mathcal{T}_X$ definimos o indicador de X , por

$$\Phi_X(f) = \sup_{x \in B_X} \int_S f \log |x| d\mu. \quad (6.3)$$

Observe que a definição de $\mathcal{T}_X$ implica que $-\Phi_X(f) \in \mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{T}_X$.

Denotamos como $L \log L$ o subconjunto de L_1 tal que $f(1 + |\log |f||) \in L_1$.

6.1 Propriedades dos indicadores

Proposição 6.4 Se $1 \leq p < \infty$, então $\mathcal{T}_{L_p} = (L \log L)_+$ e

$$\Phi_{L_p}(f) = \frac{1}{p} \int_S f \log \frac{f}{\|f\|_{L_1}} d\mu.$$

Demonstração. Suponhamos $f \in (L \log L)_+$, isto é, $f(1 + |\log |f||) \in L_1$ e $f > 0$. Sem perda de generalidade podemos supor $\|f\|_{L_1} = 1$. Seja $\|x\|_{L_p} \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} \int f \log_+ |x| d\mu &= \frac{1}{p} \int_A f \log |x|^p d\mu \\ &= \frac{1}{p} \int_A f \log f d\mu + \frac{1}{p} \int_A f \log \frac{|x|^p}{f} d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} \int_A f \log |f| d\mu + \frac{1}{p} \int_A |x|^p d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} \int_A f |\log |f|| d\mu + \frac{1}{p} \|x\|_{L_p}^p \\ &\leq \frac{1}{p} \int_A f |\log |f|| d\mu + \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

logo $\int f \log_+ |x| d\mu < \infty$, portanto, (6.1) é verdadeira. Para (6.2) basta tomar $x = f^{1/p}$. Nós mostramos que $(L \log L)_+ \subset \mathcal{T}_{L_p}$.

Reciprocamente, seja $f \in \mathcal{T}_{L_p}$ e suponha sem perda de generalidade que $\|f\|_{L_1} = 1$. Agora por (6.2), existe $x \in B_{L_p}$ tal que $f \log |x|$ é integrável. Pela desigualdade de Jensen (ver Teorema 2.55), temos que

$$\int f \log \frac{|x|^p}{f} d\mu \leq \log \int |x|^p d\mu = \log \|x\|_{L_p}^p d\mu \leq 0$$

6.1 Propriedades dos indicadores

e desta desigualdade concluímos

$$\int f \log |x|^p d\mu \leq \int f \log f d\mu,$$

isto é

$$\int f \log |x| d\mu \leq \int f \log f^{1/p} d\mu.$$

A integral da direita existe, pois (6.1) vale e em particular vale para $f^{1/p} \in B_{L_p}$. Logo

$$\Phi_{L_p}(f) = \frac{1}{p} \int_S f \log f d\mu.$$

Observe que Φ_X é uma função homogênea, portanto, a igualdade vale para todo $f \neq 0$. $\square$

Observe que denotando $\Lambda = \Phi_{L_1}$, temos que $\Phi_{L_p} = \frac{1}{p} \Lambda$.

Teorema 6.5 (Fatoração de Lozanovskii) *Seja X um espaço de Köthe e $f \in L_1(\mu)$. Então existe um único par (x, x^*) em $X \times X^*$, com $x \geq 0$, $\|x\|_X = 1$, $\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_{L_1}$ e $\text{supp}(x) = \text{supp}(x^*) = \text{supp}(f)$ tal que $f = x \cdot x^*$.*

A prova deste teorema pode ser vista na referência [25]. Por simplicidade, vamos dar uma prova da fatoração de Lozanovskii para espaços de Banach de seqüências (Ver seção 2.3.3).

Teorema 6.6 (Fatoração de Lozanovskii para E.B.S) *Sejam X um espaço de Banach de seqüências e $u \in l_1$, $u \geq 0$ com $\|u\|_{l_1} = 1$. Então existem $x \in B_X$ e $x^* \in B_{X^*}$, $x \geq 0$, $x^* \geq 0$ tais que $u = x \cdot x^*$. Os elementos x^* e x são únicos se assumirmos que $x_n = x_n^* = 0$ sempre que $u_n = 0$.*

Demonstração. Assumamos primeiro que $u \in c_{00}$ fixo, onde c_{00} denota o espaço das seqüências de suporte finito. Escolhamos $x \in B_X$, com $x \geq 0$, tal que, maximize

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \log |x_n|,$$

escrevendo por conveniência $\log 0 := 0$. Note que tal x existe, pois a função

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n \log |x_n|$$

definida em $\mathbb{R}^n$ atinge um máximo em $B_{\mathbb{R}^n}$ pelo fato de ser contínua. Se $\xi \in B_X$ com $\xi \geq 0$, então

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \log(x_n + t(\xi_n - x_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \log x_n$$

para todo $0 \leq t \leq 1$, pois $x + t(\xi - x) \in B_X$ devido a que B_X é convexa e pela forma como nós escolhemos x . Observe que se $u_n > 0$, então $x_n > 0$. Derivando a expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \log(x_n + t(\xi_n - x_n)) \quad (6.4)$$

em relação a t obtemos

$$\sum_{u_n \neq 0} u_n \frac{\xi_n - x_n}{x_n + t(\xi_n - x_n)}.$$

A expressão (6.4) tem um máximo em $t = 0$, portanto a derivada nesse ponto é não positiva, isto é,

$$\sum_{u_n \neq 0} u_n \frac{\xi_n - x_n}{x_n} \leq 0. \quad (6.5)$$

Definamos $x_n^* = \frac{u_n}{x_n}$ se $x_n \neq 0$ e zero nos outros casos. Da desigualdade (6.5), temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq 1,$$

assim $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$. Com isso, provamos a parte da existência do teorema.

Agora provaremos a unicidade do teorema. De fato, suponha que existam $y \in B_X$ e $y^* \in B_{X^*}$ tais que $y \geq 0$, $y^* \geq 0$ e $u = y \cdot y^*$. Pela convexidade das bolas obtemos que

$$\frac{x+y}{2} \in B_X \quad \text{e} \quad \frac{x^*+y^*}{2} \in B_{X^*}$$

logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} (x_n + y_n)(x_n^* + y_n^*) \leq \left\| \frac{x^* + y^*}{2} \right\|_{X^*} \leq 1. \quad (6.6)$$

Usando a desigualdade acima, os fatos $u = x \cdot x^* = y \cdot y^*$ e $\sum_{k=1}^n u_n = 1$, provamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n y_n^* + y_n x_n^*) \leq 2,$$

sustituindo $y_n^* = \frac{u_n}{y_n}$ e $x_n^* = \frac{u_n}{x_n}$, com $x_n y_n \neq 0$, e $u_n \neq 0$ na última desigualdade, obtemos que

$$\sum_{x_n y_n \neq 0} \left(\frac{x_n^2 u_n + y_n^2 u_n}{x_n y_n} \right) \leq 2,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

logo,

$$\sum_{x_n y_n \neq 0} \left(\frac{x_n^2 u_n + y_n^2 u_n}{x_n y_n} - 2u_n \right) \leq 0,$$

portanto,

$$\sum_{x_n y_n \neq 0} u_n \left(\frac{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n}{x_n y_n} \right) \leq 0,$$

consequentemente,

$$\sum_{x_n y_n \neq 0} u_n \frac{(x_n - y_n)^2}{x_n y_n} \leq 0.$$

Da última desigualdade obtemos $x_n = y_n$. Logo $x_n^* = y_n^*$.

Agora suponhamos que $u \in l_1$, com $\|u\|_{l_1} = 1$ e $u_n = (u^1, \dots, u^n, 0, 0, \dots) \in c_{00}$. Note que $|u_n^k| \leq u^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $\|u_n\|_{l_1} \leq \|u\|_{l_1} = 1$. Então existem $x_n \in B_X$ e $x_n^* \in B_{X^*}$, com $x_n \geq 0$, $x_n^* \geq 0$, tais que

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{l_1}} = x_n \cdot x_n^*,$$

onde $u_n = \|u_n\|_{l_1} x_n \cdot x_n^*$. Se definirmos $x_n := \|u_n\|_{l_1} x_n$ obteremos $\|x_n\|_X \leq 1$ e $u_n = x_n \cdot x_n^*$. Como $|x_n^1| \leq C_1 \|x_n\|_X \leq C_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (lembre-se que para todo $k \in \mathbb{N}$, o funcional $x \mapsto x^k$ é contínuo), então existe uma subsequência de $(x_n^1)_n$ tal que $x_n^1 \rightarrow y^1$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $y^1 \geq 0$. Por indução demonstramos que existe uma subsequência de $(x_n)_n$ que denotaremos por $(x_n)_n$, tal que, $x_n^k \rightarrow y^k$ se $n \rightarrow \infty$ para $k \in \mathbb{N}$. Assim, x_n converge pontualmente para y , logo $y \in B_X$, pois X é um E.B.S. Da mesma forma, provamos que existe uma subsequência de $(x_n^*)_n$, que denotaremos por $(x_n^*)_n$, que converge pontualmente para algum $y \in B_{X^*}$. Logo, $u_n = x_n \cdot x_n^*$ converge pontualmente para $y \cdot y^*$. Porém u_n converge em norma de l_1 para u , logo $u = y \cdot y^*$. A unicidade pode ser provada de forma análoga ao caso $u \in c_{00}$. $\square$

Observação 6.7 Se f é uma função de valor real, então x^* é uma função de valor real.

O seguinte resultado relaciona os indicadores de um espaço e seu dual de Köthe.

Proposição 6.8 Se X um espaço de Köthe, então

$$\Phi_X(f) + \Phi_{X^*}(f) = \Lambda(f) \tag{6.7}$$

para todo $f \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_{X^*}$

Demonstração. Seja $z \in B_{L_1}$. Pela fatorao de Lozanovskii temos que existem $x \in B_X$, $y \in B_{X^*}$ no negativos tais que $\frac{|z|}{\|z\|} = xy$. Logo

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\begin{aligned}
\int f \log |z| d\mu &= \int f \log |xy| d\mu + \int f \log \|z\| d\mu \\
&\leq \int f \log |x| d\mu + \int f \log |y| d\mu \\
&\leq \Phi_X(f) + \Phi_{X^*}(f),
\end{aligned}$$

portanto $\Lambda(f) \leq \Phi_X(f) + \Phi_{X^*}(f)$.

Reciprocamente, suponha $x \in B_X$ e $y \in B_{X^*}$. Pelo fato $|xy| \in L_1(\mu)$, temos que

$$\begin{aligned}
\int f \log |x| d\mu + \int f \log |y| d\mu &= \int f \log |xy| d\mu \\
&\leq \Lambda(f)
\end{aligned}$$

e então vale a desigualdade inversa.

Se $\|f\| = 1$, então escrevemos Φ_X como $\Phi_X(f) = \int f \log |x| d\mu$, onde $f = xy$ é a fatoração de Lozanovskii. De fato, para $\xi \in B_X$

$$\begin{aligned}
\int f \log |\xi| d\mu &= \int f \log |\xi y| d\mu - \int f \log |y| d\mu \\
&\leq \Phi_{L_1}(f) - \int f \log |y| d\mu \\
&= \int f \log f d\mu - \int f \log |y| d\mu \\
&= \int f \log |x| d\mu.
\end{aligned}$$

□

Proposição 6.9 *Sejam X_0, X_1 espaços de Köthe e $X_\theta = X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ um espaço interpolado com $0 < \theta < 1$. Então*

$$\Phi_{X_\theta}(f) = (1 - \theta) \Phi_{X_0}(f) + \theta \Phi_{X_1}(f) \quad (6.8)$$

Demonstração. Seja $x \in B_{X_\theta}$. Existem x_0 e x_1 em B_{X_0} e B_{X_1} respectivamente, tais que $|x| = |x_0|^{1-\theta} |x_1|^\theta$. Então

$$\begin{aligned}
\int f \log |x| d\mu &= \int f \log |x_0|^\theta |x_1|^{1-\theta} d\mu \\
&= (1 - \theta) \int f \log |x_0| d\mu + \theta \int f \log |x_1| d\mu \\
&\leq (1 - \theta) \Phi_{X_0}(f) + \theta \Phi_{X_1}(f).
\end{aligned}$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Com isso provamos que $\Phi_{X_\theta}(f) \leq (1 - \theta) \Phi_{X_0}(f) + \theta \Phi_{X_1}(f)$. Supondo x_0 em B_{X_0} e x_1 em B_{X_1} , temos que

$$\begin{aligned} (1 - \theta) \int f \log |x_0| d\mu + \theta \int f \log |x_1| d\mu &= \int f \log |x_0|^\theta |x_1|^{1-\theta} d\mu \\ &\leq \Phi_{X_\theta}(f), \end{aligned}$$

portanto, $\Phi_{X_\theta}(f) \geq (1 - \theta) \Phi_{X_0}(f) + \theta \Phi_{X_1}(f)$. □

Proposição 6.10 *Se X um espaço de Köthe p -convexo, então $\Phi_{X^p} = p\Phi_X$.*

Demonstração. Note que se X é um espaço de Köthe p -convexo, então X^p é um espaço de Köthe. Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi_{X^p}(f) &= \sup_{\|x\|_{X^p} \leq 1} \int f \log |x| d\mu \\ &= p \sup_{\|x\|_{X^p} \leq 1} \int f \log |x|^{1/p} d\mu \\ &= p \sup_{\| |x|^{1/p} \|_X \leq 1} \int f \log |x|^{1/p} d\mu \\ &\leq p \sup_{\|y\|_X \leq 1} \int f \log |y| d\mu \\ &= p \Phi_X(f). \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \Phi_X(f) &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \int f \log |x| d\mu \\ &= \frac{1}{p} \sup_{\|x\|_X \leq 1} \int f \log |x|^p d\mu \\ &= \frac{1}{p} \sup_{\left\| (|x|^p)^{1/p} \right\|_X \leq 1} \int f \log |x|^p d\mu \end{aligned}$$

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \sup_{\left\| |x|^p \right\|_{X^p} \leq 1} \int f \log |x|^p d\mu \\
&\leq \frac{1}{p} \sup_{\|y\|_{X^p} \leq 1} \int f \log |y| d\mu \\
&= \frac{1}{p} \Phi_{X^p}(f).
\end{aligned}$$

Logo $\Phi_{X^p} = p\Phi_X$. □

Definição 6.11 (Funcional semilinear) *Seja $\mathcal{T}$ um semi-ideal de L_1^+ . Uma função $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de funcional semilinear, se*

1. Φ é homogêneo positivo, isto é, $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ para todo $\lambda \geq 0$.
2. Existe uma constante $\delta(\Phi) > 0$ tal que

$$|\Delta_\Phi(f, g)| \leq \delta(\Phi) \cdot (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}),$$

para todo $f, g \in \mathcal{T}$, onde $\Delta_\Phi(f, g) = \Phi(f) + \Phi(g) - \Phi(f + g)$.

3. Se $f \in \mathcal{T}$ e $(f_n)_n$ é uma sequência de $\mathcal{T}$ tal que $0 \leq f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n) = 0$.

Vamos denotar como $\delta(\Phi)$ a menor constante que verifica essa condição.

Segue de forma imediata da definição que se Φ, Ψ são funcionais lineares e λ é um número real, então $\lambda\Phi + \Psi$ é um funcional semilinear.

Observação 6.12 *Vamos denotar por*

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k=1}^n \Phi(f_k) - \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right).$$

É imediato provar que se $\Phi, \Psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ são funcionais homogêneos e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\Delta_{\Psi + \lambda\Phi}(f_1, \dots, f_n) = \Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) + \lambda \Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n).$$

Por indução, prova-se que

$$\left| \Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) \right| \leq (n-1)\delta(\Psi) \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}.$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Definição 6.13 (Funcional convexo e côncavo) Um funcional $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ homogêneo positivo será chamado de convexo se, e somente se, $\Delta_\Phi(f, g) \geq 0$. O funcional Φ será chamado de côncavo se, e somente se, $\Delta_\Phi(f, g) \leq 0$.

Note que a soma de funcionais convexos (respectivamente côncavo) é convexa respectivamente côncavo).

Definição 6.14 (Funcional K -contínuo) Um funcional semilinear $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ é dito K -contínuo, se

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} |\Delta_\Phi(f, g)| = 0.$$

Teorema 6.15 Seja X um espaço de funções g -convexo. Então Φ_X é um funcional semilinear, K -contínuo e convexo. Se X é um espaço de Köthe, então $\delta(\Phi_X) \leq \log 2$.

Demonstração. Demonstraremos o teorema por partes.

Passo 1. Afirmamos que Φ_X é um funcional semilinear.

Passo 1.A. Φ_X é homogêneo positivo. Imediato.

Passo 1.B. Provaremos que Φ_X verifica 2. da definição de funcional semilinear. Sejam $f, g \in \mathcal{T}_X$ e $\varepsilon > 0$. Então existem x e $y \in B_X$ tais que

$$\int f \log |x| d\mu \geq \Phi_X(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$\int g \log |y| d\mu \geq \Phi_X(g) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $0 < \tau < \infty$, definamos

$$v_\tau = (1 + \eta(\tau))^{-1} \max(|x|, \tau|y|),$$

onde $\eta(\tau)$ é o número introduzido em Definição 5.4. Note que $v_\tau \in B_X$ pois se $A = \{s : |x(s)| \geq \tau|y(s)|\}$ e $B = \{s : |x(s)| < \tau|y(s)|\}$. Então pelo fato $\text{supp}(|x|1_A) \cap \text{supp}(\tau|y|1_B) = \emptyset$, temos que

$$\begin{aligned} \|\max(|x|, \tau|y|)\|_X &= \| |x|1_A + \tau|y|1_B \|_X \\ &\leq 1 + \eta(\tau). \end{aligned}$$

Mas ainda,

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\begin{aligned}
\Phi_X(f + g) &\geq \int (f + g) \log |v_\tau| d\mu \\
&= \int f \log |v_\tau| d\mu + \int g \log |v_\tau| d\mu \\
&\geq \int f \log(1 + \eta(\tau))^{-1} |x| d\mu + \int g \log \tau (1 + \eta(\tau))^{-1} |y| d\mu \\
&\geq \Phi_X(f) + \Phi_X(g) - \varepsilon - \|f\|_{L_1} \log(\eta(\tau) + 1) - \|g\|_{L_1} \log(\eta(\tau) + 1) + \|g\|_{L_1} \log \tau,
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, isto é,

$$\Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \log(\eta(\tau) + 1) - \|g\|_{L_1} \log \tau, \quad (6.9)$$

para todo $\tau > 0$ e todo $f, g \in \mathcal{T}_X$. Em particular, se $\tau = 1$, temos que Φ_X verifica 2. da definição de funcional semilinear. No Passo 2. demostramos que $0 \leq \Delta_{\Phi_X}(f, g)$ para todo $f, g \in \mathcal{T}_X$.

Passo 1.C. Agora demonstremos que dados $f \in \mathcal{T}_X$ e $(f_n)_n$ uma sequência de $\mathcal{T}_X$ tais que $0 \leq f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_X(f_n) = 0$ (parte 3. da definição de funcional semilinear). De fato, definamos o espaço

$$F = \left\{ g \in L_1 : \|g\|_F = \sup_{x \in B_X} \int |g| \log_+ |x| d\mu + \|g\|_{L_1} < \infty \right\}.$$

Logo $(F, \|\cdot\|_F)$ é um espaço normado e verifica:

$$|h| \leq |g| \Rightarrow \|h\|_F \leq \|g\|_F. \quad (6.10)$$

Mostraremos que F é um espaço com norma de ordem contínua (Ver Subseção 2.3.2). Pela Proposição 2.45 basta verificar que dadas $g \geq 0$ e uma sequência de conjuntos mensuráveis disjuntos $(S_n)_n$, temos que $\|g \cdot 1_{S_n}\|_F \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Como L_1 é um espaço com norma de ordem contínua, segue-se que $\|g \cdot 1_{S_n}\|_{L_1} \rightarrow 0$. Portanto é suficiente verificar que

$$\sup_{x \in B_X} \int |g \cdot 1_{S_n}| \log_+ |x| d\mu \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty.$$

Suponha por contradição que

$$\sup_{x \in B_X} \int |g \cdot 1_{S_n}| \log_+ |x| d\mu \not\rightarrow 0,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

isto é, existe uma sequência de conjuntos mensuráveis disjuntos $(S_n)_n$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\sup_{x \in B_X} \int_{S_n} g \log_+ |x| d\mu > \varepsilon.$$

Portanto para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_X$ tal que

$$\varepsilon < \int_{S_n} g \log_+ |x_n| d\mu.$$

Vamos definir a sequência $y_n = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$. Agora, escolhendo $\rho > 0$ e $\beta > 1$ oportunos obtemos que $\|y_n\|_X \leq \beta n^{1/\rho}$. Isto é, $\beta^{-1} n^{-1/\rho} y_n \in B_X$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi_X(g) &\geq \int g \log_+ |\beta^{-1} n^{-1/\rho} y_n| d\mu \\ &= \int g \log_+ |y_n| d\mu - \|g\|_{L_1} \left(\log \beta + \frac{1}{\rho} \log n \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{S_k} g \log_+ |y_n| d\mu - \|g\|_{L_1} \left(\log \beta + \frac{1}{\rho} \log n \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_{S_k} g \log_+ |x_k| d\mu - \|g\|_{L_1} \left(\log \beta + \frac{1}{\rho} \log n \right) \\ &\geq n\varepsilon - \|g\|_{L_1} \left(\log \beta + \frac{1}{\rho} \log n \right), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contraria o fato de ser $n\varepsilon - \|g\|_{L_1} \left(\log \beta + \frac{1}{\rho} \log n \right)$ uma sequência não limitada. Daqui concluímos que F é um espaço com norma de ordem contínua.

Afirmamos que se $\|\cdot\|_F$ é uma norma de ordem contínua, então $\|f_n\|_F \rightarrow 0$. De fato, suponha por contradição que $\|f_n\|_F \not\rightarrow 0$, isto é, existe uma subsequência de $(f_n)_n$, que denotaremos por $(f'_n)_n$, e $\varepsilon > 0$, tal que $\|f'_n\|_F > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, por hipótese $\|f'_n\|_{L_1} \rightarrow 0$. Portanto existe uma subsequência de $(f'_n)_n$, que denotamos por $(f''_n)_n$, tal que $f''_n \rightarrow 0$ q.s. Se definirmos $g_n(s) = \sup_{k \geq n} f''_k(s)$, temos que $(g_n)_n$ é uma sequência decrescente de F , com $g_n \rightarrow 0$ q.s. e $f''_n \leq g_n$. Como $\|\cdot\|_F$ é uma norma de ordem contínua, obtemos que $\|g_n\|_F \rightarrow 0$. Usando a afirmação (6.10), deduzimos que $\|f''_n\|_F \rightarrow 0$, o qual é absurdo. Portanto, $\|f_n\|_F \rightarrow 0$, isto é,

$$\sup_{x \in B_X} \int f_n \log_+ |x| d\mu \rightarrow 0,$$

e como

$$\Phi_X(f_n) \leq \sup_{x \in B_X} \int f_n \log_+ |x| d\mu,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_X(f_n) \leq 0.$$

Por outro lado, como $f \in \mathcal{T}_X$, então existe $x \in B_X$ tal que $f| \log |x|$ é integrável. Logo $f_n| \log |x| \leq f| \log |x|$. O Teorema da Convergência Dominada implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n| \log |x| d\mu = 0$, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n \log |x| d\mu \right| = 0$. Como

$$\int f_n \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f_n),$$

temos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_X(f_n) \geq 0.$$

Com isso, nós provamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_X(f_n) = 0$. Note que até o momento nós demonstramos que Φ_X é semilinear.

Passo 2. Provaremos que Φ_X é convexo. De fato, seja x em B_X . Logo

$$\begin{aligned} \int (f + g) \log |x| d\mu &= \int f \log |x| d\mu + \int g \log |x| d\mu \\ &\leq \Phi_X(f) + \Phi_X(g), \end{aligned}$$

portanto

$$\int (f + g) \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f) + \Phi_X(g),$$

para todo $x \in B_X$. Logo $\Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0$ para todo $f, g \in \mathcal{T}_X$.

Passo 3. Provaremos que Φ_X é K -contínuo. De fato, no **Passo 1.**, nós provamos que Φ_X verifica

$$\Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \log(\eta(\tau) + 1) - \|g\|_{L_1} \log \tau.$$

(ver desigualdade (6.9)).

Supondo $\|f\|_{L_1} \leq 1$ e $\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon$, obtemos que

$$0 \leq \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} \Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq (1 + \varepsilon) \log(\eta(\tau) + 1) - \varepsilon \log \tau,$$

portanto

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} \Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq \log(\eta(\tau) + 1),$$

6.1 Propriedades dos indicadores

se $\tau \rightarrow 0$, obtemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} \Delta_{\Phi_X}(f, g) = 0.$$

Passo 4. No caso em que X seja um espaço de Köthe, obtemos que $\eta(\tau) \leq \tau$ (ver Observação 5.5, parte 3.), logo da desigualdade

$$\Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \log(\eta(\tau) + 1) - \|g\|_{L_1} \log \tau,$$

para todo $\tau > 0$ e todo $f, g \in \mathcal{T}_X$, demonstrada no **Passo 1.** (ver desigualdade (6.9)) temos que

$$\Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \log(\tau + 1) - \|g\|_{L_1} \log \tau,$$

para todo $f, g \in \mathcal{T}_X$. Se $\tau = 1$, então

$$\Delta_{\Phi_X}(f, g) \leq \log 2 \cdot (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1})$$

para todo $f, g \in \mathcal{T}_X$, isto é, $\delta(\Phi_X) \leq \log 2$. □

Teorema 6.16 *Seja $\mathcal{T}$ um semideal e Φ um funcional semilinear em $\mathcal{T}$. Então*

- Para todo $f \in \mathcal{T}$, Φ é limitado em $[0, f]$.
- Se $f_n \in [0, f]$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_{L_1} = 0$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n) - \Phi(g)| \leq 2\delta(\Phi) \cdot \|f\|_{L_1}.$$

- Se Φ é K -contínuo, então Φ é contínuo em $[0, f]$ com a norma $\|\cdot\|_{L_1}$.

Demonstração.

- Sejam $f \in \mathcal{T}$, $\Gamma(f) = \sup \{ |\Phi(g)| : 0 \leq g \leq f \}$. Vejamos que $\Gamma(f) < \infty$. Suponhamos que $\Gamma(f) = \infty$. Então existe $g \in [0, f]$ tal que

$$|\Phi(g)| > 3|\Phi(f)| + \delta(\Phi) \cdot \|f\|_{L_1} + 1.$$

Agora, pelo fato de Φ ser semilinear e denotando $\delta := \delta(\Phi)$, temos que

$$|\Phi(f - g) + \Phi(g) - \Phi(f)| \leq \delta(\|f - g\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) = \delta \|f\|_{L_1},$$

o que implica

$$|\Phi(g)| - |\Phi(f)| - \delta \|f\|_{L_1} \leq |\Phi(f - g)|.$$

Note que

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\begin{aligned}
2|\Phi(f)| + 1 &= (3|\Phi(f)| + \delta \|f\|_{L_1} + 1) - |\Phi(f)| - \delta \|f\|_{L_1} \\
&< |\Phi(g)| - |\Phi(f)| - \delta \|f\|_{L_1} \\
&\leq |\Phi(f - g)|.
\end{aligned}$$

Resumindo, existe $g \in [0, f]$ tal que $2|\Phi(f)| + 1 < |\Phi(f - g)|$.

Seja $f_0 = f$. Então, pelo fato anterior, existe $g_0 \geq 0$, com $g_0 \leq f_0$, tal que $2|\Phi(f_0)| + 1 < |\Phi(f_0 - g_0)|$. Se $f_1 = f_0 - g_0$, obtemos $f_1 \leq f_0$ e $2|\Phi(f_0)| + 1 < |\Phi(f_1)|$. Por indução, encontramos uma sequência decrescente de funções não negativas em $[0, f]$, que denotaremos por $(f_n)_n$, tal que $2|\Phi(f_n)| + 1 < |\Phi(f_{n-1})|$. Portanto verifica-se $|\Phi(f_n)| > 2^n |\Phi(f)| + 2^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n)| = \infty$. Pelo fato de que $(f_n)_n$ é uma sequência de funções decrescente, temos que existe uma função $g \geq 0$ em $[0, f]$ tal que $f_n \rightarrow g$ q.s., se $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, obtemos que $\|f_n - g\|_{L_1} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Mas ainda, pelas desigualdades $0 \leq f_n - g \leq f - g$ e por Φ ser semilinear, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n - g) = 0$. Agora,

$$\begin{aligned}
|\Phi(f_n)| &\leq |\Phi(g) + \Phi(f_n - g) - \Phi(f_n)| + |\Phi(f_n - g)| + |\Phi(g)| \\
&\leq \delta \|f_n\|_{L_1} + |\Phi(f_n - g)| + |\Phi(g)| \\
&\leq \delta \|f\|_{L_1} + |\Phi(f_n - g)| + |\Phi(g)|.
\end{aligned}$$

Isto prova que $(|\Phi(f_n)|)_n$ é limitada, o qual é contraditório.

- Seja $h_n = \max(f_n, g)$. Então,

$$|\Phi(h_n) - \Phi(f_n) - \Phi(h_n - f_n)| \leq \delta \|h_n\|_{L_1} \leq \delta \|f\|_{L_1}.$$

Similarmente

$$|\Phi(h_n) - \Phi(g) - \Phi(h_n - g)| \leq \delta \|f\|_{L_1}.$$

Agora pela desigualdade triangular e as desigualdade anteriores, temos que

$$|\Phi(f_n) - \Phi(g)| \leq |\Phi(h_n - f_n)| + |\Phi(h_n - g)| + 2\delta \|f\|_{L_1}.$$

Observe que $|h_n(s) - f_n(s)| \leq |g_n(s) - f_n(s)|$ para todo $s \in S$, logo $\|h_n - f_n\|_{L_1} \leq \|g_n - f_n\|_{L_1}$ e então $\|h_n - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$. Similarmente provamos $\|h_n - g\|_{L_1} \rightarrow 0$. Agora como $h_n - g \leq f - g$, então pela hipótese de Φ ser semilinear, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_n - f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(h_n - g) = 0,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

concluindo esta parte do teorema.

- Suponha que Φ seja K -contínuo, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} |\Delta_\Phi(f, g)| = 0.$$

Seja $g \in [0, f]$ fixo e $(f_n)_n$ uma sequência em $[0, f]$ tal que $\|f_n - g\|_{L_1} \rightarrow 0$. Mostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(f_n) - \Phi(g)) = 0$. Assumamos primeiro que $\|f\|_{L_1} \leq 1$, logo $\|f_n\|_{L_1} \leq 1$. Seja $h_n = \max(f_n, g)$ como na parte anterior. Analogamente, como no item 2 do teorema, obtemos que $\|h_n - f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_n = \|h_n - f_n\|_{L_1}$, temos que

$$|\Delta_\Phi(f_n, h_n - f_n)| \leq \sup_{\|F\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|G\|_{L_1} \leq \varepsilon_n} |\Delta_\Phi(F, G)|,$$

usando a hipóteses concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_\Phi(f_n, h_n - f_n)| = 0.$$

Cálculos similares demonstram que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_\Phi(g, h_n - g)| = 0$. Usando a desigualdade triangular, deduzimos que

$$|\Phi(f_n) - \Phi(g)| \leq |\Delta_\Phi(f_n, h_n - f_n)| + |\Delta_\Phi(g, h_n - g)|,$$

obtendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n) - \Phi(g)| = 0$.

Agora assumamos $\|f\|_{L_1} > 1$. Considerando $\frac{f}{\|f\|_{L_1}}$ e aplicando o caso anterior, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \Phi\left(\frac{f_n}{\|f\|_{L_1}}\right) - \Phi\left(\frac{g}{\|f\|_{L_1}}\right) \right| = 0.$$

E como Φ é homogêneo positivo, obtemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n) - \Phi(g)| = 0$. □

Teorema 6.17 *Seja X um espaço de funções g -convexo e $\mathcal{T}$ um semi-ideal estrito, com $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$. Então $x \in B_X$ se, e somente se, $f \log_+ |x|$ é integrável e*

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{T}.$$

Demonstração. A prova da ida é imediata pela definição de $\mathcal{T}_X$.

6.1 Propriedades dos indicadores

Passo 1. Vamos provar a recíproca do teorema.

Passo 1.A. Vamos mostrar que é possível assumir, sem perda de generalidade, que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$. A ideia é provar que se o teorema é válido para $\mathcal{T}_X$, então o teorema também é válido para todo semi-ideal estrito $\mathcal{T}$. De fato, suponha que a recíproca do teorema é válido para $\mathcal{T}_X$ e que $f \log_+ |x|$ é integrável para todo $f \in \mathcal{T}$ e

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{T}.$$

Vamos demonstrar que $x \in B_X$. Seja $f \in \mathcal{T}_X$. Como $\mathcal{T}$ é um semi-ideal estrito, então existe um g positivo em $\mathcal{T}$. Definamos uma sequência de funções como $f_n = \min(ng, f)$. Observe que $0 \leq f_n \leq ng$, onde $ng \in \mathcal{T}$. Portanto $(f_n)_n$ é uma sequência crescente de $\mathcal{T}$, com $f_n \rightarrow f$ q.s. Agora, seja $A = \{s : |x(s)| > 1\}$. Pelo fato que $f_n \in \mathcal{T}$, temos que $1_A f_n \in \mathcal{T}$. Logo

$$\int f_n 1_A \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f_n 1_A).$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que $\|f_n 1_A - f 1_A\|_{L_1} \rightarrow 0$, logo pelos Teoremas 6.15 e 6.16, temos que $\Phi_X(f_n 1_A) \rightarrow \Phi_X(f 1_A)$, se $n \rightarrow \infty$. Novamente, o Teorema da Convergência Monótona implica

$$\int f \log_+ |x| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n 1_A \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f 1_A),$$

e portanto $\int f \log_+ |x|$ é integrável para todo $f \in \mathcal{T}_X$. Agora, se $\int f \log |x| d\mu = -\infty$, então imediatamente $\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f)$. Assuma agora que $f \log |x| \in L_1$. Então pelo teorema Convergência Dominada e os Teoremas 6.15, 6.16, temos que

$$\begin{aligned} \int f \log |x| d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \log |x| d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_X(f_n) \\ &= \Phi(f), \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{T}_X$. Como a recíproca do teorema vale para $\mathcal{T}_X$, temos que $x \in B_X$. Isto mostra que podemos assumir que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X$.

Passo 2. Demonstraremos a recíproca do teorema para $\mathcal{T}_X$. Suponha que $f \log_+ |x|$ é integrável para todo $f \in \mathcal{T}_X$ e

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{T}_X.$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Provemos que $x \in B_X$.

Assuma por contradição que $x \notin B_X$. Como X é um espaço de funções g-convexo, então existe u estritamente positiva em B_X . Agora, existe w estritamente positiva em L_0 tal que

$$\int w(1 + |\log |x|| + |\log u|)^2 d\mu < \infty. \quad (6.11)$$

Seja $L_2(w d\mu)$ o espaço de Hilbert de todos os ϕ tais que

$$\|\phi\|_{w,2}^2 = \int |\phi|^2 w d\mu < \infty.$$

Seja $M = \{\log |y| : y \in B_X\}$ e $V = L_2(w d\mu) \cap M$. De (6.11), obtemos que $\int w |\log u|^2 d\mu < \infty$. Logo $V \neq \emptyset$, pois $\log u \in V$.

Demonstraremos agora que V é convexo. Sejam $\log |y|, \log |z| \in V$ e $0 \leq t \leq 1$. Então $(1-t)\log |y| + t\log |z| = \log |y|^{1-t}|z|^t$, como X é um espaço de funções g-convexo, temos que $\| |y|^{1-t}|z|^t \|_X \leq \| |y| \|_X^{1-t} \| |z| \|_X^t \leq 1$. Portanto $(1-t)\log |y| + t\log |z| \in V$.

Agora Provemos que V é fechado em $L_2(w d\mu)$. De fato, seja $(f_n)_n$ uma sequência em V , onde $f_n = \log |y_n|$, com $y_n \in B_X$ e $f \in L_2(w d\mu)$, tal que $\|f_n - f\|_{w,2} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Portanto, existe uma subsequência de $(f_n)_n$, que denotamos por $(f_n)_n$, tal que $\log |y_n| = f_n \rightarrow f$ q.s., isto é, $|y_n| \rightarrow e^f$ q.s., portanto, $|y_n| \rightarrow e^f$ em medida, como B_X é fechada nesta convergência, temos que $e^f \in B_X$, logo, $f \in V$. Observe que V verifica:

$$\phi_1 \in V, \phi_2 \in L_2(w d\mu) \text{ e } \phi_2 \leq \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \in V. \quad (6.12)$$

Como $\log |x| \notin V$, o teorema de separação de Hahn-Banach (ver Teorema 2.66) garante a existência de um número real α e um funcional linear $\varphi : L_2(w d\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\operatorname{Re}(\varphi(\log |x|)) > \alpha \geq \operatorname{Re}(\varphi(\phi)),$$

para todo $\phi \in V$. Agora existe $G \in L_2(w^{-1} d\mu)$ tal que $\varphi(\phi) = \int G\phi d\mu$ para todo $\phi \in L_2(w d\mu)$. Se $\operatorname{Re}(G) = g$, então $\operatorname{Re}(\varphi(\phi)) = \int g\phi d\mu$ para todo $\phi \in V$ e $\operatorname{Re}(\varphi(\log |x|)) = \int g \log |x| d\mu$, assim

$$\int g \log |x| d\mu > \alpha \geq \int g\phi d\mu$$

para todo $\phi \in V$.

Passo 2.A. Demonstraremos que $g \in \mathcal{T}_X$. De fato,

Primeiro demonstraremos que $g \geq 0$ q.s. Suponha por contradição que o conjunto $I = \{s : g(s) < 0\}$ não tem medida zero. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função em S por

$$\lambda_n(s) = \begin{cases} 1/n, & \text{se } s \in I \\ 1/2, & \text{se } s \in S \setminus I. \end{cases}$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Observe que $\log \lambda_n u \leq \log u$, portanto $\log \lambda_n u \in L_2(w d\mu)$ (lembre-se que $\log u \in V$), assim pela propriedade 6.12 que V verifica, obtemos que $\log \lambda_n u \in V$, portanto $\int g \log \lambda_n u d\mu \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora

$$\begin{aligned} \int g \log \lambda_n u d\mu \leq \alpha &\Leftrightarrow \int_I g \log \lambda_n u d\mu + \int_{S \setminus I} g \log \lambda_n u d\mu \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \log \frac{1}{n} \int_I g d\mu + \int_I g \log u d\mu + \int_{S \setminus I} g \log \frac{u}{2} d\mu \leq \alpha, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Os cálculos acima mostram que a sequência não negativa $\left(\log \frac{1}{n} \int_I g d\mu \right)_n$ é limitada, o qual é absurdo.

Afirmamos que $g \in L_1(\mu)$. Observe que $g = gw^{-1/2} \cdot w^{1/2}$, onde $gw^{-1/2} \in L_2(\mu)$ e $w^{1/2} \in L_2(\mu)$ (isto é consequência de (6.11)). A desigualdade de Hölder prova que $g \in L_1(\mu)$.

Agora verifiquemos que

$$\int g |\log |u|| d\mu < \infty$$

e

$$\sup_{y \in B_X} \int g \log_+ |y| < \infty$$

para qualquer $y \in B_X$. De fato:

Para demonstrar a primeira parte, lembre-se que $g |\log u| = gw^{-1/2} \cdot (w^{1/2} |\log u|)$, onde $gw^{-1/2}$ e $w^{1/2} |\log u|$ pertencem a $L_2(\mu)$. Logo $g |\log u| \in L_1(\mu)$ e

$$\int g |\log u| d\mu \leq \|g\|_{w^{-1}, 2} \cdot \|\log u\|_{w, 2}.$$

Para demonstrar a segunda parte, seja $y \in B_X$ e definamos

$$y_{m,\tau} = \max \left(\min(|y|, m|x|), \tau|u| \right),$$

para $m \in \mathbb{N}$ e $\tau > 0$. Note que $(\eta(\tau) + 1)^{-1} y_{m,\tau} \in B_X$, onde $\eta(\tau)$ é o número definido na Definição 5.4 e

$$\log(\eta(\tau) + 1)^{-1} y_{m,\tau} = \log y_{m,\tau} - \log(\eta(\tau) + 1) \in L_2(w d\mu),$$

pois

$$\log \tau u \leq \log y_{m,\tau} \leq \log \max(m|x|, \tau u) = 1_A \cdot \log m|x| + 1_B \cdot \log \tau u,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

onde

$$A = \{s : m|x(s)| \geq \tau|u(s)|\} \text{ e } B = \{s : m|x(s)| < \tau u(s)\}.$$

Resumindo temos que

$$\log \tau u \leq \log y_{m,\tau} \leq 1_A \cdot \log m|x| + 1_B \cdot \log \tau u,$$

onde $\log \tau u$ e $1_A \cdot \log m|x| + 1_B \cdot \log \tau u$ são funções de $L_2(w d\mu)$, (isto é deduzido de (6.11)). Portanto $\log y_{m,\tau} \in L_2(w d\mu)$. Logo, concluímos que $\log y_{m,\tau} - \log(\eta(\tau) + 1) \in L_2(w d\mu)$. Isto mostra que

$$\log y_{m,\tau}(\eta(\tau) + 1)^{-1} \in V.$$

Logo

$$\int g \log y_{m,\tau}(\eta(\tau) + 1)^{-1} d\mu \leq \alpha,$$

que equivale a

$$\int g \log y_{m,\tau} d\mu \leq \alpha + \|g\|_1 \log(\eta(\tau) + 1).$$

Seja $A = \{s : |y(s)| \geq 1\}$. Então

$$\begin{aligned} \int_A g \log y_{m,1} d\mu &\leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(1) + 1) - \int_{S \setminus A} g \log y_{m,1} d\mu \\ &\leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(1) + 1) - \int_{S \setminus A} g \log |u| d\mu \\ &\leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(1) + 1) + \int g |\log u| d\mu \\ &\leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(1) + 1) + \|g\|_{w^{-1},2} \cdot \|\log u\|_{w,2}, \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Se $m \rightarrow \infty$, então pelo Teorema da Convergência Monótona obtemos que

$$\int g \log_+ |y| d\mu \leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(\tau) + 1) + \|g\|_{w^{-1},2} \cdot \|\log u\|_{w,2},$$

para $y \in B_X$, consequentemente

$$\sup_{y \in B_X} \int g \log_+ |y| < \infty.$$

Com isto, nós provamos que $g \in \mathcal{T}_X$.

Agora, usando a hipóteses do teorema, temos que $\int g \log |x| d\mu \leq \Phi_X(g)$, e como g verifica $\alpha < \int g \log |x| d\mu$, segue-se que $\alpha < \Phi_X(g)$.

6.1 Propriedades dos indicadores

Agora para $y \in B_X$, com cálculos similares, pode-se demonstrar que

$$\int g \log \left(\max(|y|, \tau|u|)(\eta(\tau) + 1)^{-1} \right) d\mu \leq \alpha,$$

isto é,

$$\int g \log \left(\max(|y|, \tau|u|) \right) d\mu \leq \alpha + \|g\|_{L_1} \log(\eta(\tau) + 1),$$

se $\tau \rightarrow 0$, temos que

$$\int g \log |y| d\mu \leq \alpha, \text{ para todo } y \in B_X,$$

portanto, $\Phi_X(g) \leq \alpha$, o qual é absurdo. Consequentemente $x \in B_X$. $\square$

Corolário 6.18 *Sejam X, Y espaços de funções g -convexos e $\mathcal{T}$ um semi-ideal estrito contido em $\mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_Y$. Então $\|x\|_X \leq M\|x\|_Y$ para todo $x \in L_0$ se, e somente se, $\Phi_X(f) \geq \Phi_Y(f) - (\log M)\|f\|_{L_1}$ para todo $f \in \mathcal{T}$. Mais ainda, X e Y são iguais com quase-normas equivalentes se, e somente se,*

$$d(\Phi_X, \Phi_Y) = \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} |\Phi_X(f) - \Phi_Y(f)| < \infty.$$

Demonstração. Assumamos primeiro que $\|x\|_X \leq M\|x\|_Y$ para todo $x \in L_0$. Seja $x \in B_Y$. Portanto, $|x|/M \in B_X$ e

$$\begin{aligned} \int f \log |x| d\mu - (\log M)\|f\|_{L_1} &= \int f \log \frac{|x|}{M} d\mu \\ &\leq \Phi_X(f), \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{T}$. Por x ser arbitrário em B_Y , temos que $\Phi_X(f) \geq \Phi_Y(f) - (\log M)\|f\|_{L_1}$ para todo $f \in \mathcal{T}$.

Reciprocamente, assumamos que $\Phi_X(f) \geq \Phi_Y(f) - (\log M)\|f\|_{L_1}$ para todo $f \in \mathcal{T}$.

Seja $x \in B_Y$. Note que

$$\begin{aligned} \int f \log |x| d\mu - (\log M)\|f\|_{L_1} &\leq \Phi_Y(f) - (\log M)\|f\|_{L_1} \\ &\leq \Phi_X(f) \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{T}$. Isto equivale a

$$\int f \log \frac{|x|}{M} d\mu \leq \Phi_X(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{T}.$$

Pelo Teorema 6.17, temos que $\frac{x}{M} \in B_X$. Agora para todo $x \in Y$, obtemos que $\frac{x}{M\|x\|_Y} \in B_X$, concluindo que $\|x\|_X \leq M\|x\|_Y$ para todo $x \in L_0$. Note que a outra do corolário é imediata. $\square$

6.1 Propriedades dos indicadores

Teorema 6.19 *Seja $\mathcal{T}$ um semi-ideal estrito de $L_1^+(\mu)$ e Φ um funcional semilinear real, K -contínuo e convexo definido em $\mathcal{T}$. Então existe um único espaço g -convexo X tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$ e $\Phi(f) = \Phi_X(f)$, para todo $f \in \mathcal{T}$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema por partes:

Passo 1. Vamos definir o espaço X .

Seja B_X o subconjunto de L_0 de todos os x tais que $f \log_+ |x| \in L_1$ para todo $f \in \mathcal{T}$ e

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{T}.$$

Definamos uma função $\|\cdot\|_X : L_0 \mapsto [0, \infty]$ por

$$\|x\|_X = \begin{cases} \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}|x| \in B_X \}, & \text{se } \alpha^{-1}|x| \in B_X, \text{ para algum } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha^{-1}|x| \notin B_X, \text{ para todo } \alpha > 0. \end{cases}$$

Observe que o conjunto B_X verifica,

$$|y| \leq |x|, \quad x \in B_X \Rightarrow y \in B_X. \quad (6.13)$$

Então definimos X por $X = \{x : \|x\|_X < \infty\}$. Note que $B_X = \{x : \|x\|_X \leq 1\}$.

Passo 2. Provaremos que $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. É imediato.

Passo 3. Demonstraremos que B_X é fechado em L_0 .

Seja $(x_n)_n$ uma sequência em B_X que converge em medida para x . Então, existe uma sub-sequência de $(x_n)_n$, que denotamos por $(x_n)_n$, tal que $|x_n| \rightarrow |x|$ q.s. Denotamos por $A = \text{supp}(x)$. Pelo Corolário 2.62, existe uma sequência crescente de subconjuntos de A mensuráveis, $(A_n)_n$, com $A_k \subseteq A_{k+1}$, tais que $\mu(A \setminus \cup_n A_n) = 0$, e $|x_n| \cdot |x|^{-1}$ converge uniformemente para 1 em A_n . Isto é, para $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $s \in A_k$,

$$\left| |x_n(s)| \cdot |x|^{-1}(s) - 1 \right| < \varepsilon \text{ se } n \geq N.$$

Deste fato deduzimos que

$$(1 - \varepsilon)|x| \cdot 1_{A_k} < |x_n| \cdot 1_{A_k} \text{ se } n \geq N. \quad (6.14)$$

Se $n \geq N$ e $f \in \mathcal{T}$, temos que, $f \log_+ |x_n| 1_{A_k} \in L_1$. Isto é garantido pelo fato de x_n ser um elemento de B_X e pela propriedade (6.13). Agora por (6.14), obtemos que $f \log_+ |x| 1_{A_k} \in L_1$. Consideremos $f \in \mathcal{T}$ arbitrária. Então

6.1 Propriedades dos indicadores

$$\int f \log |x| 1_{A_k} d\mu \leq -\log(1 - \varepsilon) \cdot \|f\|_{L_1} + \int f \log |x_n| 1_{A_k} d\mu$$

como $|x_n| 1_{A_k} \in B_X$, temos que

$$\int f \log |x| 1_{A_k} d\mu \leq -\log(1 - \varepsilon) \cdot \|f\|_{L_1} + \Phi(f).$$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos que $|x| 1_{A_k} \in B_X$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sejam $G = \{s : |x(s)| > 1\}$ e $f \in \mathcal{T}$. Observe que $0 \leq f \cdot 1_G \log |x| 1_{A_k} \leq f \cdot 1_G \log |x| 1_{A_{k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $A_k \subseteq A_{k+1}$. Também

$$f \cdot 1_G \log |x| 1_{A_k} \rightarrow f \cdot 1_G \log |x| \text{ q.s. em } A,$$

pois

$$f(s) \cdot 1_G(s) \log |x(s)| 1_{A_k}(s) \rightarrow f(s) \cdot 1_G(s) \log |x(s)|,$$

para todo $s \in \cup_n A_n$, com $\mu(A \setminus \cup_n A_n) = 0$. O Teorema da Convergência Monótona e o fato $|x| 1_{A_k} \in B_X$ implicam que

$$\begin{aligned} \int f \log_+ |x| d\mu &= \int_A f \cdot 1_G \log |x| d\mu, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f \cdot 1_G \log |x| 1_{A_k} d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int f \cdot 1_G \log |x| 1_{A_k} d\mu \\ &\leq \Phi(f \cdot 1_G). \end{aligned}$$

Os cálculos acima, mostram que $\int f \log_+ |x| d\mu \in L_1$ para qualquer $f \in \mathcal{T}$.

Agora vejamos que $\int f \log |x| d\mu \leq \Phi(f)$, para todo $f \in \mathcal{T}$. Como $(x_n)_n$ converge para x em medida, então existe uma subsequência de $(x_n)_n$, que denotamos por $(x_n)_n$, tal que $(x_n)_n$ converge q.s. para x .

Suponha primeiro que $f \log |x| \in L_1$. Seja $y_n = \inf_{k \geq n} |x_k|$. Esta sequência é crescente e $y_n \rightarrow |x|$ q.s., com $y_n \leq |x_n|$. Também $y_n \leq |x|$, portanto $f \log y_n \leq f \log |x|$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos que $\int f \log y_n d\mu \rightarrow \int f \log |x| d\mu$, se $n \rightarrow \infty$. Como $y_n \in B_X$, pois $y_n \leq |x_n|$, onde $x_n \in B_X$, temos que $\int f \log y_n d\mu \leq \Phi(f)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\int f \log |x| d\mu \leq \Phi(f)$. Se $\int f \log |x| d\mu = -\infty$, trivialmente $-\infty = \int f \log |x| d\mu \leq \Phi(f)$. Nós provamos que $x \in B_X$ e portanto B_X é fechado em L_0 .

Passo 4. Demonstraremos a parte 4. da Definição 5.4.

Seja $0 < \tau < \infty$ e $x, y \in B_X$, com $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$. Sejam A_x e A_y conjuntos mensuráveis,

6.1 Propriedades dos indicadores

tais que, $A_x \cap A_y = \emptyset$, $\text{supp}(x) \subseteq A_x$, $\text{supp}(y) \subseteq A_y$ e $A_x \cup A_y = S$. Então para para $f \in \mathcal{T}$, temos que

$$\begin{aligned} \int f \log \max(|x|, \tau|y|) d\mu &= \int_{A_y} f \log |x| d\mu + \int_{A_x} f \log \tau|y| d\mu \\ &\leq \Phi(f \cdot 1_{A_x}) + \Phi(f \cdot 1_{A_y}) + \|f \cdot 1_{A_y}\|_{L_1} \log \tau \\ &= \Phi(f) + \Delta_\Phi(f \cdot 1_{A_x}, f \cdot 1_{A_y}) + \|f \cdot 1_{A_y}\|_{L_1} \log \tau. \end{aligned}$$

Seja

$$\sigma(\varepsilon) = \sup_{\|F\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|G\|_{L_1} \leq \varepsilon} |\Delta_\Phi(F, G)|.$$

Então

$$\begin{aligned} \int f \log \max(|x|, \tau|y|) d\mu &= \Phi(f) + \Delta_\Phi(f \cdot 1_{A_x}, f \cdot 1_{A_y}) + \|f \cdot 1_{A_y}\|_{L_1} \log \tau \\ &= \Phi(f) + \|f\|_{L_1} \cdot \left(\Delta_\Phi\left(\frac{f \cdot 1_{A_x}}{\|f\|_{L_1}}, \frac{f \cdot 1_{A_y}}{\|f\|_{L_1}}\right) + \frac{\|f \cdot 1_{A_y}\|_{L_1}}{\|f\|_{L_1}} \log \tau \right) \\ &\leq \Phi(f) + \|f\|_{L_1} \cdot (\sigma(\alpha) + \alpha \log \tau), \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{\|f \cdot 1_{A_y}\|_{L_1}}{\|f\|_{L_1}}$. Definamos

$$\sigma^*(\tau) = \sup_{0 \leq \beta \leq 1} (\sigma(\beta) + \beta \log \tau).$$

Observe que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma^*(\tau) = -\infty$$

e

$$\int f \log \max(|x|, \tau|y|) d\mu \leq \Phi(f) + \|f\|_{L_1} \sigma^*(\tau) \Leftrightarrow \int f \log \frac{\max(|x|, \tau|y|)}{e^{\sigma^*(\tau)}} d\mu \leq \Phi(f),$$

para todo $f \in \mathcal{T}$. Isto é,

$$\frac{\max(|x|, \tau|y|)}{e^{\sigma^*(\tau)}} \in B_X,$$

6.1 Propriedades dos indicadores

que equivale a $\|\max(|x|, \tau|y|)\|_X \leq e^{\sigma^*(\tau)}$.

Observe que

$$\|x + \tau y\|_X \leq 1 + \|\max(|x|, \tau|y|)\|_X \leq 1 + e^{\sigma^*(\tau)},$$

isto é $\eta(\tau) \leq e^{\sigma^*(\tau)}$, demonstrando que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \eta(\tau) = 0$ e $\|x + \tau y\|_X \leq 1 + \eta(\tau)$.

Passo 5. Este passo está dividido em três partes:

Passo 5.A Demonstramos que se $f \in \mathcal{T}$ e α é um número real tal que $\alpha < \Phi(f)$, então existe $x \in B_X$ tal que

$$\alpha < \int f \log |x| d\mu.$$

Passo 5.B. Demonstramos que dado $f \in \mathcal{T}$ existe $x \in B_X$ tal que

$$\int f |\log |x|| d\mu < \infty.$$

Passo 5.C. O conjunto B_X tem um elemento positivo.

Agora Provaremos o **Passo 5.**

Passo 5.A. Suponha que $f \in \mathcal{T}$ e $t \in \mathbb{R}$. Definamos um espaço vetorial por

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n[-f, f].$$

Seja K_t o subconjunto de Y de todos os $g \geq 0$ tais que $\Phi(g) \leq t$. Por Φ ser convexo, temos que K_t é convexo. Note que Y pode ser munido da norma de $L_1(\mu)$ e que para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $K_t \cap n[-f, f]$ é fechado em $(Y, \|\cdot\|_{L_1})$, isto é garantido pelo Teorema 6.16. Agora definamos uma norma em Y por $\|g\|_Y = \text{ess sup } |g(s)|f(s)^{-1}$ e seja Y_* o predual de $(Y, \|\cdot\|_Y)$ (ver Definição 2.79) isto é, o conjunto de todas as funções mensuráveis h , com $\text{supp}(h) \subseteq \text{supp}(f)$ tais que $\|h\|_{Y_*} = \int f|h| d\mu < \infty$. Pela definição de predual, temos que $(Y, \|\cdot\|_Y) \cong Y'_*$. O isomorfismo $(Y, \|\cdot\|_Y) \longrightarrow Y'_*$ está dado por $g \longmapsto \varphi_g$, onde, $\varphi_g(h) = \int gh d\mu$, para todo $h \in Y_*$. Daqui obtemos que Y pode ser munido da topologia w^* .

Vejamos que $K_t \subset Y$ é w^* -fechado em Y . Primeiro mostremos que $K_t \cap n[-f, f]$ é w^* -fechado em Y . De fato, se $K_t \cap n[-f, f]$ é vazio, então $K_t \cap n[-f, f]$ é trivialmente w^* -fechado em Y .

Assumamos que $K_t \cap n[-f, f]$ é não vazio e que $\varphi_{g_\beta} \xrightarrow{w^*} \varphi_g$, onde g_β é uma rede em $K_t \cap n[-f, f]$, isto equivale a dizer que $\int g_\beta h d\mu \rightarrow \int gh d\mu$ para todo $h \in Y_*$. Assumamos por contradição que $g \notin K_t \cap n[-f, f]$. Como o conjunto $K_t \cap n[-f, f]$ é fechado em $(Y, \|\cdot\|_{L_1})$, então existe um funcional linear contínuo $\Upsilon : (Y, \|\cdot\|_{L_1}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Upsilon(g) < a < \Upsilon(z) \text{ para todo } z \in K_t \cap n[-f, f]. \quad (6.15)$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Note que o funcional Υ pode ser estendido, pelo teorema de Hahn-Banach, por um funcional em $L_1(\mu)$ de igual norma a Υ , portanto, existe $h \in L_\infty$ tal que $\Upsilon(\rho) = \int \rho h d\mu$ para todo $\rho \in L_1(\mu)$. Portanto, a desigualdade (6.1) transforma-se em

$$\int gh d\mu < a < \int zh d\mu \text{ para todo } z \in K_t \cap n[-f, f],$$

(podemos considerar $\text{supp}(h) \subseteq \text{supp}(f)$ e desta forma $h \in Y_*$), em particular, para g_β , obtemos que $\int gh d\mu < a < \int g_\beta h d\mu$ o qual é absurdo. Em conclusão, $g \in K_t \cap n[-f, f]$, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $K_t \cap n[-f, f]$ é w^* -fechado em Y . Agora pelo teorema de Banach-Dieudonné (ver Teorema 2.71), concluímos que K_t é w^* -fechado em Y .

Agora seja $f \in \mathcal{T}$ e $\alpha < \Phi(f)$ e escolhamos α_0 tal que $\alpha < \alpha_0 < \Phi(f)$. Definamos um subconjunto de $Y \times \mathbb{R}$ por

$$C = \{(g, t) \in Y^+ \times \mathbb{R} : \Phi(g) \leq t\}.$$

Similarmente, $Y \times \mathbb{R}$ pode ser munido da topologia w^* , isto é, $Y \times \mathbb{R} \cong (Y \times \mathbb{R})'_* \cong (Y_* \times \mathbb{R})'$, onde o isomorfismo está dado por $(g, t) \mapsto \langle \varphi_g, t \rangle$, com, $\langle \varphi_g, t \rangle(h, a) = \varphi_g(h) + at$, para todo $(h, a) \in Y_* \times \mathbb{R}$. Por Φ ser convexo, temos que C é um conjunto convexo. O fato de K_t ser w^* -fechado em Y para todo $t \in \mathbb{R}$, implica que C é w^* -fechado em $Y \times \mathbb{R}$. Abusando da notação, $\langle \varphi_f, \alpha \rangle \notin C$, então o Teorema 2.72 implica que existe $(h_0, a) \in Y_* \times \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \varphi_f, \alpha \rangle(h_0, a) < \langle \varphi_g, t \rangle(h_0, a) \text{ para todo } (g, t) \in C,$$

isto é,

$$\varphi_f(h) + \alpha a < \varphi_g(h_0) + ta \text{ para todo } (g, t) \in C,$$

Observe que se $(g, t) \in C$, então $(\frac{g}{n}, \frac{t}{n}) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deduzindo pela última desigualdade que $\varphi_f(h_0) + \alpha a \leq 0$. Note também que se $(g, t) \in C$, então $(ng, nt) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $0 \leq \varphi_g(h_0) + at$ para todo $(g, t) \in C$. Resumindo, demonstramos que

$$\varphi_f(h_0) + \alpha a \leq 0 \tag{6.16}$$

e

$$0 \leq \varphi_g(h_0) + at \text{ para todo } (g, t) \in C. \tag{6.17}$$

Se $t \rightarrow \infty$ na desigualdade (6.17) obtemos que $a \geq 0$. Agora demonstraremos que $a > 0$. Assumamos por contradição que $a = 0$. Então (6.16) e (6.17) transformam-se respectivamente em $\varphi_f(h_0) \leq 0$ e $0 \leq \varphi_g(h_0)$ para todo $g \in Y^+$. Note que para qualquer $\rho \in Y$, encontramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $-nf \leq \rho \leq nf$, isto é, $\rho + nf \in Y^+$. Agora $\varphi_\rho(h_0) = \varphi_{\rho+nf}(h_0) - n\varphi_f(h_0) \geq 0$ para todo $\rho \in Y$ e em consequência temos que $\varphi_\rho(h_0) = 0$, para todo $\rho \in Y$. Isto mostra que $(h_0, a) = (0, 0)$ o qual é absurdo, portanto $a > 0$.

Definamos um funcional linear contínuo β em Y por

$$\beta(g) = \frac{-\varphi_g(h_0)}{a} = \int g \cdot \frac{-h_0}{a} d\mu. \text{ para todo } g \in Y.$$

6.1 Propriedades dos indicadores

De (6.16) e (6.17), deduzimos respectivamente que $\alpha_0 \leq \beta(f)$ e $\beta(g) \leq t$ para todo $(g, t) \in C$. Note que para $g \in Y^+$ temos que $(g, \Phi(g) + \varepsilon) \in C$ para todo $\varepsilon > 0$, portanto, $\beta(g) \leq \Phi(g) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, isto é, $\beta(g) \leq \Phi(g)$ para todo $g \in Y^+$. Até o momento, provamos que existe um funcional linear contínuo $\beta : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \alpha_0 \leq \beta(f)$ e $\beta(g) \leq \Phi(g)$ para todo $g \in Y^+$, isto é, $\alpha < \int f h d\mu$ e $\int g h d\mu \leq \Phi(g)$ para todo $g \in Y^+$, onde $h = \frac{-h_0}{a}$.

Definamos uma função x de L_0 por

$$x(s) = \begin{cases} e^{h(s)} & \text{se } s \in \text{supp}(f), \\ 0, & \text{se } s \notin \text{supp}(f) \end{cases}.$$

Demonstremos que $x \in B_X$. De fato, seja $g \in \mathcal{T}$ e denotemos $A = \{s : h(s) > 0\}$. Então pelo fato de $\min(g \cdot 1_A, n f) \in Y^+$ e pelo Teorema 6.16, temos que

$$\begin{aligned} \int g \log_+ |x| d\mu &= \int g h d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \min(g, n f) h d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(\min(g \cdot 1_A, n f)) \\ &= \Phi(g \cdot 1_A) \end{aligned}$$

logo $g \log_+ |x| \in L_1$.

Agora provaremos que $\int g \log |x| d\mu \leq \Phi(g)$. De fato, se $\text{supp}(g) \not\subseteq \text{supp}(f)$, então existe um conjunto de medida positiva $E \subset \text{supp}(g)$, tal que $x(s) = 0$ para todo $s \in E$, portanto $\int g \log |x| d\mu = -\infty$ e imediatamente demonstramos que $\int g \log |x| d\mu \leq \Phi(g)$.

Agora suponha que $\text{supp}(g) \subseteq \text{supp}(f)$. Vejamos que $g \log |x| \in L_1$ e $\int g \log |x| d\mu \leq \Phi(g)$. De fato, considere a sequência $g_n = \min(g, n f)$. Note que $g_n \rightarrow g \cdot 1_{\text{supp}(f)}$ q.s. e $g \cdot 1_{\text{supp}(f)} = g$ pelo fato $\text{supp}(g) \subseteq \text{supp}(f)$. Devido a que $|h g_n| \leq n f |h| \in L_1$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada que $g \log |x| \in L_1$ e

$$\begin{aligned} \int g \log |x| d\mu &= \int_{\text{supp}(g)} g h d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n h d\mu. \end{aligned}$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Agora segue da igualdade acima, o Teorema 6.16 e pelo fato de $\min(g, nf) \in Y^+$, que

$$\begin{aligned} \int g \log |x| d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(\min(g, nf)), \\ &= \Phi(g) \end{aligned}$$

isto mostra que $x \in B_X$. Observe que $\int f \log |x| d\mu = \int fh d\mu > \alpha$, daqui mostramos que existe $x \in B_X$ tal que $\alpha < \int f \log |x| d\mu$.

Passo 5.B. É imediato, pois $\int f |\log |x|| d\mu = \int f|h| d\mu < \infty$.

Passo 5.C. Pelo fato de $\mathcal{T}$ ser um semi-ideal estrito, temos que existe $f \in \mathcal{T}$, com $f > 0$. Portanto $x(s) = e^{h(s)} > 0$ para todo $s \in \text{supp}(f) = S$.

Os Passos 2,3,4 e 5.C. mostram que X é um espaço de funções g -convexo.

Passo 6. Vejamos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$ e

$$\Phi(f) = \Phi_X(f) = \sup_{x \in B_X} \int f \log |x| d\mu.$$

De fato, seja $f \in \mathcal{T}$ e $x \in B_X$. Então denotando por $A = \{x : |x| > 1\}$, segue do Teorema ??

$$\begin{aligned} \int f \log_+ |x| d\mu &= \int 1_A f \cdot \log |x| d\mu, \\ &\leq \Phi(1_A \cdot f) \\ &\leq \sup_{g \in [0, f]} \Phi(g), \end{aligned}$$

$$\text{logo } \sup_{x \in B_X} \int f \log_+ |x| d\mu < \infty.$$

No Passo 5.B., nós demonstramos que dado $f \in \mathcal{T}$, existe $x \in B_X$ tal que

$$\int f |\log |x|| d\mu = \int f|h| d\mu < \infty,$$

portanto $f \in \mathcal{T}_X$, e consequentemente $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$.

Agora no Passo 5.A. nós demostramos que dado α tal que $\alpha < \Phi(f)$ existe $x \in B_X$ tal que $\alpha < \int f \log |x| d\mu \leq \Phi(f)$, isto prova imediatamente que

$$\Phi(f) = \Phi_X(f) = \sup_{x \in B_X} \int f \log |x| d\mu.$$

6.1 Propriedades dos indicadores

Passo 7. Demonstraremos a unicidade do teorema. Sejam X e Y espaços g -convexos tais que $\Phi = \Phi_X = \Phi_Y$. Vejamos que $X = Y$.

Seja $x \in B_X$. Então $f \log_+ |x| \in L_1$ e $\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_X(f) = \Phi_Y(f)$ para todo $f \in \mathcal{T}$. Pelo Teorema 6.17 temos que $x \in B_Y$. Logo $B_X \subseteq B_Y$. Similarmente mostramos que $B_Y \subseteq B_X$, e portanto $B_X = B_Y$, concluindo que $X = Y$. $\square$

Teorema 6.20 *Seja $\mathcal{T}$ um semi-ideal estrito e $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semi-linear. Então para que exista um único espaço de Köthe X , com $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$ e $\Phi(f) = \Phi_X(f)$ para $f \in \mathcal{T}$, é necessário e suficiente que Φ e $\Lambda - \Phi$ sejam convexos.*

Demonstração. Se existe um espaço de Köthe X , tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X$ e $\Phi(f) = \Phi_X(f)$ para $f \in \mathcal{T}$, obtemos imediatamente que Φ e $\Lambda - \Phi$ são convexos, pois no Teorema 6.15 mostramos que $\Phi_X = \Phi$ e $\Lambda - \Phi = \Lambda - \Phi_X = \Phi_{X^*}$ são convexos.

Reciprocamente, suponha que Φ e $\Lambda - \Phi$ são convexos. Isto implica que

$$0 \leq \Delta_\Phi(f, g) \leq \Delta_\Lambda(f, g),$$

portanto,

$$0 \leq \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} \Delta_\Phi(f, g) \leq \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} |\Delta_\Lambda(f, g)|,$$

como Λ é K -contínuo (ver Teorema 6.15), temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|g\|_{L_1} \leq \varepsilon} |\Delta_\Phi(f, g)| = 0.$$

Isto prova que Φ é K -contínuo, portanto, $\Lambda - \Phi$ é também K -contínuo. O Teorema 6.19 garante a existência de dois espaços g -convexos X e Y tais que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_Y$ e $\Phi = \Phi_X$, $\Lambda - \Phi = \Phi_Y$ em $\mathcal{T}$. Demonstraremos que X é um espaço de Köthe. De fato, definamos o conjunto $B_{\widetilde{X}}$ como $B_{\widetilde{X}} = \overline{C(B_X)}$ (Fecho na topologia em medida da envoltória convexa da bola unitária de X). Definamos agora uma função $\|\cdot\|_{\widetilde{X}} : L_0 \rightarrow [0, \infty]$ como

$$\|\tilde{x}\|_{\widetilde{X}} = \begin{cases} \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1} |\tilde{x}| \in B_{\widetilde{X}} \}, & \text{se } \alpha^{-1} |\tilde{x}| \in B_{\widetilde{X}}, \text{ para algum } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha^{-1} |\tilde{x}| \notin B_{\widetilde{X}}, \text{ para todo } \alpha > 0. \end{cases}$$

Definamos $\widetilde{X} = \{ \tilde{x} : \|\tilde{x}\|_{\widetilde{X}} < \infty \}$. Demonstraremos que $\widetilde{X}$ é um espaço de Köthe e $\widetilde{X} = X$. De fato, observe que $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ foi definido como o funcional de Minkowski em $B_{\widetilde{X}}$. Agora $B_{\widetilde{X}}$ é convexo, balanceado e absorvente, portanto $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ é uma semi-norma (ver Proposição 2.75). Se $D = \{ \tilde{x} \in \widetilde{X} : \|\tilde{x}\|_{\widetilde{X}} \leq 1 \}$, então pelo fato de ser $B_{\widetilde{X}}$ fechado na topologia em medida e pela forma como definimos $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$, temos que $B_{\widetilde{X}} = D$. Com este fato nós mostramos que $\|\tilde{x}\|_{\widetilde{X}} = 0$, implica $\tilde{x} = 0$. Logo, $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$ é uma norma. É imediato ver que $B_{\widetilde{X}}$ é fechado em L_0 . Note que $B_{\widetilde{X}}$

6.1 Propriedades dos indicadores

contém um elemento positivo, pois $B_X \subseteq B_{\tilde{X}}$, onde B_X tem um elemento positivo. É imediato verificar que se $|\tilde{y}| \leq |\tilde{x}|$, com $\tilde{x} \in \tilde{X}$, então $\tilde{y} \in \tilde{X}$ e $\|\tilde{y}\|_{\tilde{X}} \leq \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$. Por enquanto, nós provamos que $\tilde{X}$ é um espaço de funções g -convexo. Para demonstrar que $\tilde{X}$ é um espaço de Köthe, basta verificar que existe $h > 0$ tal que $\|h\tilde{x}\|_{L_1} \leq \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$ para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Se $B_{\tilde{X}} \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$ é válido, então imediatamente $\tilde{X}$ é um espaço de Köthe, pois escolhendo um elemento positivo $h = y$ em B_Y (isto é possível porque Y é um espaço de funções g -convexo), obtemos que

$$\|\tilde{x} \cdot h\|_{L_1} = \left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}} \cdot h \right\|_{L_1} \cdot \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} \leq 1 \cdot \|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Afirmamos que $B_{\tilde{X}} \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$. Provaremos primeiro que $B_X \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$. De fato, sejam $x \in B_X$ e $y \in B_Y$. Então para todo $f \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_Y$ temos que $f \log_+ |x|, f \log_+ |y| \in L_1$, isto segue da definição dos semi-ideais $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$. Pelas propriedades do logaritmo e pelo fato anterior mostramos que $f \log_+ |xy| \in L_1$ para todo $f \in \mathcal{T}$. Agora para $f \in \mathcal{T}$ temos que

$$\begin{aligned} \int f \log |xy| d\mu &= \int f \log |x| d\mu + \int f \log |y| d\mu \\ &\leq \Phi_X(f) + \Phi_Y(f) \\ &= \Lambda(f). \end{aligned}$$

Resumindo temos que $\int f \log_+ |xy| \in L_1$ e $\int f \log |xy| d\mu \leq \Lambda(f)$ para todo $f \in \mathcal{T}$. Então o Teorema 6.17 garante que $xy \in B_{L_1}$. Agora, vejamos que $B_X \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$ implica $B_{\tilde{X}} \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$. De fato:

Sejam $x \in B_{\tilde{X}}$ e $y \in B_Y$. Se $x \in B_X$, então temos que $xy \in B_{L_1}$. Se $x \in C(B_X)$, então $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, onde $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $x_i \in B_X$. Agora como $x_i y \in B_X \cdot B_Y$ temos que $x_i y \in B_{L_1}$, portanto $xy \in B_{L_1}$.

Se $x \in \overline{C(X)}$, então existe uma sequência $(x_n)_n$ de elementos em $C(B_X)$, tais que, $x_n \rightarrow x$ q.s., isto implica que $x_n y \rightarrow xy$ q.s. Como $y \in B_X$, temos que $x_n y \in B_{L_1}$, portanto, $x_n y$ converge em medida para xy . Pelo Teorema 2.63 obtemos que $xy \in B_{L_1}$. Logo, concluímos que $B_{\tilde{X}} \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$.

Demonstraremos que $X = \tilde{X}$, para isso basta provar que $\Phi_X = \Phi_{\tilde{X}}$, pois o Teorema 6.19 garante a unicidade dos espaços. De fato, devido que $B_X \subseteq B_{\tilde{X}}$ temos que

$$\Phi_X(f) = \sup_{x \in B_X} \int f \log |x| d\mu \leq \sup_{x \in B_{\tilde{X}}} \int f \log |\tilde{x}| d\mu = \Phi_{\tilde{X}}(f),$$

para todo $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$. Logo, $\Phi_X(f) \leq \Phi_{\tilde{X}}(f)$ para todo $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$.

Afirmamos que $\Phi_{\tilde{X}}(f) \leq \Lambda(f) - \Phi_Y(f)$ para todo $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$. De fato, usando $B_{\tilde{X}} \cdot B_Y \subseteq B_{L_1}$, deduzimos que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\int f \log |\tilde{x}y| d\mu \leq \sup_{z \in B_{L_1}} \int f \log |z| d\mu = \Lambda(f),$$

para todo $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$, $\tilde{x} \in B_{\tilde{X}}$ e $y \in B_Y$. Isto equivale a

$$\int f \log |\tilde{x}| d\mu + \int f \log |y| d\mu \leq \Lambda(f),$$

para todo $\tilde{x} \in B_{\tilde{X}}$ e todo $y \in B_Y$, portanto $\Phi_{\tilde{X}}(f) \leq \Lambda(f) - \Phi_Y(f) = \Phi_X(f)$ para todo $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$. Consequentemente, $\Phi_X \leq \Phi_{\tilde{X}} \leq \Phi_X$ em $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_{\tilde{X}}$, logo $\Phi_X = \Phi_{\tilde{X}}$, e portanto $X = \tilde{X}$. $\square$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Nesta seção vamos aproximar funcionais semilineares por meio de funções indicadoras de espaços de Köthe.

Proposição 6.21 *Seja $\mathcal{T}$ um semi-ideal estrito contido em $(L \log L)_+$ e Φ um funcional semilinear em $\mathcal{T}$. Suponha que para algum M e todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, temos que*

$$-M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \leq \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) + M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}.$$

Então, existe um espaço de Köthe X tal que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X$ e

$$d(\Phi, \Phi_X) = \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} |\Phi(f) - \Phi_X(f)| \leq M + 4\delta,$$

onde $\delta = \delta(\Phi)$.

Demonstração.

Caso 1. Primeiro assumamos que S seja um conjunto finito e $\mathcal{T} = L_1^+(S)$. Definamos $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi_0(f) = \inf \sum_{j=1}^n \Phi(f_j)$, o ínfimo é tomado no conjuntos dos f_j tais que $f = \sum_{j=1}^n f_j$, com $f_j \geq 0$. O funcional Φ_0 assim definido é convexo, pois se $f = \sum f_s$ e $g = \sum g_k$, então $\Phi(f+g) \leq \sum_k \Phi(f_k) + \sum \Phi(g_s)$, concluindo que $\Phi(f+g) \leq \Phi(f) + \Phi(g)$. Note que se $f = \sum_{j=1}^n f_j$. Usando a hipóteses do teorema, provamos que

$$\begin{aligned} \Phi(f) - M\|f\|_{L_1} &= \Phi\left(\sum_{j=1}^n f_j\right) - M\|f\|_{L_1} \\ &= \sum_{j=1}^n \Phi(f_j) - \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) - M\|f\|_{L_1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \Phi(f_j), \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

para todo $f = \sum_{j=1}^n f_j$. Portanto

$$\Phi(f) - M\|f\|_{L_1} \leq \Phi_0(f) \leq \Phi(f). \quad (6.18)$$

Seja $P = \{x \in L_1(\mu) : x(s) > 0, \text{ para todo } s \in S\}$. Por $L_1(\mu)$ ser um espaço de dimensão finita, podemos munir a P da norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$.

Verifiquemos agora que existe uma constante K tal que

$$|\Phi_0(f)| \leq K \text{ para todo } f \in P, \text{ com } \|f\|_\infty \leq 1. \quad (6.19)$$

De fato, escrevamos $S = \cup_{k=1}^n A_k$, onde os A_k são disjuntos e $\mu(A_k) < \infty$ (lembre-se que μ é σ -finita e S é finito). Note que se $f \in P$, com $\|f\|_\infty \leq 1$, então $f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}$, para alguns $0 < c_k \leq 1$. Agora pela desigualdade (6.18) e pela Observação 6.12 segue-se que

$$\begin{aligned} |\Phi_0(f)| &\leq \left| \Phi_0\left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}\right) - \Phi\left(\sum_{k=1}^m c_k \cdot 1_{A_k}\right) \right| + \left| \Phi\left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}\right) \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n \|c_k \cdot 1_{A_k}\|_{L_1} + \left| \Phi\left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}\right) \right| \\ &= M \sum_{k=1}^n \|c_k \cdot 1_{A_k}\|_{L_1} + \left| \sum_{k=1}^n c_k \Phi(1_{A_k}) - \Delta_\Phi(c_1 \cdot 1_{A_1}, \dots, c_m \cdot 1_{A_n}) \right| \\ &\leq M\mu(S) + \sum_{k=1}^n |\Phi(1_{A_k})| + \left| \Delta_\Phi(c_1 \cdot 1_{A_1}, \dots, c_m \cdot 1_{A_n}) \right|, \\ &\leq M\mu(S) + \sum_{k=1}^n |\Phi(1_{A_k})| + (n-1)\delta(\Phi) \sum_{k=1}^n \|c_k \cdot 1_{A_k}\|_{L_1} \\ &\leq M\mu(S) + \sum_{k=1}^n |\Phi(1_{A_k})| + (n-1)\delta(\Phi)\mu(S). \end{aligned}$$

Agora demonstraremos que Φ_0 é contínua em $(P, \|\cdot\|_\infty)$. De fato, seja $f_n \rightarrow f$, onde $(f_n)_n$ e f pertence a P , reescrevendo, $\frac{f_n}{f} \rightarrow 1$. Então para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$(1 - \varepsilon)f \leq f_n \leq (1 + \varepsilon)f.$$

Agora, para $s \in S$ e $n \geq \mathbb{N}$, temos por (6.19)

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
0 \leq f_n(s) - (1 - \varepsilon)f(s) \leq 2\varepsilon f(s) &\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)f(s) \leq f_n(s) \leq (1 + \varepsilon)f(s) \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty \\
&\Rightarrow \frac{f_n - (1 - \varepsilon)f}{2\varepsilon \|f\|_\infty} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \left\| \frac{f_n - (1 - \varepsilon)f}{2\varepsilon \|f\|_\infty} \right\|_\infty \leq 1 \\
&\Rightarrow |\Phi_0(f_n - (1 - \varepsilon)f)| \leq 2\varepsilon K \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Similarmente demonstramos que

$$\left| \Phi_0((1 + \varepsilon)f - f_n) \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty K$$

sempre que $n \geq \mathbb{N}$. Agora pelo fato de Φ_0 ser convexo, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_0(f_n) - (1 - \varepsilon)\Phi_0(f) &= \Phi_0(f_n - (1 - \varepsilon)f + (1 - \varepsilon)f) - \Phi_0(f(1 - \varepsilon)) \\
&\leq \Phi_0(f_n - (1 - \varepsilon)f) \\
&\leq 2\varepsilon K \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\Phi_0(f_n) \leq (1 - \varepsilon)\Phi_0(f) + 2\varepsilon K \|f\|_\infty, \text{ se } n \geq \mathbb{N}$$

Analogamente demonstramos que

$$(1 + \varepsilon)\Phi_0(f) \leq \Phi_0(f_n) + 2\varepsilon K \|f\|_\infty, \text{ se } n \geq \mathbb{N}.$$

Pelas últimas desigualdade, concluímos que

$$|\Phi_0(f) - \Phi_0(f_n)| \leq \varepsilon |\Phi_0(f)| + 2\varepsilon K \|f\|_\infty \text{ se } n \geq \mathbb{N}.$$

Daqui, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)$ e assim Φ é contínua em $(P, \|\cdot\|_\infty)$, portanto, contínua em $(P, \|\cdot\|_{L_1})$ por $L_1(\mu)$ ser de dimensão finita.

Definamos o conjunto B_0 de todas as funções $x \in L_0(\mu)$, tais que

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_0(f), \quad \forall f \in P.$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Vejamos que

$$\Phi_0(f) = \sup_{x \in B_0} \int f \log |x| d\mu.$$

Fixemos $f \in P$. Demonstraremos que existe um funcional linear $\tilde{\beta} : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Phi_0(f) \leq \tilde{\beta}(f)$ e $\tilde{\beta}(g) \leq \Phi_0(g)$ para todo $g \in P$. De fato, seja $W = \{\lambda f : \lambda > 0\}$.

Definamos uma função $\beta : W \rightarrow \mathbb{R}$ por $\beta(\lambda f) = \lambda \Phi_0(f)$. Note que $\beta(g) \leq \Phi_0(g)$ para todo $g \in W$.

Definamos dois subconjuntos não vazios de $L_1(\mu) \times \mathbb{R}$ por

$$C = \{(g, t) \in P \times \mathbb{R} : \Phi_0(g) < t\},$$

e,

$$\Gamma = \{(g, \beta(g)) : g \in W\}.$$

Pelo fato de Φ_0 ser contínua e convexa, temos que C é um subconjunto aberto e convexo de $L_1(\mu) \times \mathbb{R}$. É imediato verificar que Γ é um subconjunto convexo de $L_1(\mu) \times \mathbb{R}$. Da desigualdade $\beta(g) \leq \Phi_0(g)$ para todo $g \in W$, deduzimos que C e Γ são conjuntos disjuntos. Então C e Γ verificam as hipóteses do teorema de Hahn-Banach geométrico (ver Teorema 2.65), portanto, existe um funcional linear $\varphi : L_1(\mu) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(h, \beta(h)) < \varphi(g, \tau), \quad \forall h \in W \text{ e } \forall (g, \tau) \in C.$$

Escrevendo $\varphi(x, t) = l(x) + at$, para todo $x \in L_1(\mu)$ e todo $t \in \mathbb{R}$, onde $l : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$l(h) + a\beta(h) < l(g) + a\tau, \quad \forall h \in W \text{ e } \forall (g, \tau) \in C,$$

isto é,

$$\lambda l(f) + \lambda a\beta(f) < l(g) + a\tau, \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall (g, \tau) \in C,$$

assim, $l(f) + a\beta(f) \leq 0$, portanto $l(h) + a\beta(h) \leq 0$ para todo $h \in W$. Note que se $(g, \tau) \in C$, então $(ng, n\tau) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $0 \leq l(g) + a\tau$, $\forall (g, \tau) \in C$. Resumindo, demonstramos que

$$l(h) + a\beta(h) \leq 0, \quad \forall h \in W \tag{6.20}$$

e

$$0 \leq l(g) + a\tau, \quad \forall (g, \tau) \in C. \tag{6.21}$$

Se $\tau \rightarrow \infty$ na desigualdade (6.21) obtemos que $a \geq 0$. Demonstraremos que $a > 0$. Assumamos por contradição que $a = 0$. Então (6.20) e (6.21) transformam-se respectivamente em $l(h) \leq 0$ para todo $h \in W$ e $0 \leq l(g)$ para todo $g \in P$. Portanto $l(g - h) \geq 0$ para todo $g \in P$ e todo $h \in W$. Note que para $x \in L_1(\mu)$, por $\text{Im}(x)$ ser um conjunto finito, encontramos $\lambda > 0$ tal que $x + \lambda f > 0$, isto é, $x + \lambda f \in P$. Agora $l(x) = l(x + \lambda f - \lambda f) \geq 0$ para todo $x \in L_1(\mu)$. Logo $l = 0$.

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Isto mostra que $\varphi = 0$ o qual é absurdo. Consequentemente $a > 0$.
 Definamos um funcional linear $\bar{\beta}$ em $L_1(\mu)$ por

$$\bar{\beta} = \frac{-l}{a}.$$

De (6.20) e (6.21) deduzimos que $\beta(h) \leq \bar{\beta}(h)$, para todo $h \in W$, em particular $\Phi_0(f) \leq \bar{\beta}(f)$, e $\bar{\beta}(g) \leq \tau$ para todo $(g, \tau) \in C$. Note que para $g \in P$, temos que $(g, \Phi_0(g) + \varepsilon) \in C$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto $\bar{\beta}(g) \leq \Phi_0(g) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, isto é, $\bar{\beta}(g) \leq \Phi_0(g)$ para todo $g \in P$. Consequentemente, existe um funcional linear $\bar{\beta} : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi_0(f) \leq \bar{\beta}(f) \text{ e } \bar{\beta}(g) \leq \Phi_0(g), \quad \forall g \in P. \quad (6.22)$$

Provaremos que dado α tal que $\alpha < \Phi_0(f)$, existe $x_0 \in B_0$ que verifica $\alpha < \int f \log |x_0| d\mu$. De fato, pelo anterior existe um funcional linear $\bar{\beta} : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica (6.22). Nós podemos escrever o funcional $\bar{\beta}$ como $\bar{\beta}(g) = \int gh d\mu$ para todo $g \in L_1(\mu)$ e para algum $h \in L_\infty(\mu)$. Se $x_0 = e^h$, então $\int g \log |x_0| d\mu \leq \Phi_0(g)$ para todo $g \in P$, isto é, $x_0 \in B_0$, e $\alpha < \Phi_0(f) \leq \bar{\beta}(f) = \int f \log |x_0| d\mu$. Logo,

$$\Phi_0(f) = \sup_{x \in B_0} \int f \log |x| d\mu.$$

Definamos agora $\Phi_1(f) = \inf \sum_{k=1}^n (\Lambda(f_k) - \Phi(f_k))$, onde o ínfimo é tomado sobre os $f_k \geq 0$, com $f = \sum_{k=1}^n f_k$. Por um argumento similar ao anterior provamos que

$$\Lambda(f) - \Phi(f) - M\|f\|_{L_1} \leq \Phi_1(f) \leq \Lambda(f) - \Phi(f), \quad (6.23)$$

e se B_1 é o conjunto de todas as funções $x \in L_0$, tais que

$$\int f \log |x| d\mu \leq \Phi_1(f) \quad \forall f \in P,$$

demonstramos novamente que

$$\Phi_1(f) = \sup_{x \in B_1} \int f \log |x| d\mu.$$

Provaremos que $\Phi_1 + \Phi_2 \leq \Lambda$. De fato, sejam $x \in B_0$ e $y \in B_1$. Então para $f \in P$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int f \log |x| d\mu + \int f \log |y| d\mu &= \int f \log |x \cdot y| d\mu \\ &\leq \Lambda(f), \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

logo, pelo Teorema 6.17, obtemos que $x \cdot y \in B_{L_1}$, concluindo que $B_0 \cdot B_1 \subseteq B_{L_1}$. Seja $B_X = \overline{C(B_1)}$ a envoltória convexa fechada na topologia q.s. de B_1 . Argumentando como na prova do Teorema 6.20, demonstra-se que $B_X \cdot B_1 \subseteq B_{L_1}$. Definimos um espaço X , com uma função norma

$$\|x\|_X = \begin{cases} \inf \{ \alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in B_X \}, & \text{se } \alpha^{-1}x \in B_X, \text{ para algum } \alpha > 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha^{-1}x \notin B_X, \text{ para todo } \alpha > 0. \end{cases}$$

No Teorema 6.20 demonstramos que o X assim definido é um espaço de Köthe. Usando o fato $B_X \cdot B_1 \subseteq B_{L_1}$, provamos que

$$\Phi_X(f) + \Phi_1(f) \leq \Lambda(f), \quad \forall f \in P \quad (6.24)$$

Agora das desigualdades (6.23) e (6.24), segue-se que

$$\Phi_X(f) \leq \Phi(f) + M\|f\|_{L_1}, \quad \forall f \in P.$$

Como $B_0 \subseteq B_X$, então $\Phi_0(f) \leq \Phi_X(f)$ para todo $f \in P$ e pela desigualdade (6.18), demonstramos $\Phi(f) - M\|f\|_{L_1} \leq \Phi_X(f)$ para todo $f \in P$. Até o momento Provamos que existe um espaço de Köthe X , tal que

$$|\Phi_X(f) - \Phi(f)| \leq M\|f\|_{L_1}, \quad \forall f \in P.$$

Se $f \geq 0$, existe uma sequência decrescente em P , que denotamos por $(f_n)_n$, tal que $f_n \rightarrow f$ na topologia pontual. O teorema da convergência monótona implica que $\|f_n\|_{L_1} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Como Φ é semilinear, o Teorema 6.16 implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n) - \Phi(f)| \leq 2\delta(\Phi)\|f\|_{L_1},$$

portanto

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi_X(f_n) - \Phi(f)| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi(f_n) - \Phi(f)| + \limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi_X(f_n) - \Phi(f_n)| \\ &\leq 2\delta(\Phi)\|f\|_{L_1} + M\|f\|_{L_1}, \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\Phi_X(f_n) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi))\|f\|_{L_1} \quad \forall f \geq 0.$$

Note que

$$|\Phi_X(f) - \Phi(f)| \leq |\Phi_X(f) - \Phi_X(f_n)| + |\Phi_X(f_n) - \Phi(f)|,$$

logo

$$|\Phi_X(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi))\|f\|_{L_1} \quad \forall f \geq 0.$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Resumindo, existe um espaço de Köthe X , tal que

$$|\Phi_X(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in L_1^+(S)$, onde S é finito.

Caso 2. Suponha que $\mathcal{T}$ seja um semi-ideal estrito de $L_1^+(S)$, onde S não é necessariamente finito. Seja $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ uma coleção finita de conjuntos mensuráveis disjuntos tais que $1_{A_k} \in \mathcal{T}$, para cada $1 \leq k \leq n$. Consideremos $E_{\mathcal{A}} = \{\sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k} : c_k \geq 0\}$. Demonstraremos que existe um funcional semilinear convexo $\Psi_{\mathcal{A}}$, definido em $E_{\mathcal{A}}$, tal que $\Lambda - \Psi_{\mathcal{A}}$ é convexo e

$$|\Psi_{\mathcal{A}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in E_{\mathcal{A}}$. De fato, seja $S_n = \{s_1, \dots, s_n\}$ e $(S_n, \mathcal{P}(S_n), \nu)$ um espaço de medida onde $\nu(\{s_k\}) = \mu(A_k)$, para cada $1 \leq k \leq n$. Definamos uma função $\pi : E_{\mathcal{A}} \rightarrow L_1^+(S_n, \nu)$ pondo

$$\sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k} \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{\{s_k\}}.$$

É imediato verificar que π satisfaz as seguintes propriedades:

- Se $f, g \in E_{\mathcal{A}}$ e $\lambda \geq 0$, então $\pi(f + \lambda \cdot g) = \pi(f) + \lambda \cdot \pi(g)$.
- A função π é bijetora.
- $\|f\|_{L_1(S, \mu)} = \|\pi(f)\|_{L_1(S_n, \nu)}$.
- Se denotamos como $\Lambda_{L_1(S_n, \nu)} = \Phi_{L_1(S_n, \nu)}$, então

$$\Lambda(\pi^{-1}(f)) = \Lambda_{L_1(S_n, \nu)}(f), \text{ para todo } f \in L_1^+(S_n, \nu).$$

Seja $\Phi_{E_{\mathcal{A}}} = \Phi \upharpoonright_{E_{\mathcal{A}}}$. Então $\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1} : L_1^+(S_n, \nu) \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional semilinear sobre $L_1^+(S_n, \nu)$. Mais ainda

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1}}(f_1, \dots, f_n) &= \sum_{k=1}^n (\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1})(f_k) - (\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1})\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \Phi_{E_{\mathcal{A}}}(\pi^{-1}(f_k)) - \Phi_{E_{\mathcal{A}}}\left(\sum_{k=1}^n \pi^{-1}(f_k)\right) \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
&= \Delta_{\Phi_{E_{\mathcal{A}}}}(\pi^{-1}(f_1), \dots, \pi^{-1}(f_n)) \\
&\leq M \sum_{k=1}^n \|\pi^{-1}(f_k)\|_{L_1(S)} + \Delta_{\Lambda}(\pi^{-1}(f_1), \dots, \pi^{-1}(f_n)) \\
&= M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1^+(S_n, \nu)} + \Delta_{\Lambda_{L_1(S_n, \nu)}}(f_1, \dots, f_n),
\end{aligned}$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in L_1(S_n, \nu)$. Similarmente se prova que

$$\Delta_{\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1}}(f_1, \dots, f_n) \geq -M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1^+(S_n, \nu)}.$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in L_1(S_n, \nu)$.

Até o momento, demonstramos que

$$-M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1^+(S_n, \nu)} \leq \Delta_{\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1}}(f_1, \dots, f_n) \leq M \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1^+(S_n, \nu)} + \Delta_{\Lambda_{L_1(S_n, \nu)}}(f_1, \dots, f_n),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in L_1(S_n, \nu)$. Portanto o funcional semilinear $\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1}$ verifica as condições do Caso 1., assim existe um espaço de Köthe X , tal que

$$|\Phi_X(g) - (\Phi_{E_{\mathcal{A}}} \circ \pi^{-1})(g)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|g\|_{L_1},$$

para todo $g \in L_1^+(S_n, \nu)$.

Seja $g = \pi(f)$, onde $f \in E_{\mathcal{A}}$, definimos $\Psi_{\mathcal{A}}$ por $\Psi_{\mathcal{A}}(f) = \Phi_X(\pi(f))$. O funcional $\Psi_{\mathcal{A}}$ assim definido é um funcional semilinear convexo com $\Lambda - \Psi_{\mathcal{A}}$ convexo (lembre-se que Φ_X e $\Lambda_{L_1^+(S_n, \nu)} - \Phi_X$ são convexos e π linear, portanto $\Psi_{\mathcal{A}}$ e $\Lambda - \Psi_{\mathcal{A}}$ são convexos) tal que

$$|\Psi_{\mathcal{A}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in E_{\mathcal{A}}$.

Caso 3. Seja $\mathcal{U}$ o cone das funções simples em $\mathcal{T}$. Então existe um funcional semilinear convexo $\Psi_{\mathcal{U}}$, definido em $\mathcal{U}$, com $\Lambda - \Psi_{\mathcal{U}}$ convexo tal que

$$|\Psi_{\mathcal{U}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in \mathcal{U}$. De fato, seja $f \in \mathcal{U}$. Note que $f \in E_{\mathcal{A}}$ para algum espaço $E_{\mathcal{A}}$. Representemos a partição $\{A_1, \dots, A_n, (S \setminus \cup_{k=1}^n A_k)\}$ de S por $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

as partições de S . O espaço $E_{\mathcal{A}}$, onde $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ e os A_k são conjuntos mensuráveis disjuntos, será como no caso anterior, o conjunto das funções $f \in \mathcal{U}$ tais que $f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot 1_{A_k}$, para constantes $c_k \geq 0$. Definamos uma relação $\geq$ em $\mathcal{P}$ como: se $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$, $\mathcal{A}' = (A'_1, \dots, A'_m) \in \mathcal{P}$, então $\mathcal{A}' \geq \mathcal{A}$ se, e somente se, $\mathcal{A}'$ é mais fina que $\mathcal{A}$. O par $(\mathcal{P}, \geq)$ é um conjunto direito. Portanto, para $f \in \mathcal{U}$ definimos uma rede $\Upsilon_f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Upsilon_f(\mathcal{A}) = \begin{cases} \Phi(f), & \text{se } f \notin E_{\mathcal{A}} \\ \Psi_{\mathcal{A}}(f), & \text{se } f \in E_{\mathcal{A}}. \end{cases}$$

Por Abuso de notação, representamos a rede Υ_f por $(\Psi_{\mathcal{A}}(f))_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}}$. Então pelo caso Caso 2. e pela forma como definimos $(\Psi_{\mathcal{A}}(f))_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}}$ temos que

$$|\Psi_{\mathcal{A}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$, onde $f \in \mathcal{U}$ é fixo. A desigualdade acima mostra que $(\Psi_{\mathcal{A}}(f))_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}}$ é uma rede limitada, portanto, existe uma subrede convergente de $(\Psi_{\mathcal{A}}(f))_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}}$, logo o conjunto

$$D_f = \left\{ (\Psi_{\mathcal{A}'}(f))_{\mathcal{A}' \in \mathcal{P}} \text{ subrede de } (\Psi_{\mathcal{A}}(f))_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}} : (\Psi_{\mathcal{A}'}(f))_{\mathcal{A}' \in \mathcal{P}} \text{ é convergente} \right\}$$

é não vazio. Consideremos a família indexada $(D_f)_{f \in \mathcal{U}}$. Pelo axioma da escolha, existe uma função $e : \mathcal{U} \rightarrow \cup_{f \in \mathcal{U}} D_f$ tal que $e(f) \in D_f$. Denotemos $e(f) = (\Psi_{\mathcal{A}'}(f))_{\mathcal{A}' \in \mathcal{P}}$. Agora definamos um funcional semilinear $\Psi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\Psi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{A}'} \Psi_{\mathcal{A}'}(f).$$

Observe que $\Psi_{\mathcal{U}}$ assim definido verifica que

$$|\Psi_{\mathcal{U}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in \mathcal{U}$. Sejam $f, g \in \mathcal{U}$. Então existem $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathcal{P}$ tais que $f \in E_{\mathcal{A}'}$ e $g \in E_{\mathcal{A}''}$. Se $\mathcal{A}'''$ é uma coleção mais fina que $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}''$, então $f, g, f+g \in E_{\mathcal{A}'''}$. Como $\Psi_{\mathcal{A}}$ é convexo para todo $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}'''$, então $\Psi_{\mathcal{A}}(f+g) \leq \Psi_{\mathcal{A}}(f) + \Psi_{\mathcal{A}}(g)$ para todo $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}'''$. Portanto $\Psi_{\mathcal{U}}$ é uma função convexa. Similarmente se demonstra que $\Lambda - \Psi_{\mathcal{U}}$ é uma função convexa. Consequentemente existe um funcional semilinear convexo $\Psi_{\mathcal{U}}$, definido em $\mathcal{U}$, com $\Lambda - \Psi_{\mathcal{U}}$ convexo tal que

$$|\Psi_{\mathcal{U}}(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in \mathcal{U}$.

Caso 4. Demonstraremos que existe um funcional semilinear convexo Ψ , com $\Lambda - \Psi$ convexo, definido em $\mathcal{T}$ tal que

$$|\Psi(f) - \Phi(f)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|f\|_{L_1}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

para todo $f \in \mathcal{T}$. De fato, seja $f \in \mathcal{T}$. Como o conjunto das funções simples é denso em $L_1(\mu)$, então $\mathcal{U} \cap [0, f]$ é denso em $[0, f]$. Vejamos que o funcional $\Psi_{\mathcal{U}}$ é uniformemente contínuo em $\mathcal{U} \cap [0, f]$. Como Φ é semilinear, então Φ é contínua em 0, quando Φ é restrito a $[0, f]$ (ver condição 3. da definição de funcional semilinear). Observe que

$$|\Psi_{\mathcal{U}}(g)| \leq (M + 2\delta(\Phi)) \|g\|_{L_1} + |\Phi(g)|,$$

para todo $g \in \mathcal{U} \cap [0, f]$.

Sejam $g, h \in [0, f]$ e $k = \max(g, h)$. Então pelo fato de $\Lambda - \Psi_{\mathcal{U}}$ ser convexo, temos que

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathcal{U}}(g) - \Psi_{\mathcal{U}}(h)| &= |\Psi_{\mathcal{U}}(g) + \Psi_{\mathcal{U}}(k - g) - \Psi_{\mathcal{U}}(k)| \\ &\quad + |\Psi_{\mathcal{U}}(h) + \Psi_{\mathcal{U}}(k - h) - \Psi_{\mathcal{U}}(k)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - h)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - g)| \\ &= |\Delta_{\Psi_{\mathcal{U}}}(g, k - g)| + |\Delta_{\Psi_{\mathcal{U}}}(h, k - h)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - h)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - g)| \\ &\leq |\Delta_{\Lambda}(g, k - g)| + |\Delta_{\Lambda}(h, k - h)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - h)| + |\Psi_{\mathcal{U}}(k - g)| \\ &\leq |\Delta_{\Lambda}(g, k - g)| + |\Delta_{\Lambda}(h, k - h)| + (M + 2\delta(\Phi)) \|k - h\|_{L_1} + |\Phi(k - h)| \\ &\quad + (M + 2\delta(\Phi)) \|k - g\|_{L_1} + |\Phi(k - g)| \\ &= |\Delta_{\Lambda}(g, k - g)| + |\Delta_{\Lambda}(h, k - h)| + |\Phi(k - h)| + |\Phi(k - g)| \\ &\quad + (M + 2\delta(\Phi)) \|h - g\|_{L_1} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |\Delta_{\Lambda}(g, k - g)| &= \|g\|_{L_1} \cdot \left| \Delta_{\Lambda}\left(\frac{g}{\|g\|_{L_1}}, \frac{k - g}{\|g\|_{L_1}}\right) \right| \\ &\leq \|f\|_{L_1} \cdot \sup_{\|F\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|G\|_{L_1} \leq \|k - g\|_{L_1}} |\Delta_{\Lambda}(F, G)|, \end{aligned}$$

logo

$$|\Delta_{\Lambda}(g, k - g)| \leq \|f\|_{L_1} \cdot \phi(\|k - g\|_{L_1}),$$

onde

$$\phi(\lambda) = \sup_{\|F\|_{L_1} \leq 1} \sup_{\|G\|_{L_1} \leq \lambda} |\Delta_{\Lambda}(F, G)|$$

e $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi(\lambda) = 0$, pois Λ é um funcional semilinear K -contínuo. Similarmente

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$|\Delta_\Lambda(h, k - h)| \leq \|f\|_{L_1} \cdot \phi_0(\|h - g\|_{L_1}),$$

onde ϕ_0 é uma função tal que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_0(\lambda) = 0$. Isto prova que

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathcal{U}}(g) - \Psi_{\mathcal{U}}(h)| &\leq \|f\|_{L_1} \cdot \phi(\|k - g\|_{L_1}) + \|f\|_{L_1} \cdot \phi_0(\|h - g\|_{L_1}) \\ &\quad + (M + 2\delta(\Phi)) \cdot \|h - g\|_{L_1} + |\Phi(k - g)| + |\Phi(k - h)| \end{aligned}$$

Agora seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Então, existe $\zeta > 0$ tal que $0 < \lambda < \zeta$ implica que

$$\phi(\lambda) < \frac{\varepsilon}{5\|f\|_{L_1}},$$

$$\phi_0(\lambda) < \frac{\varepsilon}{5\|f\|_{L_1}},$$

e,

$$|\Phi(l)| < \frac{\varepsilon}{5}, \text{ se } \|l\|_{L_1} < \zeta \text{ e } l \in [0, f].$$

Escolha $0 < \zeta < \frac{\varepsilon}{5(M + 2\delta(\Phi))}$.

Se $\|h - g\|_{L_1} < \zeta$, então como $|k - h|, |k - g| \leq |g - h|$, obtemos imediatamente que $\|k - h\|_{L_1}, \|k - g\|_{L_1} \leq \zeta$, portanto,

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathcal{U}}(g) - \Psi_{\mathcal{U}}(h)| &\leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Resumindo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\zeta > 0$ tal que

$$\|g - h\|_{L_1} < \zeta \Rightarrow |\Psi_{\mathcal{U}}(g) - \Psi_{\mathcal{U}}(h)| < \varepsilon.$$

Isto prova que $\Psi_{\mathcal{U}}$ é uniformemente contínua em $\mathcal{U} \cap [0, f]$. Portanto, o Teorema 2.80 implica que existe uma única extensão uniformemente contínua de $\Psi_{\mathcal{U}}$ a $[0, f]$, que denotamos por $\Psi_{\mathcal{U}}$. Definamos Ψ em $\mathcal{T}$ como

$$\Psi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{\mathcal{U}}(f_n), \text{ onde os } f_n \in [0, f] \text{ e } f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L_1}} f.$$

O Teorema 2.80 garante que a função está bem definida. Note que Ψ e $\Lambda - \Psi$ são funcionais semilineares convexos em $\mathcal{T}$, pois $\Psi_{\mathcal{U}}$ e $\Lambda - \Psi_{\mathcal{U}}$ são funcionais semilineares convexos em $\mathcal{U}$.

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções simples de $\mathcal{T}$, tal que $f_n \rightarrow f$ em norma $\|\cdot\|_{L_1}$, com $f_n \leq f$. Portanto

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathcal{U}}(f_n) - \Phi(f)| &\leq |\Psi_{\mathcal{U}}(f_n) - \Phi(f_n)| + |\Phi(f_n) - \Phi(f)| \\ &\leq (M + 2\delta(\Phi))\|f_n\|_{L_1} + 2\delta(\Phi)\|f\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Se $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$|\Psi(f) - \Phi(f)| \leq (M + 4\delta(\Phi))\|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in \mathcal{T}$, logo $d(\Phi, \Psi) \leq M + 4\delta(\Phi)$. O Teorema 6.20 implica que existe um espaço de Köthe tal que $\Psi = \Phi_X$. Logo $d(\Phi, \Phi_X) \leq M + 4\delta(\Phi)$. $\square$

Teorema 6.22 *Sejam S um conjunto e μ uma medida positiva definida em uma σ -álgebra finita de S , que denotamos por Σ . Se $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz*

$$\phi(A) + \phi(B) - \mu(A \cup B) \leq \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

para todo $A, B \in \Sigma$ disjuntos, então existe uma medida com sinal ν em Σ tal que $\nu(A) \leq \phi(A)$ para todo $A \in \Sigma$ e $\nu(S) \geq \phi(S) - 4\mu(S)$.

Demonstração. Para $A \in \Sigma$, definamos um σ -álgebra em A como $\Sigma_A = \{D \in \Sigma : D \subseteq A\}$. Seja Γ_A o conjunto de todas as medidas com sinal ρ , definidas em (A, Σ_A) , tais que $\rho \leq \phi$. Seja $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(A) = \begin{cases} \mu(A)^{-1} \left(\phi(A) - \sup_{\rho \in \Gamma_A} \rho(A) \right), & \text{se } \mu(A) \neq 0 \\ 0, & \text{se } \mu(A) = 0. \end{cases}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\nu_n \in \Gamma_S$, tal que $\sup_{\rho \in \Gamma_S} \rho(S) - 1/n \leq \nu_n(S)$, que equivale a

$$\phi(S) - h(S)\mu(S) - 1/n \leq \nu_n(S), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que a sequência $(\nu_n(A))_n$ é limitada para todo $A \in \Sigma$, pois $\nu_n(A) \leq \phi(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} \nu_n(A) &= \nu_n(S) - \nu_n(S \setminus A) \\ &\geq \phi(S) - h(S)\mu(S) - 1/n - \phi(S \setminus A) \\ &\geq \phi(S) - h(S)\mu(S) - 1 - \phi(S \setminus A) \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como Σ é finito, então existe uma subsequência de $(\nu_n)_n$, que denotamos por $(\nu_n)_n$, tal que para todo $A \in \Sigma$ a sequência $(\nu_n(A))_n$ converge. Se definimos uma medida com sinal como $\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A)$, temos que $\nu(S) \geq \phi(S) - h(S)\mu(S)$ e $\nu(A) \leq \phi(A)$ para todo $A \in \Sigma$.

Para terminar a prova, basta mostrar que $\gamma = \max_{A \in \Sigma} h(A) \leq 4$, pois $\nu(S) \geq \phi(S) - \gamma\mu(S) \geq \phi(S) - 4\mu(S)$. De fato, assumamos que $\max_{A \in \Sigma} h(A) = h(C)$, para algum $C \in \Sigma$.

Se $\mu(C) = 0$, então $h(C) = 0$, logo, trivialmente $\gamma \leq 4$.

Suponha $\mu(C) > 0$. Então, pela definição de h , obtemos que para $0 < \varepsilon < \mu(C)$, existe $\lambda \in \Gamma_C$ tal que

$$\lambda(C) \geq \phi(C) - \varepsilon - \gamma\mu(C) \quad (6.25)$$

Verifiquemos que a afirmação :

$$B \in \Sigma_C, B \neq \emptyset \Rightarrow \lambda(B) < \phi(B) - 2\mu(B)$$

é falsa. Assumamos que seja verdadeira. Isto implica que $\lambda + 2\mu \in \Gamma_C$, e por (6.25) obtemos que

$$\begin{aligned} \gamma = h(C) &\leq \mu(C)^{-1}(\phi(C) - \lambda(C) - 2\mu(C)) \\ &\leq \mu(C)^{-1}(\varepsilon + \gamma\mu(C) - 2\mu(C)). \end{aligned}$$

Isto é, $\gamma \leq \mu(C)^{-1}(\varepsilon + \gamma\mu(C) - 2\mu(C))$, que equivale a dizer que $2\mu(C) \leq \varepsilon$ e que contradiz a escolha de ε . Portanto, existe $B \in \Sigma_C$ com $B \neq \emptyset$, tal que $\lambda(B) \geq \phi(B) - 2\mu(B)$. Isto é, o conjunto

$$\Theta = \{D \in \Sigma_C : \lambda(D) \geq \phi(D) - 2\mu(D)\}$$

ordenado por inclusão é não vazio e finito, portanto, possui um elemento maximal não vazio, que denotamos por E . Observe que

$$\lambda(E) \geq \phi(E) - 2\mu(E). \quad (6.26)$$

Se $C \setminus E = \emptyset$, então $C = E$, logo por (6.26), temos a desigualdade $4 \geq 2 \geq \mu(C)^{-1}(\phi(C) - \lambda(C)) \geq h(C)$, e novamente estaria provado o teorema.

Suponha que $C \setminus E \neq \emptyset$. Então para todo $A \in \Sigma_{C \setminus E}$, obtemos que $\lambda(E \cup A) < \phi(E \cup A) - 2\mu(E \cup A)$ (lembre-se que E é um elemento maximal de Θ). Como $E \cap A = \emptyset$, temos que $\lambda(A \cup E) = \lambda(A) + \lambda(E)$. Usando (6.26) e a hipóteses do teorema, temos que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &< \phi(A \cup E) - 2\mu(A \cup E) - \lambda(E) \\
&= \phi(A \cup E) - \phi(E) - 2\mu(A) - (\lambda(E) + 2\mu(E) - \phi(E)) \\
&\leq \phi(A \cup E) - \phi(E) - 2\mu(A) \\
&\leq \phi(A) - 2\mu(A).
\end{aligned}$$

Resumindo,

$$\lambda(A) < \phi(A) - 2\mu(A), \text{ para todo } A \in \Sigma_{C \setminus E}. \quad (6.27)$$

Agora definamos uma medida com sinal em (C, Σ_C) , que denotamos por λ_0 , como

$$\lambda_0(B) = \lambda(B) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E).$$

Então, pela desigualdade $\lambda \leq \phi$, por (6.27) e pela hipóteses do teorema, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_0(B) &= \lambda(B) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&= \lambda((B \cap E) \cup (B \cap C \setminus E)) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&= \lambda(B \cap E) + \lambda(B \cap C \setminus E) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&\leq \phi(B \cap E) + \lambda(B \cap C \setminus E) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&< \phi(B \cap E) + (\phi(B \cap C \setminus E) - 2\mu(B \cap C \setminus E)) + \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&= \phi(B \cap E) + \phi(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap C \setminus E) - \mu(B \cap E) \\
&= \phi(B \cap E) + \phi(B \cap C \setminus E) - \mu(B) \\
&\leq \phi(B),
\end{aligned}$$

isto mostra que $\lambda_0 \in \Gamma_C$. Portanto,

$$\gamma = h(C) \leq \mu(C)^{-1}(\phi(C) - \lambda_0(C)),$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

assim $\lambda_0(C) \leq \phi(C) - \gamma\mu(C)$ e pela definição de λ_0 , temos que $\lambda_0(C) = \lambda(C) + \mu(C \setminus E) - \mu(E)$, portanto, $\lambda(C) + \mu(C \setminus E) - \mu(E) \leq \phi(C) - \gamma\mu(C)$, usando a equação (6.25), segue-se que $\phi(C) - \varepsilon - \gamma\mu(C) + \mu(C \setminus E) - \mu(E) \leq \phi(C) - \gamma\mu(C)$, que equivale a $\mu(C \setminus E) - \mu(E) \leq \varepsilon$, deduzindo que

$$\frac{\mu(C) - \varepsilon}{2} \leq \mu(E). \quad (6.28)$$

Pela definição de h , existe uma medida com sinal $\vartheta \in \Gamma_{C \setminus E}$, tal que

$$\vartheta(C \setminus E) \geq \phi(C \setminus E) - \gamma\mu(C \setminus E) - \varepsilon. \quad (6.29)$$

Definamos uma medida com sinal em (C, Σ_C) por

$$\vartheta_0(B) = \lambda(B \cap E) + \vartheta(B \cap C \setminus E) - \mu(E).$$

Usando as desigualdades $\lambda \leq \phi$, $\vartheta \leq \phi$ e as hipóteses do teorema, temos que para todo $B \in \Sigma_C$,

$$\begin{aligned} \vartheta_0(B) &= \lambda(B \cap E) + \vartheta(B \cap C \setminus E) - \mu(E) \\ &\leq \phi(B \cap E) + \phi(B \cap C \setminus E) - \mu(B) \\ &\leq \phi(B), \end{aligned}$$

portanto, $\vartheta_0 \in \Gamma_C$. Note que $\vartheta_0(C) = \lambda(E) + \vartheta(C \setminus E) - \mu(C)$ (ver definição de ϑ_0). Agora

$$\begin{aligned} \gamma &= h(C) \\ &\leq \mu(C)^{-1} (\phi(C) - \vartheta_0(C)) \\ &= \mu(C)^{-1} (\phi(C) - \lambda(E) - \vartheta(C \setminus E) + \mu(C)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda(E) + \vartheta(C \setminus E) - \mu(C) \leq \phi(C) - \gamma\mu(C). \quad (6.30)$$

Observe que de (6.29) e (6.26), deduzimos que

$$\begin{aligned} \phi(C) - \gamma\mu(C) &\geq \lambda(E) + \vartheta(C \setminus E) - \mu(C) \\ &\geq \lambda(E) + (\phi(C \setminus E) - \gamma\mu(C \setminus E) - \varepsilon) - \mu(C) \\ &\geq \phi(E) - 2\mu(E) + \phi(C \setminus E) - \gamma\mu(C \setminus E) - \varepsilon - \mu(C), \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

pela hipóteses do teorema, temos que $\phi(C) \leq \phi(E) + \phi(C \setminus E)$, logo

$$\phi(E) + \phi(C \setminus E) - \gamma\mu(C) \geq \phi(E) - 2\mu(E) + \phi(C \setminus E) - \gamma\mu(C \setminus E) - \varepsilon - \mu(C),$$

que equivale a

$$(\gamma - 2)\mu(E) \leq \mu(C) + \varepsilon,$$

e usando (6.28), obtemos que

$$(\gamma - 2) \leq \frac{2(\mu(C) + \varepsilon)}{\mu(C) - \varepsilon}.$$

Se $\varepsilon \rightarrow 0$, concluímos que $\gamma \leq 4$. □

Lema 6.23 *Seja $\sigma > 1$. Então existem constantes C e C' que dependem de σ tais que se $\mathcal{T} \subset (L \log L)_+$ é um semi-ideal estrito e $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional semilinear que satisfaz*

$$\Delta_\Phi(f, g) \leq \alpha \log 2(\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1})$$

para todo $f, g \in \mathcal{T}$ (respectivamente, para todo $f, g \in \mathcal{T}$ disjuntos). Então para $f = \sum_{k=1}^n f_k$, temos que

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{\|f\|_{L_1}}{\|f_k\|_{L_1}} + C\|f\|_{L_1} \right)$$

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(2\sigma \sum_{k=1}^n (\log k) \|f_k\|_{L_1} + C'\|f\|_{L_1} \right).$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ (respectivamente, para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ disjuntos).

Demonstração. Inicialmente, observe que se $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, então as $f_1, \dots, f_n$ são não negativas, portanto $\|f\|_{L_1} = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}$.

Considere a função

$$h(a) = \sigma \left(a \log \frac{1}{a} + (1-a) \log \frac{1}{1-a} \right) - \log 2$$

definida para $0 < a < 1$. Note que h é contínua, decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ e $h(1/2) = (\sigma - 1) \log 2 > 0$, portanto, existe $0 < \theta_0 < 1$ tal que h é positiva em $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 + \theta_0)]$, assim h atinge um mínimo nesse intervalo, isto é, existe $\tau > 0$, tal que

$$\tau \leq \sigma \left(a \log \frac{1}{a} + (1-a) \log \frac{1}{1-a} \right) - \log 2 \tag{6.31}$$

para todo $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}(1 + \theta_0)$.

Agora, como Φ verifica

$$\Delta_\Phi(f, g) \leq \alpha \log 2(\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1})$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

para todo $f, g \in \mathcal{T}$, usando indução demonstraremos que

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha(n-1) \log 2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$.

Assuma que $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$. Então a desigualdade acima mostra que

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + \alpha(n-1) \log 2.$$

Logo, existe c_n tal que

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + c_n \right). \quad (6.32)$$

Escolha c_n como o menor número que verifica essa desigualdade.

Seja $\theta = \max_{1 \leq k \leq n} \|f_k\|_{L_1}$. Vamos dar estimativas de $\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n)$ quando $\theta \leq \theta_0$ e $\theta \geq \theta_0$. De fato:

Suponha primeiro que $\theta \leq \theta_0$. Escolhamos para $1 \leq k \leq n$, constantes $\xi_k = \pm 1$ tais que $0 \leq \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \|f_k\|_{L_1} \leq \theta$. Sejam $A = \{k : \xi_k = 1\}$ e $B = \{k : \xi_k = -1\}$. Consideremos $a = \sum_{k \in A} \|f_k\|_{L_1}$. Observe que $2a - 1 = \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \|f_k\|_{L_1}$, logo $0 \leq 2a - 1 \leq \theta \leq \theta_0$. Isto é, $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}(1 + \theta_0)$.

Sejam $f_A = \sum_{k \in A} f_k$ e $f_B = \sum_{k \in B} f_k$. A hipótese do teorema implica que

$$\Delta_{\Phi}(f_A, f_B) \leq \alpha \log 2. \quad (6.33)$$

Seja $\Delta_{\Phi}(f_k : k \in A) = \Delta_{\Phi}(\overbrace{\{f_k : k \in A\}}^{n\text{-termos}}, 0, \dots, 0)$. Agora, pela desigualdade (6.32), temos que

$$\Delta_{\Phi}\left(\frac{f_k}{a} : k \in A\right) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k \in A} \frac{\|f_k\|_{L_1}}{a} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}} + c_n \right),$$

que equivale a

$$\Delta_{\Phi}(f_k : k \in A) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k \in A} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}} + ac_n \right) \quad (6.34)$$

Similarmente obtemos que

$$\Delta_{\Phi}(f_k : k \in B) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k \in B} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1-a}{\|f_k\|_{L_1}} + (1-a)c_n \right). \quad (6.35)$$

Agora por (6.33), (6.34) e (6.35), temos que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) = \Delta_{\Phi}(f_A, f_B) + \Delta_{\Phi}(f_k : k \in A) + \Delta_{\Phi}(f_k : k \in B)$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha \log 2 + \alpha \left(\sigma \sum_{k \in A} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}} + \alpha c_n \right) \\ &\quad + \alpha \left(\sigma \sum_{k \in B} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1-a}{\|f_k\|_{L_1}} + (1-a)c_n \right) \\ &= \alpha \left(\log 2 + \sigma \sum_{k \in A} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}} + \sigma \sum_{k \in B} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1-a}{\|f_k\|_{L_1}} + c_n \right) \end{aligned}$$

Substituindo $\sigma \sum_{k \in A} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}}$ por $\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}} - \sigma \sum_{k \in B} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{a}{\|f_k\|_{L_1}}$ e pela desigualdade (6.31) temos que

$$\begin{aligned} &= \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + \sigma (a \log a + (1-a) \log(1-a)) + \log 2 + c_n \right) \\ &\leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} - \tau + c_n \right), \end{aligned}$$

onde $\tau > 0$. Resumindo,

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} - \tau + c_n \right),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$ e $\theta \leq \theta_0$.

Agora suponha que $\theta > \theta_0$, e sem perda de generalidade assuma que $\theta = \|f_n\|$. Por cálculos similares dos anteriores deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) &= \Delta_{\Phi}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k, f_n\right) + \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_{n-1}, 0) \\ &\leq \alpha \log 2 \left(\left\| \sum_{k=1}^{n-1} f_k \right\|_{L_1} + \|f_n\|_{L_1} \right) + \left(\alpha \sigma \sum_{k=1}^{n-1} \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1-\theta}{\|f_k\|_{L_1}} + \alpha c_n (1-\theta) \right) \\ &\leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + c_n (1-\theta_0) + \log 2 \right). \end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Resumindo,

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + c_n(1 - \theta_0) + \log 2 \right),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$ e $\theta > \theta_0$.

Em Consequentemente, para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$, temos que

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + \max \left(c_n(1 - \theta_0) + \log 2, c_n - \tau \right) \right).$$

Então pela forma como nós escolhemos c_n (ver desigualdade (6.32)), deduzimos que

$$\max \left(c_n(1 - \theta_0) + \log 2, c_n - \tau \right) = c_n(1 - \theta_0) + \log 2,$$

assim $c_n \leq c_n(1 - \theta_0) + \log 2$, portanto $c_n \leq \frac{\log 2}{\theta_0}$, o que prova a primeira parte do teorema, isto é,

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + \frac{\log 2}{\theta_0} \right),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$, onde $C = \frac{\log 2}{\theta_0}$ depende só de σ .

A segunda parte do teorema, é um resultado imediato do Lema 2.76. De fato, pela parte anterior, temos que

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(\sigma \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} + C \right),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$, e C depende só de σ . Assumamos sem perda de generalidade que $\|f_1\|_{L_1} \geq \|f_2\|_{L_1} \geq \dots \geq \|f_n\|_{L_1}$. Se $\xi_k = \|f_k\|_{L_1}$ e $\varepsilon = 1$, no Lema 2.76 temos que

$$\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{1}{\|f_k\|_{L_1}} \leq 2 \sum_{k=1}^n (\log k) \|f_k\|_{L_1} + B_2,$$

logo

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) \leq \alpha \left(2\sigma \sum_{k=1}^n (\log k) \|f_k\|_{L_1} + C + B_2 \right),$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, com $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} = 1$. Se $C' = C + B_2$, então C' depende só de σ . Isto mostra a segunda parte do lema. $\square$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Lema 6.24 Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante β (que depende de ε) tal que para todo semi-ideal $\mathcal{T}$ e $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ funcional semilinear, temos que

$$|\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n)| \leq \delta(\Phi) \left(\varepsilon \sum_{k=1}^n k \|f_k\|_{L_1} + \beta \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} \right).$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como Φ é semilinear, temos que

$$\Delta_\Phi(f, g) \leq \frac{\delta(\Phi)}{\log 2} \cdot \log 2 (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}).$$

Agora aplicando o Lema 6.23, com $\sigma = 2 \log 2 > 1$ e $\alpha = \frac{\delta(\Phi)}{\log 2}$, temos que

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) \leq \frac{\delta(\Phi)}{\log 2} \left(4 \log 2 \sum_{k=1}^n (\log k) \|f_k\|_{L_1} + C' \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} \right), \quad (6.36)$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, onde C' é constante.

Afirmamos que para $\varepsilon > 0$, existe um número real $\gamma(\varepsilon)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\log k \leq k \cdot \varepsilon + \gamma(\varepsilon).$$

De fato, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{k} = 0$, então existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{se } k \geq N_\varepsilon \Rightarrow \log k \leq k \cdot \varepsilon.$$

Basta definir $\gamma(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{N_\varepsilon} \log m$. Agora da desigualdade (6.36), deduzimos que

$$\begin{aligned} \Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) &\leq \delta(\Phi) \left(4 \sum_{k=1}^n (\varepsilon k + \gamma(\varepsilon)) \|f_k\|_{L_1} + C' \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} \right) \\ &= \delta(\Phi) \left(\sum_{k=1}^n 4\varepsilon k \|f_k\|_{L_1} + (C' + 4\gamma(\varepsilon)) \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} \right), \end{aligned}$$

o que prova o lema. □

Lema 6.25 Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante C tal que se $\mathcal{T}$ é um semi-ideal de L_1^+ e Φ é um funcional semilinear real definido em $\mathcal{T}$ que verifica para todo $f, g \in \mathcal{T}$, com $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$, temos que $\Delta_\Phi(f, g) \geq 0$, então para todo $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{T}$,

$$\Delta_\Phi(f_1, f_2, \dots, f_n) + \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, f_2, \dots, f_n) \geq -C\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

onde $\delta = \delta(\Phi)$.

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Demonstração. Vamos provar o teorema para funções simples. Assuma que $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ são funções simples e $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ com $\|f\|_{L_1} = 1$. Seja Σ_0 o álgebra finita gerada por $f_1, f_2, \dots, f_n$ (ver Definição 2.7). Definamos uma função $\phi : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(A) = \Phi(f \cdot 1_A)$. Então para A, B disjuntos temos

$$\begin{aligned} \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cup B) &= \Phi(f \cdot 1_A) + \Phi(f \cdot 1_B) - \Phi(f \cdot 1_{A \cup B}) \\ &= \Phi(f \cdot 1_A) + \Phi(f \cdot 1_B) - \Phi(f \cdot 1_A + f \cdot 1_B) \\ &\leq |\Delta_\Phi(f \cdot 1_A, f \cdot 1_B)| \\ &\leq \delta(\|f \cdot 1_A\|_{L_1} + \|f \cdot 1_B\|_{L_1}) \\ &= \delta \int_{A \cup B} f d\mu \end{aligned}$$

e pela hipóteses do teorema, temos que $\Delta_\Phi(f \cdot 1_A, f \cdot 1_B) \geq 0$, isto é, $\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$. Resumindo

$$\phi(A) + \phi(B) - \delta \int_{A \cup B} f d\mu \leq \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B).$$

Se $\mu_0(C) = \int_C \delta f d\mu$, então ϕ verifica as hipóteses do Teorema 6.22, logo existe uma medida com sinal ν definida na álgebra Σ_0 tal que $\nu(A) \leq \phi(A)$ para todo $A \in \Sigma_0$ e $\nu(S) \geq \phi(S) - 4\mu_0(S) = \phi(S) - 4\delta = \Phi(f) - 4\delta$ (lembre-se que nós assumimos que $\|f\|_{L_1} = 1$).

Por outro lado, seja g uma função Σ_0 mensurável tal que $\text{supp}(g) \subseteq \text{supp}(f)$. Suponha que $\|g\|_{L_1} = 1$ e definamos uma função h por

$$h(s) = \begin{cases} \frac{g(s)}{f(s)}, & \text{se } f(s) \neq 0 \\ 0, & \text{se } f(s) = 0 \end{cases}.$$

Considere os conjuntos Σ_0 mensuráveis $A_0 = \{s : h(s) < 1\}$ e $A_k = \{s : 2^{k-1} \leq h(s) < 2^k\}$ para $k > 0$ natural. Como Σ_0 é um álgebra finita, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_k = \emptyset$ para $k > N$. Então pelo Lema 6.24 temos que

$$\Delta_\Phi(g \cdot 1_{A_0}, g \cdot 1_{A_1}, \dots, g \cdot 1_{A_N}) \leq \delta \left(\varepsilon \log 2 \sum_{k=0}^N (k+1) \|g \cdot 1_{A_k}\|_{L_1} + C_0 \right),$$

onde C_0 depende de ε . Observe que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
\log 2 \sum_{k=0}^N (k+1) \|g \cdot 1_{A_k}\|_{L_1} &= \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \log 2 \sum_{k=1}^N (k+1) \int_{A_k} g \, d\mu \\
&= \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \sum_{k=1}^N \int_{A_k} g (\log 2^{k-1} + 2 \log 2) \, d\mu \\
&\leq \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \sum_{k=1}^N \int_{A_k} g \log_+ h \, d\mu + 2 \log 2 \sum_{k=1}^N \int_{A_k} g \, d\mu \\
&\leq \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \int g \log_+ h \, d\mu + 2 \log 2 \\
&= \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \int g \log h \, d\mu - \int g \log_- h \, d\mu + 2 \log 2 \\
&= \log 2 \int_{A_0} g \, d\mu + \int g \log h \, d\mu + \int_{A_0} g \log \frac{f}{g} \, d\mu + 2 \log 2 \\
&\leq \log 2 + \int g \log h \, d\mu + \int_{A_0} g \cdot \frac{f}{g} \, d\mu + 2 \log 2 \\
&\leq 3 \log 2 + \int g \log h \, d\mu + 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_\Phi(g \cdot 1_{A_0}, g \cdot 1_{A_1}, \dots, g \cdot 1_{A_N}) \leq \delta \left(\varepsilon \int g \log h \, d\mu + C_1 \right), \quad (6.37)$$

onde $C_1 = \varepsilon (3 \log 2 + 1) + C_0$ (depende só de ε).

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$h \cdot 1_{A_k} = 2^k \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} 1_{B_{kj}},$$

onde os B_{kj} são conjuntos de Σ_0 contidos em A_k . Seja $m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 6.24 temos que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
\Delta_{km} &= \Delta_{\Phi}(2^{-1}f1_{B_{k1}}, 2^{-2}f1_{B_{k2}}, \dots, 2^{-m}f1_{B_{km}}) \\
&\leq \delta \left(\sum_{j=1}^m j 2^{-j} \|f1_{B_{kj}}\|_{L_1} + C_2 \sum_{j=1}^m 2^{-j} \|f1_{B_{kj}}\|_{L_1} \right) \\
&\leq \delta \left(\sum_{j=1}^m j 2^{-j} \|f1_{A_k}\|_{L_1} + C_2 \sum_{j=1}^m 2^{-j} \|f1_{A_k}\|_{L_1} \right) \\
&\leq \delta C_3 \|f1_{A_k}\|_{L_1},
\end{aligned}$$

onde C_2 depende só de ε e $C_3 = \sum_{j=1}^{\infty} j 2^{-j} + C_2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ depende de ε . Agora

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\sum_{j=1}^m 2^{k-j} f1_{B_{kj}}\right) &= \sum_{j=1}^m \Phi(2^{k-j} f1_{B_{kj}}) - \Delta_{\Phi}(2^{k-1}f1_{B_{k1}}, 2^{k-2}f1_{B_{k2}}, \dots, 2^{k-m}f1_{B_{km}}) \\
&\geq \sum_{j=1}^m 2^{k-j} \phi(B_{kj}) - 2^k C_3 \delta \|f1_{A_k}\|_{L_1}.
\end{aligned}$$

Se $s \in A_k$, onde $k \geq 1$, então $2^{k-1} \leq g(s)/f(s) = h(s)$, portanto $-\|f1_{A_k}\|_{L_1} \geq -\|g1_{A_k}\|_{L_1}$, então

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^m 2^{k-j} f1_{B_{kj}}\right) \geq \sum_{j=1}^m 2^{k-j} \nu(B_{kj}) - 2C_3 \delta \|g1_{A_k}\|_{L_1}. \quad (6.38)$$

Agora pela definição de h , obtemos que $g \cdot 1_{A_k} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{k-j} f1_{B_{kj}}$ e pelo Teorema 6.16, temos que

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{k-j} f1_{B_{kj}}\right) = \Phi(g \cdot 1_{A_k}).$$

O Teorema da Convergência Dominada garante que

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{k-j} \nu(B_{kj}) = \sum_{j=1}^{\infty} \int 2^{k-j} 1_{B_{kj}} d\nu = \int 2^k \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} 1_{B_{kj}} d\nu = \int_{A_k} h d\nu.$$

Se $m \rightarrow \infty$ na equação (6.38), então

$$\Phi(g \cdot 1_{A_k}) \geq \int_{A_k} h d\nu - 2C_3 \delta \int_{A_k} g d\mu, \quad \text{se } k \geq 1. \quad (6.39)$$

Similarmente, obtemos que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\Phi(g \cdot 1_{A_0}) \geq \int_{A_0} h \, d\nu - 2C_3\delta \int_{A_0} f \, d\mu, \quad (6.40)$$

somando as equações (6.39), (6.40), usando $\|f\|_{L_1} = \|g\|_{L_1} = 1$ e o fato de $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ ser uma coleção de conjuntos disjuntos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \Phi(g \cdot 1_{A_k}) &\geq \sum_{k=0}^N \int_{A_k} h \, d\nu - 2C_3\delta \sum_{k=1}^N \int_{A_k} g \, d\mu - C_3\delta \int_{A_0} f \, d\mu \\ &\geq \int h \, d\nu - 2C_3\delta - C_3\delta \\ &= \int h \, d\nu - 3C_3\delta. \end{aligned}$$

Note que pela desigualdade 6.37, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(g) &= \Phi\left(\sum_{k=0}^N g \cdot 1_{A_k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \Phi(g \cdot 1_{A_k}) - \Delta_\Phi(g \cdot 1_{A_0}, g \cdot 1_{A_1}, \dots, g \cdot 1_{A_N}) \\ &\geq \int h \, d\nu - 3C_3\delta - \delta\left(\varepsilon \int g \log h \, d\mu + C_1\right) \\ &= \int h \, d\nu - \delta\varepsilon \int g \log h \, d\mu - \delta C_4, \end{aligned}$$

onde C_4 é uma constante que depende só de ε , tendo assim o seguinte resultado:

$$\Phi(g) \geq \int h \, d\nu - \delta\varepsilon \int g \log h \, d\mu - \delta C_4, \quad (6.41)$$

onde g é uma função Σ_0 -mensurável tal que $\|g\|_{L_1} = 1$. Aplicando o resultado (6.41) para $g = f_k/\|f_k\|_{L_1}$, temos que

$$\Phi(f_k) \geq \int \frac{f_k}{f} \, d\nu - \delta\varepsilon \int g \log \frac{f_k}{f\|f_k\|_{L_1}} \, d\mu - \delta C_4\|f_k\|_{L_1},$$

somando sobre k

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \Phi(f_k) &\geq \sum_{k=1}^n \int \frac{f_k}{f} d\nu - \delta\varepsilon \sum_{k=1}^n \int f_k \log \frac{f_k}{f\|f_k\|_{L_1}} d\mu - \delta C_4 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \\
&\geq \nu(S) - \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - \delta C_4 \\
&\geq \Phi(f) - 4\delta - \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - \delta C_4 \\
&= \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - \delta(C_4 + 4),
\end{aligned}$$

concluindo assim que

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) + \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) \geq -C\delta,$$

onde $C = C_4 + 4$ depende só de ε e $f_1, \dots, f_n$ são funções simples tais que $f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ e $\|f\|_{L_1} = 1$.

Se $f_1, \dots, f_n$ são funções simples arbitrárias, então definamos $f_k := \frac{f_k}{\|f\|_{L_1}}$, assim

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) + \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) \geq -C\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

para $f_1, \dots, f_n$ funções simples arbitrárias.

Se $f_1, \dots, f_n$ são funções arbitrárias em $\mathcal{T}$, então para cada f_k , onde $1 \leq k \leq n$, existe uma sequência de funções simples não negativa e crescente $(f_{k,m})_m$, com $f_{k,m} \leq f_k$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (portanto, $f_{k,m} \in \mathcal{T}$) tal que $(f_{k,m})_m$ converge q.s. para f_k . Aplicando o caso anterior, obtemos que

$$\Delta_\Phi(f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) + \delta\varepsilon \Delta_\Lambda(f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) \geq -C\delta \sum_{k=1}^n \|f_{k,m}\|_{L_1}, \quad (6.42)$$

O Teorema da Convergência Dominada implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{k,m} - f_k\|_{L_1} = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
\Delta_\Phi(f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) &= \sum_{k=1}^n \Phi(f_{k,m}) - \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_{k,m}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n (\Phi(f_{k,m}) - \Phi(f_k)) + \left(\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_{k,m}\right)\right) + \Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) \\
&\leq \sum_{k=1}^n |\Phi(f_{k,m}) - \Phi(f_k)| + \left|\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) - \Phi\left(\sum_{k=1}^n f_{k,m}\right)\right| + \Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n),
\end{aligned}$$

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

pelo Teorema 6.16, temos que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \Delta_{\Phi}(f_{1,m}, \dots, f_{n,m}) \leq 2\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} + 2\delta \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} + \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n).$$

Tomando $\limsup_{m \rightarrow \infty}$ na equação (6.42), obtemos pela desigualdade acima e pelo fato de Λ ser contínuo em $[0, f_k]$

$$2\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} + 2\delta \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_1} + \Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) + \delta \varepsilon \Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) \geq -C\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

logo

$$\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n) + \delta \varepsilon \Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) \geq -(C + 4)\delta \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}.$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ arbitrários. $\square$

Teorema 6.26 *Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante C (que depende de ε) tal que para todo semi-ideal estrito $\mathcal{T}$ contido em $(L \log L)_+$ e todo funcional semilinear $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\delta(\Phi) \leq (1 - \varepsilon) \log 2$, temos que existe um espaço de Köthe X tal que*

$$d(\Phi, \Phi_X - \Phi_{X^*}) \leq C.$$

Demonstração. Seja $0 < \varepsilon < 1$. Aplicando o Lema 6.23 para $\sigma = \frac{2-\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} > 1$ e $\alpha = 1 - \varepsilon$, temos que existe uma constante C_0 , que depende de ε , tal que para todo semi-ideal estrito $\mathcal{T}$ contido em $(L \log L)_+$ e todo funcional semilinear $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\Delta_{\Phi}(f, g) \leq (1 - \varepsilon) \log 2 (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}),$$

obtemos que

$$|\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n)| \leq (1 - \frac{1}{2}\varepsilon) \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{\|f\|_{L_1}}{\|f_k\|_{L_1}} + C_0 \|f\|_{L_1},$$

para $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ e $f = \sum_{k=1}^n f_k$.

Se $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ são disjuntos e $f = \sum_{k=1}^n f_k$, então

$$\Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \log \frac{\|f\|_{L_1}}{\|f_k\|_{L_1}},$$

portanto,

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$|\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n)| \leq \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) + C_0 \|f\|_{L_1}, \quad (6.43)$$

para $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ disjuntos e $f = \sum_{k=1}^n f_k$.

Seja $\Psi_0 = \Phi + (1 - \frac{1}{2}\varepsilon)\Lambda$. Para $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ disjuntos, deduzimos pela desigualdade (6.43) que

$$\begin{aligned} \Delta_{\Psi_0}(f_1, \dots, f_n) &= \Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) + \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) \\ &\geq -\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} + \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) \\ &= -C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Definamos como $\Psi(f) = \inf \sum_{k=1}^n \Psi_0(f_k)$, onde o ínfimo é tomado no conjunto dos $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ disjuntos tais que $f = \sum_{k=1}^n f_k$. Agora

$$\begin{aligned} \Psi_0(f) - C_0 \|f\|_{L_1} &= \sum_{k=1}^n \Psi_0(f_k) - \Delta_{\Psi_0}(f_1, \dots, f_n) - C_0 \|f\|_{L_1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \Psi_0(f_k) + C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} - C_0 \|f\|_{L_1} \\ &= \sum_{k=1}^n \Psi_0(f_k) \end{aligned}$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$ disjuntos, com $f = \sum_{k=1}^n f_k$, logo $\Psi_0(f) - C_0 \|f\|_{L_1} \leq \Psi(f)$. Pela definição de Ψ , obtemos que $\Psi(f) \leq \Psi_0(f)$, resumindo

$$0 \leq \Psi_0(f) - \Psi(f) \leq C_0 \|f\|_{L_1}.$$

Note que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\begin{aligned}
|\Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) - \Delta_{\Psi_0}(f_1, \dots, f_n)| &= \left| \sum_{k=1}^n (\Psi_0(f_k) - \Psi(f_k)) + (\Psi(f) - \Psi_0(f)) \right| \\
&\leq C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} + C_0 \|f\|_{L_1} \\
&= 2C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) - \Delta_{\Psi_0}(f_1, \dots, f_n)| \leq 2C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}. \quad (6.44)$$

Afirmamos que $\Delta_\Psi(f, g) \geq 0$ para todo $f, g \in \mathcal{T}$ disjuntos. De fato, sejam $f = \sum_k f_k$ e $g = \sum_s g_s$, onde os f_k são disjuntos e os g_s são disjuntos. Como f, g são disjuntos, temos que os f_k, g_s são disjuntos. Agora $\Psi(f + g) \leq \sum_k \Phi(f_k) + \sum_s \Phi(g_s)$, assim $\Psi(f + g) \leq \Psi(f) + \Psi(g)$, o que prova $\Delta_\Psi(f, g) \geq 0$, sempre que f, g sejam disjuntas. Note que Ψ verifica as hipóteses do Lema 6.25, portanto, para $\frac{\varepsilon}{2\delta(\Psi)}$, existe C_0 (que depende de ε) tal que

$$\Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) + \delta(\Psi) \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta(\Psi)} \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) \geq -C_0 \cdot \delta(\Psi) \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, que equivale a

$$\Delta_\Psi(f_1, \dots, f_n) \geq -\frac{\varepsilon}{2} \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - C_0 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$, onde $C_0 := \delta(\Phi) \cdot C_0$. Usando esta desigualdade e (6.44), demonstramos que

$$\Delta_{\Psi_0}(f_1, \dots, f_n) \geq -\frac{\varepsilon}{2} \Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - C_1 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

onde C_1 depende de ε . Como $\Psi_0 = \Phi + \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\Lambda$, temos que

$$\Delta_\Phi(f_1, \dots, f_n) \geq -\Delta_\Lambda(f_1, \dots, f_n) - C_2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1},$$

onde C_2 depende de ε .

Analogamente provamos para $-\Phi$ que

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

$$\Delta_{-\Phi}(f_1, \dots, f_n) \geq -\Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) - C_2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}.$$

Resumindo,

$$|\Delta_{\Phi}(f_1, \dots, f_n)| \leq \Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) + C_2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}, \quad (6.45)$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$.

O funcional semilinear $\frac{1}{2}(\Phi + \Lambda)$ satisfaz as condições da Proposição 6.21, pois a desigualdade (6.45) equivale a

$$-\frac{1}{2}C_2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1} \leq \Delta_{\frac{\Phi+\Lambda}{2}}(f_1, \dots, f_n) \leq \Delta_{\Lambda}(f_1, \dots, f_n) + \frac{1}{2}C_2 \sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L_1}$$

para todo $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{T}$. A Proposição 6.21 implica que existe um espaço de Köthe X tal que

$$d\left(\frac{\Phi + \Lambda}{2}, \Phi_X\right) \leq C_3,$$

onde C_3 depende de ε , assim

$$\begin{aligned} C_3 &\geq d\left(\frac{\Phi + \Lambda}{2}, \Phi_X\right) \\ &= \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \left| \frac{\Phi(f) + \Lambda(f)}{2} - \Phi_X(f) \right| \\ &= \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} \left| \frac{\Phi(f) - \Phi_X(f) + \Lambda(f) - \Phi_X(f)}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} |\Phi(f) - \Phi_X(f) + \Phi_{X^*}(f)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot d(\Phi, \Phi_X - \Phi_{X^*}). \end{aligned}$$

Portanto, existe C que depende de ε tal que $d(\Phi, \Phi_X - \Phi_{X^*}) \leq C$. □

A prova do seguinte resultado é imediata pelo teorema acima.

6.2 Aproximação de funcionais semilineares

Teorema 6.27 *Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante C (que depende de ε) tal que para todo semi-ideal estrito $\mathcal{T}$ de L_1^+ e todo funcional semilinear $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\delta(\Phi) \leq (1 - \varepsilon) \log 2$, temos que existe um espaço de Köthe X tal que*

$$\left| \Phi(f) - (\Phi_X(f) - \Phi_{X^*}(f)) \right| \leq C \|f\|_{L_1},$$

para todo $f \in \mathcal{T}$.

Centralizadores em espaços de Köthe

Neste capítulo vamos estudar um tipo de aplicações quase-lineares chamados de centralizadores. O objetivo deste capítulo é caracterizar as auto-extensões dos espaços de Köthe interpolados.

Definição 7.1 (Centralizador) *Seja X um Espaço de Köthe. Um centralizador em X é uma função $\Omega : X \rightarrow L_0$ tal que*

- $\Omega(\alpha x) = \alpha \Omega(x)$ para todo $x \in X$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Existe uma constante $\rho(\Omega) > 0$ tal que

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X. \quad (7.1)$$

para todo $u \in L_\infty$ e todo $x \in X$.

Vamos denotar como $\rho(\Omega)$ a menor constante que satisfaz essa condição. O centralizador Ω é dito Real se $\Omega(x)$ é uma função de valor real sempre que x seja uma função de valor real.

7.1 Propriedades dos centralizadores

Proposição 7.2 *Seja Ω um centralizador definido em X com*

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho \|u\|_\infty \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e $u \in L_\infty$, onde $\rho := \rho(\Omega)$. Então

$$\|\Omega(x + y) - \Omega(x) - \Omega(y)\|_X \leq 3\rho (\|x\|_X + \|y\|_X), \quad (7.2)$$

ou seja, todo centralizador em X é uma função quase-linear em X .

7.1 Propriedades dos centralizadores

Demonstração. Seja $z = |x| + |y|$. Definimos $u = \frac{x}{z}$ e $v = \frac{y}{z}$.

Note que $|u(s)|, |v(s)| \leq 1$ para quase todo $s \in S$ e também que $|u(s) + v(s)| \leq 1$ para quase todo $s \in S$, o que prova $u, v, u + v \in L_\infty$ e $\|u\|_\infty, \|v\|_\infty, \|u + v\|_\infty \leq 1$. Escrevamos $x = uz$ e $y = vz$, assim

$$\begin{aligned} \Omega(x + y) - \Omega(x) - \Omega(y) &= \Omega((u + v)z) - \Omega(uz) - \Omega(vz) \\ &= \left[\Omega((u + v)z) - (u + v)\Omega(z) \right] + \left[u\Omega(z) - \Omega(uz) \right] \\ &\quad + \left[v\Omega(z) - \Omega(vz) \right], \end{aligned}$$

onde cada termo acima está em X e em consequentemente

$$\begin{aligned} \|\Omega(x + y) - \Omega(x) - \Omega(y)\|_X &\leq \left\| \Omega((u + v)z) - (u + v)\Omega(z) \right\|_X + \|u\Omega(z) - \Omega(uz)\|_X \\ &\quad + \|v\Omega(z) - \Omega(vz)\|_X \\ &\leq \rho \|u + v\|_\infty \|z\|_X + \rho \|u\|_\infty \|z\|_X + \rho \|v\|_\infty \|z\|_X \\ &\leq 3\rho \|z\|_X \\ &= 3\rho \left\| |x| + |y| \right\|_X \\ &\leq 3\rho (\|x\|_X + \|y\|_X). \end{aligned}$$

□

Definição 7.3 Dois centralizadores Ω, Ω' em X são limitadamente equivalentes, se $\Omega(x) - \Omega'(x) \in X$ para todo $x \in X$ e se existe uma constante C tal que

$$\|\Omega(x) - \Omega'(x)\|_X \leq C \|x\|_X$$

para todo $x \in X$.

Definição 7.4 (Espaço derivado) O espaço derivado associado a um centralizador $\Omega : X \longrightarrow L_0$, é definido por

$$d_\Omega X = \{(x, y) \in X \times L_0 : \Omega(x) - y \in X\},$$

com a quase-norma $\|(x, y)\|_{d_\Omega X} = \|x\|_X + \|\Omega(x) - y\|_X$.

7.1 Propriedades dos centralizadores

Observação 7.5 Pela Proposição 7.2, temos que todo centralizador $\Omega : X \longrightarrow L_0$ é uma aplicação quase-linear, portanto, a Proposição 3.9 garante que o espaço $d_\Omega X$ é uma soma torcida.

Se $\Omega' : X \longrightarrow L_0$ é um centralizador limitadamente equivalente a Ω , então a Proposição 3.13, garante que os espaços derivados $d_\Omega X$ e $d_{\Omega'} X$ são somas torcidas equivalentes.

Agora mostraremos que todo centralizador Real pode ser aproximado de uma certa maneira por um centralizador em L_1 .

Proposição 7.6 Seja Ω um centralizador real em X tal que

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e $u \in L_\infty$. Então existe um centralizador real Ω^1 em L_1 tal que

$$\|\Omega^1(y y^*) - y^* \Omega(y)\|_{L_1} \leq K \|y\|_X \|y^*\|_{X^*} \quad (7.3)$$

para todo $y \in X$ e todo $y^* \in X^*$, onde $K = 4\rho(\Omega)$. Além disso, Ω^1 é único no seguinte sentido: se Ω_0^1 é outro centralizador em L_1 que satisfaz a desigualdade (7.3), então Ω_0^1 e Ω^1 são centralizadores limitadamente equivalentes em L_1 .

Demonstração. Denotemos por $\rho := \rho(\Omega)$. Suponha $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in X^*$ com $f = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$. Note que $F = |x_1| + |x_2| \in X$. Definamos F^{-1} como

$$F^{-1}(s) = \begin{cases} \frac{1}{|x_1(s)| + |x_2(s)|} & \text{se } x_1(s) \neq 0 \text{ ou } x_2(s) \neq 0, \\ 0 & \text{se } x_1(s) = 0 \text{ e } x_2(s) = 0. \end{cases}$$

Observe que $x_1 F^{-1} \in L_\infty$, com $\|x_1 F^{-1}\|_\infty \leq 1$, assim

$$\begin{aligned} \|\Omega(x_1) - x_1 F^{-1} \Omega(F)\|_X &\leq \rho \|x_1 F^{-1}\|_\infty \|F\|_X \\ &\leq \rho \|F\|_X. \end{aligned}$$

O fato $y_1 \in X^*$ implica que $y_1 (\Omega x_1 - x_1 F^{-1} \Omega F) \in L_1$ e

$$\begin{aligned} \|y_1 (\Omega x_1 - x_1 F^{-1} \Omega F)\|_{L_1} &\leq \|y_1\|_{X^*} \|\Omega x_1 - x_1 F^{-1} \Omega F\|_X \\ &\leq \rho \|y_1\|_{X^*} \|F\|_X \\ &\leq \rho \|y_1\|_{X^*} (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X), \end{aligned}$$

7.1 Propriedades dos centralizadores

isto mostra que

$$\|y_1 \Omega x_1 - f F^{-1} \Omega F\|_{L_1} \leq \rho \|y_1\|_{X^*} (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X).$$

Similarmente para $y_2 \in X^*$ obtemos que

$$\|y_2 \Omega x_2 - f F^{-1} \Omega F\|_{L_1} \leq \rho \|y_2\|_{X^*} (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X).$$

Somando as últimas desigualdades e usando desigualdade triangular, segue-se que

$$\|y_1 \Omega x_1 - y_2 \Omega x_2\|_{L_1} \leq \rho (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X) (\|y_1\|_{X^*} + \|y_2\|_{X^*}) \quad (7.4)$$

Suponha que x_1, x_2, y_1, y_2 são não nulos, portanto,

$$\alpha = \frac{\|x_1\|_X^{1/2} \|y_2\|_{X^*}^{1/2}}{\|x_2\|_X^{1/2} \|y_1\|_{X^*}^{1/2}} > 0.$$

Substituindo x_2 e y_2 por αx_2 e $\alpha^{-1} y_2$, em (7.4), respectivamente, deduzimos que

$$\|y_1 \Omega x_1 - y_2 \Omega x_2\|_{L_1} \leq \rho (\|x_1\|_X^{1/2} \|y_1\|_{X^*}^{1/2} + \|x_2\|_X^{1/2} \|y_2\|_{X^*}^{1/2})^2 \quad (7.5)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ e todo $y_1, y_2 \in X^*$ tais que $f = x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$.

Se $f \in L_1$, então pela fatoração de Lozanovskii, existe um únicos par $(x, x^*) \in X \times X^*$ tal que $x \geq 0$, $\|x\|_X = 1$, $\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_{L_1}$, $\text{supp}(x) = \text{supp}(x^*) = \text{supp}(f)$ e $f = x \cdot x^*$.

Definamos $\Omega^1 : L_1 \longrightarrow L_0$ por $\Omega^1(f) = x^* \Omega(x)$.

Vejamos que Ω^1 é um centralizador. De fato, note que Ω^1 é homogênea.

Afirmamos que $\|\Omega^1(uf) - u\Omega^1(f)\|_{L_1} \leq 5\rho \|u\|_\infty \|f\|_{L_1}$, para todo $u \in L_\infty$ e todo $f \in L_1$. De fato, sejam $uf = y \cdot y^*$ e $f = x \cdot x^*$ as fatorações de Lozanovskii de uf e f , respectivamente. Observe que $uf = y \cdot y^* = (ux) \cdot x^*$. Pela desigualdade (7.5), com $y_1 = y^*$, $x_1 = y$, $y_2 = x^*$, $x_2 = ux$, temos que $y^* \Omega(y) - x^* \Omega(ux) \in L_1$ e

$$\begin{aligned} \|y^* \Omega(y) - x^* \Omega(ux)\|_{L_1} &\leq \rho (\|y\|_X^{1/2} \|y^*\|_{X^*}^{1/2} + \|ux\|_X^{1/2} \|x^*\|_{X^*}^{1/2})^2 \\ &= \rho (\|uf\|_{L_1}^{1/2} + \|ux\|_X^{1/2} \|f\|_{L_1}^{1/2})^2 \\ &\leq \rho \left((\|u\|_\infty \|f\|_{L_1})^{1/2} + (\|u\|_\infty \|x\|_X \|f\|_{L_1})^{1/2} \right)^2 \\ &= 4\rho \|u\|_\infty \|f\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Mas ainda

7.1 Propriedades dos centralizadores

$$\begin{aligned}
 \Omega^1(uf) - u\Omega^1(f) &= y^*\Omega(y) - ux^*\Omega(x) \\
 &= (y^*\Omega(y) - x^*\Omega(ux)) + (x^*(\Omega(ux) - u\Omega(x))) \in L_1
 \end{aligned}$$

A desigualdade triangular implica

$$\begin{aligned}
 \|\Omega^1(uf) - u\Omega^1(f)\|_{L_1} &\leq \|y^*\Omega(y) - x^*\Omega(ux)\|_{L_1} + \|x^*(\Omega(ux) - u\Omega(x))\|_{L_1} \\
 &\leq 4\rho\|u\|_\infty\|f\|_{L_1} + \rho\|x^*\|_{X^*}\|u\|_\infty\|x\|_X \\
 &= 5\rho\|u\|_\infty\|f\|_{L_1}.
 \end{aligned}$$

Consequentemente, Ω^1 é um centralizador sobre L_1 . Vejamos que Ω^1 verifica a condição (7.3). De fato, seja $y \cdot y^* = x \cdot x^*$, onde $x \cdot x^*$ é a fatoração de Lozanovskii de $y \cdot y^*$, isto é, $\|x\|_X = 1$, $\|x^*\|_{X^*} = \|y \cdot y^*\|_{L_1}$, $x \geq 0$, $\text{supp}(x) = \text{supp}(x^*) = \text{supp}(y \cdot y^*)$. Se $y_1 = y^*$, $x_1 = y$, $y_2 = x^*$ e $x_2 = x$ na desigualdade (7.5), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \|y^*\Omega(y) - x^*\Omega(x)\|_{L_1} &\leq \rho(\Omega) (\|y\|_X^{1/2} \|y^*\|_{X^*}^{1/2} + \|x\|_X^{1/2} \|x^*\|_{X^*}^{1/2})^2 \\
 &\leq 4\rho(\Omega) \|y\|_X \|y^*\|_{X^*},
 \end{aligned}$$

pela definição de Ω^1 , concluímos que

$$\|\Omega^1(y y^*) - y^* \Omega(y)\|_{L_1} \leq 4\rho(\Omega) \|y\|_X \|y^*\|_{X^*}$$

para todo $y \in X$ e todo $y^* \in X^*$.

Agora vejamos que se Ω_0^1 é outro centralizador em L_1 que satisfaz

$$\|\Omega_0^1(y \cdot y^*) - y^* \Omega_0^1(y)\|_{L_1} \leq K_0 \|y\|_X \|y^*\|_{X^*}$$

para todo $y \in X$ e todo $y^* \in X^*$ e alguma constante $K_0 > 0$, então Ω^1 é limitadamente equivalente a Ω_0^1 . Seja $f = x \cdot x^* \in L_1$ a fatoração de Lozanovskii, isto é, $\|x\|_X = 1$, $\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_{L_1}$, $x \geq 0$, $\text{supp}(x) = \text{supp}(x^*) = \text{supp}(f)$. Note que

7.1 Propriedades dos centralizadores

$$\begin{aligned}
\|\Omega^1(f) - \Omega_0^1(f)\|_{L_1} &= \|\Omega^1(x \cdot x^*) - \Omega_0^1(x \cdot x^*)\|_{L_1} \\
&\leq \|\Omega^1(x \cdot x^*) - x^* \Omega(x)\|_{L_1} + \|x^* \Omega(x) - \Omega_0^1(x \cdot x^*)\|_{L_1} \\
&\leq (K + K_0) \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} \\
&= (K + K_0) \|f\|_{L_1},
\end{aligned}$$

ou seja, Ω^1 e Ω_0^1 são centralizadores limitadamente equivalentes. $\square$

Observação 7.7 O Teorema 7.6 mostra que se Ω é um centralizador tal que

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e $u \in L_\infty$, então Ω^1 verifica

$$\|u\Omega^1(f) - \Omega(uf)\|_{L_1} \leq 5\rho(\Omega) \|u\|_\infty \|f\|_{L_1}$$

para todo $u \in L_\infty$ e todo $f \in L_1$.

Corolário 7.8 Se Ω e Ω_0 são centralizadores limitadamente equivalentes de X , então Ω^1 e Ω_0^1 são centralizadores limitadamente equivalentes de L_1 .

Demonstração. Como Ω e Ω_0 são centralizadores limitadamente equivalentes de X , então existe $C > 0$, tal que

$$\|\Omega(x) - \Omega_0(x)\|_X \leq C \|x\|$$

para todo $x \in X$. Agora seja $f = x \cdot x^* \in L_1$ a fatoração de Lozanovskii, isto é, $\|x\|_X = 1$, $\|x^*\|_{X^*} = \|f\|_{L_1}$, $x \geq 0$, $\text{supp}(x) = \text{supp}(x^*) = \text{supp}(f)$. Então

$$\begin{aligned}
\|\Omega^1(f) - \Omega_0^1(f)\|_{L_1} &= \|\Omega^1(x \cdot x^*) - \Omega_0^1(x \cdot x^*)\|_{L_1} \\
&\leq \|\Omega^1(x \cdot x^*) - x^* \Omega(x)\|_{L_1} + \|x^* \Omega(x) - x^* \Omega_0(x)\|_{L_1} \\
&\quad + \|x^* \Omega_0(x) - \Omega_0^1(x \cdot x^*)\|_{L_1} \\
&\leq 4\rho(\Omega) \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} + C \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} + 4\rho(\Omega_0) \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} \\
&= C_1 \|x\|_X \|x^*\|_{X^*} \\
&= C_1 \|f\|_{L_1},
\end{aligned}$$

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

onde $C_1 = 4\rho(\Omega_0) + 4\rho(\Omega) + C$. □

Corolário 7.9 *Se Ω é um centralizador tal que*

$$\|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_X \leq \rho(\Omega) \|u\|_\infty \|x\|_X,$$

para todo $x \in X$ e $u \in L_\infty$, então Ω^1 verifica

$$\|\Omega^1(f + g) - \Omega^1(f) - \Omega^1(g)\|_{L_1} \leq 15\rho(\Omega) (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1})$$

para todo $f, g \in L_1$.

Demonstração. É uma consequência imediata da Observação 7.7 e da Proposição 7.2. □

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

Sejam X_0, X_1 espaços de Köthe e $X = X_\theta = [X_0, X_1]_\theta$. Definimos um espaço vetorial dX_θ como

$$dX_\theta = \{(x, y) \in L_0 \times L_0 : x = F(\theta) = x, F'(\theta) = y \text{ para algum } F \in \mathcal{F}\}.$$

Lema 7.10 *Existe $F \in \mathcal{F}$ com $F(\theta) = 0$ e $y = F'(\theta)$ se, e somente se, $y \in X_\theta$.*

Demonstração. O teorema de Riemman (ver Teorema 2.30) garante a existência de uma única aplicação conforme $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\varphi(\theta) = 0$ e $\beta = \varphi'(\theta) > 0$, onde $\mathbb{D}$ é o disco unitário complexo e $\mathbb{S} = \{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$

Suponhamos primeiro que existe $F \in \mathcal{F}$ com $F(\theta) = 0$ e $y = F'(\theta)$. Definamos $H = \varphi^{-1}F$, isto implica que H pertence a $\mathcal{F}$, $\|H\|_{\mathcal{F}} = \|F\|_{\mathcal{F}}$ e $y = F'(\theta) = \beta H(\theta) \in X_\theta$.

Recíprocamente suponhamos $y \in X_\theta$. Por definição de X_θ , temos que existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G(\theta) = x$. Se definimos $F := \beta^{-1} \varphi G$, obtemos uma função F que está em $\mathcal{F}$, que satisfaz $F(\theta) = 0$ e $y = F'(\theta)$. □

A proposição seguinte fornece a dX_θ de uma norma.

Proposição 7.11 $\|\cdot\|_{dX_\theta}$ *definida em dX_θ como*

$$\|(x, y)\|_{dX_\theta} = \inf \{\|F\|_{\mathcal{F}} : x = F(\theta), y = F'(\theta)\} \quad (7.6)$$

é uma norma.

Demonstração. Suponha que $(x, y) \in dX_\theta$ com $\|(x, y)\|_{dX_\theta} = 0$. Por definição obtemos $\|x\|_\theta \leq \|(x, y)\|_{dX_\theta} = 0$ e assim $x = 0$. Existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F(\theta) = 0$ e $F'(\theta) = y$. Usando as notações

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

do Lema 7.10 obtemos que existe $H \in \mathcal{F}$ tal que $F = \varphi H$ e $y = F'(\theta) = \beta H(\theta) \in X_\theta$. Agora

$$\begin{aligned} \|(0, y)\|_{dX_\theta} &= \inf \{\|F\|_{\mathcal{F}} : F(\theta) = 0, y = F'(\theta)\} \\ &= \inf \{\|\varphi H\|_{\mathcal{F}} : y = \beta H(\theta)\} \\ &= \inf \{\|H\|_{\mathcal{F}} : y\beta^{-1} = H(\theta)\} \\ &= \|y\beta^{-1}\|_\theta \\ &= \beta^{-1} \|y\|_\theta, \end{aligned}$$

portanto

$$\|(0, y)\|_{dX_\theta} = \beta^{-1} \|y\|_\theta. \quad (7.7)$$

Neste caso $y = 0$, pois $\|(x, y)\|_{dX_\theta} = 0$.

É claro que $\|\alpha(x, y)\|_{dX_\theta} = |\alpha| \|(x, y)\|_{dX_\theta}$ para todo α complexo. Provaremos agora a desigualdade triangular. Sejam $(x, y), (w, z) \in dX_\theta$ e $x = F(\theta), y = F'(\theta), w = G(\theta), z = G'(\theta)$

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (w, z)\|_{dX_\theta} &= \|(x + w, y + z)\|_{dX_\theta} \\ &= \inf \{\|H\|_{\mathcal{F}} : H(\theta) = x + w, y + z = H'(\theta)\} \\ &\leq \|F + G\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \|F\|_{\mathcal{F}} + \|G\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\|(x, y) + (w, z)\|_{dX_\theta} \leq \inf \{\|F\|_{\mathcal{F}} : F(\theta) = x, y = F'(\theta)\} + \|G\|_{\mathcal{F}},$$

para qualquer G , portanto

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (w, z)\|_{dX_\theta} &\leq \|(x, y)\|_{dX_\theta} + \inf \{\|G\|_{\mathcal{F}} : G(\theta) = w, y = G'(\theta) = z\} \\ &\leq \|(x, y)\|_{dX_\theta} + \|(w, z)\|_{dX_\theta}. \end{aligned}$$

□

Teorema 7.12 *O espaço dX_θ é uma auto-extensão de X_θ .*

Demonstração. Basta provar que

$$0 \rightarrow X_\theta \xrightarrow{i} dX_\theta \xrightarrow{j} X_\theta \rightarrow 0 \quad (7.8)$$

onde $i(x) = (0, x)$ e $j(x, y) = x$, é uma sequência exata curta. O Lema 7.10 garante que i está bem definida. Imediatamente obtemos que i é injetora, j é sobrejetora, $i(X_\theta) = \ker(j)$ e i, j são contínuas, Assim dX_θ é uma auto-extensão de X_θ . □

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

Observação 7.13 Considere a função $\delta_\theta : \mathcal{F} \rightarrow X_\theta$ definida por $\delta_\theta(F) = F(\theta)$. Note que δ_θ é limitada e sobrejetora. Então a Proposição 2.54 garante que existe uma função homogênea $B_\theta : X_\theta \rightarrow \mathcal{F}$ que verifica $\|B_\theta(x)\|_{\mathcal{F}} \leq C\|x\|_{X_\theta}$, para todo $x \in X_\theta$ e algum $C > 1$, e $\delta_\theta \circ B_\theta = \text{id}_{X_\theta}$. Consideremos a função homogênea $\delta'_\theta : \mathcal{F} \rightarrow L_0$ definida por $\delta'_\theta(F) = F'(\theta)$ e $\Omega : X_\theta \rightarrow L_0$ dada como $\Omega = \delta'_\theta \circ B_\theta$. Note que Ω assim definida é também homogênea e $\Omega(x) = F'(\theta)$, onde $F(\theta) = x$ e $\|F\|_{\mathcal{F}} \leq C\|x\|_{X_\theta}$.

Proposição 7.14 Sejam X_0, X_1 espaços de Köthe e $X_\theta = X = [X_0, X_1]_\theta$ e $C > 1$ constante. Definimos uma função Ω em X como

$$\Omega(x) = F'(\theta) \text{ onde } F(\theta) = x \text{ e } \|F\|_{\mathcal{F}} \leq C\|x\|_{X_\theta}.$$

Então Ω é um centralizador chamado Centralizador induzido por $[X_0, X_1]_\theta$.

Demonstração. É imediato provar que Ω é homogênea. Seja $u \in L_\infty$ e $\Omega(x) = F'(\theta)$, com $\|F\|_{\mathcal{F}} \leq C\|x\|_{X_\theta}$. Então $uF \in \mathcal{F}$ e $\|uF\|_{\mathcal{F}} \leq \|u\|_\infty \|F\|_{\mathcal{F}}$. Seja $G \in \mathcal{F}$ com $\Omega(ux) = G'(\theta)$ onde $G(\theta) = ux$ e $\|G\|_{\mathcal{F}} \leq C\|ux\|_{X_\theta}$. Observe que

$$(G - uF)(\theta) = 0 \text{ e } \Omega(ux) - u\Omega(x) = (G - uF)'(\theta).$$

Pelo Lema 7.10 (usando a notação do lema 7.10) existem $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{D}$, $\beta > 0$ e $H \in \mathcal{F}$, com $G - uF = \varphi H$ e $(G - uF)'(\theta) = \beta H(\theta)$. Agora

$$\begin{aligned} \|\Omega(ux) - u\Omega(x)\|_{X_\theta} &= \|(G - uF)'(\theta)\|_{X_\theta} \\ &= \beta \|H(\theta)\|_{X_\theta} \\ &\leq \beta \|H\|_{\mathcal{F}} \\ &= \beta \|G - uF\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \beta (\|G\|_{\mathcal{F}} + \|uF\|_{\mathcal{F}}) \\ &\leq C\beta (\|ux\|_{X_\theta} + C\|u\|_\infty \|x\|_\theta) \\ &\leq C(C + 1)\beta \|u\|_\infty \|x\|_{X_\theta}. \end{aligned}$$

□

Observação 7.15 Se nós definimos outra função Ω_1 como na Proposição 7.14, isto é,

$$\Omega_1(x) = F'_1(\theta) \text{ onde } F_1(\theta) = x \text{ e } \|F_1\|_{\mathcal{F}} \leq C_1\|x\|_{X_\theta},$$

então Ω_1 e Ω são limitadamente equivalentes, portanto $d_\Omega X_\theta$ e $d_{\Omega_1} X_\theta$ são equivalente. De fato:

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

usando as notações do Lema 7.10, temos que $F - F_1 = \varphi H$, além disso, $\Omega(x) - \Omega_1(x) = (F - F_1)'(\theta) = \beta H(\theta)$, logo

$$\begin{aligned} \|\Omega(x) - \Omega_1(x)\|_{X_\theta} &= \|(F - F_1)'(\theta)\|_{X_\theta} \\ &= \beta \|H(\theta)\|_{X_\theta} \\ &\leq \beta \|H\|_{\mathcal{F}} \\ &= \beta \|\varphi H\|_{\mathcal{F}} \\ &= \beta (\|F - F_1\|_{\mathcal{F}}) \\ &\leq C\|x\|_{X_\theta} + C_1\|x\|_{X_\theta} \\ &\leq \beta(C + C_1)\|x\|_{X_\theta}. \end{aligned}$$

Resumindo, a definição de $d_\Omega X_\theta$ é independente da escolha de Ω . $\square$

Proposição 7.16 *Sejam X_0, X_1 espaços de Köthe e $X = [X_0 X_1]_\theta$. Então existem $u_0 \geq 0$ e $u_1 \geq 0$, respectivamente em X_0 e X_1 tais que $|x| = u_0^{1-\theta} u_1^\theta$ e $\|x\|_{X_\theta} = \|u_0\|_{X_0} = \|u_1\|_{X_1}$. Uma fatoração deste tipo é chamada de optimal.*

Demonstração. Primeiro, assumamos que $\|x\|_{X_\theta} = 1$. Escolhamos uma sequência $(x_n)_n$ em B_{X_θ} convergente em medida para x . Na prova da Proposição 5.14 (Passo 4.) encontramos $u_0 \in B_{X_0}$ e $u_1 \in B_{X_1}$, não negativos, tais que $|x| = |u_0|^{1-\theta} |u_1|^\theta$. Como $\|x\|_{X_\theta} = 1$, temos que $\|u_0\|_{X_0} = \|u_1\|_{X_1} = 1$. Agora assumamos que $\|x\|_{X_\theta} \neq 0$. Então existem $w_0 \in X_0$ e $w_1 \in X_1$ unitários não negativos tais que

$$\frac{|x|}{\|x\|_{X_\theta}} = |w_0|^{1-\theta} |w_1|^\theta,$$

isto é, $|x| = (\|x\|_\theta |w_0|)^{1-\theta} (|w_1| \|x\|_\theta)^\theta$. Se $u_0 = \|x\|_\theta \cdot w_0$ e $u_1 = \|x\|_\theta \cdot w_1$, então u_0 e u_1 são funções não negativas em X_0 e X_1 , respectivamente, que verificam $|x| = u_0^{1-\theta} u_1^\theta$ e $\|x\|_{X_\theta} = \|u_0\|_{X_0} = \|u_1\|_{X_1}$. $\square$

Observação 7.17 (Fórmula explícita de centralizador induzido) *A Observação 7.15 é útil para encontrar uma fórmula explícita de Ω (centralizador induzido por $[X_0 X_1]$). Se $x \in X_\theta$ e $|x| = u_0^{1-\theta} u_1^\theta$, onde $u_0 \in X_0$ e $u_1 \in X_1$, é uma fatoração optimal para x , então*

$$\Omega(x) = x (\log u_1 - \log u_0).$$

De fato:

escrevamos $x(s) = |x(s)| \cdot \zeta(s)$, onde ζ é uma função de valor complexo tal que $|\zeta(s)| = 1$ para todo $s \in S$. Seja $F(z) = u_0^{1-z} u_1^z \cdot \zeta$. Verifiquemos que $F \in \mathcal{F}$. De fato, é imediato ver que

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

$|u_0^{1-it} u_1^{it} \cdot \zeta| = u_0$, daí resulta que $F(it) \in X_0$. De maneira análoga obtemos $|u_0^{1-(1+it)} u_1^{1+it} \cdot \zeta| = u_1$. Portanto, $F(1+it) \in X_1$. Observe que

$$\begin{aligned}
 \|F\|_{\mathcal{F}} &= \max \left(\sup_t \|F(it)\|_{X_0}, \sup_t \|F(1+it)\|_{X_1} \right) \\
 &= \max \left(\sup_t \|(u_0)^{1-it} (u_1)^{it} \cdot \zeta\|_{X_0}, \sup_t \|(u_0)^{it} (u_1)^{1+it} \cdot \zeta\|_{X_1} \right) \\
 &= \max \left(\sup_t \|(u_0)^{1-it} (u_1)^{it}\|_{X_0}, \sup_t \|(u_0)^{it} (u_1)^{1+it}\|_{X_1} \right) \\
 &= \max \left(\|u_0\|_{X_0}, \|u_1\|_{X_1} \right) \\
 &= \|x_\theta\|_{X_\theta}
 \end{aligned}$$

Os cálculos acima provam que $\|F\|_{\mathcal{F}} < \infty$. Observe que F possui derivada $F'(z) = F(z)(\log u_1 - \log u_0)$ e assim

$$\Omega(x) = x(\log u_1 - \log u_0).$$

□

O teorema seguinte mostra que é possível identificar $d_\Omega X_\theta$ com dX_θ , o que significa que $d_\Omega X_\theta$ pode ser fornecido de uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{d_\Omega X_\theta}$.

Teorema 7.18 *Seja Ω o centralizador induzido em $X_\theta = [X_0 X_1]_\theta$. O diagrama seguinte*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_\theta & \xrightarrow{i} & dX_\theta & \xrightarrow{j} & X_\theta \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow T & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & X_\theta & \xrightarrow{i'} & d_\Omega X_\theta & \xrightarrow{j'} & X_\theta \longrightarrow 0
 \end{array}$$

é comutativo, onde i, j e i', j' são definidos como no Teorema 7.12 e a Observação 3.10, respectivamente, e $T(x, y) = (x, y)$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que T está bem definido. Para provar que o diagrama comuta é suficiente mostrar que T é limitado (ver Proposição 2.69).

Suponha $(x, y) \in d_\Omega X_\theta$, isto é, $x \in X_\theta$ e $y - \Omega(x) \in X_\theta$. Seja $\Omega(x) = F'(\theta)$ com $F(\theta) = x$ e $\|F\|_{\mathcal{F}} \leq C \|x\|_{X_\theta}$, onde $C > 1$. Existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G(\theta) = y - \Omega(x)$ e $\|G\|_{\mathcal{F}} \leq C \|y - \Omega(x)\|_{X_\theta}$. Seja φ e $\beta > 0$ como no Lema 7.10, definimos $J = \beta^{-1} \varphi G$ em $\mathcal{F}$. Observe que $J(\theta) = 0$, $J'(\theta) = y - \Omega(x)$ e $\|J\|_{\mathcal{F}} \leq \beta^{-1} C \|y - \Omega(x)\|_{X_\theta}$ para algum $K > 0$. Agora $y = (y - \Omega(x)) + \Omega(x) = (J + F)'(\theta)$ e também $(J + F)(\theta) = x$, onde $J + F \in \mathcal{F}$, e assim provamos que $(x, y) \in dX_\theta$. Isto prova que T está bem definido. Afirmamos que T é limitado. De fato:

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

$$\begin{aligned}
\|(x, y)\|_{dX_\theta} &= \inf \{ \|H\|_{\mathcal{F}} : H(\theta) = x, H'(\theta) = y \} \\
&\leq \|F + J\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq \|F\|_{\mathcal{F}} + \|J\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq C \|x\|_{X_\theta} + C\beta^{-1} \|y - \Omega(x)\|_{X_\theta} \\
&\leq \max(C, C\beta^{-1})(\|x\|_{X_\theta} + \|y - \Omega(x)\|_{X_\theta}) \\
&= \max(C, C\beta^{-1}) \|(x, y)\|_{d_{\Omega}X_\theta}.
\end{aligned}$$

isto mostra que $dX_\theta = d_{\Omega}X_\theta$ (a igualdade é um isomorfismo topológico). $\square$

Proposição 7.19 *Sejam X_0 e X_1 espaço de Köthe e $X = [X_0 X_1]_\theta$. Seja Ω o centralizador induzido por X_0, X_1 e θ . Se Ω^1 é o centralizador em L_1 definido na Proposição 7.6, então para $f \in L_1$, temos que*

$$\Omega^1(f) = f(\log x_1 - \log x_0),$$

onde $|f| = x_0 x_0^* = x_1 x_1^*$ são as fatorações de Losanovskii de f respecto X_0 e X_1 .

Demonstração. Assumamos que $\|f\|_{L_1} = 1$ e $|f| = x x^*$ é a fatoração de Losanovskii de f em relação a $X = [X_0 X_1]_\theta$, isto é $\|x\|_X = \|x^*\|_{X^*} = 1$, $\text{supp}(f) = \text{supp}(x) = \text{supp}(x^*)$, $x \geq 0$. Em $\mathbb{S} = \{z : 0 < \Re(z) < 1\}$ definamos duas funções como $G(z) = (x_0)^{1-z}(x_1)^z$ e $H(z) = (x_0^*)^{1-z}(x_1^*)^z$. Vejamos que $G(\theta)H(\theta)$ é a fatoração de Lozanovskii de f . De fato, observe que

$$\|G(\theta)\|_X = \|x_0^{1-\theta} x_1^\theta\|_X \leq \|x_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|x_1\|_{X_1}^\theta \leq 1$$

e

$$\|H(\theta)\|_{X^*} = \|(x_0^*)^{1-\theta} (x_1^*)^\theta\|_{X^*} \leq \|x_0^*\|_{X_0^*}^{1-\theta} \|x_1^*\|_{X_1^*}^\theta \leq 1,$$

pois lembre-se que $(X_0^*)^{1-\theta} (X_1^*)^\theta \subset X^* = (X_0^{1-\theta} X_1^\theta)^*$ (ver Proposição 5.12). Note que $G(\theta)H(\theta) = |f|$ e

$$1 = \|f\|_{L_1} = \|G(\theta)H(\theta)\|_{L_1} \leq \|G(\theta)\|_X \|H(\theta)\|_{X^*} \leq 1,$$

logo $\|G(\theta)\|_X = \|H(\theta)\|_{X^*} = 1$. Note também que

$$\text{supp}(G(\theta)) = \text{supp}(x_0) \cap \text{supp}(x_1) = \text{supp}(f).$$

Analogamente vemos que $\text{supp}(H(\theta)) = \text{supp}(f)$. Como $G(\theta) \geq 0$, concluímos que $G(\theta)H(\theta) = |f|$ é a fatoração de Lozanovskii de f , portanto, $x_0^{1-\theta} x_1^\theta = G(\theta) = x$ e $H(\theta) = x^*$ pela unicidade da fatoração de Lozanovskii. Agora vamos demonstrar que a única fatoração optimal de $|x|$ é $|x| = x_0^{1-\theta} x_1^\theta$. De fato, seja $x = u_0^{1-\theta} u_1^\theta$ uma fatoração optimal para x , isto é, $\|u_0\|_{X_0} = \|u_1\|_{X_1} = 1$. Definamos outra função K em $\mathbb{S}$ por $K(z) = u_0^{1-z} u_1^z$. Observe que

$$\begin{aligned}
|K(it)H(it)| &= |u_0^{1-it} u_1^{it} (x_0^*)^{1-it} (x_1^*)^{it}| \\
&= |u_0| x_0^*,
\end{aligned}$$

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

logo

$$\int |K(it)H(it)| d\mu = \int |u_0||x_0^*| d\mu \leq \|x_0^*\|_{X^*} = 1.$$

Analogamente mostramos que

$$|K(1+it)H(1+it)| = |u_1||x_1^*|.$$

Portanto $\int |K(1+it)H(1+it)| d\mu \leq 1$. Pelo Princípio do Módulo Máximo, como $\int |G(\theta)H(\theta)| d\mu = 1$, onde θ pertence ao interior de $\mathbb{S}$, temos que

$$\int |K(z)H(z)| d\mu = 1$$

para qualquer $z \in \mathbb{S}$. Agora $\left| \int K(z)H(z) d\mu \right| \leq \int |K(z)H(z)| d\mu = 1$ para qualquer $z \in \mathbb{S}$, além de $\int K(\theta)H(\theta) d\mu = 1$ temos $\int K(z)H(z) d\mu = 1$ para qualquer $z \in \mathbb{S}$. Nós provamos que

$$\int K(z)H(z) d\mu = \int |G(z)H(z)| d\mu,$$

para $z \in \mathbb{S}$, consequentemente

$$\int \operatorname{Re}(K(z)H(z)) d\mu + i \int \operatorname{Im}(K(z)H(z)) d\mu = \int |K(z)H(z)| d\mu.$$

Desta igualde obtemos que $K(z)H(z)$ é sempre real não negativo. Por outro lado

$$\begin{aligned} K(\theta + it)H(\theta + it) &= |K(\theta + it)H(\theta + it)| \\ &= |u_0^{1-\theta-it} u_1^{\theta+it} (x_0^*)^{1-\theta-it} (x_1^*)^{\theta+it}| \\ &= |u_0^{1-\theta} u_1^{\theta} (x_0^*)^{1-\theta} (x_1^*)^{\theta}| \\ &= |x H(\theta)| \\ &= |x||x^*| \\ &= |f| \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Lembre-se que as funções K e H definidas acima dependem também de $s \in S$ (espaço polonês). Para cada $s \in S$ definamos $g_s : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ como $g_s(z) = K(z)H(z) - |f|$. A função g_s é holomorfa em $\mathbb{S}$ e qualquer elemento da forma $\theta + it$ é um zero de g_s , portanto existe uma sequência de pontos distintos em $\mathbb{S}$ com ponto de acumulação no interior de $\mathbb{S}$, tais que anulam a g_s . Isto mostra que g_s é nula em $\mathbb{S}$, e assim $K(z)H(z) = |f|$ para todo $z \in \mathbb{S}$, isto é, $u_0^{1-z} u_1^z (x_0^*)^{1-z} (x_1^*)^z = |f|$ para todo $z \in \mathbb{S}$, em particular, para $z = 0$ e $z = 1$ (estendendo continuamente à fronteira de $\mathbb{S}$), respectivamente, obtemos $u_0 x_0^* = |f|$ e $u_1 x_1^* = |f|$, como $u_i, x_i^* \geq 0$ para $i = 0, 1$, isto é, $u_0 x_0^* = x_0 x_0^*$ e $u_1 x_1^* = x_1 x_1^*$, assim $u_i(s) = x_i(s)$ para $i = 0, 1$, se

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

$s \in \text{supp}(f)$. A Observação 7.17, permite escrever $\Omega(x) = x(\log u_1 - \log u_0) = x(\log x_1 - \log x_0)$. Na Proposição 7.6 definimos Ω^1 pondo $\Omega^1(f) = x^* \Omega(x)$, portanto $\Omega^1(f) = f(\log x_1 - \log x_0)$ sempre que $\|f\|_{L_1} = 1$. Quando $\|f\|_{L_1}$ é diferente de 1 e positivo, o resultado é imediato pelo fato de Ω^1 ser homogêneo. $\square$

Definição 7.20 *Seja Ω um centralizador em X . Definamos um conjunto e uma função, respectivamente, como*

$$\mathcal{T}_\Omega = \{f \in L_1^+(\mu) : \Omega^1(f) \in L_1(\mu)\}$$

e $\Phi^\Omega : \mathcal{T}_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi^\Omega(f) = \int \Omega^1(f) d\mu,$$

onde Ω^1 é o Centralizador em L_1 definido na Proposição 7.19.

A proposição seguinte prova que $\mathcal{T}_\Omega$ é um ideal e que Φ^Ω é semilinear.

Proposição 7.21 *$\mathcal{T}_\Omega$ e Φ^Ω definidos acima são, respectivamente, um ideal e uma aplicação semilinear.*

Demonstração. Vejamos primeiro que $\mathcal{T}_\Omega$ é um semi-ideal de L_1^+ . De fato, se $f, g \in \mathcal{T}_\Omega$, então

$$|\Omega^1(f+g)| \leq |\Omega^1(f+g) - \Omega^1(f) - \Omega^1(g)| + |\Omega^1(f)| + |\Omega^1(g)|.$$

Como $\Omega^1(f+g) - \Omega^1(f) - \Omega^1(g) \in L_1$ (ver Proposição 7.2) e $\Omega^1(f), \Omega^1(g)$ pertence a L_1 obtemos que $\Omega^1(f+g) \in L_1$, que equivale a dizer $f+g \in \mathcal{T}_\Omega$.

Assuma que $0 \leq f \leq g$, com $g \in \mathcal{T}_\Omega$, isto é $\Omega^1(g) \in L_1$. Note que $\frac{f}{g} \in L_\infty$. Pelo fato de ser Ω^1 um centralizador, temos que $\Omega^1(f) - \frac{f}{g} \Omega^1(g) \in L_1$, assim

$$\Omega^1(f) = \left(\Omega^1(f) - \frac{f}{g} \Omega^1(g) \right) + \frac{f}{g} \Omega^1(g) \in L_1.$$

Demonstraremos que Φ^Ω é um funcional semilinear sobre $\mathcal{T}_\Omega$. De fato, pelo Corolário 7.9 deduzimos que

$$\|\Omega^1(f+g) - \Omega^1(f) - \Omega^1(g)\|_{L_1} \leq 15\rho(\Omega) (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}),$$

portanto,

$$|\Phi^\Omega(f+g) - \Phi^\Omega(f) - \Phi^\Omega(g)| \leq 15\rho(\Omega) (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}). \quad (7.9)$$

O funcional Φ^Ω é homogêneo devido a que Ω^1 é homogêneo.

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

Seja $0 \leq f_n \leq f$, tal que $f \in \mathcal{T}_\Omega$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$. Demonstraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^\Omega(f_n) = 0$. De fato, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$, então existe uma subsequência de (f_n) , que denotaremos por $(f^{(1)})_n$, tal que $f_n^{(1)} \rightarrow 0$ q.s. Definamos $g_m = \sup_{k \geq m} f_k^{(1)}$. Note que $g_m \in \mathcal{T}_\Omega$, $0 \leq f_n^{(1)} \leq g_m \leq f$ se $n \geq m$ e $g_m \rightarrow 0$ q.s., se $m \rightarrow \infty$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|g_m\|_{L_1} = 0$. Devido a que Ω^1 é um centralizador em L_1 e $0 \leq f_n^{(1)} \cdot g_m^{-1} \leq 1$, se $n \geq m$, deduzimos que

$$\|\Omega^1(f_n^{(1)}) - f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)\|_{L_1} \leq 5\rho(\Omega) \|g_m\|_{L_1}, \text{ se } n \geq m.$$

Como $\Omega(g_m) \in L_1$,

$$|f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)| \leq |\Omega^1(g_m)|,$$

e

$$|f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)| \rightarrow 0 \text{ q.s.,}$$

obtemos pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)\|_{L_1} = 0,$$

para $m \in \mathbb{N}$ fixo.

Consequentemente, existe uma subsequência $(f_n^{(1)})_n$ de $(f_n)_n$ tal que

$$\begin{aligned} \|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} &\leq \|\Omega^1(f_n^{(1)}) - f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)\|_{L_1} + \|f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)\|_{L_1} \\ &\leq 5\rho(\Omega) \|g_m\|_{L_1} + \|f_n^{(1)} g_m^{-1} \Omega^1(g_m)\|_{L_1}, \end{aligned}$$

se $n \geq m$. Logo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} \leq 5\rho(\Omega) \|g_m\|_{L_1}.$$

Além disso, se $m \rightarrow \infty$, então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} = 0.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} = 0.$$

Até o momento demonstramos que para toda sequência $(f_n)_n$ tal que $0 \leq f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$, existe uma subsequência $(f_n^{(1)})_n$ de $(f_n)_n$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} = 0.$$

Agora demonstraremos que se $(f_n)_n$ é uma sequência tal que $0 \leq f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L_1} = 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n)\|_{L_1} = 0.$$

7.2 Auto-extensões de espaços interpolados

De fato, assumamos por contradição que existe uma subseqüência de $(f_n)_n$, que denotaremos por $(f_n^{(1)})_n$, tal que

$$\|\Omega^1(f_n^{(1)})\|_{L_1} > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.10)$$

e para algum $\varepsilon > 0$. Note que $\|f_n^{(1)}\|_{L_1} \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Portanto, existe uma subseqüência de $(f_n^{(1)})_n$, que denotaremos por $(f_n^{(2)})_n$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n^{(2)})\|_{L_1} = 0.$$

Isto contraria o fato (7.10). Consequentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Omega^1(f_n)\|_{L_1} = 0,$$

logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^\Omega(f_n) = 0$ e segue que Φ^Ω é uma aplicação semilinear. $\square$

Proposição 7.22 *Sejam X_1, X_0 espaços de Köthe e $X = [X_0 X_1]_\theta$. Seja Φ^Ω o funcional semilinear definido anteriormente. Então para $f \in \mathcal{T}_{X_0} \cap \mathcal{T}_{X_1} \cap \mathcal{T}_\Omega$ temos que*

$$\Phi^\Omega = \Phi_{X_1} - \Phi_{X_0}$$

Demonstração. Na prova da Proposição 6.8 provamos que se $f = xy$ é a fatoração de Lozanovskii, onde $x \in X$ e $y \in X^*$, então

$$\int f \log |x| d\mu = \sup_{\|z\|_X \leq 1} \int f \log |z| d\mu.$$

Na Proposição 7.19 demonstramos que $\Omega^1(f) = f(\log x_1 - \log x_0)$, onde $|f| = x_0 x_0^*$ e $|f| = x_1 x_1^*$ são as fatorações de Lozanovskii de $|f|$ em X_0 e X_1 , respectivamente. Integrando $\Omega^1(f)$, obtemos que

$$\Phi^\Omega = \Phi_{X_1} - \Phi_{X_0}.$$

$\square$

Teoremas de extrapolação

Antes de começar as provas dos teoremas, vamos fazer uma observação

Observação 8.1 *Seja X um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 < p \leq 2$. Destas desigualdades deduzimos imediatamente que $q \geq 2$. A Proposição 2.39 garante que X' é um espaço p -convexo e q -côncavo. Por X^* ser isométrico a um subespaço de X' , temos que X^* é p -convexo e q -côncavo (ver Proposição 2.40).*

Teorema 8.2 (Pisier) [16, pág.498] *Se X é um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{q}$ e $0 < \theta < 1$ existe um único espaço de Köthe Y tal que*

$$X = L_2^\theta Y^{1-\theta}.$$

Demonstração. Note que as desigualdades $1/p + 1/q = 1$, $\theta/2 = 1/q$ e $0 < \theta < 1$, implicam que $1 < p \leq 2$.

Como X é um espaço de Köthe p -convexo, então X^p é um espaço de Köthe (ver Proposição 5.15). O Teorema 6.15 garante que Φ_{X^p} e $\Lambda - \Phi_{X^p}$ são funções convexas e pela Proposição 6.10 obtemos que $\Phi_{X^p} = p \Phi_X$. Portanto $\Lambda - p \Phi_X$ é uma função convexa, assim $\frac{1}{p} \Lambda - \Phi_X$ é convexa.

Por X ser um espaço q -côncavo, temos que X^* é um espaço p -convexo, logo $\frac{1}{p} \Lambda - \Phi_{X^*}$ é uma função convexa.

Seja agora

$$\Phi = \frac{1}{1-\theta} \Phi_X - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Lambda.$$

A função Φ é homogênea, pois Φ_X e Λ são homogêneas. Vejamos que Φ , assim definida é uma função convexa. De fato, pelo fato de que $\frac{1}{p} \Lambda - \Phi_{X^*}$ é uma função convexa, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\frac{1}{p}\Lambda - \Phi_{X^*}}(f, g) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{p} \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Phi_{X^*}}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{p} \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Lambda}(f, g) + \Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{q} \Delta_{\Lambda}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{\theta}{2} \Delta_{\Lambda}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{1-\theta} \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Delta_{\Lambda}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Phi}(f, g) \geq 0.
\end{aligned}$$

Demonstraremos similarmente que $\Lambda - \Phi$ é uma função convexa. De fato, similarmente, pelo fato de que $\frac{1}{p}\Lambda - \Phi_X$ é uma função convexa, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\frac{1}{p}\Lambda - \Phi_X}(f, g) \geq 0 &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2-\theta}{2} \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2-\theta}{2(1-\theta)} \Delta_{\Lambda}(f, g) - \frac{1}{1-\theta} \Delta_{\Phi_X}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Lambda}(f, g) - \frac{1}{1-\theta} \Delta_{\Phi_X}(f, g) + \frac{\theta}{2(1-\theta)} \Delta_{\Lambda}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Lambda}(f, g) - \Delta_{\Phi}(f, g) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \Delta_{\Lambda - \Phi}(f, g) \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, existe um espaço de Köthe Y tal que $\Phi_Y = \Phi$ (ver Teorema 6.20). Isto é,

$$\Phi_Y = \frac{1}{1-\theta}\Phi_X - \frac{\theta}{2(1-\theta)}\Lambda \Leftrightarrow \Phi_X = \frac{\theta}{2}\Lambda + (1-\theta)\Phi_Y$$

$$\Leftrightarrow \Phi_X = \Phi_{L_2^\theta Y^{1-\theta}},$$

e pela unicidade do Teorema 6.20 obtemos $X = L_2^\theta Y^{1-\theta}$.

Se Y_0 é um espaço de Köthe que satisfaz $X = L_2^\theta Y_0^{1-\theta}$, então

$$\Phi_{Y_0} = \frac{1}{1-\theta}\Phi_X - \frac{\theta}{2(1-\theta)}\Lambda = \Phi_Y.$$

Logo $Y_0 = Y_1$, o que prova a unicidade do teorema. $\square$

Teorema 8.3 *Seja X um espaço de Köthe e $0 < \theta < 1$. Suponha que existem espaços de Köthe X_0, X_1, Y_0 e Y_1 tais que $X = [X_0, X_1]_\theta$ e $X = [Y_0, Y_1]_\theta$. Se Ω e Ω_0 são os centralizadores induzidos por $[X_0, X_1]_\theta$ e $[Y_0, Y_1]_\theta$, respectivamente, e são limitadamente equivalentes, então $X_0 = Y_0$ e $X_1 = Y_1$ (os espaços são iguais como normas equivalentes).*

Demonstração. Pela Proposição 7.22 temos que

$$\Phi^\Omega = \Phi_{X_1} - \Phi_{X_0}$$

e

$$\Phi^{\Omega_0} = \Phi_{Y_1} - \Phi_{Y_0}.$$

Pela Proposição 6.9, obtemos que

$$\Phi_X = (1-\theta)\Phi_{X_0} + \theta\Phi_{X_1}$$

e

$$\Phi_X = (1-\theta)\Phi_{Y_0} + \theta\Phi_{Y_1}.$$

Agora

$$(1-\theta)(\Phi^\Omega - \Phi^{\Omega_0}) = (1-\theta)\Phi^\Omega - (1-\theta)\Phi^{\Omega_0} + \Phi_X - \Phi_X.$$

Substituindo as equações acima, temos

$$\begin{aligned} &= (1-\theta)(\Phi_{X_1} - \Phi_{X_0}) - (1-\theta)(\Phi_{Y_1} - \Phi_{Y_0}) + (\theta\Phi_{X_1} + (1-\theta)\Phi_{X_0}) \\ &\quad - (\theta\Phi_{Y_1} + (1-\theta)\Phi_{Y_0}) \\ &= \Phi_{X_1} - \Phi_{Y_1}. \end{aligned}$$

Como Ω e Ω_0 são limitadamente equivalentes, então Ω^1 e Ω_0^1 são limitadamente equivalentes (ver Corolário 7.8), portanto

$$\begin{aligned} |\Phi^\Omega(f) - \Phi^{\Omega_0}(f)| &= \left| \int \Omega^1(f) d\mu - \int \Omega_0^1(f) d\mu \right| \\ &\leq \|\Omega^1(f) - \Omega_0^1(f)\|_{L_1} \\ &\leq C_1 \|f\|_{L_1} \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{T}_\Omega \cap \mathcal{T}_{\Omega_0}$ e para alguma constante $C_1 > 0$.

Em particular, se $f \in \mathcal{T}$, com $\|f\|_{L_1} \leq 1$, onde $\mathcal{T}$ é um semi-ideal estrito contido em $\mathcal{T}_{X_0} \cap \mathcal{T}_{X_1} \cap \mathcal{T}_{Y_0} \cap \mathcal{T}_{Y_1} \cap \mathcal{T}_\Omega \cap \mathcal{T}_{\Omega_0}$, temos que

$$\begin{aligned} d(\Phi_{X_1}, \Phi_{Y_1}) &= \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} |\Phi_{Y_1}(f) - \Phi_{X_1}(f)| \\ &= (1 - \theta) \cdot \sup_{\|f\|_{L_1} \leq 1} |\Phi^\Omega(f) - \Phi^{\Omega_0}(f)| \\ &\leq (1 - \theta)C_1, \end{aligned}$$

portanto o Corolário 6.18 garante que X_1 e Y_1 são iguais com normas equivalentes. Analogamente se prova que X_0 e Y_0 são iguais com normas equivalentes. $\square$

Teorema 8.4 *Sejam X um espaço de Köthe p -convexo e q -côncavo, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, com $1 < p \leq 2$ e Ω um centralizador real em X com $\rho(\Omega) \leq \frac{1}{200q}$, então existem espaços de Köthe X_0 e X_1 tais que $X = [X_0, X_1]_{1/2}$ e se Ω_0 é o centralizador induzido em X . Então existe uma constante positiva tal que*

$$\|\Omega(x) - \Omega_0(x)\|_X \leq C\|x\|_X$$

para todo $x \in X$, ou seja, Ω e Ω_0 são limitadamente equivalentes.

Demonstração. Suponha que Ω é um centralizador real sobre X . Seja $\Phi^\Omega : \mathcal{T}_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi^\Omega(f) = \int \Omega^1(f) d\mu$$

como na Definição 7.20. A desigualdade (7.9) e a hipóteses do teorema mostram que

$$\begin{aligned}
|\Phi^\Omega(f+g) - \Phi^\Omega(f) - \Phi^\Omega(g)| &\leq 15\rho(\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \\
&\leq \frac{15}{200q}(\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}),
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
|q\Phi^\Omega(f+g) - q\Phi^\Omega(f) - q\Phi^\Omega(g)| &\leq \frac{15}{200}(\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}) \\
&\leq (1 - \varepsilon) \log 2 (\|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1})
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon = 1 - \frac{15}{200 \log 2}$. A função $q\Phi^\Omega$ é homogênea positiva e verifica as hipóteses do Teorema 6.27, portanto, existe um espaço de Köthe W e uma constante $c_1 > 0$ tais que

$$|q\Phi^\Omega(f) - (\Phi_W(f) - \Phi_{W^*})(f)| \leq c_1\|f\|_{L_1}.$$

Denotemos por

$$\Phi_0 = \Phi_X - \frac{1}{2q}(\Phi_W - \Phi_{W^*}) \quad \text{e} \quad \Phi_1 = \Phi_X + \frac{1}{2q}(\Phi_W - \Phi_{W^*}).$$

Observe que Φ_0 e Φ_1 são homogêneas positivas. Agora pelo fato de $\Lambda - \Phi_W$ ser convexo, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi_0}(f, g) &= \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{2q}(\Delta_{\Phi_W}(f, g) - \Delta_{\Phi_{W^*}}(f, g)) \\
&= \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{2q}\Delta_{\Phi_W}(f, g) + \frac{1}{2q}\Delta_{\Phi_{W^*}}(f, g) \\
&\geq \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{q}\Delta_{\Phi_W}(f, g) \\
&\geq \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{q}\Delta_\Lambda(f, g).
\end{aligned}$$

Pelo fato de X ser um espaço p -convexo, obtemos que $\Lambda - \Phi_{(X^*)^p}$ é convexo. Logo

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi_0}(f, g) &\geq \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{q} \Delta_{\Lambda}(f, g) \\
&= \Delta_{\Phi_X - \frac{1}{q} \Lambda}(f, g) \\
&= \Delta_{\frac{1}{p} \Lambda - \Phi_{X^*}}(f, g) \\
&= \frac{1}{p} \Delta_{\Lambda - \Phi_{(X^*)^p}}(f, g) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto mostra que Φ_0 é um funcional convexo. Similarmente

$$\begin{aligned}
\Delta_{\Phi_0}(f, g) &= \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{2q} (\Delta_{\Phi_W}(f, g) - \Delta_{\Phi_{W^*}}(f, g)) \\
&= \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{2q} \Delta_{\Phi_W}(f, g) + \frac{1}{2q} \Delta_{\Phi_{W^*}}(f, g) \\
&\leq \Delta_{\Phi_X}(f, g) + \frac{1}{q} \Delta_{\Phi_{W^*}}(f, g) \\
&= \Delta_{\Phi_X}(f, g) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) (\Delta_{\Lambda} - \Delta_{\Phi_W})(f, g) \\
&\leq \Delta_{\Phi_X}(f, g) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \Delta_{\Lambda}(f, g) \\
&= \Delta_{\Phi_X}(f, g) - \frac{1}{p} \Delta_{\Lambda}(f, g) + \Delta_{\Lambda}(f, g) \\
&\leq \Delta_{\Lambda}(f, g),
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é justificada pelo fato de ser X um espaço p -convexo. Isto prova que $\Phi_0 - \Lambda$ é uma função convexa. De forma análoga demonstramos que Φ_1 e $\Phi_1 - \Lambda$ são convexas. O Teorema 6.20 implica que existem espaços de Köthe X_0 e X_1 tais que $\Phi_0 = \Phi_{X_0}$ e $\Phi_1 = \Phi_{X_1}$, logo

$$\Phi_{X_0} + \Phi_{X_1} = 2\Phi_X,$$

isto é, $X = [X_0, X_1]_{1/2}$ (Teorema 6.20), com isto demonstramos a primeira parte do teorema. Para demonstrar a segunda parte do teorema note que

$$\Phi_{X_1} - \Phi_{X_0} = \frac{1}{q} (\Phi_W - \Phi_{W^*}).$$

A Proposição 7.22 implica que $\Phi^{\Omega_0} = \Phi_{X_1} - \Phi_{X_0}$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\Phi^\Omega(f) - \Phi^{\Omega_0}(f)| &= \left| \Phi^\Omega(f) - \frac{1}{q}(\Phi_W - \Phi_{W^*})(f) \right| \\ &\leq \frac{c_1}{q} \|f\|_{L_1} \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{T}_\Omega \cap \mathcal{T}_{\Omega_0}$.

Sejam $x \in X$ e $y \in X^*$ tais que $xy \in \mathcal{T}_\Omega \cap \mathcal{T}_{\Omega_0}$. Por definição, $\Omega^1(xy), \Omega_0^1(xy)$ pertence a L_1 , portanto, $y \Omega^1(x), y \Omega_0^1(x)$ são integráveis. Agora para $y \in X^*$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int (\Omega(x) - \Omega_0(x)) y d\mu \right| &\leq \left| \int y \Omega(x) d\mu - \int \Omega^1(xy) d\mu \right| + \left| \int \Omega^1(xy) d\mu - \int \Omega_0^1(xy) d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int \Omega_0^1(xy) d\mu - \int y \Omega_0(x) d\mu \right| \\ &= \|y \Omega(x) - \Omega^1(xy)\|_{L_1} + |\Phi^\Omega(xy) - \Phi^{\Omega_0}(xy)| + \|\Omega_0^1(xy) - y \Omega_0(x)\|_{L_1} \\ &\leq 5\rho \|x\|_X \|y\|_{X^*} + \frac{c_1}{q} \|x\|_X \|y\|_{X^*} + 5\rho_0 \|x\|_X \|y\|_{X^*} \\ &\leq C \|x\|_X \|y\|_{X^*}. \end{aligned}$$

por X^* ser isométrico a um subespaço normando do dual usual de X , obtemos que

$$\|\Omega(x) - \Omega_0(x)\|_X \leq C \|x\|_X$$

para todo $x \in X$. □

Bibliografia

- [1] A.P. CALDERÓN, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113-190.
- [2] ALEXANDER E. LITVAK, *The Extension of the Finite-Dimensional Version of Krivine's Theorem to Quasi-Normed Spaces*, Convex Geometric Analysis MSRI Publications vol.34 (1998).
- [3] ANTON R. SCHEP, *Products of Cesàro convergent sequences with applications to convex solid sets and integral operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 579-584.
- [4] DONALD L. COHN, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, USA (2013).
- [5] D.H. FREMLIN, *Measure Theory Vol.II*, Torres Fremlin, Colchester, England (2010).
- [6] GEORGI E. SHILOV, *Linear algebra*, Dover Publications, Inc., New York (1977).
- [7] J. DIESTEL AND J.J. UHL, JR., *Vector Measures*, Mathematical Surveys and Monographs Vol. 15, Amer. Math. Soc. (1977).
- [8] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer Verlag, Berlin (1976).
- [9] J.M.F. CASTILLO AND M. GONZALEZ, *Three-space Problems in Banach Space Theory*, Lecture Notes in Math. 1667, Springer, Berlin (1997).
- [10] J. KOMLÓS, *A generalization of a problem of Steinhaus*, Acta Math. Hungar. 18 (1967) 217-229.
- [11] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces I and II, Function Spaces*, Springer, Berlin (1979).
- [12] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS SANTALUCÍA, J. PELANT, V. ZIZLER, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, New York (2001).

BIBLIOGRAFIA

- [13] G. PISIER, *Some applications of the complex interpolation method to Banach lattice*, Journal d'Analyse Mathématique vol.5 (1979), 264-281.
- [14] MICHEÁL Ó SEARCOÍD, *Metric Spaces*, Springer Undergraduate Mathematics Series, London (2006).
- [15] N.J KALTON, *Analytic functions in non-locally convex spaces*, Studia Math. 83 (1986), No.3, 275-303.
- [16] N.J KALTON, *Differentials of complex interpolation processes for Köthe function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992), 479-529.
- [17] N.J KALTON, *Nonlinear commutators in interpolation theory*, Mem. Amer. Math. Soc. No.385 (1988).
- [18] N.J KALTON, *Convexity, type and the three-space problem*, Studia Math. 69 (1980), 57-96.
- [19] N.J KALTON, N.T PECK, *Twisted sums of sequence spaces and three space problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 1-30.
- [20] PETER MEYER-NIEBERG, *Banach Lattices*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1991)
- [21] P. SAM JOHNSON, S. BALAJI, *On Linear Operators with Closed Range*, Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics (2011) vol.1, No.2, 175-182.
- [22] ROBERT E. MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg (1998).
- [23] SERGE LANG, *Complex analysis*, Vol. 106 Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, fourth edition, New York (1999).
- [24] S. OKADA, W.J. RICKER, E. A. SANCHEZ, *Optimal Domain and Integral Extension of Operators, Acting in Function Spaces*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 180 Birkhäuser, Basel (2008).
- [25] T.A. GILLESPIE, *Factorization in Banach function spaces*, Indag. Math. 43 (1981), 287-300.
- [26] TAKASHI ITO, *On Banach spaces with unique isometric predual*, Michigan Math. J. (1977) Vol.24, 321-324.
- [27] W. ARENDT, CHARLES J.K. BATTY, M. HIEBER, F. NEUBRANDER *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems: Second Edition*, Birkhäuser, Natick, MA (2001)
- [28] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill (1970).
- [29] W.B. JOHNSON, J. LINDENSTRAUSS, *Handbook of the Geometry of Banach spaces*, Vol.2 eds, Elsevier, Amsterdam (2003), 1099-1130.