**Uma sequência exata relacionada a uma
extensão de anéis e uma representação parcial**

Josefa Itailma da Rocha

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev

São Paulo, dezembro de 2017

Uma sequência exata relacionada a uma extensão de anéis e uma representação parcial

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 27/02/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^ª. Dr Mikhailo Dokuchaev (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Javier Sánchez Serdá - IME-USP
- Prof. Dr. Fernando Raul Abadie Vicens - Universidad de la República
- Prof. Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia - Universidad Industrial de Santander
- Prof. Dr. Mykola Khrypchenko - UFSC

Resumo

ROCHA, J. I. **Uma sequência exata relacionada a uma extensão de anéis e uma representação parcial.** 2017. 114 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Para uma extensão de Galois de anéis comutativos, Chase-Harrison-Rosenberg construíram uma sequência exata de sete termos que envolve o grupo de Picard, o grupo de Brauer relativo e grupos de cohomologias. Essa sequência é vista como uma generalização de dois fatos importantes da teoria galoisiana de corpos, a saber, o Teorema 90 de Hilbert e o isomorfismo de grupo de Brauer relativo com o segundo grupo de cohomologia. A sequência foi generalizada por Miyashita para o contexto de anéis não comutativos com unidade. Mais tarde, El Kaoutit e Gomez-Torrecillas generalizaram o resultado de Miyashita para uma extensão de anéis não comutativos e não unitais, apenas com um conjunto de unidades locais. A sequência de Chase-Harrison-Rosenberg também foi considerada para ações parciais por Dokuchaev, Paques e Pinedo, que construíram uma versão para uma extensão de Galois parcial de anéis comutativos. Nesta tese, elaboramos uma versão da sequência no contexto de ações parciais para uma extensão de anéis não comutativos com unidade. A sequência apresentada aqui generaliza a sequência dada por Miyashita.

Palavras-chave: ações parciais, representação parcial, produto cruzado generalizado parcial.

Abstract

ROCHA. J.I. **An exact sequence related to an extension of rings and a partial representation**. 2017. 114 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

For a Galois extension of commutative rings, Chase-Harrison-Rosenberg constructed a seven terms exact sequence which involves the Picard group, the relative Brauer group and cohomology groups. The sequence can be viewed as a generalization of two important facts of Galois theory of fields: the Hilbert 90 Theorem and the isomorphism of the relative Brauer group with the second cohomology group. The sequence was generalized by Miyashita for the context of non-commutative unital rings. Later, El Kaoutit and Gomez-Torrecillas extended the result of Miyashita for an extension of non-unital non-commutative rings with local units. The Chase-Harrison-Rosenberg sequence was also considered for partial actions by Dokuchaev, Paques e Pinedo, who constructed a version for a partial Galois extension of commutative rings. In this thesis, we elaborate a version of the sequence in the context of partial actions for an extension of non-commutative unital rings. Our sequence generalizes the sequence given by Miyashita.

Keywords: partial actions, partial representations, partial generalized crossed products

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	5
2.1	Módulos projetivos e o grupo de Picard	5
2.2	O semigrupo de Picard generalizado	20
2.3	R -bimódulos similares	22
2.4	O grupo $\mathcal{P}(S/R)$	26
2.5	Uma sequência exata auxiliar	28
3	Fundamentos sobre ações e representações parciais	31
3.1	Ações parciais, representações parciais e cohomologia parcial.	31
3.2	Representação Parcial Unital	35
3.2.1	Ação parcial sobre $\mathcal{Z}$ e sobre $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$	36
3.3	Produto cruzado generalizado parcial	42
3.3.1	Representações parciais unitais em $\mathcal{S}_R(S)$	56
3.4	O grupo $\mathcal{C}(\Theta/R)$	60
4	A sequência exata de sete termos	81
4.1	A primeira sequência exata	81
4.2	A segunda sequência exata	86
4.3	O grupo $\mathcal{B}(\Theta/R)$ e a terceira sequência exata	104
4.4	O grupo $\overline{H^1}(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ e a quarta sequência exata	104
4.5	A quinta sequência exata	107

Capítulo 1

Introdução

O conceito de extensão Galoisiana de anéis comutativos foi introduzido em 1960 por M. Auslander e O. Goldman no artigo [1], no qual eles estabeleceram os fundamentos de extensões separáveis de anéis comutativos e definiram o grupo de Brauer de um anel comutativo. Em 1965, S. U. Chase, D.K. Harrison e A. Rosenberg desenvolveram a teoria de Galois de anéis comutativos em [2]. Usando cohomologia de Amitsur e sequências espectrais, Chase e Harrison construíram em [3] uma sequência exata de sete termos a qual foi aplicada em [2] para uma extensão de Galois $R \subseteq S$ de anéis comutativos com unidade e grupo de Galois G obtendo a seguinte sequência exata:

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow H^1(G, \mathcal{U}(S)) \longrightarrow \mathbf{Pic}(R) \longrightarrow \mathbf{Pic}(S)^G \longrightarrow H^2(G, \mathcal{U}(S)) \longrightarrow B(S/R) \\ \longrightarrow H^1(G, \mathbf{Pic}(S)) \longrightarrow H^3(G, \mathcal{U}(S)), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{U}(S)$ denota o grupo dos inversíveis do anel S , $\mathbf{Pic}(S)$ o grupo de Picard de S e $B(S/R)$ o grupo de Brauer relativo de S sobre R , ou seja, o grupo das R -álgebras de Azumaya que cindem por S . A sequência de Chase-Harrison-Rosenberg pode ser vista como uma generalização de dois fatos fundamentais de cohomologia galoisiana de corpos, que são o Teorema de Hilbert 90 e o Teorema do produto cruzado. O primeiro afirma que se $R \subseteq S$ é uma extensão de corpos de Galois, então $H^1(G, S)$ é trivial. Já o segundo diz que existe um isomorfismo entre o segundo grupo de cohomologias e o grupo de Brauer relativo da extensão $R \subseteq S$. A exatidão da sequência de acima implica nas seguintes generalizações para uma extensão de anéis comutativos com unidade:

Teorema 90 de Hilbert: Seja $R \subseteq S$ é uma extensão de Galois tal que $\mathbf{Pic}(R) = \{1\}$, então $H^1(G, \mathcal{U}(S)) = \{1\}$.

Teorema do Produto cruzado: Seja $R \subseteq S$ é uma extensão de Galois com $\mathbf{Pic}(S) = \{1\}$, então $H^2(G, \mathcal{U}(S)) \simeq B(S/R)$.

Em 1968, no artigo [4], foi dada uma construção da sequência de Chase-Harrison-Rosenberg fazendo uso de produtos cruzados generalizados. A sequência de Chase-Harrison-Rosenberg também foi considerada no contexto de anéis não comutativos. Em 1973, motivado por [4] e [2], Y. Miyashita construiu no artigo [5] uma sequência exata de sete termos para uma extensão de anéis não comutativos com unidade que generaliza a sequência em [3]. Em 2012 a sequência de Miyashita foi generalizada por L. El. Koutit e J. Gómez-Torrecillas em [6] e [7]. Nestes trabalhos foi construída uma sequência exata de sete termos para uma extensão de anéis não comutativos e não unitais, apenas com um conjunto de unidades locais.

Uma versão da sequência de Chase-Harrison-Rosenberg no contexto analítico/topológico foi elaborada por D. Crocker, I. Raeburn and D. Williams em [8].

O conceito de ações parciais surgiu na teoria de álgebra de operadores. No artigo de R. Exel [9] é introduzida a noção de uma ação parcial torcida de um grupo localmente compacto em uma C^* -álgebra e produto cruzado correspondente a essa ação e é estabelecida a associatividade desse produto cruzado. Em [10] é dada uma correspondência biunívoca entre as ações parciais de um grupo G em conjunto e as ações globais de um semigrupo inverso construído a partir do grupo G (ver [10]). Os trabalhos de Exel inspiraram diversos outros estudos em torno de ações parciais. Em particular, na tese de F. Abadie [11] (vide também o artigo [12]) foi iniciada a pesquisa do problema de globalização de uma ação parcial α , i.e., a questão de existência de uma ação (global) β de tal forma que α seja uma restrição de β . Uma tal ação β , com uma restrição natural que serve para garantir unicidade, é chamada de ação envolvente para α . O estudo de ações parciais em um contexto puramente algébrico foi iniciado em 2005 por M. Dokuchaev e R. Exel em [13]. Nesse trabalho é associado a uma ação parcial um produto cruzado algébrico e obtido um resultado sobre sua associatividade. Também é dado um critério para existência de uma ação envolvente para uma ação parcial de um grupo sobre uma álgebra associativa com unidade (ver [13, Teorema 4.5]). Em 2007, M. Dokuchaev, A. Paques e M. Ferrero generalizaram em [14] a teoria de Galois de Chase, Harrison e Rosenberg [2]. Em [14] é assumido que a ação parcial admite uma ação envolvente. Nesse trabalho são dadas definições equivalentes para uma extensão de Galois de anéis comutativos, relação entre a extensão galoisiana parcial de anéis comutativos e a extensão galoisiana envolvente e um Teorema fundamental. Posteriormente, em 2015, M. Dokuchaev e M. Khrypchenko desenvolveram em [15] a teoria de cohomologia parcial de grupos.

A sequência de Chase-Harrison-Rosenberg é considerada também no contexto de ações parciais. Em 2015, usando a teoria de Galois parcial e de cohomologia parcial, M. Dokuchaev, A. Paques e H. Pinedo construíram em [16] uma sequência de sete termos para uma extensão de Galois parcial de anéis comutativos. A exatidão da sequência construída em [16] foi provada em [17].

Neste trabalho, construímos uma versão no contexto de ações parciais da sequência exata de sete termos dada por Miyashita em [5] para uma extensão de anéis não comutativos com unidade.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 encontram-se os conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 2.1 demonstramos alguns resultados sobre módulos projetivos finitamente gerados e grupo de Picard sobre um anel não comutativo. Esses fatos são conhecidos e são usados em [18] e [5], por exemplo, mas suas demonstrações não são encontradas com tanta facilidade. Para anéis comutativos, esses resultados e suas demonstrações são encontradas por exemplo em [19], [20] e [21]. Na Seção 2.2 definimos o semigrupo de Picard de um anel não comutativo. Esse semigrupo foi definido em [16] para anéis comutativos. Nas seções seguintes são apresentados alguns resultados e definições de [5]. Algumas demonstrações também foram acrescentadas nessas seções, pois em [5] são omitidos vários detalhes que são importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

No Capítulo 3 relembremos o conceito de ações parciais e representações parciais. Na Proposição 3.1.3 construímos uma ação parcial a partir de uma representação parcial de G sobre um monoide S . Na Seção 3.2 definimos representação parcial unital de G sobre $\mathbf{PicS}(R)$ e mostramos suas propriedades. A partir de uma representação parcial unital construímos uma ação parcial sobre o centro do anel R (Proposição 3.2.4), e uma ação parcial sobre $\mathbf{PicS}(R)$ que é um caso particular da ação parcial construída na Proposição 3.1.3. Na Seção 3.3 definimos o produto cruzado generalizado parcial que é um anel associativo com unidade e pode ser visto como uma extensão do anel R . Na Observação 3.3.13 mostramos como construir um produto cruzado generalizado parcial a partir de uma extensão de anéis $R \subseteq S$ e uma representação parcial unital sobre o monoide dos R -submódulos de S (ver Proposição 3.3.11). Na seção seguinte definimos o grupo $\mathcal{C}(\Theta/R)$, onde $\Theta : G \rightarrow \mathbf{PicS}(R)$ é uma representação parcial unital fixada, que é formado por classes de isomorfismo de produtos cruzados generalizados parciais que satisfazem algumas condições (ver Proposição 3.4.1). Para encerrar a seção destacamos o subgrupo $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$ e mostramos, no Teorema 3.4.3, o isomorfismo desse grupo com um segundo grupo de cohomologia parcial.

No Capítulo 4 construímos a sequência exata de sete termos, no contexto parcial, que generaliza a sequência em [5, Teorema 2.12]. Usamos o produto cruzado generalizado parcial associado a uma extensão de anéis com mesma unidade e uma representação parcial unital para construir os morfismos e os grupos que aparecem na sequência. A exatidão da sequência é provada diretamente.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste Capítulo vamos apresentar alguns resultados que serão usados no nosso trabalho. Em todo o texto R denotará um anel (não comutativo) com unidade e $\mathcal{Z}$ o seu centro. Na primeira seção vamos demonstrar alguns resultados sobre módulos projetivos finitamente gerados e grupo de Picard sobre um anel não comutativo. Esses resultados são conhecidos e, para anéis comutativos, suas demonstrações são facilmente encontradas nos textos básicos sobre módulos como por exemplo [19], [22], [20] e [21]. Já no caso de anéis não comutativos, essas demonstrações não são encontradas com tanta facilidade. Na Seção 2.2 definimos o *semigrupo de Picard generalizado* de um anel não comutativo R . Esse semigrupo foi introduzido em [16] para o contexto de anéis comutativos. Nas seções seguintes apresentamos algumas definições e resultados de [5] que serão usados ao longo do texto.

2.1 Módulos projetivos e o grupo de Picard

Seja R um anel com unidade. Dizemos que um R -módulo à direita M é unital se $m \cdot 1 = m$, para todo $m \in M$. Neste caso, temos que $MR = M$ e que a aplicação $M \otimes_R R \rightarrow M$, dada pela ação de R em M , é um isomorfismo de R -módulos. Analogamente definimos R -módulos unitais à esquerda. Em todo o trabalho, estamos considerando apenas R -módulos unitais.

Definição 2.1.1. Um R -módulo à direita P é chamado *projetivo* se dado qualquer diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ L \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow 0 \end{array}$$

de R -módulos à direita, onde g é sobrejetivo, existe um homomorfismo de R -módulos $f^* : P \rightarrow L$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ f^* \swarrow & \downarrow f & \\ L \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow 0 \end{array}$$

é comutativo.

Proposição 2.1.2. Seja P um R -módulo à direita. São equivalentes:

- (i) P é projetivo.

- (ii) Qualquer sequência exata $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ cinde.
 (iii) P é somando direto de um R -módulo livre.

Demonstração. [22, Proposição 3.10]. ■

Uma caracterização importante dos módulos projetivos é dada no Lema a seguir:

Lema 2.1.3 (Lema da Base dual). *Seja M um R -módulo à direita. Então, M é projetivo se, e somente se, existem conjuntos $\{m_i\}_{i \in I} \subset M$ e $\{f_i\}_{i \in I} \subset \text{Hom}_R(M, R)$ tais que para qualquer $m \in M$, $f_i(m) = 0$ a menos de um número finito de $i \in I$ e*

$$\sum_{i \in I} m_i f_i(m) = m.$$

A coleção $\{f_i, m_i\}_{i \in I}$ é chamada base dual de M .

Demonstração. [20, Lema 2.9]. ■

No caso em que temos módulos finitamente gerados, o Lema da base tem a seguinte versão:

Corolário 2.1.4. *Um R -módulo à direita M é projetivo e finitamente gerado se, e somente se, existem $m_i \in M$ e $f_i \in \text{Hom}_R(M, R)$ $i = 1, 2, \dots, n$, tais que para todo $m \in M$*

$$\sum_{i=1}^n m_i f_i(m) = m.$$

Se R é comutativo, então todo R -módulo M (à direita ou à esquerda) pode ser visto como um R -bimódulo (central) via a ação central: $rm = mr$, para todo $r \in R$ e $m \in M$. Para anéis não comutativos essa construção não é possível, ou seja, um R -módulo à direita nem sempre pode ser visto também como um R -módulo à esquerda. A partir daqui vamos trabalhar com R -bimódulos.

Sejam M e N dois R -bimódulos, então $\text{Hom}(M_R, N_R)$ e $\text{Hom}({}_R M, {}_R N)$ são R -bimódulos via:

$$(r \cdot f)(m) = r f(m) \text{ e } (f \cdot r)(m) = f(rm), \quad f \in \text{Hom}(M_R, N_R), m \in M, r \in R, \quad (2.1)$$

e

$$(r \cdot g)(m) = g(mr) \text{ e } (g \cdot r)(m) = g(m)r, \quad g \in \text{Hom}({}_R M, {}_R N), m \in M, r \in R. \quad (2.2)$$

Para um R -bimódulo M , vamos denotar ${}^*M = \text{Hom}(M_R, R_R)$ e $M^* = \text{Hom}({}_R M, {}_R R)$. Esses conjuntos são R -bimódulos com as estruturas definidas em (2.1) e (2.2).

Lema 2.1.5. *Seja P um R -bimódulo.*

- (i) *Se P é R -módulo à direita projetivo e finitamente gerado com base dual $\{p_i, f_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, então *P é R -módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado com base dual $\{f_i, \Phi_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ onde*

$$\begin{aligned} \Phi_i : {}^*P &\longrightarrow R \\ f &\longmapsto f(p_i) \end{aligned} .$$

- (ii) *Se P é R -módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado com base dual $\{g_i, p_i\}_{i=1,2,\dots,n}$, então P^* é R -módulo à direita projetivo e finitamente gerado com base dual $\{g_i, \Psi_i\}$, onde*

$$\begin{aligned} \Psi_i : P^* &\longrightarrow R \\ g &\longmapsto g(p_i) \end{aligned} .$$

Demonstração. (i) Dado $r \in R$ temos

$$\Phi_i(r \cdot f) = (r \cdot f)(p_i) = rf(p_i) = r\Phi_i(f).$$

Logo, $\Phi_i \in (*P)^* = \text{Hom}({}_R^*P, {}_R R)$. Além disso, para todo $f \in {}^*P$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\Phi_i(f) \cdot f_i)(p) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i(f) f_i(p) = \sum_{i=1}^n f(p_i) f_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n f(p_i f_i(p)) = f(p), \end{aligned}$$

para todo $p \in P$. Portanto, $\{\Phi_i, f_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ é uma base dual de *P como R -módulo à esquerda.

(ii) Análogo ao item (i).

■

Lema 2.1.6. *Seja P um R -bimódulo. Então:*

(i) *Se P é um R -módulo à direita projetivo e finitamente gerado, então*

$$\begin{aligned} \varphi : P \otimes_R {}^*P &\longrightarrow \text{End}(P_R) \\ p \otimes f &\longrightarrow (p' \mapsto pf(p')), \end{aligned}$$

é um isomorfismo de R -bimódulos.

(ii) *Se P é R -módulo à esquerda projetivo e finitamente gerado, então*

$$\begin{aligned} \varphi' : P^* \otimes_R P &\longrightarrow \text{End}({}_R P) \\ f \otimes p &\longmapsto (p' \mapsto f(p')p), \end{aligned}$$

é um isomorfismo de R -bimódulos.

Demonstração. (i) Claramente φ está bem definida e é R -linear à esquerda. Por outro lado, dado $r \in R$, temos

$$\varphi(p \otimes f \cdot r)(p') = p(f \cdot r)(p') = pf(rp') = \varphi(p \otimes f)(rp') = (\varphi(p \otimes f) \cdot r)(p'),$$

para todo $p' \in P$. Logo, φ é R -linear à direita e portanto R -bilinear. Seja $\{p_i, f_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ uma base dual de P . Dado $f \in \text{End}(P_R)$, temos que $\sum_{i=1}^n f(p_i w) \otimes f_i \in P \otimes_R {}^*P$ e

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n f(p_i) \otimes f_i\right)(p') = \sum_{i=1}^n f(p_i) f_i(p') = \sum_{i=1}^n f(p_i f_i(p')) = f(p'),$$

para todo $p' \in P$. Logo, $\varphi\left(\sum_{i=1}^n f(p_i) \otimes f_i\right) = f$ e portanto φ é sobrejetora.

Vejamos que φ é injetora. Sejam $p'_l \in P$ e $f'_l \in {}^*P$, com $l = 1, 2, \dots, k$, tais que $\sum_{l=1}^k p'_l f'_l(p) = 0$, para todo $p \in P$. Então,

$$\sum_{l=1}^k p'_l \otimes f'_l = \sum_{l,i} p_i f_i(p'_l) \otimes f'_l = \sum_{l,i} p_i \otimes f_i(p'_l) \cdot f'_l = 0,$$

pois

$$\left(\sum_{l=1}^k f_i(p'_l) \cdot f'_l \right) (p) = \sum_{l=1}^k f_i(p'_l) f'_l(p) = \sum_{l=1}^k f_i(p'_l f'_l(p)) = 0,$$

para todo $p \in P$. Portanto, φ é um isomorfismo de R -bimódulos.

(ii) Análogo ao item (i).

■

Lema 2.1.7. *Sejam P e Q R -bimódulos. Se P e Q são R -módulos projetivos finitamente gerados à direita (à esquerda), então $P \otimes_R Q$ é um R -módulo projetivo finitamente gerado à direita (à esquerda).*

Demonstração. Sejam P e Q R -bimódulos que são projetivos e finitamente gerados como R -módulos à direita. Vamos considerar $\{f_i, p_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ uma base dual para P e $\{g_j, q_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ uma base dual para Q . Defina

$$\begin{aligned} F_{i,j} : P \otimes_R Q &\longrightarrow R \\ p \otimes q &\longmapsto g_j(f_i(p)q). \end{aligned}$$

Claramente $F_{i,j}$ está bem definida e é R -linear à direita, ou seja, $F_{i,j} \in {}^*(P \otimes_R Q)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n,m} (p_i \otimes q_j) F_{i,j}(p \otimes q) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} (p_i \otimes q_j) g_j(f_i(p)q) = \sum_{i,j=1}^{n,m} p_i \otimes q_j g_j(f_i(p)q) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \otimes f_i(p)q = \sum_{i=1}^n p_i f_i(p) \otimes q = p \otimes q, \end{aligned}$$

para todo $p \in P$ e $q \in Q$. Logo, $\{F_{i,j}, p_i \otimes q_j\}_{i,j}$ é uma base dual para $P \otimes_R Q$. Portanto, $P \otimes_R Q$ é um R -módulo à direita projetivo e finitamente gerado.

■

Lema 2.1.8. *Sejam P e Q R -bimódulos.*

(i) *Se P e Q são projetivos e finitamente gerados como R -módulos à direita, então*

$$\begin{aligned} \eta : {}^*P \otimes_R {}^*Q &\longrightarrow {}^*(Q \otimes_R P) \\ f \otimes g &\longmapsto (q \otimes p \mapsto f(g(q))p) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de R -bimódulos.

(ii) *Se P e Q são projetivos e finitamente gerados como R -módulos à esquerda, então*

$$\begin{aligned} \eta' : P^* \otimes_R Q^* &\longrightarrow (Q \otimes_R P)^* \\ f \otimes g &\longmapsto (q \otimes p \mapsto g(qf(p))) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de R -bimódulos.

Demonstração. (i) Vejamos primeiro que η é um morfismo de R -bimódulos bem definido. Dado $r \in R$, temos

$$\eta(f \otimes g)(q \otimes pr) = f(g(q)pr) = f(g(q)p)r = \eta(f \otimes g)(q \otimes p)r.$$

Ou seja, $\eta(f \otimes g) \in {}^*(Q \otimes_R P)$. Temos também

$$\eta(f \cdot r \otimes g)(q \otimes p) = (f \cdot r)(g(q)p) = f(rg(q)p) = \eta(f \otimes r \cdot g)(q \otimes p),$$

para todo $r \in R$, $p \in P$ e $q \in Q$. Logo, η é R -balanceada e portanto bem definida. Claramente, η é R -linear à esquerda. Por outro lado,

$$\eta(f \otimes g \cdot r)(q \otimes p) = f((g \cdot r)(q)p) = f(g(rq)p) = (\eta(f \otimes g) \cdot r)(q \otimes p),$$

para $r \in R$. Assim, η é R -linear à direita. Portanto, η é um morfismo de R -bimódulos bem definido.

Sejam $\{p_i, f_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ base dual para P e $\{q_j, g_j\}_{j=1,2,\dots,m}$ base dual de Q . Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} {}^*(Q \otimes_R P) &\longrightarrow {}^*P \otimes_R {}^*Q \\ F &\longmapsto \sum_{i,j} F(q_j \otimes p_i) \cdot f_i \otimes g_j \end{aligned}$$

é a inversa de η . De fato, dado $F \in {}^*(Q \otimes_R P)$, temos

$$\begin{aligned} \eta \left(\sum_{i,j} F(q_j \otimes p_i) \cdot f_i \otimes g_j \right) (q \otimes p) &= \sum_{i,j} F(q_j \otimes p_i) f_i(g_j(q)p) = \sum_{i,j} F(q_j \otimes p_i f_i(g_j(q)p)) \\ &= \sum_j F(q_j \otimes g_j(q)p) = \sum_j F(q_j g_j(q) \otimes p) = F(q \otimes p), \end{aligned}$$

para todo $p \in P$ e $q \in Q$.

Por outro lado, dados $f \in {}^*P$ e $g \in {}^*Q$, temos

$$\begin{aligned} f \otimes g &\longmapsto (q \otimes p \mapsto f(g(q)p)) \longmapsto \sum_{i,j} f(g(q_j)p_i) f_i \otimes g_j \\ &= \sum_{i,j} (f \cdot g(q_j))(p_i) f_i \otimes g_j = \sum_j f \cdot g(q_j) \otimes g_j \\ &= \sum_j f \otimes g(q_j) \cdot g_j = f \otimes g. \end{aligned}$$

Portanto, η é isomorfismo de R -bimódulos.

(ii) Análogo ao item (i). ■

Um R -módulo M à direita é dito plano se para qualquer sequência exata de R -módulos à esquerda

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

temos que a sequência

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

é exata. Em particular, se $f : N' \longrightarrow N$ é um isomorfismo de R -módulos à esquerda, então $M \otimes f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ também é isomorfismo de grupos abelianos. Analogamente definimos R -módulo à esquerda plano. ■

Proposição 2.1.9. *Todo módulo projetivo é plano.*

Demonstração. [21, Proposição 19.16]. ■

Os idempotentes centrais do anel R tem um papel importante nesse trabalho. Vamos destacar aqui um isomorfismo trivial que será usando no próximos Capítulos. Sejam e um idempotente central em R e M um R -bimódulo. Denotamos $eM = \{m \in M; em = m\}$. Como e é central em R , então eM é um R -subbimódulo de M . Além disso, temos o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} Re \otimes_R M &\longrightarrow eM \\ r \otimes m &\longmapsto rm. \end{aligned} \quad (2.3)$$

cujo o inverso é dado por

$$\begin{aligned} eM &\longrightarrow Re \otimes_R M \\ m &\longmapsto e \otimes m. \end{aligned}$$

Analogamente, $Me = \{m \in M; me = m\}$ é um R -subbimódulo de M e temos o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} M \otimes_R Re &\longrightarrow Me \\ m \otimes re &\longmapsto mre. \end{aligned}$$

Sejam M e N R -bimódulos, $F : M \longrightarrow N$ um isomorfismo de R -bimódulo e e um idempotente central em R . A restrição de F ao R -subbimódulo eM também é um isomorfismo de R -bimódulos entre eM e eN . Por abuso de notação, vamos denotar essa restrição também por F .

Vamos agora definir o grupo de Picard para um anel não comutativo. Essa definição é feita através de R -bimódulos inversíveis e pode ser encontrada em [23].

Definição 2.1.10. Um R -bimódulo P é dito ser inversível se existem um R -bimódulo Q e isomorfismos R -bilineares

$$Q \otimes_R P \xrightarrow{\tau} R \xleftarrow{\iota} P \otimes_R Q \quad (2.4)$$

O R -bimódulo Q é chamado de inverso de P .

A próxima proposição, que está feita em um contexto um pouco mais geral, mostra que podemos escolher os isomorfismos τ e ι acima de tal forma que $\iota \otimes P = P \otimes \tau$ e $\tau \otimes Q = Q \otimes \iota$, ou seja, de tal forma que $(R, R, P, Q, \iota, \tau)$ forme um contexto de Morita.

Proposição 2.1.11. Sejam R e S anéis, P um R - S -bimódulo e Q um S - R -bimódulo com

$$\iota : P \otimes_S Q \longrightarrow R \quad \text{e} \quad \tau : Q \otimes_R P \longrightarrow S$$

isomorfismos de R -bimódulos e S -bimódulos, respectivamente. Então, os funtores

$$- \otimes_R P : \text{mod} - R \longrightarrow \text{mod} - S$$

$$- \otimes_S Q : \text{mod} - S \longrightarrow \text{mod} - R$$

formam uma equivalência de categorias. Além disso, podemos escolher os isomorfismos ι e τ de tal forma que os diagramas abaixo sejam comutativos

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_S Q \otimes_R P & \xrightarrow{\iota \otimes P} & R \otimes_R P \\ \downarrow P \otimes \tau & & \downarrow \\ P \otimes_S S & \longrightarrow & P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q \otimes_R P \otimes_S Q & \xrightarrow{\tau \otimes Q} & S \otimes_S Q \\ \downarrow Q \otimes \iota & & \downarrow \\ Q \otimes_R R & \longrightarrow & Q \end{array} \quad (2.5)$$

Ou seja, tal que

$$\iota(p \otimes q)p' = p\tau(q \otimes p') \quad \text{e} \quad \tau(q \otimes p)q' = q\iota(p \otimes q'), \quad (2.6)$$

para todos $p, p' \in P$ e $q, q' \in Q$.

Demonstração. Sejam $M, M' \in \text{mod} - R$ e $\phi \in \text{Hom}_R(M, M')$. É fácil ver que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R P \otimes_S Q & \xrightarrow{M \otimes \mathfrak{l}} & M \\ \downarrow \phi \otimes P \otimes_S Q & & \downarrow \phi \\ M' \otimes_R P \otimes_S Q & \xrightarrow{M' \otimes \mathfrak{l}} & M' \end{array}$$

é comutativo. Logo, $- \otimes_R P \otimes_S Q \simeq \text{Id}_{\text{mod} - R}$. Analogamente, mostra-se que $- \otimes_S Q \otimes_R P \simeq \text{Id}_{\text{mod} - S}$. Portanto, temos uma equivalência de categorias.

Em particular, como $P \otimes_S Q \in \text{mod} - R$ e $Q \otimes_R P \in \text{mod} - S$ temos os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_S Q \otimes_R P \otimes_S Q & \xrightarrow{P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}} & P \otimes_S Q \\ \downarrow \mathfrak{l} \otimes_R P \otimes_S Q & & \downarrow \mathfrak{l} \\ R \otimes_R P \otimes_S Q & \xrightarrow{\mathfrak{l}} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R P & \xrightarrow{Q \otimes_R P \otimes_S \mathfrak{r}} & Q \otimes_R P \\ \downarrow \mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P & & \downarrow \mathfrak{r} \\ S \otimes_S Q \otimes_R P & \xrightarrow{\mathfrak{r}} & S \end{array}$$

Então,

$$P \otimes_S Q \otimes \mathfrak{l} = \mathfrak{l} \otimes_R P \otimes_S Q \text{ e } Q \otimes_R P \otimes_S \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P. \quad (2.7)$$

Segue que:

$$(P \otimes_S \mathfrak{r}) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P) = (\mathfrak{l} \otimes_R P) \circ (P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P), \quad (2.8)$$

$$(\mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P \otimes_S Q) = (Q \otimes_R \mathfrak{l}) \circ (\mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P \otimes_S Q). \quad (2.9)$$

De fato, vamos verificar que vale (2.8). Sejam $p, p', p'' \in P$ e $q, q' \in Q$. Então,

$$\begin{aligned} & (P \otimes_S \mathfrak{r}) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P)(p \otimes q \otimes p' \otimes q' \otimes p'') \\ \stackrel{(2.7)}{=} & (P \otimes_S \mathfrak{r}) \circ (\mathfrak{l} \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R P)(p \otimes q \otimes p' \otimes q' \otimes p'') \\ = & (P \otimes_S \mathfrak{r})(\mathfrak{l}(p \otimes q)p' \otimes q' \otimes p'') \\ = & \mathfrak{l}(p \otimes q)p' \mathfrak{r}(q' \otimes p'') \\ = & (\mathfrak{l} \otimes_R P)(p \otimes q \otimes p' \mathfrak{r}(q' \otimes p'')) \\ = & (\mathfrak{l} \otimes_R P) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R P \otimes_S \mathfrak{r})(p \otimes q \otimes p' \otimes q' \otimes p''). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que vale (2.9).

Considere

$$\tilde{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l} \circ (P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1}).$$

Vejamos que substituindo $\mathfrak{l}$ por $\tilde{\mathfrak{l}}$ os diagramas em (2.5) são comutativos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathfrak{l}} \otimes_R P &= (\mathfrak{l} \circ (P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1})) \otimes_R P \\
 &= (\mathfrak{l} \otimes_R P) \circ (P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1} \otimes_R P) \\
 &\stackrel{(2.8)}{=} (P \otimes_S \mathfrak{r}) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1} \otimes_R P) \\
 &= P \otimes_S \mathfrak{r}.
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 Q \otimes_R \tilde{\mathfrak{l}} &= Q \otimes_R (\mathfrak{l} \circ (P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1})) \\
 &= (Q \otimes_R \mathfrak{l}) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S \mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1}) \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} (Q \otimes_R \mathfrak{l}) \circ (\mathfrak{r} \otimes_S Q \otimes_R P \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1}) \\
 &\stackrel{(2.9)}{=} (\mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1}) \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} (\mathfrak{r} \otimes_S Q) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S Q \otimes_R \mathfrak{l}^{-1}) \\
 &= \mathfrak{r} \otimes_S Q.
 \end{aligned}$$

Portanto, os diagramas (2.5) são comutativos.

Analogamente, considerando $\tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} \circ (Q \otimes_R \mathfrak{l} \otimes_R P) \circ (Q \otimes_R P \otimes_S \mathfrak{r}^{-1})$ temos que

$$\mathfrak{l} \otimes_R P = P \otimes_S \tilde{\mathfrak{r}} \quad \text{e} \quad Q \otimes_R \mathfrak{l} = \tilde{\mathfrak{r}} \otimes_S Q.$$

■

Denotamos por $\mathbf{Pic}(R)$ o conjunto das classes de isomorfismo dos R -bimódulos inversíveis. Então, $\mathbf{Pic}(R)$ é um grupo, com a operação induzida pelo produto tensorial sobre R e elemento neutro $[R]$, chamado *grupo de Picard do anel R* . Se R é uma K -álgebra, onde K é um anel comutativo, então denotamos por $\mathbf{Pic}_K(R)$ o subgrupo formado pelos elementos de $\mathbf{Pic}(R)$ que são centrais como K -módulos, ou seja,

$$\mathbf{Pic}_K(R) = \{[P] \in \mathbf{Pic}(R); kp = pk \text{ para todo } k \in K \text{ e } p \in P\}.$$

O próximo resultado, que é citado em [23], caracteriza os elementos do grupo de Picard.

Proposição 2.1.12. *Seja P um R -bimódulo. São equivalentes:*

- (i) P é inversível.
- (ii) P é um R -módulo à direita projetivo, finitamente gerado e gerador e $R \simeq \text{End}(P_R)$ é um isomorfismo de anéis via a ação à esquerda de R sobre P .
- (iii) P é um R -módulo à esquerda projetivo, finitamente gerado e gerador e $R \simeq \text{End}({}_R P)$ é um isomorfismo de anéis via a ação à direita de R sobre P .

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja Q o inverso de P e

$$Q \otimes_R P \xrightarrow{\mathfrak{r}} R \xleftarrow{\mathfrak{l}} P \otimes_R Q$$

Como $\mathfrak{l}$ é um isomorfismo, então existem $p_i \in P$ e $q_i \in Q$, com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que

$$\mathfrak{l} \left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes q_i \right) = 1. \quad (2.10)$$

Defina

$$\begin{aligned} f_i : P &\longrightarrow R \\ p &\longmapsto \mathfrak{r}(q_i \otimes p) \end{aligned} \in \text{Hom}(P_R, R_R),$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, para todo $p \in P$ temos

$$\sum_{i=1}^n p_i f_i(p) = \sum_{i=1}^n p_i \mathfrak{r}(q_i \otimes p) \stackrel{(2.6)}{=} \sum_{i=1}^n \mathfrak{l}(p_i \otimes q_i) p \stackrel{(2.10)}{=} 1p = p.$$

Logo, P_R é um R -módulo projetivo e finitamente gerado.

Por $\mathfrak{r}$ ser isomorfismo existem $q'_j \in Q$ e $p'_j \in P$, com $j = 1, 2, \dots, m$, tais que

$$\mathfrak{r} \left(\sum_{j=1}^m q'_j \otimes p'_j \right) = 1. \quad (2.11)$$

Defina $f'_j \in \text{Hom}(P_R, R_R)$ por

$$\begin{aligned} f'_j : P &\longrightarrow R \\ p &\longmapsto \mathfrak{r}(q'_j \otimes p) \end{aligned} \in \text{Hom}(P_R, R_R).$$

Então,

$$\sum_{j=1}^m f'_j(p'_j) = \sum_{j=1}^m \mathfrak{r}(q'_j \otimes p'_j) \stackrel{(2.11)}{=} 1.$$

Portanto, P_R é um gerador.

Considere agora

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \text{End}(P_R) \\ r &\longmapsto (p \mapsto rp). \end{aligned}$$

Claramente φ está bem definida. Seja $r \in \ker(\varphi)$, então $rp = 0$, para todo $p \in P$. Temos

$$r = r1 \stackrel{(2.10)}{=} r \mathfrak{l} \left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes q_i \right) = \mathfrak{l} \left(\sum_{i=1}^n rp_i \otimes q_i \right) = 0.$$

Logo, φ é injetora. Considere agora $f \in \text{End}(P_R)$, então $r = \sum_{i=1}^n \mathfrak{l}(f(p_i) \otimes q_i) \in R$ e temos

$$\begin{aligned} \varphi(r)(p) &= \sum_{i=1}^n \mathfrak{l}(f(p_i) \otimes q_i) p \stackrel{(2.6)}{=} \sum_{i=1}^n f(p_i) \mathfrak{r}(q_i \otimes p) = \sum_{i=1}^n f(p_i \mathfrak{r}(q_i \otimes p)) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{l}(p_i \otimes q_i) p) \stackrel{(2.10)}{=} f(1p) = f(p), \end{aligned}$$

para todo $p \in P$. Logo, $\varphi(r) = f$ e portanto φ é um isomorfismo.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Considere o R -bimódulo $*P = \text{Hom}(P_R, R_R)$. Como P_R é projetivo e finitamente gerado, segue do Lema 2.1.6 que $P \otimes_R *P \simeq R$ como R -bimódulos. Basta então construir um isomorfismo de $*P \otimes_R P \simeq R$.

Por P_R ser um gerador, existem $f_i \in {}^*P$ e $p_i \in P$, com $i = 1, 2, \dots, n$ tais que

$$\sum_{i=1}^n f_i(p_i) = 1. \quad (2.12)$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} : {}^*P \otimes_R P &\longrightarrow R \\ f \otimes p &\longmapsto f(p). \end{aligned}$$

está bem definida e é R -bilinear. De fato, dado $r \in R$ temos que

$$\mathfrak{r}(f \cdot r \otimes p) = (f \cdot r)(p) = f(rp) = \mathfrak{r}(f \otimes rp),$$

para todo $r \in R, p \in P$ e $f \in {}^*P$. Logo, $\mathfrak{r}$ está bem definida. Agora, para todo $r \in R, p \in P$ e $f \in {}^*P$ temos

$$\mathfrak{r}(r \cdot f \otimes p) = (r \cdot f)(p) = rf(p) = r\mathfrak{r}(f \otimes p).$$

$$\mathfrak{r}(f \otimes pr) = f(pr) = f(p)r = \mathfrak{r}(f \otimes p)r.$$

Portanto, $\mathfrak{r}$ é R -bilinear.

Dado $r \in R$, temos

$$\mathfrak{r}\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes p_i r\right) = \sum_{i=1}^n f_i(p_i r) = \sum_{i=1}^n f_i(p_i) r \stackrel{(2.12)}{=} 1r = r.$$

Logo, $\mathfrak{r}$ é sobrejetora. Vejamos que $\mathfrak{r}$ é injetora. Sejam $p'_l \in P$ e $f'_l \in {}^*P$, com $l = 1, 2, \dots, k$, tais que $\sum_{l=1}^k f'_l(p'_l) = 0$. Defina $\theta_{l,i} : P_R \longrightarrow P_R \in \text{End}(P_R)$ por $\theta_{l,i}(p) = p'_l f_i(p)$, para todo $p \in P$, com $i = 1, 2, \dots, n$ e $l = 1, 2, \dots, k$. Como $\text{End}(P_R) \simeq R$, via a ação à esquerda de R sobre P , então existe $a_{l,i} \in R$ tal que $\theta_{l,i}(p) = a_{l,i}p$, para todo $p \in P$. Então, temos

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k f'_l \otimes p'_l &= \sum_{l=1}^k f'_l \otimes p'_l 1 = \sum_{l,i} f'_l \otimes p'_l f_i(p_i) = \sum_{l,i} f'_l \otimes \theta_{l,i}(p_i) \\ &= \sum_{l,i} f'_l \otimes a_{l,i} p_i = \sum_{l,i} f'_l \cdot a_{l,i} \otimes p_i = 0, \end{aligned}$$

pois, para todo $p \in P$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=1}^k f'_l \cdot a_{l,i}\right)(p) &= \sum_{l=1}^k f'_l(a_{l,i}p) = \sum_{l=1}^k f'_l(\theta_{l,i}(p)) \\ &= \sum_{l=1}^k f'_l(p'_l f_i(p)) = \sum_{l=1}^k f'_l(p'_l) f_i(p) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{r}$ é um isomorfismo de R -bimódulos.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) é completamente análogo. ■

Para referência futura, vamos destacar os isomorfismos construídos na Proposição 2.1.12:

Observação 2.1.13. *Segue da prova da Proposição 2.1.12 que se $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, então existem isomorfismos de R -bimódulos*

$$\begin{array}{ccc} {}^*P \otimes_R P & \xrightarrow{\tau} & R \\ f \otimes p & \mapsto & f(p) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} P \otimes_R {}^*P & \xrightarrow{\iota} & \text{End}(P_R) \simeq R \\ p \otimes f & \mapsto & (p' \mapsto pf(p')) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_R P^* & \xrightarrow{\iota'} & R \\ p \otimes f & \mapsto & f(p) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} P^* \otimes_R P & \xrightarrow{\tau'} & \text{End}({}_R P) \simeq R \\ f \otimes p & \mapsto & (p' \mapsto f(p')p) \end{array}.$$

Observação 2.1.14. Se $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, por [24, Teorema 1.1], ${}^*P \simeq P^*$ como R -bimódulos. Pela demonstração da Proposição 2.1.12, temos que $[{}^*P] = [P^*] = [P]^{-1}$ em $\mathbf{Pic}(R)$. Em geral, vamos denotar $[P]^{-1} = [P^{-1}]$ e vamos considerar os isomorfismos $P \otimes_R P^{-1} \xrightarrow{\iota} R \xleftarrow{\tau} P^{-1} \otimes_R P$ satisfazendo as igualdades em (2.6).

Observação 2.1.15. Se R é comutativo e $[P] \in \mathbf{Pic}_R(R)$, então P é um R -módulo projetivo, finitamente gerado e fiel. Por [19, Lema I.5.1] a existência do isomorfismo $R \simeq \text{End}(P)$ é equivalente à $\text{rank}_R(P) = 1$. Portanto,

$$\mathbf{Pic}_R(R) = \{[P]; P \text{ é } R\text{-módulo (central) projetivo e finitamente gerado com posto } 1\}.$$

É bem conhecido (ver, por exemplo, [20, página 35]) que para uma extensão de anéis comutativos $R \subseteq S$, se $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, então $[P \otimes_R S] \in \mathbf{Pic}(S)$. Nos próximos resultados vamos mostrar uma condição para que o mesmo também seja válido para extensão de anéis não comutativos. O próximo Lema foi apresentado em [25] (ver Equações 5.1 e 5.2) e dá uma condição para construir estrutura de S -bimódulo a partir de um R -bimódulo P e um S -bimódulo M .

Lema 2.1.16. Sejam $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade e P um R -bimódulo. Denote por μ a multiplicação em S .

(i) Seja $\rho : S \otimes_R P \longrightarrow P \otimes_R S$ uma aplicação R -bilinear tal que

$$(P \otimes \mu) \circ (\rho \otimes S) \circ (S \otimes \rho) = \rho \circ (\mu \otimes P) \quad (2.13)$$

$$\rho(1 \otimes p) = p \otimes 1, \quad \text{para todo } p \in P, \quad (2.14)$$

Se M é um S -módulo unital à esquerda, então $P \otimes_R M$ tem uma estrutura de S -módulo à esquerda dada por

$$s * (p \otimes m) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i m,$$

onde $\rho(s \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i$. Além disso, se M é um S -bimódulo unital, então $P \otimes_R M$ é um S -bimódulo unital, onde a estrutura de S -módulo à direita é dada pela estrutura de M .

(ii) Seja $\rho' : P \otimes_R S \longrightarrow S \otimes_R P$ uma aplicação R -bilinear tal que

$$(\mu \otimes P) \circ (S \otimes \rho') \circ (\rho' \otimes S) = \rho' \circ (P \otimes \mu) \quad (2.15)$$

$$\rho(p \otimes 1) = 1 \otimes p, \quad \text{para todo } p \in P, \quad (2.16)$$

Se M é um S -módulo unital à direita, então $M \otimes_R RP$ tem uma estrutura de S -módulo à direita dada por

$$(m \otimes p) * s = \sum_{i=1}^n m s_i \otimes p_i,$$

onde $\rho'(p \otimes s) = \sum_{i=1}^n s_i \otimes p_i$. Além disso, se M é um S -bimódulo unital, então $M \otimes_R P$ é um S -bimódulo unital, onde a estrutura de S -módulo à direita é dada pela estrutura de M .

Demonstração. (i) Dados $p \in P$ e $s, s' \in S$ denote

$$\rho(s \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i \quad \text{e} \quad \rho(s' \otimes p_i) = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \otimes s'_j.$$

Então,

$$s' * (s * (p \otimes m)) = s' * \left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i m \right) = \sum_{i,j} p_{i,j} \otimes s'_j (s_i m).$$

Por (2.13) temos

$$\begin{aligned} \rho(s' s \otimes p) &= \rho \circ (\mu \otimes P)(s' \otimes s \otimes p) \\ &= (P \otimes \mu) \circ (\rho \otimes S) \circ (S \otimes \rho)(s' \otimes s \otimes p) \\ &= \sum_{i=1}^n (P \otimes \mu) \circ (\rho \otimes S)(s' \otimes p_i \otimes s_i) \\ &= \sum_{i,j} (P \otimes \mu)(p_{i,j} \otimes s'_j \otimes s_i) \\ &= \sum_{i,j} p_{i,j} \otimes s'_j s_i. \end{aligned}$$

Então,

$$(s' s) * (p \otimes m) = \sum_{i,j} p_{i,j} \otimes (s'_j s_i) m = \sum_{i,j} p_{i,j} \otimes s'_j (s_i m) = s' * (s * (p \otimes m)).$$

Além disso, por (2.14) temos

$$1 * (p \otimes m) = p \otimes 1m = p \otimes m.$$

Logo, $P \otimes_R M$ é um S -módulo à esquerda.

Suponha que M seja um S -bimódulo e considere em $P \otimes_R M$ a ação à direita induzida pela de M , ou seja, $(p \otimes m) * s = p \otimes ms$, para todo $m \in M, p \in P$ e $s \in S$. Assim, dados $s, s' \in S, p \in P$ e $m \in M$, denote $\rho(s \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i$, então

$$\begin{aligned} (s * (p \otimes m)) * s' &= \left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i m \right) * s' = \sum_{i=1}^n p_i \otimes (s_i m) s' \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i (ms') = s * (p \otimes ms') \\ &= s * ((p \otimes m) * s'). \end{aligned}$$

Portanto, $P \otimes_R M$ é um S -bimódulo unital.

(ii) Análogo ao item (i). ■

Exemplo 2.1.17. *Seja P é um $\mathcal{Z}$ -bimódulo central. Como R é um $\mathcal{Z}$ -bimódulo central, então existe um isomorfismo de $\mathcal{Z}$ -bimódulos $\rho : R \otimes_{\mathcal{Z}} P \longrightarrow P \otimes_{\mathcal{Z}} R$ definido por $\rho(r \otimes p) = p \otimes r$. Vejamos que ρ satisfaz as condições do Lema 2.1.16. Sejam $r, r' \in R$ e $p \in P$, então:*

$$\begin{aligned} (P \otimes m) \circ (\rho \otimes R) \circ (R \otimes \rho)(r \otimes r' \otimes p) &= (P \otimes m) \circ (\rho \otimes R)(r \otimes p \otimes r') \\ &= (P \otimes m)(p \otimes r \otimes r') \\ &= p \otimes rr' \\ &= \rho(rr' \otimes p) \\ &= \rho \circ (m \otimes P)(r \otimes r' \otimes p). \end{aligned}$$

Logo, ρ satisfaz (2.13). A condições (2.14) segue diretamente da definição de ρ . Pelo Lema 2.1.16, para qualquer R -bimódulo M , o produto tensorial $P \otimes_{\mathcal{Z}} M$ tem estrutura de R -bimódulo definida por

$$r_1 * (p \otimes m) * r_2 = p \otimes r_1 m r_2,$$

para todo $p \in P, m \in M$ e $r_1, r_2 \in R$.

Lema 2.1.18. *Sejam $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade, P um R -bimódulo unital e $\rho : S \otimes_R P \rightarrow P \otimes_R S$ um morfismo de R -bimódulos que satisfaz as condições (2.13) e (2.14). Seja M um S -bimódulo, então existe um isomorfismo de S -bimódulos*

$$\begin{aligned} \eta : (P \otimes_R S) \otimes_S M &\longrightarrow P \otimes_R M \\ (p \otimes_R s) \otimes_S m &\longmapsto p \otimes_R sm, \end{aligned}$$

onde $P \otimes_R S$ e $P \otimes_R M$ são S -bimódulos com as ações dados no Lema 2.1.16.

Demonstração. Claramente η está bem definida e é S -linear à direita. Dados $s, s' \in S, p \in P$ e $m \in M$, denote $\rho(s' \otimes_R p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes_R s'_i$. então,

$$\begin{aligned} \eta(s' * ((p \otimes_R s) \otimes_S m)) &= \eta\left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes_R s'_i s \otimes_S m\right) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes_R (s'_i s) m \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \otimes_R s'_i (sm) = s' * (p \otimes_R sm) \\ &= s' \eta((p \otimes_R s) \otimes_S m). \end{aligned}$$

Logo, η é S -bilinear. Sua inversa é dada por:

$$\begin{aligned} \eta^{-1} : P \otimes_R M &\longrightarrow (P \otimes_R S) \otimes_S M \\ p \otimes_R m &\longmapsto p \otimes_R 1 \otimes_S m. \end{aligned}$$

De fato, sejam $p \in P, m \in M$ e $s \in S$, então

$$\eta^{-1}(\eta(p \otimes_R s \otimes_S m)) = \eta^{-1}(p \otimes_R sm) = p \otimes_R 1 \otimes_S sm = p \otimes_R s \otimes_S m.$$

Por outro lado,

$$\eta(\eta^{-1}(p \otimes_R m)) = \eta(p \otimes_R 1 \otimes_S m) = p \otimes_R 1m = p \otimes_R m.$$

Portanto, η é isomorfismo de S -bimódulos. ■

Lema 2.1.19. *Sejam $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade, $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$ e $\rho : S \otimes_R P \rightarrow P \otimes_R S$ um isomorfismo de R -bimódulos tal que ρ satisfaz as condições do Lema 2.1.16. Denote $[P^{-1}]$ o inverso de $[P]$ em $\mathbf{Pic}(R)$ e $P \otimes_R P^{-1} \xrightarrow{\iota} R \xleftarrow{\tau} P^{-1} \otimes_R P$ isomorfismos de R -bimódulos.*

(i) *Considere o isomorfismo de R -bimódulos $\bar{\rho} : S \otimes_R P^{-1} \rightarrow P^{-1} \otimes_R S$ induzido por $\bar{\rho} = P^{-1} \otimes \rho^{-1} \otimes P^{-1}$, ou seja,*

$$\begin{array}{ccccc} S \otimes_R P^{-1} & \longrightarrow & R \otimes_R S \otimes_R P^{-1} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_R P \otimes_R S \otimes_R P^{-1} \\ & \searrow & & & \downarrow P^{-1} \otimes \rho^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & & & P^{-1} \otimes_R S \otimes_R P \otimes_R P^{-1} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & P^{-1} \otimes_R S \\ & \searrow \bar{\rho} & & & \nearrow \end{array}$$

Suponha que $\bar{\rho}$ satisfaz as condições do Lema 2.1.16 e considere $P^{-1} \otimes_R S$ com a estrutura de S -bimódulo definida por $\bar{\rho}$ como no Lema 2.1.16. Seja $\Psi : P \otimes_R (P^{-1} \otimes_R S) \rightarrow S$ o isomorfismo definido por

$$\Psi : P \otimes_R (P^{-1} \otimes_R S) \xrightarrow{P \otimes \bar{\rho}^{-1}} P \otimes_R (S \otimes_R P^{-1}) \xrightarrow{\rho^{-1} \otimes P^{-1}} S \otimes_R P \otimes P^{-1} \xrightarrow{S \otimes \mathfrak{l}} S,$$

ou seja, $\Psi = (S \otimes \mathfrak{l}) \circ (\rho^{-1} \otimes P^{-1}) \circ (P \otimes \bar{\rho}^{-1})$, então

$$\Psi(p \otimes \bar{p} \otimes s) = \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p})s,$$

para todo $s \in S$, $p \in P$ e $\bar{p} \in P^{-1}$.

(ii) Sejam $s \in S$, $p \in P$ e $\bar{p} \in P^{-1}$. Considere $\sum_{k=1}^l \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$ e denote $\rho(s \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i$ e

$$\rho^{-1}(p_k \otimes s_i) = \sum_{j=1}^m s_{i,j} \otimes \bar{p}_{k,j}. \text{ Então,}$$

$$s\mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) = \sum_{i,j,k} \mathfrak{l}(p_i \otimes \bar{p}_k) s_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}). \quad (2.17)$$

(iii) Ψ é isomorfismo de S -bimódulos.

(iv) $[P \otimes_R S] \in \mathbf{Pic}(S)$.

Demonstração. Dados $s \in S$ e $\bar{p} \in P^{-1}$. Considere $p_l \in P$ e $\bar{p}_l \in P^{-1}$, com $l = 1, 2, \dots, n$, tais que $\sum_{l=1}^n \mathfrak{r}(\bar{p}_l \otimes p_l) = 1$. Denotando $\rho^{-1}(p_l \otimes s) = \sum_{i=1}^m s_i \otimes p_{l,i}$, temos

$$\bar{\rho}(s \otimes \bar{p}) = \sum_{l,i} \bar{p}_l \otimes s_i \mathfrak{l}(p_{l,i} \otimes \bar{p}).$$

Sua inversa é dada por

$$\bar{\rho}^{-1}(\bar{p} \otimes s) = \sum_{k,j} \mathfrak{r}(\bar{p} \otimes p_{k,j}) s_j \otimes \bar{p}_k,$$

onde $\sum_{k=1}^l \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$ e $\rho(s \otimes p_k) = \sum_{j=1}^m p_{k,j} \otimes s_j$.

(i) Sejam $s \in S$, $p \in P$ e $\bar{p} \in P^{-1}$. Considere $\sum_{k=1}^n \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$ e denote $\rho(s \otimes p_k) = \sum_{j=1}^m p_{k,j} \otimes s_j$.

Então,

$$\begin{aligned}
p \otimes \bar{p} \otimes s &\xrightarrow{P \otimes \bar{p}^{-1}} \sum_{k,j} p \otimes \mathfrak{r}(\bar{p} \otimes p_{k,j}) s_j \otimes \bar{p}_k \\
&\xrightarrow{\rho^{-1} \otimes P^{-1}} \sum_{k,j} \rho^{-1}(p \mathfrak{r}(\bar{p} \otimes p_{k,j}) \otimes s_j) \otimes \bar{p}_k \\
&= \sum_{k,j} \rho^{-1}(\mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) p_{k,j} \otimes s_j) \otimes \bar{p}_k \\
&= \sum_{k,j} \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) \rho^{-1}(p_{k,j} \otimes s_j) \otimes \bar{p}_k \\
&= \sum_k \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) s \otimes p_k \otimes \bar{p}_k \\
&\xrightarrow{S \otimes \mathfrak{l}} \sum_k \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) s \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) \\
&= \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) s.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Psi(p \otimes \bar{p} \otimes s) = (S \otimes \mathfrak{l}) \circ (\rho^{-1} \otimes P^{-1}) \circ (P \otimes \bar{p}^{-1})(p \otimes \bar{p} \otimes s) = \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) s.$$

(ii) Vamos calcular $\Psi^{-1}(s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}))$: observe que $\Psi^{-1} = (P \otimes \bar{p}) \circ (\rho \otimes P^{-1}) \circ (S \otimes \mathfrak{l}^{-1})$. Então, se $\sum_{k=1}^n \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$, temos

$$\begin{aligned}
s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) &\xrightarrow{S \otimes \mathfrak{l}^{-1}} \sum_{k=1}^l s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) \otimes p_k \otimes \bar{p}_k = \sum_{k=1}^l s \otimes \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) p_k \otimes \bar{p}_k \\
&= \sum_{k=1}^l s \otimes p \mathfrak{r}(\bar{p} \otimes p_k) \otimes \bar{p}_k = \sum_{k=1}^l s \otimes p \otimes \mathfrak{r}(\bar{p} \otimes p_k) \bar{p}_k \\
&= \sum_{k=1}^l s \otimes p \otimes \bar{p} \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = s \otimes p \otimes \bar{p} \\
&\xrightarrow{\rho \otimes P^{-1}} \sum_{i=1}^n p_i \otimes s_i \otimes \bar{p} \xrightarrow{P \otimes \bar{p}} \sum_{i,j,k} p_i \otimes \bar{p}_k \otimes s_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}).
\end{aligned}$$

Ou seja, $\Psi^{-1}(s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p})) = \sum_{i,j,k} p_i \otimes \bar{p}_k \otimes s_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p})$. Portanto,

$$\begin{aligned}
s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) &= \Psi \Psi^{-1}(s \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p})) = \Psi \left(\sum_{i,j,k} p_i \otimes \bar{p}_k \otimes s_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}) \right) \\
&= \sum_{i,j,k} \mathfrak{l}(p_i \otimes \bar{p}_k) s_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}).
\end{aligned}$$

(iii) Basta verificar que Ψ é S -linear à esquerda. Sejam $s, s' \in S$, $p \in P$ e $\bar{p} \in P^{-1}$. Sejam $p_k \in P$ e $\bar{p}_k \in P^{-1}$, tais que $\sum_{k=1}^l \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$ e denote $\rho(s' \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes s'_i$ e $\rho^{-1}(p_k \otimes s'_i) = \sum_{j=1}^l s'_{i,j} \otimes p_{k,j}$.

Então, $\bar{\rho}(s'_i \otimes \bar{p}) = \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes s'_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p})$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \Psi(s' * (p \otimes (\bar{p} \otimes s))) &= \Psi\left(\sum_{i=1}^n p_i \otimes s'_i * (\bar{p} \otimes s)\right) \\
 &= \Psi\left(\sum_{i,j,k} p_i \otimes \bar{p}_k \otimes s'_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}) s\right) \\
 &= \sum_{i,j,k} \mathfrak{l}(p_i \otimes \bar{p}_k) s'_{i,j} \mathfrak{l}(p_{k,j} \otimes \bar{p}) s \\
 &\stackrel{(2.17)}{=} s' \mathfrak{l}(p \otimes \bar{p}) s = s' \Psi(p \otimes \bar{p} \otimes s).
 \end{aligned}$$

(iv) Pelo Lema 2.1.18 e pelo item (iii) temos os isomorfismos de S -bimódulos

$$(P \otimes_R S) \otimes_S (P^{-1} \otimes_R S) \simeq P \otimes_R (P^{-1} \otimes_R S) \simeq S.$$

Analogamente, $(P^{-1} \otimes_R S) \otimes_S (P \otimes_R S) \simeq S$ como S -bimódulos. Portanto, $[P \otimes_R S] \in \mathbf{Pic}(S)$. ■

2.2 O semigrupo de Picard generalizado

Seja R um anel com unidade. Dizemos que um R -bimódulo P é *parcialmente inversível* se

(i) P é um R -módulo projetivo e finitamente gerado como módulo à direita e à esquerda;

(ii) As aplicações

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \text{End}(P_R) \\ r & \longmapsto & (p \mapsto rp) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \text{End}({}_R P) \\ r & \longmapsto & (p \mapsto pr) \end{array}$$

são sobrejetoras.

Vamos denotar por $\mathbf{PicS}(R)$ o conjunto das classes de isomorfismo de R -bimódulos parcialmente inversíveis, ou seja,

$$\mathbf{PicS}(R) = \{[P], P \text{ é um } R\text{-bimódulo parcialmente inversível}\}.$$

Proposição 2.2.1. $\mathbf{PicS}(R)$ é um monoide com o produto $[P][Q] = [P \otimes_R Q]$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.7, temos que $P \otimes_R Q$ é projetivo e finitamente gerado com R -módulo à direita e à esquerda.

Considere ψ dado pela cadeia de morfismos de R -bimódulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 R & \longrightarrow & \text{End}(P_R) & \xrightarrow{\varphi_P^{-1}} & P \otimes_R {}^*P & \longrightarrow & P \otimes_R R \otimes_R {}^*P \longrightarrow P \otimes_R \text{End}(Q_R) \otimes_R {}^*P \\
 & \searrow & & & & & \downarrow P \otimes \varphi_Q^{-1} \otimes {}^*P \\
 & & & & & & P \otimes_R Q \otimes_R {}^*Q \otimes_R {}^*P \\
 & & & & & & \downarrow P \otimes Q \otimes \eta \\
 & & & & & & P \otimes_R Q \otimes_R {}^*(P \otimes Q) \\
 & & & & & & \downarrow \varphi_{P \otimes Q} \\
 & & & & & & \text{End}(P \otimes_R Q)
 \end{array}$$

ψ

onde o φ_P, φ_Q e $\varphi_{P \otimes Q}$ são isomorfismos como no Lema 2.1.6 e η é isomorfismo dado no Lema 2.1.8. Então ψ é sobrejetor e é dado por

$$\psi(r)(p \otimes q) = rp \otimes q.$$

De fato, sejam $\{p_i, f_i\}_{i=1, \dots, n}$ base dual de P como R -módulo à direita e $\{q_j, g_j\}_{j=1, \dots, m}$ base dual de Q como R -módulo à direita. Dado $r \in R$, temos:

$$\begin{aligned}
 r & \longmapsto (p \mapsto rp) \longmapsto \sum_{i=1}^n rp_i \otimes f_i \longmapsto \sum_{i=1}^n rp_i \otimes 1 \otimes f_i \\
 & \longmapsto \sum_{i=1}^n rp_i \otimes Id_Q \otimes f_i \longmapsto \sum_{i,j} rp_i \otimes q_j \otimes g_j \otimes f_i \\
 & \longmapsto \sum_{i,j} rp_i \otimes q_j \otimes ((p \otimes q) \mapsto g_j(f_i(p)q)) \\
 & \longmapsto \left[p \otimes q \mapsto \sum_{i,j} rp_i \otimes q_j g_j(f_i(p)q) \right] \\
 & = \left[p \otimes q \mapsto \sum_{i=1}^n rp_i \otimes f_i(p)q \right] \\
 & = \left[p \otimes q \mapsto \sum_{i=1}^n rp_i f_i(p) \otimes q \right] \\
 & = [p \otimes q \mapsto rp \otimes q].
 \end{aligned}$$

Analogamente, $\psi' : R \longrightarrow \text{End}({}_R P \otimes Q)$ definida por

$$\psi'(r)(p \otimes q) = p \otimes qr.$$

é sobrejetor. Logo, $[P \otimes_R Q] \in \mathbf{PicS}(R)$. Claramente, $[R]$ é o elemento neutro de $\mathbf{PicS}(R)$. Portanto, $\mathbf{PicS}(R)$ é um monoide. ■

Observação 2.2.2. $\mathcal{U}(\mathbf{PicS}(R)) = \mathbf{Pic}(R)$.

Se R é uma K -álgebra, onde K é um anel comutativo, denotamos $\mathbf{PicS}_K(R)$ o subsemigrupo formado pelos $[P] \in \mathbf{PicS}(R)$ que são centrais como K -bimódulos.

Se R é comutativo, então $\mathbf{PicS}(R) = \mathbf{PicS}_R(R)$ consiste das classes de isomorfismo de R -bimódulos centrais projetivos, finitamente gerados e de posto menor ou igual a 1 (ver [16, Proposição 3.6]). Além disso, por [16, Proposição 3.8], temos que $\mathbf{PicS}(R)$ é um semigrupo inverso onde $[P]^* = [P^*]$, para todo $[P] \in \mathbf{PicS}(R)$.

2.3 R -bimódulos similares

Sejam M e N R -bimódulos. Vamos denotar $M|N$ se M é isomorfo, como R -bimódulo, a um somando direto de uma potência de N , ou seja, se existe um R -bimódulo M' tal que $N^{(n)} \simeq M \oplus M'$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Essa relação satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) **Reflexiva:** $M|M$.
- (ii) **Transitiva:** Se $M|N$ e $N|T$, então $M|T$.
- (iii) **Compatibilidade com o produto tensorial:** Se $M|N$ e Q é um R -bimódulo, então

$$(M \otimes_R Q)|(N \otimes_R Q) \text{ e } (Q \otimes_R M)|(Q \otimes_R N).$$

De fato, se $M|N$ então $N^{(n)} \simeq M \oplus T$, para algum R -bimódulo T e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} (N \otimes_R Q)^{(n)} &\simeq (N \otimes_R Q) \oplus (N \otimes_R Q) \oplus \cdots \oplus (N \otimes_R Q) \\ &\simeq (N \oplus N \oplus \cdots \oplus N) \otimes_R Q \simeq N^{(n)} \otimes_R Q \\ &\simeq (M \oplus T) \otimes_R Q \simeq (M \otimes_R Q) \oplus (T \otimes_R Q). \end{aligned}$$

Logo, $(M \otimes_R Q)|(N \otimes_R Q)$. Analogamente, temos que $(Q \otimes_R M)|(Q \otimes_R N)$.

Observação 2.3.1. *Sejam M e N dois R -bimódulos. Então $M|N$ se, e somente se, existem morfismos de R -bimódulos $f_i : M \rightarrow N$ e $g_i : N \rightarrow M$, com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\sum_{i=1}^n g_i \circ f_i = Id_M$. De fato, se $M|N$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e um R -bimódulo T tal que $N^{(n)} = M \oplus T$. Considere*

$$f_i : M \xrightarrow{\iota} N^{(n)} \xrightarrow{\pi_i} N \quad \text{e} \quad g_i : N \xrightarrow{\iota_i} N^{(n)} \xrightarrow{\pi} M,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, onde π_i e ι_i são as projeções e injeções canônicas. Então, f_i e g_i são R -bilineares e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g_i \circ f_i &= \sum_{i=1}^n (\pi \circ \iota_i \circ \pi_i \circ \iota) = \pi \circ \sum_{i=1}^n (\iota_i \circ \pi_i) \circ \iota \\ &= \pi \circ id_{N^{(n)}} \circ \iota = Id_M. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que existem $f_i : M \rightarrow N$ e $g_i : N \rightarrow M$, com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\sum_{i=1}^n g_i \circ f_i = Id_M$. Considere a sequência exata

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N^{(n)} \longrightarrow \frac{N^{(n)}}{Im(f)} \longrightarrow 1, \quad (2.18)$$

onde $f : M \longrightarrow N^{(n)}$ é definida por $f(m) = (f_1(m), \dots, f_n(m))$. Considerando $g : N^{(n)} \longrightarrow M$ definida por

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i).$$

Assim, temos

$$(g \circ f)(m) = g(f_1(m), \dots, f_n(m)) = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(m)) = m.$$

Logo, a sequência (2.18) cinde e portanto M é um somando direto de $N^{(n)}$.

Exemplo 2.3.2. (i) Se $M_R | R_R$ (como R -módulos à direita), então M é somando direto de $R^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, pela Proposição 2.1.2, temos que M é um R -módulo projetivo e finitamente gerado à direita.

(ii) Se $R_R | M_R$, então M_R é um gerador da categoria dos R -módulos à direita.

Observação 2.3.3. Se M é um R -bimódulo tal que $M | R$, então M é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central. De fato, pela Observação 2.3.1 existem $f_i : M \longrightarrow R$ e $g_i : R \longrightarrow M$, com $i = 1, 2, \dots, n$, aplicações R -bilineares com $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_M$. Seja $m \in P$ e $r \in \mathcal{Z}$, então

$$mr = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(m))r = \sum_{i=1}^n g_i(\underbrace{f_i(m)r}_{\in R}) = \sum_{i=1}^n g_i(r f_i(m)) = \sum_{i=1}^n r g_i(f_i(m)) = rm.$$

Portanto, M é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central.

Dizemos que M e N são *similares*, e denotamos $M \sim N$, se $M | N$ e $N | M$. Claramente, $\sim$ é uma relação simétrica. Então, por (i) e (ii) acima, temos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Dado um R -bimódulo M vamos denotar por $C_M(R) = \{m \in M, rm = mr \text{ para todo } r \in R\}$. Então, $C_M(R)$ é um $\mathcal{Z}$ -bimódulo central.

Sobre um anel comutativo R , dados quaisquer dois R -bimódulos M, N existe um isomorfismo de R -bimódulos $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$ dado simplesmente por $m \otimes n \mapsto n \otimes m$. Para anéis não comutativos esse isomorfismo pode não existir para quaisquer R -bimódulos. Os próximos resultados, que se encontram em [5], nós dão uma condição para existência desse isomorfismo para R -bimódulos sobre um anel não comutativo. Vamos acrescentar as demonstrações desses resultados, pois em [5] as demonstrações aparecem com poucos detalhes e esses são fundamentais para a construção dos isomorfismos.

Lema 2.3.4. [5, Lema 2.4] Seja M um R -bimódulo tal que $M | R$ (como bimódulos), então existe um isomorfismo de R -bimódulos $M \simeq R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R)$, onde a estrutura de R -bimódulo de $R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R)$ é dada como no Exemplo 2.1.17.

Demonstração. Sejam $f_i : M \longrightarrow R$, $g_i : R \longrightarrow M$ R -bilineares, com $i = 1, 2, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_M$.

Como g_i é R -bilinear, então $g_i(1) \in C_M(R)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Defina

$$\begin{aligned} \eta : M &\longrightarrow R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \\ m &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(m) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1). \end{aligned}$$

Claramente η está bem definida e é R -bilinear. Vejamos que

$$\begin{aligned} \theta : R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) &\longrightarrow M \\ b \otimes_{\mathcal{Z}} m &\longmapsto bm \end{aligned}$$

é a inversa de η . Seja $m \in M$, então

$$(\theta \circ \eta)(m) = \theta \left(\sum_{i=1}^n f_i(m) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \right) = \sum_{i=1}^n f_i(m) g_i(1) = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(m)) = m.$$

Por outro lado, observe que se $m \in C_M(R)$, então $f_i(m) \in \mathcal{Z}$, pois

$$r f_i(m) = f_i(rm) = f_i(mr) = f_i(m)r, \text{ para todo } r \in R.$$

Assim, dado $r \in R$ e $m \in C_M(R)$ temos

$$\begin{aligned} (\eta \circ \theta)(r \otimes_{\mathcal{Z}} m) &= \sum_{i=1}^n f_i(rm) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) = \sum_{i=1}^n r f_i(m) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \\ &= \sum_{i=1}^n r \otimes_{\mathcal{Z}} f_i(m) g_i(1) = \sum_{i=1}^n r \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(f_i(m)1) \\ &= r \otimes_{\mathcal{Z}} m. \end{aligned}$$

Portanto, η é um isomorfismo. ■

Proposição 2.3.5. [5, Corolário 3] *Sejam M e N R -bimódulos. Se $M|R$ e $N|R$, então existe um isomorfismo de R -bimódulos*

$$\begin{aligned} T_{M,N} : M \otimes_R N &\longrightarrow N \otimes_R M \\ x \otimes y &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(x)y \otimes g_i(1), \end{aligned}$$

onde $f_i : M \longrightarrow R$, $g_i : R \longrightarrow M$, com $i = 1, 2, \dots, n$, são R -bilineares e satisfazem $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_M$.

Por outro lado, se considerarmos $f'_j : N \longrightarrow R$, $g'_j : R \longrightarrow N$, com $j = 1, 2, \dots, m$, R -bilineares tais que $\sum_{j=1}^m g'_j f'_j = Id_N$, então o isomorfismo $T_{M,N}$ também pode ser escrito por:

$$\begin{aligned} T_{M,N} : M \otimes_R N &\longrightarrow N \otimes_R M \\ x \otimes y &\longmapsto \sum_{j=1}^m g'_j(1) \otimes x f'_j(y). \end{aligned}$$

Demonstração. O isomorfismo $T_{M,N}$ é dado pela composta

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes_R N & \longrightarrow & R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \otimes_R R \otimes_{\mathcal{Z}} C_N(R) & \longrightarrow & R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \otimes_{\mathcal{Z}} C_N(R) \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & & & R \otimes_{\mathcal{Z}} C_N(R) \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & R \otimes_{\mathcal{Z}} C_N(R) \otimes_R R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & N \otimes_R M \end{array}$$

$\xrightarrow{\quad T_{M,N} \quad}$

Pelo Lema 2.3.4 temos que o isomorfismo $T_{M,N}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
x \otimes_R y &\mapsto \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \otimes_R f'_j(y) \otimes_{\mathcal{Z}} g'_j(1) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) f'_j(y) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \otimes_{\mathcal{Z}} g'_j(1) \\
&\mapsto \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) f'_j(y) \otimes_{\mathcal{Z}} g'_j(1) \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) f'_j(y) \otimes_{\mathcal{Z}} g'_j(1) \otimes_R 1 \otimes_{\mathcal{Z}} g_i(1) \\
&\xrightarrow{\star} \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) f'_j(y) g'_j(1) \otimes_R g_i(1) = \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) g'_j(f'_j(y)) \otimes_R g_i(1) \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(x) y \otimes_R g_i(1).
\end{aligned}$$

Temos portanto o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned}
T_{M,N} : M \otimes_R N &\longrightarrow N \otimes_R M \\
x \otimes y &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) y \otimes g_i(1).
\end{aligned}$$

Para a segunda expressão de $T_{M,N}$, basta seguir de $(\star)$ com as igualdades:

$$\begin{aligned}
x \otimes_R y &\xrightarrow{\star} \sum_{i,j=1}^{n,m} f_i(x) f'_j(y) g'_j(1) \otimes_R g_i(1) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n,m} g'_j(1) f_i(x) f'_j(y) \otimes_R g_i(1) = \sum_{i,j=1}^{n,m} g'_j(1) \otimes_R f_i(x) f'_j(y) g_i(1) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n,m} g'_j(1) \otimes_R f_i(x) g_i(1) f'_j(y) = \sum_{i,j=1}^{n,m} g'_j(1) \otimes_R g_i(f_i(x)) f'_j(y) \\
&= \sum_{j=1}^m g'_j(1) \otimes_R x f'_j(y).
\end{aligned}$$

Então, temos que o isomorfismo $T_{M,N}$ também pode ser escrito como

$$T_{M,N}(x \otimes y) = \sum_{j=1}^m g'_j(1) \otimes_R x f'_j(y).$$

■

Corolário 2.3.6. *Sejam M e N R -bimódulos tais que $M|R$ e N é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central. Então, existe um isomorfismo de R -bimódulos $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$.*

Demonstração. Análogo a demonstração do Lema 2.3.4 temos a cadeia de isomorfismos de R -bimódulos

$$\begin{aligned}
N \otimes_R M &\simeq N \otimes_R R \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \simeq N \otimes_{\mathcal{Z}} C_M(R) \\
&\simeq C_M(R) \otimes_{\mathcal{Z}} N \simeq C_M(R) \otimes_{\mathcal{Z}} R \otimes_R N \\
&\simeq M \otimes_R N.
\end{aligned}$$

Análogo a demonstração da Proposição 2.3.5, esse isomorfismo é dado por

$$\begin{aligned}
T_{N,M} : N \otimes_R M &\longrightarrow M \otimes_R N \\
\otimes m &\longmapsto \sum_{i=1}^n g_i(1) \otimes n f_i(m),
\end{aligned}$$

onde $f_i : M \rightarrow R$ e $g_i : R \rightarrow M$ são como na Observação 2.3.1.

■

Nos próximos exemplos vamos construir o isomorfismo $T_{-, -}$ em alguns casos particulares que serão utilizados nos próximos Capítulos.

Exemplo 2.3.7. *Seja e um idempotente central em R , então Re é um somando direto de R , em particular, $Re|R$. Se M é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central, então existe um isomorfismo de R -bimódulos $Re \otimes_R M \simeq M \otimes_R Re$. Observe que a inclusão e a projeção canônica $i : Re \rightarrow R$ e $\pi : R \rightarrow Re$ satisfazem as condições da Observação 2.3.1, então temos os isomorfismos*

$$\begin{array}{ccc} Re \otimes_R M & \longrightarrow & M \otimes_R Re \\ re \otimes m & \longrightarrow & rm \otimes e \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} M \otimes_R Re & \longrightarrow & Re \otimes_R M \\ m \otimes re & \longrightarrow & e \otimes mr \end{array}$$

Exemplo 2.3.8. *Sejam M e N R -bimódulos tais que $N|R$ e existe um isomorfismo de R -bimódulos $f : M \rightarrow R$. Em particular, $M|R$. Observe que o isomorfismo de R -bimódulos $f : M \rightarrow R$ e sua inversa $f^{-1} : R \rightarrow M$ satisfazem a condição da Observação 2.3.1, então o isomorfismo $T_{M,N}$ pode ser escrito como*

$$\begin{array}{ccc} T_{M,N} : M \otimes_R N & \longrightarrow & N \otimes_R M \\ m \otimes n & \longmapsto & f(m)n \otimes f^{-1}(1) \end{array}$$

2.4 O grupo $\mathcal{P}(S/R)$

Sejam $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade. Vamos denotar $\mathcal{M}(S/R)$ o conjunto dos elementos $P \rightrightarrows[\phi] X$, onde P um R -bimódulo, X um S -bimódulo e $\phi : P \rightarrow X$ uma aplicação R -bilinear tal que as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \bar{\phi}_r : P \otimes_R S & \longrightarrow & X \\ p \otimes_R s & \longrightarrow & \phi(p)s \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \bar{\phi}_l : S \otimes_R P & \longrightarrow & X \\ s \otimes_R p & \longrightarrow & s\phi(p) \end{array} \quad (2.19)$$

são isomorfismos de R - S -bimódulos e S - R -bimódulos, respectivamente. Dados $P \rightrightarrows[\phi] X$ e $Q \rightrightarrows[\psi] Y$ em $\mathcal{M}(S/R)$, definimos o elemento $P \otimes_R Q \rightrightarrows[\phi \otimes \psi] X \otimes_S Y$, onde

$$\begin{array}{ccc} \phi \otimes \psi : P \otimes_R Q & \longrightarrow & X \otimes_S Y \\ p \otimes q & \longmapsto & \phi(p) \otimes \psi(q). \end{array}$$

Afirmção 2.4.1. $[P \otimes_R Q] \rightrightarrows[\phi \otimes \psi] [X \otimes_S Y] \in \mathcal{M}(S/R)$.

De fato, temos o isomorfismo de S - R -bimódulos

$$\begin{array}{ccccc} S \otimes_R P \otimes_R Q & \xrightarrow{\bar{\phi}_l \otimes Q} & X \otimes_R Q & \xrightarrow{\bar{\phi}_r^{-1} \otimes Q} & P \otimes_R S \otimes_R Q \\ & \searrow & & & \downarrow \\ & & & & P \otimes_R S \otimes_S S \otimes_R Q \\ & & & & \downarrow \bar{\phi}_r \otimes \bar{\psi}_r \\ & \cdots \cdots \cdots & & & X \otimes_S Y \end{array}$$

Observe agora que dado $p \in P$, $q \in Q$ e $s \in S$, então

$$\begin{aligned} s \otimes p \otimes q & \mapsto s\phi(p) \otimes q \mapsto \bar{\phi}_r^{-1}(s\phi(p)) \otimes q \\ & \mapsto \bar{\phi}_r^{-1}(s\phi(p)) \otimes_S 1 \otimes q \mapsto s\phi(p) \otimes_S \psi(q) \\ & = (\phi \otimes \psi)_l(s \otimes p \otimes q). \end{aligned}$$

Logo, $\overline{(\phi \otimes \psi)}_l$ é isomorfismo de S - R -bimódulo. Analogamente mostra-se que $\overline{(\phi \otimes \psi)}_r$ é isomorfismo de R - S -bimódulos. Essa operação é claramente associativa e $R \xRightarrow{[\iota]} S$, onde ι denota a inclusão de R em S , é o elemento neutro.

Um morfismo entre $P \xRightarrow{[\phi]} X$ e $Q \xRightarrow{[\psi]} Y$ é um par (α, β) , onde $\alpha : P \rightarrow Q$ é R -bilinear, $\beta : X \rightarrow Y$ é S -bilinear e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ Q & \xrightarrow{\psi} & Y. \end{array}$$

é comutativo. Se α e β são isomorfismos de R -bimódulos e S -bimódulos, respectivamente, então (α, β) é um isomorfismo entre $P \xRightarrow{[\phi]} X$ e $Q \xRightarrow{[\psi]} Y$.

Vamos denotar por $\mathcal{P}(S/R)$ o conjunto das classes de isomorfismos dos elementos $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X]$, onde $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$ e $[X] \in \mathbf{Pic}(S)$.

Proposição 2.4.2. *Seja $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade. Considere $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, $[X] \in \mathbf{Pic}(S)$ e $\phi : P \rightarrow X$ uma aplicação R -bilinear. Suponha que $\bar{\phi}_l$ é isomorfismo. Então:*

i) $\bar{\phi}_r$ é isomorfismo.

ii) ϕ é injetora.

iii) $[P^*] \xRightarrow{[\phi^*]} [X^*] \in \mathcal{P}(S/R)$, onde $\phi^*(f)(s\phi(p)) = sf(p)$, para $s \in S$ e $p \in P$.

iv) $[^*P] \xRightarrow{[\phi^+]} [X^*] \in \mathcal{P}(S/R)$, onde $\phi^+(g)(\phi(p)s) = g(p)s$, para $s \in S$ e $p \in P$.

v) $([P^*] \xRightarrow{[\phi^*]} [X^*]) = (^*[P] \xRightarrow{[\phi^+]} [^*X])$ em $\mathcal{P}(S/R)$.

Demonstração. [18, Lema 3.1].

■

Observação 2.4.3. (i) Na Proposição 2.4.2, se supormos que $\bar{\phi}_r$ é isomorfismo, ao invés de $\bar{\phi}_l$, também chega-se a conclusão que $\bar{\phi}_l$ é isomorfismo e ϕ injetora.

(ii) Segue Proposição 2.4.2 que se $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$ e $[X] \in \mathbf{Pic}(S)$, então $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \mathcal{P}(S/R)$ se $\bar{\phi}_l$ (ou $\bar{\phi}_r$) é isomorfismo.

Proposição 2.4.4. $\mathcal{P}(S/R)$ é um grupo.

Demonstração. Basta mostrar que cada elementos em $\mathcal{P}(S/R)$ possui um inverso. Dado $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \mathcal{P}(S/R)$, pela Proposição 2.4.2, $[P^*] \xRightarrow{[\phi^*]} [X^*]$ também pertence a $\mathcal{P}(S/R)$. É fácil ver que o dia-

grama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_R P^* & \longrightarrow & X \otimes_S X^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\iota} & S \end{array}$$

onde os isomorfismos na vertical são dados como na Observação 2.1.13. Logo, $[P^*] = [\phi^*] \Rightarrow [X^*]$ é o inverso de $[P] = [\phi] \Rightarrow [X]$ em $\mathcal{P}(S/R)$.

■

Se R é um K -álgebra definimos $\mathcal{P}_K(S/R) = \{ [P] = [\phi] \Rightarrow [X] \in \mathcal{P}(S/R); [P] \in \mathbf{Pic}_K(R) \}$. É fácil ver que $\mathcal{P}_K(S/R)$ é um subgrupo de $\mathcal{P}(S/R)$. De fato, basta ver que se P é K -bimódulo central, então P^* também é. Sejam $k \in K$ e $f \in P^*$, então

$$(f \cdot k)(p) = f(p)k = kf(p) = f(kp) = f(pk) = (k \cdot f)(p),$$

para todo $p \in P$. Portanto, $[P^*] \in \mathbf{Pic}_K(R)$.

2.5 Uma sequência exata auxiliar

Nesta seção vamos apresentar a sequência exata que foi construída em [5, Teorema 1.5]. Essa sequência será usada na construção da nossa sequência no Capítulo 4. Vamos colocar a demonstração completa da exatidão já que na prova apresentada em [5] são omitidos detalhes importantes que serão usados mais adiante.

Seja $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade. Vamos denotar por $\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$ o grupo dos automorfismos do anel S que fixam cada elemento de R . Então,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : \mathcal{U}(\mathcal{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S) \\ r & \longmapsto & (s \mapsto rsr^{-1}) \end{array}$$

é um morfismo de grupos.

Dado $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$, definimos o S -bimódulo S_f por: $S_f = S$, como grupos, e ações dadas por:

$$s' * t = s't \text{ e } t * s = tf(s), \text{ para } s, s' \in S, t \in S_f.$$

Então,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} : \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S) & \longrightarrow & \mathcal{P}(S/R) \\ f & \longmapsto & ([R] = [\iota_f] \Rightarrow [S_f]), \end{array}$$

onde $\iota_f : R \longrightarrow S_f$ é a inclusão, é um morfismo de grupos.

Teorema 2.5.1. *A sequência*

$$\mathcal{U}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S) \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{P}(S/R) \xrightarrow{\vartheta} \mathbf{Pic}(R),$$

onde $\vartheta([P] = [\phi] \Rightarrow [X]) = [P]$, é exata.

Demonstração. Vejamos a exatidão em $\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$. Seja $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$ tal que $([R] \xRightarrow{[\iota_f]} [S_f]) = ([R] \xRightarrow{[\iota]} [S])$ em $\mathcal{P}(S/R)$. Temos então o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & S \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ R & \xrightarrow{\iota_f} & S_f \end{array}$$

onde α é um isomorfismo de S -bimódulos. Pela comutatividade do diagrama, temos que $R = \alpha(R)$. Seja $d = \alpha^{-1}(1) \in R$. Por α ser isomorfismo de S -bimódulos e $f(r) = r$, para todo $r \in R$, temos que $d \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$. Além disso,

$$df(s) = d * s = \alpha^{-1}(1) * s = \alpha^{-1}(s) = s\alpha^{-1}(1) = sd,$$

para todo $s \in S$. Logo, $f(s) = d^{-1}sd = \mathcal{F}(d^{-1})(s)$, para todo $s \in S$. Ou seja, $\mathcal{F}(d^{-1}) = f$. Logo, $f \in \text{Im}(\mathcal{F})$.

Seja $f \in \text{Im}(\mathcal{F})$, então existe $r \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$ tal que $f(s) = rsr^{-1}$, para todo $s \in S$. Seja $\omega : S \rightarrow S_f$ definido por $\omega(s) = sr^{-1}$. Claramente, ω é isomorfismo e S -linear à esquerda. Dados $s, s' \in S$, temos

$$\omega(ss') = ss'r^{-1} = sr^{-1}rs'r^{-1} = sr^{-1}f(s') = \omega(s) * s'.$$

Portanto, ω é isomorfismo de S -bimódulos. Considere o isomorfismo de R -bimódulos $\lambda : R \rightarrow R$, definido por $\lambda(x) = xr^{-1}$. Então, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & S \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \omega \\ R & \xrightarrow{i_f} & S_f \end{array}$$

é comutativo. Logo, $\mathcal{E}(f) = ([R] \xRightarrow{[\iota_f]} [S_f]) = ([R] \xRightarrow{[\iota]} [S])$ em $\mathcal{P}(S/R)$. Portanto, $f \in \ker(\mathcal{E})$.

Para a exatidão em $\mathcal{P}(S/R)$, considere $([P] \xRightarrow{[\phi]} [X]) \in \mathcal{P}(S/R)$ com $[P] = [R]$ em $\mathbf{Pic}(R)$. Assim existe um isomorfismo R -bilinear $\gamma : R \rightarrow P$. Então, temos os seguintes isomorfismos de (R, S) -bimódulos e (S, R) -bimódulo

$$\alpha : S \xrightarrow{\simeq} R \otimes_R S \xrightarrow{\gamma \otimes_R S} P \otimes_R S \xrightarrow{\bar{\phi}_r} X$$

$$\beta : S \xrightarrow{\simeq} S \otimes_R R \xrightarrow{S \otimes_R \gamma} S \otimes_R P \xrightarrow{\bar{\phi}_l} X$$

Observe que $\alpha(s) = \phi(\gamma(1))s$ e $\beta(s) = s\phi(\gamma(1))$, para $s \in S$. Defina $f = \beta^{-1} \circ \alpha : S \rightarrow S$. Então, por definição temos

$$f(s)\phi(\gamma(1)) = \beta(f(s)) = \alpha(s) = \phi(\gamma(1))s, \quad (2.20)$$

para todo $s \in S$. Então, para $s, t \in S$ temos

$$\begin{aligned} \alpha(st) &= \phi(\gamma(1))st \stackrel{(2.20)}{=} f(s)\phi(\gamma(1))t \\ &\stackrel{(2.20)}{=} f(s)f(t)\phi(\gamma(1)) \\ &= \beta(f(s)f(t)). \end{aligned}$$

Aplicando β^{-1} temos que $f(st) = f(s)f(t)$. Além disso, como ϕ e γ são R -bilineares temos que

$$\alpha(r) = \phi(\gamma(1))r = \phi(\gamma(r)) = r\phi(\gamma(1)) = \beta(r),$$

para todo $r \in R$. Aplicando β^{-1} temos que $f(r) = r$, para todo $r \in R$. Logo, $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$. Considere $\beta : S_f \rightarrow X$. Claramente β é S -linear à esquerda. Dado $t \in S$ e $s \in S_f$ temos

$$\begin{aligned} \beta(s * t) &= \beta(sf(t)) = sf(t)\phi(\gamma(1)) \\ &\stackrel{(2.20)}{=} s\phi(\gamma(1))t = \beta(s)t. \end{aligned}$$

Logo, $\beta : S_f \rightarrow X$ é um isomorfismo S -bilinear. Além disso, por $\beta(r) = (\phi \circ \gamma)(r)$, para todo $r \in R$, temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i_f} & S_f \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ P & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

Assim, $\mathcal{E}(f) = ([R] \xRightarrow{[\iota_f]} [S_f]) = ([P] \xRightarrow{[\phi]} [X])$ em $\mathcal{P}(S/R)$. Logo, $\ker(\vartheta) \subseteq \text{Im}(\mathcal{E})$. A inclusão contrária é imediata.

■

Capítulo 3

Fundamentos sobre ações e representações parciais

Neste Capítulo vamos construir as ações parciais que serão usadas na construção dos grupos da sequência. Para cada representação parcial unital (ver Seção 3.2) de G em $\mathbf{PicS}(R)$ temos uma ação parcial sobre o centro do anel, que será denotado por $\mathcal{Z}$, e sobre $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$ (subseção 3.2.1). Na Seção 3.3 definimos o produto cruzado generalizado parcial que também é construído a partir de uma representação parcial unital de G em $\mathbf{PicS}(R)$. Esse conceito foi introduzido em [17] para uma extensão de Galois parcial de anéis comutativos. Na subseção 3.3.1, relacionamos o produto cruzado generalizado parcial com uma extensão de anéis $R \subseteq S$ com mesma unidade. Na ultima seção desse capítulo, construímos o grupo $\mathcal{C}(\Theta/R)$, para uma representação parcial unital $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ fixada, e o subgrupo $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$.

Vamos começar relembrando na Seção 3.1 o conceito de ações parciais, representações parciais e cohomologia parcial que podem ser vistos com mais detalhes em [13], [26] e [15].

A menos de menção contrária, todos os tensores serão tomados sobre o anel R .

3.1 Ações parciais, representações parciais e cohomologia parcial.

Definição 3.1.1. *Sejam G um grupo e S um semigrupo. Uma ação parcial de G sobre S é uma coleção de subsemigrupos S_x , com $x \in G$, e isomorfismos de semigrupos $\alpha_x : S_{x^{-1}} \longrightarrow S_x$ que satisfazem as condições:*

- (i) $S_1 = S$ e $\alpha_1 = Id_S$,
- (ii) $\alpha_y^{-1}(S_y \cap S_{x^{-1}}) \subseteq S_{(xy)^{-1}}$,
- (iii) $\alpha_x \circ \alpha_y(s) = \alpha_{xy}(s)$, para cada $s \in \alpha_y^{-1}(S_y \cap S_{x^{-1}})$.

Vamos denotar por $\alpha = (S_x, \alpha_x)$ uma ação parcial de G sobre S , onde S_x são os subsemigrupos e α_x são os isomorfismos. Como visto em [13], as condições (ii) e (iii) da definição acima implicam que $\alpha_x^{-1} = \alpha_{x^{-1}}$ e

$$\alpha_x(S_{x^{-1}} \cap S_y) = S_x \cap S_{xy}, \quad \text{para todo } x, y \in G. \quad (3.1)$$

Se cada S_x é gerado por um idempotente central de S , ou seja, $S_x = S1_x$, para todo $x \in G$, então $S_x \cap S_y = S1_x1_y$ e por (3.1) temos $\alpha_x(1_y1_{x^{-1}}) = 1_x1_{xy}$, para todo $x, y \in G$. Como uma consequência dessa igualdade temos:

$$\alpha_{xy}(s1_{y^{-1}x^{-1}})1_x = \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}})1_{x^{-1}}), \text{ para todo } x, y \in G \text{ e } s \in S.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}})1_{x^{-1}}) &= \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}})1_y1_{x^{-1}}) = \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}})\alpha_y(1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}})) \\ &= \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}}1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}})) = \alpha_x(\alpha_y(s1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}})) \\ &= \alpha_{xy}(s1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}}) = \alpha_{xy}(s1_{y^{-1}x^{-1}}1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}}) \\ &= \alpha_{xy}(s1_{y^{-1}x^{-1}})\alpha_{xy}(1_{y^{-1}}1_{y^{-1}x^{-1}}) \\ &= \alpha_{xy}(s1_{y^{-1}x^{-1}})1_{xy}1_x \\ &= \alpha_{xy}(s1_{y^{-1}x^{-1}})1_x. \end{aligned}$$

O subconjunto dos invariantes de S sobre α é definido por

$$S^\alpha = \{s \in S; \alpha_x(s1_{x^{-1}}) = s1_x, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Definição 3.1.2. *Uma representação parcial de G em um monoide S é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \theta : G &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \theta_x \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\theta_{1_G} = 1_S$,
- (ii) $\theta_x\theta_y\theta_{y^{-1}} = \theta_{xy}\theta_{y^{-1}}$, para todos $x, y \in G$.
- (iii) $\theta_{x^{-1}}\theta_x\theta_y = \theta_{x^{-1}}\theta_{xy}$, para todos $x, y \in G$.

Segue diretamente da definição que $\theta_x\theta_{x^{-1}}\theta_x = \theta_x$, para todo $x \in G$. Para cada $x \in G$ denote $\varepsilon_x = \theta_x\theta_{x^{-1}}$. Por [26] temos que $\varepsilon'_x s$ são idempotentes que comutam e satisfazem

$$\theta_x\varepsilon_y = \varepsilon_{xy}\theta_x \text{ para todos } x, y \in G. \quad (3.2)$$

Em particular,

$$\varepsilon_x\theta_x = \theta_x \text{ e } \theta_x\varepsilon_{x^{-1}} = \theta_x, \text{ para todo } x \in G. \quad (3.3)$$

Segue da definição que

$$\theta_x\theta_y = \theta_x\theta_{x^{-1}}\theta_x\theta_y = \theta_x\theta_{x^{-1}}\theta_{xy} = \varepsilon_x\theta_{xy}, \text{ para todos } x, y \in G. \quad (3.4)$$

Aplicando (3.2) a (3.4) temos

$$\theta_x\theta_y = \varepsilon_x\theta_{xy} = \theta_{xy}\varepsilon_{y^{-1}}, \text{ para todos } x, y \in G. \quad (3.5)$$

Proposição 3.1.3. *Sejam S um monoide e $\theta : G \longrightarrow S$ uma representação parcial. Considere o subsemigrupo $S_x = \varepsilon_x S \varepsilon_x$, para $x \in G$. Então, temos uma ação parcial $\alpha^* = (S_x, \alpha_x^*)$, onde*

$$\begin{aligned} \alpha_x^* : S_{x^{-1}} &\longrightarrow S_x \\ s &\longmapsto \theta_x s \theta_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Claramente $S_1 = S$ e $\alpha_1^* = Id_S$. Observe que $s \in S_x$ se, e somente se, $\varepsilon_x s \varepsilon_x = s$. De fato, claramente se $s = \varepsilon_x s \varepsilon_x$, então $s \in S_x$. Por outro lado, se $s \in S_x$, então $s = \varepsilon_x s' \varepsilon_x$, para algum $s' \in S$, então $\varepsilon_x s \varepsilon_x = \varepsilon_x \varepsilon_x s' \varepsilon_x \varepsilon_x = \varepsilon_x s' \varepsilon_x = s$. O que mostra a afirmação.

Por (3.3), temos

$$\alpha_x^*(s) = \theta_x s \theta_{x^{-1}} = \varepsilon_x \theta_x s \theta_{x^{-1}} \varepsilon_x = \varepsilon_x \alpha_x^*(s) \varepsilon_x.$$

Assim, $\alpha_x^*(s) \in S_x$. Dados $s, s' \in S_{x^{-1}}$, temos

$$\alpha_x^*(ss') = \theta_x ss' \theta_{x^{-1}} = \theta_x s \varepsilon_{x^{-1}} s' \theta_{x^{-1}} = \theta_x s \theta_{x^{-1}} \theta_x s' \theta_{x^{-1}} = \alpha_x^*(s) \alpha_x^*(s').$$

Logo, α_x^* é um morfismo de semigrupos. Considere $\alpha_{x^{-1}}^* : S_x \longrightarrow S_{x^{-1}}$. Dado $s \in S_{x^{-1}}$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha_{x^{-1}}^* \circ \alpha_x^*)(s) &= \alpha_{x^{-1}}^*(\theta_x s \theta_{x^{-1}}) = \theta_{x^{-1}} \theta_x s \theta_{x^{-1}} \theta_x \\ &= \varepsilon_{x^{-1}} s \varepsilon_{x^{-1}} = s, \end{aligned}$$

pois $s \in S_{x^{-1}}$. Analogamente, $(\alpha_x^* \circ \alpha_{x^{-1}}^*)(s) = s$, para todo $s \in S_x$. Então, α_x^* é isomorfismo com inverso $\alpha_{x^{-1}}^*$.

Seja $s \in S_y \cap S_{x^{-1}}$, então

$$\begin{aligned} \alpha_{y^{-1}}^*(s) &= \theta_{y^{-1}} s \theta_y \stackrel{s \in S_{x^{-1}}}{=} \theta_{y^{-1}} \varepsilon_{x^{-1}} s \varepsilon_{x^{-1}} \theta_y \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \varepsilon_{(xy)^{-1}} \theta_{y^{-1}} s \theta_y \varepsilon_{(xy)^{-1}} \in S_{(xy)^{-1}}. \end{aligned}$$

Logo, temos $\alpha_{y^{-1}}^*(S_y \cap S_{x^{-1}}) \subseteq S_{(xy)^{-1}}$. Seja $s \in \alpha_{y^{-1}}^*(S_y \cap S_{x^{-1}}) \subseteq S_{(xy)^{-1}} \cap S_{y^{-1}}$, por (3.4) e (3.5) temos:

$$\begin{aligned} (\alpha_x^* \circ \alpha_y^*)(s) &= \alpha_x^*(\theta_y s \theta_{y^{-1}}) = \theta_x \theta_y s \theta_{y^{-1}} \theta_{x^{-1}} \\ &= \theta_{xy} \varepsilon_{y^{-1}} s \varepsilon_{y^{-1}} \theta_{y^{-1}} \theta_{x^{-1}} \\ &= \theta_{xy} s \theta_{y^{-1}} \theta_{x^{-1}} \\ &= \alpha_{xy}^*(s). \end{aligned}$$

Portanto, α^* é uma ação parcial. ■

A noção de cohomologia parcial foi introduzida em [15]. Sejam K um anel (ou um monoide) comutativo e $\alpha = (D_x, \alpha_x)$ uma ação parcial unitária de G sobre K , onde cada D_x é um ideal de K gerado por um idempotente central 1_x . Uma n -cocadeia, com $n \in \mathbb{N}$, de G com valores em K é uma função $f : G^n \longrightarrow K$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}(K 1_x 1_{x_1 x_2} \dots 1_{x_1 x_2 \dots x_n})$. Uma 0-cocadeia é definida como sendo um elemento em $\mathcal{U}(K)$.

Seja $C^n(G, \alpha, K)$ o conjunto de todas as n -cocadeias de G com valores em K . Considere em $C^n(G, \alpha, K)$ a multiplicação definida ponto a ponto, ou seja, se $f, g \in C^n(G, \alpha, K)$, então

$$fg(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n), \quad \text{para } x_1, \dots, x_n \in G.$$

Então, $C^n(G, \alpha, K)$ é um grupo, onde o elemento neutro é $I(x_1, \dots, x_n) = 1_{x_1} 1_{x_1 x_2} \dots 1_{x_1 x_2 \dots x_n}$ e $f^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)^{-1}$, para $x_1, \dots, x_n \in G$.

Seja $f \in C^n(G, \alpha, K)$ e $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in G$. Defina

$$\begin{aligned} (\delta^n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \alpha_{x_1}(f(x_2, \dots, x_{n+1}) 1_{x_1^{-1}}) \prod_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1})^{(-1)^i} \\ &\quad f(x_1, \dots, x_n)^{(-1)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para $n = 0$ definimos

$$(\delta^0 k)(x) = \alpha_x(k1_{x^{-1}})k^{-1}, \text{ onde } k \in \mathcal{U}(K).$$

Proposição 3.1.4. A aplicação $\delta^n : C^n(G, \alpha, K) \longrightarrow C^{n+1}(G, \alpha, K)$ definida em (3.6) é um morfismo de grupos tal que

$$(\delta^{n+1} \circ \delta^n)(f)(x_1, \dots, x_{n+2}) = 1_{x_1} 1_{x_1 x_2} \dots 1_{x_1 x_2 \dots x_{n+2}},$$

para todo $f \in C^n(G, \alpha, K)$ e $x_1, \dots, x_{n+1} \in G$.

Demonstração. [15, Proposição 1.5]. ■

Como no caso clássico, vamos definir

$$Z^n(G, \alpha, K) = \ker(\delta^n) \text{ e } B^n(G, \alpha, K) = \text{Im}(\delta^{n-1})$$

que são chamados de n -cociclos e n -cobordos parciais. Pela Proposição 3.1.4, temos que $B^n(G, \alpha, K) \subseteq Z^n(G, \alpha, K)$. Definimos então o grupo n -cohomologia parcial por

$$H^n(G, \alpha, K) = \frac{Z^n(G, \alpha, K)}{B^n(G, \alpha, K)}.$$

Para $n = 0$ definimos $H^0(G, \alpha, K) = Z^0(G, \alpha, K) = \ker(\delta^0)$.

No próximo exemplo vamos descrever o morfismo δ^n e os grupos $Z^n(G, \alpha, K)$ e $B^n(G, \alpha, K)$, para $n = 0, 1, 2$.

Exemplo 3.1.5. Para $n = 0$ temos

$$H^0(G, \alpha, \mathcal{Z}) = Z^0(G, \alpha, \mathcal{Z}) = \{k \in \mathcal{U}(K), \alpha_x(k1_{x^{-1}}) = k1_x, \forall x \in G\}$$

$$B^1(G, \alpha, K) = \text{Im}(\delta^0) = \{f \in C^1(G, \alpha, K); \exists k \in \mathcal{U}(K) \text{ } f(x) = \alpha_x(k1_{x^{-1}})k^{-1}, \forall x \in G\}.$$

Para $n = 1$, temos $(\delta^1 f)(x, y) = \alpha_x(f(y)1_{x^{-1}})f(xy)^{-1}f(x)$, para $f \in C^1(G, \alpha, K)$. Então,

$$Z^1(G, \alpha, K) = \{f \in C^1(G, \alpha, K); \alpha_x(f(y)1_{x^{-1}})f(x) = f(xy)1_x, \forall x, y \in G\}.$$

$$B^2(G, \alpha, K) = \{f \in C^2(G, \alpha, K); \exists \sigma \in C^1(G, \alpha, K), \text{ com } f(x, y) = \alpha_x(\sigma(y)1_{x^{-1}})\sigma(xy)^{-1}\sigma(x), \forall x, y \in G\}.$$

Para $n = 2$,

$$(\delta^2 f)(x, y, z) = \alpha_x(f(y, z)1_{x^{-1}})f(xy, z)^{-1}f(x, yz)f(x, y)^{-1},$$

para $f \in C^2(G, \alpha, K)$ e $x, y \in G$. Então,

$$Z^2(G, \alpha, G) = \{f \in C^2(G, \alpha, K); \alpha_x(f(y, z)1_{x^{-1}})f(x, yz) = f(xy, z)f(x, y), \forall x, y, z \in G\}.$$

Sejam $f, f' \in Z^n(G, \alpha, K)$, dizemos que f e f' são *cohomologos* se existe $g \in C^{n-1}(G, \alpha, K)$ tal que $f = f'(\delta^n g)$. Neste caso, temos que $[f] = [f']$ em $H^n(G, \alpha, K)$.

Um n -cociclo f é dito *normalizado* se

$$f(1, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, 1, \dots, x_{n-1}) = \dots = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = 1_{x_1} 1_{x_1 x_2} \dots 1_{x_1 \dots x_{n-1}}.$$

Observação 3.1.6. Todo 1-cociclo parcial σ é normalizado. De fato, para todo $x, y \in G$ temos $\alpha_x(\sigma_y 1_{x^{-1}})\sigma_{xy}^{-1}\sigma_x = 1_x 1_{xy}$. Em particular, para $x = y = 1$ temos $\sigma_1^2 = \sigma_1$. Isso implica que $\sigma_1 = 1$. Portanto, σ é normalizado.

Por [15, Observação 2.6] temos que se $\sigma \in Z^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então existe $\tilde{\sigma} \in Z^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$ normalizado tal que $\sigma = \tilde{\sigma}(\delta^1 \beta)$, para algum $\beta \in C^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Logo, σ é cohomólogo a um 2-cociclo parcial normalizado.

3.2 Representação Parcial Unital

Seja

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [\Theta_x] \end{aligned}$$

uma representação parcial. Dizemos que Θ é *unital* se $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, onde 1_x é um idempotente central de R , para todo $x \in G$.

Lema 3.2.1. *Seja $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. Então, para todo $x, y \in G$, temos:*

(i) $\Theta_x \otimes_R R1_y \simeq R1_{xy} \otimes_R \Theta_x$. Em particular,

$$R1_x \otimes_R \Theta_x \simeq \Theta_x \text{ e } \Theta_x \otimes_R R1_{x^{-1}} \simeq \Theta_x, \text{ para todo } x \in G. \quad (3.7)$$

(ii) $\Theta_x \otimes_R \Theta_y \simeq R1_x \otimes_R \Theta_{xy}$ e $\Theta_x \otimes_R \Theta_y \simeq \Theta_{xy} \otimes_R R1_{y^{-1}}$,

(iii) $\Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \simeq R1_x 1_{xy}$,

(iv) $\Theta_x \otimes_R \Theta_y \simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R R1_{y^{-1}x^{-1}}$.

Demonstração. O item (i) segue diretamente de (3.2) e o item (ii) segue de (3.4) e (3.5). Para (iii) temos

$$\begin{aligned} \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} &\stackrel{(ii)}{\simeq} R1_x \otimes_R \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \\ &\simeq R1_x \otimes_R R1_{xy} \simeq R1_x 1_{xy}. \end{aligned}$$

Para (iv):

$$\begin{aligned} \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R R1_{y^{-1}x^{-1}} &\simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Theta_{xy} \\ &\simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_{xy} \\ &\simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Theta_y \\ &\simeq \Theta_x \otimes_R R1_y \otimes_R R1_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_y \\ &\simeq \Theta_x \otimes_R R1_{x^{-1}} \otimes_R R1_y \otimes_R \Theta_y \\ &\simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_y \end{aligned}$$

■

Por (2.3) e pelos itens (i) e (ii) do Lema 3.2.1, temos os isomorfismos de R -bimódulos

$$1_{xy} \Theta_x \simeq \Theta_x 1_y \text{ e } \Theta_x \otimes_R \Theta_y \simeq 1_x \Theta_{xy}, \text{ para todo } x, y \in G. \quad (3.8)$$

Observação 3.2.2. *Dados $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y$ e $u_{(xy)^{-1}} \in \Theta_{(xy)^{-1}}$, então*

$$ru_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}} = u_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}} r, \text{ para todo } r \in \mathcal{Z}. \quad (3.9)$$

De fato, por (iii) do Lema 3.2.1 existe um isomorfismo de R -bimódulos $\varphi : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \longrightarrow R1_x 1_{xy}$. Então, para todo $r \in \mathcal{Z}$ temos $r\varphi(u_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}}) = \varphi(u_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}})r$. Por φ ser R -bilinear segue que

$$\varphi(ru_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}}) = \varphi(u_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}}r),$$

e por φ ser isomorfismo, temos portanto que $ru_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}} = u_x \otimes u_y \otimes u_{(xy)^{-1}} r$, para todo $r \in \mathcal{Z}$.

Lema 3.2.3. *Seja $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, onde $\Theta(x) = [\Theta_x]$ para todo $x \in G$. Então*

$$u_x 1_y = 1_{xy} u_x 1_y = 1_{xy} u_x, \quad \text{para todos } x, y \in G \text{ e } u_x \in \Theta_x. \quad (3.10)$$

Em particular, $1_{xy} \Theta_x = \Theta_x 1_y$, para todos $x, y \in G$.

Demonstração. Por (3.8) existe um isomorfismo de R -bimódulos $\kappa_{x,y} : \Theta_x 1_y \longrightarrow 1_{xy} \Theta_x$. Dado $u_x \in \Theta_x$, existe $v_x \in \Theta_x$ tal que $\kappa_{x,y}(u_x 1_y) = 1_{xy} v_x$. Multiplicando à esquerda por 1_{xy} temos

$$\kappa_{x,y}(1_{xy} u_x 1_y) = 1_{xy} v_x = \kappa_{x,y}(u_x 1_y).$$

Como $\kappa_{x,y}$ é isomorfismo, temos que $1_{xy} u_x 1_y = u_x 1_y$. Por outro lado, existe $v'_x \in \Theta_x$ tal que $\kappa_{x,y}^{-1}(1_{xy} u_x) = v'_x 1_y$. Multiplicando à direita por 1_y temos

$$\kappa_{x,y}^{-1}(1_{xy} u_x 1_y) = v'_x 1_y = \kappa_{x,y}^{-1}(1_{xy} u_x).$$

O que implica $1_{xy} u_x 1_y = 1_{xy} u_x$. Temos portanto que

$$u_x 1_y = 1_{xy} u_x 1_y = 1_{xy} u_x, \quad \text{para todo } u_x \in \Theta_x.$$

■

Segue, em particular, do Lema 3.2.3 que

$$1_x u_x = u_x \quad \text{e} \quad u_x 1_{x^{-1}} = u_x, \quad \text{para todo } x \in G, u_x \in \Theta_x. \quad (3.11)$$

Então, as aplicações $R1_x \otimes_R \Theta_x \simeq \Theta_x$ e $\Theta_x \otimes_R R1_{x^{-1}} \simeq \Theta_x$ definidos pela ação à esquerda e ação à direita, respectivamente, são isomorfismos de R -bimódulos. Logo, Θ_x é um $R1_x$ - $R1_{x^{-1}}$ -bimódulo unital e existem isomorfismos de R -bimódulos

$$\tau_x : \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \longrightarrow R1_x \quad \text{e} \quad \tau_{x^{-1}} : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \longrightarrow R1_{x^{-1}}.$$

Note que os $R1_x$ - $R1_{x^{-1}}$ -bimódulos $\Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}}$ e $\Theta_x \otimes_{R1_{x^{-1}}} \Theta_{x^{-1}}$ coincidem, pois por (3.11) temos

$$u_x r \otimes_{R1_{x^{-1}}} u_{x^{-1}} = u_x 1_{x^{-1}} r \otimes_{R1_{x^{-1}}} u_{x^{-1}} = u_x \otimes_{R1_{x^{-1}}} r 1_{x^{-1}} u_{x^{-1}} = u_x \otimes_{R1_{x^{-1}}} r u_{x^{-1}},$$

para todo $u_x \in \Theta_x, u_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$ e $r \in R$. Pela Proposição 2.1.11 podemos escolher os isomorfismos τ_x e $\tau_{x^{-1}}$ de tal forma que valem as igualdades em (2.6). Para simplificar a notação, vamos denotar $\tau_x(u_x \otimes u_{x^{-1}}) = u_x u_{x^{-1}}$, para todo $u_x \in \Theta_x$ e $u_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$. Então, por (2.6) temos

$$(u_x u_{x^{-1}}) u'_x = u_x (u_{x^{-1}} u'_x) \quad \text{e} \quad (u_{x^{-1}} u_x) u'_{x^{-1}} = u_{x^{-1}} (u_x u'_{x^{-1}}), \quad (3.12)$$

para todo $u_x, u'_x \in \Theta_x$ e $u_{x^{-1}}, u'_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$.

3.2.1 Ação parcial sobre $\mathcal{Z}$ e sobre $\mathbf{PicS}(R)$.

Seja

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [\Theta_x] \end{aligned}$$

uma representação parcial unital com $\Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$.

Teorema 3.2.4. Considere $D_x = \mathcal{Z}1_x$ é o ideal de $\mathcal{Z}$ gerado por 1_x e

$$\begin{aligned} \alpha_x : D_{x^{-1}} &\longrightarrow D_x \\ r &\longmapsto \sum_{(x)} \omega_x r \omega_{x^{-1}}, \end{aligned}$$

onde $\omega_x \in \Theta_x$ e $\omega_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$ são tais que $1_x = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}}$. Então, $\alpha = (D_x, \alpha_x)_{x \in G}$ é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{Z}$.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que α_x não depende da escolha dos representantes da decomposição de 1_x . Sejam $\tilde{\omega}_x \in \Theta_x$ e $\tilde{\omega}_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$ tais que $\sum_{(\tilde{x})} \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}} = 1_x$. Então,

$$\begin{aligned} \alpha_x(r1_{x^{-1}}) &= \sum_{(x)} \omega_x r \omega_{x^{-1}} \stackrel{(3.11)}{=} \sum_{(x)} \omega_x r \omega_{x^{-1}} 1_x = \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x r \omega_{x^{-1}} (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x r (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \stackrel{r \in \mathcal{Z}}{=} \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x) r \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x), (\tilde{x})} (\omega_x \omega_{x^{-1}}) \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} 1_x \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}} \stackrel{(3.11)}{=} \sum_{(\tilde{x})} \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Dado $r' \in R$ temos

$$\begin{aligned} \alpha_x(r1_{x^{-1}})r' &= \sum_{(x)} (\omega_x r \omega_{x^{-1}}) r' = \sum_{(x)} \omega_x r \omega_{x^{-1}} 1_x r' = \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x r \omega_{x^{-1}} r' (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x r (\omega_{x^{-1}} r' \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \stackrel{r \in \mathcal{Z}}{=} \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x (\omega_{x^{-1}} r' \tilde{\omega}_x) r \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} (\omega_x \omega_{x^{-1}}) r' \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} 1_x r' \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} r' \tilde{\omega}_x r \tilde{\omega}_{x^{-1}} = r' \alpha_x(r1_{x^{-1}}) \end{aligned}$$

Logo, $\alpha_x(r1_{x^{-1}}) \in D_x = \mathcal{Z}1_x$.

Vejamos agora α_x é um isomorfismo com inverso $\alpha_{x^{-1}}$. Sejam $\bar{\omega}_x \in \Theta_x$ e $\bar{\omega}_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$, tais que $\sum_{(\bar{x})} \bar{\omega}_{x^{-1}} \bar{\omega}_x = 1_{x^{-1}}$. Então, dado $r \in D_x$, temos

$$\begin{aligned} (\alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}})(r) &= \alpha_x \left(\sum_{(\bar{x})} \bar{\omega}_{x^{-1}} r \bar{\omega}_x \right) = \sum_{(x), (\bar{x})} \omega_x (\bar{\omega}_{x^{-1}} r \bar{\omega}_x) \omega_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\bar{x})} (\omega_x \bar{\omega}_{x^{-1}}) r \bar{\omega}_x \omega_{x^{-1}} \stackrel{r \in \mathcal{Z}}{=} \sum_{(x), (\bar{x})} r (\omega_x \bar{\omega}_{x^{-1}}) \bar{\omega}_x \omega_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\bar{x})} r \omega_x (\bar{\omega}_{x^{-1}} \bar{\omega}_x) \omega_{x^{-1}} = \sum_{(x)} r \omega_x 1_{x^{-1}} \omega_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x)} r \omega_x \omega_{x^{-1}} = r 1_x = r. \end{aligned}$$

Analogamente, dado $r \in D_{x^{-1}}$, temos que $(\alpha_{x^{-1}} \circ \alpha_x)(r) = r$. Portanto, $\alpha_x^{-1} = \alpha_{x^{-1}}$. Dados $r, s \in D_x$ temos

$$\begin{aligned} \alpha_x(r)\alpha_x(s) &= \sum_{(x),(\tilde{x})} (\omega_x r \omega_{x^{-1}})(\tilde{\omega}_x s \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x),(\tilde{x})} \omega_x r (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x) s \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &\stackrel{s \in \mathcal{Z}}{=} \sum_{(x),(\tilde{x})} \omega_x r s (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x),(\tilde{x})} \omega_x r s \omega_{x^{-1}} (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x)} \omega_x r s \omega_{x^{-1}} 1_x \stackrel{(3.11)}{=} \sum_{(x)} \omega_x r s \omega_{x^{-1}} = \alpha_x(rs). \end{aligned}$$

Logo, α_x é um isomorfismo de anéis.

Dado $r \in D_y \cap D_{x^{-1}}$ e $1_{y^{-1}} = \sum_{(\bar{y})} \bar{\omega}_{y^{-1}} \bar{\omega}_y$, temos

$$\alpha_{y^{-1}}(r) = \sum_{(\bar{y})} \bar{\omega}_{y^{-1}} r \bar{\omega}_y = \sum_{(\bar{y})} \bar{\omega}_{y^{-1}} r 1_{x^{-1}} \bar{\omega}_y = \sum_{(\bar{y})} \bar{\omega}_{y^{-1}} r \bar{\omega}_y 1_{(xy)^{-1}} \in D_{(xy)^{-1}}.$$

Logo, temos $\alpha_{y^{-1}}(D_y \cap D_{x^{-1}}) \subseteq D_{(xy)^{-1}}$. Observe que

$$1_x 1_{xy} = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}} 1_{xy} = \sum_{(x)} \omega_x 1_y \omega_{x^{-1}} = \sum_{(x),(y)} \omega_x (\omega_y \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}. \quad (3.13)$$

Então, para $r \in D_{y^{-1}} \cap D_{(xy)^{-1}}$ temos

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(r) &= \sum_{(xy)} \omega_{xy} r \omega_{(xy)^{-1}}, \quad \text{onde } \sum_{(xy)} \omega_{xy} \omega_{(xy)^{-1}} = 1_{xy} \\ &\stackrel{r \in D_{y^{-1}}}{=} \sum_{(xy)} 1_{xy} \omega_{xy} 1_{y^{-1}} r \omega_{(xy)^{-1}} \stackrel{(3.10)}{=} \sum_{(xy)} 1_{xy} 1_x \omega_{xy} r \omega_{(xy)^{-1}} \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \sum_{\substack{(x),(y), \\ (xy)}} (\omega_x (\omega_y \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) \omega_{xy} r \omega_{(xy)^{-1}}. \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned} (\omega_x (\omega_y \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) \omega_{xy} r \omega_{(xy)^{-1}} &= \tau_{xy} \circ (\tau_x \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}}) \circ (\Theta_x \otimes \tau_y \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}}) \\ &\quad (\omega_x \otimes \omega_y \otimes \omega_{y^{-1}} \otimes \omega_{x^{-1}} \otimes \omega_{xy} r \otimes \omega_{(xy)^{-1}}) \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \tau_{xy} \circ (\tau_x \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}}) \circ (\Theta_x \otimes \tau_y \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}}) \\ &\quad (\omega_x \otimes \omega_y \otimes r \omega_{y^{-1}} \otimes \omega_{x^{-1}} \otimes \omega_{xy} \otimes \omega_{(xy)^{-1}}) \\ &= (\omega_x (\omega_y r \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) \omega_{xy} \omega_{(xy)^{-1}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(r) &= \sum_{\substack{(x),(y), \\ (xy)}} (\omega_x (\omega_y r \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) \omega_{xy} \omega_{(xy)^{-1}} \\ &= \sum_{(x),(y)} (\omega_x (\omega_y r \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) 1_{xy} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \sum_{(x),(y)} (\omega_x (\omega_y r \omega_{y^{-1}}) 1_y \omega_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x),(y)} (\omega_x (\omega_y r \omega_{y^{-1}}) \omega_{x^{-1}}) \\ &= \alpha_x \circ \alpha_y(r). \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha = (D_x, \alpha_x)_{x \in G}$ é uma ação parcial de G sobre $\mathcal{Z}$.

■

Lema 3.2.5. *Seja α a ação parcial sobre $\mathcal{Z}$ construída no Teorema 3.2.4. Então:*

(i) Para todo $u_x \in \Theta_x$ e $r \in \mathcal{Z}$ temos

$$\alpha_x(r1_{x^{-1}})u_x = u_x r. \quad (3.14)$$

(ii) Se $M|\Theta_x$, então para todo $m \in M$ e $r \in \mathcal{Z}$ temos

$$\alpha_x(r1_{x^{-1}})m = mr. \quad (3.15)$$

Demonstração. (i) Dado $r \in \mathcal{Z}$ e $u_x \in \Theta_x$ temos que

$$\begin{aligned} \alpha_x(r1_{x^{-1}})u_x &= \sum_{(x)} (\omega_x r \omega_{x^{-1}}) u_x \stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x)} \omega_x r (\omega_{x^{-1}} u_x) \\ &\stackrel{r \in \mathcal{Z}}{=} \sum_{(x)} \omega_x (\omega_{x^{-1}} u_x) r \stackrel{(3.12)}{=} \sum_{(x)} (\omega_x \omega_{x^{-1}}) u_x r \\ &= 1_x u_x r \stackrel{(3.11)}{=} u_x r. \end{aligned}$$

(ii) Sejam $f_i : M \rightarrow \Theta_x$ e $g_i : \Theta_x \rightarrow M$, com $i = 1, 2, \dots, n$ morfismos de R -bimódulos tais que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_M$. Dados $m \in M$ e $r \in \mathcal{Z}$ temos

$$\begin{aligned} mr &= \sum_{i=1}^n g_i(f_i(m))r = \sum_{i=1}^n g_i(\underbrace{f_i(m)}_{\in \Theta_x})r \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{i=1}^n g_i(\alpha_x(r1_{x^{-1}})f_i(m)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_x(r1_{x^{-1}})g_i(f_i(m)) \\ &= \alpha_x(r1_{x^{-1}})m. \end{aligned}$$

■

Observação 3.2.6. Para cada representação parcial unital $\Theta : G \rightarrow \mathbf{PicS}(R)$ construímos uma ação parcial α de G sobre $\mathcal{Z}$ como em (3.2.4). Consequentemente, temos os grupos de cohomologias parciais $H_{\Theta}^*(G, \alpha, \mathcal{Z})$ associados a essa ação. Seguindo o caso global, nas próximas seções vamos fixar uma representação parcial unital Θ e consequentemente a ação parcial sobre $\mathcal{Z}$.

Lema 3.2.7. *Seja $\Theta : G \rightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, onde $\Theta(x) = [\Theta_x]$, para todo $x \in G$. Existe um isomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aut}_{R-R}(1_y \Theta_x) & \xrightarrow{(\quad)} & \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x 1_y) \\ \sigma & \longmapsto & \tilde{\sigma}, \end{array}$$

onde

$$\tilde{\sigma} = \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}}, \quad (3.16)$$

com $\sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}} = 1_x$. Além disso, temos

$$\sigma(1_y u_x) = \tilde{\sigma} u_x, \quad \text{para todo } u_x \in \Theta_x. \quad (3.17)$$

Demonstração. Vejamos primeiro que $\tilde{\sigma}$ não depende da decomposição de 1_x . Sejam

$$1_x = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}},$$

com $\omega_x, \tilde{\omega}_x \in \Theta_x$ e $\omega_{x^{-1}}, \tilde{\omega}_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} = \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} 1_x = \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x) (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x (\omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y (\omega_x \omega_{x^{-1}}) \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} \sigma(1_y 1_x \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} \sigma(1_y \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Claramente $\tilde{\sigma} \in R 1_x 1_y$. Dado $r \in R$ temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} r &= \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} r = \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} r 1_x = \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} r (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x) (\omega_{x^{-1}} r \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x (\omega_{x^{-1}} r \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y (\omega_x \omega_{x^{-1}}) r \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} \sigma(1_y 1_x r \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} r \sigma(1_y \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}} = r \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Z} 1_x 1_y$. Resta ver que $\tilde{\sigma}$ é inversível em $\mathcal{Z} 1_x 1_y$. Como σ é isomorfismo, considere $\widetilde{\sigma^{-1}}$. Temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma^{-1}} \tilde{\sigma} &= \sum_{(x), (\tilde{x})} (\sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}}) (\sigma^{-1}(1_y \tilde{\omega}_x) \tilde{\omega}_{x^{-1}}) \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x) (\omega_{x^{-1}} \sigma^{-1}(1_y \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y \omega_x \omega_{x^{-1}} \sigma^{-1}(1_y \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} \sigma(1_y 1_x \sigma^{-1}(1_y \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} \sigma(\sigma^{-1}(1_y \tilde{\omega}_x)) \tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} 1_y \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}} = 1_y 1_x. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\widetilde{\sigma^{-1}} \tilde{\sigma} = 1_x 1_y$. Logo, $\tilde{\sigma} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z} 1_x 1_y)$. Além disso, dado $u_x \in \Theta_x$, temos:

$$\tilde{\sigma} u_x = \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x) \omega_{x^{-1}} u_x = \sum_{(x)} \sigma(1_y \omega_x \omega_{x^{-1}} u_x) = \sigma(1_y 1_x u_x) = \sigma(1_y u_x).$$

Portanto, vale (3.17).

Considere agora $r \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x1_y)$. Defina

$$\begin{array}{ccc} \sigma_r : & 1_y\Theta_x & \longrightarrow & 1_y\Theta_x \\ & v_x & \longmapsto & rv_x. \end{array}$$

Claramente σ_r é R -linear à direita. Como $r \in \mathcal{Z}$ temos que σ_r é R -linear à esquerda. De fato, dado $r' \in R$ temos

$$\sigma_r(r'v_x) = rr'v_x = r'r v_x = r'\sigma_r(v_x).$$

Seja r^{-1} o inverso de r em $\mathcal{Z}1_x1_y$, então $rr^{-1} = r^{-1}r = 1_x1_y$. Então, a inversa de σ_r é dada por

$$\begin{array}{ccc} \sigma_r^{-1} : & 1_y\Theta_x & \longrightarrow & 1_y\Theta_x \\ & v_x & \longmapsto & r^{-1}v_x. \end{array}$$

De fato, dado $v_x \in 1_y\Theta_x$, temos

$$\sigma_r^{-1}(\sigma_r(v_x)) = \sigma_r^{-1}(rv_x) = r^{-1}(rv_x) = (r^{-1}r)v_x = 1_x1_yv_x = v_x.$$

Analogamente, $\sigma_r(\sigma_r^{-1}(v_x)) = v_x$, para todo $v_x \in 1_y\Theta_x$. Logo, $\sigma_r \in \mathbf{Aut}_{R-R}(1_y\Theta_x)$. Observe agora que

$$\widetilde{\sigma_r} = \sum_{(x)} \sigma_r(1_y\omega_x)\omega_{x^{-1}} = \sum_{(x)} r1_y\omega_x\omega_{x^{-1}} = r1_y1_x = r.$$

Por outro lado, dado $\sigma \in \mathbf{Aut}_{R-R}(1_y\Theta_x)$ considere

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & 1_y\Theta_x & \longrightarrow & 1_y\Theta_x \\ & v_x & \longmapsto & \widetilde{\sigma}v_x. \end{array}$$

Por (3.17) temos:

$$\gamma(v_x) = \widetilde{\sigma}v_x = \sigma(1_yv_x) = \sigma(v_x), \text{ para todo } v_x \in 1_y\Theta_x.$$

Logo, $\gamma = \sigma$ e portanto $\widetilde{(-)}$ é um isomorfismo.

Resta verificar que $\widetilde{(-)}$ é um morfismo de grupos. Sejam $\sigma, \gamma \in \mathbf{Aut}_{R-R}(1_y\Theta_x)$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma\gamma} &= \sum_{(x), (\tilde{x})} (\sigma(1_y\omega_x)\omega_{x^{-1}})(\gamma(1_y\tilde{\omega}_x)\tilde{\omega}_{x^{-1}}) = \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y\omega_x)(\omega_{x^{-1}}\gamma(1_y\tilde{\omega}_x))\tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \sigma(1_y\omega_x\omega_{x^{-1}}\gamma(1_y\tilde{\omega}_x))\tilde{\omega}_{x^{-1}} = \sum_{(\tilde{x})} \sigma(1_y1_x\gamma(1_y\tilde{\omega}_x))\tilde{\omega}_{x^{-1}} \\ &= \sum_{(\tilde{x})} \sigma(\gamma(1_y\tilde{\omega}_x))\tilde{\omega}_{x^{-1}} = \widetilde{\sigma \circ \gamma}. \end{aligned}$$

■

Vamos agora construir uma ação parcial sobre $\mathbf{PicS}(R)$: Seja $\mathcal{X}_x = [R1_x]\mathbf{PicS}(R)[R1_x]$ e

$$\begin{array}{ccc} \alpha_x^* : & \mathcal{X}_{x^{-1}} & \longrightarrow & \mathcal{X}_x \\ & [P] & \longmapsto & [\Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}}] \end{array} .$$

Pela Proposição 3.1.3, temos que $\alpha^* = (\mathcal{X}_x, \alpha_x^*)$ é uma ação parcial sobre $\mathbf{PicS}(R)$. Observe que se $[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$, então pelo Corolário 2.3.6, temos que $P \otimes_R R1_x \simeq R1_x \otimes_R P$, como R -bimódulos, para todo $x \in G$. Logo, $[R1_x]$ é um idempotente central em $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$. Além disso, se $[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$, então $[\Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}}] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$. De fato, basta verificar que $\Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}}$ também é $\mathcal{Z}$ -bimódulo

central. Sejam $p \in P$, $u_x \in \Theta_x$, $u_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$ e $r \in \mathcal{Z}$, então por P ser $\mathcal{Z}$ -bimódulo central e por (3.14) temos

$$\begin{aligned} u_x \otimes p \otimes u_{x^{-1}} r &= u_x \otimes p \otimes \alpha_{x^{-1}}(r1_x)u_{x^{-1}} = u_x \otimes p\alpha_{x^{-1}}(r1_x) \otimes u_{x^{-1}} \\ &= u_x \otimes \alpha_{x^{-1}}(r1_x)p \otimes u_{x^{-1}} = u_x\alpha_{x^{-1}}(r1_x) \otimes p \otimes u_{x^{-1}} \\ &= \alpha_x(\alpha_{x^{-1}}(r1_x))u_x \otimes p \otimes u_{x^{-1}} = r1_x u_x \otimes p \otimes u_{x^{-1}} \\ &= ru_x \otimes p \otimes u_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Assim, restringindo a ação parcial acima a $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$, temos que $\mathcal{X}_x = \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)[R1_x]$ é o ideal de $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$ gerado pelo idempotente central $[R1_x]$ e

$$\begin{aligned} \alpha_x^* : \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)[R1_{x^{-1}}] &\longrightarrow \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)[R1_x] \\ [P][R1_{x^{-1}}] &\longmapsto [\Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}}] \end{aligned}$$

está bem definido. Portanto, $\alpha^* = (\mathcal{X}_x, \alpha_x^*)$ é uma ação parcial sobre $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$.

O conjunto dos invariantes de $\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$ é dado por

$$\mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} = \{[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R); \Theta_x \otimes_R P \simeq P \otimes_R \Theta_x, \text{ para todo } x \in G\}. \quad (3.18)$$

De fato, $[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$ se, e somente se, $\alpha_x^*([P][R1_{x^{-1}}]) = [P][R1_x]$, para todo $x \in G$. Segue que:

$$\begin{aligned} [P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} &\Leftrightarrow \Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq P \otimes_R R1_x, \text{ para todo } x \in G; \\ &\Leftrightarrow \Theta_x \otimes_R P \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \simeq P \otimes_R R1_x \otimes_R \Theta_x, \text{ para todo } x \in G; \\ &\Leftrightarrow \Theta_x \otimes_R P \otimes_R R1_{x^{-1}} \simeq P \otimes_R \Theta_x, \text{ para todo } x \in G; \\ &\Leftrightarrow \Theta_x \otimes_R R1_{x^{-1}} \otimes_R P \simeq P \otimes_R \Theta_x, \text{ para todo } x \in G; \\ &\Leftrightarrow \Theta_x \otimes_R P \simeq P \otimes_R \Theta_x, \text{ para todo } x \in G. \end{aligned}$$

3.3 Produto cruzado generalizado parcial

Seja

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longrightarrow [\Theta_x] \end{aligned}$$

uma representação parcial unital com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. Pelo Lema 3.2.1 existe uma família de isomorfismos de R -bimódulos

$$f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}. \quad (3.19)$$

Dizemos que f^Θ é um *conjunto de fatores* para Θ se o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_z & \xrightarrow{\Theta_x \otimes f_{y,z}^\Theta} & \Theta_x \otimes_R 1_y \Theta_{yz} = 1_{xy} \Theta_x \otimes_R \Theta_{yz} \\ \downarrow f_{x,y}^\Theta \otimes \Theta_z & & \downarrow f_{x,yz}^\Theta \\ 1_x \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_z & \xrightarrow{f_{xy,z}^\Theta} & 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz} \end{array} \quad (3.20)$$

Observação 3.3.1. Se $x = 1$, então temos o isomorfismo de R -bimódulos $f_{1,x}^\Theta : \Theta_1 \otimes_R \Theta_y \longrightarrow R\Theta_y \simeq \Theta_y$, para todo $y \in G$. Se $y = 1$, então $f_{x,1}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_1 \longrightarrow 1_x \Theta_x \simeq \Theta_x$ é um isomorfismo de R -bimódulos, para todo $x \in G$.

Se $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ é um conjunto de fatores para Θ , então $\Delta(\Theta) = \bigoplus_{x \in G} \Theta_x$ com a multiplicação

$$u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y = f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y) \in 1_x \Theta_{xy}, \quad u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, \quad (3.21)$$

é chamado de *produto cruzado generalizado parcial*.

Proposição 3.3.2. Sejam $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$, e $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$, um conjunto de fatores para Θ . Então, o produto cruzado generalizado parcial $\Delta(\Theta)$ é um anel associativo com unidade que tem $R \simeq \Theta_1$ como subanel.

Demonstração. Como $f_{1,1}^\Theta : \Theta_1 \otimes_R \Theta_1 \longrightarrow \Theta_1$, então Θ_1 é um subanel de $\Delta(\Theta)$. Por Θ ser representação parcial, temos $[\Theta_1] = [R]$, assim existe $j : R \longrightarrow \Theta_1$ um isomorfismo de R -bimódulos. Denote $v = j(1)$, então $\Theta_1 = j(R) = Rv = vR$ e temos

$$rv = rj(1) = j(r) = j(1)r = vr, \quad \text{para todo } r \in R.$$

Seja $c \in R$ tal que $f_{1,1}^\Theta(v \otimes v) = cv$.

Afirmção 3.3.3. $c \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$.

De fato, seja $r \in R$ tal que $rv = 0$, então $0 = rv = rj(1) = j(r)$. Como j é isomorfismo devemos ter $r = 0$. Seja $r \in R$ qualquer, então

$$rcv = rf_{1,1}^\Theta(v \otimes v) = f_{1,1}^\Theta(rv \otimes v) = f_{1,1}^\Theta(v \otimes vr) = f_{1,1}^\Theta(v \otimes v)r = vcr = crv,$$

assim, $(rc - cr)v = 0$ o que implica que $rc = cr$, para todo $r \in R$. Logo, $c \in \mathcal{Z}$.

Como $f_{1,1}^\Theta$ é isomorfismo, então existe $d \in R$ tal que $(f_{1,1}^\Theta)^{-1}(v) = dv \otimes v$. Então,

$$dcv = df_{1,1}^\Theta(v \otimes v) = f_{1,1}^\Theta(dv \otimes v) = f_{1,1}^\Theta(f_{1,1}^\Theta)^{-1}(v) = v.$$

Logo, $dc = cd = 1$. Portanto, $c \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$.

Denote $u = c^{-1}v \in \Theta_1$, então $ru = rc^{-1}v = c^{-1}vr = ur$, para todo $r \in R$ e temos

$$f_{1,1}^\Theta(u \otimes u) = f_{1,1}^\Theta(c^{-1}v \otimes c^{-1}v) = c^{-1}f_{1,1}^\Theta(v \otimes v)c^{-1} = c^{-1}cvc^{-1} = vc^{-1} = u. \quad (3.22)$$

Defina $\iota : R \longrightarrow \Theta_1$, por $\iota(r) = ru$. Então ι é um isomorfismo de R -bimódulos. Além disso, dados $r, r' \in R$ temos

$$\iota(r) \overset{\Theta}{\circ} \iota(r') = f_{1,1}^\Theta(ru \otimes r'u) = rr' f_{1,1}^\Theta(u \otimes u) \stackrel{(3.22)}{=} rr'u = \iota(rr').$$

Logo, ι é isomorfismo de anéis.

Vejamos que $\iota(1) = u \in \Theta_1$ é a unidade de $\Delta(\Theta)$. Seja $u_x \in \Theta_x$, $x \in G$. Como $f_{1,x}^\Theta : \Theta_1 \otimes_R \Theta_x \longrightarrow \Theta_x$ é um isomorfismo de R -bimódulos, então existe $\sum_{i=1}^n ur_i \otimes u_x^i = u \otimes \tilde{u}_x \in \Theta_1 \otimes_R \Theta_x$, onde $\tilde{u}_x = \sum_{i=1}^n r_i u_x^i$, tal que $f_{1,x}^\Theta(u \otimes \tilde{u}_x) = u_x$. Então,

$$\begin{aligned} (u \overset{\Theta}{\circ} u_x) &= f_{1,x}^\Theta(u \otimes u_x) = f_{1,x}^\Theta(u \otimes f_{1,x}^\Theta(u \otimes \tilde{u}_x)) \\ &= f_{1,x}^\Theta(f_{1,1}^\Theta(u \otimes u) \otimes \tilde{u}_x) \\ &\stackrel{(3.22)}{=} f_{1,x}^\Theta(u \otimes \tilde{u}_x) = u_x. \end{aligned}$$

Analogamente, como $f_{x,1}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_1 \longrightarrow \Theta_x$ é isomorfismo, então existe $\overline{u_x} \in \Theta_x$ tal que $f_{x,1}^\Theta(\overline{u_x} \otimes u) = u_x$, então

$$\begin{aligned} (u_x \circ^\Theta u) &= f_{x,1}^\Theta(u_x \otimes u) = f_{x,1}^\Theta(f_{x,1}^\Theta(\overline{u_x} \otimes u) \otimes u) \\ &= f_{x,1}^\Theta(\overline{u_x} \otimes f_{1,1}^\Theta(u \otimes u)) \\ &= f_{x,1}^\Theta(\overline{u_x} \otimes u) = u_x. \end{aligned}$$

Portanto, u é unidade para $\Delta(\Theta)$. ■

Observação 3.3.4. *Sejam $\Delta(\Theta)$ um produto cruzado generalizado parcial e $\iota : R \longrightarrow \Theta_1$ isomorfismo de R -bimódulos e de anéis tal que $\iota(1) = u \in \Theta_1$ é unidade para $\Delta(\Theta)$, como na proposição acima. Então os diagramas*

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_R \Theta_x & \xrightarrow{\simeq} & \Theta_x \\ \downarrow \iota \otimes \Theta_x & & \uparrow f_{1,x}^\Theta \\ & \Theta_1 \otimes_R \Theta_x & \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \Theta_x \otimes_R R & \xrightarrow{\simeq} & \Theta_x \\ \downarrow \Theta_x \otimes \iota & & \uparrow f_{x,1}^\Theta \\ & \Theta_x \otimes_R \Theta_1 & \end{array} \quad (3.23)$$

são comutativos. De fato, dados $r \in R$ e $u_x \in \Theta_x$ temos

$$(f_{1,x}^\Theta \circ (\iota \otimes \Theta_x))(r \otimes u_x) = f_{1,x}^\Theta(\iota(r) \otimes u_x) = r f_{1,x}^\Theta(\iota(1) \otimes u_x) = r u_x.$$

Analogamente,

$$(f_{x,1}^\Theta \circ (\Theta_x \otimes \iota))(u_x \otimes r) = f_{x,1}^\Theta(u_x \otimes \iota(r)) = f_{x,1}^\Theta(u_x \otimes \iota(1))r = u_x r.$$

Vamos identificar R com Θ_1 , via o isomorfismo de anéis ι , e 1 com $\iota(1) = u \in \Theta_1$. Então, $R \subseteq \Delta(\Theta)$ é uma extensão de anéis com mesma unidade.

A partir daqui vamos fixar uma representação parcial unital

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longrightarrow [\Theta_x] \end{aligned}$$

com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R 1_x$, para todo $x \in G$. Dado uma família de isomorfismos de R -bimódulos $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$, vamos estabelecer uma condição para que f^Θ seja um conjunto de fatores para Θ . Para isso, vamos supor que f^Θ satisfaz os diagramas comutativos (3.23).

Proposição 3.3.5. *Seja $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ uma família de isomorfismos de R -bimódulos que satisfaz os diagramas comutativos dados em (3.23). Dados $x, y, z \in G$ defina o isomorfismo de R -bimódulos $\beta_{x,y,z} : 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz} \longrightarrow 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz}$ via o diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Theta_z & \xrightarrow{f_{x,y}^\Theta \otimes \Theta_z} & 1_x \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_z \\ \downarrow \Theta_x \otimes f_{y,z}^\Theta & & \downarrow f_{xy,z}^\Theta \\ 1_{xy} \Theta_x \otimes_R \Theta_{yz} & & 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz} \\ & \searrow f_{x,yz}^\Theta & \nearrow \beta_{x,y,z} \\ & 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz} & \end{array}$$

ou seja,

$$\beta_{x,y,z} \circ f_{x,yz}^{\Theta} \circ (\Theta_x \otimes f_{y,z}^{\Theta}) = f_{xy,z}^{\Theta} \circ (f_{x,y}^{\Theta} \otimes \Theta_z), \quad \forall x, y, z \in G. \quad (3.24)$$

Então,

$$\widetilde{\beta_{-, -, -}} : G \times G \times G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{Z}), \\ (x, y, z) \longmapsto \widetilde{\beta_{x,y,z}},$$

onde $\widetilde{\beta_{x,y,z}}$ é definida como no Lema 3.2.7, é um elemento normalizado de $Z_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Além disso, se $\widetilde{\beta_{-, -, -}} \in B_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$, ou seja, se existe $\sigma_{-, -} : G \times G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{Z})$, com $\sigma_{x,y} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x1_{xy})$ e

$$\widetilde{\beta_{x,y,z}} = \alpha_x(\sigma_{y,z}1_{x^{-1}})\sigma_{xy,z}^{-1}\sigma_{x,yz}\sigma_{x,y}^{-1}, \quad \text{para todo } x, y, z \in G, \quad (3.25)$$

então a família de isomorfismos de R -bimódulos

$$\bar{f}_{x,y}^{\Theta} : \begin{array}{ccc} \Theta_x \otimes_R \Theta_y & \longrightarrow & 1_x \Theta_{x,y} \\ u_x \otimes u_y & \longmapsto & \sigma_{x,y} f_{x,y}^{\Theta}(u_x \otimes u_y) \end{array}$$

é um conjunto de fatores para Θ .

Demonstração. Como $\beta_{x,y,z} \in \mathbf{Aut}_{R-R}(1_x1_{xy}\Theta_{xyz})$, então pelo Lema 3.2.7, temos que $\widetilde{\beta_{x,y,z}} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x1_{xy}1_{xyz})$, para todo $x, y, z \in G$. Vamos denotar $f_{x,y}^{\Theta}(u_x \otimes u_y) = (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)$. Por (3.24), temos

$$\beta_{x,y,z}((u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z))) = ((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z),$$

para todo $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y$ e $u_z \in \Theta_z$. Como $(u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \in 1_x1_{xy}\Theta_{xyz}$, então por (3.17)

$$\widetilde{\beta_{x,y,z}}(u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) = ((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z). \quad (3.26)$$

Sejam $x, y, z, t \in G$ e $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, u_z \in \Theta_z$ e $u_t \in \Theta_z$. Então,

$$\begin{aligned} (((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \overset{\Theta}{\circ} u_t) &\stackrel{(3.26)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z}}((u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \overset{\Theta}{\circ} u_t) \\ &\stackrel{(3.26)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}}(u_x \overset{\Theta}{\circ} ((u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z) \overset{\Theta}{\circ} u_t)) \\ &\stackrel{(3.26)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}}(u_x \overset{\Theta}{\circ} \widetilde{\beta_{y,z,t}}(u_y \overset{\Theta}{\circ} (u_z \overset{\Theta}{\circ} u_t))) \\ &= \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}}(u_x \widetilde{\beta_{y,z,t}} \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} (u_z \overset{\Theta}{\circ} u_t))) \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}})(u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} (u_z \overset{\Theta}{\circ} u_t))) \\ &\stackrel{(3.26)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,zt}}^{-1} ((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} (u_z \overset{\Theta}{\circ} u_t)) \\ &\stackrel{(3.26)}{=} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,zt}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} (((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \overset{\Theta}{\circ} u_t) \end{aligned}$$

Assim,

$$(((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \overset{\Theta}{\circ} u_t) = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,zt}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} (((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \overset{\Theta}{\circ} u_t),$$

para todo $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, u_z \in \Theta_z$ e $u_t \in \Theta_z$.

Considere

$$1_x = \sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}), \quad \omega_x \in \Theta_x, \omega_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}},$$

$$1_y = \sum_{(y)} (\omega_y \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}}), \quad \omega_y \in \Theta_y, \omega_{y^{-1}} \in \Theta_{y^{-1}},$$

$$1_z = \sum_{(z)} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}}), \quad \omega_z \in \Theta_z, \omega_{z^{-1}} \in \Theta_{z^{-1}},$$

$$1_t = \sum_{(t)} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}}), \quad \omega_t \in \Theta_t, \omega_{t^{-1}} \in \Theta_{t^{-1}}.$$

Então,

$$(((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_t) = \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_t),$$

Aplicando $f_{xyz,t,t^{-1}}^\ominus$, temos:

$$(((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_t) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}} = \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_t) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}}$$

Por (3.26)

$$\begin{aligned} & \widetilde{\beta_{xyz,t,t^{-1}}} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \\ &= \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xyz,t,t^{-1}}} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\widetilde{\beta_{xyz,t,t^{-1}}}^{-1}$:

$$\begin{aligned} & 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \\ &= \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \\ &= \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \end{aligned}$$

Somando em (t) e usando que o diagrama (3.23) é comutativo:

$$\begin{aligned} & \sum_{(t)} 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \\ &= \sum_{(t)} \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_t \overset{\ominus}{\circ} \omega_{t^{-1}})) \\ & 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) 1_t = \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) 1_t \\ & 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) = \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) \\ & 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) = \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z)) \end{aligned}$$

Analogamente, aplicando $f_{xyz,z^{-1}}^\ominus$, multiplicando por $\widetilde{\beta_{xyz,z,z^{-1}}}$ e somando em (t) :

$$\begin{aligned} & \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{xyz,z,z^{-1}}}^{-1} 1_{xyz} 1_{xyzt} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}}) \\ &= \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{x,y,z,z^{-1}}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z}} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t}} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} (((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_z) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}}) \end{aligned}$$

Por (3.26),

$$\begin{aligned}
& \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{xy,z,z^{-1}}}^{-1} 1_{xyz} 1_{xyzt} \widetilde{\beta_{xy,z,z^{-1}}} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&= \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{xy,z,z^{-1}}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,z^{-1}}} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&= \sum_{(z)} 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_{xy} 1_{xyz} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&= \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} 1_{xy} 1_{xyz} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&= \sum_{(z)} 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&= \sum_{(z)} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} (\omega_z \overset{\ominus}{\circ} \omega_{z^{-1}})) \\
&1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) 1_z = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) 1_z \\
&1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_{xyz} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} 1_{xyz} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \\
&1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y)
\end{aligned}$$

Aplicando $f_{xy,y^{-1}}^{\ominus}$, multiplicando por $\widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}}^{-1}$ e somando em (y) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(y)} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}}^{-1} 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}}) \\
&= \sum_{(y)} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} ((\omega_x \overset{\ominus}{\circ} \omega_y) \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}})
\end{aligned}$$

Por (3.26),

$$\begin{aligned}
& \sum_{(y)} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}}^{-1} 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} (\omega_y \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}})) \\
&= \sum_{(y)} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{x,y,y^{-1}}} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} (\omega_y \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}})) \\
&= \sum_{(y)} 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_x 1_{xy} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} (\omega_y \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}})) \\
&= \sum_{(y)} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} 1_x 1_{xy} (\omega_x \overset{\ominus}{\circ} (\omega_y \overset{\ominus}{\circ} \omega_{y^{-1}})) \\
&1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} \omega_x 1_y = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} \omega_x 1_y \\
&1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_{xy} \omega_x = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,y,z,t} \alpha_x(\widetilde{\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}}^{-1} \widetilde{\beta_{xy,z,t}}^{-1} 1_{xy} \omega_x
\end{aligned}$$

$$1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} \omega_x = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t} \alpha_x (\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}^{-1} \beta_{xy,z,t}^{-1} \omega_x}$$

Por fim, apliando $f_{x,x^{-1}}^\Theta$ e somando em (x) :

$$\sum_{(x)} 1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) = \sum_{(x)} \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t} \alpha_x (\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}^{-1} \beta_{xy,z,t}^{-1}} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}})$$

$$1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} 1_x = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t} \alpha_x (\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}^{-1} \beta_{xy,z,t}^{-1}} 1_x$$

$$1_x 1_{xy} 1_{xyz} 1_{xyzt} = \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t} \alpha_x (\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}})} \widetilde{\beta_{x,y,z,t}^{-1} \beta_{xy,z,t}^{-1}}, \quad \forall x, y, z, t \in G.$$

$$\alpha_x (\beta_{y,z,t} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z} \beta_{x,yz,t}} = \widetilde{\beta_{x,y,z,t} \beta_{xy,z,t}}, \quad \forall x, y, z, t \in G.$$

Logo, $\widetilde{\beta_{-, -, -}} \in Z_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

Vejamos que $\widetilde{\beta_{-, -, -}}$ é normalizado. Seja $x = 1$, por (3.26) e pela comutatividade dos diagramas em (3.23), temos $\widetilde{\beta_{1,y,z}} (ru_y \overset{\Theta}{\circ} u_z) = (ru_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)$, para todo $r \in R$, $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Fazendo $r = 1$ e seguindo o argumento acima, temos $\widetilde{\beta_{1,y,z}} = 1_y 1_{yz}$. Analogamente, temos

$$\widetilde{\beta_{x,1,z}} = 1_x 1_{xz} \quad \text{e} \quad \widetilde{\beta_{x,y,1}} = 1_x 1_{xy}, \quad \text{para todos } x, y, z \in G.$$

Portanto, $\widetilde{\beta_{-, -, -}}$ é um elemento normalizado em $Z_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

Vamos verificar que $\bar{f}^\Theta = \{\bar{f}_{x,y}^\Theta, x, y \in G\}$ é um conjunto de fatores para Θ . Sejam $x, y, z \in G$ e $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, u_z \in \Theta_z$, então

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x,yz}^\Theta(u_x \otimes \bar{f}_{y,z}^\Theta(u_y \otimes u_z)) &= \sigma_{x,yz}(u_x \overset{\Theta}{\circ} \sigma_{y,z}(u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \\ &= \sigma_{x,yz}(u_x \sigma_{y,z} \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \\ (3.14) \quad &= \sigma_{x,yz}(\alpha_x(\sigma_{y,z} 1_{x^{-1}}) u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \\ &= \sigma_{x,yz} \alpha_x(\sigma_{y,z} 1_{x^{-1}}) (u_x \overset{\Theta}{\circ} (u_y \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \\ &= \sigma_{x,yz} \alpha_x(\sigma_{y,z} 1_{x^{-1}}) \widetilde{\beta_{x,y,z}} ((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \\ (3.25) \quad &= \sigma_{xy,z} \sigma_{x,yz} ((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \\ &= \sigma_{xy,z} (\sigma_{x,yz} (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \\ &= \bar{f}_{xy,z}^\Theta (\bar{f}_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y) \otimes u_z). \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{f}^\Theta = \{\bar{f}_{x,y}^\Theta, x, y \in G\}$ é um conjunto de fatores para Θ . ■

Corolário 3.3.6. *Seja $\Gamma : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \simeq R 1_x$ e $\Gamma_x |_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$. Sejam $f^\Gamma = \{f_{x,y}^\Gamma : \Gamma_x \otimes \Gamma_y \longrightarrow 1_x \Gamma_{xy}, x, y \in G\}$ uma família de isomorfismos de R -bimódulos que satisfaz os diagramas comutativos em (3.23) e $\beta_{x,y,z}^\Gamma : 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz} \longrightarrow 1_x 1_{xy} \Theta_{xyz}$ isomorfismo de R -bimódulos que satisfaz*

$$\beta_{x,y,z}^\Gamma \circ f_{x,yz}^\Gamma \circ (\Theta_x \otimes f_{y,z}^\Gamma) = f_{xy,z}^\Gamma \circ (f_{x,y}^\Gamma \otimes \Theta_z), \quad \forall x, y, z \in G.$$

Então $\widetilde{\beta_{-, -, -}^\Gamma} \in Z_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

Demonstração. Segue da demonstração da Proposição 3.3.5 e de (3.15). ■

O próximo resultado garante a unicidade da classe do 3-cociclo dado no Corolário 3.3.6 em $H_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

Proposição 3.3.7. *Seja $\Gamma : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ uma representação parcial unital com $\Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \simeq R1_x$ e $\Gamma_x | \Theta_x$, para todo $x \in G$, e $f^\Gamma = \{f_{x,y}^\Gamma : \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \longrightarrow 1_x \Gamma_{xy}, x, y \in G\}$ uma família de isomorfismos de R -bimódulos que satisfaz os diagramas comutativos em (3.23). Então a classe $[\widetilde{\beta_{-, -, -}^\Gamma}]$ em $H_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ não depende da escolha de representante em $[\Gamma_x]$ e nem da família de isomorfismos de R -bimódulos f^Γ .*

Demonstração. Seja $\Omega_x \in [\Gamma_x]$, então existe um isomorfismo de R -bimódulos $a_x : \Omega_x \longrightarrow \Gamma_x$, para todo $x \in G$. Sejam

$$f^\Omega = \{f_{x,y}^\Omega : \Omega_x \otimes_R \Omega_y \longrightarrow 1_x \Omega_{xy}, x, y \in G\}, \quad f^\Gamma = \{f_{x,y}^\Gamma : \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \longrightarrow 1_x \Gamma_{xy}, x, y \in G\}$$

família de isomorfismos de R -bimódulos que satisfazem os diagramas comutativos em (3.23) e $\widetilde{\beta_{-, -, -}^\Omega}$ e $\widetilde{\beta_{-, -, -}^\Gamma}$ os 3-cociclos associados a f^Ω e f^Γ , respectivamente. Por definição temos que

$$\beta_{x,y,z}^\Omega \circ f_{x,yz}^\Omega \circ (\Omega_x \otimes f_{y,z}^\Omega) = f_{xy,z}^\Omega \circ (f_{x,y}^\Omega \otimes \Omega_z),$$

$$\beta_{x,y,z}^\Gamma \circ f_{x,yz}^\Gamma \circ (\Gamma_x \otimes f_{y,z}^\Gamma) = f_{xy,z}^\Gamma \circ (f_{x,y}^\Gamma \otimes \Gamma_z).$$

Seja $b_{x,y} : 1_x \Omega_{xy} \longrightarrow 1_x \Gamma_{xy}$ o isomorfismo de R -bimódulos definido via o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_x \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Omega} & 1_x \Omega_{xy} \\ a_x \otimes a_y \downarrow & & \downarrow b_{x,y} \\ \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Gamma} & 1_x \Gamma_{xy} \\ & \nearrow a_{xy}^{-1} & \end{array}$$

ou seja,

$$a_{xy} \circ b_{x,y} \circ f_{x,y}^\Omega = f_{x,y}^\Gamma \circ (a_x \otimes a_y), \quad \forall x, y \in G.$$

Seja $\widetilde{b_{x,y}} \in \mathcal{U}(Z1_x 1_{xy})$ a imagem de $b_{x,y}$ via o isomorfismo do Lema 3.2.7. Por (3.17) temos $\widetilde{b_{x,y}} t_{xy} = b_{x,y}(1_x t_{xy})$, para todo $t_{xy} \in \Omega_{xy}$. Denotando $f_{x,y}^\Omega(t_x \otimes t_y) = (t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y)$ e $f_{x,y}^\Gamma(v_x \otimes v_y) = (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y)$, temos

$$\widetilde{\beta_{x,y,z}^\Omega}(t_x \overset{\Omega}{\circ} (t_y \overset{\Omega}{\circ} t_z)) = ((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z), \quad (3.27)$$

$$\widetilde{\beta_{x,y,z}^\Gamma}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} (v_y \overset{\Gamma}{\circ} v_z)) = ((v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z), \quad (3.28)$$

$$\widetilde{b_{x,y}} a_{xy}(t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) = (a_x(t_x) \overset{\Gamma}{\circ} a_y(t_y)). \quad (3.29)$$

Dados $x, y, z \in G$ e $t_x \in \Omega_x, t_y \in \Omega_y, t_z \in \Omega_z$ temos:

$$\begin{aligned}
a_{xyz}((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z) &\stackrel{(3.29)}{=} \widetilde{b_{xy,z}(a_{xy}(t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Gamma}{\circ} a_z(t_z))} \\
&\stackrel{(3.29)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}}((a_x(t_x) \overset{\Gamma}{\circ} a_y(t_y)) \overset{\Gamma}{\circ} a_z(t_z))} \\
&\stackrel{(3.28)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}}(a_x(t_x) \overset{\Gamma}{\circ} (a_y(t_y) \overset{\Gamma}{\circ} a_z(t_z)))} \\
&\stackrel{(3.29)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}}(a_x(t_x) \overset{\Gamma}{\circ} \widetilde{b_{y,z} a_{yz}(t_y \overset{\Omega}{\circ} t_z)})} \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}})(a_x(t_x) \overset{\Gamma}{\circ} a_{yz}(t_y \overset{\Omega}{\circ} t_z))} \\
&\stackrel{(3.29)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz} a_{xyz}(t_x \overset{\Omega}{\circ} (t_y \overset{\Omega}{\circ} t_z))}} \\
&\stackrel{(3.27)}{=} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz} \beta_{x,y,z}^{\Omega}}^{-1} a_{xyz}((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z)} \\
&= a_{xyz}(\widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz} \beta_{x,y,z}^{\Omega}}^{-1} ((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z)).
\end{aligned}$$

Como a_{xyz} é isomorfismo segue que

$$((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z) = \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz} \beta_{x,y,z}^{\Omega}}^{-1} ((t_x \overset{\Omega}{\circ} t_y) \overset{\Omega}{\circ} t_z),$$

para todo $t_x \in \Omega_x, t_y \in \Omega_y, t_z \in \Omega_z$. Usando o mesmo argumento da Proposição 3.3.5 obtemos que:

$$\widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz} \beta_{x,y,z}^{\Omega}}^{-1} = 1_x 1_{xy} 1_{xyz}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Omega}} &= \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} \widetilde{b_{xy,z} \widetilde{b_{x,y}^{-1}} \alpha_x(\widetilde{b_{y,z} 1_{x^{-1}}}) \widetilde{b_{x,yz}}}} \\
&= \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} (\delta^2 b_{-, -})(x, y, z)},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\widetilde{b_{-, -}} : G \times G &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{Z}) \\
(x, y) &\longmapsto \widetilde{b_{x,y}} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z} 1_x 1_{xy}).
\end{aligned}$$

Portanto, $[\widetilde{\beta_{-, -, -}^{\Omega}}] = [\widetilde{\beta_{-, -, -}^{\Gamma}}]$ em $H_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

■

O próximo lema é um resultado técnico que mostra como construir uma representação parcial unital a partir de outras dadas e como relacionar os 3-cociclos associados a essas representações. Em particular, mostramos como construir um produto cruzado generalizado parcial a partir de outros produtos dados.

Lema 3.3.8. *Sejam $\Theta, \Omega, \Gamma : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ representações parciais unitais com $\Gamma_x | \Theta_x, \Omega_x | \Theta_x$ e $\Omega_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \simeq \Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R 1_x$, para todo $x \in G$. Seja $f^{\Theta} = \{f_{x,y}^{\Theta} : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ um conjunto de fatores para Θ e*

$$f^{\Gamma} = \{f_{x,y}^{\Gamma} : \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \longrightarrow 1_x \Gamma_{xy}, x, y \in G\}, f^{\Omega} = \{f_{x,y}^{\Omega} : \Omega_x \otimes_R \Omega_y \longrightarrow 1_x \Omega_{xy}, x, y \in G\}$$

famílias de isomorfismos de R -bimódulos que satisfazem os diagramas comutativos em (3.23) e $\widetilde{\beta_{-, -, -}^{\Gamma}}$ e $\widetilde{\beta_{-, -, -}^{\Omega}}$ os 3-cociclos em $Z_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ associados a f^{Γ} e f^{Ω} , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
\Lambda : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\
x &\longmapsto [\Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x]
\end{aligned}$$

é uma representação parcial unital com $\Lambda_x \otimes_R \Lambda_{x^{-1}} \simeq R1_x$ e $\Lambda_x|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$. O 3-cociclo associado à família de isomorfismos de R -bimódulos $f^\Lambda = \{f_{x,y}^\Lambda : \Lambda_x \otimes_R \Lambda_y \longrightarrow 1_x \Lambda_{xy}, x, y \in G\}$ definido por

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{\Gamma_x \otimes T_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x, \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y}} & \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Omega_y \\
 & & \downarrow f_{x,y}^\Gamma \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,y}^\Omega \\
 & & 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R 1_x \Omega_{xy} \\
 & \searrow f_{x,y}^\Lambda & \parallel \\
 & & 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy}
 \end{array}$$

onde $T_{-, -}$ é o isomorfismo da Proposição 2.3.5, é dado por $\widetilde{\beta_{-, -, -}^\Lambda} = \widetilde{\beta_{-, -, -}^\Gamma} \widetilde{\beta_{-, -, -}^\Omega}$. Se f^Γ e f^Ω são conjuntos de fatores para Γ e Ω , respectivamente, então f^Λ é um conjunto de fatores para Λ e temos que $\Delta(\Lambda)$ é um produto cruzado generalizado parcial.

Demonstração. Claramente $\Lambda_1 = R$. Sejam $x, y \in G$ então

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{x^{-1}} \otimes_R \Lambda_x \otimes_R \Lambda_y &\simeq \Gamma_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R R1_x \otimes_R \Lambda_{xy} \\
 &\simeq \Gamma_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Lambda_{xy} \\
 &= \Lambda_{x^{-1}} \otimes_R \Lambda_{xy}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_x \otimes_R \Lambda_y \otimes_R \Lambda_{y^{-1}} &\simeq R1_x \otimes_R \Lambda_{xy} \otimes_R \Lambda_{y^{-1}} \\
 &\simeq R1_x \otimes_R \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \\
 &\simeq \Gamma_{xy} \otimes_R R1_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \\
 &\simeq \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R R1_x \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \\
 &\simeq \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R R1_{y^{-1}} \otimes_R \Gamma_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \\
 &\simeq \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \\
 &= \Lambda_{xy} \otimes_R \Lambda_{y^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Logo, Λ é uma representação parcial. Observe agora que

$$\begin{aligned}
 \Lambda_x \otimes_R \Lambda_{x^{-1}} &= \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \\
 &\simeq \Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \\
 &\simeq R1_x \otimes_R R1_x \otimes_R R1_x \simeq R1_x.
 \end{aligned}$$

Portanto, Λ é unital. Como $\Gamma_x|_{\Theta_x}$ e $\Omega_x|_{\Theta_x}$, então $\Lambda_x \simeq \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$.

Por definição temos

$$\beta_{x,y,z}^\Gamma \circ f_{x,yz}^\Gamma \circ (\Gamma_x \otimes f_{y,z}^\Gamma) = f_{xy,z}^\Gamma \otimes (f_{x,y}^\Gamma \otimes \Gamma_z), \quad (3.30)$$

$$\beta_{x,y,z}^\Omega \circ f_{x,yz}^\Omega \circ (\Omega_x \otimes f_{y,z}^\Omega) = f_{xy,z}^\Omega \otimes (f_{x,y}^\Omega \otimes \Omega_z). \quad (3.31)$$

Vamos mostrar que $\widetilde{\beta_{x,y,z}^\Gamma} \widetilde{\beta_{x,y,z}^\Omega} f_{x,yz}^\Lambda \circ (\Lambda_x \otimes f_{y,z}^\Lambda) = f_{xy,z}^\Lambda \circ (f_{x,y}^\Lambda \otimes \Lambda_z)$, para todos $x, y, z \in G$.

A composta $f_{xy,z}^\Lambda \circ (f_{x,y}^\Lambda \otimes \Lambda_z)$ é dada por:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Omega_z \\
 \searrow \Gamma_x \otimes T_1 \otimes \Omega_y \otimes \Lambda_z \\
 \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Omega_z \\
 \downarrow f_{x,y}^\Gamma \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,y}^\Omega \otimes \Lambda_z \\
 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Omega_z \\
 \downarrow 1_x \Gamma_{xy} \otimes T_2 \otimes \Omega_z \\
 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Omega_z \\
 \downarrow f_{xy,z}^\Gamma \otimes f_{z^{-1},(xy)^{-1}}^\Theta \otimes f_{xy,z}^\Omega \\
 \searrow 1_x 1_{xy} \Gamma_{xyz} \otimes_R \Theta_{(xyz)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xyz}
 \end{array}$$

onde T_1 e T_2 são os isomorfismos

$$\begin{aligned}
 T_1 &: \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x, \\
 T_2 &: \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \longrightarrow \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, $f_{x,yz}^\Lambda \circ (\Lambda_x \otimes f_{y,z}^\Lambda)$ é dado por

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Omega_z \\
 \searrow \Lambda_x \otimes \Gamma_y \otimes T_3 \otimes \Omega_z \\
 \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Omega_z \\
 \downarrow \Lambda_x \otimes f_{y,z}^\Gamma \otimes f_{z^{-1},y^{-1}}^\Theta \otimes f_{y,z}^\Omega \\
 \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R 1_y \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \otimes_R \Omega_{yz} \\
 \downarrow \Gamma_x \otimes T_4 \otimes \Omega_{yz} \\
 1_{xy} \Gamma_x \otimes_R \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Omega_{yz} \\
 \downarrow f_{x,yz}^\Gamma \otimes f_{(yz)^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,yz}^\Omega \\
 \searrow 1_x 1_{xy} \Gamma_{xyz} \otimes_R \Theta_{(xyz)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xyz}
 \end{array}$$

onde T_3 e T_4 são os isomorfismos

$$\begin{aligned}
 T_3 &: \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \longrightarrow \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y, \\
 T_4 &: \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \longrightarrow \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x.
 \end{aligned}$$

Vamos construir os isomorfismos T_i , com $i = 1, 2, 3, 4$. Para isso, considere as aplicações R -bilinear

$\varphi_i : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \rightarrow R$ e $\psi_i : R \rightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x$, com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x}$ e

$\varphi'_j : \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \rightarrow R$ e $\psi'_j : R \rightarrow \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}}$, com $j = 1, 2, \dots, m$, tais que $\sum_{j=1}^m \psi'_j \varphi'_j = Id_{\Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}}}$. Denote

$$\psi_i(1) = \sum_l u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l} \quad \text{e} \quad \psi'_j(1) = \sum_k \tilde{v}_z^{j,k} \otimes \tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k}.$$

Pelo Lema 2.3.5, temos:

$$\begin{aligned}
T_1 : \quad & \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \rightarrow \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \\
& u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \mapsto \sum_{i,l} \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l}, \\
T_2 : \quad & \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \rightarrow \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \\
& u_{(xy)^{-1}} \otimes \omega_{xy} \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \mapsto \sum_{j,k} \tilde{v}_z^{j,k} \otimes \tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \otimes u_{(xy)^{-1}} \otimes \omega_{xy} \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}), \\
T_3 : \quad & \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \rightarrow \Gamma_z \otimes_R \Theta_{z^{-1}} \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \\
& u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \mapsto \sum_{j,k} \tilde{v}_z^{j,k} \otimes \tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}), \\
T_4 : \quad & \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \rightarrow \Gamma_{yz} \otimes_R \Theta_{(yz)^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \\
& u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_{yz} \otimes u_{(yz)^{-1}} \mapsto \sum_{i,l} \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_{yz} \otimes u_{(yz)^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l}.
\end{aligned}$$

Então, $f_{x,yz}^\Lambda \circ (\Lambda_x \otimes f_{y,z}^\Lambda)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
& v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \otimes \omega_z \\
& \xrightarrow{T_3} \sum_{j,k} v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k} \otimes \tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z \\
& \mapsto \sum_{j,k} v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes f_{y,z}^\Gamma(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k}) \otimes (\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \otimes f_{y,z}^\Omega(\omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z) \\
& \xrightarrow{T_4} \sum_{i,j,k,l} v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) f_{y,z}^\Gamma(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k}) \otimes (\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l} \otimes f_{y,z}^\Omega(\omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z) \\
& \mapsto \sum_{i,j,k,l} f_{x,yz}^\Gamma(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) f_{y,z}^\Gamma(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k})) \otimes ((\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \\
& \quad \otimes f_{x,yz}^\Omega(\omega_x^{i,l} \otimes f_{y,z}^\Omega(\omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z))
\end{aligned}$$

Por outro lado, $f_{xy,z}^\Lambda \circ (f_{x,y}^\Lambda \otimes \Lambda_z)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
& v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \otimes \omega_z \\
& \xrightarrow{T_1} \sum_{i,l} v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l} \otimes \omega_y \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \otimes \omega_z \\
& \mapsto \sum_{i,l} f_{x,y}^\Gamma(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes f_{x,y}^\Omega(\omega_x^{i,l} \otimes \omega_y) \otimes v_z \otimes u_{z^{-1}} \otimes \omega_z \\
& \xrightarrow{T_2} \sum_{i,j,k,l} f_{x,y}^\Gamma(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y) \otimes \tilde{v}_z^{j,k} \otimes \tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes f_{x,y}^\Omega(\omega_x^{i,l} \otimes \omega_y) \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z \\
& \mapsto \sum_{i,j,k,l} f_{xy,z}^\Gamma(f_{x,y}^\Gamma(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y) \otimes \tilde{v}_z^{j,k}) \otimes (\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l})) \\
& \quad \otimes f_{xy,z}^\Omega(f_{x,y}^\Omega(\omega_x^{i,l} \otimes \omega_y \varphi'_j(v_z \otimes u_{z^{-1}})) \otimes \omega_z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.30), (3.31) \quad & \sum_{i,j,k,l} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} f_{x,yz}^{\Gamma}}(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) f_{y,z}^{\Gamma}(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k})) \otimes ((\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \\
& \otimes \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Omega} f_{x,yz}^{\Omega}}(\omega_x^{i,l} \otimes f_{y,z}^{\Omega}(\omega_y \varphi_j'(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z)) \\
(3.14) \quad & \sum_{i,j,k,l} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} f_{x,yz}^{\Gamma}}(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) f_{y,z}^{\Gamma}(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k})) \otimes \alpha_{z^{-1}y^{-1}x^{-1}}(\widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Omega} 1_{xyz}})((\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \\
& \otimes f_{x,yz}^{\Omega}(\omega_x^{i,l} \otimes f_{y,z}^{\Omega}(\omega_y \varphi_j'(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z)) \\
(3.15) \quad & \sum_{i,j,k,l} \widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} \beta_{x,y,z}^{\Omega} f_{x,yz}^{\Gamma}}(v_x \otimes \varphi_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) f_{y,z}^{\Gamma}(v_y \otimes \tilde{v}_z^{j,k})) \otimes ((\tilde{u}_{z^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{y^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \\
& \otimes f_{x,yz}^{\Omega}(\omega_x^{i,l} \otimes f_{y,z}^{\Omega}(\omega_y \varphi_j'(v_z \otimes u_{z^{-1}}) \otimes \omega_z))
\end{aligned}$$

Então,

$$\widetilde{\beta_{x,y,z}^{\Gamma} \beta_{x,y,z}^{\Omega} f_{x,yz}^{\Lambda}} \circ (\Lambda_x \otimes f_{y,z}^{\Lambda}) = f_{xy,z}^{\Lambda} \circ (f_{x,y}^{\Lambda} \otimes \Lambda_z), \text{ para todo } x, y, z \in G.$$

Portanto, $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Lambda}} = \widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Gamma}} \widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Omega}}$.

Se f^{Γ} e f^{Ω} são conjuntos de fatores, então $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Gamma}}$ e $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Omega}}$ são triviais. Assim, $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{\Lambda}}$ também é trivial. Logo, f^{Λ} é um conjunto de fatores para Λ . Portanto, $\Delta(\Lambda)$ é um produto cruzado generalizado parcial.

■

Definição 3.3.9. *Sejam $\Delta(\Theta)$ e $\Delta(\Gamma)$ produtos cruzados generalizados parciais com isomorfismos de R -bimódulos e anéis $i : R \rightarrow \Theta_1$ e $j : R \rightarrow \Gamma_1$ como na Observação 3.3.4. Um morfismo de produtos cruzados generalizados parciais $F : \Delta(\Theta) \rightarrow \Delta(\Gamma)$ é um conjunto de morfismos $\{F_x : \Theta_x \rightarrow \Gamma_x, x \in G\}$ tal que $F_1 \circ i = j$ e o diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
\Theta_x \otimes_R \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Theta}} & 1_x \Theta_{xy} \\
\downarrow F_x \otimes F_y & & \downarrow F_{xy} \\
\Gamma_x \otimes_R \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Gamma}} & 1_x \Gamma_{xy}
\end{array} \quad (3.32)$$

seja comutativo. Um morfismo de produtos cruzados generalizados parciais F é dito um isomorfismo se cada $F_x : \Theta_x \rightarrow \Gamma_x$ é um isomorfismo de R -bimódulos.

É importante observar que se temos uma família de isomorfismos $F = \{F_x : \Theta_x \rightarrow \Gamma_x, x \in G\}$ que satisfazem o diagrama comutativo (3.32), então F é um isomorfismo de produtos cruzados generalizados parciais, ou seja, $F_1 \circ i = j$ será satisfeita automaticamente. De fato, a comutatividade do diagrama (3.32) e dos diagramas na Observação 3.3.4 implicam que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
R \otimes_R \Theta_x & \xrightarrow{i \otimes \Theta_x} & \Theta_1 \otimes_R \Theta_x & \xrightarrow{F_1 \otimes F_x} & \Gamma_1 \otimes_R \Gamma_x & \xleftarrow{j \otimes \Gamma_x} & R \otimes_R \Gamma_x \\
& \searrow \simeq & \downarrow f_{1,x}^{\Theta} & & \downarrow f_{1,x}^{\Gamma} & \swarrow \simeq & \\
& & \Theta_x & \xrightarrow{F_x} & \Gamma_x & &
\end{array}$$

Seja $v_x \in \Gamma_x$, então existe $u_x \in \Theta_x$ tal que $F_x(u_x) = v_x$. Pela comutatividade do diagrama temos $(F_1(i(1))) \overset{\Gamma}{\circ} F_x(u_x) = F_x(u_x)$, ou seja,

$$(F_1(i(1))) \overset{\Gamma}{\circ} v_x = v_x, \text{ para todo } v_x \in \Gamma_x.$$

Por outro lado, a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta_x \otimes_R R & \xrightarrow{\Theta_x \otimes i} & \Theta_x \otimes_R \Theta_1 & \xrightarrow{F_x \otimes F_1} & \Gamma_x \otimes_R \Gamma_1 & \xleftarrow{\Gamma_x \otimes j} & \Gamma_x \otimes_R R \\ & \searrow \simeq & \downarrow f_{x,1}^\Theta & & \downarrow f_{x,1}^\Gamma & \swarrow \simeq & \\ & & \Theta_x & \xrightarrow{F_x} & \Gamma_x & & \end{array}$$

implica que $(v_x \overset{\Gamma}{\circ} F_1(i(1))) = v_x$, para todo $v_x \in \Gamma_x$. Logo, $F(i(1)) = j(1)$ é a unidade de $\Delta(\Gamma)$. Portanto, $F \circ i = j$.

Observação 3.3.10. *Seja $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ um conjunto de fatores para Θ . Para cada $x \in G$ temos um isomorfismo de R -bimódulos $f_{x,x^{-1}}^\Theta : \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \longrightarrow R1_x$, cujo inverso é dada*

$$\begin{aligned} (f_{x,x^{-1}}^\Theta)^{-1} : \quad R1_x &\longrightarrow \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \\ r1_x &\longrightarrow \sum_{(x)} r\omega_x \otimes \omega_{x^{-1}}, \end{aligned}$$

onde $\sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) = 1_x$. Restringindo o isomorfismo $f_{xy,(xy)^{-1}}^\Theta$ a $1_x \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}}$ temos um isomorfismo de R -bimódulos $1_x f_{xy,(xy)^{-1}}^\Theta : 1_x \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \longrightarrow R1_x 1_{xy}$. Sejam

$$1_x = \sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \quad e \quad 1_y = \sum_{(y)} (\omega_y \overset{\Theta}{\circ} \omega_{y^{-1}}).$$

Pela associatividade, temos

$$\begin{aligned} \sum_{(x),(y)} \left((\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \overset{\Theta}{\circ} (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \right) &= \sum_{(x),(y)} \left(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} (\omega_y \overset{\Theta}{\circ} \omega_{y^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}} \right) \\ &= \sum_{(x)} (\omega_x 1_y \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) = \sum_{(x)} 1_{xy} (\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \\ &= 1_{xy} 1_x. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (1_x f_{xy,y^{-1}x^{-1}}^\Theta)^{-1} : \quad R1_x 1_{xy} &\longrightarrow 1_x \Theta_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \\ r1_x 1_{xy} &\longmapsto \sum_{(x),(y)} r((\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}})). \end{aligned}$$

De fato, seja $r \in R1_x1_{xy}$ e $\omega_{xy} \in \Theta_{xy}, \omega_{(xy)^{-1}} \in \Theta_{(xy)^{-1}}$ com $\sum_{(xy)} \omega_{xy} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{(xy)^{-1}} = 1_{xy}$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{(xy)} r\omega_{xy} \otimes \omega_{(xy)^{-1}} &= \sum_{(xy)} r1_x1_{xy}\omega_{xy} \otimes \omega_{(xy)^{-1}} \\
&= \sum_{(x),(y),(xy)} r \left((\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \overset{\Theta}{\circ} (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \right) \omega_{xy} \otimes \omega_{(xy)^{-1}} \\
&= \sum_{(x),(y),(xy)} r \left((\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \overset{\Theta}{\circ} (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} \omega_{xy} \right) \otimes \omega_{(xy)^{-1}} \\
&= \sum_{(x),(y),(xy)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \underbrace{\left((\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} \omega_{xy} \right)}_{\in R} \otimes \omega_{(xy)^{-1}} \\
&= \sum_{(x),(y),(xy)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes \left((\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} \omega_{xy} \right) \omega_{(xy)^{-1}} \\
&= \sum_{(x),(y),(xy)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) \left(\omega_{xy} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{(xy)^{-1}} \right) \\
&= \sum_{(x),(y)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}) 1_{xy} \\
&= \sum_{(x),(y)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} 1_y \omega_{x^{-1}}) \\
&= \sum_{(x),(y)} r(\omega_x \overset{\Theta}{\circ} \omega_y) \otimes (\omega_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \omega_{x^{-1}}).
\end{aligned}$$

3.3.1 Representações parciais unitais em $\mathcal{S}_R(S)$.

Nesta seção vamos relacionar um produto cruzado parcial generalizado com uma extensão de anéis com mesma unidade. Já vimos na Seção 3.3 que dada uma representação parcial unital $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$ de tal forma que tenhamos um produto cruzado generalizado parcial $\Delta(\Theta)$, então $R \subseteq \Delta(\Theta)$ é uma extensão de anéis com mesma unidade. Vamos ver como obter um produto cruzado generalizado a partir de uma extensão de anéis $R \subseteq S$ e uma representação parcial.

Seja $R \subseteq S$ uma extensão de anéis com mesma unidade e denote $\mathcal{S}_R(S)$ o conjunto dos R -subbimódulos de S . Dados $M, N \in \mathcal{S}_R(S)$ definindo o produto por

$$MN = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i n_i; m_i \in M, n_i \in N \right\}.$$

Então, $\mathcal{S}_R(S)$ é monoide onde o elemento neutro é anel R .

Uma representação parcial

$$\begin{aligned}
\Theta : G &\longrightarrow \mathcal{S}_R(S) \\
x &\longmapsto \Theta_x
\end{aligned}$$

é dita *unital* se $\varepsilon_x = \Theta_x \Theta_{x^{-1}} = R1_x$, onde 1_x é um idempotente central em R , para todo $x \in G$. De, $\Theta_x \Theta_{x^{-1}} \Theta_x = \Theta_x$, para todo $x \in G$, temos que $R1_x \Theta_x = \Theta_x$ e $\Theta_x R1_{x^{-1}} = \Theta_x$, logo $1_x u_x = u_x$ e $u_x 1_{x^{-1}} = u_x$, para todo $u_x \in \Theta_x$ e $x \in G$.

Proposição 3.3.11. *Seja $\Theta : G \longrightarrow \mathcal{S}_R(S)$ uma representação parcial unital. Então,*

(i) $[\Theta_x] \in \mathbf{PicS}(R)$.

(ii) Se M é um S -bimódulo, então

$$\begin{array}{ccc} m_l : \Theta_x \otimes_R M & \longrightarrow & \Theta_x M \\ u_x \otimes m & \longmapsto & u_x m \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} m_r : M \otimes_R \Theta_x & \longrightarrow & M \Theta_x \\ m \otimes u_x & \longmapsto & m u_x \end{array}$$

são isomorfismos de R - S -bimódulos e S - R -bimódulos, respectivamente.

(iii) Sejam M um S -bimódulo e N um R -subbimódulo de M . Então, temos os seguintes isomorfismos de R -bimódulos:

$$\begin{array}{ccc} \Theta_x \otimes_R N & \longrightarrow & \Theta_x N \\ u_x \otimes n & \longmapsto & u_x n \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} N \otimes_R \Theta_x & \longrightarrow & N \Theta_x \\ n \otimes u_{x^{-1}} & \longmapsto & n u_{x^{-1}} \end{array}.$$

Demonstração. (i) Sejam $\omega_x^i \in \Theta_x$ e $\omega_{x^{-1}}^i \in \Theta_{x^{-1}}$ tais que $\sum_{i=1}^m \omega_x^i \omega_{x^{-1}}^i = 1_x$. Defina,

$$f_i : \begin{array}{ccc} \Theta_x & \longrightarrow & R \\ u_x & \longmapsto & \omega_{x^{-1}}^i u_x \end{array}.$$

Então, f_i é R -linear à direita e temos

$$\sum_{i=1}^n \omega_x^i f_i(u_x) = \sum_{i=1}^n \omega_x^i \omega_{x^{-1}}^i u_x = 1_x u_x = u_x,$$

para todo $u_x \in \Theta_x$. Logo, $\{\omega_x^i, f_i\}$ é base dual de Θ_x como R -módulo à direita.

Analogamente, sejam $\bar{\omega}_x^j \in \Theta_x$ e $\bar{\omega}_{x^{-1}}^j \in \Theta_{x^{-1}}$, com $j = 1, 2, \dots, m$, tais que $\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_{x^{-1}}^j \bar{\omega}_x^j = 1_{x^{-1}}$. Defina

$$g_j : \begin{array}{ccc} \Theta_x & \longrightarrow & R \\ u_x & \longrightarrow & u_x \bar{\omega}_{x^{-1}}^j. \end{array}$$

Então, g_j é R -linear à esquerda e temos

$$\sum_{j=1}^m g_j(u_x) \bar{\omega}_x^j = \sum_{j=1}^m u_x \bar{\omega}_{x^{-1}}^j \bar{\omega}_x^j = u_x 1_{x^{-1}} = u_x,$$

para todo $u_x \in \Theta_x$. Logo, $\{\bar{\omega}_x^j, g_j\}$ é base dual para Θ_x como R -módulo à esquerda.

Seja $\varphi : \Theta_x \longrightarrow \Theta_x$ R -linear à direita. Então, $\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^n \varphi(\omega_x^i) \omega_{x^{-1}}^i \in R 1_x$ e temos

$$\tilde{\varphi} u_x = \sum_{i=1}^n \varphi(\omega_x^i) \omega_{x^{-1}}^i u_x = \sum_{i=1}^n \varphi(\omega_x^i \omega_{x^{-1}}^i u_x) = \varphi(1_x u_x) = \varphi(u_x),$$

para todo $u_x \in \Theta_x$. Então, a aplicação $R \longrightarrow \text{End}(\Theta_x R)$ definida por $r \longmapsto (u_x \mapsto r u_x)$ é sobrejetora.

Analogamente, se $\psi : \Theta_x \longrightarrow \Theta_x$ é R -linear à esquerda, então $\tilde{\psi} = \sum_{j=1}^m \bar{\omega}_{x^{-1}}^j \psi(\bar{\omega}_x^j) \in R 1_{x^{-1}}$ e temos

$$u_x \tilde{\psi} = \sum_{j=1}^m u_x \bar{\omega}_{x^{-1}}^j \psi(\bar{\omega}_x^j) = \sum_{j=1}^m \psi(u_x \bar{\omega}_{x^{-1}}^j \bar{\omega}_x^j) = \psi(u_x 1_{x^{-1}}) = \psi(u_x),$$

para todo $u_x \in \Theta_x$. Logo, a aplicação $R \rightarrow \text{End}(R\Theta_x)$ definida por $r \mapsto (u_x \mapsto u_x r)$ é sobrejetora. Portanto, $[\Theta_x] \in \mathbf{PicS}(R)$.

(ii) Claramente m_l é bem definida e R - S -bilinear. Sua inversa é dada por

$$\begin{aligned} m_l^{-1} : \quad \Theta_x M &\longrightarrow \Theta_x \otimes_R M \\ m &\longmapsto \sum_{(x)} \omega_x \otimes \omega_{x^{-1}} m, \end{aligned}$$

onde $1_x = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}}$, com $\omega_x \in \Theta_x$ e $\omega_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$. De fato, vejamos que m_l^{-1} está bem definida. Seja

$1_x = \sum_{\tilde{x}} \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}}$ outra decomposição de 1_x . Então,

$$\begin{aligned} m_l^{-1}(m) &= \sum_{(x)} \omega_x \otimes \omega_{x^{-1}} m = \sum_{(x)} \omega_x \otimes \omega_{x^{-1}} 1_x m = \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x \otimes \omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_{x^{-1}} m \\ &= \sum_{(x), (\tilde{x})} \omega_x \omega_{x^{-1}} \tilde{\omega}_x \otimes \tilde{\omega}_{x^{-1}} m = \sum_{(\tilde{x})} 1_x \tilde{\omega}_x \otimes \tilde{\omega}_{x^{-1}} m = \sum_{(\tilde{x})} \tilde{\omega}_x \otimes \tilde{\omega}_{x^{-1}} m. \end{aligned}$$

Observe que $\Theta_x M = 1_x M = \{m \in M, 1_x m = m\}$. De fato, claramente $\Theta_x M \subseteq 1_x M$. Seja $m \in 1_x M$, então

$$m = 1_x m = \sum_{(x)} (\omega_x \omega_{x^{-1}}) m = \sum_{(x)} \omega_x (\omega_{x^{-1}} m) \in \Theta_x M.$$

Analogamente, $M\Theta_x = M1_{x^{-1}}$, para todo $x \in G$. Assim, dado $m \in \Theta_x M$, temos

$$(m_l \circ m_l^{-1})(m) = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}} m = 1_x m = m.$$

Por outro lado, dados $u_x \in \Theta_x$ e $m \in M$, temos

$$\begin{aligned} (m_l^{-1} \circ m_l)(u_x \otimes m) &= \sum_{(x)} \omega_x \otimes \omega_{x^{-1}} u_x m = \sum_{(x)} \omega_x \omega_{x^{-1}} u_x \otimes m \\ &= 1_x u_x \otimes m = u_x \otimes m. \end{aligned}$$

Portanto, m_l é isomorfismo de R - S -bimódulos. Analogamente, temos que a inversa de m_r é dada por

$$\begin{aligned} m_r^{-1} : \quad M\Theta_x &\longrightarrow M \otimes_R \Theta_x \\ m &\longmapsto \sum_{(x)} m \bar{\omega}_{x^{-1}} \otimes \bar{\omega}_x, \end{aligned}$$

onde $1_{x^{-1}} = \sum_{(\bar{x})} \bar{\omega}_{x^{-1}} \bar{\omega}_x$.

(iii) Observe que $\Theta_x N \subseteq M$ é um R -subbimódulo de M , tal que:

- $1_x n = n$, para todo $n \in \Theta_x N$.
- $u_{x^{-1}} n \in N$, para todo $n \in \Theta_x N$ e $u_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$. De fato, se $n \in \Theta_x N$, então $n = \sum_{i=1}^n u_x^i n_i$, com $u_x^i \in \Theta_x$ e $n_i \in N$. Como $N \subseteq M$ é R -subbimódulo, temos

$$u_{x^{-1}} n = \sum_{i=1}^n u_{x^{-1}} (u_x^i n_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(u_{x^{-1}} u_x^i)}_{\in R1_{x^{-1}}} n_i \in N.$$

Analogamente, $N\Theta_x$ é um R -subbimódulo de M que satisfaz:

- $n'1_{x^{-1}} = n$, para todo $n' \in N\Theta_x$.
- $n'u_{x^{-1}} \in N$, para todo $n' \in N\Theta_x$ e $u_{x^{-1}} \in \Theta_{x^{-1}}$.

Logo, o isomorfismo segue como no item (ii). ■

Corolário 3.3.12. *Seja $N \in \mathcal{S}_R(S)$, então $\Theta_x \otimes_R N \simeq \Theta_x N$, para todo $x \in G$. Em particular, $\Theta_x \otimes_R \Theta_y \simeq \Theta_x \Theta_y$, para todo $x, y \in G$.*

Observação 3.3.13. *Seja*

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathcal{S}_R(S) \\ x &\longmapsto \Theta_x \end{aligned}$$

uma representação unital com $\Theta_x \Theta_{x^{-1}} = R1_x$. Pela Proposição 3.3.11 e pelo Corolário 3.3.12 temos que

$$\begin{aligned} \underline{\Theta} : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [\Theta_x] \end{aligned}$$

é uma representação parcial unital com $\Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. Seja f^Θ a família de isomorfismos de R -bimódulos onde

$$\begin{aligned} f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y &\longrightarrow \Theta_x \Theta_y = 1_x \Theta_{xy} \\ u_x \otimes u_y &\longmapsto u_x u_y \end{aligned}$$

é induzido pela multiplicação em S . Então, f^Θ é um conjunto de fatores para $\underline{\Theta}$. Logo, temos um produto cruzado generalizado parcial $\Delta(\Theta)$, onde cada $\Theta_x \subseteq S$ é um R -subbimódulo.

Reciprocamente, se temos uma representação parcial unital $\Theta : G \longrightarrow \mathbf{PicS}(R)$, com um conjunto de fatores f^Θ , o produto cruzado generalizado parcial $\Delta(\Theta)$ é uma extensão do anel R com mesma unidade. Neste caso, cada $\Theta_x \subseteq \Delta(\Theta)$ é um R -subbimódulo. Pelo Corolário 3.3.12 temos que $\underline{\Theta} : G \longrightarrow \mathcal{S}_R(\Delta(\Theta))$ com $\underline{\Theta}(x) = \Theta_x$, é uma representação parcial unital.

Exemplo 3.3.14. (Produto cruzado parcial) *Seja $\alpha = (\{D_x\}_{x \in G}, \{\alpha_x\}_{x \in G}, \{\omega_{x,y}\}_{x,y \in G})$ uma ação parcial unitária torcida (ver [27, Definição 2.1]) de G sobre R com $D_x = R1_x$, para todo $x \in G$. Considere o produto cruzado parcial $R \rtimes_{\alpha,\omega} G = \bigoplus_{x \in G} D_x \delta_x$ onde o produto é definido por*

$$(u_x \delta_x)(u_y \delta_y) = u_x \alpha_x(u_y 1_{x^{-1}}) \omega_{x,y} \delta_{xy}.$$

Por [27, Teorema 2.4], $R \rtimes_{\alpha,\omega} G$ é associativo. Considere

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathcal{S}_R(R \rtimes_{\alpha,\omega} G) \\ x &\longmapsto D_x \delta_x \end{aligned}.$$

É fácil ver que $(D_x \delta_x)(D_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}})(D_x \delta_x) \subseteq D_x \delta_x$, para todo $x \in G$. Por outro lado, seja $u_x \delta_x \in D_x \delta_x$, então

$$(u_x \delta_x)(1_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}})(\omega_{x,x^{-1}}^{-1} \delta_x) = (u_x \omega_{x,x^{-1}} \delta_1)(\omega_{x,x^{-1}}^{-1} \delta_x) = u_x \omega_{x,x^{-1}} \omega_{x,x^{-1}}^{-1} \delta_x = u_x 1_x \delta_x = u_x \delta_x.$$

Logo, temos a igualdade $(D_x \delta_x)(D_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}})(D_x \delta_x) = D_x \delta_x$, para todo $x \in G$. Por [27, Lema 5.3], temos que

$$(D_x \delta_x)(D_y \delta_y)(D_{y^{-1}} \delta_{y^{-1}}) = (D_{xy} \delta_{xy})(D_{y^{-1}} \delta_{y^{-1}}) \quad e \quad (D_x^{-1} \delta_x)(D_x \delta_x)(D_y \delta_y) = (D_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}})(D_{xy} \delta_{xy}),$$

para todos $x, y \in G$. Logo, Θ é representação parcial. Observe agora que $(D_x \delta_x)(D_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}}) = D_x$, para todo $x \in G$. De fato, a inclusão $(D_x \delta_x)(D_{x^{-1}} \delta_{x^{-1}}) \subseteq D_x$ é imediata. Dado $u_x \in D_x$, temos $(u_x \omega_{x, x^{-1}}^{-1} \delta_x)(1_{x^{-1}} \delta_x) = u_x \omega_{x, x^{-1}}^{-1} \omega_{x, x^{-1}} \delta_1 = u_x 1_x \delta_1 = u_x \delta_1 \in D_x$. Portanto, Θ é representação parcial unital. Pela Observação 3.3.13, temos que

$$\begin{aligned} f_{x,y}^\Theta : (D_x \delta_x) \otimes (D_y \delta_y) &\longrightarrow D_x D_{xy} \delta_{xy} \\ u_x \delta_x \otimes u_y \delta_y &\longmapsto u_x \alpha_x(u_y 1_{x^{-1}}) \omega_{x,y} \delta_{xy} \end{aligned}$$

é um conjunto de fatores para Θ . Portanto, $\Delta(\Theta) = \bigoplus_{x \in G} D_x \delta_x = R \rtimes_{\alpha, \omega} G$ é um produto cruzado generalizado parcial.

3.4 O grupo $\mathcal{C}(\Theta/R)$

Vamos fixar

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [\Theta_x] \end{aligned}$$

uma representação parcial unital com $\varepsilon_x = \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \simeq R 1_x$, para todo $x \in G$, tal que exista um conjunto de fatores $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes_R \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ para Θ , e seja $\Delta(\Theta)$ o produto cruzado generalizado parcial.

Definimos

$$\mathcal{C}(\Theta/R) = \{[\Delta(\Gamma)]; \Gamma_x | \Theta_x \text{ e } \Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}} \simeq R 1_x, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Proposição 3.4.1. $\mathcal{C}(\Theta/R)$ é um grupo abeliano com operação definida por

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Gamma)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Gamma_x \right].$$

com conjunto de fatores dados por:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{\Gamma_x \otimes T_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x, \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y}} & \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Omega_y \\ & & \downarrow f_{x,y}^\Gamma \otimes f_{y^{-1}, x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,y}^\Omega \\ & & 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R 1_x \Omega_{xy} \\ & \searrow f_{x,y}^\Lambda & \parallel \\ & & 1_x \Gamma_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Omega_{xy} \end{array}$$

onde $T_{-, -}$ é o isomorfismo da Proposição 2.3.5.

Demonstração. Por simplicidade de notação, nessa demonstração $\otimes$ denotará $\otimes_R$. Pelo Lema 3.3.8, temos que

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Gamma)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Gamma_x \right] \in \mathcal{C}(\Theta/R).$$

Vamos verificar que essa operação está bem definida, ou seja, não depende da escolha do representante da classe de isomorfismo. Sejam $[\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Sigma)]$ e $[\Delta(\Omega)] = [\Delta(\Lambda)]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$, então existem isomorfismos de R -bimodulos $a_x : \Gamma_x \rightarrow \Sigma_x$ e $b_x : \Omega_x \rightarrow \Lambda_x$, tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Gamma} & 1_x \Gamma_{xy} \\ \downarrow a_x \otimes a_y & & \downarrow a_{xy} \\ \Sigma_x \otimes \Sigma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Sigma} & 1_x \Sigma_{xy} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega_x \otimes \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Omega} & 1_x \Omega_{xy} \\ \downarrow b_x \otimes b_y & & \downarrow b_{xy} \\ \Lambda_x \otimes \Lambda_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Lambda} & 1_x \Lambda_{xy} \end{array}$$

comutam, ou seja,

$$a_{xy}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) = (a_x(v_x) \overset{\Sigma}{\circ} a_y(v_y)) \quad \text{e} \quad b_{xy}(\omega_x \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) = (b_x(\omega_x) \overset{\Lambda}{\circ} b_y(\omega_y)), \quad (3.33)$$

para todo $v_x \in \Gamma_x, v_y \in \Gamma_y, \omega_x \in \Omega_x$ e $\omega_y \in \Omega_y$. Por definição temos

$$[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \right] \quad \text{e} \quad [\Delta(\Sigma)][\Delta(\Lambda)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Sigma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \right]$$

Defina o isomorfismo

$$\begin{aligned} d_{xy} : \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x &\longrightarrow \Sigma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \\ v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x &\longmapsto a_x(v_x) \otimes u_{x^{-1}} \otimes b_x(\omega_x) \end{aligned}$$

Vejamos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Gamma\Omega}} & 1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Omega_{xy} \\ \downarrow d_x \otimes d_y & & \downarrow d_{xy} \\ \Sigma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \otimes \Sigma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Lambda_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Sigma\Lambda}} & 1_x \Sigma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Lambda_{xy} \end{array}$$

Por um lado, temos que

$$d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega} = d_{xy} \circ (f_{x,y}^\Gamma \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,y}^\Omega) \circ (\Gamma_x \otimes T_1 \otimes \Omega_y),$$

onde $T_1 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \rightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x$. Por outro lado,

$$f_{x,y}^{\Sigma\Lambda} \circ (d_x \otimes d_y) = (f_{x,y}^\Sigma \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{x,y}^\Lambda) \circ (\Sigma_x \otimes T_2 \otimes \Lambda_y) \circ (d_x \otimes d_y),$$

onde $T_2 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \otimes \Sigma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \rightarrow \Sigma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x$. Vamos construir os isomorfismos T_1 e T_2 usando a Proposição 2.3.5. Para isso, considere as aplicações R -bilineares $f_i : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \rightarrow R$ e $g_i : R \rightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x$, com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\sum_{i=1}^n g_i \circ f_i = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x}$. Defina

$$\bar{f}_i : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \xrightarrow{\Theta_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}} \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \xrightarrow{f_i} R$$

$$\bar{g}_i : R \xrightarrow{g_i} \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \xrightarrow{\Theta_{x^{-1}} \otimes b_x} \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, $\bar{f}_i$ e $\bar{g}_i$ são R -bilineares e temos $\sum_{i=1}^n \bar{g}_i \bar{f}_i = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda}$. Denotando, $g_i(1) =$

$\sum_l u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l}$, então $\bar{g}_i(1) = \sum_l u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes b_x(\omega_x^{i,l})$. Assim,

$$\begin{aligned} T_1 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \\ u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{i,l} f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \otimes \Sigma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Sigma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Lambda_x \\ u_{x^{-1}} \otimes l_x \otimes t_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{i,l} f_i(u_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}(l_x)) t_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes b_x(\omega_x^{i,l}). \end{aligned}$$

Logo, $f_{x,y}^{\Sigma\Lambda} \circ (d_x \otimes d_y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} &v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \\ d_{x \otimes d_y} &\longmapsto a_x(v_x) \otimes u_{x^{-1}} \otimes b_x(\omega_x) \otimes a_y(v_y) \otimes u_{y^{-1}} \otimes b_y(\omega_y) \\ T_2 &\longmapsto \sum_{i,l} a_x(v_x) \otimes f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) a_y(v_y) \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes b_x(\omega_x^{i,l}) \otimes b_y(\omega_y) \\ &\mapsto \sum_{i,l} (a_x(v_x) \overset{\Sigma}{\circ} f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) a_y(v_y)) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes (b_x(\omega_x^{i,l}) \overset{\Lambda}{\circ} b_y(\omega_y)). \end{aligned}$$

Por outro lado, $d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega}$:

$$\begin{aligned} &v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \\ T_1 &\longmapsto \sum_{i,l} v_x \otimes f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \omega_x^{i,l} \otimes \omega_y \\ &\mapsto \sum_{i,l} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes (\omega_x^{i,l} \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \\ d_{xy} &\longmapsto \sum_{i,l} a_{xy}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) v_y) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes b_{xy}(\omega_x^{i,l} \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \\ &\stackrel{(3.33)}{=} \sum_{i,l} (a_x(v_x) \overset{\Sigma}{\circ} f_i(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) a_y(v_y)) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes (b_x(\omega_x^{i,l}) \overset{\Lambda}{\circ} b_y(\omega_y)). \end{aligned}$$

Segue então que $d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega} = f_{x,y}^{\Sigma\Lambda} \circ (d_x \otimes d_y)$, para todo $x, y \in G$. Isso implica que

$$[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = [\Delta(\Sigma)][\Delta(\Lambda)] \text{ em } \mathcal{C}(\Theta/R).$$

Portanto, a operação está bem definida.

Vejamos que, com essa operação, $\mathcal{C}(\Theta/R)$ é de fato um grupo.

Associatividade: Considere $[\Delta(\Gamma)], [\Delta(\Omega)], [\Delta(\Sigma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Então,

$$([\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)])([\Delta(\Sigma)]) = \left[\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \right]$$

e

$$[\Delta(\Gamma)]([\Delta(\Omega)][\Delta(\Sigma)]) = \left[\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \right]$$

Vamos mostrar que $f_{x,y}^{(\Gamma\Omega)\Sigma} = f_{x,y}^{\Gamma(\Omega\Sigma)}$, para todo $x, y \in G$. Por um lado temos que $f_{x,y}^{(\Gamma\Omega)\Sigma}$ é dada pela

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Sigma_y \\
 \searrow \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes T_1 \otimes \Sigma_y \\
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Sigma_y \\
 \downarrow \Gamma_x \otimes T_2 \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Sigma_y \\
 \Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Sigma_y \\
 \downarrow f_{x,y}^{\Gamma} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Omega} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Sigma} \\
 1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Sigma_{xy}
 \end{array}$$

$f_{x,y}^{(\Gamma\Omega)\Sigma}$ (dashed arrow from top-left to bottom-right)

onde T_1 e T_2 são os isomorfismos

$$T_1 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x$$

$$T_2 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x$$

Por outro lado, $f_{x,y}^{\Gamma(\Omega\Sigma)}$ é dado por

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Sigma_y \\
 \searrow \Gamma_x \otimes T_3 \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Sigma_y \\
 \Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Sigma_y \\
 \downarrow \Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes T_4 \otimes \Sigma_y \\
 \Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Sigma_y \\
 \downarrow f_{x,y}^{\Gamma} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Omega} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Sigma} \\
 1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Sigma_{xy}
 \end{array}$$

$f_{x,y}^{\Gamma(\Omega\Sigma)}$ (dashed arrow from top-left to bottom-right)

onde

$$T_3 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x$$

$$T_4 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x.$$

Vamos construir os isomorfismos T_1, T_2, T_3 e T_4 : Sejam $f_i : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \longrightarrow R$ e $g_i : R \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x$, com $i = 1, 2, \dots, n$, aplicações R -bilineares que satisfazem $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x}$. Denote $g_i(1) = \sum_l u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l}$,

então

$$\begin{aligned} T_1 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \\ u_{x^{-1}} \otimes t_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{i,l} f_i(u_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_4 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \\ u_{x^{-1}} \otimes t_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{i,l} f_i(u_{x^{-1}} \otimes t_x) \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l}. \end{aligned}$$

Considere agora $f'_j : \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow R$ e $g'_j : R \longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}}$, com $j = 1, 2, \dots, m$, aplicações R -bilinear que satisfazem $\sum_{j=1}^m g'_j f'_j = Id_{\Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}}}$. Denote $g_j(1) = \sum_k \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k}$, então

$$\begin{aligned} T_2 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \\ u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{j,k} \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x f'_j(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_3 : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Sigma_x \\ u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} \otimes t_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{j,k} \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} \otimes t_x f'_j(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \end{aligned}$$

Vamos calcular $f_{x,y}^{(\Gamma\Omega)\Sigma}$:

$$\begin{aligned} &v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} \otimes t_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes t_y \\ \xrightarrow{T_1} &\sum_{i,l} v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l} \otimes t_y \\ \xrightarrow{T_2} &\sum_{i,j,l,k} v_x \otimes \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x f'_j(f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}}) \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l} \otimes t_y \\ \mapsto &\sum_{i,j,l,k} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} \tilde{v}_y^{j,k}) \otimes (\tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}) \otimes (\omega_x f'_j(f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}}) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \otimes (u'_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes (t_x^{i,l} \overset{\Theta}{\circ} t_y). \end{aligned}$$

Por outro lado, para $f_{x,y}^{\Gamma(\Omega\Sigma)}$ temos:

$$\begin{aligned} &v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} \otimes t_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes t_y \\ \xrightarrow{T_3} &\sum_{j,k} v_x \otimes \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} \otimes t_x f'_j(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes t_y \\ \xrightarrow{T_4} &\sum_{i,j,k,l} v_x \otimes \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) f'_j(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l} \otimes t_y \\ = &\sum_{i,j,k,l} v_x \otimes \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) f'_j(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l} \otimes t_y \\ = &\sum_{i,j,k,l} v_x \otimes \tilde{v}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes f'_j(f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}}) \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes t_x^{i,l} \otimes t_y \\ \mapsto &\sum_{i,j,l,k} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} \tilde{v}_y^{j,k}) \otimes (\tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}) \otimes (\omega_x f'_j(f_i(u'_{x^{-1}} \otimes t_x) v_y \otimes u_{y^{-1}}) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \otimes (u'_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes (t_x^{i,l} \overset{\Theta}{\circ} t_y). \end{aligned}$$

Logo, $f_{x,y}^{(\Gamma\Omega)\Sigma} = f_{x,y}^{\Gamma(\Omega\Sigma)}$. Portanto, temos a associatividade.

Elemento neutro: Vejamos agora que o elemento neutro é $[\Delta(\Theta)]$. Dado $[\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$, temos

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Theta)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \right].$$

Para cada $x \in G$ considere o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} \varphi_x : \quad \Omega_x \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} &\longrightarrow \Omega_x \\ \omega_x \otimes u_x \otimes u_{x^{-1}} &\longmapsto \omega_x(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}) \end{aligned}.$$

Então, o temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega\Theta}} & 1_x \Omega_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Theta_{xy} \\ \downarrow \varphi_x \otimes \varphi_y & & \downarrow \varphi_{xy} \\ \Omega_x \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega}} & 1_x \Omega_{xy} \end{array}$$

De fato, por um lado, temos:

$$f_{x,y}^{\Omega} \circ (\varphi_x \otimes \varphi_y)(\omega_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_y) = (\omega_x(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y(u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_y)). \quad (3.34)$$

Para o outro lado, observe que $\varphi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega\Theta}$ é dado por

$$\begin{array}{ccc} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_y & \xrightarrow{\Omega_x \otimes T \otimes \Theta_y} & \Omega_x \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Theta_y \\ & \searrow \varphi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega\Theta} & \downarrow f_{x,y}^{\Omega} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Theta} \\ & & 1_x \Omega_{xy} \otimes_R \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes_R \Theta_{xy} \\ & & \downarrow \varphi_{xy} \\ & & 1_x \Omega_{xy} \end{array}$$

onde $T : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x$ é um isomorfismo de R -bimódulos como na Proposição 2.3.5. Considere os isomorfismos de R -bimódulos

$$f : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \xrightarrow{f_{x^{-1},x}^{\Theta}} R1_{x^{-1}} \hookrightarrow R$$

$$g : R \longrightarrow R1_{x^{-1}} \xrightarrow{(f_{x^{-1},x}^{\Theta})^{-1}} \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x$$

É fácil ver que $gf = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x}$. Então, pelo Lema 2.3.5, o isomorfismo T é dado por

$$\begin{aligned} T : \quad \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \\ u_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{(x)} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \tilde{u}_{x^{-1}} \otimes \tilde{u}_x, \end{aligned}$$

onde $\sum_{(x)} (\tilde{u}_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_x) = 1_{x^{-1}}$.

Assim, $\varphi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega\Theta}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\omega_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_y &\mapsto \sum_{(x)} \omega_x \otimes (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \tilde{u}_{x^{-1}} \otimes \tilde{u}_x \otimes u_y \\
&\mapsto \sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x^{-1}}) \otimes (\tilde{u}_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\
&\mapsto \sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y) ((u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} (\tilde{u}_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)) \\
&= \sum_{(x)} (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y) (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} (\tilde{u}_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_x) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\
&= (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y) (u_{y^{-1}} 1_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\
&= (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_y) (1_{(xy)^{-1}} u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\
&= (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x 1_{x^{-1}}) \omega_y) (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\
&= (\omega_x (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_y).
\end{aligned}$$

Logo, $f_{x,y}^{\Omega} \circ (\varphi_x \otimes \varphi_y) = \varphi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega\Theta}$. Portanto, temos a afirmação. A comutatividade do diagrama implica que

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Theta)] = [\Delta(\Omega)] \text{ em } \mathcal{C}(\Theta/R).$$

Inverso: Dado $[\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$ vamos mostrar que

$$[\Delta(\Omega)]^{-1} = \left[\bigoplus_{x \in G} \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \right].$$

Pelo Lema 3.3.8 temos que $[\Delta(\Omega)]^{-1} \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Vamos verificar que

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Omega)]^{-1} = \left[\bigoplus_{x \in G} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \right] = [\Delta(\Theta)]$$

Considere ψ_x o isomorfismo de R -bimódulos dado por

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x & \longrightarrow & \Omega_x \otimes R 1_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \\
& \searrow \psi_x & \downarrow \\
& & \Omega_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \\
& & \downarrow \\
& & R 1_x \otimes_R \Theta_x \\
& & \downarrow \\
& & \Theta_x
\end{array}$$

ou seja,

$$\psi_x(\omega_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes \omega_{x^{-1}} \otimes u'_x) = (\omega_x (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x^{-1}}) u'_x.$$

Denotando $\Pi_x = \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x$, para todo $x \in G$, vamos verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_x \otimes_R \Pi_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega\Omega^{-1}}} & 1_x \Pi_{xy} \\
 \downarrow \psi_x \otimes \psi_y & & \downarrow \psi_{xy} \\
 \Theta_x \otimes_R \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Theta}} & 1_x \Theta_{xy}
 \end{array}$$

é comutativo. Por um lado, temos

$$\begin{aligned}
 & (f_{x,y}^{\Theta} \circ (\psi_x \otimes \psi_y))(\omega_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes \omega_{x^{-1}} \otimes u'_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes u_y \otimes \omega_{y^{-1}} \otimes u'_y) \\
 = & \left((\omega_x(u_{x^{-1}} \otimes u_x) \otimes \omega_{x^{-1}}) u'_x \otimes (\omega_y(u_{y^{-1}} \otimes u_y) \otimes \omega_{y^{-1}}) u'_y \right). \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

O outro lado do diagrama é dado pelas aplicações:

$$\begin{array}{c}
 \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \\
 \downarrow \Omega_x \otimes T_1 \otimes \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \\
 \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \\
 \downarrow \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes T_2 \otimes \Theta_y \\
 \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \\
 \downarrow f_{x,y}^{\Omega} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Theta} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Omega} \otimes f_{x,y}^{\Theta} \\
 1_x \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \otimes \Omega_{(xy)^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \\
 \downarrow \psi_{xy} \\
 1_x \Theta_{xy}
 \end{array}$$

$\psi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega\Omega^{-1}}$

onde T_1 e T_2 são os isomorfismos:

$$\begin{aligned}
 T_1 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} &\longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x, \\
 T_2 : \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} &\longrightarrow \Theta_y \otimes \Omega_{y^{-1}} \otimes \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x.
 \end{aligned}$$

Vamos construir os isomorfismos T_1 e T_2 : Sejam $f_i : \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \longrightarrow R$ e $g_i : R \longrightarrow \Omega_{x^{-1}} \otimes \Theta_x$, com $i = 1, 2, \dots, n$, aplicações R -bilineares tais que $\sum_{i=1}^n g_i f_i = Id_{\Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x}$. Como f_i e g_i são R -bilineares, então $f_j(g_i(1)) \in \mathcal{Z}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Vamos denotar $g_i(1) = \sum_l \omega_{x^{-1}}^{i,l} \otimes u_x^{i,l}$. Então,

$$\begin{aligned}
 T_2 : \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \otimes_R \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} &\longrightarrow \Theta_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \\
 \omega_{x^{-1}} \otimes u_x \otimes u_y \otimes \omega_{y^{-1}} &\longmapsto \sum_{i,l} f_i(\omega_{x^{-1}} \otimes u_x) u_y \otimes \omega_{y^{-1}} \otimes \omega_{x^{-1}}^{i,l} \otimes u_x^{i,l}.
 \end{aligned}$$

Para construir T_2 vamos considerar as aplicações R -bilineares

$$\bar{f}_i : \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \longrightarrow R1_{x-1} \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \longrightarrow \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \xrightarrow{f_i} R,$$

$$\bar{g}_i : R \xrightarrow{g_i} \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \longrightarrow R1_{x-1} \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \longrightarrow \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x.$$

Então,

$$\bar{f}_i(u_{x-1} \otimes u_x \otimes \omega_{x-1} \otimes u'_x) = f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x),$$

$$\bar{g}_i(1) = \sum_{j,l} \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes \omega_{x-1}^{i,l} \otimes u_x^{i,l},$$

onde $f_{x-1,x}^\Theta \left(\sum_{j=1}^m \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \right) = 1_{x-1}$. É fácil ver que $\sum_{i=1}^n \bar{g}_i \bar{f}_i = Id_{\Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes_R \Omega_{x-1} \otimes_R \Theta_x}$. Então, podemos escrever T_1 em função de $\bar{f}_i$ e $\bar{g}_i$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_1 : \quad \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y-1} &\rightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y-1} \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_{x-1} \otimes \Theta_x \\ u_{x-1} \otimes u_x \otimes \omega_{x-1} \otimes u'_{x-1} \otimes \omega_y \otimes u_{y-1} &\mapsto \sum_{i,j,l} f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes \omega_{x-1}^{i,l} \otimes u_x^{i,l}. \end{aligned}$$

Assim, o outro lado do diagrama é dado por:

$$\begin{aligned} &\omega_x \otimes u_{x-1} \otimes u_x \otimes \omega_{x-1} \otimes u'_x \otimes \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes u'_y \\ \xrightarrow{T_1} &\sum_{i,j} \omega_x \otimes f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes g_i(1) \otimes u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes u'_y \\ \xrightarrow{T_2} &\sum_{i,j,k,l'} \omega_x \otimes f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes \underbrace{f_k(g_i(1))}_{\in \mathcal{Z}} u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} \otimes u'_y \\ \stackrel{(3.15)}{=} &\sum_{i,j,k,l'} \omega_x \otimes f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) f_k(g_i(1)) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} \otimes u'_y \\ = &\sum_{i,j,k,l,l'} \omega_x \otimes f_k(g_i(f_i((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x))) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} \otimes u'_y \\ = &\sum_{j,k,l'} \omega_x \otimes f_k((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y \otimes u_{y-1} \otimes \bar{u}_{x-1}^j \otimes \bar{u}_x^j \otimes u_y \otimes \omega_{y-1} \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} \otimes u'_y \\ \mapsto &\sum_{j,k,l'} (\omega_x \overset{\Omega}{\circ} f_k((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y) \otimes (u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x-1}^j) \otimes (\bar{u}_x^j \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\omega_{y-1} \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'}) \otimes (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\ \xrightarrow{\psi_{xy}} &\sum_{j,k,l'} \left((\omega_x \overset{\Omega}{\circ} f_k((u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y) (u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x-1}^j \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x^j \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} (\omega_{y-1} \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'}) \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\ = &\sum_{k,l'} \left((\omega_x \overset{\Omega}{\circ} (u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y) (u_{y-1} 1_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} (\omega_{y-1} \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'}) \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\ \stackrel{(3.10)}{=} &\sum_{k,l'} \left((\omega_x (u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x 1_{x-1}) \omega_y) (u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} (\omega_{y-1} \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'}) \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l'} \left((\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y)(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} (\omega_{y-1} \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'}) \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\
&= \sum_{k,l'} \left(\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \left(f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1} \right) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}^{k,l'} \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\
&= \sum_{k,l'} \left(\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \underbrace{(f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) \omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1})}_{=a \in R} \omega_{x-1}^{k,l'} \right) (u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y) \\
&= \sum_{k,l'} \left((\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} a \omega_{x-1}^{k,l'}) u_x^{k,l'} \overset{\Theta}{\circ} u'_y \right) \\
&= \sum_{k,l'} \left(f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,x-1}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y) \right) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes a \underbrace{\omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'}}_{\in C_{\Omega_{x-1} \otimes \Theta_x}(R)} \otimes u'_y) \\
&= \sum_{k,l'} \left(f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,x-1}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y) \right) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} a \otimes u'_y) \\
&= \sum_{k,l'} \left(f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,x-1}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y) \right) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes \omega_{x-1}^{k,l'} \otimes u_x^{k,l'} f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) (\omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1}) \otimes u'_y) \\
&= \sum_k \left(f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,x-1}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y) \right) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes g_k(1) f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x) \otimes (\omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1}) u'_y) \\
&= \sum_k \left(f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,x-1}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y) \right) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes g_k(f_k(\omega_{x-1} \otimes u'_x)) \otimes (\omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1}) u'_y) \\
&= (f_{x,y}^{\Theta} \circ (f_{x,y}^{\Omega} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y)) (\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \otimes \omega_{x-1} \otimes u'_x \otimes (\omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1}) u'_y) \\
&= ((\omega_x(u_{x-1} \overset{\Theta}{\circ} u_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{x-1}) u'_x \overset{\Theta}{\circ} (\omega_y(u_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Omega}{\circ} \omega_{y-1}) u'_y). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Segue então de (3.35) e (3.36) que o diagrama é comutativo. Portanto, $[\Delta(\Omega)][\Delta(\Omega)]^{-1} = [\Delta(\Theta)]$

Comutatividade: Sejam $[\Delta(\Gamma)], [\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Temos

$$[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Omega_x \right] \quad \text{e} \quad [\Delta(\Omega)][\Delta(\Gamma)] = \left[\bigoplus_{x \in G} \Omega_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Gamma_x \right].$$

Para cada $x \in G$, considere o isomorfismo λ_x definido por

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Omega_x & \longrightarrow & \Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Omega_x \otimes R1_{x-1} & \longrightarrow & \Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \\
& \searrow & & & \downarrow T \\
& & & & \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Theta_x \\
& & & & \downarrow \\
& & & & \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Gamma_x \otimes R1_{x-1} \\
& & & & \downarrow \\
& & & & \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Gamma_x \\
& \swarrow \lambda_x & & & \nearrow
\end{array}$$

ou seja,

$$\lambda_x = (\Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Gamma_x \otimes f_{x-1,x}^{\Theta}) \circ (T \otimes \Theta_x) \circ (\Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Omega_x \otimes (f_{x-1,x}^{\Theta})^{-1}),$$

onde $T : \Gamma_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \longrightarrow \Omega_x \otimes \Theta_{x-1} \otimes \Gamma_x \otimes \Theta_{x-1}$ é o isomorfismo dado na Proposição 2.3.5.

Devemos mostrar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Gamma\Omega}} & 1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Omega_{xy} \\
 \downarrow \lambda_x \otimes \lambda_y & & \downarrow 1_x \lambda_{xy} \\
 \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega\Gamma}} & 1_x \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy}
 \end{array}$$

Sejam

$$T_1 : \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \longrightarrow \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}$$

$$T_2 : \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}}$$

$$T_3 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x$$

$$T_4 : \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x$$

$$T_5 : \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \longrightarrow 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}}$$

isomorfismos como na Proposição 2.3.5, então $f_{x,y}^{\Omega\Lambda} \circ (\lambda_x \otimes \lambda_y)$ é dado por:

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \\
 \swarrow \\
 \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \\
 \downarrow T_1 \otimes T_2 \otimes \Theta_y \\
 \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_y \\
 \downarrow \\
 \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Gamma_y \\
 \downarrow \Omega_x \otimes T_3 \otimes \Gamma_y \\
 \Omega_x \otimes \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Gamma_y \\
 \downarrow f_{x,y}^{\Omega} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Gamma} \\
 1_x \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy}
 \end{array}$$

$f_{x,y}^{\Omega\Gamma} \circ (\lambda_x \otimes \lambda_y)$

Por outro lado, $1_x \lambda_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega}$ é dado por:

$$\begin{array}{c}
\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y \\
\swarrow \Gamma_x \otimes T_4 \otimes \Omega_y \quad \searrow 1_x \lambda_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma \Omega} \\
\Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Omega_y \\
\downarrow f_{x,y}^{\Gamma} \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^{\Omega} \\
1_x \Gamma_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x \Omega_{xy} \\
\parallel \\
1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} 1_x \otimes \Omega_{xy} 1_{y^{-1}} \\
\downarrow \\
1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x \Omega_{xy} \otimes R 1_{y^{-1}} 1_{(xy)^{-1}} \\
\downarrow \\
1_x \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \\
\downarrow T_5 \otimes \Theta_{xy} \\
1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \\
\downarrow \\
1_x \Omega_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy}
\end{array}$$

Vamos construir os isomorfismos T_i 's: Para os isomorfismos T_2 e T_4 considere as aplicações R -bilineares $f_l : \Gamma_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}} \longrightarrow R$ e $g_l : R \longrightarrow \Gamma_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}}$, com $l = 1, 2, \dots, k$, tais que $\sum_{l=1}^k g_l f_l = Id_{\Gamma_y \otimes_R \Omega_{y^{-1}}}$. Denote $g_l(1) = \sum_{l,t} v_y^{l,t} \otimes u_{y^{-1}}^{l,t}$. Então,

$$\begin{array}{ccc}
T_2 : \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} & \rightarrow & \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \\
v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} & \mapsto & \sum_{l,t} f_l(v_y \otimes u_{y^{-1}}) \omega_y \otimes u'_{y^{-1}} \otimes v_y^{l,t} \otimes u_{y^{-1}}^{l,t}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
T_4 : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} & \rightarrow & \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \\
u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} & \mapsto & \sum_{l,t} v_y^{l,t} \otimes u_{y^{-1}}^{l,t} \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x f_l(v_y \otimes u_{y^{-1}})
\end{array}$$

Para T_1 e T_3 considere as aplicações R -bilineares $f_i^x : \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \longrightarrow R$, $g_i^x : R \longrightarrow \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}}$, $f_j^y : \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow R$ e $f_j^y : R \longrightarrow \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}}$, com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, tais que $\sum_{i=1}^n g_i^x f_i^x = Id_{\Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}}}$ e $\sum_{j=1}^m g_j^y f_j^y = Id_{\Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}}}$. Denote,

$$g_i^x(1) = \sum_{i,p} \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{u}_{x^{-1}}^{i,p} \quad \text{e} \quad g_j^y(1) = \sum_{j,q} \hat{\omega}_y^{j,q} \otimes \hat{u}_{y^{-1}}^{j,q}.$$

Então,

$$T_1 : \begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} & \rightarrow & \Omega_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \\ v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes u'_{x^{-1}} & \mapsto & \sum_{i,p} \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{u}_{x^{-1}}^{i,p} \otimes v_x \otimes u_{x^{-1}} f_i^x(\omega_x \otimes u'_{x^{-1}}). \end{array}$$

$$T_3 : \begin{array}{ccc} \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Gamma_x \otimes_R \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} & \rightarrow & \Omega_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Gamma_x \\ u_{x^{-1}} \otimes v_x \otimes \omega_y \otimes u_{y^{-1}} & \mapsto & \sum_{j,q} \hat{\omega}_y^{j,q} \otimes \hat{u}_{y^{-1}}^{j,q} \otimes u_{x^{-1}} \otimes v_x f_j^y(\omega_y \otimes u'_{y^{-1}}). \end{array}$$

Para construir T_5 considere

$$\begin{array}{ccc} 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} & \xrightarrow{(f_{x,y}^\Omega)^{-1} \otimes (f_{x,y}^\Theta)^{-1}} & \Omega_x \otimes_R \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \\ & \searrow & \downarrow \Omega_x \otimes f_j^y \otimes \Theta_{x^{-1}} \\ & & \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \\ & & \downarrow f_i^x \\ & & R \end{array}$$

$f_{i,j}^{xy}$

Então, $f_{i,j}^{xy}$ é R -bilinear e

$$f_{i,j}^{xy}(\omega_{xy} \otimes u_{(xy)^{-1}}) = \sum f_i^x(\omega_x^g f_j^y(\omega_y^g \otimes u_{y^{-1}}^h) \otimes u_{x^{-1}}^h),$$

onde $\sum_g (\omega_x^g \circ \omega_y^g) = \omega_{xy}$ e $\sum_h (u_{y^{-1}}^h \circ u_{x^{-1}}^h) = u_{(xy)^{-1}}$. Analogamente, considere

$$\begin{array}{ccccccc} R & \xrightarrow{g_i^x} & \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}} & \longrightarrow & \Omega_x \otimes R \otimes \Theta_{x^{-1}} & \xrightarrow{g_j^y} & \Omega_x \otimes_R \Omega_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \\ & \searrow & & & & & \downarrow f_{x,y}^\Omega \otimes f_{x,y}^\Theta \\ & & & & & & 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \end{array}$$

$g_{i,j}^{xy}$

Então, $g_{i,j}^{xy}$ é R -bilinear e

$$g_{i,j}^{xy}(1) = \sum_{i,j,p,q} (\tilde{\omega}_x^{i,p} \circ \hat{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\hat{u}_{y^{-1}}^{j,q} \circ \tilde{u}_{x^{-1}}^{i,p}).$$

É fácil ver que $\sum_{i,j}^{n,m} g_{i,j}^{xy} f_{i,j}^{xy} = Id_{1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}}}$. Então,

$$T_2 : \begin{array}{ccc} \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} & \rightarrow & 1_x \Omega_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \\ v_{xy} \otimes u_{(xy)^{-1}} \otimes \omega_{xy} \otimes u'_{(xy)^{-1}} & \mapsto & \sum g_{i,j}^{xy}(1) \otimes v_{xy} \otimes u_{(xy)^{-1}} f_{i,j}^{xy}(\omega_{xy} \otimes u'_{(xy)^{-1}}). \end{array}$$

Vamos denotar

$$\sum_{(x)} (\bar{u}_{x^{-1}} \circ \bar{u}_x) = 1_{x^{-1}} \quad \text{e} \quad \sum_{(y)} (\bar{u}_{y^{-1}} \circ \bar{u}_y) = 1_{y^{-1}}.$$

Vamos agora mostrar que o diagrama é comutativo. Para $1_x \lambda_{xy} \circ f_{y,x}^{\Gamma\Omega}$, usando a Observação 3.3.10 temos:

$$\begin{aligned}
& v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y \\
& \xrightarrow{T_4} \sum_{l,t} v_x \otimes v_y^{l,t} \otimes u_{y-1}^{l,t} \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \otimes \omega_y \\
& \mapsto \sum_{l,t} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) \otimes (\omega_x f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \\
& \mapsto \sum_{l,t} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) \otimes (\omega_x f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \otimes 1_{y-1} 1_{(xy)^{-1}} \\
& \mapsto \sum_{l,t} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) \otimes (\omega_x f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \otimes (\bar{u}_{y-1} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x-1}) \otimes (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
& \xrightarrow{T_5} \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) \underbrace{f_i^x(\omega_x f_l(v_y \otimes u_{y-1}) f_j^y(\omega_y \otimes \bar{u}_{y-1}))}_{=b_{l,j} \in R} \otimes \bar{u}_{x-1} \\
& \quad \otimes (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \otimes (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \otimes (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \otimes (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
& \mapsto \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \left((u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}) f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \left(u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \underbrace{(u_{x-1} f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}))}_{=c_{i,j,l} \in R} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y \right) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t}) \left(u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} c_{i,j,l} \bar{u}_y \right) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes \underbrace{\left(v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} c_{i,j,l} \bar{u}_y) \right)}_{(*)}
\end{aligned}$$

Veamos que $(*)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} c_{i,j,l} \bar{u}_y) \right) &= (f_{x,y}^{\Gamma} \circ (\Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes f_{y-1,y}^{\Theta})) (v_x \otimes \underbrace{v_y^{l,t} \otimes u_{y-1}^{l,t}}_{\in C_{\Gamma_y \otimes \Theta_{y-1}}(R)} \otimes c_{i,j,l} \otimes \bar{u}_y) \\
&= (f_{x,y}^{\Gamma} \circ (\Gamma_x \otimes \Gamma_y \otimes f_{y-1,y}^{\Theta})) (v_x \otimes c_{i,j,l} v_y^{l,t} \otimes u_{y-1}^{l,t} \otimes \bar{u}_y) \\
&= \left(v_x \overset{\Gamma}{\circ} c_{i,j,l} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right).
\end{aligned}$$

Voltando, temos:

$$\begin{aligned}
& (1_x \lambda_{xy} \circ f_{y,x}^{\Gamma\Omega})(v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes \left(v_x \overset{\Gamma}{\circ} c_{i,j,l} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right) \\
& = \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes \left(v_x (u_{x-1} f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Por fim, vamos calcular $f_{x,y}^{\Omega\Gamma} \circ (\lambda_x \otimes \lambda_y)$:

$$\begin{aligned}
& v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y \\
\mapsto & v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes 1_{x-1} \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y \otimes 1_{y-1} \\
\mapsto & \sum v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes \bar{u}_{x-1} \otimes \bar{u}_x \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y \otimes \bar{u}_{y-1} \otimes \bar{u}_y \\
\stackrel{T_1, T_2}{\mapsto} & \sum \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{u}_{x-1}^{i,p} \otimes v_x \otimes u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \otimes \bar{u}_x \otimes f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \omega_y \otimes \bar{u}_{y-1} \otimes v_y^{l,t} \otimes u_{y-1}^{l,t} \otimes \bar{u}_y \\
\mapsto & \sum \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{u}_{x-1}^{i,p} \otimes v_x (u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) \otimes f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \omega_y \otimes \bar{u}_{y-1} \otimes v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
\stackrel{T_3}{\mapsto} & \sum \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{\omega}_y^{j,q} \otimes \tilde{u}_{y-1}^{j,q} \otimes \tilde{u}_{x-1}^{i,p} \otimes v_x (u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) f_j^y(f_l(v_y \otimes u_{y-1}) \omega_y \otimes \bar{u}_{y-1}) \otimes v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
= & \sum \tilde{\omega}_x^{i,p} \otimes \tilde{\omega}_y^{j,q} \otimes \tilde{u}_{y-1}^{j,q} \otimes \tilde{u}_{x-1}^{i,p} \otimes v_x (u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) b_{l,j} \otimes v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \\
\mapsto & \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes \left(v_x \underbrace{(u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) b_{l,j}}_{(**)} \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right).
\end{aligned}$$

Vejamos que $(**)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(u_{x-1} f_i^x(\omega_x \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) b_{l,j} &= (f_{x-1,x}^{\Theta} \circ (\Theta_{x-1} \otimes f_i^x \otimes \Theta_x))(u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes \underbrace{\bar{u}_{x-1} \otimes \bar{u}_x}_{(f_{x-1,x}^{\Theta})^{-1}(1_{x-1})} b_{l,j}) \\
&= (f_{x-1,x}^{\Theta} \circ (\Theta_{x-1} \otimes f_i^x \otimes \Theta_x))(u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes b_{l,j} \bar{u}_{x-1} \otimes \bar{u}_x) \\
&= (u_{x-1} f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x).
\end{aligned}$$

Voltando, temos:

$$\begin{aligned}
& (f_{x,y}^{\Omega\Gamma} \circ (F_x \otimes F_y))(v_x \otimes u_{x-1} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y-1} \otimes \omega_y) \\
= & \sum (\tilde{\omega}_x^{i,p} \overset{\Omega}{\circ} \tilde{\omega}_y^{j,q}) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,q} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x-1}^{i,p}) \otimes \left(v_x (u_{x-1} f_i^x(\omega_x b_{l,j} \otimes \bar{u}_{x-1}) \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) \overset{\Gamma}{\circ} v_y^{l,t} (u_{y-1}^{l,t} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_y) \right).
\end{aligned}$$

Comparando com (3.37) temos que $1_x \lambda_{xy} \circ f_{y,x}^{\Gamma\Omega} = f_{x,y}^{\Omega\Gamma} \circ (\lambda_x \otimes \lambda_y)$. Logo o diagrama é comutativo e temos

$$[\Delta(\Omega)][\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] \text{ em } \mathcal{C}(\Theta/R).$$

Portanto a multiplicação em $\mathcal{C}(\Theta/R)$ é comutativa. ■

Considere

$$\mathcal{C}_0(\Theta/R) = \{[\Delta(\Gamma)]; \Gamma_x \simeq \Theta_x, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Dado $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, então $\Gamma_x \simeq \Theta_x$, para todo $x \in G$. Em particular, $\Gamma_x | \Theta_x$ e

$$\Gamma_x \otimes_R \Gamma_{x-1} \simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_{x-1} \simeq R1_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Então, $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Sejam $[\Delta(\Gamma)], [\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, temos

$$\Gamma_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Omega_x \simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Theta_x \simeq \Theta_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Assim, $[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = [\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Omega_x] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Analogamente, se $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, então

$$\Theta_x \otimes_R \Gamma_{x-1} \otimes_R \Theta_x \simeq \Theta_x \otimes_R \Theta_{x-1} \otimes_R \Theta_x \simeq \Theta_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Logo, $[\Delta(\Gamma)]^{-1} = [\bigoplus_{x \in G} \Theta_x \otimes_R \Gamma_{x-1} \otimes_R \Theta_x] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Portanto, $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$ é um subgrupo de $\mathcal{C}(\Theta/R)$.

Lema 3.4.2. *Sejam $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$ e $a_x : \Gamma_x \rightarrow \Theta_x$ um isomorfismo de R -bimódulos, para todo $x \in G$. Considere $\tau_{x,y} : 1_x \Theta_{xy} \rightarrow 1_x \Theta_{xy}$ o isomorfismo de R -bimódulos definido pelo diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Gamma} & 1_x \Gamma_{xy} \\
 \downarrow a_x \otimes a_y & & \downarrow a_{xy} \\
 \Theta_x \otimes_R \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Theta} & 1_x \Theta_{xy} \\
 & \nearrow \tau_{x,y} &
 \end{array}$$

ou seja,

$$\tau_{x,y} \circ f_{x,y}^\Theta \circ (a_x \otimes a_y) = a_{xy} \circ f_{x,y}^\Gamma, \quad \text{para todos } x, y \in G.$$

Então, $\tilde{\tau}_{-, -}$ é um elemento normalizado em $Z_\Theta^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$, onde $\tilde{\tau}_{x,y}$ é como no Lema 3.2.7.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.7 temos que $\tilde{\tau}_{x,y} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x 1_{xy})$ e

$$\tilde{\tau}_{x,y}(a_x(v_x) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) = a_{xy}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y), \quad (3.38)$$

para todo $v_x \in \Gamma_x$ e $v_y \in \Gamma_y$,

Dados $x, y, z \in G$ e $v_x \in \Gamma_x, v_y \in \Gamma_y$ e $v_z \in \Gamma_z$, temos

$$\begin{aligned}
 a_{xyz}((v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z) &\stackrel{(3.38)}{=} \tilde{\tau}_{xy,z}(a_{xy}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Theta}{\circ} a_z(v_z)) \\
 &\stackrel{(3.38)}{=} \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y}((a_x(v_x) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) \overset{\Theta}{\circ} a_z(v_z)) \\
 &= \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y}(a_x(v_x) \overset{\Theta}{\circ} (a_y(v_y) \overset{\Theta}{\circ} a_z(v_z))) \\
 &\stackrel{(3.38)}{=} \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y}(a_x(v_x) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{\tau}_{y,z}^{-1} a_{yz}(v_y \overset{\Gamma}{\circ} v_z)) \\
 &= \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y}(a_x(v_x) \tilde{\tau}_{y,z}^{-1} \overset{\Theta}{\circ} a_{yz}(v_y \overset{\Gamma}{\circ} v_z)) \\
 &\stackrel{(3.14)}{=} \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}})(a_x(v_x) \overset{\Theta}{\circ} a_{yz}(v_y \overset{\Gamma}{\circ} v_z)) \\
 &\stackrel{(3.38)}{=} \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}}) \tilde{\tau}_{x,yz}^{-1} a_{xyz}(v_x \overset{\Gamma}{\circ} (v_y \overset{\Gamma}{\circ} v_z)) \\
 &= \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}}) \tilde{\tau}_{x,yz}^{-1} a_{xyz}((v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z) \\
 &= a_{xyz}(\tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}}) \tilde{\tau}_{x,yz}^{-1} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z).
 \end{aligned}$$

Como a_{xyz} é isomorfismo de R -bimódulos, temos

$$((v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z) = \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}}) \tilde{\tau}_{x,yz}^{-1} ((v_x \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \overset{\Gamma}{\circ} v_z), \quad (3.39)$$

para todo $v_x \in \Gamma_x, v_y \in \Gamma_y$ e $v_z \in \Gamma_z$. Segue análogo a demonstração da Proposição 3.3.5 que

$$\alpha_x(\tilde{\tau}_{y,z}^{-1} 1_{x^{-1}}) \tilde{\tau}_{xy,z} \tilde{\tau}_{x,yz}^{-1} \tilde{\tau}_{x,y} = 1_x 1_{xy} 1_{xyz}, \quad \text{para todo } x, y, z \in G.$$

Isso implica que $\tilde{\tau}_{-, -}^{-1} \in Z_\Theta^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$ e consequentemente, $\tilde{\tau}_{-, -} \in Z_\Theta^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Também análogo a demonstração da Proposição 3.3.5, temos que $\tilde{\tau}_{-, -}$ é normalizado. ■

Teorema 3.4.3. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{C}_0(\Theta/R) &\longrightarrow H_{\Theta}^2(G, \alpha, \mathcal{Z}) \\ [\Delta(\Gamma)] &\longrightarrow [\tilde{\tau}_{-, -}], \end{aligned}$$

onde $\tilde{\tau}_{-, -} \in Z^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$ é definido no Lema 3.4.2, é isomorfismo de grupos.

Demonstração. Sejam $[\Delta(\Gamma)], [\Delta(\Omega)]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$ com isomorfismos de R -bimódulos $a_x : \Gamma_x \longrightarrow \Theta_x$ e $b_x : \Omega_x \longrightarrow \Theta_x$, para todo $x \in G$. Denote,

$$\tau_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (a_x \otimes a_y) = a_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma}, \quad \forall x, y \in G, \quad (3.40)$$

$$\gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (b_x \otimes b_y) = b_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega}, \quad \forall x, y \in G. \quad (3.41)$$

Vejamos primeiro que ζ está bem definida. Suponha $[\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Omega)]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Então existem isomorfismos de R -bimódulos $\xi_x : \Gamma_x \longrightarrow \Omega_x$, para todo $x \in G$, tal que o digrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Gamma}} & 1_x \Gamma_{xy} \\ \xi_x \otimes \xi_y \downarrow & & \downarrow \xi_{xy} \\ \Omega_x \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega}} & 1_x \Omega_{xy} \end{array} \quad (3.42)$$

Para cada $x \in G$ considere o isomorfismo de R -bimódulos definido por

$$\beta_x : \Theta_x \xrightarrow{a_x^{-1}} \Gamma_x \xrightarrow{\xi_x} \Omega_x \xrightarrow{b_x} \Theta_x,$$

ou seja,

$$\beta_x = b_x \circ \xi_x \circ a_x^{-1}, \quad \forall x \in G. \quad (3.43)$$

Afirmção 3.4.4. $\beta_{xy} \circ \tau_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} = \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (\beta_x \otimes \beta_y)$, para todos $x, y \in G$.

De fato, por (3.40), (3.41) e pela comutatividade do diagrama (3.42), temos

$$\begin{aligned} \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (\beta_x \otimes \beta_y) &= \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ ((b_x \circ \xi_x \circ a_x^{-1}) \otimes (b_y \circ \xi_y \circ a_y^{-1})) \\ &= \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (b_x \otimes b_y) \circ (\xi_x \otimes \xi_y) \circ (a_x^{-1} \otimes a_y^{-1}) \\ &\stackrel{(3.41)}{=} b_{xy} \circ f_{x,y}^{\Omega} \circ (\xi_x \otimes \xi_y) \circ (a_x^{-1} \otimes a_y^{-1}) \\ &= b_{xy} \circ \xi_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma} \circ (a_x^{-1} \otimes a_y^{-1}) \\ &\stackrel{(3.40)}{=} b_{xy} \circ \xi_{xy} \circ a_{xy}^{-1} \circ \tau_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \\ &= \beta_{xy} \circ \tau_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta}. \end{aligned}$$

Então, para todos $u_x \in \Theta_x$, $u_y \in \Theta_y$, temos

$$\beta_{xy}(\tau_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)) = \gamma_{x,y}(\beta_x(u_x) \overset{\Theta}{\circ} \beta_y(u_y)).$$

Por um lado temos

$$\beta_{xy}(\tau_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u)) = \beta_{xy}(\tilde{\tau}_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)) = \tilde{\beta}_{xy} \tilde{\tau}_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\gamma_{x,y}(\beta_x(u_x) \circ \beta_y(u_y)) &= \tilde{\gamma}_{x,y}(\beta_x(u_x) \circ \beta_y(u_y)) = \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x u_x \circ \tilde{\beta}_y u_y) \\ &= \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x u_x \tilde{\beta}_y \circ u_y) \stackrel{(3.14)}{=} \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}}) u_x \circ u_y) \\ &= \tilde{\gamma}_{x,y} \tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}})(u_x \circ u_y).\end{aligned}$$

Então,

$$\tilde{\beta}_{xy} \tilde{\tau}_{x,y}(u_x \circ u_y) = \tilde{\gamma}_{x,y} \tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}})(u_x \circ u_y),$$

para todos $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Aplicando o mesmo argumento da Proposição 3.3.5 temos

$$\tilde{\beta}_{xy} \tilde{\tau}_{x,y} = \tilde{\gamma}_{x,y} \tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}}), \quad \text{para todos } x, y \in G.$$

Defina

$$\begin{aligned}h : G &\longrightarrow \mathcal{Z} \\ x &\longmapsto \tilde{\beta}_x,\end{aligned}$$

então $h_x \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x)$, para todo $x \in G$ e temos

$$\tilde{\tau}_{x,y} = \tilde{\gamma}_{x,y} \alpha_x(h_y 1_{x^{-1}}) h_{xy}^{-1} h_x = \tilde{\gamma}_{x,y}(\delta^1 h)(x, y), \quad \forall x, y \in G.$$

Isso implica que $[\tilde{\tau}_{-,-}] = [\tilde{\gamma}_{-,-}]$ em $H_{\Theta}^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Portanto, ζ está bem definida.

Para mostrar que ζ é injetora, suponha que $\zeta([\Delta(\Gamma)]) = \zeta([\Delta(\Omega)])$ em $H_{\Theta}^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Então, existe $h : G \longrightarrow \mathcal{Z}$, com $h_x \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x)$, para todo $x \in G$, e

$$\tilde{\tau}_{x,y} = \tilde{\gamma}_{x,y} \alpha_x(h_y 1_{x^{-1}}) h_{xy}^{-1} h_x, \quad \forall x, y \in G.$$

Seja

$$\begin{aligned}\beta_x : \Theta_x &\longrightarrow \Theta_x \\ u_x &\longmapsto h_x u_x,\end{aligned}$$

então β_x é isomorfismo de R -bimódulos e $\tilde{\beta}_x = h_x$, para todo $x \in G$ (ver Lema 3.2.7). Assim,

$$\tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\beta}_{xy} = \tilde{\gamma}_{x,y} \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}}) \tilde{\beta}_y, \quad \forall x, y \in G. \quad (3.44)$$

Defina o isomorfismo ξ_x por

$$\xi_x : \Gamma_x \xrightarrow{a_x} \Theta_x \xrightarrow{\beta_x} \Theta_x \xrightarrow{b_x^{-1}} \Omega_x,$$

ou seja,

$$\xi_x = b_x^{-1} \circ \beta_x \circ a_x, \quad \text{para todo } x \in G.$$

Vamos verificar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_x \otimes_R \Gamma_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Gamma}} & 1_x \Gamma_{xy} \\ \downarrow \xi_x \otimes \xi_y & & \downarrow \xi_{xy} \\ \Omega_x \otimes_R \Omega_y & \xrightarrow{f_{x,y}^{\Omega}} & 1_x \Omega_{xy} \end{array} \quad (3.45)$$

Para isso, vamos precisar da seguinte observação:

Afirmção 3.4.5. $\beta_{xy} \circ \tau_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} = \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (\beta_x \otimes \beta_y)$, para todo $x, y \in G$.

De fato, para $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$, temos

$$\beta_{xy}(\tau_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)) = \tilde{\beta}_{x,y} \tilde{\tau}_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y). \quad (3.46)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \gamma_{x,y}(\beta_x(u_x) \overset{\Theta}{\circ} \beta_y(u_y)) &= \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x u_x \overset{\Theta}{\circ} \tilde{\beta}_y u_y) = \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x u_x \tilde{\beta}_y \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &= \tilde{\gamma}_{x,y}(\tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}}) u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &= \tilde{\gamma}_{x,y} \tilde{\beta}_x \alpha_x(\tilde{\beta}_y 1_{x^{-1}})(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &\stackrel{(3.44)}{=} \tilde{\beta}_{x,y} \tilde{\tau}_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &\stackrel{(3.46)}{=} \beta_{xy}(\tau_{x,y}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)). \end{aligned}$$

Por (3.40), (3.41) e pela Afirmação 3.4.5, temos:

$$\begin{aligned} \xi_{xy} \circ f_{x,y}^\Gamma &= b_{xy}^{-1} \circ \beta_{xy} \circ a_{xy} \circ f_{x,y}^\Gamma \\ &\stackrel{(3.40)}{=} b_{xy}^{-1} \circ \beta_{xy} \circ \tau_{x,y} \circ f_{x,y}^\Theta \circ (a_x \otimes a_y) \\ &= b_{xy}^{-1} \circ \gamma_{xy} \circ f_{x,y}^\Theta \circ (\beta_x \otimes \beta_y) \circ (a_x \otimes a_y) \\ &\stackrel{(3.41)}{=} b_{xy}^{-1} \circ b_{xy} \circ f_{x,y}^\Omega \circ (b_x^{-1} \otimes b_y^{-1}) \circ (\beta_x \otimes \beta_y) \circ (a_x \otimes a_y) \\ &= f_{x,y}^\Omega \otimes (\xi_x \otimes \xi_y). \end{aligned}$$

Logo o diagrama (3.45) é comutativo. Assim, temos um isomorfismo de produtos cruzados generalizados parciais. Portanto, $[\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Omega)]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$, mostrando que ζ é injetora.

Seja $\sigma : G \times G \longrightarrow \mathcal{Z}$ um 2-cociclo normalizado em $H_\Theta^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então $\sigma_{x,y} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z} 1_x 1_{xy})$ e

$$\alpha_x(\sigma_{y,z} 1_{x^{-1}}) \sigma_{x,yz} = \sigma_{xy,z} \sigma_{x,y}, \quad \forall x, y, z \in G. \quad (3.47)$$

Considere o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} \rho_x : \Theta_x &\longrightarrow \Theta_x \\ u_x &\longmapsto \sigma_{x,x} u_x \end{aligned}$$

e defina $\Sigma_x = \Theta_x$, como R -bimódulos. Então, $\rho_x : \Sigma_x \longrightarrow \Theta_x$ é isomorfismo de R -bimódulos. Seja

$$\begin{aligned} f_{x,y}^\Sigma : \Sigma_x \otimes_R \Sigma_y &\longrightarrow 1_x \Sigma_{xy} \\ u_x \otimes u_y &\longmapsto \sigma_{x,y} f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y). \end{aligned}$$

Como σ é um 2-cociclo, então $\{f_{x,y}^\Sigma\}$ é um conjunto de fatores para Σ . De fato, sejam $u_x \in \Sigma_x, u_y \in \Sigma_y$ e $u_z \in \Sigma_z$, então

$$\begin{aligned} f_{x,yz}^\Sigma(u_x \otimes f_{y,z}^\Sigma(u_y \otimes u_z)) &= \sigma_{x,yz} f_{x,yz}^\Theta(u_x \otimes \sigma_{y,z} f_{y,z}^\Theta(u_y \otimes u_z)) \\ &= \sigma_{x,yz} f_{x,yz}^\Theta(u_x \sigma_{y,z} \otimes f_{y,z}^\Theta(u_y \otimes u_z)) \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \sigma_{x,yz} \alpha_x(\sigma_{y,z} 1_{x^{-1}}) f_{x,yz}^\Theta(u_x \otimes f_{y,z}^\Theta(u_y \otimes u_z)) \\ &\stackrel{(3.47)}{=} \sigma_{xy,z} \sigma_{x,y} f_{xy,z}^\Theta(f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y) \otimes u_z) \\ &= \sigma_{xy,z} f_{xy,z}^\Theta(\sigma_{x,y} f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y) \otimes u_z) \\ &= f_{xy,z}^\Sigma(f_{x,y}^\Sigma(u_x \otimes u_y) \otimes u_z). \end{aligned}$$

Assim, $[\Delta(\Sigma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Defina

$$\begin{aligned} \lambda : G &\longrightarrow \mathcal{Z} \\ x &\longmapsto \lambda_x = \sigma_{x,x}^{-1} \end{aligned}$$

Então $\lambda_x \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x)$, para todo $x \in G$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \rho_{xy}(f_{x,y}^\Sigma(u_x \otimes u_y)) &= \rho_{xy}(\sigma_{x,y} f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y)) \\ &= \sigma_{x,y} \rho_{xy}(f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y)) \\ &= \sigma_{x,y} \sigma_{xy,xy} f_{x,y}^\Theta(u_x \otimes u_y) \\ &= \sigma_{x,y} \sigma_{xy,xy} f_{x,y}^\Theta(\sigma_{x,x}^{-1} \rho_x(u_x) \otimes \sigma_{y,y}^{-1} \rho_y(u_y)) \\ &= \sigma_{x,y} \sigma_{xy,xy} f_{x,y}^\Theta(\sigma_{x,x}^{-1} \rho_x(u_x) \sigma_{y,y}^{-1} \otimes \rho_y(u_y)) \\ &= \sigma_{x,y} \sigma_{xy,xy} f_{x,y}^\Theta(\sigma_{x,x}^{-1} \alpha_x(\sigma_{y,y}^{-1} 1_{x^{-1}}) \rho_x(u_x) \otimes \rho_y(u_y)) \\ &= \sigma_{x,y} \sigma_{xy,xy} \sigma_{x,x}^{-1} \alpha_x(\sigma_{y,y}^{-1} 1_{x^{-1}}) f_{x,y}^\Theta(\rho_x(u_x) \otimes \rho_y(u_y)) \\ &= \sigma_{x,y}(\delta^1 \lambda)(x, y) f_{x,y}^\Theta(\rho_x(u_x) \otimes \rho_y(u_y)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\zeta([\Delta(\Sigma)]) = [\sigma(\delta^1 \lambda)] = [\sigma] \text{ em } H_\Theta^2(G, \alpha, \mathcal{Z}).$$

Portanto, ζ é sobrejetora.

Por fim, vejamos que ζ é morfismo de grupos. Por definição temos que $[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = [\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Considere o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} d_x : \Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x &\longrightarrow \Theta_x \\ v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x &\longmapsto a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)). \end{aligned}$$

Observe que $d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega} = d_{xy} \circ (f_{x,y}^\Gamma \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes f_{xy}^\Omega) \circ (\Gamma_x \otimes T \otimes \Omega_y)$, onde T é o isomorfismo

$$T : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \otimes_R \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow \Gamma_y \otimes_R \Theta_{y^{-1}} \otimes_R \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x.$$

Defina

$$f_x : \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x \xrightarrow{\Theta_{x^{-1}} \otimes b_x} \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \longrightarrow R1_{x^{-1}} \hookrightarrow R,$$

$$g_x : R \longrightarrow R1_{x^{-1}} \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Theta_x \xrightarrow{\Theta_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}} \Theta_{x^{-1}} \otimes_R \Omega_x.$$

É fácil ver que $g_x f_x = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x}$. Então, podemos escrever o isomorfismo T em função de f_x e g_x .

Como $f_x(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) = (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x))$ e $g_x(1) = \sum_{(x)} \bar{u}_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}(\bar{u}_x)$, onde $\sum_{(x)} (\bar{u}_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) = 1_{x^{-1}}$, então

$$T(u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}}) = \sum_{(x)} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \bar{u}_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}(\bar{u}_x),$$

Assim, $d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega}$:

$$\begin{aligned}
& v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x \otimes v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y \\
\stackrel{T}{\mapsto} & \sum_{(x)} v_x \otimes (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \bar{u}_{x^{-1}} \otimes b_x^{-1}(\bar{u}_x) \otimes \omega_y \\
\mapsto & \sum_{(x)} (v_x \overset{\Gamma}{\circ} (u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) v_y) \otimes (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x^{-1}}) \otimes (b_x^{-1}(\bar{u}_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \\
\stackrel{d_{xy}}{\mapsto} & \sum_{(x)} a_{xy}(v_x(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Gamma}{\circ} v_y) \left((u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} b_{xy}(b_x^{-1}(\bar{u}_x) \overset{\Omega}{\circ} \omega_y) \right) \\
= & \sum_{(x)} \tilde{\tau}_{x,y}(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) \left((u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{\gamma}_{x,y}(\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y)) \right) \\
\stackrel{(3.14)}{=} & \sum_{(x)} \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y}(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) \left((u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} (\bar{u}_x \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y)) \right) \\
= & \sum_{(x)} \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y}(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) \left(u_{y^{-1}}(\bar{u}_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} \bar{u}_x) \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y) \right) \\
= & \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y}(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)) \left(u_{y^{-1}} 1_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y) \right) \\
\stackrel{(3.10)}{=} & \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y} \left(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y) 1_{(xy)^{-1}} (u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y)) \right) \\
\stackrel{(3.10)}{=} & \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y} \left(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x) 1_{x^{-1}}) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)(u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y)) \right) \\
= & \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y} \left(a_x(v_x)(u_{x^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_x(\omega_x)) \overset{\Theta}{\circ} a_y(v_y)(u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} b_y(\omega_y)) \right) \\
= & \tilde{\tau}_{x,y} \tilde{\gamma}_{x,y} \left(d_x(v_x \otimes u_{x^{-1}} \otimes \omega_x) \overset{\Theta}{\circ} d_y(v_y \otimes u_{y^{-1}} \otimes \omega_y) \right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau_{x,y} \circ \gamma_{x,y} \circ f_{x,y}^{\Theta} \circ (d_x \otimes d_y) = d_{xy} \circ f_{x,y}^{\Gamma\Omega}, \quad \forall x, y \in G.$$

Portanto, $\zeta([\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)]) = [\tilde{\tau}_{-,-} \tilde{\gamma}_{-,-}] = \zeta([\Delta(\Gamma)]) \zeta([\Delta(\Omega)])$.

■

Capítulo 4

A sequência exata de sete termos

Nesse Capítulo vamos construir a versão parcial da sequência de Miyashita para anéis não comutativos com unidade. A sequência construída nesse capítulo generaliza a sequência dada em [5, Teorema 2.12]. Dados uma extensão de anéis com mesma unidade $R \subseteq S$ e uma representação parcial unital

$$\begin{aligned} \Theta : G &\longrightarrow \mathcal{S}_R(S) \\ x &\longmapsto \Theta_x \end{aligned}$$

com $\varepsilon_x = \Theta_x \Theta_{x^{-1}} = R1_x$, para todo $x \in G$. Considere $\Delta(\Theta)$ o produto cruzado generalizado parcial construído através de Θ como na Observação 3.3.13. Denotamos $f^\Theta = \{f_{x,y}^\Theta : \Theta_x \otimes \Theta_y \longrightarrow 1_x \Theta_{xy}, x, y \in G\}$ o conjunto de fatores de Θ e $\iota : R \longrightarrow \Theta_1$ o isomorfismo de anéis como na Observação 3.3.4.

Em todo o Capítulo $\otimes$ significa $\otimes_R$, a menos de menção contrária.

4.1 A primeira sequência exata

Seja $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)$ o grupo definido na Seção 2.4. Definimos

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)} = \{ ([P] \xRightarrow{[\phi]} [X]) \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R); \Theta_x \phi(P) = \phi(P) \Theta_x \text{ para todo } x \in G \}.$$

Observação 4.1.1. *Seja $([P] \xRightarrow{[\phi]} [X]) \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)$. Então,*

$$\Theta_x \phi(P) = \phi(P) \Theta_x \text{ se, e somente se, } \Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} = \phi(P) 1_x, \text{ para todo } x \in G. \quad (4.1)$$

De fato, como P é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central, então $P1_x = 1_x P$, para todo $x \in G$. Assim, pela R -bilinearidade de ϕ temos $1_x \phi(P) = \phi(P) 1_x$, para todo $x \in G$. Se $\Theta_x \phi(P) = \phi(P) \Theta_x$, para todo $x \in G$, então

$$\Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} = \phi(P) \Theta_x \Theta_{x^{-1}} = \phi(P) 1_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} = \phi(P) 1_x &\Rightarrow \Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} \Theta_x = \phi(P) 1_x \Theta_x \\ &\Rightarrow \Theta_x \phi(P) 1_{x^{-1}} = \phi(P) \Theta_x \\ &\Rightarrow \Theta_x 1_{x^{-1}} \phi(P) = \phi(P) \Theta_x \\ &\Rightarrow \Theta_x \phi(P) = \phi(P) \Theta_x. \end{aligned}$$

Lema 4.1.2. $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$ é um subgrupo de $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)$.

Demonstração. É fácil ver que $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$ é fechado para o produto. Vejamos que é fechado para o inverso. Seja $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$. Pela Proposição 2.4.4, seu inverso em $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)$ é dado por $[P^*] \xRightarrow{[\phi^*]} [X^*]$. Como ϕ é injetora podemos ver $P \subseteq X$ e $P^* \subseteq X^*$. Observe que $P^* = \{f \in X^*; f(P) \subseteq R\}$. Assim, $P^* \cdot 1_x = \{f \in X^*; f(P) \subseteq R1_x\}$. De fato, seja $f \in X^*$, tal que $f(P) \subseteq R1_x$, então $f \in P^*$ e

$$(f \cdot 1_x)(p) = f(p)1_x = f(p).$$

Logo, $f \in P^* \cdot 1_x$. Por outro lado, se $f \in P^* \cdot 1_x$, então $f = f' \cdot 1_x$, para algum $f' \in P^*$. Então,

$$f(p) = (f' \cdot 1_x)(p) = f'(p)1_x \in R1_x, \text{ para todo } p \in P.$$

Portanto, vale a igualdade. Vejamos agora que $\Theta_x \cdot P^* \cdot \Theta_{x^{-1}} = P^* \cdot 1_x$, para todo $x \in G$. Temos,

$$\begin{aligned} (\Theta_x \cdot P^* \cdot \Theta_{x^{-1}})(P) &= (P^* \cdot \Theta_{x^{-1}})(P\Theta_x) = (P^* \cdot \Theta_{x^{-1}})(\Theta_x P) \\ &= \Theta_x(P^* \cdot \Theta_{x^{-1}})(P) = \Theta_x[P^*(P)]\Theta_{x^{-1}} \\ &\subseteq \Theta_x R\Theta_{x^{-1}} = R1_x. \end{aligned}$$

Logo, $\Theta_x \cdot P^* \cdot \Theta_{x^{-1}} \subseteq P^* \cdot R1_x$, para todo $x \in G$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} P^* \cdot R1_x &= R1_x \cdot P^* \cdot R1_x = (\Theta_x \Theta_{x^{-1}}) \cdot P^* \cdot (\Theta_x \Theta_{x^{-1}}) \\ &= \Theta_x \cdot (\Theta_{x^{-1}} \cdot P^* \cdot \Theta_x) \cdot \Theta_{x^{-1}} \\ &\subseteq \Theta_x \cdot (P^* \cdot R1_{x^{-1}}) \cdot \Theta_{x^{-1}} \\ &= \Theta_x \cdot P^* \cdot (R1_{x^{-1}} \Theta_{x^{-1}}) \\ &= \Theta_x \cdot P^* \cdot \Theta_{x^{-1}}. \end{aligned}$$

Logo vale a igualdade. Portanto, $[P^*] \xRightarrow{[\phi^*]} [X^*] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$. ■

Proposição 4.1.3. A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)} &\longrightarrow \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} \\ ([P] \xRightarrow{[\phi]} [X]) &\longmapsto [P] \end{aligned}$$

é um morfismo de grupos bem definido.

Demonstração. Claramente φ_2 é morfismo de grupos. Basta mostrar que se $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$, então $[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$. Por (4.1) temos que $\Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} = \phi(PR1_x)$, para todo $x \in G$. Como ϕ é R -bilinear, então $\phi(P)$ é um R -subbimodulo de X . Pela Proposição 3.3.11 e por ϕ ser injetora, temos que f_x definida por

$$\begin{array}{ccccc} \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} & \longrightarrow & \Theta_x \otimes \phi(P) \otimes \Theta_{x^{-1}} & \longrightarrow & \Theta_x \phi(P) \Theta_{x^{-1}} = \phi(P1_x) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & P1_x \\ & & & & \downarrow \\ & & & & P \otimes R1_x \\ & \searrow & \text{---} f_x \text{---} & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

ou seja,

$$f_x(u_x \otimes p \otimes u_{x^{-1}}) = p' \otimes 1_x,$$

onde $\phi(p') = u_x \phi(p) u_{x^{-1}}$, é um isomorfismo de R -bimódulos. Logo, $[P] \in \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$.

■

Vamos denotar

$$\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)} = \{f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S); f(\Theta_x) = \Theta_x, \forall x \in G\}.$$

Claramente, $\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)}$ é um subgrupo de $\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$.

Lema 4.1.4. *O diagrama abaixo é comutativo com linhas exatas*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{U}(\mathcal{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S) & \xrightarrow{\mathcal{E}} & \mathcal{P}(S/R) & \xrightarrow{\vartheta} & \mathbf{Pic}(R) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{U}(\mathcal{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} \end{array}$$

Demonstração. A exatidão da primeira linha é dada no Teorema 2.5.1. A restrição de ϑ a $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$ é o morfismo φ_2 definido em Proposição 4.1.3. Seja $r \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$, como Θ_x é R -bimódulo, temos que $\mathcal{F}(r) \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)}$. Dado $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)}$, então

$$i_f(R) \cdot \Theta_x = Rf(\Theta_x) = R\Theta_x = \Theta_x R = \Theta_x \cdot i_f(R), \text{ para todo } x \in G.$$

Como R é $\mathcal{Z}$ -bimódulo central, então $\mathcal{E}(f) = ([R] \xRightarrow{[\iota_f]} [S_f]) \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$. Logo, os morfismos da segunda linha estão bem definidas. Vejamos que a segunda linha é exata.

A exatidão no primeiro termo e a inclusão $\mathcal{E}(\mathbf{Aut}_{R\text{-Rings}}(S)^{(G)}) \subseteq \ker(\varphi_2)$ segue diretamente da exatidão da primeira linha. Seja $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \ker(\varphi_2)$. Então, existe $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)$ tal que $\mathcal{E}(f) = ([R] \xRightarrow{[\iota_f]} [S_f]) = ([P] \xRightarrow{[\phi]} [X])$ em $\mathcal{P}(S/R)$. Pela demonstração do Teorema 2.5.1 temos que se $\lambda : R \rightarrow P$ é um isomorfismo de R -bimódulos, definindo α e β por

$$\begin{aligned} \alpha : S &\rightarrow R \otimes_R S \rightarrow P \otimes_R S \xrightarrow{\tilde{\phi}_r} X \\ \beta : S &\rightarrow S \otimes_R R \rightarrow S \otimes_R P \xrightarrow{\tilde{\phi}_l} X \end{aligned}$$

então $f = \beta^{-1} \circ \alpha$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i_f} & S_f \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \beta \\ P & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

é comutativo. Por $[P] \xRightarrow{[\phi]} [X] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(S/R)^{(G)}$, então $\phi(P)\Theta_x = \Theta_x \phi(P)$, para todo $x \in G$. Vamos verificar que $f(\Theta_x) = \Theta_x$, para todo $x \in G$.

Dado $u_x \in \Theta_x$, temos que $\phi(\lambda(1))u_x \in \phi(P)\Theta_x = \Theta_x \phi(P)$, assim existem $u_x^i \in \Theta_x$ e $p_i \in P$ com $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $\phi(\lambda(1))u_x = \sum_{i=1}^n u_x^i \phi(p_i)$. Como λ é isomorfismo existem $r_i \in R$ tais que $\lambda(r_i) = p_i$,

para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, temos

$$\begin{aligned}\alpha(u_x) &= \phi(\lambda(1))u_x = \sum_{i=1}^n u_x^i \phi(p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n u_x^i \phi(\lambda(r_i)) = \sum_{i=1}^n u_x^i \beta(i_f(r_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n u_x^i \beta(r_i) = \sum_{i=1}^n \beta(u_x^i r_i).\end{aligned}$$

Assim,

$$f(u_x) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(u_x) = \sum_{i=1}^n u_x^i r_i \in \Theta_x.$$

Logo, $f(\Theta_x) \subseteq \Theta_x$, para todo $x \in G$.

Por outro lado, dado $u_x \in \Theta_x$ temos $u_x \phi(\lambda(1)) \in \Theta_x \phi(P)$ e assim existem $v_x^j \in \Theta_x$ e $p_j \in P$ com $j = 1, \dots, m$, tais que $u_x \phi(\lambda(1)) = \sum_{j=1}^m \phi(p_j) v_x^j$. Novamente por λ ser isomorfismo existem $r_j \in R$ tais que $\lambda(r_j) = p_j$ para $j = 1, \dots, m$. Então,

$$\begin{aligned}\beta(u_x) &= u_x \phi(\lambda(1)) = \sum_{j=1}^m \phi(p_j) v_x^j = \sum_{j=1}^m \phi(\lambda(r_j)) v_x^j \\ &= \sum_{j=1}^m \phi(\lambda(1)) r_j v_x^j = \alpha \left(\sum_{j=1}^m r_j v_x^j \right).\end{aligned}$$

Assim,

$$u_x = (\beta^{-1} \circ \alpha) \left(\sum_{j=1}^m r_j v_x^j \right) = f \left(\sum_{j=1}^m r_j v_x^j \right) \in f(\Theta_x).$$

Logo, $\Theta_x \subseteq f(\Theta_x)$ e portanto temos a igualdade. Segue então $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)}$ e portanto $[P] = [\phi] \Rightarrow [X] \in \mathcal{E}(\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(S)^{(G)})$.

■

Como $R \subseteq \Delta(\Theta)$ é uma extensão de anéis com mesma unidade, aplicando o Lema 4.1.4 para essa extensão temos:

Teorema 4.1.5. *Existe uma sequência exata*

$$1 \longrightarrow H_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha*}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.1.4 a sequência

$$\mathcal{U}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha*}$$

é exata. Logo,

$$1 \longrightarrow \frac{\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}}{\text{Im}(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha*}$$

é exata. Basta então mostrar que existe um isomorfismo de grupos $\frac{\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}}{\text{Im}(\mathcal{F})} \simeq H_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

Seja $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}$. Como $f(\Theta_x) = \Theta_x$, para todo $x \in G$ e f fixa cada elemento de R , então restringindo f a Θ_x , temos isomorfismos de R -bimódulos $f_x : \Theta_x \rightarrow \Theta_x$, para cada $x \in G$. Seja $\tilde{f}_x \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x)$ como no Lema 3.2.7. Por f ser automorfismo de anéis temos $f(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) = f(u_x) \overset{\Theta}{\circ} f(u_y)$, para todo $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Então,

$$f_{xy}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) = f_x(u_x) \overset{\Theta}{\circ} f_y(u_y), \quad u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y.$$

Por (3.17) temos

$$\begin{aligned} f_{xy}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) &= \widetilde{f_{xy}}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y), \\ f_x(u_x) \overset{\Theta}{\circ} f_y(u_y) &= \tilde{f}_x u_x \overset{\Theta}{\circ} \tilde{f}_y u_y = \tilde{f}_x u_x \tilde{f}_y \overset{\Theta}{\circ} u_y \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \tilde{f}_x \alpha_x(\tilde{f}_y 1_{x^{-1}})(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y). \end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{f_{xy}}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) = \tilde{f}_x \alpha_x(\tilde{f}_y 1_{x^{-1}})(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)$, para todo $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Seguindo o argumento da Proposição 3.3.5, temos

$$\tilde{f}_x \alpha_x(\tilde{f}_y 1_{x^{-1}}) = \widetilde{f_{xy}} 1_x, \quad \text{para todos } x, y \in G.$$

Então,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : G &\longrightarrow \mathcal{Z} \\ x &\longmapsto \tilde{f}_x, \end{aligned}$$

pertence a $Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Como $\tilde{f}_1 = f_1(1) = 1$ segue que $\tilde{f}$ é um elemento normalizado em $Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Temos o morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)} &\longrightarrow Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}) \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}.$$

Reciprocamente, seja $\sigma \in Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$ um 1-cociclo normalizado, então

$$\alpha_x(\sigma_y 1_{y^{-1}}) \sigma_x = \sigma_{xy} 1_x, \quad \text{para todo } x, y \in G. \quad (4.2)$$

Para cada $x \in G$ defina

$$\begin{aligned} g_x : \Theta_x &\longrightarrow \Theta_x \\ u_x &\longmapsto \sigma_x u_x. \end{aligned}$$

Como $\sigma_x \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x)$, segue do Lema 3.2.7 que g_x é um isomorfismo R -bilinear e $\tilde{g}_x = \sigma_x$, para todo $x \in G$. Considere

$$g := \bigoplus_{x \in G} g_x : \begin{aligned} \Delta(\Theta) &\longrightarrow \Delta(\Theta) \\ u_x &\longrightarrow g_x(u_x) \end{aligned}.$$

Então, $g_x(\Theta_x) = \Theta_x$, para todo $x \in G$. Como σ é normalizado temos

$$g(r) = g_1(r) = \sigma_1 r = 1r = r, \quad \forall r \in R.$$

Logo, g fixa cada elemento de R . Agora, dados $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$, temos

$$\begin{aligned} g(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) &= \sigma_{xy}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \stackrel{(4.2)}{=} \sigma_x \alpha_x(\sigma_y 1_{y^{-1}})(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &= (\sigma_x \alpha_x(\sigma_y 1_{y^{-1}}) u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \stackrel{(3.14)}{=} (\sigma_x u_x \sigma_y \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ &= (\sigma_x u_x \overset{\Theta}{\circ} \sigma_y u_y) = (g_x(u_x) \overset{\Theta}{\circ} g_y(u_y)). \end{aligned}$$

Portanto, $g \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}$ e temos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \Phi : & Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}) & \longrightarrow \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)} \\ & \sigma & \longmapsto g \end{array}$$

Vejamos que Φ é a inversa de Ψ . Seja $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}$, então

$$\Phi(\Psi(f)) = \Phi(\tilde{f}) = \bigoplus_{x \in G} g_x,$$

onde $g_x(u_x) = \tilde{f}_x u_x = f_x(u_x)$, para todo $u_x \in \Theta_x$, $x \in G$. Logo, $\Psi(\Phi(f)) = f$, para todo $f \in \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}$.

Por outro lado, seja $\sigma \in Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então

$$\Psi(\Phi(\sigma)) = \Psi(g) = \tilde{g},$$

onde $g_x(u_x) = \sigma_x u_x$, para todo $x \in G$. Assim, $\tilde{g}_x = \sigma_x$, para todo $x \in G$. Logo $\Psi(\Phi(\sigma)) = \sigma$, para todo $\sigma \in Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Portanto, $\Psi : \mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)} \longrightarrow Z_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$ é um isomorfismo de grupos.

Afirmção 4.1.6. $\Psi(\text{Im}(\mathcal{F})) = B_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

De fato, seja $r \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$, então

$$\mathcal{F}(r)(u_x) = r^{-1} u_x r = r^{-1} \alpha_x(r 1_{x^{-1}}) u_x, \text{ para todo } u_x \in \Theta_x.$$

Logo, $\Psi(\mathcal{F}(r)) = \delta^1 r \in B_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Reciprocamente, se $\sigma \in B_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então existe um $r \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$ tal que $\delta^1 r = \sigma$, ou seja,

$$\sigma(x) = \alpha_x(r 1_{x^{-1}}) r^{-1}.$$

Então, $\mathcal{F}(r)(u_x) = r^{-1} u_x r = r^{-1} \alpha_x(r 1_{x^{-1}}) u_x$, para todo $u_x \in \Theta_x$. Assim, $\widetilde{\mathcal{F}(r)}_x = \sigma_x$, para todo $x \in G$. Logo, $\Psi(\mathcal{F}(r)) = \sigma$. O que mostra a afirmação.

Temos então o isomorfismo

$$\frac{\mathbf{Aut}_{R\text{-rings}}(\Delta(\Theta))^{(G)}}{\text{Im}(\mathcal{F})} \simeq H_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}).$$

■

4.2 A segunda sequência exata

Seja

$$\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} = \{[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R); P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} | \Theta_x, \text{ para todo } x \in G\}.$$

Lema 4.2.1. $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ é um subgrupo de $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)$ que contém $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$.

Demonstração. Sejam $[P], [Q] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Como $Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} | \Theta_x$, segue da compatibilidade com o produto tensorial que $P \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes_R P^{-1} | P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}$. Portanto, pela transitividade, temos que

$$P \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} | \Theta_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Logo, $[P \otimes Q] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Vejamos que $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ também é fechado para inverso. Seja $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Temos

$$\begin{aligned} P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P &\simeq P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes R1_{x^{-1}} \otimes P \simeq P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes R1_{x^{-1}} \\ &\simeq P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \simeq P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes R \otimes \Theta_x \\ &\simeq P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_x. \end{aligned}$$

Assim, como $P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$, temos

$$P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_x|_{P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P \otimes \Theta_x}.$$

Porém,

$$P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P \otimes \Theta_x \simeq P^{-1} \otimes R1_x \otimes P \otimes \Theta_x \simeq P^{-1} \otimes P \otimes R1_x \otimes \Theta_x \simeq \Theta_x.$$

Logo, $P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$. Assim, $[P^{-1}] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Portanto, $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ é um subgrupo de $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)$.

Seja $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$. Por (3.18) temos que $\Theta_x \otimes P \simeq P \otimes \Theta_x$, para todo $x \in G$. Com $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)$, segue que

$$P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \simeq \Theta_x, \forall x \in G, [P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}. \quad (4.3)$$

Em particular, $P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$. Portanto, $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} \subseteq \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. ■

Nosso objetivo é construir um produto cruzado generalizado parcial a partir de um elemento $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Vamos começar construindo uma representação parcial unital.

Lema 4.2.2. *Seja $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ e denote $\Omega_x^P = P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}$, para todo $x \in G$. Então*

$$\begin{aligned} \Omega^P : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\ x &\longmapsto [\Omega_x^P]. \end{aligned}$$

é uma representação parcial unital com $\Omega_x^P \otimes \Omega_{x^{-1}}^P \simeq R1_x$ e $\Omega_x^P|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$.

Demonstração. Claramente $[\Omega_1^P] = [R]$. Dados $x, y \in G$ temos

$$\begin{aligned} \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \otimes \Omega_{y^{-1}}^P &= P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &\simeq P \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &\simeq P \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &\simeq P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &= \Omega_{xy}^P \otimes \Omega_{y^{-1}}^P. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\Omega_{x^{-1}}^P \otimes \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \simeq \Omega_{x^{-1}}^P \otimes \Omega_{xy}^P$, para todo $x, y \in G$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \Omega_x^P \otimes \Omega_{x^{-1}}^P &= P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &\simeq P \otimes \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P^{-1} \\ &\simeq P \otimes R1_x \otimes P^{-1} \\ &\simeq R1_x \otimes P \otimes P^{-1} \\ &\simeq R1_x \otimes R \simeq R1_x, \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

Portanto, Ω^P é uma representação parcial unital com $\Omega_x^P \otimes \Omega_{x^{-1}}^P \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. ■

Dado $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ denote $P^{-1} \otimes P \xrightarrow{\tau} R \xleftarrow{l} P \otimes P^{-1}$ isomorfismo de R -bimódulos. Defina os isomorfismos de R -bimódulos $f_{x,y}^P : \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \longrightarrow 1_x \Omega_{xy}^P$ via

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} & \longrightarrow & P \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \\ & \searrow f_{x,y}^P & \downarrow P \otimes f_{x,y}^{\Theta} \otimes P^{-1} \\ & & P \otimes 1_x \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & 1_x P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \end{array}$$

onde o primeiro isomorfismo é induzido por τ , ou seja,

$$f_{x,y}^P(p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2) = p_1 \otimes (u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}_2,$$

para $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, p_1, p_2 \in P$ e $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in P^{-1}$.

Afirmção 4.2.3. $f^P = \{f_{x,y}^P : \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \longrightarrow 1_x \Omega_{xy}^P, x, y \in G\}$ é um conjunto de fatores para Ω^P .

De fato, dados $x, y, z \in G$, vejamos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_z \otimes P^{-1} & \longrightarrow & 1_x P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_z \otimes P^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes 1_y P \otimes \Theta_{yz} \otimes P^{-1} & \longrightarrow & 1_x 1_{xy} P \otimes \Theta_{xyz} \otimes P^{-1} \end{array}$$

Considere $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y, u_z \in \Theta_z, p_1, p_2, p_3 \in P$ e $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \in P^{-1}$, então

$$\begin{aligned} & [f_{xy,z}^P \circ (f_{x,y}^P \otimes \Omega_z^P)](p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2 \otimes p_3 \otimes u_z \otimes \bar{p}_3) \\ &= f_{xy,z}^P(p_1 \otimes (u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}_2 \otimes p_3 \otimes u_z \otimes \bar{p}_3) \\ &= p_1 \otimes ((u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \tau(\bar{p}_2 \otimes p_3) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \otimes \bar{p}_3 \\ &= p_1 \otimes (u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} (u_y \tau(\bar{p}_2 \otimes p_3) \overset{\Theta}{\circ} u_z)) \otimes \bar{p}_3 \\ &= f_{x,yz}^P(p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes (u_y \tau(\bar{p}_2 \otimes p_3) \overset{\Theta}{\circ} u_z) \otimes \bar{p}_3) \\ &= [f_{x,yz}^P \circ (\Omega_x^P \otimes f_{y,z}^P)](p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2 \otimes p_3 \otimes u_z \otimes \bar{p}_3). \end{aligned}$$

Logo, $f_{xy,z}^P \circ (f_{x,y}^P \otimes \Omega_z^P) = f_{x,yz}^P \circ (\Omega_x^P \otimes f_{y,z}^P)$ o que mostra a comutatividade do diagrama acima. Portanto, $f^P = \{f_{x,y}^P : \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \longrightarrow 1_x \Omega_{xy}^P, x, y \in G\}$ é um conjunto de fatores para Ω^P .

Temos então um produto cruzado generalizado parcial

$$\Delta(\Omega^P) = \bigoplus_{x \in G} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1},$$

tal que $P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} | \Theta_x$ e $\Omega_x^P \otimes \Omega_{x^{-1}}^P \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. Logo, $[\Delta(\Omega^P)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$, para todo $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$.

Observação 4.2.4. É importante observar que a classe de isomorfismo de $\Delta(\Omega^P)$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$ não depende da escolha do isomorfismo τ usado para definir os isomorfismo $f_{x,y}^P$ no conjunto de fatores de Ω^P . De fato, vamos considerar um novo isomorfismo de R -bimódulos $\tilde{\tau} : P \otimes_R P^{-1} \rightarrow R$, e denote $\tilde{f}_{x,y}^P$ o isomorfismo definido a partir de $\tilde{\tau}$ e $\Delta(\tilde{\Omega}^P)$ o produto cruzado generalizado parcial com conjunto de fatores $\tilde{f}^P$. Como $\tilde{\tau} \circ \tau^{-1} \in \mathbf{Aut}_{R-R}(R) \simeq \mathcal{U}(\mathcal{Z})$, então existe $a \in \mathcal{U}(\mathcal{Z})$ tal que $\tilde{\tau} = a\tau$. Considere o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned} \varphi_x : P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} &\longrightarrow P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \\ p \otimes u_x \otimes p^{-1} &\longmapsto p \otimes a^{-1}u_x \otimes p^{-1}. \end{aligned}$$

Então o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} & \xrightarrow{f_{x,y}^P} & 1_x P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \\ \downarrow \varphi_x \otimes \varphi_y & & \downarrow \varphi_{xy} \\ P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} & \xrightarrow{\tilde{f}_{x,y}^P} & 1_x P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \end{array}$$

De fato, sejam $p_1, p_2 \in P, \bar{p}_1, \bar{p}_2 \in P^{-1}, u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Por um lado,

$$\varphi_{xy} \circ f_{x,y}^P(p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2) = p_1 \otimes (a^{-1}u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}_2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{x,y}^P \circ (\varphi_x \otimes \varphi_y)(p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2) &= \tilde{f}_{x,y}^P(p_1 \otimes a^{-1}u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes p_2 \otimes a^{-1}u_y \otimes \bar{p}_2) \\ &= p_1 \otimes (a^{-1}u_x \tilde{\tau}(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} a^{-1}u_y) \otimes \bar{p}_2 \\ &= p_1 \otimes (a^{-1}u_x a\tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} a^{-1}u_y) \otimes \bar{p}_2 \\ &= p_1 \otimes (a^{-1}u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} aa^{-1}u_y) \otimes \bar{p}_2 \\ &= p_1 \otimes (a^{-1}u_x \tau(\bar{p}_1 \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}_2. \end{aligned}$$

Logo, o diagrama é comutativo. Portanto, $[\Delta(\Omega^P)] = [\Delta(\tilde{\Omega}^P)]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$.

Sendo $\Delta(\Omega^P)$ um produto cruzado generalizado parcial, pela Observação 3.3.4, existe um isomorfismo $\nu_P : R \rightarrow P \otimes \Theta_1 \otimes P^{-1}$ que satisfaz os diagramas comutativos como em (3.23). Na próxima observação vamos definir esse isomorfismo. Ele será usado na demonstração de resultados mais a diante.

Observação 4.2.5. Seja $\iota : R \rightarrow \Theta_1$ o isomorfismo de R -bimódulos que satisfaz os diagramas comutativos em (3.23). Considere $\nu_P : R \rightarrow P \otimes \Theta_1 \otimes P^{-1}$ o isomorfismo definido por

$$\nu_P(r) = \sum_{k=1}^n r p_k \otimes \iota(1) \otimes \bar{p}_k,$$

onde $\sum_{k=1}^n \iota(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$. Então, ν_P satisfaz os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} R \otimes \Omega_x^P & \xrightarrow{\simeq} & \Omega_x^P \\ \downarrow \nu_P & & \uparrow f_{1,x}^P \\ \Omega_1^P \otimes \Omega_x^P & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega_x^P \otimes R & \xrightarrow{\simeq} & \Omega_x^P \\ \downarrow \nu_P & & \uparrow f_{x,1}^P \\ \Omega_x^P \otimes \Omega_1^P & & \end{array}$$

De fato, dados $r \in R$, $p \in P$, $u_x \in \Theta_x$ e $\bar{p} \in P^{-1}$ temos

$$\begin{aligned}
 f_{1,x}^P(\nu_P(r) \otimes p \otimes u_x \otimes \bar{p}) &= \sum_{k=1}^n f_{1,x}^P(rp_k \otimes \iota(1) \otimes \bar{p}_k \otimes p \otimes u_x \otimes \bar{p}) \\
 &= \sum_{i=1}^n rp_k \otimes f_{1,x}^\Theta(\iota(1) \otimes \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p)u_x) \otimes \bar{p} \\
 &= \sum_{i=1}^n rp_k \otimes \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p)u_x \otimes \bar{p} \\
 &= \sum_{i=1}^n rp_k \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p) \otimes u_x \otimes \bar{p} \\
 &= \sum_{i=1}^n r \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k)p \otimes u_x \otimes \bar{p} \\
 &= rp \otimes u_x \otimes \bar{p}.
 \end{aligned}$$

A comutatividade do segundo diagrama é análogo.

Teorema 4.2.6. A aplicação

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} : \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} &\longrightarrow \mathcal{C}(\Theta/R) \\
 [P] &\longmapsto [\Delta(\Omega^P)]
 \end{aligned}$$

é um morfismo de grupos.

Demonstração. Vejamos primeiro que $\mathcal{L}$ está bem definida. Seja $[P] = [Q]$ em $\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$, então existem isomorfismos de R -bimódulos $\varphi : Q \rightarrow P$ e $\bar{\varphi} : Q^{-1} \rightarrow P^{-1}$. Seja $\mathfrak{r} : P^{-1} \otimes P \rightarrow R$ um isomorfismo de R -bimódulos, vamos considerar o isomorfismo de R -bimódulos $\mathfrak{r}' : Q^{-1} \otimes Q \rightarrow R$ definido por $\mathfrak{r}'(\bar{q} \otimes q) = \mathfrak{r}(\bar{\varphi}(\bar{q}) \otimes \varphi(q))$.

Para cada $x \in G$ considere o isomorfismo de R -bimódulos

$$\begin{aligned}
 \varphi_x : Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} &\longrightarrow P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \\
 q \otimes u_x \otimes \bar{q} &\longmapsto \varphi(q) \otimes u_x \otimes \bar{\varphi}(\bar{q}).
 \end{aligned}$$

Então, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} & \xrightarrow{f_{x,y}^Q} & 1_x Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \\
 \downarrow \varphi_x \otimes \varphi_y & & \downarrow \varphi_{xy} \\
 P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} & \xrightarrow{f_{x,y}^P} & 1_x Q \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1}
 \end{array}$$

é comutativo. De fato, sejam $u_x \in \Theta_x$, $u_y \in \Theta_y$, $q_1, q_2 \in Q$ e $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \in Q^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
 (\varphi_{xy} \circ f_{x,y}^Q)(q_1 \otimes u_x \otimes \bar{q}_1 \otimes q_2 \otimes u_y \otimes \bar{q}_2) &= \varphi_{xy}(q_1 \otimes (u_x \mathfrak{r}'(\bar{q}_1 \otimes q_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{q}_2) \\
 &= \varphi_{xy}(q_1 \otimes (u_x \mathfrak{r}(\bar{\varphi}(\bar{q}_1) \otimes \varphi(q_2)) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{q}_2) \\
 &= \varphi(q_1) \otimes (u_x \mathfrak{r}(\bar{\varphi}(\bar{q}_1) \otimes \varphi(q_2)) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{\varphi}(\bar{q}_2) \\
 &= f_{x,y}^P(\varphi(q_1) \otimes u_x \otimes \bar{\varphi}(\bar{q}_1) \otimes \varphi(q_2) \otimes u_y \otimes \bar{\varphi}(\bar{q}_2)) \\
 &= (f_{x,y}^P \circ (\varphi_x \otimes \varphi_y))(q_1 \otimes u_x \otimes \bar{q}_1 \otimes q_2 \otimes u_y \otimes \bar{q}_2).
 \end{aligned}$$

Logo, $[\Delta(\Omega^P)] = [\Delta(\Omega^Q)]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$ e portanto $\mathcal{L}$ está bem definida.

Sejam $[P], [Q] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. Vamos considerar os isomorfismos de R -bimódulos

$$P \otimes P^{-1} \xrightarrow{\iota} R \xleftarrow{\tau} P^{-1} \otimes P \quad \text{e} \quad Q \otimes Q^{-1} \xrightarrow{\iota'} R \xleftarrow{\tau'} Q^{-1} \otimes Q.$$

Então,

$$\mathcal{L}([P \otimes Q]) = \left[\bigoplus_{x \in G} P \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \right].$$

Por outro lado,

$$\mathcal{L}([P])\mathcal{L}([Q]) = \left[\bigoplus_{x \in G} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \right].$$

Como $Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1}|_{\Theta_x}$, então $\Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1}|_R$. Por P^{-1} ser um $\mathcal{Z}$ -bimódulo central, segue do Corolário 2.3.6, que existe um isomorfismo de R -bimódulos

$$T : P^{-1} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1}.$$

Analogamente, por Q ser $\mathcal{Z}$ -bimódulo central e $R1_x|R$, temos o isomorfismo de R -bimódulos

$$T' : R1_x \otimes Q \longrightarrow Q \otimes R1_x, \quad \text{para todo } x \in G.$$

Vamos definir o isomorfismo de R -bimódulo $F_x : \Omega_x^P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x^Q \longrightarrow \Omega_x^{P \otimes Q}$ via:

$$\begin{array}{ccc} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} & \xrightarrow{P \otimes \Theta_x \otimes T} & P \otimes \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & P \otimes f_{x,x^{-1}}^{\Theta} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & P \otimes R1_x \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & P \otimes Q \otimes T' \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \\ & & P \otimes Q \otimes R1_x \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & & \downarrow \sim \\ & & P \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\ & \nearrow F_x & \end{array}$$

Vamos verificar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega_x^P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x^Q \otimes \Omega_y^P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y^Q & \xrightarrow{f_{x,y}^{PQ}} & 1_x \Omega_{xy}^P \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes \Omega_{xy}^Q \\ \downarrow F_x \otimes F_y & & \downarrow F_{xy} \\ \Omega_x^{P \otimes Q} \otimes \Omega_y^{P \otimes Q} & \xrightarrow{f_{x,y}^{P \otimes Q}} & 1_x \Omega_{xy}^{P \otimes Q} \end{array}$$

Por um lado, temos que $F_{xy} \circ f_{x,y}^{PQ}$ é dado pela sequência de isomorfismos

$$\begin{array}{c}
 \Omega_x^P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x^Q \otimes \Omega_y^P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y^Q \\
 \searrow \Omega_x^P \otimes T_1 \otimes \Omega_y^Q \\
 \Omega_x^P \otimes \Omega_y^P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x^Q \otimes \Omega_y^Q \\
 \downarrow f_{x,y}^P \otimes f_{y^{-1},x^{-1}}^{\Theta} \otimes f_{x,y}^Q \\
 P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \\
 \downarrow P \otimes \Theta_{xy} \otimes T_2 \\
 P \otimes \Theta_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 \parallel \\
 P \otimes \Theta_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 \downarrow \\
 P \otimes R1_{xy} \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 \downarrow P \otimes T_3 \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 P \otimes Q \otimes R1_{xy} \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 \downarrow \\
 P \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1}
 \end{array}$$

$F_{xy} \circ f_{x,y}^{PQ}$

onde,

$$T_1 : \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} \longrightarrow P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1},$$

$$T_2 : P^{-1} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1}$$

e

$$T_3 : R1_{xy} \otimes Q \longrightarrow Q \otimes R1_{xy}.$$

Por outro lado, $f_{x,y}^{P \otimes Q} \circ (F_x \otimes F_y)$ é dado por: Sejam

$$T_4 : P^{-1} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1}$$

$$T_5 : P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1}$$

e

$$T_6 : R1_x \otimes Q \longrightarrow Q \otimes R1_x, \quad T_7 : R1_y \otimes Q \longrightarrow Q \otimes R1_y.$$

Então

$$\begin{array}{c}
\Omega_x^P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x^Q \otimes \Omega_y^P \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Omega_y^Q \\
\swarrow P \otimes \Theta_x \otimes T_4 \otimes P \otimes \Theta_y \otimes T_5 \\
P \otimes R1_x \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes R1_y \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
\downarrow P \otimes T_6 \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes T_7 \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
P \otimes Q \otimes R1_x \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes Q \otimes R1_y \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
\downarrow \\
P \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \otimes P \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
\downarrow \\
1_x P \otimes Q \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \leftarrow f_{x,y}^{P \otimes Q \circ (F_x \otimes F_y)}
\end{array}$$

Vamos construir os isomorfismos: Considere as aplicações R -bilineares

$$f_i^x : \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \longrightarrow R \text{ e } g_i^x : R \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_j^y : \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \longrightarrow R \text{ e } g_j^y : R \longrightarrow \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1}, \text{ com } j = 1, 2, \dots, m,$$

tais que $\sum_{i=1}^n g_i^x f_i^x = Id_{\Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1}}$ e $\sum_{j=1}^m g_j^y f_j^y = Id_{\Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1}}$. Denote,

$$g_i^x(1) = \sum_l u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x^{-1}}^{i,l} \text{ e } g_j^y(1) = \sum_k \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y^{-1}}^{j,k}.$$

Então,

$$\begin{array}{ccc}
T_4 : & P^{-1} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} & \longrightarrow \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
& \bar{p} \otimes u_{x^{-1}} \otimes q \otimes u_x \otimes \bar{q} & \longmapsto \sum u_{x^{-1}}^{i,l} \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \bar{p} f_i^x(u_{x^{-1}} \otimes q \otimes u_x \otimes \bar{q})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
T_5 : & P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} & \longrightarrow \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
& \bar{p} \otimes u_{y^{-1}} \otimes q \otimes u_y \otimes \bar{q} & \longmapsto \sum \tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y^{-1}}^{j,k} \otimes \bar{p} f_j^y(u_{y^{-1}} \otimes q \otimes u_y \otimes \bar{q}),
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
T_1 : & \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} & \longrightarrow P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \\
& u_{x^{-1}} \otimes q \otimes u_x \otimes \bar{q} \otimes p \otimes u_y \otimes \bar{p} \otimes u_{y^{-1}} & \longmapsto \sum f_i^x(u_{x^{-1}} \otimes q \otimes u_x \otimes \bar{q}) p \otimes u_y \otimes \bar{p} \otimes u_{y^{-1}} \otimes g_i^x(1).
\end{array}$$

Para construir T_2 , vamos considerar as aplicações R -bilineares $f_{i,j}^{xy} : 1_{y^{-1}} \Theta_{xy} \otimes Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \longrightarrow R$

e $g_{i,j}^{xy} : R \longrightarrow 1_{y^{-1}}\Theta_{xy} \otimes Q \otimes 1_x\Theta_{xy} \otimes Q^{-1}$ definidas da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
 1_{y^{-1}}\Theta_{xy} \otimes Q \otimes 1_x\Theta_{xy} \otimes Q^{-1} & \xrightarrow{(f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta)^{-1} \otimes Q \otimes (f_{x,y}^\Theta)^{-1} \otimes Q^{-1}} & \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q \otimes Q^{-1} \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes f_i^x \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes Q^{-1} \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow f_j^y \\
 & & R
 \end{array}$$

$\searrow f_{i,j}^{xy}$

Então,

$$f_{i,j}^{xy}(u_{(xy)^{-1}} \otimes q \otimes u_{xy} \otimes \bar{q}) = \sum f_j^y(u_{y^{-1}} f_i^x(u_{x^{-1}} \otimes q \otimes u_x \otimes \bar{q}_e) \otimes q_e \otimes u_y \otimes \bar{q}), \quad (4.4)$$

onde $\sum(u_{y^{-1}} \overset{\Theta}{\circ} u_{x^{-1}}) = u_{(xy)^{-1}}$, $\sum(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) = u_{xy}$ e $\sum_t \mathfrak{r}'(\bar{q}_t \otimes q_t) = 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{g_j^y} & \Theta_{y^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_{y^{-1}} \otimes R \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes g_i^x \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & f_{y^{-1},x^{-1}}^\Theta \otimes Q \otimes f_{x,y}^\Theta \otimes Q^{-1} \\
 & & \downarrow \\
 & & 1_{y^{-1}}\Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes 1_x\Theta_{xy} \otimes Q^{-1}
 \end{array}$$

$\searrow g_{i,j}^{xy}$

Então,

$$g_{i,j}^{xy}(1) = \sum (\tilde{u}_{y^{-1}}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{x^{-1}}^{i,l}) \otimes \tilde{q}_x^{i,l} \otimes (\tilde{u}_x^{i,l} \mathfrak{r}'(\tilde{q}_{x^{-1}}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y^{-1}}^{j,k}. \quad (4.5)$$

É fácil ver que $\sum_{i,j} g_{i,j}^{xy} f_{i,j}^{xy} = Id_{1_{y^{-1}}\Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes 1_x\Theta_{xy} \otimes Q^{-1}}$. Então, o isomorfismo T_2 é dado por

$$\begin{array}{ccc}
 T_2 : P^{-1} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} & \longrightarrow & \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \otimes P^{-1} \\
 \bar{p} \otimes u_{(xy)^{-1}} \otimes q \otimes u_{xy} \otimes \bar{q} & \longmapsto & \sum g_{i,j}^{xy}(1) \otimes \bar{p} f_{i,j}^{xy}(u_{(xy)^{-1}} \otimes q \otimes u_{xy} \otimes \bar{q}).
 \end{array}$$

Pelo Exemplo 2.3.7, temos que os isomorfismos T_3, T_6 e T_7 são definidos por:

$$\begin{array}{ccccc}
 R1_{xy} \otimes Q & \xrightarrow{T_3} & Q \otimes R1_{xy} & , & R1_x \otimes Q & \xrightarrow{T_6} & Q \otimes R1_x & , & R1_y \otimes Q & \xrightarrow{T_7} & Q \otimes R1_y \\
 r \otimes q & \longmapsto & rq \otimes 1_{xy} & & r \otimes q & \longmapsto & rq \otimes 1_x & & r \otimes q & \longmapsto & rq \otimes 1_y.
 \end{array}$$

Vamos calcular primeiro $f_{x,y}^{P \otimes Q} \circ (F_x \otimes F_y)$:

$$\begin{aligned}
& p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2 \otimes u_{y-1} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2 \\
& \xrightarrow{T_4, T_5} \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes u_x \otimes u_{x-1}^{i,l} \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l} \otimes \bar{p}_1 \underbrace{f_i^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1)}_{=a_i^x \in R} \otimes p_2 \otimes u_y \\
& \quad \otimes \tilde{u}_{y-1}^{j,k} \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 \underbrace{f_j^y(u_{y-1} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2)}_{=a_j^y \in R} \\
& \mapsto \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l} \otimes \bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2 \otimes (u_y \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
& \xrightarrow{T_6, T_7} \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes 1_x \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l} \otimes \bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2 \otimes (u_y \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \tilde{q}_y^{j,k} \otimes 1_y \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
& \mapsto \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l} \otimes \bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2 \otimes (u_y \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k} \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
& \mapsto \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes \left(\underbrace{u_x^{i,l} \mathbf{r}'(\tilde{q}_{x-1}^{i,l} \mathbf{r}(\bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2) \otimes (u_y \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \tilde{q}_y^{j,k})}_{=a \in R} \otimes \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k} \right) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
& = \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes \left(u_x^{i,l} a \otimes \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k} \right) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2),
\end{aligned}$$

Para $F_{xy} \circ f_{x,y}^{PQ}$, temos:

$$\begin{aligned}
& p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1 \otimes p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2 \otimes u_{y-1} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2 \\
& \xrightarrow{T_1} \sum_{h,l'} p_1 \otimes u_x \otimes \bar{p}_1 \otimes f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) p_2 \otimes u_y \otimes \bar{p}_2 \otimes u_{y-1} \otimes u_{x-1}^{h,l'} \otimes q_x^{h,l'} \\
& \quad \otimes u_x^{h,l'} \otimes q_{x-1}^{h,l'} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2 \\
& \mapsto \sum_{h,l'} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\ominus}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}_2 \otimes (u_{y-1} \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{h,l'}) \otimes q_x^{h,l'} \\
& \quad \otimes (u_x^{h,l'} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{h,l'} \otimes q_2) \overset{\ominus}{\circ} u'_y) \otimes \bar{q}_2 \\
& \xrightarrow{T_2} \sum_{h,l',i,l,j,k,t} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\ominus}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{h,l'}) \otimes q_x^{h,l'} \\
& \quad \otimes (u_x^{h,l'} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{h,l'} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} f_i^x(u_{x-1}^{h,l'} \otimes q_x^{h,l'} \otimes u_x^{h,l'} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{h,l'} \otimes q_2) \otimes \bar{q}_t) \\
& \quad \otimes q_t \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2) \\
& = \sum_{h,l',i,l,j,k,t} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\ominus}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\ominus}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
& \quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\ominus}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} f_i^x(u_{x-1}^{h,l'} \otimes q_x^{h,l'} \otimes u_x^{h,l'} \otimes q_{x-1}^{h,l'} \mathbf{r}'(q_2 \otimes \bar{q}_t)) \\
& \quad \otimes q_t \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h,l',i,l,j,k,t} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} f_i^x(u_{x-1}^{h,l'} \otimes q_x^{h,l'} \otimes u_x^{h,l'} \otimes q_{x-1}^{h,l'})) \\
&\quad \otimes \mathbf{l}'(q_2 \otimes \bar{q}_t) q_t \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2) \\
&= \sum_{h,l',i,l,j,k,t} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} f_i^x(g_h^x(1))) \otimes q_2 \mathbf{r}'(\bar{q}_e \otimes q_e) \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2) \\
&= \sum_{h,l',i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} \underbrace{f_i^x(g_h^x(1))}_{\in \mathcal{Z}}) \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2) \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{h,l',i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) f_i^x(g_h^x(1)) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 f_j^y(u_{y-1} \otimes q_2 \otimes u'_y \otimes \bar{q}_2) \\
&= \sum_{h,l',i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_i^x(g_h^x(f_h^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1))) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
&= \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes (u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 f_i^x(u_{x-1} \otimes q_1 \otimes u'_x \otimes \bar{q}_1) \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \otimes q_x^{i,l} \\
&\quad \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
&\stackrel{T_7}{\mapsto} \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes \left((u_x \mathbf{r}(\bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \overset{\Theta}{\circ} (\tilde{u}_{y-1}^{j,k} \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) \right) q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
&= \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes \underbrace{(u_x \overset{\Theta}{\circ} \mathbf{r}(\bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2) (u_y \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) u_{x-1}^{i,l})}_{=b \in R} q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y \\
&= \sum_{i,l,j,k} p_1 \otimes \underbrace{(u_x \overset{\Theta}{\circ} b u_{x-1}^{i,l})}_{(*)} q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \otimes \tilde{q}_{y-1}^{j,k} \otimes \bar{p}_2 a_j^y.
\end{aligned}$$

Observe que $(*)$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
&(u_x \overset{\Theta}{\circ} b u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \\
&= (Q \otimes f_{x,y}^{\Theta}) \circ (f_{x,x-1}^{\Theta} \otimes Q \otimes \Theta_x \mathbf{r}' \otimes \Theta_y) (u_x \otimes \underbrace{b u_{x-1}^{i,l} \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l}}_{\in C_{\Theta_{x-1} \otimes Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1}}(R)} \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k}) \\
&= (Q \otimes f_{x,y}^{\Theta}) \circ (f_{x,x-1}^{\Theta} \otimes Q \otimes \Theta_x \mathbf{r}' \otimes \Theta_y) (u_x \otimes u_{x-1}^{i,l} \otimes q_x^{i,l} \otimes u_x^{i,l} \otimes q_{x-1}^{i,l} b \otimes \tilde{q}_y^{j,k} \otimes \tilde{u}_y^{j,k}) \\
&= (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \mathbf{r}(\bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2) (u_y \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \otimes \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \\
&= (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} \mathbf{r}'(q_{x-1}^{i,l} \mathbf{r}(\bar{p}_1 a_i^x \otimes p_2) \otimes (u_y \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_{y-1}^{j,k}) \tilde{q}_y^{j,k}) \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k}) \\
&= (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_{x-1}^{i,l}) q_x^{i,l} \otimes (u_x^{i,l} a \overset{\Theta}{\circ} \tilde{u}_y^{j,k})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & Q \otimes \Theta_x \otimes \Theta_y & \\
 h_x \otimes \Theta_y \swarrow & & \searrow Q \otimes f_{x,y}^\Theta \\
 \Theta_x \otimes Q \otimes \Theta_y & & Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \\
 \Theta_x \otimes h_y \downarrow & & \downarrow 1_x h_{xy} \\
 \Theta_x \otimes \Theta_y \otimes Q & \xrightarrow{f_{x,y}^\Theta \otimes Q} & 1_x \Theta_{xy} \otimes Q
 \end{array} \tag{4.6}$$

De fato, sejam $1_x = \sum_{(x)} (\omega_x \circ \omega_{x-1})$ e $1_y = \sum_{(y)} (\omega_y \circ \omega_{y-1})$. Pela Observação 3.3.10, a restrição do isomorfismo $1_x h_{xy} : Q \otimes 1_x \Theta_{xy} \rightarrow 1_x \Theta_{xy} \otimes Q$ é dado por

$$1_x h_{xy}(q \otimes u_{xy}) = \sum_{(x),(y)} (\omega_x \circ \omega_y) \otimes g_{(xy)^{-1}}((\omega_{y-1} \circ \omega_{x-1}) \otimes q \otimes u_{xy}),$$

para todo $u_{xy} \in 1_x \Theta_{xy}$. Assim, dados $q \in Q$, $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$, temos

$$\begin{aligned}
 1_x h_{xy} \circ (Q \otimes f_{x,y}^\Theta)(q \otimes u_x \otimes u_y) &= 1_x h_{xy}(q \otimes (u_x \circ u_y)) \\
 &= \sum_{(x),(y)} (\omega_x \circ \omega_y) \otimes g_{(xy)^{-1}}((\omega_{y-1} \circ \omega_{x-1}) \otimes q \otimes (u_x \circ u_y)) \\
 &= \sum_{(x),(y)} (\omega_x \circ \omega_y) \otimes q_{x,y},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $\phi(q_{x,y}) = \sum_{(x),(y)} (\omega_{y-1} \circ \omega_{x-1}) \phi(q)(u_x \circ u_y)$.

Por outro lado, aplicando $(f_{x,y}^\Theta \otimes Q) \circ (\Theta_x \otimes h_y) \otimes (h_x \otimes \Theta_y)$ temos:

$$\begin{aligned}
 q \otimes u_x \otimes u_y &\xrightarrow{h_x \otimes \Theta_y} \sum_{(x)} \omega_x \otimes g_x(\omega_{x-1} \otimes q \otimes u_x) \otimes u_y \\
 &= \sum_{(x)} \omega_x \otimes q'_x \otimes u_y, \text{ onde } \phi(q'_x) = \sum_{(x)} \omega_{x-1} \phi(q) u_x, \\
 &\xrightarrow{\Theta_x \otimes h_y} \sum_{(x),(y)} \omega_x \otimes \omega_y \otimes g_y(\omega_{y-1} \otimes q_x \otimes u_y) \\
 &= \sum_{(x),(y)} \omega_x \otimes \omega_y \otimes q'_{x,y}, \\
 &\xrightarrow{f_{x,y}^\Theta \otimes Q} \sum_{(x),(y)} (\omega_x \circ \omega_y) \otimes q'_{x,y},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \phi(q'_{x,y}) &= \sum_{(x),(y)} \omega_{y-1} \phi(q'_x) u_y = \sum_{(x),(y)} \omega_{y-1} (\omega_{x-1} \phi(q) u_x) u_y \\
 &= \sum_{(x),(y)} (\omega_{y-1} \circ \omega_{x-1}) \phi(q)(u_x \circ u_y) = \phi(q_{x,y}).
 \end{aligned}$$

Como ϕ é injetora, temos que $q'_{x,y} = q_{x,y}$. Logo, de (4.7) e (4.8) temos que o diagrama é comutativo.

A comutatividade do diagrama (4.6) pode ser expressa na seguinte igualdade: dados $q \in Q, u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$, denote

$$h_x(q \otimes u_x) = \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes q_i \quad \text{e} \quad h_y(q_i \otimes u_y) = \sum_{j=1}^m u_y^{i,j} \otimes q_{i,j}.$$

Então,

$$h_{xy}(q \otimes (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y)) = \sum_{i,j} (u_x^i \overset{\Theta}{\circ} u_y^{i,j}) \otimes q_{i,j}. \quad (4.9)$$

Considere agora o isomorfismo de R -bimódulos $F_x : Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \longrightarrow \Theta_x$ definido por $F_x := h_x \otimes Q^{-1}$, ou seja, dados $q \in Q, u_x \in \Theta_x$ e $\bar{q} \in Q^{-1}$, denotando $h_x(q \otimes u_x) = \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes q_i$, então

$$F_x(q \otimes u_x \otimes \bar{q}) = \sum_{i=1}^n u_x^i l(q_i \otimes \bar{q}) \in Q.$$

onde $Q \otimes_R Q^{-1} \xrightarrow{l} R \xleftarrow{\tau} Q^{-1} \otimes_R Q$ são isomorfismos de R -bimódulos.

Afirmção 4.2.9. $\varphi_3([Q]) = [\Delta(\Theta)]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$.

De fato, basta verificar que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes \Theta_x \otimes Q^{-1} \otimes Q \otimes \Theta_y \otimes Q^{-1} & \xrightarrow{f_{x,y}^Q} & R1_x \otimes Q \otimes \Theta_{xy} \otimes Q^{-1} \\ \downarrow F_x \otimes F_y & & \downarrow F_{xy} \\ \Theta_x \otimes \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Theta} & R1_x \otimes \Theta_{xy} \end{array}$$

Sejam $q_1, q_2 \in Q, \bar{q}_1, \bar{q}_2 \in Q^{-1}, u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$. Denote

$$h_x(q_1 \otimes u_x) = \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes q_i \quad \text{e} \quad h_y(q_i \otimes \tau(\bar{q}_1 \otimes q_2)u_y) = \sum_{j=1}^m u_y^{i,j} \otimes q_{i,j}.$$

Então, por (4.9)

$$h_{xy}(q_i \otimes (u_x \overset{\Theta}{\circ} \tau(\bar{q}_1 \otimes q_2)u_y)) = \sum_{i,j} (u_x^i \overset{\Theta}{\circ} u_y^{i,j}) \otimes q_{i,j}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (F_{xy} \circ f_{x,y}^Q)(q_1 \otimes u_x \otimes \bar{q}_1 \otimes q_2 \otimes u_y \otimes \bar{q}_2) &= F_{xy}(q_1 \otimes (u_x \overset{\Theta}{\circ} \tau(\bar{q}_1 \otimes q_2)u_y) \otimes \bar{q}_2) \\ &= \sum_{i,j} (u_x^i \overset{\Theta}{\circ} u_y^{i,j}) l(q_{i,j} \otimes \bar{q}_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando $f_{x,y}^\Theta \circ (F_x \otimes F_y)$ em $q_1 \otimes u_x \otimes \bar{q}_1 \otimes q_2 \otimes u_y \otimes \bar{q}_2$, temos

$$\begin{aligned}
& (q_1 \otimes u_x \otimes \bar{q}_1 \otimes q_2 \otimes u_y \otimes \bar{q}_2) \mapsto \sum_{i=1}^n u_x^i \mathfrak{l}(q_i \otimes \bar{q}_1) \otimes h_y(q_2 \otimes u_y) \otimes \bar{q}_2 \\
&= \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes \mathfrak{l}(q_i \otimes \bar{q}_1) f_y(q_2 \otimes u_y) \otimes \bar{q}_2 = \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes h_y(\mathfrak{l}(q_i \otimes \bar{q}_1) q_2 \otimes u_y) \otimes \bar{q}_2 \\
&= \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes h_y(q_i \mathfrak{r}(\bar{q}_1 \otimes q_2) \otimes u_y) \otimes \bar{q}_2 = \sum_{i=1}^n u_x^i \otimes h_y(q_i \otimes \mathfrak{r}(\bar{q}_1 \otimes q_2) u_y) \otimes \bar{q}_2 \\
&= \sum_{i,j} u_x^i \otimes u_y^{i,j} \otimes q_{i,j} \otimes \bar{q}_2 = \sum_{i,j} u_x^i \otimes u_y^{i,j} \mathfrak{l}(q_{i,j} \otimes \bar{q}_2) \\
&\mapsto \sum_{i,j} (u_x^i \circ^\Theta u_y^{i,j}) \mathfrak{l}(q_{i,j} \otimes \bar{q}_2).
\end{aligned}$$

Logo, $F_x \circ f_{x,y}^Q = f_{x,y}^\Theta \circ (F_x \otimes F_y)$, para todo $x, y \in G$. Assim, $\Delta(\Omega^Q) \simeq \Delta(\Theta)$ como produtos cruzados generalizados parciais. Isso implica que $\varphi_3([Q]) = [\Delta(\Omega^Q)] = [\Delta(\Theta)]$ em $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$ e portanto $[Q] \in \ker(\varphi_3)$.

Seja $[P] \in \ker(\varphi_3)$, então existe $j : \Delta(\Omega^P) \longrightarrow \Delta(\Theta)$ isomorfismo de produtos cruzados generalizados parciais. Ou seja, para cada $x \in G$, existe isomorfismo de R -bimódulos $j_x : P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \longrightarrow \Theta_x$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \otimes \Theta_y \otimes P^{-1} & \xrightarrow{f_{x,y}^P} & R1_x \otimes P \otimes \Theta_{xy} \otimes P^{-1} \\
\downarrow j_x \otimes j_y & & \downarrow j_{xy} \\
\Theta_x \otimes \Theta_y & \xrightarrow{f_{x,y}^\Theta} & R1_x \otimes \Theta_{xy}
\end{array} \quad (4.10)$$

é comutativo. Dados $u_x \in \Theta_x$ e $u_y \in \Theta_y$, denote

$$j_x^{-1}(u_x) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_x^i \otimes \bar{p}_i \quad \text{e} \quad j_y^{-1}(u_y) = \sum_{j=1}^m p_j \otimes u_y^j \otimes \bar{p}_j. \quad (4.11)$$

Então, pela comutatividade do diagrama, temos

$$j_{xy}^{-1}(u_x \circ^\Theta u_y) = \sum_{i,j} p_i \otimes (u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \circ^\Theta u_y^j) \otimes \bar{p}_j. \quad (4.12)$$

Seja $i_x : \Theta_x \otimes_R P \longrightarrow P \otimes_R \Theta_x$ definida por

$$i_x : \Theta_x \otimes_R P \xrightarrow{j_x^{-1} \otimes P} P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1} \otimes P \longrightarrow P \otimes_R \Theta_x,$$

ou seja, dados $p \in P$ e $u_x \in \Theta_x$, se $j_x^{-1}(u_x) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_x^i \otimes \bar{p}_i$, então

$$i_x(u_x \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p).$$

Defina $i := \bigoplus_{x \in G} i_x : \Delta(\Theta) \otimes_R P \longrightarrow P \otimes_R \Delta(\Theta)$. Vejamos que i satisfaz as condições (2.13) e (2.14) do Lema 2.1.16. A primeira condição é:

$$(P \otimes f_{x,y}^\Theta) \circ (i_x \otimes \Theta_y) \circ (\Theta_x \otimes i_y) = i_{xy} \circ (f_{x,y}^\Theta \otimes P) \quad \forall x, y \in G.$$

Sejam $p \in P, u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y$ usando a notação em (4.11), então $i_{xy} \circ (f_{x,y}^\Theta \otimes P)$ é dado por:

$$\begin{aligned} u_x \otimes u_y \otimes p &\mapsto (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes p \mapsto j_{xy}^{-1}(u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes p \\ &\stackrel{(4.12)}{=} \sum_{i,j} p_i \otimes \left(u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \overset{\Theta}{\circ} u_y^j \right) \otimes \bar{p}_j \otimes p \\ &\mapsto \sum_{i,j} p_i \otimes \left(u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \overset{\Theta}{\circ} u_y^j \right) \mathfrak{r}(\bar{p}_j \otimes p). \end{aligned}$$

Por outro lado, $(P \otimes f_{x,y}^\Theta) \circ (i_x \otimes \Theta_y) \circ (\Theta_x \otimes i_y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} u_x \otimes u_y \otimes p &\xrightarrow{\Theta_x \otimes i_y} \sum_{j=1}^m u_x \otimes p_j \otimes u_y^j \mathfrak{r}(\bar{p}_j \otimes p) \\ &\xrightarrow{i_x \otimes \Theta_y} \sum_{i,j} p_i \otimes u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \otimes u_y^j \mathfrak{r}(\bar{p}_j \otimes p) \\ &\xrightarrow{P \otimes f_{x,y}^\Theta} \sum_{i,j} p_i \otimes \left(u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \overset{\Theta}{\circ} u_y^j \mathfrak{r}(\bar{p}_j \otimes p) \right) \\ &= \sum_{i,j} p_i \otimes \left(u_x^i \mathfrak{r}(\bar{p}_i \otimes p_j) \overset{\Theta}{\circ} u_y^j \right) \mathfrak{r}(\bar{p}_j \otimes p). \end{aligned}$$

Logo, i satisfaz a condição (2.13). Como j é isomorfismo de produtos cruzados generalizados parciais, então $j_1 \circ \nu_P = \iota$, onde ν_P é dado como na Observação 4.2.5. Então

$$j_1^{-1}(1) = j_1^{-1}(\iota(1)) = \nu_P(1) = \sum_{k=1}^n p_k \otimes \iota(1) \otimes \bar{p}_k,$$

onde $\sum_{k=1}^n \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) = 1$, para todo $r \in R$. Logo,

$$\begin{aligned} i_1(1 \otimes p) &= \sum_{k=1}^n p_k \otimes \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p) = \sum_{k=1}^n p_k \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p) \otimes 1 \\ &= \sum_{k=1}^n \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}_k) p \otimes 1 = p \otimes 1. \end{aligned}$$

Portanto, i também satisfaz a condição (2.14). Segue do Lema 2.1.16 que $P \otimes_R \Delta(\Theta)$ é um $\Delta(\Theta)$ -bimódulo via:

$$\begin{aligned} (p \otimes u_x) * u_y &= p \otimes (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \\ u_y * (p \otimes u_x) &= \sum_{i=1}^n p_i \otimes (u_y^i \overset{\Theta}{\circ} u_x), \text{ onde } i_y(u_y \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_y^i. \end{aligned}$$

Vamos construir o isomorfismo $\bar{i}_x : \Theta_x \otimes_R P^{-1} \longrightarrow P^{-1} \otimes_R \Theta_x$ por:

$$\bar{i}_x : \Theta_x \otimes_R P^{-1} \longrightarrow P^{-1} \otimes_R P \otimes_R \Theta_x \otimes_R P^{-1} \xrightarrow{j_x} P^{-1} \otimes_R \Theta_x,$$

ou seja,

$$\bar{i}_x(u_x \otimes \bar{p}) = \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}),$$

onde $\sum_{k=1}^n \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p_k) = 1$. Considere $\bar{i} = \bigoplus_{x \in G} \bar{i}_x : \Delta(\Theta) \otimes_R P \longrightarrow P \otimes_R \Delta(\Theta)$. Vamos verificar que $\bar{i}$ também satisfaz as condições do Lema 2.1.16. Sejam $u_x \in \Theta_x, u_y \in \Theta_y$ e $\bar{p} \in P^{-1}$. Considere $\sum_{k=1}^n \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p_k) = \sum_{l=1}^m \mathfrak{r}(\bar{p}_l \otimes p_l) = 1$. Então, $(P \otimes f_{x,y}^\Theta) \circ (\bar{i}_x \otimes \Theta_y) \circ (\Theta_x \otimes \bar{i}_y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} u_x \otimes u_y \otimes \bar{p} &\xrightarrow{\Theta_x \otimes \bar{i}_y} \sum_{l=1}^m u_x \otimes \bar{p}_l \otimes j_y(p_l \otimes u_y \otimes \bar{p}) \\ &\xrightarrow{\bar{i}_x \otimes \Theta_y} \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \otimes j_y(p_l \otimes u_y \otimes \bar{p}) \\ &\xrightarrow{P \otimes f_{x,y}^\Theta} \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes \left(j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \overset{\Theta}{\circ} j_y(p_l \otimes u_y \otimes \bar{p}) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_{xy}(p_k \otimes (u_x \mathfrak{r}(\bar{p}_l \otimes p_l) \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}) \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes j_{xy}(p_k \otimes (u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}) \\ &= i_{xy}((u_x \overset{\Theta}{\circ} u_y) \otimes \bar{p}) \\ &= i_{xy} \circ (f_{x,y}^\Theta \otimes P^{-1})(u_x \otimes u_y \otimes \bar{p}), \end{aligned}$$

onde a igualdade $(*)$ vem da comutatividade do diagrama (4.10). Logo, temos $(P \otimes f_{x,y}^\Theta) \circ (\bar{i}_x \otimes \Theta_y) \circ (\Theta_x \otimes \bar{i}_y) = \bar{i}_{xy} \circ (f_{x,y}^\Theta \otimes P^{-1})$. Para a segunda condição temos

$$\begin{aligned} \bar{i}_1(1 \otimes \bar{p}) &= \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes j_1(p_k \otimes 1 \otimes \bar{p}) = \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}) \\ &= \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \mathfrak{l}(p_k \otimes \bar{p}) \otimes 1 = \sum_{k=1}^n \mathfrak{r}(\bar{p}_k \otimes p_k) \bar{p} \otimes 1 \\ &= \bar{p} \otimes 1. \end{aligned}$$

Segue do Lema 2.1.16 que $P^{-1} \otimes_R \Delta(\Theta)$ tem uma estrutura de $\Delta(\Theta)$ -bimódulo dada por $\bar{i}$.

Afirmção 4.2.10. *O isomorfismo $\bar{i}$ é dado por $\bar{i} = P^{-1} \otimes i^{-1} \otimes P^{-1}$, onde $P^{-1} \otimes i^{-1} \otimes P^{-1} : \Delta(\Theta) \otimes P^{-1} \longrightarrow P^{-1} \otimes \Delta(\Theta)$ é definida como no item (i) Lema 2.1.19.*

De fato, primeiramente observe que $i_x^{-1} : P \otimes \Theta_x \longrightarrow \Theta_x \otimes P$ é dado por

$$i_x^{-1}(p \otimes u_x) = \sum_{l=1}^m j_x(p \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \otimes p_l,$$

onde $\sum_{l=1}^m \mathfrak{r}(\bar{p}_l \otimes p_l) = 1$. Agora, aplicando $P^{-1} \otimes i^{-1} \otimes P^{-1}$ para $u_x \otimes \bar{p}$ temos:

$$\begin{aligned}
u_x \otimes \bar{p} &\mapsto \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes p_k \otimes u_x \otimes \bar{p} \mapsto \sum_{k=1}^n \bar{p}_k \otimes i^{-1}(p_k \otimes u_x) \otimes \bar{p} \\
&= \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \otimes p_l \otimes \bar{p} \\
&\mapsto \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \mathfrak{l}(p_l \otimes \bar{p}) \\
&= \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \mathfrak{l}(p_l \otimes \bar{p}) \\
&= \sum_{k,l} \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}_l) \mathfrak{r}(\bar{p}_l \otimes p_l) \bar{p} \\
&= \sum_k \bar{p}_k \otimes j_x(p_k \otimes u_x \otimes \bar{p}) \\
&= \bar{i}_x(u_x \otimes \bar{p}).
\end{aligned}$$

Pelo item (iv) do Lema 2.1.19, temos que $[P \otimes_R \Delta(\Theta)] \in \mathbf{Pic}(\Delta(\Theta))$.

Vejamos que $[P] \xRightarrow{[\phi]} [P \otimes_R \Delta(\Theta)] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)}$, onde

$$\begin{aligned}
\phi: P &\longrightarrow P \otimes_R \Delta(\Theta) \\
p &\longmapsto p \otimes 1.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_r: P \otimes_R \Delta(\Theta) &\longrightarrow P \otimes_R \Delta(\Theta) \\
p \otimes u_x &\longrightarrow \phi(p) * u_x
\end{aligned}$$

é a identidade, pois

$$\phi(p) * u_x = (p \otimes 1) * u_x = p \otimes u_x = p \otimes u_x.$$

Assim, $\bar{\phi}_r$ é um isomorfismo de R - $\Delta(\Theta)$ -bimódulos. Logo, $[P] \xRightarrow{[\phi]} [P \otimes_R \Delta(\Theta)] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)$.
Vejamos que $\phi(P) * \Theta_x = \Theta_x * \phi(P)$, para todo $x \in G$. Sejam $p \in P$ e $u_x \in \Theta_x$. Denotando $i_x(u_x \otimes p) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_x^i$, temos

$$\begin{aligned}
u_x * \phi(p) &= u_x * (p \otimes 1) = \sum_{i=1}^n p_i \otimes (u_x^i \overset{\Theta}{\circ} 1) \\
&= \sum_{i=1}^n p_i \otimes u_x^i = \sum_{i=1}^n (p_i \otimes 1) * u_x^i \\
&= \sum_{i=1}^n \phi(p_i) * u_x^i \in \phi(P) * \Theta_x.
\end{aligned}$$

Logo, $\Theta_x * \phi(P) \subseteq \phi(P) * \Theta_x$. Por outro lado, como $p \otimes u_x \in P \otimes_R \Delta(\Theta)$ e $i: \Delta(\Theta) \otimes_R P \longrightarrow P \otimes_R \Delta(\Theta)$ é um isomorfismo, existem $u_x^j \in \Theta_x$ e $p_j \in P$, com $j = 1, 2, \dots, m$, tais que

$$i_x \left(\sum_{j=1}^m u_x^j \otimes p_j \right) = p \otimes u_x.$$

Então,

$$\begin{aligned}\phi(p) * u_x &= p \otimes u_x = i_x \left(\sum_{j=1}^m u_x^j \otimes p_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m u_x^j * (p_j \otimes 1) = \sum_{j=1}^m u_x^j * \phi(p_j) \in \Theta_x * \phi(P).\end{aligned}$$

Assim, $\phi(P)\Theta_x \subseteq \Theta_x\phi(P)$ e consequentemente temos a igualdade. Portanto,

$$[P] \stackrel{=}{=} [\phi] \Rightarrow [P \otimes_R \Delta(\Theta)] \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)}.$$

Claramente, $\varphi_2([P] \stackrel{=}{=} [\phi] \Rightarrow [P \otimes_R \Delta(\Theta)]) = [P]$. Portanto, $[P] \in \text{Im}(\varphi_2)$.

■

4.3 O grupo $\mathcal{B}(\Theta/R)$ e a terceira sequência exata

Definimos o grupo $\mathcal{B}(\Theta/R)$ via a sequência exata

$$\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{C}(\Theta/R) \longrightarrow \mathcal{B}(\Theta/R) \longrightarrow 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{B}(\Theta/R) = \frac{\mathcal{C}(\Theta/R)}{\text{Im}(\mathcal{L})}.$$

Notação: Seja $f : G_1 \longrightarrow G_2$ um morfismo de grupos, vamos denotar por f^c o cokernel de f , ou seja, $f^c : G_2 \longrightarrow \frac{G_2}{\text{Im}(f)}$.

Proposição 4.3.1. *A sequência*

$$\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} \xrightarrow{\varphi_3} \mathcal{C}_0(\Theta/R) \xrightarrow{\varphi_4} \mathcal{B}(\Theta/R)$$

onde φ_4 é $\mathcal{L}^c$ restrito a $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$, é exata.

Demonstração. Claramente $\text{Im}(\varphi_3) \subseteq \ker(\varphi_4)$. Seja $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, tal que $\varphi_4([\Delta(\Gamma)]) = [1]$ em $\mathcal{B}(\Theta/R)$. Então existe $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ tal que $\mathcal{L}([P]) = [\Delta(\Gamma)]$. Em particular, $\Gamma_x \simeq P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}$, para todo $x \in G$. Assim, temos

$$\Theta_x \simeq \Gamma_x \simeq P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}, \text{ para todo } x \in G.$$

Então, $\Theta_x \otimes P \simeq P \otimes \Theta_x$, para todo $x \in G$. Logo, $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*}$. Portanto, $[\Delta(\Gamma)] \in \text{Im}(\varphi_3)$.

■

4.4 O grupo $\overline{H^1}(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ e a quarta sequência exata

Defina

$$\mathbf{PicS}_0(R) = \{[P] \in \mathbf{PicS}(R); P|R \text{ como bimódulos}\}.$$

Lema 4.4.1. (i) $\mathbf{PicS}_0(R)$ é comutativo.

(ii) $\mathbf{PicS}_0(R) \subseteq \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$.

(iii) Se $[P] \in \mathbf{PicS}_0(R)$, então $[\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}] \in \mathbf{PicS}_0(R)$.

(iv) $\mathcal{U}(\mathbf{PicS}_0(R)) \subseteq \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$.

Demonstração. (i) Segue diretamente da Proposição 2.3.5.

(ii) Seja $[P] \in \mathbf{PicS}_0(R)$, pela Observação 2.3.3 temos que P é um $\mathcal{Z}$ -bimódulo central. Portanto, $\mathbf{PicS}_0(R) \subseteq \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)$.

(iii) Se $[P] \in \mathbf{PicS}_0(R)$, então $P|R$ e pela compatibilidade com o produto tensorial, $\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}|_{\Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}}} \simeq R1_x$. Segue então pela transitividade que $\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}|_R$, para todo $x \in G$. Portanto, $[\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}] \in \mathbf{PicS}_0(R)$.

(iv) Se $[P] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}_0(R))$, então $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)$. Como $P|R$ e $P^{-1}|R$, então $P \otimes \Theta_x \otimes P^{-1}|_{\Theta_x}$, para todo $x \in G$. Logo, $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$. ■

Segue dos itens (ii) e (iii) do Lema 4.4.1 que podemos restringir os isomorfismos $\alpha_x^* : \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)[R1_{x^{-1}}] \rightarrow \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)[R1_x]$, definido por $\alpha_x^*([P][R1_x]) = [\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}]$, para os ideais $\mathbf{PicS}_0(R)[R1_{x^{-1}}]$ e temos uma ação parcial de G sobre $\mathbf{PicS}_0(R)$.

Lema 4.4.2. A aplicação

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{C}(\Theta/R) &\longrightarrow Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \\ [\Delta(\Gamma)] &\longmapsto (x \mapsto [\Gamma_x][\Theta_{x^{-1}}]) \end{aligned}$$

é um morfismo de grupos cujo núcleo é $\mathcal{C}_0(\Theta/R)$.

Demonstração. Dado $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$, vamos denotar $\zeta([\Delta(\Gamma)]) = f^\Gamma$. Então $f^\Gamma(x) = [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}]$, para todo $x \in G$. Como $\Gamma_x|\Theta_x$, então $\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}|_R$, para todo $x \in G$. Assim, $[\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] \in \mathbf{PicS}_0(R)$. Além disso, temos $[\Theta_x \otimes_R \Gamma_{x^{-1}}] \in \mathbf{PicS}_0(R)[R1_x]$ e

$$\begin{aligned} [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}][\Theta_x \otimes \Gamma_{x^{-1}}] &= [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_x \otimes \Gamma_{x^{-1}}] \\ &= [\Gamma_x \otimes R1_{x^{-1}} \otimes \Gamma_{x^{-1}}] \\ &= [\Gamma_x \otimes \Gamma_{x^{-1}}] = [R1_x]. \end{aligned}$$

Logo, $f^\Gamma(x) = [\Gamma_x \otimes_R \Theta_{x^{-1}}] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}_0(R)[R1_x])$, para todo $x \in G$. Dados $x, y \in G$, por Lema 3.2.1 item (iii) temos

$$\begin{aligned} \alpha_x^*(f^\Gamma(y)[R1_{x^{-1}}])f^\Gamma(xy)^{-1}f^\Gamma(x) &= [\Theta_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}}][\Theta_{xy} \otimes \Gamma_{(xy)^{-1}}][\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [\Theta_x \otimes \Gamma_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Theta_{xy} \otimes \Gamma_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [\Theta_x \otimes \Gamma_y \otimes R1_{y^{-1}} \otimes R1_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [\Theta_x \otimes \Gamma_y \otimes \Gamma_{(xy)^{-1}} \otimes \Gamma_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [\Theta_x \otimes R1_y \otimes R1_{x^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [R1_{xy} \otimes \Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [R1_{xy} \otimes R1_x] = [R1_x][R1_{xy}]. \end{aligned}$$

Logo, $f^\Gamma \in Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$, para todo $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$.

Se $[\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Omega)]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$, então $\Gamma_x \simeq \Omega_x$, para todo $x \in G$. Então, $\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \simeq \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}}$, para todo $x \in G$. Logo,

$$f^\Gamma(x) = [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] = [\Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] = f^\Omega(x), \text{ para todo } x \in G.$$

Assim, $f^\Gamma = f^\Omega$ em $Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ e portanto ζ está bem definida.

Sejam $[\Delta(\Gamma)], [\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Como $[\Delta(\Gamma)][\Delta(\Omega)] = [\bigoplus_{x \in G} \Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$, então

$$\begin{aligned} f^{\Gamma\Omega}(x) &= [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes \Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}][\Omega_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] = f^\Gamma(x)f^\Omega(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Logo, $f^{\Gamma\Omega} = f^\Gamma f^\Omega$ em $Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$. Portanto ζ é morfismo de grupos.

Resta verificar que $\ker(\zeta) = \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Seja $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, então $\Gamma_x \simeq \Theta_x$, para todo $x \in G$. Assim,

$$f^\Gamma(x) = [\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] = [\Theta_x \otimes \Theta_{x^{-1}}] = [R1_x], \text{ para todo } x \in G.$$

Logo, $[\Delta(\Gamma)] \in \ker(\zeta)$. Por outro lado, seja $[\Delta(\Gamma)] \in \ker(\zeta)$. Então, $\Gamma_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \simeq R1_x$, para todo $x \in G$. Fazendo o produto tensorial com Θ_x , temos

$$\Gamma_x \otimes R1_{x^{-1}} \simeq R1_x \otimes \Theta_x \Rightarrow \Gamma_x \simeq \Theta_x, \text{ para todo } x \in G.$$

Assim, $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. ■

Definimos o grupo $\overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ pela sequência exata

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Pic}_Z(R)^{(G)} & \dashrightarrow & Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \longrightarrow & \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \longrightarrow & 1 \\ & \searrow \mathcal{L} & & \nearrow \zeta & & & \\ & & \mathcal{C}(\Theta/R) & & & & \end{array}$$

ou seja,

$$\overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) = \frac{Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))}{(\zeta \circ \mathcal{L})(\mathbf{Pic}_Z(R)^{(G)})}.$$

Observação 4.4.3. Uma pergunta que surge naturalmente é: Qual a relação entre $B^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ e a imagem de $\zeta \circ \mathcal{L}$? A inclusão $B^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \subseteq \text{Im}(\zeta \circ \mathcal{L})$ é sempre verdadeira. De fato, seja $\rho \in B^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$, então existe $[P] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}_0(R)) \subseteq \mathbf{Pic}_Z(R)^{(G)}$ (ver Lema 4.4.1), tal que

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \alpha_x^*([P][R1_{x^{-1}}])[P^{-1}] = [\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}][P^{-1}] \\ &= [\Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes P^{-1}] = [P^{-1} \otimes \Theta_x \otimes P \otimes \Theta_{x^{-1}}] \\ &= \zeta(\mathcal{L}([P^{-1}]))(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Logo, $B^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \subseteq \text{Im}(\zeta \circ \mathcal{L})$.

Vamos definir o morfismo $\varphi_5 : \mathcal{B}(\Theta/R) \longrightarrow \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ através do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{C}_0(\Theta/R) & & & & \\ & & \downarrow & \searrow \varphi_4 & & & \\ \mathbf{Pic}_Z(R)^{(G)} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{C}(\Theta/R) & \xrightarrow{\mathcal{L}^c} & \mathcal{B}(\Theta/R) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \zeta & & \downarrow \varphi_5 & & \\ & & Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \xrightarrow{(\zeta\mathcal{L})^c} & \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Observação 4.4.4. φ_5 está bem definida.

De fato, sejam $[\Delta(\Gamma)]$ e $[\Delta(\Omega)]$ em $\mathcal{C}(\Theta/R)$, tais que $\mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)]) = \mathcal{L}^c([\Delta(\Omega)])$ em $\mathcal{B}(\Theta/R)$. Então, existe $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$, com $[\Delta(\Gamma)] = [\Delta(\Omega)]\mathcal{L}([P])$. Pela comutatividade do diagrama, temos

$$\begin{aligned} \varphi_5(\mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)])) &= ((\zeta\mathcal{L})^c \circ \zeta)([\Delta(\Gamma)]) \\ &= ((\zeta\mathcal{L})^c \circ \zeta)([\Delta(\Omega)]\mathcal{L}([P])) \\ &= (\zeta\mathcal{L})^c(\zeta([\Delta(\Omega)]\mathcal{L}([P]))) \\ &= (\zeta\mathcal{L})^c(\zeta([\Delta(\Omega)])) \\ &= \varphi_5(\mathcal{L}^c([\Delta(\Omega)])). \end{aligned}$$

Portanto, φ_5 não depende da escolha do representante da classe em $\mathcal{B}(\Theta/R)$.

Proposição 4.4.5. A sequência

$$\mathcal{C}_0(\Theta/R) \xrightarrow{\varphi_4} \mathcal{B}(\Theta/R) \xrightarrow{\varphi_5} \overline{H^1}(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$$

é exata.

Demonstração. Seja $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Pela comutatividade do diagrama temos que $\varphi_5(\varphi_4([\Delta(\Gamma)])) = ((\zeta\mathcal{L})^c \circ \zeta)([\Delta(\Gamma)])$. Pelo Lema 4.4.2, temos que $\zeta([\Delta(\Gamma)]) = [1]$. Assim, $\varphi_5(\varphi_4([\Delta(\Gamma)])) = [1]$. Logo, $\text{Im}(\varphi_4) \subseteq \ker(\varphi_5)$.

Dado $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$, denote $\overline{[\Delta(\Gamma)]} = \mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)])$ em $\mathcal{B}(\Theta/R)$. Se $\varphi_5(\overline{[\Delta(\Gamma)]}) = [1]$, pela comutatividade do diagrama, temos

$$((\zeta\mathcal{L})^c \circ \zeta)([\Delta(\Gamma)]) = [1] \text{ em } \overline{H^1}(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)).$$

Então, $\zeta([\Delta(\Gamma)]) \in (\zeta\mathcal{L})(\mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)})$. Seja $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$, tal que $\zeta([\Delta(\Gamma)]) = \zeta(\mathcal{L}([P]))$. Como ζ é morfismo de grupos, segue que $[\Delta(\Gamma)]\mathcal{L}[P]^{-1} \in \ker(\zeta) = \mathcal{C}_0(\Theta/R)$. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_4([\Delta(\Gamma)]\mathcal{L}([P])^{-1}) &= \varphi_4([\Delta(\Gamma)]\mathcal{L}([P^{-1}]))) \\ &= \mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)])\mathcal{L}^c(\mathcal{L}([P^{-1}]))) \\ &= \mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)]) = \overline{[\Delta(\Gamma)]}. \end{aligned}$$

Logo, $\ker(\varphi_5) \subseteq \text{Im}(\varphi_4)$. Portanto, a sequência é exata. ■

4.5 A quinta sequência exata

Seja g um 1-cociclo normalizado em $Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$, ou seja,

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}_0(R) \\ x &\longrightarrow [\nabla_x] \end{aligned}$$

onde $[\nabla_x] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}_0(R)[R1_x])$, para todo $x \in G$ e

$$\alpha_x^*(g_y[R1_{x^{-1}}])g_{xy}^{-1}g_x = [R1_x][R1_{xy}], \text{ para todo } x, y \in G. \quad (4.13)$$

Observe que temos

$$\alpha_x^*(g_y[R1_{x^{-1}}])[\Theta_x] = [\Theta_x]g_y, \text{ para todo } x, y \in G. \quad (4.14)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \alpha_x^*(g_y[R1_{x^{-1}}])[\Theta_x] &= [\Theta_x \otimes \nabla_y \otimes \Theta_{x^{-1}}][\Theta_x] \\
 &= [\Theta_x \otimes \nabla_y \otimes R1_{x^{-1}}] \\
 &= [\Theta_x \otimes R1_{x^{-1}} \otimes \nabla_y] \\
 &= [\Theta_x \otimes \nabla_y] \\
 &= [\Theta_x]g_y.
 \end{aligned}$$

Lema 4.5.1. *Seja g um elemento normalizado em $Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$. Então,*

$$\begin{aligned}
 U : G &\longrightarrow \mathbf{PicS}(R) \\
 x &\longmapsto g_x[\Theta_x]
 \end{aligned}$$

é uma representação parcial unital com $U_x \otimes U_{x^{-1}} \simeq R1_x$ e $U_x|\Theta_x$, para todo $x \in G$.

Demonstração. Como g é normalizado, então $[U_1] = g_1[\Theta_1] = [R]$. Dados $x, y \in G$ temos

$$\begin{aligned}
 [U_x][U_y][U_{y^{-1}}] &= g_x[\Theta_x]g_y[\Theta_y]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &\stackrel{(4.14)}{=} g_x\alpha_x^*(g_y[R1_{x^{-1}}])[\Theta_x][\Theta_y]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &\stackrel{(4.13)}{=} g_{xy}[R1_x][R1_x][\Theta_{xy}]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &= g_{xy}[R1_x][\Theta_{xy}]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &= g_{xy}[\Theta_{xy}][R1_{y^{-1}}]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &= g_{xy}[\Theta_{xy}]g_{y^{-1}}[R1_{y^{-1}}][\Theta_{y^{-1}}] \\
 &= g_{xy}[\Theta_{xy}]g_{y^{-1}}[\Theta_{y^{-1}}] \\
 &= [U_{xy}][U_{y^{-1}}].
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 [U_{x^{-1}}][U_x][U_y] &= g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}]g_x[\Theta_x]g_y[\Theta_y] \\
 &\stackrel{(4.14)}{=} g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}]g_x\alpha_x^*(g_y[R1_{x^{-1}}])[\Theta_x][\Theta_y] \\
 &\stackrel{(4.13)}{=} g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}]g_{xy}[R1_x][R1_x][\Theta_{xy}] \\
 &= g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}]g_{xy}[R1_x][\Theta_{xy}] \\
 &= g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}][R1_x]g_{xy}[\Theta_{xy}] \\
 &= g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}]g_{xy}[\Theta_{xy}] \\
 &= [U_{x^{-1}}][U_{xy}],
 \end{aligned}$$

para todo $x, y \in G$. Novamente por g ser normalizado temos:

$$\begin{aligned}
 [U_x][U_{x^{-1}}] &= g_x[\Theta_x]g_{x^{-1}}[\Theta_{x^{-1}}] \\
 &\stackrel{(4.14)}{=} g_x\alpha_x^*(g_{x^{-1}}[R1_{x^{-1}}])[\Theta_x][\Theta_{x^{-1}}] \\
 &= [g_1][R1_x] = [R][R1_x] = [R1_x],
 \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Além disso, como $g_x = [\nabla_x] \in \mathbf{PicS}_0(R)$, então $\nabla_x|R$, para todo $x \in G$. Assim $U_x \simeq \nabla_x \otimes \Theta_x|\Theta_x$, para todo $x \in G$. ■

Por U ser representação parcial unital segue do Lema 3.2.1 que existe uma família de isomorfismos de R -bimódulos

$$f^g = \{f_{x,y}^g : U_x \otimes_R U_y \longrightarrow R1_x \otimes U_{xy} \simeq 1_x U_{xy}, \forall x, y \in G\}. \quad (4.15)$$

Como $[U_1] = [R]$, podemos escolher $\{U_x\}_{x \in G}$ uma família de representantes com $U_1 = R$ e f^g uma família de isomorfismos de R -bimódulos com $f_{x,1}^g : U_x \otimes R \rightarrow U_x$ e $f_{1,x}^g : R \otimes U_x \rightarrow U_x$ dados pela ação de R sobre U_x à direita e à esquerda, respectivamente. Então, os diagramas comutativos em (3.23) são trivialmente satisfeitos. Logo, pelo Corolário 3.3.6, existe um 3-cociclo parcial $\widetilde{\beta_{-,-,-}^g}$ em $Z_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ associado a f^g . Pela Proposição 3.3.7, $[\widetilde{\beta_{-,-,-}^g}]$ em $H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ não depende da escolha da família de R -bimódulos $\{U_x\}_{x \in G}$ e nem da escolha da família de isomorfismos de R -bimódulos f^g , então temos uma aplicação bem definido:

Lema 4.5.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \delta : Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) &\longrightarrow H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z}) \\ g &\longmapsto [\widetilde{\beta_{-,-,-}^g}] \end{aligned}$$

é um morfismo de grupos. Além disso,

$$\delta \circ \zeta = [1], \quad (4.16)$$

onde ζ é o morfismo definido no Lema 4.4.2.

Demonstração. Sejam $g, h \in Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$. Denote $[U_x] = g_x[\Theta_x]$ e $[V_x] = h_x[\Theta_x]$, para todo $x \in G$. Considere

$$f_{x,y}^g : U_x \otimes U_y \rightarrow 1_x U_{xy} \quad \text{e} \quad f_{x,y}^h : V_x \otimes V_y \rightarrow 1_x V_{xy} \quad x, y \in G,$$

famílias de isomorfismos de R -bimódulos e $\widetilde{\beta_{-,-,-}^g}$ e $\widetilde{\beta_{-,-,-}^h}$ os 3-cociclos em $Z_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ associados. Seja $[W_x] = g_x h_x [\Theta_x]$, para todo $x \in G$. Então,

$$\begin{aligned} [W_x] &= g_x h_x [\Theta_x] = g_x h_x [R1_x] [\Theta_x] \\ &= g_x [R1_x] h_x [\Theta_x] = g_x [\Theta_x] [\Theta_{x^{-1}}] h_x [\Theta_x] \\ &= [U_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes V_x], \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Considere os isomorfismos de R -bimódulos $f_{x,y}^{gh}$ definidos por

$$\begin{array}{ccc} U_x \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes V_x \otimes U_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes V_y & \xrightarrow{T} & U_x \otimes U_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes V_x \otimes V_y \\ & \searrow & \downarrow f_{x,y}^g \otimes f_{x,y}^\Theta \otimes f_{x,y}^h \\ & & 1_x U_{xy} \otimes 1_{y^{-1}} \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes 1_x V_{xy} \\ & & \parallel \\ & & 1_x U_{xy} \otimes \Theta_{(xy)^{-1}} \otimes V_{xy} \end{array}$$

$f_{x,y}^{gh} \dashrightarrow$

onde $T : \Theta_{x^{-1}} \otimes V_x \otimes U_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \rightarrow U_y \otimes \Theta_{y^{-1}} \otimes \Theta_{x^{-1}} \otimes V_x$ é o isomorfismo da Proposição 2.3.5. Pelo Lema 3.3.8, temos que $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{gh}} = \widetilde{\beta_{-,-,-}^g} \widetilde{\beta_{-,-,-}^h}$. Logo,

$$\delta(gh) = [\widetilde{\beta_{-,-,-}^{gh}}] = [\widetilde{\beta_{-,-,-}^g} \widetilde{\beta_{-,-,-}^h}] = [\widetilde{\beta_{-,-,-}^g}] [\widetilde{\beta_{-,-,-}^h}] = \delta(g) \delta(h).$$

e portanto δ é um morfismo de grupos. Para a última afirmação, seja $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$ e denote $f^\Gamma = \zeta([\Delta(\Gamma)])$, ou seja, $f_x^\Gamma = [\Gamma_x] [\Theta_{x^{-1}}]$, para todo $x \in G$. Assim,

$$[U_x] := f_x^\Gamma [\Theta_x] = [\Gamma_x] [\Theta_{x^{-1}}] [\Theta_x] = [\Gamma_x] [R1_{x^{-1}}] = [\Gamma_x], \quad \text{para todo } x \in G.$$

Considerando a família de isomorfismos de R -bimódulos $f^\Gamma = \{f_{x,y}^\Gamma : \Gamma_x \otimes \Gamma_y \rightarrow 1_x \Gamma_{xy}, \quad x, y \in G\}$ que é um conjunto de fatores para $\Delta(\Gamma)$. Então, $\widetilde{\beta_{-,-,-}^{f^\Gamma}}$ é trivial. Logo, $\delta(\zeta([\Delta(\Gamma)])) = [1]$ em $H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$.

■

Vamos definir $\varphi_6 : \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \longrightarrow H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$ via o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} & \xrightarrow{\zeta\mathcal{L}} & Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \xrightarrow{(\zeta\mathcal{L})^c} & \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \delta & \nwarrow \varphi_6 & \\
 & & H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z}) & &
 \end{array}$$

Vejam os que φ_6 está bem definida: Sejam $h, g \in Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ tais que $[h] = [g]$ em $\overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$, então existe $[P] \in \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)}$ tal que $h = g\zeta(\mathcal{L}([P]))$. Por (4.16), temos que

$$\delta(\zeta(\mathcal{L}([P]))) = (\delta \circ \zeta)(\mathcal{L}([P])) = [1] \text{ em } H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z}).$$

Pela comutatividade do diagrama, temos

$$\begin{aligned}
 \varphi_6([h]) &= (\varphi_6 \circ (\zeta\mathcal{L})^c)(h) \\
 &= \delta(h) = \delta(g\zeta(\mathcal{L}([P]))) \\
 &= \delta(g)\delta(\zeta(\mathcal{L}([P]))) \\
 &= \delta(g) = (\varphi_6 \circ (\zeta\mathcal{L})^c)(g) \\
 &= \varphi_6([g]).
 \end{aligned}$$

Portanto, φ_6 está bem definida.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}} \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} & \xrightarrow{\varphi_3} & \mathcal{C}_0(\Theta/R) & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow \varphi_4 & & & \\
 \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{C}(\Theta/R) & \xrightarrow{\mathcal{L}^c} & \mathcal{B}(\Theta/R) & \longrightarrow & 1 \\
 \parallel & & \downarrow \zeta & & \downarrow \varphi_5 & & \\
 \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} & \xrightarrow{\zeta\mathcal{L}} & Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \xrightarrow{(\zeta\mathcal{L})^c} & \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow \delta & \nwarrow \varphi_6 & & & \\
 & & H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z}) & & & &
 \end{array}$$

Proposição 4.5.3. *A sequência*

$$\mathcal{B}(\Theta/R) \xrightarrow{\varphi_5} \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \xrightarrow{\varphi_6} H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$$

é exata.

Demonstração. Seja $[h] \in \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$, tal que existe $[\Delta(\Gamma)] \in \mathcal{C}_0(\Theta/R)$, com $\varphi_5(\mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)])) = [h]$. Pela comutatividade do diagrama e por (4.16) temos

$$\varphi_6([h]) = \varphi_6(\varphi_5(\mathcal{L}^c([\Delta(\Gamma)]))) = (\delta \circ \zeta)([\Delta(\Gamma)]) = [1].$$

Logo, $\text{Im}(\varphi_5) \subseteq \ker(\varphi_6)$.

Seja $[h] \in \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R))$ tal que $\varphi_6([h]) = [1]$. Pela comutatividade do diagrama temos que $\delta(h) = [1]$ em $H_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$. Denotando $\delta(h) = [\beta_{-, -, -}] \in B_\Theta^3(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então existe $\sigma_{-, -} : G \times G \longrightarrow \mathcal{Z}$, com $\sigma_{x, y} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}1_x 1_{xy})$, para todo $x, y \in G$, e

$$\beta_{x, y, z} = \alpha_x(\sigma_{y, z} 1_{x^{-1}}) \sigma_{xy, z}^{-1} \sigma_{x, yz} \sigma_{x, y}^{-1},$$

para todo $x, y, z \in G$. Defina $[\Omega_x] := h_x[\Theta_x]$, para todo $x \in G$ e considere a família de isomorfismos f^h associada como em (4.15). Então, por definição, temos que

$$\beta_{x,y,x} \circ f_{x,yz}^h \circ (\Omega_x \otimes f_{y,z}^h) = f_{xy,z}^h \circ (f_{x,y}^h \otimes \Omega_z),$$

para todo $x, y, z \in G$. Pelo Lema 4.5.1, temos que $\Omega : G \rightarrow \mathbf{PicS}(R)$ definida por $[\Omega_x] = h_x[\Theta_x]$ é uma representação parcial unital com $\Omega_x \otimes \Omega_{x^{-1}} \simeq R1_x$ e $\Omega_x | \Theta_x$, para todo $x \in G$. Pela Proposição 3.3.5, temos que

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x,y}^h : \Omega_x \otimes \Omega_y &\longrightarrow 1_x \Omega_{xy} \\ \omega_x \otimes \omega_y &\longmapsto \sigma_{x,y} f_{x,y}^h(\omega_x \otimes \omega_y) \end{aligned}$$

é um conjunto de fatores para Ω . Logo, $\Delta(\Omega)$ é um produto cruzado generalizado parcial com $[\Delta(\Omega)] \in \mathcal{C}(\Theta/R)$. Além disso, $\zeta([\Delta(\Omega)]) = h$. Então, pela comutatividade do diagrama, temos

$$[h] = (\zeta \mathcal{L})^c(h) = ((\zeta \mathcal{L})^c \circ \zeta)([\Delta(\Omega)]) = \varphi_5(\mathcal{L}^c([\Delta(\Omega)])),$$

ou seja, $[h] \in \text{Im}(\varphi_5)$. Logo, $\ker(\varphi_6) \subseteq \text{Im}(\varphi_5)$ e portanto a sequência é exata.

■

Resumimos no seguinte diagrama comutativo os resultados deste capítulo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}) & & & & & & \\ \downarrow \varphi_1 & & & & & & \\ \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R) & & & & & & \\ \downarrow \varphi_2 & & & & & & \\ \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}} \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} & \xrightarrow{\varphi_3} & \mathcal{C}_0(\Theta/R) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \searrow \varphi_4 & & \\ \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{C}(\Theta/R) & \xrightarrow{\mathcal{L}^c} & \mathcal{B}(\Theta/R) & & \\ \parallel & & \downarrow \zeta & & \downarrow \varphi_5 & & \\ \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R)^{(G)} & \xrightarrow{\zeta \mathcal{L}} & Z^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & \xrightarrow{(\zeta \mathcal{L})^c} & \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) & & \\ & & \downarrow \delta & \swarrow \varphi_6 & & & \\ & & H_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z}) & & & & \end{array}$$

Pelo Teorema 3.4.3 temos que $\mathcal{C}_0(\Theta/R) \simeq H_{\Theta}^2(G, \alpha, \mathcal{Z})$, então pelos Teoremas 4.1.5 e 4.2.7 e pelas Proposições 4.3.1, 4.4.5 e 4.5.3, temos o nosso resultado principal:

Teorema 4.5.4. *A sequência*

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow H_{\Theta}^1(G, \alpha, \mathcal{Z}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{P}_{\mathcal{Z}}(\Delta(\Theta)/R)^{(G)} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbf{Pic}_{\mathcal{Z}}(R) \cap \mathbf{PicS}_{\mathcal{Z}}(R)^{\alpha^*} \xrightarrow{\varphi_3} H_{\Theta}^2(G, \alpha, \mathcal{Z}) \\ &\xrightarrow{\varphi_4} \mathcal{B}(\Theta/R) \xrightarrow{\varphi_5} \overline{H}^1(G, \alpha^*, \mathbf{PicS}_0(R)) \xrightarrow{\varphi_6} H_{\Theta}^3(G, \alpha, \mathcal{Z}) \end{aligned}$$

é exata.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Auslander, O. Goldman, The brauer group of a commutative ring, *Transactions of the American Mathematical Society* 97 (3) (1960) 367–409.
- [2] S. U. Chase, D. K. Harrison, A. Rosenberg, Galois theory and cohomology of commutative rings, Vol. 52, American Mathematical Soc., 1965.
- [3] S. U. Chase, A. Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, American Mathematical Society, 1965.
- [4] T. Kanzaki, On generalized crossed product and brauer group, *Osaka Journal of Mathematics* 5 (2) (1968) 175–188.
- [5] Y. Miyashita, An exact sequence associated with a generalized crossed product, *Nagoya Mathematical Journal* 49 (1973) 21–51.
- [6] L. El Kaoutit, J. Gómez-Torrecillas, Invertible unital bimodules over rings with local units, and related exact sequences of groups, *Journal of Algebra* 323 (1) (2010) 224–240.
- [7] L. El Kaoutit, J. Gómez-Torrecillas, Invertible unital bimodules over rings with local units, and related exact sequences of groups, ii, *Journal of Algebra* 370 (2012) 266–296.
- [8] D. Crocker, I. Raeburn, D. P. Williams, Equivariant brauer and picard groups and a chase–harrison–rosenberg exact sequence, *Journal of Algebra* 307 (1) (2007) 397–408.
- [9] R. Exel, Twisted partial actions: a classification of regular c^* -algebraic bundles, *Proceedings of the London Mathematical Society* 74 (2) (1997) 417–443.
- [10] R. Exel, Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, *Proceedings of the American Mathematical Society* 126 (12) (1998) 3481–3494.
- [11] F. Abadie, Sobre ações parciais, fibrados de fell e grupóides, Ph.D. thesis, PhD Thesis, Universidade de Sao Paulo (1999).
- [12] F. Abadie, Enveloping actions and takai duality for partial actions, *Journal of Functional Analysis* 197 (1) (2003) 14–67.
- [13] M. Dokuchaev, R. Exel, Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations, *Transactions of the American Mathematical Society* 357 (5) (2005) 1931–1952.
- [14] M. Dokuchaev, M. Ferrero, A. Paques, Partial actions and galois theory, *Journal of Pure and Applied Algebra* 208 (1) (2007) 77–87.
- [15] M. Dokuchaev, M. Khrypchenko, Partial cohomology of groups, *Journal of Algebra* 427 (2015) 142–182.

- [16] M. Dokuchaev, A. Paques, H. Pinedo, Partial galois cohomology, extensions of the picard group and related homomorphisms, preprint.
- [17] M. Dokuchaev, A. Paques, H. Pinedo, Partial generalized crossed products and a seven-term exact sequence, preprint.
- [18] M. Yôichi, On galois extensions and crossed products, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University. Ser. 1, 21 (2) (1971) 97–121.
- [19] F. DeMeyer, E. Ingraham, Separable algebras over commutative rings, Vol. 181, Springer, 1971.
- [20] T.-Y. Lam, Lectures on modules and rings, Vol. 189, Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Vol. 13, Springer Science & Business Media, 1992.
- [22] N. Jacobson, Basic algebra I, Courier Corporation, 2012.
- [23] A. Fröhlich, The picard group of noncommutative rings, in particular of orders, Transactions of the American Mathematical Society 180 (1973) 1–45.
- [24] K. Morita, The endomorphism ring theorem for frobenius extensions, Mathematische Zeitschrift 102 (5) (1967) 385–404.
- [25] L. El Kaoutit, Extended distributive law: cowreath over corings, Journal of Algebra and Its Applications 9 (01) (2010) 135–171.
- [26] M. Dokuchaev, R. Exel, P. Piccione, Partial representations and partial group algebras, Journal of Algebra 226 (1) (2000) 505–532.
- [27] M. Dokuchaev, R. Exel, J. Simón, Crossed products by twisted partial actions and graded algebras, Journal of Algebra 320 (8) (2008) 3278–3310.