Idempotentes Primitivos em Álgebras de Grupo Finitas e Códigos Minimais

Rafael Budaibes

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies

São Paulo, Dezembro de 2019

Idempotentes Primitivos em Álgebras de Grupo Finitas e Códigos Minimais

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18/12/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Raul Antonio Ferraz - IME-USP
- Prof. Dr. Edsom Ryoji Okamoto Iwaki - UFABC
- Prof. Dr. Samir Assuena - CU-FEI
- Prof. Dr. André Luiz Martins Pereira - UFRRJ

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a toda a minha família pelo apoio e compreensão durante todos estes anos. Agradeço aos meus pais, Nilma e Elias (em sua memória), ao meu irmão Pedro e à Maria Aparecida, que cuidou de todos nós por muitos anos. Agradeço a todos os meus antepassados, pois sem eles, este momento não existiria.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Francisco César Polcino Milies pela oportunidade, pelas aulas ainda na graduação, onde aprendi sobre grupos, pelas aulas no mestrado, pela orientação no doutorado, e por superar meu medo de quedas no tatame, tendo-as repetido diversas e diversas vezes. Aos professores e colegas que exerceram papel fundamental com seus gestos, palavras, discussões e apoio. Obrigado ao prof. Raul Ferraz, por suas valiosas opiniões e por compartilhar de toda sua genialidade.

Obrigado à Edite, José, e Renato pela boa companhia durante todo o curso, sem vocês não seria o que sou. Obrigado Samir, pelas excelentes ideias e pelas discussões. Obrigado aos colegas Andrés, Tiago, Rogério e Robson. Agradecimentos especiais também à profa. Alegria Gladys Chalom pelo suporte e por toda orientação desde a graduação. Obrigado ao prof. Edson Iwaki, o qual tive o prazer de conhecer no mestrado como professor e como orientador.

Obrigado Marceli, pela compreensão, pelo suporte e pelo carinho durante esse longo e difícil período. Obrigado ao Rodrigo Ninrod por todas as conversas e por ser sempre tão suportivo. Obrigado a todos os meus amigos que compreenderam mais um período de completa ausência. Por fim, um agradecimento especial à ESEG - Escola Superior de Engenharia e Gestão pela compreensão e suporte durante este período.

Resumo

Este trabalho apresenta alguns métodos algorítmicos para determinação de famílias completas de idempotentes primitivos em componentes simples de $\mathbb{F}G$ com a hipótese de uma álgebra de grupo finita. Tais métodos viabilizam a construção de códigos minimais à esquerda em $\mathbb{F}G$. Eles são fortemente baseados em GAP e nós apresentaremos os algoritmos criados em detalhes.

Palavras-chave: Anéis de Grupo, Códigos corretores, Códigos minimais, Idempotentes Primitivos, Algoritmos, GAP.

Abstract

In this work, we present some algorithmic methods for the determination of a complete set of primitive idempotent in simple components of a finite group algebra. Such methods provide techniques for the construction of minimal left codes in $\mathbb{F}G$. The methods are strongly based on program GAP and we present in details the routines we created.

Keywords: Group Rings, Error Correcting Codes, Minimal Codes, Primitive Idempotents, Algorithms, GAP.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Álgebra de Grupo	1
1.2	Códigos Corretores de Erros	7
1.3	Pares de Shoda	9
1.3.1	Idempotentes Primitivos em $\mathbb{F}G$ dados por Pares de Shoda	12
1.4	Introdução ao GAP	15
1.4.1	Linguagem Básica	15
2	Algoritmos de busca por idempotentes não centrais primitivos	21
2.1	A detecção de um erro	21
2.2	Algoritmos de Busca por Idempotentes	25
2.2.1	Elementos dados por endereços	25
2.2.2	Analisadores de Dimensão	29
2.2.3	Funções de Crivo	36
2.2.4	A Construção de um HatMap	38
2.2.5	O Algoritmo Principal	45
2.3	Uma alternativa computacional	52
2.3.1	Endereços Complementares	52

2.3.2	Método da Redução de Dimensão	53
2.4	Um Conjunto Completo de Idempotentes Primitivos em FG	66
3	Idempotentes em Álgebras de Grupo Não Semissimples	71
3.0.1	A Função de Competição	71
3.0.2	Detecção de Componentes Simples	77
4	Uma Aplicação para Idempotentes de QG	87
4.1	Reconhecimento de Idempotentes Centrais Primitivos em QG	87
4.2	HatMaps em QG	89
5	Exemplos	91
6	Demais Algoritmos em Gap	99
6.1	Lista De Funções	99
6.2	Algumas Funções Importantes	103
	Referências Bibliográficas	117

Introdução

Recentemente muito têm-se avançado no estudo da estrutura de anéis de grupo por meio de abordagens computacionais [16], [14]. A teoria de códigos corretores de erros tem muito em comum com a teoria de anéis de grupo. Visando atender a esta demanda, softwares tradicionais em álgebra computacional como GAP [5] e Sage [19], ganham cada vez mais suporte para o estudo específico da estrutura de anéis de grupo (Wedderga, [4]) bem como cada vez mais recursos para o estudo de códigos corretores de erros (Guava [1]).

A teoria dos códigos corretores de erros, ganhou vida no fim da década de 40 do século XX, com Richard W. Hamming. Um código é um conjunto C de palavras que são sequências $(a_1, a_1, \dots, a_n)$ de comprimento n , de dígitos tomados em um conjunto finito A com q elementos chamado alfabeto. O objetivo de Hamming era criar um código que fosse capaz de detectar e corrigir um erro. Nessa época Hamming trabalhava no Bell Telephone Laboratories, ali, os computadores eram muito lentos e capazes apenas de detectar erros, mas não de corrigi-los. Quando isso acontecia o computador interrompia o programa em andamento e então muitos trabalhos eram perdidos. Em 1950 foi publicado o estudo de Hamming no Bell System Thechnical Journal, onde ele descreve um código capaz de detectar até dois erros podendo entretanto realizar a correção caso o erro fosse único. Querendo construir um código ainda mais eficiente Hamming perguntou se seria possível construir um código capaz de detectar e corrigir um erro em uma palavra com quatro dígitos de informação e três de verificação. A resposta veio no artigo A Mathematical Theory of Communication [20], de um colega de trabalho chamado Claude Shannon em 1948. Nesse artigo Shannon atribuiu o código encontrado ao próprio Hamming. O artigo de Shannon é considerado hoje como o responsável pela origem de duas teorias:

A Teoria de Códigos Corretores de Erros e a Teoria da Informação. Pouco tempo depois, Marcel Golay, que trabalhava no Signal Corps Engineering Laboratories em Fort Monmouth, em Nova Jersey, inspirado no trabalho de Shannon publicou o artigo Notes on Digital Coding [6], de uma única página, onde descreve alguns códigos que estão entre os melhores utilizados até hoje. Desde então, a Teoria de Códigos Corretores de Erros é um amplo campo de pesquisa que vem despertando o interesse de matemáticos, engenheiros elétricos e cientistas da computação. A fim de se obter uma teoria matemática dos códigos é necessário introduzir alguma estrutura algébrica, para isso consideraremos alfabeto um corpo finito $\mathbb{F}$ com q elementos e o código C será um subespaço vetorial do espaço $\mathbb{F}^n$ de dimensão n sobre $\mathbb{F}$. Dessa forma C é dito código linear q -ário de comprimento n . Uma importante classe de códigos lineares são os códigos cíclicos que possuem a seguinte propriedade: Se $(c_1, \dots, c_n)$ está em C então $(c_n, c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ também está em C . Os exemplos mais importantes dessa classe são os códigos de Hamming e de Golay.

É fácil verificar que o espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ é isomorfo (como espaço vetorial) à álgebra de grupo $\mathbb{F}C_n$ onde C_n é grupo cíclico de ordem n . Em particular os códigos cíclicos de $\mathbb{F}^n$ são identificados como ideais da álgebra $\mathbb{F}C_n$. Assim, podemos afirmar que um código cíclico pode ser realizado como um ideal de uma álgebra de grupo de um grupo cíclico. De modo geral, dizemos que um ideal de uma álgebra de grupo finita FG é um código de grupo. No caso em que a característica de F não divide a ordem de G a álgebra de grupo correspondente é semissimples e, portanto, o estudo dos ideais desta álgebra é equivalente ao estudo dos elementos idempotentes. O estudo de idempotentes em álgebras de grupo, determinados a partir do grupo, foi iniciada, para grupos Abelianos sobre o corpo dos números racionais em [10]. Do ponto de vista da Teoria de Códigos, o caso verdadeiramente relevante é o caso em que o corpo dos coeficientes é finito.

Trabalhos recentes vêm sido desenvolvido em torno do estudo de códigos minimais em álgebras do tipo FG . Muito têm-se avançado no estudo de idempotentes primitivos de álgebras de grupo.

Sabin e Lomonaco em [18] forneceram um algoritmo capaz de determinar códigos minimais em FG quando $\mathbb{F}$ possui característica 2 e G é um grupo metacíclico. Já, em [2], Bakshi e Maheshwary forneceram um algoritmo em GAP para determi-

nação de um conjunto completo e livre de redundâncias de Pares Extremamente Fortes de Shoda.

Em [16], Olteanu apresentou uma construção alternativa ao Teorema de Brauer-Witt em termos de caracteres fortemente monomiais, o que viabilizou um algoritmo para a computação das componentes de Wedderburn de álgebras de grupo semisimples finitas e em [12], Olteanu e Van Gelder apresentaram um algoritmo capaz de encontrar idempotentes primitivos em componentes simples em termos de Pares Shoda para grupos nilpotentes. Outros trabalhos destacam-se na teoria como por exemplo os de Broche e del Rio [3], [9] Jespers, e [17] Olteanu.

O trabalho, visa contribuir com o estudo em torno dos idempotentes primitivos não centrais em álgebras grupo por vias computacionais com o objetivo de preencher algumas lacunas presentes nos programas e pacotes tradicionais como GAP [5] e [4]. Nosso foco concentra-se em álgebras de grupo semissimples e finitas $\mathbb{F}G$, porém algumas aplicações são feitas para o caso não semissimples e outras podem se estender ao caso $\mathbb{Q}G$.

Os conceitos balizaram a construção dos algoritmos descritos seguem respectivamente as seguintes prioridades:

- i) **Descrever** uma ou mais famílias completas de idempotentes primitivos da maneira mais elementar possível, sempre que possível em termos dos subgrupos de G .
- ii) **Encontrar** uma família completa de idempotentes primitivos (sem necessariamente descrevê-los em termos de subgrupos de G)
- iii) Encontrar os idempotentes da maneira mais **eficiente** possível.

Ou seja, nosso produto final objetiva a descrição de famílias completas de idempotentes primitivos (não centrais) em termos dos subgrupos de G . Em alguns casos, algumas alternativas computacionais são fornecidas de forma que a combinação dos algoritmos apresentados resulta em uma estratégia extremamente abrangente e versátil.

Para o caso em que $\mathbb{F}G$ não é semissimples, são apresentados algoritmos de busca por idempotentes centrais primitivos. Neste caso, uma vez obtidos os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$, a aplicação dos mesmos algoritmos para o caso semissimples pode nos levar à descrição de alguns ideais de $\mathbb{F}G$.

Diversos exemplos são exibidos. Neles apresentaremos uma descrição detalhada de algumas famílias de idempotentes primitivos não centrais de componentes simples de $\mathbb{F}G$.

Por fim, no apêndice, explicitamos os códigos fonte das demais funções que sejam úteis, importantes ou que foram citadas durante os capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma descrição da teoria básica de Anéis de Grupo, dos conceitos elementares de Códigos Corretores no contexto de Anéis de Grupos e de Pares de Shoda.

1.1 Álgebra de Grupo

Nesta seção enunciaremos as principais definições e resultados básicos da teoria de Álgebras de Grupo. As definições, proposições e teoremas dessa seção, fazem referência a [13]

Definição 1.1 (Anel de Grupo) Seja R anel e G um grupo. Denote por RG o conjunto de todas as somas finitas

$$\sum_{g \in G} a_g g$$

onde $a_g \in R$, $g \in G$. Dados $\alpha, \beta \in RG$ tais que $\alpha = (\sum_{g \in G} a_g g)$ e $\beta = (\sum_{g \in G} b_g g)$, defina a operação aditiva $\alpha + \beta$ como

$$(\sum_{g \in G} a_g g) + (\sum_{g \in G} b_g g) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

Defina também a operação multiplicativa entre os elementos α e β de RG , $\alpha\beta$ como

$$\alpha\beta = \sum_{g,h} a_g b_h gh$$

e a multiplicação entre um elemento r de R e um elemento $\alpha = (\sum_{g \in G} a_g g)$ de RG , por

$$r\alpha = r(\sum_{g \in G} a_g g) = \sum_{g \in G} ra_g g$$

Dizemos que o anel RG diz-se anel de grupo de G sobre R . Se R for comutativo, RG é uma álgebra de grupo de G sobre R .

Definição 1.2 Um anel R , com unidade é dito semissimples se todo ideal à esquerda de R é um somando direto. Assim se I é um ideal à esquerda de R , então existe J tal que

$$R \cong I \oplus J$$

onde J também é um ideal à esquerda de R .

Teorema 1.3 (Maschke) *Seja G um grupo. Então, o anel de grupo RG é semissimples se, e somente se, as seguintes condições são válidas:*

- i) R é um anel semissimples*
- ii) G é finito*
- iii) $|G|$ é invertível em R*

Teorema 1.4 (Brauer) *Seja L um ideal minimal à esquerda de um anel R . Então, ou $L^2 = 0$ ou $L = Re$, onde e é um idempotente de R*

Teorema 1.5 *Seja R um anel com unidade. Então R é semissimples se, e somente se, todos os seus ideais minimais à esquerda são gerados por um idempotente.*

Definição 1.6 *Seja R anel com unidade, e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma família de elementos de R tais que:*

- i) $e_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$*
- ii) $e_i \cdot e_j = \delta(i, j)e_i$*

- iii) $e_1 + \dots + e_n = 1$
- iv) Cada e_i não pode ser escrito como soma de dois outros idempotentes não nulos ortogonais.

Então, dizemos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma família completa de idempotentes primitivos de R . Ainda, um idempotente qualquer de R que satisfaz iv) é chamado de primitivo.

Proposição 1.7 *Seja R anel semissimples com unidade. Se $R = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ onde L_i são ideais minimais à esquerda, então existe $\{e_1, \dots, e_t\}$ uma família completa de idempotentes primitivos de R tal que $t = n$. Reciprocamente se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma família completa de idempotentes primitivos de R então os ideais $L_i = Re_i$, são todos minimais e $R = \bigoplus_{i=1}^n L_i$*

Definição 1.8 (Idempotentes Centrais Primitivos) *Seja R anel Artiniano com unidade, e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma família de elementos centrais de R tais que:*

- i) $e_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$
- ii) $e_i \cdot e_j = \delta(i, j)e_i$
- iii) $e_1 + \dots + e_n = 1$
- iv) Cada e_i não pode ser escrito como soma de dois outros idempotentes centrais não nulos ortogonais.

Então, dizemos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma família completa de idempotentes centrais primitivos de R . Ainda, um idempotente central qualquer de R que satisfaz iv) é chamado de *idempotente central primitivo*.

Proposição 1.9 *Seja R anel Artiniano semissimples com unidade. Se $R = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ onde M_i são ideais bilaterais de R então existe $\{e_1, \dots, e_t\}$ uma família completa de idempotentes centrais primitivos de R tal que $t = n$ e $M_i = Re_i$ $1 \leq i \leq n$. Reciprocamente se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma família completa de idempotentes centrais primitivos de R então os ideais $M_i = Re_i$, são todos ideais bilaterais minimais e $R = \bigoplus_{i=1}^n M_i$.*

Teorema 1.10 (Wedderburn-Artin) *Um anel R com unidade é semissimples, se e somente se, R é isomorfo a uma soma direta de anéis de matrizes sobre anéis com divisão. Ou seja, se*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus M_{n_s}(D_s)$$

Definição 1.11 O homomorfismo ε dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon : \quad RG &\longrightarrow R \\ \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) &\longrightarrow \sum_{g \in G} a_g \end{aligned}$$

é chamado de *homomorfismo de aumento* de RG . Denote por $\Delta(G)$ o núcleo de ε , ou seja $\Delta(G) = \text{Ker}(\varepsilon)$. O ideal $\Delta(G)$ é chamado de ideal de aumento de RG .

Definição 1.12 Seja RG um anel de grupo e $\alpha \in RG$ tal que $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g$. O conjunto $\text{supp}(\alpha) = \{g \in G : r_g \neq 0\}$ é chamado de suporte do elemento α .

Seja X um conjunto qualquer, denotaremos por $|X|$ o número de elementos de X , dessa forma. $|\text{supp}(g)|$ denota o número de elementos do suporte de α

Proposição 1.13 O conjunto $\{g - 1 : g \in G, g \neq 1\}$ é uma R -base de $\Delta(G)$.

Definição 1.14 Seja H subgrupo normal de G . Dado o homomorfismo ω , tal que

$$\begin{aligned} \omega : \quad RG &\longrightarrow R(G/H) \\ \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) &\longrightarrow \sum_{g \in G} a_g \bar{g} \end{aligned}$$

denote por $\Delta(G, H)$ o núcleo de ω , ou seja $\Delta(G, H) = \text{Ker}(\omega)$.

Proposição 1.15 Seja H subgrupo normal de G e $\mathcal{T}$ um conjunto transversal de H em G . O conjunto $\beta_H = \{q(h - 1) : q \in \mathcal{T}, 1 \neq h \in H\}$ é uma R -base de $\Delta(G, H)$.

Seja $G = C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ um grupo cíclico de ordem n e K um corpo tal que $\text{car}(K) \nmid |G|$.

Considere o epimorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \quad K[X] &\longrightarrow KG \\ f &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Isomorfismo, temos que

$$KG \cong \frac{K[X]}{\text{Ker}(\phi)}$$

Como o $\text{ker}(\phi) = \langle X^n - 1 \rangle$ segue que

$$KG \cong \frac{K[X]}{\langle X^n - 1 \rangle}$$

Se $X^n - 1$ se decompõe em fatores irredutíveis em $K[X]$ como $X^n - 1 = f_1 \dots f_t$ então, pelo Teorema Chinês do Resto

$$KG \cong \frac{K[X]}{\langle f_1 \rangle} \oplus \dots \oplus \frac{K[X]}{\langle f_t \rangle}$$

Denotando por ζ_i como raiz de f_i , temos que $\frac{K[X]}{\langle f_i \rangle} \cong K(\zeta_i)$ e portanto

$$KG \cong K(\zeta_1) \oplus \dots \oplus K(\zeta_t)$$

De forma mais geral, podemos descrever uma álgebra de grupo Abelianiana KG com G finito. Seja então $\Phi_d = \prod_j (X - \zeta_j)$ o polinômio ciclotômico de ordem d escrito em termos de todas as raízes d -ésimas primitivas da unidade. Como $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$, podemos reescrever a decomposição de KG como

$$KG \cong \bigoplus_{d|n} \bigoplus_{i=1}^{a_d} \frac{K[X]}{\langle f_{d_i} \rangle} \cong \bigoplus_{d|n} \bigoplus K(\zeta_{d_i})$$

Logo, como para cada d , os corpos da forma $K(\zeta_{d_i})$ são isomorfos.

Outra forma útil de estudar a estrutura de um anel de grupo consiste em localizar elementos, subgrupos ou componentes simples em termos de sua decomposição em componentes de Wedderburn.

Por exemplo, se RG possui um elemento nilpotente, isto é, tal que $\alpha^n = 0$ para algum $n \neq 0$, então α não pode estar em uma componente que seja um anel de divisão, ou seja, $\alpha \in M_k(D) \Rightarrow k > 1$.

Temos também um resultado que nos dá informações à respeito das componentes comutativas de RG , para isso, vamos definir comutador e idempotente principal.

Definição 1.16 (Comutador para grupos) Seja G um grupo e $x, y \in G$, denotamos por $[x, y]$ o elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Se H é um subgrupo de G , denotamos por $[H, H]$ o conjunto $\{[x, y] : x, y \in H\}$. Denotamos por comutador de G o sub-

grupo normal $G' = [G, G]$.

Definição 1.17 (Comutador para Anéis) Seja R um anel e $x, y \in R$, denotamos por $[x, y]$ o elemento $[x, y] = xy - yx$.

Proposição 1.18 *Seja G grupo e $H \triangleleft G$. Então G/H é Abelian se, e somente se, $G' \subset H$.*

Definição 1.19 (Centralizador) Definimos o conjunto $\mathcal{C}_X(\alpha)$ como os elementos de X que comutam com α .

Definição 1.20 Seja RG um anel de grupo e $X \subset RG$ um subconjunto finito de G . Definimos $\hat{X}$ a função:

$$\hat{X} = \begin{cases} \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} x & \text{se } |X| \text{ é invertível em } R \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Da forma como definida, se H é subgrupo G com RG semissimples, então $\hat{H} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ coincide com a definição clássica. Entretanto, para o caso não semissimples, o elemento $\hat{H}$ existe, independente de $|H|$.

Definição 1.21 (Idempotente Principal) Seja R um anel e G um grupo finito tal que $|G|$ é invertível em R . O idempotente $e_G = \hat{G}$ é chamado idempotente principal de RG .

Proposição 1.22 *Seja R anel e H subgrupo normal de um grupo G . Se $|H|$ é invertível em R , temos que*

$$RG \cong R\left(\frac{G}{H}\right) \oplus \Delta(G, H)$$

Corolário 1.23 *Seja RG uma álgebra de grupo semissimples e G' o comutador de G . Como, por Maschke $|G|$ é invertível em R , e temos que*

$$RG \cong R\left(\frac{G}{G'}\right) \oplus \Delta(G, G')$$

onde $R\left(\frac{G}{G'}\right)$ é a soma de todas as componentes simples comutativas de $\Delta(G, G')$ a soma de todas as outras.

Definição 1.24 Seja G um grupo e R um anel comutativo. Seja $\{C_i\}_{i \in I}$ o conjunto das classes de conjugação de G que contém apenas um número finito de elementos.

Para cada $i \in I$, defina $\gamma_i = \hat{C}_i = \sum_{x \in C_i} x$. Chamamos γ_i de somas de classes de G em R .

Teorema 1.25 [13] *Seja G um grupo e R um anel comutativo. Então $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ forma uma R -base de $\mathcal{Z}(RG)$.*

Definição 1.26 Um corpo $\mathbb{K}$ é dito corpo de decomposição para um grupo finito G , se a álgebra $\mathbb{K}G$ é isomorfa a uma soma direta de componentes matriciais sobre $\mathbb{K}$.

1.2 Códigos Corretores de Erros

Definição 1.27 (Código) Seja $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_q\}$ um conjunto finito com q elementos. Dizemos que $\mathcal{A}$ é dito um alfabeto cujos elementos são chamados de letras. Dizemos que um elemento $(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{A}^n$ é dito uma palavra de comprimento n . Então, um subconjunto de $\mathcal{A}^n$ não trivial é dito um código de comprimento n sobre o alfabeto $\mathcal{A}$.

Definição 1.28 Seja $\mathbb{F}$ um corpo finito. Um subespaço próprio de $\mathbb{F}^n$ é chamado de código linear sobre $\mathbb{F}$.

Definiremos agora um de nossos objetos de estudo. Os códigos em álgebras de grupo. Uma vez que uma álgebra de grupo finita $\mathbb{F}G$ é isomorfa a $\mathbb{F}^n$ como $\mathbb{F}$ -espaços vetoriais, podemos definir um código em $\mathbb{F}G$ por meio de seus ideais.

Definição 1.29 Sejam $\mathbb{F}$ corpo e G um grupo finito. Chamamos de código de grupo os ideais de $\mathbb{F}G$. Já, os ideais minimais de $\mathbb{F}G$ serão chamados de códigos minimais.

Definição 1.30 Sejam α e β elementos de um código de $\mathbb{F}G$. Se $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} \beta_g g$, então chamamos de distância de *Hamming* $d(\alpha, \beta)$ o número

$$d(\alpha, \beta) = |\text{supp}(\alpha - \beta)|$$

Definição 1.31 Dado um elemento α de um código de $\mathbb{F}G$, chamamos de peso de α o número

$$\omega(\alpha) = d(\alpha, 0)$$

Chamamos de *peso* de um código I de $\mathbb{F}G$ o número

$$\omega(I) = \min\{\omega(\alpha), \alpha \in I \setminus \{0\}\}$$

Note que o *peso* de α é a distância de *Hamming* de α a 0.

Definição 1.32 (Parâmetros) Dado um código I de $\mathbb{F}G$, se $n = |G|$, $k = \dim_{\mathbb{F}} I$ e $d = \omega(I)$ chamamos a terna $[n, k, d]$ de parâmetros do código I .

Obter idempotentes em álgebras de grupo é de extrema importância para o estudo da teoria de códigos corretores de erros, uma vez que seus ideais gerados por estes idempotentes são vistos como códigos lineares sobre $\mathbb{F}$.

Um dos métodos mais tradicionais para encontrar idempotentes centrais primitivos envolve tabela de caracteres, porém métodos alternativos as evitando foram amplamente estudados recentemente. Dentre eles, o método dos Pares de Shoda se destaca por sua viabilidade computacional.

Será essencial para nosso propósito o estudo dos idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$.

Nesse capítulo, discutiremos algumas das principais técnicas utilizadas com tal finalidade e seus desdobramentos computacionais. Notemos que uma grande ênfase será dada ao método dos Pares de Shoda devido à basicamente dois fatores: A descrição dos idempotentes primitivos pelo método dos Pares de Shoda utiliza os subgrupos de G na identificação dos idempotentes centrais primitivos, além disso, nos fornece informações sobre a dimensão n da componente simples e de sua respectiva dimensão sobre $\mathbb{F}$.

Como veremos mais adiante, tais informações serão fundamentais para a descrição de nosso método principal. Entretanto, mesmo que os idempotentes centrais primitivos não possam ser completamente descritos pelo método dos Pares de Shoda, faremos uso de métodos clássicos como descrição por tabela de caracteres, ou mesmo no caso não semissimples, poderemos utilizar o método da função de competição que será descrito mais adiante.

Outra vantagem sobre o método dos Pares de Shoda é que, além de descrever algumas informações sobre as componetes simples, nos permite identificar os idempotentes de forma extremamente concisa o que permite além de uma descrição limpa, identificá-los sem recorrer ao suporte do grupo, ou seja, sem escrevê-lo explicitamente. Descreveremos um conjunto completo de idempotentes primitivos (não centrais) de uma componente de Wedderburn por uma única sequência numérica ou por um conjunto de sequências numéricas.

1.3 Pares de Shoda

Seguiremos adiante com os resultados apresentadas por [12], [17] e [9], mantendo a maioria de suas notações.

Aqui, seja $\mathbb{F}$ um corpo e $\bar{\mathbb{F}}$ seu fecho algébrico. São assumidos como caracteres em $\bar{\mathbb{F}}$, fecho algébrico de $\mathbb{F}$. Dado um grupo finito G considere seu caractere χ sobre $\bar{\mathbb{F}}$, $e_{\mathbb{F}}(\chi) = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g$ é o idempotente primitivo central de $\bar{\mathbb{F}}G$ associado a χ e $e_{\mathbb{F}}(\chi)$ é o único idempotente primitivo central e de $\mathbb{F}G$ tal que $\chi(e) \neq 0$.

O corpo dos caracteres de χ sobre $\mathbb{F}$ é definido como $\mathbb{F}(\chi) = \mathbb{F}(\chi(g) : g \in G)$, isto é, uma extensão de $\mathbb{F}$ gerada pela imagem de χ sobre $\mathbb{F}$. O grupo de automorfismos $Aut(\bar{\mathbb{F}})$ age em $\bar{\mathbb{F}}G$ pela ação nos coeficientes, ou seja, $\sigma \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) = \sum_{g \in G} \sigma(a_g)g$, para $\sigma \in Aut(\bar{\mathbb{F}})$ e $a_g \in \bar{\mathbb{F}}$. Sabemos que $e_{\mathbb{F}}(\chi) = \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{F}(\chi)/\mathbb{F})} \sigma(e(\chi))$.

A abordagem que será apresentada consiste em uma alternativa à utilização de caracteres para determinar os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$ e $\mathbb{Q}G$. Como em [9] considere G um grupo, com K e H subgrupos tais que $K \leq H \leq G$. Para $\mathbb{Q}G$ o elemento $\varepsilon(H, K) \in \mathbb{Q}H \subseteq \mathbb{Q}G$ é definido como:

$$\varepsilon(H, K) = \begin{cases} \hat{K} & \text{se } H = K \\ \prod_{M/K \in \mathcal{M}(H/K)} (\hat{H} - \hat{M}) & H \neq K \end{cases}$$

onde $\mathcal{M}(H, K)$ denota o conjunto dos subgrupos de H/K normais, minimais e não triviais. Além disso, denote por $e(G, H, K)$ a soma dos diferentes G -conjugados de $\varepsilon(H, K)$, ou seja: se T denota um transversal à direita de $\mathcal{C}(\varepsilon(H, K))$ em G , então

$$e(G, H, K) = \sum_{t \in T} \varepsilon(H, K)^t$$

É evidente que $e(G, H, K)$, assim como definido, é um elemento central de $\mathbb{Q}G$. Se os G -conjugados de $\varepsilon(H, K)$ são ortogonais, então $e(G, H, K)$ é um idempotente central de $\mathbb{Q}G$. Tais elementos são fundamentais na construção de idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$.

Apesar de termos o foco voltado para idempotentes primitivos em $\mathbb{F}G$, ao final deste trabalho abordaremos alguns exemplos em $\mathbb{Q}G$, por este motivo, nos interessa ainda que de forma menos expressiva, os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$. Há ainda, uma forte conexão entre os idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}G$ e $\mathbb{F}G$ que será abordada mais para frente.

Seguindo a mesma linha de [12], vamos introduzir as notações para abordar o

caso que mais nos interessa. Seja $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{p^k}$ o corpo com p^k elementos. Denotaremos por $p^k = s$. Seja $\bar{\mathbb{F}}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}$. Para cada inteiro k coprimo com s , ξ_k denota a raiz k -ésima primitiva da unidade em $\bar{\mathbb{F}}$ e $o_k(s)$ denota a ordem multiplicativa de s módulo k . Assim: $\mathbb{F}(\xi_k) \cong \mathbb{F}_{s^{o_k(s)}}$ denota o corpo de ordem $s^{o_k(s)}$.

Seja $\mathcal{Q}$ o subgrupo de $\mathbb{Z}_n^*$, gerado pela classe de s e considere $\mathcal{Q}$ agindo em G por $t.g = g^t$. As s -classe ciclotômica de G são as órbitas de G sobre a ação de $\mathcal{Q}$. Seja A um grupo cíclico e A^* o grupo de seus caracteres irreduzíveis em $\bar{\mathbb{F}}$, seja $\mathcal{C}(A)$ o conjunto das s -classes ciclotômicas de A^* , que consistem nos caracteres lineares fiéis de A .

Seja $K \trianglelefteq H \leq G$ tal que H/K seja cíclico de ordem k e $C \in \mathcal{C}(H/K)$. Se $\chi \in C$ e $tr = tr_{\mathbb{F}(\xi_k)/\mathbb{F}}$ denota o traço sobre um corpo da extensão Galoisiana $\mathbb{F}(\xi_k)/\mathbb{F}$ então definimos:

$$\varepsilon_C(H, K) = |H|^{-1} \sum_{h \in H} tr(\chi(hK))h^{-1} = [H : K] \hat{K} \sum_{X \in H/K} tr(\chi(X))h_X^{-1}$$

onde h_X denota um representante de $X \in H/K$. Observando que $\varepsilon_C(H, K)$ não depende da escolha de $\chi \in C$. Denote também por $e_C(G, H, K)$ a soma dos diferentes G -conjugados de $\varepsilon_C(H, K)$.

Um par de Shoda de G é um par (H, K) de subgrupos de G com a propriedade que $K \trianglelefteq H$, H/K Abeliano, tal que um caractere linear irreduzível de H com núcleo K induz um caractere irreduzível de G . Como descrito em [16], há um antigo teorema de Shoda cujo resultado fornece um critério para irreduzibilidade de caracteres monomiais, sabemos que (H, K) é um Par de Shoda se, e somente se $K \trianglelefteq H$, H/K é cíclico e, se $g \in G$ e $[H, g] \cap H \subseteq K$, então $g \in H$ ou seja:

Definição 1.33 Seja G um grupo finito. Um par (H, K) de subgrupos de G é dito Par de Shoda se satisfaz as seguintes condições:

(SP1) $K \trianglelefteq H$

(SP2) H/K é cíclico

(SP3) Se $g \in G$ e $[H, g] \cap H \subseteq K$ então $g \in H$

Se (H, K) é um par de Shoda de G , pode-se demonstrar que existe um único racional α tal que $\alpha e(G, H, K)$ é um idempotente primitivo central de $\mathbb{Q}G$ [15].

Definição 1.34 Um par de Shoda Forte de G é um par (H, K) de subgrupos de G satisfazendo:

(SSP1) $K \leq H \trianglelefteq N = N_G(K)$

(SSP2) H/K é cíclico e subgrupo Abeliano maximal de $N_G(K)/K$

(SSP3) Para todo $g \in G \setminus N_G(K)$, $\varepsilon(H, K)\varepsilon(H, K)^g = 0$

Proposição 1.35 *[[8] 3.5.3]: As seguintes condições são equivalentes para um par (H, K) de subgrupos de um grupo finito G com $K \leq H$.*

1. (H, K) é um par de Shoda de G , $H \trianglelefteq N_G(K)$ e os diferentes G -conjugados de $\varepsilon(H, K)$ são ortogonais.
2. (H, K) é um par forte de Shoda, ou seja, valem SSP1, SSP2 e SSP3.
3. Valem as propriedades:

- SS1') $H \trianglelefteq \mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K))$
- SS2') H/K é cíclico e subgrupo maximal Abelian de $\mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K))/K$
- SS3') para todo $g \in G \setminus \mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K))$, $\varepsilon(H, K)\varepsilon(H, K)^g = 0$

Proposição 1.36 *Sejam (H, K_1) e (H, K_2) dois Pares de Shoda distintos de G , então*

$$\varepsilon(H, K_1)\varepsilon(H, K_2) = 0$$

[[8] 3.4.1]

Seja ainda $K \trianglelefteq H \leq G$ tal que H/K seja cíclico (como em SP1)

Se H é um subgrupo de G , ψ um caractere linear de H e $g \in G$, então ψ^g denota o caractere de H^g dado por $\psi^g(h^g) = \psi(h)$. Isso define uma ação de G no conjunto dos caracteres lineares dos subgrupos de G . Note que se $K = \text{Ker } \psi$, então $\text{Ker } \psi^g = K^g$ e portanto $\psi \rightarrow \psi^g$ define uma bijeção entre o conjunto dos caracteres lineares de H com núcleo K e o conjunto dos caracteres lineares de H^g com núcleo K^g . Essa bijeção leva classes s -ciclotômicas em classes s -ciclotômicas, induzindo a uma bijeção $\mathcal{C}(H/K) \rightarrow \mathcal{C}(H^g/K^g)$. Essa ação induz, por sua vez, a uma ação de $N = N_G(H) \cap N_G(K)$ em $\mathcal{C}(H/K)$, dessa maneira, o estabilizador de uma classe ciclotômica em $\mathcal{C}(H/K)$ independe da classe ciclotômica. Denotemos por $E_G(H/K)$ esse estabilizador de (quaisquer) classes ciclotômicas em $\mathcal{C}(H/K)$ sob esta ação. Ainda, segue que $\mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K)) = E_G(H/K)$ para o caso em que (H, K) é um par forte de Shoda.

Sejam H e K subgrupos de um grupo finito G tal que $K \trianglelefteq H$ e H/K é cíclico. Assim temos que $\varepsilon(H, K)\varepsilon(H, K)^g = 0$ para todo $g \in G$ e $g \notin \mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K))$. Então $\mathcal{C}_G(\varepsilon(H, K)) = N_G(K)$. [[8] Lema 3.5.2]

1.3.1 Idempotentes Primitivos em $\mathbb{F}G$ dados por Pares de Shoda

Podemos enunciar o teorema principal que utilizaremos para identificar os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$.

Seja agora p tal que $|\mathbb{F}| = p^k$ e seja $\mathbb{Z}_{(p)}$ a localização de $\mathbb{Z}$ em p . Então podemos enxergar $\mathbb{F}_p$ como elementos de $\mathbb{Z}_{(p)}$ denotando por $\bar{x}$ a imagem de $x \in \mathbb{Z}_{(p)}$ em $\mathbb{F}_p$. Podemos também estender esta notação à projeção de $\mathbb{Z}_{(p)}$ em $\mathbb{F}_p G$. Note que tanto $\varepsilon(G, N)$ pertence à $\mathbb{Z}_{(p)}$ (pois $N \trianglelefteq G$) como $e(G, K, H)$ (para $K \trianglelefteq H \leq G$). Então $\overline{\varepsilon(H, K)}$ é um idempotente de $\mathbb{F}_p G$ e se (H, K) é um par forte de Shoda então $\overline{e(G, H, K)}$ é um idempotente central de $\mathbb{F}_p G$.

Proposição 1.37 *Seja G finito, Abeliano de ordem n e $\mathbb{F}$, um corpo finito de ordem q tal que $\text{mdc}(q, n) = 1$ então $(N, C) \rightarrow \varepsilon_C(G, N)$ é uma bijeção do conjunto de pares (N, C) com $N \trianglelefteq G$ tais que G/N é cíclico e $C \in C_q(G/N)$ no conjunto dos idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$. Além disso, para cada $N \trianglelefteq G$ e $C \in \mathcal{C}(G/N)$, $\mathbb{F}G\varepsilon_C(G, N) \cong \mathbb{F}(\xi_k)$, onde $k = [G : N]$.*

Como consequência, um importante resultado afirmando que o idempotente independe da escolha de C .

Corolário 1.38 *Se $N \trianglelefteq G$ é tal que G/N é cíclico e $C \in \mathcal{C}(G/N)$ então $\varepsilon_C(G, N)$ é um idempotente primitivo central de $\mathbb{F}G$ e $\mathbb{F}G\varepsilon_C(G, N) \cong \mathbb{F}(\xi_k)$, onde $k = [G : N]$, além disso, se D é um outro elemento de $\mathcal{C}(G/N)$ então $\varepsilon_C(G, N) = \varepsilon_D(G, N)$ se e somente se $C = D$.*

A próxima proposição é fundamental para a demonstração de diversos resultados.

Proposição 1.39 [[3] - Lema 6]

1 - Seja $N \trianglelefteq G$ tal que G/N é cíclico, então

$$\overline{\varepsilon(G, N)} = \sum_{C \in \mathcal{C}(G/N)} \varepsilon_C(G, N)$$

2- Seja $K \trianglelefteq H \leq G$ tal que H/K é cíclico e R um conjunto de representantes da ação de $N_G(K)$ em $\mathcal{C}(H/K)$, então

$$\overline{e(G, H, K)} = \sum_{C \in R} \varepsilon_C(G, H, K)$$

Teorema 1.40 [Teorema [12]] *Seja G um grupo finito e $\mathbb{F}$ um corpo finito de ordem s tal que $\mathbb{F}G$ seja semissimples. Seja (H, K) um par forte de Shoda de G e $C \in \mathcal{C}(H/K)$. Então $e_C(G, H, K)$ é um idempotente primitivo central de $\mathbb{F}G$ e*

$$\mathbb{F}Ge_C(G, H, K) \cong M_{[G:H]}(\mathbb{F}_{s^{o/[E:H]}})$$

onde $E = E_G(H/K)$ e o denota a ordem multiplicativa de s módulo $[H : K]$.

Definição 1.41 [Grupo Fortemente Monomial] *Seja χ um caractere irredutível (complexo) de G . Então χ é dito fortemente monomial se há um par forte de Shoda (H, K) de G e um caractere linear θ de H com núcleo K tal que $\chi = \theta^G$, o caractere induzido de G . O grupo G então é dito fortemente monomial se todo caractere irredutível de G é fortemente monomial.*

Corolário 1.42 *Se G é um grupo fortemente monomial e $\mathbb{F}$ é um corpo finito de ordem s tal que $\mathbb{F}G$ seja semissimples, então todo idempotente primitivo central de $\mathbb{F}G$ é da forma $e_C(G, H, K)$ para (H, K) , par forte de Shoda de G e $C \in \mathcal{C}(H/K)$. Além, disso, para cada par forte de Shoda (H, K) de G e todo $C \in \mathcal{C}(H/K)$*

$$\mathbb{F}Ge_C(G, H, K) \cong M_{[G:H]}(\mathbb{F}_{s^{o/[E:H]}})$$

onde $E = E_G(H/K)$ e o a ordem multiplicativa de s módulo $[H : K]$.

O resultado anterior relaciona os Pares de Shoda fortes com os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$ e por sua vez, com as componentes simples deste anel. O próximo resultado, estabelece entretanto, uma relação entre os Pares de Shoda fortes e idempotentes primitivos não centrais das componentes simples de $\mathbb{F}G$ como descrita no teorema anterior.

Teorema 1.43 [12]. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo finito e G um grupo finito nilpotente tal que $\mathbb{F}G$ seja semissimples. Seja (H, K) um par forte de Shoda de G , $C \in \mathcal{C}(H/K)$ e seja $e_C = e_C(G, H, K)$, $\varepsilon_C = \varepsilon_C(H, K)$, $H/K = \langle \bar{a} \rangle$, $E = E_G(H/K)$. Seja E_2/K e $H_2/K = \langle \bar{a}_2 \rangle$ (respectivamente $E_{2'}/K$ e $H_{2'}/K = \langle \bar{a}_{2'} \rangle$) as 2-partes (respectivamente 2'-partes) de E/K e H/K respectivamente. Então $\langle \bar{a}_{2'} \rangle$ tem um complemento cíclico $\langle \bar{b}_{2'} \rangle$ em $E_{2'}/K$.*

Um conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}Ge_C$ consiste nos conjugados de

$$\beta_{e_C} = \hat{b}_{2'} \beta_2 \varepsilon_C$$

pelos elementos de $T_{e_C} = T_{2'} T_2 T_E$, onde $T_{2'} = \{1, a_{2'}, a_{2'}^2, \dots, a_{2'}^{[E_{2'}:H_{2'}]-1}\}$, T_E denota

um transversal à direita de E em G e β_2 e T_2 são dados conforme os seguintes casos:

1. Se H_2/K possui um complemento M_2/K em E_2/K então $\beta_2 = \hat{M}_2$. Além disso, se M_2/K é cíclico, então existe $b_2 \in E_2$ tal que E_2/K é dado pela seguinte apresentação:

$$\langle \bar{a}_2, \bar{b}_2 \mid \bar{a}_2^{2^n} = \bar{b}_2^{2^k} = 1, \bar{a}_2^{\bar{b}_2} = \bar{a}_2^r \rangle,$$

e se M_2/K não é cíclico, então existem $b_2, c_2 \in E_2$ tais que E_2/K é dado pela seguinte apresentação.

$$\langle \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2 \mid \bar{a}_2^{2^n} = \bar{b}_2^{2^k} = \bar{c}_2^2 = 1, \bar{a}_2^{\bar{b}_2} = \bar{a}_2^r, \bar{a}_2^{\bar{c}_2} = \bar{a}_2^{-1}, [\bar{b}_2, \bar{c}_2] = 1 \rangle,$$

com $r \equiv 1 \pmod{4}$, ou equivalentemente $\bar{a}_2^{2^{n-2}}$ é central em E_2/K . Então:

a) $T_2 = \{1, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{2^k-1}\}$, se $\bar{a}_2^{2^{n-2}}$ é central em E_2/K (a menos que $n \leq 1$) e M_2/K é cíclico, e

b) $T_2 = \{1, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{d/2-1}, a_2^{2^{n-2}}, a_2^{2^{n-2}}, a_2^{2^{n-2}+1}, \dots, a_2^{2^{n-2}+d/2+1}\}$, onde $d = [E_2 : H_2]$, caso contrário.

2. Se H_2/K não possui complemento em E_2/K , então, existem $b_2, c_2 \in E_2$ tais que E_2/K é dado por

$$\langle \bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2 \mid \bar{a}_2^{2^n} = \bar{b}_2^{2^k} = 1, \bar{c}_2^2 = \bar{a}_2^{2^{n-1}}, \bar{a}_2^{\bar{b}_2} = \bar{a}_2^r \bar{a}_2^{\bar{c}_2} = \bar{a}_2^{-1}, [\bar{b}_2, \bar{c}_2] = 1 \rangle,$$

com $r \equiv 1 \pmod{4}$. Nesse caso $\beta_2 = \hat{b}_2^{\frac{1+xa_2^{2^{n-2}}+ya_2^{2^{n-2}}c_2}{2}}$ e

$$T_2 = \{1, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{2^k-1}, c_2, c_2 a_2, c_2 a_2^2, \dots, c_2 a_2^{2^k-1}\},$$

com $x, y \in \mathbb{F}$, satisfazendo $x^2 + y^2 = -1$ e $y \neq 0$.

Ressalvas são feitas por [18, remark 3.4] quanto ao processo de obtenção de soluções para a equação $x^2 + y^2 = -1$ em $\mathbb{F}$.

1.4 Introdução ao GAP

Recentemente, muito vem se falando sobre matemática computacional. Tendo nascida para resolver problemas envolvendo cálculos matemáticos, a relação entre computação e matemática remete à época de Turing e, desde então, tal relação nunca deixou de existir. Hoje, quase cem anos depois, a computação transcende a simples aritmética e pode ser utilizada como ferramenta no estudo das mais diversas áreas do conhecimento. Hoje, uma das ferramentas mais importantes para teóricos em álgebras de grupo que desejam utilizar-se de computadores para debruçar-se sobre tais objetos, é o sistema GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra. [5].

O sistema GAP fornece uma linguagem de programação voltada para o estudo de álgebras discretas, com ênfase em Teoria de Grupo Computacional. Porém, diversos pacotes são oferecidos aos usuários de GAP possibilitando sua utilização em diversas outras áreas da Álgebra, como por exemplo, o pacote *Wedderga* [4] - Wedderburn Decomposition of Group Algebras, o pacote *LAGUNA* - Lie AlGebras and UNits of group Algebras, e o pacote *GUAVA*-A GAP package for computing with error-correcting codes [1].

Nos capítulos que se seguem, construiremos todos os nossos algoritmos em linguagem GAP, utilizando os pacotes *Wedderga*, *Guava* e *Laguna*. Por isso, forneceremos uma breve introdução à linguagem e listaremos algumas das funções já existentes no GAP e nos pacotes que serão utilizadas.

1.4.1 Linguagem Básica

Sobre a execução de comandos É importante ressaltar que todos os comandos devem terminar com “ ; ” ou “;;”. No caso de ; (ponto-e-vírgula) o resultado da execução é exibido, já no caso de ;; - (duplo ponto-e-vírgula) o resultado da execução é omitido. Comentários devem ser feitos após “#” e não serão lidos como comandos.

Devemos primeiramente carregar os pacotes *Wedderga*, *Guava* e *Laguna* utilizados por meio de *LoadPackage*, em nosso caso, basta executar o comando *LoadPackage("Wedderga")* que os três pacotes serão todos carregados, como em

```
1 gap > LoadPackage("Wedderga");
```

Objetos e atribuição de variáveis A qualquer momento um objeto pode ser exibido ou uma variável declarada. Para declarar uma variável, utiliza-se “:=”

(dois-pontos igual). Se uma variável possui já possui valor declarado, uma nova declaração elimina seu valor antigo.

```
1 gap > a:= 2;
2 2
3 gap > b:= 10;
4 10
5 gap > c:= a*b;; # ;; não exibe o resultado de a*b
6 gap > c+3 ;
7 23
```

Listas Listas podem ser obtidas por meio de *List(Lista, função opcional)*. Uma lista é um objeto da forma $A = [a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n]$, onde a_i é um objeto qualquer, não necessariamente da mesma natureza de a_j , isto é, a_i pode ser uma função enquanto a_j , pode, por exemplo, ser um outro conjunto.

Se A é uma lista, seu i -ésimo elemento pode ser acessado por meio de $A[i]$. Por exemplo, se $A = [10, 9, 8, 7]$ então seu segundo elemento pode ser obtido por meio de $A[2]$. Opcionalmente, se uma função f for fornecida no segundo argumento, então o resultado retornará a imagem de f por todos os valores de A . Funções simples podem ser escritas como $x \rightarrow \text{Expressão}$ como exemplo, a função $f(x) = x^2$ pode ser representada como " $x \rightarrow x^2$ ".

```
1 gap > A:=[10,9,8,7];
2 [10,9,8,7]
3 gap > A[2];
4 9
5 gap > List (A);
6 [10,9,8,7]
7 gap > List (A , x-> x^2);
8 [100,81,64,49]
```

É importante ressaltar que comutadores, índices de subgrupos e listas possuem a mesma notação dada por colchetes, entretanto serão utilizadas em contextos distintos não levando a dupla interpretação.

Loops e Recorrências. Funções do tipo *while*, *for* possuem estruturas semelhantes. Devem sempre ser iniciadas seguindo-se de uma condição e o termo *do*, e encerradas com *od*;


```
1 gap > i:=1;;
2 gap > while i <10 do
3 i:=i+1;
4 do;
5 gap > i;
6 10;
7 gap > L:= [1..10];; #Declara L= [1,2,3,..,9,10]
8 gap > for k in [1..4] do
9 L[k]:= L[k] + 1; # adiciona 1 aos primeiros 4 elementos de L
10 od;
11 gap > L;
12 [2,3,4,5,5,6,7,8,9,10]
```

Condicional if/else. As condicionais if/else possuem estrutura semelhante às funções while e for. Devem ser seguidas de uma expressão avaliada em *true* ou em *false*, seguidas pelo termo *then* e encerradas por *fi*.

```
1 gap > i:=2;;
2 if i>3 then
3 a:=0;
4 else
5 a:=1;
6 fi;
7 gap > a;
8 1
```

Criando novas funções e rotinas. uma função pode ser declarada e atribuída a uma variável por *function*(atributos) e encerrada por *end*;sendo que uma função pode possuir variáveis locais declaradas como *local* Variável1, Variável2, ..., Variáveln; e *function* retorna ao sistema o objeto emitido por *return*;

```
1 gap > quadrado := function(n)
2 return n^2;
3 end;
4 function ( n ) ... end
5 gap > quadrado (5);
6 25
```

Lidando com Anéis de Grupo. Após carregados os pacotes necessários, pode declarar um anel de grupo RG por meio de $GroupRing(Anel, Grupo)$. Vamos utilizar frequentemente os anéis dados por $GF(q)$ (Galois Field - $\mathbb{F}_q$) e por $Rationals$ (o corpo $\mathbb{Q}$). Já os grupos podem ser obtidos por meio de um quociente de grupos livres, por meio de seus geradores ou diversas outras formas permitidas pelo GAP. Sempre que possível, vamos utilizar a biblioteca $AllSmallGroups(Ordem)[Núm]$. O comando $AllSmallGroups$ retorna uma lista com todos os grupos dada uma determinada ordem presentes na biblioteca do GAP. Dado um determinado grupo G , pode-se tentar identificá-lo via $IdSmallGroup$, retornando assim sua classificação na biblioteca. Ainda, para grupos de ordem pequena, pode-se tentar identificar sua estrutura via $StructureDescription$.

```

1 gap > F := GF(3);;
2 gap > G:=AllSmallGroups(8)[4];;
3 gap > StructureDescription (G);
4 "Q8"
5 gap > FG:= GroupRing(F,G); # Criação de F3Q8
6 <algebra-with-one over GF(3), with 3 generators>
7 gap > A:=FreeGroup ("a","b");;a:=A.1;;b:=A.2;;
8 gap > G2:=A/[a^4,b^2,b*a*b*a];;
9 gap > StructureDescription(G2);
10 "D8"
11 gap > IdSmallGroup(G2);
12 [ 8 , 3 ]
13 gap > QG:= GroupRing(Rationals, G2); # Criação de QD8
14 <algebra-with-one over Rationals, with 2 generators>

```

Dado uma álgebra de grupo semissimples, podemos obter seus idempotentes centrais primitivos por meio de $PrimitiveCentralIdempotentsByCharacterTable$, bem como obter via $WedderburnDecomposition(FG)$ informações sobre suas componentes de Wedderburn, estudando assim sua estrutura.

```

1 gap > G27:= AllSmallGroups(27)[4] ;; # G é produto semidireto entre
   C9 e C3
2 gap > StructureDescription (G);
3 "C9: C3"
4 gap > F2G27:= GroupRing( GF(2) ,G27);;
5 gap > wdecom:= WedderburnDecomposition (F2G27);
6 [ ( GF(2)^[ 1, 1 ] ), ( GF(2^2)^[ 1, 1 ] ), ( GF(2^2)^[ 1, 1 ] ), ( GF(2^2)
   ^[ 1, 1 ] ), ( GF(2^2)^[ 1, 1 ] ), ( GF(2^2)^[ 3, 3 ] ) ]
7 gap > Size(wdecomp);
8 6

```

```
9 gap > wdecomp[6];  
10 ( GF(2^2)^[ 3, 3 ] )
```

Demais comandos estão listados no último capítulo e serão utilizados ao longo deste trabalho. Como já mencionado, uma ressalva importante quanto à notação, o qual utilizaremos o formato *função* para funções e comandos nativos do GAP e a notação **função** para funções e algoritmos construídos por nós, ou seja, não oferecidas de forma nativa pelo GAP ou presentes em algum de seus pacotes.

No decorrer dos próximos capítulos faremos uso do termo *Lista* nos referindo como uma n -úpla de objetos indexados. Dado um grupo G , vamos nos referir como $SubG$ à lista formada por seus subgrupos.

Capítulo 2

Algoritmos de busca por idempotentes não centrais primitivos

2.1 A detecção de um erro

A descrição das álgebras de grupo semissimples sobre corpos finitos $\mathbb{F}$ e extensões finitas de $\mathbb{Q}$ por vias computacionais foi um problema resolvido completamente em [16]. Já, para calcular idempotentes centrais primitivos, o algoritmo apresentado envolve o método da tabela de caracteres. Posteriormente, apresentou-se um segundo método, baseado nos Pares de Shoda como alternativa para o caso em que G é fortemente monomial, como discutido no capítulo anterior.

O programa GAP [5] oferece no pacote *Wedderga* [4] uma rotina chamada `PrimitiveIdempotentsNilpotent` que é consequência da determinação de idempotentes não centrais primitivos obtida por Olteanu e Van Gelder em [17] para álgebras de grupos finitas em grupos nilpotentes. No entanto, o código fonte correspondente apresenta um erro. Olteanu e Van Gelder utilizaram esta rotina em [12] para determinar códigos em $\mathbb{F}_2G$, onde $G = G_{[27,4]}$, ou seja

$$G = \langle a, b \mid a^9 = 1, b^3 = 1, ba = a^4b \rangle$$

Tem-se que

$$\mathbb{F}_2G \cong \mathbb{F}_2G \cong \mathbb{F}_2 \oplus 4\mathbb{F}_4 \oplus M_3(\mathbb{F}_4)$$

O idempotente que gera a componente isomorfa a $M_3(\mathbb{F}_4)$ é obtido à partir do

par de Shoda Forte $(H, K) = (< a >, 1)$.

Nessa componente deveriam existir idempotentes primitivos não centrais que geram ideais à esquerda de dimensão 3 sobre $\mathbb{F}_4$, ou seja, 6 sobre $\mathbb{F}_2$. Porém, em [12], aplicando a rotina *PrimitiveIdempotentsNilpotent*, se executou as seguintes instruções:

```
1 gap > A:= FreeGroup ("a","b");;a:=A.1;;b:=A.2;;
2 gap > G:=A/[a^9,b^3,b*a*b^(-1)*a^(-4)];;
3 gap > F:=GF (2);;
4 gap > FG:= GroupRing(F,G);;
5 gap > S:= AsSet(G);;
6 gap > H:= Subgroup(G,[G.1]);;
7 gap > K:= Subgroup(G ,[]);;
8 gap > N:= Normalizer(G,K);;
9 gap > epi:= NaturalHomomorphismByNormalSubgroup(N,K);;
10 gap > QHK:= Image(epi ,H);;
11 gap > gq:= MinimalGeneratingSet(QHK ) [1];;
12 gap > C:= CyclotomicClasses(Size(F),Index(H,K))[2];;
13 gap > P:= PrimitiveIdempotentsNilpotent (FG ,H,K,C,[epi ,gq]);;
14 gap > e:=P[1];;
```

Com o primeiro idempotente, $e = p[1]$ executa-se

```
1 gap > CodeWordByGroupRingElement(F,S,e);
2 [ 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2)
   , 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*
   Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), Z(2)^0 , 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z
   (2), Z(2)^0 ]
3 gap > Ge := List(G,g->g*e);; time;
4 4
5 gap > B := List(Ge ,x->CodeWordByGroupRingElement(F,S,x));;
6 gap > code := GeneratorMatCode(B,F);
7 a linear [27 ,18 ,1..2]3..9 code defined by generator matrix over GF(2)
8 gap > MinimumDistance(code );
9 2
```

e se obtém que o código $\mathbb{F}_2 Ge$ tem parâmetro $[27,18,2]$, no entanto, 18 é a dimensão de toda a componente simples correspondente e ideais minimais nela deveriam ter dimensão 6.

Na verdade é fácil verificar diretamente que e não é nem mesmo um elemento idempotente, por exemplo, executando *IsIdempotent*(e).

```

1 gap > e^2=e;
2 false
3 gap > IsIdempotent(e);
4 false

```

De fato, os três elementos dados como idempotentes pela rotina são:

```

1 gap > P;
2 [ (Z(2)^0)*b*a^3+(Z(2)^0)*b*a^6, (Z(2)^0)*a^128*b*a^-122+(Z(2)^0)*
   a^128*b*a^-125, (Z(2)^0)*a^256*b*a^-253+(Z(2)^0)*a^256*b*a
   ^-250 ]
3 ### Reduzindo as multiplicações em G, obtemos:
4 gap > SetReducedMultiplication(G);
5 gap> P:=PrimitiveIdempotentsNilpotent(FG,H,K,C,[epi,gq]);
6 [ (Z(2)^0)*a^-1*b*a+(Z(2)^0)*a*b*a^-1, (Z(2)^0)*b+(Z(2)^0)*a*b*a
   ^-1, (Z(2)^0)*b+(Z(2)^0)*a^-1*b*a ]
7 gap > List (P, x-> IsIdempotent(x));
8 [ false, false, false ]

```

Assim, os elementos $e_1 = a^{-1}ba + aba^{-1}$, $e_2 = b + aba^{-1}$ e $e_3 = b + a^{-1}ba$, dados pelo cálculo acima não são idempotentes.

Uma forma de reparar o erro consiste em trocar o trecho final do código fonte:

```

1 ### Construct the idempotents
2 L := List( Product3Lists([T_odd,T_even,T_E]) , i -> (AverageSum(FG
   ,b_odd])*beta*eps)^i);
3 return L;
4 end);

```

Pelo seguinte código fonte:

```

1 ### Construct the idempotents
2
3 b_summ := One(FG)*b_odd;
4
5 for i in [2..Order(b_odd)] do
6   b_summ := b_summ+((One(FG))*b_odd)^i;
7 od;
8
9 b_hat := (Order(b_odd)*One(FG))^-1*b_summ;
10

```

```

11 L := List( Product3Lists([T_odd,T_even,T_E]) , i -> (b_hat*beta*eps
    )^i);
12
13 return L;
14 end);

```

A seguinte alteração produz os elementos:

```

1 gap >P:= PrimitiveIdempotentsNilpotent (FG ,H,K,C,[epi ,gq]);;
2 gap >P[1];
3 (Z(2)^0)*a^3+(Z(2)^0)*a^-1*b*a+(Z(2)^0)*a^-3+(Z(2)^0)*a*b^-1*a
    ^-1+(Z(2)^0)*a*b*a^-1+(Z(2)^0)*a^-1*b^-1*a
4
5 gap >P[2];
6 (Z(2)^0)*b+(Z(2)^0)*a^3+(Z(2)^0)*b^-1+(Z(2)^0)*a^-3+(Z(2)^0)*a*b
    ^-1*a^-1+(Z(2)^0)*a*b*a^-1,
7 gap >P[3];
8 (Z(2)^0)*b+(Z(2)^0)*a^3+(Z(2)^0)*b^-1+(Z(2)^0)*a^-1*b*a+(Z(2)^0)
    *a^-3+(Z(2)^0)*a^-1*b^-1*a;
9 gap > List (P, x-> IsIdempotent(x));
10 [ true, true, true ]

```

Reavaliando o código fonte obtido:

```

1 gap > CodeWordByGroupRingElement(F,S,e);
2 [ 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), Z(2)^0, 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), Z(2)
    ^0, Z(2)^0, 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), Z(2)^0, Z(2)^0,
    0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z(2), Z(2)^0, 0*Z(2), 0*Z(2), 0*Z
    (2), 0*Z(2) ]
3 gap > Ge := List(G,g->g*e);; time;
4 16
5 gap > B := List(Ge ,x->CodeWordByGroupRingElement(F,S,x));;
6 gap > code := GeneratorMatCode(B,F);
7 a linear [27 ,6 ,1..6]8..13 code defined by generator matrix over GF(2)
8 gap > MinimumDistance(code );
9 6

```

Portanto, resulta um código $[27,6,6]$ sobre $\mathbb{F}_2$, como era de se esperar.

2.2 Algoritmos de Busca por Idempotentes

2.2.1 Elementos dados por endereços

O estudo do problema descrito anteriormente motivou a criação das técnicas que apresentaremos. Ao nos depararmos com os algoritmos disponíveis, dois problemas imediatamente se ressaltaram: o problema da descrição do idempotente e a limitação da técnica que se aplica a apenas uma classe específica de grupo.

O primeiro problema refere-se à dificuldade de leitura que pode surgir da própria natureza dos elementos em questão, ou seja, ao trabalharmos com uma álgebra de grupo, seus elementos podem possuir um suporte do tamanho do próprio grupo. Uma frequente inconveniência dos algoritmos tradicionais que determinam elementos de uma álgebra de grupos RG é a descrição explícita dos elementos de RG . Mesmo que descrever estes elementos de forma explícita seja uma consequência imediata do propósito dos algoritmos. Descrever tais elementos em termos de seu suporte em G pode ser de difícil leitura humana, principalmente para grupos de ordem grande. Tais descrições podem ainda ser piores em álgebras sobre um corpo de ordem p^k .

Dessa forma, os resultados obtidos podem ser de difícil interpretação, bem como difíceis de serem manipulados e utilizados em futuros estudos.

O segundo problema refere-se às limitações impostas à classe do grupo. No caso, o algoritmo *PrimitiveIdempotentsNilpotent* depende de G ser um grupo nilpotente bem como de um idempotente central primitivo descrito por um Par de Shoda Forte.

Com as construções que descreveremos à seguir, será possível a criação de um novo e versátil algoritmo capaz de descrever os idempotentes primitivos (não centrais) de uma componente simples $\mathbb{F}Ge$ sem necessariamente uma restrição quanto ao tipo de grupo, possibilitando assim, um estudo diversificado de tipos de álgebras de grupo. Nosso foco principal serão as álgebras de grupo $\mathbb{F}G$ finitas, entretanto, em muitos casos, obteremos sucesso também em $\mathbb{Q}G$.

Considere agora a seguinte situação: Suponha haver k idempotentes $e_1, \dots, e_k$ que comutam dois a dois.

Temos que

$$1 = e_i + (1 - e_i), 1 \leq i \leq k$$

Multiplicando ordenadamente estas equações, temos

$$1 = e_1 \dots e_k + e_1 \dots (1 - e_k) + \dots + e_1 \dots (1 - e_{k-1}) e_k + \\ + e_1 \dots (1 - e_{k-1}) (1 - e_k) + \dots + (1 - e_1) \dots (1 - e_k)$$

Ou seja, escrevemos a identidade da álgebra de grupo como soma de idempotentes dois a dois ortogonais.

De fato, sejam e'_i e e'_j dois termos quaisquer da soma acima, e denote por e^+ e por e^- elementos do tipo $e^+ = e$ e $e^- = 1 - e$ temos que ambos são idempotentes da forma

$$e_1^\pm \dots e_k^\pm$$

Se $e'_i \neq e'_j$ então existe pelo menos um e_t tal que se e_t^+ está em e'_i então e_t^- está em e'_j e, se e_t^- está em e'_i então e_t^+ está em e'_j . Dessa forma, segue que $e'_i \cdot e'_j = \delta(i, j) e'_i$

Se $\mathbf{e}$ então denota um idempotente central de uma componente simples $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_q)$, temos que

$$\mathbf{e} = 1\mathbf{e} = e_1 \dots e_k \mathbf{e} + e_1 \dots (1 - e_k) \mathbf{e} + \dots + e_1 \dots (1 - e_{k-1}) e_k \mathbf{e} + \\ + e_1 \dots (1 - e_{k-1}) (1 - e_k) \mathbf{e} + \dots + (1 - e_1) \dots (1 - e_k) \mathbf{e}$$

onde $e_1 \dots e_k$ são k -idempotentes nas condições previamente citadas. Ou seja, é natural que, ao estudar idempotentes primitivos em $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_q)$ encontremos um grande número de idempotentes da forma $e_1^\pm \dots e_k^\pm$.

Em $\mathbb{F}G$, se H é um subgrupo de G , sendo $\widehat{H}$ um idempotente da álgebra de grupo, portanto, é imediato pensar em idempotentes da forma $\widehat{H}_i$, para cada H_i subgrupo de G , como candidatos aos idempotentes $e_1, \dots, e_k$ da decomposição acima. Vale ressaltar que se tomarmos apenas os subgrupos normais de G como idempotentes, então recairemos em uma decomposição da unidade em termos de idempotentes centrais ortogonais. Tais idempotentes mostram-se de extremo valor na descrição dos idempotentes centrais primitivos, tanto em $\mathbb{F}G$ quanto em $\mathbb{Q}G$.

Notem que para o caso em que $H_1 \leq H_2$, então $\widehat{H}_1 \cdot \widehat{H}_2 = \widehat{H}_2$. Portanto, se

$$e_1 = \widehat{H}_1, \dots, e_k = \widehat{H}_k \text{ e } H_1 \leq \dots \leq H_k$$

então teremos:

$$\begin{aligned} e = 1e &= e_1 \dots e_k e + e_1 \dots (1 - e_k) e + \dots + e_1 \dots (1 - e_{k-1}) e_k e + \\ &+ e_1 \dots (1 - e_{k-1}) (1 - e_k) e + \dots + (1 - e_1) \dots (1 - e_k) e \\ &= \widehat{H}_k e + \widehat{H}_{k-1} (1 - \widehat{H}_k) e + \dots + \widehat{H}_{k-2} (1 - \widehat{H}_{k-1}) \widehat{H}_k e + \\ &+ \widehat{H}_{k-2} (1 - \widehat{H}_{k-1}) (1 - \widehat{H}_k) e + \dots + (1 - \widehat{H}_1) \dots (1 - \widehat{H}_k) e \end{aligned}$$

Vamos então, procurar descrever cada um dos idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G \cong M_n(\mathbb{F}_q)$ por meio de um produto da forma $\widehat{H}_1^\pm \dots \widehat{H}_k^\pm$.

As próximas definições e construções são fundamentais para o propósito de nossos algoritmos. É importante ressaltar uma característica marcante e que deve ser observada atentamente no estudo de álgebras de grupo por vias computacionais. A complexidade do objeto em questão cresce de forma extremamente acentuada. Ou seja, duas álgebras de grupo $\mathbb{F}_{q_1}G_1$ e $\mathbb{F}_{q_2}G_2$ tais que q_1 e q_2 sejam números próximos bem como G_1 e G_2 sejam grupos com ordens similares, o número de elementos das álgebras de grupo podem ser enormemente distantes. Como por exemplo $\mathbb{F}_3C_8$ e $\mathbb{F}_5C_9$ enquanto o primeiro possui 6.561 elementos o segundo possui cerca de 2 milhões. Para classes de grupo cuja ordem tenha um crescimento mais acentuado como em S_n o tamanho da álgebra de grupo pode ser completamente incomparável. Enquanto $\mathbb{F}_5S_3$ possui 15.625 elementos, $\mathbb{F}_5S_4$ possui 5, 9.10¹⁶ elementos e $\mathbb{F}_7S_5$ possui 2, 6.10¹⁰¹ elementos. Portanto, devemos pensar de forma muito cautelosa nas estratégias adotadas.

A seguir, definiremos algumas funções, métodos e algoritmos menores que serão utilizados pelo núcleo central do algoritmo principal. Serão eles:

- Analisadores de dimensão:
permitirão a identificação de elementos que comporão os idempotentes primitivos
Compõe os analisadores de dimensão os algoritmos **ProgTest** advindo da *função de dimensão* e o algoritmo **DimHate**.
- Crivo de idempotentes:
Função que eliminará idempotentes identificados como não adequados para

a composição dos idempotentes primitivos. Será a função $C_r : \mathbb{Z}^i \rightarrow (\mathbb{F}G)^m$ onde m é o número de subgrupos de G . As funções do tipo crivo C_r darão origem ao algoritmo **FiltroCentralizeXemL** e **DuploCrivo**

- Indexadores de idempotentes:
Função que recebe um grupo e relaciona índices inteiros com idempotentes obtidos à partir dos subgrupos do grupo recebido. Será a função $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}G$
- Função de Salto:
Função que permite a escolha de outros idempotentes para compor os idempotentes primitivos. Esta função pode levar tanto a endereços distintos quanto a famílias distintas de idempotentes. Funções de salto serão funções do tipo $s_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^n$ e fornecem informações sobre como o algoritmo de busca por idempotentes deve se comportar tomando como base um número natural escolhido pelo usuário.

Definição 2.1 $f - \text{Endereço}$: Dada uma função $f : I \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow (\mathbb{F}G)^m$, dizemos que uma família de m elementos $\mathcal{F}$ de $\mathbb{F}G$, (vista como uma m -úpla de $(\mathbb{F}G)^m$) é descrita por um $f - \text{Endereço}$, $\mathcal{A} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ quando $\mathcal{F} = f(\mathcal{A})$.

Definição 2.2 Dado um idempotente primitivo central $\mathbf{e}$, n e n' inteiros positivos tais que $n' \leq n$ e $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_q)$. Diremos que o conjunto de $f - \text{endereços}$

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{e}, n') = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_i = (k_{i_1}, \dots, k_{i_{n'}}), \dots\}$$

será um *mapa para os idempotentes primitivos* (não centrais) de $M_n(\mathbb{F}_q)$ com relação à f , cujos endereços possuem comprimento máximo n' se, por meio de f , os elementos $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ descrevem um ou mais idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$.

Notações: Se $n' = n$, então $\mathcal{M}_f(\mathbf{e}, n') = \mathcal{M}_f(\mathbf{e})$

e, n' ou f podem ser omitidos quando claro no contexto, assim, as seguintes notações representam o mesmo objeto:

$$\mathcal{M}_f(\mathbf{e}, n') = \mathcal{M}_f(\mathbf{e}) = \mathcal{M}(\mathbf{e}) = \mathcal{M}_f = \mathcal{M}$$

Para encontrar idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ descritos por um $f - \text{Endereço}$ será necessário criar uma função a qual chamaremos de *função de salto* s_k (*skip function*). A função de salto dependerá de outras funções $\sigma_i : \mathbb{N}^i \rightarrow \mathbb{N}$. Tal função de salto possui um papel fundamental semelhante ao de ordenação dos idempotentes por meio de indexação dos índices de um $f - \text{Endereço}$ $\mathcal{A}$.

Definição 2.3 (Função de salto)

Sejam $\sigma_i : \mathbb{N}^i \rightarrow \mathbb{N}$. Definimos a função $s_k : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^m$ como

$$s_k(n) = (\sigma_1(n), \sigma_2(\sigma_1(n), n), \dots, \sigma_m(\sigma_{m-1}(n), \dots, \sigma_1(n), n))$$

Exemplo 2.4 Podemos construir uma função de salto $s_k(n)$ extremamente elementar como por exemplo:

$$s_k(n) = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

ou então $s_k(n) = (n, n, n, n, \dots, n)$, bastando, por exemplo definir $\sigma_i(x_1, \dots, x_i) = n$.

Funções $s_k(n)$ tais que $s_k(1) = (1, 1, \dots, 1)$ serão extremamente úteis futuramente, pois para nosso algoritmo, funções nessas condições serão as funções que encontram famílias de idempotentes de forma mais rápida.

Diremos que a função $s_k(n) = (n, 1, \dots, 1)$ será a função de salto padrão.

2.2.2 Analisadores de Dimensão

Dado um idempotente qualquer e_i , os seguintes analisadores de dimensão estudam as dimensões de $e_i \mathbb{F} G e_i$ sobre $\mathbb{F}$.

A seguir apresentamos o algoritmo **FdimV2** que transforma a sequência de elementos

$$e_i g_1 e_i, \dots, e_i g_j e_i, \dots, e_i g_{|G|} e_i$$

em uma matriz $M_{|G|}(\mathbb{F})$ e retorna seu posto.

```

1 ###
2 ### Recebe FG e um idempotente e
3 ### Retorna a dimensão de eFG e sobre F
4 FDimV2 := function (FG, e)
5
6 local G, # Grupo base
7   n, # tamanho de G
8   lne, # lista não escalonada
9   i, # contador
10  rank; # número de elementos LI
11
```

```

12 G:= UnderlyingMagma(FG);
13 n:= Size(G);
14 lne:= [];
15
16 for i in [1..n] do
17   Add (lne, CoeficientesByG(FG,G,e*List(G)[i]*e*One(FG)));
18 od;
19
20 rank := RankMat(lne);
21
22 return rank;
23 end;

```

Definido **FDimV2**, definiremos um algoritmo excepcionalmente útil que recebe uma lista de idempotentes $e_1, \dots, e_k$ (podendo ser unitária) e retorna as dimensões sobre $\mathbb{F}$ de $e_1\mathbb{F}Ge_1, \dots, e_k\mathbb{F}Ge_k$. Este será o algoritmo **DimHate**.

```

1  ### Recebe FG, um idempotente e uma lista de Hats e_1..e_k
2  ### Retorna a dimensão sobre F de e_1FGe_1 ,...e_kFGe_k
3
4  DimHate := function (FG, e , ListaHats)
5    local n, #Lista de Hats
6    i, #contador
7    x, # resultado da dimensão
8    prod, #produto
9    result; # lista de resultados
10
11  n:= Size (ListaHats);
12  result := [];
13  for i in [1..n] do
14    prod:=e*ListaHats[i];
15    if prod = Zero(FG) then
16      x:= 0; # rank da matriz nula
17    else
18      x:= Dim(FG, prod);
19    fi;
20    Print ("\n \n Para i = ", i, " dim = ", x, " \n \n");
21    Add (result, x );
22  od;
23  return result;
24 end;

```

Apesar do analisador anterior ser uma ferramenta poderosa de análise, conforme aumenta-se a ordem de G , os elementos de $\mathbb{F}G$ tendem a apresentar suporte cada vez maior, assim o algoritmo pode apresentar problemas de desempenho. Uma estratégia extremamente veloz para trabalhar nas componentes $M_n(\mathbb{F}_{p^k})$ para o caso em que a ordem de G é relativamente grande enquanto a k seja relativamente pequeno é a de utilizar a função de dimensão:

Seja $\mathbf{e} \in \mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_{p^k})$ e seja e um idempotente qualquer

Considere as funções $g_G^{e,i} :$

$$\begin{array}{ccc} g_G^{e,i} : & \{g_1, \dots, g_i\} \subset G & \rightarrow \mathbb{F}G \\ & g & \rightarrow ege\mathbf{e} \end{array}$$

Temos que para cada i entre 1 e $|G| - 1$

$$\dim_{\mathbb{F}}[Im g_G^{e,i}] \leq \dim_{\mathbb{F}}[Im g_G^{e,i+1}]$$

e como

$$\dim_{\mathbb{F}}[Im g_G^{e,|G|}] = \dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}G\mathbf{e}$$

segue que

$$\dim_{\mathbb{F}}[Im g_G^{e,i}] \leq \dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}G\mathbf{e}$$

Considere também as funções f_0 , e $\{f_i\}_{i=1..|G|}$, com $f_0 : \mathbb{F}G \rightarrow \{0\}$ e, sendo h é uma função qualquer com imagem em $\mathbb{F}G$, para cada $i = 1...|G|$, definimos

$$\begin{array}{ccc} f_i^h : & \mathbb{F} \times Im h & \rightarrow \mathbb{F}G \\ & (\alpha, \beta) & \rightarrow \alpha e g_i \mathbf{e} + \beta \end{array}$$

Note que dessa forma, temos

$$\{0\} = Im f_0 \subseteq Im f_1^{f_0} \subseteq \dots Im f_j^{f_{j-1}} \subseteq \dots \subseteq Im f_{|G|}^{f_{|G|-1}} \subseteq e\mathbb{F}G\mathbf{e}$$

então, se n_0 denota um inteiro positivo qualquer, temos que

$$\dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}G\mathbf{e} = n_0 \iff \dim_{\mathbb{F}} Im f_i^{f_{i-1}} \leq n_0, i = 1, \dots, |G|$$

Assim, na sequência, cada $f_i^{f_{i-1}^{-1}}$, determina por sua imagem, uma quota inferior para $\dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}Ge$ enquanto $\dim_{\mathbb{F}}[Im g_G^{e,|G|}] = \dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}Ge$.

Definição 2.5 Seja G um grupo finito tal que $|G| = n$, $\mathbb{F}$ corpo finito, e um idempotente primitivo central de $\mathbb{F}G$ e e um idempotente qualquer de $\mathbb{F}G$. Definimos a *função de dimensão* F^e com relação à e e as *funções de comparação* C_i as funções definidas por:

$$F^e : \{0, \dots, |G|\} \rightarrow \mathbb{N}$$

dada por

$$F^e(n) = \begin{cases} F^e(n-1) + 1 & \text{se } Im g_G^{e,n} \not\subseteq Im C_{n-1} \\ F^e(n-1) & \text{se } Im g_G^{e,n} \subseteq Im C_{n-1} \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

onde as funções C_n são dadas por

$$C_n = \begin{cases} f_n^{C_{n-1}} & \text{se } F^e(n) = F^e(n-1) + 1 \\ C_{n-1} & \text{se } F^e(n) = F^e(n-1) \\ f_0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Da forma como definida, F^e é claramente monótona e $F^e(|G|) = \dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}Ge$. Pela monotonicidade da F^e , a função de dimensão torna-se uma maneira eficaz de determinar se o idempotente e faz com que $\dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}Ge$ seja minimal.

Suponha conhecida a dimensão de um ideal minimal do tipo $e'\mathbb{F}Ge'e$, ou seja, se $\mathbb{F}Ge \cong M_n(\mathbb{F}_{p^k})$ com $n_0 = p^k$ então, se existe n_1 em $D_{F^{e_k}}$, o domínio de F^e , tal que $F^e(n_1) > n_0$ então $\dim_{\mathbb{F}} e\mathbb{F}Ge \geq n_0$. Assim, quando $|G|$ torna-se muito grande, é possível saber que o idempotente e não é conveniente para obter ideais minimais da forma como queremos, sem necessariamente determinar a dimensão $e\mathbb{F}Ge$.

Tal forma de testar os idempotentes através da função de dimensão é implementado diretamente através do seguinte código fonte, o qual chamaremos de **ProgTest**

Exemplo 2.6 Considere $G = \langle a, b | a^5 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Temos que $G \cong C_5 \rtimes C_4$. Assim,

$$\mathbb{F}_3 G \cong \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_{3^2} \oplus M_4(\mathbb{F}_3)$$

Sendo $G' = \hat{a}$, então, tomemos $\mathbf{e} = 1 - \hat{a}$. Consideremos também fixada a seguinte ordem em G :

$$\{Id, a, a^{-1}, b, b^{-1}, a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, \\ ba, ba^{-1}, b^2, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, ab^2, a^{-1}b^2, bab, ba^{-1}b\}$$

isto é, onde $g_1 = Id$, $g_2 = a$, ..., $g_{20} = ba^{-1}b$. Seja $H_{14} = \langle g_{14} \rangle = \langle b^2 \rangle$ e então $e = \widehat{H_{14}}$.

Vamos verificar o comportamento da *função de dimensão* F^e .

Temos inicialmente que $C_0 = f_0$. e $F(0) = 0$.

Vamos encontrar $F^e(1)$:

Como $g_G^{e,1}$ é tal que

$$\begin{array}{ccc} g_G^{e,1} : & \{g_1\} \subset G & \rightarrow \mathbb{F}G \\ & g & \rightarrow ege\mathbf{e} \end{array}$$

Temos que $Im g_G^{e,1} = \{eg_1e\mathbf{e}\} = \{e\mathbf{e}\} \not\subseteq Im C_0 = \{0\}$, Logo, $F(1) = F(0) + 1 = 1$.

Agora, para encontrar C_1 , verifica-se que $F(1) = F(0) + 1$ portanto $C_1 = f_1^{C_0}$, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} f_1^{C_0} : & \mathbb{F} \times Im C_0 & \rightarrow \mathbb{F}G \\ & (\alpha, \beta) & \rightarrow \alpha eg_1e\mathbf{e} + \beta \end{array}$$

Ou seja $Im f_1^{C_0} = \{0eg_1e\mathbf{e} + 0, 1eg_1e\mathbf{e} + 0, 2eg_1e\mathbf{e} + 0\} = \{0, e\mathbf{e}, 2e\mathbf{e}\}$.

Assim, $Im C_1 = \{0, e\mathbf{e}, 2e\mathbf{e}\}$.

Vamos agora encontrar $F^e(2)$:

Como $g_G^{e,2}$ é tal que

$$\begin{array}{ccc} g_G^{e,2} : & \{g_1, g_2\} \subset G & \rightarrow \mathbb{F}G \\ & g & \rightarrow ege\mathbf{e} \end{array}$$

Claro que $Im g_G^{e,2} = \{0, e\mathbf{e}, eg_2e\mathbf{e}\} \not\subseteq Im C_1$. Portanto $F^e(2) = F(1) + 1 = 2$.

Note que se o intuito é averiguar se o idempotente e é tal que $\dim_{\mathbb{F}_3} e\mathbb{F}_3 G e = 1$, já teríamos uma resposta negativa. pois $F^e(2) = 2 > 1$.

Para calcular $F^e(3)$, temos que $C_2 = f_2^{C_1}$, ou seja,

$$\begin{aligned} f_2^{C_1} : \mathbb{F} \times Im C_1 &\rightarrow \mathbb{F}G \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha e g_2 e e + \beta \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Im f_2^{C_1} &= \{\alpha e g_2 e e + \beta \mid \alpha \in \mathbb{F}_3, \beta \in C_1\} \\ &= \{0 e g_2 e e + \beta, 1 e g_2 e e + \beta, 2 e g_2 e e + \beta \mid \beta \in C_1\} \\ &= \{0 e g_2 e e + 0, 1 e g_2 e e + 0, 2 e g_2 e e + 0, 0 e g_2 e e + e e, \\ &\quad 1 e g_2 e e + e e, 2 e g_2 e e + e e, 0 e g_2 e e + 2 e e, \\ &\quad 1 e g_2 e e + 2 e e, 2 e g_2 e e + 2 e e\} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} Im C_2 &= \{0, e g_2 e e, 2 e g_2 e e, e e, e g_2 e e + e e, 2 e g_2 e e + e e, \\ &\quad 2 e e, e g_2 e e + 2 e e, 2 e g_2 e e + 2 e e\} \end{aligned}$$

Porem, neste caso $Im g_G^{e,3} \subseteq Im C_2$. Logo $F(3) = F(2) = 2$.

Continuando o processo, pode-se verificar que F^e possui o seguinte comportamento:

n	0	1	2	3	4	5	6	...	19	20
$F^e(n)$	0	1	2	2	3	4	4	...	4	4

```

1 ##### ProgTest - Teste Progressivo de Dimensões
2 ##### Recebe: FG, um idempotente e, e opcionalmente uma dimensão
3 ##### retorna a própria dimensão em caso positivo
4 ##### retorna 0 em caso negativo
5 ##### caso não fornecido dim, retorna a dimensão encontrada
6
7 ProgTest := function ( FG, e, dim... )
8 local
9   listatempF, # lista temporária F

```

```

10 listatempS, # lista temporária Somas linear combin.
11 listadecomp,
12 G , # grupo base de FG como lista
13 F, # corpo F em FG como lista
14 dima, # dimensão atual
15 prodg, #produto de prod . Gi. prod
16 dimp, # dimensão procurada
17 j; #contador
18
19 #dipensa do teste para e=0:
20 if e= Zero(FG) then
21     return 0;
22 fi;
23 G:= List(UnderlyingMagma(FG)); # G como lista
24 F := List(LeftActingDomain(FG)); # F como lista
25
26 if Length (dim)=1 then
27     dimp := dim[1];
28 else
29     dimp:= Size(G); # nunca será maior que G
30 fi;
31
32 dima:=0;
33 listatempF:=[]; # lista temporária F
34 listatempS:=[]; # lista temporária Somas linear combin.
35 listadecomp :=[Zero(FG)];
36 j:=1;
37
38 while j <= Size(G) do # inicio do teste de dimensão
39     prodg:=e*G[j]*e;
40     if not(prodg) in listadecomp then
41         dima:=dima+1; # dim atual.
42         Print ("\n dima=", dima, "mas dimp = ", dimp );
43         Print ("\n Teste:", dima > dimp );
44         if dima > dimp then
45             j:=Size(G)+1; #sai do loop;
46             dima :=0;
47             Print ("\n Zerou dima dima = ", dima );
48             return dima;
49         else

```

```

50  #prepara a próxima lista de comparação
51  listatempF:= List ( F, x-> x*e*G[j]*e );
52  listatempS:= List ( listatempF , x-> x+listadecomp );
53  listadecomp := Flat (listatempS); #Carrega lista de comparação.
54  fi;
55  fi;
56
57  j:=j+1;
58  od;
59  return dima;
60  end;

```

2.2.3 Funções de Crivo

Prosseguindo com os elementos fundamentais para a construção de nosso algoritmo, será necessário criarmos algumas funções das quais chamaremos funções de crivo. As funções de crivo exercem exclusivamente o papel de selecionar ou filtrar elementos de um conjunto dadas certas condições. Em geral, denotaremos nossas funções de crivo por C_r^* onde $*$ representará um subtipo de função de crivo. Teremos basicamente três tipos de função de crivo, baseadas em centralizadores, subgrupos (relações de inclusão) e filtro do duplo idempotente, representados respectivamente por $\mathcal{C}$, O_{Gr} , D_{idp} .

Definição 2.7 Seja L um subconjunto de $\mathbb{F}G$ e $x \in \mathbb{F}G$, um elemento qualquer. Definimos a função de crivo com relação ao centralizador $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_{\mathbb{F}G}(x)$, a função $C_r^{\mathcal{C}(x)}$ dada por:

$$C_r^{\mathcal{C}(x)} : L \subset \mathbb{F}G \longrightarrow \mathbb{F}G$$

$$\alpha \longrightarrow \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}G}(x) \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \mathcal{C}_{\mathbb{F}G}(x) \end{cases}$$

Dessa forma, $Im C_r^{\mathcal{C}(x)} \setminus \{0\}$ corresponde aos elementos não nulos de L e comutam com x em $\mathbb{F}G$. Escreveremos apenas $C_r^{\mathcal{C}}$ quando nos referirmos à este tipo de função de crivo independentemente do elemento x .

Em nosso contexto, utilizaremos no lugar do elemento x um idempotente e e no lugar de L uma lista contendo idempotentes previamente calculados. Dessa forma, garantiremos a criação de novos idempotentes através da imagem de $C_r^{\mathcal{C}(e)}$ uma vez que se $l \in L$ é idempotente e $l \in Im C_r^{\mathcal{C}(x)}$, então le também será um idempotente de $\mathbb{F}G$.

O segundo tipo de filtro que nos será útil será uma função extremamente simples porém de extrema utilidade. Dado um idempotente e do tipo $e = (1 - \widehat{H}).e'$, se H é subgrupo de H_2 , então o produto $\widehat{H}_2.e = \widehat{H}_2(1 - \widehat{H}).e' = (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_2\widehat{H}).e' = (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_2).e' = 0$. Dessa forma, o produto $\widehat{H}_2e$ não nos fornece um novo idempotente não nulo, assim, torna-se importante ter controle sobre este caso.

Definição 2.8 Sejam H um subgrupo de G e $SubG$ o conjunto de todos os seus subgrupos. Definimos a função de crivo dada pela relação $\geq$, a função $C_r^{O_{Gr}}$ dada por:

$$\begin{aligned} C_r^{O_{Gr}(H)} : SubG &\longrightarrow \mathbb{N} \\ X &\longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } X \geq H \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, dado um subgrupo X de G , $C_r^{O_{Gr}(H)}(X)$ retorna 1 caso X seja um subgrupo de G que contém H (overgroup) ou 0 caso contrário. Para não sobrecarregar a notação, se H estiver claro no contexto, ou se nos referirmos a esta função sem mencionar H , denotaremos apenas por $C_r^{O_{Gr}}$.

Por fim, apresentamos nossa última função de crivo, a função $C_r^{D_{idp}}$. O rótulo D_{idp} faz menção ao termo duplo idempotente. O propósito deste filtro é, com ele, criar idempotentes à partir de dois outros elementos mantendo a ortogonalidade com demais idempotentes previamente calculados. Seja $b \in \mathbb{F}G$ um idempotente, se $a \in \mathbb{F}G$ é um elemento tal que ab seja idempotente então bab também será idempotente. De fato:

$$\begin{aligned} (bab)^2 &= (bab)(bab) = babbab = \\ &= bab^2ab = babab = b(ab)^2 \\ &= bab \end{aligned}$$

Além disso, se b é ortogonal (à esquerda e à direita) a um terceiro idempotente e' , então o novo idempotente $e = bab$ é tal que

$$\begin{aligned} e.e' &= (bab)e' = (ba)(be') = 0 \\ e'.e &= e'(bab) = (e'b)(ab) = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos um crivo que cumprirá função semelhante ao crivo $C_r^{\mathcal{C}}$ porém livre de algumas condições presentes durante o uso de $C_r^{\mathcal{C}}$. Para criarmos idempotentes novos à partir de $C_r^{\mathcal{C}}$, precisamos partir de uma lista prévia de idempotentes L . Já, para $C_r^{D_{idp}}$ poderemos partir de uma lista L qualquer.

Considerações serão feitas com relação ao uso dessas duas funções.

Definição 2.9 Seja L um subconjunto de $\mathbb{F}G$ e $e \in \mathbb{F}G$, um idempotente. Definimos a função de crivo com relação à dupla idempotência, a função $C_r^{Idp(e)}$ dada por:

$$\begin{aligned} C_r^{Idp(e)} : L \subset \mathbb{F}G &\longrightarrow \mathbb{F}G \\ \alpha &\longrightarrow \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha e \text{ é idempotente} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que L é uma lista de idempotente, a imagem de $C_r^{\mathcal{C}}$ é estável por $C_r^{Idp(e)}$. Ou seja,

$$C_r^{Idp(e)}(C_r^{\mathcal{C}}(L)) = C_r^{\mathcal{C}}(L)$$

Além disso,

$$C_r^{\mathcal{C}(e)}(L) \subset C_r^{Idp(e)}(L)$$

É importante ressaltar que a troca de $C_r^{\mathcal{C}(e)}(L)$ por $C_r^{Idp(e)}(L)$ pode levar a um número maior de famílias de idempotentes. Pode entretanto, haver uma diferença de desempenho.

2.2.4 A Construção de um HatMap

Nossas peças principais para a construção de idempotentes primitivos serão idempotentes dados por *hats*, ou seja, idempotentes do tipo $\widehat{H}$ ou por $(1 - \widehat{H})$ onde H é um subgrupo de G . Definiremos agora o que é um *HatMap*, ou seja, um mapa dado por *hats*, diremos como construí-lo e sua relevância para finalmente exibirmos nosso principal algoritmo de busca por idempotentes.

Considere um conjunto S de idempotentes indexado por $s : \mathbb{Z} \rightarrow S$, com $s_i \stackrel{def}{=} s(i)$

Sejam $\xi^m : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{F}G$ funções que associam a cada endereço $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(\mathbf{e}, m) = \mathcal{M}$ um idempotente de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ definidas por:

$$\begin{aligned} \xi^i : \mathcal{M}(\mathbf{e}, i) &\longrightarrow \mathbb{F}G \\ \mathcal{A} = (k_1, \dots, k_i) &\longrightarrow s_{k_i} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} \xi(k_j) \right) \mathbf{e} \end{aligned}$$

para $1 < i \leq m$ e para $i = 1$ defina $\xi^1(k_1) = s_{k_1} \mathbf{e}$.

Definindo $\mathcal{A}|_j$ como o endereço $\mathcal{A}$ restrito à j -ésima posição, ou seja, se

$\mathcal{A} = [a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m]$, então $\mathcal{A}|_j = [a_1, \dots, a_j]$, e sendo

$$M = \{\mathcal{A}|_j, \text{ com } \mathcal{A} \in \mathcal{M}, 1 \leq j \leq m\}$$

Definimos a função ξ como

$$\begin{array}{ccc} \xi : M & \longrightarrow & \mathbb{F}G\mathbf{e} \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \xi^{m_{\mathcal{A}}}(\mathcal{A}) \end{array}$$

onde $m_{\mathcal{A}}$ corresponde ao comprimento do endereço $\mathcal{A}$. Assim, definidas as funções ξ^m , a função ξ associa um endereço de qualquer tamanho a um idempotente de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$.

Particularmente nos interessará a situação em que $S = \{\widehat{H}, (1 - \widehat{H})\}_{H \in \text{Sub}G}$, neste caso indexaremos S por s da seguinte forma:

$$s(i) = \begin{cases} \widehat{H}_i & \text{se } i > 0 \\ 1 - \widehat{H}_i & \text{se } i < 0 \\ 0 & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

Considere S como definido acima, as funções ξ e s como definidas acima para um $\mathbf{e} \in \mathbb{F}G$, e n tal que $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_q)$. Vamos contruir um mapa de idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ o qual chamaremos de *HatMap*. Ou seja, vamos descrever uma série de idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ utilizando Ξ – endereços $\mathcal{A}$ tais que

$$\begin{array}{ccc} \Xi_i : \mathcal{M}(\mathbf{e}, i) & \longrightarrow & (\mathbb{F}G)^i \\ \mathcal{A} = (k_1, \dots, k_i) & \longrightarrow & (\xi(k_1), \xi(k_1, k_2), \dots, \xi(k_1, \dots, k_i)) \end{array}$$

E da mesma forma, definimos

$$\begin{array}{ccc} \Xi : M & \longrightarrow & (\mathbb{F}G)^i \\ \mathcal{A} = (k_1, \dots, k_i) & \longrightarrow & (\xi(k_1), \xi(k_1, k_2), \dots, \xi(k_1, \dots, k_i)) \end{array}$$

Ou seja, dado um endereço $\mathcal{A}$ de comprimento qualquer i , $\xi(\mathcal{A})$ é um idempotente de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ e $\Xi(\mathcal{A})$ corresponde a uma família de idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ dada por uma i – úpla de $\mathbb{F}G$. Com a função Ξ depende da função ξ , diremos também que $\mathcal{A}$ são ξ – endereços.

A construção de um *HatMap* deve ser feita camada a camada, portanto, vamos trabalhar com um $n' \leq n$ de cada vez. Assim, determinaremos nossos **Layers** $L_{n'}$, ou seja, endereços incompletos de comprimento n' . Consideremos primeiro o mapa

formado por endereços de comprimento 1:

$$\mathcal{M}_S(\mathbf{e}, 1) = \{a_1^{L_1}, \dots, a_i^{L_1} = (k_{i_1}), \dots\}$$

Aqui, L_1 refere-se a Layer 1 e cada $k_{i_1} \in Im(S^{-1})$ é tal que

$$s(k_{i_1}) \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}G}(\mathbf{e}) \cap S = S$$

e

$$\dim_{\mathbb{F}}(s(a_k))\mathbb{F}G(s(a_k))\mathbf{e} = q,$$

com $a_i > a_j$ se $i > j$

Para a construção das demais camadas $L_{n'}$ com $1 < n' < n$, queremos criar mapas de comprimento n' da forma

$$\mathcal{M}_S(\mathbf{e}, n') = \{a_1^{L_{n'}}, \dots, a_i^{L_{n'}} = (k_{i_1}, \dots, k_{i_{n'}}), \dots\}$$

onde cada $a_i^{L_{n'}} = (k_{i_1}, \dots, k_{i_{n'}}) \in Im^{n'}(S^{-1})$, é tal que $\xi(a_i^{L_{n'}-1})$ e $\xi(a_i^{L_{n'}})$ sejam um idempotentes primitivos ortogonais. Para tal, para cada endereço $a_i^{L_{n'}-1}$ toma-se todos os *hats* $s(k_{i_{n'}})$ tais que

$$s(k_{i_{n'}}) \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}G}(\xi(a_i^{L_{n'}-1}))$$

e

$$\dim_{\mathbb{F}} s(k_{i_{n'}}) \xi(a_i^{L_{n'}-1}) \mathbb{F}G s(k_{i_{n'}}) \xi(a_i^{L_{n'}-1}) \mathbf{e} = q$$

Assim, se obtivermos m_o *hats* nessas condições, a adjunção de cada um desses elementos ao final da camada $L_{n'-1}$ de $a_i^{L_{n'}-1}$ nos fornecerá m_o novos endereços de comprimento n' . Ou seja, o crescimento do número de endereços cresce multiplicativamente, o que pode acarretar em sérios problemas computacionais.

Um hatmap $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{e}, n')$ será dito completo se $n' = n$ onde n é tal que $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_{p^k})$. Ou seja, se para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, temos que $\Xi(\mathcal{A}) = (e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{F}G)^n$ corresponde a uma n -úpla formada por idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$. Para a última camada do *HatMap*, ou seja, L_n , há duas formas de preenchê-la.

Podemos preencher seguindo exatamente como nas camadas anteriores, ou podemos simplesmente interromper o processo e adicionar o número 1 na última

camada (ou k , tal que $s^{-1}(k) = 1_{\mathbb{F}G}$), pois o último idempotente está determinado por $n - 1$ idempotentes obtidos. Ou seja, determinados os $n - 1$ idempotentes, o não interrompimento do processo leva a uma série de idempotentes redundantes.

Dado um mapa $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{e}, n)$ completo, obtemos diversas maneiras de escrever famílias completas de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$. Porém, também é possível, para grupos Abelianos, criar *Hatmaps* utilizando $e = 1$ como o faremos em $\mathbb{Q}G$, onde mapas formados majoritariamente por subgrupos normais de G são capazes de descrever os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$ para um número muito significativamente grande de exemplos.

Vale destacar que adiante definiremos outras funções do tipo $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{F}G$ e $\Xi : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{F}G)^n$ e, para distingui-las, as funções que acabamos de definir serão também escritas como $\xi_{\mathfrak{h}}$ e $\Xi_{\mathfrak{h}}$ em referência aos endereços de um *Hatmap*.

Exemplo 2.10 Considere novamente $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ e $G = G_{[27,4]}$, ou seja:

$$G = \langle a, b \mid a^9 = 1, b^3 = 1, ba = a^4b \rangle$$

Sendo

$$\begin{aligned} SubG = [& \langle Id_G \rangle, \langle a^3 \rangle, \langle b \rangle, \\ & \langle a^{-1}ba \rangle, \langle aba^{-1} \rangle, \\ & \langle b, a^3 \rangle, \langle a \rangle, \langle ba, b^{-1}a^{-1} \rangle, \\ & \langle ba^{-1}, b^{-1}a \rangle, \langle a, b \rangle] \end{aligned}$$

Se $\mathbf{e} = (1 - \widehat{H}_2)$, então $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_3(\mathbb{F}_4)$. Como a componente simples é isomorfa a uma componente matricial de ordem 3×3 , queremos um *Hatmap* de comprimento 3. Utilizando $S = \{\widehat{H}_i\}_{H_i \in SubG}$, construímos o seguinte *Hatmap*:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{e}, 3) = & [[3, 4, 1], [3, 4, 5], [3, 5, 1], \\ & [3, 5, 4], [4, 3, 1], [4, 3, 5], \\ & [4, 5, 1], [4, 5, 3], [5, 3, 1], \\ & [5, 3, 4], [5, 4, 1], [5, 4, 3]] \end{aligned}$$

Uma possível representação visual para o *Hatmap* anterior pode ser vista na figura [2.1](#)

Figura 2.1: Representação gráfica de $\mathcal{M}(\mathbf{e}, 3)$ em $\mathbb{F}_2G[27,4]$

Podemos, entretanto, possuir grupos de mesma ordem, tais que sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$, o *Hatmap* seja completamente diferente, conforme o próximo exemplo.

Exemplo 2.11 Considere $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ e $G = G_{[27,3]}$, ou seja:

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ba)^3 = (ba^{-1})^3 = 1 \rangle$$

Sendo

$$\begin{aligned} SubG = [& \langle Id_G \rangle, \langle a(ab)^2b \rangle, \langle a \rangle, \langle b^{-1}ab \rangle, \langle bab^{-1} \rangle, \langle b \rangle, \\ & \langle a^{-1}ba \rangle, \langle aba^{-1} \rangle, \langle ab \rangle, \langle ba \rangle, \langle a^2ba^{-1} \rangle, \langle a^2b \rangle, \\ & \langle aba \rangle, \langle a^3ba^{-1} \rangle, \langle a, bab^{-1} \rangle, \langle b, aba^{-1} \rangle, \\ & \langle ba, b^{-1}a^{-1} \rangle, \langle ba^{-1}, b^{-1}a \rangle, \langle a, b \rangle] \end{aligned}$$

Se $\mathbf{e} = (1 - \widehat{H}_2)$, então $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_3(\mathbb{F}_4)$. Utilizando $S = \{\widehat{H}_i\}_{H_i \in SubG}$,

Construimos o seguinte *Hatmap* :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{e}, 3) = [& [3, 4, 1], [3, 4, 5], [3, 5, 1], [3, 5, 4], \\ & [4, 3, 1], [4, 3, 5], [4, 5, 1], [4, 5, 3], \\ & [5, 3, 1], [5, 3, 4], [5, 4, 1], [5, 4, 3], \\ & [6, 7, 1], [6, 7, 8], [6, 8, 1], [6, 8, 7], \\ & [7, 6, 1], [7, 6, 8], [7, 8, 1], [7, 8, 6], \\ & [8, 6, 1], [8, 6, 7], [8, 7, 1], [8, 7, 6], \\ & [9, 10, 1], [9, 10, 11], [9, 11, 1], \\ & [9, 11, 10], [10, 9, 1], [10, 9, 11], \\ & [10, 11, 1], [10, 11, 9], [11, 9, 1], \\ & [11, 9, 10], [11, 10, 1], [11, 10, 9], \\ & [12, 13, 1], [12, 13, 14], [12, 14, 1], \\ & [12, 14, 13], [13, 12, 1], [13, 12, 14], \\ & [13, 14, 1], [13, 14, 12], [14, 12, 1], \\ & [14, 12, 13], [14, 13, 1], [14, 13, 12]] \end{aligned}$$

Uma possível representação visual para o *Hatmap* anterior pode ser vista na figura [2.2](#)

Figura 2.2: Representação gráfica de $\mathcal{M}(\mathbf{e}, 3)$ em $\mathbb{F}_2G_{[27,3]}$

Sendo $\mathcal{M}_1$ o *Hatmap* obtido no primeiro exemplo, em $\mathbb{F}_2G_{[27,4]}$ e $\mathcal{M}_2$ o *Hatmap* obtido no segundo exemplo, em $\mathbb{F}_2G_{[27,3]}$. É possível verificar que em $\mathcal{M}_2$ existem 4 famílias completamente distintas de idempotentes, 37 famílias distintas e um total de 12 idempotentes primitivos distintos. Além disso, todos esses idempotentes dão origem a códigos lineares com parâmetros $[27,6,6]$.

2.2.5 O Algoritmo Principal

A construção de um *Hatmap* completo pode demandar quantidades enormes de recursos e até mesmo se tornar inviável. Nosso objetivo é obter um endereço $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ sem precisar construí-lo por completo. Para tal, vamos proceder de forma similar à construção de um *HatMap*, porém faremos uso das funções de crivo C_r e das funções de dimensão F^e , peças fundamentais em nosso algoritmo, previamente mencionadas.

Algoritmo 2.12 HatMapXi *Sejam $\mathbb{F}G$ uma álgebra de grupo finita, e sejam Ξ, ξ e s como definidas anteriormente com relação a $S = \{\widehat{H}\}_{H \in SubG}$. Seja $e \in \mathbb{F}G$ um idempotente central primitivo de $\mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}Ge \cong M_n(\mathbb{F}_q)$ com $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}(e) \neq \emptyset$ sejam Ξ — endereços. Dados s_k , uma função de salto, e $N \in \mathbb{N}$ um natural qualquer, então*

$$\text{HatMapXi}(N, e, FG, sk) \in \mathcal{M}(e)$$

Sendo seu algoritmo dado pelo seguinte código fonte

```

1 ##### HAT-Map -Xi
2 ##### Fornece um Hat Address dado n e sk-Skip Function
3 # sk é a função de salto em termos de n.
4 # n é um número para função de salto
5 # e é um idempotente primitivo central
6 # Engine é a função de Arbitragem
7
8 HatMapXi := function (n,e,FG,sk)
9
10 local s, l, lista1, lista2,
11   level,
12 # Local de Layer2Xi
13 nlista,
```

```
14 i,j,k,m, #contadores
15 idemp,
16 pos, #posição dada pelo engine
17 p, # tamanho da sublista de lista.
18 neg, # (1-e1-e2...-en)
19 lista2Xi, #Xi
20 soma, listafin,
21 # local de LayerAnaliseXi
22 list1LAX, #list1 de LayerAnaliseXi
23 hatnumberlist, dim,
24 HatMap; #ResultadoFinal
25
26 s:= Engine(2,[1,e,n,FG]); # recebe os Hats
27 level := Size(sk(n)); # Número de idempotentes esperado
28
29 #Calcula primeira camada
30 l:=0;
31
32 hatnumberlist:=Engine (1,[sk(n)[1],e, list1LAX,FG,0]); # [Camada 1 ,
    dimensão]
33
34 lista2:= hatnumberlist[1];
35 dim:= hatnumberlist[2];
36 l:=l+1;
37
38 ###
39 ##Cálculo Demais Camadas
40
41 while l < level do
42     lista1 := lista2;
43     nlista:= Size(lista1); #comprimento anterior -> Sempre 1 ?
44     lista2:=[]; #Esvazia lista2
45     i:=1;
46     m:= Size(lista1[i]);
47     idemp:= List([1..m+1]); # Abre espaço para receber o prox idemp.
48     idemp[1]:= Zero(FG);
49     soma:=Zero(FG);
50     for k in [2..m+1] do
51         pos:= Engine(3,[1,e,n,FG])( lista1[i][k-1] ) ;
52         idemp[k]:= (One(FG)-soma)*s [pos]* (One(FG)-soma)*e ; #
```

```

        multiplicação bilateral garante ortogonalidade
53     soma:= soma+idemp[k];
54   od;
55   neg:= (One(FG)- soma)*e;
56   list1LAX:=s;
57   hatnumberlist:=Engine ((1),[sk(n)[l],neg, list1LAX,FG,dim])[1] ;
58   lista2Xi:= hatnumberlist ;
59   Add(lista2, Flat ([ lista1,lista2Xi]) );
60   l:=l+1;
61 od;
62 HatMap:=Flat(lista2);
63 return Engine(4,[HatMap, e, s,FG,dim,sk,n]);

```

O algoritmo anterior depende de uma série de informações que são fornecidas através de um núcleo externo chamado de **Engine** neste caso, utilizamos o seguinte código fonte:

```

1 Engine := function (ParametroDeSaida , ListaDeParametros)
2   ### Engine: Controlador da função HatMapXi
3   local Nalvo,
4     IPC, #idempotente central ou idempotente anterior.
5     ListaHats, FG,
6     n,
7     listatempF,listatempS, #Listas
8     prodg,#produto
9     j,i, #contadores
10    neg, #idempotente caso HatMap Falhe
11    ForceList, #Lista Force
12    x,
13    m, #busca o Nalvo
14    prod, #produto
15    defasagem, #num de idempotentes restantes
16    G, SubG, # Grupo e Subgrupos de G
17    F, s, # hats
18    sn2, #hats nivel 2
19    GMap, #GMap
20    MHMap, #Multi Hat Map
21    Sk, #função de Salto
22    listadecomp, #lista de comparação.
23    listTorF, listatemp,
24    dim, # dimensão minimal.

```

```

25  dima, #dimensão atual
26  funcmap, #função map caso parâmetro 3
27  HatMap, # HatMap resultado caso 4
28  MultiHlist, #multihats caso 4
29  e, # idempotente testado
30  Gmap, # Retorna o Gmap em caso de falha no HatMap
31  Idemps; #idempotentes resultantes caso 4
32
33
34  if ParametroDeSaida = 1 then # Núcleo de Engine
35    # retorna para a função principal dados como:
36    # k em  $q=p^k$ 
37    # o elemento da próxima camada.
38
39  FG:= ListaDeParametros[4];
40  G:= List(UnderlyingMagma(ListaDeParametros[4])); # G como lista
41  F := LeftActingDomain(ListaDeParametros[4]);
42  Nalvo:= ListaDeParametros[1];
43  IPC:= ListaDeParametros[2];
44
45  #Entrada da dimensão.
46  if ListaDeParametros[5] = 0 then
47    dim:=Dimension (Center(FG*IPC)); Encontra k em  $p^k$ 
48  else
49    dim := ListaDeParametros[5];
50  fi;
51
52  ListaHats:= ListaDeParametros[3];
53  SubG:= Reversed(Subgroups(UnderlyingMagma(ListaDeParametros[4]))
54    );
55  n:= Size (ListaHats);
56  m:=0;x:=0;i:=1;dima:=0;
57  listatempF:=[]; # lista temporária F
58  listatempS:=[]; # lista temporária Somas linear combin.
59  listadecomp :=[Zero(FG)];
60
61  while m < Nalvo and i<=n do
62    if not( prod = Zero(FG) ) then
63      dima:= ProgTestT (FG, prod ,SubG[i], dim);

```



```

64     if dima = dim and IsIdempotent(prod) then #deixar IdIdempotent
        em subnivel
65         m:=m+1; #achou o m+1-esimo.
66         x:=i;
67     else
68         m:=m+0; #caso em que não seja dim 1
69     fi;
70 fi;
71 i:=i+1;
72 od;
73
74 ### Estudo da saída:
75 if x <> 0 then
76     return [[x]], dim];
77 else
78     return [[ ]],dim];
79 fi;
80 ###
81 ##### Fim do Parametro 1
82 #####
83
84 elif ParametroDeSaida = 2 then # Construtor e Reindexador de Hats
85     #Organiza a progressão em termos do Lattice de G
86     FG:= ListaDeParametros[4];
87     G:= UnderlyingMagma(ListaDeParametros[4]);
88     F := LeftActingDomain(ListaDeParametros[4]);
89
90     s:=Hats( Subgroups(G), FG);;
91     return s;
92     ##
93     ##### Fim do Parâmetro 2
94     #####
95
96 elif ParametroDeSaida = 3 then #Interpretador de Posição
97     funcmap := function(n)
98         return n;
99     end;
100     return funcmap;
101     ##
102     ##### Fim do Parâmetro 3

```

```

103 #####
104 elif ParametroDeSaida = 4 then
105   ## Protocolo de Saída e Verificação
106   ##
107   #No caso 4 ListadeParametros = [ HatMap,e,Hats,FG,dim]
108   HatMap := ListaDeParametros[1];
109   e := ListaDeParametros[2];
110   ListaHats:=ListaDeParametros[3];
111   FG:= ListaDeParametros[4];
112   G:= List(UnderlyingMagma(FG)); # G como lista
113   dim:=ListaDeParametros[5];
114   pi:=ListaDeParametros[6];
115   n:=ListaDeParametros[7];
116
117   ## Função xi minúscula
118   Idemps:= IdByHatAdressSum(HatMap,e,ListaHats,FG);
119   MHMap :=[];
120   if TestIdempFGe (Idemps , e, FG, Size(sk(1)) ) = true then
121     return [HatMap, Idemps, true];
122   else
123     return [HatMap, Idemps, false];
124   fi;
125 fi;
126 ##
127 ##### Fim do Parâmetro 4
128 #####
129 end;

```

Dado um endereço $\mathcal{A}$, devemos conseguir recuperar seus idempotentes primitivos.

A função **IdByHatAdressSum** faz o trabalho das funções ξ aplicadas em $\mathcal{A}$.

```

1 ### Dada um Hat Adress por Soma, retorna os
2 ### idempotentes correspondentes a esse endereço
3
4 IdByHatAdressSum := function ( lista, e, hats, FG)
5 local m,k,idemp,soma;
6
7 m:= Size(lista);
8 idemp:= List([1..m+1]);
9 idemp[1]:= Zero(FG);

```

```

10 soma:=Zero(FG);
11 for k in [2..m+1] do
12   idemp[k]:=(One(FG)-soma)* hats [ lista[k-1] ]* (One(FG)-soma)*e ;
13   soma:= soma+idemp[k];
14 od;
15 Remove (idemp, 1);
16 return idemp;
17 end;

```

Dessa forma, retornando ao nosso exemplo anterior, em $\mathbb{F}_2G_{[27,4]}$, com o mesmo idempotente central $\mathbf{e}$, se tomarmos $s_k(n) = (n, 1, 1)$ então

$$\mathbf{HatMapXi}(1, \mathbf{e}, FG, s_k) = [3, 4, 1]$$

é o endereço da primeira família de $\mathcal{M}(\mathbf{e})$. No caso, é o endereço dos mesmos idempotentes obtidos no exemplo do início do capítulo, obtido pelo Par de Shoda ($< a >, 1_G$) .

Já, se retomarmos ao exemplo em $\mathbb{F}_2G_{[27,4]}$, para o mesmo idempotente utilizado $\mathbf{e}$, e para $s_k(n) = (n, 1, 1)$ temos que

$$\mathbf{HatMapXi}(1, \mathbf{e}, FG, s_k) = [3, 4, 1]$$

$$\mathbf{HatMapXi}(4, \mathbf{e}, FG, s_k) = [6, 7, 1]$$

$$\mathbf{HatMapXi}(7, \mathbf{e}, FG, s_k) = [9, 10, 1]$$

$$\mathbf{HatMapXi}(10, \mathbf{e}, FG, s_k) = [12, 13, 1]$$

São endereços de $\mathcal{M}(\mathbf{e})$ correspondentes a 4 famílias completamente distintas de idempotentes de $\mathbb{F}_2G_{[27,3]}$.

Como mencionado, o algoritmo descrito é extremamente versátil pois seu sucesso depende apenas da disposição do reticulado do grupo com relação ao idempotente central $\mathbf{e}$. Vale ressaltar que há situações em que o *HatMap* como descrito é vazio, caso em que trataremos logo a seguir. Faremos no capítulo de exemplos uma extensa lista de exemplos e análise de situações.

2.3 Uma alternativa computacional

Com o propósito de criar um algoritmo unificado, isto é, que não imponha hipóteses sobre $\mathbb{F}G$ senão sua finitude, precisamos lidar com casos em que Ξ , via **HatMapXi**, retorna um endereço incompleto, ou seja, quando $\mathbb{F}G\mathbf{e} = M_n(\mathbb{F}_q)$, mas $\mathcal{M}(\mathbf{e})$ não possui endereços de comprimento n . Uma enorme vantagem ao fazermos uso de um algoritmo unificado é podermos estudar os idempotentes de diferentes álgebras de grupo sobre o mesmo ponto de vista.

2.3.1 Endereços Complementares

Criaremos agora duas novas funções tais que combinadas, facilitarão o acesso aos idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ por meio de outros tipos de endereços. Chamaremos de $\xi_{\mathfrak{h}}$ nossa função ξ definida anteriormente. Já, as funções $\xi_{\mathfrak{mh}}$ e $\xi_{\mathfrak{f}}$ possuem o propósito de atender demais necessidades.

Caso o número de idempotentes obtido por $\xi_{\mathfrak{h}}$ não seja o esperado, ou seja, se $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_q)$, mas o número de idempotentes ortogonais obtido por $\xi_{\mathfrak{h}}$ for inferior a n , prosseguiremos com a função de redução dimensional $\xi_{\mathfrak{mh}}$, pelo método que chamaremos de **MultiHat** e em seguida aplicaremos a função $\xi_{\mathfrak{f}}$ para de fato encontrar idempotentes pelo método que chamaremos de **Force**.

Para realizar o método, partiremos de um conjunto de n_0 idempotentes e encontraremos cada idempotente restante, um a um, pela sucessiva aplicação de $\xi_{\mathfrak{mh}}$ e $\xi_{\mathfrak{f}}$ respectivamente no conjunto inicial de idempotentes. Assim, uma única aplicação resultará em um conjunto com $n_0 + 1$ idempotentes. Reiniciaremos o processo até encontrar os n idempotentes esperados.

Por fim, o produto final dessa abordagem será um endereço misto, ou seja, um $(\xi_{\mathfrak{h}}, [\xi_{\mathfrak{mh}}, \xi_{\mathfrak{f}}]) - \text{Address}$, ou seja, um endereço que depende das 3 funções $\xi_{\mathfrak{h}}$, $\xi_{\mathfrak{mh}}$ e $\xi_{\mathfrak{f}}$ da forma:

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}, [\mathcal{A}_{\mathfrak{mh}}, \mathcal{A}_{\mathfrak{f}}]_1, \dots, [\mathcal{A}_{\mathfrak{mh}}, \mathcal{A}_{\mathfrak{f}}]_{n-n_0}]$$

Assim como na seção anterior, cada endereço será dependente de uma função de salto $s_k(n)$. Utilizaremos uma única função s_k para todos os endereços visto que a utilização de diferentes funções para diferentes tipos de endereços é equivalente uma única função dada pela justaposição das m-úplas resultantes.

2.3.2 Método da Redução de Dimensão

Seja e um idempotente não primitivo qualquer de $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F})$.

Queremos explorar a existência de elementos da forma

$$\alpha = e.s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_k}e.\mathbf{e}$$

tal que α seja um elemento não nulo de $e\mathbb{F}G\mathbf{e}$ tal que gere um ideal de dimensão inferior que a de $e\mathbb{F}G\mathbf{e}$.

Entretanto, tal tarefa pode ser demasiadamente custosa, visto que há $|\mathcal{S}|^k$ elementos candidatos a um possível α . Por tal motivo as próximas construções visam criar um conjunto de resultados que serão descartados, reduzindo drasticamente a complexidade da tarefa. Devemos para tal, observar algumas situações.

1. O caso em que s_{i_1} e s_{i_2} possuem relação de subgrupo e,
2. O caso em que s_{i_1}, s_{i_2} e s_{i_3} são tais que $s_{i_1}s_{i_3} = 0$ com $[s_{i_1}, s_{i_2}] = 0$
3. O caso em que s_{i_1} e s_{i_2} são tais que $s_{i_1}s_{i_2} = 0$

Se $\alpha = e.s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_k}e.\mathbf{e}$ possuir em seu produto elementos consecutivos como nos casos 1, 2 e 3, então α é nulo ou α é igual a um outro α' com um número de produtos inferior em sua composição. Vamos buscar primeiramente elementos dessa forma formando assim nosso conjunto de descarte.

Considere $\mathbf{a}_E(X) = \{s \in \mathcal{S} \mid sx = 0, \forall x \in X\}$ o conjunto dos hats que se anulam à esquerda, $Est_E(X) = \{s \in \mathcal{S} \mid sx = x, \forall x \in X\}$, hats estáveis à esquerda e $\mathcal{C}_S(X) = \{s \in \mathcal{S} \mid [s, X] = 0\}$, os hats que comutam com todos os elementos de X . Utilizaremos os $\mathbf{a}_E(X)$, $Est_E(X)$ e $\mathcal{C}_S(X)$ para construir conjuntos de remoção à direita $C_{r_i}^D$ dados por

$$C^D r_0 = \{e\}$$

$$C^D r_1 = \mathbf{a}_E(e) \cup Est_E(e)$$

$$C^D r_2 = \left(\mathcal{C}_S(C^D r_1) \cap \mathbf{a}_E(C^D r_0) \right) \cup Est_E(C^D r_1)$$

$\vdots$

$$C^D r_i = \bigcup_{k=1}^{i-1} \left(\left(\bigcap_{j=k}^{i-1} \mathcal{C}_S(C^D r_j) \right) \cap \mathbf{a}_E(C^D r_{k-1}) \right) \cup Est_E(C^D r_{i-1})$$

Considere agora os conjuntos $\mathbf{a}_D(X) = \{s \in \mathcal{S} \mid xs = 0, \forall x \in X\}$ o conjunto dos hats que se anulam à direita de elementos de X , e o conjunto dos hats estáveis à direita, $Est_D(X) = \{s \in \mathcal{S} \mid xs = x, \forall x \in X\}$. De forma semelhante:

$$\begin{aligned}
C^E r_0 &= \{e\} \\
C^E r_1 &= \mathbf{a}_D(e) \cup Est_D(e) \\
C^E r_2 &= \left(\mathcal{C}_S(C^E r_1) \cap \mathbf{a}_D(C^E r_0) \right) \cup Est_D(C^E r_1) \\
&\vdots \\
C^E r_i &= \bigcup_{k=1}^{i-1} \left(\left(\bigcap_{j=k}^{i-1} \mathcal{C}_S(C^E r_j) \right) \cap \mathbf{a}_D(C^E r_{k-1}) \right) \cup Est_D(C^E r_{i-1})
\end{aligned}$$

Os conjuntos $C^D r_i$ e $C^E r_i$ correspondem respectivamente ao conjunto dos hats que serão removidos quando vistos como componentes à esquerda de e e à direita de e , ou então, às camadas de remoção à esquerda e à direita. Seja R_i o conjunto de remoção dado por:

$$R_i = \left(C^E r_i \cup C^D r_{n-i+1} \right), \quad 0 \leq i \leq n$$

Podemos, com cada R_i definir:

Definição 2.13 Definimos a i -ésima camada multihat referente e como sendo as camadas:

$$C_i = \mathcal{S} \setminus R_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

Além disso, definimos as camadas C_0 e C_{n+1} como $C_0 = C_{n+1} = \{e\}$

Dessa forma se $s_{i_k} \in R_i$ então, ou a s_{i_k} retirada de s_{i_k} do produto não altera α , ou s_{i_k} se anula em pelo menos uma das camadas adjacentes (C_{i-1} ou C_{i+1}), ou, no caso em que x comuta com as uma ou mais camadas adjacentes sucessivamente, se anula em alguma delas.

As construções das camadas C como apresentadas dão origem a um algoritmo consideravelmente mais econômico na busca por elementos redutores de dimensão α .

O algoritmo **ShellMaker** é responsável por criar os conjuntos de remoção $C^E r_i$ e $C^D r_i$ e depende de uma segunda função **ComutSL**, cujo código fonte será deixado no apêndice.

```

1 ShellMaker := function (s, C, e, FG, parametro)
2
3 local n, # Size(C)
4 ns, #Size(s)

```

```

5  se, # [ s1,...,sn, e]
6  i, # contador
7  j, # contador
8  k, #contador
9  lista, #lista anterior
10 list1, #recebe ComutSL
11 list2, #Intersection
12 lE, #lista esquerda
13 lrE, # lista a remover esquerda
14 lrD, #lista a remover direita
15 lD, #lista direita
16 lr;#lista de remoção lr = [lE, lD] Lista à direita e à esquerda
17
18 n:= Size(C);ns:= Size(s);
19
20 se := Flat ([s,e]);; #adiciona o idempotente na ultima coordenada.
21
22 ### Captura os que são não nulos
23 ## Criação da camada trivial (idemp) e primeira camada
24
25 if C= [] then
26   list1:= [1..ns];
27   if parametro = -1 then
28     lD:= Positions(List (list1, x-> (s[x] *e <> Zero(FG) and (s[x]*e<>e)
29       ) ) , true);
30     return [Flat([1,lD]), [ns+1]];
31   else
32     lE:= Positions(List (list1, x->( e*s[x] <> Zero(FG) and (s[x]*e<>e) )
33       ), true );
34     return [[ns+1],Flat([1,lE])];
35   fi;
36 fi;
37
38 lD:=[]; lE:=[]; lrD:=[]; lrE:=[];
39 lista:=List ([1..ns]);
40
41 ###
42 ## Demais camadas
43 #
44 if parametro = 1 then
45   for j in [2..n] do

```

```

43   for i in [j..n] do
44       list1:= ComutSL ( s, List (C[i],x-> s[x] ));
45       list2:= Intersection (list1, lista);
46       lista:=list2;
47   od; ### terminaram as intersecções
48   for k in [1..Size(lista)] do
49       if Set( List(C[j-1], x-> se[x])*se[lista[k]] ) = [Zero(FG)] then
50           Add (lrE, lista[k]); # Retira camadas que anulam a anterior
51       fi;
52       if Set( List(C[j-1], x-> se[x])*se[lista[k]] ) = Set(List(C[j-1], x-> se[
53           x])) then
54           Add (lrE, lista[k]); # Retira camadas que estabilizam a anterior
55       fi;
56   od;
57
58 else # caso -1
59   for j in [1..n-1] do
60       for i in [1..j] do
61           list1:= ComutSL ( s, List (C[i],x-> s[x] ));
62           list2:= Intersection (list1, lista);
63           lista:=list2;
64       od; ### terminaram as intersecções
65
66       for k in [1..Size(lista)] do
67           if Set( se[lista[k]]* List(C[j+1], x-> se[x]) ) = [Zero(FG)] then
68               Add (lrD, lista[k]); # Retira camadas que anulam a anterior
69           fi;
70           if Set( se[lista[k]]* List(C[j+1], x-> se[x]) ) = Set(List(C[j+1], x->
71               se[x])) then
72               Add (lrD, lista[k]); # Retira camadas que estabilizam a anterior
73           fi;
74       od;
75   od;
76
77 lrE:=List ([1..ns]);;
78 lrD:=List ([1..ns]);;
79 SubtractSet (lrE, Flat(lrE)); #Remoção de conjuntos
80 SubtractSet (lrD, Flat(lrD)); #Remoção de conjuntos

```



```

81
82 if parametro =1 then
83   return 1E;
84 else
85   return 1D;
86 fi;
87
88 end;

```

Estamos entretanto interessados em idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ ortogonais ao idempotente $e_{sum} = (e_1 + \dots + e_{n_o}) \in \mathbb{F}G\mathbf{e}$. Assim, vamos encontrar um elemento redutor de dimensão utilizando o idempotente

$$e_{neg} = (1 - e_{sum})\mathbf{e} = (1 - (e_1 + \dots + e_{n_o}))\mathbf{e}$$

Neste caso, diremos que um elemento da forma

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - e_{sum}) \cdot s_{C_1} \cdot s_{C_2} \dots s_{C_k} (1 - e_{sum}) \cdot \mathbf{e} \\ &= e_{neg} s_{C_1} \cdot s_{C_2} \dots s_{C_k} e_{neg} \cdot \mathbf{e} \end{aligned}$$

possui endereço **MultiHat** $[i_1, i_2, \dots, i_k]_{mh}$, em que $s_{C_{i_k}} \in S \cap C_i$, ou seja, o conjunto de elementos de S que não foram removidos.

Suponhamos que ao procurar por endereços em $\mathcal{M}(\mathbf{e})$ obtenhamos um endereço incompleto $\mathcal{A}$ de comprimento n_o . Dessa forma, $e_i = \xi_h(\mathcal{A}|_i)$, com $1 \leq i \leq n_o$ são os primeiros n_o idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$. No caso em que $\mathcal{A} = \emptyset$, então $n_o = 0$.

```

1 MultiHatsSS := function (FG, e, dimmin, iterac, m)
2   local n, #tamanho inicial dos hats
3   nit, # número da iteracao
4   s, # Hats básicos
5   sa, # lista a
6   sb, # lista b
7   G,
8   i, # contador
9   j, # contador
10  lasti, # i referente ao último idempotente encontrado
11  mo, #m-ésimo idempotente
12  y, # elemento de FG candidato a idempotente
13  id, #idempotente encontrado
14  adr, #endereço

```

```
15  adr2, #último endereço válido encontrado
16  adrClean, # endereço final sem 1s
17  nzhatsindex, # não-zero Hats index
18  nzhsize, # tamanho de nzhatsindex
19  Preadr, #pre-address
20  rPreadr, # pre-address reverso
21  dimy, #dim y
22  miniindex, # i correspondente a y com dim mínima encontrada
23  miniindexSet, # conjunto de i com dimensões mínimas na ordem
    inversa
24  dimpack, # coletor de dimensões
25  SM, # recebe [lE, lD] de ShellMaker
26  dimpacklast, # armazena dimpack
27  nextcomp, # comparacao das dimensões
28  mbaseorders,
29  C,
30  CompDireita,
31  CompEsquerda,
32  indexcomp, #nível da proxima comparacao
33  nmax; #n da iteração máxima
34
35  G:= UnderlyingMagma(FG);
36  s:= Hats( Subgroups(G), FG);;
37  n:= Size(s);
38  nzhatsindex := Positions(List(s, x-> x<>Zero(FG)), true);
39
40  #Preparação de Parâmetros
41  nit:=1; sa:= s; sb:=[]; i:=0 ; lasti :=0; mo:=0;
42  adr:=[];adr2:=[1];id:=Zero(FG);dimpack:=[];dimpacklast:= [];
43
44  ##### Análise de Camadas
45  ##### Obtendo Camadas:
46  # Camadas tem tamanho iterac + 2
47  # camadas são da forma e.s1'.s2'.... ..s2 . s1. e
48  # em forma de camadas: C = c1'.c2' c3'.. ..... c3 c2 .c1
49  # c'1 e c1 são referentes ao idempotente, serão marcadas com 0.
50
51  C:= [] ; #constrói camada 1 (trivial) e 2
52  CompEsquerda := [];CompDireita :=[];
53
```

```

54 #Primeira e segunda Camada:
55
56 Add(CompEsquerda, ShellMaker (s, C, e, FG,1) );
57 Add(CompDireita, ShellMaker (s, C, e, FG,-1), 1);
58 CompDireita:=CompDireita[1];
59 CompEsquerda:=CompEsquerda[1];
60
61 for i in [2.. iterac] do
62   Add(CompEsquerda, ShellMaker (s, CompEsquerda, e, FG,1) );
63   Add(CompDireita, ShellMaker (s, CompDireita, e, FG,-1), 1); ##
     Insere na ordem inversa
64 od;
65
66 # Retirando o índice do idempotente:
67 Remove (CompEsquerda, 1);
68 Remove (CompDireita, Size(CompDireita));
69
70 # fazendo a sobreposição de camadas
71 for i in [1..iterac] do
72   if Intersection ( CompEsquerda [i] , CompDireita[i] ) <> [] then
73     Add ( C, Intersection ( CompEsquerda [i] , CompDireita[i] ) );
74   else
75     Add ( C, [1] );
76   fi;
77 od;
78
79 # Operando com o conjunto Reindexado
80 nzhs:= Size(nzhatsindex);
81 mbaseorders:= List (C, x-> Size(x));
82 nmax:= Product (mbaseorders);
83
84 miniindex :=[nmax];
85
86 ##### Nextcomp ATIVADO
87 indexcomp:=Size(mbaseorders);
88 nextcomp :=mbaseorders [indexcomp] ;
89
90 # primeira comparação depois que acaba a segunda iteração
91
92 dimpack := [dimmin*iterac^2]; #Dimensão Máxima

```

```
93
94 i:=1; ### i começa em 1 ignorando o produto [1,1...,1];
95 while i <= nmax and mo < m do
96   Preadr:= Vetorize2multibase(i,mbaseorders);
97   adr:= List ([1..iterac], x-> C[x][Preadr[x]]);
98   Print ("\n Pre-Endereco: ", Preadr , " Enderecp: ", adr );
99   y:= e*Product ( adr , x-> s[x] )*e;
100  if y <> Zero(FG) then
101    dimy:= ProgTest(FG, y,dimmin); # Armazena sua Dimensão
102    if dimy <= Minimum (dimpack) then ###
103      Add (dimpack, dimy, 1 ); #armazena lista na ordem inversa
104      Add (miniindex, i, 1);
105    else
106      Add (dimpack, dimy); #joga a dimensão pro final da lista
107    fi;
108    if dimy = dimmin then
109      mo:= mo+1; #encontrado o m-ésimo idempotente (função de
        salto)
110      lasti:= i;
111      id:= y; #último idempotente encontrado
112      adr2:=adr;
113    fi;
114  fi;
115  if i = nextcomp then #verificação de estabilização de dimensão
116    if Set(dimpack) = Set(dimpacklast) then #dimensões estabilizaram
117      i := nmax+1; #sai do loop
118    else
119      dimpacklast:= dimpack;
120      dimpack:=[iterac^2];
121      if indexcomp-1 >0 then
122        nextcomp:=nextcomp*mbaseorders[indexcomp-1];
123      else
124        nextcomp:=nmax;
125      fi;
126    fi;
127  fi;
128 i:=i+1;
129 od;
130
131 if mo = 0 then
```

```

132  # retornará o m-ésimo idempotente de menor dimensão
133  # após estabilização
134
135  miniindexSet := Positions (dimpack, Minimum (dimpack) ) ;
136
137  i:= miniindex [Size(miniindexSet)+1-m];
138
139  Preadr:= Vetorize2multibase(i,mbaseorders);
140  adr2:= List ([1..iterac], x-> C[x][Preadr[x]]);
141
142  adrClean :=[];
143  for i in [1..Size(adr2)] do ## Retirar "1"s:
144      if adr[i] <> 1 then
145          Add (adrClean, adr[i]);
146      fi;
147  od;
148
149  y:= e*Product ( adr2 , x-> s[x] )*e;
150
151  return [y, adrClean,0] ;
152 else
153  adrClean :=[];
154  for i in [1..Size(adr2)] do ## Retirar "1"s:
155      if adr2[i] <> 1 then
156          Add (adrClean, adr[i]);
157      fi;
158  od;
159
160  ## devolve 1 caso todos sejam removidos
161  ## com um idempotente valido.
162  if adrClean =[] then
163      adrClean :=[1];
164  fi;
165  return [y, adrClean,1] ;
166 fi;
167 end;

```

Notemos que o elemento α não necessariamente é um idempotente, mas $e_{neg}.e_{sum} = e_{sum}e_{neg} = 0$ logo,

$$\alpha e_i = e_i \alpha = 0, \forall 1 \leq i \leq n_o$$

Além disso, $\alpha \in \mathbb{F}G\mathbf{e}$ e o ideal $\mathbb{F}G\alpha\mathbf{e} = \mathbb{F}G\alpha$ contém pelo menos um idempotente primitivo ortogonal aos idempotentes $e_1, \dots, e_{n_o}$.

Calculado o elemento α por meio de **MultiHat** precisamos agora da segunda parte do endereço para que, de fato, encontremos idempotentes.

Sabemos que $\{g\}_{g \in G}$ determina uma $\mathbb{F}$ -base para $\mathbb{F}G$ bem como gera qualquer subespaço de $\mathbb{F}G$. Consideremos então a $\mathbb{F}$ -base $\beta_1 = \{g_1, \dots, g_n\}_{g_i \in G}$, ou seja, o mesmo conjunto $\{g\}_{g \in G}$, fixada uma ordem para os elementos de G . Uma vez dado o idempotente e_{neg} e α , vamos estudar os idempotentes do ideal $I = \alpha\mathbb{F}G\alpha$. Suponha $\dim_{\mathbb{F}} I = k$

É evidente que o conjunto dos elemento $\beta_2 = \{b_i = \alpha g_i \alpha \mathbf{e}\}_{g_i \in G}$ é um gerador de M e que $k = \dim_{\mathbb{F}} M \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}G\mathbf{e} < |G|$. Portanto, será necessário reduzir β_2 a uma base de I . O faremos de maneira a minimizar os índices i dos elementos g_i de G , assim definimos β_f como

$$\beta_f = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\} \subset \beta_2$$

onde os índices $i_1, \dots, i_k$ são tais que $i_1 = Id_G$, e para todo índice i_x , i_x é o menor índice tal que $\{b_{i_1}, \dots, b_{i_x}\}$ seja *L.I.* sobre $\mathbb{F}$. O próximo algoritmo retorna duas listas, a primeira a qual chamaremos de *base suja* são os próprios elementos de β_f e a segunda lista a qual chamaremos de *base limpa* corresponde aos elementos g_i do grupo G tais que $\alpha g_i \alpha \in \beta_f$. É importante destacar que os elementos de *base limpa* não formam uma base.

```

1  #####Base Progressiva.
2  ##### Dada uma lista de elementos de G (em geral o G inteiro)
3  ##### e dado um idempotente e retorna um Par [base suja , baselimpa]
4  ##### onde base suja é a base do Ideal eFG e utilizando e[lista]e
5  ##### e base limpa são os elementos da lista (do grupo) que formam
   essa base
6  ##### entra-se com a dimensão para agilizar cálculos
7  ##### Requer: Reduction2FBase.
8
9  ProgGbase:= function (FG, listaG, e, dim)
10 local sublista,
11   i, #contador índice listaG
12   dimo, # dimensão da base atual
13   dimo2; # dimensão após adição de novo elemento calculada
14 dimo:=0;
15 sublista:=[listaG[1]];
16 i:=2;
```

```

17 while dimo < dim do
18   dimo2:=Size(Reduction2FBase(FG, e*(Flat([sublista,listaG[i]])*e)));
19   if dimo2 > dimo then
20     Add(sublista, listaG[i]);
21   fi;
22   dimo:=dimo2;
23   i:=i+1;
24 od;
25 return [e*sublista*e,sublista]; #base suja e base limpa
26 end;

```

Consideremos agora os elementos de $\mathbb{F} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ fixando-se também uma ordem em $\mathbb{F}$.

Agora os elementos de I estão em correspondência com elementos da forma $[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ em $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$, onde $I_1 = \dots = I_k = \{1..s\}$ através de

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] \xleftrightarrow{f_1} \lambda_{\alpha_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{\alpha_k} b_{i_k}$$

Estabelecida agora uma ordem em I (lexicográfica induzida por $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$) diremos que dois elementos x e y de $\mathbb{F}G$ em M são tais que $x < y$ quando seus respectivos correspondentes em $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ satisfizerem a mesma relação.

Por fim, sabemos que em M contabilizamos s^k elementos e portanto $<$ induz uma enumeração dos elementos de I , ou seja, uma bijeção f entre o intervalo de números inteiros $I_{num} = \{1, 2, \dots, s^k\}$ e I

$$I_{num} \xleftrightarrow{f} I$$

Portanto, os idempotentes de I , bem como todo o ideal está em $Imf = I$.

Os ξ -endereços para esta função serão da forma $\mathcal{A} = [A_F, A_G]$ onde A_F e A_G são úplas de mesmo comprimento dadas da seguinte maneira: se

$$e = \sum_{\substack{\lambda_x \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \\ b_{i_x} \in \beta}} \lambda_x b_{i_x}$$

então $A_F = [\dots, \alpha_{\lambda_i}, \dots]$ e $A_G = [\dots, i_x, \dots]$. Ou seja, A_F corresponde a $f^{-1}(e) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, eliminando-se os coeficientes correspondentes aos elementos nulos de $\mathbb{F}$, já A_G , corresponde ao índice do suporte de e em β_2 .

Sejam $(e_1^I, e_2^I, \dots, e_l^I)$ os idempotentes de I tais que

$$e_1^I < e_2^I < \dots < e_l^I$$

e seja $m \in \mathbb{N}$.

Diremos que $\xi_\alpha^f(m) = \mathcal{A}_{e_m}$ se $1 \leq m < l$ e $\xi_e^f(m) = \mathcal{A}_{e_l}$ caso $m \geq l$.

O algoritmo **ForceMidp** é a implementação direta do exposto e encontra o endereço do m -ésimo idempotente do tipo f para α .

```

1 #####
2 ##### Force m-ésimo idempodente
3 ## Retorna o idempotente e sua escrita em base limpa
   respectivamente
4 ## Retorna: [idemp ,idemp limpo ,coord,baselimpa, G-Map];
5 ## onde G-Map é uma lista do tipo [ [F1,G1], [F2,G2] ...]
6 ## dim é a dimensão do submódulo
7 ## dimmin é a dimensão minimal referente ao idempotente sobre F.
8
9 ForceMidp:= function (FG, listaG, eforce, dim, m, dimmin)
10
11 local mo, #contador de idempotentes
12 n, #tamanho do submódulo
13 basesuja,
14 baselimpa,
15 yforce, # elemento do submódulo
16 ycforce, # y clean
17 l, #lista com xc e coord
18 coord,
19 posits,
20 positsn1, #posições nao 1 em F. (elimina os Zeros)
21 GMap, # G Mapa Limpo, ie sem coordenadas nulas
22 dimh, #julgamento da dimensão pelo DimHate
23 iforce; # contador
24
25 mo:=0;
26
27 iforce:=0;
28 yforce:=false;
29 ycforce:=false;
30

```



```

31 basesuja:= ProgGbase (FG, listaG, eforce, dim)[1];
32 baselimpa:= ProgGbase (FG, listaG, eforce, dim)[2];
33 n := Size(LeftActingDomain(FG))^Size(basesuja);
34
35 while mo < m and iforce <= n do #n pois a unidade foi descartada e
    será repostada no final.
36   iforce:=iforce+1;
37   yforce:= Vetorize2Fbase (iforce, FG,basesuja)[1];
38   BPrint ("\n Calculando yforce com iforce=", iforce, " de ", n);
39   if (yforce^2=yforce) and (yforce <> Zero(FG)) then
40     ### Julgar a dimensão.
41     Print ("\n Analisando iforce=", iforce, " de ", n);
42     dimh:= DimHate (FG, yforce, [One(FG)])[1];
43     Print ("\n Dimensao dimh=", dimh);
44     if dimh = dimmin then
45       mo:=mo+1;
46     fi;
47   fi;
48 od;
49
50 if mo= m then
51   l:=Vetorize2Fbase (iforce, FG,baselimpa);
52   ycforce:= l[1];
53   coord:=l[2];
54 fi;
55 posits:= List(baselimpa, x->Position (listaG,x));
56
57 positsn1 := Positions (List (coord, x-> x<> 1), true);
58 GMap:= List (positsn1, x-> [ coord[x], posits[x] ] );
59
60
61 return [yforce,ycforce,coord,baselimpa, GMap];
62 end;

```

2.4 Um Conjunto Completo de Idempotentes Primitivos em FG

Consideradas todas as construções feitas na seção anterior, vamos finalmente descrever em termos dos endereços ξ_* um conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$. O algoritmo completo, apenas amarra os algoritmos induzidos pelas funções anteriores. A função $\xi_{f, m\mathfrak{h}, \mathfrak{h}}^{s_k, \mathbf{e}} = \xi_f^{s_k} \circ \xi_{m\mathfrak{h}}^{s_k, \mathbf{e}} \circ \xi_{\mathfrak{h}}^{s_k, \mathbf{e}}$, dada pela aplicação sucessiva das funções $\xi_{\mathfrak{h}}$, $\xi_{m\mathfrak{h}}$ e ξ_f associa a cada $m \in \mathbb{N}$ um endereço composto da forma $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}, \mathcal{A}_{\text{misto}-1}, \dots, \mathcal{A}_{\text{misto}-k}]$, ou seja, um endereço $\mathfrak{h}$ do tipo *hat* de comprimento n_o referente aos n_o primeiros idempotentes de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$ e mais $k = n - n_o$ idempotentes do tipo $\mathcal{A}_{\text{misto}} = [A_{m\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{f}}]$ (necessariamente nessa ordem). No caso em que $\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}$ possuir comprimento n , ou seja, se $k = 0$ então não haverão endereços mistos, nesse caso, diremos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathfrak{h}}$ é do tipo $\mathfrak{h}$, ou seja *hat – puro*, caso contrário será um endereço *composto*.

Os endereços do tipo $\mathfrak{h}$ mostram-se extremamente relacionados com a disposição dos subgrupos no reticulado de G , como por exemplo no caso de $\mathbb{F}_2G_{[27,3]}$ e $\mathbb{F}_2G_{[27,4]}$, onde uma diferença na quantidade de subgrupos e na posição propicia dos subgrupos de $G_{[27,3]}$ permite um maior número de idempotentes distintos descritos por *hats*. As álgebras de grupo $\mathbb{F}G$ cujas componentes são todas descritas por endereços $\mathfrak{h}$ mostram-se abundantes e sua determinação permite estudar tais idempotentes sobre outro ponto de vista. Grupos com um demasiado número subgrupos normais, e.g. Hamiltonianos, podem levar à necessidade de prosseguir para os endereços mistos, tais endereços podem demandar um maior recurso computacional. Por outro lado, com pequenas adaptações é possível utilizar a **HatMapXi** de forma que a fazer uma leitura e reconhecimento de endereços de famílias completas Idempotentes Centrais Primitivos por meio de endereços $\mathfrak{h}$. Caso em que pode ser demasiadamente interessante. Tal abordagem será discutida posteriormente.

Corolário 2.14 *Seja $\mathbf{e}$ um idempotente primitivo de $\mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_{p^k})$ e seja $S = \{\widehat{H}\}_{H \leq G}$ com função de indexação $s(i) = s_i \in S$ e s_k a função de salto. Seja m tal que $\xi_{\mathbf{e}}^{s_k}(m) = [\mathcal{A}_{\mathfrak{h}}] = [i_1, i_2, \dots, i_n]$. Então os idempotentes primitivos de $e_1, \dots, e_n$ associados a m são da forma*

$$\begin{aligned} e_j &= \sum_{r=1}^j \left((-1)^{r+1} \sum_{j \geq k_1 \geq \dots \geq k_r} s_{i_j} \prod_{l=1}^r s_{k_l} \right) \mathbf{e}, \quad j = 1..n \\ &= s_{i_j} \Pi_l^{j-1} (1 - e_l) \mathbf{e} \end{aligned}$$

As construções dependem basicamente de três informações previamente calculadas, em primeiro lugar, depende de um idempotente primitivo central $\mathbf{e}$, além

disso, depende implicitamente da dimensão da componente simples associada bem como sua dimensão de seu centro sobre $\mathbb{F}$, ou seja, depende de n e k tais que $\mathbb{F}G\mathbf{e} \cong M_n(\mathbb{F}_{p^k})$. Assim, para iniciarmos o processo, a terna $(\mathbf{e}, n, k)$ deve ser previamente estipulada, mesmo antes de escolhermos uma função de salto s_k . Caso tais números não sejam fornecidos, eles são calculados automaticamente pelo **Engine** principal. Caso não seja escolhida uma função de salto, o **Engine** utiliza a função de salto padrão, isto é $s_k(n) = (n, 1, \dots, 1)$ cujo comprimento é o mesmo que o número de idempotentes esperados.

Como mencionado no capítulo anterior, optamos majoritariamente pelo método dos Pares de Shoda visto que dado um par forte de Shoda (H, K) de G , a terna $(\mathbf{e}, n, k)$ é imediatamente obtida facilitando a entrada e obtendo um ganho de tempo considerável para o algoritmo.

Entretanto, nosso método não é restrito a grupos fortemente monomiais nem mesmo à semissimplicidade de $\mathbb{F}G$, visto que os idempotentes centrais primitivos podem alternativamente ser obtidos pelo método da tabela de caracteres via **PrimitiveCentralIdempotentsByCharacterTable** presente no pacote *Wedderga* [4], ao custo computacional extra para a determinação dos números n e k . Já, para o caso não semissimples, pode-se determinar os idempotentes centrais primitivos pelo método da função de competição como será descrita adiante.

Outra vantagem que será abordada é a própria descrição de ε por (H, K) , ambos subgrupos de G . Para o caso em que se opte por S como o conjunto dos subgrupos de G , a função de indexação s_i também pode ser utilizada para atribuir ao par (H, K) seu respectivo endereço, ou seja $(H, K) = (s_{i_H}, s_{i_K})$.

Exemplo 2.15 Consideremos o exemplo de $G_{[32,50]} \cong (C_2 \times Q_8) \rtimes C_2$ em $\mathbb{F}_3$ temos que

$$\mathbb{F}_3 G \cong 16\mathbb{F}_3 \oplus M_4(\mathbb{F}_3)$$

neste caso, para $e = (1 - \widehat{G'})$ temos **HatMapXi** o seguinte endereço:

$$\mathcal{A} = [[[3], [3, 1], [2, 5], [2, 11]]], [[3], [[2, 1]]], [[1], [[3, 1], [2, 5], [2, 11]]], 1]$$

Ou seja, neste caso, não há endereços do tipo **h**, mas todos do tipo **misto** com exceção do último endereço, sendo

$$\mathcal{A}_{\text{misto}-1} = [[3], [3, 1], [2, 5], [2, 11]]$$

$$\mathcal{A}_{misto-2} = [[3], [[2, 1]]]$$

$$\mathcal{A}_{misto-3} = [[1], [[3, 1], [2, 5], [2, 11]]]$$

$$\mathcal{A}_h = [1]$$

Ou seja, o primeiro idempotente é calculado por:

$$e_1 = \xi(\mathcal{A}_{misto-1}) = \widehat{H}_3(2g_1 + g_5 + g_{11})\widehat{H}_3\mathbf{e}$$

pois possui coordenada multihat $A_{\mathfrak{m}\mathfrak{h}} = [3]$ e $A_{\mathfrak{f}} = [[3, 1], [2, 5], [2, 11]]$, onde os elementos de $\mathbb{F}_3$ estão em bijeção com os elementos de $[1, 2, 3]$, ou seja, o número 1 corresponde ao elemento $0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$, 2 corresponde a $1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ e 3 a $2_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$. Tal indexação também nos permite trabalhar com corpos do tipo $\mathbb{F}_{p^k}$. Para $\mathcal{A}_{misto-2}$, temos

$$\begin{aligned} e_2 &= \xi(\mathcal{A}_{misto-2}) = (1 - e_1)\widehat{H}_3(g_1)\widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e} \\ &= (1 - e_1)\widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e} \end{aligned}$$

e, como $g_5, g_{11} \in \mathcal{C}_G(e_3)$, $\widehat{H}_3$ comuta com $(1 - e_1)$, logo

$$e_2 = \widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e}$$

Já, para e_3 :

$$\begin{aligned} e_3 &= \xi(\mathcal{A}_{misto-3}) = (1 - e_1 - e_2)\widehat{H}_1(2g_1 + g_5 + g_{11})\widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2)\mathbf{e} \\ &= (2g_1 + g_5 + g_{11})(1 - e_1 - e_2)\mathbf{e} \end{aligned}$$

pois, novamente, temos um produto de idempotentes e_1 e e_2 que comutam com $(2g_1 + g_5 + g_{11})$

Por fim, e_4 possui endereço $[1]$, ou seja,

$$\begin{aligned} e_4 &= (1 - e_1 - e_2 - e_3)\widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2 - e_3)\mathbf{e} \\ &= (1 - e_1 - e_2 - e_3)\mathbf{e} \end{aligned}$$

Exemplo 2.16 Tomando $G_{[8,4]} \cong Q_8$, ainda em $\mathbb{F}_3$, temos $\mathbb{F}_3G \cong 4\mathbb{F}_3 \oplus M_2(\mathbb{F}_3)$.

Sendo $\mathbf{e} = 1 - \widehat{G'}$, temos via **HatMapXi**

$$\mathcal{A} = [[[1], [[3, 1], [2, 3], [2, 5]]], 1]$$

Ou seja

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi(\mathcal{A}_{misto-1}) = \widehat{H}_1(2g_1 + g_3 + g_5)\widehat{H}_1\mathbf{e} \\ &= (2g_1 + g_3 + g_5)\mathbf{e} \end{aligned}$$

já $e_2 = \xi([1]) = (1 - e_1)\mathbf{e}$.

Neste caso, ambos os idempotentes geram códigos $[8, 2, 6]$ sobre $\mathbb{F}_3$. Tal código corresponde a um **Código Ótimo** de acordo com [7]

Vemos uma descrição breve a seguir dos 10 primeiros grupos tais que $\mathbb{F}_3G$ seja não Abelianos. Na ordem: identificação do grupo, Estrutura, dimensão das componentes de Wedderburn, respectiva classificação dos idempotentes obtidos por endereços do tipo **h**, ou seja endereço *Hat* puro (**H**), ou apresentando um endereço composto, ou seja, idempotentes descritos com pelo menos um endereço do tipo **misto** (**M**)

$[8, 3], D_8, 1, [2], [H],$	$[16, 13], (C_4 \times C_2) \rtimes C_2, 1, [2], [H],$
$[8, 4], Q_8, 1, [2], [M],$	$[20, 1], C_5 \rtimes C_4, 2, [2, 2], [H, M],$
$[10, 1], D_{10}, 1, [2], [H],$	$[20, 3], C_5 \rtimes C_4, 1, [4], [H],$
$[14, 1], D_{14}, 1, [2], [H],$	$[20, 4], D_{20}, 2, [2, 2], [H, H],$
$[16, 3], (C_4 \times C_2) \rtimes C_2, 2, [2, 2], [H, H],$	$[22, 1], D_{22}, 1, [2], [H],$
$[16, 4], C_4 \rtimes C_4, 2, [2, 2], [M, H],$	$[26, 1], D_{26}, 2, [2, 2], [H, H],$
$[16, 6], C_8 \rtimes C_2, 1, [2], [H],$	$[28, 1], C_7 \rtimes C_4, 2, [2, 2], [H, M],$
$[16, 7], D_{16}, 2, [2, 2], [H, H],$	$[28, 3], D_{28}, 2, [2, 2], [H, H],$
$[16, 8], QD_{16}, 3, [2, 2, 2], [H, H, H],$	$[32, 2], (C_4 \times C_2) \rtimes C_4, 4, [2, 2, 2, 2], [H, H, M, H],$
$[16, 9], Q_{16}, 2, [2, 2], [H, M],$	$[32, 4], C_8 \rtimes C_4, 2, [2, 2], [H, H],$
$[16, 11], C_2 \times D_8, 2, [2, 2], [H, H],$	$[32, 5], (C_8 \times C_2) \rtimes C_2, 3, [2, 2, 2], [H, H, H],$
$[16, 12], C_2 \times Q_8, 2, [2, 2], [M, M],$	$[32, 6], (C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4, 3, [2, 2, 4], [H, H, H],$

Ou seja, vemos que se $G \cong C_2 \times D_8$ então $\mathbb{F}_3G$ possui 2 componentes simples 2×2 e ambas possuem um endereço **h** de comprimento 2. Uma análise em torno de todas as componentes de $\mathbb{F}_3G$ para álgebras de grupo finitas, semissimples e não Abelianas, para G com ordem inferior a 200, excluindo-se grupos de ordem 2^7 mostra uma relação de 3208 componentes marcadas como **H** e 713 marcadas como **M**.

Seguem outros exemplos interessantes:

[196, 8], $(C_7 \times C_7) \rtimes C_4$, 4, [4, 4, 4, 4], [H, H, H, H],
 [200, 40], $(C_5 \times C_5) \rtimes C_8$, 3, [8, 8, 8], [H, H, H],
 [200, 41], $D_{10} \times (C_5 \rtimes C_4)$, 7, [2, 2, 4, 2, 2, 4, 8], [H, H, H, H, H, H, H].

Tais grupos são exemplos de álgebras de grupo com diversas componentes de Wedderburn grande e todos os idempotentes primitivos de cada uma das coordenadas descritos completamente por endereços do tipo $\mathfrak{h}$.

Capítulo 3

Idempotentes em Álgebras de Grupo Não Semissimples

Vamos agora utilizar nossos recursos para explorar exemplos em álgebras de grupo não semissimples. Porém, ao lidarmos com álgebras de grupo por um viés algorítmico-computacional, certas abordagens e certas classes de álgebras tornam-se viáveis de serem estudadas, entretanto o tamanho de $\mathbb{F}G$ cresce de forma não linear em relação à ordem de G . Devemos portanto estar atentos à essa peculiaridade, sempre procurando minimizar a quantidade de recurso gasto.

Nossos algoritmos principais dependem basicamente da pré-existência de idempotentes centrais primitivos bem como da estrutura conhecida de suas componentes de Wedderburn. Já, quando $\mathbb{F}G$ não é semissimples não dispomos de tais informações.

Uma boa estratégia para lidar com o caso não semissimples, é buscar previamente por idempotentes centrais quaisquer e fazer cisões na álgebra, quebrando-a em somas de ideais de dimensões menores. Em seguida realizamos uma busca em uma base de seu centro $\mathcal{Z}(\mathbb{F}G)$ por idempotentes, e, em posse de uma *lista suja* de idempotentes centrais, ou seja, uma lista que possui idempotentes primitivos e somas de primitivos, decidiremos quais, de fato, são os primitivos.

3.0.1 A Função de Competição

Dentro de nossa abordagem é possível determinar todos os idempotentes de um anel de grupo finito $\mathbb{F}G$. Entretanto, o método pode ser demasiadamente custoso. Apesar disso, quando o objetivo é o de obter os idempotentes centrais (primitivos ou não) de $\mathbb{F}G$, uma alternativa relativamente viável, é examinar diretamente os

idempotentes no centro de $\mathbb{F}G$, e, à partir daí, encontrar os idempotentes centrais primitivos.

Definição 3.1 Seja E um subconjunto de idempotentes centrais de $\mathbb{F}G$ e seja $c: E \times E \rightarrow \mathbb{F}G$ a função dada por:

$$c(e_1, e_2) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } e_1 \cdot e_2 = e_1 \text{ ou } e_1 \cdot e_2 = 0 \\ e_1 & \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Chamaremos c de função de competição.

Ou seja, assim como definida, a função de competição possui o papel de exibir idempotentes não primitivos por sua imagem. Sua implementação consiste na função $C(e_1, e_2, FG)$ a seguir:

```

1 ### Função de Competição
2 C:= function (e1,e2,FG)
3   if e1*e2 = Zero(FG) or e1*e2==e1 then
4     return Zero(FG);
5   else
6     return e1;
7   fi;
8 end;
```

Proposição 3.2 Seja $\mathbb{F}G$ álgebra de grupo finita, e $E = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ um subconjunto de idempotentes centrais não triviais que contém todos os os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$. Seja $E_1 = E$ e

$$E_{i+1} = E_i \setminus \text{Im } c(e_i, E_i), \quad i \geq 1$$

Então existe algum m , $m \leq n + 1$ tal que

$$\mathfrak{C} \stackrel{\text{def}}{=} E_m$$

corresponde aos idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$.

Demonstração: É claro que a proposição decorre do fato de que $e \in c(e, E)$ se, e somente se, e não é um idempotente central primitivo. Primeiramente, notemos que se e for de fato um idempotente central primitivo $c(e, E) = 0$, assim, os idempotentes primitivos ficam preservados por cada iteração de E_i , ou seja E_{n+1}

contém todos os idempotentes primitivos. Além disso, suponha $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n_1}}$, sejam os n_1 idempotentes centrais primitivos, então as multiplicações $ee_{i'}$, $1 \leq i' \leq n_1$ serão todas avaliadas. Se e não é um idempotente primitivo, então existe pelo menos algum e_{j_o} , idempotente central primitivo, em E tal que $c(e, e_{j_o}) = e$, logo, e será removido na próxima iteração, isto é, seja k , tal que $e_k \in E$, não seja um idempotente primitivo, $c(e_k, e_{i_o}) = e_k \in c(e_k, E_k)$ logo, $E_{k+1} = E_k \setminus c(e_k, E_k)$ e portanto, $e_k \notin E_{k+1}$. Seja n_2 o número de idempotentes centrais não primitivos em E , então para todo $n' > n_1 + n_2 = n$, segue que $E_{n'} = \{e_1, \dots, e_{n_1}\}$, logo, existe algum inteiro $m \leq n_1 + n_2 + 1 = n + 1$ tal que E_m corresponde aos idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$.

□

Dessa forma, o conjunto $\mathfrak{C}$ pode ser encontrado por meio do algoritmo **Challenge**

```

1 ##### Recebe uma lista de idempotentes centrais contendo os
   primitivos
2 ##### retorna os primitivos
3
4 Challenge := function (E, FG)
5 # Requer a função de competição
6 local Imc, # Imagem da função de competição
7   Ei, # conjuntos Ei
8   result, #resultado confronto
9   i,j; # índices
10
11 Ei := E; # Carrega E1
12
13 for i in [1..Size(E)] do # c (ei , ej)
14   Imc := []; # esvazia imagem de c
15   for j in [1..Size(Ei)] do
16     Add (Imc, C ( E[i] , Ei[j],FG ) );
17   od;
18   Ei:= Filtered ( Ei, x-> not (x in Imc) ); # Carrega E_(i+1)
19 od; # Ei sai com índice n +1;
20
21 return Ei;
22 end;
```

Porém, para obtermos os idempotentes centrais primitivos devemos assegurar que a lista E os contenha antes de aplicarmos **Challenge**. Assim, vamos quebrar $\mathbb{F}G$ previamente em somas de ideais menores buscando primeiramente por idem-

potentes centrais quaisquer. Em seguida, vamos reduzir esses ideais a uma base de seu centro, onde faremos nossa busca.

Assim, considerando o conjunto $N_{\mathfrak{h}} = \{\widehat{N}_i, N \text{ subgrupo normal de } G\}_{\widehat{N}_i \neq 0}$ em $\mathbb{F}G$, caso não seja vazio, obtemos os primeiros idempotentes centrais. Seja $\{C_i\}_{i \in I}$ o conjunto das classes de conjugação de G e $\gamma_i = \hat{C}_i = \sum_{x \in C_i} x$ suas respectivas somas de classes em $\mathbb{F}G$. Então, é sempre possível tomar uma potência b de γ_i de forma que γ_i^b seja idempotente. De fato, seja $\gamma = \sum_{g \in C_o} g^{-1}ag$ uma soma de classe, em termos de um representante a de uma classe C , e C_o o conjunto dos elementos de G que formam a classe C por conjugação em a . Sendo $\text{char}(F) = p$ e $o(a) = p^k m$ a ordem de a onde $p \nmid m$, temos que $p^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. Assim

$$\begin{aligned} \gamma^{p^{\phi(m)+k}} &= \sum_{g \in C_o} g^{-1} a^{p^{\phi(m)+k}} g \\ &= \sum_{g \in C_o} g^{-1} a^{p^k} g \end{aligned}$$

No entanto, quando obtemos elementos α de $\mathbb{F}G$ tais que $\alpha^m = \alpha$ para algum $m \in \mathbb{Z}$, $m > 2$, temos que α^{m-1} é idempotente

$$\begin{aligned} (\alpha^{m-1})^2 &= \alpha^{2m-2} = \alpha^m \alpha^{m-2} \\ &= \alpha \alpha^{m-2} = \alpha^{m-1} \end{aligned}$$

assim, temos que

$$\begin{aligned} (\gamma^{p^{\phi(m)+k}})^{p^{\phi(m)}} &= \sum_{g \in C_o} g^{-1} (a^{p^k})^{p^{\phi(m)}} g = \sum_{g \in C_o} g^{-1} (a^{p^{\phi(m)}})^{p^k} g \\ &= \sum_{g \in C_o} g^{-1} a^{p^k} g = \gamma^{p^{\phi(m)+k}} \end{aligned}$$

Logo, tomando $\alpha = \gamma^{p^{\phi(m)+k}}$ e $m = p^{\phi(m)}$, segue que $\alpha^{m-1} = \gamma^{(p^{2\phi(m)+k} - p^{\phi(m)+k})}$ é idempotente. Ou seja, é sempre possível encontrar $b \leq (p^{2\phi(m)+k} - p^{\phi(m)+k})$ tal que γ^b é um idempotente.

Caso γ_i^b seja não trivial, obtemos outros idempotentes centrais assim, seja $\{\gamma_i^{b_i}\}_{I_2}$ o conjunto de tais idempotentes. Se $E_o = N_{\mathfrak{h}} \cup \{\gamma_i^{b_i}\}_{I_2}$ obtemos um conjunto de idempotentes centrais de $\mathbb{F}G$ tais que para cada x_i tenhamos

$$1 = x_i + (1 - x_i)$$

a unidade escrita como soma de idempotentes centrais ortogonais. E portanto, para x_i e x_j em E_o ,

$$\begin{aligned} 1 &= 1.1 = (x_i + (1 - x_i))(x_j + (1 - x_j)) \\ &= x_i x_j + x_i(1 - x_j) + (1 - x_i)x_j + (1 - x_i)(1 - x_j) \end{aligned}$$

Assim, os termos não nulos da última soma são também idempotentes centrais dois a dois ortogonais tais que sua soma é 1. Efetuando esses produtos para cada um dos elementos de E_o , e coletando todos os termos não nulos, obtemos um segundo conjunto de produtos P de idempotentes centrais, dois a dois ortogonais tais que

$$\sum_{e \in P} e = 1$$

Se o conjunto formado pelas somas de classes $\{\gamma_i\}$ formam uma base para $\mathcal{Z}(\mathbb{F}G)$ então, para cada elemento e de P , podemos reduzir $\{\gamma_i e\}$ a uma base de $\mathcal{Z}(\mathbb{F}Ge)$.

Aplicando um método similar ao que retorna os endereços do tipo f em cada uma das bases $\{\gamma_i e\}$, podemos utilizar uma função de crivo C_r que captura os idempotentes de $\mathbb{F}Ge$. Assim, determinamos um conjunto de idempotentes centrais E de $\mathbb{F}G$ tal que E contenha os idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G$.

Podemos agora obter o conjunto $\mathfrak{C}$ obtido por sucessivas aplicações da função de competição. O método descrito traduz-se no algoritmo **PCIbySOCI**(FG), em referência a Primitive Central Idempotents By Some Orthogonal Central Idempotents. O algoritmo descrito depende de funções **SOCI**(FG), **Reduction2FBase** e **HunterEngine**, presentes no último capítulo, além da função **Challenge**, já apresentada.

```

1 PCIbySOCI := function (FG)
2   local F,G,
3   e, # idempotentes por SOCI (FG)
4   i, #contador
5   localidemps, #idempotentes de cada FGe
6   y, #somas de classes
7   base,
8   listafin;
9
10  G := UnderlyingMagma(FG);
```

```

11 F := LeftActingDomain(FG);
12 localidemp := [];
13 listafin := [];
14 e := SOCI(FG);
15 y := Y(FG);
16
17 for i in [1..Size(e)] do
18   base := Reduction2FBase (FG, e[i]*y);
19   localidemp := Set(HunterEngine (1, 1, 5000, FG, base, FG, "x^2-x",
20     0, 0, 0));
21   RemoveSet(localidemp, Zero(FG));
22   Add(listafin , localidemp);
23   localidemp := [];
24 od;
25 return Challenge (Flat(listafin), FG);
26 end;

```

Em $\mathbb{F}_2 S_5$, obtemos dois únicos idempotentes centrais primitivos e_1 e e_2 tais que

$$\begin{aligned}
 e_1 = & 1 + (3,4,5) + (3,5,4) + (2,3,4) + (2,3,5) + (2,4,3) + (2,4,5) + (2,5,3) + (2,5,4) + \\
 & (1,2,3) + (1,2,3,4,5) + (1,2,3,5,4) + (1,2,4,5,3) + (1,2,4) + (1,2,4,3,5) + (1,2,5,4,3) + \\
 & (1,2,5) + (1,2,5,3,4) + (1,3,2) + (1,3,4,5,2) + (1,3,5,4,2) + (1,3,4) + (1,3,5) + (1,3,2,4,5) + \\
 & (1,3,5,2,4) + (1,3,2,5,4) + (1,3,4,2,5) + (1,4,5,3,2) + (1,4,2) + (1,4,3,5,2) + (1,4,3) + \\
 & (1,4,5) + (1,4,5,2,3) + (1,4,2,3,5) + (1,4,2,5,3) + (1,4,3,2,5) + (1,5,4,3,2) + (1,5,2) + \\
 & (1,5,3,4,2) + (1,5,3) + (1,5,4) + (1,5,4,2,3) + (1,5,2,3,4) + (1,5,2,4,3) + (1,5,3,2,4)
 \end{aligned}$$

$$e_2 = 1 - e_1.$$

Já, em $\mathbb{F}_2 D_{18}$, com D_{18} dado por

$$D_{18} = \langle f_1, f_2, f_3 \mid f_1^2 = f_3^3 = (f_1 f_2^{-1})^2 = f_2^2 f_3^{-1} f_2 = 1 \rangle$$

obtemos três idempotentes e_1, e_2 e e_3 tais que

$$e_1 = 1 + f_2 + f_3 + f_2^2 + f_2 f_3 + f_3^2 + f_2^2 f_3 + f_2 f_3^2 + f_2^2 f_3^2$$

$$e_2 = f_2 + f_2^2 + f_2 f_3 + f_2^2 f_3 + f_2 f_3^2 + f_2^2 f_3^2$$

$$e_3 = 1 - e_1 - e_2$$

Para uma álgebra de grupo não semissimples $\mathbb{F}G$, não podemos afirmar que para cada e , idempotente central, $\mathbb{F}Ge$ seja isomorfo a uma álgebra de matrizes, porém, podem eventualmente ocorrer casos em que $\mathbb{F}Ge$, de fato, o seja.

3.0.2 Detecção de Componentes Simples

Uma vez determinados os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{F}G$, podemos estudar a possibilidade de decompor esses idempotentes centrais em idempotentes primitivos pela aplicação de **HatMapXi**. Em caso positivo, isto é, suponha haver um endereço $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}(\mathbf{e})$, e um idempotente central primitivo de $\mathbb{F}G$ em que $\mathcal{A}$ descreva idempotentes $e_1, \dots, e_n$, dois a dois ortogonais com dimensão sobre $\mathbb{F}$ igual a $q = p^k$ para algum q .

Se conseguirmos determinar elementos do tipo e_{ij} tais que $e_{ij}.e_{rs} = e_{is}.\delta(j, r)$ para todo $i, j, r, s \in [1..n]$ fica fácil estabelecer um isomorfismo $\phi : M_n(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{F}Ge$ via $\phi(E_{i,j}) = e_{ij}$, onde $E_{i,j}$ denotam as matrizes elementares de $M_n(\mathbb{F}_q)$.

Mesmo em posse dos idempotentes $e_1, \dots, e_n$ e do respectivo endereço $\mathcal{A}$ da família, obter tais elementos e_{ij} não é tarefa simples. Porém, o próximo algoritmo busca pela existência de uma matriz M , a qual chamaremos de matriz *Pivot*, do morfismo ϕ com a seguinte propriedade:

$$(e_i.M_{ij}.e_j)(e_r.M_{rs}.e_s) = (e_i.M_{is}.e_s)\delta(j, r)$$

para todo $i, j, r, s \in [1..n]$.

A existência de tal matriz nos permite definir os elementos da forma e_{ij} como

$$e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} e_i.M_{ij}.e_j$$

Dessa forma, e_{ij} possui as propriedades almejadas. A seguinte sequência de algoritmos objetiva a busca por matrizes *Pivot* de uma família de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}Ge$ para o caso em que temos $\dim e_i \mathbb{F}Ge e_j = 1$ sobre $\mathbb{F}$ para cada par de idempotentes primitivos e_i e e_j . Para o caso em que $\mathbb{F}$ é corpo de decomposição, apresentamos uma sequência de algoritmos que viabilizam alguns desses morfismos.

```

1 MatrixBase:= function (listaidemps, FG)
2
3 ## Determina uma F base para a componente M_ij(Fq)
4 local n,
5   matrix,
6   l,c, # linha e coluna
7   i,j, #contador linha e coluna
8   id, id2,
9   contador,
10  e; # listaidemps

```

```

11 n:=Size(listaidemps);
12 matrix :=[];
13 l:=[];
14 e:=listaidemps;
15 G := UnderlyingMagma(FG);
16 F := LeftActingDomain(FG);
17 for i in [1..n] do
18   for j in [1..n] do
19     id:= Reduction2FBase (FG, e[i]*List(G)*e[j])[1];
20     if i=j then
21       id2:=id;
22       while id2^2 <> id2 or id2 = Zero(FG) do
23         id2 := id*Random (F);
24       od;
25       id:=id2;
26     fi;
27     Add (l, id ) ;
28   od;
29   Add(matrix, l);
30   l:=[];
31 od;
32 ### Correção Triangular Inferior:
33 i:=1;
34 j:=1;
35 Print ("\n Executando correção Triangular: \n");
36 contador:=[];
37 Print ( "Contador: ", contador);
38 for j in [1..n] do #coluna
39   contador:=[];
40   Print ( "Contador: ", contador);
41   Print ("\n iniciando Coluna ", j);
42   for i in [j..n] do #linha
43     contador:=[];
44     id:= matrix[i,j];
45     id2:=id;
46     while id2*matrix[j,i] <> matrix[i,i] do
47       id2 := id*Random (F);
48     contador:=[];
49   od;
50   matrix[i,j]:=id2;

```

```

51  od;
52  od;
53  return matrix;
54  end;#####
55
56 OneMatCorrection :=function (Mat,FG,NmexerLista)
57
58 local n, #número de prods c erro
59 q, # contador
60 M, # copia da matrix
61 Eik,
62 Ekj,
63 Eij,
64 fpos,
65 a,b,c, #congelados
66 erros;
67
68
69 F:= Separa(FG)[1];
70 G:= Separa(FG)[2];
71
72 erros:= MatrixTester (Mat,FG);
73 n:= Size(erros);
74 M:= IdentityMat(Size(Mat),FG)*Mat;
75 ##Corrigindo
76
77 for q in [1..n] do
78   Eik := Mat [ erros[q][1][1] , erros[q][1][2]];
79   Ekj := Mat [ erros[q][2][1] , erros[q][2][2]];
80   Eij := Mat [ erros[q][1][1] , erros[q][2][2]];
81   a:= [ erros[q][1][1] , erros[q][1][2]];
82   b:= [ erros[q][2][1] , erros[q][2][2]];
83   c:= [ erros[q][1][1] , erros[q][2][2]];
84
85   if not (erros[q][1] in NmexerLista) then #arrumar Eik
86     fpos:=Position ( List (F , x->(x*Eik)*(Ekj) = Eij ) , true );
87
88     M [ erros[q][1][1] , erros[q][1][2] ] := List(F)[fpos] *Eik;
89     Print ("\n \n Return tipo 1");
90     return [M, [ erros[q][1][1] , erros[q][1][2] ] , a,b,c];

```

```

91
92  else
93
94      if not (erros[q][2] in NmexerLista) then #arrumar Ekj
95          fpos:=Position ( List (F , x->(Eik)*(x*Ekj) = Eij ) , true );
96
97          M [ erros[q][2][1] , erros[q][2][2]] := List(F)[fpos] *Ekj;
98          Print ("\n \n Return tipo 2");
99          return [M, [ erros[q][2][1] , erros[q][2][2]] ,a,b,c];
100      fi;
101  fi;
102 od;
103
104 return [M,[]];
105 end; ##### Fim do OneMatrixCorrector
106
107 MatrixCorrector := function (Mat,FG)
108
109 local n, #max de tentativas
110 i, # contador
111 corrigidos, #
112 dados, # [ M, corrigido]
113 M;
114
115 corrigidos:=[];
116
117 M:=IdentityMat(Size(Mat),FG)*Mat;
118 n:=Size(MatrixTester (M,FG));
119
120 ### Primeira Correção
121
122 for i in [1..n] do
123
124     Print ("\n Correcao:", i , " de " , n);
125     dados:=OneMatCorrection (M,FG,corrigidos);
126     M:=dados[1];
127     Add (corrigidos, dados[3] );
128     Add (corrigidos, dados[4] );
129     Add (corrigidos, dados[5] );
130

```



```

131  if MatrixTester (M,FG) = true then
132      return M;
133  fi;
134  od;
135
136  return [M,fail];
137  end;#####
138
139  Matrix Tester
140  ## Avalia o comportamento dos elementos
141  ## eij de FG como Eij em termos de delta(i,j)
142  MatrixTester :=function (M,FG)
143  local n,lm1,cm1,lm2,cm2, delta, testes, tresult,x,y;
144
145  n:= Size(M);
146  testes:=[];
147
148  delta:= function (x,y,FG)
149      if x=y then
150          return One(FG);
151      else
152          return Zero(FG);
153      fi;
154  end;
155
156  tresult:=[];
157  for lm1 in [1..n] do
158      for cm1 in [1..n] do
159          for lm2 in [1..n] do
160              for cm2 in [1..n] do
161                  tresult:= M[lm1,cm1] * M[lm2,cm2]= M[lm1,cm2] * delta(cm1,
                      lm2,FG);
162                  if tresult = false then
163                      Add( testes, [ [lm1,cm1] ,[lm2,cm2]]);
164                      Print ("\n Falso para: ",[ [lm1,cm1] ,[lm2,cm2]]);
165                  fi;
166              od;
167          od;
168      od;
169  od;

```

```

170 Print (" \n \n");
171
172 if Set(testes) = [] then
173   return true;
174 else
175   return Set(testes);
176 fi;
177 end;
178
179 #####
180 ## dado UM ÚNICO ELEMENTO elem retorna [alpha ,g ] tal que
181     elem = eii . alpha . g. e jj
182 # EiiEjj = [ eii,ejj]
183
184 IdentifyMe := function (elem, EiiEjj, FG)
185 local F,G, eii,ejj, i,j;
186
187 eii:=EiiEjj[1];ejj:=EiiEjj[2];
188
189 F:= Separa (FG)[1];G:=Separa (FG)[2];i:=1;
190
191 while eii*List(G)[i]*ejj =Zero(FG) do
192   i := i+1;
193 od;
194 j:=1;
195 while List(F)[j]*eii*List(G)[i]*ejj <> elem do
196   j := j+1;
197 od;
198
199 return One(FG)*List(G)[i]*List(F)[j];
200 end;
201
202 Por fim, o algoritmo busca pela existência de matrizes $Pivot$,
203
204 \begin{lstlisting}[language=GAP]
205 ## Dada uma Matriz nxn de FG do tipo Mij,
206 ## Rotorna a Matriz de Reconhecimento
207
208 IdentifyMat := function (M, Idemps, FG)

```

```

209
210 local n, # Size(M)
211   Mat, # Matriz Resultado
212   l,c, # contadores linha x coluna
213   F,G;
214
215 n:= Size(M);
216
217 Mat:= IdentityMat(Size(M),FG);
218
219 for l in [1..n] do
220   for c in [1..n] do
221
222     Mat[l,c]:= IdentifyMe (M[l,c],[Idemps[l], Idemps[c]] , FG);
223   od;
224 od;
225
226 return Mat;
227 end;

```

Exemplo 3.3 Considere F_5S_5 . Sejam $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ os idempotentes centrais primitivos obtidos por **PCIBySOCl**(FG) . Temos que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são idempotentes que possuem o seguinte endereço para seus respectivos idempotentes primitivos não centrais.

$\mathcal{A}_{\mathbf{e}_1} = [27, 58, 6, 10, 1]$ com $\dim \mathbb{F}G\mathbf{e}_1 = 25$. Onde

$$\begin{aligned}
 H_{27} &= \langle (2, 5, 4) \rangle, \quad H_{58} = \langle (1, 3), (2, 4) \rangle, \\
 H_6 &= \langle (2, 4) \rangle, \quad H_{10} = \langle (1, 3) \rangle, \quad H_1 = \langle () \rangle
 \end{aligned}$$

Já $\mathcal{A}_{\mathbf{e}_2} = [27, 45, 2, 7, 1]$ com, também com $\dim \mathbb{F}G\mathbf{e}_2 = 25$ onde,

$$\begin{aligned}
 H_{45} &= \langle (2, 4, 3, 5) \rangle, \\
 H_2 &= \langle (4, 5) \rangle, \quad e \quad H_7 = \langle (2, 3) \rangle
 \end{aligned}$$

por fim, $e_3 = 1 - e_1 - e_2$, com $\dim \mathbb{F}Ge_3 = 70$ não será estudado.

Para $\mathbb{F}_5 S_5 \mathbf{e}_1$:

Considere M , a seguinte matriz de dimensão 5×5

$$M = \begin{bmatrix} (1) & 4(3, 4) & 4(3, 4) & 4(3, 4) & 2(3, 4) \\ 3(3, 4) & (1) & 3(3, 4, 5) & 4(4, 5) & 2(3, 4) \\ 4(3, 4) & 4(3, 4, 5) & (1) & 2(3, 4) & 2(4, 5) \\ 4(3, 4) & 2(4, 5) & 2(3, 4) & (1) & 2(3, 4) \\ 4(3, 4) & 2(3, 4) & 4(4, 5) & 4(3, 4) & (1) \end{bmatrix}$$

então, definindo os elementos e_{ij} por

$$e_{ij} \stackrel{def}{=} e_i \cdot M_{ij} \cdot e_j$$

são tais que $e_{ij} \cdot e_{rs} = e_{is} \cdot \delta(j, r)$

Onde

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1_{FG} & \text{se } x = y \\ 0_{FG} & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Para $\mathbb{F}_5 S_5 \mathbf{e}_2$:

Considere $N_{5 \times 5}$ a matriz:

$$N = \begin{bmatrix} (1) & 3(1, 2) & 3(3, 4) & 4(3, 4) & 3(1, 2)(3, 4) \\ 3(1, 2) & (1) & 3(1, 2) & 4(1, 2)(3, 4) & (3, 4) \\ 4(3, 4) & 4(1, 2) & (1) & 2(3, 4) & 4(1, 2)(3, 4) \\ (3, 4) & (1, 2)(3, 4) & (3, 4) & (1) & 2(1, 2) \\ 4(1, 2)(3, 4) & 3(3, 4) & 4(1, 2)(3, 4) & 4(1, 2) & (1) \end{bmatrix}$$

então, definindo os elementos e_{ij} por

$$e_{ij} \stackrel{def}{=} e_i \cdot N_{ij} \cdot e_j$$

são tais que $e_{ij}.e_{rs} = e_{is}.\delta(j, r)$.

Como M e N são matrizes *Pivot*, ambas de dimensão 5×5 , então há em $\mathbb{F}_5 S_5$ duas componentes isomorfas a $M_5(\mathbb{F}_5)$, ou seja $M_5(\mathbb{F}_5) \hookrightarrow \mathbb{F}_5 S_5$. Ambas as matrizes M e N foram obtidas através da execução de **IdentifyMat**.

Capítulo 4

Uma Aplicação para Idempotentes de QG

4.1 Reconhecimento de Idempotentes Centrais Primitivos em QG

Uma vez percebida a relevância das decomposições do tipo *hat* para os idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G$, a aplicabilidade desses algoritmos em $\mathbb{Q}G$ torna-se uma pergunta natural que emerge neste contexto. Com pequenas alterações nas funções de crivo C_r , podemos utilizar nossos algoritmos para reconhecer idempotentes centrais primitivos pré-calculados em termos de endereços do tipo $\mathfrak{h}$. Isto é, suponha G tal que seja conhecido o conjunto I_{cp} dos idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$, definindo a função $C_r^{I_{cp}\mathbb{Q}}$

$$\begin{aligned} C_r^{I_{cp}\mathbb{Q}} : L \subset \mathbb{Q}G &\longrightarrow \mathbb{Q}G \\ \alpha &\longrightarrow \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in I_{cp} \\ 0 & \text{se } \alpha \notin I_{cp} \end{cases} \end{aligned}$$

e, executando-se **HatMapXi**, obtemos possíveis endereços *Hat* para seus idempotentes. Por exemplo para $G_{[27,4]} \cong C_9 \rtimes C_3$, temos que um endereço para os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$ é

$$\mathcal{A} = [10, 9, 8, 7, 6, -10]$$

ou seja, $e_1 = \widehat{H}_{10}$

$$\begin{aligned}
e_1 &= \xi(\mathcal{A}|_1) = \widehat{H}_{10} = \widehat{G} \\
e_2 &= \xi(\mathcal{A}|_2) = \widehat{H}_9(1 - e_1) \\
e_3 &= \xi(\mathcal{A}|_3) = \widehat{H}_8(1 - e_1 - e_2) \\
e_4 &= \xi(\mathcal{A}|_4) = \widehat{H}_7(1 - e_1 - e_2 - e_3) \\
e_5 &= \xi(\mathcal{A}|_5) = \widehat{H}_6(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \\
e_6 &= \xi(\mathcal{A}|_6) = (1 - \widehat{H}_{10})(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) = (1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_5)
\end{aligned}$$

Já, para $G_{[27,3]} \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_3$, temos o endereço $\mathcal{A} = [19, 18, 17, 16, 15, -19]$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
e_1 &= \xi(\mathcal{A}|_1) = \widehat{H}_{19} = \widehat{G} \\
e_2 &= \xi(\mathcal{A}|_2) = \widehat{H}_{18}(1 - e_1) \\
e_3 &= \xi(\mathcal{A}|_3) = \widehat{H}_{17}(1 - e_1 - e_2) \\
e_4 &= \xi(\mathcal{A}|_4) = \widehat{H}_{16}(1 - e_1 - e_2 - e_3) \\
e_5 &= \xi(\mathcal{A}|_5) = \widehat{H}_{15}(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \\
e_6 &= \xi(\mathcal{A}|_6) = (1 - \widehat{H}_{19})(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) = (1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_5)
\end{aligned}$$

Uma primeira análise nos fornece a seguinte tabela:

<i>Id Grupo</i>	<i>Estrutura</i>	<i>Endereço</i>	<i>Id Grupo</i>	<i>Estrutura</i>	<i>Endereço</i>
[1, 1]	1	[1]	[8, 3]	D_8	[10, 9, 8, 7, -10]
[2, 1]	C_2	[2, -2]	[8, 4]	Q_8	[6, 5, 4, 3, -6]
[3, 1]	C_3	[2, -2]	[8, 5]	$C_2 \times C_2 \times C_{2C}$	[16, 15, 14, ..., 10, -16]
[4, 1]	C_4	[3, 2, -3]	[9, 1]	C_9	[3, 2, -3]
[4, 2]	$C_2 \times C_2$	[5, 4, 3, -5]	[9, 2]	$C_3 \times C_3$	[6, 5, 4, 3, -6]
[5, 1]	C_5	[2, -2]	[10, 1]	D_{10}	[8, 7, -8]
[6, 1]	S_3	[6, 5, -6]	[10, 2]	C_{10}	[4, 3, 2, -4]
[6, 2]	C_6	[4, 3, 2, -4]	[11, 1]	C_{11}	[2, -2]
[7, 1]	C_7	[2, -2]	[12, 1]	$C_3 \rtimes C_4$	[8, 7, 3, 2, -8]
[8, 1]	C_7	[2, -2]	[12, 2]	C_{12}	[6, 5, 4, 3, 2, -6]
[8, 2]	$C_4 \times C_4$	[8, 7, 6, 5, 4, -8]	[12, 3]	A_4	[10, 9, -10]

Analisando todos os grupos com ordem igual ou inferior a 120, percebe-se que dos 1237 grupos, 1143 possuem um endereço completo para seus idempotentes centrais primitivos. Desta análise, um dos maiores endereços ocorre em $G \cong (C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) = G_{[64,267]}$, onde $\mathcal{A} = [2825, 2824, 2823, ..., 2762, 2763, -2825]$ de tamanho 64, neste caso, QG é uma álgebra de grupo comutativa.

4.2 HatMaps em QG

Uma vez obtido um endereço $\mathfrak{h}$ para os idempotentes centrais primitivos de $\mathbb{Q}G$, podemos estudar seus idempotentes centrais primitivos por meio de **HatMapXi** e comparar seus os endereços dos idempotentes centrais primitivos com os idempotentes primitivos não centrais da respectiva componente simples.

Consideremos novamente $G = G_{[27,4]} \cong C_9 \rtimes C_3$. Em $\mathbb{Q}G$, novamente sua única componente não comutativa é dada por $\mathbb{Q}G\mathbf{e}$ com $\mathbf{e} = (1 - \hat{G}')$, novamente com dimensão 18 sobre $\mathbb{Q}$. Temos o mesmo *HatMap*

$$\mathcal{M}(\mathbf{e}, 3) = [[3, 4, 1], [3, 4, 5], [3, 5, 1], [3, 5, 4], [4, 3, 1], [4, 3, 5], \\ [4, 5, 1], [4, 5, 3], [5, 3, 1], [5, 3, 4], [5, 4, 1], [5, 4, 3]]$$

que a componente não comutativa de $\mathbb{F}_2G$ possui.

Ou seja, sendo $\mathcal{A}_{Cen}$ um endereço *Hat* dos idempotentes centrais primitivos e $\mathcal{A}_{\mathbf{e}}$ um endereço *Hat* dos idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}$, temos por exemplo uma possível combinação de endereços.

$$\mathcal{A}_{Cen} = [10, 9, 8, 7, 6, 1] \text{ e } \mathcal{A}_{\mathbf{e}}[5, 4, 3]$$

A saber, sua disposição no reticulado de G , configura-se como:

Onde os grupos marcados com N são subgrupos normais de G .

Capítulo 5

Exemplos

Exemplo 5.1 Para $\mathbb{F}_3 D_{10}$, temos

$$\mathbb{F}_3 D_{10} \cong \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3 \oplus M_2(\mathbb{F}_9)$$

Sendo $\mathbf{e} = (1 - \widehat{G'})$ seu único idempotente referente à componente não comutativa, temos que

HatMapXi retorna o endereço $\mathcal{A} = [2, 1]$ para esta componente. Ou seja,

$$e_1 = \xi(\mathcal{A}|_1) = \widehat{H_2} \mathbf{e}$$

enquanto

$$e_2 = \xi(\mathcal{A}|_2) = (1 - e_1) \mathbf{e}$$

onde $H_2 = \langle b \rangle$, com $D_{10} = \langle a, b \mid a^5 = b^2 = baba = 1 \rangle$

Exemplo 5.2 (Construção de idempotentes primitivos em $\mathbb{F}_5 S_3$)

Para $\mathbb{F}_5 S_3$, temos:

$$\mathbb{F}_5 S_3 \cong \mathbb{F}_5 \oplus \mathbb{F}_5 \oplus M_2(\mathbb{F}_5)$$

Novamente, sendo $\mathbf{e} = (1 - \widehat{G'})$, temos um endereço $\mathcal{A} = [2, 1]$. Ou seja,

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi(\mathcal{A}|_1) = \widehat{H}_2 \mathbf{e} \\ e_2 &= \xi(\mathcal{A}|_2) = (1 - e_1) \mathbf{e} \end{aligned}$$

Tais idempotentes fornecem códigos do tipo $[6, 2, 4]$ sobre $\mathbb{F}_5$.

Exemplo 5.3 (Construção de Código Ótimo $[12, 3, 8]$ em $\mathbb{F}_5 A_4$ por meio de endereço misto)

Considere $\mathbb{F}_5 A_4$, para o endereço $\mathcal{A} = [5, [[2], [[2, 1]]]$, no caso, o segundo idempotente constrói um **código ótimo** $[12, 3, 8]$, segundo [7].

Com $A_4 = \langle a, b | a^3 = b^3 = baba = 1 \rangle$:

Sendo $H_5 = \langle b \rangle$ e $H_2 = \langle ba \rangle$, e o idempotente dado por

$$\begin{aligned} e_2 &= (1 - \widehat{H}_5) \widehat{H}_2 (1 - \widehat{H}_5) 1 (1 - \widehat{H}_5) \widehat{H}_2 (1 - \widehat{H}_5) \mathbf{e} \\ &= (1 - \widehat{H}_5) \widehat{H}_2 (1 - \widehat{H}_5)^2 \widehat{H}_2 (1 - \widehat{H}_5) \mathbf{e} \\ &= (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_5 \widehat{H}_2) (1 - \widehat{H}_5)^2 (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_2 \widehat{H}_5) \mathbf{e} \\ &= (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_5 \widehat{H}_2) (1 - \widehat{H}_5) (\widehat{H}_2 - \widehat{H}_2 \widehat{H}_5) \mathbf{e} \end{aligned}$$

Ou então, utilizando a notação $\widehat{H}_{-5} = (1 - \widehat{H}_5)$, temos que $e_2 = (\widehat{H}_{-5} \widehat{H}_2)^2 \widehat{H}_{-5} \mathbf{e}$

Pode-se obter **códigos ótimos** de acordo com [7] por meio das técnicas utilizadas.

Exemplo 5.4 (Construção de Código Ótimo $[21, 3, 12]$ em $\mathbb{F}_2$)

Em $\mathbb{F}_2$, considere $G = G_{[21, 1]} \cong C_7 \rtimes C_3$. Assim, temos G descrito por

$$G = \langle f_1, f_2 | f_1^3 = 1, f_1 f_2^2 = f_2 f_1 \rangle$$

então temos em $\mathbb{F}_2 G_{[21, 1]}$ a seguinte estrutura

$$\mathbb{F}_2 G \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_4 \oplus M_3(\mathbb{F}_2) \oplus M_3(\mathbb{F}_2)$$

Onde $\mathbf{e}_1 = 1 + f_2^3 + f_2^5 + f_2^6$ e $\mathbf{e}_2 = 1 + f_2 + f_2^2 + f_2^4$ são os idempotentes centrais primitivos correspondentes às duas respectivas componentes não comutativas $M_3(\mathbb{F}_2)$.

Executando-se **HatMapXi**(1, $\mathbf{e}$, $\mathbb{F}G$), tanto para $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ quanto para $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2$, obtém-se o endereço $[2, 3, 1]_h$

Em ambas as componentes, o mesmo endereço $\mathcal{A} = [2, 3, 1]_h$ retorna idempotentes primitivos de $\mathbb{F}G\mathbf{e}_1$ e de $\mathbb{F}G\mathbf{e}_2$ todos correspondentes a **códigos ótimos** do tipo $[21, 3, 12]$ sobre $\mathbb{F}_2$.

Os idempotentes de $\mathbb{F}_2G\mathbf{e}_1$ são:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1 + f_1 + f_1^2 + f_2^3 + f_1f_2^3 + f_1^2f_2^3 + f_2^5 + f_1f_2^5 + f_2^6 + f_1^2f_2^5 + f_1f_2^6 + f_1^2f_2^6 \\ e_2 &= 1 + f_1^2 + f_1f_2 + f_2^2 + f_1^2f_2 + f_1f_2^2 + f_2^3 + f_1f_2^3 + f_2^4 + f_1^2f_2^4 + f_1f_2^6 + f_1^2f_2^6 \\ e_3 &= 1 + f_1 + f_1f_2 + f_2^2 + f_1^2f_2 + f_1f_2^2 + f_2^3 + f_2^4 + f_1^2f_2^3 + f_1^2f_2^4 + f_1f_2^5 + f_1^2f_2^5 \end{aligned}$$

, ou então, utilizando o endereço $\mathcal{A}$ visto como endereço do mapa $\mathcal{M}(\mathbf{e}_1)$, simplesmente,

$$e_1 = \xi(\mathcal{A}|_1) = \xi([2]) = \widehat{H}_2\mathbf{e}_1$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \xi(\mathcal{A}|_2) = \xi([2, 3]) \\ &= (1 - e_1)\widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e}_1 \\ &= \widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 &= \xi(\mathcal{A}) = \xi([2, 3, 1]) \\ &= (1 - e_1 - e_2)\widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2)\mathbf{e}_1 \\ &= \widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2)\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Já, se utilizarmos $\mathcal{A}$ como mapa de $\mathcal{M}(\mathbf{e}_2)$, então os idempotentes serão

$$e_1 = \xi(\mathcal{A}|_1) = \xi([2]) = \mathbf{e}_2\widehat{H}_2$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \xi(\mathcal{A}|_2) = \xi([2, 3]) \\ &= (1 - e_1)\widehat{H}_3(1 - e_1)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 &= \xi(\mathcal{A}) = \xi([2, 3, 1]) \\ &= (1 - e_1 - e_2)\widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2)\mathbf{e}_2 \\ &= (1 - e_1 - e_2)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Sendo $H_1 = (1)$, $H_2 = \langle f_1 \rangle$ e $H_3 = \langle f_1 f_2^6 \rangle$

Notemos que neste caso, diferentemente de quando calculados os idempotentes primitivos de $\mathbb{F}_2 G \mathbf{e}_1$, $\widehat{H}_3$ não comuta com $\widehat{H}_2$ em $\mathbb{F}_2 G \mathbf{e}_2$. Todos os seis idempotentes calculados dão origem a **códigos ótimos** $[21,3,12]$ sobre $\mathbb{F}_2$.

Exemplo 5.5(Construção de Código Ótimo $[32,2,24]$ em $\mathbb{F}_3$)

Em $\mathbb{F}_2$, considere $G = G_{[32,13]} \cong C_8 \rtimes C_4$. Assim, temos G descrito por

$$G = \langle a, b \mid a^8 = b^4 = 1, bab^{-1} = a^3 \rangle$$

então temos em $\mathbb{F}_3 G_{[32,13]}$ a seguinte estrutura

$$\mathbb{F}_2 G \cong 4\mathbb{F}_3 \oplus 2\mathbb{F}_9 \oplus 6M_2(\mathbb{F}_3)$$

Se tomarmos $\mathbf{e} = 2 + a^{-2} + b^2 + 2a^4 + 2aba^{-1}b + a^2 + (ab)^2 + 2a^2b^2$ como idempotente primitivo central, $\mathbf{e}$ é tal que $\mathbb{F}_3 G \cong M_2(\mathbb{F}_3)$, e executando-se **HatMapXi**(1, $\mathbf{e}$, $\mathbb{F}G$), obtemos $\mathcal{A} = [[1], [[3, 1], [2, 2], [2, 4]], 1]_{\text{misto}}$.

Dessa forma, em $\mathbb{F}_3 G \mathbf{e}$, um par de idempotentes primitivos é dado por

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi(\mathcal{A}|_1) \\ &= \xi([1], [[3, 1], [2, 2], [2, 4]]) \\ &= (1 - 0)\widehat{H}_1(1 - 0)(2g_1 + g_2 + g_4)(1 - 0)\widehat{H}_1(1 - 0)\mathbf{e} \\ &= (2g_1 + g_2 + g_4)\mathbf{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= (1 - e_1)\widehat{H}_1(1 - e_1)\mathbf{e} \\ &= (1 - e_1)\mathbf{e} \end{aligned}$$

Sendo $g_1 = (1)$, $g_2 = a$ e $g_4 = b$, o idempotente $e_1 = (2 + a + b)\mathbf{e}$ fornece um **Código Ótimo $[32,2,24]$ em $\mathbb{F}_3$** .

Exemplo 5.6(Construção de Código Ótimo $[20,4,12]$ em $\mathbb{F}_3$)

Seja $G = G_{[20,1]}$, com

$$G_{[20,1]} = \langle a, b \mid a^5 = b^4 = 1bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Ainda em $\mathbb{F}_3$, temos

$$\mathbb{F}_3 G \cong \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_9 \oplus M_2(\mathbb{F}_9) \oplus M_2(\mathbb{F}_9)$$

Sendo $\mathbf{e} = 1 + 2b^2 + 2a + ab^2 + 2a^2 + a^2b^2 + 2a^3 + a^3b^2 + 2a^4 + a^4b^2$

Então, **HatMapXi**(1, $\mathbf{e}$, $\mathbb{F}G$) retorna $\mathcal{A} = [[[1], [[3, 1], [3, 2], [2, 3], [3, 4], [2, 7]]], 1]_{\text{misto}}$

Ambos os idempotentes obtidos por $\xi(\mathcal{A}|_1)$ e $\xi(\mathcal{A}|_2)$ geram **códigos ótimos** [20,4,12] em $\mathbb{F}_3$.

Exemplo 5.7(Construção de Código Ótimo [16,2,12] em $\mathbb{F}_3$)

Tememos $G = G_{[16,8]}$ com

$$G_{[16,8]} = \langle a, b |, a^8 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^3 \rangle$$

$$\mathbb{F}_3 G \cong 4\mathbb{F}_3 \oplus 3M_2(\mathbb{F}_3)$$

Tomando o idempotente central $e = 1 + 2a + 2a^4 + a^7 + a^5 + 2a^3$, executando-se **HatMapXi**(1, $\mathbf{e}$, $\mathbb{F}G$), obtemos $\mathcal{A} = [3, 1]$, ou seja, um conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}_3 G \mathbf{e}$ dados por $\mathcal{A}$ é

$$\begin{aligned} e_1 &= \xi(\mathcal{A}|_1) = \widehat{H}_3 \mathbf{e} \\ e_2 &= \xi(\mathcal{A}) = (1 - e_1) \mathbf{e} \end{aligned}$$

Onde $H_3 = \langle b \rangle$.

Ambos geram um **Código Ótimo** [16,2,12] em $\mathbb{F}_3$.

Diversos outros **Códigos Ótimos** podem ser construídos da mesma maneira, vale ressaltar que para os grupos fortemente monomiais é possível descrever seus idempotentes por meio de Pares de Shoda fortes.

<i>Corpo</i>	<i>Grupo</i>	<i>Estrutura</i>	<i>Código</i>	<i>Tipo de Endereço</i>
$\mathbb{F}_2$	$G_{[21,1]}$	$C_7 \rtimes C_3$	$[21, 3, 12]$	H
$\mathbb{F}_3$	$G_{[32,13]}$	$C_8 \rtimes C_4$	$[32, 2, 24]$	M
$\mathbb{F}_3$	$G_{[20,1]}$	$C_5 \rtimes C_4$	$[20, 4, 12]$	M
$\mathbb{F}_3$	$G_{[16,8]}$	QD_{16}	$[16, 2, 12]$	H
$\mathbb{F}_3$	$G_{[32,9]}$	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	$[32, 2, 24]$	H
$\mathbb{F}_3$	$G_{[16,12]}$	$C_2 \times Q_8$	$[16, 2, 12]$	M
$\mathbb{F}_5$	$G_{[24,1]}$	$C_3 \rtimes C_8$	$[24, 2, 20]$	M

Exemplo 5.8 (Idempotentes Primitivos em $\mathbb{F}_7 S_5$ e comparação com Pares de Shoda)

Considere $\mathbb{F}_7 S_5$. S_5 não é fortemente monomial.

De fato, seus únicos Pares Shoda Fortes são (S_5, S_5) e (S_5, A_5) .

Temos que então que

$$\mathbb{F}_7 S_5 \cong \mathbb{F}_7 \oplus \mathbb{F}_7 \oplus M_4(\mathbb{F}_7) \oplus M_4(\mathbb{F}_7) \oplus M_5(\mathbb{F}_7) \oplus M_5(\mathbb{F}_7) \oplus M_6(\mathbb{F}_7)$$

Seus idempotentes centrais primitivos referentes à parte Abelian, são dados por

$$\mathbf{e}_1 = \hat{S}_5 \text{ e } \mathbf{e}_2 = (1 - \hat{S}_5)\hat{S}'_5 = (1 - \hat{S}_5)\hat{A}_5, \text{ porém, nenhum destes nos interessa.}$$

Considere os demais idempotentes na respectiva ordem de suas componentes de Wedderburn

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_3, \text{ com } \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_3 = 4^2 & \mathbf{e}_4, \text{ com } \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_3 = 4^2 \\ \mathbf{e}_5, \text{ com } \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_3 = 5^2 & \mathbf{e}_6, \text{ com } \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_3 = 5^2 \\ \mathbf{e}_7, \text{ com } \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_3 = 6^2 & \end{array}$$

Obtidos através de *PrimitiveCentralIdempotentsByCharacterTable*

Por meio de **HatMapXi** aplicada em cada um dos idempotentes centrais primitivos $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_6$, obtemos os seguintes endereços:

Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3 &= [2, 7, 16, 1] \\
\mathcal{A}_4 &= [37, 12, 7, 1] \\
\mathcal{A}_5 &= [27, 58, 6, 10, 1] \\
\mathcal{A}_6 &= [27, 45, 2, 7, 1] \\
\mathcal{A}_7 &= [42, 12, 43, 13, 4, 1]
\end{aligned}$$

Então, $\mathcal{A}_7 = [42, 12, 43, 13, 4, 1]$ nos diz que com os grupos dados por:

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{42} &= \langle (1, 2, 4, 3) \rangle & \widehat{H}_{12} &= \langle (1, 4)(2, 3) \rangle \\
\widehat{H}_{43} &= \langle (1, 2, 3, 4) \rangle & \widehat{H}_{13} &= \langle (1, 3)(2, 4) \rangle \\
\widehat{H}_4 &= \langle (3, 4) \rangle, & \widehat{H}_1 &= \langle Id_{S_5} \rangle
\end{aligned}$$

podemos determinar um conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_7$. Como todos estes grupos comutam 2 a 2, seus idempotentes são dados dado por

$$\begin{aligned}
e_1 &= \widehat{H}_{42} \mathbf{e}_7 \\
e_2 &= \widehat{H}_{12}(1 - \hat{s}_{42}) \mathbf{e}_7 \\
e_3 &= \widehat{H}_{43}(1 - e_1 - e_2) \mathbf{e}_7 \\
e_4 &= \widehat{H}_{13}(1 - e_1 - e_2 - e_3) \mathbf{e}_7 \\
e_5 &= \widehat{H}_4(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4) \mathbf{e}_7 \\
e_6 &= \widehat{H}_1(1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5) \mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

são idempotentes primitivos de $\mathbb{F}_7 S_5 \mathbf{e}_7$.

Utilizando-se qualquer um destes idempotentes, podemos construir um código linear sobre $\mathbb{F}_7$ com os parâmetros $[120, 6, 40]$.

Exemplo 5.9 (Idempotentes Primitivos em $\mathbb{F}_7 S_6$)

Mesmo grupos com ordens maiores podem possuir endereços puramente *Hat*, ou seja do tipo $\mathfrak{h}$. Pode-se observar isso tanto no exemplo anterior ($\mathbb{F}_7 S_5$), bem como o será em $\mathbb{F}_7 S_6$.

Para $\mathbb{F}_7 S_6$ temos a seguinte decomposição de Wedderburn:

$$\mathbb{F}_7 S_6 \cong 2\mathbb{F}_7 \oplus 4M_5(\mathbb{F}_7) \oplus 2M_9(\mathbb{F}_5) \oplus 2M_{10}(\mathbb{F}_5) \oplus M_{16}(\mathbb{F})$$

Ambas as componentes $M_{10}(\mathbb{F}_5)$ possuem idempotentes primitivos descritos por

$$\mathcal{A} = [233, 235, 237, 291, 383, 117, 393, 3, 13, 1]$$

Onde:

$$\begin{aligned} H_{233} &= \langle (2, 6)(3, 4), (1, 5) \rangle, & H_{235} &= \langle (3, 5)(4, 6), (1, 2) \rangle, \\ H_{237} &= \langle (1, 2, 3, 4) \rangle, & H_{291} &= \langle (1, 3)(4, 5), (4, 5) \rangle, \\ H_{383} &= \langle (2, 5, 4, 3, 6) \rangle, & H_{117} &= \langle (1, 2)(5, 6), (3, 4)(5, 6) \rangle, \\ H_{393} &= \langle (1, 6, 2, 4, 5) \rangle, & H_3 &= \langle (4, 6) \rangle, \\ H_{13} &= \langle (1, 5) \rangle, & H_1 &= \langle Id_{S_5} \rangle \end{aligned}$$

Ou seja, por meio de $\xi(\mathcal{A}|_i), 1 \leq i \leq 10$, obtemos um conjunto completo de idempotentes primitivos em qualquer uma das componentes $\mathbb{F}_7 S_6 \mathbf{e} \cong M_{10}(\mathbb{F}_5)$.

Capítulo 6

Demais Algoritmos em Gap

Nesta parte final, deixaremos listadas as principais funções utilizadas, mesmo que não citadas explicitamente. Algumas delas possuem função complementar a outras funções e não possuem significado sozinhas. Em seguida, deixamos o código dos principais algoritmos não apresentados durante os capítulos principais.

6.1 Lista De Funções

Esta lista corresponde à lista de funções e algoritmos produzidos, isto é, não presentes atualmente no GAP ou em outro pacote.

BaseofeFGe (FG, e):

Usa escalonamento em $\mathbb{F}$ para determinar uma base de $e\mathbb{F}Ge$ (bilateral).

BaseoffFGe (FG, e):

Usa escalonamento em $\mathbb{F}$ para determinar uma base de $\mathbb{F}Ge$.

C (e_1, e_2, FG):

Função de Competição.

Challenge (E, FG):

Aplicação da Função de competição .

CoeficientesByG (FG, G, x):

Retorna os coeficientes de x na mesma ordem de $List(G)$.

DimHate (FG, e , s):

Lista dimensões de todos os produtos $s\mathbb{F}Gse$.

DimHate2 (FG, e, dim...):

DimHate em um único elemento.

DuploCrivo (dima , dim, prod):

Retorna 1 se as dimensões são iguais e prod é idempotente, retorna 2 se prod é idempotente mas dimensões são distintas e retorna 3 se prod não é idempotente.

EV5 (ParametroDeSaida , ListaDeParametros):

Engine de Ξ , ou seja, HatMapXI.

Dim (FG, e):

Verificador de dimensão para $e\mathbb{F}G$.

FiltroCentralizeXemL (x, L, FG):

Recebe X e filtra quem comuta com os elementos de uma lista L .

FiltroIdempotent (L, FG):

Zera os elementos não idempotentes.

ForceMidp (FG, listaG, eforce, dim, m, dimmin):

Retorna um endereço misto.

Hat (H, FG):

Recebe H devolve $\widehat{H}$.

HatMap (e,s,FG,nivel,versao):

Faz uma busca pelo HatMap.

HatMapXi (n,e,s,FG,Sk):

Retorna um endereço sem fazer o mapa completo função Ξ .

Hats (Subgrupos, FG):

Retorna um chapéu para cada subgrupo.

Hunter (c,tc):

Gerencia tarefas por diversos núcleos.

HunterEngine:

Mecanismo de busca por raízes de polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}G$.

IdByHatAdressSum (lista, e, hats, FG):

Recebe endereço, Retorna idempotentes (função ξ).

IdByHatMix (A,neg,e,FG):

Função ξ para endereços mistos.

IdempMHF (ListaDeParametros):

Função Interna do Algoritmo Ξ completo, retorna idempotentes por endereços mistos.

Lista2Base (FG, G, Lista):

Reduz uma lista de geradores a uma $\mathbb{F}$ -base.

MatrixBase (listaidemps, FG):

MatrixBase Retorna uma matriz cujas entradas são uma $\mathbb{F}$ -base para Fp^1 (corpo de decomposição).

MatrixByIdemps (listaidemps,FG):

Recebe uma Lista de Idempotentes e retorna E_{ij} tal que $E_{ii} = e_i$.

MatrixCorrector (Mat,FG):

Realiza operações, retona E_{ij} , ou false caso contrário.

MatrixTester (M,FG):

Testes de verificação matricial.

minpotidemp (a, FG)

Retorna a minima potencia que torna a idempotente.

MultiHatsSS (FG, e,dimmin, iterac,m):

Multi Hat

npot (a, FG)

Recebe um representante a da soma de classes y e retorna n tal que y^n é idempotente.

OneMatCorrection (Mat,FG,NmexerLista):

Executa uma única correção com intuito de criar uma matriz Pivot.

PCIbySOCI (FG):

Retorna Idempotentes Centrais Primitivos. Determina um conjunto de centrais contendo os primitivos e aplica Challenge.

prods (lista, FG):

Recebe uma lista e retorna os termos do produto de cisão $(a+(1-a)) (b+(1-b))...$

ProgGbase (FG, listaG, e, dim):

Retorna uma base e uma base multiplicando-se por um idempotente.

ProgTest (FG, e, dim...):

Função de Dimensão.

ProgTestT (FG, e, H, dim...):

Função de Dimensão, realiza teste em um transversal de H em G.

Separa (FG):

Recebe FG retorna o par $[F, G]$.

ShellMaker (s, C, e, FG, parametro):

Elaboração de Camadas na função de redução de dimensão.

SOCI (FG):

Some Ortogonal Central Idempotents (FG).

StSk(n):

Função de Salto Padrão, Standart Skip - $s_k(n) = (n, 1, 1, \dots, 1)$.

SubSum (H, FG):

Soma de elementos de um subconjunto de FG.

TestIdempFGe (lista, e, FG, num...):

Testa se uma lista de elementos corresponde a idempotentes ortogonais de FGe.

Vetorize2GR (n, FG, base):

Recebe um número retorna um elemento de FG.

Vetorize2multibase (n, Mbase):

Rece um natural, retorna sua escrita em uma base não regular.

Vetorize2mupla (n, base,m):

Recebe n e retorna escrita de n em uma base.

Y (FG):

Função soma de classes.

Os presentes algoritmos são em sua grande maioria implementação direta das construções apresentadas. Entretanto, algumas funções apresentam certa variação quanto ao nome ou método de entrada. Vale ressaltar que pequenas variações no

código fonte levam a uma eficiência maior para determinados tipos de grupos.

Por tal motivo, as funções ζ , ξ e Ω serão dependentes de uma escolha de um mecanismo padronizado, os engines.

6.2 Algumas Funções Importantes

Deixamos por fim, explicitamente os algoritmos que julgamos mais importantes para o funcionamento das funções principais.

BaseofeFGe: Usa escalonamento em $\mathbb{F}$ para determinar uma base de $\mathbb{F}G_e$. Necessita da função CoeficientesByG.

```

1 BaseofeFGe := function (FG, e)
2   local G, #Grupo base
3   base, #base final de FGe.
4   n, # tamanho de G
5   lne, #lista não escalonada
6   i,j, # contadores
7   le, #lista escalonada
8   x, # elementos de RG que formarão a base
9   rank; # número de elementos LI
10  G:= UnderlyingMagma(FG);
11  n:= Size(G);
12  lne:= [];
13  for i in [1..n] do
14    Add (lne, CoeficientesByG(FG,G,e*List(G)[i]*e*One(FG)));
15  od;
16  x:= Zero(FG);
17  le := TriangulizedMat (lne);
18  rank := RankMat(le);
19  base := [];
20
21  for j in [1..rank] do
22    for i in [1..n] do
23      x:= x +One(FG) * List(G)[i]*le[j][i];
24    od;
25    Add (base , x);
26  od;
27  return base;
28 end;
```

DuploCrivo: Função de crivo que exerce papel no algoritmo Ξ . Recebe duas dimensões e um elemento *prod*. Retorna 1 se as dimensões são iguais e *prod* é idempotente, retorna 2 se *prod* é idempotente mas dimensões são distintas e retorna 3 se *prod* não é idempotente

```

1 DuploCrivo :=function (dima , dim, prod)
2 if IsIdempotent(prod) then
3   if dima = dim then
4     return 1;
5   else
6     return 2;
7   fi;
8 else
9   return 3;
10 fi;
11 end;

```

ForceMidp:Retorna o idempotente e sua escrita em base limpa respectivamente, retornando uma 5-úpla [idemp ,idemp limpo ,coord,baselimpa, Map] com o idempotente escrito de diferentes formas. Mantém informações e instruções sobre como reconstruir o idempotente.

```

1 ForceMidp:= function (FG, listaG, eforce, dim, m, dimmin)
2 local mo, #contador de idempotentes
3   n, #tamanho do submódulo
4   basesuja,
5   baselimpa,
6   yforce, # elemento do submódulo
7   ycforce, # y clean
8   l, #lista com xc e coord
9   coord,
10  posits,
11  positsn1, #posições nao 1 em F. (elimina os Zeros)
12  GMap,# G Mapa Limpo, ie sem coordenadas nulas
13  dimh, #julgamento da dimensão pelo DimHate
14  iforce; # contador
15 mo:=0;
16 iforce:=0;
17 yforce:=false;
18 ycforce:=false;
19 basesuja:= ProgGbase (FG, listaG, eforce, dim)[1];
20 baselimpa:= ProgGbase (FG, listaG, eforce, dim)[2];

```



```

21 n := Size(LeftActingDomain(FG))^Size(basesuja);
22 while mo < m and iforce <= n do #n pois a unidade foi descartada e
    será reposta no final.
23   iforce:=iforce+1;
24   yforce:= Vetorize2Fbase (iforce, FG,basesuja)[1];
25   if (yforce^2=yforce) and (yforce <> Zero(FG)) then
26     ### Julgar a dimensao.
27     dimh:= DimHate (FG, yforce, [One(FG)])[1];
28     if dimh = dimmin then
29       mo:=mo+1;
30     fi;
31   fi;
32 od;
33
34 if mo= m then
35   l:=Vetorize2Fbase (iforce, FG,baselimpa);
36   ycforce:= l[1];
37   coord:=l[2];
38 fi;
39 posits:= List(baselimpa, x->Position (listaG,x));
40
41 positsn1 := Positions (List (coord, x-> x<> 1), true);
42 Map:= List (positsn1, x-> [ coord[x], posits[x] ] );
43
44 return [yforce,ycforce,coord,baselimpa, Map];
45 end;

```

Hat e Hats:

```

1 ###
2 # Recebe H e retorna um único hat.
3 Hat := function (H, FG)
4   local n, #ordem de H
5   flat, # flat de H
6   coef; #coeficiente multiplicativo do flat.
7 n:= Size(H);
8 flat := SubSum(H, FG);
9 coef:= Zero(FG);
10 if flat^2 = Zero(FG) then
11   coef := Zero(FG);
12 else

```

```

13  coef := (n*One(FG))(-1);
14  fi;
15  return coef * flat;
16  end;
17
18  ##Hats
19  #Recebe uma lista de subgrupos e retorna a lista dos respectivos hats.
20  Hats := function (Subgrupos, FG)
21
22    local n, # tamanho da lista
23    lista; # lista final
24
25    lista := List (Subgrupos, x-> Hat(x, FG) );
26
27    return lista;
28  end;

```

Função ξ : Dada um Hat Adress por Soma, retorna os idempotentes correspondentes a esse endereço

```

1  IdByHatAdressSum := function ( lista, e, hats, FG)
2    local m,
3    k,
4    idemp,
5    HatType, # Hat ou Contra-Hat
6    soma;
7
8    m:= Size(lista);
9    idemp:= List([1..m+1]);
10   idemp[1]:= Zero(FG);
11   soma:=Zero(FG);
12   for k in [2..m+1] do
13     if lista[k-1] > 0 then
14       HatType:= hats[lista[k-1]];
15     else
16       HatType:= (One(FG) - hats[(-1)*lista[k-1] ] );
17     fi;
18     idemp[k]:= HatType* (One(FG)-soma)*e ;
19     soma:= soma+idemp[k];
20   od;
21   Remove (idemp, 1);

```

```

22 return idemp;
23 end;

```

Função ξ para endereço misto: Recebe um endereço A , e o idempotente primitivo central e $neg = (1 - e_1 - e_2 - \dots - e_n)$. Retorna o correspondente idempotente.

```

1 IdByHatMix := function (A,neg,e,FG)
2 local F,G, # Corpo e Grupo separados
3   n, f,i,j,
4   alpha,
5   nMH, #tamanho multihat
6   idemp; #idempotente final
7
8 if not (IsList(A)) then
9   return false;
10 fi;
11
12 alpha:= One(FG);
13 F:= Separa(FG)[1];
14 G:=Separa(FG)[2];
15 nMH := Size(A[1]);
16 n:= Size(A[2]);
17
18 for i in [1..nMH] do #alpha
19   alpha:= (Hats(Subgroups(G), FG)[A[1][i]]);
20 od;
21
22 f:=Zero(FG); #componente force
23
24 for j in [1..n] do #force
25   f:= f+ One(FG)*List(F)[A[2][j][1]] * List(G)[A[2][j][2]];
26 od;
27 idemp:= neg*alpha * f * alpha *neg;
28 return idemp;
29 end;

```

IdempMHf: Encontra idempotentes de endereço misto.

```

1 IdempMHF := function (ListaDeParametros)
2 local HatMap,
3   e, ListaHats,
4   FG, G,

```

```

5  dim, pi,
6  n, neg,
7  Idemps, ### fim lista de parametros
8  m, # sera o m-esimo idempotente buscado via Force
9  GMap,
10 defasagem, #quantos idempotentes restam a ser calculados
11 LayerAlvo, # Layer alvo refere-se a i em i-esimo idempotente
12 MultiHatResult, # resultado de MultiHatSS
13 alpharedux, # alpha de redução de dimensão
14 dimAlpha, #dimensao obtida por alpha
15 MHMap, #endereço MultiHat de Alpha com relação a e.
16 ForceResult, #resultado de Force
17 ForceMap, #ForceMap
18 Idempotente; #idempotente final
19
20 HatMap := ListaDeParametros[1];
21 e := ListaDeParametros[2];
22 ListaHats:=ListaDeParametros[3];
23 FG:= ListaDeParametros[4];
24 G:= UnderlyingMagma(FG); # G como lista
25 dim:=ListaDeParametros[5];
26 Sk:=ListaDeParametros[6];
27 n:=ListaDeParametros[7];
28 neg:= ListaDeParametros[8];
29
30 GMap:=[]; MHMap :=[];
31
32 ## Quantos idemp faltam:
33 defasagem:= Size(pi(n))-Size(HatMap);
34 LayerAlvo:=Size(HatMap)+1;
35
36 m:= pi(n)[LayerAlvo]; # m-esimo idempotente
37
38 MultiHatResult:= MultiHatsSS (FG, neg, dim, defasagem, m);
39 alpharedux:= MultiHatResult[1];
40 dimAlpha := DimHate2(FG, alpharedux);
41 MHMap := MultiHatResult[2];
42
43 ### Encontrar Idempotente por Force
44

```

```

45 ForceResult := ForceMidp (FG, List(G), alpharedux, dimAlpha, m, dim
    );
46 ForceMap := ForceResult[5];
47 Idempotente:= ForceResult[1];
48
49 return [Idempotente ,MHMap, ForceMap];
50 end;

```

Base Progressiva: Dada uma *LISTA* de elementos de G (em geral o G inteiro) e dado um idempotente e retorna um par [base suja , base limpa] onde base suja é a base para eFG utilizando elementos do tipo $e.LISTA.e$ e base limpa são os elementos da *LISTA* que formam essa base. Entra-se com a dimensão para agilizar cálculos.

```

1 ProgGbase:= function (FG, listaG, e, dim)
2 local sublista,
3   i, #contador indice listaG
4   dimo,
5   dimo2; # dimensao calculada
6 dimo:=0;
7 sublista:=[listaG[1]];
8 i:=2;
9 while dimo < dim do
10   dimo2:=Size(Reduction2FBase(FG, e*(Flat([sublista,listaG[i]])*e)));
11   if dimo2 > dimo then
12     Add(sublista, listaG[i]);
13   fi;
14   dimo:=dimo2;
15   i:=i+1;
16 od;
17 return [e*sublista*e,sublista]; #base suja e base limpa
18 end;

```

ShellMaker - Utilizada no algoritmo MultiHat

```

1 ##### ShellMaker
2 ShellMaker := function (s, C, e, FG, parametro)
3 local n, # Size(C)
4   ns, #Size(s)
5   se, # [ s1,...,sn, e]
6   i, # contador
7   j, # contador

```

```

8   k, #contador
9   lista, #lista anterior
10  list1,
11  list2,
12  lE, #lista esquerda
13  lrE, # lista a remover esquerda
14  lrD, #lista a remover direita
15  lD, #lista direita
16  lr; #lista de remoção lr = [lE, lD] Lista à direita e à esquerda
17
18  n:= Size(C);
19  ns:= Size(s);
20  se := Flat ([s,e]);; #adiciona o idempotente na ultima coordenada.
21  # captura os que são não nulos
22  # Criação da camada trivial (idemp) e primeira camada
23  if C= [] then
24    list1:= [1..ns];
25    if parametro = -1 then
26      lD:= Positions(List (list1, x-> (s[x] *e <> Zero(FG) and (s[x]*e<>e)
27        ) ) , true);
28      return [Flat([1,lD]), [ns+1]];
29    else
30      lE:= Positions(List (list1, x->( e*s[x] <> Zero(FG) and (s[x]*e<>e) )
31        ), true );
32      return [[ns+1],Flat([1,lE])];
33    fi;
34  fi;
35
36  # Abre listas para receberem elementos
37  lD:=[];lE:=[];lrD:=[];lrE:=[];lista:=List ([1..ns]);
38
39  ## Demais camadas
40  if parametro = 1 then
41    for j in [2..n] do
42      for i in [j..n] do
43        list1:= ComutSL ( s, List (C[i],x-> s[x] ));
44        list2:= Intersection (list1, lista);
45        lista:=list2;
46      od; ### terminaram as intersecções
47    for k in [1..Size(lista)] do

```

```

46     if Set( List(C[j-1], x-> se[x])*se[lista[k]] ) = [Zero(FG)] then
47         Add (lrE, lista[k]); # Retira camadas que anulam a anterior
48     fi;
49     if Set( List(C[j-1], x-> se[x])*se[lista[k]] ) = Set(List(C[j-1], x-> se[
50         x])) then
51         Add (lrE, lista[k]); # Retira camadas que estabilizam a anterior
52     fi;
53 od;
54 else # caso -1
55     for j in [1..n-1] do
56         for i in [1..j] do
57             list1:= ComutSL ( s, List (C[i],x-> s[x] )); #atenção aqui n+1-i
58             list2:= Intersection (list1, lista);
59             lista:=list2;
60         od; ### terminaram as intersecções
61         for k in [1..Size(lista)] do
62             if Set( se[lista[k]]* List(C[j+1], x-> se[x]) ) = [Zero(FG)] then
63                 Add (lrD, lista[k]); # Retira camadas que anulam a anterior
64             fi;
65             if Set( se[lista[k]]* List(C[j+1], x-> se[x]) ) = Set(List(C[j+1], x->
66                 se[x])) then
67                 Add (lrD, lista[k]); # Retira camadas que estabilizam a anterior
68             fi;
69         od;
70     fi;
71
72 lE:=List ([1..ns]);
73 lD:=List ([1..ns]);
74 SubtractSet (lE, Flat(lrE));
75 SubtractSet (lD, Flat(lrD));
76
77 if parametro =1 then #controle de opção de saída
78     return lE;
79 else
80     return lD;
81 fi;
82 end;

```

SOCI - Some Ortoogonal Central Idempotents.

```

1 SOCI := function (FG)
2   local N, #subgrupos normais de G
3   G, F, hats, #usando apenas subgrupos normais
4   y, idempclasses, # idempotentes das somas de classes
5   idemps, i, listafin; # lista final
6   G := UnderlyingMagma(FG);
7   F := LeftActingDomain(FG);
8   N:= NormalSubgroups (G);
9   hats:= Hats (N,FG); #aqui há o Zero(FG);
10  y:=Y(FG); # somas de classes
11  idempclasses:= [];
12
13  for i in [1..Size(y)] do
14    Add (idempclasses , y[i]^minpotidemp (y[i], FG) );
15  od;
16
17  idemps := Union (idempclasses , hats);
18  RemoveSet (idemps, Zero(FG));
19  listafin := prods (idemps, FG);
20  RemoveSet (listafin , Zero(FG));
21  return listafin;
22 end;

```

Função de salto Padrão: S_k . StSk - Standart Skip. Construtura de Skip Functions. Recebe n , número de idempotentes esperados. Retorna uma função $f(x) = [x, 1, \dots, 1]$ com n entradas

```

1 StSk := function (n)
2   local a,i, f;
3   a:= [];
4   for i in [1..n] do
5     Add (a, 1);
6   od;
7   f := function (n)
8     a[1]:=n;
9     return a;
10  end;
11  return f;
12 end;

```


Vetorizador para Multibase: Dado um número e uma base, retorna esse número na base com m coordenadas. Mbase deve ser uma lista contendo os tamanhos variados. O resultado deve sair na ordem base orientada à esquerda.

```

1 Vetorize2multibase:= function (n, Mbase)
2 local n2, k1,k2,j, #auxiliares
3   x, #elemento X
4   m,
5   coord; #coordenadas de saída
6 m:=Size(Mbase);
7 coord:=[];
8 n2:=n;
9
10 for j in [1..m] do
11   k1:= n2 mod Mbase[m+1-j];
12   Add (coord, k1+1);
13   n2:= (n2-k1) / Mbase[m+1-j];
14 od;
15
16 return Reversed(coord);
17 end;

```

HunterEngine: Algoritmo poderoso de busca por raízes de um dado polinômio com coeficientes em $\mathbb{F}G$. Otimizado para trabalhar em paralelo. Variáveis são respectivamente:

número do core atual / total de cores / Opção de exibição /bound /FG / # Polinômio / Detalhamento (0,1). /ExportType Tipo de resultado.

```

1 HunterEngine := function (c, tc, silentstep, FG, base, SubLista, expr,
2   bound,detalhes,ExportType)
3 local n, #Size SubLista
4   j, #varial de cálculo
5   #r, #resto da divisão inteira de n por tc.
6   #q, # quociente da divisão inteiro de n por tc
7   limite, #bound
8   step, #passo
9   Lista; #lista final
9 Lista:=[];
10 x:= Zero(FG);
11 if base = List(UnderlyingMagma(FG) ) then ## rever este if
12   n:= Size(SubLista);
13 else

```

```

14  n:= Size(LeftActingDomain(FG))^Size(base);
15  fi;
16
17  #definindo o Step de visualização
18  if silentstep = -1 then
19    step:= n; #silencio completo
20  elif silentstep = 0 then
21    step:= 10000;
22  else
23    step:=silentstep ;
24  fi;
25  #definindo o limite do cálculo
26  if bound = 0 then
27    limite := n;
28  else
29    limite := bound;
30  fi;
31  j:= -1+c;
32
33  if SubLista = FG then # Caso em que não há sublista
34  while j < limite do
35    x:=Vetorize2GR (j , FG, base);
36    if detalhes = 1 then
37      #Código a ser vizualizado
38    fi;
39    if EvalString(expr)= Zero(FG) then
40      if ExportType =0 then
41        Add(Lista, x);
42      elif ExportType =1 then
43        Add(Lista, j);
44      elif ExportType = 2 then
45        Add(Lista, Num2b62 (j));
46      fi;
47    else
48      if (j mod step) < tc then
49        Print("Testando indice :", j, "\n \n");
50      else
51        fi;
52      fi;
53  j:=j+tc; #aqui tc é o tamanho do passo onde tc é o número de cores

```

```

54 od;
55 else #caso seja executado em uma sublista de FG
56 j:= 0+c;
57 while j < limite do
58   x:= SubLista[j];
59   if detalhes = 1 then
60     #Codigo de visualização
61   fi;
62   if EvalString(expr)= Zero(FG) then
63     if ExportType =0 then
64       Add(Lista, x);
65     elif ExportType =1 then
66       Add(Lista, j); # com relacao a sublista
67     elif ExportType = 2 then
68       Add(Lista, Num2b62 (j)); # com relacao a sublista
69     fi;
70   else
71     if (j mod step) <tc then
72       #vizualização em passo step
73     else
74     fi;
75   fi;
76 j:=j+tc; tc tamanho do passo onde tc é o número de cores.
77 od;
78 fi;

```


Referências Bibliográficas

- [1] Baart R., Boothby T., Cramwinckel J., Fields J., Joyner D., Miller R., Minkes E., Roijackers E., Ruscio L., Tjhai C.: GUAVA-a GAP package. Version 3.12 (21/05/2012). <http://www.gap-system.org/Packages/guava.html>.
- [2] Bakshi, G. K. and Maheshwary, S. Extremely strong Shoda pairs with GAP - arXiv e-prints, 2015, arXiv:1503.05674
- [3] Broche O., del Río Á.: Wedderburn decomposition of finite group algebras. *Finite Fields Appl.* 13(1), 71-79 (2007).
- [4] Broche O., Herman A., Konovalov A., Olivieri A., Olteanu G., del Río Á., Van Gelder I.: Wedderga- Wedderburn Decomposition of Group Algebras. Version 4.6.0 (2013). <http://www.cs.st-andrews.ac.uk/alexk/wedderga>, <http://www.gap-system.org/Packages/wedderga.html>.
- [5] The GAP Group: GAPGroups, Algorithms, and Programming, Version 4.6.5 (2013). <http://www.gap-system.org>.
- [6] Golay, M.J.E., Notes on digital coding, Proc. IRE, 37, 657. 1949.
- [7] Grassl, Markus. Bounds on the minimum distance of linear codes and quantum codes. Online available at <http://www.codetables.de>. Acessado em 20-11-2019.
- [8] Jespers, E., del Río, A. Orders and Generic Constructions of Units , Walter de Gruyter GmbH Co KG, Nov 13, 2015 - Mathematics
- [9] Jespers E., Leal G., Paques A.: Central idempotents in the rational group algebra of a finite nilpotent group. *J. Algebra Appl.* 2(1), 57-62 (2003).
- [10] Jespers E., E.G. Goodaire and C. Polcino Milies, Alternative loop rings, *Elsevier*, Amsterdam, 1996

- [11] Jespers E., del Río Á., Olteanu G., Van Gelder I.: Group rings of finite strongly monomial groups: central units and primitive idempotents. *J. Algebra* 387, 99-116 (2013).
- [12] Olteanu, G. ; Van Gelder, I. Construction of minimal non-Abelian left group codes. *Des. Codes Cryptogr.* (2015) 75:359-373
- [13] C. Polcino Milies; Sehgal, S. K. *An Introduction to Group Rings*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (2002)
- [14] Olivieri A., del Río Á., Simón J.: On monomial characters and central idempotents of rational group algebras. *Commun. Algebra* 32(4), 1531-1550 (2004).
- [15] Olivieri, Aurora; del Río, Ángel An algorithm to compute the primitive central idempotents and the Wedderburn decomposition of a rational group algebra. *J. Symbolic Comput.* 35 (2003), no. 6, 673-687.
- [16] Olteanu, G., Computing the Wedderburn decomposition of group algebras by the Brauer-Witt theorem, *Math. Comp.*, 76 (258) (2007), 1073-1087 (electronic).
- [17] Olteanu G., Van Gelder I.: Finite group algebras of nilpotent groups: a complete set of orthogonal primitive idempotents. *Finite Fields Appl.* 17(2), 157-165 (2011).
- [18] Sabin R., Lomonaco S.: Metacyclic error-correcting codes. *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* 6(3), 191-210 (1995).
- [19] SageMath, the Sage Mathematics Software System, The Sage Developers, 2019, <https://www.sagemath.org>.
- [20] Shannon C. E. , A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, 1948