Coincidências em codimensão um e bordismo

Gustavo de Lima Prado

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
Coorientador: Prof. Dr. Ulrich Koschorke

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu
auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2015

Coincidências em codimensão um e bordismo

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 11/02/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (orientador) - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Lucília Daruiz Borsari - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Alice Kimie Libardi - UNESP
- Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto - ICMC-USP
- Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher - UFSCar

Agradecimentos

Eu agradeço primeiramente a Deus. Na sequência agradeço aos meus orientadores, Daciberg Lima Gonçalves e Ulrich Koschorke, pela disposição, pela paciência, pela bondade, pela hospitalidade, pela riqueza de ideias e pelo tempo (que não foi pouco). Agradeço ainda à minha família, à minha noiva e aos meus amigos por me apoiarem ao longo da jornada. Agradeço por todas as oportunidades, por todas as experiências e por todos os momentos que fizeram de mim quem eu sou e que fizeram deste trabalho a minha tese.

Resumo

PRADO, G. L. **Coincidências em codimensão um e bordismo**. 2014. 135 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho, estudamos coincidências entre duas aplicações contínuas $f_1, f_2 : X^{n+1} \rightarrow Y^n$, onde X, Y são variedades diferenciáveis, conexas, sendo X fechada (compacta e sem bordo) e Y sem bordo. Dizemos que $x \in X$ é uma coincidência do par de aplicações (f_1, f_2) se $f_1(x) = f_2(x)$. Em codimensão um, temos que o conjunto de coincidências $Coin(f_1, f_2)$ é genericamente uma subvariedade de X de dimensão um. Dizemos que (f_1, f_2) é deformável a livre de coincidência se existe um par de aplicações (f'_1, f'_2) tal que f'_i é homotópica a f_i , $i = 1, 2$, e $Coin(f'_1, f'_2)$ é o conjunto vazio. Em [K-04] e [K-06], Koschorke introduz o invariante de bordismo normal $\tilde{\omega}(f_1, f_2) \in \Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$, que envolve a subvariedade $Coin(f_1, f_2)$, o qual, em particular, é nulo quando o par de aplicações (f_1, f_2) é deformável a livre de coincidência. No caso de codimensão um, quando o domínio é a esfera ($X = S^{n+1}$) e quando $(f_1, f_2) = (y_0, f)$ (onde y_0 denota uma aplicação constante), consideramos dois homomorfismos $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ que, juntos, sob certas hipóteses, determinam $\tilde{\omega}(y_0, f)$. Neste trabalho, calculamos $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ para vários espaços e, em particular, para fibrados

esféricos sobre esferas, obtemos que $\omega'' = 0$ se, e somente se, Y é trivial ou Y não é um S^2 -fibrado sobre S^4 . Agora, um resultado tipo Wecken é um resultado que, sob determinadas condições sobre os espaços, diz que o número mínimo de componentes conexas por caminhos do conjunto de coincidências é igual ao número de Nielsen, isto é, $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$, para todo (f_1, f_2) . Em [K-06], Koschorke obtém resultados tipo Wecken para $n = 1$ e para a dimensão estável (que, no caso de codimensão um, significa $n \geq 4$). Neste trabalho, em codimensão um, obtemos, quando o domínio é a esfera ($X = S^{n+1}$), que existe um resultado tipo Wecken para $n = 2, 3$. Portanto, em codimensão um, quando o domínio é a esfera, existe um resultado tipo Wecken para toda dimensão. Finalmente, também estudamos raízes quando o domínio é o espaço projetivo real $\mathbb{R}P(3)$ e o contradomínio é a esfera S^2 e também obtemos um resultado tipo Wecken neste caso.

Palavras-chave: coincidência, bordismo normal, codimensão um, propriedade de Wecken, raiz, fibração, cobordismo normal.

Abstract

PRADO, G. L. **Coincidences in codimension one and bordism**. 2014. 135 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work, we study coincidences between two maps $f_1, f_2 : X^{n+1} \rightarrow Y^n$, where X, Y are smooth manifolds, connected, being X closed (compact and without boundary) and Y without boundary. We say that $x \in X$ is a coincidence of the pair of maps (f_1, f_2) if $f_1(x) = f_2(x)$. In codimension one we have that the coincidence set $Coin(f_1, f_2)$ is generically a submanifold of X of dimension one. We say that (f_1, f_2) is loose if there exists a pair of maps (f'_1, f'_2) such that f'_i is homotopic to f_i , $i = 1, 2$, and $Coin(f'_1, f'_2)$ is the empty set. In [K-04] and [K-06], Koschorke introduces the normal bordism invariant $\tilde{\omega}(f_1, f_2) \in \Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$, involving the submanifold $Coin(f_1, f_2)$, that, in particular, is null when the pair of maps (f_1, f_2) is loose. In the codimension one case, when the domain is the sphere ($X = S^{n+1}$), and when $(f_1, f_2) = (y_0, f)$ (where y_0 denotes a constant map), we consider two homomorphisms $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ and $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ which together, under some hypothesis, determine $\tilde{\omega}(y_0, f)$. In this work, we calculate $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ for several spaces and, in particular, for sphere bundles over spheres we obtain that $\omega'' = 0$ if and only if Y is trivial or Y is not an S^2 -bundle

over S^4 . Now, a Wecken type result is a result which, under some conditions about the spaces, asserts that the minimum number of path-components of the coincidence set is equal to the Nielsen number, that is, $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$ for all (f_1, f_2) . In [K-06], Koschorke obtains Wecken type results for $n = 1$ and for the stable dimension (which, in the codimension one case, means $n \geq 4$). In this work, in codimension one, we obtain, when the domain is the sphere ($X = S^{n+1}$), that there exists a Wecken type result for $n = 2, 3$. Hence, in codimension one, when the domain is the sphere, there exists a Wecken type result for every dimension. Finally, we also study roots when the domain is the real projective space $\mathbb{R}P(3)$ and the target space is the sphere S^2 and we also obtain a Wecken type result in this case.

Keywords: coincidence, normal bordism, codimension one, Wecken property, root, fibration, normal cobordism.

Índice

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Convenções e notações	4
1.2 Sobre fibrações e fibrados	5
1.3 Sobre CW-complexos	16
1.4 Sobre variedades	19
1.5 Coincidências	21
1.6 Topologia diferencial	28
1.7 Bordismo	31
1.8 Bordismo e coincidências	37
1.8.1 Sobre o invariante $\omega(f_1, f_2)$	37
1.8.2 Sobre o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$	38
1.8.3 Sobre o número de Nielsen $\tilde{N}(f_1, f_2)$	40
1.8.4 Resultados tipo Wecken	41
1.8.5 Raízes e bordismo	42
1.8.6 Auto-coincidências e bordismo	44
2 Coincidências em codimensão 1, sendo o domínio uma esfera	46
2.1 Particularidades sobre o invariante	47

2.2	Cálculos do invariante	56
2.2.1	ω'' para esferas	57
2.2.2	ω'' para espaços projetivos reais	58
2.2.3	ω'' para superfícies e 3-variedades	59
2.2.4	Sobre o homomorfismo ω'	60
2.3	Um teorema tipo Wecken	62
2.4	Mais cálculos de ω''	64
2.4.1	Espaços projetivos complexos e quaterniônicos	65
2.4.2	Fibrados esféricos sobre esferas	66
2.4.3	Variedades de Stiefel	83
2.5	Cálculos parciais de ω''	85
2.5.1	4-variedades	86
2.5.2	F^a -fibrados sobre B^b	88
2.5.3	Variedades de Grassmann	92
3	Raízes em codimensão 1, sendo o domínio uma 3-variedade	96
3.1	X uma forma espacial esférica e $\chi(Y) \leq 0$	97
3.2	$X = \mathbb{R}P(3)$ e $Y = S^2$	98
3.2.1	Particularidades sobre o invariante	98
3.2.2	Aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2	99
3.2.3	Cálculos do invariante	106
	Referências Bibliográficas	116

Introdução

Neste trabalho, estudamos coincidências em codimensão um, usando bordismo normal. Dadas aplicações contínuas $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$, na teoria de coincidência, estamos interessados em coincidências entre f_1 e f_2 , isto é, em pontos $x \in X$ tais que $f_1(x) = f_2(x)$. Mais especificamente, aqui estamos interessados no comportamento do conjunto de coincidências $Coin(f'_1, f'_2)$, onde f'_i é homotópica a f_i , $i = 1, 2$. Por exemplo, ora queremos saber se (f_1, f_2) é deformável a livre de coincidência (isto é, se existe (f'_1, f'_2) homotópica a (f_1, f_2) tal que $Coin(f'_1, f'_2) = \emptyset$), ora queremos calcular o número mínimo de coincidências $MC(f_1, f_2) := \min\{\#Coin(f'_1, f'_2) | f'_i \simeq f_i\}$, ora queremos calcular o número mínimo de componentes de coincidências, $MCC(f_1, f_2) := \min\{\#\pi_0(Coin(f'_1, f'_2)) | f'_i \simeq f_i\}$.

Um avanço significativo na teoria de coincidência se deu entre 1923 e 1927, quando Lefschetz ([L-23],[L-25],[L-26],[L-27]) deu condições suficientes para a existência de coincidência, para variedades orientáveis fechadas de mesma dimensão. Após este resultado, vários outros seguiram para a teoria de ponto fixo, inclusive um resultado devido a Wecken ([We-41],[We-412],[We-42]), que diz que, sob determinadas hipóteses sobre o espaço, uma auto-aplicação de um complexo simplicial sempre pode ser deformada a uma outra com exatamente o número de Nielsen de pontos fixos. Em 1955, Schirmer ([Sc-55]), em sua tese, demonstrou um resultado tipo Wecken para coincidência, para

variedades orientáveis fechadas de mesma dimensão maior ou igual a 3. Até recentemente, as questões para coincidência têm sido estudadas predominantemente em codimensão zero, isto é, quando os espaços envolvidos têm a mesma dimensão. Para maiores detalhes, vide [Brow-99] e [Go-05].

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. No capítulo 1, apresentamos definições e resultados gerais que são utilizados por todo o trabalho. Em particular, expomos um pouco das teorias de coincidência, de auto-coincidência, de raiz e um pouco da teoria de bordismo neste capítulo. Daí, introduzimos alguns conceitos e resultados para coincidência, usando bordismo. Por exemplo, apresentamos, para pares (f_1, f_2) de aplicações contínuas, os invariantes $\omega(f_1, f_2)$ e $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ (que pertencem a grupos de bordismo normal), os quais necessariamente se anulam quando o par de aplicações contínuas é deformável a livre de coincidência (vide [K-04] e [K-06]).

No capítulo 2, estamos interessados em estudar o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ quando o domínio das aplicações é uma esfera $(n+1)$ -dimensional e o contradomínio é uma variedade sem bordo, conexa, n -dimensional, lembrando que tal invariante pertence ao grupo de bordismo normal $\Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$. Neste contexto, veremos que tal grupo é isomorfo a $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, deixando então de depender do par (f_1, f_2) de aplicações contínuas e do fibrado virtual $\tilde{\varphi}$. Além disso, veremos que é possível decompor $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ na soma de $\tilde{\omega}(f_1, f_1)$, no caso especial de auto-coincidências, com $\tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$, no caso especial de raízes. Dando mais ênfase a este último, definiremos dois homomorfismos $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ que ajudam no cálculo do número de Nielsen $\tilde{N}(y_0, f)$, para toda aplicação contínua $f : S^{n+1} \rightarrow Y$. Daí, estudando tais homomorfismos para superfícies e 3-variedades, nós obtemos um resultado tipo Wecken para $n = 2, 3$ (teorema 159), o qual diz que o número mínimo de componentes de coincidências $MCC(f_1, f_2)$ é igual ao número de

Nielsen $\tilde{N}(f_1, f_2)$, para quaisquer aplicações contínuas $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$, com $n = 2, 3$. Daí, juntando com resultados tipo Wecken de Koschorke ([K-06]), enunciamos tal resultado para toda dimensão $n \geq 1$. Por fim, nós calculamos ω'' para vários espaços Y (proposições 151, 152, 153, 164, 165, 178, entre outros resultados) e, em particular, nós obtemos que tal homomorfismo é identicamente nulo para todo fibrado esférico sobre esfera, com exceção de S^2 -fibrados não triviais sobre S^4 , quando tal homomorfismo, restrito a $\mathbb{Z}$, é injetor (proposição 166 e teorema 171).

No capítulo 3, estamos interessados em estudar, para o par (y_0, f) , quando o número mínimo de componentes de coincidências $MCC(y_0, f)$ é igual ao número de Nielsen $\tilde{N}(y_0, f)$, isto é, queremos saber quando o par (y_0, f) satisfaz a propriedade de Wecken, supondo que o domínio X de f é uma 3-variedade fechada, conexa e o contradomínio Y de f é uma superfície fechada, conexa. Mais especificamente, neste capítulo, estudamos a validade da propriedade de Wecken em algumas situações quando X é uma forma espacial esférica, a saber: sendo X uma forma espacial esférica qualquer e $Y = K(\pi, 1)$, nós obtemos que $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 0$ sempre (proposição 192); e sendo $X = \mathbb{R}P(3)$ e $Y = S^2$, nós classificamos, a menos de homotopia, as aplicações contínuas (teorema 196) e nós obtemos que $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 1$ se f não é homotópica a aplicação constante e $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 0$, caso contrário (teorema 206).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Convenções e notações

Por *variedade*, entenderemos variedade C^∞ e por *aplicação diferenciável*, entenderemos aplicação diferenciável C^∞ . Ainda, aqui, uma variedade é suposta ser um espaço topológico Hausdorff satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade. Denotaremos o bordo de uma variedade M por ∂M e se M é uma variedade sem bordo, escrevemos $\partial M = \emptyset$. Por *variedade fechada*, entenderemos variedade compacta, sem bordo e por *variedade aberta*, entenderemos variedade não compacta, sem bordo. Ainda, em geral, denotaremos uma variedade M de dimensão m por M^m . Denotaremos por I o intervalo compacto $[0, 1]$.

Denotaremos por pr_i , $i = 1, 2$, a projeção de um produto cartesiano (ou de um subconjunto deste) no i -ésimo fator. Denotaremos a aplicação identidade de X por 1_X e uma aplicação constante igual a $x \in X$ por c_x . Ainda, dado um ponto $x \in X$, x denotará tanto o próprio ponto, como o conjunto unitário $\{x\}$, como a aplicação constante c_x . Para um conjunto X , denotaremos a cardinalidade de X , em geral, por $\#X$. Ainda, denotaremos a união disjunta

por $\dot{\cup}$.

Denotaremos as relações entre espaços homeomorfos por $\approx$, espaços com o mesmo tipo de homotopia por $\sim$, espaços isomorfos por $\cong$ e aplicações homotópicas por $\simeq$. Se $H : X \times I \rightarrow Y$ é uma homotopia, denotaremos $H_t := H(-, t)$, para todo $t \in I$. Ainda, denotaremos por $H : f \simeq g$ uma homotopia H tal que $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Denotaremos por $\alpha \simeq_{\partial I} \beta$ uma homotopia com extremos fixados, sendo $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ caminhos. Denotaremos por $\pi_n(X)$ o grupo $\pi_n(X, x_0)$, para algum $x_0 \in X$, lembrando que tal grupo em geral depende do ponto base, uma vez que é calculado na componente conexa por caminhos que contém tal ponto. Da mesma forma, denotaremos por $\pi_0(X)$ o conjunto $\pi_0(X, x_0)$, para algum $x_0 \in X$. Finalmente, denotaremos o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de X em Y por $[X, Y]$.

1.2 Sobre fibrações e fibrados

Em toda a seção, E , B e F são espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua.

Nesta seção, apresentamos definições e resultados sobre fibrações e fibrados, além de vários exemplos, que são utilizados por todo o trabalho.

Definição 1 (Propriedade do levantamento de homotopia). *Seja X um espaço topológico. Dizemos que p satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia para X , se, dadas $F : X \times I \rightarrow B$ e $\tilde{f} : X \rightarrow E$ aplicações contínuas tais que $p \circ \tilde{f}(x) = F(x, 0)$, existe $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ aplicação contínua tal que $p \circ \tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}(x)$, para todo $x \in X$.*

Considerando $\tilde{f} : X \times 0 \rightarrow E$, $\tilde{f}(x, 0) := \tilde{f}(x)$, para todo $x \in X$, obtemos o

seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} X \times 0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Definição 2. Dizemos que a tripla (E, p, B) , ou a aplicação $p : E \rightarrow B$, é uma **fibração** (de Hurewicz), se p satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia, para todo espaço topológico X .

Chamamos E , B e $p^{-1}(b)$, com $b \in B$, respectivamente, de espaço total, espaço base e fibra (sobre b) da fibração. Denotamos por $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$, uma fibração $p : E \rightarrow B$, com $F = p^{-1}(b_0)$, para algum $b_0 \in B$.

Exemplo 3. A projeção, pr_1 , do produto cartesiano $B \times F$ em B é uma fibração, chamada de **fibração trivial**.

Definição 4. Seja $f : B' \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Definimos o pullback de f e p como sendo o espaço topológico $E' := \{(b', e) \in B' \times E : f(b') = p(e)\}$ junto com aplicações contínuas p', f' dadas por $p'(b', e) = b'$ e $f'(b', e) = e$. Notemos que $p \circ f' = f \circ p'$, ou seja, o diagrama geométrico abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f'} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Observação 5. Notemos que o pullback de f e p tem a seguinte propriedade universal: para todo espaço topológico E'' junto com aplicações contínuas $f'' : E'' \rightarrow E$ e $p'' : E'' \rightarrow B'$ tais que $p \circ f'' = f \circ p''$, existe uma única

aplicação contínua $h : E'' \rightarrow E'$ tal que $f' \circ h = f''$ e $p' \circ h = p''$.

Exemplo 6. Com as notações da definição 4, se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração, então $f^*(p) := p' : E' \rightarrow B'$ também é uma fibração, chamada de fibração induzida de p por f , ou de **pullback** de p por f . Ainda, chamamos $f^*(E) := E'$ de pullback de E (ou de p) por f .

Definição 7. Sejam $p_1 : E_1 \rightarrow B$, $p_2 : E_2 \rightarrow B$ fibrações. Dizemos que uma aplicação contínua $g : E_1 \rightarrow E_2$ **preserva fibra** sobre B , se $p_2 \circ g = p_1$. Dizemos que uma homotopia $H : E_1 \times I \rightarrow E_2$ preserva fibra sobre B , se $p_2 \circ H_t = p_1$, para todo $t \in I$. Dizemos que p_1 e p_2 , ou E_1 e E_2 , têm o mesmo **tipo de homotopia** sobre B , ou têm o mesmo tipo de homotopia via fibra, se existem aplicações contínuas $g_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $g_2 : E_2 \rightarrow E_1$ e homotopias $H_1 : g_2 \circ g_1 \simeq 1_{E_1}$, $H_2 : g_1 \circ g_2 \simeq 1_{E_2}$ que preservam fibra sobre B . Neste caso, g_1, g_2 são chamadas de **equivalências de homotopia** sobre B , ou **equivalências de homotopia via fibra**.

Ainda, dizemos que E_1 e E_2 são **homeomorfos** sobre B , se existe um homeomorfismo $g : E_1 \rightarrow E_2$ que preserva fibra sobre B .

Teorema 8. *Sejam $f_1, f_2 : B' \rightarrow B$ aplicações contínuas tais que $f_1 \simeq f_2$. Se $p : E \rightarrow B$ é uma fibração, então os pullbacks $f_1^*(p)$ e $f_2^*(p)$ têm o mesmo tipo de homotopia sobre B' .*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (teorema 14, página 102).

Definição 9. *Seja $p : E \rightarrow B$ uma fibração. Uma **seção** (ou seção transversal) de p é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$.*

Observação 10. *Seja (E, p, B) uma fibração. Sejam $b_0 \in B$ e $F := p^{-1}(b_0)$. Seja $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Dada $[g] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$, com $g : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (B, b_0)$, consideramos $g' : (\frac{S^n \times I}{S^n \times 0}, S^n \times 1) \rightarrow (B, b_0)$, $g'(\overline{(x, t)}) := g(tx)$, para todo $(x, t) \in S^n \times I$. Como p é uma fibração, existe $\tilde{G} : \frac{S^n \times I}{S^n \times 0} \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{G} = g'$. Daí, $[\tilde{G}_1] \in \pi_n(F)$ e definimos $\partial_{n+1} : \pi_{n+1}(B) \rightarrow \pi_n(F)$ como sendo dada por $\partial_{n+1}([g]) = [\tilde{G}_1]$.*

Teorema 11. *Se $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração, então existe uma sequência exata*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) &\xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(E) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \pi_2(B) &\xrightarrow{\partial_2} \pi_1(F) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_1(E) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(F) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \pi_0(E) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_0(B), \end{aligned}$$

chamada de **sequência de homotopia da fibração p** , onde $i : F \hookrightarrow E$ é a inclusão e ∂_{n+1} é como acima, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (teorema 10, página 377). Observemos que, se X é um espaço topológico, então $\pi_n(X)$ é um grupo para $n \geq 1$ e, em geral, um conjunto para $n = 0$. Na verdade, $\pi_n(X)$ é um grupo abeliano para $n \geq 2$. Em particular, a sequência acima é uma sequência de grupos e homomorfismos de grupos em geral até $\pi_1(B)$.

Definição 12. Dizemos que a quádrupla (E, p, B, F) , ou a aplicação $p : E \rightarrow B$, ou o espaço E , é um **fibrado** (localmente trivial) sobre B com fibra F , ou um F -fibrado sobre B , se existe uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de B e, para cada $U \in \mathcal{C}$, existe um homeomorfismo $\varphi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \varphi_U : U \times F \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator. Notemos que $p^{-1}(b) \approx F$, para todo $b \in B$.

Chamamos E , B , F e p , respectivamente, de espaço total, espaço base, fibra e projeção do fibrado.

Observação 13. Notemos que podemos ver E como sendo $\dot{\bigcup}_{b \in B} p^{-1}(b)$ ou $\bigcup_{b \in B} \{b\} \times p^{-1}(b)$.

Observação 14. Se ξ é um fibrado, denotamos $\xi := (E(\xi), p_\xi, B(\xi), F(\xi))$.

Exemplo 15. A quádrupla $(B \times F, pr_1, B, F)$ é um fibrado, chamado de **fibrado produto**.

Exemplo 16. Se $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma projeção de revestimento, com X conexo, então, dado $x_0 \in X$, a quádrupla $(\tilde{X}, p, X, p^{-1}(x_0))$ é um fibrado, com fibra discreta.

Exemplo 17. Com as notações da definição 4, se $\xi = (E, p, B, F)$ é um fibrado, então $f^*(\xi) := (E', p', B', F)$ também é um fibrado, chamado de **fibrado induzido de ξ (ou de p) por f** , ou de **pullback de ξ (ou de p) por f** . Ainda, chamamos $f^*(E) := E'$ de **pullback de E (ou de p , ou de ξ) por f** .

Exemplo 18. Sejam $\xi_1 = (E_1, p_1, B_1, F_1)$ e $\xi_2 = (E_2, p_2, B_2, F_2)$ fibrados. Então $\xi_1 \times \xi_2 := (E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2, F_1 \times F_2)$ também é um fibrado.

Exemplo 19. Sejam ξ_1, ξ_2 fibrados sobre B . Seja $d : B \rightarrow B \times B, b \mapsto (b, b)$, a aplicação diagonal. Então $\xi_1 \oplus \xi_2 := d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ é um fibrado, chamado de **soma de Whitney de ξ_1 e ξ_2** .

Definição 20. Seja $\text{Homeo}(F)$ o grupo dos homeomorfismos de F em F e seja G um subgrupo de $\text{Homeo}(F)$. Seja $\xi = (E, p, B, F)$ um fibrado. Com as notações da definição 12, dizemos que ξ tem **grupo estrutural** G , se $\varphi_{V,b}^{-1} \circ \varphi_{U,b} \in G$, para todo $b \in U \cap V$, para todo $U, V \in \mathcal{C}$, onde $\varphi_{U,b}, \varphi_{V,b} : F \rightarrow p^{-1}(b)$ são dadas por $x \mapsto \varphi_U(b, x), x \mapsto \varphi_V(b, x)$.

Exemplo 21. O grupo $\text{Homeo}(F)$ é sempre um grupo estrutural para um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$. Se ξ é o fibrado produto, então ξ tem grupo estrutural trivial $G = \{1_F\}$. Se E, B, F são variedades e p é uma aplicação diferenciável, então ξ tem grupo estrutural $\text{Diff}(F)$, o grupo dos difeomorfismos de F em F .

Definição 22. Sejam $\xi_1 = (E_1, p_1, B, F)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B, F)$ fibrados sobre B com fibra F . Dizemos que ξ_1, ξ_2 são **equivalentes** (sobre B), ou **isomorfos** (sobre B), se existe um homeomorfismo $h : E_1 \rightarrow E_2$ que preserva fibra sobre B , ou seja, que é tal que $p_2 \circ h = p_1$. Escrevemos $\xi_1 \cong \xi_2$. Nesta situação, dizemos que $h : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ é um **isomorfismo de fibrados** sobre B . Ainda, dizemos que um fibrado é **trivial**, se ele é equivalente ao fibrado produto.

$$\begin{array}{ccc}
 F & & F \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E_1 & \xrightarrow{h} & E_2 \\
 \searrow p_1 & & \swarrow p_2 \\
 & B &
 \end{array}$$

Se ξ_1, ξ_2 têm grupo estrutural G , dizemos que eles são equivalentes (sobre B , sobre G) se, além disto, $h|_F : F \rightarrow F$ pertence a G .

Definição 23. Seja $\xi = (E, p, B, F)$ um fibrado. Dizemos que ξ é um **fibrado vetorial** (real) se F é um espaço vetorial real e ξ tem grupo estrutural $GL(F)$, o grupo linear geral de F , isto é, o grupo dos isomorfismos de F em

F . Se $\dim_{\mathbb{R}} F = k$, isto é, se $F \cong \mathbb{R}^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, dizemos que ξ é um k -fibrado vetorial (real) e o denotamos por ξ^k . Ainda, se ξ^k é trivial, então o denotamos por $\mathbb{R}^k$ ou simplesmente por $\mathbb{R}$ (quando não houver confusão).

Observação 24. Um isomorfismo $h : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ de fibrados vetoriais sobre B é tal que $h : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ é um homeomorfismo que preserva fibra sobre B e $h|_F : F(\xi_1) \rightarrow F(\xi_2)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Sejam, ξ^k, η^l fibrados vetoriais sobre B e $f : B' \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Então o pullback de ξ por f é um k -fibrado vetorial sobre B' e a soma de Whitney de ξ e η é um $(k + l)$ -fibrado vetorial sobre B .

Exemplo 25. Seja M^m uma variedade. Seja $T(M) = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_x(M))$ o conjunto de todos os “vetores tangentes” a M , onde $T_x(M) \cong \mathbb{R}^m$ é o espaço tangente a M em x . Então $\tau_M = (T(M), p, M, \mathbb{R}^m)$, onde $p(x, v) = x$, é um fibrado vetorial, chamado de **fibrado tangente** de M .

Exemplo 26. Sejam $M^m \subset N^n \subset \mathbb{R}^k$ variedades. Seja $E = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times (T_x(M))^\perp)$ o subconjunto de $T(N)$ de todos os “vetores normais” a M , onde $T_x(M) \oplus (T_x(M))^\perp \cong T_x(N)$. Então $\nu(M, N) = (E, q, M, \mathbb{R}^{n-m})$, onde $q(x, v) = x$, é um fibrado vetorial, chamado de **fibrado normal** de M em N . Desta forma, $\tau_M \oplus \nu(M, N) \cong (\tau_N)|_M$. Dizemos que um fibrado $\nu(M)$ é um fibrado normal de M se $\tau(M) \oplus \nu(M)$ é trivial. Por exemplo, $\nu(M, \mathbb{R}^k)$ é um fibrado normal de M .

Definição 27. Sejam ξ um fibrado vetorial e M uma variedade. Dizemos que ξ é **estavelmente trivial**, se $\xi \oplus \mathbb{R}^s \cong \mathbb{R}^t$, para algum $s, t \in \mathbb{N}$. Dizemos que M é (estavelmente) **paralelizável**, se τ_M é (estavelmente) trivial.

Exemplo 28. A esfera S^n é estavelmente paralelizável, para todo $n \geq 1$, pois $\tau_{S^n} \oplus \mathbb{R}^1 \cong \tau_{S^n} \oplus \nu(S^n, \mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$, e é paralelizável se, e só se, $n = 1, 3, 7$.

O espaço projetivo real $\mathbb{RP}(n)$ é paralelizável se, e só se, $n = 1, 3, 7$. Para maiores detalhes, vide [MiSta-74] (página 47) e [Hu-94] (página 118). Toda 3-variedade fechada orientável é paralelizável (teorema de Stiefel, [Sti-35]). Todo grupo de Lie é paralelizável.

Teorema 29. *Sejam $f_1, f_2 : B' \rightarrow B$ aplicações contínuas tais que $f_1 \simeq f_2$, com B' é paracompacto. Se ξ é um fibrado vetorial sobre B , então os pullbacks $f_1^*(\xi)$ e $f_2^*(\xi)$ são isomorfos sobre B' .*

Tal resultado pode ser encontrado em [Hu-94] (página 30).

Observação 30. *Dizemos que um fibrado ξ é um **fibrado esférico**, se $F(\xi) \approx S^a$, para algum $a \in \mathbb{N}^*$. Consideremos um $(k+1)$ -fibrado vetorial $\xi = (E, p, B, \mathbb{R}^{k+1})$, com B paracompacto e Hausdorff. Então ξ tem grupo estrutural $O(k+1)$ ($SO(k+1)$). Seja $S(E) \subset E$ o subconjunto de todos os vetores unitários de E . Então $S(\xi) := (S(E), p|_S, B, S^k)$ é o **fibrado esférico associado ao fibrado vetorial** ξ . Notemos que $S(\xi)$ tem grupo estrutural $O(k+1)$ ($SO(k+1)$). Lembremos que $SO(k+1) \subset O(k+1) \subset GL(k+1) \subset \text{Homeo}(\mathbb{R}^{k+1})$, onde $GL(k+1) := GL(\mathbb{R}^{k+1})$ é o grupo linear geral em $k+1$ dimensões, $O(k+1)$ é o **grupo ortogonal** em $k+1$ dimensões (formado pelos isomorfismos de $\mathbb{R}^{k+1}$ em $\mathbb{R}^{k+1}$ que preservam norma, ou equivalentemente formado pelas matrizes ortogonais de ordem $k+1$) e $SO(k+1)$ é o **grupo especial ortogonal** em $k+1$ dimensões (formado pelas matrizes ortogonais de ordem $k+1$, com determinante igual a 1).*

Definição 31. *Seja $p : E \rightarrow B$ um fibrado. Uma **seção** (ou **seção transversal**) de p é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que $p \circ s = 1_B$. Se p é um fibrado vetorial, dizemos que s é uma **seção que não se anula** se $s(b)$ é um vetor não nulo, para todo $b \in B$. Ainda, chamamos uma seção de τ_M de **seção de M** ou de **campo de vetores** em M .*

Observação 32. *Todo fibrado vetorial admite uma seção, a saber a seção nula, $b \mapsto \vec{0}_b$.*

A seguir, fazemos uma observação sobre classificação de fibrados.

Observação 33. *Seja $\xi = (E, p, S^b, F)$ um fibrado sobre S^b . De modo geral, tais fibrados são classificados, a menos de isomorfismo, por $\pi_{b-1}(\text{Homeo}(F))$. Se, agora, ξ é um $(a+1)$ -fibrado vetorial, então quem classifica os fibrados ξ é $\pi_{b-1}(GL(a+1))$ e quem classifica os fibrados $S(\xi)$ é $\pi_{b-1}(O(a+1))$ (vide [Hu-94], página 120). Notemos que $\pi_{b-1}(\text{Homeo}(F)) = \pi_{b-1}(\text{Homeo}^+(F))$, $\pi_{b-1}(GL(a+1)) = \pi_{b-1}(GL^+(a+1))$ e $\pi_{b-1}(O(a+1)) = \pi_{b-1}(SO(a+1))$, onde $\text{Homeo}^+(F)$ é a componente que contém a identidade e $GL^+(a+1)$ é a componente que contém a identidade (formada pelas matrizes invertíveis de ordem $a+1$, com determinante positivo). Analogamente, se E, F são variedades e p é uma aplicação diferenciável, então quem classifica é $\pi_{b-1}(\text{Diff}(F)) = \pi_{b-1}(\text{Diff}^+(F))$.*

O resultado abaixo nos diz que, sob determinadas hipóteses, um fibrado é uma fibração.

Teorema 34. *Se $p : E \rightarrow B$ é um fibrado, com B paracompacto e Hausdorff, então p é uma fibração.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (teorema 13, página 96). Desta forma, se B é uma variedade, então todo fibrado $p : E \rightarrow B$ é uma fibração, pois B é em particular um espaço topológico paracompacto e Hausdorff.

Exemplo 35. *Sobre aplicações de Hopf e espaços projetivos:*

Sejam $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Consideremos a ação livre de S^1 sobre S^3 dada por $S^1 \times S^3 \ni (\lambda, (z_1, z_2)) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Consideremos o espaço de órbitas, $\frac{S^3}{S^1}$,

da ação. Temos que a aplicação quociente $p : S^3 \rightarrow \frac{S^3}{S^1} \approx S^2$ é uma fibração chamada de **aplicação de Hopf**, ou **fibração de Hopf**.

Mais geralmente, seja $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ e consideremos a ação livre de S^1 sobre S^{2n+1} análoga à anterior. Consideremos o espaço de órbitas, $\mathbb{C}P(n) := \frac{S^{2n+1}}{S^1}$, da ação. Temos que a projeção $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P(n)$ é chamada de aplicação de Hopf, ou fibração de Hopf, ou **fibração de Hopf sobre $\mathbb{C}P(n)$** . Note-mos ainda que $(S^{2n+1}, p, \mathbb{C}P(n), S^1)$ é um S^1 -fibrado sobre $\mathbb{C}P(n)$. De uma outra forma, se consideramos a relação de equivalência em S^{2n+1} dada por $(z'_1, \dots, z'_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ se, e só se, $z'_i = \lambda z_i$, para todo i , para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$, temos que $\frac{S^{2n+1}}{\sim} = \mathbb{C}P(n)$. Com a notação dada, notemos em particular que $\mathbb{C}P(1) \approx S^2$.

Sejam agora $S^3 \subset \mathbb{H}$ e $S^7 \subset \mathbb{H}^2$. Consideremos a ação livre de S^3 sobre S^7 dada por $S^3 \times S^7 \ni (\lambda, (z_1, z_2)) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Consideremos o espaço de órbitas, $\frac{S^7}{S^3}$, da ação. Temos que a aplicação quociente $p : S^7 \rightarrow \frac{S^7}{S^3} \approx S^4$ é uma fibração chamada de **aplicação de Hopf**, ou **fibração de Hopf**.

De modo mais geral, seja $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ e consideremos a ação livre de S^3 sobre S^{4n+3} da mesma forma que a anterior. Consideremos o espaço de órbitas, $\mathbb{H}P(n) := \frac{S^{4n+3}}{S^3}$, da ação. Temos que a projeção $p : S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P(n)$ é chamada de aplicação de Hopf, ou fibração de Hopf, ou **fibração de Hopf sobre $\mathbb{H}P(n)$** . Observemos ainda que $(S^{4n+3}, p, \mathbb{H}P(n), S^3)$ é um S^3 -fibrado sobre $\mathbb{H}P(n)$. De uma outra maneira, se consideramos a relação de equivalência em S^{4n+3} dada por $(z'_1, \dots, z'_{n+1}) \sim (z_1, \dots, z_{n+1})$ se, e só se, $z'_i = \lambda z_i$, para todo i , para algum $\lambda \in \mathbb{H}$ com $|\lambda| = 1$, obtemos que $\frac{S^{4n+3}}{\sim} = \mathbb{H}P(n)$. Com a notação dada, observemos que $\mathbb{H}P(1) \approx S^4$.

Analogamente, se $S^0 := \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$ e $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, obtemos $\mathbb{R}P(n) := \frac{S^n}{S^0}$. Ainda, $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P(n)$ é chamada de aplicação de Hopf, ou fibração de Hopf, ou **fibração de Hopf sobre $\mathbb{R}P(n)$** . Observemos ainda que p é o

revestimento universal de $\mathbb{R}P(n)$, se $n \geq 2$ e $\mathbb{R}P(1) \approx S^1$. De um outro modo, se consideramos a relação de equivalência em S^n dada por $x' \sim x$ se, e só se, $x' = \pm x$, obtemos que $\frac{S^n}{\sim} = \mathbb{R}P(n)$.

Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}, \mathbb{H}$), notemos que $\mathbb{F}P(n)$ é uma dn -variedade fechada, conexa, onde $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$, chamada de n -ésimo **espaço projetivo real** (respectivamente, complexo, quaterniônico).

Observação 36. Vamos, agora, analisar um pouco melhor a aplicação de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ e fazer algumas considerações para serem utilizadas posteriormente. Quando conveniente consideraremos as identificações $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ dadas por $a + bi = (a, b)$ e $(a + bi, c + di) = (a, b, c, d)$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considerando $S_+^2 := \{(a + bi, c, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \times 0 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$, $S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^2$ e $S^2 = \frac{S_+^2}{S^1 \times 0_{\mathbb{C}}}$, obtemos que h pode ser dada por:

$$h(z_1, z_2) = \begin{cases} S^1 \times 0_{\mathbb{C}} & , \quad z_2 = 0, \\ [(\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}, |z_2|, 0)] & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que, desta forma, $h^{-1}[(0_{\mathbb{C}}, 1, 0)] = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Consideremos agora $S_+^{2'} := \{(a, 0, b + ci) \in \mathbb{R}_+ \times 0 \times \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Em particular, $\partial S_+^{2'} = 0_{\mathbb{C}} \times S^1$. Seja $h' := h|_{S_+^{2'}} : (S_+^{2'}, 0_{\mathbb{C}} \times S^1) \rightarrow (S^2, [(0_{\mathbb{C}}, 1, 0)])$. Então

$$h'(a, 0, b, c) = \begin{cases} [(1, 0, 0, 0)] = S^1 \times 0_{\mathbb{C}} & , \quad b = 0 = c, \\ [(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \frac{-ac}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \sqrt{b^2 + c^2}, 0)] & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um homeomorfismo relativo. Daí, considerando a aplicação quociente $pr : (S_+^{2'}, 0_{\mathbb{C}} \times S^1) \rightarrow (\frac{S_+^{2'}}{0_{\mathbb{C}} \times S^1}, 0_{\mathbb{C}} \times S^1)$ e identificando $S^2 = \frac{S_+^{2'}}{0_{\mathbb{C}} \times S^1}$, obtemos, por [V-94] (proposição 2.5), um homeomorfismo $h'' : S^2 \rightarrow S^2$ que fatora h' conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc} S_+^{2'} & \xrightarrow{h'} & S^2 \\ pr \downarrow & \nearrow h'' & \\ S^2 & & \end{array}$$

Observação 37. De maneira análoga, vamos analisar um pouco melhor a aplicação de Hopf $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P(n)$ e fazer algumas considerações para serem usadas posteriormente. Quando conveniente consideraremos a identificação $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$ dada por $(a_1 + b_1i, \dots, a_k + b_ki) = (a_1, b_1, \dots, a_k, b_k)$, com $k \geq 1$. Analogamente ao que foi feito para $h : S^3 \rightarrow S^2$ (vide a observação 36), seja p dada por:

$$p(z_1, \dots, z_{n+1}) = \begin{cases} S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} & , z_2 = \dots = z_{n+1} = 0, \\ [(\frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|}, |z_2|, 0, \frac{z_3 \overline{z_2}}{|z_2|}, \dots, \frac{z_{n+1} \overline{z_2}}{|z_2|})] & , z_2 \neq 0, \\ \vdots & \\ [(\frac{z_1 \overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|}, \frac{z_2 \overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|}, \dots, \frac{z_n \overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|}, |z_{n+1}|, 0)] & , z_{n+1} \neq 0. \end{cases}$$

Notemos que, desta forma, $p^{-1}[(0_{\mathbb{C}}, 1, 0, 0_{\mathbb{C}}, \dots, 0_{\mathbb{C}})] = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} \subset S^{2n+1}$. Consideremos agora $S_+^{2'} := \{(a, 0, b + ci, 0_{\mathbb{C}}, \dots, 0_{\mathbb{C}}) \in \mathbb{R}_+ \times 0 \times \mathbb{C} \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} | a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset S^{2n+1}$. Em particular, $\partial S_+^{2'} = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}}$. Analogamente, obtemos que $p' := p|_{S_+^{2'}} : (S_+^{2'}, \partial S_+^{2'}) \rightarrow (S^2, [(0_{\mathbb{C}}, 1, 0, 0_{\mathbb{C}}, \dots, 0_{\mathbb{C}})])$ dada por

$$p'(a, 0, b, c, 0, \dots, 0) = \begin{cases} [(1, 0, \dots, 0)] = S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} & , b = 0 = c, \\ [(\frac{ab}{\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{-ac}{\sqrt{b^2+c^2}}, \sqrt{b^2+c^2}, 0, \dots, 0)] & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é um homeomorfismo relativo. Daí, obtemos um homeomorfismo $p'' : S^2 \rightarrow S^2$ que fatora p' conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc} S_+^{2'} & \xrightarrow{p'} & S^2 \\ pr \downarrow & \approx \nearrow p'' & \\ S^2 & & \end{array}$$

1.3 Sobre CW-complexos

Em toda a seção, sejam X, Y espaços topológicos e $y_0 \in Y$.

Nesta seção, apresentamos algumas definições e alguns resultados sobre CW-complexos.

Observação 38. *Vejamos algumas propriedades:*

- 1) Todo CW-complexo é paracompacto. Vide [FrPi-90] (página 29);
- 2) Se Y é um CW-complexo, então $\Omega(Y, y_0)$ também o é. Vide [FrPi-90] (página 236);
- 3) Se $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração, com Y sendo um CW-complexo conexo por caminhos e X um CW-complexo, então $p^{-1}(y)$ é um CW-complexo, para todo $y \in Y$. Vide [FrPi-90] (página 237);
- 4) Se $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração, com Y sendo um CW-complexo conexo por caminhos e $p^{-1}(y)$ um CW-complexo, para todo $y \in Y$, então X é um CW-complexo. Vide [FrPi-90] (página 238).

Definição 39. *Um CW-complexo é dito **finito** se tem um número finito de células e é dito de **tipo finito** se cada esqueleto tem um número finito de células.*

Observação 40. *Um CW-complexo é finito se, e só se, é compacto. Ainda, um CW-complexo é de tipo finito se, e só se, cada esqueleto é compacto.*

Definição 41. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma **equivalência de homotopia fraca**, se $f_{\#} : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ é uma bijeção e $f_{\#} : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ é um isomorfismo, para todo $n \geq 1$.*

Observação 42. *Toda equivalência de homotopia é uma equivalência de homotopia fraca.*

Teorema 43. *Uma aplicação contínua entre CW-complexos é uma equivalência de homotopia fraca se, e somente se, é uma equivalência de homotopia.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (corolário 24, página 405).

Teorema 44. *Uma equivalência de homotopia fraca induz isomorfismos em homologia (com coeficientes inteiros). Reciprocamente, uma aplicação entre espaços simplesmente conexos que induz isomorfismos em homologia (com coeficientes inteiros) é uma equivalência de homotopia fraca.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (teorema 25, página 406).

Definição 45. *Uma CW-aproximação de um espaço topológico X consiste de um CW-complexo Y e de uma equivalência de homotopia fraca $f : Y \rightarrow X$.*

Teorema 46. *Todo espaço topológico X tem uma CW-aproximação. Ainda, duas CW-aproximações de um mesmo espaço topológico X têm o mesmo tipo de homotopia.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sp-66] (teorema 1, página 412).

Definição 47. *Sejam X_1, X_2 espaços topológicos. Dizemos que X_1, X_2 têm o mesmo **tipo de homotopia fraca**, se existem um espaço topológico Y e equivalências de homotopia fraca $f_1 : Y \rightarrow X_1$ e $f_2 : Y \rightarrow X_2$.*

Observação 48. *Se X_1, X_2 têm o mesmo tipo de homotopia fraca, então existem $f_1 : Y \rightarrow X_1, f_2 : Y \rightarrow X_2$ equivalências de homotopia fraca. Seja $g : Z \rightarrow Y$ uma CW-aproximação de Y . Daí, $f_1 \circ g : Z \rightarrow X_1, f_2 \circ g : Z \rightarrow X_2$ são CW-aproximações de X_1, X_2 , respectivamente, donde, X_1, X_2 podem ser aproximados pelo mesmo CW-complexo. Reciprocamente, se X_1, X_2 podem ser aproximados pelo mesmo CW-complexo, então X_1, X_2 têm o mesmo tipo de homotopia fraca.*

O próximo resultado nos fornece condições suficientes para um CW-complexo ter o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito.

Lema 49. *Seja X um CW-complexo conexo por caminhos tal que $\pi_n(X)$ é abeliano finitamente gerado, para todo $n \geq 1$. Então X tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito.*

Demonstração. De fato, seja $\pi := \pi_1(X)$. Primeiramente, notemos que, desde que π é abeliano finitamente gerado, então, por [P-77] (teorema 2.6, página 423), segue que $\mathbb{Z}[\pi]$ é Noetheriano. Agora, seja $\tilde{X}$ o revestimento universal de X . Como $\pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X)$, para todo $n \geq 2$, então $\pi_n(\tilde{X})$ é finitamente gerado, para todo $n \geq 2$. Daí, desde que $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e $\pi_n(\tilde{X})$ é finitamente gerado, para todo $n \geq 1$, então, por [Se-53] (teorema 1, capítulo III), $H_n(\tilde{X})$ é finitamente gerado, para todo $n \geq 1$. Em particular, $H_n(\tilde{X})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo, para todo $n \geq 1$. Agora, por [Wa-65] (teoremas A e B), X tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito se, e somente se, π é finitamente gerado, π é finitamente apresentado e $H_n(\tilde{X})$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo, para todo $n \geq 1$. Assim, desde que π é abeliano finitamente gerado, então tais hipóteses são satisfeitas e portanto X tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito. ■

1.4 Sobre variedades

Nesta seção, apresentamos alguns resultados gerais sobre variedades.

Observação 50. *Sobre superfícies fechadas, conexas:*

Observemos que uma superfície fechada, conexa, Y ou tem grupo fundamental finito e é revestida por S^2 (que são S^2 e $\mathbb{R}P(2)$), ou é $K(\pi, 1)$ e é revestida por $\mathbb{R}^2$ (que são as superfícies fechadas com característica de Euler não positiva). Neste último caso, notemos que $\pi \cong \pi_1(Y)$ é infinito. Ainda, se Y é

$K(\pi, 1)$, segue que π é livre de torção e, se π é abeliano, então $\pi \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $Y \approx T^2$.

Observação 51. *Sobre 3-variedades fechadas, conexas:*

Notemos que uma 3-variedade fechada, conexa, X ou tem grupo fundamental finito e é revestida por S^3 (que são as formas espaciais esféricas), ou é $K(\pi, 1)$ e é revestida por $\mathbb{R}^3$, ou pertence ao conjunto $\{S^1 \times S^2, \mathbb{R}P(3) \# \mathbb{R}P(3), S^1 \tilde{\times} S^2, S^1 \times \mathbb{R}P(2)\}$ e é revestida por $\mathbb{R} \times S^2$ (vide [Ha-04] e [Tol-74]). Nestes últimos dois casos, observemos que $\pi_1(X)$ é infinito. Ainda, por [Ha-04], se X é $K(\pi, 1)$, temos que $\pi \cong \pi_1(X)$ é livre de torção e, se π é abeliano, então $\pi \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $X \approx T^3$.

Lema 52 (Lema da isotopia/Lema da homogeneidade). *Sejam Y uma variedade sem bordo, conexa e $y, z \in Y$. Então existe um difeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$ isotópico à identidade de Y tal que $h(y) = z$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [GuPo-74] (página 142).

Lema 53. *Sejam Y uma variedade sem bordo, conexa, de dimensão maior do que 1 e $\{y_1, \dots, y_k\}, \{z_1, \dots, z_k\} \subset Y$ subconjuntos tais que $y_i \neq y_j, z_i \neq z_j$ se $i \neq j$. Então existe um difeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$ isotópico à identidade de Y tal que $h(y_l) = z_l, l = 1, \dots, k$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [GuPo-74] (página 143).

Proposição 54. *Toda variedade fechada, conexa, de dimensão ímpar tem característica de Euler zero.*

Tal resultado segue do teorema dos coeficientes universais e da dualidade de Poincaré. Vide [Ha-02] (página 249).

Proposição 55. *Seja M uma variedade fechada, conexa. Então $\chi(M) = 0$ se, e somente se, M admite seção que não se anula.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Ho-27].

Corolário 56. *Toda variedade fechada, conexa, de dimensão ímpar admite seção que não se anula.*

O resultado segue dos dois resultados anteriores.

Observação 57. *Sobre variedades:*

- 1) *Se uma variedade é conexa então ela também é conexa por caminhos, pois é localmente conexa por caminhos.*
- 2) *Uma variedade simplesmente conexa é, em particular, orientável, pois os seus laços são todos homotópicos ao laço trivial.*
- 3) *Toda variedade é paracompacta, pois é localmente compacta, Hausdorff e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade (vide [Mi-58], página 7).*

1.5 Coincidências

Em toda a seção, sejam $f, f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, onde X, Y são espaços topológicos.

Nesta seção, apresentamos definições e resultados clássicos das teorias de ponto fixo e de coincidência.

Definição 58. *Dizemos que $x \in X$ é uma **coincidência** do par (f_1, f_2) de aplicações contínuas, ou uma coincidência entre f_1 e f_2 , se $f_1(x) = f_2(x)$. Denotamos o conjunto das coincidências de (f_1, f_2) por $\text{Coin}(f_1, f_2)$.*

Observação 59. *Notemos que $\text{Coin}(f_1, f_2) = (f_1, f_2)^{-1}(\Delta)$, onde $\Delta := \{(x, y) \in Y \times Y \mid x = y\} \subset Y \times Y$. De outra forma, notemos que as coincidências entre f_1 e f_2 correspondem às interseções entre os gráficos de f_1 e de f_2 .*

Definição 60. Dizemos que o par (f_1, f_2) de aplicações contínuas é **deformável a livre de coincidência**, ou simplesmente **loose**, se existem aplicações contínuas $f'_1, f'_2 : X \rightarrow Y$ tais que $f'_1 \simeq f_1$, $f'_2 \simeq f_2$ e $\text{Coin}(f'_1, f'_2)$ é vazio.

Na teoria de coincidência, estamos interessados, de maneira geral, em estudar o comportamento de $\text{Coin}(f'_1, f'_2)$ para $f'_1 \simeq f_1$, $f'_2 \simeq f_2$.

Definição 61. Chamamos $MC(f_1, f_2) := \min\{\#\text{Coin}(f'_1, f'_2) \mid f'_1 \simeq f_1, f'_2 \simeq f_2\}$ de **número mínimo de coincidências** de (f_1, f_2) e $MCC(f_1, f_2) := \min\{\#\pi_0(\text{Coin}(f'_1, f'_2)) \mid f'_1 \simeq f_1, f'_2 \simeq f_2\}$ de **número mínimo de componentes de coincidências** de (f_1, f_2) .

Desta forma, notemos que (f_1, f_2) é loose se, e só se, $MC(f_1, f_2) = 0 = MCC(f_1, f_2)$. Ainda, apesar de $MC(f_1, f_2)$ poder ser infinito, supondo X compacto segue que $MCC(f_1, f_2)$ é sempre finito. Os dois resultados abaixo, que podem ser encontrados em [Go-05], mostram, entre outras coisas, algumas situações em que $MC(f_1, f_2)$ é finito.

Proposição 62. Sejam X um CW complexo finito e Y uma variedade, onde $\dim X < \dim Y$. Então todo par $(f_1, f_2) : X \rightarrow Y \times Y$ de aplicações contínuas pode ser deformado a livre de coincidência.

Proposição 63. Sejam X um CW complexo finito e Y uma variedade, onde $\dim X = \dim Y$. Então todo par $(f_1, f_2) : X \rightarrow Y \times Y$ de aplicações contínuas pode ser deformado a um par (f'_1, f'_2) tal que $\text{Coin}(f'_1, f'_2)$ é finito.

O próximo resultado nos diz que, quando Y é uma variedade sem bordo, para calcular $MC(f_1, f_2)$, basta deformar apenas uma das aplicações. Tal resultado pode ser encontrado em [Go-05] e pode ser encontrado, numa versão mais forte, em [Broo-72].

Proposição 64. *Sejam X um espaço topológico e Y uma variedade sem bordo. Então $MC(f_1, f_2) = \min\{\#Coin(f'_1, f_2) \mid f'_1 \simeq f_1\}$.*

Observação 65. *Sobre pontos fixos:*

Seja $X = Y$. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto fixo** de f , se $f(x) = x$. Na teoria de ponto fixo, entre outras coisas, estamos interessados no **número mínimo de pontos fixos** de f , isto é, $\min\{\#Fix(f') : f' \simeq f\}$, onde $Fix(f') := \{x \in X \mid f'(x) = x\}$. Ainda, queremos determinar quando f é **deformável a livre de ponto fixo**, isto é, quando existe $f' \simeq f$ tal que $Fix(f') = \emptyset$. Por [Broo-72], sendo $X = Y$ uma variedade sem bordo, tais questões são equivalentes, na teoria de coincidência, às respectivas questões para o par $(1_X, f)$. Em particular, $MC(1_X, f) = \min\{\#Fix(f') : f' \simeq f\} =: MF(f)$.

Observação 66. *Sobre raízes:*

Sejam X, Y não necessariamente iguais e $y_0 \in Y$. Dizemos que $x \in X$ é uma **raiz** de f , se $f(x) = y_0$. Na teoria de raiz, entre outras coisas, estamos interessados no **número mínimo de raízes** de f , isto é, $\min\{\#f'^{-1}(y_0) : f' \simeq f\}$ e queremos determinar quando f é **deformável a livre de raiz**, ou seja, quando existe $f' \simeq f$ tal que $f'^{-1}(y_0) = \emptyset$. Por [Broo-72], sendo Y uma variedade sem bordo, tais questões são equivalentes, na teoria de coincidência, às respectivas questões para o par (y_0, f) . Em particular, $MC(y_0, f) = \min\{\#f'^{-1}(y_0) : f' \simeq f\}$.

Observação 67. *Sobre auto-coincidências:*

Sejam X, Y não necessariamente iguais. Para todo $x \in X$, notemos que x é uma coincidência do par (f, f) . Na teoria de auto-coincidência, estamos interessados, por exemplo, no **número mínimo de auto-coincidências** de f , ou seja, $MC(f, f) := \min\{\#Coin(f', f'') : f' \simeq f \simeq f''\}$. Ainda,

queremos saber quando f é **deformável a livre de auto-coincidência**, isto é, quando (f, f) é deformável a livre de coincidência.

Um avanço significativo na teoria de coincidência se deu entre 1923 e 1927, quando Lefschetz ([L-23],[L-25],[L-26],[L-27]) deu condições suficientes para a existência de coincidência, para variedades orientáveis fechadas de mesma dimensão. Ele definiu um índice $I_{f_1, f_2} \in \mathbb{Z}$ que se anula quando o par (f_1, f_2) de aplicações contínuas é deformável a livre de coincidência e mostrou que tal índice é igual à soma alternada de traços, $L(f_1, f_2) \in \mathbb{Z}$, de certos homomorfismos. Em particular, se $L(f_1, f_2) \neq 0$, então $\text{Coin}(f'_1, f'_2) \neq \emptyset$, para toda $f'_i \simeq f_i$, $i = 1, 2$. Abaixo, fazemos uma breve exposição do assunto. Para maiores detalhes, vide [V-94] (capítulo 7).

Definição 68. *Sejam X, Y n -variedades orientáveis fechadas. Seja $W \subset_{ab} X$ e sejam $f_1, f_2 : W \rightarrow Y$ aplicações contínuas tais que $C := \text{Coin}(f_1, f_2)$ é um compacto de W . Então existe $V \subset_{ab} X$, com $C \subset V \subset \bar{V} \subset W$. Defina o **índice de coincidência** do par (f_1, f_2) sobre W como sendo o inteiro I_{f_1, f_2}^W dado pela imagem da classe fundamental $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ sob a composição*

$$\mathbb{Z} \cong H_n(X) \rightarrow H_n(X, X - V) \cong H_n(W, W - V) \xrightarrow{(f_1, f_2)^*} H_n(Y \times Y, Y \times Y \setminus \Delta) \cong \mathbb{Z}$$

Notemos que, a princípio, não é possível definir tal índice, da mesma forma, quando as dimensões das variedades são diferentes.

Observação 69. *Tal índice independe de V e tem várias propriedades, entre elas: se $I_{f_1, f_2}^W \neq 0$, então (f_1, f_2) tem coincidência em W ; se $f'_i \simeq f_i$, $i = 1, 2$, então, sob certas hipóteses, $I_{f'_1, f'_2}^W = I_{f_1, f_2}^W$; e o grau local de $f : X \rightarrow X$ num ponto fixo isolado é o índice de ponto fixo local $I_f^W := I_{f, 1_X}^W$. Ainda, dizemos que $I_{f_1, f_2} := I_{f_1, f_2}^X$ é o índice de coincidência de (f_1, f_2) e $I_f := I_f^X$ é o índice de ponto fixo de f .*

Observação 70. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Sendo X um complexo finito, temos uma definição de índice de ponto fixo (vide [Ji-83], capítulo 1) que estende a anterior para ponto fixo.*

Definição 71. *Sejam X, Y n -variedades orientáveis fechadas. Definimos o número de Lefschetz de (f, g) como sendo $L(f, g) := \sum_q (-1)^q \text{tr} \Theta_q \in \mathbb{Q}$, onde $\Theta_q = D_X \circ g^* \circ D_Y^{-1} \circ f_* : H_q(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Q})$, onde D_X, D_Y são dados pela dualidade de Poincaré.*

Observação 72. *Usando $\hat{\Theta}_q = D_Y^{-1} \circ f_* \circ D_X \circ g^*$, analogamente, definimos $\hat{L}(f, g)$, também chamado de número de Lefschetz, o qual é igual a $(-1)^n L(f, g)$. Observamos, ainda, que $L(f, g) = (-1)^n L(g, f)$. Além disto, claramente, o número de Lefschetz é um invariante homotópico.*

Observação 73. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Definimos o número de Lefschetz de f como sendo $L(f) := \sum_q (-1)^q \text{tr}(f_*)_q \in \mathbb{Q}$, onde $(f_*)_q : H_q(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(X; \mathbb{Q})$. Claramente, o número de Lefschetz é um invariante homotópico. Ainda, notemos que a **característica de Euler** de X é tal que $\chi(X) = L(1_X)$. Finalmente, observemos que, se X é uma variedade fechada orientável, então $L(f) = L(f, 1_X)$.*

Teorema 74 (Teorema de coincidência de Lefschetz). *Sejam $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, com X, Y variedades orientáveis fechadas de mesma dimensão. Então o índice de coincidência $I_{f_1, f_2} \in \mathbb{Z}$ é igual ao número de Lefschetz $L(f_1, f_2)$.*

Após este resultado, em 1929, Hopf ([Ho-29]) provou um resultado similar para ponto fixo (conhecido como Teorema de ponto fixo de Lefschetz-Hopf), quando os espaços são complexos finitos. Um pouco antes, em 1927, sendo X um complexo finito, Nielsen ([N-27]) deu um limitante inferior, $N(f)$, para

o número mínimo de pontos fixos, $MF(f)$, de $f : X \rightarrow X$ e conjecturou que $MF(f)$ seria igual a $N(f)$, para toda aplicação contínua f , sendo X uma superfície compacta (já sabendo que isto era verdade para superfícies compactas com $\chi(X) \geq 0$). Entre 1941 e 1942, Wecken ([We-41],[We-412],[We-42]) mostrou tal igualdade para vários complexos finitos e, em particular, para n -variedades compactas, com $n \geq 3$. Abaixo, fazemos uma breve exposição do assunto. Para maiores detalhes, vide [Brow-93] e [Go-05].

Definição 75. *Sejam $x, y \in \text{Coin}(f_1, f_2) \subset X$. Dizemos que x, y são Nielsen equivalentes se existe $\sigma \in X^I$ tal que $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$ e $f_1 \circ \sigma \simeq_{\partial I} f_2 \circ \sigma$. Uma classe de equivalência é chamada de **classe de Nielsen** de (f_1, f_2) .*

Observação 76. *Da mesma forma, $x, y \in \text{Fix}(f) \subset X$ são Nielsen equivalentes se existe $\sigma \in X^I$ tal que $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$ e $f \circ \sigma \simeq_{\partial I} \sigma$.*

Definição 77. *Sejam X, Y variedades orientáveis fechadas de mesma dimensão. Dizemos uma classe de Nielsen, F , de (f_1, f_2) é **essencial** se $I_{f_1, f_2}^F \neq 0$ e chamamos o número de classes essenciais de (f_1, f_2) de **número de Nielsen** de (f_1, f_2) e o denotamos por $N(f_1, f_2)$.*

Observação 78. *Temos que $N(f_1, f_2)$ é finito, $N(f_1, f_2) = N(f_2, f_1)$ e $N(f_1, f_2)$ depende somente das classes de homotopia de f_1 e de f_2 , ou seja, é um invariante homotópico.*

Observação 79. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Sendo X um complexo finito, temos uma definição de número de Nielsen de f , $N(f)$, que é análoga à definição acima. Além disto, $N(f)$ é finito e depende apenas da classe de homotopia de f .*

Teorema 80. *Sejam X um complexo finito e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então $N(f) \leq MF(f)$.*

Teorema 81 (Teorema de Wecken). *Se X é uma n -variedade compacta, com $n \geq 3$, então $MF(f) = N(f)$, para toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X$.*

Por causa deste resultado, dizemos que um espaço topológico X é de **Wecken** se $MF(f) = N(f)$, para toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X$. Em 1984-5, Jiang ([Ji-84],[Ji-85]) exibiu um contra-exemplo para a conjectura de Nielsen e provou que uma superfície compacta X é de Wecken se, e somente se, $\chi(X) \geq 0$, que era exatamente onde Nielsen sabia da validade de sua conjectura. Um pouco antes, em 1955, Schirmer ([Sc-55]), em sua tese, mostrou que, se X, Y são n -variedades orientáveis fechadas, com $n \geq 3$, então $MC(f_1, f_2) = N(f_1, f_2)$, para todo par (f_1, f_2) de aplicações contínuas.

Referente à teoria de ponto fixo, em 1936, Reidemeister ([Re-36]) definiu um elemento, chamado de **traço de Reidemeister**, no quociente de $\mathbb{Z}[\pi]$ por uma certa relação (que resulta numa soma de $\mathbb{Z}$'s indexada no conjunto das classes de Reidemeister, cuja definição veremos a seguir), onde $\pi = \pi_1(X)$. O interessante é que todo coeficiente não nulo no traço de Reidemeister corresponde a exatamente uma classe de Nielsen essencial (e vice-versa) cujo índice é o valor do coeficiente. Para maiores detalhes, vide [Ji-83].

Vamos, agora, discutir uma importante ferramenta no estudo de coincidência.

Definição 82. *Seja $x_0 \in X$ tal que $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$. Sejam $\alpha, \beta \in \pi_1(Y, y_0)$. Dizemos que α, β são **Reidemeister equivalentes** se existe $\theta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\beta = f_{1\#}(\theta)^{-1} \cdot \alpha \cdot f_{2\#}(\theta)$. Uma classe de equivalência é chamada de **classe de Reidemeister** de (f_1, f_2) . O número de tais classes é chamado de **número de Reidemeister** de (f_1, f_2) e é denotado por $R(f_1, f_2)$.*

Observação 83. *Temos que $R(f_1, f_2)$ pode ser infinito, $R(f_1, f_2) = R(f_2, f_1)$*

e $R(f_1, f_2)$ é um invariante homotópico. Ainda, existe uma injeção do conjunto das classes de Nielsen no conjunto das classes de Reidemeister e, em particular, $N(f_1, f_2) \leq R(f_1, f_2)$. Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, então o número de Reidemeister de f é dado por $R(f) := R(f, 1_X)$.

Para uma discussão sobre classes (H, G) -relacionadas e classes de Nielsen geometricamente essenciais, vide [Go-05]. Um dos interesses no número de Reidemeister é que, sob certas hipóteses sobre os espaços (por exemplo, sendo X, Y variedades fechadas de mesma dimensão, com Y um grupo de Lie ou um H -espaço), segue que $N(f_1, f_2) = 0$ ou $N(f_1, f_2) = R(f_1, f_2)$ (igual a $[\pi_1(Y) : (f_{1\#} - f_{2\#})(\pi_1(X))]$) e todas as classes de Nielsen têm o mesmo índice. Para maiores detalhes, vide [Go-05].

No caso especial de ponto fixo, para uma definição alternativa de número de Reidemeister, com classes de levantamento e classes H -relacionadas, vide [Ji-83].

1.6 Topologia diferencial

Em toda a seção, a princípio, uma variedade é uma variedade sem bordo.

Definição 84. *Sejam X, Y variedades e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $x \in X$ é um **ponto regular** de f se $df_x : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}Y$ é sobrejetora. Um ponto que não é regular é chamado de **crítico** (ou **singular**) de f . Dizemos que $y \in Y$ é um **valor regular** de f se, para cada $x \in X$ tal que $y = f(x)$, temos que df_x é sobrejetora.*

Teorema 85 (Teorema da imagem inversa regular). *Sejam X^m, Y^n variedades e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Então, para todo valor regular y de f , a imagem inversa $f^{-1}(y) =: W$ é uma subvariedade de X de*

codimensão n (isto é, de dimensão $m - n$). Ainda, $T_x W \cong \ker(df_x)$, para todo $x \in W$.

Tal resultado pode ser encontrado em [Sha-11] (página 89).

Definição 86. *Sejam X, Y variedades e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Seja Z uma subvariedade de Y . Dizemos que f é **transversal** (ou transversa) a Z (e escrevemos $f \pitchfork Z$) se, para cada $x \in X$ tal que $y = f(x) \in Z$, temos que $\text{Im}(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y)$.*

Observação 87. *Seja $Z = \{z\}$ um conjunto unitário. Se $x \in X$ satisfaz a condição acima, então df_x é sobrejetora (isto é, f é uma submersão em x). Ainda, isto é verdade para cada $x \in f^{-1}(z)$ se, e somente se, z é um valor regular de f . Desta forma, podemos ver a noção de transversalidade como sendo uma generalização da noção de regularidade.*

Teorema 88 (Teorema da imagem inversa transversal). *Sejam X, Y variedades e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Seja $Z \subset Y$ uma subvariedade de codimensão k , com Z e Y sem bordo. Suponha que $f \pitchfork Z$ e $\partial f \pitchfork Z$, onde $\partial f := f|_{\partial X}$. Então a imagem inversa $f^{-1}(Z) =: W$ é uma subvariedade de X de codimensão k tal que $\partial W = \partial X \cap W$. Ainda, $T_x(W) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)}(Z))$, para todo $x \in W$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Sha-11] (página 94).

Definição 89. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas, onde (Y, d) é um espaço métrico. Seja $\delta : X \rightarrow]0, \infty[$ uma função contínua positiva. Dizemos que g é uma **δ -aproximação** de f se $d(f(x), g(x)) < \delta(x)$, para todo $x \in X$. Dizemos que g é uma **aproximação** de f se g é uma δ -aproximação de f , para alguma função contínua positiva δ .*

Teorema 90 (Teorema do mergulho de Whitney). *Toda variedade Y^n é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2n+1}$ como um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Mi-58] (página 10). A partir deste resultado, podemos considerar a métrica induzida em Y de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Em particular, podemos considerar aproximações de aplicações contínuas de X em Y .

Teorema 91. *Sejam X, Y variedades e $C \subset X$ um subconjunto fechado em X . Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Seja $Z \subset Y$ uma subvariedade de codimensão k que é um subconjunto fechado em Y . Suponha que f é transversal a Z em $C \cap f^{-1}(Z)$. Dada $\delta : X \rightarrow]0, \infty[$ uma função contínua positiva, existe uma aplicação diferenciável $g : X \rightarrow Y$ tal que g é uma δ -aproximação de f , g é transversal a Z e $g|_C = f|_C$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Mi-58] (página 10).

Lema 92. *Sejam X, Y variedades e $C \subset X$ um subconjunto fechado em X . Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua que é diferenciável em C . Dada $\delta : X \rightarrow]0, \infty[$ uma função contínua positiva, existe uma aplicação diferenciável $g : X \rightarrow Y$ tal que g é uma δ -aproximação de f e $g|_C = f|_C$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Mi-58] (página 26).

Lema 93. *Sejam X, Y variedades. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dada $\epsilon : X \rightarrow]0, \infty[$ uma função contínua positiva, existe $\delta : X \rightarrow]0, \infty[$ uma função contínua positiva tal que se $g : X \rightarrow Y$ é uma δ -aproximação de f , então existe uma homotopia $H : f \simeq g$, com $H_t(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ tal que $g(x) = f(x)$, e sendo H_t uma ϵ -aproximação de f , para todo $t \in I$.*

Tal resultado pode ser encontrado em [Mi-58] (página 26).

Exemplo 94. *Sejam X, Y variedades e $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então $(f_1, f_2) : X \rightarrow Y \times Y$ é uma aplicação contínua. Pelo lema 92, existe uma aplicação diferenciável $(f'_1, f'_2) : X \rightarrow Y \times Y$ que é uma aproximação de (f_1, f_2) . Consideremos a diagonal $\Delta \subset Y \times Y$. Notemos que $\Delta \subset Y \times Y$ é uma subvariedade de codimensão n que é um subconjunto fechado em $Y \times Y$. Pelo teorema 91, existe uma aplicação diferenciável $(f''_1, f''_2) : X \rightarrow Y \times Y$ que é uma aproximação de (f'_1, f'_2) e é transversal a Δ . Finalmente, pelo lema 93, desde que (f''_1, f''_2) é uma aproximação de (f_1, f_2) , então $(f''_1, f''_2) \simeq (f_1, f_2)$. Desta forma, aproximamos (f_1, f_2) por uma aplicação diferenciável (e homotópica a ela) que é transversal a Δ .*

1.7 Bordismo

Em toda a seção, sejam X, Y, Z espaços topológicos.

Nesta seção, apresentamos conceitos da teoria de bordismo normal, além de identificações com outras teorias de bordismo.

Definição 95. *Um **fibrado virtual**, φ , sobre X é um par ordenado de fibrados vetoriais, (φ_+, φ_-) , sobre X . Escrevemos $\varphi := \varphi_+ - \varphi_-$. Ainda, dizemos que um fibrado virtual é trivial se ele é formado por fibrados vetoriais triviais.*

Observação 96. *Se $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ é um fibrado virtual sobre X , então $-\varphi := \varphi_- - \varphi_+$ também é um fibrado virtual sobre X . Se $g : Z \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, definimos o pullback de φ por g como sendo o fibrado virtual sobre Z dado por $g^*(\varphi) := g^*(\varphi_+) - g^*(\varphi_-)$.*

Definição 97. *Sejam $f, f' : \xi^k \rightarrow \eta^k$ isomorfismos de fibrados vetoriais sobre B . Dizemos que f e f' são isotópicos (sobre B), se existe uma homotopia*

$H : E(\xi) \times I \rightarrow E(\eta)$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = f'$ e $H_t : \xi \rightarrow \eta$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre B , para todo $t \in I$, ou seja, $H_t : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ é um homeomorfismo que preserva fibra sobre B e $H_t|_F : F(\xi) \rightarrow F(\eta)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, para todo $t \in I$. Escrevemos $f \simeq f'$.

Definição 98. Sejam ξ, η fibrados vetoriais sobre B . Consideremos $\mathcal{C}_{\xi, \eta} := \{f : \xi \oplus \mathbb{R}^s \rightarrow \eta \oplus \mathbb{R}^t \text{ isomorfismo de fibrados vetoriais} | s, t \in \mathbb{N}\}$. Denotemos um isomorfismo, f , de k -fibrados vetoriais por f_k . Dados $f_k, f'_l \in \mathcal{C}_{\xi, \eta}$, dizemos que f_k e f'_l são equivalentes:

1. se $f_k \times 1_{\mathbb{R}^r} \simeq f'_l \times 1_{\mathbb{R}^r}$, quando $k = l$, para algum r ;
2. se $f_k \times 1_{\mathbb{R}^r} \simeq f'_l \times 1_{\mathbb{R}^{k-l}} \times 1_{\mathbb{R}^r}$, quando $k > l$, para algum r ;
3. se $f_k \times 1_{\mathbb{R}^{l-k}} \times 1_{\mathbb{R}^r} \simeq f'_l \times 1_{\mathbb{R}^r}$, quando $k < l$, para algum r .

Denotamos a classe de equivalência de $f \in \mathcal{C}_{\xi, \eta}$ por $f : \xi \rightarrow \eta$ e chamamos uma tal classe de equivalência de um **isomorfismo estável de fibrados vetoriais** sobre B .

Observação 99. Se f é um isomorfismo estável, então $-f$ denota o isomorfismo estável dado por $f \times (-1_{\mathbb{R}^1}) : \xi \oplus \mathbb{R}^s \oplus \mathbb{R}^1 \rightarrow \eta \oplus \mathbb{R}^t \oplus \mathbb{R}^1$, para algum $s, t \in \mathbb{N}$.

Definição 100. Sejam X um espaço topológico e φ um fibrado virtual sobre X . Uma φ -**variedade compacta (fechada) singular** em X de dimensão m é uma tripla $(M, g, \bar{g})$, em que:

- M é uma variedade compacta (fechada) de dimensão m ,
- $g : M \rightarrow X$ é uma aplicação contínua,
- $\bar{g} : \tau_M \oplus g^*(\varphi_+) \rightarrow g^*(\varphi_-)$ é um isomorfismo estável de fibrados vetoriais sobre M .

Observação 101. Notemos que se $\mathcal{M} := (M, g, \bar{g}), \mathcal{N} := (N, h, \bar{h})$ são φ -variedades singulares em X de dimensão m , então $\mathcal{M} \dot{\cup} \mathcal{N} := (M \dot{\cup} N, g \dot{\cup} h, \bar{g} \dot{\cup} \bar{h})$ e $-\mathcal{M} := (M, g, -\bar{g})$ também o são. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e $\varphi = f^*(\psi)$, para algum fibrado virtual ψ sobre Y , podemos considerar a ψ -variedade singular em Y de dimensão m dada por $f^*(\mathcal{M}) := (M, f \circ g, \bar{g})$. Notemos ainda que $\mathcal{O} := (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ é uma φ -variedade fechada singular em X de dimensão m , independentemente de φ , X e m .

Definição 102. Sejam $\mathcal{M} := (M, g, \bar{g}), \mathcal{N} := (N, h, \bar{h})$ φ -variedades fechadas singulares em X de dimensão m . Dizemos que $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são **bordantes** (e escrevemos $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$), se existe $(B, b, \bar{b})$, uma φ -variedade compacta singular em X de dimensão $m+1$, tal que $\partial B = M \dot{\cup} N$, $b|_{\partial B} = g \dot{\cup} h$ e $\bar{b}|_{\partial B} = \bar{g} \dot{\cup} -\bar{h}$ (isto é, via campos de vetores que apontam pra dentro de B ao longo de M e pra fora de B ao longo de N - o que diz como τ_M (τ_N) se inclui em $\tau_{B|M} \cong \tau_M \oplus \mathbb{R}^1$ ($\tau_{B|N} \cong \tau_N \oplus \mathbb{R}^1$)). Ainda, dizemos que $\mathcal{M}$ é **nula bordante**, se $\mathcal{M} \sim \mathcal{O}$.

Observação 103. Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de $\mathcal{M}$ por $[\mathcal{M}]$ e o conjunto de classes de equivalência de φ -variedades fechadas singulares em X de dimensão m por $\Omega_m(X; \varphi)$. Ainda, notemos que $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ se, e só se, $\mathcal{M} \dot{\cup} (-\mathcal{N}) \sim \mathcal{O}$.

Definição 104. Definindo $[\mathcal{M}] + [\mathcal{N}] := [\mathcal{M} \dot{\cup} \mathcal{N}]$, temos que $(\Omega_m(X; \varphi), +)$ é um grupo abeliano, chamado de m -ésimo **grupo de bordismo normal** de X com coeficientes em φ .

Observação 105. Seja $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ um fibrado virtual sobre X . Notemos que $\Omega_m(X; \varphi) \cong \Omega_m(X; \varphi_+ \oplus \mathbb{R}^t - \varphi_- \oplus \mathbb{R}^s)$, para todo $s, t \in \mathbb{N}$. Em particular, se φ_+ é estavelmente trivial, podemos considerar φ_+ como sendo trivial

e denotamos $\varphi = -\varphi_-$. Da mesma forma, se φ_- é estavelmente trivial, podemos considerar φ_- como sendo trivial e escrevemos $\varphi = \varphi_+$. Se ambos são estavelmente triviais, podemos considerar φ como sendo trivial e, sem perda de generalidade, denotamos $\varphi = \mathbb{R}$.

Observação 106. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e ψ é um fibrado virtual sobre Y , podemos considerar o homomorfismo induzido $f_* : \Omega_m(X; f^*(\psi)) \rightarrow \Omega_m(Y; \psi)$ dado por $f_*([\mathcal{M}]) = [f^*(\mathcal{M})]$.

Definição 107. Temos que $\Omega_m^{fr}(X) := \Omega_m(X; \mathbb{R})$ é chamado de m -ésimo grupo de bordismo “framed” de X e $\Omega_m^{fr} := \Omega_m^{fr}(y_0)$ é chamado simplesmente de m -ésimo grupo de bordismo “framed”, onde y_0 é um ponto.

Observação 108. Sobre o isomorfismo de Pontryagin-Thom:

Seja $m \geq n$. Seja $C^{m-n} \subset S^m$ uma subvariedade de S^m de codimensão n . Seja $g' : \nu(C, S^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre C , ou seja, uma **trivialização do fibrado normal** $\nu(C, S^m)$. Considerando os pares (C, g') e uma relação de bordismo análoga à relação anterior, obtemos o **grupo de bordismo orientado** Ω_{m-n} . Agora, seja $\bar{g}' : \nu(C, S^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo estável de fibrados vetoriais sobre C , ou melhor, a **trivialização estável do fibrado normal** $\nu(C, S^m)$. Considerando os pares $(C, \bar{g}')$ e uma relação de bordismo análoga à relação anterior, obtemos novamente o grupo de bordismo framed Ω_{m-n}^{fr} . Consideremos o **homomorfismo estabilização**, $stab : \Omega_{m-n} \rightarrow \Omega_{m-n}^{fr}$, dado por $[C, g'] \mapsto [C, \bar{g}']$.

Consideremos o homomorfismo $E : \pi_m(S^n) \rightarrow \pi_{m+1}(S^{n+1})$ induzido pela operação de suspensão. Pelo teorema da suspensão de Freudenthal (vide [Whg-78], página 369), temos que E é isomorfismo para $m < 2n - 1$ e é epimorfismo para $m = 2n - 1$. Seja $\pi_k^S \cong \pi_{k+i}(S^i)$, com $k < i - 1$, o k -ésimo grupo de homotopia estável das esferas e seja $E^\infty : \pi_m(S^n) \rightarrow \pi_{m-n}^S$

uma composição adequada de homomorfismos E . Notemos que E^∞ é isomorfismo para $m < 2n - 1$ e é epimorfismo para $m = 2n - 1$.

Consideremos o homomorfismo $PT_u : \pi_m(S^n) \rightarrow \Omega_{m-n}$ dado por $[f] \mapsto [f^{-1}(y_0), g']$, onde supomos f diferenciável, y_0 um valor regular de f (donde $f^{-1}(y_0) \subset S^m$ é uma subvariedade de S^m de codimensão n) e onde $g' : \nu(f^{-1}(y_0), S^m) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma trivialização do fibrado normal $\nu(f^{-1}(y_0), S^m)$. Definindo $PT_s : \pi_{m-n}^S \rightarrow \Omega_{m-n}^{fr}$ por $[f] \mapsto [f^{-1}(y_0), \overline{g'}]$, temos que $PT := PT_s$ é um isomorfismo, chamado de **isomorfismo de Pontryagin-Thom**.

$$\begin{array}{ccc} \pi_m(S^n) & \xrightarrow{PT_u} & \Omega_{m-n} \\ E^\infty \downarrow & & \downarrow \text{stab} \\ \pi_{m-n}^S & \xrightarrow{PT_s} & \Omega_{m-n}^{fr} \end{array}$$

Exemplo 109. Temos que $\Omega_1^{fr} \cong \pi_1^S \cong \mathbb{Z}_2$. Sejam y_0 um ponto e $\Omega_1^{fr} = \Omega_1(y_0; \mathbb{R})$. Então podemos considerar $\mathcal{F}_1 := (S^1, y_0, F_1), \mathcal{F}_2 := (S^1, y_0, F_2)$ tais que $[\mathcal{F}_1], [\mathcal{F}_2] \in \Omega_1(y_0; \mathbb{R})$, sendo $F_1, F_2 : \tau_{S^1} \oplus \nu(S^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2$ tais que

$$F_1 : \begin{cases} (x, v_x) \mapsto (x, v_x), \\ (x, n_x) \mapsto (x, n_x), \end{cases} \quad F_2 : \begin{cases} (x, v_x) \mapsto (x, e_1), \\ (x, n_x) \mapsto (x, e_2), \end{cases}$$

onde $v_x \in T_x S^1 \cong \mathbb{R}$ e $n_x \in (T_x S^1)^\perp \cong \mathbb{R}$. Seja $G : \tau_{D^2} \rightarrow D^2 \times \mathbb{R}^2$ dado por $(x, v_x) \xrightarrow{G} (x, e_1), (x, n_x) \xrightarrow{G} (x, e_2)$, onde $n_x \perp v_x$. Notemos que $[\mathcal{F}_2] = 0$, pois (D^2, y_0, G) é tal que $\partial D^2 = S^1$, $y_0|_{S^1} = y_0$ e $G|_{S^1} = F_2$ e, por outro lado, $[\mathcal{F}_1] \neq 0$ gera Ω_1^{fr} .

O próximo resultado nos fornece uma sequência exata, envolvendo grupos de bordismo normal e grupos de homologia com coeficientes torcidos. Este resultado, apresentado aqui de maneira conveniente, pode ser encontrado na íntegra em [K-81] (teorema 9.3).

Teorema 110. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, paracompacto que tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito. Seja $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ um fibrado virtual sobre X . Então a sequência*

$$\cdots \rightarrow \Omega_2(X; \varphi) \xrightarrow{\mu} H_2(X; \widetilde{\mathbb{Z}}_\varphi) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\delta_1} \Omega_1(X; \varphi) \xrightarrow{\mu} H_1(X; \widetilde{\mathbb{Z}}_\varphi) \rightarrow 0$$

é exata, onde $\mu([M^m, g, \bar{g}]) = g_([M^m])$, com $[M^m] \in H_m(M; \widetilde{\mathbb{Z}}_{\tau_M})$ sendo a classe fundamental de M e $\widetilde{\mathbb{Z}}_{\tau_M} = \widetilde{\mathbb{Z}}_{g^*(\varphi)}$. Ainda, $\delta_1(1)$ é representado pelo círculo unitário invariantemente paralelizado.*

Observação 111. *Note que, na sequência apresentada, podemos ver $\mathbb{Z}_2$ como sendo Ω_1^{fr} e $\delta_1(1)$ como sendo $i_*([\mathcal{F}_1]) = [S^1, i \circ y_0 : S^1 \rightarrow X, F_1] \in \Omega_1(X; \varphi)$, onde $i : y_0 \hookrightarrow X$ é a inclusão e a tripla $\mathcal{F}_1$ é dada pelo exemplo 109.*

Observação 112. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, paracompacto que tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo. Notemos que, se $\pi_n(X)$ é abeliano finitamente gerado, para todo $n \geq 1$, então, pelo lema 49, X tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito.*

1.8 Bordismo e coincidências

Em toda a seção, sejam X uma m -variedade fechada, conexa, e Y uma n -variedade sem bordo, conexa, com $m, n \geq 1$. Sejam $f, f_1, f_2 : X^m \rightarrow Y^n$ aplicações contínuas.

Nesta seção, inicialmente apresentamos os invariantes homotópicos (como definidos em [K-04] e [K-06]), que relacionam a teoria de bordismo e a teoria de coincidência, que são utilizados no trabalho.

Em seguida, apresentamos alguns resultados tipo Wecken e vemos, para o caso de codimensão 1, em quais situações ainda é necessária uma análise.

Por fim, analisamos os invariantes apresentados no caso especial de raízes e auto-coincidências.

1.8.1 Sobre o invariante $\omega(f_1, f_2)$

Consideremos uma aproximação, $(f'_1, f'_2) : X \rightarrow Y \times Y$, de (f_1, f_2) , diferenciável e transversa à diagonal $\Delta \subset Y \times Y$. Então $C := (f'_1, f'_2)^{-1}(\Delta)$ é uma subvariedade de X de dimensão $m - n$ e a inclusão $g : C \hookrightarrow X$ é um mergulho. Consideremos o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 \nu(C, X) & \longrightarrow & \nu(\Delta, Y \times Y) & \longrightarrow & \tau_Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow 1_Y \\
 X & \xrightarrow{(f'_1, f'_2)} & Y \times Y & \xrightarrow{pr_1} & Y
 \end{array}$$

Daí, obtemos o seguinte isomorfismo de fibrados vetoriais (induzido por (f'_1, f'_2)):

$$\nu(C, X) \cong (f'_1, f'_2)^*(\nu(\Delta, Y \times Y)) \cong f'_1{}^*(\tau_Y)|_C = g^*(f'_1{}^*(\tau_Y))$$

Para maiores detalhes, vide [MiSta-74] (lema 11.5, página 121). Como $\tau_C \oplus \nu(C, X) \cong \tau_{X|C}$, segue, usando a identificação acima, que $\tau_C \oplus g^*(f_1'^*(\tau_Y)) \cong g^*(\tau_X)$. Seja $\bar{g} : \tau_C \oplus g^*(f_1'^*(\tau_Y)) \rightarrow g^*(\tau_X)$ o isomorfismo estável de fibrados vetoriais sobre C dado pelo mergulho g . Assim, $(C, g, \bar{g})$ é uma φ -variedade fechada singular em X de dimensão $m - n$, onde $\varphi := f_1'^*(\tau_Y) - \tau_X$. Desde que $f_1 \simeq f_1'$, podemos considerar $f_1^*(\tau_Y)$ ao invés de $f_1'^*(\tau_Y)$.

Definição 113. *Com as notações acima, definimos $\omega(f_1, f_2) := [C, g, \bar{g}] \in \Omega_{m-n}(X; \varphi)$, onde $\varphi = f_1^*(\tau_Y) - \tau_X$.*

Por [K-04], segue que $\omega(f_1, f_2)$ é bem-definido e é um invariante homotópico (a menos de isomorfismo). Notemos que, geralmente, o grupo $\Omega_{m-n}(X; \varphi)$ varia junto com o invariante $\omega(f_1, f_2)$, pois $\varphi = f_1^*(\tau_Y) - \tau_X$.

Ainda, também por [K-04], se (f_1, f_2) é loose, então $\omega(f_1, f_2) = 0$.

1.8.2 Sobre o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$

Seja $E(f_1, f_2) := \{(x, \theta) \in X \times Y^I \mid \theta(0) = f_1(x), \theta(1) = f_2(x)\}$. Temos que $E(f_1, f_2)$ é o pullback de p por (f_1, f_2) , onde $p : Y^I \rightarrow Y \times Y$ é a fibração dada por $p(\theta) = (\theta(0), \theta(1))$ (vide [Sp-66], corolário 3, página 98). Consideremos o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc} E(f_1, f_2) & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow pr & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & Y \times Y \end{array}$$

Notemos que se $x_0 \in X$ é tal que $x_0 \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ e $y_0 := f_1(x_0) = f_2(x_0)$, então $pr^{-1}(x_0) \approx p^{-1}(f_1(x_0), f_2(x_0)) = \Omega(Y, y_0)$ é a fibra sobre x_0 de pr . Ainda, $E(f_1, f_2)$ é um espaço topológico que, em geral, não é conexo por caminhos. De fato, da sequência de homotopia da fibração pr , obtemos em particular que o conjunto $\pi_0(E(f_1, f_2))$ está em bijeção com o conjunto das

classes de Reidemeister $\frac{\pi_1(Y)}{\sim}$, isto é, $\#\pi_0(E(f_1, f_2)) = R(f_1, f_2)$. Ainda, se $F_i : f_i \simeq f'_i$, $i = 1, 2$, notemos que $E(f_1, f_2)$ e $E(f'_1, f'_2)$ têm o mesmo tipo de homotopia sobre X , via $(x, \theta) \mapsto (x, (F_1(x, -))^{-1} * \theta * F_2(x, -))$. Finalmente, observemos que $E(f_1, f_2)$ e $E(f_2, f_1)$ são homeomorfos sobre X , via $(x, \theta) \mapsto (x, \theta^{-1})$.

Consideremos novamente uma aproximação, (f'_1, f'_2) , de (f_1, f_2) , diferenciável e transversa à diagonal Δ e o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccccc} & & E(f'_1, f'_2) & \longrightarrow & E(f_1, f_2) \\ & \nearrow \tilde{g} & \downarrow pr' & & \downarrow pr \\ C & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array}$$

onde $C = \text{Coin}(f'_1, f'_2)$, $\tilde{g}(x) = (x, \text{cte}_{f'_1(x)})$ e $pr'(x, \theta) = x$. Notemos que o isomorfismo estável $\bar{g}$ dado por g é tal que $\bar{g} : \tau_C \oplus \tilde{g}^*(pr'^*(f_1'^*(\tau_Y))) \rightarrow \tilde{g}^*(pr'^*(\tau_X))$. Assim, $(C, \tilde{g}, \bar{g})$ é uma $\tilde{\varphi}$ -variedade fechada singular em $E(f'_1, f'_2)$ de dimensão $m - n$, onde $\tilde{\varphi} := pr'^*(\varphi) = pr'^*(f_1'^*(\tau_Y)) - pr'^*\tau_X$. Desde que $f_1 \simeq f'_1$ e $f_2 \simeq f'_2$, podemos considerar $f_1^*(\tau_Y)$ ao invés de $f_1'^*(\tau_Y)$ e $pr : E(f_1, f_2) \rightarrow X$ ao invés de $pr' : E(f'_1, f'_2) \rightarrow X$.

Definição 114. Com as notações acima, definimos $\tilde{\omega}(f_1, f_2) := [C, \tilde{g}, \bar{g}] \in \Omega_{m-n}(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$, onde $\tilde{\varphi} = pr^*(f_1^*(\tau_Y)) - pr^*\tau_X$.

Por [K-06], vemos que $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ é bem-definido e é um invariante homotópico (a menos de isomorfismo). Ainda, $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$ se, e só se, $\tilde{\omega}(f_2, f_1) = 0$. Notemos novamente que, em geral, o grupo $\Omega_{m-n}(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$ varia junto com o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$, pois $\tilde{\varphi}$ e $E(f_1, f_2)$ também dependem das classes de homotopia de f_1 e de f_2 .

Ainda, do mesmo modo que antes, se (f_1, f_2) é loose, então $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$.

1.8.3 Sobre o número de Nielsen $\tilde{N}(f_1, f_2)$

Sejam $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f_1, f_2) \subset X$. Por [K-06], notemos que $\tilde{g}(x_0)$ e $\tilde{g}(x_1)$ pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $E(f_1, f_2)$ se, e somente se, x_0 e x_1 são Nielsen equivalentes, isto é, existe $\sigma \in X^I$ tal que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$ e $f_1 \circ \sigma \simeq_{\partial I} f_2 \circ \sigma$. Por abuso de notação, seja $\pi_0(E(f_1, f_2))$ o conjunto das componentes conexas por caminhos de $E(f_1, f_2)$. Desde que

$$\Omega_{m-n}(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi}) \cong \bigoplus_{A \in \pi_0(E(f_1, f_2))} \Omega_{m-n}(A; \tilde{\varphi}|_A),$$

podemos considerar as componentes $\tilde{\omega}_A(f_1, f_2) \in \Omega_{m-n}(A; \tilde{\varphi}|_A)$ de $\tilde{\omega}(f_1, f_2) \in \Omega_{m-n}(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$ dadas por $[C_A, \tilde{g}|_{C_A}, \bar{g}|_{C_A}]$, onde $C_A := \tilde{g}^{-1}(A)$, para cada $A \in \pi_0(E(f_1, f_2))$.

Definição 115. *Seja A uma componente conexa por caminhos de $E(f_1, f_2)$. Dizemos que A é **essencial** se $\tilde{\omega}_A(f_1, f_2) \neq 0 \in \Omega_{m-n}(A; \tilde{\varphi}|_A)$ e chamamos o número de componentes conexas por caminhos essenciais de $E(f_1, f_2)$ de **número de Nielsen** de (f_1, f_2) e o denotamos por $\tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Por [K-06], temos que $\tilde{N}(f_1, f_2)$ é bem-definido.

Teorema 116. *Sejam $f_1, f_2 : X^m \rightarrow Y^n$ aplicações contínuas. Então*

- $\tilde{N}(f_1, f_2)$ depende apenas das classes de homotopia de f_1 e de f_2 ;
- $\tilde{N}(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_2, f_1)$;
- $\tilde{N}(f_1, f_2) \leqslant MCC(f_1, f_2) < \infty$;
- $MCC(f_1, f_2) \leqslant R(f_1, f_2)$ se $n \neq 2$.

Tal resultado pode ser encontrado em [K-06] (teorema 1.9). Em particular, notemos que $\tilde{N}(f_1, f_2)$ é um limitante inferior para $MCC(f_1, f_2)$. Ainda, observemos que $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$ se, e somente se, $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$.

Observação 117. *Observe o uso da notação $\tilde{N}(f_1, f_2)$ (ver [K-11]) ao invés da notação $N(f_1, f_2)$, conforme denotado inicialmente em [K-06].*

Uma parte do trabalho é dedicada ao cálculo de $\tilde{N}(f_1, f_2)$.

1.8.4 Resultados tipo Wecken

Um resultado tipo Wecken é um resultado que, sob certas hipóteses sobre os espaços, conclui que o número mínimo de componentes de coincidências de (f_1, f_2) é igual ao número de Nielsen de (f_1, f_2) , ou seja, $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$, para todo par (f_1, f_2) de aplicações contínuas.

Aqui, apresentamos, de maneira geral, dois resultados tipo Wecken e, a seguir, enfatizamos o caso de codimensão 1.

Definição 118. *Dizemos que o par (f_1, f_2) satisfaz a **propriedade de Wecken**, se $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Notemos, em particular, que, se (f_1, f_2) satisfaz a propriedade de Wecken, então (f_1, f_2) é loose se, e somente se, $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$.

A seguir, apresentamos um resultado tipo Wecken, que pode ser encontrado em [K-06] (teorema 1.10).

Teorema 119. *Seja $m < 2n - 2$. Sejam $f_1, f_2 : X^m \rightarrow Y^n$ aplicações contínuas. Então $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Observação 120. *Se (f_1, f_2) é loose, então (f_1, f_2) satisfaz a propriedade de Wecken. De fato, inicialmente, lembremos que (f_1, f_2) é loose se, e só se, $MCC(f_1, f_2) = 0$. Ainda, se (f_1, f_2) é loose, então $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$. Finalmente, lembremos que $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$ se, e só se, $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$. Assim, se (f_1, f_2) é loose, então $MCC(f_1, f_2) = 0 = \tilde{N}(f_1, f_2)$ e, em particular, (f_1, f_2) satisfaz a propriedade de Wecken.*

A seguir, apresentamos mais um resultado tipo Wecken.

Teorema 121. *Seja $n = 1$. Sejam $f_1, f_2 : X^m \rightarrow Y^1$ aplicações contínuas. Então $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Demonstração. Com efeito, se $n = 1$, então ou $Y = \mathbb{R}$, ou $Y = S^1$. Se $Y = \mathbb{R}$, então (f_1, f_2) é loose, pois existem $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq y_2$, tais que $f_1 \simeq y_1$ e $f_2 \simeq y_2$. Daí, pela observação 120, $MCC(f_1, f_2) = 0 = \tilde{N}(f_1, f_2)$. Se $Y = S^1$, então o resultado segue por [K-06] (teorema 1.13). ■

Observação 122. *Notemos que, se $Y = S^1$, então, por [K-06] (teorema 1.13), temos uma maneira homológica para calcularmos o número de Nielsen do par (f_1, f_2) , a saber, $\tilde{N}(f_1, f_2)$ é tal que $(f_{1*} - f_{2*})(H_1(X; \mathbb{Z})) = \tilde{N}(f_1, f_2)H_1(S^1; \mathbb{Z})$.*

A partir dos resultados anteriores, obtemos o seguinte resultado tipo Wecken para o caso de codimensão 1:

Corolário 123. *Seja $n = 1$ ou $n \geq 4$. Sejam $f_1, f_2 : X^{n+1} \rightarrow Y^n$ aplicações contínuas. Então $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Demonstração. De fato, se $n = 1$, então o resultado segue pelo teorema 121. Se $n \geq 4$, então $2n \geq n + 4$ e portanto $2n - 2 > n + 1$, donde o resultado segue pelo teorema 119. ■

Assim, resta analisar, para o caso de codimensão 1, a existência de resultados tipo Wecken apenas quando $n = 2, 3$. Em particular, uma parte do trabalho é dedicada a esta análise.

1.8.5 Raízes e bordismo

Nesta subseção, estamos interessados em estudar os invariantes definidos anteriormente, para pares de aplicações contínuas da forma (y_0, f) , sendo

y_0 a aplicação constante igual a $y_0 \in Y$.

Observemos que, como $y_0^*(\tau_Y)$ é trivial, então $\omega(y_0, f) \in \Omega_{m-n}(X; -\tau_X)$ e $\tilde{\omega}(y_0, f) \in \Omega_{m-n}(E(y_0, f); -pr^*(\tau_X))$. Ainda, notemos que $R(y_0, f) = \#\pi_0(E(y_0, f)) = [\pi_1(Y) : f_\#(\pi_1(X))]$. Agora, a fim de estudarmos $\tilde{N}(y_0, f)$, vamos analisar as componentes conexas por caminhos de $E(y_0, f)$. Seja $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = y_0$. Consideremos o diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

onde $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ é o revestimento de Y dado por $f_\#(\pi_1(X)) = p_\#(\pi_1(\tilde{Y}))$ e $\tilde{f}$ é o levantamento de f tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$. Desta forma, obtemos a seguinte descrição das componentes conexas por caminhos de $E(y_0, f)$ e a seguinte decomposição do grupo $\Omega_{m-n}(E(y_0, f); \tilde{\varphi})$ em soma direta:

Lema 124. *Com as notações acima, a menos de homeomorfismo, as componentes conexas por caminhos de $E(y_0, f)$ são todas da forma $E(\tilde{y}, \tilde{f})$, com $\tilde{y} \in p^{-1}(y_0)$, e $R(y_0, f) = \#p^{-1}(y_0)$. Ainda, temos que $\Omega_{m-n}(E(y_0, f); \tilde{\varphi}) \cong \bigoplus_{\tilde{y} \in p^{-1}(y_0)} \Omega_{m-n}(E(\tilde{y}, \tilde{f}); \tilde{\varphi}|_{E(\tilde{y}, \tilde{f})})$.*

Demonstração. De fato, por [K-062] (lema 4.1), segue que $E(\tilde{y}, \tilde{f})$ é conexo por caminhos, para todo $\tilde{y} \in p^{-1}(y_0)$. Ainda, desde que dado $(x, \theta) \in E(y_0, f)$, existe um único caminho $\tilde{\theta} : I \rightarrow \tilde{Y}$ que termina em $\tilde{f}(x)$ e é tal que $p \circ \tilde{\theta} = \theta$ (vide [Ma-77], página 151), então $E(y_0, f) \ni (x, \theta) \mapsto (x, \tilde{\theta}) \in \bigcup_{\tilde{y} \in p^{-1}(y_0)} E(\tilde{y}, \tilde{f})$ define um homeomorfismo. Em particular, a menos de homeomorfismo, $E(\tilde{y}, \tilde{f})$ são as componentes conexas por caminhos de $E(y_0, f)$, e $R(y_0, f) = \#\pi_0(E(y_0, f)) = \#p^{-1}(y_0)$ (vide [K-062], corolário 4.2). Note-mos ainda que, dados $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \in p^{-1}(y_0)$, $E(\tilde{y}_1, \tilde{f})$ e $E(\tilde{y}_2, \tilde{f})$ têm o mesmo tipo de homotopia (sobre X), via $(x, \tilde{\theta}) \mapsto (x, \tilde{\tau} * \tilde{\theta})$, onde $\tilde{\tau}$ é um caminho que liga

$\tilde{y}_2$ a $\tilde{y}_1$. Desta forma, $\Omega_{m-n}(E(y_0, f); \tilde{\varphi}) \cong \bigoplus_{p^{-1}(y_0)} \Omega_{m-n}(E(\tilde{y}_0, \tilde{f}); \tilde{\varphi}|_{E(\tilde{y}_0, \tilde{f})})$.

■

Ainda, temos a seguinte descrição das componentes de $\tilde{\omega}(y_0, f)$:

Lema 125. *A menos de isomorfismo, por abuso de notação, as componentes de $\tilde{\omega}(y_0, f)$ são todas iguais a $\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})$. Ainda, se $p^{-1}(y_0)$ é infinito, então elas são todas iguais a $0 = \tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})$.*

Demonstração. Com efeito, por [K-062] (demonstração do teorema 4.3), segue, a menos de isomorfismo, que as componentes $\tilde{\omega}_{E(\tilde{y}, \tilde{f})}(y_0, f)$ de $\tilde{\omega}(y_0, f)$ são todas iguais a $\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}) \in \Omega_{m-n}(E(\tilde{y}_0, \tilde{f}); \tilde{\varphi}|_{E(\tilde{y}_0, \tilde{f})})$. Por [K-062] (proposição 4.6), se $\#p^{-1}(y_0) = \infty$, isto é, se $[\pi_1(Y) : f_{\#}(\pi_1(X))] = [\pi_1(Y) : p_{\#}(\pi_1(\tilde{Y}))] = \infty$, então (y_0, f) e $(\tilde{y}_0, \tilde{f})$ são deformáveis a livre de coincidência e portanto as componentes de ambos são todas nulas. ■

Observação 126. *Em particular, a menos de isomorfismo, por abuso de notação, temos que $\tilde{\omega}(y_0, f) \in \Delta \subset \bigoplus_{p^{-1}(y_0)} \Omega_{m-n}(E(\tilde{y}_0, \tilde{f}); \tilde{\varphi}|_{E(\tilde{y}_0, \tilde{f})})$. Ainda, $\tilde{N}(y_0, f) = 0$ se, e só se, $\tilde{N}(\tilde{y}_0, \tilde{f}) = 0$.*

O próximo resultado, apresentado aqui de maneira conveniente, pode ser encontrado na íntegra em [K-062] (proposição 1.5).

Proposição 127. *Com as notações anteriores, $\tilde{N}(y_0, f) = d \cdot \tilde{N}(\tilde{y}_0, \tilde{f})$, onde $d = \#p^{-1}(y_0) \in]0, \infty]$ e assumimos $\infty \cdot 0 := 0$.*

1.8.6 Auto-coincidências e bordismo

Nesta subseção, estamos interessados em estudar os invariantes definidos anteriormente, para pares de aplicações contínuas da forma (f, f) .

Notemos que $\omega(f, f) \in \Omega_{m-n}(X; \varphi)$ e $\tilde{\omega}(f, f) \in \Omega_{m-n}(E(f, f); \tilde{\varphi})$. Ainda, $MCC(f, f) \leq 1$, pois $Coin(f, f) = X$ é conexo por caminhos.

$$\begin{array}{ccc}
& & E(f, f) \\
& \nearrow \tilde{g} & \downarrow pr \\
C & \xrightarrow{g} & X
\end{array}
\begin{array}{c}
\uparrow s \\
\end{array}$$

Definindo $s : X \rightarrow E(f, f)$ por $s(x) = (x, cte_{f(x)})$, para todo $x \in X$, obtemos que s é uma seção de pr , isto é, $pr \circ s = 1_X$. Ainda, $s \circ g = \tilde{g}$ e, desde que X é conexo por caminhos, então $\tilde{N}(f, f) \leq 1$. Finalmente, observemos que $s_*(\omega(f, f)) = s_*([C, g, \bar{g}]) = [C, s \circ g, \bar{g}] = \tilde{\omega}(f, f)$ e, em particular, $\omega(f, f) = 0$ se, e só se, $\tilde{\omega}(f, f) = 0$.

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente para o par (f, f) ser loose, isto é, deformável a livre de coincidência (ou para f ser deformável a livre de auto-coincidência). Este resultado, apresentado aqui de maneira conveniente, pode ser encontrado na íntegra em [K-04].

Teorema 128. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f^*(\tau_Y)$ admite uma seção que não se anula, então (f, f) é loose.*

Capítulo 2

Coincidências em codimensão 1, sendo o domínio uma esfera

Em todo o capítulo, sejam $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y^n$ aplicações contínuas, onde Y é uma n -variedade sem bordo, conexa, com $n \geq 1$ e seja $y_0 \in Y$.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ quando o domínio das aplicações é uma esfera $(n + 1)$ -dimensional e o contradomínio é uma variedade sem bordo, conexa, n -dimensional, lembrando que tal invariante pertence ao grupo de bordismo normal $\Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$. Sendo o domínio das aplicações uma esfera de dimensão pelo menos 3, veremos, usando um resultado de Koschorke ([K-06]) que remete a um outro de Hatcher e Quinn ([HaQ-74]), que tal grupo é isomorfo a $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, deixando então de depender do par (f_1, f_2) de aplicações contínuas e do fibrado virtual $\tilde{\varphi}$. Desta forma, os invariantes das aplicações contínuas de S^{n+1} em Y estão todos num mesmo grupo. Além disso, neste contexto, veremos que é possível decompor $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ na soma de $\tilde{\omega}(f_1, f_1)$, no caso especial de auto-coincidências, com $\tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$, no caso especial de raízes. Em seguida, veremos que, para n igual a 2 ou n ímpar, o invariante para

auto-coincidências se anula, igualando o invariante geral $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ com o invariante para raízes $\tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$. Desta forma, daremos mais ênfase ao estudo deste último ao invés do invariante geral. Em particular, definiremos dois homomorfismos $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ que ajudam no cálculo do número de Nielsen $\tilde{N}(y_0, f)$, para toda aplicação contínua $f : S^{n+1} \rightarrow Y$. Ainda, usando um resultado de Koschorke ([K-81], teorema 9.3), nós obtemos (proposição 136) que o grupo $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, sob determinadas hipóteses, pode ser decomposto em soma direta e que, a partir de tal decomposição e dos cálculos de ω' e de ω'' , é possível recuperar $\tilde{\omega}(y_0, f)$, para toda aplicação contínua $f : S^{n+1} \rightarrow Y$. Daí, estudando tais homomorfismos para superfícies e 3-variedades, nós obtemos um resultado tipo Wecken para $n = 2, 3$ (teorema 159), o qual diz que o número mínimo de componentes de coincidências $MCC(f_1, f_2)$ é igual ao número de Nielsen $\tilde{N}(f_1, f_2)$, para quaisquer aplicações contínuas $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$, com $n = 2, 3$. Daí, juntando com resultados tipo Wecken de Koschorke ([K-06]), enunciamos tal resultado para toda dimensão $n \geq 1$. Por fim, nós calculamos ω'' para vários espaços Y (proposições 151, 152, 153, 164, 165, 178, entre outros resultados) e, em particular, nós obtemos que tal homomorfismo é identicamente nulo para todo fibrado esférico sobre esfera, com exceção de S^2 -fibrados não triviais sobre S^4 , quando tal homomorfismo, restrito a $\mathbb{Z}$, é injetor (proposição 166 e teorema 171).

2.1 Particularidades sobre o invariante

Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc}
& & E(f_1, f_2) \\
& \nearrow \tilde{g} & \downarrow pr \\
C & \xrightarrow{g} & S^{n+1}
\end{array}$$

onde $C := Coin(f_1, f_2)$, $E(f_1, f_2) = \{(x, \theta) \in S^{n+1} \times Y^I \mid \theta(0) = f_1(x), \theta(1) = f_2(x)\}$, $\tilde{g}(x) = (x, cte_{f_1(x)})$ e $pr(x, \theta) = x$. Temos que o invariante $\tilde{\omega}$ é tal que

$$\tilde{\omega}(f_1, f_2) := [C, \tilde{g}, \bar{g}] \in \Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi}) = \bigoplus_{A \in \pi_0(E(f_1, f_2))} \Omega_1(A; \tilde{\varphi}|_A),$$

onde $\tilde{\varphi} := pr^*(f_1^*(\tau_Y) - \tau_{S^{n+1}})$.

Nesta seção, apresentamos vários resultados aplicados para coincidências em codimensão 1, sendo o domínio uma esfera, os quais podem ser encontrados na íntegra em [K-06], [K-062], [K-07], entre outros. Vamos ver que, na verdade, a menos de isomorfismo, o invariante $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$ pertence a $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, para quaisquer aplicações contínuas $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$, com $n \geq 2$. Além disto, vamos ver que é possível operar tais invariantes dentro do grupo e até mesmo decompor tal grupo, sob determinadas hipóteses, em soma direta. Vamos ainda definir e estudar homomorfismos que juntos, em geral, determinam $\tilde{\omega}(y_0, f)$, para toda aplicação contínua $f : S^{n+1} \rightarrow Y$. Finalmente, veremos alguns resultados gerais que implicam na deformabilidade a livre de coincidência de pares de aplicações contínuas.

Observação 129. *Desde que S^{n+1} é n -conexa, então, por [K-06] (proposição 2.4), existe um isomorfismo $i : \Omega_k^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \rightarrow \Omega_k(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$, para todo $k < n$. Temos que i é tal que $i^{-1} : [M, \tilde{g}, \bar{g}] \mapsto [M, \tilde{g}', \bar{g}]$, onde $\tilde{g}'(x) = (f_1 \circ G(x, -))^{-1} * \theta_{\tilde{g}(x)} * (f_2 \circ G(x, -))$, $G : M \times I \rightarrow S^{n+1}$ é tal que $G : pr \circ \tilde{g} \simeq cte_{x_0}$, e $\theta_{\tilde{g}(x)}$ é tal que $\tilde{g}(x) = (pr \circ \tilde{g}(x), \theta_{\tilde{g}(x)})$.*

A partir desta observação, enunciamos o resultado abaixo.

Lema 130. *Se $n \geq 2$, então existe um isomorfismo $i : \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \rightarrow \Omega_1(E(f_1, f_2); \tilde{\varphi})$.*

Observação 131. Usando o isomorfismo acima, denotamos $i^{-1}(\tilde{\omega}(f_1, f_2)) \in \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$ simplesmente por $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$. Desta forma, o grupo onde o invariante se encontra não depende mais do par de aplicações onde ele é aplicado, isto é, $\tilde{\omega}(f_1, f_2) \in \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, para quaisquer aplicações contínuas $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y^n$, com $n \geq 2$.

De agora em diante, nesta seção, seja $n \geq 2$. Os três resultados seguintes nos permitem fazer cálculos com o invariante, usando a operação do grupo em que ele se encontra.

Lema 132. $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = \tilde{\omega}(f_1, y_0) + \tilde{\omega}(y_0, f_2)$.

Demonstração. Com efeito, temos que existe $f'_i \simeq f_i$ tal que $f'_1(S_+^{n+1}) \equiv y_0$ e $f'_2(S_+^{n+1}) \equiv y_0$. Sem perda de generalidade, suponha que $f'_1(S_-^{n+1}) \equiv y_1$ e $f'_2(S_+^{n+1}) \equiv y_2$, com $y_1 \neq y_2$. Assim, $Coin(f'_1, f'_2) = Coin(f'_1, y_2) \dot{\cup} Coin(y_1, f'_2) = f_1^{-1}(y_2) \dot{\cup} f_2^{-1}(y_1)$. Em particular, $Coin(f_1, f_2)$ e $f_1^{-1}(y_0) \dot{\cup} f_2^{-1}(y_0)$ são cobordantes. Da mesma maneira, obtemos as demais identificações e o resultado segue. ■

Este resultado nos diz que basta conhecermos o invariante ora quando uma das aplicações é constante, ora quando a outra é constante, para conhecermos o invariante para o par de aplicações.

Lema 133. Sejam $f_1, f'_1, f_2, f'_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então $\tilde{\omega}(f_1 + f'_1, f_2 + f'_2) = \tilde{\omega}(f_1, f_2) + \tilde{\omega}(f'_1, f'_2)$.

Demonstração. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $[f_i], [f'_i] \in \pi_{n+1}(Y, y_i)$, com $y_1 \neq y_2$. Pela definição da operação de grupo em $\pi_{n+1}(Y, y_i)$, temos que $Coin(f_1 + f'_1, f_2 + f'_2) = Coin(f_1, f_2) \dot{\cup} Coin(f'_1, f'_2)$. Denote $\tilde{\omega}(f_1 + f'_1, f_2 + f'_2) := [C, \tilde{g}, \bar{g}]$, $\tilde{\omega}(f_1, f_2) := [D, \tilde{h}, \bar{h}]$ e $\tilde{\omega}(f'_1, f'_2) :=$

$[D', \tilde{h}', \overline{h}']$. Pela igualdade anterior, segue que C e $D \dot{\cup} D'$ são cobordantes. Da mesma forma, obtemos $\tilde{g} \sim \tilde{h} \dot{\cup} \tilde{h}'$, $\overline{g} \sim \overline{h} \dot{\cup} \overline{h}'$ e o resultado segue. ■

Este resultado generaliza o anterior na medida em que podemos considerar f_2 e f'_1 como sendo constantes. O próximo resultado nos ajuda a calcular o invariante quando já conhecemos o cálculo para auto-coincidências e para raízes.

Lema 134. $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = \tilde{\omega}(f_1, f_1) + \tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$.

Demonstração. O resultado segue do lema anterior. ■

Observação 135. *Desta forma, podemos considerar o homomorfismo $\tilde{\omega} : \pi_{n+1}(Y) \times \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$ dado por $\tilde{\omega} : ([f_1], [f_2]) \mapsto \tilde{\omega}(f_1, f_2)$.*

O resultado seguinte nos permite fazer cálculos com o invariante, através de uma decomposição do grupo onde ele se encontra em soma direta.

Proposição 136. *Se cada componente conexa por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito, então $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \cong \left(\bigoplus_{\pi_1(Y)} \mathbb{Z}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_{\pi_1(Y)} \pi_2(Y) \right)$.*

Demonstração. De fato, seja X o conjunto das componentes conexas por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$. Então, para cada $A \in X$, pelo teorema 110 e pela observação 111, sendo φ trivial, segue que a sequência

$$\cdots H_2(A; \mathbb{Z}) \rightarrow \Omega_1^{fr} \xrightarrow{i_*} \Omega_1^{fr}(A) \xrightarrow{\mu} H_1(A; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

é exata, onde $\Omega_1^{fr} = \Omega_1^{fr}(y_A)$ e $i : y_A \hookrightarrow A$ é a inclusão. Considere $r : A \rightarrow y_A$ a aplicação constante. Desde que $r_* \circ i_* = 1_{\Omega_1^{fr}}$, então a sequência cinde e portanto $\Omega_1^{fr}(A) \cong \Omega_1^{fr} \oplus H_1(A; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus H_1(A; \mathbb{Z})$, para cada $A \in X$. Agora, como as componentes conexas por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ têm o mesmo tipo de homotopia, então, para cada $A \in X$, $\pi_1(A) \cong \pi_1(\Omega(Y, y_0)) \cong \pi_2(Y)$.

Daí, como $\pi_2(Y)$ é abeliano, segue, usando a aplicação de Hurewicz, que $H_1(A; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(A) \cong \pi_2(Y)$, para cada $A \in X$. Logo, $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \cong \bigoplus_{A \in X} \Omega_1^{fr}(A) \cong (\bigoplus_X \mathbb{Z}_2) \oplus (\bigoplus_X \pi_2(Y)) = (\bigoplus_{\pi_1(Y)} \mathbb{Z}_2) \oplus (\bigoplus_{\pi_1(Y)} \pi_2(Y))$, uma vez que $\#X = \#\pi_0(\Omega(Y, y_0)) = \#\pi_1(Y)$. ■

Observação 137. *Sejam X o conjunto das componentes conexas por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ e seja $A \in X$. Consideremos os homomorfismos $r_* : \Omega_1^{fr}(A) \rightarrow \Omega_1^{fr}$, $\mu : \Omega_1^{fr}(A) \rightarrow H_1(A; \mathbb{Z})$ e as identificações $\Omega_1^{fr} \cong \mathbb{Z}_2$, $H_1(A; \mathbb{Z}) \cong \pi_2(Y)$, como na demonstração da proposição acima. Desde que $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \cong \bigoplus_{A \in X} \Omega_1^{fr}(A)$, podemos considerar a projeção $p_A : \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \rightarrow \Omega_1^{fr}(A)$, a qual é dada por $[C, \tilde{g}', \bar{g}] \mapsto [C_A, \tilde{g}'_{|C_A}, \bar{g}_{|C_A}]$, onde $C_A := \tilde{g}'^{-1}(A)$. Notemos que a componente $\tilde{\omega}_A(f_1, f_2) \in \Omega_1^{fr}(A)$ de $\tilde{\omega}(f_1, f_2) \in \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$ é tal que $p_A(\tilde{\omega}(f_1, f_2)) = \tilde{\omega}_A(f_1, f_2)$. Desta forma, podemos considerar os homomorfismos $\omega'_A := r_* \circ p_A \circ \tilde{\omega} : \pi_{n+1}(Y) \times \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\omega''_A := \mu \circ p_A \circ \tilde{\omega} : \pi_{n+1}(Y) \times \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$. Daí, observemos que, se cada componente conexa por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito, então, pela proposição 110, basta calcularmos ω'_A e ω''_A , para todo $A \in X$, a fim de determinar $\tilde{\omega}(f_1, f_2)$.*

Observação 138. *Se Y tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo, notemos que $\Omega(Y, y_0)$ também o tem (vide [FrPi-90], página 236). Daí, se $\pi_{k+1}(Y) \cong \pi_k(\Omega(Y, y_0))$ é finitamente gerado, para todo $k \geq 1$, então, pelo lema 49, obtemos que cada componente conexa por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito.*

Os próximos resultados nos dão condições suficientes para um par de aplicações contínuas ser loose, isto é, deformável a livre de coincidência. Lembremos que, se (f_1, f_2) é loose, então $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$.

Lema 139. *Se Y é aberta, então (f_1, f_2) é loose.*

Demonstração. Com efeito, como S^{n+1} é compacta, então $f_1(S^{n+1})$, $f_2(S^{n+1})$ também o são. Daí, como Y é aberta, então existem $y_1 \in Y \setminus f_1(S^{n+1})$ e $y_2 \in Y \setminus f_2(S^{n+1})$. Em particular, segue que $f_i(S^{n+1}) \subset Y \setminus \{y_i\}$, $i = 1, 2$. Suponha, sem perda de generalidade, $y_1 \neq y_2$. Considere $f'_1 \simeq f_1$ tal que $f'_1(S^{n+1}_-) \subset Y \setminus y_1$, $f'_1(S^{n+1}_+) \equiv y_2$. Considere ainda $f'_2 \simeq f_2$ tal que $f'_2(S^{n+1}_+) \subset Y \setminus y_2$, $f'_2(S^{n+1}_-) \equiv y_1$. Assim, $Coin(f'_1, f'_2) = \emptyset$ e portanto (f_1, f_2) é loose. ■

Lema 140. *Se $\pi_1(Y)$ é infinito, então (f_1, f_2) é loose.*

Demonstração. De fato, se $\pi_1(Y)$ é infinito, então $p^{-1}(y)$ é infinito, para todo $y \in Y$, onde $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ é o revestimento universal de Y . Considere um levantamento $\tilde{f}_i : S^{n+1} \rightarrow \tilde{Y}$ de f_i , $i = 1, 2$. Como S^{n+1} é compacta, então $\tilde{f}_i(S^{n+1})$ também o é e portanto $\tilde{f}_i(S^{n+1}) \cap p^{-1}(y)$ é finito, para todo $y \in Y$, $i = 1, 2$. Considere $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, e denote $\tilde{f}_1(S^{n+1}) \cap p^{-1}(y_1) := \{y_{11}, \dots, y_{1k_1}\}$, $\tilde{f}_2(S^{n+1}) \cap p^{-1}(y_2) := \{y_{21}, \dots, y_{2k_2}\}$. Considere um subconjunto $\{z_{i1}, \dots, z_{ik_i}\} \subset \tilde{Y} \setminus \tilde{f}_i(S^{n+1})$, $i = 1, 2$. Seja h um difeomorfismo isotópico a $1_{\tilde{Y}}$ tal que $h(z_{ij}) = y_{ij}$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, 2$. Assim, $f_i \simeq p \circ (h \circ \tilde{f}_i) =: f'_i$, com $f'_i(S^{n+1}) \subset Y \setminus \{y_i\}$. Agora, sem perda de generalidade, podemos supor que $f'_1(S^{n+1}_-) \subset Y \setminus y_1$, $f'_1(S^{n+1}_+) \equiv y_2$, $f'_2(S^{n+1}_+) \subset Y \setminus y_2$ e $f'_2(S^{n+1}_-) \equiv y_1$, donde $Coin(f'_1, f'_2) = \emptyset$ e portanto (f_1, f_2) é loose. ■

Lema 141. *Seja (Y, p, B) uma fibração. Se p admite uma seção $s : B \rightarrow Y$, então (f_1, f_2) é loose.*

Demonstração. Com efeito, seja $F := p^{-1}(b_0)$, para algum $b_0 \in B$. Se p admite uma seção s , então a sequência abaixo é exata curta e cinde.

$$0 \rightarrow \pi_{n+1}(F) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_{n+1}(Y) \xrightleftharpoons[s_{\#}]{p_{\#}} \pi_{n+1}(B) \rightarrow 0$$

Assim, $\pi_{n+1}(Y) \cong \pi_{n+1}(B) \oplus \pi_{n+1}(F)$, pois $n+1 \geq 2$. Em particular, se $[f] \in \pi_{n+1}(Y) = s_{\#}(\pi_{n+1}(B)).i_{\#}(\pi_{n+1}(F))$, então $\text{Im} f' \subset \text{Im} s \cup \text{Im} i \subsetneq Y$, para alguma $f' \simeq f$. Daí, sem perda de generalidade, sejam $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, tais que $f'_i(S^{n+1}) \subset Y \setminus y_i$, para alguma $f'_i \simeq f_i$, $i = 1, 2$. Suponhamos ainda que $f'_1(S^{n+1}) \subset Y \setminus y_1$, $f'_1(S^{n+1}) \equiv y_2$, $f'_2(S^{n+1}) \subset Y \setminus y_2$, $f'_2(S^{n+1}) \equiv y_1$. Logo, $\text{Coin}(f'_1, f'_2) = \emptyset$ e portanto (f_1, f_2) é loose. ■

Observação 142. *Em particular, se $Y = Y_1 \times Y_2$, para algum Y_1, Y_2 , então (f_1, f_2) é loose.*

O próximo resultado nos diz que, sob determinadas hipóteses, o cálculo do invariante para um par arbitrário de aplicações contínuas se reduz ao cálculo do invariante para um par no caso especial de raízes.

Lema 143. *Se $n = 2$, ou n é ímpar, então $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = \tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$.*

Demonstração. De fato, se Y é aberta, então, pelo lema 139, (f_1, f_2) e $(y_0, f_2 - f_1)$ são loose e portanto $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0 = \tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$. Assim, podemos supor Y fechada. Se $n = 2$, então $f_1^*(\tau_Y)$ é um 2-fibrado vetorial sobre S^3 e portanto é classificado por $\pi_2(SO(2)) \cong \pi_2(S^1) = 0$. Assim, $f_1^*(\tau_Y)$ é trivial e portanto admite seção que não se anula. Agora, se n é ímpar, então, pelo corolário 56, τ_Y admite seção que não se anula o que, por conseguinte, implica que $f_1^*(\tau_Y)$ também admite seção que não se anula. Logo, em ambos os casos, pelo teorema 128, (f_1, f_1) é loose. Daí, $\tilde{\omega}(f_1, f_1) = 0$ e portanto, pelo lema 134, o resultado segue. ■

Agora, no caso especial de raízes, a observação abaixo nos diz que os homomorfismos ω'_A e ω''_A não dependem mais da componente conexa por caminhos A de $\Omega(Y, y_0)$.

Observação 144. *Seja $f : (S^{n+1}, x_0) \rightarrow (Y^n, y_0)$ uma aplicação contínua. Seja $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ o revestimento universal de Y . Agora, para $\tilde{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$,*

consideremos o (único) levantamento $\tilde{f}: (S^{n+1}, x_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ de f , isto é, a (única) aplicação contínua $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (S^{n+1}, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \end{array}$$

Notemos que, pelos lemas 124 e 125, a menos de isomorfismo, por abuso de notação,

$$\tilde{\omega}(y_0, f) \in \Delta \subset \bigoplus_{\pi_1(Y)} \Omega_1^{fr}(\Omega(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$$

e as componentes são todas iguais a $\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}) \in \Omega_1^{fr}(\Omega(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$. Desta forma, $\omega'_A([y_0], [f]) = (r_* \circ p_A \circ \tilde{\omega})([y_0], [f]) = (r_* \circ p_A)(\tilde{\omega}(y_0, f)) = r_*(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}))$ e $\omega''_A([y_0], [f]) = (\mu \circ p_A \circ \tilde{\omega})([y_0], [f]) = (\mu \circ p_A)(\tilde{\omega}(y_0, f)) = \mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}))$. Se $\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}) := [C, \tilde{g}', \bar{g}]$, notemos que $\mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = \tilde{g}'_*([C]) \in H_1(\Omega(\tilde{Y}, \tilde{y}_0); \mathbb{Z}) \cong \pi_2(Y)$ e $r_*(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = [C, \text{cte}, \bar{g}] \in \Omega_1^{fr} \cong \mathbb{Z}_2$.

De outro modo, se $p^{-1}(y_0) := \{\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{k-1}\}$ e $C := f^{-1}(y_0)$, notemos que $C = C_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_{k-1}$, onde $C_j := \tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_j)$, para todo j . Ainda, $\Omega(Y, y_0) = \Omega_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \Omega_{k-1}$, com $\Omega_0 \approx \Omega(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ e $\Omega_j \sim \Omega_0$, para todo j . Se $\tilde{\omega}(y_0, f) := [C, \tilde{g}', \bar{g}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0))$, onde $\tilde{g}'(x) = f \circ G(x, _)$, $G : C \times I \rightarrow S^{n+1}$ é tal que $G : i \simeq x_0$ e $i : C \hookrightarrow S^{n+1}$ é a inclusão, então $\tilde{g}'^{-1}(\Omega_j) = C_j$ e $\tilde{\omega}_{\Omega_j}(y_0, f) = [C_j, \tilde{g}'_{|C_j}, \bar{g}_{|C_j}]$. Em particular, $\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}) = [C_0, \tilde{g}'_{|C_0}, \bar{g}_{|C_0}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega_0)$, $\mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = (\tilde{g}'_{|C_0})_*([C_0]) \in H_1(\Omega_0; \mathbb{Z}) \cong \pi_2(Y)$ e $r_*(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = [C_0, \text{cte}, \bar{g}_{|C_0}] \in \Omega_1^{fr} \cong \mathbb{Z}_2$.

Definição 145. Com as notações da observação 144, definimos homomorfismos $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ respectivamente por $\omega' : [f] \mapsto r_*(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}))$ e $\omega'' : [f] \mapsto \mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f}))$.

Observação 146. Observemos que, se Y é simplesmente conexo, então, em particular, $\omega'([f]) = r_*(\tilde{\omega}(y_0, f))$ e $\omega''([f]) = \mu(\tilde{\omega}(y_0, f))$.

Observação 147. *Notemos que, se $Y = S^n$, com $n \geq 2$, então $\Omega(S^n, y_0)$ é um CW-complexo conexo por caminhos tal que $\pi_{k+1}(S^n) \cong \pi_k(\Omega(S^n, y_0))$ é abeliano finitamente gerado, para todo $k \geq 1$, donde, pelo lema 49, $\Omega(S^n, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito. Daí, pela proposição 136, $\Omega_1^{fr}(\Omega(S^n, y_0)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_2(S^n)$ e $\tilde{\omega}(y_0, f)$ é dado por $\omega'([f])$ e $\omega''([f])$ (os quais calcularemos na proposição 151 e no exemplo 154). Agora, se $p : S^n \rightarrow Y$ é o revestimento universal de um CW-complexo Y , com $n \geq 2$, então $\Omega(Y, y_0)$ é um CW-complexo tal que $\pi_{k+1}(S^n) \cong \pi_{k+1}(Y) \cong \pi_k(\Omega(Y, y_0))$ é abeliano finitamente gerado, para todo $k \geq 1$. Logo, pelo lema 49, cada componente conexa por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito. Daí, pela proposição 136, $\Omega_1^{fr}(\Omega(Y, y_0)) \cong \left(\bigoplus_{\pi_1(Y)} \mathbb{Z}_2 \right) \oplus \left(\bigoplus_{\pi_1(Y)} \pi_2(Y) \right)$ e $\tilde{\omega}(y_0, f)$ é dado por $\omega'([f])$ e $\omega''([f])$.*

Da mesma forma, se $Y = \mathbb{C}P(n')$, ou $Y = \mathbb{H}P(n'')$, ou Y é um S^a -fibrado sobre S^b (com $a, b \geq 1$), então $\pi_{k+1}(Y) \cong \pi_k(\Omega(Y, y_0))$ é abeliano finitamente gerado, para todo $k \geq 1$, usando a sequência de homotopia da fibração. Logo, pelo lema 49, cada componente conexa por caminhos de $\Omega(Y, y_0)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito, donde podemos decompor o grupo de bordismo em soma direta e descrever $\tilde{\omega}$ em termos dos homomorfismos ω' e ω'' .

Lema 148. *Se Y é aberta, ou $\pi_1(Y)$ é infinito, ou $p : Y \rightarrow B$ é uma fibração que admite uma seção, então $\omega' \equiv 0 \equiv \omega''$.*

Demonstração. De fato, pelos lemas 139, 140 e 141, segue que (y_0, f) é loose, donde $\tilde{\omega}(y_0, f) = 0$ e portanto $\omega' \equiv 0 \equiv \omega''$. ■

Observação 149. *Sobre ω' :*

Seja $f : (S^{n+1}, x_0) \rightarrow (Y^n, y_0)$ uma aplicação contínua. Pelo lema 148, se

$\pi_1(Y)$ é infinito, então $\omega' \equiv 0$. Suponha que $\#\pi_1(Y) = k$, com $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Em particular, se $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ é o revestimento universal de Y , então $\#p^{-1}(y_0) = k$. Seja $p^{-1}(y_0) := \{\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{k-1}\}$. Seja $\tilde{f} : S^{n+1} \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$. Consideremos uma bola aberta $B^n \subset \tilde{Y}$ que contém $p^{-1}(y_0)$ e consideremos a aplicação colapsante $coll : \tilde{Y} \rightarrow \frac{\tilde{Y}}{\tilde{Y} \setminus B^n}$.

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{Y} & \xrightarrow{coll} S^n \\ & \downarrow p & \\ S^{n+1} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Identificando $S^n = \frac{\tilde{Y}}{\tilde{Y} \setminus B^n}$ e $coll(\tilde{y}_j) = \tilde{y}_j$, obtemos que $(coll \circ \tilde{f})^{-1}(\tilde{y}_j) = \tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_j)$. Daí, a menos de isomorfismo, segue que $\omega'([f]) = r_*(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = [\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_0), cte, \bar{g}] = [(coll \circ \tilde{f})^{-1}(\tilde{y}_0), cte, \bar{g}] \stackrel{PT}{=} E^\infty([coll \circ \tilde{f}])$, onde $PT : \pi_1^S \rightarrow \Omega_1^{fr}$ denota o isomorfismo de Pontryagin-Thom (vide a observação 108).

Lema 150. *Se $p : S^n \rightarrow Y$ é o revestimento universal de Y , então $\omega' = E^\infty \circ (p_\#)^{-1} : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Com efeito, se $\tilde{Y} = S^n$, então $coll \simeq 1_{S^n}$. Logo, pela observação 149, $\omega'([f]) = E^\infty([coll \circ \tilde{f}]) = E^\infty([\tilde{f}])$, onde $\tilde{f} : S^{n+1} \rightarrow \tilde{Y}$ é tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$ e $p \circ \tilde{f} = f$. Daí, segue que $\omega' \circ p_\# = E^\infty$. Como $n \geq 2$, então $p_\#$ é isomorfismo e portanto $\omega' = E^\infty \circ (p_\#)^{-1}$. ■

2.2 Cálculos do invariante

Nesta seção, seja $n \geq 2$.

Inicialmente, estudaremos o homomorfismo ω'' , ora quando Y é uma esfera n -dimensional, ora quando Y é um espaço projetivo real n -dimensional, ora quando Y é uma superfície ou uma 3-variedade.

Em seguida, estudaremos o homomorfismo ω' , nestes casos.

2.2.1 ω'' para esferas

Seja $Y = S^n$. Desde que

$$\pi_2(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $\omega'' : \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^2)$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ se $n = 2$, e ω'' é o homomorfismo nulo, caso contrário.

Proposição 151. *Se $n \geq 2$ e $Y = S^n$, então $\omega'' \equiv 0$, exceto para $n = 2$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.*

Demonstração. De fato, a partir dos comentários anteriores, resta calcularmos $\omega'' : \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^2)$. Seja $h : S^3 \rightarrow S^2$ a fibração de Hopf. Desde que $[h]$ gera $\pi_3(S^2)$, basta calcularmos $\omega''([h])$ para determinarmos o homomorfismo.

Primeiramente, como S^2 é simplesmente conexa, então, pela observação 146, $\omega''([h]) = \mu(\tilde{\omega}(y_0, h))$. Agora, notemos que $\tilde{\omega}(y_0, h) = [C, \tilde{g}', \bar{g}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(S^2, y_0))$, onde $C := h^{-1}(y_0)$, $\tilde{g}'(x) = h \circ G(x, \cdot)$, $G : C \times I \rightarrow S^3$ é tal que $G : i \simeq x_0$ e $i : C \hookrightarrow S^3$ é a inclusão. Consideremos a notação dada na observação 36. Sejam $y_0 = [(0_{\mathbb{C}}, 1, 0)]$ e h dada por

$$h(z_1, z_2) = \begin{cases} S^1 \times 0_{\mathbb{C}} & , \quad z_2 = 0, \\ [(\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}, |z_2|, 0)] & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $C = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \subset S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Tomando G tal que $G((0, 0, \cos \theta, \sin \theta), t) = (\sqrt{2t(1-t)(1-\cos \theta)}, 0, t + (1-t)\cos \theta, (1-t)\sin \theta)$, obtemos, em particular, que $\text{Im} G \subset S_+^{2'}$ (vide a observação 36). Notemos que a homotopia G escolhida é tal que sua projeção no plano $0_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ é a homotopia linear dada por $t(0, 0, 1, 0) + (1-t)(0, 0, \cos \theta, \sin \theta)$. Seja $\bar{G} : C \rightarrow \Omega(S^2, y_0)$ dada por $pr \circ G : C \times I \rightarrow S^2$, onde $pr : S_+^{2'} \rightarrow \frac{S_+^{2'}}{0_{\mathbb{C}} \times S^1}$ é a aplicação quociente.

Identificando C com S^1 , notemos que $[\overline{G}] \in \pi_1(\Omega(S^2, y_0))$ corresponde a $[1_{S^2}] \in \pi_2(S^2)$. Agora, se $\overline{h} : \Omega(S^2, y_0) \rightarrow \Omega(S^2, y_0)$ é dada por $\overline{h}(\alpha) = h'' \circ \alpha$ (vide a observação 36), segue que $\overline{h} \circ \overline{G}(x)(t) = h \circ G(x, t) = \tilde{g}'(x)(t)$, donde $\overline{h} \circ \overline{G} = \tilde{g}'$. Assim, $[\overline{h} \circ \overline{G}] = [\tilde{g}'] \in \pi_1(\Omega(S^2, y_0))$ corresponde a $[h'' \circ 1_{S^2}] = [h''] \in \pi_2(S^2)$, via o diagrama algébrico

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(S^2) & \xrightarrow{h''\#} & \pi_2(S^2) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) & \xrightarrow{\overline{h}\#} & \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) \end{array}$$

Daí, como $\mu(\tilde{\omega}(y_0, h)) = \tilde{g}'_*([C]) \in H_1(\Omega(S^2, y_0); \mathbb{Z})$ corresponde a $[\tilde{g}'] \in \pi_1(\Omega(S^2, y_0))$ (via o isomorfismo de Hurewicz), segue que $\omega''([h]) = [h'']$. Logo, uma vez que h'' é um homeomorfismo (vide a observação 36), então ω'' é um isomorfismo (isto é, um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ dado pela multiplicação por ± 1). ■

2.2.2 ω'' para espaços projetivos reais

Se $Y = \mathbb{R}P(n)$, então, como

$$\pi_2(\mathbb{R}P(n)) \cong \pi_2(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

segue que $\omega'' : \pi_3(\mathbb{R}P(2)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{R}P(2))$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ se $n = 2$, e ω'' é o homomorfismo nulo, caso contrário.

Proposição 152. *Se $n \geq 2$ e $Y = \mathbb{R}P(n)$, então $\omega'' \equiv 0$, exceto para $n = 2$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.*

Demonstração. De fato, a partir dos comentários anteriores, resta calcularmos $\omega'' : \pi_3(\mathbb{R}P(2)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{R}P(2))$. Seja $h : S^3 \rightarrow S^2$ a fibração de Hopf. Desde que $[p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h]$ gera $\pi_3(\mathbb{R}P(2))$, basta calcularmos $\omega''([p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h])$ para

determinarmos o homomorfismo. Seja $\hat{h} := p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h$.

Notemos que $\tilde{\omega}(y_0, \hat{h}) = [C, \tilde{g}', \bar{g}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(\mathbb{R}P(2), y_0))$, onde $C := \hat{h}^{-1}(y_0)$, $\tilde{g}'(x) = \hat{h} \circ G(x, _)$, $G : C \times I \rightarrow S^3$ é tal que $G : i \simeq x_0$ e $i : C \hookrightarrow S^3$ é a inclusão. Seja $p_{\mathbb{R}P(2)}^{-1}(y_0) = \{\tilde{y}_0, -\tilde{y}_0\} \subset S^2$. Notemos que $C = h^{-1}(\tilde{y}_0) \dot{\cup} h^{-1}(-\tilde{y}_0)$. Sejam $C_0 := h^{-1}(\tilde{y}_0)$ e $C_1 := h^{-1}(-\tilde{y}_0)$. Considerando a notação dada na observação 36, se $\tilde{y}_0 = [(0_{\mathbb{C}}, 1, 0)]$ e h é dada por

$$h(z_1, z_2) = \begin{cases} S^1 \times 0_{\mathbb{C}} & , \quad z_2 = 0, \\ [(\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}, |z_2|, 0)] & , \quad \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então $C_0 = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \subset S^3$ e $C_1 = S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \subset S^3$. Agora, desde que $\Omega(\mathbb{R}P(2), y_0) = \Omega_0 \dot{\cup} \Omega_1$, onde $\alpha \in \Omega_0$ se, e só se, $\alpha \simeq y_0$, então $\tilde{g}'^{-1}(\Omega_0) = C_0$ e $\tilde{g}'^{-1}(\Omega_1) = C_1$. Assim, $\omega''([\hat{h}]) \in \pi_2(\mathbb{R}P(2))$ é dado por $\mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, h)) = \mu([C_0, \tilde{g}'|_{C_0}, \bar{g}|_{C_0}]) = (\tilde{g}'|_{C_0})_*([C_0]) \in H_1(\Omega_0; \mathbb{Z})$. De modo análogo ao que foi feito para S^2 (vide a proposição 151), obtemos que $\omega''([\hat{h}]) = [p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h'']$ e portanto ω'' é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ dado pela multiplicação por ± 1 , pois $[p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h'']$ gera $\pi_2(\mathbb{R}P(2))$. ■

2.2.3 ω'' para superfícies e 3-variedades

Proposição 153. *Se Y é uma superfície ou uma 3-variedade, então $\omega'' \equiv 0$, exceto para $Y \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.*

Demonstração. Com efeito, se Y é aberta, então, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Seja Y uma superfície fechada. Pelo teorema de classificação de superfícies fechadas, temos que $Y \in \{S^2, \mathbb{R}P(2), K(\pi, 1)\}$. Se $Y \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$, então, pelas observações 151 e 152, segue que $\omega'' = \times(\pm 1)$. Agora, se Y é $K(\pi, 1)$, então ω'' é o homomorfismo nulo, visto que $\pi_2(Y) = \pi_2(K(\pi, 1)) = 0$.

Seja, agora, Y uma 3-variedade fechada. Seja $\tilde{Y}$ o revestimento universal de Y . Temos que Y ou é revestida por S^3 (que são formas espaciais esféricas),

ou é revestida por $\mathbb{R}^3$ (que são $K(\pi, 1)$), ou é revestida por $\mathbb{R} \times S^2$. Nos dois primeiros casos, temos que ω'' é o homomorfismo nulo, uma vez que $\pi_2(Y) \cong \pi_2(\tilde{Y}) = 0$. No último caso, segue que $\pi_4(Y) \cong \pi_4(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\pi_2(Y) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, donde ω'' é nulo. Assim, se Y é uma 3-variedade, então $\omega'' : \pi_4(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ é o homomorfismo nulo. ■

2.2.4 Sobre o homomorfismo ω'

Nesta subsecção, vamos estudar $\omega' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, ora quando Y é uma esfera, ora quando Y é um espaço projetivo real, ora quando Y é uma superfície ou uma 3-variedade.

Exemplo 154. Se $Y = S^n$, então, pelo lema 150, temos que $\omega'([f]) = E^\infty([f])$, isto é, $\omega' = E^\infty$. Assim, se $n = 2$, então

$$\omega'([kh]) = E^\infty([kh]) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 1(2), \\ 0 & \text{se } k \equiv 0(2), \end{cases}$$

onde $h : S^3 \rightarrow S^2$ denota a aplicação de Hopf (lembremos que $[h]$ gera $\pi_3(S^2)$). Se $n > 2$, então ω' é um isomorfismo (ou seja, é a identidade de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}_2$).

Exemplo 155. Se $Y = \mathbb{R}P(n)$, então, pelo lema 150, segue que $\omega'([f]) = E^\infty([\tilde{f}])$, ou melhor, $\omega' = E^\infty \circ (p_\#)^{-1}$, onde $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P(n)$ é o revestimento universal de $\mathbb{R}P(n)$ e $p \circ \tilde{f} = f$. Assim, se $n = 2$, então

$$\omega'([k\hat{h}]) = E^\infty([kh]) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \equiv 1(2), \\ 0 & \text{se } k \equiv 0(2), \end{cases}$$

onde $h : S^3 \rightarrow S^2$ denota a aplicação de Hopf e $\hat{h} := p \circ h$. Se $n > 2$, então ω' é um isomorfismo (ou seja, é a identidade de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}_2$).

Exemplo 156. Seja Y uma superfície ou uma 3-variedade. Se Y é aberta, então, pelo lema 148, $\omega' \equiv 0$. Seja Y fechada. Se $\pi_1(Y)$ é infinito, então,

novamente pelo lema 148, $\omega' \equiv 0$. Em particular, considerando os cálculos anteriores e o teorema de classificação de superfícies fechadas, encerramos a análise para superfícies. Assim, resta analisar apenas quando Y é uma 3-variedade fechada tal que $\pi_1(Y)$ é finito, isto é, quando $Y = \frac{S^3}{G}$ é uma 3-forma espacial esférica. Neste caso, pelo lema 150, segue que $\omega'([f]) = E^\infty([\tilde{f}])$, ou melhor, $\omega' = E^\infty \circ (p_\#)^{-1}$, onde $p : S^3 \rightarrow \frac{S^3}{G}$ é o revestimento universal de $\frac{S^3}{G}$ e $p \circ \tilde{f} = f$. Logo, $\omega' : \pi_4(\frac{S^3}{G}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo (ou seja, é a identidade de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}_2$).

Observação 157. Na verdade, se $Y = \frac{S^n}{G}$ é uma n -forma espacial esférica, com $n \geq 3$, então $\omega' : \pi_{n+1}(\frac{S^n}{G}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo (ou seja, é a identidade de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}_2$).

Observação 158. Seja $Y = S^n$. Então, pela observação 147, temos que $\tilde{\omega} : \pi_{n+1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_2(S^n)$ é dado por $\tilde{\omega} = (\omega', \omega'')$. Daí, pelos cálculos anteriores, se $n > 2$, então $\tilde{\omega} = (1_{\mathbb{Z}_2}, 0)$ e, se $n = 2$, então $\tilde{\omega}([(2k+1)h]) = (1, \pm(2k+1))$ e $\tilde{\omega}([(2k)h]) = (0, \pm(2k))$.

Seja $Y = \mathbb{R}P(n)$. Pela observação 147, temos que $\tilde{\omega} : \pi_{n+1}(\mathbb{R}P(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_2(\mathbb{R}P(n)) \oplus \pi_2(\mathbb{R}P(n))$ é dado por $\tilde{\omega} = (\omega', \omega', \omega'', \omega'')$. Daí, pelos cálculos anteriores, se $n > 2$, então $\tilde{\omega} = (1_{\mathbb{Z}_2}, 1_{\mathbb{Z}_2}, 0, 0)$ e, se $n = 2$, então $\tilde{\omega}([(2k+1)\hat{h}]) = (1, 1, \pm(2k+1), \pm(2k+1))$ e $\tilde{\omega}([(2k)\hat{h}]) = (0, 0, \pm(2k), \pm(2k))$.

Seja Y uma superfície ou uma 3-variedade. Então $\tilde{\omega} \equiv 0$, exceto quando $Y = S^2$, ou $Y = \mathbb{R}P(2)$, ou $Y = \frac{S^3}{G}$. Para este último, pela observação 147 e pelos cálculos anteriores, temos que $\tilde{\omega} : \pi_{n+1}(\frac{S^3}{G}) \rightarrow (\bigoplus_G \mathbb{Z}_2) \oplus (\bigoplus_G \pi_2(\frac{S^3}{G}))$ é dado por $\omega' = 1_{\mathbb{Z}_2}$ e $\omega'' \equiv 0$.

2.3 Um teorema tipo Wecken

Lembremos que, no capítulo anterior, vimos que, para codimensão 1, restava analisar a existência de um resultado tipo Wecken apenas quando $n = 2, 3$. Nesta seção, veremos que quando o domínio é uma esfera (isto é, S^3 ou S^4), então tal resultado existe.

Teorema 159. *Seja $n = 2, 3$. Sejam Y uma n -variedade sem bordo, conexa e $f_1, f_2: S^{n+1} \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Demonstração. De fato, se Y é aberta, então, pelo lema 139, (f_1, f_2) é loose e portanto, pela observação 120, $MCC(f_1, f_2) = 0 = \tilde{N}(f_1, f_2)$. Assim, podemos supor Y fechada. Como $n = 2$, ou $n = 3$, então, pelo lema 143, segue que $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = \tilde{\omega}(y_0, f_2 - f_1)$, donde basta verificarmos o resultado para $(y_0, f_2 - f_1)$. Denotemos $f := f_2 - f_1$.

Seja $n = 2$. Pelo teorema de classificação de superfícies fechadas, temos que $Y \in \{K(\pi, 1), S^2, \mathbb{R}P(2)\}$. Se Y é $K(\pi, 1)$, então $\pi_1(Y)$ é infinito e portanto, pelo lema 140 e pela observação 120, $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. Seja $Y \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$. Se $Y = S^2$, então f é uma aplicação de S^3 em S^2 , isto é, $f \simeq nh$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, onde $h: S^3 \rightarrow S^2$ é a aplicação de Hopf. Se $n = 0$, então (y_0, f) é loose e portanto $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. Seja $n \neq 0$. Então $\omega''([nh]) = n\omega''([h]) = \pm n \neq 0$ (vide a proposição 151). Portanto, como $E(y_0, f)$ é conexo por caminhos, segue que $\tilde{N}(y_0, f) = 1$. Agora, desde que, por [K-06] (teorema 1.14), $MCC(y_0, f) = 1$, então $MCC(y_0, f) = 1 = \tilde{N}(y_0, f)$. Se $Y = \mathbb{R}P(2)$, então f é uma aplicação de S^3 em $\mathbb{R}P(2)$, ou seja, $f \simeq n(p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, onde $h: S^3 \rightarrow S^2$ é a aplicação de Hopf e $p_{\mathbb{R}P(2)}$ é a aplicação quociente. Novamente, se $n = 0$, então (y_0, f) é loose e portanto $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. Seja $n \neq 0$. Então $\omega''([n(p_{\mathbb{R}P(2)} \circ h)]) = \pm n \neq 0$ (vide a proposição 152). Portanto,

pelo lema 125, desde que $E(y_0, f)$ tem duas componentes conexas por caminhos, segue que $\tilde{N}(y_0, f) = 2$. Agora, como, por [K-08] (teorema 1.17), $MCC(y_0, f) = 2$, então $MCC(y_0, f) = 2 = \tilde{N}(y_0, f)$.

Seja $n = 3$. Então Y ou tem grupo fundamental finito e é revestido por S^3 (que são formas espaciais esféricas), ou tem grupo fundamental infinito. Já vimos que se $\pi_1(Y)$ é infinito, então, pelo lema 140 e pela observação 120, $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. Seja $Y = \frac{S^3}{G}$ uma forma espacial esférica. Então f é uma aplicação de S^4 em $\frac{S^3}{G}$. Como $\pi_4(\frac{S^3}{G}) \cong \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$, então f é homotópica à aplicação constante, ou f não é homotópica à aplicação constante. No primeiro caso, segue que (y_0, f) é loose e portanto $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. No segundo caso, segue, pelo exemplo 156, que $\omega'([f]) = 1$ e portanto, pelo lema 125, como $E(y_0, f)$ tem $\#G$ componentes conexas por caminhos, então $\tilde{N}(y_0, f) = \#G$. Agora, desde que, por [K-062] (exemplo 1.25), $MCC(y_0, f) = \#G$, então $MCC(y_0, f) = \#G = \tilde{N}(y_0, f)$. ■

Corolário 160. *Sejam Y uma n -variedade sem bordo, conexa e $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$.*

Demonstração. Com efeito, se $n = 1$ ou $n \geq 4$, então o resultado segue pelo corolário 123. Agora, se $n = 2, 3$, então o resultado segue pelo teorema 159. ■

O próximo corolário é uma simples aplicação do resultado tipo Wecken anterior.

Corolário 161. *Sejam Y uma n -variedade sem bordo, conexa e $f_1, f_2 : S^{n+1} \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então (f_1, f_2) é loose se, e só se, $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$.*

Demonstração. De fato, se (f_1, f_2) é loose, então $\tilde{\omega}(f_1, f_2) = 0$ e portanto $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$. Por outro lado, se $\tilde{N}(f_1, f_2) = 0$, então, como pelo resultado

anterior $MCC(f_1, f_2) = \tilde{N}(f_1, f_2)$, segue que $MCC(f_1, f_2) = 0$, ou seja, (f_1, f_2) é loose. ■

2.4 Mais cálculos de ω''

Nesta seção, sejam $n \geq 2$ e Y uma n -variedade fechada, conexa. Já analisamos $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ quando Y é uma esfera, um espaço projetivo real, uma superfície e uma 3-variedade. Estudaremos, agora, o homomorfismo ω'' , para vários espaços Y , a saber, quando Y é um espaço projetivo complexo, quaterniônico, um fibrado esférico sobre uma esfera e uma variedade de Stiefel (real). Inicialmente, faremos algumas considerações gerais envolvendo espaços $K(\pi, 1)$ e o revestimento universal de Y .

Observação 162. *Considerações envolvendo espaços $K(\pi, 1)$:*

Se Y é $K(\pi, 1)$, então claramente $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ é o homomorfismo nulo. Em particular, se Y é um $K(\pi, 1)$ -fibrado sobre $K(\pi, 1)$, segue que $\omega'' \equiv 0$. Seja M uma variedade. Então, por um lado, se Y é um M -fibrado sobre $K(\pi, 1)$, segue que $\pi_i(Y) \cong \pi_i(M)$, para todo $i \geq 2$ e portanto ω'' é um homomorfismo de $\pi_{n+1}(M)$ em $\pi_2(M)$. Por outro lado, se Y é um $K(\pi, 1)$ -fibrado sobre M , então $\pi_{n+1}(Y) \cong \pi_{n+1}(M)$ e $\pi_2(Y) \cong \ker(\pi_2(M) \rightarrow \pi)$, donde ω'' é um homomorfismo de $\pi_{n+1}(M)$ em $\ker(\pi_2(M) \rightarrow \pi)$.

Observação 163. *Considerações envolvendo o revestimento universal de Y :*

Se $\tilde{Y}$ é o revestimento universal de Y , então $\pi_i(Y) \cong \pi_i(\tilde{Y})$, para todo $i \geq 2$ e, em particular, pelo teorema de Hurewicz, obtemos que $\pi_2(Y) \cong \pi_2(\tilde{Y}) \cong H_2(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$ (pois $\tilde{Y}$ é simplesmente conexo), donde ω'' é um homomorfismo de $\pi_{n+1}(\tilde{Y})$ em $H_2(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$. Em particular, se Y é simplesmente conexo, então ω'' é um homomorfismo de $\pi_{n+1}(Y)$ em $H_2(Y; \mathbb{Z})$. Se Y é 2-conexo, então claramente $\omega'' = 0$.

2.4.1 Espaços projetivos complexos e quaterniônicos

Seja $n = 2n'$. Se $Y = \mathbb{C}P(n')$, então $\pi_{n+1}(\mathbb{C}P(n')) \cong \pi_{n+1}(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_2(\mathbb{C}P(n')) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, pois $(S^{n+1}, p, \mathbb{C}P(n'), S^1)$ é um S^1 -fibrado sobre $\mathbb{C}P(n')$ (vide o exemplo 35). Logo, $\omega'' : \pi_{n+1}(\mathbb{C}P(n')) \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P(n'))$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

Proposição 164. *Se $Y = \mathbb{C}P(n')$, então $\omega'' = \times(\pm 1)$, para todo $n' \geq 1$.*

Demonstração. Com efeito, sejam $n = 2n'$ e $p : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P(n')$ a aplicação de Hopf. Desde que $[p]$ gera $\pi_{n+1}(\mathbb{C}P(n'))$, basta calcularmos $\omega''([p])$ para determinarmos o homomorfismo.

Inicialmente, como $\mathbb{C}P(n')$ é simplesmente conexo, então, pela observação 146, $\omega''([p]) = \mu(\tilde{\omega}(y_0, p))$. Agora, notemos que $\tilde{\omega}(y_0, p) = [C, \tilde{g}', \bar{g}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(\mathbb{C}P(n'), y_0))$, onde $C := p^{-1}(y_0)$, $\tilde{g}'(x) = p \circ G(x, \cdot)$, $G : C \times I \rightarrow S^{n+1}$ é tal que $G : i \simeq x_0$ e $i : C \hookrightarrow S^{n+1}$ é a inclusão. Consideremos a notação dada na observação 37. Sejam $y_0 = [(0_{\mathbb{C}}, 1, 0, 0_{\mathbb{C}}, \dots, 0_{\mathbb{C}})]$ e p dada por

$$p(z_1, \dots, z_{n'+1}) = \begin{cases} S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} & , z_2 = \dots = z_{n'+1} = 0, \\ [(\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|}, |z_2|, 0, \frac{z_3 \bar{z}_2}{|z_2|}, \dots, \frac{z_{n'+1} \bar{z}_2}{|z_2|})] & , z_2 \neq 0, \\ \vdots & \\ [(\frac{z_1 \bar{z}_{n'+1}}{|z_{n'+1}|}, \frac{z_2 \bar{z}_{n'+1}}{|z_{n'+1}|}, \dots, \frac{z_{n'} \bar{z}_{n'+1}}{|z_{n'+1}|}, |z_{n'+1}|, 0)] & , z_{n'+1} \neq 0. \end{cases}$$

Assim, $C = 0_{\mathbb{C}} \times S^1 \times 0_{\mathbb{C}} \times \dots \times 0_{\mathbb{C}} \subset S^{n+1}$. Analogamente ao que foi feito para S^2 (vide a proposição 151), escolhendo G adequada e identificando C com S^1 , obtemos $\bar{G} : C \rightarrow \Omega(S^2, y_0)$ tal que $[\bar{G}] \in \pi_1(\Omega(S^2, y_0))$ corresponde a $[1_{S^2}] \in \pi_2(S^2)$. Daí, $[\bar{p} \circ \bar{G}] = [\tilde{g}'] \in \pi_1(\Omega(\mathbb{C}P(n'), y_0))$ corresponde a $[j \circ p'' \circ 1_{S^2}] = [j \circ p''] \in \pi_2(\mathbb{C}P(n'))$, onde $j : S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P(n')$ denota a inclusão e $\bar{p} : \Omega(S^2, y_0) \rightarrow \Omega(\mathbb{C}P(n'), y_0)$ é dada por $\bar{p}(\alpha) = j \circ p'' \circ \alpha$ (vide a observação 37). Logo, como $\mu(\tilde{\omega}(y_0, p)) = \tilde{g}'_*([C]) \in H_1(\Omega(\mathbb{C}P(n'), y_0); \mathbb{Z})$ corresponde a $[\tilde{g}'] \in \pi_1(\Omega(\mathbb{C}P(n'), y_0))$ (via o isomorfismo de Hurewicz), segue

que $\omega''([p]) = [j \circ p'']$. Daí, desde que p'' é um homeomorfismo (vide a observação 37) e $j_{\#} : \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P(n'))$ é um isomorfismo, segue que ω'' é um isomorfismo (isto é, um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ dado pela multiplicação por ± 1). ■

Seja agora $n = 4n''$. Se $Y = \mathbb{H}P(n'')$, então ω'' é o homomorfismo nulo, uma vez que $\pi_2(\mathbb{H}P(n'')) = 0$, pois $(S^{n+1}, p', \mathbb{H}P(n''), S^3)$ é S^3 -fibrado sobre $\mathbb{H}P(n'')$ (vide o exemplo 35).

Proposição 165. *Se $Y = \mathbb{H}P(n'')$, então $\omega'' = 0$, para todo $n'' \geq 1$.*

Demonstração. Segue do comentário anterior. ■

2.4.2 Fibrados esféricos sobre esferas

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 1$. Seja $p : Y \rightarrow S^b$ um S^a -fibrado sobre S^b . Em particular, $n = a + b$ e Y é uma variedade $(a + b)$ -dimensional. Desta forma, estamos interessados em estudar $\omega'' : \pi_{a+b+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$.

Proposição 166. *Seja $p : Y \rightarrow S^b$ um S^a -fibrado sobre S^b , com $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 1$. Se $(a, b) \neq (2, 4)$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, se $a \geq b$, então S^a é $(b - 1)$ -conexa e portanto, por [Hu-94] (página 21), p admite uma seção. Daí, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Seja, agora, $a < b$. Consideremos a sequência de homotopia da fibração p .

$$\begin{aligned} \cdots \pi_{a+b+1}(S^a) &\rightarrow \pi_{a+b+1}(Y) \rightarrow \pi_{a+b+1}(S^b) \rightarrow \pi_{a+b}(S^a) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow \pi_3(S^b) \rightarrow \pi_2(S^a) \rightarrow \pi_2(Y) \rightarrow \pi_2(S^b) \cdots \end{aligned}$$

Se $b > a \geq 3$, ou $b \geq 3$ e $a = 1$, então $\pi_2(S^a) = 0 = \pi_2(S^b)$ donde $\pi_2(Y) = 0$ e portanto $\omega'' \equiv 0$. Se $b = 2$ e $a = 1$, então, como $0 = \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_2(Y) \rightarrow \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ e $0 = \pi_4(S^1) \rightarrow \pi_4(Y) \rightarrow \pi_4(S^2) \rightarrow \pi_3(S^1) = 0$ são exatas,

segue que $\pi_2(Y) \leq \mathbb{Z}$ e $\pi_4(Y) \cong \pi_4(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$ e portanto $\omega'' \equiv 0$. Sejam $a = 2$ e $b = 3$. Como, por [Sm-59], $\text{Diff}(S^2) \sim O(3)$, então $\pi_2(\text{Diff}(S^2)) \cong \pi_2(O(3)) = \pi_2(SO(3)) \cong \pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 0$. Daí, $Y \approx S^3 \times S^2$ e portanto, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Finalmente, sejam $a = 2$ e $b \geq 4$. Desde que $0 = \pi_3(S^b) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_2(Y) \rightarrow \pi_2(S^b) = 0$ é exata, então $\pi_2(Y) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Ainda, como $\pi_{b+3}(S^2) \rightarrow \pi_{b+3}(Y) \rightarrow \pi_{b+3}(S^b)$ é exata e, por [Se-51], $\pi_{b+3}(S^2)$ é finito (pois $b \geq 4$) e $\pi_{b+3}(S^b)$ é infinito se, e só se, $b = 4$, segue que $\omega'' \equiv 0$ quando $a = 2$ e $b \geq 5$. ■

Assim, resta estudar ω'' quando Y é um S^2 -fibrado sobre S^4 . Nesta situação, ω'' é um homomorfismo de $\pi_7(Y)$ em $\pi_2(Y)$. Observemos que, da sequência de homotopia da fibração p , temos que $\pi_2(Y) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_7(Y)$ é tal que a sequência $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_7(Y) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ é exata, donde, em particular, $\pi_7(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, para algum grupo abeliano finito A .

Se $Y \approx S^4 \times S^2$, então, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Seja $p : Y \rightarrow S^4$ um S^2 -fibrado não trivial sobre S^4 . Da sequência de homotopia da fibração p , consideremos o homomorfismo conectante $\partial : \pi_4(S^4) \rightarrow \pi_3(S^2)$. Notemos que ∂ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ e que, a cada fibrado Y , está associado um número inteiro $\partial(1) \in \mathbb{Z}$. Para maiores detalhes, vide [JaWhj-54] e [JaWhj-55].

Inicialmente, construiremos um S^2 -fibrado sobre S^4 tal que $\partial(1) = 1$ e estudaremos o homomorfismo ω'' para este fibrado. Em seguida, construiremos, para cada inteiro k , um S^2 -fibrado sobre S^4 com $\partial(1) = k$ e calcularemos ω'' para cada um destes fibrados.

Caso I - $\partial(1) = 1$.

Consideremos a fibração de Hopf, g_4 , sobre $\mathbb{H}P(1) \approx S^4$. Notemos que g_4 é um S^3 -fibrado principal sobre S^4 e que S^1 atua por restrição no espaço total

S^7 e na fibra S^3 deste fibrado. Daí, considerando o quociente por esta ação, obtemos um S^2 -fibrado sobre S^4 , $p : \mathbb{C}P(3) \rightarrow S^4$, conforme o diagrama geométrico abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \longrightarrow & S^3 & \xrightarrow{g_2} & S^2 \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
S^1 & \longrightarrow & S^7 & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}P(3) \\
& & \downarrow g_4 & & \downarrow p \\
& & S^4 & \xrightarrow{1} & S^4
\end{array}$$

onde g_2 é a fibração de Hopf sobre $\mathbb{C}P(1) \approx S^2$ e q é a fibração de Hopf sobre $\mathbb{C}P(3)$. Como S^1 é $K(\mathbb{Z}, 1)$, então, da sequência de homotopia da fibração q , obtemos que $\pi_i(S^7) \xrightarrow{q\#} \pi_i(\mathbb{C}P(3))$ é isomorfismo, para todo $i \geq 3$, $\pi_2(\mathbb{C}P(3)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{C}P^3) = 1$. Daí, da sequência de homotopia da fibração p , segue que o homomorfismo conectante $\partial : \pi_4(S^4) \rightarrow \pi_3(S^2)$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Sem perda de generalidade, seja $\partial(1) = 1$. Desta forma, $\mathbb{C}P(3)$ é um S^2 -fibrado sobre S^4 tal que $\partial(1) = 1$. Finalmente, notemos que já analisamos ω'' para $\mathbb{C}P(3)$, a saber, pela proposição 164, segue que $\omega'' : \pi_7(\mathbb{C}P(3)) \rightarrow \pi_2(\mathbb{C}P(3))$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, isto é, $\omega'' = \pm 1$.

Vamos, agora, fixar algumas notações referentes a este caso, que serão utilizadas posteriormente. Da sequência de homotopia da fibração g_2 , segue que $\pi_i(S^3) \xrightarrow{g_2\#} \pi_i(S^2)$ é isomorfismo, para todo $i \geq 3$. Consideremos, agora, as sequências de homotopia das fibrações g_4 e p , e o seguinte diagrama algébrico decorrente do diagrama geométrico acima:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \pi_7(S^3) & \xrightarrow{i\#} & \pi_7(S^7) & \xrightarrow{g_4\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} \pi_6(S^3) \longrightarrow \pi_6(S^7) \cdots \\
& & & \cong \downarrow q\# & & \downarrow 1 & \cong \downarrow g_2\# \\
\cdots & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{i\#} & \pi_7(\mathbb{C}P(3)) & \xrightarrow{p\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} \pi_6(S^2) \longrightarrow \pi_6(\mathbb{C}P(3)) \cdots
\end{array}$$

Desde que $\pi_6(\mathbb{C}P(3)) \cong \pi_6(S^7) = 0$, então ambos os homomorfismos

conectantes $(\partial_1)_7$ são sobrejetores. Ainda, como $\pi_7(S^2) \cong \pi_7(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$ finito e $\pi_7(\mathbb{C}P(3)) \cong \pi_7(S^7) \cong \mathbb{Z}$, segue que ambos os homomorfismos $i_\#$ são nulos, donde obtemos o diagrama algébrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_7(S^7) & \xrightarrow{g_4\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} & \pi_6(S^3) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow q_\# & & \downarrow 1 & & \cong \downarrow g_2\# \\ 0 & \longrightarrow & \pi_7(\mathbb{C}P(3)) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} & \pi_6(S^2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Desde que $g_4\#(\iota_7) = [g_4]$ e $q_\#(\iota_7) = [q]$, onde $\iota_7 \in \pi_7(S^7)$ denota a classe de homotopia da identidade de S^7 , então $p_\#([q]) = [g_4]$.

Caso II - $\partial(1) = k \in \mathbb{Z}$.

Sejam $\xi_1 := (\mathbb{C}P(3), p, S^4, S^2)$ e $f_k : S^4 \rightarrow S^4$ uma aplicação contínua de grau k , com $k \in \mathbb{Z}$. Denotemos o pullback de ξ_1 por f_k simplesmente por $\xi_k := (Y_k, p_k, S^4, S^2)$. Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{1} & S^2 \\ \downarrow i_k & & \downarrow i \\ Y_k & \xrightarrow{\tilde{f}_k} & \mathbb{C}P(3) \\ \downarrow p_k & & \downarrow p \\ S^4 & \xrightarrow{f_k} & S^4 \end{array} \quad (69.1)$$

onde i, i_k são as respectivas inclusões. Agora, denotando os homomorfismos conectantes de Y_k por $(\partial_k)_j : \pi_j(S^4) \rightarrow \pi_{j-1}(S^2)$, com $j \geq 2$, consideremos, a partir do diagrama geométrico acima e das sequências de homotopia das fibrações p_k e p , o diagrama algébrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \pi_4(Y_k) & \longrightarrow & \pi_4(S^4) & \xrightarrow{(\partial_k)_4} & \pi_3(S^2) & \longrightarrow & \pi_3(Y_k) \cdots \\ & & \downarrow \times k & & \downarrow 1 & & \\ \cdots \pi_4(\mathbb{C}P(3)) & \longrightarrow & \pi_4(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_4} & \pi_3(S^2) & \longrightarrow & \pi_3(\mathbb{C}P(3)) \cdots \end{array}$$

Daí, como, pelo caso anterior, $(\partial_1)_4(1) = 1$, então $(\partial_k)_4(1) = k$. Desta

forma, Y_k é um S^2 -fibrado sobre S^4 tal que $\partial(1) = k \in \mathbb{Z}$. Em particular, se $k, l \in \mathbb{Z}$, com $k \neq l$, então $Y_k \not\approx Y_l$.

O resultado abaixo nos ajuda a calcular $(\omega'')_k$ a partir do cálculo de $(\omega'')_1$, onde $(\omega'')_k$ denota ω'' para Y_k e $(\omega'')_1$ denota ω'' para $\mathbb{CP}(3)$.

Proposição 167. *Com as notações acima, o diagrama algébrico*

$$\begin{array}{ccc} \pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(\omega'')_k} & \pi_2(Y_k) \\ \downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_7 & & \downarrow |k|((\tilde{f}_k)_\#)_2 \\ \pi_7(\mathbb{CP}(3)) & \xrightarrow{(\omega'')_1} & \pi_2(\mathbb{CP}(3)) \end{array}$$

é comutativo, onde $|k|((\tilde{f}_k)_\#)_2 = \times(\pm|k|) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $(\omega'')_1 = \pm 1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, temos, pela proposição 164, que $(\omega'')_1$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, ou seja, $(\omega'')_1 = \pm 1$. Agora, do diagrama algébrico abaixo, decorrente das sequências de homotopia das fibrações p_k e p e do diagrama geométrico 69.1, que relaciona estas fibrações, notemos que $((\tilde{f}_k)_\#)_2$ também é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \pi_3(S^4) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \xrightarrow[(i_k)_\#]{\cong} & \pi_2(Y_k) & \longrightarrow & \pi_2(S^4) \cdots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_2 & & \\ \cdots \pi_3(S^4) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \xrightarrow[i_\#]{\cong} & \pi_2(\mathbb{CP}(3)) & \longrightarrow & \pi_2(S^4) \cdots \end{array}$$

pois $\pi_3(S^4) = 0$ e $\pi_2(S^4) = 0$. Em particular, $|k|((\tilde{f}_k)_\#)_2 = |k|(\pm 1) = \times(\pm|k|)$. Vamos, agora, verificar a comutatividade do diagrama do enunciado. Se $k = 0$, então $((\tilde{f}_0)_\#)_7$ é o homomorfismo nulo e portanto o diagrama do enunciado é comutativo. Sem perda de generalidade, seja $k > 0$. Seja $b_0 \in S^4$. Sejam $B_1, \dots, B_k$ bolas abertas em S^4 disjuntas tais que $f_k(S^4 \setminus \dot{\bigcup}_j B_j) \equiv -b_0$ e $f_{k|B_j} : B_j \rightarrow S^4 \setminus \{-b_0\}$ é um homeomorfismo. Desta forma, $f_k^{-1}(b_0) := \{b_1, \dots, b_k\}$, sendo b_j o centro de B_j . Seja $y_0 \in \mathbb{CP}(3)$ tal que $p(y_0) = b_0$. Então $\tilde{f}_k^{-1}(y_0) := \{y_1, \dots, y_k\}$, onde $p_k(y_j) = b_j$. Seja

$u : S^7 \rightarrow Y_k$ uma aplicação contínua. Temos que $(\tilde{f}_k \circ u)^{-1}(y_0) = \dot{\bigcup}_j u^{-1}(y_j)$.

Consideremos agora o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} S^7 & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & Y_k & \xrightarrow{\tilde{f}_k} & \mathbb{C}P(3) & \\ & \downarrow p_k & & \downarrow p & \\ & S^4 & \xrightarrow{f_k} & S^4 & \end{array}$$

Consideremos y_1 como sendo o ponto base de Y_k . Desde que Y_k é simplesmente conexo, então, pela observação 146, $(\omega'')_k([u]) = \mu(\tilde{\omega}(y_1, u))$. Agora, temos que $\tilde{\omega}(y_1, u) = [C, \tilde{g}', \bar{g}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(Y_k, y_1))$, onde $C := u^{-1}(y_1)$, $\tilde{g}'(x) = u \circ G(x, -)$, $G : C \times I \rightarrow S^7$ é tal que $G : i \simeq cte$ e $i : C \hookrightarrow S^7$ é a inclusão. Como Y_k é uma 6-variedade tal que $\pi_1(Y_k) = 1$, então, pelo teorema 116, segue que $MCC(y_1, u) \leq R(y_1, u) = 1$ e portanto podemos supor que C é conexo por caminhos. Identificando C com S^1 , segue que $[\tilde{g}'] \in \pi_1(\Omega(Y_k, y_1))$ e, identificando $\pi_1(\Omega(Y_k, y_1)) \cong \pi_2(Y_k)$, obtemos, a menos de isomorfismo, que $(\omega'')_k([u]) = [\tilde{g}']$. Da mesma forma, temos que $\tilde{\omega}(y_0, \tilde{f}_k \circ u) = [D, \tilde{h}', \bar{h}] \in \Omega_1^{fr}(\Omega(\mathbb{C}P(3), y_0))$, onde $D := (\tilde{f}_k \circ u)^{-1}(y_0)$, $\tilde{h}'(x) = (\tilde{f}_k \circ u) \circ H(x, -)$, $H : D \times I \rightarrow S^7$ é tal que $H : i \simeq cte$ e $i : D \hookrightarrow S^7$ é a inclusão. Em particular, $\bar{h}|_C = \bar{g}$ e tomando H como sendo tal que $H|_{C \times I} = G$, segue que $\tilde{h}'|_C = \tilde{f}_k \circ \tilde{g}'$. Desde que $u^{-1}(y_j)$ e C são cobordantes, com $1 \leq j \leq k$, então podemos tomar $D = \dot{\bigcup}_j C$. Desta forma, $[D, \tilde{h}', \bar{h}] = k[C, \tilde{h}'|_C, \bar{h}|_C] = k[C, \tilde{f}_k \circ \tilde{g}', \bar{g}]$ e

$$\begin{aligned}
(\omega'')_1(((\tilde{f}_k)_\#)_7([u])) &= (\omega'')_1([\tilde{f}_k \circ u]) \\
&= \mu(\tilde{\omega}(y_0, \tilde{f}_k \circ u)) \\
&= \mu([D, \tilde{h}', \bar{h}]) \\
&= k\mu([C, \tilde{f}_k \circ \tilde{g}', \bar{g}]) \\
&= k[\tilde{f}_k \circ \tilde{g}'] \\
&= k((\tilde{f}_k)_\#)_2([\tilde{g}']) \\
&= k((\tilde{f}_k)_\#)_2((\omega'')_k([u]))
\end{aligned}$$

Portanto, $k((\tilde{f}_k)_\#)_2 \circ (\omega'')_k = (\omega'')_1 \circ ((\tilde{f}_k)_\#)_7$. Se $k < 0$, obtemos que $[D, \tilde{h}', \bar{h}] = (-k)[C, \tilde{f}_k \circ \tilde{g}', \bar{g}]$ e $(-k)((\tilde{f}_k)_\#)_2 \circ (\omega'')_k = (\omega'')_1 \circ ((\tilde{f}_k)_\#)_7$, donde o resultado segue. $\blacksquare$

Assim, a fim de calcular ω'' para Y_k , determinemos primeiramente o homomorfismo $((\tilde{f}_k)_\#)_7 : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_7(\mathbb{C}P(3))$. Lembremos que $\pi_7(Y_k) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, para algum grupo abeliano finito A . Consideremos o diagrama algébrico abaixo, dado pelo resultado anterior.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z} \oplus A & \xrightarrow{(\omega'')_k} & \mathbb{Z} \\
((\tilde{f}_k)_\#)_7 \downarrow & \times \pm |k| \downarrow & \downarrow \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow[\pm 1]{\cong} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Notemos que, os homomorfismos $((\tilde{f}_k)_\#)_7$ e $(\omega'')_k$ restritos a A são nulos, pois $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) = 0$. Assim, independentemente de conhecermos $\pi_7(Y_k)$, basta calcularmos $((\tilde{f}_k)_\#)_7$ nos elementos da forma $(n, 0)$, a fim de determinar ω'' para Y_k . Ao final da subseção, vamos, também, determinar $\pi_7(Y_k)$ por ser uma questão interessante por si própria.

Proposição 168. *Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $\pi_7(Y_k) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, com A finito, então o homomorfismo $((\tilde{f}_k)_\#)_7 : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_7(\mathbb{C}P^3)$ é tal que*

$$((\tilde{f}_k)_\#)_7(n, a) = \begin{cases} 2k^2n, & \text{se } k \equiv 2, 4, 6(8), \\ k^2n, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo $(n, a) \in \mathbb{Z} \oplus A$, onde $\pi_7(\mathbb{C}P^3) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração. Com efeito, das sequências de homotopia das fibrações p_k e p e do diagrama geométrico 69.1, que relaciona estas fibrações, consideremos o diagrama algébrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \pi_8(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \pi_8(S^4) & \xrightarrow{(\partial_k)_8} & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_k)_\#} & \pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \pi_7(S^4) & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow ((f_k)_\#)_8 & & \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_7 & & \downarrow ((f_k)_\#)_7 & \\ \cdots & \pi_8(\mathbb{C}P(3)) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_8(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_8} & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_7(\mathbb{C}P(3)) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_7(S^4) & \cdots \end{array}$$

Primeiramente, vamos determinar $((f_k)_\#)_7$ e $((f_k)_\#)_8$. Denote por $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ a classe de homotopia da identidade de S^n . Sabemos que $(f_k)_\#(\alpha) = (k\iota_4) \circ \alpha$. Por [Whg-78] (página 537), temos, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \pi_{n+1}(S^4)$, $\beta \in \pi_4(S^4)$, que $(k\beta) \circ \alpha = k(\beta \circ \alpha) + \binom{k}{2}[\beta, \beta] \circ h_0(\alpha) - \binom{k+1}{3}[[\beta, \beta], \beta] \circ h_1(\alpha)$, onde h_0, h_1 são homomorfismos de Hopf-Hilton. Ainda, por [Whg-78] (página 535), se $n < 12$, segue que $h_1 \equiv 0$. Desta forma, como $6 < 12$ e $7 < 12$, então, $((f_k)_\#)_7$ e $((f_k)_\#)_8$ são tais que $(f_k)_\#(\alpha) = k\alpha + \binom{k}{2}[\iota_4, \iota_4]h_0(\alpha)$.

Considere, agora, a seguinte sequência EHP

$$\cdots \rightarrow \pi_7(S^3) \xrightarrow{E} \pi_8(S^4) \xrightarrow{H} \pi_8(S^7) \xrightarrow{P} \pi_6(S^3) \xrightarrow{E} \pi_7(S^4) \xrightarrow{H} \pi_7(S^7) \rightarrow \cdots$$

Por [Tod-62] (página 43), $\pi_7(S^4) = \langle \nu_4 \rangle \oplus \langle E\nu' \rangle$, $\pi_6(S^3) = \langle \nu' \rangle$, $\pi_8(S^7) = \langle \eta_7 \rangle$, $\pi_8(S^4) = \langle \nu_4 \circ \eta_7 \rangle \oplus \langle E\nu' \circ \eta_7 \rangle$, $\pi_7(S^3) = \langle \nu' \circ \eta_6 \rangle$, onde ν_4 é tal que $H(\nu_4) = \iota_7$, e $\pi_7(S^4) \ni [\iota_4, \iota_4] = 2\nu_4 - E\nu'$. Como $E : \nu' \mapsto E\nu'$, $E : \nu' \circ \eta_6 \mapsto E\nu' \circ \eta_7$ e a sequência acima é exata, então os homomorfismos E acima são injetores, o P acima é o homomorfismo nulo e o H da esquerda acima é sobrejetor, donde $H(\nu_4 \circ \eta_7) = \eta_7$. Ainda, como a sequência é exata, vale destacar que $H(E\nu' \circ \eta_7) = H(E(\nu' \circ \eta_6)) = 0$ e $H(E\nu') = 0$.

Uniformizando a notação, notemos que $H = h_0$. Daí, $((f_k)_\#)_7(E\nu') = kE\nu'$ e $((f_k)_\#)_7(\nu_4) = k\nu_4 + \binom{k}{2}(2\nu_4 - E\nu') = k^2\nu_4 - \binom{k}{2}E\nu'$. Analogamente,

$((f_k)_\#)_8(E\nu' \circ \eta_7) = k(E\nu' \circ \eta_7)$ e $((f_k)_\#)_8(\nu_4 \circ \eta_7) = k^2(\nu_4 \circ \eta_7) - \binom{k}{2}(E\nu' \circ \eta_7)$. Analisemos, primeiramente, as possibilidades para $((f_k)_\#)_8$. Desde que $\pi_8(S^4) = \langle \nu_4 \circ \eta_7 \rangle \oplus \langle E\nu' \circ \eta_7 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, então os homomorfismos $((f_k)_\#)_8$ são dados na tabela abaixo.

	$((f_k)_\#)_8(E\nu' \circ \eta_7)$	$((f_k)_\#)_8(\nu_4 \circ \eta_7)$
$k \equiv 0(4)$	0	0
$k \equiv 1(4)$	$E\nu' \circ \eta_7$	$\nu_4 \circ \eta_7$
$k \equiv 2(4)$	0	$E\nu' \circ \eta_7$
$k \equiv 3(4)$	$E\nu' \circ \eta_7$	$\nu_4 \circ \eta_7 + E\nu' \circ \eta_7$

Em particular, se k é ímpar, segue que $((f_k)_\#)_8$ é sobrejetor. Consideremos o diagrama acima. Analisemos, agora, as possibilidades para $(\partial_k)_8$. Pela comutatividade do segundo quadrado, temos que $(\partial_k)_8 = (\partial_1)_8 \circ ((f_k)_\#)_8$. Algebricamente, como $\pi_7(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\pi_7(\mathbb{C}P(3)) \cong \pi_7(S^7) \cong \mathbb{Z}$, segue que $i_\# : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo nulo. Daí, $(\partial_1)_8$ é sobrejetor e portanto, como $\pi_8(S^4) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, segue que $\mathbb{Z}_2 \cong \ker(\partial_1)_8 = \text{Im}(p_\#)$. Desde que $\pi_8(\mathbb{C}P(3)) \cong \pi_8(S^7) \cong \mathbb{Z}_2$, então $p_\# : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é injetor (desta forma, note que ambos $p_\#$ são injetores). Logo, se k é ímpar, segue que $(\partial_k)_8$ é sobrejetor. Geometricamente, considerando $\pi_8(\mathbb{C}P(3)) = \langle [q] \circ \eta_7 \rangle$, onde $q : S^7 \rightarrow \mathbb{C}P(3)$ é a aplicação de Hopf sobre $\mathbb{C}P(3)$, então $p_\#([q] \circ \eta_7) = \nu_4 \circ \eta_7$. Em particular, $(\partial_1)_8(\nu_4 \circ \eta_7) = 0$. Daí, como $(\partial_1)_8$ é sobrejetor e $\pi_8(S^4) = \langle \nu_4 \circ \eta_7 \rangle \oplus \langle E\nu' \circ \eta_7 \rangle$, então $(\partial_1)_8(E\nu' \circ \eta_7) \neq 0$. Assim, pela tabela acima, se $k \equiv 2(4)$, então $(\partial_1)_8(\text{Im}((f_k)_\#)_8) \neq 0$ e obtemos novamente que $(\partial_k)_8 = (\partial_1)_8 \circ ((f_k)_\#)_8 : \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é sobrejetor. Portanto, do diagrama acima, se $k \not\equiv 0(4)$, então $(i_k)_\# : \pi_7(S^2) \rightarrow \pi_7(Y_k)$ é o homomorfismo nulo e $(p_k)_\# : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_7(S^4)$ é injetor. Por fim, se $k \equiv 0(4)$, então, pela tabela acima, $((f_k)_\#)_8$ é o homomorfismo nulo, donde, do diagrama acima, $(\partial_k)_8$ é o homomorfismo nulo e $(i_k)_\# : \pi_7(S^2) \rightarrow \pi_7(Y_k)$ é injetor. Analisemos, agora,

as possibilidades para $((f_k)_\#)_7$. Para isto, consideremos a continuação do diagrama algébrico acima.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_k)_7} & \pi_6(S^2) & \xrightarrow{(i_k)_\#} & \pi_6(Y_k) \cdots \\ \downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_7 & & \downarrow ((f_k)_\#)_7 & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ \cdots \pi_7(\mathbb{CP}(3)) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} & \pi_6(S^2) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_6(\mathbb{CP}(3)) \cdots \end{array}$$

Desde que $\pi_6(\mathbb{CP}(3)) \cong \pi_6(S^7) = 0$, então $i_\#$ é o homomorfismo nulo e $(\partial_1)_7$ é sobrejetor. Lembremos que $\pi_7(\mathbb{CP}(3)) = \langle [q] \rangle$, onde $q : S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ é a aplicação de Hopf sobre $\mathbb{CP}(3)$. Como $p_\#([q]) = \nu_4$ e $\pi_7(S^4) = \langle \nu_4 \rangle \oplus \langle E\nu' \rangle$, então $(\partial_1)_7(\nu_4) = 0$ e $(\partial_1)_7(E\nu')$ gera $\pi_6(S^2) \cong \mathbb{Z}_{12}$. Notemos que $\text{Im}((\tilde{f}_k)_\#)_7 \subset \langle [q] \rangle$ e portanto $\text{Im}(((f_k)_\#)_7 \circ (p_k)_\#) = \text{Im}(p_\# \circ ((\tilde{f}_k)_\#)_7) \subset \langle \nu_4 \rangle$. Daí, segue que $((f_k)_\#)_7(\ker(\partial_k)_7) = ((f_k)_\#)_7(\text{Im}(p_k)_\#) \subset \langle \nu_4 \rangle$ e portanto basta calcularmos $((f_k)_\#)_7$ em $\ker(\partial_k)_7$, a fim de determinar $((\tilde{f}_k)_\#)_7$. O lema auxiliar abaixo nos fornece uma caracterização de $\ker(\partial_k)_7$.

Lema 169. *Temos que $\ker(\partial_k)_7 = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, onde $\pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ e $pr_2 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ é a projeção na segunda coordenada.*

Demonstração. De fato, desde que $((f_k)_\#)_7(\ker(\partial_k)_7) \subset \langle \nu_4 \rangle$, então $(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)(\ker(\partial_k)_7) \subset 0$, donde $\ker(\partial_k)_7 \subset \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$. Por outro lado, se $x \in \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, então $((f_k)_\#)_7(x) \in \langle \nu_4 \rangle$ e portanto $(\partial_k)_7(x) = (\partial_1)_7(((f_k)_\#)_7(x)) = 0$, isto é, $x \in \ker(\partial_k)_7$. Assim, $\ker(\partial_k)_7 = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$. ■

O próximo lema auxiliar, nos diz, em particular, que para dois valores de k congruentes módulo 24, os dois subgrupos, $\ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, de $\pi_7(S^4)$ correspondentes são iguais.

Lema 170. *Temos que $pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7 = pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7 : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$.*

Demonstração. Com efeito, lembremos que $\pi_7(S^4) = \langle \nu_4 \rangle \oplus \langle E\nu' \rangle$ e $\text{Im}(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7) \subset \langle E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}_{12}$. Assim, $pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7(E\nu') = (k+24)E\nu' =$

$kE\nu' = pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7(E\nu')$. Ainda, $pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7(\nu_4) = -\binom{k+24}{2}E\nu' = -\binom{k}{2}E\nu' = pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7(\nu_4)$. Logo, $pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7 = pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7$. ■

Por este resultado, basta calcularmos $\ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, para $0 \leq k \leq 23$. Para $k = 0$, tomamos $f_0 = cte : S^4 \rightarrow S^4$ e obtemos $\ker(pr_2 \circ ((f_0)_\#)_7) = \ker(0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$. Para $k = 1$, tomamos $f_1 = 1_{S^4} : S^4 \rightarrow S^4$ e obtemos $\ker(pr_2 \circ ((f_1)_\#)_7) = \ker(pr_2) \cong \mathbb{Z}$. Seja $x\nu_4 + yE\nu' \in \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. Desde que $(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)(x\nu_4 + yE\nu') = (-\binom{k}{2}x + ky)E\nu'$, então x e y devem ser tais que $-\binom{k}{2}x + ky \equiv 0(12)$. Para cada $k \geq 2$, por um lado, tomando o menor $x > 0$ que satisfaz esta relação, obtemos um elemento α_k de ordem infinita e, por outro lado, tomando $x = 0$, obtemos um elemento β_k de ordem finita. Assim, escrevemos $\ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7) = \langle \alpha_k, \beta_k \rangle$ e obtemos a tabela abaixo.

Tabela 76.1:

	$((f_k)_\#)_7(E\nu')$	$((f_k)_\#)_7(\nu_4)$	$\ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$
$k = 0$	0	0	$\langle \nu_4, E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$
$k = 1$	$E\nu'$	ν_4	$\langle \nu_4 \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 2$	$2E\nu'$	$2^2\nu_4 - E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + E\nu', 6E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
$k = 3$	$3E\nu'$	$3^2\nu_4 - 3E\nu'$	$\langle \nu_4 + E\nu', 4E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k = 4$	$4E\nu'$	$4^2\nu_4 - 6E\nu'$	$\langle 2\nu_4, 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$
$k = 5$	$5E\nu'$	$5^2\nu_4 - 10E\nu'$	$\langle \nu_4 + 2E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 6$	$6E\nu'$	$6^2\nu_4 - 3E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + E\nu', 2E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$
$k = 7$	$7E\nu'$	$7^2\nu_4 - 9E\nu'$	$\langle \nu_4 + 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 8$	$8E\nu'$	$8^2\nu_4 - 4E\nu'$	$\langle \nu_4 + 2E\nu', 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$
$k = 9$	$9E\nu'$	$9^2\nu_4$	$\langle \nu_4, 4E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k = 10$	$10E\nu'$	$10^2\nu_4 - 9E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + 3E\nu', 6E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

$k = 11$	$11E\nu'$	$11^2\nu_4 - 7E\nu'$	$\langle \nu_4 + 5E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 12$	0	$12^2\nu_4 - 6E\nu'$	$\langle 2\nu_4, E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$
$k = 13$	$E\nu'$	$13^2\nu_4 - 6E\nu'$	$\langle \nu_4 + 6E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 14$	$2E\nu'$	$14^2\nu_4 - 7E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + E\nu', 6E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
$k = 15$	$3E\nu'$	$15^2\nu_4 - 9E\nu'$	$\langle \nu_4 + 3E\nu', 4E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k = 16$	$4E\nu'$	$16^2\nu_4$	$\langle \nu_4, 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$
$k = 17$	$5E\nu'$	$17^2\nu_4 - 4E\nu'$	$\langle \nu_4 + 8E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 18$	$6E\nu'$	$18^2\nu_4 - 9E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + E\nu', 2E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$
$k = 19$	$7E\nu'$	$19^2\nu_4 - 3E\nu'$	$\langle \nu_4 + 9E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 20$	$8E\nu'$	$20^2\nu_4 - 10E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + E\nu', 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$
$k = 21$	$9E\nu'$	$21^2\nu_4 - 6E\nu'$	$\langle \nu_4 + 2E\nu', 4E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k = 22$	$10E\nu'$	$22^2\nu_4 - 3E\nu'$	$\langle 2\nu_4 + 3E\nu', 6E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
$k = 23$	$11E\nu'$	$23^2\nu_4 - E\nu'$	$\langle \nu_4 + 11E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z}$
$k = 24$	0	$24^2\nu_4$	$\langle \nu_4, E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$
$k = 25$	$E\nu'$	$25^2\nu_4$	$\langle \nu_4 \rangle \cong \mathbb{Z}$

Consideremos o diagrama algébrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \pi_7(S^4) \\
\downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_7 & & \downarrow ((f_k)_\#)_7 \\
\pi_7(\mathbb{CP}(3)) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_7(S^4)
\end{array}$$

Finalmente, analisemos as possibilidades para $((\tilde{f}_k)_\#)_7$. Observemos que $\text{Im } (p_k)_\# = \ker(\partial_k)_7 = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$. Daí, se $\pi_7(Y_k) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, com A finito, então, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\mathbb{Z} \oplus A \ni (1, 0) \xrightarrow{(p_k)_\#} \alpha_k \in \text{Im } (p_k)_\#.$$

Ainda, usando a tabela acima, obtemos que

$$((f_k)_\#)_7(\alpha_k) = \begin{cases} 2k^2\nu_4, & \text{se } k \equiv 2, 4, 6(8), \\ k^2\nu_4, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, desde que $p_\# \circ ((\tilde{f}_k)_\#)_7 = ((f_k)_\#)_7 \circ (p_k)_\#$ e $p_\#$ é um homomorfismo injetor tal que $p_\#([q]) = \nu_4$, então

$$((\tilde{f}_k)_\#)_7(1, 0) = \begin{cases} 2k^2[q], & \text{se } k \equiv 2, 4, 6(8), \\ k^2[q], & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, como $((\tilde{f}_k)_\#)_7(n, a) = ((\tilde{f}_k)_\#)_7(n, 0)$, então, identificando $[q] \in \pi_7(\mathbb{C}P(3))$ com $1 \in \mathbb{Z}$, temos que a proposição 168 segue. ■

Agora, vamos determinar o homomorfismo $\omega'' : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_2(Y_k)$.

Teorema 171. *Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $\pi_7(Y_k) \cong \mathbb{Z} \oplus A$, com A finito, então o homomorfismo $\omega'' : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_2(Y_k)$ é tal que*

$$\omega''(n, a) = \begin{cases} \pm 2|k|n, & \text{se } k \equiv 2, 4, 6(8), \\ \pm |k|n, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo $(n, a) \in \mathbb{Z} \oplus A$, onde $\pi_2(Y_k) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, pela proposição 167, temos o diagrama algébrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \oplus A & \xrightarrow{(\omega'')_k} & \mathbb{Z} \\ ((\tilde{f}_k)_\#)_7 \downarrow & \times \pm |k| \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[\pm 1]{\cong} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Daí, pela proposição 168, usando a descrição do homomorfismo $((\tilde{f}_k)_\#)_7$, o resultado segue. ■

Vamos agora calcular $\pi_7(Y_k)$ por ser um problema interessante por si próprio. Faremos isto em três etapas, a saber, para $k \not\equiv 0(4)$, para $k \equiv 0(8)$ e para $k \equiv 4(8)$.

Inicialmente, consideremos o diagrama algébrico abaixo, decorrente das sequências de homotopia das fibrações p_k e p e do diagrama geométrico 69.1, que relaciona estas fibrações.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_k)_\#} & \pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_k)_7} \pi_6(S^2) \cdots \\
& \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_k)_\#)_7 & & \downarrow ((f_k)_\#)_7 & \downarrow 1 \\
\cdots & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_7(\mathbb{CP}^3) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_7(S^4) & \xrightarrow{(\partial_1)_7} \pi_6(S^2) \cdots
\end{array}$$

Proposição 172. *Seja $k \not\equiv 0(4)$. Então $\pi_7(Y_k)$ é dado na tabela abaixo.*

	$\pi_7(Y_k)$
$k \equiv \pm 1, \pm 5(12)$	$\mathbb{Z}$
$k \equiv \pm 2(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
$k \equiv \pm 3(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k \equiv 6(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$

Demonstração. De fato, se $k \not\equiv 0(4)$, segue, pela demonstração da proposição 168, que $(p_k)_\# : \pi_7(Y_k) \rightarrow \pi_7(S^4)$ é injetor. Daí, pelo diagrama algébrico acima e pelo lema 169, temos que $\pi_7(Y_k) \cong \text{Im } (p_k)_\# = \ker(\partial_k)_7 = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$. Como, pelo lema 170, $\ker(pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7) = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, então, pela tabela 76.1, que lista $\ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, na demonstração da proposição 168, o resultado segue. ■

Observação 173. *Consideremos a tabela 76.1 na demonstração da proposição 168 e o lema 170. Notemos que, para dois valores de k congruentes módulo 24, os dois subgrupos de $\pi_7(S^4)$ correspondentes, na tabela, são iguais, enquanto que, para dois valores de k congruentes módulo 12 e não congruentes módulo 24, os dois subgrupos não são iguais, mas são isomorfos.*

Seja agora $k \equiv 0(4)$. Pela demonstração da proposição 168, temos que $(i_k)_\# : \pi_7(S^2) \rightarrow \pi_7(Y_k)$ é injetor. Logo, da sequência de homotopia da fibração p_k , segue que

$$0 \rightarrow \pi_7(S^2) \xrightarrow{(i_k)_\#} \pi_7(Y_k) \xrightarrow{(p_k)_\#} \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. Analisemos primeiramente quando $k \equiv 0(8)$ e, em seguida, analisemos quando $k \equiv 4(8)$. Para isto, consideremos o lema algébrico abaixo.

Lema 174. *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{g_1} & G & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \times 2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{h_1} & H & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

um diagrama algébrico comutativo tal que as linhas são exatas. Então $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

Demonstração. De fato, como as linhas são exatas, então o grupo G (e o grupo H) ou é isomorfo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ ou é isomorfo a $\mathbb{Z}_8$. Suponhamos, por absurdo, que $G \cong \mathbb{Z}_8$. Por um lado, se $H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, então $\varphi \circ g_1(1) = \varphi(4) = 4\varphi(1) = 0 \neq h_1(1)$, pois h_1 é injetor, o que não é possível. Por outro lado, se $H \cong \mathbb{Z}_8$, então $\varphi(4) = \varphi \circ g_1(1) = h_1(1) = 4$. Ainda, como g_2, h_2 são sobrejetores, segue que $g_2(1), h_2(1) \in \{1, 3\}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $g_2(1) = h_2(1) = 1$. Daí, $(\times 2) \circ g_2(1) = 2$. Desde que $h_2(1) = 1$, então $\varphi(1)$ não pode ser ímpar, e como $\varphi(4) = 4$, segue que $\varphi(1)$ não pode ser par, o que é um absurdo. Logo, $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$. ■

Observação 175. *Consideremos o seguinte diagrama algébrico comutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{g_1} & G & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{Z}_4 \oplus B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{h_1} & H & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{Z}_4 \oplus B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde B é igual a $\mathbb{Z}$ (ou B é igual a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$). Notemos que, se ψ restrito a $\mathbb{Z}_4$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_4$ em $\mathbb{Z}_4$ dado pela multiplicação por 2, então, pelo lema anterior, $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$ (ou $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}$).

Proposição 176. *Seja $k \equiv 0(8)$. Então*

$$\pi_7(Y_k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4, & \text{se } k \equiv 8, 16(24), \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}, & \text{se } k \equiv 0(24). \end{cases}$$

Demonstração. De fato, seja $k = 8$. Consideremos o diagrama algébrico abaixo, decorrente das sequências de homotopia das fibrações p_8 e p_4 e do diagrama geométrico dado pelo pullback $Y_8 = f_2^*(Y_4)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_8)_\#} & \pi_7(Y_8) & \xrightarrow{(p_8)_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_8)_\#)_7) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_2)_\#)_7 & & \downarrow ((f_2)_\#)_7 \\ 0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_4)_\#} & \pi_7(Y_4) & \xrightarrow{(p_4)_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_4)_\#)_7) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pela tabela 76.1 na demonstração da proposição 168, temos que $\ker(pr_2 \circ ((f_8)_\#)_7) = \langle \nu_4 + 2E\nu', 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$, $\ker(pr_2 \circ ((f_4)_\#)_7) = \langle 2\nu_4, 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ e $((f_2)_\#)_7(3E\nu') = 6E\nu'$. Em particular, $((f_2)_\#)_7$ restrito a $\mathbb{Z}_4$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_4$ em $\mathbb{Z}_4$ dado pela multiplicação por 2. Daí, pelo lema 174 e pela observação 175, $\pi_7(Y_8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$. Analogamente, considerando o diagrama algébrico dado pelo pullback $Y_{16} = f_2^*(Y_8)$, obtemos que $\pi_7(Y_{16}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ e, considerando o diagrama algébrico dado pelo pullback $Y_{24} = f_2^*(Y_{12})$, obtemos que $\pi_7(Y_{24}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$. Finalmente, desde que, pelo lema 170, $\ker(pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7) = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, então o resultado segue. ■

Assim, resta calcular $\pi_7(Y_k)$ para $k \equiv 4(8)$. Ou melhor, desde que, pelo lema 170, $\ker(pr_2 \circ ((f_{k+24})_\#)_7) = \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7)$, resta determinar $\pi_7(Y_4)$, $\pi_7(Y_{12})$ e $\pi_7(Y_{20})$.

Sejam $k, l \in \mathbb{Z}$, com $k = 4l$. Consideremos o diagrama algébrico abaixo, decorrente das sequências de homotopia das fibrações p_k e p_4 e do diagrama geométrico dado pelo pullback $Y_k = f_l^*(Y_4)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_k)_\#} & \pi_7(Y_k) & \xrightarrow{(p_k)_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_k)_\#)_7) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_l)_\#)_7 & & \downarrow ((f_l)_\#)_7 \\
0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_4)_\#} & \pi_7(Y_4) & \xrightarrow{(p_4)_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_4)_\#)_7) \longrightarrow 0
\end{array}$$

O próximo resultado nos diz que basta calcularmos $\pi_7(Y_4)$, a fim de determinar também $\pi_7(Y_{12})$ e $\pi_7(Y_{20})$.

Lema 177. *Temos que ou $\pi_7(Y_4) \cong \pi_7(Y_{20}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ e $\pi_7(Y_{12}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$, ou $\pi_7(Y_4) \cong \pi_7(Y_{20}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$ e $\pi_7(Y_{12}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{24}$.*

Demonstração. De fato, consideremos o diagrama algébrico, como acima, dado pelo pullback $Y_{12} = f_3^*(Y_4)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_{12})_\#} & \pi_7(Y_{12}) & \xrightarrow{(p_{12})_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_{12})_\#)_7) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow ((\tilde{f}_3)_\#)_7 & & \downarrow ((f_3)_\#)_7 \\
0 & \longrightarrow & \pi_7(S^2) & \xrightarrow{(i_4)_\#} & \pi_7(Y_4) & \xrightarrow{(p_4)_\#} & \ker(pr_2 \circ ((f_4)_\#)_7) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Pela tabela 76.1 na demonstração da proposição 168, temos que $\ker(pr_2 \circ ((f_{12})_\#)_7) = \langle 2\nu_4, E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$, $\ker(pr_2 \circ ((f_4)_\#)_7) = \langle 2\nu_4, 3E\nu' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ e $((f_3)_\#)_7(E\nu') = 3E\nu'$. Em particular, $((f_2)_\#)_7$ restrito a $\mathbb{Z}_4$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}_4$ em $\mathbb{Z}_4$. Logo, usando o lema dos cinco, se $\pi_7(Y_4) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$, então $\pi_7(Y_{12}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$ e, se $\pi_7(Y_4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$, então $\pi_7(Y_{12}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8$. Analogamente, considerando o diagrama algébrico, como acima, dado pelo pullback $Y_{20} = f_5^*(Y_4)$, obtemos que se $\pi_7(Y_4) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$, então $\pi_7(Y_{20}) \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4)$ e, se $\pi_7(Y_4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$, então $\pi_7(Y_{20}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$.

■

Para o próximo resultado, consideremos o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \longrightarrow & S^3 & \xrightarrow{g_2} & S^2 \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
S^1 & \longrightarrow & S^7 & \xrightarrow{q} & \mathbb{C}P(3) \\
& & \downarrow g_4 & & \downarrow p \\
& & S^4 & \xrightarrow{1} & S^4
\end{array}$$

Seja $X := f_4^*(S^7)$. Notemos que $\pi_7(Y_4) \cong \pi_7(X)$, pois $Y_4 = \frac{X}{S^1}$. Consideremos o 4-esqueleto $X^4 = S^3 \cup_{\times 4} e^4$ de X . Notemos que X^4 é um espaço de Moore de tipo $(\mathbb{Z}_4, 3)$, isto é, $\tilde{H}_3(X^4, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_4$ e $\tilde{H}_i(X^4, \mathbb{Z}) = 0$, se $i \neq 4$. Por [MuShi-99], segue que $\pi_6(X^4) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$. Assumindo que $\pi_7(X^4) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, então, da sequência de homotopia do par (X, X^4) , segue que $\pi_7(X)$ não pode ser isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$. Daí, $\pi_7(Y_4) \cong \pi_7(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

Logo, pelas proposições 172 e 176, e via comunicação privada de Juno Mukai e, independentemente, de Jie Wu, de que $\pi_7(X^4)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, segue a tabela abaixo.

	$\pi_7(Y_k)$
$k \equiv \pm 1, \pm 5(12)$	$\mathbb{Z}$
$k \equiv \pm 2(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
$k \equiv \pm 3(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$
$k \equiv 6(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$
$k \equiv \pm 4(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$
$k \equiv 0(12)$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{12}$

2.4.3 Variedades de Stiefel

Seja $V_{k,k+l}$ a variedade de Stiefel de k -referenciais ortonormais em $\mathbb{R}^{k+l}$, com $k, l \geq 1$. Consideremos a seguinte fibração

$$\begin{array}{c}
V_{k-1,k+l-1} \\
\downarrow \\
V_{k,k+l} \\
\downarrow p \\
S^{k+l-1}
\end{array}$$

que projeta um k -referencial ortonormal em um 1-referencial ortonormal dado, por exemplo, por seu último vetor.

Desde que S^m é $(m-1)$ -conexo, para todo $m \geq 1$, então, pela sequência de homotopia da fibração acima, $V_{k,k+l}$ é $(l-1)$ -conexo. Notemos ainda que $V_{k,k+l}$ é uma variedade de dimensão $n := k(k+l) - \frac{1}{2}k(k+1)$. Desta forma, estamos interessados em $\omega'' : \pi_{n+1}(V_{k,k+l}) \rightarrow \pi_2(V_{k,k+l})$.

Proposição 178. *Seja $V_{k,k+l}$ a variedade de Stiefel de k -referenciais ortonormais em $\mathbb{R}^{k+l}$, com $k, l \geq 1$. Então $\omega'' \equiv 0$, exceto para $V_{1,3} \approx S^2$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.*

Demonstração. De fato, para $V_{1,3} \approx S^2$, temos, pela proposição 151, que $\omega'' = \times(\pm 1)$. Vamos verificar, para os demais casos, que ω'' é o homomorfismo nulo. Se $l \geq 3$, então $V_{k,k+l}$ é, pelo menos, 2-conexo, donde $\pi_2(V_{k,k+l}) = 0$ e portanto $\omega'' \equiv 0$. Seja $l = 1$. Então $V_{k,k+1} = SO(k+1)$ e, a partir da fibração acima, obtemos a seguinte fibração:

$$\begin{array}{c}
SO(k) \\
\downarrow \\
SO(k+1) \\
\downarrow \\
S^k
\end{array}$$

Se $k = 1$, então $\pi_2(V_{1,2}) \cong \pi_2(SO(2)) \cong \pi_2(S^1) = 0$ e o resultado segue. Se $k = 2$, temos que $\pi_2(V_{2,3}) \cong \pi_2(SO(3)) \cong \pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 0$ e o resultado também segue. Se $k \geq 3$, então, usando a sequência de homotopia

da fibração p , obtemos que $\pi_2(SO(k+1)) = 0 = \pi_2(SO(k))$. Assim, se $l = 1$, concluímos que $\omega'' \equiv 0$. Finalmente, seja $l = 2$. Se $k = 2$, então, como $\pi_2(SO(3)) = 0$, temos que o S^2 -fibrado sobre S^3 , $V_{2,4}$, é o fibrado trivial $S^3 \times S^2$. Daí, pelo lema 148, obtemos que ω'' é o homomorfismo nulo. Se $k \geq 3$, então, da sequência de homotopia da fibração p , $\pi_2(V_{k,k+2}) \cong \pi_2(V_{k-1,k+1}) \cong \pi_2(V_{2,4}) \cong \mathbb{Z}$. Ainda, desde que $k(k+2) - \frac{1}{2}k(k+1) + 1 = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \binom{k+2}{2}$, então queremos calcular $\pi_{\binom{k+2}{2}}(V_{k,k+2})$. Observemos que $\binom{k+2}{2} > 2(k+1) - 1$ e $\binom{k+2}{2} > k+1$, com $k \geq 3$. Sendo $l = 2$, notemos que a base da fibração p é S^{k+1} , a base da fibração construída da mesma forma para a fibra de p é S^k , a base da fibração construída do mesmo modo para a fibra da fibração anterior é S^{k-1} e assim por diante. Desta forma, como a esfera de maior dimensão que aparece nesta análise é S^{k+1} , segue, das desigualdades anteriores, por [Se-51], que $\pi_{\binom{k+2}{2}}(V_{k,k+2})$ é finito, para $k \geq 3$. Logo, $\omega'' : \pi_{\binom{k+2}{2}}(V_{k,k+2}) \rightarrow \pi_2(V_{k,k+2})$ é o homomorfismo nulo, para $k \geq 3$. Desta forma, o resultado segue. ■

2.5 Cálculos parciais de ω''

Nesta seção, sejam $n \geq 2$ e Y uma n -variedade fechada, conexa. Já analisamos $\omega'' : \pi_{n+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ para vários espaços Y , por exemplo, para superfícies, 3-variedades, S^a -fibrados sobre S^b e variedades de Stiefel (reais). Analisaremos, agora, o homomorfismo ω'' , para algumas 4-variedades, alguns F^a -fibrados sobre B^b e algumas variedades de Grassmann (reais), sendo F, B variedades fechadas, conexas.

2.5.1 4-variedades

Primeiramente, vamos fazer algumas considerações sobre os grupos de homologia de uma 4-variedade fechada, simplesmente conexa. Seja Y uma 4-variedade fechada, simplesmente conexa. Em particular, notemos que Y é orientável, pois todo laço em Y é homotópico ao laço trivial. Consideremos os grupos de homologia de Y com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Temos, pelo teorema de Hurewicz, que $\pi_1(Y) = 0 = H_1(Y; \mathbb{Z})$ e $\pi_2(Y) \cong H_2(Y; \mathbb{Z})$. Ainda, pela dualidade de Poincaré (vide [V-94], página 165), sendo Y orientável, $H_2(Y; \mathbb{Z}) \cong H^2(Y; \mathbb{Z})$, $H_3(Y; \mathbb{Z}) \cong H^1(Y; \mathbb{Z})$ e $H_4(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Daí, pelo teorema dos coeficientes universais para cohomologia (vide [V-94], página 84), temos que $H_2(Y; \mathbb{Z}) \cong H^2(Y; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_2(Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ e $H_3(Y; \mathbb{Z}) \cong H^1(Y; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, pois, respectivamente, $\text{Ext}(H_1(Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) = 0$ e $\text{Ext}(H_0(Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Desde que $H_1(Y; \mathbb{Z}) = 0$, então $H_3(Y; \mathbb{Z}) = 0$. Ainda, como $H_2(Y; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_2(Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ e $H_2(Y; \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado, então $H_2(Y; \mathbb{Z})$ é livre de torção, isto é, $H_2(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Desta forma, ao determinarmos o segundo número de Betti de Y , conhecemos todos os grupos de homologia de Y .

Agora, seja Y uma 4-variedade fechada, não necessariamente simplesmente conexa. Seja $\tilde{Y}$ o revestimento universal de Y e seja k o segundo número de Betti de $\tilde{Y}$. Suponha que $\tilde{Y}$ é compacto. Daí, $\tilde{Y}$ é uma 4-variedade fechada, simplesmente conexa. Notemos que $\pi_i(Y) \cong \pi_i(\tilde{Y})$, para todo $i \geq 2$. Em particular, $\pi_2(Y) \cong \pi_2(\tilde{Y}) \cong H_2(\tilde{Y}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$ e estamos interessados em estudar $\omega'' : \pi_5(Y) \rightarrow \pi_2(Y) \cong \mathbb{Z}^k$.

O próximo resultado determina ω'' completamente, quando $0 \leq k \leq 2$.

Proposição 179. *Seja Y uma 4-variedade. Sejam $\tilde{Y}$ o revestimento universal de Y e k o segundo número de Betti de $\tilde{Y}$. Se $0 \leq k \leq 2$, então $\omega'' \equiv 0$,*

exceto para $\tilde{Y} = \mathbb{C}P(2)$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.

Demonstração. Com efeito, se Y é aberta, então, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Seja Y fechada. Notemos que $\tilde{Y}$ é uma 4-variedade sem bordo, simplesmente conexa. Se $\tilde{Y}$ é aberta, então, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Seja $\tilde{Y}$ fechada. Daí, por [BaBa-13], se $0 \leq k \leq 2$, então $\tilde{Y} \in \{S^4, \mathbb{C}P(2), S^2 \times S^2, \mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2), \mathbb{C}P(2) \# \overline{\mathbb{C}P}(2)\}$, onde $\overline{\mathbb{C}P}(2)$ representa $\mathbb{C}P(2)$ com orientação contrária. Se $\tilde{Y} = S^4$, então $\pi_2(Y) \cong \pi_2(S^4) = 0$ e portanto ω'' é o homomorfismo nulo. Se $\tilde{Y} = S^2 \times S^2$, então $\pi_5(Y) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e $\pi_2(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, donde $\omega'' \equiv 0$. Agora, por [BaBa-13], notemos que existem S^1 -fibrações sobre $\mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2)$ e sobre $\mathbb{C}P(2) \# \overline{\mathbb{C}P}(2)$, tendo como espaço total $S^2 \times S^3$. Assim, se $\tilde{Y}$ é ou $\mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2)$, ou $\mathbb{C}P(2) \# \overline{\mathbb{C}P}(2)$, então ω'' é um homomorfismo de $\pi_5(Y) \cong \pi_5(\tilde{Y}) \cong \pi_5(S^2 \times S^3) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\pi_2(Y) \cong \pi_2(\tilde{Y}) \cong \pi_2(S^2 \times S^3) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto ω'' é novamente o homomorfismo nulo. Seja $\tilde{Y} = \mathbb{C}P(2)$. Como $\omega_Y''([f]) = \mu(\tilde{\omega}(\tilde{y}_0, \tilde{f})) = \omega_{\mathbb{C}P(2)}''([f])$, onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f tal que $\tilde{f}(x_0) = \tilde{y}_0$ e, pela proposição 164, $\omega_{\mathbb{C}P(2)}''$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, então ω_Y'' também o é, isto é, $\omega_Y'' = \times(\pm 1)$. ■

Se $k \geq 3$, então, por [BaBa-13], $\pi_5^{\mathbb{Q}}(\tilde{Y}) \cong \mathbb{Q}^{\frac{(k^2-1)(k^2-4)}{4}}$, onde $\pi_5^{\mathbb{Q}}(Y) := \pi_5(Y) \otimes \mathbb{Q}$. Em particular, segue que $\pi_5(Y)$ não é finito. Desta forma, para $k \geq 3$, ainda não conhecemos $\omega'' : \pi_5(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$.

Observação 180. *Considerações sobre racionalmente elíptico e racionalmente hiperbólico:*

Seja Y uma 4-variedade fechada, simplesmente conexa. Dizemos que o espaço Y é racionalmente elíptico se $\sum_{i \geq 2} \dim \pi_i^{\mathbb{Q}}(Y) < \infty$, e dizemos que Y é racionalmente hiperbólico, caso contrário, onde $\pi_i^{\mathbb{Q}}(Y) := \pi_i(Y) \otimes \mathbb{Q}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Por [FeOTa-08] (página 109), Y é racionalmente elíptico se, e somente se, $Y \in \{S^4, \mathbb{C}P(2), S^2 \times S^2, \mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2), \mathbb{C}P(2) \# \overline{\mathbb{C}P}(2)\}$,

o que ocorre, por [BaBa-13], se, e só se, o segundo número de Betti de Y é menor ou igual a 2.

2.5.2 F^a -fibrados sobre B^b

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 1$. Seja $p : Y \rightarrow B^b$ um F^a -fibrado sobre B^b , com F, B variedades fechadas, conexas. Assim, $n = a + b$ e Y é uma variedade $(a + b)$ -dimensional. Desta forma, estamos interessados em estudar $\omega'' : \pi_{a+b+1}(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$. Nesta subseção, mais especificamente, vamos analisar ω'' quando a fibra ou a base é revestida por uma esfera, ou quando a fibra ou a base é uma variedade de dimensão menor ou igual a 3.

Primeiramente, vejamos alguns resultados auxiliares.

Lema 181. *Se $F = S^a$ e $a \geq b$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. Com efeito, se $a \geq b$, então S^a é $(b - 1)$ -conexa e portanto, por [Hu-94] (página 21), p admite uma seção. Logo, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. ■

Proposição 182. *Seja $F = \mathbb{R}P(a)$, com $a = 2a'$, para algum $a' \geq 1$. Se $a \geq b$, então p admite uma seção. Neste caso, $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, sendo $a = 2a'$, temos que $\mathbb{R}P(a)$ é não orientável. Logo, Y é não orientável, pois $U \times \mathbb{R}P(a) \approx p^{-1}(U)$ é uma subvariedade aberta não orientável de Y , para algum U aberto em B . Seja $q : Y' \rightarrow Y$ o revestimento duplo orientável de Y . Daí, $p \circ q : Y' \rightarrow B$ é uma fibração que tem como fibra típica o revestimento duplo orientável de $\mathbb{R}P(a)$, isto é, S^a , conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & S^a & \longrightarrow & \mathbb{R}P(a) \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{q} & Y \\
& & \downarrow p \circ q & & \downarrow p \\
& & B & \xrightarrow{1} & B
\end{array}$$

s (curved arrow from $\mathbb{Z}_2$ to B)

Se $a \geq b$, então S^a é $(b-1)$ -conexa e portanto, por [Hu-94] (página 21), $p \circ q$ admite uma seção s . Logo, $q \circ s$ é uma seção de p e o resultado principal segue. Daí, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. ■

Lema 183. *Se S^a reveste F , S^b reveste B e $a < b$, com $(a, b) \neq (2, 4)$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, primeiramente, notemos que $\pi_i(F) \cong \pi_i(S^a)$ e $\pi_i(B) \cong \pi_i(S^b)$, para todo $i \geq 2$. Daí, se $(a, b) \notin \{(2, 3), (2, 4)\}$, então, pela sequência de homotopia da fibração p , de modo análogo ao que foi feito para S^a -fibrados sobre S^b na proposição 166, temos que o resultado segue. Seja Y um F^2 -fibrado sobre B^3 . Pelo teorema de classificação de superfícies fechadas, notemos que $F \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$. Consideremos o pullback, Y' , de Y pelo revestimento universal de B .

$$\begin{array}{ccc}
F & & F \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y' & \longrightarrow & Y \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
S^3 & \longrightarrow & B
\end{array}$$

Usando as sequências de homotopia das fibrações p' e p , consideremos o diagrama algébrico abaixo induzido pelo diagrama geométrico acima.

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \pi_{i+1}(S^3) & \longrightarrow & \pi_i(F) & \longrightarrow & \pi_i(Y') & \xrightarrow{p'_\#} & \pi_i(S^3) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \dots \\
\downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
\dots \pi_{i+1}(B) & \longrightarrow & \pi_i(F) & \longrightarrow & \pi_i(Y) & \xrightarrow{p_\#} & \pi_i(B) \longrightarrow \pi_{i-1}(F) \dots
\end{array}$$

Pelo lema dos cinco, segue que $\pi_i(Y') \cong \pi_i(Y)$, para todo $i \geq 2$. Primeiramente, seja $F = S^2$. Como, por [Sm-59], $\text{Diff}(S^2) \sim O(3)$, então $\pi_2(\text{Diff}(S^2)) \cong \pi_2(O(3)) = \pi_2(SO(3)) \cong \pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 0$. Daí, $Y' \approx S^3 \times S^2$, $\pi_6(Y) \cong \pi_6(Y') \cong \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ e $\pi_2(Y) \cong \pi_2(Y') \cong \mathbb{Z}$. Logo, $\omega'' : \pi_6(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$ é o homomorfismo nulo. Seja agora $F = \mathbb{R}P(2)$. Por [EE-69], temos que $\text{Diff}^+(\mathbb{R}P(2)) \sim SO(3)$. Daí, analogamente, obtemos que $\omega'' : \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo nulo. ■

Lema 184. *Se $\pi_1(B)$ é infinito, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, consideremos a sequência de homotopia da fibração $p, \dots, \pi_2(B) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{p\#} \pi_1(B) \rightarrow 1$. Desde que $\pi_1(B)$ é infinito, então $\pi_1(Y)$ também o é. Logo, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. ■

Em particular, se B ou é S^1 , ou é uma superfície $K(\pi, 1)$, ou é uma 3-variedade $K(\pi, 1)$, ou é revestida por $\mathbb{R} \times S^2$, então, pelo lema anterior, temos que $\omega'' \equiv 0$.

Os próximos dois resultados generalizam a proposição 166, que trata de S^a -fibrados sobre S^b .

Proposição 185. *Se $F = S^a$, S^b reveste B e $(a, b) \neq (2, 4)$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. Com efeito, se $a \geq b$, então o resultado segue pelo lema 181. Se $a < b$, então o resultado segue pelo lema 183. ■

Proposição 186. *Se $F = \mathbb{R}P(2a')$, S^b reveste B e $(2a', b) \neq (2, 4)$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. Com efeito, se $2a' \geq b$, então o resultado segue pela proposição 182. Se $2a' < b$, então o resultado segue pelo lema 183. ■

Usando o teorema de classificação de superfícies fechadas e a classificação de 3-variedades fechadas, obtemos o resultado abaixo.

Proposição 187. *Se ou $F = S^a$, ou $F = \mathbb{R}P(2a')$, e $b \leq 3$, então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, se B ou é S^1 , ou é uma superfície $K(\pi, 1)$, ou é uma 3-variedade $K(\pi, 1)$, ou é revestida por $\mathbb{R} \times S^2$, então $\pi_1(B)$ é infinito e portanto, pelo lema 184, segue que $\omega'' \equiv 0$. Pela classificação de superfícies e 3-variedades fechadas, resta analisar quando B é revestida por S^b , com $b = 2, 3$. Neste caso, pelas proposições 185 e 186, temos que o resultado segue. ■

O próximo resultado trata de fibrados, em que tanto a fibra, quanto a base, tem dimensão menor ou igual a 3.

Proposição 188. *Sejam $a, b \leq 3$. Se F não é revestida por $\mathbb{R} \times S^2$, ou B não é revestida por S^2 , então $\omega'' \equiv 0$.*

Demonstração. Com efeito, pelo teorema de classificação de superfícies fechadas e pela classificação de 3-variedades fechadas, temos que $B, F \in \{S^1, S^2, \mathbb{R}P(2), K(\pi_2, 1), \frac{S^3}{G}, K(\pi_3, 1), M^3\}$, onde $K(\pi_j, 1)$ denota uma j -variedade $K(\pi, 1)$, com $j = 1, 2$, e M denota uma 3-variedade revestida por $\mathbb{R} \times S^2$ (ou seja, por [Tol-74], $M \in \{S^1 \times S^2, \mathbb{R}P(3) \# \mathbb{R}P(3), S^1 \tilde{\times} S^2, S^1 \times \mathbb{R}P(2)\}$). Se $\pi_1(B)$ é infinito, segue, pelo lema 184, que $\omega'' \equiv 0$. Seja $\pi_1(B)$ finito. Logo, $B \in \{S^2, \mathbb{R}P(2), \frac{S^3}{G}\}$. Se F é $K(\pi, 1)$, então, da sequência de homotopia da fibração p , obtemos que $\pi_2(Y) \leq \pi_2(B) \leq \mathbb{Z}$, e $\pi_{a+b+1}(Y) \cong \pi_{a+b+1}(B) \cong \pi_{a+b+1}(S^3) \cong \pi_{a+b+1}(S^2)$ finito (pois $a + b + 1 \geq 4$) e portanto ω'' é o homomorfismo nulo. Seja $F \in \{S^2, \mathbb{R}P(2), \frac{S^3}{G}, M\}$. Inicialmente, seja $B = \frac{S^3}{G}$. Se $F = M$, então $\pi_1(Y)$ é infinito (pois $\pi_1(M) \leq \pi_1(Y)$ e $\pi_1(M)$ é infinito) e portanto, pelo lema 148, $\omega'' \equiv 0$. Se $F = \frac{S^3}{G}$, então $\pi_2(Y) = 0$ e portanto $\omega'' \equiv 0$. Se $F \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$, segue, pelo lema 183, que $\omega'' \equiv 0$. Finalmente, seja $B \in \{S^2, \mathbb{R}P(2)\}$. Se $F = \frac{S^3}{G}$, então, pela sequência de homotopia da fibração p , $\pi_2(Y) \leq \pi_2(B) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_6(Y)$ é finito

(pois é tal que $\cdots \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \pi_6(Y) \rightarrow \mathbb{Z}_{12} \cdots$ é uma sequência exata), donde ω'' é o homomorfismo nulo. Se $F = S^2$, então, pelo lema 181, $\omega'' \equiv 0$. Se $F = \mathbb{R}P(2)$, então, pela proposição 182, $\omega'' \equiv 0$. Desta forma, se Y não é um M -fibrado sobre $\frac{S^2}{G}$, então ω'' é o homomorfismo nulo, como queríamos demonstrar. ■

Observação 189. *Seja $p : Y \rightarrow \frac{S^2}{G}$ um M -fibrado sobre $\frac{S^2}{G}$, onde $M \in \{S^1 \times S^2, \mathbb{R}P(3) \# \mathbb{R}P(3), S^1 \tilde{\times} S^2, S^1 \times \mathbb{R}P(2)\}$. Neste caso, ainda não conhecemos $\omega'' : \pi_6(Y) \rightarrow \pi_2(Y)$, entretanto, usando a sequência de homotopia da fibração p , temos as informações abaixo sobre os grupos envolvidos.*

$$\begin{aligned} \cdots \pi_6(M) \rightarrow \pi_6(Y) \xrightarrow{p\#} \pi_6\left(\frac{S^2}{G}\right) \cdots \\ \cdots \pi_3\left(\frac{S^2}{G}\right) \rightarrow \pi_2(M) \rightarrow \pi_2(Y) \xrightarrow{p\#} \pi_2\left(\frac{S^2}{G}\right) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{p\#} \pi_1\left(\frac{S^2}{G}\right) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Notemos que, para $i \geq 2$, $\pi_i(M) \cong \pi_i(\mathbb{R} \times S^2) \cong \pi_i(S^2)$, pois $\mathbb{R} \times S^2$ reveste M , e $\pi_i\left(\frac{S^2}{G}\right) \cong \pi_i(S^2)$, pois S^2 reveste $\frac{S^2}{G}$. Como $\pi_6(S^2) \cong \mathbb{Z}_{12}$, então $\pi_6(Y)$ é finito. Ainda, $\pi_2(Y)$ é tal que

$$\cdots \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_2(Y) \xrightarrow{p\#} \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(Y) \xrightarrow{p\#} \pi_1\left(\frac{S^2}{G}\right) \rightarrow 1.$$

2.5.3 Variedades de Grassmann

Seja $G_{k,k+l}$ a variedade de Grassmann de k -subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{k+l}$, com $k, l \geq 1$. Seja $\tilde{G}_{k,k+l}$ a variedade de Grassmann de k -subespaços vetoriais orientados de $\mathbb{R}^{k+l}$. Consideremos a fibração abaixo

$$\begin{array}{c} SO(k) \\ \downarrow \\ V_{k,k+l} \\ \downarrow p \\ \tilde{G}_{k,k+l} \end{array}$$

que projeta um k -referencial ortonormal em $\mathbb{R}^{k+l}$ no k -subespaço vetorial por ele gerado.

Notemos que $V_{k,k+l}$ é $(l-1)$ -conexo. Ainda, notemos que $\tilde{G}_{k,k+l} \approx \tilde{G}_{l,k+l}$, pois $\tilde{G}_{k,k+l} \ni W \mapsto W^\perp \in \tilde{G}_{l,k+l}$ é um homeomorfismo. Observemos que $\tilde{G}_{k,k+l}$ é uma variedade kl -dimensional. Assim, estamos interessados em $\omega'' : \pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_2(\tilde{G}_{k,k+l})$.

Lema 190. *Consideremos os grupos $\pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l}), \pi_2(\tilde{G}_{k,k+l})$, com $k, l \geq 2$. Se $k, l \geq 3$, então ambos os grupos são finitos, enquanto que se $k = 2 \not\equiv l(2)$, ou $l = 2 \not\equiv k(2)$, então ambos são infinitos. Se $k = 2 \equiv l(2)$, ou $l = 2 \equiv k(2)$, então $\pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l})$ é finito e $\pi_2(\tilde{G}_{k,k+l})$ é infinito livre de torção.*

Demonstração. Com efeito, consideremos a sequência de homotopia da fibração p ,

$$\begin{aligned} \cdots \pi_{i+1}(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_i(SO(k)) \rightarrow \pi_i(V_{k,k+l}) \rightarrow \pi_i(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_{i-1}(SO(k)) \cdots \\ \cdots \pi_2(V_{k,k+l}) \rightarrow \pi_2(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_1(SO(k)) \rightarrow \pi_1(V_{k,k+l}) \cdots \end{aligned}$$

Primeiramente, analisemos o segundo grupo de homotopia de $\tilde{G}_{k,k+l}$. Por um lado, notemos que $V_{k,k+l}$ é 1-conexo (pois $l \geq 2$). Por outro lado, notemos que $\pi_2(SO(k)) = 0$ (pois $\pi_2(SO(2)) \cong \pi_2(S^1) = 0$, $\pi_2(SO(3)) \cong \pi_2(\mathbb{R}P(3)) = 0$ e $SO(k) \rightarrow SO(k+1) \rightarrow S^k$ é fibração). Daí, a sequência

$$1 \rightarrow \pi_2(V_{k,k+l}) \rightarrow \pi_2(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_1(SO(k)) \rightarrow 1$$

é exata curta. Se $k = 2 = l$, então $\pi_2(\tilde{G}_{2,4}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (pois $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_2(V_{2,4}) \cong \pi_2(V_{1,3}) \cong \mathbb{Z}$). Seja $l \geq 3$. Então $V_{2,2+l}$ é 2-conexo. Se $k = 2$, segue que $\pi_2(\tilde{G}_{2,2+l}) \cong \pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$. Se $k \geq 3$, então $\pi_2(\tilde{G}_{k,k+l}) \cong \pi_1(SO(k)) \cong \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$. Analisemos, agora, o $(kl+1)$ -ésimo grupo de homotopia de $\tilde{G}_{k,k+l}$. Consideremos o seguinte trecho da sequência de homotopia da fibração p :

$$\cdots \pi_{kl+1}(SO(k)) \rightarrow \pi_{kl+1}(V_{k,k+l}) \rightarrow \pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l}) \rightarrow \pi_{kl}(SO(k)) \cdots$$

Consideremos, para todo $k \geq 2$, a fibração abaixo.

$$\begin{array}{c} SO(k-1) \\ \downarrow \\ SO(k) \\ \downarrow \\ S^{k-1} \end{array}$$

Afirmamos que $\pi_{kl+1}(SO(k))$ e $\pi_{kl}(SO(k))$ são finitos, para todo $k, l \geq 2$. De fato, observemos que $kl + 1 > kl > 2(k-1) - 1$ e $kl + 1 > kl > k-1$, com $k, l \geq 2$. Notemos ainda que a base da fibração acima é S^{k-1} , a base da fibração construída da mesma forma para a fibra da fibração acima é S^{k-2} , a base da fibração construída do mesmo modo para a fibra da fibração anterior é S^{k-3} e assim por diante. Desta forma, como a esfera de maior dimensão que aparece neste estudo é S^{k-1} , então o resultado segue, das desigualdades anteriores, por [Se-51]. Portanto, notemos que $\pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l})$ é finito se, e só se, $\pi_{kl+1}(V_{k,k+l})$ é finito. Consideremos agora, para todo $k, l \geq 2$, a fibração abaixo.

$$\begin{array}{c} V_{k-1,k+l-1} \\ \downarrow \\ V_{k,k+l} \\ \downarrow \\ S^{k+l-1} \end{array}$$

Afirmamos que $\pi_{kl+1}(V_{k,k+l})$ é finito para $k, l \geq 3$ e para $k = 2 \equiv l(2)$, e é infinito para $k = 2 \not\equiv l(2)$. Com efeito, notemos que a base da fibração acima é S^{k+l-1} , a base da fibração construída da mesma forma para a fibra da fibração acima é S^{k+l-2} , a base da fibração construída do mesmo modo para a fibra da fibração anterior é S^{k+l-3} e assim por diante. Assim, as esferas

envolvidas nesta análise são da forma S^{k+l-j} , com $j \geq 1$. Observemos que, para $j \geq 1$, $(kl + 1) - (k + l - j) = (l - 1)(k - 1) + j$ é sempre diferente de zero e $(kl + 1) - (2(k + l - j) - 1) = (l - 2)(k - 2) + 2(j - 1)$ é igual a zero se, e só se, $l = 2$ ou $k = 2$, e $j = 1$. Logo, para $k, l \geq 3$, temos, por [Se-51], que $\pi_{kl+1}(S^{k+l-j})$ é finito, para todo $j \geq 1$, e portanto a primeira parte da afirmação segue. Seja $k = 2$. Então a fibração acima assume a forma $S^l \rightarrow V_{2,2+l} \rightarrow S^{l+1}$. Notemos, por [Se-51], que $\pi_{2l}(S^l), \pi_{2l+1}(S^l)$ são sempre finitos e $\pi_{2l+1}(S^{l+1})$ é infinito se, e só se, $l + 1$ é par, donde a segunda parte da afirmação segue para $k = 2$, usando a sequência de homotopia da fibração. Desde que $\tilde{G}_{k,k+l} \approx \tilde{G}_{l,k+l}$, o resultado também segue para $l = 2$. ■

Proposição 191. *Seja $\tilde{G}_{k,k+l}$ a variedade de Grassmann de k -subespaços vetoriais orientados de $\mathbb{R}^{k+l}$, com $k, l \geq 1$. Se $k = 1$, ou $l = 1$, ou $k = 2 \equiv l(2)$, ou $l = 2 \equiv k(2)$, então $\omega'' \equiv 0$, exceto para $\tilde{G}_{2,3} \approx \tilde{G}_{1,3} \approx S^2$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$.*

Demonstração. Com efeito, desde que $\tilde{G}_{k,k+l} \approx \tilde{G}_{l,k+l}$, basta analisarmos quando $l = 1$ e quando $l = 2 \equiv k(2)$. Se $l = 1$, então $\tilde{G}_{k,k+1} \approx \tilde{G}_{1,k+1} \approx S^k$ e portanto, pela proposição 151, $\omega'' \equiv 0$, exceto para $\tilde{G}_{2,3} \approx \tilde{G}_{1,3} \approx S^2$ quando $\omega'' = \times(\pm 1)$. Se $l = 2 \equiv k(2)$, então, pelo lema anterior, $\pi_{kl+1}(\tilde{G}_{k,k+l})$ é finito e $\pi_2(\tilde{G}_{k,k+l})$ é infinito livre de torção. Logo, $\omega'' \equiv 0$. ■

Desta forma, na maioria dos casos, ainda não conhecemos ω'' .

Capítulo 3

Raízes em codimensão 1, sendo o domínio uma 3-variedade

Em todo o capítulo, seja $f : X^3 \rightarrow Y^2$ uma aplicação contínua, onde X, Y são variedades fechadas, conexas e seja $y_0 \in Y$.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar, para o par (y_0, f) , quando o número mínimo de componentes de coincidências $MCC(y_0, f)$ é igual ao número de Nielsen $\tilde{N}(y_0, f)$, isto é, queremos saber quando o par (y_0, f) satisfaz a propriedade de Wecken, supondo que o domínio X de f é uma 3-variedade fechada, conexa e o contradomínio Y de f é uma superfície fechada, conexa. Sabemos que X ou tem grupo fundamental finito e é revestido por S^3 (que são as formas espaciais esféricas), ou é $K(\pi, 1)$ e é revestido por $\mathbb{R}^3$, ou pertence ao conjunto $\{S^1 \times S^2, \mathbb{R}P(3) \# \mathbb{R}P(3), S^1 \tilde{\times} S^2, S^1 \times \mathbb{R}P(2)\}$ e é revestido por $\mathbb{R} \times S^2$. Da mesma forma, sabemos que Y ou tem grupo fundamental finito e é revestido por S^2 (que são S^2 e $\mathbb{R}P(2)$), ou é $K(\pi, 1)$ e é revestido por $\mathbb{R}^2$ (que são as superfícies fechadas com característica de Euler não positiva). Mais especificamente, neste capítulo, estudamos a validade da propriedade de Wecken ora quando X é uma forma espacial esférica qualquer

e $Y = K(\pi, 1)$, ora quando $X = \mathbb{R}P(3)$ e $Y = S^2$. No primeiro caso, nós obtemos que $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 0$ sempre (proposição 192). No segundo caso, nós inicialmente construímos algumas aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2 e as enumeramos. Em seguida, nós obtemos que $[\mathbb{R}P(3), S^2]$ é uma união disjunta de duas famílias enumeráveis que são completamente determinadas pelas aplicações contínuas construídas (teorema 196). Daí, para cada família, nós determinamos o grupo de bordismo (proposições 198, 199 e 201) e nós analisamos o anulamento de $\tilde{\omega}(y_0, f)$ (proposições 203 e 204 e teorema 205). Por fim, nós obtemos que $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 1$ se f não é homotópica a aplicação constante e $MCC(y_0, f) = N(y_0, f) = 0$, caso contrário (teorema 206).

3.1 X uma forma espacial esférica e $\chi(Y) \leq 0$

Sejam $f : \frac{S^3}{G} \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e $y_0 \in S^2$, onde $\frac{S^3}{G}$ denota uma forma espacial esférica dada por uma ação livre de G em S^3 , e onde supomos que a característica de Euler de Y , $\chi(Y)$, é não positiva.

O resultado abaixo nos diz em particular que, neste caso, todo par (y_0, f) satisfaz a propriedade de Wecken.

Proposição 192. *Sejam $f : \frac{S^3}{G} \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e $y_0 \in S^2$, com $\chi(Y) \leq 0$. Então (y_0, f) é deformável a livre de coincidência. Em particular, $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$.*

Demonstração. De fato, pelo teorema de classificação de superfícies fechadas, $\chi(Y) \leq 0$ se, e somente se, $\pi_1(Y)$ é infinito. Ainda, temos que $\pi_1(\frac{S^3}{G}) \cong G$ é finito. Logo, $\#\pi_0(E(y_0, f)) = [\pi_1(Y) : f_{\#}(\pi_1(\frac{S^3}{G}))]$ é infinito (igual a $\#\pi_1(Y)$, pois $f_{\#}(\pi_1(\frac{S^3}{G})) = 1$ uma vez que $\pi_1(Y)$ é livre de torção)

e portanto, por [GoWo-05], (y_0, f) é deformável a livre de coincidência. Em particular, pelo lema 120, $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. ■

Desta forma, quando $X = \frac{S^3}{G}$, resta analisar a validade da propriedade de Wecken apenas para $Y = S^2$ e para $Y = \mathbb{R}P(2)$. Na próxima seção, vamos fazer isto para $X = \mathbb{R}P(3)$ e $Y = S^2$.

3.2 $X = \mathbb{R}P(3)$ e $Y = S^2$

Em toda a seção, sejam $f : \mathbb{R}P(3) \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua e $y_0 \in S^2$.

Nesta seção, vamos inicialmente construir algumas aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2 e enumerá-las e vamos determinar $[\mathbb{R}P(3), S^2]$. Em seguida, para estas aplicações, vamos calcular os grupos envolvidos, analisar o anulamento de $\tilde{\omega}(y_0, f)$ e determinar $MCC(y_0, f)$ e $\tilde{N}(y_0, f)$.

Notemos que, como o contradomínio de f é S^2 , então f é deformável a livre de raiz se, e só se, f é homotópica a aplicação constante. Em particular, se $f \not\simeq y_0$, segue que $MCC(y_0, f) \geq 1$ e, se $f \simeq y_0$, temos que $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$.

3.2.1 Particularidades sobre o invariante

Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} & E(y_0, f) & \\ \tilde{g} \nearrow & \downarrow pr & \\ C & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}P(3) \end{array}$$

onde $C := Coin(y_0, f) = f^{-1}(y_0)$, $E(y_0, f) = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}P(3) \times (S^2)^I \mid \theta(0) = y_0, \theta(1) = f(x)\}$, $\tilde{g}(x) = (x, y_0)$ e $pr(x, \theta) = x$. Notemos que pr é uma fibração tal que $pr^{-1}(g(x)) \approx \Omega(S^2, y_0)$. Consideremos a sequência de homotopia da fibração pr ,

$$\cdots \pi_2(\mathbb{R}P(3)) \rightarrow \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) \rightarrow \pi_1(E(y_0, f)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P(3)) \rightarrow \pi_0(\Omega(S^2, y_0)) \cdots$$

Desde que $\pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 1$, $\pi_1(\mathbb{R}P(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(\Omega(S^2, y_0)) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_0(\Omega(S^2, y_0)) \approx \pi_1(S^2) = 1$, então

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(E(y_0, f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

é uma sequência exata curta. Em particular, $\pi_1(E(y_0, f)) \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2\}$. Ainda, $\pi_0(E(y_0, f)) \approx \frac{\pi_1(S^2)}{\sim} = \frac{\pi_1(S^2)}{\text{Im}f_{\#}} = 1$, donde $E(y_0, f)$ é conexo por caminhos e portanto $R(y_0, f) = 1$, isto é, (y_0, f) tem apenas uma classe de Reidemeister. Notemos, agora, que o invariante $\tilde{\omega}$ é tal que

$$\tilde{\omega}(y_0, f) := [C, \tilde{g}, \bar{g}] \in \Omega_1(E(y_0, f); pr^*(y_0^*(\tau_{S^2}) - \tau_{\mathbb{R}P(3)})) = \Omega_1^{fr}(E(y_0, f)),$$

pois $\mathbb{R}P(3)$ é paralelizável.

Observação 193. *Desde que pr é fibração e $\Omega(S^2, y_0)$ e $\mathbb{R}P(3)$ são CW-complexos, então $E(y_0, f)$ também o é (vide [FrPi-90], páginas 236 e 238). Ainda, como $\pi_n(S^2) \cong \pi_{n-1}(\Omega(S^2, y_0))$ e $\pi_n(\mathbb{R}P(3))$ são finitamente gerados, para todo $n \geq 1$, segue que $\pi_n(E(y_0, f))$ é finitamente gerado, para todo $n \geq 1$.*

Agora, a fim de estudar o invariante $\tilde{\omega}(y_0, f)$ e o grupo em que ele se encontra, vamos, na próxima subseção, analisar o conjunto $[\mathbb{R}P(3), S^2]$.

3.2.2 Aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2

Nesta subseção, vamos estudar aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2 . Consideremos a projeção natural $p_{\mathbb{R}P(3)} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P(3)$. Vamos apresentar, para cada $m \in \mathbb{Z}$, uma aplicação contínua $f' : \mathbb{R}P(3) \rightarrow S^2$ tal que $f' \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq mh$, onde $h : S^3 \rightarrow S^2$ denota a aplicação de Hopf. Em outras palavras, para cada $m \in \mathbb{Z}$, vamos exibir f' que, a menos de homotopia, fatora mh via

$p_{\mathbb{R}P(3)}$, isto é, tal que o seguinte diagrama geométrico é homotópico comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{mh} & S^2 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & \nearrow f' & \\ \mathbb{R}P(3) & & \end{array}$$

Caso I - m ímpar.

Sabemos que $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ e que a aplicação de Hopf $h : S^3 \rightarrow S^2$ representa um gerador de $\pi_3(S^2)$. Se h é dada por

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \supset S^3 \ni (z_1, z_2) \mapsto S^1(z_1, z_2) \in \frac{S^3}{S^1},$$

onde $S^1(z_1, z_2)$ representa a órbita de (z_1, z_2) dada pela ação

$$S^1 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \ni (\lambda, (z_1, z_2)) \mapsto (\lambda z_1, \lambda z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

então definindo h' por $[z_1, z_2] \mapsto S^1(z_1, z_2)$, temos que h' fatora h via $p_{\mathbb{R}P(3)}$, conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{h} & S^2 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & \nearrow h' & \\ \mathbb{R}P(3) & & \end{array}$$

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Agora, se $a_{2n+1} : S^3 \rightarrow S^3$ é uma aplicação de grau $2n+1$, então existe $a'_{2n+1} : \mathbb{R}P(3) \rightarrow \mathbb{R}P(3)$ tal que $p_{\mathbb{R}P(3)} \circ a_{2n+1} = a'_{2n+1} \circ p_{\mathbb{R}P(3)}$ e portanto $h' \circ a'_{2n+1}$ fatora $h \circ a_{2n+1} \simeq (2n+1)h$ via $p_{\mathbb{R}P(3)}$, conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} S^3 & \xrightarrow{(2n+1)h} & S^3 & \xrightarrow{h} & S^2 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & \searrow a_{2n+1} & p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & \nearrow h' & \\ \mathbb{R}P(3) & \xrightarrow{a'_{2n+1}} & \mathbb{R}P(3) & & \end{array}$$

Observação 194. Sobre $MCC(y_0, h' \circ a'_{2n+1})$:

Seja $a_{2n+1} : S^3 \rightarrow S^3$ dada por $a_{2n+1}(z_1, z_2) = (z_1^{2n+1}, z_2)$, para todo $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Daí, $a'_{2n+1} : \mathbb{R}P(3) \rightarrow \mathbb{R}P(3)$ é tal que $a'_{2n+1}([z_1, z_2]) = [z_1^{2n+1}, z_2]$, pois $a_{2n+1}(-z_1, -z_2) = ((-z_1)^{2n+1}, -z_2) = -a_{2n+1}(z_1, z_2)$. Notemos que ambas tem grau $2n + 1$, pois $a_{2n+1}^{-1}(1, 0) = \{e^{\frac{2\pi i k}{2n+1}} | 0 \leq k \leq 2n\}$. Como $h^{-1}(S^1(0, 1)) = 0_{\mathbb{C}} \times S^1$ e $a_{2n+1}^{-1}(0_{\mathbb{C}} \times S^1) = 0_{\mathbb{C}} \times S^1$, então $(h \circ a_{2n+1})^{-1}(S^1(0, 1)) = 0_{\mathbb{C}} \times S^1$ e portanto $(h' \circ a'_{2n+1})^{-1}(S^1(0, 1)) \approx 0_{\mathbb{C}} \times S^1$ é conexo por caminhos. Em particular, $MCC(y_0, h' \circ a'_{2n+1}) \leq 1$.

Caso II - m par.

Consideremos uma bola aberta $B^3 \subset \mathbb{R}P(3)$ e consideremos a aplicação colapsante $k_3 : \mathbb{R}P(3) \rightarrow \frac{\mathbb{R}P(3)}{\mathbb{R}P(3) \setminus B^3}$. Identificando $\frac{\mathbb{R}P(3)}{\mathbb{R}P(3) \setminus B^3}$ com S^3 , obtemos que k_3 é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}P(3)$ em S^3 . Agora, pelo teorema de classificação de Hopf-Whitney (vide [Whg-78], página 244), segue que $[\mathbb{R}P^3, S^3] \approx H^3(\mathbb{R}P(3), \mathbb{Z})$, o qual, por sua vez, é isomorfo a $\mathbb{Z}$, pois $\mathbb{R}P(3)$ é orientável. Usando esta identificação, notemos que k_3 representa um gerador de $[\mathbb{R}P^3, S^3]$. Ainda, observemos que $a_2 := k_3 \circ p_{\mathbb{R}P(3)}$ é uma aplicação de grau 2. Assim, $h \circ k_3$ fatora $h \circ a_2 \simeq 2h$ via $p_{\mathbb{R}P(3)}$, conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{2h} & S^2 \\
 \downarrow p_{\mathbb{R}P(3)} & \searrow h \circ a_2 & \nearrow h \circ k_3 \\
 \mathbb{R}P(3) & &
 \end{array}$$

Seja $n \in \mathbb{Z}$. Na verdade, $(nh) \circ k_3$ fatora $(nh) \circ a_2 \simeq (2n)h$ via $p_{\mathbb{R}P(3)}$, conforme o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{(2n)h} & \\
S^3 & \xrightarrow{(nh) \circ a_2} & S^2 \\
\downarrow p_{\mathbb{R}P(3)} & \nearrow (nh) \circ k_3 & \\
\mathbb{R}P(3) & &
\end{array}$$

Observação 195. Sobre $MCC(y_0, (nh) \circ k_3)$:

Seja $n \neq 0$. Desde que $MCC(y_0, nh) = 1$, então, via bordismo, identificamos $(nh)^{-1}(y_0)$ com S^1 . Daí, identificamos $((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0)$ com $k_3^{-1}(S^1)$. Da construção da aplicação colapsante k_3 , se $S^1 \cap (\mathbb{R}P(3) \setminus B^3) = \emptyset$, então $k_3^{-1}(S^1) \approx S^1$ e, caso contrário, $k_3^{-1}(S^1) \approx S^1 \vee (\mathbb{R}P(3) \setminus B^3)$. De qualquer forma, $((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0)$ é conexo por caminhos. Daí, $MCC(y_0, (nh) \circ k_3) \leq 1$.

Classificação de aplicações de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2 .

Consideremos a projeção natural $p_{\mathbb{R}P(2)} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P(2)$. Consideremos a sequência de Puppe associada à aplicação contínua $p_{\mathbb{R}P(2)}$,

$$S^2 \rightarrow \mathbb{R}P(2) \rightarrow \mathbb{R}P(3) \rightarrow \sum S^2 \rightarrow \sum \mathbb{R}P(2) \rightarrow \sum \mathbb{R}P(3) \rightarrow \dots$$

A partir desta sequência, usando que $\sum S^2 \approx S^3$, consideremos a sequência exata longa (para classes de homotopia de aplicações em S^2),

$$\dots \rightarrow \left[\sum \mathbb{R}P^2, S^2 \right] \rightarrow [S^3, S^2] \xrightarrow{k_3^*} [\mathbb{R}P^3, S^2] \xrightarrow{i^*} [\mathbb{R}P^2, S^2] \xrightarrow{p_{\mathbb{R}P(2)}^*} [S^2, S^2],$$

onde $i : \mathbb{R}P(2) \hookrightarrow \mathbb{R}P(3)$ é a inclusão. Observemos que, em geral, a parte final desta sequência exata longa não é formada por grupos. Notemos que $[S^3, S^2] \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ e $[S^2, S^2] \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Ainda, ao considerarmos a sequência exata longa (para classes de homotopia de aplicações em S^2) dada pela sequência de Puppe associada à projeção natural $p_{\mathbb{R}P(1)} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P(1)$, obtemos que $[\sum \mathbb{R}P^2, S^2] \cong \mathbb{Z}_2$. Consideremos uma bola aberta $B^2 \subset \mathbb{R}P(2)$ e consideremos a aplicação colapsante $k_2 : \mathbb{R}P(2) \rightarrow \frac{\mathbb{R}P(2)}{\mathbb{R}P(2) \setminus B^2}$. Pelo teorema de classificação de Hopf-Whitney (vide [Whg-78], página 244), segue que

$[\mathbb{R}P^2, S^2] \approx H^2(\mathbb{R}P(2), \mathbb{Z})$, o qual, por sua vez, é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, uma vez que $\mathbb{R}P(2)$ é não orientável. Usando esta identificação, observemos que k_2 representa um gerador de $[\mathbb{R}P^2, S^2]$ e, desta forma, $[\mathbb{R}P^2, S^2] = \{0, [k_2]\}$, onde 0 denota a classe de homotopia da aplicação constante $c : \mathbb{R}P(2) \rightarrow S^2$. Assim, obtemos a sequência exata (de conjuntos) abaixo.

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{k_3^*} [\mathbb{R}P^3, S^2] \xrightarrow{i^*} \{0, [k_2]\} \xrightarrow{p_{\mathbb{R}P(2)}^*} \mathbb{Z}.$$

Desde que $c \circ p_{\mathbb{R}P(2)}$ e $k_2 \circ p_{\mathbb{R}P(2)}$ são nulo-homotópicas (pois as induzidas no segundo grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são nulas), então $p_{\mathbb{R}P(2)}^*$ é a aplicação nula. Logo,

$$1 \rightarrow [S^3, S^2] \xrightarrow{k_3^*} [\mathbb{R}P(3), S^2] \xrightarrow{i^*} [\mathbb{R}P(2), S^2] \rightarrow 1$$

é uma sequência exata curta (de conjuntos). Notemos que $[\mathbb{R}P(3), S^2] = i^{*-1}(0) \dot{\cup} i^{*-1}([k_2])$ e $i^{*-1}(0) = \text{Im}(k_3^*)$. Como $\pi_3(S^2) = \langle h \rangle$, então $i^{*-1}(0) = \text{Im}(k_3^*) = \{[(nh) \circ k_3] | n \in \mathbb{Z}\}$. Vamos, agora, determinar $i^{*-1}([k_2])$. Afirmamos que $[h' \circ a'_{2n+1}] \in i^{*-1}([k_2])$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $h' \circ a'_{2n+1} \simeq (mh) \circ k_3$, para algum $m \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$(2n+1)h \simeq h' \circ a'_{2n+1} \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq (mh) \circ k_3 \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq (2m)h,$$

o que não ocorre. Vamos verificar que $i^{*-1}([k_2]) = \{[h' \circ a'_{2n+1}] | n \in \mathbb{Z}\}$.

Seja $B_r \subset \mathbb{R}^3$ a bola aberta de centro 0 e raio r e seja $S_r = \partial B_r$, com $r > 0$. Seja ainda $\overline{B}_r \subset \mathbb{R}^3$ a bola fechada de centro 0 e raio r . Consideremos as identificações $\mathbb{R}P(3) = \frac{\mathbb{R}P(3) \setminus B_1}{S_1}$ e $S^3 = \frac{\overline{B}_1}{S_1}$. Associada à sequência de Puppe, temos uma ação

$$\begin{aligned} \pi_3(S^2) \times [\mathbb{R}P(3), S^2] &\xrightarrow{\varrho} [\mathbb{R}P(3), S^2] \\ ([g], [f]) &\mapsto [\psi \circ (f \vee g) \circ \varphi] \end{aligned}$$

onde a composta $\mathbb{R}P(3) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}P(3) \vee S^3 \xrightarrow{f \vee g} S^2 \vee S^2 \xrightarrow{\psi} S^2$ é tal que

$$\begin{aligned}\varphi : x &\mapsto \begin{cases} (\bar{x}, \infty), & \text{se } x \in \mathbb{R}P(3) \setminus B_1, \\ (\infty, \bar{x}), & \text{se } x \in \overline{B_1}, \end{cases} \\ f \vee g : &\begin{cases} (x, \infty) \mapsto (f(x), \infty), \\ (\infty, x) \mapsto (\infty, g(x)), \end{cases} \\ \psi : &\begin{cases} (x, \infty) & \mapsto x, \\ (\infty, x) & \end{cases}\end{aligned}$$

e onde ∞ denota o ponto de colagem das somas wedge. Por esta ação, temos que a órbita de um elemento de $i^{*-1}([k_2])$ é igual a $i^{*-1}([k_2])$ (e também que a órbita de um elemento de $i^{*-1}(0)$ é igual a $i^{*-1}(0)$). Assim, a fim de determinar $i^{*-1}([k_2])$, basta calcularmos a órbita de $[h'] \in i^{*-1}([k_2])$. Vamos calcular $\Theta([h], [h'])$. Para isto, vamos analisar $(\psi \circ (h' \vee h) \circ \varphi) \circ p_{\mathbb{R}P(3)}$. Consideremos o revestimento universal de $RP(3) \vee S^3$, $q : S^3 \vee S^3 \vee S^3 \rightarrow \mathbb{R}P(3) \vee S^3$, tal que

$$q : \begin{cases} (x, \infty, \infty) \mapsto (\infty, x), \\ (\infty, x, \infty) \mapsto (p_{\mathbb{R}P(3)}(x), \infty), \\ (\infty, \infty, x) \mapsto (\infty, x). \end{cases}$$

Notemos que $\varphi \circ p_{\mathbb{R}P(3)}$ admite um levantamento φ' . Se $\mathbb{R}P(3) = \frac{\overline{B_2}}{x \sim_{S^2} -x}$ e $S^3 = \frac{S^2 \times [-2, 2]}{S^2 \times \{-2\}, S^2 \times \{2\}}$, podemos escrever $p_{\mathbb{R}P(3)}^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{B_{1-}} \dot{\cup} \overline{B_{1+}}$, onde $\overline{B_{1-}} := \frac{S^2 \times [-2, -1]}{S^2 \times \{-2\}, S^2 \times \{2\}}$ e $\overline{B_{1+}} := \frac{S^2 \times [1, 2]}{S^2 \times \{-2\}, S^2 \times \{2\}}$. Consideremos $\varphi' : S^3 \rightarrow S^3 \vee S^3 \vee S^3$ tal que

$$\varphi' : x \mapsto \begin{cases} (\bar{x}, \infty, \infty), & \text{se } x \in \overline{B_{1+}}, \\ (\infty, \bar{x}, \infty), & \text{se } x \in S^3 \setminus (B_{1+} \cup B_{1-}), \\ (\infty, \infty, \bar{x}), & \text{se } x \in \overline{B_{1-}}, \end{cases}$$

Assim, $\varphi \circ p_{\mathbb{R}P(3)} = q \circ \varphi'$. Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccccccc} S^3 & \xrightarrow{\varphi'} & S^3 \vee S^3 \vee S^3 & \xrightarrow{\psi''} & S^3 \vee S^3 & \xrightarrow{\psi'} & S^3 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & & q \downarrow & & h \vee h \downarrow & & h \downarrow \\ RP(3) & \xrightarrow{\varphi} & RP(3) \vee S^3 & \xrightarrow{h' \vee h} & S^2 \vee S^2 & \xrightarrow{\psi} & S^2 \end{array}$$

onde

$$\psi'' : \begin{cases} (x, \infty, \infty) \mapsto (\infty, x), \\ (\infty, x, \infty) \mapsto (x, \infty), \\ (\infty, \infty, x) \mapsto (\infty, x), \end{cases}$$

$$\psi' : \begin{cases} (x, \infty) \mapsto x, \\ (\infty, x) \mapsto x. \end{cases}$$

Notemos que $\varphi'_\# : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é tal que $\varphi'_\#(1) = (1, 1, 1)$, $(\psi'' \circ \varphi')_\#(1) = (1, 2)$ e $(\psi' \circ \psi'' \circ \varphi')_\#(1) = 3$, donde $h \circ \psi' \circ \psi'' \circ \varphi' \simeq 3h$. Logo, $\Theta([h], [h']) = [\psi \circ (h' \vee h) \circ \varphi]$, onde $(\psi \circ (h' \vee h) \circ \varphi) \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq 3h$. A partir de construções análogas, consideremos o diagrama geométrico abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} S^3 & \xrightarrow{\varphi'} & V^5 S^3 & \xrightarrow{\psi''} & S^3 \vee S^3 & \xrightarrow{\psi'} & S^3 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & & q \downarrow & & h \vee h \downarrow & & h \downarrow \\ RP(3) & \xrightarrow{\varphi} & RP(3) \vee S^3 \vee S^3 & \xrightarrow{h \vee (2h)} & S^2 \vee S^2 & \xrightarrow{\psi} & S^2 \end{array}$$

Notemos que $\varphi'_\# : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^5$ é tal que $\varphi'_\#(1) = (1, 1, 1, 1, 1)$, $(\psi'' \circ \varphi')_\#(1) = (1, 4)$ e $(\psi' \circ \psi'' \circ \varphi')_\#(1) = 5$, donde $h \circ \psi' \circ \psi'' \circ \varphi' \simeq 5h$. Logo, $\Theta([2h], [h']) = [\psi \circ (h' \vee (2h)) \circ \varphi]$, onde $(\psi \circ (h' \vee h) \circ \varphi) \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq 5h$. Analogamente, $\Theta([nh], [h']) = [\psi \circ (h' \vee (nh)) \circ \varphi]$, onde $(\psi \circ (h' \vee (nh)) \circ \varphi) \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq (2n+1)h$, conforme o diagrama geométrico a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc} S^3 & \xrightarrow{\varphi'} & V^{2n+1} S^3 & \xrightarrow{\psi''} & S^3 \vee S^3 & \xrightarrow{\psi'} & S^3 \\ p_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow & & q \downarrow & & h \vee h \downarrow & & h \downarrow \\ RP(3) & \xrightarrow{\varphi} & RP(3) \vee (V^n S^3) & \xrightarrow{h \vee (nh)} & S^2 \vee S^2 & \xrightarrow{\psi} & S^2 \end{array}$$

Seja $h'_{2n+1} := \psi \circ (h' \vee (nh)) \circ \varphi$. Desta forma, $[h'_{2n+1}]$ é o único elemento na órbita de h' tal que $h'_{2n+1} \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq (2n+1)h$. Como a órbita de h' é igual a $i^{*-1}([k_2])$ e $[h' \circ a'_{2n+1}] \in i^{*-1}([k_2])$ é tal que $h' \circ a'_{2n+1} \circ p_{\mathbb{R}P(3)} \simeq (2n+1)h$, segue, em particular, que $h'_{2n+1} \simeq h' \circ a'_{2n+1}$. Logo, $i^{*-1}([k_2]) = \{[h' \circ a'_{2n+1}] | n \in \mathbb{Z}\}$.

A partir destas verificações, enunciemos o resultado a seguir.

Teorema 196. *Temos que $[\mathbb{R}P(3), S^2] = \mathbb{Z}_{(0)} \dot{\cup} \mathbb{Z}_{(1)}$, onde*

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_{(0)} := (i^*)^{-1}(0) &= \{[(nh) \circ k_3] | n \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathbb{Z}_{(1)} := (i^*)^{-1}([k_2]) &= \{[h' \circ a'_{2n+1}] | n \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

e $i : \mathbb{R}P(2) \hookrightarrow \mathbb{R}P(3)$ é a inclusão.

Proposição 197. *Temos que $p_{\mathbb{R}P(3)}^* : [\mathbb{R}P(3), S^2] \rightarrow \pi_3(S^2)$ é uma bijeção.*

Demonstração. De fato, dado $2n[h] \in \pi_3(S^2)$, existe único $[(nh) \circ k_3]$ tal que $p_{\mathbb{R}P(3)}^*([(nh) \circ k_3]) = 2n[h]$ e dado $(2n+1)[h] \in \pi_3(S^2)$, existe único $[h' \circ a'_{2n+1}]$ tal que $p_{\mathbb{R}P(3)}^*([h' \circ a'_{2n+1}]) = (2n+1)[h]$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

3.2.3 Cálculos do invariante

Nesta subseção, vamos estudar o invariante $\tilde{\omega}(y_0, f)$ e o grupo em que ele se encontra, $\Omega_1^{fr}(E(y_0, f))$, para as duas famílias de classes de homotopia de aplicações contínuas de $\mathbb{R}P(3)$ em S^2 , $\mathbb{Z}_{(0)}$ e $\mathbb{Z}_{(1)}$, encontradas na subseção anterior.

Inicialmente, vamos determinar o grupo $H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z})$ para cada família. O resultado abaixo faz isto para a família $\mathbb{Z}_{(0)}$.

Proposição 198. *Se $[f] \in \mathbb{Z}_{(0)}$, então $H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \cong \pi_1(E(y_0, f)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. De fato, desde que $[f] \in \mathbb{Z}_{(0)}$, então $f|_{\mathbb{R}P(2)} = f \circ i$ é homotópica à aplicação constante de $\mathbb{R}P(2)$ em S^2 . Sem perda de generalidade, seja $f \circ i = c$ constante. Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} \Omega(S^2, y_0) & & \Omega(S^2, y_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(y_0, c) & \xrightarrow{i'} & E(y_0, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P(2) & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}P(3) \end{array}$$

onde $i'(x, \theta) = (i(x), \theta)$. Usando, agora, a sequência de homotopia da fibração, consideremos o diagrama algébrico induzido abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \pi_2(\mathbb{R}P(2)) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, c)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(2)) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow i_{\#} & & \downarrow & \\ \cdots & \pi_2(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, f)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) & \cdots \end{array}$$

Como $\pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 1$ e $\pi_1(S^2) = 1$, então, na verdade, obtemos o seguinte diagrama algébrico:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, c)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(2)) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow i_{\#} & & \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, f)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Agora, desde que $i_{\#}$ é isomorfismo, segue, pelo lema dos cinco, que $\pi_1(E(y_0, f)) \cong \pi_1(E(y_0, c))$. Daí, como $E(y_0, c) \approx \mathbb{R}P(2) \times \Omega(S^2, y_0)$, pois c é constante, então $\pi_1(E(y_0, f)) \cong \pi_1(\mathbb{R}P(2)) \oplus \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Logo, $H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \cong \pi_1(E(y_0, f)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, uma vez que $\pi_1(E(y_0, f))$ é abeliano. ■

O próximo resultado determina o grupo para a família $\mathbb{Z}_{(1)}$.

Proposição 199. *Se $[f] \in \mathbb{Z}_{(1)}$, então $H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \cong \pi_1(E(y_0, f)) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Com efeito, desde que $[f] \in \mathbb{Z}_{(1)}$, então $f|_{\mathbb{R}P(2)} = f \circ i$ é homotópica à aplicação colapsante, k_2 , de $\mathbb{R}P(2)$ em S^2 . Sem perda de generalidade, seja $f \circ i = k_2$. Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} \Omega(S^2, y_0) & & \Omega(S^2, y_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(y_0, k_2) & \xrightarrow{i'} & E(y_0, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P(2) & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}P(3) \end{array}$$

onde $i'(x, \theta) = (i(x), \theta)$. Usando a sequência de homotopia da fibração, consideremos o diagrama algébrico induzido abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, k_2)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(2)) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow i_{\#} \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, f)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(3)) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Como $i_{\#}$ é isomorfismo, segue, pelo lema dos cinco, que $\pi_1(E(y_0, f)) \cong \pi_1(E(y_0, k_2))$. Suponhamos, por ora, que $\pi_1(E(y_0, k_2))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Logo, $H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \cong \pi_1(E(y_0, f)) \cong \mathbb{Z}$, uma vez que $\pi_1(E(y_0, f))$ é abeliano. A demonstração de que $\pi_1(E(y_0, k_2))$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ é dada no lema a seguir.

■

Lema 200. *Temos que $\pi_1(E(y_0, k_2)) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Com efeito, consideremos a sequência exata curta abaixo.

$$1 \rightarrow \pi_1(\Omega(S^2, y_0)) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_1(E(y_0, k_2)) \xrightarrow{pr_{\#}} \pi_1(\mathbb{R}P(2)) \rightarrow 1$$

Algebricamente, temos que $\pi_1(E(y_0, k_2)) \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2\}$. Sejam $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ a bola aberta de centro 0 e raio 1 e $\overline{B_1} \subset \mathbb{R}^2$ a bola fechada de centro 0 e raio 1. Consideremos as identificações $\mathbb{R}P(2) = \frac{\overline{B_1}}{x \sim_{S^1} -x}$ e $S^2 = \frac{\overline{B_1}}{S^1}$. Tome $x_0 \in k_2^{-1}(y_0)$, $x_0 = \overline{(0, 1)}$. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}P(2)$,

$$\alpha(t) = \overline{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}(2t-1)\right)\right)},$$

um representante do gerador de $\pi_1(\mathbb{R}P(2), x_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Para cada $t \in I$, seja $\theta_t : I \rightarrow S^2$ um laço baseado em y_0 , onde $\theta_0 = \theta_1 = y_0$, onde o interior da região limitada por θ_t contém $\theta_{t-\varepsilon}$, para todo $0 < t < 1$, para todo $\varepsilon > 0$ e onde cada θ_t tem a mesma orientação, no sentido horário, como sugerido em um dos laços na figura de $\overline{B_1}$ abaixo. Desta forma, notemos que $\Theta : I \rightarrow \Omega(S^2, y_0)$, $\Theta(t) = \theta_t$, representa o gerador de $\pi_1(\Omega(S^2, y_0), y_0) \cong \mathbb{Z}$.

Consideremos, agora, laços $\alpha', \Theta' : I \rightarrow E(y_0, k_2)$, baseados em (x_0, y_0) , dados por $\alpha'(t) = (\alpha(t), y_0)$ e $\Theta'(t) = (x_0, \theta_t)$. Suponhamos, por ora, que o laço $\alpha' * \alpha' * \Theta'$ é nulo-homotópico. Daí, $j_{\#}([\Theta]^{-1}) = [\Theta']^{-1} = 2[\alpha']$. Afirmamos que $\pi_1(E(y_0, k_2)) \cong \mathbb{Z}$. Com efeito, primeiramente, suponhamos por absurdo que $\pi_1(E(y_0, k_2)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Então algebricamente $j_{\#}(1) = (2k, 0)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Daí, $\frac{\pi_1(E(y_0, k_2))}{\text{Im } j_{\#}} \cong \mathbb{Z}_{2k} \oplus \mathbb{Z}_2$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, o que não ocorre uma vez que $\frac{\pi_1(E(y_0, k_2))}{\text{Im } j_{\#}} = \frac{\pi_1(E(y_0, k_2))}{\ker pr_{\#}} \cong \mathbb{Z}_2$. Agora, suponhamos por absurdo que $\pi_1(E(y_0, k_2)) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Seja $\pi_1(E(y_0, k_2)) = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$. Notemos que os elementos de $\pi_1(E(y_0, k_2))$ são da forma $aba \dots bab$ ou são da forma $aba \dots ba$ (ou os análogos começando com b), pois $a^2 = 1$ e $b^2 = 1$. A seguir, usamos apenas os começando com a , sendo que os argumentos são análogos para os começando com b . Como $(aba \dots ba)^2 = 1$, então algebricamente $j_{\#}(1) = (aba \dots bab)^2$, uma vez que $j_{\#}$ é injetor. Primeiramente, seja $j_{\#}(1) = (ab)^2$. Então $\mathbb{Z}_2 \cong \frac{\pi_1(E(y_0, k_2))}{\text{Im } j_{\#}} = \langle a, b | a^2, b^2, (ab)^2 \rangle = \{1, a, b, ab\}$, o qual é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, o que é um absurdo. De modo geral, se $j_{\#}(1) = (ab)^{2k}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, então $\mathbb{Z}_2 \cong \frac{\pi_1(E(y_0, k_2))}{\text{Im } j_{\#}}$ deveria ter $4k$ elementos, o que não ocorre. Portanto, de fato, $\pi_1(E(y_0, k_2)) \cong \mathbb{Z}$.

A fim de mostrarmos que $\alpha' * \alpha' * \Theta'$ é nulo-homotópico, consideremos

a fibração $\Omega(S^2; S, N) \rightarrow E(S, k_2) \rightarrow \mathbb{R}P(2)$, onde $S = k_2(\overline{(0,0)})$, $N = k_2(x_0) = y_0$ são os pólos sul e norte de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, respectivamente. Para cada $t \in I$, seja $\gamma_t : I \rightarrow S^2$ a geodésica que começa em S , termina em N e passa por $(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) \in \mathbb{R}^3$. Assim, observemos que $\Gamma : I \rightarrow \Omega(S^2; S, N)$, $\Gamma(t) = \gamma_t$, representa o gerador de $\pi_1(\Omega(S^2; S, N), \gamma_0) \cong \mathbb{Z}$. Consideremos os laços $\alpha'', \Gamma' : I \rightarrow E(S, k_2)$, baseados em (x_0, γ_0) , dados por $\alpha''(t) = (\alpha(t), \gamma_0)$ e $\Gamma'(t) = (x_0, \gamma_t)$. Vamos mostrar que o laço $\alpha'' * \alpha'' * \Gamma'$ é livremente nulo-homotópico. De fato, $H : I \times I \rightarrow E(S, k_2)$, $H(s, t) = (\overline{(s \cos(\pi(2t - \frac{1}{2})), s \sin(\pi(2t - \frac{1}{2})))}, \gamma_{t,s})$, onde $\gamma_{t,s}$ é o caminho sobre a geodésica γ_t que começa em S e termina em $\gamma_t(s)$, é uma homotopia livre entre $c_{(\overline{(0,0)}, S)}$ e $\alpha'' * \alpha'' * \Gamma'$. Daí, $c_{(x_0, \gamma_0)}$ e $\alpha'' * \alpha'' * \Gamma'$ são homotópicos, com extremos fixos. Contraindo γ_0 em y_0 , obtemos que $c_{(x_0, y_0)}$ e $\alpha' * \alpha' * \Theta'$ são homotópicos, com extremos fixos. ■

Com o próximo resultado, vamos decompor o grupo de bordismo em soma direta e descrever o invariante $\tilde{\omega}(y_0, f)$ em termos desta decomposição.

Proposição 201. *Sejam $f : \mathbb{R}P(3) \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua e $y_0 \in S^2$. Existe um isomorfismo $\varphi : \Omega_1^{fr}(E(y_0, f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z})$ tal que $\varphi([M, \tilde{g}, \bar{g}]) = ([M, cte, \bar{g}], \tilde{g}_*([M]))$, onde $[M] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ denota a classe fundamental de M .*

Demonstração. De fato, pela observação 193, notemos que $E(y_0, f)$ é um CW-complexo conexo por caminhos tal que $\pi_n(E(y_0, f))$ é finitamente gerado, para todo $n \geq 1$. Daí, como, pelas proposições 198 e 199, $\pi_1(E(y_0, f)) \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2\}$, então, pelo lema 49, $E(y_0, f)$ tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo de tipo finito. Logo, pelo teorema 110 e pela observação 111, sendo φ trivial, segue que a sequência

$$\cdots H_2(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \rightarrow \Omega_1^{fr} \xrightarrow{i_*} \Omega_1^{fr}(E(y_0, f)) \xrightarrow{\mu} H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

é exata, onde $\Omega_1^{fr} := \Omega_1^{fr}(a_0)$ e $i : a_0 \hookrightarrow E(y_0, f)$ é a inclusão. Considere $r : E(y_0, f) \rightarrow a_0$ a aplicação constante. Desde que $r_* \circ i_* = 1_{\Omega_1^{fr}}$, então a sequência acima cinde. Daí, definindo $\varphi : \Omega_1^{fr}(E(y_0, f)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus H_1(E(y_0, f); \mathbb{Z})$ por $\varphi([M, \tilde{g}, \bar{g}]) = (r_*([M, \tilde{g}, \bar{g}]), \mu([M, \tilde{g}, \bar{g}]))$, temos que φ é um isomorfismo, onde identificamos $\mathbb{Z}_2 \cong \Omega_1^{fr}$ (vide o exemplo 109). Agora, notemos que $r_*([M, \tilde{g}, \bar{g}]) = [M, cte, \bar{g}]$ e, pelo teorema 110, $\mu([M, \tilde{g}, \bar{g}]) = \tilde{g}_*([M])$, donde o resultado segue. ■

Vamos analisar $\tilde{g}_*$ para cada família. Mas antes, vamos analisar alguns homomorfismos induzidos que irão nos ajudar nesta tarefa. Consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega(S^2, y_0) & & \Omega(S^2, y_0) & & \Omega(S^2, y_0) & & \Omega(S^2, y_0) \\
\downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow & & \downarrow i_1 \\
E(y_0, 2h) & \xrightarrow{p'_{\mathbb{R}P(3)}} & E(y_0, k_3 \circ h) & \xrightarrow{k'_3} & E(y_0, h) & \xrightarrow{p''_{\mathbb{R}P(3)}} & E(y_0, h') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^3 & \xrightarrow{p_{\mathbb{R}P(3)}} & \mathbb{R}P(3) & \xrightarrow{k_3} & S^3 & \xrightarrow{p_{\mathbb{R}P(3)}} & \mathbb{R}P(3)
\end{array}$$

onde $p'_{\mathbb{R}P(3)}, p''_{\mathbb{R}P(3)} : (x, \theta) \mapsto (p_{\mathbb{R}P(3)}(x), \theta)$ e $k'_3 : (x, \theta) \mapsto (k_3(x), \theta)$. Usando a sequência de homotopia da fibração para as linhas verticais, consideremos agora o diagrama algébrico induzido abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_2(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, 2h)) & \longrightarrow & \pi_1(S^3) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\
\downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow p'_{\mathbb{R}P(3)\#} & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_2(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \xrightarrow{i_0\#} & \pi_1(E(y_0, k_3 \circ h)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\
\downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow k'_3\# & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_2(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \longrightarrow & \pi_1(E(y_0, h)) & \longrightarrow & \pi_1(S^3) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\
\downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)\#} & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_2(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_2(S^2) & \xrightarrow{i_1\#} & \pi_1(E(y_0, h')) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(3)) & \longrightarrow & \pi_1(S^2)
\end{array}$$

Como $\pi_2(\mathbb{R}P(3)) \cong \pi_2(S^3) = 1$, $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^3) = 1$, $\pi_1(\mathbb{R}P(3)) \cong \mathbb{Z}_2$ e

$\pi_1(S^2) = 1$, então obtemos o seguinte diagrama algébrico

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow p'_{\mathbb{R}P(3)\#} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_0\#} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow k'_{3\#} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)\#} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_1\#} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1
\end{array}$$

uma vez que $\pi_1(E(y_0, h)) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(E(y_0, 2h))$ e, pelos resultados anteriores, $\pi_1(E(y_0, h')) \cong \mathbb{Z}$ e $\pi_1(E(y_0, k_3 \circ h)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Pela comutatividade do diagrama, desde que, algebricamente, $i_1\# = \times 2$, então $p''_{\mathbb{R}P(3)\#} = \times 2$. Ainda, temos que $k'_{3\#} \circ p'_{\mathbb{R}P(3)\#}$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Desta forma, notemos que os homomorfismos induzidos no primeiro grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são tais que $p''_{\mathbb{R}P(3)*} = \times 2$, e $k'_{3*} \circ p'_{\mathbb{R}P(3)*}$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

Os próximos resultados analisam $\tilde{g}_*$ para a família $\mathbb{Z}_{(1)}$.

Proposição 202. *Seja $\tilde{g} : h'^{-1}(y_0) \rightarrow E(y_0, h')$ dada por $\tilde{g}(x) = (x, y_0)$. Então $\tilde{g}_* : H_1(h'^{-1}(y_0); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E(y_0, h'); \mathbb{Z})$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. De fato, consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc}
h^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, h) \\
p_{\mathbb{R}P(3)}| \downarrow & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)} \\
h'^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, h')
\end{array}$$

onde $\tilde{g} : x \mapsto (x, y_0)$ e $p''_{\mathbb{R}P(3)} : (x, \theta) \mapsto (p_{\mathbb{R}P(3)}(x), \theta)$. Como, pela observação 36, podemos identificar $h^{-1}(y_0)$ com S^1 , então, pela construção de h' , podemos identificar $h'^{-1}(y_0)$ com S^1 . Em particular, obtemos o diagrama algébrico

abaixo, induzido, do diagrama acima, no primeiro grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \\ p_{\mathbb{R}P(3)}|_* \downarrow & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)*} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Desde que, pela proposição 151, $\omega''([h]) = \pm 1$, então $\tilde{g}_* = \times(\pm 1)$. Logo, pelas considerações acima, $(p''_{\mathbb{R}P(3)} \circ \tilde{g})_* = \times(\pm 2)$. Daí, $\tilde{g}_*$ é injetor. ■

Proposição 203. *Seja $\tilde{g} : (h' \circ a'_{2n+1})^{-1}(y_0) \rightarrow E(y_0, h' \circ a'_{2n+1})$ dada por $\tilde{g}(x) = (x, y_0)$. Então $\tilde{g}_* : H_1((h' \circ a'_{2n+1})^{-1}(y_0); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E(y_0, h' \circ a'_{2n+1}); \mathbb{Z})$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Com efeito, consideremos o seguinte diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} (h \circ a_{2n+1})^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, h \circ a_{2n+1}) \\ p_{\mathbb{R}P(3)}|_* \downarrow & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)} \\ (h' \circ a'_{2n+1})^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, h' \circ a'_{2n+1}) \end{array}$$

onde $\tilde{g} : x \mapsto (x, y_0)$ e $p''_{\mathbb{R}P(3)} : (x, \theta) \mapsto (p_{\mathbb{R}P(3)}(x), \theta)$. Notemos que, pela observação 194, podemos identificar tanto $(h \circ a_{2n+1})^{-1}(y_0)$, quanto $(h' \circ a'_{2n+1})^{-1}(y_0)$, com S^1 . Daí, obtemos o diagrama algébrico abaixo, induzido, do diagrama acima, no primeiro grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \\ p_{\mathbb{R}P(3)}|_* \downarrow & & \downarrow p''_{\mathbb{R}P(3)*} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Como, pela proposição 151, temos que $\omega''((2n+1)[h]) = \pm(2n+1)$, então $\tilde{g}_* = \times(\pm(2n+1))$. Portanto, por argumentos análogos às considerações acima, $(p''_{\mathbb{R}P(3)} \circ \tilde{g})_* = \times(\pm 2(2n+1))$. Daí, $\tilde{g}_*$ é injetor. ■

O resultado a seguir analisa $\tilde{g}_*$ para a família $\mathbb{Z}_{(0)}$.

Proposição 204. *Seja $n \neq 0$ e seja $\tilde{g} : ((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0) \rightarrow E(y_0, (nh) \circ k_3)$ dada por $\tilde{g}(x) = (x, y_0)$. Então $\tilde{g}_* : H_1(((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E(y_0, (nh) \circ k_3); \mathbb{Z})$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Consideremos o diagrama geométrico

$$\begin{array}{ccc} ((nh) \circ a_2)^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, (nh) \circ a_2) \\ p_{\mathbb{R}P(3)}| \downarrow & & p'_{\mathbb{R}P(3)} \downarrow \\ ((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0) & \xrightarrow{\tilde{g}} & E(y_0, (nh) \circ k_3) \end{array}$$

onde $\tilde{g} : x \mapsto (x, y_0)$ e $p'_{\mathbb{R}P(3)} : (x, \theta) \mapsto (p_{\mathbb{R}P(3)}(x), \theta)$. Seja $n \neq 0$. Como $MCC(y_0, (2n)h) = 1$, então, via bordismo, podemos identificar $((nh) \circ a_2)^{-1}(y_0)$ com S^1 . Agora, pela observação 195, podemos identificar $((nh) \circ k_3)^{-1}(y_0)$ com S^1 . Assim, obtemos o diagrama algébrico abaixo, induzido, do diagrama acima, no primeiro grupo de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \\ p_{\mathbb{R}P(3)}|_* \downarrow & & p'_{\mathbb{R}P(3)}_* \downarrow \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{g}_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Desde que, pela proposição 151, $\omega''((2n)[h]) = \pm(2n)$, então $\tilde{g}_* = \times(\pm(2n))$. Logo, por argumentos análogos às considerações acima, $(p'_{\mathbb{R}P(3)} \circ \tilde{g})_*$ é injetor. Logo, $\tilde{g}_*$ é injetor. ■

O próximo resultado utiliza os resultados anteriores para estudar o anulamento de $\tilde{\omega}(y_0, f)$.

Teorema 205. *Seja $f : \mathbb{R}P(3) \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua. Se $f \simeq h' \circ a'_{2n+1}$, então $\tilde{\omega}(y_0, f) \neq 0$. Se $f \simeq (nh) \circ k_3$, então $\tilde{\omega}(y_0, f) = 0$ se, e somente se, $n = 0$, isto é, $f \simeq y_0$.*

Demonstração. De fato, pela proposição 201, a menos de isomorfismo, temos que $\tilde{\omega}(y_0, f) = ([M, cte, \bar{g}], \tilde{g}_*([M]))$, onde $[M] \in H_1(M; \mathbb{Z})$ denota a

classe fundamental de M . Se $f \simeq h' \circ a'_{2n+1}$, então, pela proposição 203, $\tilde{g}_*$ é injetor, donde $\tilde{g}_*([M]) \neq 0$ e portanto $\tilde{\omega}(y_0, f) \neq 0$. Da mesma forma, se $f \simeq (nh) \circ k_3$, com $n \neq 0$, então, pela proposição 204, $\tilde{g}_*$ é injetor, donde $\tilde{g}_*([M]) \neq 0$ e portanto $\tilde{\omega}(y_0, f) \neq 0$. Finalmente, se $f \simeq (nh) \circ k_3$, com $n = 0$, então (y_0, f) é loose e portanto $\tilde{\omega}(y_0, f) = 0$. ■

Teorema 206. *Seja $f : \mathbb{R}P(3) \rightarrow S^2$ uma aplicação contínua. Então*

$$MCC(y_0, f) = \tilde{N}(y_0, f) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \simeq y_0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Com efeito, desde que o contradomínio de f é S^2 , então f é deformável a livre de raiz se, e só se, f é homotópica a aplicação constante. Em particular, se $f \not\simeq y_0$, segue que $MCC(y_0, f) \geq 1$ e, se $f \simeq y_0$, temos que $MCC(y_0, f) = 0 = \tilde{N}(y_0, f)$. Seja $f \not\simeq y_0$. Como, pelas observações 194 e 195, temos que $MCC(y_0, f) \leq 1$, então $MCC(y_0, f) = 1$. Finalmente, desde que $E(y_0, f)$ é conexo por caminhos, então, pelo teorema 205, $\tilde{N}(y_0, f) = 1$ e o resultado segue. ■

Referências Bibliográficas

- [AHi-72] J. F. Adams; P. J. Hilton. On the chain algebra of a loop space. *Comment. Math. Helv.* 30, 1956, 305-330.
- [BaBa-13] S. Basu; S. Basu. Homotopy groups and periodic geodesics of closed 4-manifolds. *arXiv:1303.3328v1*, 2013, 1-22.
- [Broo-72] R. B. S. Brooks. On removing coincidences of two maps when only one, rather than both, of them may be deformed by a homotopy. *Pacific J. Math.* (1) 40, 1972, 45-52.
- [Brow-71] R. F. Brown. The Lefschetz fixed point theorem. Scott, Foresman and Co., 1971.
- [Brow-93] R. F. Brown. Wecken properties for manifolds. *Contemp. Math.* 152, American Mathematical Society, 1993.
- [Brow-99] R. F. Brown. Fixed point theory. *History of topology*, North-Holland, 1999, 271-299.
- [DacRa-88] J. Daccach; D. Randall. Cobordismo normal e aplicações. Notas didáticas do ICMSC-USP, 1988.
- [Dax-72] J. P. Dax. Étude homotopique des espaces de plongements. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 5, 1972, 303-377.

- [DoGo-05] A. Dold; D. L. Gonçalves. Self-coincidence of fibre maps. *Osaka J. Math.* (2) 42, 2005, 291-307.
- [EE-69] C. J. Earle; J. Eells. A fibre bundle description of Teichmüller theory. *J. Differential Geometry* 3, 1969, 19-43.
- [FeOTa-08] Y. Félix; J. Oprea; D. Tanré. Algebraic models in geometry. *Oxf. Grad. Texts Math.* 17, Oxford Univ. Press, 2008.
- [FrPi-90] R. Fritsch; R. A. Piccinini. Cellular structures in topology. *Cambridge Stud. Adv. Math.* 19, Cambridge University Press, 1990.
- [Go-05] D. L. Gonçalves. Coincidence theory. *Handbook of topological fixed point theory*, Springer, 2005, 3-42.
- [GoWo-05] D. L. Gonçalves; P. Wong. Wecken property for roots. *Proc. Amer. Math. Soc.* (9) 133, 2005, 2779-2782.
- [GuPo-74] V. Guillemin; A. Pollack. Differential topology. Prentice-Hall, Inc., 1974.
- [HaQ-74] A. Hatcher; F. Quinn. Bordism invariants of intersections of submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* 200, 1974, 327-344.
- [Ha-02] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002.
- [Ha-04] A. Hatcher. The classification of 3-manifolds - a brief survey. www.math.cornell.edu/~hatcher/Papers/3Msurvey.pdf, 2004.
- [Ho-27] H. Hopf. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* (1) 96, 1927, 225-249.

- [Ho-29] H. Hopf. Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. *Math. Z. (1)* 29, 1929, 493-524.
- [Hu-94] D. Husemoller. Fibre bundles. Third edition. *Grad. Texts in Math.* 20, Springer, 1994.
- [JaWhj-54] I. M. James; J. H. C. Whitehead. The homotopy theory of sphere bundles over spheres. I. *Proc. London Math. Soc. (3)* 4, 1954, 196-218.
- [JaWhj-55] I. M. James; J. H. C. Whitehead. The homotopy theory of sphere bundles over spheres. II. *Proc. London Math. Soc. (3)* 5, 1955, 148-166.
- [Ji-83] B. J. Jiang. Lectures on Nielsen fixed point theory. *Contemp. Math.* 14, American Mathematical Society, 1983.
- [Ji-84] B. J. Jiang. Fixed points and braids. *Invent. Math. (1)* 75, 1984, 69-74.
- [Ji-85] B. J. Jiang. Fixed points and braids. II. *Math. Ann. (2)* 272, 1985, 249-256.
- [K-81] U. Koschorke. Vector fields and other vector bundle morphisms. A singularity approach. *Lecture Notes in Math.* 847, Springer, 1981.
- [K-04] U. Koschorke. Selfcoincidences in higher codimensions. *J. Reine Angew. Math.* 576, 2004, 1-10.
- [K-06] U. Koschorke. Nielsen coincidence theory in arbitrary codimensions. *J. Reine Angew. Math.* 598, 2006, 211-236.

- [K-062] U. Koschorke. Nonstabilized Nielsen coincidence invariants and Hopf-Ganea homomorphisms. *Geom. Topol.* 10, 2006, 619-666.
- [K-07] U. Koschorke. Selfcoincidences and roots in Nielsen theory. *J. Fixed Point Theory Appl.* (2) 2, 2007, 241-259.
- [K-08] U. Koschorke. Minimizing coincidence numbers of maps into projective spaces. *Geom. Topol. Monogr.* (2) 14, 2008, 373-391.
- [K-11] U. Koschorke. Minimum numbers and Wecken theorems in topological coincidence theory. I. *J. Fixed Point Theory Appl.* (1) 10, 2011, 3-36.
- [L-23] S. Lefschetz. Continuous transformations of manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (3) 9, 1923, 90-93.
- [L-25] S. Lefschetz. Intersections of complexes on manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (6) 11, 1925, 287-289.
- [L-26] S. Lefschetz. Intersections and transformations of complexes and manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1) 28, 1926, 1-49.
- [L-27] S. Lefschetz. Manifolds with a boundary and their transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* (2) 29, 1927, 429-462.
- [Ma-77] W. S. Massey. Algebraic topology. An introduction. *Grad. Texts in Math.* 56, Springer, 1977.
- [Mi-58] J. W. Milnor. Differential topology. Lectures by John Milnor, Princeton Univ. - Notes by James Munkres, 1958.
- [Mi-65] J. W. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. The University Press of Virginia, 1965.

- [MiSta-74] J. W. Milnor; J. D. Stasheff. Characteristic classes. *Ann. of Math. Stud.* 76, Princeton Univ. Press, 1974.
- [MuShi-99] J. Mukai; T. Shinpo. Some homotopy groups of the mod 4 Moore space. *J. Fac. Sci. Shinshu University (1)* 34, 1999, 1-14.
- [N-27] J. Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math. (1)* 50, 1927, 189-358.
- [P-77] D. S. Passman. The algebraic structure of group rings. *Pure Appl. Math.*, Wiley-Interscience, 1977.
- [Re-36] K. Reidemeister. Automorphismen von Homotopiekettenringen. *Math. Ann. (1)* 112, 1936, 586-593.
- [Sa-73] H. A. Salomonsen. Bordism and geometric dimension. *Math. Scand.* 32, 1973, 87-111.
- [Sc-55] H. Schirmer. Mindestzahlen von Koinzidenzpunkten. *J. Reine Angew. Math.* 194, 1955, 21-39.
- [Se-51] J. P. Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math. (2)* 54, 1951, 425-505.
- [Se-53] J. P. Serre. Groupes D'Homotopie Et Classes De Groupes Abéliens. *Ann. of Math. (2)* 58, 1953, 258-294.
- [Sha-11] A. R. Shastri. Elements of differential topology. CRC Press, 2011.
- [Sm-59] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* 10, 1959, 621-626.

- [Sp-66] E. H. Spanier. Algebraic topology. McGraw-Hill Book Co., 1966.
- [Sti-35] E. Stiefel. Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Comment. Math. Helv.* (1) 8, 1935, 305-353.
- [Tod-62] H. Toda. Composition methods in homotopy groups of spheres. *Ann. of Math. Stud.* 49, Princeton Univ. Press, 1962.
- [Tol-74] J. L. Tollefson. The compact 3-manifolds covered by $S^2 \times R^1$. *Proc. Amer. Math. Soc.* 45, 1974, 461-462.
- [V-94] J. W. Vick. Homology theory. An introduction to algebraic topology. Second edition. *Grad. Texts in Math.* 145, Springer, 1994.
- [Wa-65] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Ann. of Math.* (1) 81, 1965, 56-69.
- [We-41] F. Wecken. Fixpunktklassen. I. *Math. Ann.* 117, 1941, 659-671.
- [We-412] F. Wecken. Fixpunktklassen. II. Homotopieinvarianten der Fixpunkttheorie. *Math. Ann.* 118, 1941, 216-234.
- [We-42] F. Wecken. Fixpunktklassen. III. Mindestzahlen von Fixpunkten. *Math. Ann.* 118, 1942, 544-577.
- [Whg-78] G. W. Whitehead. Elements of homotopy theory. *Grad. Texts in Math.* 61, Springer, 1978.