Hipersuperfícies completas com curvatura de Gauss-Kronecker nula em esferas.

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Juan Fernando Zapata Zapata
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos - IME-USP.
- Prof. Dr. Luis Amancio de Sousa Jr.- UNIRIO.
- Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos- UFSCar.
- Prof. Dr. José António Moraes Vilhena - UFPR.

**Hipersuperfícies completas com curvatura de
Gauss-Kronecker nula em esferas.**

Juan Fernando Zapata Zapata

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e
CNPq

São Paulo, 07 de agosto de 2013

A mi familia:
Mamá, Papá,
Bibi, Andres y Simón.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Antonio Carlos Asperti pelos bons conselhos durante o desenvolvimento do trabalho. Ao grupo de imersões isométricas Kiko, Rosa, Alexandre, Barbara, José, Marcos e Eliane por me ouvir cada semana no seminário e fortalecer meus conhecimentos com suas dúvidas e sugestões. A minha família por acreditar em mim. Agradeço também a Amanda pelos momentos maravilhosos que passamos juntos e a Pricila por sua amizade incondicional. A CAPES e a CNPq pelo suporte financeiro e em geral a todos os funcionários, docentes, estudantes e companheiros do IME.

Resumo

Neste trabalho mostramos que hipersuperfícies completas da esfera Euclidiana S^4 , com curvatura média constante e curvatura de Gauss-Kronecker nula são mínimas, sempre que o quadrado da norma da segunda forma fundamental for limitado superiormente. Além disso apresentamos uma descrição local das hipersuperfícies mínimas e completas em S^5 com curvatura de Gauss-Kronecker nula e algumas hipóteses adicionais sobre as funções simétricas das curvaturas principais.

Palavras chaves: hipersuperfícies completas, hipersuperfícies mínimas, curvatura Gauss-Kronecker, curvatura média constante, espaços forma Riemannianos.

Abstract

In this work we show that a complete hypersurface of the unitary sphere S^4 , with constant mean curvature and zero Gauss-Kronecker curvature must be minimal, if the squared norm of the second fundamental form is bounded from above. Also, we present a local description for complete minimal hypersurfaces in S^5 with zero Gauss-Kronecker curvature, and some restrictions for the symmetric functions of the principal curvatures.

Key words: Complete hypersurfaces, minimal hypersurfaces, Gauss-Kronecker curvature, constant mean curvature, Riemannian space forms.

Índice

1. Introdução.	1
2. Preliminares.	5
2.1. O referencial móvel	5
2.2. Variedades Riemannianas completas e o princípio do máximo.	9
2.3. Geometria local das subvariedades	11
2.4. Superfícies imersas em S^5	14
2.5. hipersuperfícies isoparamétricas na esfera S^n	15
3. Hipersuperfícies com curvatura média constante em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$.	19
4. Hipersuperfícies com curvaturas média constante e Gauss-Kronecker nula em S^4.	29
5. Hipersuperfícies mínimas em S^5 com curvatura Gauss-Kronecker nula.	39
5.1. Exemplos de hipersuperfícies mínimas com curvatura Gauss-Kronecker nula em S^5	39
5.2. hipersuperfícies mínimas em S^5 com curvatura de Gauss-Kronecker nula.	44

Introdução.

Para situar o problema, vamos denotar com $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma $n+1$ -dimensional forma espacial Riemanniana, isto é, $\mathbb{Q}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$ se $c = 0$, $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$, ou $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ de curvatura seccional constante $c = -1$. Numa hipersuperfície de um espaço forma Riemanniano, a segunda forma fundamental está determinada em cada ponto por n funções contínuas ¹ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ chamadas de curvaturas principais. Neste caso, destacamos as seguintes funções (relacionadas com as funções simétricas das curvaturas principais.), chamadas de *r-curvatura média*

$$\sigma_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_r}.$$

Em particular, serão de fundamental interesse as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{Curvatura média} \quad h &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n\sigma_1, \\ \text{Curvatura de Gauss Kronecker} \quad K &= \sigma_n = \lambda_1 \dots \lambda_n, \\ \text{Curvatura escalar} \quad R &= \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j + n(n-1)c = \binom{n}{2} \sigma_2 + n(n-1)c. \end{aligned}$$

Temos também o quadrado da norma da segunda forma fundamental $S = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$ e se h é constante, então vale a relação

$$R = n(n-1)c + h^2 - S.$$

Uma hipersuperfície é dita isoparamétrica se as curvaturas principais são funções constantes. As hipersuperfícies isoparamétricas em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ ($c = 0$ e $c = -1$) foram classificadas por Cartan em [2]. Além disso, Cartan provou que o número de curvaturas principais distintas g de uma hipersuperfície isoparamétrica em $\mathbb{S}^{n+1}$ é 1, 2, 3, 4 ou 6 e classificou aquelas com $g \leq 3$.

¹Em geral não são diferenciáveis.

Para uma hipersuperfície em $\mathbb{Q}^4(c)$, o polinômio característico da segunda forma fundamental é dado por

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + h\lambda^2 - 3\sigma_2\lambda + K.$$

Claramente, se h , K e R são constantes, então a hipersuperfície é isoparamétrica.

É natural pensar o que acontece quando duas destas três funções são constantes. Nesta direção, Chern, do Carmo e Kobayashi provaram para o caso compacto em [5] que se a hipersuperfície é mínima ($h = 0$) e $0 \leq S \leq n$ é constante, então $S = 0$ ou $S = n$ e classificaram aquelas com $S = n$. Além disso, propõem a conhecida conjectura de Chern, enunciada a seguir:

Conjectura de Chern: Seja M^n , $n \geq 3$ uma hipersuperfície compacta de $\mathbb{S}^{n+1}$ mínima com curvatura escalar constante R e R_n o conjunto de possíveis valores para R . Então R_n é um conjunto discreto de números reais.

Em [6] de Almeida e Brito provam que hipersuperfícies compactas em $\mathbb{S}^4$ com curvaturas média e escalar constantes são isoparamétricas. Em particular se a hipersuperfície é mínima então $R_3 = \{0, 3, 6\}$, provando assim a conjectura de Chern em dimensão $n = 3$. Posteriormente, em [7] Almeida, Brito e Sousa, obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja M^3 uma hipersuperfície compacta de $\mathbb{S}^4$ e suponha que duas das três funções h , K e R são constantes. Então:*

- a. M^3 é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}^4$ ou
- b. $h = K = 0$.

As hipersuperfícies compactas em $\mathbb{S}^4$ com $h = K = 0$ foram classificadas por Ramanathan em [20]. Ele prova que a hipersuperfície é o bordo de um tubo de raio $\frac{\pi}{2}$ sobre uma superfície mínima em $\mathbb{S}^4$. Além disso, constrói exemplos não isoparamétricos desse tipo de subvariedades.

As variedades Riemannianas completas aparecem de maneira natural para estender resultados válidos em variedades Riemannianas compactas. Como mostra disto é o bem conhecido princípio do máximo para variedades compactas e generalizado para variedades completas por Yau em [23]. Na atualidade, o princípio do máximo generalizado é citado em inúmeros artigos e é uma ferramenta fundamental para o estudo de imersões isométricas em espaços forma Riemannianos.

Atualmente, tem havido interesse em estender o teorema 1 para hipersuperfícies completas. Inicialmente, Nomizu e Smyth em [14] e Qing-Ming Cheng em [4], estudaram as hipersuperfícies completas em $\mathbb{S}^4$ com h e R constantes. Cheng obteve o seguinte resultado:

Teorema 2 *Uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^4$ com curvatura média h e curvatura escalar R constantes é isoparamétrica se*

$$S < 3 + \frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{4}\sqrt{h^4 + 8h^2}.$$

E em [14] foi provado o seguinte teorema:

Teorema 3 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional não negativa e $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de curvatura média constante. Se R é constante então:*

- *$f(M)$ é uma grande ou pequena esfera em $\mathbb{S}^{n+1}$, e f é um mergulho, ou*
- *$f(M)$ é um produto de esferas $\mathbb{S}^p(r) \times \mathbb{S}^q(s)$, e para $p \neq 1, n-1$ f é um mergulho.*

Em particular, Se $h = 0$ então $f(M)$ é uma grande esfera ou $\mathbb{S}^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right) \times \mathbb{S}^q\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right)$

Mas recentemente, Hasanis, Savas e Vlachos provaram em [10] o seguinte teorema, que estende o resultado obtido por Ramanathan em [20].

Teorema 4 *Seja M^3 uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3 e $f : M^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$ uma imersão isométrica mínima com curvatura Gauss-Kronecker nula. Se o quadrado da norma da segunda forma fundamental S é limitado superiormente, então $f(M^3)$ é a imagem da aplicação polar associada com uma imersão supermínima $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^4$ com curvatura normal positiva. Ainda mais, se existe uma constante δ , tal que $0 < \delta \leq S$, então V é difeomorfo a esfera $\mathbb{S}^2$ ou ao plano projetivo real $\mathbb{RP}^2$.*

Além disso em [12] Tsasa Lusala constrói exemplos não isoparamétricos de hipersuperfícies mínimas e completas não compactas em $\mathbb{S}^4$ com curvatura Gauss-Kronecker nula.

Em [1], Asperti, Chaves e Sousa provam que, se M^3 é uma variedade Riemanniana completa e $f : M^3 \rightarrow \mathbb{S}^4$ é imersão isométrica mínima com curvatura Gauss-Kronecker constante não nula, então $f(M^3)$ é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Nesta tese, mais especificamente no capítulo 3, provamos o seguinte teorema:

Teorema 5 *Seja M^3 uma hipersuperfície completa de $\mathbb{S}^4$ com curvatura média constante e curvatura Gauss-Kronecker nula. Se $\sup S < \infty$, então M^3 é mínima.*

Em particular, provamos que o teorema 4 é valido, se a hipótese $h = 0$ é trocada por h constante.

O teorema 5 foi comunicado no caso compacto em [13], mas o reviewer aponto um erro na prova. Nossa prova, apresentada no capítulo 4 funciona também no caso compacto onde a hipótese sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental é satisfeita.

Alem disso, no capítulo 4, em trabalho conjunto com José Antonio Vilhena e Marcos Diniz, classificamos localmente as imersões isométricas mínimas com curvatura Gauss-Kronecker nula de variedades Riemannianas completas em $\mathbb{S}^5$ com hipóteses adicionais sobre as funções simétricas das curvaturas principais.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

2.1. O referencial móvel

Ao longo deste trabalho, todas as variedades serão assumidas diferenciáveis, conexas e sem bordo. Uma variedade Riemanniana é um par $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ¹ onde M^n é uma variedade diferenciável² de dimensão n e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica Riemanniana sobre M^n , isto é, para cada $p \in M^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é um produto interno definido positivo e para cada par de campos vetoriais X e Y a aplicação $p \mapsto \langle X, Y \rangle_p$ é diferenciável.

Dado $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ de p onde é possível definir campos de vetores suaves $e_1, \dots, e_n$ tais que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. O conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ será chamado de *referencial ortonormal local* ou *referencial móvel* em U . Denotaremos com $\omega_1, \dots, \omega_n$ as 1-formas em U duais a $e_1, \dots, e_n$, isto é, satisfazendo a relação $\omega_i(e_k) = \delta_{ik}$. O conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ é chamado de *coreferencial dual*.

Lembrando que se ω_i, ω_j são formas lineares num espaço vetorial V de dimensão n , então o produto exterior $\omega_i \wedge \omega_j$ é a forma bilinear alternada definida pela equação:

$$\omega_i \wedge \omega_j(u, v) := \omega_i(u)\omega_j(v) - \omega_i(v)\omega_j(u).$$

Além disto, se $\omega_1, \dots, \omega_n$ é uma base para o espaço das 1-formas lineares, então $\{\omega_i \wedge \omega_j\}_{i < j}$ é uma base para o espaço das formas bilineares alternadas e temos também o conhecido lema de Cartan:

Lema 2.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $\omega_1, \dots, \omega_r$, $r \leq n$, formas lineares sobre V*

¹Omitiremos ao longo do texto o par e dizemos simplesmente que M^n é uma variedade Riemanniana.

²Ao longo deste trabalho diferenciável sempre significa de classe C^∞ .

linearmente independentes. Suponha que existem formas lineares $\theta_1, \dots, \theta_r$ tais que

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então $\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j$ onde $a_{ij} = a_{ji}$.

Teorema 2.2 Seja M^n uma variedade Riemanniana, $e_1, \dots, e_n$ um referencial ortonormal local definido em um aberto $U \subset M^n$ e $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ seu coreferencial dual. então existe um único conjunto de 1-formas $\{\omega_{ij}\}$ $i, j = 1, \dots, n$ tais que

$$d\omega_i = - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \quad e \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (2.1)$$

As formas $\{\omega_{ij}\}$ dadas pelo teorema anterior são chamadas de *formas de conexão* de M^n no referencial $e_1, \dots, e_n$, com elas podemos definir sobre M^n a noção de derivada para campos vetoriais e a curvatura Riemanniana como segue:

Se X e Y são campos de vetores diferenciáveis em M^n , existem funções diferenciáveis y_i definidas em U tais que $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, se definimos $\nabla_X Y$ por

$$\nabla_X Y := \sum_{i=1}^n [dy_i(X) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(X) y_j] e_i \quad (2.2)$$

prova-se (Vide [17]) que o valor de $\nabla_X Y$ não depende da escolha do referencial em U e portanto, esta definição pode ser estendida a todo M^n .

As *formas de curvatura* de M^n , Ω_{ij} , são definidas pela equação

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad (2.3)$$

assim, para cada $p \in M^n$ e cada par de campos vetoriais X e Y , a matriz $(\Omega_{ij}(X, Y)_p)$ define uma aplicação linear

$$R_{XY} : T_p M \longrightarrow T_p M$$

chamada de *operador de curvatura*. Além disso, existem funções diferenciáveis R_{ijkl} tais que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l = \sum_{k < l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l. \quad (2.4)$$

As funções R_{ijkl} são chamadas de *componentes do tensor de curvatura* e satisfazem

$$R_{ijkl} = \Omega_{ij}(e_k, e_l) = \langle R_{e_i e_j}(e_k), e_l \rangle = \langle R_{e_k e_l}(e_i), e_j \rangle.$$

A partir das formas de curvatura é possível introduzir outros conceitos como curvatura seccional, curvatura escalar e curvatura de Ricci definidas a seguir:

Dada uma variedade Riemanniana M^n , $p \in M^n$ e E um plano de dimensão dois em $T_p M$ com base ortonormal $\{u, v\}$, é definida a *curvatura seccional* $K_p(E)$, de M^n em p em relação ao plano E mediante a relação

$$K_p(E) = \langle R_{uv}u, v \rangle_p. \quad (2.5)$$

$K_p(E)$ não depende da escolha da base em E e é igual a curvatura Gaussiana da superfície $\text{Exp}_p(B)$ onde B é um disco com centro na origem em E .

A *curvatura de Ricci* de M^n é o tensor simétrico de ordem dois

$$\text{Ric}(\cdot, \cdot) = \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \omega_i \otimes \omega_j \quad (2.6)$$

determinado pelos coeficientes r_{ij} definidos por

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikjk}.$$

A *curvatura escalar*, R , de M^n é o traço da curvatura de Ricci, isto é:

$$R = \sum_{i=1}^n r_{ii}. \quad (2.7)$$

Dizemos que uma variedade Riemanniana tem *curvatura seccional constante* c , se para todo $p \in M^n$, $K_p(E) = c$ para qualquer plano $E \subset T_p M$. Pode-se provar [8, página 31] que M^n tem curvatura seccional constante c se, e somente se

$$\Omega_{ij} = c \omega_i \wedge \omega_j.$$

Portanto neste caso, as componentes do tensor de curvatura, do tensor de Ricci e a curvatura escalar são dadas respectivamente pelas equações:

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \quad r_{ij} = c(n-1)\delta_{ij} \quad \text{e} \quad R = n(n-1)c.$$

A conexão ∇ definida sobre TM pela equação (2.2) permite induzir sobre TM^* uma única conexão ∇^* ³ tal que

$$(\nabla_X^* \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y). \quad (2.8)$$

No referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \nabla e_i &= \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes e_j, \\ \nabla \omega_i &= \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \otimes \omega_j \end{aligned}$$

³Por abuso de notação usaremos ∇

e a equação de compatibilidade (2.8), implica

$$\tau_{ij} = \omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

decorre daí que

$$\nabla \omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes \omega_j.$$

Agora, se $f : U \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e

$$df = \nabla f = \sum_{i=1}^n f_i \omega_i, \quad (2.9)$$

então $\nabla(df)$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\{\omega_i \otimes \omega_j\}$, isto é:

$$\nabla(df) = \sum_{i=1}^n f_{ij} \omega_i \otimes \omega_j. \quad (2.10)$$

Por outro lado, fazendo a derivada covariante em (2.9) e usando a regra do produto segue-se

$$\begin{aligned} \nabla(df) &= \sum_{i=1}^n df_i \otimes \omega_i + f_i \nabla \omega_i, \\ &= \sum_{i=1}^n df_i \otimes \omega_i + \sum_{i,j=1}^n f_i \omega_{ij} \otimes \omega_j, \\ &= \sum_{i=1}^n df_i \otimes \omega_i + \sum_{i,k=1}^n f_k \omega_{ki} \otimes \omega_i. \end{aligned}$$

Comparando esta última expressão com (2.10) temos

$$\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \omega_i \otimes \omega_j = \sum_{i=1}^n df_i \otimes \omega_i + \sum_{i,k=1}^n f_k \omega_{ki} \otimes \omega_i,$$

ou de maneira equivalente

$$\sum_{j=1}^n f_{ij} \omega_j = df_i - \sum_{j=1}^n f_j \omega_{ij}. \quad (2.11)$$

Ainda mais, derivando exteriormente a equação (2.9) e usando as equações de estrutura

$$\begin{aligned} 0 = d^2 f &= \sum_{i=1}^n df_i \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^n f_i \wedge d\omega_i, \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f_{ij} \omega_j - f_j \omega_{ji} \right) \wedge \omega_i - \sum_{i,j=1}^n f_i \omega_{ij} \wedge \omega_j, \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \omega_i \wedge \omega_j, \end{aligned}$$

isto implica que $f_{ij} = f_{ji}$, ou de maneira equivalente, o operador $\text{Hess} f := \nabla(df)$ é simétrico. Podemos então definir o *laplaciano* de f como o traço de $\text{Hess} f$, isto é,

$$\Delta f := \text{Tr}(\text{Hess} f) = \sum_{i=1}^n f_{ii}.$$

De maneira análoga, se

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \omega_i \otimes \omega_j,$$

então $\nabla g = \sum_{i,j,k=1}^n g_{ijk} \omega_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k$, onde $\nabla_{e_k} g = \sum_{i,j=1}^n g_{ijk} \omega_i \otimes \omega_j$ e dado que

$$\nabla g = \sum_{i,j=1}^n dg_{ij} \omega_i \otimes \omega_j + g_{ij} \nabla \omega_i \otimes \omega_j + g_{ij} \omega_i \otimes \nabla \omega_j,$$

decorre de

$$\nabla \omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \otimes \omega_j$$

que

$$\sum_{k=1}^n g_{ijk} \omega_k = dg_{ij} + \sum_{k=1}^n g_{jk} \omega_{ik} + \sum_{k=1}^n g_{ik} \omega_{jk}. \quad (2.12)$$

∇g é chamada de *derivada covariante* de g , e os coeficientes g_{ijk} *componentes* da derivada covariante. Continuando com este processo, podemos considerar a *segunda derivada covariante* de g denotada com $\nabla^2 g$ e componentes g_{ijkl} satisfazendo a relação

$$\sum_{l=1}^n g_{ijkl} \omega_l = dg_{ijk} + \sum_{l=1}^n g_{ljk} \omega_{il} + \sum_{l=1}^n g_{ilk} \omega_{jl} + \sum_{l=1}^n g_{ijl} \omega_{kl}. \quad (2.13)$$

2.2. Variedades Riemannianas completas e o princípio do máximo.

Dados dois pontos p e q numa variedade Riemanniana M^n , pode-se definir a função distância $d(p, q)$ como o ínfimo de $L(\gamma)$, onde $\gamma : [a, b] \rightarrow M^n$ é uma curva diferenciável unindo p com q e $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds$ é o comprimento de γ . Se $(M^n, d(\cdot, \cdot))$ é um espaço métrico completo, então dizemos que M^n é uma variedade Riemanniana *completa*.

Segundo o Teorema de Hopf-Rinow, se M^n é uma variedade Riemanniana completa então as geodésicas em M^n podem ser definidas em todo $\mathbb{R}$, ainda mais, se $p, q \in M^n$ são distintos, existe pelo menos uma geodésica γ unindo p e q , tal que $L(\gamma) = d(p, q)$.

Como é sabido, toda variedade Riemanniana compacta é completa mas a recíproca em geral não é verdadeira. O conhecido teorema de Bonnet-Myers que enunciamos a seguir, fornece condições suficientes sobre M^n para garantir a compacidade.

Teorema 2.3 (Teorema Bonnet-Myers) *Se M^n é uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva, então M^n é compacta.*

Em particular, se M^2 é uma superfície completa com curvatura Gaussiana K satisfazendo $K \geq \delta > 0$ para alguma constante δ , então M^2 é compacta.

A hipótese de completude, aparece de maneira natural na teoria de subvariedades para estender resultados válidos em variedades compactas a variedades completas. Por exemplo, é bem conhecido que se M^n é uma variedade Riemanniana compacta e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então existe $p \in M^n$ tal que

$$f(p) = \sup f, \quad \text{grad} f_p = 0 \quad \text{e} \quad \text{Hess} f_p(X, X) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad X \in T_p M^n. \quad (2.14)$$

A propriedade acima é conhecida como o *princípio do máximo*. Uma aplicação clássica deste resultado é que toda superfície compacta do $\mathbb{R}^3$ possui um ponto *elíptico*, isto é um ponto onde a curvatura Gaussiana é positiva, e portanto não existem superfícies mínimas compactas em $\mathbb{R}^3$.

Em geral, como foi introduzido por Pingola, Rigoli e Setti em [19], uma variedade Riemanniana M^n satisfaz o *princípio do máximo de Omori-Yau* se, para toda função $f \in \mathcal{C}^2(M^n)$, limitada superiormente, existe uma sequência de pontos $\{p_k\} \subset M^n$ tal que

$$f(p_k) > \sup f - \frac{1}{k}, \quad \|\text{grad} f(p_k)\| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \Delta f(p_k) < \frac{1}{k}. \quad (2.15)$$

Claramente, quando M^n não é compacta (mesmo sendo completa) nem sempre é possível, para uma função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ limitada superiormente, encontrar uma sequência p_k satisfazendo (2.15). Porém, como mostra o seguinte teorema devido a Omori [15], se M^n é completa, impondo certas condições sobre a curvatura é possível garantir que o princípio do máximo de Omori-Yau seja satisfeito.

Teorema 2.4 (Princípio do máximo de Omori) *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente. Então para toda função $f \in \mathcal{C}^2(M^n)$, limitada superiormente, existe uma sequência de pontos $\{p_k\} \subset M^n$ tal que*

$$f(p_k) > \sup f - \frac{1}{k}, \quad \|\text{grad} f(p_k)\| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \text{Hess} f(p_k)(\cdot, \cdot) < \frac{1}{k} \langle \cdot, \cdot \rangle. \quad (2.16)$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \lim_k f(p_k) &= \sup f, \quad \lim_k \|\text{grad} f(p_k)\| = 0, \quad \limsup_k \max\{\text{Hess} f(p_k)(X, X) : \|X\| = 1\} \leq 0, \\ &\limsup \Delta f(p_k) \leq 0 \quad \text{e} \quad \limsup_k f_{ii}(p_k) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como uma aplicação deste resultado, Omori prova em [15] que se M^n satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau então não existe uma imersão isométrica mínima de M^n em nenhum cone não degenerado de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Para garantir que o princípio do máximo de Omori-Yau seja satisfeito, outras condições podem ser impostas sobre a geometria da variedade. Por exemplo em [23] Yau prova que o princípio do máximo de Omori-Yau é válido para qualquer variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Mais recentemente, Pingola, Rigola e Setti provaram em [18] que o princípio do máximo de Omori-Yau vale para uma subclasse das variedades completas denominadas variedades estocasticamente completas.

2.3. Geometria local das subvariedades

Considere $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ uma variedade Riemanniana, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante c ou, equivalentemente, um espaço forma Riemanniano. Embora todos os resultados aqui apresentados serem válidos para qualquer valor de c , nos argumentos e provas usaremos que $c = 0$ ou $c = \pm 1$; isto é, $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n+k}(1)$ se $c = 1$, $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+k}$ de dimensão $n + k$ se $c = 0$ e $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+k}$ de curvatura seccional constante -1 .

Dada $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+k}(c)$, uma imersão isométrica⁴ de codimensão k , existem três invariantes locais associados à imersão, a saber, a primeira forma fundamental, a segunda forma fundamental e a conexão normal. Estes três invariantes são expressos pelas equações de Gauss, Codazzi e Ricci respectivamente, que determinam a imersão, salvo isometrias.

Seja M^n uma subvariedade imersa em $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$. Denote com $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita associada a $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$, $T_p M^\perp$ o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \mathbb{Q}^{n+k}(c)$ e com $\mathcal{V}(M^n)$ o fibrado normal de M^n em $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$. A *primeira forma fundamental*, I de M^n é a métrica induzida f^*g , ou de maneira equivalente, o produto interno sobre $T_p M^n$ é a restrição do produto interno g_p de $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ sobre $T_p M^n$. Se $\nu \in \mathcal{V}(M^n)$, o *operador de Weingarten* na direção normal ν é definido como a projeção de $\bar{\nabla}_X \nu$ sobre TM^n , isto é

$$\begin{aligned} A^\nu : TM^n &\rightarrow TM^n \\ X &\mapsto -(\bar{\nabla}_X \nu)^\top. \end{aligned}$$

O operador de Weingarten determina um operador linear autoadjunto. Definimos então a *segunda forma fundamental*, que será denotada com B , por meio da equação

$$\langle B(u, v), \nu \rangle = \langle A^\nu(u), v \rangle.$$

⁴Por abuso de notação omitimos a função f e dizemos que M^n é uma subvariedade imersa ou simplesmente subvariedade de $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$

O terceiro invariante da imersão é a conexão normal $\nabla^\perp$ sobre $\mathcal{V}(M^n)$, dada pela projeção ortogonal de $\bar{\nabla}_u v$ sobre $\mathcal{V}(M^n)$, ou

$$\nabla_u^\perp v = (\bar{\nabla}_u v)^\perp.$$

O objetivo a seguir, será descrever estes três invariantes em termos de referenciais móveis. Um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n+k}\}$ em $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ é dito adaptado à imersão se, quando restritos à M^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ são tangentes à M^n . A partir de agora usaremos a seguinte convenção para os índices:

$$A, B, C, D \dots = 1, 2, 3, \dots, n+1 \quad , \quad i, j, k, l \dots = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = n+1, \dots, n+k.$$

Se $\{\omega_1, \dots, \omega_{n+k}\}$ é o coreferencial associado em $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$, então a primeira forma fundamental sobre M^n é dada por

$$I = \sum_i \omega_i \otimes \omega_i$$

e as equações de estrutura de $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ são

$$\begin{aligned} d\omega_A &= - \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0 \\ d\omega_{AB} &= - \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Theta_{AB}, \quad \Theta_{AB} = \frac{1}{2} \sum_{CD} R'_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D \\ R'_{ABCD} &= c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}), \end{aligned}$$

onde ω_{AB} e Θ_{AB} , são a conexão de Levi-Civita e o tensor de curvatura Riemanniana respectivamente.

Restringindo⁵, ω_α à M^n temos que $\omega_\alpha = 0$, logo

$$\begin{aligned} d\omega_i &= - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j \quad , \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \\ d\omega_\alpha &= - \sum_j \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i = 0, \end{aligned}$$

isto garante que as 1-formas de conexão $\{\omega_{ij}\}$ são a conexão de Levi-Civita da métrica induzida sobre M^n , além disto, pelo lema de Cartan 2.1 existem funções diferenciáveis h_{ij}^α tais que

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j \quad \text{e} \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \quad (2.18)$$

A segunda forma fundamental de M^n é

⁵De maneira rigorosa restringindo significa considerar $f^* \omega_\alpha$, o pullback de ω_α pela imersão f

$$B = \sum_{ij\alpha} h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha.$$

Por outro lado, restringindo as equações de curvatura de $\mathbb{Q}^{n+k}(c)$ temos

$$d\omega_{ij} = - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \Theta_{ij}, \quad (2.19)$$

$$d\omega_{i\alpha} = - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k\alpha} - \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \Theta_{i\alpha}, \quad (2.20)$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = - \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} - \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Theta_{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

As equações (2.19) e (2.21), implicam que o tensor de curvatura Riemanniana Ω na métrica induzida e a curvatura na conexão normal $\nabla^\perp$ são

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= - \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \Theta_{ij} \\ \Omega_{\alpha\beta}^\nu &= - \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} + \Theta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Decorre daí que

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= - \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + c\omega_i \otimes \omega_j \\ \Omega_{\alpha\beta}^\nu &= - \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta}, \end{aligned}$$

portanto, segue-se de $\Omega_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{\alpha\beta ij}^\nu \omega_i \wedge \omega_j$ e $\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j$ que as equações de Gauss e Ricci são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) + c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \\ R_{\alpha\beta kl}^\nu &= \sum_i (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\beta - h_{il}^\alpha h_{jk}^\beta). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como foi visto em (2.12) a derivada covariante da segunda forma fundamental B^ν tem coeficientes h_{ijk}^α tais que

$$\sum_k h_{ijk}^\alpha \omega_k = dh_{ij}^\alpha + \sum_k h_{jk}^\alpha \omega_{ik} + \sum_k h_{ik}^\alpha \omega_{jk} + \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_{\beta\alpha}.$$

Por outro lado, derivando exteriormente (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
 d\omega_{i\alpha} &= d \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \\
 &= \sum_j dh_{ij}^\alpha \omega_j + \sum_{jk} h_{ij}^\alpha \omega_j \wedge \omega_k, \\
 &= \sum_{jk} h_{jk}^\alpha \omega_{ij} \wedge \omega_k + \sum_{\beta j} h_{ij}^\beta \omega_j \wedge \omega_{\beta\alpha}, \\
 &= \sum_j \left(\sum_k h_{jk}^\alpha \omega_{ik} - \sum_\beta h_{ij}^\beta \omega_{\beta\alpha} \right) \wedge \omega_j.
 \end{aligned}$$

Igualando esta última equação com (2.20) temos

$$\sum_{jk} h_{ijk}^\alpha \omega_j \wedge \omega_k = 0,$$

isto é,

$$h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha = h_{jki}^\alpha.$$

Esta simetria entre os coeficientes h_{ijk}^α é conhecida como a equação de Codazzi.

As *curvaturas principais* de uma subvariedade imersa M^n ao longo do vetor normal ν são os autovalores do operador de Weingarten A^ν . O vetor *curvatura média* H de M^n em $Q^{n+k}(c)$ é o traço da segunda forma fundamental, isto é,

$$H = \sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha \right) e_\alpha.$$

Uma imersão isométrica é dita *mínima* se, e somente se, $H = 0$.

2.4. Superfícies imersas em S^5

Uma classe particular de subvariedades será de fundamental interesse no capítulo 4, a saber: superfícies em S^5 ou de maneira equivalente, imersões isométricas de variedades de dimensão dois na esfera Euclidiana $S^5 \subset \mathbb{R}^6$. Nesste caso, obtemos que a *curvatura Gaussiana* de M^2 é dada por

$$K = \Omega_{12}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = d\omega_{12}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 + \sum_\alpha \begin{vmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha \\ h_{21}^\alpha & h_{22}^\alpha \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

A *curvatura escalar normal* da imersão, K_N , é a norma da curvatura normal,

$$K_N = \sum_{i,j,\alpha,\beta} (R_{\alpha\beta ij})^2, \quad \text{onde} \quad R_{\alpha\beta ij} = \sum_k \begin{vmatrix} h_{ki}^\alpha & h_{kj}^\alpha \\ h_{ki}^\beta & h_{kj}^\beta \end{vmatrix}. \quad (2.24)$$

Seja S o quadrado da norma da segunda forma fundamental, isto é

$$S = \sum (h_{ij}^\alpha)^2.$$

É importante observar que se M^2 é mínima, então

$$K = 1 - \sum_{\alpha} \left[(h_{11}^\alpha)^2 + (h_{12}^\alpha)^2 \right], \quad \text{e} \quad K_N = 8 \sum (h_{11}^\alpha h_{12}^\beta - h_{12}^\alpha h_{11}^\beta)^2$$

ou de maneira equivalente,

$$K = 1 - \frac{1}{2}S, \quad \text{e} \quad K_N = 4 \left[(R_{3412})^2 + (R_{3512})^2 + (R_{4512})^2 \right]. \quad (2.25)$$

A *elipse de curvatura* $\mathcal{E}_p$ associada da imersão M^2 no ponto p é a imagem do círculo unitário pela segunda forma fundamental B em p :

$$\mathcal{E}_p = \{B_p(X, X) \in (T_p M^2)^\perp : X \in T_p M^2, \|X\| = 1\}.$$

Se $X = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$, é fácil ver que

$$B_p(X, X) = \mathbf{H}_p + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{h_{11}^3 - h_{22}^3}{2} & h_{12}^3 \\ \frac{h_{11}^4 - h_{22}^4}{2} & h_{12}^4 \\ \frac{h_{11}^5 - h_{22}^5}{2} & h_{12}^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

em particular, se M^2 é mínima, então

$$B_p(X, X) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{11}^4 & h_{12}^4 \\ h_{11}^5 & h_{12}^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Note que $K_N \neq 0$ se, e somente, se o posto da matriz $\begin{pmatrix} h_{1j}^\alpha \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ em (2.27) é dois e $B_p(T_p M)$ tem dimensão dois.

A superfície M^2 é *supermínima* se adicionalmente a elipse de curvatura é sempre um círculo. Isto é equivalente a

$$\|B_{11}\| = \|B_{12}\| \quad \text{e} \quad \langle B_{11}, B_{12} \rangle = 0, \quad \text{onde} \quad B_{ij} := B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (2.28)$$

2.5. hipersuperfícies isoparamétricas na esfera $\mathbb{S}^n$.

De agora em diante, imersões isométricas de codimensão um serão chamadas de *hipersuperfícies*. Uma hipersuperfície é dita *isoparamétrica* se as curvaturas principais são constantes. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície isoparamétrica com $g \leq n$ curvaturas principais

distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ de multiplicidades $m_1, \dots, m_g$ respectivamente. Se $g \leq n$ Cartan provou em [2] que para cada $i, 1 \leq i \leq g$

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0. \quad (2.29)$$

Esta importante equação, conhecida como a identidade de Cartan, é fundamental no estudo das hipersuperfícies isoparamétricas em espaços forma. Como exemplo, usando a identidade de Cartan, é possível classificar este tipo de hipersuperfícies se $c \leq 0$, como é mostrado a seguir:

No caso $c = 0$, se $g = 1$ então a hipersuperfície é totalmente umbílica e $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano ou uma esfera de dimensão n , $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se $g \geq 2$, é possível escolher um campo normal unitário tal que pelo menos uma das curvaturas principais é positiva. Escolhendo λ_i como sendo a menor das curvaturas principais positivas, obtemos que cada termo $\frac{\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ em (2.29) é não positivo e portanto a existem no máximo duas curvaturas principais distintas e uma delas é zero, então $g = 2$ e $f(M^n)$ é um cilindro sobre uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para o caso $c = -1$, se $g = 1$, então M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica e portanto $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano totalmente geodésico, uma hipersuperfície equidistante, uma horoesfera ou uma hiperesfera em $\mathbb{H}^{n+1}$. Se $g \geq 2$, de novo podemos afirmar que existe pelo menos uma curvatura principal positiva, e podemos escolher λ_i de maneira que nenhuma curvatura principal está entre $\frac{1}{\lambda_i}$ e λ_i . Assim, cada termo $\frac{-1 + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$ em (2.29) é negativo e $\frac{1}{\lambda_j} = \lambda_i$, portanto existem no máximo duas curvaturas principais distintas e como foi provado em [21], $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{S}^k \times \mathbb{H}^{n-k}$.

Para hipersuperfícies na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ (caso $c = 1$), a identidade de Cartan, não fornece muitas restrições sobre o número de curvaturas principais distintas. Cartan deu exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas com $g = 1, 2, 3$ e 4 , ainda mais, classificou as hipersuperfícies isoparamétricas com $g \leq 3$ como se segue:

Se $g = 1$, a hipersuperfície é totalmente umbílica e $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de uma hiperesfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Se $g = 2$, então M^n é o produto usual de duas esferas

$$\mathbb{S}^p(r) \times \mathbb{S}^q(s) \subset \mathbb{S}^{n+1},$$

onde $n = p + q$ e $s^2 + r^2 = 1$. No caso $g = 3$, Cartan [3] prova que todas as curvaturas principais distintas tem a mesma multiplicidade $m = 1, 2, 4$ ou 8 e $f(M^n)$ é um tubo de raio constante sobre o mergulho do plano projetivo $\mathbb{FP}^2$ em $\mathbb{S}^{3m+1}$, onde $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ (quatérnios), O (números de Cayley) para $m = 1, 2, 4, 8$ respectivamente.

Nosso objeto principal de estudo no capítulo 3 serão as hipersuperfícies em $\mathbb{S}^4$. Neste caso particular, as hipersuperfícies isoparamétricas ficam completamente classificadas pelo número de curvaturas principais diferentes, a saber:

- Se $g = 1$, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto da esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^4$.
- Se $g = 2$, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto do toro de Clifford $\mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \mathbb{S}^2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.
- Se $g = 3$, então $f(M^3)$ é um subconjunto aberto do tubo sobre a superfície de Veronesse em $\mathbb{S}^4$, obtido da seguinte maneira:

Primeiro, considere a imersão mínima $\Psi : \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{S}^4$ dada por

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(xy, xz, yz, \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 + y^2 - 2z^2) \right).$$

Isto define um mergulho do plano projetivo real em $\mathbb{S}^4$ chamado superfície de Veronesse. Seja $N(\Sigma)$ o fibrado normal unitário da superfície de Veronesse Σ (ou como foi dito acima o tubo sobre a superfície de Veronesse), isto é:

$$N(\Sigma) = \{(x, v) \in \Sigma \times \mathbb{S}^4 : v \perp T_x \Sigma, v \perp x \text{ e } \|v\| = 1\}.$$

Agora considere a aplicação polar

$$\begin{aligned} \Phi : N(\Sigma) &\rightarrow \mathbb{S}^4 \\ (x, v) &\mapsto v. \end{aligned}$$

Φ assim definida determina uma imersão isométrica cujas curvaturas principais são $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$

CAPÍTULO 2

Hipersuperfícies com curvatura média constante em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$.

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades locais das hipersuperfícies com curvatura média constante em espaços forma Riemannianos. Considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ de campos em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ adaptado a métrica Riemanniana de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ e o co-referencial $\{\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$, de tal maneira que $\{e_1, \dots, e_n\}$ sejam campos tangentes a M^n .

Como já vimos, as formas de conexão ω_{AB} de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ são determinadas pelas equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\omega_A &= - \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \\ d\omega_{AB} &= - \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Omega_{AB}, \quad \Omega_{AB} = \frac{1}{2} \sum_{CD} R'_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \\ R'_{ABCD} &= c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}), \end{aligned}$$

onde Ω_{AB} (resp. R'_{ABCD}) denota a forma de curvatura Riemanniana (resp. as componentes do tensor de curvatura Riemanniano) de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Portanto, as componentes do tensor de Ricci e da curvatura escalar são dadas respectivamente por:

$$R'_{AB} = cn\delta_{AB} \quad \text{e} \quad R' = n(n+1)c.$$

Pelo visto no capítulo 1, podemos denotar as formas canônicas $\{\omega_A\}$ e as formas de conexão $\{\omega_{AB}\}$ restritas à M^n com os mesmos símbolos, assim temos $\omega_{n+1} = 0$ e das equações de estrutura segue-se

$$d\omega_{n+1} = - \sum_B \omega_{n+1} \wedge \omega_B = 0.$$

Portanto, usando o lema de Cartan 2.1 obtemos funções diferenciáveis h_{ij} tais que

$$\omega_{n+1,i} = \sum_j h_{ij} \omega_j \quad \text{e} \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

A segunda forma fundamental B , a curvatura média h e o quadrado da norma da segunda forma fundamental S da hipersuperfície são dados respectivamente por:

$$B = \sum_{ij} h_{ij} \omega_i \otimes \omega_j, \quad h = \sum_i h_{ii} \quad \text{e} \quad S = \sum_{ij} h_{ij}^2.$$

As equações de estrutura de M^n são dadas por

$$\begin{aligned} d\omega_i &= - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \\ d\omega_{ij} &= - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \quad \text{e} \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{kl} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned}$$

onde Ω_{ij} (resp. R_{ijkl}) denota a forma de curvatura (resp. as componentes do tensor de curvatura) de M^n . Neste caso particular a equação de Gauss é dada pela relação

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}. \quad (3.1)$$

A derivada covariante ∇B da segunda forma fundamental da hipersuperfície M^n tem componentes h_{ijk} determinadas pela equação

$$\sum_k h_{ijk} \omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{jk} \omega_{ik} + \sum_k h_{ik} \omega_{jk}. \quad (3.2)$$

Derivando exteriormente $\omega_{n+1,i} = \sum_j h_{ij} \omega_j$ e das equações de estrutura obtemos

$$\sum_{jk} h_{ijk} \omega_j \wedge \omega_k = 0,$$

portanto

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \quad (3.3)$$

conhecida também como a *equação de Codazzi*.

Analogamente são obtidas a derivada covariante $\nabla^2 B$ de ∇B com componentes h_{ijkl} definidas pela equação:

$$\sum_l h_{ijkl} \omega_l = dh_{ijk} + \sum_l h_{ljk} \omega_{il} + \sum_l h_{ilk} \omega_{jl} + \sum_l h_{ijl} \omega_{kl}, \quad (3.4)$$

e a *equação de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{im} R_{mjkl} + \sum_m h_{jm} R_{mikl}. \quad (3.5)$$

Com tudo isto, as componentes da curvatura de Ricci, Ric , e a curvatura escalar, R , de M^n são dadas respectivamente pelas equações:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= c(n-1)\delta_{ij} + h h_{ij} - \sum_k h_{ik} h_{kj} \quad \text{e} \\ R &= n(n-1)c + h^2 - S. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para qualquer ponto $p \in M^3$ podemos escolher um referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de campos tais que no ponto p

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

Então a equação de Ricci (3.5) neste ponto, fica da forma:

$$h_{ijij} = h_{jiji} + (\lambda_i - \lambda_j)(c + \lambda_i \lambda_j). \quad (3.8)$$

Lema 3.1 *Seja M^n uma hipersuperfície com curvatura média constante num espaço forma Riemanniano $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Então para todo $l \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\sum_i h_{iil} = 0 \quad e \quad \sum_i h_{iill} = 0.$$

Demonstração.

Seja $p \in M^n$ um ponto qualquer e escolha um referencial ortonormal local $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ como em (3.7). Para fixar notação e evitar confusão, vamos denotar com $h_{ij,l}$ (resp. $h_{ijl,l}$) a derivada da função h_{ij} (resp. h_{ijl}) na direção l , isto é $h_{ij,l} := dh_{ij}(\mathbf{e}_l)$ (resp. $h_{ijl,l} := dh_{ijl}(\mathbf{e}_l)$). Logo de (3.2) e (3.4) obtemos:

$$\begin{aligned} h_{ij,l} &= h_{ijl} - \sum_m h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_m h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l) \quad e \\ h_{ijl,l} &= h_{ijll} - \sum_m h_{mjll} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_m h_{imll} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l) - \sum_m h_{ijlm} \omega_{lm}(\mathbf{e}_l). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por outro lado, como $h = \sum_i h_{ii}$ é constante então $\sum_i h_{ii,l} = 0$ e substituindo em (3.9), para o caso $i = j$, temos:

$$\sum_i h_{iil} - 2 \sum_{im} h_{im} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) = 0, \quad (3.10)$$

logo, como no ponto $p \in M^n$

$$\sum_{im} h_{im} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) = \sum_i \lambda_i \omega_{ii}(\mathbf{e}_l) = 0,$$

então neste ponto

$$\sum_i h_{iil} = 0, \quad (3.11)$$

obtendo assim a primeira equação desejada. Derivando a equação (3.10) na direção l

$$\sum_i h_{iil,l} - 2 \sum_{im} h_{im,l} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - 2 \sum_{im} h_{im} [\omega_{im}(\mathbf{e}_l)]_l = 0.$$

Analisando cada somatória nesta equação separadamente, segue-se de (3.9) que

$$\begin{aligned} \sum_i h_{iil,l} &= \sum_i h_{iill} - \sum_{im} h_{mil} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_{im} h_{iilm} \omega_{lm}(\mathbf{e}_l), \\ &= \sum_i h_{iill} - 2 \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_m [\sum_i h_{iim}] \omega_{lm}(\mathbf{e}_l) \end{aligned}$$

e calculando no ponto p obtemos de (3.11)

$$\sum_i h_{iil,l} = \sum_i h_{iill} - 2 \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l).$$

$$\begin{aligned} \sum_{im} h_{im,l} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) &= \sum_{im} [h_{iml} - \sum_k h_{mk} \omega_{ik}(\mathbf{e}_l) - \sum_k h_{ik} \omega_{mk}(\mathbf{e}_l)] \omega_{im}(\mathbf{e}_l), \\ &= \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_{imk} h_{mk} \omega_{ik}(\mathbf{e}_l) \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_{imk} h_{ik} \omega_{mk}(\mathbf{e}_l) \omega_{im}(\mathbf{e}_l) \end{aligned}$$

e esta última expressão no ponto p fica:

$$\begin{aligned} \sum_{im} h_{im,l} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) &= \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - \sum_{im} (\lambda_m - \lambda_i) \omega_{im}(\mathbf{e}_l), \\ &= \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l), \end{aligned}$$

e como

$$\sum_{im} h_{im} [\omega_{im}(\mathbf{e}_l)]_l = \sum_i \lambda_i [\omega_{ii}(\mathbf{e}_l)]_l = 0,$$

então

$$\begin{aligned} \sum_i h_{iill} - 2 \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) - 2 \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) &= 0, \\ \sum_i h_{iill} - 4 \sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) &= 0. \end{aligned}$$

Agora como $h_{iml} = h_{mil}$ e $\omega_{im}(\mathbf{e}_l) = -\omega_{mi}(\mathbf{e}_l)$ concluímos que

$$\sum_{im} h_{iml} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) = 0,$$

portanto,

$$\sum_i h_{iill} = 0.$$

□

O seguinte lema pode ser encontrado em [5], mas para fins ilustrativos apresentamos a prova.

Lema 3.2 *Se M^n é uma hipersuperfície em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, então*

$$\Delta h_{ij} = \sum_k h_{kij} + c[(n-1)\lambda_i + \lambda_j - h]\delta_{ij} + [h\lambda_i + \lambda_j^2 - \lambda_i\lambda_j - S]h_{ij}.$$

Demonstração. Por definição temos $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$ e usando as equações de Ricci (3.5) e Codazzi (3.3) obtemos:

$$\Delta h_{ij} = \sum_k h_{kki j} + \sum_{km} h_{im} R_{mkjk} + \sum_{km} h_{km} R_{mijk}. \quad (3.12)$$

Da equação de Gauss (3.1) segue-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{km} h_{im} R_{mkjk} &= \sum_{km} h_{im} [c(\delta_{mj} - \delta_{mk}\delta_{kj}) + h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj}], \\ &= \sum_k \lambda_i [c(\delta_{ij} - \delta_{ik}\delta_{kj}) + h_{ij}h_{kk} - h_{ik}h_{kj}], \\ &= cn\lambda_i\delta_{ij} - c\lambda_i \sum_k \delta_{ik}\delta_{kj} + \lambda_i h_{ij} \sum_k \lambda_k - \lambda_i \sum_k h_{ik}h_{kj}, \\ &= c(n-2)\lambda_i\delta_{ij} + h\lambda_i h_{ij} - \lambda_i^2 h_{ij} - \lambda_i \lambda_j h_{ij} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{km} h_{km} R_{mijk} &= \sum_{km} h_{km} [c(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) + h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij}], \\ &= \sum_k \lambda_k [c(\delta_{kj}\delta_{ik} - \delta_{ij}) + h_{kj}h_{ik} - h_{kk}h_{ij}], \\ &= c \sum_k \lambda_k \delta_{kj}\delta_{ik} - c \sum_k \lambda_k \delta_{ij} + \sum_k \lambda_k h_{kj}h_{ik} - h_{ij} \sum_k \lambda_k, \\ &= c(\lambda_i + \lambda_j - h)\delta_{ij} + (\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - S)h_{ij}. \end{aligned}$$

Substituindo as duas expressões anteriores em (3.12) chegamos na equação desejada. $\square$

Teorema 3.3 *Seja M^n uma hipersuperfície com curvatura média constante h num espaço forma Riemanniano $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Se $f_k = \sum_j \lambda_j^k$, então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta S &= (nc - S)S - ch^2 + hf_3 + \sum_{ijk} h_{ijk}^2, \\ \frac{1}{3} \Delta f_3 &= (nc - S)f_3 - chS + hf_4 + 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $S = \sum_{ij} h_{ij}^2$. Então tomando a primeira e a segunda derivada covariante obtemos

$$\frac{1}{2} S_k = 2 \sum_{ij} h_{ij} h_{ijk} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} S_{kk} = \sum_{ij} h_{ijk}^2 + h_{ij} h_{ijkk},$$

portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{ij} h_{ij} \left(\sum_k h_{ijkk} \right) + \sum_{ijk} h_{ijk}^2, \\ &= \sum_{ij} \Delta h_{ij} h_{ij} + \sum_{ijk} h_{ijk}^2.\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2 na última equação temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{ijk} h_{ijk}^2 + \sum_{ijk} h_{ij} h_{kkij} + c \sum_{ij} [(n-1)\lambda_i + \lambda_j - h] \delta_{ij} h_{ij} + \sum_{ij} [h\lambda_i + \lambda_j^2 - \lambda_i \lambda_j - S] h_{ij}^2, \\ &= \sum_{ijk} h_{ijk}^2 + \sum_i \lambda_i \left[\sum_k h_{kkii} \right] + c \sum_i n\lambda_i^2 - h\lambda_i + h \sum_i \lambda_i^3 - S \sum_i \lambda_i^2, \\ &= (cn - S)S - ch^2 + hf_3 + \sum_{ijk} h_{ijk}^2,\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado o Lema 3.1. Note que a hipótese de curvatura média constante é condição suficiente para obter a última igualdade.

Agora considere $f_3 = \sum_{ijk} h_{ij} h_{jk} h_{ki}$, calculando a primeira derivada covariante obtém-se

$$f_{3l} = \sum_{ijk} h_{ijl} h_{jk} h_{ik} + \sum_{ijk} h_{jkl} h_{ij} h_{ik} + \sum_{ijk} h_{ikl} h_{jk} h_{ij},$$

re-ordenando os índices (ijkl) de maneira conveniente temos

$$f_{3l} = 3 \sum_{ijk} h_{ijl} h_{jk} h_{ik}$$

e fazendo a segunda derivada covariante

$$\begin{aligned}f_{3ll} &= \sum_{ijk} h_{ijll} h_{jk} h_{ik} + \sum_{ijk} h_{jkl} h_{ijl} h_{ik} + \sum_{ijk} h_{ikl} h_{ijl} h_{jk}, \\ &= \sum_{ijk} h_{ijll} h_{jk} h_{ik} + 2 \sum_{ijk} h_{jkl} h_{ijl} h_{ik},\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi considerada uma permutação conveniente dos índices (ijkl). Portanto, fazendo somatório em l

$$\frac{1}{3}\Delta f_3 = \sum_{ijk} \Delta h_{ij} h_{jk} h_{ik} + 2 \sum_{ijkl} h_{ijl} h_{jkl} h_{ik}$$

e usando Lema 3.2 e Lema 3.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\Delta f_3 &= 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2 + \sum_{ijk} h_{jk} h_{ki} \left[\sum_l h_{llij} + c[(n-1)\lambda_i + \lambda_j - h]\delta_{ij} + [h\lambda_i + \lambda_j^2 - \lambda_i \lambda_j - S]h_{ij} \right], \\
&= \sum_{ijkl} h_{llij} h_{jk} h_{ki} + c \sum_{ik} (n\lambda_i - h) h_{ik}^2 + \sum_{ik} (h\lambda_i - S) h_{ik}^2 \lambda_i + 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2, \\
&= \sum_i \lambda_i^2 \left[\sum_l h_{llii} \right] + c \sum_i (n\lambda_i - h) \lambda_i^2 + \sum_i (h\lambda_i - S) \lambda_i^3 + 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2, \\
&= (cn - S)f_3 - chS + hf_4 + 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijk}^2.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4 Se M^n é uma hipersuperfície com curvatura média constante num espaço forma Riemanniano $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, então em cada ponto $p \in M^n$ e para cada $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ tem-se:

$$\sum_i \lambda_i h_{iil} = \frac{1}{2} S_l \quad e \quad \sum_i \lambda_i h_{iill} = \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2.$$

Demonstração.

Seja $p \in M^n$ e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ um referencial ortonormal local tal que no ponto p temos $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, escolhendo uma vizinhança normal se for preciso e fazendo transporte paralelo dos vetores $\mathbf{e}_i(p)$ podemos supor que o referencial $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ satisfaz

$$\omega_{ij}(\mathbf{e}_l)_p = 0$$

para todo $i, j, l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

As equações são obtidas derivando duas vezes na direção e_l a função

$$S = \sum_{ij} h_{ij}^2.$$

Considere a derivada em relação a $\mathbf{e}_l$ de S , isto é, $S_l = 2 \sum_{ij} h_{ij,l} h_{ij}$. Substituindo em (3.9) obtemos

$$\frac{1}{2} S_l = \sum_{ij} h_{ij} h_{ijl} - \sum_{ijm} h_{ij} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]$$

e derivando esta última expressão na direção l temos

$$\frac{1}{2} S_{l,l} = \sum_{ij} h_{ij,l} h_{ijl} + \sum_{ij} h_{ij} h_{ijl,l} - \sum_{ijm} h_{ij,l} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)] - \sum_{ijm} h_{ij} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]_l. \quad (3.13)$$

A prova continua analisando cada somatória separadamente, isto é:

$$\begin{aligned}
\sum_{ij} h_{ij,l} h_{ijl} &= \sum_{ij} h_{ijl}^2 - \sum_{ijm} h_{ijl} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)], \\
\sum_{ij} h_{ij} h_{ijl,l} &= \sum_{ij} h_{ij} h_{ijll} - \sum_{ijm} h_{ij} [h_{mj} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{iml} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l) + h_{ijm} \omega_{lm}(\mathbf{e}_l)], \\
\sum_{ijm} h_{ij,l} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)] &= \sum_{ijm} [h_{ijl} - \sum_k h_{jk} \omega_{ik}(\mathbf{e}_l) - \sum_k h_{ik} \omega_{jk}(\mathbf{e}_l)] [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)], \\
&= \sum_{ijm} h_{ijl} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)] \\
&\quad - \sum_{ijkm} [h_{jk} \omega_{ik}(\mathbf{e}_l) - h_{ik} \omega_{jk}(\mathbf{e}_l)] [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)], \\
[h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]_l &= h_{jm,l} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{jm} [\omega_{im}(\mathbf{e}_l)]_l + h_{im,l} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l) + h_{im} [\omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]_l, \\
&= \left[h_{jml} - \sum_k h_{mk} \omega_{jk}(\mathbf{e}_l) - \sum_k h_{jk} \omega_{mk}(\mathbf{e}_l) \right] \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{jm} [\omega_{im}(\mathbf{e}_l)]_l \\
&\quad + \left[h_{iml} - \sum_k h_{mk} \omega_{ik}(\mathbf{e}_l) - \sum_k h_{ik} \omega_{mk}(\mathbf{e}_l) \right] \omega_{jm}(\mathbf{e}_l) + h_{im} [\omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]_l
\end{aligned}$$

e calculando cada uma delas no ponto p usando $\omega_{ij}(\mathbf{e}_l)_p = 0$ e $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{ij} h_{ij,l} h_{ijl} \right)_p &= \sum_{ij} h_{ijl}^2, \\
\left(\sum_{ij} h_{ij} h_{ijl,l} \right)_p &= \sum_{ij} h_{ij} h_{ijll}, \\
&= \sum_i \lambda_i h_{iill}, \\
\left(\sum_{ijm} h_{ij,l} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)] \right)_p &= 0, \\
\sum_{ijm} h_{ij,l} [h_{jm} \omega_{im}(\mathbf{e}_l) + h_{im} \omega_{jm}(\mathbf{e}_l)]_l &= 2 \sum_i \lambda_i^2 [\omega_{ii}(\mathbf{e}_l)]_l \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo estas expressões em (3.13) concluímos que no ponto p

$$\sum_i \lambda_i h_{iill} = \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2.$$

□

Lema 3.5 *Se M^n é uma hipersuperfície com curvatura média constante num espaço forma Riemanniano $Q^{n+1}(c)$, então em cada ponto $p \in M^n$ e para cada $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ tem-se:*

$$\sum_i \lambda_i^2 h_{iil} = \frac{1}{3} f_{3l} \quad e \quad \sum_i \lambda_i^2 h_{iill} = \frac{1}{3} f_{3ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2$$

Demonstração. As igualdades são obtidas calculando as componentes da segunda derivada covariante de

$$f_3 = \sum_{ijk} h_{ij} h_{jk} h_{ik}$$

como foi feito no lema anterior. □

Os Lemas 3.11, 3.4 e 3.5 podem ser unidos para obter os seguintes teoremas, que serão de fundamental importância no capítulo 3.

Teorema 3.6 *Se M^n é uma hipersuperfície com curvatura média constante num espaço forma Riemanniano $Q^{n+1}(c)$, então em cada ponto $p \in M^n$ e para cada $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ tem-se o seguinte sistema linear de equações:*

$$\begin{aligned} \sum_i h_{iil} &= 0, \\ \sum_i \lambda_i h_{iil} &= \frac{1}{2} S_l, \\ \sum_i \lambda_i^2 h_{iil} &= \frac{1}{3} f_{3l}. \end{aligned}$$

Teorema 3.7 *Se M^n é uma hipersuperfície com curvatura média constante num espaço forma Riemanniano $Q^{n+1}(c)$, então em cada ponto $p \in M^n$ e para cada $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ tem-se o seguinte sistema linear de equações:*

$$\begin{aligned} \sum_i h_{iill} &= 0, \\ \sum_i \lambda_i h_{iill} &= \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2, \\ \sum_i \lambda_i^2 h_{iill} &= \frac{1}{3} f_{3ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2. \end{aligned}$$

Hipersuperfícies com curvaturas média constante e Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{S}^4$.

Neste capítulo, provamos o resultado principal deste trabalho, a saber: não existem hipersuperfícies completas com curvatura Gauss-Kronecker K nula e curvatura média constante h não nula em S^4 , se o quadrado da norma da segunda forma fundamental S é limitado superiormente. Mais especificamente, provamos que toda hipersuperfície completa em $\mathbb{S}^4$, com $\sup S < \infty$, $h \equiv \text{cte}$ e $K = 0$ então $h = 0$.

A hipótese sobre S é fundamental na prova que apresentamos, pois usamos o princípio do máximo sobre S . Não sabemos se a hipotótese sobre S pode ser removida, ou se existem exemplos de hipersuperfícies nas condições dadas com $\sup S = \infty$. Tais exemplos existem quando $h = 0$ [12].

Para ajudar o entendimento da prova do teorema principal, enunciaremos e provaremos alguns lemas técnicos.

O seguinte lema não depende da completude da hipersuperfície, e fornece expressões para as funções simétricas das curvaturas principais e seus laplacianos em termos da curvatura média h e a segunda função simétrica $3\sigma_2 =: \sigma = \frac{S-h^2}{2}$ das curvaturas principais.

Lema 4.1 *Seja M^3 uma hipersuperfície com curvatura média constante e curvatura Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{S}^4$. Então:*

$$f_3 = h^3 - 3h\sigma = \frac{3}{2}h\left(S - \frac{h^2}{3}\right), \quad (4.1)$$

$$f_4 = 2\sigma^2 - 4h^2\sigma + h^4, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}\Delta S = -4\sigma^2 + (h^2 - 6)\sigma + 2h^2 + \sum_{ijl} h_{ijl}^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{3}\Delta f_3 = -4h\sigma^2 + (h^2 - 7)h\sigma + 2h^3 + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2. \quad (4.4)$$

Demonstração.

Seja $p \in M^3$. Como a curvatura Gauss-Kronecker $K \equiv 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $\lambda_3(p) = \lambda_3 = 0$. Assim temos

$$\begin{aligned} h^3 &= (\lambda_1 + \lambda_2)^3 \\ &= \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + 3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= f_3 + 3h\sigma. \end{aligned}$$

Substituindo $S = h^2 - 2\sigma$ na última expressão, obtemos:

$$f_3 = h^3 - 3h \left(\frac{h^2 - S}{2} \right) = \frac{3}{2}h \left(S - \frac{h^2}{3} \right).$$

Para obter (4.2) note que

$$\begin{aligned} h^4 &= (\lambda_1 + \lambda_2)^4, \\ &= \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 6\lambda_1^2\lambda_2^2, \\ &= f_4 + 4\sigma S + 6\sigma^2, \\ &= f_4 + 4\sigma(h^2 - 2\sigma) + 6\sigma^2, \\ &= f_4 + 4h^2\sigma - 2\sigma^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$f_4 = 2\sigma^2 - 4h^2\sigma + h^4.$$

Por outro lado, como a curvatura média h é constante, sabemos pelo teorema 3.3 que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= (3 - S)S - h^2 + hf_3 + \sum_{ijl} h_{ijl}^2 \quad e \\ \frac{1}{3}\Delta f_3 &= (3 - S)f_3 + hf_4 - hS + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, substituindo (4.1) e $S = h^2 - 2\sigma$ na primeira equação obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= 3(h^2 - 2\sigma) - (h^2 - 2\sigma)^2 - h^2 + h(h^3 - 3h\sigma) + \sum_{ijl} h_{ijl}^2, \\ &= 3h^2 - 6\sigma - h^4 + 4h^2\sigma - 4\sigma^2 - h^2 + h^4 - 3h^2\sigma + \sum_{ijl} h_{ijl}^2, \\ &= -4\sigma^2 + (h^2 - 6)\sigma + 2h^2 + \sum_{ijl} h_{ijl}^2.\end{aligned}$$

Analogamente, se substituimos (4.1) e (4.2) em (4.5), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\Delta f_3 &= (3 - (h^2 - 2\sigma))(h^3 - 3h\sigma) + h(2\sigma^2 - 4h^2\sigma + h^4) - h(h^2 - 2\sigma) + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2, \\ &= -4h\sigma^2 + h^3\sigma - 7h\sigma + 2h^3 + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2, \\ &= -4h\sigma^2 + (h^2 - 7)h\sigma + 2h^3 + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2.\end{aligned}$$

□

Observamos agora que, nas condições do Lema 4.1 segue-se da equação (4.1) que

$$\frac{1}{3}\Delta f_3 = h \left(\frac{1}{2}\Delta S \right)$$

e substituindo (4.3) e (4.4) nesta última expressão obtemos

$$-4h\sigma^2 + (h^2 - 7)h\sigma + 2h^3 + 2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2 = h \left[-4\sigma^2 + (h^2 - 6)\sigma + 2h^2 + \sum_{ijl} h_{ijl}^2 \right],$$

ou de maneira equivalente,

$$2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2 - h \sum_{ijl} h_{ijl}^2 = h\sigma.$$

Fica assim provado o seguinte lema:

Lema 4.2 *Se M^3 é uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^4$ com curvatura média constante e curvatura de Gauss-Kronecker nula, então:*

$$2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2 - h \sum_{ijl} h_{ijl}^2 = h\sigma.$$

Sejam $p \in M^3$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um referencial ortonormal local tal que no ponto p , $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Escolhendo uma vizinhança normal, se for preciso e fazendo transporte paralelo dos vetores $e_i(p)$, podemos supor que o referencial $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ satisfaz

$$\omega_{ij}(\mathbf{e}_l)_p = 0$$

para todo $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

Se M^3 é uma hipersuperfície com curvatura média constante e $K \equiv 0$, então a equação (4.1) do lema 4.1 fornece as seguintes relações entre a primeira e segunda derivadas de f_3 e S na direção e_l :

$$f_{3l} = \frac{3}{2}h S_l, \quad (4.6)$$

$$f_{3ll} = \frac{3}{2}h S_{ll}. \quad (4.7)$$

Portanto, o Teorema 3.6 e (4.6) garantem que no ponto $p \in M^3$ é satisfeito o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} h_{11l} + h_{22l} + h_{33l} &= 0, \\ \lambda_1 h_{11l} + \lambda_2 h_{22l} &= \frac{1}{2} S_l, \\ \lambda_1^2 h_{11l} + \lambda_2^2 h_{22l} &= \frac{h}{2} S_l \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde temos suposto sem perda de generalidade que $\lambda_3(p) = \lambda_3 = 0$.

Analogamente do Teorema 3.7 e (4.7), no ponto p temos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{aligned} h_{11ll} + h_{22ll} + h_{33ll} &= 0, \\ \lambda_1 h_{11ll} + \lambda_2 h_{22ll} &= \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2, \\ \lambda_1^2 h_{11ll} + \lambda_2^2 h_{22ll} &= \frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observe que os sistemas (4.8) e (4.9), têm solução única em h_{iil} e h_{iill} , respectivamente, se e somente se no ponto p todas as curvaturas principais são distintas. Os teoremas a seguir dão as soluções explícitas desses sistemas no ponto p em termos das curvaturas principais e das derivadas do quadrado da norma da segunda forma fundamental.

Teorema 4.3 *Seja M^3 uma hipersuperfície com curvatura média constante, curvatura Gauss-Kronecker nula e suponha que existe $p \in M^3$ tal que todas as curvaturas principais em p são distintas. Então no ponto p temos:*

$$h_{11l} = \frac{(\lambda_2 - 2h) S_l}{2\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad h_{22l} = \frac{(2h - \lambda_1) S_l}{2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad e \quad h_{33l} = 0.$$

Demonstração.

Como no ponto p todas as curvaturas principais são distintas, então

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Assim as soluções do sistema (4.8) estão determinadas por

$$\begin{aligned} h_{11l} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}S_l & \lambda_2 & 0 \\ \frac{h}{2}S_l & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\lambda_2^2}{2}S_l - \frac{h}{2}\lambda_2 S_l}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{(\lambda_2 - h)S_l}{2\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ h_{22l} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{2}S_l & 0 \\ \lambda_1^2 & \frac{h}{2}S_l & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{h}{2}\lambda_1 S_l - \frac{\lambda_1^2}{2}S_l}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{(h - \lambda_1)S_l}{2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ h_{33l} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \frac{1}{2}S_l \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \frac{h}{2}S_l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\left[\frac{h}{2}\lambda_2 S_l - \frac{\lambda_2^2}{2}S_l\right] - \left[\frac{h}{2}\lambda_1 S_l - \frac{\lambda_1^2}{2}S_l\right]}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \\ &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)h S_l + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)S_l}{2\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{h S_l - h S_l}{2\lambda_1 \lambda_2} = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.4 *Seja M^3 uma hipersuperfície com curvaturas média constante e Gauss-Kronecker nula em S^4 . Suponha que existe $p \in M^3$ tal que todas as curvaturas principais em p são distintas. Então no ponto p temos:*

$$\begin{aligned} h_{11ll} &= \frac{-\frac{\lambda_1}{2}S_{ll} - \lambda_2 \sum_{ij} h_{ijl}^2 + 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ h_{22ll} &= \frac{\frac{\lambda_2}{2}S_{ll} + \lambda_1 \sum_{ij} h_{ijl}^2 - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ h_{33ll} &= \frac{h \sum_{ij} h_{ijl}^2 - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 h_{11ll} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 & \lambda_2 & 0 \\ \frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_2^2 \left[\frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 \right] - \lambda_2 \left[\frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 \right]}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\
 h_{11ll} &= \frac{(\lambda_2 - h) \frac{S_{ll}}{2} - \lambda_2 \sum_{ij} h_{ijl}^2 + 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-\frac{\lambda_1}{2} S_{ll} - \lambda_2 \sum_{ij} h_{ijl}^2 + 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \\
 h_{22ll} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_1 \left[\frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 \right] - \lambda_1^2 \left[\frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 \right]}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\
 h_{22ll} &= \frac{(h - \lambda_1) \frac{S_{ll}}{2} + \lambda_1 \sum_{ij} h_{ijl}^2 - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\frac{\lambda_2}{2} S_{ll} + \lambda_1 \sum_{ij} h_{ijl}^2 - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}. \\
 h_{33ll} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \left[\frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 \right] + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left[\frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 \right]}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\
 h_{33ll} &= \frac{\left[\frac{h}{2} S_{ll} - 2 \sum_{ij} \lambda_i h_{ijl}^2 \right] - h \left[\frac{1}{2} S_{ll} - \sum_{ij} h_{ijl}^2 \right]}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{h \sum_{ij} h_{ijl}^2 - 2 \sum_{ijk} \lambda_i h_{ijl}^2}{\sigma}.
 \end{aligned}$$

□

Antes de enunciar e provar o teorema principal deste capítulo, apresentamos o seguinte lema que dá uma estimativa para o $\inf S$ em termos da norma da curvatura média h .

Lema 4.5 *Seja M^3 uma hipersuperfície com curvatura Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{S}^4$. Então*

$$S \geq \frac{h^2}{2}.$$

Em particular, se M^3 tem curvatura média constante, então $\inf S \geq \frac{h^2}{2}$.

Demonstração.

Suponha que a curvatura Gauss-Kronecker $K \equiv 0$, então o polinômio característico da segunda forma fundamental é dado por:

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - h\lambda + \sigma)$$

como as curvaturas principais são raízes deste polinômio então o discriminante do fator quadrático é não-negativo, isto é $h^2 - 4\sigma \geq 0$. Portanto

$$h^2 \geq 4\sigma = 4\left(\frac{h^2 - S}{2}\right) = 2h^2 - 2S,$$

ou, de maneira equivalente, $S \geq \frac{h^2}{2}$.

□

Teorema 4.6 *Seja M^3 uma hipersuperfície completa com curvaturas média constante e Gauss-Kronecker nula em S^4 . Se o quadrado da norma da segunda forma fundamental é limitado superiormente, então a hipersuperfície é mínima.*

Demonstração. De (3.6) temos que

$$R = 6 + h^2 - S.$$

Suponha que o quadrado da norma da segunda forma fundamental S é limitada superiormente, Logo R é limitada inferiormente e portanto as curvaturas seccionais são limitadas inferiormente. Pois são limitadas superiormente.

Podemos então aplicar o princípio do máximo para S , obtendo uma sequência $\{p_k\} \subset M^3$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(p_k) = \sup S, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\text{grad } S(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} S_{ii} \leq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

Do fato de S ser limitada superiormente obtemos que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, as curvaturas principais λ_i são limitadas superiormente e passando numa subsequência se for preciso, podemos supor que existem números reais $\tilde{\lambda}_i$ tais que

$$\lim_k \lambda_i(p_k) = \tilde{\lambda}_i.$$

Note que

$$h = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}_3, \quad K = 0 = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 \quad \text{e} \quad \sup S = \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2. \quad (4.11)$$

A seguir analisamos os possíveis casos para os $\tilde{\lambda}_i$ e provamos que para cada um deles $h \equiv 0$.

Primeiro suponha que existem i, j ($i \neq j$) tais que $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_j$ e, sem perda de generalidade, suponha $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2$. Assim de (4.11),

$$\sup S = 2\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_3^2 = \begin{cases} \frac{h^2}{2} & \text{se } \tilde{\lambda}_3 = 0 \\ h^2 & \text{se } \tilde{\lambda}_3 \neq 0. \end{cases}$$

Se $\sup S = \frac{h^2}{2}$, segue-se do Lema 4.5 que

$$\sup S \leq \inf S,$$

donde S é constante e M^3 é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}^4$. Pela classificação de Cartan M^3 é totalmente geodésica e em particular $h \equiv 0$.

Se $\sup S = h^2$, então $\tilde{\sigma} := \lim_k \sigma(p_k) = \frac{h^2 - \sup S}{2} = 0$ e do Lema 4.1 temos

$$\frac{1}{2} \Delta S \geq -4\sigma^2 + (h^2 - 6)\sigma + 2h^2.$$

Tomando limite ao longo da sequência $\{p_k\}$ e usando o fato que $\limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta S(p_k) \leq 0$, obtemos

$$0 \geq \frac{1}{2} \limsup_k \Delta S(p_k) \geq -4\tilde{\sigma}^2 + (h^2 - 6)\tilde{\sigma} + 2h^2 = 2h^2 \geq 0,$$

e concluímos então que $h \equiv 0$, neste caso.

Suponha agora que $\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j$ para todo $i \neq j$. Como $\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 = 0$, então podemos supor, sem perda de generalidade que $\tilde{\lambda}_3 = 0$ e $\tilde{\sigma} = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \neq 0$. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$, $\lambda_1(p_k) \neq \lambda_2(p_k)$ e $\lambda_3(p_k) = 0$. Pelo teorema 4.3, em cada ponto p_k o sistema (4.8) tem uma única solução dada por:

$$h_{11l} = \frac{(\lambda_2 - 2h)S_l}{2\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad h_{22l} = \frac{(2h - \lambda_1)S_l}{2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad \text{e} \quad h_{33l} = 0.$$

De (4.10), temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} |\text{grad } S(p_k)| = 0$. Portanto, para cada $i, l \in \{1, 2, 3\}$

$$\tilde{h}_{iil} := \lim_k h_{iil}(p_k) = 0$$

e pela equação de Codazzi (3.3)

$$\begin{aligned} \lim_k \sum_{ijl} \lambda_i(p_k) h_{ijl}^2(p_k) &= 2h \lim_k h_{123}^2(p_k) = 2h \tilde{h}_{123}^2, \\ \lim_k \sum_{ijl} h_{ijl}^2(p_k) &= 6 \lim_k h_{123}^2(p_k) = 6 \tilde{h}_{123}^2. \end{aligned}$$

Mas, do lema 4.2

$$\lim_k [2 \sum_{ijl} \lambda_i h_{ijl}^2 - h \sum_{ijl} h_{ijl}^2] = h \tilde{\sigma}$$

ou de maneira equivalente

$$-2h \tilde{h}_{123}^2 = h \tilde{\sigma}.$$

Suponha por contradição que $h \neq 0$, logo da última igualdade obtemos:

$$0 \leq \tilde{h}_{123}^2 = -\frac{\tilde{\sigma}}{2}, \quad (4.12)$$

e mediante um cálculo direto

$$\lim_k \sum_{ij} \lambda_i(p_k) h_{ijl}^2(p_k) = (\lambda_l - h) \frac{\tilde{\sigma}}{2} \quad \text{e} \quad \lim_k \sum_{ij} h_{ijl}^2(p_k) = -\tilde{\sigma}. \quad (4.13)$$

Por outro lado, considere em cada p_k o sistema (4.9), tomando limite ao longo da sequência, este sistema fica:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11l} + \tilde{h}_{22l} + \tilde{h}_{33l} &= 0, \\ \tilde{\lambda}_1 \tilde{h}_{11l} + \tilde{\lambda}_2 \tilde{h}_{22l} &= \frac{1}{2} \limsup_k S_{ll}(p_k) + \tilde{\sigma}, \\ \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{h}_{11l} + \tilde{\lambda}_2^2 \tilde{h}_{22l} &= \frac{h}{2} \limsup_k S_{ll}(p_k) + (h - \tilde{\lambda}_l) \tilde{\sigma}, \end{aligned}$$

assim do teorema 4.4 e (4.13), suas soluções satisfazem:

$$(\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)) \tilde{h}_{11l} = -\frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \bar{S}_{ll} + \tilde{\lambda}_2 \tilde{\sigma} + 2 \frac{\tilde{\lambda}_l - h}{2} \tilde{\sigma}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_2(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)) \tilde{h}_{22l} &= \frac{\tilde{\lambda}_2}{2} \bar{S}_{ll} - \tilde{\lambda}_1 \tilde{\sigma} - 2 \frac{\tilde{\lambda}_l - h}{2} \tilde{\sigma}, \\ -\tilde{\sigma} \tilde{h}_{33l} &= (\tilde{\lambda}_l - h) \tilde{\sigma} + h \tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde $\bar{S}_{ll} := \limsup_k S_{ll}(p_k)$. Tomando $l = 1$ em (4.15) temos:

$$\tilde{h}_{3311} = -\tilde{\lambda}_1,$$

e da equação de Ricci (3.8) segue-se:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{3311} &= \tilde{h}_{1133} + (\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_1)(1 + \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3), \\ -\tilde{\lambda}_1 &= \tilde{h}_{1133} - \tilde{\lambda}_1, \end{aligned}$$

isto é

$$\tilde{h}_{1133} = 0.$$

Por outro lado, tomando $l = 3$ em (4.14)

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)) \tilde{h}_{1133} &= -\frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \bar{S}_{33} + \tilde{\lambda}_2 \tilde{\sigma} + 2 \frac{\tilde{\lambda}_3 - h}{2} \tilde{\sigma}, \\ -\frac{\tilde{\lambda}_1}{2} \bar{S}_{33} - \tilde{\lambda}_1 \tilde{\sigma} &= 0, \end{aligned}$$

ou de maneira equivalente

$$\frac{1}{2} \bar{S}_{33} = -\tilde{\sigma}.$$

Assim, pelo princípio do máximo

$$-\widetilde{\sigma} = \frac{1}{2} \limsup_k S_{33}(p_k) \leq 0,$$

mas de (4.12)

$$-\widetilde{\sigma} \geq 0.$$

Portanto, $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{\lambda}_2 = 0$, o que contraria a hipótese inicial que $\widetilde{\lambda}_i \neq \widetilde{\lambda}_j$ para todo $i \neq j$, logo neste caso $h = 0$.

□

Hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^5$ com curvatura Gauss-Kronecker nula.

5.1. Exemplos de hipersuperfícies mínimas com curvatura Gauss-Kronecker nula em $\mathbb{S}^5$.

Nesta seção daremos uma família de exemplos de hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^5$ com curvatura Gauss-Kronecker e 3-curvatura média ambas nulas, que não é totalmente geodésica. Este exemplo é um fibrado de 2-esferas sobre uma superfície mínima em $\mathbb{S}^5$. Antes de construir o exemplo, mostramos um resultado sobre superfícies mínimas com curvatura escalar normal nula em $\mathbb{S}^5$.

Teorema 5.1 *Seja M^2 uma superfície completa e $g: M^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ uma imersão supermínima. Se a curvatura escalar normal K_N é nula, então M^2 é compacta e $g(M^2)$ é uma esfera totalmente geodésica em $\mathbb{S}^5$.*

Demonstração.

Note que:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 - \frac{1}{4} K_N &= (\|B_{11}\|^2 + \|B_{12}\|^2)^2 - 4 \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha \\ h_{11}^\beta & h_{12}^\beta \end{vmatrix} \\ &= (\|B_{11}\|^2 + \|B_{12}\|^2)^2 - 4 (\|B_{11}\|^2 \|B_{12}\|^2 - \langle B_{11}, B_{12} \rangle^2) \\ &= (\|B_{11}\|^2 - \|B_{12}\|^2)^2 + 4 \langle B_{11}, B_{12} \rangle^2. \end{aligned}$$

Portanto de (2.28) segue-se que g é supermínima se, e somente se

$$(K-1)^2 - \frac{1}{4} K_N = 0. \quad (5.1)$$

Suponha agora que $\mathbf{g}:M^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ é supermínima e $K_N = 0$, então os vetores B_{11} e B_{12} são ortogonais e linearmente dependentes, logo $B \equiv 0$ e $K = 1$. Se adicionalmente M^2 é completa, então pelo teorema de Bonnet-Myers, M^2 é compacta e dado que $B \equiv 0$, $\mathbf{g}(M^2)$ é uma esfera totalmente geodésica em $\mathbb{S}^5$. $\square$

Antes de começar com a construção do exemplo, considere uma imersão isométrica $\mathbf{g}:M^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^5$ e $\mathcal{N} \subset (\mathbf{g}_*(TM))^\perp$ o fibrado normal unitário da imersão $\mathbf{g}$, isto é

$$\mathcal{N} = \{(p, V) \in M^2 \times \mathbb{R}^6 : \|V\| = 1, V \perp \mathbb{R} \cdot \mathbf{g}(p) \oplus \mathbf{g}_*(T_p M)\}.$$

Denote por $\pi_1: \mathcal{N} \rightarrow M^2$ a projeção no primeiro fator de $\mathcal{N}$ e por $\mathbf{x}_g: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{S}^5$ a projeção de $\mathcal{N}$ sobre $\mathbb{S}^5$.

Considere

$$\mathcal{N}_*(p) = \mathcal{N}(p) \setminus \{B_p(T_p M)^\perp \cap \mathbf{g}_*(T_p M)^\perp\}. \quad (5.2)$$

Temos assim três possibilidades :

- (a) Se $K_N \neq 0$, isto é, se o posto da matriz $\left(h_{1j}^\alpha\right)_{3 \times 2}$ é dois, então $\mathcal{N}_*(p)$ é uma esfera de dimensão 2 sem pontos antípodas, dados pelo complemento ortogonal de $B_p(T_p M)$ em $\mathbf{g}_*(T_p M)^\perp$;
- (b) Se o posto da matriz $\left(h_{1j}^\alpha\right)_{3 \times 2}$ é 1, então $\mathcal{N}_*(p)$ é uma esfera de dimensão dois sem um grande círculo;
- (c) Se o posto da matriz $\left(h_{1j}^\alpha\right)_{3 \times 2}$ é zero, ou seja, se $\mathbf{g}(M)$ é totalmente geodésica, então $\mathcal{N}_*(p) = \emptyset$.

Figura 5.1: Os três casos de $\mathcal{N}_*(p)$ em termos da matriz $\left(h_{1j}^\alpha\right)_{3 \times 2}$

Teorema 5.2 Se $\mathbf{g}:M^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ é uma imersão mínima tal que a segunda forma fundamental nunca é nula, então existe um conjunto aberto $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}$ tal que $\mathbf{x}_g: \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{S}^5$ é uma imersão isométrica. Ainda mais, $\mathcal{N}_*$ é uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{S}^5$ com curvatura Gauss-Kronecker e 3-curvatura média nulas.

Demonstração. Sejam $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ um referencial definido sobre um conjunto aberto $U \subset M^2$ adaptado à imersão $\mathbf{g}$ e W uma vizinhança coordenada de $\mathbb{S}^2$. Parametrize $\pi_1^{-1}(U)$ localmente sobre $U \times W$ via a função $\mathbf{y}: U \times W \rightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$(p, \theta, \varphi) \mapsto (p, \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_3 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_4 + \cos \varphi \mathbf{e}_5), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Então $\mathbf{x}:U \times W \rightarrow \mathbb{S}^5$ definida por

$$\mathbf{x}(p, \theta, \varphi) = \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_3 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_4 + \cos \varphi \mathbf{e}_5 \quad (5.3)$$

é uma representação local de $\mathbf{x}_g$. Portanto,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \sin \varphi \cos \theta d\mathbf{e}_3 + \sin \varphi \sin \theta d\mathbf{e}_4 + \cos \varphi d\mathbf{e}_5 + \\ &+ \cos \varphi \cos \theta d\varphi \mathbf{e}_3 + \cos \varphi \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_4 - \sin \varphi d\varphi \mathbf{e}_5 - \\ &- \sin \varphi \sin \theta d\theta \mathbf{e}_3 + \sin \varphi \cos \theta d\theta \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Das equações de estrutura adaptadas a $\mathbf{g}$ temos

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= (\sin \varphi \cos \theta \omega_{13} + \sin \varphi \sin \theta \omega_{14} + \cos \varphi \omega_{15}) \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\sin \varphi \cos \theta \omega_{23} + \sin \varphi \sin \theta \omega_{24} + \cos \varphi \omega_{25}) \otimes \mathbf{e}_2 + \\ &+ (-\sin \varphi \sin \theta d\theta + \cos \varphi \cos \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{35} - \sin \varphi \sin \theta \omega_{43}) \otimes \mathbf{e}_3 + \\ &+ (\sin \varphi \cos \theta d\theta + \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{45} + \sin \varphi \cos \theta \omega_{43}) \otimes \mathbf{e}_4 + \\ &+ (-\sin \varphi d\varphi + \sin \varphi \cos \theta \omega_{53} + \sin \varphi \sin \theta \omega_{54}) \otimes \mathbf{e}_5, \end{aligned} \quad (5.4)$$

e a partir de (2.18) e (5.4), obtemos a primeira forma fundamental de $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} ds_{\mathbf{x}}^2 = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle &= \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \\ &+ (-\sin \varphi \sin \theta d\theta + \cos \varphi \cos \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{35} - \sin \varphi \sin \theta \omega_{43})^2 + \\ &+ (\sin \varphi \cos \theta d\theta + \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{45} + \sin \varphi \cos \theta \omega_{43})^2 + \\ &+ (-\sin \varphi d\varphi + \sin \varphi \cos \theta \omega_{53} + \sin \varphi \sin \theta \omega_{54})^2, \end{aligned}$$

onde

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{kj}, \quad a_{ij} = \sin \varphi \cos \theta h_{ij}^3 + \sin \varphi \sin \theta h_{ij}^4 + \cos \varphi h_{ij}^5.$$

Como $\mathbf{g}$ é mínima, então

$$C = A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + a_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\det A & 0 \\ 0 & -\det A \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} ds_{\mathbf{x}}^2 &= -\det A ((\omega_1)^2 + (\omega_2)^2) + \\ &+ (-\sin \varphi \sin \theta d\theta + \cos \varphi \cos \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{35} - \sin \varphi \sin \theta \omega_{43})^2 + \\ &+ (\sin \varphi \cos \theta d\theta + \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \cos \varphi \omega_{45} + \sin \varphi \cos \theta \omega_{43})^2 + \\ &+ (-\sin \varphi d\varphi + \sin \varphi \cos \theta \omega_{53} + \sin \varphi \sin \theta \omega_{54})^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

A forma quadrática $-\det A((\omega_1)^2 + (\omega_2)^2)$ é positiva e definida positiva, se, e somente se $\det C \neq 0$. Dado que

$$\det C = \left[(\sin \varphi \cos \theta h_{11}^3 + \sin \varphi \sin \theta h_{11}^4 + \cos \varphi h_{11}^5)^2 + (\sin \varphi \cos \theta h_{12}^3 + \sin \varphi \sin \theta h_{12}^4 + \cos \varphi h_{12}^5)^2 \right],$$

obtemos

$$\det C = 0 \iff \begin{bmatrix} h_{11}^3 & h_{11}^4 & h_{11}^5 \\ h_{12}^3 & h_{12}^4 & h_{12}^5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Segue-se da hipótese que a segunda forma fundamental nunca é nula, que em cada ponto p , o posto de $(h_{1j}^\alpha)_{3 \times 2}$ é um ou dois. Afirmamos que em ambos os casos, $\det C \neq 0$ para todo ponto $(p, \theta, \varphi) \in N_*(p)$. De fato:

- (i) Suponha que $\text{posto}((h_{1j}^\alpha)_{3 \times 2}) = 2$. Neste caso, podemos escolher um referencial ortonormal local $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ tal que a matriz $(h_{1j}^\alpha)_{3 \times 2}$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha\gamma \neq 0$. De fato, começando a partir de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$, um referencial ortonormal com matriz (h_{1j}^α) , defina

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{e}}_3 &= h_{11}^3 \mathbf{e}_3 + h_{11}^4 \mathbf{e}_4 + h_{11}^5 \mathbf{e}_5 \\ \widetilde{\mathbf{e}}_4 &= h_{12}^3 \mathbf{e}_3 + h_{12}^4 \mathbf{e}_4 + h_{12}^5 \mathbf{e}_5. \end{aligned}$$

Podemos aplicar o processo de Gramm Schmidt e obter vetores $\{\widetilde{\mathbf{e}}_3, \widetilde{\mathbf{e}}_4\}$. Logo, escolhemos $\widetilde{\mathbf{e}}_5$, de tal maneira que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \widetilde{\mathbf{e}}_3, \widetilde{\mathbf{e}}_4, \widetilde{\mathbf{e}}_5\}$ é ortonormal. Esta é a base procurada. É fácil verificar que $\alpha = \|\widetilde{\mathbf{e}}_3\|$, $\alpha\beta = \langle \widetilde{\mathbf{e}}_3, \widetilde{\mathbf{e}}_4 \rangle$ e $\beta^2 + \gamma^2 = \|\widetilde{\mathbf{e}}_4\|^2$. Note que os vetores $\widetilde{\mathbf{e}}_3$ e $\widetilde{\mathbf{e}}_4$ dão as direções dos eixos da elipse de curvatura.

Para este referencial em particular, a equivalência (5.6) é reduzida a

$$\det C = 0 \iff \begin{cases} \alpha \sin \varphi \cos \theta = 0 \\ \beta \sin \varphi \cos \theta + \gamma \sin \varphi \sin \theta = 0 \end{cases}.$$

Dado que $\alpha\gamma \neq 0$ and $0 < \varphi < \pi$, então $\det C \neq 0$ para todo ponto $(p, \theta, \varphi) \in N_*(p)$, dado em (5.2).

- (ii) Suponha agora que $\text{posto} \left(\left(h_{1j}^\alpha \right)_{3 \times 2} \right) = 1$. Então podemos escolher um referencial ortonormal local $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ tal que a matriz $\left(h_{1j}^\alpha(p) \right)_{3 \times 2}$, no ponto p , tem a forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Neste caso o sistema (5.6) é transformado em

$$\det C = 0 \iff \begin{cases} \alpha \sin \varphi \cos \theta = 0 \\ \beta \sin \varphi \cos \theta = 0 \end{cases}.$$

A partir de $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ e $0 < \varphi < \pi$, temos que $\det C \neq 0$ se, e somente se $\theta \notin \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Assim, $\det C \neq 0$ para todo ponto $(p, \theta, \varphi) \in \mathcal{N}_*(p)$, dado em (5.2).

Se

$$\mathbf{w} = a \mathbf{e}_1 + b \mathbf{e}_2 + c \frac{\partial}{\partial \theta} + d \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

é um vetor em $T_p U \times T_p W$, então as 1-formas ω_β^α , são as formas de conexão do fibrado normal de $\mathbf{g}$ e $\omega_\beta^\alpha(\frac{\partial}{\partial \theta})$, $\omega_\beta^\alpha(\frac{\partial}{\partial \varphi})$ são nulas. Suponha agora que

$$d\mathbf{x}_{(p, \theta, \varphi)}(\mathbf{w}) = 0.$$

Então da quação (5.5), $ds_{\mathbf{x}}^2(\mathbf{w}) = 0$ e $\det C \neq 0$, temos que $a = b = 0$, além disso, c and d satisfazem

$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $0 < \varphi < \pi$, a primeira matriz da equação anterior tem posto 2 e necessariamente $c = d = 0$. Também,

$$\mathbf{w} = 0 \quad \text{pois} \quad d\mathbf{x}_{(p, \theta, \varphi)}(\mathbf{w}) = 0.$$

Portanto, $\mathbf{x}_g$ é uma imersão.

Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{g} \circ \pi_1\}$ um referencial ortogonal adaptado à imersão $\mathbf{x}_g$. Note que $\mathbf{g} \circ \pi_1(p, \theta, \varphi)$ é normal a $T_{\mathbf{x}(p, \theta, \varphi)} \mathcal{N}_*$ e tangente a $\mathbb{S}^5$. A segunda forma fundamental da imersão $\mathbf{x}_g$ é dada por

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{x}_g} &= -\langle d\mathbf{x}, d(\mathbf{g} \circ \pi_1) \rangle \\ &= -\langle d\mathbf{x}, \omega_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_2 \otimes \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= a_{11} \omega_1 \otimes \omega_1 + 2a_{12} \omega_1 \otimes \omega_2 + a_{22} \omega_2 \otimes \omega_2. \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{g}$ é mínima, o traço da matriz $A = (a_{ij})$ é zero, logo o traço de $B_{\mathbf{x}_g}$ é também nulo. Portanto $\mathbf{x}_g: \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{S}^5$ é mínima. Além disso, como o posto de A é dois, as 3 e 4-curvaturas médias são nulas. Isto conclui a prova do teorema. $\square$

5.2. hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^5$ com curvatura de Gauss-Kronecker nula.

Nesta seção, estudaremos localmente as hipersuperfícies mínimas e completas em $\mathbb{S}^5$ com curvatura de Gauss-Kronecker nula e 3-curvatura média zero, com a hipótese que a segunda forma fundamental nunca é nula, e provamos que localmente todas estas hipersuperfícies são como no Teorema 5.2. Antes de enunciar e provar o teorema principal, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 5.3 *Seja $\mathbf{g}:M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$ uma imersão isométrica e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ um referencial ortonormal local adaptado a $\mathbf{g}$ com co-referencial $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_4, \mathbf{e}_5\}$ é outro referencial ortonormal com co-referencial $\{\omega_1, \omega_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4, \omega_5\}$ satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_3 \\ \tilde{\omega}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{13} & \tilde{\omega}_{23} \\ \tilde{\omega}_{14} & \tilde{\omega}_{24} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{13} & \omega_{23} \\ \omega_{14} & \omega_{24} \end{bmatrix}; \\ \tilde{\omega}_{12} &= \omega_{12}, \quad \tilde{\omega}_{34} = \omega_{34} + d\theta, \quad \tilde{\omega}_{5i} = \omega_{5i}. \end{aligned}$$

Demonstração. Tomando a derivada exterior em

$$\begin{cases} \omega_3 = \cos \theta \tilde{\omega}_3 + \sin \theta \tilde{\omega}_4, \\ \omega_4 = -\sin \theta \tilde{\omega}_3 + \cos \theta \tilde{\omega}_4 \end{cases}$$

e usando as equações de estrutura para hipersuperfícies obtemos

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_3 &= -(\cos \theta \omega_{31} - \sin \theta \omega_{41}) \wedge \omega_1 - (\cos \theta \omega_{32} - \sin \theta \omega_{42}) \wedge \omega_2 - (\omega_{34} + d\theta) \wedge \tilde{\omega}_4 \\ d\tilde{\omega}_4 &= -(\sin \theta \omega_{31} + \cos \theta \omega_{41}) \wedge \omega_1 - (\sin \theta \omega_{32} + \cos \theta \omega_{42}) \wedge \omega_2 + (\omega_{34} + d\theta) \wedge \tilde{\omega}_3. \end{aligned}$$

□

Lema 5.4 *Nas mesmas hipóteses do lema anterior, se as funções f_3, f_4, g_3 e g_4 são definidas por*

$$\begin{cases} \omega_{32} = f_3 \omega_1 + g_3 \omega_2 \\ \omega_{42} = f_4 \omega_1 + g_4 \omega_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

então

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_3 & \tilde{g}_3 \\ \tilde{f}_4 & \tilde{g}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 & g_3 \\ f_4 & g_4 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3^2 + \tilde{f}_4^2 &= f_3^2 + f_4^2, & \tilde{f}_3 \tilde{g}_3 + \tilde{f}_4 \tilde{g}_4 &= f_3 g_3 + f_4 g_4, \\ \tilde{g}_3^2 + \tilde{g}_4^2 &= g_3^2 + g_4^2, & \tilde{f}_3 \tilde{g}_4 - \tilde{f}_4 \tilde{g}_3 &= f_3 g_4 - f_4 g_3. \end{aligned}$$

Demonstração. Dado que

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3 = \cos \theta \tilde{\mathbf{e}}_3 + \sin \theta \tilde{\mathbf{e}}_4, \\ \mathbf{e}_4 = -\sin \theta \tilde{\mathbf{e}}_3 + \cos \theta \tilde{\mathbf{e}}_4, \end{cases}$$

segue-se de (5.7) que

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{e}_2) &= \omega_{12} \otimes \mathbf{e}_1 + \omega_{32} \otimes \mathbf{e}_3 + \omega_{42} \otimes \mathbf{e}_4 = \\ &= \omega_{12} \otimes \mathbf{e}_1 + [(\cos \theta f_3 - \sin \theta f_4) \omega_1 + (\cos \theta g_3 - \sin \theta g_4) \omega_2] \otimes \tilde{\mathbf{e}}_3 + \\ &\quad + [(\sin \theta f_3 + \cos \theta f_4) \omega_1 + (\sin \theta g_3 + \cos \theta g_4) \omega_2] \otimes \tilde{\mathbf{e}}_4, \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão Levi-Civita de M^4 .

□

Teorema 5.5 *Seja $\mathbf{g}: M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$ uma hipersuperfície mínima, completa e orientada em $\mathbb{S}^5$, com curvatura Gauss-Kronecker e 3-curvatura média nulas. Se o quadrado da norma da segunda forma fundamental S nunca é zero, então existe uma superfície mínima $\tilde{\eta}: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ e uma isometria local $\tau: M_*^4 \rightarrow \mathbb{N}_*$, tais que $\eta|_{M_*^4} = \tilde{\eta} \circ \pi_1 \circ \tau$ e $\mathbf{x}_{\tilde{\eta}} \circ \tau = \mathbf{g}|_{M_*^4}$, onde $M_*^4 = M^4 \setminus \left\{ \mathbf{g}^{-1} \left(\mathbf{B}_{\pi(p)}(T_{\pi(p)}\mathbb{V})^\perp \cap \tilde{\eta}_*(T_{\pi(p)}\mathbb{V})^\perp \right) \right\}$.*

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ um referencial ortonormal sobre $\mathbb{S}^5$ adaptado à imersão $\mathbf{g}: M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$ no sentido que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4\}$ gera $\mathbf{g}_*(TM)$ e $\mathbf{e}_5$ determina uma aplicação de Gauss $\eta: M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$. Note que as equações de estrutura podem ser representadas por

$$\begin{aligned} d\mathbf{g} &= \sum_i \omega_i \otimes \mathbf{e}_i; \\ d\mathbf{e}_i &= -\omega_i \otimes \mathbf{g} + \sum_j \omega_{ij} \otimes \mathbf{e}_j + \sum_i \lambda_i \omega_i \otimes \mathbf{e}_5; \\ d\mathbf{e}_5 &= -\sum_i \lambda_i \omega_i \otimes \mathbf{e}_i; \\ d\omega_i &= -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0; \\ d\omega_5 &= 0, \end{aligned} \tag{5.8}$$

além disso segue-se de (3.7) e (2.18) que

$$\omega_{5i} = \lambda_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Por hipótese $S > 0$ e

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{4}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = 0; \\ \sigma_4 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 0, \end{aligned}$$

logo exatamente dois dos λ_i são nulos e a soma dos outros dois é zero. Por tanto podemos supor que

$$\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2 > 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

em M^4 , e

$$\omega_{51} = \lambda \omega_1, \quad \omega_{52} = -\lambda \omega_2, \quad \omega_{53} = \omega_{54} = 0. \quad (5.9)$$

Assim, temos bem definidas duas direções e um plano. Além disso

$$\mathcal{D}_p := \{v \in T_p M^4 : \mathbf{B}_p(v, w) = 0, \forall w \in T_p M^4\}$$

determina uma distribuição de dimensão dois. Agora procedemos a demonstração que $\mathcal{D}_p$ é involutiva, que as superfícies integrais $\mathcal{F}^2$ são totalmente geodésicas em M^4 e $\mathbf{g}(\mathcal{F}^2)$ são totalmente geodésicas em $\mathbb{S}^5$. De (5.9) e as equações de Codazzi dadas em (3.3) temos

$$\begin{cases} \omega_{31} \wedge \omega_1 - \omega_{32} \wedge \omega_2 = 0; \\ \omega_{41} \wedge \omega_1 - \omega_{42} \wedge \omega_2 = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Seja $\mathfrak{I}(\omega_1, \omega_2)$ o ideal gerado por ω_1 e ω_2 . Pelo lema de Cartan ω_{31} , ω_{32} , ω_{41} e ω_{42} pertencem ao ideal $\mathfrak{I}(\omega_1, \omega_2)$ e usando as equações de estrutura da hipersuperfície, seque-se que

$$d\omega_i \in \mathfrak{I}(\omega_1, \omega_2), \quad i = 1, 2 \quad \text{ou} \quad \omega_i([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Logo, $\mathcal{D}$ é involutiva. Então pelo teorema de Frobenius, por cada ponto $p \in M^4$ existe uma única superfície integral, maximal e conexa $\mathcal{F}^2$ de $\mathcal{D}_p$. Dado que $\mathbf{g}: M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$ é uma imersão isométrica de uma variedade completa, o teorema de D. Ferus [9] garante que $\mathcal{F}^2$ é completa e totalmente geodésica em M^4 . De (5.10) é fácil ver que

$$\begin{cases} \omega_{32}(\mathbf{e}_1) + \omega_{31}(\mathbf{e}_2) = 0; \\ \omega_{42}(\mathbf{e}_1) + \omega_{41}(\mathbf{e}_2) = 0; \\ \omega_{ij}(\mathbf{e}_k) = 0, \quad i = 1, 2; \quad j, k = 3, 4. \end{cases} \quad (5.11)$$

Substituindo (5.9) e (5.11) em (5.8) obtemos

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{g} + \omega_{43}(\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_4; \\ d\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_4) = \omega_{43}(\mathbf{e}_4)\mathbf{e}_4; \\ d\mathbf{e}_4(\mathbf{e}_3) = \omega_{34}(\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3; \\ d\mathbf{e}_4(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{g} + \omega_{34}(\mathbf{e}_4)\mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (5.12)$$

Isto implica que

$$\omega_k(\bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_i) = 0, \quad k = 1, 2; \quad i, j = 3, 4,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Levi-Civita de $\mathbb{S}^5$. Logo, $\mathbf{g}(\mathcal{F}^2)$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^5$. Como $\mathcal{F}^2$ é completa e $\mathbf{g}|_{\mathcal{F}^2}: \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ é imersão isométrica, então $\mathbf{g}(\mathcal{F}^2)$ é uma esfera unitária de dimensão dois $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{S}^5$; além disso, $\mathbf{g}|_{\mathcal{F}^2}: \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma aplicação de recobrimento (vide [11, p.146,

Prop.6.16]). Portanto, $\mathcal{F}^2$ é uma esfera de dimensão dois em M^4 e $\mathbf{g}|_{\mathcal{F}^2} : \mathcal{F}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é um difeomorfismo (vide [11, p.141]). Então, a superfície integral máxima $\mathcal{F}^2$ é regular (vide [22, p.98]) e o teorema de R. Palais (vide [16]) garante que o espaço quociente

$$\mathbb{V}^2 = M^4 / \mathcal{F}^2$$

pode ser dotado com uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão dois tal que $\pi: M^4 \rightarrow \mathbb{V}^2$ é uma submersão. A aplicação de Gauss $\eta: M^4 \rightarrow \mathbb{S}^5$ induz uma função diferenciável $\tilde{\eta}: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ tal que $\tilde{\eta} \circ \pi = \eta$,

$$\begin{array}{ccc} M^4 & & \\ \pi \downarrow & \searrow \eta & \\ \mathbb{V}^2 & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & \mathbb{S}^5. \end{array}$$

De fato, de (5.9), temos que $\bar{\nabla}_{\mathbf{e}_3}\eta$ e $\bar{\nabla}_{\mathbf{e}_4}\eta$ são ambos nulos. logo, η é constante ao longo da superfície integral $\mathcal{F}^2$ e $\tilde{\eta}$ está bem definido. Seja S uma superfície transversal à folha $\mathcal{F}^2$ de $\mathcal{D}_p$ no ponto $p \in M^4$ tal que $T_p S = \text{span}\{\mathbf{e}_1|_p, \mathbf{e}_2|_p\}$ e $T_p \mathcal{F} = \text{span}\{\mathbf{e}_3|_p, \mathbf{e}_4|_p\}$. De $\pi: M^4 \rightarrow \mathbb{V}^2$ ser submersão temos

$$\text{span}\{d\pi_p(\mathbf{e}_1|_p), d\pi_p(\mathbf{e}_2|_p)\} = T_{\pi(p)}\mathbb{V}^2.$$

A terceira equação dada em (5.8) implica que

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta}_{\pi(p)}(d\pi_p(\mathbf{e}_1|_p)) &= d(\tilde{\eta} \circ \pi)_p(\mathbf{e}_1|_p) = d\eta_p(\mathbf{e}_1|_p) = -\lambda(p)\mathbf{e}_1|_p; \\ d\tilde{\eta}_{\pi(p)}(d\pi_p(\mathbf{e}_2|_p)) &= \lambda(p)\mathbf{e}_2|_p. \end{aligned}$$

Também, a primeira forma fundamental $\tilde{\eta}$ é dada por

$$ds_{\tilde{\eta}}^2 = \lambda^2(\omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2).$$

Como $\lambda(p) > 0$ para todo $p \in M^4$, então $\tilde{\eta}: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ é uma imersão. Agora mostraremos que $\tilde{\eta}$ é mínima. Para isto, seja

$$\{X_1, X_2\} = \left\{ d\pi_p\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_1|_p\right), d\pi_p\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_2|_p\right) \right\}$$

uma base ortonormal de $T_{\pi(p)}\mathbb{V}^2$ e $\{X_3, X_4, X_5\}$ um referencial ortogonal no fibrado normal de $\tilde{\eta}$ tal que

$$X_3 \circ \pi|_S = \mathbf{e}_3|_S, \quad X_4 \circ \pi|_S = \mathbf{e}_4|_S, \quad X_5 \circ \pi|_S = \mathbf{g}|_S.$$

A segunda forma fundamental $\mathbf{B}_{\pi(p)}$ of $\tilde{\eta}$ é determinada pelas formas bilineares

$$\Pi_{\tilde{\eta}}^{\alpha} := -\langle d\tilde{\eta}, dX_{\alpha} \rangle_{\pi(p)}, \quad \alpha = 3, 4, 5.$$

De (5.8) pode-se verificar que

$$\begin{aligned}\Pi_{\tilde{\eta}}^3(X_i \otimes X_j) &= -\frac{1}{\lambda^2} \langle d\eta, d\mathbf{e}_3 \rangle (\mathbf{e}_{i|p} \otimes \mathbf{e}_{j|p}), \quad i, j = 1, 2; \\ &= \frac{1}{\lambda} (\omega_1 \otimes \omega_{13} - \omega_2 \otimes \omega_{23}) (\mathbf{e}_{i|p} \otimes \mathbf{e}_{j|p}); \\ \Pi_{\tilde{\eta}}^4(X_i \otimes X_j) &= \frac{1}{\lambda} (\omega_1 \otimes \omega_{14} - \omega_2 \otimes \omega_{24}) (\mathbf{e}_{i|p} \otimes \mathbf{e}_{j|p}); \\ \Pi_{\tilde{\eta}}^5(X_i \otimes X_j) &= \frac{1}{\lambda} (\omega_1 \otimes \omega_1 - \omega_2 \otimes \omega_2) (\mathbf{e}_{i|p} \otimes \mathbf{e}_{j|p}).\end{aligned}$$

Denotando com $\tilde{A}^\alpha$ o operador de Weingarten de $\tilde{\eta}$ em $\pi(p)$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{A}^3 &= \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} \omega_{13}(\mathbf{e}_1) & \omega_{13}(\mathbf{e}_2) \\ -\omega_{23}(\mathbf{e}_1) & -\omega_{23}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^4 = \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} \omega_{14}(\mathbf{e}_1) & \omega_{14}(\mathbf{e}_2) \\ -\omega_{24}(\mathbf{e}_1) & -\omega_{24}(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}^5 &= \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{\eta}$ é uma imersão mínima se, e somente se

$$\begin{cases} \omega_{13}(\mathbf{e}_1) - \omega_{23}(\mathbf{e}_2) = 0 \\ \omega_{14}(\mathbf{e}_1) - \omega_{24}(\mathbf{e}_2) = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Fazendo a derivada exterior de (5.9) obtemos

$$d\omega_{5i} = d\lambda_i \wedge \omega_i - \lambda_i \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k.$$

Da equação de Codazzi segue-se que

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \omega_{ik} \wedge \omega_k = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

Substituindo esta equação em $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i$ temos

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1[\lambda] - 2\lambda \omega_{12}(\mathbf{e}_2) = 0 \\ \mathbf{e}_2[\lambda] + 2\lambda \omega_{12}(\mathbf{e}_1) = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3[\lambda] + \lambda \omega_{13}(\mathbf{e}_1) = 0 \\ \mathbf{e}_3[\lambda] + \lambda \omega_{23}(\mathbf{e}_2) = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{e}_4[\lambda] + \lambda \omega_{14}(\mathbf{e}_1) = 0 \\ \mathbf{e}_4[\lambda] + \lambda \omega_{24}(\mathbf{e}_2) = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\begin{cases} 2\omega_{12}(\mathbf{e}_3) + \omega_{23}(\mathbf{e}_1) = 0 \\ 2\omega_{12}(\mathbf{e}_4) + \omega_{24}(\mathbf{e}_1) = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Logo, as equações (5.16) garantem que a condição (5.13) é satisfeita. Portanto, $\tilde{\eta}$ é mínima, e

$$\tilde{A}^3 = \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} -g_3 & f_3 \\ f_3 & g_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^4 = \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} -g_4 & f_4 \\ f_4 & g_4 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}^5 = \frac{1}{\lambda(p)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

De (5.11), (5.15), (5.16) e (5.17), temos as matrizes antisimétricas

$$\begin{aligned} (\omega_{ij}(\mathbf{e}_1)) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{e}_2[\ln \lambda] & -g_3 & -g_4 \\ * & 0 & -f_3 & -f_4 \\ * & * & 0 & \omega_{34}(\mathbf{e}_1) \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \\ (\omega_{ij}(\mathbf{e}_2)) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mathbf{e}_1[\ln \lambda] & f_3 & f_4 \\ * & 0 & -g_3 & -g_4 \\ * & * & 0 & \omega_{34}(\mathbf{e}_2) \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \\ (\omega_{ij}(\mathbf{e}_3)) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_3}{2} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \omega_{34}(\mathbf{e}_3) \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (\omega_{ij}(\mathbf{e}_4)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{f_4}{2} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \omega_{34}(\mathbf{e}_4) \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e as relações

$$\begin{cases} \mathbf{e}_3[\lambda] = \lambda g_3 \\ \mathbf{e}_4[\lambda] = \lambda g_4. \end{cases} \quad (5.18)$$

Usando as equações (2.25) temos que K e K_N da imersão mínima $\widetilde{\eta}: \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{S}^5$ são dadas por

$$K(\pi(p)) = 1 - \frac{1}{\lambda^2} (1 + f_3^2 + f_4^2 + g_3^2 + g_4^2), \quad (5.19)$$

$$R_{3412} = \frac{2}{\lambda^2} (f_3 g_4 - f_4 g_3), \quad R_{3512} = -\frac{2f_3}{\lambda^2}, \quad R_{4512} = -\frac{2f_4}{\lambda^2}, \quad (5.20)$$

$$K_N(\pi(p)) = \frac{16}{\lambda^4} (f_3^2 + f_4^2 + (f_3 g_4 - f_4 g_3)^2). \quad (5.21)$$

Fazendo os cálculos apropriados

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= -\frac{1}{2}\mathbf{e}_2[\ln \lambda]\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1[\ln \lambda]\mathbf{e}_2 + 2f_3\mathbf{e}_3 + 2f_4\mathbf{e}_4, \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= g_3\mathbf{e}_1 + \frac{f_3}{2}\mathbf{e}_2 + \omega_{34}(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_4, \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] &= -\frac{f_3}{2}\mathbf{e}_1 + g_3\mathbf{e}_2 + \omega_{34}(\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_4, \\ [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1] &= g_4\mathbf{e}_1 + \frac{f_4}{2}\mathbf{e}_2 - \omega_{34}(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3, \\ [\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2] &= -\frac{f_4}{2}\mathbf{e}_1 + g_4\mathbf{e}_2 - \omega_{34}(\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3, \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4] &= \omega_{34}(\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 + \omega_{34}(\mathbf{e}_4)\mathbf{e}_4. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aplicando a relação entre a operação colchete sobre campos e a derivada exterior de 1-formas, obtemos as derivadas das funções f_i e g_j em cada direção $\mathbf{e}_k$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1[f_3] &= -\mathbf{e}_2[g_3] - \omega_{34}(\mathbf{e}_1)f_4 - \omega_{34}(\mathbf{e}_2)g_4 \\ \mathbf{e}_2[f_3] &= \mathbf{e}_1[g_3] + \omega_{34}(\mathbf{e}_1)g_4 - \omega_{34}(\mathbf{e}_2)f_4 \\ \mathbf{e}_1[f_4] &= -\mathbf{e}_2[g_4] + \omega_{34}(\mathbf{e}_1)f_3 + \omega_{34}(\mathbf{e}_2)g_3 \\ \mathbf{e}_2[f_4] &= \mathbf{e}_1[g_4] - \omega_{34}(\mathbf{e}_1)g_3 + \omega_{34}(\mathbf{e}_2)f_3; \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3[f_3] &= 2f_3g_3 - \omega_{34}(\mathbf{e}_3)f_4 \\ \mathbf{e}_3[f_4] &= f_3g_4 + f_4g_3 + \omega_{34}(\mathbf{e}_3)f_3 \\ \mathbf{e}_3[g_3] &= g_3^2 - f_3^2 + 1 - \omega_{34}(\mathbf{e}_3)g_4 \\ \mathbf{e}_3[g_4] &= g_3g_4 - f_3f_4 + \omega_{34}(\mathbf{e}_3)g_3; \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_4[f_3] &= f_3g_4 + f_4g_3 - \omega_{34}(\mathbf{e}_4)f_4 \\ \mathbf{e}_4[f_4] &= 2f_4g_4 + \omega_{34}(\mathbf{e}_4)f_3 \\ \mathbf{e}_4[g_3] &= g_3g_4 - f_3f_4 - \omega_{34}(\mathbf{e}_4)g_4 \\ \mathbf{e}_4[g_4] &= g_4^2 - f_4^2 + 1 + \omega_{34}(\mathbf{e}_4)g_3. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Novamente fazendo os cálculos apropriados, usando (5.24) e (5.25), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3[f_3^2 + f_4^2 + g_3^2 + g_4^2] &= 2g_3(f_3^2 + f_4^2 + g_3^2 + g_4^2 + 1) \\ \mathbf{e}_4[f_3^2 + f_4^2 + g_3^2 + g_4^2] &= 2g_4(f_3^2 + f_4^2 + g_3^2 + g_4^2 + 1) \\ \mathbf{e}_3[R_{3412}] &= R_{4512} \\ \mathbf{e}_4[R_{3412}] &= -R_{3512} \\ \mathbf{e}_3[R_{3512}] &= -\omega_{34}(\mathbf{e}_3)R_{4512} \\ \mathbf{e}_4[R_{3512}] &= R_{3412} - \omega_{34}(\mathbf{e}_4)R_{4512} \\ \mathbf{e}_3[R_{4512}] &= -R_{3412} + \omega_{34}(\mathbf{e}_3)R_{3512} \\ \mathbf{e}_4[R_{4512}] &= \omega_{34}(\mathbf{e}_4)R_{3512}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Usando estas últimas equações segue-se que

$$\mathbf{e}_3[K] = 0, \quad \mathbf{e}_4[K] = 0, \quad \mathbf{e}_3[K_N] = 0, \quad \mathbf{e}_4[K_N] = 0.$$

Portanto, as funções K and K_N são constantes sobre $\mathcal{F}^2$, e isto garante que $\tilde{\eta}$ está bem definida.

Pelo teorema 5.2 $\mathbf{x}_{\tilde{\eta}} : \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{S}^5$ é uma hipersuperfície mínima, imersa em $\mathbb{S}^5$ com curvatura Gauss-Kronecker and 3-curvatura média nulas.

Para finalizar defina $\tau : M_*^4 \rightarrow \mathcal{N}_*$ por $\tau(p) = (\pi(p), \mathbf{g}(p))$. logo, $\mathbf{x}_{\tilde{\eta}} \circ \tau(p) = \mathbf{g}(p)$. Dado que, $\pi = \pi_1 \circ \tau$ temos que $\eta|_{M_*^4} = \tilde{\eta} \circ \pi_1 \circ \tau$ e a métrica sobre $\mathcal{N}_*$ é induzida por $\mathbf{x}_{\tilde{\eta}}$ e então τ é uma isometria local. Isto prova o teorema. $\square$

Bibliografía

- [1] A.C. Asperti, R.M.B. Chaves, and L.A.M. Sousa Jr., *The gauss-kronecker curvature of minimal hypersurfaces in four- dimensional space forms*, Math Z. **267** (2011), 523–533.
- [2] E. Cartan, *Families de surfaces isoparametriques dans les espaces à courvure constante.*, Annali di Mat **17** (1938), 177–191.
- [3] ———, *Sur quelque familles remarquables d’hypersurfaces*, C.R Congrès Math Liège (1967), 30–41.
- [4] Q.M. Cheng, *The classification of complete hypersurfaces with non-zero constant mean curvature of space form of dimension 4*, Memoirs of the faculty of science, Kyushu University (1993), 79–102.
- [5] S.S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of the sphere with second fundamental form of constant lenght*, Functional Analysis and Related Fields **1** (1970).
- [6] S. de Almeida and F. Brito, *Closed 3-dimensional hypersurfaces with constant mean curvature and constant scalar curvature*, Duke Math. J (1990), 195–206.
- [7] S.C. de Almeida, Sousa Brito, and Luiz Amancio M. Jr, *Closed hypersurfaces of S^4 with two constant curvatures functions*, Results math. **50** (2007), 17–26.
- [8] M. do Carmo, *O método do referencial móvel*, 2008.
- [9] D. Ferus, *On the completeness of nullity foliations.*, The Michigan Mathematical Journal **18** (1971), 61–64.
- [10] T. Hasanis, A. Savas-Halilaj, and T. Vlachos, *Complete minimal hypersurfaces in S^4 with zero gauss-kronecker curvature*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142** (2007), 125–132.
- [11] E. L. Lima, *Fundamental groups and covering spaces*, 2003.

- [12] T. Lusala, *Non-closed minimal hypersurfaces of S^4 with identically zero gauss-kronecker curvature*, Hokkaido Mathematical Journal (2004), 65–82.
- [13] T. Lusala and A. de Oliveira, *Closed hypersurfaces of $S^4(1)$ with constant mean curvature and zero gauss-kronecker curvature*, C.R. Acad. Sci. Paris **340** (2005), 437–440.
- [14] K. Numizu and B. Smyth, *A formula of simon's type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry (1969), 367–377.
- [15] H. Omori, *Isometric immersions of riemannian manifolds.*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205–214.
- [16] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **22** (1957), 111–123.
- [17] R. S. Palis and C. Terng, *Critical point theory and submanifold theory*, 1988.
- [18] S. Pigola, M. Rigoli, and A.G. Setti, *Harmonic function on complete riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (2003), 1283–1288.
- [19] ———, *Maximum principles on riemannian manifolds and applications.*, Mem. Amer. Math. Soc. **174** (2005).
- [20] J. Ramanathan, *Minimal hypersurfaces of S^4 with vanishing gauss-kronecker curvature*, Math. Z. (1990), 645–658.
- [21] P.J. Ryan, *hypersurfaces with parallel ricci tensor.*, Osak. j.Math **8** (1971), 251–259.
- [22] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society **97** (1976).
- [23] S.T. Yau, *Harmonic functions on complete riemannian manifolds.*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201–228.