**Versões não-lineares do
teorema clássico de Banach-Stone**

André Luis Porto da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, 20 de Fevereiro de 2015

Versões não-lineares do teorema clássico de Banach-Stone

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 20/02/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof.^a Dr.^a Daniela Mariz Silva Vieira - USP

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, que sempre me acompanharam em meus sucessos e fracassos. Em memória, aos meus pais Lourdes e Altamir e às minhas tias Aparecida e Regina, que nunca mediram esforços em minha educação, me dando amor e amparo enquanto puderam estar presentes. Aonde quer que estejam, sempre os terei comigo.

Agradeço ao meu orientador por ser muito atencioso com minhas falhas, me possibilitando, durante a redação deste trabalho, um grande aprendizado, tanto na escrita quanto na forma de organização e exposição das ideias.

Agradeço à Prof.^a Dr.^a Zara, que, desde o segundo ano de minha Graduação até o Mestrado, me guiou nos estudos de Análise Funcional e Topologia. Tenho nela a inspiração do docente que um dia quero ser.

Agradeço à minha namorada, Letícia Costa, que, com a inteligência e a sensibilidade que sempre admirei, me deu o apoio e a companhia imprescindíveis para o meu trajeto do Mestrado.

Agradeço à minha irmã, por ser uma grande conselheira e ter me incentivado o questionamento e a curiosidade. Com ela, sempre estive confortável por ansiar o conhecimento.

Agradeço aos meus amigos Chico, Rafael, Diego Diniz, Everton, Gilson, Salvador, André Zaidan e Valdir.

Finalmente, agradeço aos professores doutores Antonio Roberto da Silva e Daniela Mariz Silva Vieira por terem aceitado fazer parte da banca avaliadora desta dissertação.

Agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Para um espaço localmente compacto Hausdorff X , denotamos por $C_0(X)$ o espaço de Banach das funções a valores reais contínuas em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo. O teorema clássico de Banach-Stone estabelece que, para dois espaços localmente compactos Hausdorff X e Y , a existência de um isomorfismo isométrico entre os espaços $C_0(X)$ e $C_0(Y)$ implica que X e Y são homeomorfos.

No presente trabalho apresentamos dois teoremas obtidos por Górak em 2011, que são generalizações para o Teorema de Banach-Stone, envolvendo uma classe de funções não-necessariamente lineares, denominadas quasi-isometrias, cuja definição destacamos abaixo:

Dados dois espaços métricos (E, d_E) e (F, d_F) , dizemos que uma bijeção $T : E \rightarrow F$ é uma (M, L) -quasi-isometria bijetora se satisfaz:

$$\frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) - L \leq d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) + L, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

No primeiro teorema a ser apresentado, é provado que, para dois espaços localmente compactos Hausdorff X e Y , a existência de uma (M, L) -quasi-isometria bijetora $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$, com $M^2 < 16/15$, implica que X e Y são homeomorfos.

O segundo teorema que estabelece que, no caso em que X e Y são espaços compactos Hausdorff, é suficiente a existência de uma (M, L) -quasi-isometria bijetora $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ com $M^2 < 6/5$ para garantir um homeomorfismo entre X e Y .

O trabalho começa com uma introdução dos conceitos envolvidos nos dois Teoremas de Górak, posteriormente, no segundo capítulo, mencionamos problemas em aberto oriundos deles e, finalmente, nos dois últimos capítulos, efetuamos as demonstrações.

Palavras-chave: Teorema de Banach-Stone, espaços $C_0(X)$, geometria não-linear de espaços de Banach, distância-malha, quasi-isometria.

Abstract

Let X be a locally compact Hausdorff space. By $C_0(X)$ we denote the Banach space of all real-valued continuous functions defined in X which vanish at infinity, provided with the supremum norm. The well-known Banach-Stone Theorem states that for two locally compact Hausdorff spaces X and Y the existence of an isometric isomorphism between the spaces $C_0(X)$ and $C_0(Y)$ implies that X and Y are homeomorphic.

In this work we present two theorems proved by Górak in 2011. These results are generalizations of the Banach-Stone Theorem involving a class of not-necessarily linear functions, called quasi-isometries, which we define as follows:

Given two metric spaces (E, d_E) and (F, d_F) we say that a bijection $T : E \rightarrow F$ is a bijective (M, L) -quasi isometry if it satisfies

$$\frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) - L \leq d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) + L, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

The first theorem states that for two locally compact Hausdorff spaces X and Y , the existence of a bijective (M, L) -quasi isometry $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ with $M^2 < 16/15$ implies that X and Y are homeomorphic.

The second theorem asserts that, when X and Y are compact Hausdorff spaces, the existence of a bijective (M, L) -quasi-isometry $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ with $M^2 < 6/5$ is sufficient to give us an homeomorphism between X and Y .

The work starts with an introduction of the concepts applied on both Górak's Theorem, then, at the second chapter, we mention some open problems given by them. Finally in the last chapters we present their proofs.

Keywords: Banach-Stone theorem, $C_0(X)$ spaces, nonlinear geometry of Banach spaces, net distance, quasi isometry.

Sumário

Notação e convenções	vii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Noções básicas	1
1.2 Redes em espaços topológicos	2
1.3 Classes de funções não-necessariamente lineares	4
1.4 Malhas em espaços métricos	12
1.5 Distâncias entre espaços normados e suas relações com quasi-isometrias	17
2 Os Teoremas de Górak e problemas em aberto	27
3 O Teorema de Górak para espaços localmente compactos	31
3.1 Um lema importante envolvendo espaços $C_0(X)$	32
3.2 Homeomorfismos entre espaços localmente compactos gerados por quasi-isometrias	47
3.3 A existência de uma função sinal contínua para espaços localmente compactos	53
3.4 Demonstração do teorema principal	61
4 O Teorema de Górak para espaços compactos	65
4.1 Um lema importante envolvendo espaços $C(X)$	65
4.2 Homeomorfismos entre espaços compactos gerados por quasi-isometrias	69
4.3 A existência de uma função sinal contínua para espaços compactos	75
4.4 Demonstração do teorema principal	82
Referências Bibliográficas	85

Notação e convenções

No presente trabalho, consideraremos $\mathbb{N}$ como sendo o conjunto dos números inteiros não-negativos. O símbolo $\mathbb{R}^*$ denotará o conjunto dos números reais não-nulos, $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não-negativos e $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais estritamente positivos, estendendo também esta notação, de forma análoga, para $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Em alguns resultados, utilizaremos a função $sign : \mathbb{R}^* \rightarrow \{-1, 1\}$ definida como $sign(x) = x/|x|$.

Dado U um conjunto qualquer, chamaremos de enumeração de U a toda função $f : \tau \rightarrow U$, bijetora, de um ordinal sobre U , denotando-a por $(u_\alpha)_{\alpha \in \tau}$. Para toda função f e todo A subconjunto do domínio de f , denotaremos $f[A] := \{f(a) \mid a \in A\}$.

Dado X espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $U \subset X$, faremos uso da seguinte notação: $\|f\|_U := \sup_{x \in U} |f(x)|$. Além disso, para todo $x \in X$ diremos que $V \subset X$ é vizinhança de x se existe $V' \subset X$ conjunto aberto tal que $x \in V' \subset V$. Denotaremos por $\mathcal{V}_x^X$ o conjunto de todas as vizinhanças $V \subset X$ de x , podendo também ser denotado por $\mathcal{V}_x$ no caso em que X estiver implícito.

Quando estivermos considerando um espaço métrico E , o símbolo $B_E(x, r)$ denotará a bola aberta (e $B_E[x, r]$ a bola fechada) de E , de raio r , centrada no ponto $x \in E$, podendo também ser denotada por $B(x, r)$ (respectivamente, $B[x, r]$) quando o espaço E estiver implícito. Em alguns resultados empregaremos a função $diam$ definida como $diam(U) = \sup_{u_1, u_2 \in U} d_E(u_1, u_2)$, para todo $U \subset E$.

Dados dois espaços topológicos X e Y , diremos que $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se f é uma função bijetora e as funções f e f^{-1} são contínuas. Sempre que existir um homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, diremos que os espaços X e Y são homeomorfos, denotando por $X \approx Y$, .

Dados dois espaços normados E e F , diremos que $T : E \rightarrow F$ é um isomorfismo se T é uma função linear bijetora e as funções T e T^{-1} são contínuas. Se, além disso, T for uma isometria entre os espaços E e F , T será denominado um isomorfismo isométrico. Sendo assim, sempre que existir um isomorfismo $T : E \rightarrow F$, diremos que os espaços E e F são isomorfos e, no caso em que T for um isomorfismo isométrico diremos que E e F são isometricamente isomorfos.

O símbolo “□” sinalizará o término de uma demonstração. Algumas vezes será necessário provar afirmações durante a demonstração de um resultado, neste caso, utilizaremos “■” para sinalizar o fim da prova da afirmação.

Introdução

Para um espaço localmente compacto Hausdorff X , denotamos por $C_0(X)$ o espaço de Banach das funções a valores reais contínuas em X que se anulam no infinito, munido da norma do supremo.

O teorema clássico de Banach-Stone afirma que se os espaços $C_0(X)$ e $C_0(Y)$ são isometricamente isomorfos então X e Y são homeomorfos. O primeiro resultado deste tipo foi provado por Banach [2] em 1933 para espaços métricos compactos. Posteriormente, em 1937, Stone [19] estendeu-o para espaços compactos Hausdorff.

Desde então, esse teorema passou por uma série de extensões. Por exemplo, em [3], foi obtida a seguinte versão:

Teorema 0.1 (7.1 de [3]). *Se $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ é um isomorfismo isométrico, então existem um homeomorfismo $\phi : Y \rightarrow X$ e uma função contínua $\lambda : Y \rightarrow \{-1, 1\}$, tais que*

$$Tf(y) = \lambda(y)f(\phi(y)), \quad \forall y \in Y.$$

Esta versão, além de garantir que X e Y são homeomorfos, também estabelece que todo isomorfismo isométrico entre $C_0(X)$ e $C_0(Y)$ é gerado por um homeomorfismo ϕ e uma função contínua λ como acima.

Posteriormente, Amir, em 1965 [1], e Cambern, em 1967 [6] e [7], por meio de resultados independentes, forneceram uma generalização do Teorema de Banach-Stone em que a hipótese sobre a isometria entre os espaços $C_0(X)$ foi enfraquecida para a existência de um isomorfismo bem-comportado. Isto é:

Teorema 0.2 (Amir-Camborn). *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ um isomorfismo. Se $\|T\| \|T^{-1}\| < 2$ então X e Y são homeomorfos.*

Após a publicação deste teorema, ficou aberta a questão se o número 2, em seu enunciado, é o maior possível. Após três anos, o próprio Cambern, em [8], exibiu dois espaços localmente compactos Hausdorff X e Y , com X compacto e Y não-compacto, e um isomorfismo $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ tal que $\|T\| \|T^{-1}\| = 2$, provando que 2 é a melhor constante possível no contexto dos espaços localmente compactos.

A mesma questão persistiu para o contexto mais restrito, dos espaços compactos. Em 1975, Cohen [9] exibiu dois espaços compactos não-homeomorfos e um isomorfismo $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ tal que $\|T\| \|T^{-1}\| = 2$, possibilitando, finalmente, concluir que a hipótese $\|T\| \|T^{-1}\| < 2$ também é a melhor possível para a classe dos espaços compactos.

Jarosz [17], em 1989, foi o primeiro a apresentar uma generalização não-linear do Teorema de Banach-Stone. O resultado por ele provado levava em consideração uma classe de funções que ele próprio denominou ε -bi-Lipschitz, que definimos abaixo:

Definição 0.3. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos e $T : E \rightarrow F$. Dizemos que T é ε -bi-Lipschitz se satisfaz*

$$(1 - \varepsilon)d_E(x, y) \leq d_F(T(x), T(y)) \leq (1 + \varepsilon)d_E(x, y) \quad \forall x, y \in E$$

Observe, na definição acima, que uma função ε -bi-Lipschitz não é necessariamente linear. Jarosz provou que existe um $\varepsilon_0 > 0$ universal, tal que, se $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ é uma função ε -bi-Lipschitz bijetora com $\varepsilon < \varepsilon_0$ então X e Y são homeomorfos. O mesmo não se preocupa em procurar qual é o maior valor de ε_0 satisfazendo esta propriedade. Observamos que o método de demonstração utilizado por ele só nos possibilita encontrar valores para ε_0 menores que 10^{-30} .

Em 2005, Dutriex e Kalton em [10], apresentaram uma melhora do resultado de Jarosz que, não só permite a obtenção de um valor maior para ε_0 ($\varepsilon_0 = 1/33$), como também possui uma hipótese, envolvendo “distância-malha”, que é mais geral que a existência de uma função ε -bi-Lipschitz entre os espaços de funções contínuas.

Mais precisamente, eles provaram que se a distância-malha entre $C_0(X)$ e $C_0(Y)$, que aqui denotaremos por $d_m(C_0(X), C_0(Y))$, for estritamente menor que $17/16$, então X e Y são homeomorfos. Não entraremos em detalhes aqui quanto à definição de d_m . Este conceito será apresentado na seção 1.5.

Por fim, em 2011, Górak, em [13] e [14], utilizando uma técnica inspirada na demonstração de Jarosz, provou dois teoremas que implicam numa melhora do Teorema de Dutriex e Kalton.

O objetivo desta dissertação é, portanto, apresentar estes Teoremas de Górak, demonstrando-os em detalhes e discorrendo sobre suas implicações e questões em aberto por eles motivadas.

Veremos no Capítulo 2, que estes teoremas implicam o seguinte corolário:

Corolário 0.4. *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff. Temos:*

- (i) *Se $d_m(C_0(X), C_0(Y)) < 16/15$ então $X \approx Y$.*
- (ii) *Se X e Y são compactos e $d_m(C(X), C(Y)) < 6/5$ então $X \approx Y$.*

Portanto, os resultados de Górak acima mencionados produziram uma melhora da constante obtida por Dutriex e Kalton de $17/16$ para $16/15$, bem como um aumento desta, quando os espaços X e Y são compactos, para $6/5$.

A presente dissertação estrutura-se do seguinte modo: começaremos com um capítulo de preliminares, estabelecendo alguns conceitos prévios. No segundo capítulo, faremos a apresentação dos dois Teoremas de Górak a serem provados, veremos alguns corolários dos teoremas envolvendo os conceitos de distância-malha e distância uniforme e apresentaremos dois problemas em aberto, propostos por Górak em [13]. Encerramos com os capítulos 3 e 4, onde serão feitas as demonstrações dos resultados de Górak no contexto dos espaços localmente compactos e dos espaços compactos, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

Para apresentarmos os resultados de Górak, bem como para discorrermos a respeito de suas consequências para a teoria, necessitamos ter em mente alguns conceitos importantes, que aqui serão destacados.

Na primeira seção deste capítulo, recordaremos alguns conceitos básicos. Na segunda seção, faremos uma introdução à noção de redes.

Em seguida, na terceira seção, definiremos as quasi-isometrias de forma gradativa por meio de uma breve exposição de classes de funções de uso comum na teoria dos espaços métricos e suas propriedades.

Na quarta seção, introduziremos o conceito de malha em espaços métricos e algumas de suas propriedades quando definidas em espaços de Banach. Finalmente, na última seção, veremos a definição de distância-malha e distância uniforme entre espaços normados, relacionando-as com as quasi-isometrias nesses espaços.

1.1 Noções básicas

Nesta dissertação serão empregados os seguintes resultados da teoria dos conjuntos:

Lema 1.1 (de Zorn)([16], pg.142). *Dado $(U, \leq)$ um conjunto ordenado, se toda cadeia de U admite um limitante superior, então U possui um elemento maximal.*

Uma introdução aos conceitos de conjunto ordenado, cadeia, limitante superior e elemento maximal pode ser obtida na Seção 2.5 de [16].

Teorema 1.2 (de Cantor-Bernstein-Schröder)([16], pg.66). *Dados X e Y conjuntos, se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$, então $|X| = |Y|$.*

As definições de cardinalidade de conjuntos, bem como da ordem de cardinais “ $\leq$ ”, empregada acima, pode ser encontrada na Seção 4.1 de [16].

Além desses resultados, também faremos uso da aritmética de cardinais e do princípio da indução transfinita, introduzidos nas seções 5.1 e 6.4 de [16], respectivamente.

Os espaços $C_0(X)$ serão de importância central em nosso estudo. Lembremos a sua definição.

Definição 1.3. *Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. Definimos como $C_0(X)$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas em X e com valores em $\mathbb{R}$ que se anulam no*

infinito, isto é, para cada $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_\epsilon \subset X$ tal que $|f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X \setminus K_\epsilon$. Definimos a função $\| \cdot \| : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Temos que $\| \cdot \|$ é uma norma, a qual denominamos norma do supremo, e $C_0(X)$ munido dela é um espaço de Banach. Sempre que X acima for compacto, denotaremos $C_0(X)$ por $C(X)$.

Faremos uso também do fato de que para todo espaço localmente compacto Hausdorff X , fixado $x \in X$, para cada $U \in \mathcal{V}_x$ é possível encontrar $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f \in C_0(X)$, satisfazendo: $f(x) = \|f\| = 1$ e $f[X \setminus U] = \{0\}$ (esta propriedade é provada em [11], pg.148). Segue disso, em particular, que, para todos $x_1, x_2 \in X$ distintos, é possível encontrar $f \in C_0(X)$ satisfazendo: $f(x_1) = \|f\| = 1$ e $f(x_2) = 0$.

Além disso, é um exercício interessante provar a propriedade de que para toda $f \in C_0(X)$ existe $x \in X$ que assume a norma de f , isto é, $|f(x)| = \|f\|$.

1.2 Redes em espaços topológicos

Dedicamos esta seção para apresentarmos algumas definições e resultados envolvendo redes. Uma rede é uma família indexada por um conjunto (que chamamos de conjunto dirigido) munido de uma relação de ordem, que nos possibilita generalizar a noção de sequência e convergência de sequência, advinda dos espaços métricos, para espaços topológicos em geral.

Definição 1.4. Um conjunto não-vazio $\mathcal{D}$ é dirigido se existir uma relação $\preceq$ em $\mathcal{D}$, satisfazendo:

- (i) $\alpha \preceq \alpha$, para todo $\alpha \in \mathcal{D}$;
- (ii) Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$, se $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma$, então $\alpha \preceq \gamma$;
- (iii) Para cada par α, β de elementos em $\mathcal{D}$, existe $\gamma_{\alpha, \beta}$ em $\mathcal{D}$ tal que $\alpha \preceq \gamma_{\alpha, \beta}$ e $\beta \preceq \gamma_{\alpha, \beta}$.

Definição 1.5. Sejam X um conjunto e $\mathcal{D}$ um conjunto dirigido. Uma rede em X é uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow X$ e o conjunto $\mathcal{D}$ é chamado de conjunto índice da rede. Usualmente, as redes são representadas de modo similar ao que é feito com sequências denotando $f(\alpha)$ por x_α , para cada $\alpha \in \mathcal{D}$, e f por $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$.

Dado X um espaço topológico e $x \in X$, um exemplo imediato de conjunto dirigido é $\mathcal{V}_x$, o conjunto de todas as vizinhanças de x , munido com a ordem da continência.

Vejamos abaixo o conceito de convergência de redes.

Definição 1.6. Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ uma rede em um espaço topológico X , dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ converge para $x \in X$ se, para toda $U \in \mathcal{V}_x$ existe $\alpha_U \in \mathcal{D}$ tal que $x_\alpha \in U$, $\forall \alpha_U \preceq \alpha$. Nesse caso x é chamado de limite de $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ e usamos a notação

$$x_\alpha \rightarrow x \text{ ou } \lim_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha = x.$$

Introduziremos abaixo a noção de sub-rede.

Definição 1.7. *Um subconjunto $\mathcal{D}'$ de um conjunto dirigido $\mathcal{D}$ é dito cofinal em $\mathcal{D}$, ou apenas cofinal, se para cada $\alpha \in \mathcal{D}$, existe $\beta_\alpha \in \mathcal{D}'$ de modo que $\alpha \preceq \beta_\alpha$.*

Definição 1.8. *Suponhamos que X seja um conjunto, $\mathcal{D}$ seja um conjunto dirigido e que $f : \mathcal{D} \rightarrow X$ seja uma rede. Além disso, suponhamos que $\mathcal{D}'$ seja um conjunto dirigido e $\phi : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ seja uma função de maneira que:*

- (i) *Para todos $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{D}'$, se $\beta_1 \preceq \beta_2$ então $\phi(\beta_1) \preceq \phi(\beta_2)$ em $\mathcal{D}$;*
- (ii) *$\phi[\mathcal{D}']$ é cofinal em $\mathcal{D}$.*

Então a rede $f \circ \phi : \mathcal{D}' \rightarrow X$ é chamada sub-rede de f .

Observe que, da definição acima, para toda rede $f : \mathcal{D} \rightarrow X$ e $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ cofinal, $f|_{\mathcal{D}'} : \mathcal{D}' \rightarrow X$ é sub-rede de f , bastando, para tal, tomar ϕ como sendo a inclusão de $\mathcal{D}'$ em $\mathcal{D}$.

Listamos abaixo algumas propriedades de sub-redes, que são muito similares às propriedades de sub-sequências em espaços métricos.

Proposição 1.9. *([18],pg.150) Seja D um conjunto dirigido e $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em um conjunto X .*

- (a) *A rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é sub-rede de si mesma;*
- (b) *Toda sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é uma rede em X ;*
- (c) *Toda sub-rede de uma sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é também uma sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$;*
- (d) *Se X é um espaço topológico e $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para um elemento $x \in X$, então toda sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para x ;*
- (e) *Se X é um espaço topológico e existe um elemento $x \in X$ tal que toda sub-rede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tem uma sub-rede convergindo para x , então $x_\alpha \rightarrow x$.*

Temos abaixo caracterizações, por meio de redes, dos conceitos de continuidade, espaço Hausdorff, compacidade, fecho e subconjunto fechado, todas elas muito similares às caracterizações clássicas destes por meio de sequências, no contexto dos espaços métricos.

Proposição 1.10. *([18],pg.146) Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função de X em Y .*

- (a) *A função f é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, $f(x_\alpha) \rightarrow f(x_0)$ para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergindo para x_0 .*
- (b) *A função f é contínua em X se, e somente se, para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergente, temos $f(x_\alpha) \rightarrow f\left(\lim_{\alpha \in D} x_\alpha\right)$.*

Proposição 1.11. *([18], pg.145) Um espaço topológico é Hausdorff se, e somente se, vale a unicidade do limite para cada rede convergente em X .*

Proposição 1.12. ([18],pg.152) *Um subconjunto S de um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda rede em S admite uma subrede convergente com limite em S .*

Proposição 1.13. ([18], pg.146) *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X e seja x um elemento de X . Então $x \in \overline{S}$ se, e somente se, existe uma rede de elementos de S convergindo para x .*

Proposição 1.14. ([18],pg.146) *Um subconjunto S de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, S contém os limites de todas redes convergentes, cujos elementos estão em S .*

Por fim, introduzimos abaixo as noções de $\liminf$ e $\limsup$ para redes de números reais.

Definição 1.15. *Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ uma rede de números reais, definimos:*

- $\limsup_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha := \inf_{\alpha_0 \in \mathcal{D}} \left[\sup_{\alpha \geq \alpha_0} x_\alpha \right];$
- $\liminf_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha := \sup_{\alpha_0 \in \mathcal{D}} \left[\inf_{\alpha \geq \alpha_0} x_\alpha \right].$

É um exercício fácil demonstrar as seguintes proposições:

Proposição 1.16. *Dada $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ uma rede de números reais, temos:*

$$\text{existe } \lim_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha \Leftrightarrow \liminf_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha = \limsup_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha,$$

e, no caso em que o limite existe, temos $\lim_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha = \liminf_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha = \limsup_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha$.

Proposição 1.17. *Sejam $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}} \subset \mathbb{R}$ e $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}} \subset \mathbb{R}$ redes tais que $x_\alpha \leq u_\alpha, \forall \alpha \in \mathcal{D}$.*

Temos:

- $\liminf_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha \leq \liminf_{\alpha \in \mathcal{D}} u_\alpha;$
- $\limsup_{\alpha \in \mathcal{D}} x_\alpha \leq \limsup_{\alpha \in \mathcal{D}} u_\alpha.$

Essas noções sobre redes são suficientes para entender este trabalho. É possível encontrar exemplos e mais resultados interessantes em [18].

1.3 Classes de funções não-necessariamente lineares

Nesta seção, veremos alguns tipos de funções muito utilizados no estudo dos espaços métricos. Por serem definições envolvendo espaços métricos em geral, nelas não é exigida a linearidade, conceito inerente aos espaços vetoriais.

Apesar disso, quando definidas entre espaços normados, devido às boas características de norma, tais funções possuem propriedades muito úteis que aqui serão apresentadas. Todas as definições e propriedades servirão como base para definirmos a classe das quasi-isometrias que, no contexto de espaços normados, veremos, contém todas as classes de bijeções que serão vistas neste capítulo. Por fim, a seção se encerra com algumas propriedades das quasi-isometrias das quais faremos uso nas próximas seções.

I. Funções uniformemente contínuas e homeomorfismos uniformes

O conceito de homeomorfismo, no contexto dos espaços métricos, pode ser uma definição muito geral quando se deseja trabalhar com funções que preservem determinadas características, como, por exemplo, a completude. Em outras palavras, apesar de este garantir uma equivalência topológica entre os espaços, sua existência pode não ser suficiente para assegurar que certas propriedades das métricas sejam perpetuadas.

Vejamos um exemplo abaixo:

Exemplo 1.18. Definimos $f : [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$ tal que $f(x) = \frac{x}{1-x}$.
Consideremos os dois intervalos munidos da métrica induzida pela métrica de $\mathbb{R}$.

É fácil de se constatar que f é um homeomorfismo.

Note que, apesar dos intervalos serem homeomorfos, $[0, +\infty[$ é não-limitado e, por ser um fechado de $\mathbb{R}$, é completo.

No entanto, $[0, 1[$ é limitado e não-completo, pois as sequências de elementos de $[0, 1[$ convergindo para 1 não são convergentes em $[0, 1[$.

Isto ilustra um problema ao se trabalhar com espaços métricos considerando apenas homeomorfismos. Neste caso, exibimos dois espaços métricos topologicamente equivalentes e que possuem características métricas muito distintas.

Quando exigimos apenas que f seja um homeomorfismo, não temos controle sobre as distâncias entre as imagens dos pontos. Perdemos muita informação a respeito das métricas ao permití-los que “estiquem” e “comprimam” os espaços livremente.

Definimos abaixo uma classe de funções que diminuam esta liberdade:

Definição 1.19. Dados (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos, dizemos que $T : E \rightarrow F$ é:

(i) *uniformemente contínua* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ satisfazendo:

$$\forall u_1, u_2 \in E, \quad d_E(u_1, u_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_F(T(u_1), T(u_2)) < \varepsilon$$

(ii) *homeomorfismo uniforme* se T é bijetora com T e T^{-1} uniformemente contínuas.

Pelo fato do $\delta > 0$ em (i) não depender de u_1 e u_2 , mas apenas de $\varepsilon > 0$, as funções uniformemente contínuas e os homeomorfismos uniformes “expandem” e “comprimem” o espaço de forma homogênea, isto é, de modo igual para todas as suas regiões. Como consequência disso, temos, por exemplo, que os homeomorfismos uniformes levam sequências de Cauchy de E em sequências de Cauchy de F e vice-versa, e que, portanto, preservam a completude.

II. Funções Lipschitz e bi-Lipschitz

Ao fazermos o estudo elementar de funções lineares, temos que, dados dois espaços normados E e F e uma função linear $T : E \rightarrow F$, T é contínua se, e somente se, existe $M > 0$ tal que

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq M\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

A propriedade acima se mostrou importante também em outros contextos. À classe das funções que a satisfazem foi dado o nome Lipschitz, homenagem a um dos primeiros matemáticos a estudá-las. Posteriormente, este conceito se provou bastante útil também para o estudo da geometria dos espaços métricos em geral e, de forma natural, definiu-se também as funções bi-Lipschitz e a constante Lipschitz.

Definição 1.20. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos e $T : E \rightarrow F$ uma função. Dizemos que:*

- (i) *T é Lipschitz se existe $M > 0$ satisfazendo $d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in E$;*
- (ii) *T é bi-Lipschitz se T é bijetora e T e T^{-1} são Lipschitz.*

Para T função Lipschitz, definimos a sua constante Lipschitz como sendo:

$$l(T) := \sup_{u_1 \neq u_2} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)}.$$

Vejamos a seguir algumas propriedades básicas:

Lema 1.21. *Dados E e F espaços normados, para toda bijeção $T : E \rightarrow F$, temos que T é bi-Lipschitz se, e somente se, existe $M > 0$ tal que*

$$\frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) \leq d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2).$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Claramente, T é Lipschitz.

Por outro lado, dados $v_1, v_2 \in F$, fazendo $u_1 := T^{-1}v_1$ e $u_2 := T^{-1}v_2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) \leq d_F(Tu_1, Tu_2) &\Rightarrow \frac{1}{M}d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq d_F(T(T^{-1}v_1), T(T^{-1}v_2)) = d_F(v_1, v_2) \\ &\Rightarrow d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq Md_F(v_1, v_2), \end{aligned}$$

e disso segue que T^{-1} também é Lipschitz.

($\Rightarrow$) Sejam $M', M'' > 0$ tais que:

$$\begin{cases} d_F(Tu_1, Tu_2) \leq M'd_E(u_1, u_2) & , \quad \forall u_1, u_2 \in E \\ d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq M''d_F(v_1, v_2) & , \quad \forall v_1, v_2 \in F \end{cases}.$$

Seja $M := \max\{M', M''\}$, e façamos acima $v_1 := Tu_1$ e $v_2 := Tu_2$, temos

$$\begin{cases} d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) \\ d_E(u_1, u_2) = d_E(T^{-1}(Tu_1), T^{-1}(Tu_2)) \leq Md_F(Tu_1, Tu_2) \end{cases}, \quad \forall u_1, u_2 \in E,$$

logo,

$$\begin{cases} d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) \\ \frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) \leq d_F(Tu_1, Tu_2) \end{cases}, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

□

Proposição 1.22. *Toda função Lipschitz é uniformemente contínua e toda função bi-Lipschitz é um homeomorfismo uniforme.*

Demonstração. É suficiente mostrar que toda função Lipschitz é uniformemente contínua.

Dada $T : E \rightarrow F$ Lipschitz, tomemos $M > 0$ tal que $d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in E$.

Para cada $\varepsilon > 0$, temos que

$$d_E(u_1, u_2) < \frac{\varepsilon}{M} \quad \Rightarrow \quad d_F(Tu_1, Tu_2) < \varepsilon,$$

logo, T é uniformemente contínua. □

III. Funções Lipschitz fracas

Veremos agora uma classe de funções, retirada do artigo [13], que consiste numa generalização natural das funções Lipschitz. Górak as denomina “*coarse Lipschitz functions*”, que aqui traduzimos como “*funções Lipschitz fracas*”.

Definição 1.23. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos e $T : E \rightarrow F$ uma função. Dizemos que T é Lipschitz fraca (ou Lipschitz para grandes distâncias) se existem $M > 0$ e $L \geq 0$ satisfazendo:*

$$d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) + L \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

Para toda T função Lipschitz fraca, definimos a sua constante Lipschitz no infinito como sendo:

$$l_\infty(T) := \inf_{\delta > 0} \left[\sup_{d_E(u_1, u_2) \geq \delta} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \right].$$

Observamos pela definição que toda função Lipschitz é Lipschitz fraca. Ainda, devido ao grau de liberdade dado pelo termo L , não podemos, partindo apenas da definição, garantir que T seja sequer contínua.

Temos as seguintes propriedades básicas com respeito às constantes Lipschitz e Lipschitz no infinito:

Proposição 1.24. *Para toda T função Lipschitz fraca, $l_\infty(T) < +\infty$.*

Demonstração. Seja $T : E \rightarrow F$ Lipschitz fraca e tomemos $M > 0$, $L \geq 0$ tais que:

$$d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) + L \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

Fixemos $\delta' > 0$, temos que

$$\frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \leq M + \frac{L}{d_E(u_1, u_2)} \leq M + \frac{L}{\delta'}, \quad \forall d_E(u_1, u_2) \geq \delta',$$

logo,

$$\sup_{d_E(u_1, u_2) \geq \delta'} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \leq M + \frac{L}{\delta'}.$$

Decorre disso que

$$l_\infty(T) = \inf_{\delta > 0} \left[\sup_{d_E(u_1, u_2) \geq \delta} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \right] \leq \sup_{d_E(u_1, u_2) \geq \delta'} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \leq M + \frac{L}{\delta'} < +\infty.$$

□

Proposição 1.25. *Para toda $T : E \rightarrow F$ Lipschitz, temos que $l_\infty(T) \leq l(T)$.*

Demonstração. Claramente, temos que, para todo $\delta > 0$,

$$\sup_{d_E(u_1, u_2) \geq \delta} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)} \leq \sup_{u_1 \neq u_2} \frac{d_F(Tu_1, Tu_2)}{d_E(u_1, u_2)},$$

logo, $l_\infty(T) \leq l(T)$. □

Agora vejamos que, no contexto dos espaços normados, a classe das funções Lipschitz fracas inclui as funções uniformemente contínuas.

Proposição 1.26. *Se E e F são espaços normados então toda função uniformemente contínua $T : E \rightarrow F$ é Lipschitz fraca.*

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que, para todos $u_1, u_2 \in E$,

$$\|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \|Tu_1 - Tu_2\| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Dados $u_1, u_2 \in E$ tais que $\|u_1 - u_2\| \geq \delta$, temos que $u_1 \neq u_2$, portanto, supomos, sem perda de generalidade, que u_2 é não-nulo.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \frac{\delta}{2} \leq \|u_1 - u_2\| < (n+1) \frac{\delta}{2} \quad (1.2)$$

e $w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ tais que $w_0 = u_1$, $w_{n+1} = u_2$ e

$$w_m = u_1 + \frac{\delta m}{2\|u_2 - u_1\|}(u_2 - u_1),$$

para todo $1 \leq m \leq n$.

Temos que

$$\|Tu_1 - Tu_2\| = \left\| \sum_{m=1}^{n+1} Tw_{m-1} - Tw_m \right\| \leq \sum_{m=1}^{n+1} \|Tw_{m-1} - Tw_m\|.$$

Observe que, para todo $1 \leq m \leq n+1$, por (1.1), temos que

$$\|w_{m-1} - w_m\| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \|Tw_{m-1} - Tw_m\| < \varepsilon,$$

logo,

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq \sum_{m=1}^{n+1} \varepsilon = (n+1)\varepsilon.$$

Como, por (1.2), $n\frac{\delta}{2} \leq \|u_1 - u_2\|$, temos

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq \left(\frac{2}{\delta}\|u_1 - u_2\| + 1\right)\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{\delta}\|u_1 - u_2\| + \varepsilon.$$

Como $u_1, u_2 \in E$ tais que $\|u_1 - u_2\| \geq \delta$ foram tomados arbitrariamente, segue que

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}\|u_1 - u_2\| + \varepsilon, \quad \forall \|u_1 - u_2\| \geq \delta.$$

Juntando a propriedade acima com (1.1), obtemos

$$\|T(u_1) - T(u_2)\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}\|u_1 - u_2\| + \varepsilon, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

□

IV. Quasi-isometrias

Antes de tratarmos da definição de quasi-isometrias, vejamos dois conceitos preliminares para o estudo deste tipo de função:

Definição 1.27. *Sejam (E, d_E) espaço métrico e $\delta, \varepsilon > 0$. Dizemos que $A \subset E$ é:*

- (i) *um subconjunto ε -denso de E se, para todo $x \in E$, existe $a \in A$ tal que $d_E(x, a) < \varepsilon$.*
- (ii) *um subconjunto δ -separado de E se, para todos $a, b \in A$ distintos, $d_E(a, b) \geq \delta$.*

A definição das quasi-isometrias foi empregada em [13], onde elas eram chamadas de “*coarse quasi isometry*”, e consiste numa generalização da noção de função bi-Lipschitz (veja o Lema 1.21).

Definição 1.28. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos, $T : E \rightarrow F$ uma função, $M > 0$ e $L \geq 0$. Dizemos que T é uma (M, L) -quasi-isometria, ou apenas quasi-isometria, se satisfaz:*

- (i) $\frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) - L \leq d_F(Tu_1, Tu_2) \leq Md_E(u_1, u_2) + L, \quad \forall u_1, u_2 \in E;$
- (ii) $T[E]$ é ε -denso de F , para algum $\varepsilon > 0$.

Essas funções foram definidas, originalmente, em [5], e neste artigo, chamadas de “*quasi isometry*”, optamos, portanto, por desconsiderar o prefixo “*coarse*”, empregado por Górak, denominando-as apenas por “*quasi-isometria*”.

Se $L > 0$, partindo apenas da definição de quasi-isometria, não podemos concluir muito a respeito do comportamento local de T . Por exemplo, para $d_E(u_1, u_2) \leq ML$, temos que

$$\frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) - L \leq 0.$$

Sendo assim, não podemos garantir que $d_F(Tu_1, Tu_2) > 0$, então não é garantido que T é injetora. Além disso, também por meio da liberdade da T para distâncias pequenas, temos que as quasi-isometrias não são necessariamente contínuas e, pelo item (ii) da definição, nem sobrejetoras.

Apesar disso, as quasi-isometrias nos dão boa informação a respeito da geometria dos espaços, quando analisada para grandes distâncias. Isto ocorre porque, conforme $d_E(u_1, u_2)$ se torna maior, T fica próxima de ser a restrição de uma função bi-Lipschitz com a imagem.

Este fato fica mais visível quando restringimos T a um subconjunto δ -separado de E , para um certo $\delta > 0$ conveniente, como no exemplo abaixo:

Exemplo 1.29. *Seja $T : E \rightarrow F$ uma (M, L) -quasi-isometria.*

Para cada $\frac{1}{M} > \varepsilon > 0$, definimos $\delta_\varepsilon = \frac{L}{\varepsilon}$.

Fixemos para cada $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon \subset E$ um subconjunto δ_ε -separado de E .

Temos que, para todos $a_1, a_2 \in A_\varepsilon$ distintos,

$$d_E(a_1, a_2) \geq \delta_\varepsilon = \frac{L}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad d_E(a_1, a_2)\varepsilon \geq L.$$

Decorre disso que

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{M} - \varepsilon \right) d_E(a_1, a_2) \leq \frac{1}{M} d_E(a_1, a_2) - L \\ M d_E(a_1, a_2) + L \leq (M + \varepsilon) d_E(a_1, a_2) \end{cases},$$

logo,

$$\left(\frac{1}{M} - \varepsilon \right) d_E(a_1, a_2) \leq d_F(Ta_1, Ta_2) \leq (M + \varepsilon) d_E(a_1, a_2), \quad \forall a_1, a_2 \in A_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Concluimos então que, para todo $\varepsilon > 0$, $T|_{A_\varepsilon}$ é como se fosse uma função bi-Lipschitz restrita a A_ε .

Veremos mais a frente que o fato da T não ser necessariamente sobrejetora não é um problema se os nossos espaços E e F são de Banach, pois para estes a existência de uma (M, L) -quasi-isometria implica na existência de uma (M, L') -quasi-isometria bijetora, para algum $L' \geq 0$.

Temos as seguintes propriedades básicas sobre as quasi-isometrias:

Lema 1.30. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos, $T : E \rightarrow F$ uma (M, L) -quasi-isometria, se E for não-limitado, em particular se E for espaço normado, então $M \geq 1$.*

Demonstração. Fixemos $u_n, u'_n \in E$ tais que $d_E(u_n, u'_n) \geq n$, $\forall n \geq 1$.

Dado $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} d_E(u_n, u'_n) - L &\leq d_F(Tu_n, Tu'_n) \leq M d_E(u_n, u'_n) + L \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M} d_E(u_n, u'_n) - L \leq M d_E(u_n, u'_n) + L \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{M} - M \right) d_E(u_n, u'_n) \leq 2L \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{M} - M \leq \frac{2}{n} L, \end{aligned}$$

logo, como a desigualdade acima é válida para todo $n \geq 1$, fazendo $n \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\frac{1}{M} - M \leq 0 \quad \Rightarrow \quad M \geq 1.$$

□

Lema 1.31. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos. Para toda (M, L) -quasi-isometria $T : E \rightarrow F$ bijetora com $M \geq 1$, existe $L' \leq ML$ tal que T e T^{-1} são (M, L') -quasi-isometrias.*

Demonstração. Vejamos que T^{-1} é uma (M, ML) -quasi-isometria.

Dadas $v_1, v_2 \in F$, sejam $u_1 := T^{-1}v_1$ e $u_2 := T^{-1}v_2$, note que, como T é (M, L) -quasi-isometria,

$$\begin{aligned} d_F(Tu_1, Tu_2) &\leq Md_E(u_1, u_2) + L \Rightarrow d_F(v_1, v_2) \leq Md_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) + L \\ &\Rightarrow \frac{1}{M}d_F(v_1, v_2) - \frac{L}{M} \leq d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}d_E(u_1, u_2) - L &\leq d_F(Tu_1, Tu_2) \Rightarrow \frac{1}{M}d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) - L \leq d_F(v_1, v_2) \\ &\Rightarrow d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq Md_F(v_1, v_2) + ML. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Juntando (1.3) e (1.4), observando que $ML \geq \frac{L}{M}$ (pois $M \geq 1$), temos

$$\frac{1}{M}d_F(v_1, v_2) - ML \leq d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq Md_F(v_1, v_2) + ML.$$

Como $M \geq 1$, temos que $ML \geq L$, logo, T também é (M, ML) -quasi-isometria. □

Vimos na seção anterior que as funções bi-Lipschitz estão incluídas na classe dos homeomorfismos uniformes. Veremos agora que, no contexto de espaços normados, estes estão incluídos na classe das quasi-isometrias. Decorre disso que, quando estamos restritos aos espaços normados, as quasi-isometrias contêm todas as classes de bijeções definidas neste capítulo.

Lema 1.32. *Dados dois espaços normados E e F , temos que todo homeomorfismo uniforme $T : E \rightarrow F$ é uma quasi-isometria bijetora.*

Demonstração. De fato, temos que T e T^{-1} são funções uniformemente contínuas, logo, pela Proposição 1.26, elas são Lipschitz fracas.

Fixemos então $M', M'' > 0$ e $L', L'' \geq 0$ tais que:

$$\begin{cases} \|Tu_1 - Tu_2\| \leq M'\|u_1 - u_2\| + L', & \forall u_1, u_2 \in E \\ \|T^{-1}v_1 - T^{-1}v_2\| \leq M''\|v_1 - v_2\| + L'', & \forall v_1, v_2 \in F \end{cases} \quad (1.5)$$

Sejam $M := \max\{M', M''\}$ e $L := \max\{L', L''\}$.

Vejamos que T é uma (M, L) -quasi-isometria.

De fato, por (1.5), já temos que

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq M\|u_1 - u_2\| + L, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

Além disso, pela segunda desigualdade de (1.5), notemos que

$$\|u_1 - u_2\| = \|T^{-1}(Tu_1) - T^{-1}(Tu_2)\| \leq M\|Tu_1 - Tu_2\| + L, \quad \forall u_1, u_2 \in E,$$

logo,

$$\frac{1}{M}\|u_1 - u_2\| - \frac{L}{M} \leq \|Tu_1 - Tu_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

Deste fato, pelo Lema 1.30, temos que $M \geq 1$ e, como consequência, que $L \geq \frac{L}{M}$, disso segue que T é uma (M, L) -quasi-isometria.

□

1.4 Malhas em espaços métricos

Os conceitos de malha e distância-malha, do inglês “net” e “net distance”, são provenientes da geometria de larga escala dos espaços métricos e encontrados em livros que abordam esta área (veja [4]). Para a definição abaixo é necessário termos em mente a Definição 1.27.

Definição 1.33. *Sejam (E, d_E) espaço métrico e $\varepsilon, \delta > 0$. Dizemos que $A \subset E$ é uma (ε, δ) -malha, ou apenas malha, de E , se A é um subconjunto ε -denso e δ -separado de E .*

As malhas são subconjuntos discretos que, sob certos fatores de aproximação (ε e δ), nos descrevem a estrutura geométrica do espaço.

Uma das vantagens das malhas é que elas nos possibilitam trabalhar com equivalências entre os espaços métricos que desprezem as características locais dos mesmos, dando maior relevância aos seus aspectos geométricos globais.

Vamos provar o seguinte lema com respeito à existência de malhas:

Lema 1.34. *Seja (E, d_E) um espaço métrico. Dado $\delta > 0$, existe $N_E \subset E$ tal que N_E é uma (δ, δ) -malha de E .*

Demonstração. Tomemos o conjunto $\mathcal{E}_\delta := \{A \subset E \mid A \text{ é } \delta\text{-separado de } E\}$ e consideremos o conjunto ordenado $(\mathcal{E}_\delta, \subset)$.

Vamos utilizar o Lema de Zorn para tomarmos $N_E \in \mathcal{E}_\delta$ maximal.

Dada $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_\delta$ cadeia, tomemos $D = \bigcup \mathcal{C}$. Claramente, temos que $A \subset D$, $\forall A \in \mathcal{C}$.

Vejamos que $D \in \mathcal{E}_\delta$.

De fato, dados $a_1, a_2 \in D$ distintos, tomemos $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ tais que $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$.

Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, temos que $A_1 \subset A_2$ ou $A_2 \subset A_1$, portanto, que $a_1, a_2 \in A_1$ ou que $a_1, a_2 \in A_2$. Em ambos os casos, a_1 e a_2 pertencem a um conjunto δ -separado, logo, segue que $d_E(a_1, a_2) \geq \delta$.

Como $a_1, a_2 \in D$ distintos são arbitrários, temos que $D \in \mathcal{E}_\delta$, portanto, que D é um limitante superior de $\mathcal{C}$.

Como a cadeia $\mathcal{C}$ foi tomada arbitrariamente, concluímos que toda cadeia de $(\mathcal{E}_\delta, \subset)$ possui limitante superior e estamos sob as hipóteses do Lema de Zorn, que garante que existe $N_E \in \mathcal{E}_\delta$ maximal.

Vamos provar que N_E é uma (δ, δ) -malha de E .

Já sabemos que N_E é δ -separado de E , vejamos que ele também é δ -denso de E .

De fato, suponha que N_E não é δ -denso de E e tomemos $u \in E$ tal que

$$d_E(u, a) \geq \delta, \quad \forall a \in N_E.$$

Claramente, temos que $N_E \cup \{u\} \in \mathcal{E}_\delta$ e que $N_E \subsetneq N_E \cup \{u\}$, uma contradição com a maximalidade de N_E .

□

Um outro lema que obtemos como consequência direta desse é:

Lema 1.35. *Seja $D_E \subset E$ um subconjunto ε -denso de um espaço métrico (E, d_E) . Dado $\delta > 0$, existe $N_E \subset D_E$ tal que N_E é uma (δ, δ) -malha de D_E e uma $(\varepsilon + \delta, \delta)$ -malha de E .*

Demonstração. Definindo $d_{D_E} := d_E|_{D_E \times D_E}$, sabemos que (D_E, d_{D_E}) é um espaço métrico.

Pelo Lema 1.34, tomemos $N_E \subset D_E$ que é (δ, δ) -malha de D_E .

Vejamos que N_E é uma $(\varepsilon + \delta, \delta)$ -malha de E .

N_E é δ -separado de E , pois, dados $a_1, a_2 \in N_E \subset D_E$ distintos, temos

$$d_E(a_1, a_2) = d_{D_E}(a_1, a_2) \geq \delta.$$

Nos resta observar que ele é $(\varepsilon + \delta)$ -denso de E .

Dado $u \in E$, tomemos $a \in D_E$ tal que $d_E(u, a) < \varepsilon$ e, como N_E é δ -denso de D_E , tomemos $a' \in N_E$ tal que $d_E(a, a') < \delta$.

Notemos que

$$d_E(u, a') \leq d_E(u, a) + d_E(a, a') < \varepsilon + \delta.$$

□

Vejamos agora algumas propriedades a respeito de malhas em espaços de Banach:

Lema 1.36. *Seja E espaço de Banach e $N_E \subset E$ uma (ε, δ) -malha de E , temos que:*

(a) *Para todos $a_1, a_2 \in N_E$ distintos, temos que $B(a_1, \delta/2) \cap B(a_2, \delta/2) = \emptyset$.*

(b) *$\delta/2 < \varepsilon$.*

(c) *Para todo $\alpha > 0$, αN_E é uma $(\alpha\varepsilon, \alpha\delta)$ -malha de E .*

Demonstração. (a): Suponha que existam $a_1, a_2 \in N_E$ distintos, com $B(a_1, \delta/2) \cap B(a_2, \delta/2) \neq \emptyset$ e seja $a_3 \in B(a_1, \delta/2) \cap B(a_2, \delta/2)$.

Temos que

$$\|a_1 - a_2\| \leq \|a_1 - a_3\| + \|a_2 - a_3\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

o que nos dá uma contradição, pois N_E é δ -separado.

(b): Decorre do fato de N_E ser ε -denso que

$$\bigcup_{u \in N_E} B(u, \varepsilon) = E.$$

Suponha que $\delta/2 \geq \varepsilon$, então temos que $B(u, \varepsilon) \subset B(u, \delta/2)$, $\forall u \in N_E$, logo

$$\bigcup_{u \in N_E} B(u, \delta/2) = E.$$

Disso, com o item (a) acima, segue que E é a reunião de bolas abertas dois a dois disjuntas. É fácil verificar que, pelo fato de E ser conexo e não-limitado, isto nos dá uma contradição.

(c): Fixemos $\alpha > 0$.

Notemos que:

- αN_E é $\alpha\delta$ -separado de E .

De fato, dados $a_1, a_2 \in \alpha N_E$ distintos, sejam $a'_1 := \alpha^{-1}a_1$ e $a'_2 := \alpha^{-1}a_2$.

Temos que $a'_1, a'_2 \in N_E$ são distintos, portanto

$$\|a'_1 - a'_2\| \geq \delta \Rightarrow \|a_1 - a_2\| = \|\alpha a'_1 - \alpha a'_2\| = \alpha \|a'_1 - a'_2\| \geq \alpha\delta.$$

- αN_E é $\alpha\varepsilon$ -denso de E .

De fato, dado $u \in E$, seja $a \in N_E$ tal que $\|a - \alpha^{-1}u\| < \varepsilon$.

Temos que $\alpha a \in \alpha N_E$ e

$$\|\alpha a - u\| = \alpha \|a - \alpha^{-1}u\| < \alpha\varepsilon.$$

□

A proposição a seguir será importante para demonstrarmos o Lema 1.45

Proposição 1.37. Para toda $N_E \subset E$ malha de um espaço de Banach, $|E| = |N_E|^{\aleph_0}$.

Demonstração. É consequência imediata dos Lemas 1.38 e 1.40 a serem vistos abaixo. □

Lema 1.38. Para todo $D_E \subset E$, ε -denso de um espaço normado, temos que $|E| \leq |D_E|^{\aleph_0}$.

Demonstração. Vejamos que o conjunto $\mathcal{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} D_E$ é denso em E .

Vamos provar que toda bola aberta de E tem intersecção não-vazia com $\mathcal{D}$.

Dada $B(u, r) \subset E$, fixemos $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{1}{n_0}\varepsilon < r$.

Como D_E é ε -denso, existe $u' \in D_E$ tal que

$$\|u' - n_0 u\| < \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{n_0} u' - u \right\| < \frac{1}{n_0} \varepsilon < r \Rightarrow \mathcal{D} \cap B(u, r) \neq \emptyset,$$

portanto, como $\mathcal{D}$ é denso e todos os pontos de E são abordáveis por sequência, existe uma função sobrejetora de $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, conjunto das sequências de elementos de $\mathcal{D}$, em E , logo

$$|E| \leq |\mathcal{D}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{D}|^{\aleph_0}.$$

Por outro lado, lembremos que $E = \bigcup_{a \in D_E} B(a, \varepsilon)$, pois D_E é ε -denso de E .

Sendo E um espaço normado, ele não pode ser escrito como uma união finita de bolas, logo, D_E é infinito.

Como $|D_E| \geq \aleph_0$, temos

$$|\mathcal{D}| = \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} D_E \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{n} D_E \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |D_E| = |D_E| \aleph_0 = |D_E|,$$

logo, $|E| \leq |\mathcal{D}|^{\aleph_0} = |D_E|^{\aleph_0}$. □

Lema 1.39. *Dado E espaço normado, temos que $E \approx B(u, r)$ para todos $u \in E$ e $r > 0$.*

Demonstração. Definimos $\phi : E \rightarrow B(0, 1)$ tal que $\phi(u) := \frac{1}{1 + \|u\|} u$, $\forall u \in E$ e $\gamma : B(0, 1) \rightarrow E$ tal que $\gamma(v) := \frac{1}{1 - \|v\|} v$, $\forall v \in B(0, 1)$, temos que:

- $\gamma \circ \phi = Id_E$, pois, para todo $x \in E$, temos

$$\gamma \circ \phi(u) = \frac{1}{1 - \|\phi(u)\|} \phi(u) = \frac{1}{1 - \frac{\|u\|}{1 + \|u\|}} \frac{1}{1 + \|u\|} u = \frac{1}{1 + \|u\| - \|u\|} u = u.$$

- $\phi \circ \gamma = Id_{B(0,1)}$, pois, para todo $v \in B(0, 1)$, temos

$$\phi \circ \gamma(v) = \frac{1}{1 + \|\gamma(v)\|} \gamma(v) = \frac{1}{1 + \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}} \frac{1}{1 - \|v\|} v = \frac{1}{1 - \|v\| + \|v\|} v = v.$$

Segue disso que ϕ é bijetora e $\gamma = \phi^{-1}$.

Além disso, claramente, ϕ e γ são contínuas, logo, ϕ é um homeomorfismo entre E e $B(0, 1)$.

É claro também que, para todos $u \in E$ e $r > 0$, a função $\psi_u^r : B(0, 1) \rightarrow B(u, r)$ definida como $\psi_u^r(v) = rv + u$, $\forall v \in B(0, 1)$ é um homeomorfismo entre $B(0, 1)$ e $B(u, r)$.

Segue disso que $E \approx B(u, r)$ para todos $u \in E$ e $r > 0$, pois $\psi_u^r \circ \phi : E \rightarrow B(u, r)$ é homeomorfismo. □

Lema 1.40. *Para todo $A \subset E$, δ -separado de um espaço de Banach, temos $|E| \geq |A|^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Vamos construir uma função injetora de $A^{\mathbb{N}}$ em E .

Para tal, fixemos:

- (i) $\phi_u^r : E \rightarrow B(u, r)$ homeomorfismo, para todo $u \in E$ e $r > 0$ (veja Lema 1.39).

- (ii) $0 < \beta < 1$.

Dado $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, construiremos $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, sequência de Cauchy, conforme abaixo.

Vamos definir também duas sequências auxiliares: $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

Fixamos os seguintes valores iniciais:

$$\begin{cases} b_0 := a_0 \\ \beta_0 := \min\{1, \delta/4\} \end{cases} .$$

Partindo disso, para todo $n \geq 1$, definimos:

$$\begin{cases} b_n := \phi_{b_{n-1}}^{\beta_{n-1}}(a_n) \\ \beta_n := \min\{\beta^n, \alpha_n\}, \text{ onde } \alpha_n \text{ é o maior } r \text{ tal que } B[b_n, r] \subset \phi_{b_{n-1}}^{\beta_{n-1}}[B[a_n, \delta/4]]. \end{cases} .$$

Vejamos que $B[b_n, \beta_n] \subset B[b_{n-1}, \beta_{n-1}]$, $\forall n \geq 1$.

De fato, dado $n \geq 1$, de acordo com a definição de α_n , temos que

$$B[b_n, \alpha_n] \subset \phi_{b_{n-1}}^{\beta_{n-1}}[B[a_n, \delta/4]] \subset B[b_{n-1}, \beta_{n-1}],$$

onde a segunda continência decorre do fato da imagem de $\phi_{b_{n-1}}^{\beta_{n-1}}$ ser $B[b_{n-1}, \beta_{n-1}]$.

Disso, como $\beta_n \leq \alpha_n$, segue que $B[b_n, \beta_n] \subset B[b_{n-1}, \beta_{n-1}]$.

Vejamos agora que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Do fato provado logo acima, temos, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, que

$$b_n \in B[b_{n_0}, \beta_{n_0}], \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.6)$$

Disso, lembrando que $\beta_{n_0} \leq \beta^{n_0}$, obtemos

$$\|b_m - b_n\| \leq \text{diam}[B[b_{n_0}, \beta_{n_0}]] = 2\beta_{n_0} \leq 2\beta^{n_0}, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

A partir disso, como $\beta^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, é fácil verificar que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy.

Por fim, definimos $\psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow E$ tal que $\psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, onde $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de Cauchy construída conforme acima.

Vejamos que ψ é uma função injetora.

Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementos distintos de $A^{\mathbb{N}}$, denotemos por $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suas respectivas sequências construídas conforme o método descrito acima, bem como $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ e $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha'_n)_{n \geq 1}$, suas respectivas sequências auxiliares.

Seja p o menor elemento de $\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \neq a'_m\}$.

De (1.6), temos que

$$\begin{cases} b_n \in B[b_p, \beta_p] \\ b'_n \in B[b'_p, \beta'_p] \end{cases}, \quad \forall n \geq p,$$

logo,

$$\begin{cases} \psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in B[b_p, \beta_p] \\ \psi((a'_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in B[b'_p, \beta'_p] \end{cases}. \quad (1.7)$$

Vejamos abaixo que $B[b_p, \beta_p] \cap B[b'_p, \beta'_p] = \emptyset$.

Temos dois casos:

- $p = 0$.

Por construção, temos que

$$\begin{cases} B[b_0, \beta_0] = B[a_0, \beta_0] \subset B[a_0, \delta/4] \\ B[b'_0, \beta'_0] = B[a'_0, \beta'_0] \subset B[a'_0, \delta/4] \end{cases}.$$

Como $a_0 \neq a'_0$, pelo item (a) do Lema 1.36, temos

$$B(a_0, \delta/2) \cap B(a'_0, \delta/2) = \emptyset \Rightarrow B[a_0, \delta/4] \cap B[a'_0, \delta/4] = \emptyset, \quad (1.8)$$

Logo,

$$B[b_0, \beta_0] \cap B[b'_0, \beta'_0] \subset B[a_0, \delta/4] \cap B[a'_0, \delta/4] = \emptyset.$$

- $p > 0$.

Primeiramente, é fácil verificar que, como $a_n = a'_n$, $\forall n < p$, temos

$$\begin{cases} b_n = b'_n \\ \beta_n = \beta'_n \\ \alpha_n = \alpha'_n \end{cases}, \quad \forall n < p.$$

Segue disso, junto com a definição dos alfas, que

$$\begin{cases} B[b_p, \alpha_p] \subset \phi_{b_{p-1}}^{\beta_{p-1}} [B[a_p, \delta/4]] \\ B[b'_p, \alpha'_p] \subset \phi_{b'_{p-1}}^{\beta'_{p-1}} [B[a'_p, \delta/4]] = \phi_{b_{p-1}}^{\beta_{p-1}} [B[a'_p, \delta/4]] \end{cases}. \quad (1.9)$$

Como $a_p \neq a'_p$, por argumento análogo ao de (1.8), temos que $B[a_p, \delta/4] \cap B[a'_p, \delta/4] = \emptyset$.

Logo, lembrando que $\phi_{b_{p-1}}^{\beta_{p-1}}$ é bijeção, por (1.9), concluímos

$$B[b_p, \alpha_p] \cap B[b'_p, \alpha'_p] = \emptyset,$$

portanto, como $\beta_p \leq \alpha_p$ e $\beta'_p \leq \alpha'_p$, temos

$$B[b_p, \beta_p] \cap B[b'_p, \beta'_p] \subset B[b_p, \alpha_p] \cap B[b'_p, \alpha'_p] = \emptyset.$$

Do fato provado acima, junto com (1.7), decorre que $\psi((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) \neq \psi((a'_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Por fim, da existência de ψ , segue que $|E| \geq |A^{\mathbb{N}}| = |A|^{\aleph_0}$. □

1.5 Distâncias entre espaços normados e suas relações com quasi-isometrias

Tendo em vista os conceitos expostos anteriormente, vejamos abaixo duas definições de distâncias entre espaços normados:

Definição 1.41. Dados dois espaços normados E e F , definimos:

- (i) a distância uniforme entre E e F , $d_u(E, F) := \inf l_\infty(T) l_\infty(T^{-1})$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os homeomorfismos uniformes entre E e F .
- (ii) a distância-malha entre E e F , $d_m(E, F) := \inf l(T) l(T^{-1})$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções bi-Lipschitz $T : N_E \rightarrow N_F$, onde $N_E \subset E$ e $N_F \subset F$ são malhas.

Ressaltamos que, na definição acima, faz sentido tomarmos $l_\infty(T)$ e $l_\infty(T^{-1})$ para T homeomorfismo uniforme pois, segundo a Proposição 1.26, T e T^{-1} são Lipschitz fracas.

Temos a seguinte propriedade básica a respeito de d_m :

Lema 1.42. Para todos espaços normados E e F não-triviais, temos que $d_m(E, F) \geq 1$.

Demonstração. Temos dois casos:

- Não existe $T : N_E \rightarrow N_F$ bi-Lipschitz entre malhas de E e F .
Então $d_m(E, F)$ será o ínfimo de um conjunto vazio, isto é, $d_m(E, F) = +\infty$.
- Existe $T : N_E \rightarrow N_F$ bi-Lipschitz entre malhas de E e F .
Vejam os que:

- $l(T) > 0$ e $l(T^{-1}) > 0$.

Suponha $l(T) = 0$, então $Tu_1 = Tu_2$, $\forall u_1, u_2 \in E$.

Segue disso que a imagem de T é unitária, ou seja, $N_F = \{T(0)\}$.

Além disso, como N_F é (ε, δ) -malha de F , para certos $\varepsilon, \delta > 0$, temos, em particular, que $F \subset \bigcup_{b \in N_F} B(b, \varepsilon)$.

Portanto, $F \subset B(T(0), \varepsilon)$, o que nos dá uma contradição, pois F , por ser um espaço normado, é não-limitado.

De forma análoga também concluímos que $l(T^{-1}) > 0$.

- $l(T) l(T^{-1}) \geq 1$.

Dados $v_1, v_2 \in N_F$ distintos, temos que

$$\|v_1 - v_2\| = \|T(T^{-1}v_1) - T(T^{-1}v_2)\| \leq l(T) \|T^{-1}v_1 - T^{-1}v_2\|.$$

Disso, como, pelo item anterior, $l(T) > 0$, temos

$$\|T^{-1}v_1 - T^{-1}v_2\| \geq \frac{1}{l(T)} \|v_1 - v_2\|.$$

Por outro lado, T^{-1} satisfaz

$$\|T^{-1}v_1 - T^{-1}v_2\| \leq l(T^{-1}) \|v_1 - v_2\|.$$

Juntando as duas últimas desigualdades acima, observando que $\|v_1 - v_2\| > 0$, temos

$$\frac{1}{l(T)} \|v_1 - v_2\| \leq l(T^{-1}) \|v_1 - v_2\| \Rightarrow \frac{1}{l(T)} \leq l(T^{-1}) \Rightarrow l(T) l(T^{-1}) \geq 1.$$

Concluimos, com o exposto acima, que $l(T)l(T^{-1}) \geq 1$ para toda função bi-Lipschitz $T : N_E \rightarrow N_F$ entre malhas de E e F , logo, o ínfimo de $l(T)l(T^{-1})$ tomado neste conjunto de funções é maior ou igual a 1, isto é, $d_m(E, F) \geq 1$.

□

Veremos adiante que, para E e F espaços normados, a distância-malha e a existência de quasi-isometrias entre os espaços possuem uma conexão muito forte. Mais precisamente, provaremos a seguinte:

Proposição 1.43. *Dados E e F espaços normados não-triviais e $K \geq 1$, são equivalentes:*

- (a) *existe uma (M, L) -quasi-isometria $T : D_E \rightarrow D_F$ sobrejetora, onde $M < \sqrt{K}$ e $D_E \subset E$, $D_F \subset F$ são conjuntos ε -densos.*
- (b) *existe uma (M, L) -quasi-isometria $T : E \rightarrow F$ bijetora, onde $M < \sqrt{K}$.*
- (c) *$d_m(E, F) < K$.*

Dados E e F espaços normados, quando consideramos uma (M, L) -quasi-isometria $T : E \rightarrow F$, pelo Lema 1.30, temos que $M \geq 1$. Também vimos com o Lema 1.42 que $d_m(E, F) \geq 1$. É por este motivo que consideramos apenas $K \geq 1$ no enunciado da proposição acima.

Antes de demonstrá-la, vejamos alguns resultados auxiliares.

Lema 1.44. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos e $T : D_E \rightarrow D_F$ uma (M, L) -quasi-isometria sobrejetora, onde $D_E \subset E$ e $D_F \subset F$ são conjuntos ε_E -denso e ε_F -denso, respectivamente.*

Para todo $\eta > 0$ definimos $\delta_\eta := (L + \eta)M$. Se $N_E \subset D_E$ é uma $(\delta_\eta, \delta_\eta)$ -malha de D_E , então:

- (a) *$T|_{N_E}$ é injetora.*
- (b) *$T[N_E]$ é uma (ξ_η, η) -malha de F , onde $\xi_\eta := \delta_\eta M + L + \varepsilon_F$.*

Demonstração. Fixemos $\eta > 0$ e $N_E \subset D_E$ uma $(\delta_\eta, \delta_\eta)$ -malha de D_E .

Notemos que, para todos $a_1, a_2 \in N_E$ distintos,

$$d_F(Ta_1, Ta_2) \geq \frac{1}{M}d_E(a_1, a_2) - L \geq \frac{1}{M}\delta_\eta - L = \eta > 0,$$

logo, $T|_{N_E}$ é injetora e $T[N_E]$ é η -separado.

Vejamos agora que, além disso, $T[N_E]$ é ξ_η -denso de F , onde $\xi_\eta := \delta_\eta M + L + \varepsilon_F$.

Dado $v \in F$, seja $b \in D_F$ tal que $d_F(v, b) < \varepsilon_F$.

Como T é sobrejetora, tomemos $a \in D_E$ tal que $Ta = b$ e finalmente, por N_E ser δ_η -denso de D_E , tomemos $a' \in N_E$ tal que $d_E(a, a') < \delta_\eta$.

Temos que

$$\begin{aligned} d_F(v, Ta') &\leq d_F(v, b) + d_F(b, Ta') \\ &= d_F(v, b) + d_F(Ta, Ta') \\ &< \varepsilon_F + Md_E(a, a') + L \\ &< \varepsilon_F + \delta_\eta M + L = \xi_\eta, \end{aligned}$$

onde $Ta' \in T[N_E]$.

Como $v \in F$, foi tomado arbitrariamente, segue que $T[N_E]$ é ξ_η -denso de F .

□

O lema a seguir foi provado por Górak e corresponde ao Fato 1.5 de [13].

Lema 1.45. *Sejam E e F espaços de Banach e $T : D_E \rightarrow D_F$ uma (M, L) -quasi-isometria sobrejetora, onde $D_E \subset E$ e $D_F \subset F$ são conjuntos ε_E -denso e ε_F -denso, respectivamente. Então existe uma (M, L') -quasi-isometria bijetora $\tilde{T} : E \rightarrow F$, com $L' = (4M^2 + 3)L + 4\varepsilon_F + 2M\varepsilon_E$, tal que*

$$\|\tilde{T}u - Tu\| \leq 2(M^2 + 1)L + 2\varepsilon_F + M\varepsilon_E, \quad \forall u \in D_E.$$

Demonstração. Fixemos $\eta := \frac{\varepsilon_F}{2M^2} > 0$.

Fazendo uso do Lema 1.35, tomemos $N_E \subset D_E$ que é:

a) (δ_E, δ_E) -malha de D_E ,

b) (ξ_E, δ_E) -malha de E ,

onde $\delta_E := (L + \eta)M$ e $\xi_E := (L + \eta)M + \varepsilon_E$.

Pelo Lema 1.44, temos que $T|_{N_E} : N_E \rightarrow T[N_E]$ é injetora e $N_F := T[N_E]$ é uma (ξ_F, η) -malha de F , onde $\xi_F := LM^2 + \eta M^2 + L + \varepsilon_F$.

Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ uma enumeração de N_E e $\mathcal{A} := E \setminus \left[\bigcup_{\alpha \in \tau} B(x_\alpha, \delta_E/2) \right]$.

Vamos construir $(E_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ família de subconjuntos convenientes de E em duas etapas.

Primeiramente, definimos $(E'_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ família de subconjuntos de E de forma que

$$\begin{cases} E'_0 := B(x_0, \xi_E) \cap \mathcal{A} \\ E'_\alpha := (B(x_\alpha, \xi_E) \cap \mathcal{A}) \setminus \left[\bigcup_{\beta < \alpha} E'_\beta \right] \end{cases}.$$

É fácil verificar que os conjuntos E'_α são dois a dois disjuntos e que, pelo fato de N_E ser ξ_E -denso

$$\bigcup_{\alpha \in \tau} E'_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \tau} (B(x_\alpha, \xi_E) \cap \mathcal{A}) = \left(\bigcup_{\alpha \in \tau} B(x_\alpha, \xi_E) \right) \cap \mathcal{A} = E \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}. \quad (1.10)$$

Por fim, definimos $(E_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ como sendo, para todo $\alpha \in \tau$, $E_\alpha := B(x_\alpha, \delta_E/2) \cup E'_\alpha$.

Notemos que:

(i) $B(x_\alpha, \delta_E/2) \subset E_\alpha$, $\forall \alpha \in \tau$.

Segue diretamente da definição de E_α .

(ii) $E_\alpha \subset B(x_\alpha, \xi_E)$, $\forall \alpha \in \tau$.

Basta observar que $E'_\alpha \subset B(x_\alpha, \xi_E)$ por definição e que, pelo item (b) do Lema 1.36, temos $B(x_\alpha, \delta_E/2) \subset B(x_\alpha, \xi_E)$.

$$(iii) \bigcup_{\alpha \in \tau} E_\alpha = E.$$

Decorre da definição de $\mathcal{A}$ e de (1.10) que

$$\bigcup_{\alpha \in \tau} E_\alpha = \left(\bigcup_{\alpha \in \tau} B(x_\alpha, \delta_E/2) \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \tau} E'_\alpha \right) = (E \setminus \mathcal{A}) \cup \mathcal{A} = E.$$

$$(iv) E_{\alpha_1} \cap E_{\alpha_2} = \emptyset, \quad \forall \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Observe que

$$\begin{cases} B(x_\alpha, \delta_E/2) & \subset E \setminus \mathcal{A} \\ E'_\alpha & \subset \mathcal{A} \end{cases}, \quad \forall \alpha \in \tau,$$

logo, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \tau$ distintos, temos que

$$[B(x_{\alpha_1}, \delta_E/2) \cup E'_{\alpha_1}] \cap [B(x_{\alpha_2}, \delta_E/2) \cup E'_{\alpha_2}] = [B(x_{\alpha_1}, \delta_E/2) \cap B(x_{\alpha_2}, \delta_E/2)] \cup [E'_{\alpha_1} \cap E'_{\alpha_2}].$$

Da construção de $(E'_\alpha)_{\alpha \in \tau}$, temos que $E'_{\alpha_1} \cap E'_{\alpha_2} = \emptyset$.

Além disso, pelo item (a) do Lema 1.36, temos que $B(x_{\alpha_1}, \delta_E/2) \cap B(x_{\alpha_2}, \delta_E/2) = \emptyset$.

Logo

$$\begin{aligned} E_{\alpha_1} \cap E_{\alpha_2} &= [B(x_{\alpha_1}, \delta_E/2) \cup E'_{\alpha_1}] \cap [B(x_{\alpha_2}, \delta_E/2) \cup E'_{\alpha_2}] \\ &= [B(x_{\alpha_1}, \delta_E/2) \cap B(x_{\alpha_2}, \delta_E/2)] \cup [E'_{\alpha_1} \cap E'_{\alpha_2}] = \emptyset. \end{aligned}$$

Vamos agora trabalhar com as consequências dos itens provados acima.

Note que, por (i) e (ii), temos

$$|B(x_\alpha, \delta_E/2)| \leq |E_\alpha| \leq |B(x_\alpha, \xi_E)|, \quad \forall \alpha \in \tau.$$

Pelo Lema 1.39, $|B(x_\alpha, \delta_E/2)| = |B(x_\alpha, \xi_E)| = |E|$, logo, da relação acima, temos

$$|E_\alpha| = |E|, \quad \forall \alpha \in \tau. \quad (1.11)$$

Usando o fato de que N_F é (ξ_F, η) -malha de F e de que $T|_{N_E}$ é uma bijeção entre N_E e N_F , de forma análoga, definimos $(F_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ família de subconjuntos de F satisfazendo:

$$(v) B(Tx_\alpha, \eta/2) \subset F_\alpha, \quad \forall \alpha \in \tau.$$

$$(vi) F_\alpha \subset B(Tx_\alpha, \xi_F), \quad \forall \alpha \in \tau.$$

$$(vii) \bigcup_{\alpha \in \tau} F_\alpha = F.$$

$$(viii) F_\alpha \cap F_\beta = \emptyset, \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

Concluimos analogamente que

$$|F_\alpha| = |F|, \quad \forall \alpha \in \tau. \quad (1.12)$$

Note que, além disso, como $|N_E| = |N_F|$, pela Proposição 1.37, temos que $|E| = |F|$.

Este fato com as relações (1.11) e (1.12), implica que

$$|E_\alpha| = |F_\alpha|, \quad \forall \alpha \in \tau.$$

Tomemos então, para cada $\alpha \in \tau$, $\tilde{T}_\alpha : E_\alpha \rightarrow F_\alpha$, bijeção, tal que $\tilde{T}x_\alpha = Tx_\alpha$.

Temos que para todo $x \in E$, existe um único $\alpha \in \tau$ tal que $x \in E_\alpha$ (existe, pois, por (iii), $\bigcup_{\alpha \in \tau} E_\alpha = E$, e é único, pois, por (iv), $(E_\alpha)_{\alpha \in \tau}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos). Definimos então $\tilde{T} : E \rightarrow F$ da seguinte forma:

$$\forall x \in E, \quad \tilde{T}x := \tilde{T}_\alpha(x), \quad \text{onde } \alpha \text{ é o único tal que } x \in E_\alpha.$$

Vejamos que $\tilde{T}$ é uma bijeção.

- $\tilde{T}$ é sobrejetora.

De fato, temos que

$$\tilde{T}[E] = \tilde{T} \left[\bigcup_{\alpha \in \tau} E_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \tau} \tilde{T}[E_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in \tau} \tilde{T}_\alpha[E_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in \tau} F_\alpha = F.$$

- $\tilde{T}$ é injetora.

Dados $x_1, x_2 \in E$, distintos, sejam α_1 e α_2 os únicos tais que $x_1 \in E_{\alpha_1}$ e $x_2 \in E_{\alpha_2}$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ então $\tilde{T}x_1 = \tilde{T}_{\alpha_1}(x_1)$ e $\tilde{T}x_2 = \tilde{T}_{\alpha_1}(x_2)$, logo, pela injetividade de $\tilde{T}_{\alpha_1}$, temos que $\tilde{T}x_1 \neq \tilde{T}x_2$.

Se $\alpha_1 \neq \alpha_2$, observe que

$$\begin{cases} \tilde{T}x_1 = \tilde{T}_{\alpha_1}(x_1) \in F_{\alpha_1} \\ \tilde{T}x_2 = \tilde{T}_{\alpha_2}(x_2) \in F_{\alpha_2} \end{cases},$$

onde, por (viii), $F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} = \emptyset$, logo, $\tilde{T}x_1 \neq \tilde{T}x_2$.

Vejamos agora que $\tilde{T}$ é uma (M, L') -quasi-isometria, com $L' = (4M^2 + 3)L + 4\varepsilon_F + 2M\varepsilon_E$.

De fato, dados $u_1, u_2 \in E$, tomemos $\alpha_1, \alpha_2 \in \tau$ tais que $u_1 \in E_{\alpha_1}$ e $u_2 \in E_{\alpha_2}$, temos que $\|\tilde{T}x_{\alpha_1} - \tilde{T}x_{\alpha_2}\| = \|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}\|$, logo,

$$\|\tilde{T}x_{\alpha_1} - \tilde{T}x_{\alpha_2}\| \leq M\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| + L. \quad (1.13)$$

Por (ii), temos que $u_1 \in E_{\alpha_1} \subset B(x_{\alpha_1}, \xi_E)$ e $u_2 \in E_{\alpha_2} \subset B(x_{\alpha_2}, \xi_E)$, logo

$$\begin{cases} \|u_1 - x_{\alpha_1}\| < \xi_E \\ \|u_2 - x_{\alpha_2}\| < \xi_E \end{cases}. \quad (1.14)$$

Por (vi), temos que $\tilde{T}u_1 \in F_{\alpha_1} \subset B(\tilde{T}x_{\alpha_1}, \xi_F)$ e $\tilde{T}u_2 \in F_{\alpha_2} \subset B(\tilde{T}x_{\alpha_2}, \xi_F)$, logo

$$\begin{cases} \|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}x_{\alpha_1}\| < \xi_F \\ \|\tilde{T}u_2 - \tilde{T}x_{\alpha_2}\| < \xi_F \end{cases}. \quad (1.15)$$

Pelas desigualdades (1.13), (1.14) e (1.15) acima, temos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2 \right\| &\leq \left\| \tilde{T}u_1 - \tilde{T}x_{\alpha_1} \right\| + \left\| \tilde{T}x_{\alpha_1} - \tilde{T}x_{\alpha_2} \right\| + \left\| \tilde{T}x_{\alpha_2} - \tilde{T}u_2 \right\| \\
&\leq M\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| + L + 2\xi_F \\
&\leq M(\|x_{\alpha_1} - u_1\| + \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - x_{\alpha_2}\|) + L + 2\xi_F \\
&\leq M\|u_1 - u_2\| + L + 2\xi_F + 2M\xi_E.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Procedemos analogamente para $\tilde{T}^{-1}$ de forma a obter, para todos $v_1, v_2 \in F$, a desigualdade:

$$\left\| \tilde{T}^{-1}v_1 - \tilde{T}^{-1}v_2 \right\| \leq M\|v_1 - v_2\| + ML + 2\xi_E + 2M\xi_F.$$

Tomando $v_1 = \tilde{T}u_1$ e $v_2 = \tilde{T}u_2$ acima, temos

$$\|u_1 - u_2\| \leq M\left\| \tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2 \right\| + ML + 2\xi_E + 2M\xi_F,$$

logo,

$$\frac{1}{M}\|u_1 - u_2\| - \left(L + 2\xi_F + 2\frac{\xi_E}{M} \right) \leq \left\| \tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2 \right\|.$$

Da equação acima, junto com (1.16), segue que

$$\frac{1}{M}\|u_1 - u_2\| - L'' \leq \left\| \tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2 \right\| \leq M\|u_1 - u_2\| + L', \quad \forall u_1, u_2 \in E,$$

onde $L' := L + 2\xi_F + 2M\xi_E$ e $L'' := L + 2\xi_F + 2\frac{\xi_E}{M}$.

Pelo Lema 1.30, temos que $M \geq 1$ logo $L' \geq L''$ e segue disso que $\tilde{T}$ é (M, L') -quasi-isometria. Substituindo ξ_E , ξ_F e o valor inicial tomado para η , verificamos que $L' = (4M^2 + 3)L + 4\varepsilon_F + 2M\varepsilon_E$.

Por fim, vejamos que $\left\| \tilde{T}u - Tu \right\| \leq L + \xi_F + M\xi_E$, $\forall u \in D_E$.

Dado $u \in D_E$, seja α o único tal que $u \in E_\alpha$.

Observe que, como $\tilde{T}(x_\alpha) = T(x_\alpha)$,

$$\left\| \tilde{T}u - Tu \right\| \leq \left\| \tilde{T}u - \tilde{T}x_\alpha \right\| + \|Tu - Tx_\alpha\|.$$

Disso, como $u \in E_\alpha \subset B(x_\alpha, \xi_E)$, $\tilde{T}u \in F_\alpha \subset B(Tx_\alpha, \xi_F)$ e T é (M, L) -quasi-isometria, temos

$$\left\| \tilde{T}u - Tu \right\| \leq \xi_F + M\|u - x_\alpha\| + L \leq M\xi_E + L + \xi_F.$$

Substituindo ξ_E , ξ_F e η , verificamos que $M\xi_E + L + \xi_F = 2(M^2 + 1)L + 2\varepsilon_F + M\varepsilon_E$.

□

O lema acima estabelece que a existência de uma (M, L) -quasi-isometria entre conjuntos ε -densos garante a existência de uma (M, L') -quasi-isometria bijetora, para algum L' , como havíamos mencionado anteriormente.

O proximo lema desenvolve melhor a técnica utilizada no Exemplo 1.29.

Lema 1.46. *Sejam E e F espaços normados e $T : D_E \rightarrow D_F$ uma (M, L) -quasi-isometria sobrejetora, onde $D_E \subset E$ e $D_F \subset F$ são conjuntos ε_E -denso e ε_F -denso, respectivamente. Então, para todo $\frac{1}{M} > \varepsilon > 0$ existe uma função bi-Lipschitz $T_\varepsilon : N_E \rightarrow N_F$, com $N_E \subset E$, $N_F \subset F$ malhas, tal que*

$$l(T_\varepsilon)l(T_\varepsilon^{-1}) \leq \frac{M^2 + \varepsilon M}{1 - \varepsilon M}.$$

Demonstração. Dado $\frac{1}{M} > \varepsilon > 0$, fixemos $\eta > 0$ tal que $\delta := (L + \eta)M \geq \frac{L}{\varepsilon}$. Pelo Lema 1.35, tomemos $N_E \subset D_E$ que é:

- (i) (δ, δ) -malha de D_E .
- (ii) $(\varepsilon_E + \delta, \delta)$ -malha de E .

Note que, dados $u_1, u_2 \in N_E$ distintos,

$$\|u_1 - u_2\| \geq \delta \geq \frac{L}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \|u_1 - u_2\|\varepsilon \geq L,$$

assim, temos

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{M} - \varepsilon \right) \|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{M} \|u_1 - u_2\| - L \\ M\|u_1 - u_2\| + L \leq (M + \varepsilon) \|u_1 - u_2\| \end{cases},$$

logo,

$$\frac{1}{M''} \|u_1 - u_2\| \leq \|Tu_1 - Tu_2\| \leq M' \|u_1 - u_2\|,$$

onde $M' := M + \varepsilon$ e $M'' := \frac{M}{1 - \varepsilon M}$.

Definimos $T_\varepsilon := T|_{N_E}$.

Pelo Lema 1.44, temos que T_ε é injetora e $N_F := T_\varepsilon[N_E]$ é uma malha de F .

Além disso, a desigualdade acima implica que $l(T_\varepsilon) \leq M'$ e $l(T_\varepsilon^{-1}) \leq M''$, logo

$$l(T_\varepsilon)l(T_\varepsilon^{-1}) \leq M'M'' = \frac{M^2 + \varepsilon M}{1 - \varepsilon M}.$$

□

Podemos agora demonstrar a proposição:

Demonstração da Proposição 1.43. Observe que $(a) \Rightarrow (b)$ pelo Lema 1.45.

- $(b) \Rightarrow (c)$.

Fixemos T satisfazendo (b) .

Dado um natural $n \geq 1$, pelo Lema 1.46, para todo $n > M$, existe $T_{n^{-1}} : N_E \rightarrow N_F$ bi-Lipschitz, com $N_E \subset E$, $N_F \subset F$ malhas, tal que

$$l(T_{n^{-1}})l(T_{n^{-1}}^{-1}) \leq \frac{nM^2 + M}{n - M} \quad \Rightarrow \quad d_m(E, F) \leq \frac{nM^2 + M}{n - M}.$$

Como $\frac{nM^2 + M}{n - M} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M^2$, temos que $d_m(E, F) \leq M^2 < K$.

- (c) $\Rightarrow$ (a).

Fixemos $T : N_E \rightarrow N_F$ tal que $1 \leq l(T) l(T^{-1}) < K$ e seja $\alpha := \sqrt{\frac{l(T^{-1})}{l(T)}}$.

Seja $\Psi : N_F \rightarrow \alpha N_F$ tal que $\Psi(v) := \alpha v$, $\forall v \in N_F$.

Claramente, Ψ é uma bijeção e $\Psi^{-1}(v) := \alpha^{-1}v$, $v \in \alpha N_F$.

Definimos $\tilde{T} := \Psi \circ T : N_E \rightarrow \alpha N_F$. É fácil verificar que $\tilde{T}$ é bijeção e que $\tilde{T}^{-1} = T^{-1} \circ \Psi^{-1}$.

Temos que

$$\begin{cases} \|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2\| &= \alpha \|Tu_1 - Tu_2\| &\leq \alpha l(T) \|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in N_E \\ \|\tilde{T}^{-1}v_1 - \tilde{T}^{-1}v_2\| &= \|T^{-1}(\alpha^{-1}v_1) - T^{-1}(\alpha^{-1}v_2)\| &\leq \alpha^{-1} l(T^{-1}) \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in N_F \end{cases}.$$

Note que

$$\alpha l(T) = \alpha^{-1} l(T^{-1}) = \sqrt{l(T) l(T^{-1})} < \sqrt{K}. \quad (1.17)$$

Seja $\beta := \sqrt{l(T) l(T^{-1})}$, tomando $v_1 = \tilde{T}u_1$ e $v_2 = \tilde{T}u_2$ nas desigualdades acima, temos

$$\begin{cases} \|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2\| &\leq \beta \|u_1 - u_2\| \\ \|u_1 - u_2\| \leq \|\tilde{T}^{-1}\tilde{T}u_1 - \tilde{T}^{-1}\tilde{T}u_2\| &\leq \beta \|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2\| \end{cases}, \forall u_1, u_2 \in N_E,$$

portanto,

$$\frac{1}{\beta} \|u_1 - u_2\| \leq \|\tilde{T}u_1 - \tilde{T}u_2\| \leq \beta \|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in N_E.$$

Temos também que $\tilde{T}[N_E] = \alpha N_F$, que, pelo item (c) do Lema 1.36, é uma malha, em particular, um conjunto ε -denso de F , para algum $\varepsilon > 0$.

Logo, $\tilde{T}$ é $(\beta, 0)$ -quasi-isometria sobrejetora entre espaços ε_E -denso ε_F -denso de E e F , respectivamente, onde, por (1.17), $\beta < \sqrt{K}$.

□

Vejamos abaixo uma relação entre d_u e d_m .

Proposição 1.47. *Para todos espaços normados E e F temos que $d_m(E, F) \leq d_u(E, F)$.*

Demonstração. É equivalente provarmos que para todo $T : E \rightarrow F$ um homeomorfismo uniforme $d_m(E, F) \leq l_\infty(T) l_\infty(T^{-1})$, e é o que faremos.

Dado $T : E \rightarrow F$ um homeomorfismo uniforme, pelo Lema 1.32, fixemos M e L tais que T é uma (M, L) -quasi-isometria.

Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta, \delta' > 0$ tais que

$$\begin{cases} \sup_{\|u_1 - u_2\| \geq \delta} \frac{\|Tu_1 - Tu_2\|}{\|u_1 - u_2\|} < l_\infty(T) + \varepsilon \\ \sup_{\|u_1 - u_2\| \geq \delta'} \frac{\|T^{-1}u_1 - T^{-1}u_2\|}{\|u_1 - u_2\|} < l_\infty(T^{-1}) + \varepsilon \end{cases}. \quad (1.18)$$

Sejam $\eta := \max\{\delta', \delta/M - L\}$ e $\xi := (L + \eta)M$.

Pelo Lema 1.34, tomemos $N_E \subset E$ uma (ξ, ξ) -malha de E .

Pelo Lema 1.44, temos que $N_F := T[N_E]$ é um conjunto η -separado de F e $T|_{N_E}$ é injetora.

Como $\eta \geq \delta'$, por (1.18), temos

$$\|T^{-1}u_1 - T^{-1}u_2\| \leq (l_\infty(T^{-1}) + \varepsilon)\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in N_F.$$

Por outro lado, temos que N_E é um conjunto ξ -separado de E , onde $\xi \geq \delta$, logo

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq (l_\infty(T) + \varepsilon)\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in N_E.$$

Segue disso que $\tilde{T} := T|_{N_E} : N_E \rightarrow N_F$ é uma função bi-Lipschitz, entre malhas de E e F , logo,

$$d_m(E, F) \leq l(\tilde{T})l(\tilde{T}^{-1}) \leq (l_\infty(T) + \varepsilon)(l_\infty(T^{-1}) + \varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ acima foi tomado arbitrariamente, segue que $d_m(E, F) \leq l_\infty(T)l_\infty(T^{-1})$. $\square$

Capítulo 2

Os Teoremas de Górak e problemas em aberto

Enunciamos abaixo os dois teoremas provados por Górak nos artigos [13] e [14] que serão demonstrados nos próximos capítulos:

Teorema 2.1 (3.5 de [14]). *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora tal que $T(0) = 0$.*

Se $M < \sqrt{16/15}$ então existe um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ e uma função contínua $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tais que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 76(M - 1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C_0(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende apenas de M e L , e, se $L = 0$ então $\Delta = 0$.

Teorema 2.2 (3.4 de [13]). *Sejam X e Y espaços compactos Hausdorff e $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora tal que $T(0) = 0$.*

Se $M < \sqrt{6/5}$ então existe um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ e uma função contínua $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tais que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 26(M - 1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende apenas de M e L , e, se $L = 0$ então $\Delta = 0$.

Ambos os teoremas possuem como hipótese a existência de uma quasi-isometria bijetora. Fazendo a composição dos mesmos com a Proposição 1.43, obtemos um corolário deles com hipóteses mais gerais sobre T :

Corolário 2.3. *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : D_X \rightarrow D_Y$ uma (M, L) -quasi-isometria sobrejetora entre subconjuntos ε -denso e ε' -denso de $C_0(X)$ e $C_0(Y)$, respectivamente.*

(a) (Teorema 2.1) *Se $M < \sqrt{16/15}$ então $X \approx Y$.*

(b) (Teorema 2.2) *Se X e Y são compactos e $M < \sqrt{6/5}$, então $X \approx Y$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.43, tomemos $T' : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ (M, L') -quasi-isometria bijetora, para algum $L' \geq 0$.

Definindo $T'' : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ tal que $T''(u) := T'(u) - T'(0)$, $\forall u \in C_0(X)$, não é difícil verificar que T'' é (M, L') -quasi-isometria bijetora com $T''(0) = 0$.

Logo, T'' está sob as hipóteses do Teorema 2.1, para o caso (i), ou do Teorema 2.2, para o caso (ii), e ambos os teoremas implicam que $X \approx Y$. $\square$

Fazendo uso novamente da Proposição 1.43, também obtemos um outro corolário com respeito à distância-malha entre os espaços, introduzida na seção anterior:

Corolário 2.4. *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff. Temos:*

(a) *Se $d_m(C_0(X), C_0(Y)) < 16/15$ então $X \approx Y$.*

(b) *Se X e Y são compactos e $d_m(C(X), C(Y)) < 6/5$, então $X \approx Y$.*

Demonstração. Ambos os itens decorrem da composição da Proposição 1.43 com o Corolário 2.3. $\square$

Relembremos a seguinte generalização do Teorema de Banach-Stone, obtida em 2005 por Dutriex e Kalton [10]:

Teorema 2.5 (Dutriex & Kalton). *Dados X e Y espaços localmente compactos Hausdorff, temos que*

$$d_m(C_0(X), C_0(Y)) < 17/16 \Rightarrow X \approx Y.$$

O Corolário 2.4 constitui uma melhora deste resultado, principalmente para o caso em que X e Y são compactos, no qual a constante majorante de $d_m(C(X), C(Y))$ aumentou consideravelmente.

Além disso, é importante também mencionar que, a partir do Corolário 2.4, em função de d_m , observando a Proposição 1.47, vemos que ele também contribui para o estudo dos homeomorfismos uniformes entre espaços $C_0(X)$, pois, compondo estes resultados, obtemos o seguinte:

Corolário 2.6. *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff. Temos:*

(a) *Se $d_u(C_0(X), C_0(Y)) < 16/15$ então $X \approx Y$.*

(b) *Se X e Y são compactos e $d_u(C(X), C(Y)) < 6/5$, então $X \approx Y$.*

Vejamos abaixo um corolário dos Teoremas de Górak que estabelece uma conexão com o Teorema de Amir-Cambern.

Corolário 2.7. *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$, (M, L) -quasi-isometria. Temos que:*

(a) *(Teorema 2.1) Se $M < \sqrt{16/15}$ então $X \approx Y$.*

(b) *(Teorema 2.2) Se X, Y são compactos e $M < \sqrt{6/5}$, então $X \approx Y$.*

(c) *(Teorema de Amir-Cambern) Se T é linear e $M < \sqrt{2}$, então $X \approx Y$.*

Para prová-lo, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.8. *Sejam E e F espaços de Banach. Toda (M, L) -quasi-isometria $T : E \rightarrow F$ linear é um isomorfismo e $\|T\| \|T^{-1}\| \leq M^2$.*

Demonstração. Dados $u_1, u_2 \in E$, temos que

$$\frac{1}{M} \|nu_1 - nu_2\| - L \leq \|T(nu_1) - T(nu_2)\| \leq M \|nu_1 - nu_2\| + L, \quad \forall n \geq 1.$$

Como T é linear, temos que

$$\frac{1}{M} \|u_1 - u_2\| - \frac{L}{n} \leq \|Tu_1 - Tu_2\| \leq M \|u_1 - u_2\| + \frac{L}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

logo, fazendo $n \rightarrow +\infty$ acima, obtemos

$$\frac{1}{M} \|u_1 - u_2\| \leq \|Tu_1 - Tu_2\| \leq M \|u_1 - u_2\|.$$

Da desigualdade acima, válida para todos $u_1, u_2 \in E$, segue que T é isomorfismo com a imagem. Também decorre dela que $\|T\| \leq M$ e $\|T^{-1}\| \leq M$, logo, $\|T\| \|T^{-1}\| \leq M^2$.

Agora só nos resta provar que $T[E] = F$.

Vejamos que $T[E]$ é denso em F .

Da demonstração do Lema 1.38, temos que o conjunto $\mathcal{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} D_E$ é denso em F .

Como T é linear, temos que $D_E := T[E]$ é um subespaço de F , logo, $\mathcal{D} \subset T[E]$, portanto, $T[E]$ é denso em F .

Logo, temos que

$$\overline{T[E]} = F.$$

Além disso, como T é um isomorfismo com a imagem e E é Banach, temos que $T[E] \subset F$ é um espaço de Banach, portanto, é um subespaço fechado de F , isto é,

$$T[E] = \overline{T[E]}.$$

Juntando os dois últimos fatos destacados acima, concluímos que $T[E] = F$. □

Agora estamos aptos a demonstrar o corolário.

Demonstração do Corolário 2.7. (a) e (b): Seguem diretamente do Corolário 2.3.

(c): Pelo Lema 2.8, temos que $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ é um isomorfismo com $\|T\| \|T^{-1}\| \leq M^2 < 2$. Aplicando o Teorema de Amir-Cambern, segue que $X \approx Y$. □

Isto, naturalmente, motiva a procura da maior constante κ , que satisfaça:

$$\text{Dados } X \text{ e } Y \text{ espaços localmente compactos Hausdorff, } d_m(C_0(X), C_0(Y)) < \kappa \Rightarrow X \approx Y.$$

Afirmação. κ não pode ser estritamente maior que 2.

Para provar a afirmação, veremos antes o lema 2.10 abaixo.

Lema 2.9. *Dados dois espaços normados E e F , todo $T : E \rightarrow F$ isomorfismo gera uma $(\sqrt{\|T\| \|T^{-1}\|}, 0)$ -quasi-isometria bijetora.*

Demonstração. Basta aplicar a mesma técnica utilizada na demonstração de (iii) $\Rightarrow$ (i) da Proposição 1.43, onde definimos $\tilde{T} = \alpha T$, com $\alpha := \sqrt{\frac{\|T^{-1}\|}{\|T\|}}$, e verificamos que $\tilde{T}$ é uma $(\sqrt{\|T\| \|T^{-1}\|}, 0)$ -quasi-isometria bijetora. $\square$

Da composição do Lema 2.9 acima, com a Proposição 1.43, temos:

Lema 2.10. *Dados E e F espaços de Banach, para todo $T : E \rightarrow F$ isomorfismo entre espaços de Banach, dado $K \geq 1$, temos que*

$$\|T\| \|T^{-1}\| < K \Rightarrow d_m(E, F) < K.$$

Demonstração da Afirmação. Pelo contra-exemplo de Cohen [9], fixemos X, Y espaços compactos não-homeomorfos e $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ isomorfismo tal que $\|T\| \|T^{-1}\| = 2$.

Suponha que $\kappa > 2$.

Como $\|T\| \|T^{-1}\| = 2 < \kappa$, pelo Lema 2.10 acima, temos que $d_m(C(X), C(Y)) < \kappa$.

Logo, pela propriedade de κ , temos que X e Y são homeomorfos, o que nos dá uma contradição. $\square$

Por fim, destacamos que, com os resultados de Górak, a constante κ , restrita no contexto compacto, subiu de 17/16 para 6/5. O próprio, no fim de seu artigo [13], motivado por esse aumento de κ sob o contexto compacto, propôs os seguintes problemas:

Problema 2.11 (4.1 de [13]). *É verdade que para todos os espaços compactos Hausdorff X e Y a desigualdade $d_m(C(X), C(Y)) < 2$ implica que X e Y são homeomorfos?*

Problema 2.12 (4.2 de [13]). *Qual a resposta do Problema 2.11 se considerarmos apenas espaços compactos enumeráveis? E se $X = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$?*

Capítulo 3

O Teorema de Górak para espaços localmente compactos

Neste capítulo faremos a demonstração do Teorema 2.1, que corresponde ao Teorema de Górak para espaços localmente compactos Hausdorff, do qual recordamos o enunciado abaixo:

Teorema (3.5 de [14]). *Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora tal que $T(0) = 0$.*

Se $M < \sqrt{16/15}$ então existe um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ e uma função contínua $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tais que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 76(M - 1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C_0(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende apenas de M e L , e, se $L = 0$ então $\Delta = 0$.

A demonstração será dividida em dois casos: $1 < M < \sqrt{16/15}$ e $M = 1$. O método de obtenção das funções φ , λ e da estimativa do teorema acima são bem diferentes para cada caso. O primeiro caso é tratado nas três primeiras seções deste capítulo.

A primeira seção do capítulo é dedicada à demonstração do Lema 3.2. Sua prova faz uso da noção de redes de funções m-picos, um dos conceitos-chave para a técnica utilizada por Górak na prova dos resultados, e do Corolário 3.12, provado por ele no artigo [14].

Na segunda seção, por meio de uma série de passos, descrevemos a construção do homeomorfismo φ , a partir do lema introduzido na primeira seção. Na terceira seção, é descrito o método de obtenção da função λ .

Por fim, na quarta seção deste capítulo, é abordado o caso $M = 1$, consequência da combinação do Teorema de Gevirtz-Gruber com o Teorema de Banach-Stone, e efetuada a junção dos resultados para cada caso, concluindo a demonstração.

Para quem não estiver familiarizado com redes e sub-redes, recomendamos a leitura da seção 1.2 do capítulo Preliminares antes de ler este capítulo.

3.1 Um lema importante envolvendo espaços $C_0(X)$

Nesta seção, apresentaremos o Lema 3.2, que é o ponto de partida para as construções de φ e λ do Teorema 2.1 no caso em que $1 < M < \sqrt{16/15}$.

Definição 3.1. Para o lema seguinte, definimos, para todos $1 < M < 14/13$ e $L \geq 0$,

$$\mathfrak{m}_0(M, L) := \max \left\{ \frac{2M}{2 - M^2} L, \frac{M(5M + 3)}{4(M - 1)^3} L \right\}.$$

Lema 3.2. Sejam X e Y espaços localmente compactos Hausdorff e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora, tal que $1 < M < 14/13$, $T(0) = 0$ e T^{-1} também é (M, L) -quasi-isometria.

Para todos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_0(M, L)$, existe $y \in Y$ tal que

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 15(M - 1)m + L, \quad \forall f \in B[0, m].$$

Para demonstrá-lo, precisamos ter em mente o conceito de redes de funções m-picos e o Corolário 3.12, que apresentamos a seguir.

I. Redes de funções m-picos

Definimos abaixo o conceito de rede de funções picos, peça-chave da técnica empregada em [17] por Jarosz. As redes de funções picos servirão como etapa para a definição das redes de funções m-picos.

No que segue, utilizaremos a notação $C_0(X, [0, 1]) := \{f \in C_0(X) \mid f[X] \subset [0, 1]\}$.

Definição 3.3 (Redes de funções picos). Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff, dado $x \in X$, dizemos que uma rede $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ de elementos de $C_0(X, [0, 1])$ é uma rede de funções picos em $x \in X$ se:

- (i) $\|f_\sigma\| = f_\sigma(x) = 1$;
- (ii) $\lim_{\sigma \in \Sigma} \|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{V}_x$.

Denotamos o conjunto de redes de funções picos em $x \in X$ por $P^X(x)$.

Lema 3.4. Temos as seguintes propriedades básicas das redes de funções picos:

- (a) Para todo $x \in X$, $P^X(x) \neq \emptyset$.
- (b) Se $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta}$ é sub-rede de $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P^X(x)$ então $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P^X(x)$.

Demonstração. (a): Fixado $x \in X$, denotemos $\Sigma := \mathcal{V}_x$.

Temos que Σ , com a ordem da continência é um conjunto dirigido e, para todo $V \in \Sigma$, fixemos $f_V \in C_0(X, [0, 1])$ tal que $f_V(x) = 1$ e $f_V[X \setminus U] = \{0\}$ (para mais detalhes, veja o Capítulo Preliminares).

Logo, $(f_V)_{V \in \Sigma}$ é uma rede de elementos de $C_0(X, [0, 1])$.

Vejamos abaixo que $(f_V)_{V \in \Sigma}$ é uma rede de funções picos em x :

$$(i) \|f_V\| = f_V(x) = 1, \quad \forall V \in \Sigma.$$

$$(ii) \lim_{V \in \Sigma} \|f_V\|_{(X \setminus U)} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{V}_x.$$

De fato, dado $U \in \mathcal{V}_x$, para cada $V \in \Sigma$ tal que $V \subset U$, temos:

$$\begin{cases} f_V[X \setminus V] = \{0\} \\ X \setminus U \subset X \setminus V \end{cases} \Rightarrow f_V[X \setminus U] = \{0\} \Rightarrow \|f_V\|_{(X \setminus U)} = 0,$$

$$\text{logo, } \lim_{V \in \Sigma} \|f_V\|_{(X \setminus U)} = 0.$$

(b): Pelas propriedades de sub-redes, temos:

$$(i) \|f_\sigma\| = f_\sigma(x) = 1, \quad \forall \sigma \in \Sigma \Rightarrow \|f_{\sigma(\theta)}\| = f_{\sigma(\theta)}(x) = 1, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

$$(ii) \lim_{\theta \in \Theta} \|f_{\sigma(\theta)}\|_{(X \setminus U)} = \lim_{\sigma \in \Sigma} \|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{V}_x.$$

□

Vejamos abaixo a generalização dada por Górak ao conceito.

Definição 3.5 (Redes de funções m-picos). *Dados $x \in X$ e $m > 0$, dizemos que a rede $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ de elementos de $C_0(X)$ é uma rede de funções m-picos em $x \in X$ se existem $(f'_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ rede de funções picos em x e $\lambda \in \{-1, 1\}$ tais que*

$$f_\sigma = \lambda m f'_\sigma, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Denotamos o conjunto das redes de funções m-picos em x por $P_m^X(x)$.

Lema 3.6. *Eis as principais propriedades básicas das redes de funções m-picos:*

(a) Para todo $x \in X$ e $m > 0$, $P_m^X(x) \neq \emptyset$.

Seja $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$, temos que:

(b) $\lim_{\sigma \in \Sigma} \|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} = 0, \quad \forall U \in \mathcal{V}_x.$

(c) $\text{sign}(f_\sigma(x))$ é constante em Σ .

(d) ou $f_\sigma[X] \subset [0, m], \quad \forall \sigma \in \Sigma$, ou $f_\sigma[X] \subset [-m, 0], \quad \forall \sigma \in \Sigma$.

(e) $(-f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ também é uma rede de funções m-picos em x .

(f) se $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta}$ é sub-rede de $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ então $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P_m^X(x)$.

Demonstração. (a): Segue do fato de que $P^X(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in X$ (item (a) do Lema 3.4).

Demonstraremos abaixo os próximos itens, para tal, fixemos $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e tomemos $(f'_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ rede de funções picos em x e $\lambda \in \{-1, 1\}$ tais que

$$f_\sigma = \lambda m f'_\sigma, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

(b): Temos que

$$\lim_{\sigma \in \Sigma} \|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} = \lim_{\sigma \in \Sigma} m \|f'_\sigma\|_{(X \setminus U)} = m \left[\lim_{\sigma \in \Sigma} \|f'_\sigma\|_{(X \setminus U)} \right] = 0, \quad \forall U \in \mathcal{V}_x.$$

(c): Claramente, $\text{sign}(f_\sigma(x)) = \lambda$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

(d): Como $f'_\sigma[X] \subset [0, 1]$, $\forall \sigma \in \Sigma$, segue que, para todo $\sigma \in \Sigma$, $f_\sigma[X] \subset \{\lambda m x \mid x \in [0, 1]\}$, que é igual a $[0, m]$, quando $\lambda = 1$, ou, $[-m, 0]$, quando $\lambda = -1$.

(e): Temos que $(-f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} = (-\lambda m f'_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, onde $-\lambda \in \{-1, 1\}$ e $(f'_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P^X(x)$.

(f): Temos que $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} = (\lambda m f'_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta}$, onde $\lambda \in \{-1, 1\}$ e, pelo item (b) do Lema 3.4, $(f'_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P^X(x)$.

□

Vejamos abaixo mais um lema à respeito das redes de funções m-picos.

Lema 3.7. *Sejam $x \in X$, $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ uma rede de funções m-picos em x e $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| \leq m$. Temos:*

$$(a) \liminf_{\sigma \in \Sigma} \| |f_\sigma| + |f| \| = m + |f(x)|.$$

$$(b) \text{ Se } \text{sign}(f(x)) = \text{sign}(f_\sigma(x)), \quad \forall \sigma \in \Sigma \text{ então } \liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f - f_\sigma\| \leq m.$$

Demonstração. (a): Notemos que

$$\| |f_\sigma| + |f| \| \geq |f_\sigma(x)| + |f(x)| = m + |f(x)|, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

portanto,

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma} \| |f_\sigma| + |f| \| \geq m + |f(x)|. \quad (3.1)$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de $|f|$, tomemos

$$U_\varepsilon := \{u \in X \mid |f(u)| < |f(x)| + \varepsilon\} \in \mathcal{V}_x,$$

temos que

$$\|f\|_{U_\varepsilon} \leq |f(x)| + \varepsilon. \quad (3.2)$$

Pelo item (b) do Lema 3.6, tomemos também $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$\|f_\sigma\|_{(X \setminus U_\varepsilon)} < \varepsilon, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0. \quad (3.3)$$

Juntando (3.2) e (3.3), obtemos

$$\begin{cases} \| |f_\sigma| + |f| \|_{U_\varepsilon} & \leq \|f_\sigma\|_{U_\varepsilon} + \|f\|_{U_\varepsilon} & \leq m + |f(x)| + \varepsilon \\ \| |f_\sigma| + |f| \|_{(X \setminus U_\varepsilon)} & \leq \|f_\sigma\|_{(X \setminus U_\varepsilon)} + \|f\|_{(X \setminus U_\varepsilon)} & \leq \varepsilon + m \end{cases}, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0,$$

logo,

$$\| |f_\sigma| + |f| \| = \max \{ \| |f_\sigma| + |f| \|_{U_\varepsilon}, \| |f_\sigma| + |f| \|_{(X \setminus U_\varepsilon)} \} \leq m + |f(x)| + \varepsilon, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0,$$

portanto, $\liminf_{\sigma \in \Sigma} \| |f_\sigma| + |f| \| \leq m + |f(x)| + \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ acima foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma} \| |f_\sigma| + |f| \| \leq m + |f(x)|,$$

que, junto com (3.1), nos dá a igualdade enunciada.

(b): Suponha que $\text{sign}(f_\sigma(x)) = 1$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Pela continuidade da f , seja $U := \{u \in X \mid f(u) > 0\} \in \mathcal{V}_x$.

Dado $\varepsilon > 0$, pelo item (b) do Lema 3.6, tomemos $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$\|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} \leq \varepsilon, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0.$$

Temos que, para todo $\sigma \geq \sigma_0$,

$$\|f - f_\sigma\|_{(X \setminus U)} \leq \|f\| + \|f_\sigma\|_{(X \setminus U)} \leq m + \varepsilon,$$

e também,

$$f[U], f_\sigma[U] \subset [0, m] \Rightarrow \|f - f_\sigma\|_U \leq m,$$

logo,

$$\|f - f_\sigma\| = \max \{ \|f - f_\sigma\|_U, \|f - f_\sigma\|_{(X \setminus U)} \} \leq m + \varepsilon, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0,$$

concluindo assim que $\liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f - f_\sigma\| \leq m + \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, temos que $\liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f - f_\sigma\| \leq m$.

Analogamente, demonstramos que $\liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f - f_\sigma\| \leq m$ para $\text{sign}(f_\sigma(x)) = -1$, $\forall \sigma \in \Sigma$. $\square$

II. Quasi-isometrias e a estimativa da distância entre pontos médios

O objetivo principal da subseção II é o Corolário 3.12, que será aplicado na demonstração do Lema 3.2. Primeiramente, demonstraremos o Teorema 3.10, correspondente ao Teorema 2.1 do artigo [14], provado por Górak, o qual exibe uma estimativa de $\|T(\frac{a+b}{2}) - \frac{Ta+Tb}{2}\|$ para toda μ -isometria T conveniente. Posteriormente, veremos o Corolário 3.12 deste teorema, correspondente ao Corolário 3.3 de [14].

Antes, definimos o conceito-base de nosso trabalho nesta subseção.

Definição 3.8. *Sejam (E, d_E) e (F, d_F) espaços métricos e $T : E \rightarrow F$ uma bijeção. Suponha que há uma função $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente satisfazendo:*

$$(i) \quad d_F(Tu_1, Tu_2) \leq \mu(d_E(u_1, u_2)), \quad \forall u_1, u_2 \in E;$$

$$(ii) \quad d_E(T^{-1}v_1, T^{-1}v_2) \leq \mu(d_F(v_1, v_2)), \quad \forall v_1, v_2 \in F.$$

Então T é dita uma μ -isometria.

O lema a seguir será utilizado na demonstração do Teorema 3.10.

Lema 3.9. *Sejam (E, d_E) , (F, d_F) e (G, d_G) espaços métricos.*

Dadas $T_1 : E \rightarrow F$ e $T_2 : F \rightarrow G$, μ_1 -isometria e μ_2 -isometria, respectivamente, temos que $T_2 \circ T_1$ é uma γ -isometria, onde $\gamma(t) = \max\{\mu_2 \circ \mu_1(t), \mu_1 \circ \mu_2(t)\}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Além disso, se T_2 for isometria, então $T_2 \circ T_1$ é uma μ_1 -isometria.

Demonstração. Temos que $T_2 \circ T_1$ é bijeção, pois T_1 e T_2 são bijeções, e $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$. Notemos que

$$d_G(T_2 \circ T_1(u), T_2 \circ T_1(u')) \leq \mu_2(d_F(T_1(u), T_1(u'))) \leq \mu_2 \circ \mu_1(d_E(u, u')) \leq \gamma(d_E(u, u')), \forall u, u' \in E.$$

Da mesma forma, concluímos que

$$d_E((T_2 \circ T_1)^{-1}(v), (T_2 \circ T_1)^{-1}(v')) \leq \mu_1 \circ \mu_2(d_G(v, v')) \leq \gamma(d_G(v, v')), \forall v, v' \in G.$$

Se T_2 é isometria, basta observar que

$$\begin{cases} d_G(T_2 \circ T_1(u), T_2 \circ T_1(u')) = d_F(T_1(u), T_1(u')) \leq \mu_1(d_E(u, u')), \forall u, u' \in E \\ d_E((T_2 \circ T_1)^{-1}(v), (T_2 \circ T_1)^{-1}(v')) \leq \mu_1(d_F(T_2^{-1}(v), T_2^{-1}(v'))) = \mu_1(d_G(v, v')), \forall v, v' \in G \end{cases}.$$

□

Teorema 3.10 (2.1 de [14]). *Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ uma μ -isometria.*

Suponha que $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $\mu(t)/2 \leq \mu(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Então para todos $a, b \in E$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| T \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| \leq \mu^{\circ(2^{n+1}-1)} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right),$$

onde $\mu^{\circ n} = \mu \circ \dots \circ \mu$ (composição n vezes).

Demonstração. Para toda função $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente, definimos $\mathcal{W}(\mu)$ como sendo o conjunto de todas as μ -isometrias de E em F .

Fixemos $a, b \in E$ e seja $z := (a+b)/2$.

Denotamos, para toda função $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente,

$$\lambda(\mu) = \sup_{T \in \mathcal{W}(\mu)} \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\|.$$

Tenhamos em mente que λ depende de a e b .

Vejam as duas afirmações abaixo:

Afirmação 1. *Para toda $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente tal que $\mu(t)/2 \leq \mu(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, temos que*

$$\lambda(\mu) \leq \mu \left(\frac{\lambda(\mu^{\circ 2})}{2} \right).$$

Demonstração da Afirmação. Dada $T \in \mathcal{W}(\mu)$, seja $w := (Ta + Tb)/2$, definimos:

- $\Psi : E \rightarrow E$ tal que $\Psi(u) := z - (u - z)$. (reflexão com respeito a z)
- $\Psi' : F \rightarrow F$ tal que $\Psi'(v) := w - (v - w)$. (reflexão com respeito a w)

Seja $S := \Psi T^{-1} \Psi' T$.

Temos que Ψ e Ψ' são isometrias, pois são composições de translações e reflexões, logo, pelo Lema 3.9, ΨT^{-1} e $\Psi' T$ são μ -isometrias.

Portanto, pelo mesmo lema, $S = (\Psi T^{-1})(\Psi' T)$ é uma $\mu \circ \mu$ -isometria.

Além disso, é fácil verificar que

$$Su = 2z - T^{-1}(2w - Tu) = a + b - T^{-1}(Ta + Tb - Tu), \quad \forall u \in E,$$

logo,

$$\begin{cases} S(a) = a + b - T^{-1}(Ta + Tb - Ta) = a + b - T^{-1}(Tb) = a \\ S(b) = a + b - T^{-1}(Ta + Tb - Tb) = a + b - T^{-1}(Ta) = b \end{cases}.$$

Em suma, vimos acima que $S \in \mathcal{W}(\mu^{\circ 2})$, $Sa = a$ e $Sb = b$.

Notemos que

$$2 \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| = \|(Ta + Tb - Tz) - Tz\| = \|\Psi' Tz - Tz\|.$$

Disso, como T é μ -isometria, temos

$$2 \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| = \|\Psi' Tz - Tz\| \leq \mu(\|T^{-1} \Psi' Tz - z\|).$$

Notemos ainda que, como Ψ é uma reflexão com respeito a z , e $Sa = a$, $Sb = b$ temos

$$\|T^{-1} \Psi' Tz - z\| = \|Sz - z\| = \left\| Sz - \frac{Sa + Sb}{2} \right\|.$$

Juntando as duas últimas desigualdades acima, obtemos:

$$\left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \mu \left(\left\| Sz - \frac{Sa + Sb}{2} \right\| \right).$$

Lembrando que μ é não-decrescente satisfazendo $\mu(t)/2 \leq \mu(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ e que $S \in \mathcal{W}(\mu^{\circ 2})$, temos

$$\begin{aligned} \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| &\leq \frac{1}{2} \mu \left(\left\| Sz - \frac{Sa + Sb}{2} \right\| \right) \leq \frac{1}{2} \mu \left(\sup_{T \in \mathcal{W}(\mu^{\circ 2})} \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu(\lambda(\mu^{\circ 2})) \\ &\leq \mu \left(\frac{\lambda(\mu^{\circ 2})}{2} \right). \end{aligned}$$

Como $T \in \mathcal{W}(\mu)$ acima foi escolhida de forma arbitrária, segue que

$$\lambda(\mu) = \sup_{T \in \mathcal{W}(\mu)} \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| \leq \mu \left(\frac{\lambda(\mu^{\circ 2})}{2} \right).$$

■

Afirmção 2. Para toda $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente tal que $\mu(t)/2 \leq \mu(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, vale que

$$\lambda(\mu) \leq \mu \left(\frac{\|a - b\|}{2} \right).$$

Demonstração da Afirmção. De fato, para toda $T \in \mathcal{W}(\mu)$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| Tz - \frac{Ta + Tb}{2} \right\| &\leq \frac{1}{2} (\|Tz - Ta\| + \|Tz - Tb\|) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(2\mu \left(\frac{\|a - b\|}{2} \right) \right) = \mu \left(\frac{\|a - b\|}{2} \right). \end{aligned}$$

■

Partindo das duas afirmações acima, efetuaremos abaixo a demonstração do teorema.

Fixemos $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ não-decrescente tal que $\mu(t)/2 \leq \mu(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Aplicando a Afirmção 2 para μ , obtemos a desigualdade do enunciado para $n = 0$.

Vamos agora prová-la para $n \geq 1$.

É fácil verificar que, para todo $k \geq 1$, $\mu^{\circ k} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é não-decrescente e também satisfaz $\mu^{\circ k}(t)/2 \leq \mu^{\circ k}(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Portanto, para todo natural $k \geq 1$, as Afirmções 1 e 2 são aplicáveis a $\mu^{\circ k}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, aplicando a Afirmção 1 para $\mu^{\circ 2^m}$, obtemos a seguinte fórmula:

$$\lambda(\mu^{\circ 2^m}) \leq \mu^{\circ 2^m} \left(\frac{1}{2} \lambda(\mu^{\circ 2^{m+1}}) \right), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Dado $n \geq 1$, aplicando (3.4) recursivamente, concluímos que

$$\begin{aligned} \lambda(\mu) &= \lambda(\mu^{\circ 1}) \leq \mu^{\circ 1} \left(\frac{1}{2} \lambda(\mu^{\circ 2}) \right) \leq \mu^{\circ 1} \left(\frac{1}{2} \mu^{\circ 2} \left(\frac{1}{2} \lambda(\mu^{\circ 4}) \right) \right) \leq \mu^{\circ 1} \circ \mu^{\circ 2} \left(\frac{1}{4} \lambda(\mu^{\circ 4}) \right) \leq \dots \\ \dots &\leq \mu^{\circ 1} \circ \mu^{\circ 2} \circ \dots \circ \mu^{\circ 2^{n-1}} \left(\frac{1}{2^n} \lambda(\mu^{\circ 2^n}) \right) = \mu^{\circ (2^n - 1)} \left(\frac{1}{2^n} \lambda(\mu^{\circ 2^n}) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Note que, aplicando a Afirmção 2 para $\mu^{\circ 2^n}$, temos

$$\lambda(\mu^{\circ 2^n}) \leq \mu^{\circ 2^n} \left(\frac{1}{2} \|a - b\| \right),$$

logo,

$$\mu^{\circ (2^n - 1)} \left(\frac{1}{2^n} \lambda(\mu^{\circ 2^n}) \right) \leq \mu^{\circ (2^n - 1)} \left(\frac{1}{2^n} \mu^{\circ 2^n} \left(\frac{1}{2} \|a - b\| \right) \right) \leq \mu^{\circ (2^{n+1} - 1)} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \|a - b\| \right).$$

Juntando isto ao fato (3.5), lembrando que $n \geq 1$ foi tomado arbitrariamente, temos que

$$\lambda(\mu) \leq \mu^{\circ(2^{n+1}-1)} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Com isto, tendo em vista que $a, b \in E$ foram fixados de forma arbitrária, concluímos a demonstração. $\square$

Seguimos agora com a conclusão do Corolário 3.12, para tal, necessitamos da seguinte:

Observação 3.11. Dado $M > 1$, seja $\Psi_M : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\Psi_M(x) = \frac{M^x}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Se $\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} \Psi_M(2^{n+1}) \leq 3(M-1) \\ M^{2^{n+1}} \leq 5 \end{cases}.$$

Demonstração. Fixemos $M > 1$ e definimos $\alpha := \frac{1}{\ln(M)}$.

Vejamos que:

Afirmção 1. α é ponto de mínimo local de Ψ_M .

Demonstração da Afirmção. Seja Ψ'_M a função derivada de Ψ_M , temos que $\Psi'_M(x) = (x \ln(M) - 1) \frac{M^x}{x^2}$.

Logo, $\Psi'_M\left(\frac{1}{\ln(M)}\right) = 0$ e também

$$\begin{cases} x < \frac{1}{\ln(M)} \Rightarrow x \ln(M) - 1 < 0 \Rightarrow \Psi'_M(x) = (x \ln(M) - 1) \frac{M^x}{x^2} < 0 \\ x > \frac{1}{\ln(M)} \Rightarrow x \ln(M) - 1 > 0 \Rightarrow \Psi'_M(x) = (x \ln(M) - 1) \frac{M^x}{x^2} > 0 \end{cases}.$$

■

Afirmção 2. Se $\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n+1} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \sqrt{2}\alpha \right]$.

Demonstração da Afirmção. Definimos o intervalo $I := \left[\log_2 \alpha - \frac{3}{2}, \log_2 \alpha - \frac{1}{2} \right] \subset \mathbb{R}$.

Como I tem diâmetro 1, tomemos $n \in \mathbb{Z} \cap I$.

Note que:

$$\begin{aligned} \log_2 \alpha - \frac{3}{2} \leq n \leq \log_2 \alpha - \frac{1}{2} &\Rightarrow \log_2 \alpha - \frac{1}{2} \leq n+1 \leq \log_2 \alpha + \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 2^{\log_2 \alpha - \frac{1}{2}} \leq 2^{n+1} \leq 2^{\log_2 \alpha + \frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \leq 2^{n+1} \leq \sqrt{2}\alpha. \end{aligned}$$

Agora, só nos falta verificar que $n \geq 0$.

Temos que

$$\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha > \sqrt{2} \Rightarrow \log_2 \alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \alpha - \frac{3}{2} > -1,$$

logo, $n \in \left[\log_2 \alpha - \frac{3}{2}, \log_2 \alpha - \frac{1}{2} \right] \subset]-1, +\infty[$, e disso segue que $n \geq 0$. ■

Suponhamos, a partir de agora, que $\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e fixemos n dado pela Afirmação 2. Seja $k := 2^{n+1}$.

Como $k \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \sqrt{2}\alpha \right]$, temos os dois casos abaixo:

$$(a) \quad k \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \alpha \right].$$

Pela Afirmação 1, temos que Ψ_M é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \alpha \right]$.

$$\text{Logo, } \Psi_M(k) \leq \Psi_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right).$$

$$(b) \quad k \in [\alpha, \sqrt{2}\alpha].$$

Pela Afirmação 1, temos que Ψ_M é crescente no intervalo $[\alpha, \sqrt{2}\alpha]$.

$$\text{Logo, } \Psi_M(k) \leq \Psi_M(\sqrt{2}\alpha).$$

Então

$$\Psi_M(k) \leq \max \left\{ \Psi_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right), \Psi_M(\sqrt{2}\alpha) \right\}.$$

Vamos estimar os valores de $\Psi_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right)$ e $\Psi_M(\sqrt{2}\alpha)$.

Lembremos que $\alpha = \frac{1}{\ln M}$, portanto, $M^\alpha = e^{\ln(M)\alpha} = e$.

Além disso, como $M > 1$, temos que $M - 1 \geq \ln(M)$, pois

$$M - 1 = \ln(e^{M-1}) = \ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(M-1)^n}{n!}\right) = \ln\left(M + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(M-1)^n}{n!}\right) > \ln(M).$$

Com as observações acima, obtemos:

$$\begin{cases} \Psi_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\ln M} \leq e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}(M-1)} \\ \Psi_M(\sqrt{2}\alpha) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \ln M \leq \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}(M-1) \end{cases}.$$

Verifica-se, calculando, que

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}} = 2,868\dots \leq 3 \\ \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 2,908\dots \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Psi_M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right) \leq 3(M-1) \\ \Psi_M(\sqrt{2}\alpha) \leq 3(M-1) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\Psi_M(k) \leq \max \left\{ \Psi_M \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \right), \Psi_M \left(\sqrt{2}\alpha \right) \right\} \leq 3(M-1).$$

Para terminar, concluiremos a tese com respeito a M^k .

Definimos $\phi_M : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\phi_M(t) = M^t$.

Temos que $\phi'_M(t) = \ln(M)M^t > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, logo, ϕ é uma função crescente.

Sendo assim o valor máximo de ϕ_M no intervalo $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha, \sqrt{2}\alpha \right]$ é $\phi_M(\sqrt{2}\alpha)$, portanto,

$$M^k = \phi_M(k) \leq \phi_M(\sqrt{2}\alpha) = M^{\sqrt{2}\alpha} = e^{\sqrt{2}} = 4,113... \leq 5$$

□

Juntando a Observação 3.11 ao Teorema 3.10, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.12 (3.3 de [14]). *Seja $T : E \rightarrow F$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora, onde L é tal que T^{-1} também é (M, L) -quasi-isometria.*

Se $\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}}$ então

$$\left\| T \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{Ta+Tb}{2} \right\| \leq 3(M-1)\|a-b\| + \frac{4}{(M-1)}L, \quad \forall a, b \in E.$$

Demonstração. Temos que T é uma μ -isometria com $\mu(t) := Mt + L$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Do Teorema 3.10, temos que para todos $a, b \in E$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{Ta+Tb}{2} \right\| &\leq \mu^{\circ(2^{n+1}-1)} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right) \\ &\leq M\mu^{\circ(2^{n+1}-1)} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right) + L = \mu^{\circ 2^{n+1}} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Vejamos agora que $\mu^{\circ k}(t) = M^k t + \frac{M^k - 1}{M - 1}L$, $\forall k \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

De fato, para $k = 1$, temos que $M^1 t + \frac{M^1 - 1}{M - 1}L = Mt + L = \mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Supondo que seja válida a fórmula para um certo $k \geq 1$, temos que ela também vale para $k + 1$, pois

$$M^{k+1}t + \frac{M^{k+1} - M + M - 1}{M - 1}L = M \left(M^k t + \frac{M^k - 1}{M - 1}L \right) + L = M\mu^{\circ k}(t) + L = \mu^{\circ k+1}(t).$$

Portanto, temos que para todos $a, b \in E$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| T \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{Ta+Tb}{2} \right\| \leq \mu^{\circ 2^{n+1}} \left(\frac{\|a-b\|}{2^{n+1}} \right) = \frac{M^{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\|a-b\| + \frac{M^{2^{n+1}} - 1}{M - 1}L.$$

Consideremos agora a função Ψ_M da Observação 3.11.

Com a fórmula acima, constatamos que para todos $a, b \in E$ e $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left\| T\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{Ta+Tb}{2} \right\| \leq \Psi_M(2^{n+1})\|a-b\| + \frac{M^{2^{n+1}}-1}{M-1}L.$$

Como $\ln(M) < \frac{1}{\sqrt{2}}$, da Observação 3.11, fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} \Psi_M(2^{n+1}) \leq 3(M-1) \\ M^{2^{n+1}} \leq 5 \end{cases}.$$

Temos então que, para todos $a, b \in E$,

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{Ta+Tb}{2} \right\| &\leq \Psi_M(2^{n+1})\|a-b\| + \frac{M^{2^{n+1}}-1}{M-1}L \\ &\leq 3(M-1)\|a-b\| + \frac{4}{M-1}L. \end{aligned}$$

□

III. Demonstração do lema

Com os conceitos introduzidos acima, estamos aptos a demonstrar o resultado principal desta seção.

Demonstração do Lema 3.2. Fixemos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_0(M, L)$ e vejamos as duas afirmações abaixo:

Afirmção 1. *Existem $g \in C_0(X)$ com $|g(x)| = \|g\| = m$, $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ tais que*

$$\begin{cases} T\left[\frac{1}{2}(f_\sigma + g)\right](y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \\ T\left[-\frac{1}{2}(f_\sigma + g)\right](y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmção. Seja $g \in C_0(X)$ com $g(x) = \|g\| = m$ e, pelos itens (a) e (e) do Lema 3.6, seja $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ tal que $f_\sigma(x) = m$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Façamos $g_\sigma := \frac{1}{2}(f_\sigma + g)$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Para cada $\sigma \in \Sigma$, existe $y_\sigma \in Y$ que assume a norma da função $Tg_\sigma - T(-g_\sigma)$.

Sendo assim, fixemos $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ tal que

$$|Tg_\sigma(y_\sigma) - T(-g_\sigma)(y_\sigma)| = \|Tg_\sigma - T(-g_\sigma)\|, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (3.6)$$

Notemos que $\|g_\sigma\| = m$, $\forall \sigma \in \Sigma$, pois

$$\begin{cases} \|g_\sigma\| = \left\| \frac{1}{2}(f_\sigma + g) \right\| \leq \frac{1}{2}(\|f_\sigma\| + \|g\|) = m \\ \|g_\sigma\| \geq |g_\sigma(x)| = \left| \frac{1}{2}(f_\sigma(x) + g(x)) \right| = m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Decorre disso, junto com o fato de T ser uma (M, L) -quasi-isometria, que

$$\|Tg_\sigma - T(-g_\sigma)\| \geq 2\|g_\sigma\| \frac{1}{M} - L = \frac{2}{M}m - L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

portanto, observando (3.6), obtemos

$$|Tg_\sigma(y_\sigma) - T(-g_\sigma)(y_\sigma)| \geq \frac{2}{M}m - L, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (3.7)$$

Além disso, como $T(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} |T(\pm g_\sigma)(y_\sigma)| &= |T(\pm g_\sigma)(y_\sigma) - T(0)(y_\sigma)| \\ &\leq \|T(\pm g_\sigma) - T(0)\| \\ &\leq M\|\pm g_\sigma - 0\| + L = Mm + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

E também

$$m > m_0 \geq \frac{2M}{2-M^2}L \Rightarrow \left(\frac{2}{M} - M\right)m > 2L \Rightarrow \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0. \quad (3.9)$$

Com os três fatos destacados acima, vejamos que:

- $\text{sign}(Tg_\sigma(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(-g_\sigma)(y_\sigma))$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Suponha que $\text{sign}(Tg_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})) = \text{sign}(T(-g_{\sigma_0})(y_{\sigma_0}))$, para algum $\sigma_0 \in \Sigma$, então

$$|Tg_{\sigma_0}(y_{\sigma_0}) - T(-g_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})| \leq \max\{|Tg_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})|, |T(-g_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})|\}.$$

Segue disso, junto com (3.7) e (3.8), que

$$\begin{aligned} \frac{2}{M}m - L &\leq |Tg_{\sigma_0}(y_{\sigma_0}) - T(-g_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})| \\ &\leq \max\{|Tg_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})|, |T(-g_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})|\} \\ &\leq mM + L, \end{aligned}$$

implicando que

$$\left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \leq 0,$$

uma contradição com (3.9).

- $|T(\pm g_\sigma)(y_\sigma)| \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Pela desigualdade triangular, (3.7), (3.8) e (3.9) concluimos que, para todo $\sigma \in \Sigma$

$$\begin{aligned} |T(\pm g_\sigma)(y_\sigma)| &\geq |Tg_\sigma(y_\sigma) - T(-g_\sigma)(y_\sigma)| - |T(\mp g_\sigma)(y_\sigma)| \\ &\geq \frac{2}{M}m - L - (mM + L) = \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0. \end{aligned}$$

Como consequência dos dois itens provados acima, para cada $\sigma \in \Sigma$, um, e somente um, dos dois casos abaixo ocorre:

- (a) $Tg_\sigma(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L$ e $T(-g_\sigma)(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L$.
- (b) $Tg_\sigma(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L$ e $T(-g_\sigma)(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L$.

Sejam:

- $\Sigma_1 := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{ocorre o caso (a)}\}$.
- $\Sigma_2 := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{ocorre o caso (b)}\}$.

Definimos:

- $\Sigma' = \Sigma_1$ e $\lambda = 1$, caso Σ_1 seja cofinal com Σ .
- $\Sigma' = \Sigma_2$ e $\lambda = -1$, caso Σ_1 não seja cofinal com Σ .

É fácil de constatar que, como $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$, quando Σ_1 não for cofinal, Σ_2 o será.

Concluimos então que Σ' é cofinal em ambas as possibilidades de definição apresentadas acima. Portanto, $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'}$ é sub-rede de $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ e, aplicando os itens (e) e (f) do Lema 3.6, sabemos que $(\lambda f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \in P_m^X(x)$.

Por fim, é fácil verificar que, em ambos os casos considerados na definição de Σ' e λ , temos

$$\begin{cases} T(\lambda g_\sigma)(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \\ T(-\lambda g_\sigma)(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

Decorre do exposto acima que $\lambda g \in C_0(X)$, $(\lambda f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \subset Y$ satisfazem a propriedade da afirmação. ■

Afirmção 2. *Existem $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente tais que*

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(14 - 13M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmção. Seja $g \in C_0(X)$ com $|g(x)| = \|g\| = m$, $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ satisfazendo as propriedades da Afirmção 1.

Consideremos ainda $g_\sigma := \frac{1}{2}(f_\sigma + g)$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Notemos que, no nosso caso, T e M estão sob as hipóteses do Corolário 3.12.

Aplicando-o para as funções acima, temos que

$$\left\| T(\pm g_\sigma) - \frac{T(\pm f_\sigma) + T(\pm g)}{2} \right\| \leq 3(M-1)m + \frac{4}{M-1}L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo,

$$T(\pm g_\sigma)(y_\sigma) - \frac{T(\pm f_\sigma)(y_\sigma) + T(\pm g)(y_\sigma)}{2} \leq 3(M-1)m + \frac{4}{M-1}L, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (3.10)$$

Tomando a desigualdade acima que contempla $T(f_\sigma)(y_\sigma)$ e isolando este termo, obtemos

$$T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq 2T(g_\sigma)(y_\sigma) - Tg(y_\sigma) - 2 \left[3(M-1)m + \frac{4}{M-1}L \right], \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (3.11)$$

Lembremos que, pela Afirmação 1, é satisfeito o seguinte:

$$\begin{cases} T(g_\sigma)(y_\sigma) & \geq \left(\frac{2}{M} - M \right) m - 2L \\ Tg(y_\sigma) & \leq Mm + L \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Juntando as relações logo acima com (3.11), obtemos, para todo $\sigma \in \Sigma$

$$\begin{aligned} T(f_\sigma)(y_\sigma) & \geq 2 \left[\left(\frac{2}{M} - M \right) m - 2L \right] - (Mm + L) - 2 \left[3(M-1)m + \frac{4}{M-1}L \right] \\ & = \left(\frac{4}{M} - 9M + 6 \right) m - \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L. \end{aligned}$$

Vejamos que, como $m > m_0(M, L)$, temos $\left(\frac{4}{M} - 9M + 6 \right) m - \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L \geq (14 - 13M)m$.

Notemos que

$$\begin{aligned} m > \frac{M(5M+3)}{4(M-1)^3} L & \Rightarrow 4 \frac{(M-1)^2}{M} m \geq \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L \\ & \Rightarrow \left(4M - 8 + \frac{4}{M} \right) m - \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L \geq 0 \\ & \Rightarrow \left(4M - 8 + \frac{4}{M} + 14 - 13M \right) m - \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L \geq (14 - 13M)m \\ & \Rightarrow \left(\frac{4}{M} - 9M + 6 \right) m - \left(5 + \frac{8}{M-1} \right) L \geq (14 - 13M)m. \end{aligned}$$

Decorre da junção dos dois fatos acima que

$$T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

A partir de (3.10), também é possível concluir, de forma análoga, que, para todo $\sigma \in \Sigma$, temos:

- $T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(14 - 13M)m$.
- $Tg(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m$.

Observe que $(14 - 13M)m > 0$, pois $M < 14/13$, e, como consequência do exposto acima, $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset \{y \in Y \mid Tg(y) \geq (14 - 13M)m\}$, que é subconjunto compacto de Y .

Tomemos então $(y_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta}$ sub-rede convergente de $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

Pelo item (f) do Lema 3.6, $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P_m^X(x)$.

Com o exposto acima, constata-se facilmente que $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P_m^X(x)$ e $(y_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \subset Y$ satisfazem as propriedades da afirmação. ■

Partindo da Afirmação 2, concluiremos abaixo a demonstração do lema.

Sejam $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente satisfazendo as propriedades da Afirmação 2.

Definimos $y := \lim_{\sigma \in \Sigma} y_\sigma$ e tomamos $f \in B[0, m]$.

Dado $\sigma \in \Sigma$, vejamos que $|Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m \leq |Tf(y_\sigma) - T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)|$, para algum $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Temos dois casos:

- $Tf(y_\sigma) \geq 0$.

Temos que $|Tf(y_\sigma)| = Tf(y_\sigma)$, portanto,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma)| &\geq Tf(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma) \\ &\geq Tf(y_\sigma) + (14 - 13M)m \\ &= |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m. \end{aligned}$$

- $Tf(y_\sigma) < 0$.

Temos que $|Tf(y_\sigma)| = -Tf(y_\sigma)$, portanto,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - Tf_\sigma(y_\sigma)| &\geq -Tf(y_\sigma) + Tf_\sigma(y_\sigma) \\ &\geq -Tf(y_\sigma) + (14 - 13M)m \\ &= |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m. \end{aligned}$$

Logo, dado $\sigma \in \Sigma$, sendo λ como acima, temos que

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m &\leq |Tf(y_\sigma) - T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)| \leq \|Tf - T(\lambda f_\sigma)\| \\ &\leq M\|f - \lambda f_\sigma\| + L \\ &\leq M\|f\| + \|f_\sigma\| + L. \end{aligned}$$

Tomando o $\liminf$ na relação acima,

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma} |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m \leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma} (\|f\| + \|f_\sigma\|) + L.$$

Da continuidade de $|Tf|$, temos que $|Tf(y)| = \liminf_{\sigma \in \Sigma} |Tf(y_\sigma)|$.

Fazendo uso o fato destacado acima e do item (a) do Lema 3.7, obtemos:

$$\begin{aligned} |Tf(y)| + (14 - 13M)m &\leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma} (\|f\| + \|f_\sigma\|) + L \\ &= M(m + |f(x)|) + L \\ &= |f(x)| + (M - 1)|f(x)| + Mm + L \\ &\leq |f(x)| + (M - 1)\|f\| + Mm + L \\ &\leq |f(x)| + (2M - 1)m + L. \end{aligned}$$

Ao isolar $|Tf(y)|$, concluímos que y satisfaz a tese, pois $\|f\| \leq m$ acima foi fixada de forma arbitrária e a definição de y independe da escolha feita para f . $\square$

No decorrer do texto definiremos constantes como $\mathfrak{m}_0(M, L)$ no intuito de não sobrecarregarmos os enunciados.

Advertimos que, da definição dada acima, a forma explícita de $\mathfrak{m}_0(M, L)$ só é importante na demonstração do lema, o que realmente devemos ter em mente quando formos aplicá-lo mais a frente é a sua existência e o fato de $\mathfrak{m}_0(M, 0) = 0$.

3.2 Homeomorfismos entre espaços localmente compactos gerados por quasi-isometrias

Fixemos abaixo alguns valores satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.2, com a restrição adicional: $M > 1$, para os quais faremos a construção do homeomorfismo φ .

Observação 3.13. *A partir de agora, até o fim da Seção 3.3, consideraremos fixados X e Y espaços localmente compactos Hausdorff, $1 < M < \sqrt{16/15}$, $L \geq 0$ e $T : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora, com $T(0) = 0$.*

Pelo Lema 1.31, supomos que L é o menor tal que T e T^{-1} são (M, L) -quasi-isometrias.

Também denotaremos $\mathfrak{m}_0(M, L)$ apenas por $\mathfrak{m}_0$.

A definição abaixo decorre diretamente do Lema 3.2.

Definição 3.14. *Dado $x \in X$, definimos, para cada $m > \mathfrak{m}_0$, o conjunto $\mathfrak{S}_m(x)$ de todos os $y \in Y$ que satisfazem*

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 15(M-1)m + L, \quad \forall f \in B[0, m].$$

Sabemos, pelo Lema 3.2, que $\mathfrak{S}_m(x) \neq \emptyset$, $\forall m > \mathfrak{m}_0$, $\forall x \in X$.

É fácil ver que podemos aplicar este lema também para T^{-1} , com as mesmas constantes M e L . Portanto, também definimos, para todos $m > \mathfrak{m}_0$ e $y \in Y$ o conjunto $\mathfrak{S}_m^{-1}(y) \subset X$ (não-vazio) dos elementos de X que satisfazem

$$|T^{-1}g(x)| \leq |g(y)| + 15(M-1)m + L, \quad \forall g \in B[0, m].$$

Faremos a construção de φ através dos conjuntos definidos acima.

Observe que o Lema 3.2, que nos possibilitou definir os conjuntos $\mathfrak{S}_m(x)$ e $\mathfrak{S}_k^{-1}(y)$, requer a seguinte restrição para o valor de M : $1 < M < 14/13$.

O passo abaixo, nos dá uma relação muito forte entre as duas famílias de conjuntos definidas acima, a qual só é válida para $1 < M < \sqrt{16/15}$, daí a restrição inicial feita a M , ao fixarmos os valores.

Passo 3.15. *Existem $\mathfrak{m}_1 \geq \mathfrak{m}_0$ e $\gamma :]\mathfrak{m}_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ contínua tais que, dado $x \in X$, para todo $m > \mathfrak{m}_1$, é válido que*

$$v \in \mathfrak{S}_m(x) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{S}_k^{-1}(v) = \{x\}, \quad \forall k \in [Mm + L, Mm + L + \gamma(m)[,$$

e também que, dado $y \in Y$, para todo $m > \mathfrak{m}_1$, temos

$$u \in \mathfrak{S}_m^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{S}_k(u) = \{y\}, \quad \forall k \in [Mm + L, Mm + L + \gamma(m)[.$$

Além disso, quando $L = 0$ podemos tomar $m_1 = 0$.

Demonstração. Provaremos a primeira relação do enunciado, podendo a segunda ser obtida por meio de prova análoga.

Fixemos $x \in X$ e $v \in \mathfrak{S}_m(x)$, vejamos que

Afirmção 1. Dados $m > m_0$ e $k \geq Mm + L$, se $\mathfrak{S}_k^{-1}(v) \neq \{x\}$ então

$$k - (mM + L) \geq \frac{m(16 - 15M^2) - L(15M - 13)}{15(M - 1)}.$$

Demonstração da Afirmção. Suponhamos que $\mathfrak{S}_k^{-1}(v) \neq \{x\}$.

Sabemos que $\mathfrak{S}_k^{-1}(v) \neq \emptyset$, logo, existe $u \in \mathfrak{S}_k^{-1}(v)$, tal que $u \neq x$.

Fixemos u dessa forma e tomemos $f \in C_0(X)$ tal que $f(x) = 0$ e $f(u) = \|f\| = m$.

Notemos que:

- $|Tf(v)| \leq 15(M - 1)m + L$.

Decorre de $v \in \mathfrak{S}_m(x)$ e $f \in B[0, m]$ que

$$|Tf(v)| \leq |f(x)| + 15(M - 1)m + L.$$

Como $f(x) = 0$, segue a desigualdade enunciada.

- $|Tf(v)| \geq m - 15(M - 1)k - L$.

Temos que $u \in \mathfrak{S}_k^{-1}(v)$ e $Tf \in B[0, mM + L] \subset B[0, k]$, logo

$$|f(u)| = |T^{-1}(Tf)(u)| \leq |Tf(v)| + 15(M - 1)k + L,$$

substituindo $|f(u)| = m$ acima e isolando $|Tf(v)|$, obtemos a desigualdade enunciada.

Combinando as duas desigualdades acima

$$15(M - 1)m + L \geq |Tf(y)| \geq m - 15(M - 1)k - L,$$

substituindo k por $(k - (mM + L)) + (mM + L)$ acima e isolando o termo $k - (mM + L)$ obtemos a desigualdade da afirmação. ■

Note que, como $M < \sqrt{16/15}$, temos $16 - 15M^2 > 0$.

Sendo assim, $m(16 - 15M^2) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, logo, podemos tomar $m_1 \geq m_0$ tal que

$$m(16 - 15M^2) > L(15M - 13), \quad \forall m > m_1. \quad (3.12)$$

É fácil notar ainda que, se $L = 0$, temos que $m_0 = L(15M - 13) = 0$, portanto, podemos tomar $m_1 = 0$.

Fixando m_1 satisfazendo (3.12), temos que

$$\frac{m(16 - 15M^2) - L(15M - 13)}{15(M - 1)} > 0, \quad \forall m > m_1,$$

portanto, para $m > \mathfrak{m}_1$, faz sentido considerarmos o intervalo

$$\left[mM + L, mM + L + \frac{m(16 - 15M^2) - L(15M - 13)}{15(M - 1)} \right].$$

Pela contrapositiva da Afirmação 1, para todo k pertencente ao intervalo acima, $\mathfrak{S}_k^{-1}(v) = \{x\}$.

Definimos então $\gamma :]\mathfrak{m}_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\gamma(m) := \frac{m(16 - 15M^2) - L(15M - 13)}{15(M - 1)}$.

Claramente γ é contínua e satisfaz, para todo $m > \mathfrak{m}_1$,

$$\mathfrak{S}_k^{-1}(v) = \{x\}, \quad \forall k \in [mM + L, mM + L + \gamma(m)[.$$

Observe que, como as definições de $\mathfrak{m}_1$ e γ independem da escolha feita para x e v , e estes foram fixados de forma arbitrária, $\mathfrak{m}_1$ e γ satisfazem a propriedade destacada acima para todos $x \in X$, $m > \mathfrak{m}_1$ e $v \in \mathfrak{S}_m(x)$.

Podemos demonstrar, de modo análogo, que existem $\mathfrak{m}_1$ e γ satisfazendo a segunda relação do enunciado, trocando variáveis relacionadas com T por variáveis análogas relacionadas com T^{-1} . Caso os valores $\mathfrak{m}_1$ e γ obtidos na prova da segunda relação sejam diferentes dos da prova da primeira, como queremos $\mathfrak{m}_1$ e γ satisfazendo ambas simultaneamente, basta tomarmos como $\mathfrak{m}_1$ o máximo dos dois valores e como γ a função cujo domínio é a intersecção dos dois domínios e que, em cada $m > \mathfrak{m}_1$, assume o mínimo dos valores das funções em m (que resulta numa função contínua).

Por fim, observe que se $L = 0$, podemos escolher $\mathfrak{m}_1 = 0$ tanto na prova da primeira relação quanto na da segunda. $\square$

A partir de agora, fixemos $\mathfrak{m}_1 \geq \mathfrak{m}_0$ e $\gamma :]\mathfrak{m}_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ conforme foram definidos na demonstração do passo acima, tomando $\mathfrak{m}_1$ nulo para o caso em que $L = 0$.

Para demonstrarmos o próximo passo, faremos uso do seguinte:

Lema 3.16. *Seja $\Psi :]a, +\infty[\rightarrow U$, onde U é um conjunto qualquer. Se existe $\delta :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$, contínua, tal que para todo $a' > a$, Ψ é constante no intervalo $[a', a' + \delta(a')[$, então Ψ é constante em $]a, +\infty[$.*

Demonstração. Suponha Ψ não constante em $]a, +\infty[$ e sejam $a_1 < a_2$ tais que $\Psi(a_1) \neq \Psi(a_2)$. Definimos $b_1 := \inf\{a' > a_1 \mid \Psi(a') \neq \Psi(a_1)\}$, temos que $a_1 < a_1 + \delta(a_1) \leq b_1 \leq a_2 < +\infty$ e $\Psi(p) = \Psi(a_1)$ para todo $p \in]a_1, b_1[$.

Tomemos então $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]a_1, b_1[$ sequência crescente tendendo a b_1 .

É fácil verificar que

$$c_n < c_n + \delta(c_n) < b_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o limite na desigualdade, observando que δ é contínua, temos que $\delta(b_1) = 0$, o que é uma contradição, pois $\delta(p) > 0$, $\forall p \in]a, +\infty[$. $\square$

Passo 3.17. *Existe $\mathfrak{m}_2 \geq \mathfrak{m}_1$ tal que, fixado $x \in X$, $\mathfrak{S}_m(x)$ é conjunto unitário e possui o mesmo valor para todo $m > \mathfrak{m}_2$. Analogamente, também temos que, fixado $y \in Y$, $\mathfrak{S}_m^{-1}(y)$ é conjunto unitário e possui o mesmo valor para todo $m > \mathfrak{m}_2$.*

Além disso, podemos tomar $\mathfrak{m}_2 = 0$, quando $L = 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração para os conjuntos $\mathfrak{S}_m(x)$ e é possível efetuar a demonstração para $\mathfrak{S}_m^{-1}(x)$ pelo mesmo processo, substituindo as variáveis relacionadas com T por variáveis relacionadas de forma análoga com T^{-1} .

Vejam os que:

Afirmção 1. *Existem $\mathfrak{m}_2 \geq \mathfrak{m}_1$ e $\tilde{\gamma} :]\mathfrak{m}_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ contínua tais que, para todos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_2$, existe $v \in Y$ satisfazendo:*

$$\mathfrak{S}_k(x) = \{v\}, \forall k \in [m, m + \tilde{\gamma}(m)[.$$

Demonstração da Afirmção. Dados $x \in X$ e $m' > \mathfrak{m}_1$, tomemos $v \in \mathfrak{S}_{m'}(x)$.

Aplicando o Passo 3.15, temos que

$$v \in \mathfrak{S}_{m'}(x) \Rightarrow \mathfrak{S}_{m'M+L}^{-1}(v) = \{x\}.$$

Aplicando novamente o Passo 3.15, agora para $x \in \mathfrak{S}_{m'M+L}^{-1}(v)$, temos que

$$x \in \mathfrak{S}_{m'M+L}^{-1}(v) \Rightarrow \mathfrak{S}_k(x) = \{v\}, \forall k \in [(m'M + L)M + L, (m'M + L)M + L + \gamma(m'M + L)[.$$

Concluimos então que, para todos $x \in X$ e $m' > \mathfrak{m}_1$, existe $v \in Y$ tal que

$$\mathfrak{S}_k(x) = \{v\}, \forall k \in [(m'M + L)M + L, (m'M + L)M + L + \gamma(m'M + L)[. \quad (3.13)$$

Definimos $\mathfrak{m}_2 := (\mathfrak{m}_1 M + L)M + L$ e $\tilde{\gamma} :]\mathfrak{m}_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\tilde{\gamma}(m) = \gamma\left(\frac{m - L}{M}\right)$, $\forall m > \mathfrak{m}_2$, que, claramente, é contínua.

Dados $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_2$, seja $m' \in \mathbb{R}$ tal que $m = (m'M + L)M + L$.

É fácil notar que:

- $m' > \mathfrak{m}_1$.
- $\gamma(m'M + L) = \tilde{\gamma}(m)$.

Logo, aplicando (3.13) para m' , e substituindo os valores de m e $\tilde{\gamma}(m)$, temos

$$\mathfrak{S}_k(x) = \{v\}, \forall k \in [m, m + \tilde{\gamma}(m)[. \quad (3.14)$$

■

Fixemos $\mathfrak{m}_2$ e $\tilde{\gamma}$ conforme foram definidos na Afirmção 1. Por meio dela, já sabemos que para todos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_2$, o conjunto $\mathfrak{S}_m(x)$ é unitário.

Portanto, só nos falta concluir que, fixado $x \in X$, $\mathfrak{S}_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > \mathfrak{m}_2$.

Para tal, dado $x \in X$, definimos $\Psi_x :]\mathfrak{m}_2, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $\Psi_x(m) := \mathfrak{S}_m(x)$, $\forall m > \mathfrak{m}_2$.

Observe que, da Afirmção 1 segue que, para todo $m > \mathfrak{m}_2$, Ψ_x é constante no intervalo $[m, m + \tilde{\gamma}(m)[$, onde $\tilde{\gamma} :]\mathfrak{m}_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é contínua.

Portanto, Ψ_x está sob as hipóteses do Lema 3.16, que, aplicado, nos garante que ela é constante em $] \mathfrak{m}_2, +\infty[$. □

Fixemos $\mathfrak{m}_2$ conforme foi definido na demonstração do passo acima. A partir dele, podemos definir:

Definição 3.18. *Definimos as funções:*

- $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que $\mathfrak{S}_m(x) = \{\varphi(x)\}$, $\forall m > \mathfrak{m}_2$.
- $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\mathfrak{S}_m^{-1}(y) = \{\psi(y)\}$, $\forall m > \mathfrak{m}_2$.

Provaremos no próximo passo que φ é homeomorfismo e satisfaz uma certa estimativa.

Passo 3.19. *A função $\varphi : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e existe $\mathfrak{m}_3 \geq \mathfrak{m}_2$ tal que, para toda $f \in C_0(X)$ com $\|f\| > \mathfrak{m}_3$ é satisfeita a seguinte desigualdade:*

$$||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| \leq 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L, \quad \forall x \in X.$$

Além disso, podemos tomar $\mathfrak{m}_3 = 0$, quando $L = 0$.

Demonstração. Vejamos que φ é homeomorfismo por meio de três afirmações abaixo:

Afirmação 1. *φ é uma bijeção e $\psi = \varphi^{-1}$.*

Demonstração da Afirmação. Vejamos que $\psi \circ \varphi = Id_X$.

Seja $p > \mathfrak{m}_2$, dado $x \in X$, vem da definição de φ que $\mathfrak{S}_p(x) = \{\varphi(x)\}$.

Aplicando o Passo 3.15, temos que $\mathfrak{S}_{Mp+L}^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$.

Por outro lado, pela definição de ψ , $\mathfrak{S}_{Mp+L}^{-1}(\varphi(x)) = \{\psi(\varphi(x))\}$, logo, $\psi(\varphi(x)) = x$.

De forma análoga, também concluímos que $\varphi \circ \psi = Id_Y$.

Assim, segue que φ é uma bijeção e $\psi = \varphi^{-1}$. ■

Afirmação 2. *Se $(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset X$ é convergente então $(\varphi(x_\sigma))_{\sigma \in \Sigma}$ admite uma sub-rede convergente.*

Demonstração da Afirmação. Dado $m > \mathfrak{m}_2$, para cada $\sigma \in \Sigma$, temos que

$$\mathfrak{S}_{mM+L}^{-1}(\varphi(x_\sigma)) = \{\psi(\varphi(x_\sigma))\} = \{x_\sigma\},$$

pois $mM + L > \mathfrak{m}_2$ e $\psi = \varphi^{-1}$.

Sejam $x := \lim_{\sigma \in \Sigma} x_\sigma$ e $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| = |f(x)| = m$.

Como $x_\sigma \in \mathfrak{S}_{mM+L}^{-1}(\varphi(x_\sigma))$ para todo $\sigma \in \Sigma$ e $Tf \in B[0, mM + L]$, temos que

$$|f(x_\sigma)| = |T^{-1}(Tf)(x_\sigma)| \leq |Tf(\varphi(x_\sigma))| + 15(M-1)(mM+L) + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

portanto,

$$|Tf(\varphi(x_\sigma))| \geq |f(x_\sigma)| - 15(M-1)(mM+L) - L, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (3.15)$$

Da continuidade de $|f|$, lembrando que $x_\sigma \rightarrow x$, temos que

$$|f(x_\sigma)| - 15(M-1)(mM+L) - L \longrightarrow m(1 - 15M(M-1)) - L(15M-14).$$

É fácil verificar que $1 - 15M(M - 1) > 0$, portanto, que existe $m > \mathfrak{m}_2$ tal que

$$m(1 - 15M(M - 1)) > L(15M - 14),$$

tomando m dessa forma e $0 < \varepsilon < m(1 - 15M(M - 1)) - L(15M - 14)$, temos que existe $\sigma_0 \in \Sigma$, tal que

$$|Tf(\varphi(x_\sigma))| \geq |f(x_\sigma)| - 15(M - 1)(mM + L) - L \geq \varepsilon, \quad \forall \sigma \geq \sigma_0,$$

logo, para todo $\sigma \geq \sigma_0$, $\varphi(x_\sigma) \in \{y \in Y \mid |Tf(y)| \geq \varepsilon\}$, que é subconjunto compacto de Y .

Segue disso que $(\varphi(x_\sigma))_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ possui uma subsequência convergente. ■

Afirmção 3. φ é um homeomorfismo.

Demonstração da Afirmção. Pela Afirmção 1 já sabemos que φ é bijeção, nos restando apenas mostrar que φ e φ^{-1} são contínuas.

Provaremos abaixo que φ é contínua e é possível constatar que $\psi = \varphi^{-1}$ é contínua por meio de prova análoga.

Vamos supor abaixo que φ não é contínua e obter uma contradição.

Fixemos $x \in X$ e $x_\sigma \rightarrow x$ tal que $\varphi(x_\sigma) \not\rightarrow \varphi(x)$.

Fazendo uso da Afirmção 2, podemos supor que $\varphi(x_\sigma) \rightarrow y \neq \varphi(x)$.

Fixemos $m > \mathfrak{m}_2$, pela definição de φ , temos que $\varphi(x_\sigma) \in \mathfrak{S}_m(x_\sigma)$.

Sendo assim, dada $f \in B[0, m]$, temos

$$|Tf(\varphi(x_\sigma))| \leq |f(x_\sigma)| + 15(M - 1)m + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo, tomando o limite acima, obtemos

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 15(M - 1)m + L.$$

Como $f \in B[0, m]$ acima é arbitrária, concluímos que $y \in \mathfrak{S}_m(x)$, o que nos dá uma contradição, pois $\mathfrak{S}_m(x) = \{\varphi(x)\}$ e $y \neq \varphi(x)$. ■

A seguir, provaremos a estimativa.

Fixemos $x \in X$ e $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| > \mathfrak{m}_2$ e façamos $m := \|f\|$.

Notemos que:

- $|Tf(\varphi(x))| \leq |f(x)| + 15(M - 1)\|f\| + L.$

Temos que $\mathfrak{S}_m(x) = \{\varphi(x)\}$ e $f \in B[0, m]$, logo,

$$|Tf(\varphi(x))| \leq |f(x)| + 15(M - 1)m + L,$$

substituindo $m = \|f\|$ acima, obtemos a desigualdade desejada.

- Se $\|Tf\| > \mathfrak{m}_2$ então $|Tf(\varphi(x))| \geq |f(x)| - 15M(M - 1)\|f\| - (15M - 14)L.$

Seja $m' := \|Tf\|$, se $m' > \mathfrak{m}_2$ temos que $\mathfrak{S}_{m'}(\varphi(x)) = \{\psi(\varphi(x))\} = \{x\}$ e $Tf \in B[0, m']$, logo,

$$|f(x)| = |T^{-1}(Tf)(x)| \leq |Tf(\varphi(x))| + 15(M - 1)\|Tf\| + L,$$

isolando $|Tf(\varphi(x))|$ e observando que $m' = \|Tf\| \leq M\|f\| + L$, obtemos a desigualdade desejada.

É fácil notar que, para toda $f \in C(X)$, com $\|f\| > M(m_2 + L)$, temos que $\|Tf\| > m_2$. Logo, definindo $\mathfrak{m}_3 := M(\mathfrak{m}_2 + L) \geq \mathfrak{m}_2$, temos que, para toda $f \in C_0(X)$, com $\|f\| > \mathfrak{m}_3$ são válidas as duas desigualdades acima que, combinadas, nos dá:

$$-15M(M-1)\|f\| - (15M-14)L \leq |Tf(\varphi(x))| - |f(x)| \leq 15(M-1)\|f\| + L,$$

logo,

$$\begin{aligned} ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| &\leq \max \{ |15(M-1)\|f\| + L|, |15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L| \} \\ &= \max \{ 15(M-1)\|f\| + L, 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L \} \\ &= 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L. \end{aligned}$$

□

A partir de agora, fixemos $\mathfrak{m}_3$ conforme fora feito na demonstração do passo acima.

Com o que vimos acima, já concluímos a existência de um homeomorfismo entre X e Y . Veremos na próxima subseção que é possível também encontrar uma função $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ contínua, tal que $|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)|$ obedece a uma estimativa em função de $\|f\|$, M e L .

3.3 A existência de uma função sinal contínua para espaços localmente compactos

Agora passaremos à construção da função λ do Teorema 2.1 e veremos que ela satisfaz a estimativa dada por ele.

O passo abaixo é o primeiro resultado que nos permite inferir a respeito do sinal de $Tf(\varphi(x))$ em função do sinal de $f(x)$.

Passo 3.20. *Existe $\mathfrak{m}_4 \geq \mathfrak{m}_3$ tal que, para todos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_4$, existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ satisfazendo, para toda $f \in C_0(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$,*

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\alpha f(x)).$$

Além disso, quando $L = 0$, podemos tomar $\mathfrak{m}_4 = 0$.

Demonstração. Fixemos $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_3$, temos que

Afirmção 1. *Existem $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$ tais que*

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(14 - 13M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmção. Repare que estamos sob as hipóteses do Lema 3.2.

Retomando a demonstração deste lema, pela Afirmção 2 dela, tomemos $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e

$(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente tais que

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(14 - 13M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

No restante da demonstração do Lema 3.2 é provado que $y := \lim_{\sigma \in \Sigma} y_\sigma$ pertence a $\mathfrak{S}_m(x)$ e, pela definição de φ , sabemos que $\mathfrak{S}_m(x) = \{\varphi(x)\}$.

Logo, $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$. ■

A partir de agora, consideremos fixados $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$ satisfazendo as propriedades da Afirmação 1.

Definimos a constante

$$\mathfrak{m}_4 := \max \left\{ \frac{15M - 13}{(16 - 15M)(M - 1)}L, \frac{15M - 14}{(30 - 15M)(M - 1)}L, \mathfrak{m}_3 \right\}.$$

Vejamos que ela satisfaz a seguinte propriedade:

Afirmação 2. *Se $m > \mathfrak{m}_4$ então existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ tal que, para toda $f \in C_0(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$, há um elemento σ_0 de Σ que satisfaz*

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)), \quad \forall \sigma \geq \sigma_0.$$

Demonstração da Afirmação. Lembremos que, para toda $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ rede de funções m -picos, $\text{sign}(f_\sigma(x))$ é constante em Σ (veja o item (c) do Lema 3.6).

Definimos então $\alpha := \text{sign}(f_\sigma(x))$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Vamos provar que α definido acima satisfaz a propriedade da afirmação por meio da contrapositiva, isto é, veremos que se existe $f \in C_0(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$, de forma que não exista $\sigma_0 \in \Sigma$ satisfazendo

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)), \quad \forall \sigma \geq \sigma_0, \tag{3.16}$$

então $m \leq \mathfrak{m}_4$.

Suponhamos então que existe f como acima e a fixemos.

É fácil notar que $\Sigma' := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(\alpha f(x))\} \subset \Sigma$ é cofinal.

Definimos $\beta := \text{sign}(\alpha f(x))$.

Vejamos que $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))\}$.

Observe que

$$\text{sign}(T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)) = \lambda, \quad \forall \lambda \in \{-1, 1\}, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

pois

$$\begin{cases} Tf_\sigma(y_\sigma) \geq (14 - 13M)m > 0 \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(14 - 13M)m < 0 \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo, $\beta = \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))$, e segue disso que

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \beta \Leftrightarrow \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)).$$

Com o fato mostrado acima, notemos que:

$$(i) \quad |Tf(\varphi(x))| \leq 14(M-1)m + L.$$

De fato, dado $\sigma \in \Sigma'$, como $\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))$, temos que

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| &= |Tf(y_\sigma)| + |T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| \quad , \\ &\geq |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma)| + (14 - 13M)m &\leq |Tf(y_\sigma) - T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| \\ &\leq \|Tf - T(\beta f_\sigma)\| \\ &\leq M\|f - \beta f_\sigma\| + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma'. \end{aligned}$$

Pelo fato de $|Tf|$ ser contínua e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$, tomando o $\liminf$ na desigualdade acima, obtemos:

$$|Tf(\varphi(x))| + (14 - 13M)m \leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| + L. \quad (3.17)$$

Vejamos agora que $\liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| \leq m$.

De fato, note que

$$\text{sign}(f(x)) = \text{sign}(\beta f_\sigma(x)), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad (3.18)$$

pois, para todo $\sigma \in \Sigma$, como $|\alpha| = |\beta| = 1$, temos

$$\begin{aligned} \text{sign}(\beta f_\sigma(x)) &= \beta \text{sign}(f_\sigma(x)) = \text{sign}(\alpha f(x)) \text{sign}(f_\sigma(x)) \\ &= \text{sign}(\alpha f(x))\alpha \\ &= \alpha^2 \text{sign}(f(x)) \\ &= \text{sign}(f(x)). \end{aligned}$$

Além disso, como $\Sigma' \subset \Sigma$ é cofinal, pelos itens (e) e (f) do Lema 3.6, segue que $(\beta f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'}$ é uma rede de funções m-picos em x .

Logo, aplicando o item (b) do Lema 3.7, tendo em vista o fato (3.18), concluímos

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| \leq m. \quad (3.19)$$

Juntando (3.17) e (3.19), obtemos

$$|Tf(\varphi(x))| + (14 - 13M)m \leq Mm + L,$$

isolando $|Tf(\varphi(x))|$, segue a desigualdade enunciada.

$$(ii) \quad |Tf(\varphi(x))| > (30 - 15M)(M-1)m - (15M - 14)L.$$

Como $\|f\| = m > \mathfrak{m}_3$, pelo Passo 3.19, temos que

$$\begin{aligned} |f(x)| - |Tf(\varphi(x))| &\leq ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| \\ &\leq 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L. \end{aligned}$$

Substituindo $\|f\| = m$ e juntando o fato $|f(x)| > 30(M-1)m$, temos

$$30(M-1)m - |Tf(\varphi(x))| < 15M(M-1)m + (15M-14)L,$$

isolando $|Tf(\varphi(x))|$, obtemos a desigualdade enunciada.

Juntando (i) e (ii) acima, obtemos

$$(30 - 15M)(M-1)m - (15M-14)L < |Tf(\varphi(x))| \leq 14(M-1)m + L,$$

logo,

$$(16 - 15M)(M-1)m < (15M-13)L \Rightarrow m < \frac{15M-13}{(16-15M)(M-1)}L \leq \mathfrak{m}_4.$$

■

Com as duas afirmações provadas acima, terminaremos a demonstração do passo abaixo.

A partir de agora, vamos supor que m , fixado no início da demonstração, é estritamente maior que $\mathfrak{m}_4$ e tomar α satisfazendo as propriedades da Afirmação 2.

Logo, dada $f \in C_0(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$, tomemos $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)), \quad \forall \sigma \geq \sigma_0.$$

Claramente, $Tf(y_\sigma) \rightarrow Tf(\varphi(x))$.

Veremos abaixo que $Tf(\varphi(x)) \neq 0$ e, observando que a função sign é contínua em $\mathbb{R}^*$, concluiremos que $\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \rightarrow \text{sign}(Tf(\varphi(x)))$.

De fato, recordando a desigualdade (ii), temos

$$|Tf(\varphi(x))| > (30 - 15M)(M-1)m - (15M-14)L,$$

e notemos que

$$m > \mathfrak{m}_4 \geq \frac{15M-14}{(30-15M)(M-1)}L \Rightarrow (30-15M)(M-1)m - (15M-14)L > 0,$$

logo, $|Tf(\varphi(x))| > 0$.

Portanto,

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \lim_{\sigma \in \Sigma} \text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)).$$

Como $f \in C_0(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$, foi tomada arbitrariamente, temos que α satisfaz o fato destacado acima para toda f satisfazendo essas condições.

Por fim, ressaltamos que, quando $L = 0$, temos

$$\frac{15M - 13}{(16 - 15M)(M - 1)}L = \frac{15M - 14}{(30 - 15M)(M - 1)}L = \mathfrak{m}_3 = 0,$$

logo, para este caso, $\mathfrak{m}_4$ é nulo. $\square$

A partir de agora, consideraremos fixado $\mathfrak{m}_4$ conforme fora definido na demonstração acima. Pelo último passo, faz sentido definir:

Definição 3.21. Para todo $m > \mathfrak{m}_4$, definimos $\lambda_m : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tal que, para toda $f \in C_0(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$, temos

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\lambda_m(x)f(x)).$$

Temos abaixo duas Observações que desenvolvem propriedades que nos serão úteis para os próximos resultados.

Observação 3.22. Para todos $x \in X$, $m > \mathfrak{m}_4$ e $f \in C_0(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$, vale que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| = ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)||.$$

Esta igualdade, com o Passo 3.19, implica que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| \leq 15M(M - 1)\|f\| + (15M - 14)L.$$

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $m > \mathfrak{m}_4$.

Suponha $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$.

Pela definição das funções λ_m , seja $\beta := \text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\lambda_m(x)f(x))$.

Note que

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x))| = \beta Tf(\varphi(x)) \\ |f(x)| = |\lambda_m(x)f(x)| = \beta \lambda_m(x)f(x) \end{cases},$$

logo,

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| = |\beta Tf(\varphi(x)) - \beta \lambda_m(x)f(x)| = ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)||.$$

$\square$

Observação 3.23. Observe que se $\|f\| = |f(x)| > 0$ então $|f(x)| > 30(M - 1)\|f\|$.

Demonstração. De fato, note que

$$M^2 < \frac{16}{15} = \frac{960}{900} < \frac{961}{900} = \left(\frac{31}{30}\right)^2,$$

logo,

$$M < \frac{31}{30} \Rightarrow 1 > 30(M - 1) \Rightarrow |f(x)| = \|f\| > 30(M - 1)\|f\|.$$

□

Passo 3.24. Existe $\mathfrak{m}_5 \geq \mathfrak{m}_4$ tal que, fixado $x \in X$, $\lambda_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > \mathfrak{m}_5$. Além disso, quando $L = 0$, podemos tomar $\mathfrak{m}_5 = 0$.

Demonstração. Fixemos $x \in X$, vejamos que

Afirmção 1. Para todos $m' \geq m > \mathfrak{m}_4$, temos

$$\lambda_{m'}(x) \neq \lambda_m(x) \Rightarrow m' - m \geq \frac{m(2 - 30M(M - 1)) - (30M - 27)L}{M(15M - 14)}.$$

Demonstração da Afirmção. Tomemos $m' \geq m > \mathfrak{m}_4$ tais que $\lambda_m(x) \neq \lambda_{m'}(x)$.

Seja $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| = f(x) = 1$ e definimos:

$$\begin{cases} f_m &:= \lambda_m(x)m f \\ f_{m'} &:= \lambda_{m'}(x)m' f \end{cases}.$$

Note que, como $\lambda_m(x) \neq \lambda_{m'}(x)$, vale que

$$\|f_m + f_{m'}\| = m' - m,$$

logo,

$$\begin{aligned} |Tf_m(\varphi(x)) - T(-f_{m'})(\varphi(x))| &\leq \|Tf_m - T(-f_{m'})\| \leq M\|f_m + f_{m'}\| + L \\ &= M(m' - m) + L. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por outro lado, as normas de f_m e $f_{m'}$ são assumidas em x , logo, pela Observação 3.23,

$$\begin{cases} |f_m(x)| > 30(M - 1)\|f_m\| \\ |f_{m'}(x)| > 30(M - 1)\|f_{m'}\| \end{cases},$$

portanto,

$$\begin{cases} \text{sign}(Tf_m(\varphi(x))) &= \text{sign}(\lambda_m(x)f_m(x)) &= \text{sign}((\lambda_m(x))^2 m) &= 1 \\ \text{sign}(T(-f_{m'})(\varphi(x))) &= \text{sign}(\lambda_{m'}(x)(-f_{m'})(x)) &= \text{sign}(-(\lambda_{m'}(x))^2 m') &= -1 \end{cases},$$

logo,

$$|Tf_m(\varphi(x)) - T(-f_{m'})(\varphi(x))| = |Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))|.$$

Juntando a isto o fato (3.20), obtemos

$$|Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))| \leq M(m' - m) + L. \quad (3.21)$$

Note que $\|f_m\|, \|f_{m'}\| > \mathfrak{m}_3$, logo, aplicando o Passo 3.19, temos

$$\begin{cases} m &= |f_m(x)| \leq |Tf_m(\varphi(x))| + 15M(M - 1)m + (15M - 14)L \\ m' &= |f_{m'}(x)| \leq |T(-f_{m'})(\varphi(x))| + 15M(M - 1)m' + (15M - 14)L \end{cases}.$$

Somando as desigualdades acima, temos que

$$2m \leq m + m' \leq |Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))| + 15M(M-1)(m+m') + 2(15M-14)L.$$

Juntando isto com o fato (3.21), temos que

$$\begin{aligned} 2m &\leq M(m' - m) + L + 15M(M-1)(m+m') + 2(15M-14)L \\ &= M(m' - m) + 15M(M-1)(m' - m) + 30M(M-1)m + (30M-27)L \\ &= M(15M-14)(m' - m) + 30M(M-1)m + (30M-27)L. \end{aligned}$$

Isolando $m' - m$,

$$m' - m \geq \frac{m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L}{M(15M-14)}.$$

■

Como $1 < M < \sqrt{16/15}$ temos que $2 - 30M(M-1) > 0$, portanto, podemos tomar $\mathfrak{m}_5 \geq \mathfrak{m}_4$ tal que

$$m(2 - 30M(M-1)) > (30M-27)L, \forall m > \mathfrak{m}_5.$$

Note que, para o caso em que $L = 0$, podemos tomar $\mathfrak{m}_5 = 0$, pois $\mathfrak{m}_4 = (30M-27)L = 0$.

Fixado $\mathfrak{m}_5$ como acima, temos que

$$\frac{m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L}{M(15M-14)} > 0, \forall m > \mathfrak{m}_5,$$

logo, dado $m > \mathfrak{m}_5$, faz sentido considerarmos o intervalo

$$\left[m, m + \frac{m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L}{M(15M-14)} \right].$$

Pela contrapositiva da Afirmação 1, para todo m' pertencente ao intervalo acima, temos que $\lambda_{m'}(x) = \lambda_m(x)$.

Definimos $\tilde{\gamma} :]\mathfrak{m}_5, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\tilde{\gamma}(m) := \frac{m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L}{M(15M-14)}, \forall m > \mathfrak{m}_5$, temos, claramente, que ela é contínua e que, para todo $m > \mathfrak{m}_5$,

$$\lambda_m(x) = \lambda_{m'}(x), \forall m' \in [m, m + \tilde{\gamma}(m)[.$$

Por fim, veremos a partir disso que, fixado $x \in X$, $\lambda_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > \mathfrak{m}_5$.

Para tal, definimos a função $\Lambda_x :]\mathfrak{m}_5, +\infty[\rightarrow \{-1, 1\}$ tal que $\Lambda_x(m) := \lambda_m(x), \forall m > \mathfrak{m}_5$.

É fácil verificar que Λ_x está sob as hipóteses do Lema 3.16 que, aplicado, nos garante que $\Lambda_x(m) = \lambda_m(x)$ é constante em $] \mathfrak{m}_5, +\infty[$. □

Fixemos $\mathfrak{m}_5 \geq \mathfrak{m}_4$ definido conforme fora feito na demonstração do passo acima, tomando $\mathfrak{m}_5 = 0$, no caso em que $L = 0$.

Definimos então a função $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tal que $\lambda = \lambda_m, \forall m > \mathfrak{m}_5$ e vejamos no próximo passo que λ é contínua.

Passo 3.25. A função λ é contínua e, para todos $x \in X$ e $f \in C_0(X)$, com $\|f\| > \mathfrak{m}_5$ e $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$, temos que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova por contradição.

Suponha que λ não é contínua em X e sejam $x \in X$ e $x_\sigma \rightarrow x$ tal que $\lambda(x_\sigma) \rightarrow -\lambda(x)$.

Fixando $m > \mathfrak{m}_5$, decorre da definição de λ que $\lambda_m(x_\sigma) \rightarrow -\lambda_m(x)$.

Seja $f \in C_0(X)$ tal que $\|f\| = |f(x)| = m$.

Aplicando as Observações 3.22 e 3.23, obtemos:

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| & \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L \\ |Tf(\varphi(x_\sigma)) - \lambda_m(x_\sigma)f(x_\sigma)| & \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L, \quad \forall \sigma \in \Sigma \end{cases}.$$

Tomando o limite na segunda desigualdade, temos que

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| & \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L \\ |Tf(\varphi(x)) + \lambda_m(x)f(x)| & \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L \end{cases},$$

logo,

$$m \leq |Tf(\varphi(x))| + |\lambda_m(x)f(x)| \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L,$$

seguindo disso que

$$\begin{aligned} m \leq 15M(M-1)m + (15M-14)L & \Rightarrow m(1 - 15M(M-1)) - (15M-14)L \leq 0 \\ & \Rightarrow m(2 - 30M(M-1)) - (30M-28)L \leq 0 \\ & \Rightarrow m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L \leq L \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembremos que $\mathfrak{m}_5$ foi fixado de modo que

$$m(2 - 30M(M-1)) - (30M-27)L > 0, \quad \forall m > \mathfrak{m}_5,$$

logo, temos uma contradição, concluindo assim que λ é contínua.

Para concluir a estimativa, notemos que, pela Observação 3.22, para todos $x \in X$ e $f \in C_0(X)$, com $\|f\| = m > \mathfrak{m}_5$ e $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$, temos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| \leq 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L,$$

onde sabemos que $\lambda_m = \lambda$, pois $m > \mathfrak{m}_5$. □

Compondo os Passos 3.19 e 3.25 provados acima, estamos aptos a demonstrar o Teorema 2.1 para o caso $1 < M < \sqrt{16/15}$.

Terminamos esta seção observando que, em virtude dos valores fixados na Observação 3.13 terem sido escolhidos ao acaso, toda a construção para as funções φ e λ acima pode ser feita para todos X, Y, M, L e T que satisfazendo as condições da observação.

3.4 Demonstração do teorema principal

Começaremos a demonstração do teorema provando-o para o caso mais simples, $M = 1$. Posteriormente, abordaremos o caso $1 < M < \sqrt{16/15}$ fazendo uso das funções φ e λ definidas na seção anterior.

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.1, no intuito de definirmos as funções λ e φ para o caso $M = 1$, precisamos ter em mente o Teorema 3.28, que corresponde ao Teorema de Gevirtz-Gruber. Este teorema foi enunciado originalmente para ε -isometrias e é uma importante consequência do resultado principal de [12], devido a Gevirtz, onde ele faz uso de um resultado de [15], de Gruber.

Vejamos abaixo a definição de ε -isometria e, em seguida, o enunciado original do Teorema de Gevirtz-Gruber.

Definição 3.26. *Dados dois espaços normados E e F , dizemos que $T : E \rightarrow F$ é ε -isometria, se satisfaz:*

$$|||T(u_1) - T(u_2)|| - ||u_1 - u_2||| \leq \varepsilon, \quad \forall u_1, u_2 \in E.$$

Teorema 3.27 (de Gevirtz-Gruber). *Sejam E e F espaços de Banach reais e $T : E \rightarrow F$ uma ε -isometria sobrejetora com $T(0) = 0$.*

Então existe um isomorfismo isométrico $I : E \rightarrow F$ tal que

$$||I(u) - T(u)|| \leq 5\varepsilon, \quad \forall u \in E.$$

Nota-se, de imediato, que uma ε -isometria sobrejetora é equivalente a uma $(1, \varepsilon)$ -quasi-isometria sobrejetora, logo, traduzindo o teorema acima para a nossa terminologia e notação, obtemos:

Teorema 3.28 (de Gevirtz-Gruber). *Sejam E e F espaços de Banach reais e $T : E \rightarrow F$ é uma $(1, L)$ -quasi-isometria sobrejetora com $T(0) = 0$.*

Então existe um isomorfismo isométrico $I : E \rightarrow F$ tal que

$$||I(u) - T(u)|| \leq 5L, \quad \forall u \in E.$$

Veremos abaixo, finalmente, a demonstração do teorema principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 2.1. Primeiro Caso: $M = 1$.

Seja $I : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$ isomorfismo isométrico dado pelo Teorema 3.28 tal que:

$$||If - Tf|| \leq 5L, \forall f \in C_0(X). \quad (3.22)$$

Pelo Teorema 0.1, tomemos $\phi : Y \rightarrow X$ homeomorfismo e $\lambda' : Y \rightarrow \{-1, 1\}$ contínua tais que

$$If(y) = \lambda'(y)f(\phi(y)), \quad \forall f \in C_0(X), \quad \forall y \in Y.$$

Definimos $\varphi = \phi^{-1} : X \rightarrow Y$ homeomorfismo e $\lambda = (\lambda' \circ \varphi) : X \rightarrow \{-1, 1\}$, função contínua,

decorre da igualdade acima que

$$If(\varphi(x)) = (\lambda' \circ \varphi)(x)f(\phi(\varphi(x))) = \lambda(x)f(x), \quad \forall f \in C_0(X), \quad \forall x \in X,$$

Logo, pela relação acima e o fato (3.22), temos que, para todos $f \in C_0(X)$ e $x \in X$

$$\begin{aligned} |Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| &\leq |Tf(\varphi(x)) - If(\varphi(x))| + |If(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \\ &\leq \|Tf - If\| \\ &\leq 5L. \end{aligned}$$

E está concluída a demonstração para este caso.

Segundo Caso: $1 < M < \sqrt{16/15}$.

Pelo Lema 1.31, tomemos $L' \leq ML$ o menor tal que T e T^{-1} são (M, L') -quasi-isometrias.

Sejam φ e λ definidos para T conforme o que fora feito nas seções anteriores, e lembremos, pela Observação 3.13, que a constante L considerada na construção deles é o L' fixado acima.

Dados $x \in X$ e $f \in C_0(X)$, consideramos três casos:

(a) $\|f\| \leq \mathfrak{m}_5$.

Temos que

$$\begin{aligned} |Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| &\leq |Tf(\varphi(x))| + |f(x)| \leq \|Tf\| + \|f\| \\ &\leq (M+1)\|f\| + L' \\ &\leq (M+1)\mathfrak{m}_5 + L'. \end{aligned} \quad (3.23)$$

(b) $|f(x)| \leq 30(M-1)\|f\|$ e $\|f\| > \mathfrak{m}_5$.

Pelo Passo 3.19, temos que

$$\begin{aligned} |Tf(\varphi(x))| &\leq |f(x)| + 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L' \\ &\leq (15M+30)(M-1)\|f\| + (15M-14)L', \end{aligned}$$

logo, como $M < \sqrt{16/15}$, da relação acima obtemos:

$$|Tf(\varphi(x))| \leq 46(M-1)\|f\| + (15M-14)L'.$$

Portanto, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| &\leq |Tf(\varphi(x))| + |f(x)| \\ &\leq 46(M-1)\|f\| + 30(M-1)\|f\| + (15M-14)L' \\ &= 76(M-1)\|f\| + (15M-14)L'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(c) $|f(x)| > 30(M-1)\|f\|$ e $\|f\| > \mathfrak{m}_5$.

Pelo Passo 3.25, temos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 15M(M-1)\|f\| + (15M-14)L'.$$

Como $M < \sqrt{16/15}$, pelo fato destacado acima obtemos:

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 16(M-1)\|f\| + (15M-14)L'. \quad (3.25)$$

Seja $\Delta' = \max\{ (M+1)\mathfrak{m}_5 + L', (15M-14)L' \}$.

Das desigualdades (3.23), (3.24) e (3.25), temos, em qualquer um dos casos, que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 76(M-1)\|f\| + \Delta'.$$

Definimos $\Delta := \max\{ (M+1)\mathfrak{m}_5 + ML, (15M-14)ML \}$.

Lembrando que $L' \leq ML$ e que $x \in X$ e $f \in C_0(X)$ acima foram tomados arbitrariamente, segue que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 76(M-1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C_0(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende de M e L .

Vejamos, por fim, que $\Delta = 0$, se $L = 0$.

Supondo que $L = 0$, temos que $L' = 0$, portanto, é fácil verificar, pelas definições, que $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 = \dots = \mathfrak{m}_5 = 0$.

Logo, temos $\Delta = 0$, pois, claramente, $(M+1)\mathfrak{m}_5 + ML = (15M-14)ML = 0$.

□

Capítulo 4

O Teorema de Górak para espaços compactos

Neste capítulo faremos a demonstração do Teorema 2.2, que corresponde ao Teorema de Górak para espaços compactos Hausdorff, no qual há uma hipótese menos restrita sobre M , cujo enunciado recordamos abaixo:

Teorema (3.4 de [13]). *Sejam X e Y espaços compactos Hausdorff e $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria bijetora tal que $T(0) = 0$.*

Se $M < \sqrt{6/5}$ então existe um homeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ e uma função contínua $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tais que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 26(M - 1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende apenas de M e L , e, se $L = 0$ então $\Delta = 0$.

A demonstração deste teorema seguirá o mesmo caminho que a do Teorema 2.1, sendo, também, dividida nos casos $1 < M < \sqrt{6/5}$ e $M = 1$, em que teremos métodos diferentes para a obtenção das funções φ , λ e da estimativa para cada caso. O primeiro caso é abordado nas três primeiras seções do capítulo.

Lembremos que, no capítulo anterior, o Lema 3.2 foi o ponto de partida para a definição de φ e λ no caso $1 < M < \sqrt{16/15}$. Quando os espaços X e Y são supostos compactos, é possível obter uma versão deste lema que nos dá uma estimativa mais fina para $|Tf(y)|$, o Lema 4.2, que será provado na primeira seção deste capítulo.

Em seguida, assim como foi feito no capítulo anterior, efetuaremos a construção, na segunda seção, da função φ e, na terceira seção, da função λ , ambas sob a restrição: $1 < M < \sqrt{6/5}$.

Por fim, na quarta seção são feitas a conclusão do caso $M = 1$ como consequência direta do Teorema 2.1 e a junção dos resultados provados para o segundo caso.

4.1 Um lema importante envolvendo espaços $C(X)$

Nesta seção, apresentaremos o Lema 4.2. Na demonstração dele, empregaremos a noção de redes de funções m-picos introduzidas na parte I da Seção 3.1. Lembremos que elas foram

definidas para os espaços $C_0(X)$. É importante frisar que o uso delas faz sentido no nosso caso, em que trabalharemos apenas com espaços compactos Hausdorff, pois estes são, em particular, localmente compactos e $C(X) = C_0(X)$.

Definição 4.1. Para o lema seguinte, definimos, para todos $1 < M < 4/3$ e $L \geq 0$

$$m_0(M, L) := \max \left\{ \frac{2M}{2 - M^2} L, \frac{M}{(M - 1)^2} L \right\}.$$

Ao longo deste capítulo, antes de certos resultados, serão definidas constantes como essa para não carregarmos grandes expressões ao longo do texto. O mais importante para nós de $m_0(M, L)$ é a sua existência e o fato de $m_0(M, 0) = 0$.

Lema 4.2. Sejam X e Y espaços compactos Hausdorff e $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ uma (M, L) -quasi-isometria, com $1 < M < 4/3$ e $T(0) = 0$.

Para todos $x \in X$ e $m > m_0(M, L)$, existe $y \in Y$ tal que:

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 5(M - 1)m + L, \quad \forall f \in B[0, m].$$

Demonstração. Fixemos $x \in X$ e $m > m_0(M, L)$.

Vejamos duas afirmações:

Afirmação 1. Existem $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ tais que

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M \right) m - 2L \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M \right) m + 2L \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmação. Pelo item (a) do Lema 3.6, fixemos $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$.

Para cada $\sigma \in \Sigma$, existe $y_\sigma \in Y$ que assume a norma de $Tf_\sigma - T(-f_\sigma) \in C(Y)$.

Sendo assim, fixemos $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ tal que

$$|Tf_\sigma(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma)| = \|Tf_\sigma - T(-f_\sigma)\|, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (4.1)$$

Como $\|f_\sigma\| = m$, $\forall \sigma \in \Sigma$, temos que

$$\|Tf_\sigma - T(-f_\sigma)\| \geq 2\|f_\sigma\| \frac{1}{M} - L = \frac{2}{M}m - L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo, observando (4.1), temos que

$$|Tf_\sigma(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma)| \geq \frac{2}{M}m - L, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (4.2)$$

Além disso, como consequência de $T(0) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} |T(\pm f_\sigma)(y_\sigma)| &= |T(\pm f_\sigma)(y_\sigma) - T(0)(y_\sigma)| \\ &\leq \|T(\pm f_\sigma) - T(0)\| \\ &\leq M\|\pm f_\sigma - 0\| + L = Mm + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \end{aligned} \quad (4.3)$$

e também que

$$m > m_0 \geq \frac{2M}{2-M^2}L \Rightarrow \left(\frac{2}{M} - M\right)m > 2L \Rightarrow \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0. \quad (4.4)$$

Decorre dos fatos acima que:

- $\text{sign}(Tf_\sigma(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(-f_\sigma)(y_\sigma))$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Suponha que $\text{sign}(Tf_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})) = \text{sign}(T(-f_{\sigma_0})(y_{\sigma_0}))$, para algum $\sigma_0 \in \Sigma$, então

$$|Tf_{\sigma_0}(y_{\sigma_0}) - T(-f_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})| \leq \max\{|Tf_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})|, |T(-f_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})|\},$$

logo, tendo em vista (4.2) e (4.3), vale que

$$\begin{aligned} \frac{2}{M}m - L &\leq |Tf_{\sigma_0}(y_{\sigma_0}) - T(-f_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})| \\ &\leq \max\{|Tf_{\sigma_0}(y_{\sigma_0})|, |T(-f_{\sigma_0})(y_{\sigma_0})|\} \\ &\leq mM + L, \end{aligned}$$

portanto,

$$\left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \leq 0,$$

o que nos dá uma contradição com (4.4).

- $|T(\pm f_\sigma)(y_\sigma)| \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Pela desigualdade triangular e as relações (4.2), (4.3) e (4.4) temos, para todo $\sigma \in \Sigma$

$$\begin{aligned} |T(\pm f_\sigma)(y_\sigma)| &\geq |Tf_\sigma(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma)| - |T(\mp f_\sigma)(y_\sigma)| \\ &\geq \frac{2}{M}m - L - (mM + L) = \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L > 0. \end{aligned}$$

Dos dois itens provados acima temos que, para cada $\sigma \in \Sigma$, um, e somente um, dos dois casos abaixo ocorre:

- (a) $Tf_\sigma(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L$ e $T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L$.
- (b) $Tf_\sigma(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L$ e $T(-f_\sigma)(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L$.

Sejam:

- $\Sigma_1 := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{ocorre o caso (a)}\}$.
- $\Sigma_2 := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{ocorre o caso (b)}\}$.

Definimos:

- $\Sigma' = \Sigma_1$ e $\lambda = 1$, caso Σ_1 seja cofinal com Σ .
- $\Sigma' = \Sigma_2$ e $\lambda = -1$, caso Σ_1 não seja cofinal com Σ .

É fácil de constatar que, como $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$, quando Σ_1 não for cofinal, Σ_2 o será.

Portanto, Σ' é cofinal e $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'}$ é sub-rede de $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

Aplicando os itens (e) e (f) do Lema 3.6, segue que $(\lambda f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \in P_m^X(x)$.

Por fim, não é difícil verificar que, para os dois casos considerados na definição de Σ' e λ , temos que

$$\begin{cases} T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma) \geq \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \\ T(-\lambda f_\sigma)(y_\sigma) \leq -\left(\frac{2}{M} - M\right)m + 2L \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma'.$$

Portanto, $(\lambda f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'} \subset Y$ satisfazem a tese da afirmação. ■

Afirmção 2. *Existem $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente tais que*

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (4 - 3M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(4 - 3M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmção. Sejam $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ satisfazendo as propriedades da Afirmção 1.

Temos que $\left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \geq (4 - 3M)m$, pois

$$\begin{aligned} m > m_0 \geq \frac{M}{(M-1)^2}L &\Rightarrow \frac{(M-1)^2}{M}m \geq L \\ &\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{M} - M\right) - (4 - 3M)\right]m = 2\frac{(M-1)^2}{M}m \geq 2L \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{M} - M\right)m - 2L \geq (4 - 3M)m, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (4 - 3M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(4 - 3M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Como Y é compacto, seja $(y_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta}$ sub-rede convergente de $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$.

Pelo item (f) do Lema 3.6, temos que $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P_m^X(x)$.

Não é difícil verificar, com o exposto acima, que $(f_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \in P_m^X(x)$ e $(y_{\sigma(\theta)})_{\theta \in \Theta} \subset Y$ satisfazem a tese da afirmação. ■

A partir da Afirmção 2, concluiremos abaixo a demonstração do lema.

Fixemos $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ rede de funções m-picos em x e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente satisfazendo as propriedades da Afirmção 2.

Seja $y := \lim_{\sigma \in \Sigma} y_\sigma$ e fixemos $f \in B[0, m]$.

Dado $\sigma \in \Sigma$, vejamos que $|Tf(y_\sigma)| + (4 - 3M)m \leq |Tf(y_\sigma) - T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)|$, para algum $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Temos dois casos:

- $Tf(y_\sigma) \geq 0$.

Temos que $|Tf(y_\sigma)| = Tf(y_\sigma)$, portanto,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma)| &\geq Tf(y_\sigma) - T(-f_\sigma)(y_\sigma) \\ &\geq Tf(y_\sigma) + (4 - 3M)m \\ &= |Tf(y_\sigma)| + (4 - 3M)m. \end{aligned}$$

- $Tf(y_\sigma) < 0$.

Temos que $|Tf(y_\sigma)| = -Tf(y_\sigma)$, portanto,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - T(f_\sigma)(y_\sigma)| &\geq -Tf(y_\sigma) + T(f_\sigma)(y_\sigma) \\ &\geq -Tf(y_\sigma) + (4 - 3M)m \\ &= |Tf(y_\sigma)| + (4 - 3M)m. \end{aligned}$$

Sendo λ como acima, temos que

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma)| + (4 - 3M)m &\leq |Tf(y_\sigma) - T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)| \leq \|Tf - T(\lambda f_\sigma)\| \\ &\leq M\|f - \lambda f_\sigma\| + L \\ &\leq M\|f\| + \|f_\sigma\| + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \end{aligned}$$

logo,

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma} |Tf(y_\sigma)| + (4 - 3M)m \leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f\| + \|f_\sigma\| + L.$$

Decorre da continuidade de $|Tf|$ que $\liminf_{\sigma \in \Sigma} |Tf(y_\sigma)| = |Tf(y)|$, logo, tendo em vista a desigualdade acima e o item (a) do Lema 3.7, vemos que

$$\begin{aligned} |Tf(y)| + (4 - 3M)m &\leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma} \|f\| + \|f_\sigma\| + L \\ &= M(m + |f(x)|) + L \\ &= |f(x)| + (M - 1)|f(x)| + Mm + L \\ &\leq |f(x)| + (M - 1)\|f\| + Mm + L \\ &\leq |f(x)| + (2M - 1)m + L. \end{aligned}$$

Isolando $|Tf(y)|$ acima concluímos que y satisfaz, para f , a propriedade que queríamos. Observe que a definição de y independe da escolha feita para f , tomada de forma arbitrária, logo, y satisfaz a desigualdade enunciada para toda $f \in B[0, m]$. $\square$

4.2 Homeomorfismos entre espaços compactos gerados por quasi-isometrias

Faremos aqui a construção do homeomorfismo φ a partir do Lema 4.2. Fixaremos abaixo alguns valores satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.2, com a restrição adicional: $M > 1$.

Observação 4.3. *A partir de agora, até o fim da Seção 4.3, vamos considerar fixados X , Y espaços compactos Hausdorff, $1 < M < \sqrt{6/5}$, $L \geq 0$ e $T : C(X) \rightarrow C(Y)$, (M, L) -quasi-*

isometria bijetora, com $T(0) = 0$.

Pelo Lema 1.31, supomos que L é o menor tal que T e T^{-1} são (M, L) -quasi-isometrias.

Também denotaremos $m_0(M, L)$ apenas por m_0 .

De forma análoga ao que foi feito no começo da Seção 3.2, o Lema 4.2 nos permite definir:

Definição 4.4. Dado $x \in X$, definimos, para cada $m > m_0$, o conjunto $S_m(x)$ de todos os $y \in Y$ que satisfazem

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 5(M-1)m + L, \quad \forall f \in B[0, m].$$

Sabemos, pelo Lema 4.2, que $S_m(x) \neq \emptyset$, $\forall m > m_0$, $\forall x \in X$.

Também podemos aplicar este lema para T^{-1} com as mesmas constantes M e L , logo, também definimos, para $y \in Y$ e $m > m_0$, o conjunto $S_m^{-1}(y) \subset X$ (não-vazio) dos elementos de X que satisfazem

$$|T^{-1}g(x)| \leq |g(y)| + 5(M-1)m + L, \quad \forall g \in B[0, m].$$

A construção de φ será feita através dos conjuntos definidos acima.

Observe que o Lema 4.2, nos deu a primeira restrição para o valor de M : $1 < M < 4/3$.

O passo abaixo, nos dá uma relação muito forte entre as duas famílias de conjuntos definidas acima, que só é válida para $1 < M < \sqrt{6/5}$, daí vem a restrição inicial feita a M , ao fixarmos os valores.

Passo 4.5. Existem $m_1 \geq m_0$ e $\delta :]m_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ contínua tais que, dado $x \in X$, para todos $m > m_1$, é válido que

$$v \in S_m(x) \quad \Rightarrow \quad S_k^{-1}(v) = \{x\}, \quad \forall k \in [Mm + L, Mm + L + \delta(m)],$$

e também que, dado $y \in Y$, para todos $m > m_1$, temos

$$u \in S_m^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad S_k(u) = \{y\}, \quad \forall k \in [Mm + L, Mm + L + \delta(m)].$$

Além disso, quando $L = 0$, podemos tomar $m_1 = 0$.

Demonstração. Provaremos a primeira relação do enunciado, podendo a segunda ser obtida através de prova análoga.

Fixemos $x \in X$ e $v \in S_m(x)$, vejamos que

Afirmção 1. Dados $m > m_0$ e $k \geq Mm + L$, se $S_k^{-1}(v) \neq \{x\}$ então

$$k - (mM + L) \geq \frac{m(6 - 5M^2) - L(5M - 3)}{5(M - 1)}.$$

Demonstração da Afirmção. Suponhamos que $S_k^{-1}(v) \neq \{x\}$.

Sabemos que $S_k^{-1}(v) \neq \emptyset$, logo, existe $u \in S_k^{-1}(v)$, tal que $u \neq x$.

Fixemos u dessa forma e tomemos $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 0$ e $f(u) = \|f\| = m$.

Notemos que:

- $|Tf(v)| \leq 5(M-1)m + L$.

Decorre de $v \in S_m(x)$ e $f \in B[0, m]$ que

$$|Tf(v)| \leq |f(x)| + 5(M-1)m + L.$$

Como $f(x) = 0$, segue a desigualdade enunciada.

- $|Tf(v)| \geq m - 5(M-1)k - L$.

Temos que $u \in S_k^{-1}(v)$ e $Tf \in B[0, mM + L] \subset B[0, k]$, logo

$$|f(u)| = |T^{-1}(Tf)(u)| \leq |Tf(v)| + 5(M-1)k + L,$$

substituindo $|f(u)| = m$ e isolando $|Tf(v)|$, obtemos a desigualdade enunciada.

Combinando as duas desigualdades acima, temos que

$$5(M-1)m + L \geq |Tf(y)| \geq m - 5(M-1)k - L,$$

substituindo k por $(k - (mM + L)) + (mM + L)$ acima e isolando o termo $k - (mM + L)$ obtemos a desigualdade da afirmação. ■

Note que, como $M < \sqrt{6/5}$, temos $6 - 5M^2 > 0$.

Sendo assim, $m(6 - 5M^2) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, logo, podemos tomar $m_1 \geq m_0$ tal que

$$m(6 - 5M^2) > L(5M - 3), \quad \forall m > m_1. \quad (4.5)$$

Note ainda que, se $L = 0$, temos que $m_0 = L(5M - 3) = 0$, portanto, podemos tomar $m_1 = 0$.

Fixando m_1 satisfazendo (4.5), temos que

$$\frac{m(6 - 5M^2) - L(5M - 3)}{5(M - 1)} > 0, \quad \forall m > m_1,$$

portanto, para $m > m_1$, faz sentido considerarmos o intervalo

$$\left[mM + L, mM + L + \frac{m(6 - 5M^2) - L(5M - 3)}{5(M - 1)} \right].$$

Pela contrapositiva da Afirmação 1, para todo k pertencente ao intervalo acima, $S_k^{-1}(v) = \{x\}$.

Definimos então $\delta :]m_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\delta(m) := \frac{m(6 - 5M^2) - L(5M - 3)}{5(M - 1)}$.

Claramente, δ é contínua e satisfaz, para todo $m > m_1$,

$$S_k^{-1}(v) = \{x\}, \quad \forall k \in [mM + L, mM + L + \delta(m)[.$$

Observe que, como as definições de m_1 e δ independem da escolha feita para x e v , e estes foram fixados de forma arbitrária, m_1 e δ satisfazem a propriedade destacada acima para todos $x \in X$, $m > m_1$ e $v \in S_m(x)$.

Podemos demonstrar, de modo análogo, que existem m_1 e δ satisfazendo a segunda relação do

enunciado, trocando variáveis relacionadas com T por variáveis análogas relacionadas com T^{-1} . Caso os valores m_1 e δ obtidos na prova da segunda relação sejam diferentes dos da prova da primeira, como queremos m_1 e δ satisfazendo ambas simultaneamente, basta tomarmos como m_1 o máximo dos dois valores e como δ a função cujo domínio é a intersecção dos dois domínios e que, em cada ponto $m > m_1$, assume o mínimo dos valores das funções no ponto m (que resulta numa função contínua).

Se $L = 0$, podemos escolher $m_1 = 0$ tanto na prova da primeira relação quanto na da segunda, portanto, segue que $m_1 = 0$ satisfaz ambas as relações. $\square$

Fixemos $m_1 \geq m_0$ e $\delta :]m_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ conforme fora foi feito na demonstração da afirmação acima, tomando $m_1 = 0$, no caso em que $L = 0$.

O próximo passo, consequência do Passo 4.5, nos permitirá definir φ .

Passo 4.6. *Existe $m_2 \geq m_1$ tal que, fixado $x \in X$, $S_m(x)$ é conjunto unitário e possui o mesmo valor para todo $m > m_2$. Analogamente, também temos que, fixado $y \in Y$, $S_m^{-1}(y)$ é conjunto unitário e possui o mesmo valor para todo $m > m_2$.*

Além disso, podemos tomar $m_2 = 0$, quando $L = 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração para os conjuntos $S_m(x)$ e é possível demonstrar a propriedade enunciada para $S_m^{-1}(y)$ de modo análogo.

Vejamos que:

Afirmação 1. *Existem $m_2 \geq m_1$ e $\tilde{\delta} :]m_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ contínua tais que, para todos $x \in X$ e $m > m_2$, existe $v \in Y$ satisfazendo:*

$$S_k(x) = \{v\}, \forall k \in [m, m + \tilde{\delta}(m)[.$$

Demonstração da Afirmação. Dados $x \in X$ e $m' > m_1$, tomemos $v \in S_{m'}(x)$.

Aplicando o Passo 4.5, temos que

$$v \in S_{m'}(x) \Rightarrow S_{m'M+L}^{-1}(v) = \{x\}.$$

Aplicando novamente o Passo 4.5, agora para $x \in S_{m'M+L}^{-1}(v)$, obtemos:

$$x \in S_{m'M+L}^{-1}(v) \Rightarrow S_k(x) = \{v\}, \forall k \in [(m'M + L)M + L, (m'M + L)M + L + \delta(m'M + L)[.$$

Concluimos então que, para todos $x \in X$ e $m' > m_1$, existe $v \in Y$ tal que

$$S_k(x) = \{v\}, \forall k \in [(m'M + L)M + L, (m'M + L)M + L + \delta(m'M + L)[. \quad (4.6)$$

Definimos $m_2 := (m_1 M + L)M + L$ e $\tilde{\delta} :]m_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\tilde{\delta}(m) = \delta\left(\frac{m - L}{M}\right)$, $\forall m > m_2$, que, claramente, é contínua.

Dados $x \in X$ e $m > m_2$, seja $m' \in \mathbb{R}$ tal que $m = (m'M + L)M + L$.

É fácil notar que:

- $m' > m_1$.
- $\delta(m'M + L) = \tilde{\delta}(m)$.

Logo, aplicando (4.6) para m' , e substituindo os valores de m e $\tilde{\delta}(m)$, temos

$$\mathfrak{S}_k(x) = \{v\}, \forall k \in [m, m + \tilde{\delta}(m)[. \quad (4.7)$$

■

Fixemos m_2 e $\tilde{\delta}$ conforme foram definidos na Afirmação 1. Por meio dela, já sabemos que para todos $x \in X$ e $m > m_2$, o conjunto $S_m(x)$ é unitário.

Portanto, só nos falta concluir que, fixado $x \in X$, $S_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > m_2$.

Para tal, dado $x \in X$, definimos $\Psi_x :]m_2, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $\Psi_x(m) := S_m(x)$, $\forall m > m_2$.

Observe que, da Afirmação 1 segue que, para todo $m > m_2$, Ψ_x é constante no intervalo $[m, m + \tilde{\delta}(m)[$, onde $\tilde{\delta} :]m_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é contínua.

Portanto, Ψ_x está sob as hipóteses do Lema 3.16, que, aplicado, nos garante que ela é constante em $]m_2, +\infty[$. □

A partir de agora, fixemos m_2 definida na demonstração do passo acima.

Pelo último passo, podemos definir:

Definição 4.7. *Definimos as funções:*

- $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que $S_m(x) = \{\varphi(x)\}$, $\forall m > m_2$.
- $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $S_m^{-1}(y) = \{\psi(y)\}$, $\forall m > m_2$.

Provaremos abaixo que a função φ é um homeomorfismo que satisfaz uma boa estimativa.

Passo 4.8. *A função $\varphi : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e existe $m_3 \geq m_2$ tal que, para toda $f \in C(X)$ com $\|f\| > m_3$, é satisfeita a seguinte desigualdade:*

$$||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| \leq 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L, \quad \forall x \in X.$$

Além disso, podemos tomar $m_3 = 0$, quando $L = 0$.

Demonstração. Vejamos que φ é homeomorfismo por meio de duas afirmações abaixo

Afirmação 1. φ é uma bijeção e $\psi = \varphi^{-1}$.

Demonstração da Afirmação. Vejamos que $\psi \circ \varphi = Id_X$.

Seja $p > m_2$, dado $x \in X$, vem da definição de φ que $S_p(x) = \{\varphi(x)\}$.

Aplicando o Passo 4.5, temos que $S_{Mp+L}^{-1}(\varphi(x)) = \{x\}$.

Por outro lado, pela definição de ψ , $S_{Mp+L}^{-1}(\varphi(x)) = \{\psi(\varphi(x))\}$, logo, $\psi(\varphi(x)) = x$.

De forma análoga, também concluímos que $\varphi \circ \psi = Id_Y$.

Assim, segue que φ é uma bijeção e $\psi = \varphi^{-1}$. ■

Afirmação 2. φ é um homeomorfismo.

Demonstração da Afirmação. Pela Afirmação 1 já sabemos que φ é bijeção, nos restando apenas mostrar que φ e φ^{-1} são contínuas.

Provaremos abaixo que φ é contínua e é possível constatar que $\psi = \varphi^{-1}$ é contínua por meio

de prova análoga.

Suponhamos que φ não é contínua em X e vejamos que isso nos dá uma contradição.

Fixemos $x \in X$ e $x_\sigma \rightarrow x$ tal que $\varphi(x_\sigma) \not\rightarrow \varphi(x)$.

Pela compacidade de Y , podemos supor que $\varphi(x_\sigma) \rightarrow y \neq \varphi(x)$.

Fixemos $m > m_2$, pela definição de φ , temos que $\varphi(x_\sigma) \in S_m(x_\sigma)$.

Sendo assim, dada $f \in B[0, m]$, temos

$$|Tf(\varphi(x_\sigma))| \leq |f(x_\sigma)| + 5(M-1)m + L, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo, tomando o limite acima, obtemos

$$|Tf(y)| \leq |f(x)| + 5(M-1)m + L.$$

Como $f \in B[0, m]$ acima é arbitrária, concluímos que $y \in S_m(x)$, o que nos dá uma contradição, pois $S_m(x) = \{\varphi(x)\}$ e $y \neq \varphi(x)$. ■

A seguir, provaremos a estimativa.

Fixemos $x \in X$ e $f \in C(X)$ tal que $\|f\| > m_2$ e façamos $m := \|f\|$.

Notemos que:

- $|Tf(\varphi(x))| \leq |f(x)| + 5(M-1)\|f\| + L.$

Temos que $S_m(x) = \{\varphi(x)\}$ e $f \in B[0, m]$, logo,

$$|Tf(\varphi(x))| \leq |f(x)| + 5(M-1)m + L,$$

substituindo $m = \|f\|$ acima, obtemos a desigualdade desejada.

- Se $\|Tf\| > m_2$ então $|Tf(\varphi(x))| \geq |f(x)| - 5M(M-1)\|f\| - (5M-4)L.$

Seja $m' := \|Tf\|$, se $m' > m_2$ temos que $S_{m'}(\varphi(x)) = \{\psi(\varphi(x))\} = \{x\}$ e $Tf \in B[0, m']$, logo,

$$|f(x)| = |T^{-1}(Tf)(x)| \leq |Tf(\varphi(x))| + 5(M-1)\|Tf\| + L,$$

isolando $|Tf(\varphi(x))|$ e observando que $m' = \|Tf\| \leq M\|f\| + L$, obtemos a desigualdade desejada.

É fácil notar que, para toda $f \in C(X)$, com $\|f\| > M(m_2 + L)$, temos que $\|Tf\| > m_2$.

Logo, definindo $m_3 := M(m_2 + L) \geq m_2$, temos que, para toda $f \in C(X)$, com $\|f\| > m_3$ são válidas as duas desigualdades acima que, combinadas, nos dá

$$-5M(M-1)\|f\| - (5M-4)L \leq |Tf(\varphi(x))| - |f(x)| \leq 5(M-1)\|f\| + L,$$

logo,

$$\begin{aligned} ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| &\leq \max \{ |5(M-1)\|f\| + L|, |5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L| \} \\ &= \max \{ 5(M-1)\|f\| + L, 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L \} \\ &= 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L. \end{aligned}$$

□

Fixemos m_3 conforme fora definido na demonstração do passo acima. Com ele, já sabemos que X e Y são homeomorfos. Na próxima seção encontraremos uma função $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ contínua, tal que $|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)|$ obedece a uma estimativa em função de $\|f\|$, M e L .

4.3 A existência de uma função sinal contínua para espaços compactos

Agora passaremos à construção da função λ do Teorema 2.2 e veremos que ela satisfaz a estimativa dada por ele.

O passo abaixo é o primeiro resultado, no contexto compacto, que nos permite inferir a respeito do sinal de $Tf(\varphi(x))$ em função do sinal de $f(x)$.

Passo 4.9. *Existe $m_4 \geq m_3$ tal que, para todos $x \in X$ e $m > m_4$, existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ satisfazendo, para toda $f \in C(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$,*

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\alpha f(x)).$$

Além disso, quando $L = 0$, podemos tomar $m_4 = 0$.

Demonstração. Fixemos $x \in X$ e $m > m_3$, temos que

Afirmção 1. *Existem $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$ tais que*

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (4 - 3M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(4 - 3M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Demonstração da Afirmção. Repare que estamos sob as hipóteses do Lema 4.2.

Retomando a demonstração deste lema, pela Afirmção 2 dela, tomemos $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $(y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \subset Y$ convergente tais que

$$\begin{cases} T(f_\sigma)(y_\sigma) \geq (4 - 3M)m \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) \leq -(4 - 3M)m \end{cases}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

No restante da demonstração do Lema 4.2 é provado que $y := \lim_{\sigma \in \Sigma} y_\sigma$ pertence a $S_m(x)$ e, pela definição de φ , sabemos que $S_m(x) = \{\varphi(x)\}$.

Logo, $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$. ■

A partir de agora, consideremos fixados $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \in P_m^X(x)$ e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$, dados satisfazendo as propriedades da Afirmção 1.

Definimos a constante

$$m_4 := \max \left\{ \frac{5M-3}{(6-5M)(M-1)}L, \frac{5M-4}{(10-5M)(M-1)}L, m_3 \right\}.$$

Vejamos que ela satisfaz a seguinte propriedade:

Afirmção 2. *Se $m > m_4$ então existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ tal que, para toda $f \in C(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, há um elemento σ_0 de Σ que satisfaz*

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)) , \quad \forall \sigma \geq \sigma_0.$$

Demonstração da Afirmção. Lembremos que, para toda $(f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ rede de funções m-picos, $\text{sign}(f_\sigma(x))$ é constante em Σ (veja o item (c) do Lema 3.6).

Definimos então $\alpha := \text{sign}(f_\sigma(x))$, $\forall \sigma \in \Sigma$.

Vamos provar que α definido acima satisfaz a propriedade da afirmação por meio da contrapositiva, isto é, veremos que se existe $f \in C_0(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, de forma que não exista $\sigma_0 \in \Sigma$ satisfazendo

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)) , \quad \forall \sigma \geq \sigma_0, \quad (4.8)$$

então $m \leq m_4$.

Suponhamos então que existe f como acima e a fixemos.

É fácil notar que $\Sigma' := \{\sigma \in \Sigma \mid \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(\alpha f(x))\} \subset \Sigma$ é cofinal.

Definimos $\beta := \text{sign}(\alpha f(x))$.

Vejamos que $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))\}$.

Observe que

$$\text{sign}(T(\lambda f_\sigma)(y_\sigma)) = \lambda , \quad \forall \lambda \in \{-1, 1\}, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

pois

$$\begin{cases} Tf_\sigma(y_\sigma) & \geq & (4-3M)m & > & 0 \\ T(-f_\sigma)(y_\sigma) & \leq & -(4-3M)m & < & 0 \end{cases} , \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

logo, $\beta = \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))$, e segue disso que

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \beta \Leftrightarrow \text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)).$$

Com o fato mostrado acima, notemos que:

$$(i) \quad |Tf(\varphi(x))| \leq 4(M-1)m + L.$$

De fato, dado $\sigma \in \Sigma'$, como $\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \neq \text{sign}(T(\beta f_\sigma)(y_\sigma))$, temos

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma) - T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| &= |Tf(y_\sigma)| + |T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| , \\ &\geq |Tf(y_\sigma)| + (4-3M)m \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} |Tf(y_\sigma)| + (4-3M)m &\leq |Tf(y_\sigma) - T(\beta f_\sigma)(y_\sigma)| \\ &\leq \|Tf - T(\beta f_\sigma)\| \\ &\leq M\|f - \beta f_\sigma\| + L , \quad \forall \sigma \in \Sigma'. \end{aligned}$$

Pelo fato de $|Tf|$ ser contínua e $y_\sigma \rightarrow \varphi(x)$, tomando o $\liminf$ na desigualdade acima, obtemos:

$$|Tf(\varphi(x))| + (4 - 3M)m \leq M \liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| + L. \quad (4.9)$$

Vejamos agora que $\liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| \leq m$.

De fato, note que

$$\text{sign}(f(x)) = \text{sign}(\beta f_\sigma(x)), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad (4.10)$$

pois, para todo $\sigma \in \Sigma$, como $|\alpha| = |\beta| = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \text{sign}(\beta f_\sigma(x)) &= \beta \text{sign}(f_\sigma(x)) = \text{sign}(\alpha f(x)) \text{sign}(f_\sigma(x)) \\ &= \text{sign}(\alpha f(x)) \alpha \\ &= \alpha^2 \text{sign}(f(x)) = \text{sign}(f(x)). \end{aligned}$$

Além disso, como $\Sigma' \subset \Sigma$ é cofinal, pelos itens (e) e (f) do Lema 3.6, segue que $(\beta f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'}$ é uma rede de funções m-picos em x .

Logo, pelo item (b) do Lema 3.7, tendo em vista o fato (4.10), concluímos que

$$\liminf_{\sigma \in \Sigma'} \|f - \beta f_\sigma\| \leq m. \quad (4.11)$$

Juntando (4.9) e (4.11), obtemos:

$$|Tf(\varphi(x))| + (4 - 3M)m \leq Mm + L.$$

Isolando $|Tf(\varphi(x))|$ acima, segue a desigualdade enunciada.

(ii) $|Tf(\varphi(x))| > (10 - 5M)(M - 1)m - (5M - 4)L$.

Como $\|f\| = m > m_3$, pelo Passo 4.8, temos que

$$\begin{aligned} |f(x)| - |Tf(\varphi(x))| &\leq ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)|| \\ &\leq 5M(M - 1)\|f\| + (5M - 4)L. \end{aligned}$$

Substituindo $\|f\| = m$ acima e juntando o fato $|f(x)| > 10(M - 1)m$, temos que

$$10(M - 1)m - |Tf(\varphi(x))| < 5M(M - 1)m + (5M - 4)L,$$

isolando $|Tf(\varphi(x))|$, obtemos a desigualdade enunciada.

Juntando (i) e (ii) acima, obtemos

$$(10 - 5M)(M - 1)m - (5M - 4)L < |Tf(\varphi(x))| \leq 4(M - 1)m + L,$$

logo,

$$(6 - 5M)(M - 1)m < (5M - 3)L \Rightarrow m < \frac{5M - 3}{(6 - 5M)(M - 1)}L \leq m_4.$$

■

Por meio da Afirmação 2 acima, concluiremos a demonstração do passo.

A partir de agora, vamos supor que m , fixado no início da demonstração, é estritamente maior que m_4 e tomar α satisfazendo as propriedades da Afirmação 2.

Logo, dada $f \in C(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, tomemos $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que

$$\text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)), \quad \forall \sigma \geq \sigma_0.$$

Claramente, $Tf(y_\sigma) \rightarrow Tf(\varphi(x))$.

Veremos abaixo que $Tf(\varphi(x)) \neq 0$ e, observando que a função sign é contínua em $\mathbb{R}^*$, concluiremos que $\text{sign}(Tf(y_\sigma)) \rightarrow \text{sign}(Tf(\varphi(x)))$.

De fato, recordando a desigualdade (ii), temos

$$|Tf(\varphi(x))| > (10 - 5M)(M - 1)m - (5M - 4)L,$$

e notemos que

$$m > m_4 \geq \frac{5M - 4}{(10 - 5M)(M - 1)}L \Rightarrow (10 - 5M)(M - 1)m - (5M - 4)L > 0,$$

logo, $|Tf(\varphi(x))| > 0$.

Portanto,

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \lim_{\sigma \in \Sigma} \text{sign}(Tf(y_\sigma)) = \text{sign}(\alpha f(x)).$$

Como $f \in C(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, foi tomada arbitrariamente, temos que α satisfaz o fato destacado acima para toda f satisfazendo essas condições.

Por fim, ressaltamos que, quando $L = 0$, temos

$$\frac{5M - 3}{(6 - 5M)(M - 1)}L = \frac{5M - 4}{(10 - 5M)(M - 1)}L = m_3 = 0,$$

logo, para este caso, m_4 é nulo. □

Definimos m_4 conforme foi feito na demonstração do passo acima. Com ele, faz sentido definir:

Definição 4.10. Para todo $m > m_4$, definimos $\lambda_m : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tal que, para toda $f \in C(X)$ com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, temos que

$$\text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\lambda_m(x)f(x)).$$

Veremos abaixo duas Observações que desenvolvem propriedades que nos serão úteis para os próximos resultados.

Observação 4.11. Para todos $x \in X$, $m > m_4$ e $f \in C(X)$, com $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, vale que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| = ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)||.$$

A igualdade acima, com o Passo 4.8, implica que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| \leq 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L.$$

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $m > m_3$.

Suponha $f \in C(X)$ tal que $\|f\| = m$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$.

Pela definição das funções λ_m , seja $\beta := \text{sign}(Tf(\varphi(x))) = \text{sign}(\lambda_m(x)f(x))$.

Note que

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x))| = \beta Tf(\varphi(x)) \\ |f(x)| = |\lambda_m(x)f(x)| = \beta \lambda_m(x)f(x) \end{cases},$$

logo,

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| = |\beta Tf(\varphi(x)) - \beta \lambda_m(x)f(x)| = ||Tf(\varphi(x))| - |f(x)||.$$

□

Observação 4.12. Observe que se $\|f\| = |f(x)| > 0$ então $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$.

Demonstração. De fato, note que

$$M^2 < \frac{6}{5} = \frac{120}{100} < \frac{121}{100} = \left(\frac{11}{10}\right)^2,$$

logo,

$$M < \frac{11}{10} \Rightarrow 1 > 10(M-1) \Rightarrow |f(x)| = \|f\| > 10(M-1)\|f\|.$$

□

Passo 4.13. Existe $m_5 \geq m_4$ tal que, fixado $x \in X$, $\lambda_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > m_5$. Além disso, quando $L = 0$, podemos tomar $m_5 = 0$.

Demonstração. Fixemos $x \in X$, vejamos que

Afirmção 1. Para todos $m' \geq m > m_4$, temos que

$$\lambda_{m'}(x) \neq \lambda_m(x) \Rightarrow m' - m \geq \frac{m(2 - 10M(M-1)) - (10M-7)L}{M(5M-4)}.$$

Demonstração da Afirmção. Tomemos $m' \geq m > m_4$ tais que $\lambda_m(x) \neq \lambda_{m'}(x)$.

Seja $f \in C(X)$ tal que $\|f\| = f(x) = 1$ e definimos:

$$\begin{cases} f_m &:= \lambda_m(x)mf \\ f_{m'} &:= \lambda_{m'}(x)m'f \end{cases}.$$

Note que, como $\lambda_m(x) \neq \lambda_{m'}(x)$, vale que

$$\|f_m + f_{m'}\| = m' - m,$$

logo,

$$\begin{aligned} |Tf_m(\varphi(x)) - T(-f_{m'})(\varphi(x))| &\leq \|Tf_m - T(-f_{m'})\| \leq M\|f_m + f_{m'}\| + L \\ &= M(m' - m) + L. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por outro lado, as normas de f_m e $f_{m'}$ são assumidas em x , logo, pela Observação 4.12

$$\begin{cases} |f_m(x)| > 10(M-1)\|f_m\| \\ |f_{m'}(x)| > 10(M-1)\|f_{m'}\| \end{cases},$$

portanto,

$$\begin{cases} \text{sign}(Tf_m(\varphi(x))) &= \text{sign}(\lambda_m(x)f_m(x)) &= \text{sign}((\lambda_m(x))^2m) &= 1 \\ \text{sign}(T(-f_{m'})(\varphi(x))) &= \text{sign}(\lambda_{m'}(x)(-f_{m'})(x)) &= \text{sign}(-(\lambda_{m'}(x))^2m') &= -1 \end{cases},$$

logo,

$$|Tf_m(\varphi(x)) - T(-f_{m'})(\varphi(x))| = |Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))|,$$

juntando a isto o fato (4.12), obtemos

$$|Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))| \leq M(m' - m) + L. \quad (4.13)$$

Temos que $\|f_m\|, \|f_{m'}\| > m_3$, logo, aplicando o Passo 4.8,

$$\begin{cases} m &= |f_m(x)| &\leq |Tf_m(\varphi(x))| + 5M(M-1)m + (5M-4)L \\ m' &= |f_{m'}(x)| &\leq |T(-f_{m'})(\varphi(x))| + 5M(M-1)m' + (5M-4)L \end{cases}.$$

Somando as desigualdades acima, obtemos:

$$2m \leq m + m' \leq |Tf_m(\varphi(x))| + |T(-f_{m'})(\varphi(x))| + 5M(M-1)(m + m') + 2(5M-4)L.$$

Juntando isto ao fato (4.13),

$$\begin{aligned} 2m &\leq M(m' - m) + L + 5M(M-1)(m + m') + 2(5M-4)L \\ &= M(m' - m) + 5M(M-1)(m' - m) + 10M(M-1)m + (10M-7)L \\ &= M(5M-4)(m' - m) + 10M(M-1)m + (10M-7)L. \end{aligned}$$

Isolando $m' - m$,

$$m' - m \geq \frac{m(2 - 10M(M-1)) - (10M-7)L}{M(5M-4)}.$$

■

Como $1 < M < \sqrt{6/5}$ temos que $2 - 10M(M-1) > 0$, portanto, existe $m_5 \geq m_4$ tal que

$$m(2 - 10M(M-1)) > (10M-7)L, \quad \forall m > m_5.$$

Note que, para o caso em que $L = 0$, podemos tomar $m_5 = 0$, pois $m_4 = (10M-7)L = 0$.

Fixado m_5 como acima, temos que

$$\frac{m(2 - 10M(M - 1)) - (10M - 7)L}{M(5M - 4)} > 0, \forall m > m_5,$$

logo, dado $m > m_5$, faz sentido considerarmos o intervalo

$$\left[m, m + \frac{m(2 - 10M(M - 1)) - (10M - 7)L}{M(5M - 4)} \right[.$$

Pela contrapositiva da Afirmação 1, para todo m' pertencente ao intervalo acima, temos que $\lambda_{m'}(x) = \lambda_m(x)$.

Definimos $\tilde{\gamma} :]m_5, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $\tilde{\gamma}(m) := \frac{m(2 - 10M(M - 1)) - (10M - 7)L}{M(5M - 4)}$, $\forall m > m_5$, temos, claramente, que ela é contínua e satisfaz, para todo $m > m_5$,

$$\lambda_m(x) = \lambda_{m'}(x), \forall m' \in [m, m + \tilde{\gamma}(m)[.$$

Por fim, veremos a partir disso que, fixado $x \in X$, $\lambda_m(x)$ possui o mesmo valor para todo $m > m_5$.

Para tal, definimos a função $\Lambda_x :]m_5, +\infty[\rightarrow \{-1, 1\}$ tal que $\Lambda_x(m) := \lambda_m(x)$, $\forall m > m_5$.

É fácil verificar que Λ_x está sob as hipóteses do Lema 3.16 que, aplicado, nos garante que $\Lambda_x(m) = \lambda_m(x)$ é constante em $]m_5, +\infty[$. $\square$

Fixemos $m_5 \geq m_4$ definido conforme fora feito na demonstração do passo acima, tomando $m_5 = 0$, no caso em que $L = 0$.

Definimos então a função $\lambda : X \rightarrow \{-1, 1\}$ tal que $\lambda = \lambda_m$, $\forall m > m_5$ e vejamos no próximo passo que λ é contínua.

Passo 4.14. A função λ é contínua e, para todos $x \in X$ e $f \in C(X)$, com $\|f\| > m_5$ e $|f(x)| > 10(M - 1)\|f\|$, temos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 5M(M - 1)m + (5M - 4)L.$$

Demonstração. Vamos fazer a prova por contradição.

Suponha que λ não é contínua em X e sejam $x \in X$ e $x_\sigma \rightarrow x$ tal que $\lambda(x_\sigma) \rightarrow -\lambda(x)$.

Fixando $m > m_5$, decorre da definição de λ que $\lambda_m(x_\sigma) \rightarrow -\lambda_m(x)$.

Seja $f \in C(X)$ tal que $\|f\| = |f(x)| = m$.

Aplicando as Observações 4.11 e 4.12, obtemos:

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| & \leq 5M(M - 1)m + (5M - 4)L \\ |Tf(\varphi(x_\sigma)) - \lambda_m(x_\sigma)f(x_\sigma)| & \leq 5M(M - 1)m + (5M - 4)L, \quad \forall \sigma \in \Sigma \end{cases}.$$

Tomando o limite na segunda desigualdade, temos que

$$\begin{cases} |Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| & \leq 5M(M - 1)m + (5M - 4)L \\ |Tf(\varphi(x)) + \lambda_m(x)f(x)| & \leq 5M(M - 1)m + (5M - 4)L \end{cases},$$

logo,

$$m \leq |Tf(\varphi(x))| + |\lambda_m(x)f(x)| \leq 5M(M-1)m + (5M-4)L,$$

seguindo disso que

$$\begin{aligned} m \leq 5M(M-1)m + (5M-4)L &\Rightarrow m(1 - 5M(M-1)) - (5M-4)L \leq 0 \\ &\Rightarrow m(2 - 10M(M-1)) - (10M-8)L \leq 0 \\ &\Rightarrow m(2 - 10M(M-1)) - (10M-7)L \leq L \leq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembremos que m_5 foi fixado de modo que

$$m(2 - 10M(M-1)) - (10M-7)L > 0, \forall m > m_5,$$

logo, temos uma contradição, concluindo assim que λ é contínua.

Por fim, notemos que, pela Observação 4.11, para todos $x \in X$ e $f \in C(X)$, com $\|f\| = m > m_5$ e $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$, temos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda_m(x)f(x)| \leq 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L,$$

onde sabemos que $\lambda_m = \lambda$, pois $m > m_5$, seguindo assim a estimativa enunciada. $\square$

Compondo os Passos 4.8 e 4.14 provados acima, estamos aptos a demonstrar o Teorema 2.2 para o caso $1 < M < \sqrt{6/5}$.

Terminamos esta seção observando que, em virtude dos valores fixados na Observação 4.3 terem sido escolhidos ao acaso, toda a construção para as funções φ e λ acima pode ser feita para todos X, Y, M, L e T que satisfizerem as condições da observação.

4.4 Demonstração do teorema principal

Começaremos a demonstração do teorema provando-o para o caso, mais simples, $M = 1$. Posteriormente, abordaremos o caso $1 < M < \sqrt{6/5}$ fazendo uso das funções φ e λ definidas na seção anterior.

Demonstração do Teorema 2.2. Primeiro Caso: $M = 1$.

Decorre diretamente do Teorema 2.1, observando que $76(M-1) = 26(M-1) = 0$.

Segundo Caso: $1 < M < \sqrt{6/5}$.

Pelo Lema 1.31, tomemos $L' \leq ML$ o menor tal que T e T^{-1} são (M, L') -quasi-isometrias.

Sejam φ e λ definidos para T , conforme o que fora feito na seções anteriores, e lembremos, pela Observação 4.3, que a constante L considerada na construção deles é o L' fixado acima.

Dados $x \in X$ e $f \in C(X)$, consideramos três casos:

- (a) $\|f\| \leq m_5$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 |Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| &\leq |Tf(\varphi(x))| + |f(x)| \leq \|Tf\| + \|f\| \\
 &\leq (M+1)\|f\| + L' \\
 &\leq (M+1)m_5 + L'.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

(b) $|f(x)| \leq 10(M-1)\|f\|$ e $\|f\| > m_5$.

Pelo Passo 4.8, temos

$$\begin{aligned}
 |Tf(\varphi(x))| &\leq |f(x)| + 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L' \\
 &\leq (5M+10)(M-1)\|f\| + (5M-4)L',
 \end{aligned}$$

logo, como $M < \sqrt{6/5}$, da relação acima, segue que

$$|Tf(\varphi(x))| \leq 16(M-1)\|f\| + (15M-14)L',$$

logo, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
 |Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| &\leq |Tf(\varphi(x))| + |f(x)| \\
 &\leq 16(M-1)\|f\| + 10(M-1)\|f\| + (5M-4)L' \\
 &= 26(M-1)\|f\| + (5M-4)L'.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

(c) $|f(x)| > 10(M-1)\|f\|$ e $\|f\| > m_5$.

Pelo Passo 4.14, obtemos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 5M(M-1)\|f\| + (5M-4)L'.$$

Como $M < \sqrt{6/5}$, pelo fato destacado acima, temos que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 6(M-1)\|f\| + (5M-4)L'. \tag{4.16}$$

Seja $\Delta' := \max\{ (M+1)m_5 + L', (5M-4)L' \}$.

Das desigualdades (4.14), (4.15) e (4.16), temos que, em qualquer um dos casos

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 26(M-1)\|f\| + \Delta'.$$

Definimos $\Delta := \max\{ (M+1)m_5 + ML, (5M-4)ML \}$.

Lembrando que $L' \leq ML$ e que $x \in X$ e $f \in C(X)$ acima foram tomados arbitrariamente, segue que

$$|Tf(\varphi(x)) - \lambda(x)f(x)| \leq 26(M-1)\|f\| + \Delta, \quad \forall f \in C(X), \forall x \in X,$$

onde Δ depende de M e L .

Vejamos, por fim, que $\Delta = 0$, se $L = 0$.

Supondo que $L = 0$, temos que $L' = 0$, portanto, é fácil verificar, pelas definições, que

$$m_0 = m_1 = \dots = m_5 = 0.$$

Logo, temos $\Delta = 0$, pois, claramente, $(M + 1)m_5 + ML = (5M - 4)ML = 0$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*. Israel J. Math. 3 (1965) 205-210.
- [2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1933.
- [3] E. Behrends, *M-Structure and Banach-Stone theorem*. Lecture Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.
- [4] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Colloquium Publications, vol. 48, AMS (1993)
- [5] M. R. Bridson, *Geometric and combinatorial group theory*, The Princeton Companion to Mathematics, section IV.10, Princeton University Press (2008).
- [6] M. Cambern, *A generalized Banach-Stone theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 396-400.
- [7] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. 18, (1967), 1062-1066.
- [8] M. Cambern, *Isomorphisms of $C_0(Y)$ onto $C(X)$* , Pacific J. Math. 35 (1970), 307-312.
- [9] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphisms between $C(K)$ Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 50 (1975), 215-217.
- [10] Y. Dutrieux, N. Kalton, *Perturbations of isometries between $C(K)$ -spaces*, Studia Math., 166.2 (2005), 181-197.
- [11] R. Engelking. *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- [12] J. Gevirtz, *Stability of Isometries on Banach Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), no. 4, 633-636.
- [13] R. Górak, *Coarse version of the Banach-Stone theorem*, J. Math. Anal. Appl., 377 (2011), 406-413.
- [14] R. Górak, *Perturbations of isometries between Banach Spaces*, Studia Math., 207 (2011), 47-58.
- [15] P. M. Gruber, *Stability of isometries*, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 263-277.

- [16] K. Hrbacek, T. J. Jech, *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded*, Vol. 220, Crc Press, (1999).
- [17] K. Jarosz, *Nonlinear generalizations of the Banach–Stone theorem*, Studia Math., 93.2 (1989), 97-107.
- [18] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, (1998).
- [19] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.