**Estruturas de Vertex em teoria de
representações de álgebras de Lie**

Renato Alessandro Martins

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPESP (Processo: 2008/06860-3)

São Paulo, maio de 2012

Estruturas de Vertex em teoria de representações de álgebras de Lie

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 04/05/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny - IME-USP
- Prof. Dr. Henrique Guzzo Júnior - IME-USP
- Prof. Dr. Reimundo Heluani - IMPA
- Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Dimitar Grantcharov - Univ. of Texas

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente os meus pais por todo o apoio que recebi durante minha longa jornada até a conclusão desta tese de doutorado.

Também gostaria de agradecer meu orientador, Prof. Dr. Vyacheslav Futorny, por ter acreditado no meu potencial desde o início, me dando a oportunidade de desenvolver este projeto. Saiba que trabalhar com um pesquisador de altíssimo nível como você foi fundamental para meu crescimento e amadurecimento como matemático.

Agradeço também aos meus amigos que sempre me apoiaram mesmo naqueles momentos mais difíceis deste doutorado. Aos meus colegas que estavam torcendo para que tudo terminasse bem, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço a todos os bons professores que se esforçaram para contribuir positivamente em minha formação, sendo exigentes na hora que tinham que ser exigentes, e motivadores nos momentos de maior dificuldade.

Agradeço também a FAPESP por ter financiado este projeto de pesquisa.

Resumo

Motivados pelos resultados do artigo [BBFK11], nosso trabalho começa analisando, no caso da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$, a possibilidade de se obter módulos de Verma $\mathbb{J}$ -imaginários, via representações análogas às feitas por Cox em [Cox05]. Inicialmente consideramos, por simplicidade, $n = 2$ e, só então, analisamos o caso geral. Depois, de modo análogo, estudamos os artigos [CF04] e [CF05] com o intuito de obter módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto.

Finalmente imbutimos, no caso $n = 2$, uma ação de álgebra de Virasoro nos módulos imaginários de Wakimoto, utilizando-nos do resultado exposto em [EFK98], em que tal problema é abordado para o caso dos módulos de Verma. Desta forma, obtemos equações análogas às de Knizhnik-Zamolodchikov (equações KZ) para os módulos imaginários de Wakimoto.

Palavras-chave: módulos de Verma clássicos, módulos de Verma imaginários, módulos de Verma $\mathbb{J}$ -imaginários, módulos intermediários de Wakimoto, módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto, álgebras de Vertex.

Abstract

Following the results of [BBFK11], our work starts analyzing (for $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$) if we can obtain $\mathbb{J}$ -imaginary Verma modules using similar representations used by Cox in [Cox05]. We did it for $n = 2$ and after, for the general case. The next step was the study of $\mathbb{J}$ -intermediate Wakimoto modules, following the ideas of [CF04] and [CF05].

To finish, for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, we defined an action of Virasoro algebra on the imaginary Wakimoto modules following [EFK98] and we obtained an analogue of the KZ-equations for imaginary Wakimoto modules.

Keywords: classical Verma modules, imaginary Verma modules, $\mathbb{J}$ -imaginary Verma modules, intermediate Wakimoto modules, $\mathbb{J}$ -intermediate Wakimoto modules, Vertex algebras.

Sumário

1	Definições básicas	1
1.1	Distribuições Formais	1
1.2	Álgebras de Lie	4
1.3	Os espaços de Fock	5
1.4	Os módulos do tipo Verma e os $\mathbb{J}$ -módulos do tipo Verma	6
1.4.1	Primeira realização de campo livre	7
1.4.2	Módulos de Wakimoto	8
1.4.3	Módulos intermediários de Wakimoto	9
2	Os módulos de Verma $\mathbb{J}$-imaginários	11
2.1	Introdução	11
2.2	Realização de campos livres de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$	14
2.2.1	O caso $n = 2$	14
2.2.2	O caso $n > 2$	17
3	Os módulos $\mathbb{J}$-intermediários de Wakimoto	33
3.1	Os módulos intermediários de Wakimoto	33
3.1.1	Álgebra de oscilação	34
3.1.2	Cálculos de campos	38
3.1.3	A representação	48
3.2	Construção dos módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto	59
3.2.1	As $\mathbb{J}$ -realizações boson	59
3.3	Gerando módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto	64
3.4	Módulos $(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2)$ -intermediários de Wakimoto	67
4	A ação de Virasoro nos módulos imaginários de Wakimoto para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$	71
4.1	Introdução	71
4.2	A ação de Virasoro	74
4.3	Operadores entrelaçantes	79
4.3.1	Módulos Topológicos	79
4.3.2	Forma operadora das equações de Knizhnik-Zamolodchikov	84
5	Considerações finais	91

Introdução

As álgebras de Kac-Moody desempenham um importante papel para diversos segmentos da Matemática e da Física. Tais álgebras foram introduzidas em 1968 por V. Kac e R. Moody como uma generalização das álgebras de Lie simples de dimensão finita com matriz de Cartan positiva e definida. As álgebras de Lie afim são as mais estudadas das álgebras de Kac-Moody de dimensão infinita e possuem importantes aplicações. Estas correspondem ao caso das matrizes positivas semidefinidas ($\det(a_{ij}) = 0$ com menores principais positivos). Uma maneira de se construir representações de álgebras de Lie afim é via indução das subálgebras parabólicas. Temos que os módulos de indução possuem um papel importante no problema da classificação de módulos irredutíveis.

A teoria dos módulos de Verma para álgebras de Lie afim foram desenvolvidas em diferentes trabalhos, como por exemplo, em [Kac90] e em [DGK82]. No caso de dimensão infinita, sabe-se que nem todas as subálgebras de Borel são conjugadas com respeito ao grupo de Weyl para álgebras de Lie afim. Neste caso, existe mais de uma (mas ainda em quantidade finita) classe de conjugação de subálgebras de Borel que nos leva a construção de módulos tipo Verma. Temos que todas as subálgebras de Borel foram classificadas em [JK85] e [JK89] e, independentemente, em [Fut90] e [Fut91]. Sabemos que os módulos de Verma que correspondem a uma subálgebra de Borel não-standard são bem diferentes dos módulos de Verma clássicos. À saber, eles possuem espaços de peso tanto de dimensão finita quanto infinita.

Em 1985, H. Jacobsen e V. Kac [JK85] apresentaram novas classes de representações de peso máximo unitarizável para álgebras de Lie de dimensão infinita, a qual denominamos módulos de Verma imaginários e, em 1986, M. Wakimoto [Wak86] nos deu uma representação de Fock para a álgebra de Lie afim $A_1^{(1)}$. Nestes trabalhos foram feitas construções geométricas de certas representações de álgebras de Kac-Moody afim em termos de somas infinitas de operadores diferenciais parciais agindo num espaço de Fock. Em 1990, D. Bernard e G. Felder nos deram uma representação no espaço de Fock de módulos de Verma imaginários para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ o qual foi generalizado em 2005 por B. Cox [Cox05] para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$. Em 2010, generalizamos os resultados obtidos por B. Cox em [Cox05] para os módulos $\mathbb{J}$ -imaginários (ver [Mar11]). Em 1994, V. Futorny estudou os módulos de Verma imaginários para álgebras de Lie afim (ver [Fut94]) enquanto que B. Cox trabalhou com módulos de Verma induzidos de subálgebras de Borel não-standard (ver [Cox94]). Em 2004 e 2005, B. Cox e V. Futorny nos deram realizações para os módulos intermediários de Wakimoto (ver [CF04] e [CF05]), cuja generalização para módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto foi feita em 2011 (ver [Mar12]).

A teoria de módulos de Verma generalizados com peso máximo foi estudada inicialmente por A. Rocha e N. Wallach em [RW82]. Estes módulos podem ser vistos como induzidos de uma subálgebra parabólica com um fator de Levi redutível de dimensão finita. Todas

as subálgebras parabólicas no caso afim foram descritas em [Fut90] e [Fut91]. Agora existe um número finito de classes de conjugação, com respeito ao grupo de Weyl, de subálgebras parabólicas com fator de Levy redutível fixado. Todas as subálgebras parabólicas definem um módulo generalizado do tipo Verma. Um fato relacionado às álgebras de Lie afim é a existência de subálgebras parabólicas com um fator de Levi contendo uma subálgebra de Heisenberg de dimensão infinita ou uma álgebra de Lie afim com posto menor. Módulos induzidos no primeiro caso são chamados de módulos de Loop. Em particular, representações adjuntas podem ser obtidas como quociente de um módulo de Loop. Módulos de Loop de nível zero foram estudados em [C86], [R89], [R93], [CP88] e [CP088]. Módulos induzidos de uma subálgebra parabólica contendo uma subálgebra de Lie afim são chamados módulos de Loop generalizados. Os módulos tipo Verma são deste tipo.

Quanto à organização desta tese, o capítulo 1 tem como objetivos introduzir os conceitos básicos abordados neste texto e familiarizar o leitor com as notações adotadas. Algumas definições como a de distribuições formais e de módulos de Verma clássicos e imaginários, além dos módulos intermediários de Wakimoto, são expostos neste capítulo devido à sua importância e utilidade ao longo do trabalho.

Já o capítulo 2 aborda os resultados obtidos pelo autor em [Mar11], onde estuda-se, para as álgebras de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$, uma realização em termos de somas infinitas de operadores diferenciais parciais de uma família de representações introduzidas no artigo [BBFK11], representações estas que generalizam as construções de módulos de Verma imaginários. Desta forma, generalizamos as realizações de campos livres de módulos de Verma imaginários construídos por B. Cox em [Cox05] para todos os módulos de Verma $\mathbb{J}$ -imaginários sobre a álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$.

No capítulo 3, apresentamos, na primeira seção, os resultados obtidos por B. Cox e V. Futorny em [CF04] e [CF05]. Em seguida, na seção 3.2, aborda-se o conteúdo de [Mar12], em que se generaliza as realizações dos módulos intermediários de Wakimoto apresentadas nestes dois trabalhos para todos os módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto. Vale ressaltar que nestes trabalhos de Cox e Futorny os módulos dependem de um parâmetro r , $0 \leq r \leq n$, onde, para $r = 0$, temos [Cox05] e, para $r = n$, o resultado coincide com a das realizações bóson dos módulos de Wakimoto vistas em [FF88]. Desta forma, nosso trabalho generaliza conseqüentemente tanto [Mar11] quanto [FF88].

No capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos em [CFMar12], o qual aborda a ação de álgebra de Virasoro sobre os módulos intermediários de Wakimoto estudados em [CF04] e [CF05] para o caso de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$. Neste capítulo, apresentamos uma equação análoga à de Knizhnik-Zamolodchikov (ver [EFK98]).

Finalmente, no capítulo 5, damos uma breve introdução ao que pretendemos estudar daqui em diante.

Capítulo 1

Definições básicas

Este primeiro capítulo tem os objetivos de familiarizar o leitor com os conceitos básicos relativos à teoria e estabelecer as notações que serão utilizadas no decorrer desta tese. Assumimos que o leitor possui uma noção básica sobre a teoria de álgebras de Lie, noções estas contidas em [SM99]. Outros conceitos não tão básicos, como o de distribuições formais, produto ordenado normal, módulos de Verma clássicos e imaginários, além dos módulos de Wakimoto e intermediário de Wakimoto, são abordados neste primeiro capítulo devido a sua importância no desenvolvimento da teoria. Os conceitos mais específicos são deixados para os capítulos subsequêntes, aparecendo somente quando realmente necessários. Uma exceção a esta “regra” é o conceito de $\mathbb{J}$ -módulos tipo Verma, já que sua compreensão é indispensável no estudo dos resultados expostos em toda a tese. Devido à importância dada pelos físicos, também discutimos brevemente o conceito de espaço de Fock, uma vez que fazemos referência a tal assunto nos capítulos 2 e 3, deixando a cargo do leitor uma leitura mais profunda do assunto caso seja de seu interesse.

Desta forma, iniciamos nossos estudos abordando os conceitos e os resultados básicos relativos à teoria de distribuições formais.

1.1 Distribuições Formais

Definição 1.1.1. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Chamemos de distribuição formal nas indeterminadas $z_1, z_2, \dots, z_n$ com valores em U às séries da forma*

$$a(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n = -\infty}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_n} \cdot z_1^{i_1} \cdot \dots \cdot z_n^{i_n}, \quad (1.1.2)$$

onde $a_{i_1, \dots, i_n} \in U$ para todo $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$.

Estas distribuições formais formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ denotado por $U\left[[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_n, z_n^{-1}]\right]$. Aqui a utilização dos dois colchetes é necessária, já que utiliza-se um colchete apenas quando o número de termos for finito. Por exemplo, $a(z) \in \mathbb{C}[z^{-1}, z]$ significa que $a(z)$ é uma distribuição formal com quantidade finita de potências negativas.

Observação 1.1.3. *Nem sempre duas distribuições formais podem ser multiplicadas. Para tal propósito, é necessário verificar sua convergência no sentido algébrico, isto é, se os*

coeficientes de cada monômio $z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ são somas convergentes. Por exemplo, quando uma das distribuições formais é, na verdade, um polinômio de Laurent, então o produto está bem definido, já que cada coeficiente $a_{i_1, \dots, i_n}$ é obtido por uma soma finita, logo convergente.

Definição 1.1.4. Seja $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \in U[[z, z^{-1}]]$. Define-se o resíduo de $a(z)$, e o denota-se por $\text{Res}_z a(z)$, como o coeficiente a_{-1} de $a(z)$, isto é,

$$\text{Res}_z a(z) = a_{-1}$$

e também seja $\partial a(z)$ a derivada de $a(z)$ na variável z , isto é,

$$\partial a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot a_n z^{n-1}. \quad (1.1.5)$$

Assim, quando o produto $a(z)b(z)$ está bem definido, tem-se a igualdade

$$\text{Res}_z \partial a(z)b(z) = -\text{Res}_z a(z)\partial b(z),$$

onde $\partial a(z)b(z)$ significa $(\partial a(z)) \cdot b(z)$ e $\text{Res}_z a(z)b(z)$ significa $\text{Res}_z(a(z) \cdot b(z))$. De fato, como

$$\partial(a(z)b(z)) = \partial a(z)b(z) + a(z)\partial b(z),$$

e $\text{Res}_z \partial c(z) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Res}_z \partial(a(z)b(z)) \\ &= \text{Res}_z (\partial a(z)b(z) + a(z)\partial b(z)) \\ &= \text{Res}_z \partial a(z)b(z) + \text{Res}_z a(z)\partial b(z). \end{aligned}$$

Denote a álgebra dos polinômios de Laurent em z por $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Temos a seguinte definição.

Definição 1.1.6. Sejam $f(z) \in U[[z, z^{-1}]]$ e $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Temos a função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : U[[z, z^{-1}]] \times \mathbb{C}[z, z^{-1}] &\longrightarrow U \\ (f, \varphi) &\longmapsto \text{Res}_z f(z)\varphi(z). \end{aligned}$$

O polinômio $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ é chamado, neste caso, de função de teste. Vale o seguinte teorema.

Teorema 1.1.7. Sejam $a(z), b(z) \in U[[z, z^{-1}]]$. Então as distribuições formais $a(z)$ e $b(z)$ são iguais se, e somente se, para toda função de teste $\varphi(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, valer que $\langle a, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle$ (onde $a = a(z)$ e $b = b(z)$).

Demonstração. De fato, $a(z) = b(z)$ implica que $\langle a, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle$. Assim, basta provar que

$$\langle a, \varphi \rangle = \langle b, \varphi \rangle, \text{ para todo } \varphi, \text{ implica } a(z) = b(z).$$

Fixado m , defina $\varphi_m = z^{-m-1}$. Então

$$\begin{aligned}
\langle a, \varphi_m \rangle &= \text{Res}_z a(z) \varphi_m(z) \\
&= \text{Res}_z a(z) \\
&= \text{Res}_z \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot z^n \cdot z^{-m-1} \right) \\
&= a_m.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\langle b, \varphi_m \rangle = b_m$. Logo $a_m = b_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e assim $a(z) = b(z)$. $\square$

Definição 1.1.8. *Seja $\delta(z/w) \in U\left[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]\right]$ a distribuição formal (denominada função formal delta) definida por*

$$\delta(z/w) = w^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n w^{-n-1}. \quad (1.1.9)$$

A função formal delta possui algumas propriedades importantes que serão demonstradas através da seguinte construção.

Sejam $C = \mathbb{C}\left[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]\right]$ e $S = (z - w)^n$ tal que $n \geq 0$. O anel de frações de C com respeito à S (denotado por $S^{-1}C$) consiste das funções racionais da forma

$$\frac{f(z, w)}{(z - w)^n} \quad (1.1.10)$$

onde $f = f(z, w) \in C$ e $n \geq 0$. As derivações ∂_z e ∂_w agem naturalmente neste anel de acordo com a regra do quociente para diferenciações. Por exemplo,

$$\partial_z \frac{f(z, w)}{(z - w)^n} = \frac{\partial_z f(z, w) \cdot (z - w) - n \cdot f(z, w)}{(z - w)^{n+1}}.$$

Denote por $i_{z,w}$ e $i_{w,z}$ a inclusão em C das séries de potências dos anéis $\mathbb{C}\left[\left[\frac{w}{z}\right]\right]$ e $\mathbb{C}\left[\left[\frac{z}{w}\right]\right]$, respectivamente. Observe que

$$(z - w) \cdot z^{-1} \cdot \left(1 + \frac{w}{z} + \dots + \left(\frac{w}{z}\right)^k + \dots\right) = 1 \text{ em } \mathbb{C}\left[\left[\frac{w}{z}\right]\right]$$

e que

$$(z - w) \cdot w^{-1} \cdot \left(1 + \frac{z}{w} + \dots + \left(\frac{z}{w}\right)^k + \dots\right) = 1 \text{ em } \mathbb{C}\left[\left[\frac{z}{w}\right]\right].$$

Temos

$$i_{z,w} \frac{1}{z - w} = z^{-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1} w^m \quad (1.1.11)$$

e também

$$i_{w,z} \frac{1}{z - w} = -w^{-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^m = - \sum_{m=0}^{\infty} z^m w^{-m-1} = - \sum_{m=-1}^{-\infty} z^{-m-1} w^m. \quad (1.1.12)$$

Usando indução, prova-se que

$$i_{z,w} \frac{1}{(z-w)^{j+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{j} z^{-m-1} w^{m-j} \quad (1.1.13)$$

e também que

$$i_{w,z} \frac{1}{(z-w)^{j+1}} = - \sum_{m=-1}^{-\infty} \binom{m}{j} z^{-m-1} w^{m-j}. \quad (1.1.14)$$

O que fizemos em (1.1.10) é o seguinte:

$$i_{z,w} : \mathbb{C} \left[\left[\frac{w}{z} \right] \right] \longrightarrow C \text{ é tal que } \frac{f(z,w)}{(z-w)^n} \longmapsto f(z,w) \cdot (z-w)^{-n}.$$

Assim, tem-se uma série de potências $f(z,w)$ em $\mathbb{C} \left[\left[\frac{w}{z} \right] \right]$ e como $i_{z,w}$ é apenas a inclusão em C , segue que

$$i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) = i_{z,w} \left(z^{-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^m \right) = i_{z,w} \sum_{m=0}^{\infty} w^m z^{-m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1} w^m. \quad (1.1.15)$$

Para facilitar os cálculos, pode-se utilizar o seguinte argumento (menos formal, porém mais utilizado)

$$i_{z,w} \frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} = z^{-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z} \right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1} w^m. \quad (1.1.16)$$

Para finalizar, tem-se que tanto $i_{z,w}$ quanto $i_{w,z}$ comutam com ∂_z e com ∂_w . Por exemplo,

$$\begin{aligned} i_{z,w} \partial_z \frac{f(z,w)}{(z-w)^n} &= i_{z,w} \frac{(\partial_z f(z,w)) \cdot (z-w) - n \cdot f(z,w)}{(z-w)^{n+1}} \\ &= (\partial_z f) \cdot (z-w)^{-n} - n \cdot (z-w)^{-(n+1)} f \\ &= \partial_z (f \cdot (z-w)^{-n}) \\ &= \partial_z i_{z,w} \frac{f}{(z-w)^n}. \end{aligned}$$

1.2 Álgebras de Lie

Apenas para relembrar, daremos as seguintes definições (ver [SM99] para maiores detalhes).

Definição 1.2.1. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial que possui uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ chamada colchete de Lie, satisfazendo as seguintes relações:*

- (1) $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$
- (2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$

Definição 1.2.2. Uma representação ρ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ na álgebra linear geral de um espaço vetorial V , isto é,

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

tal que

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definição 1.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um espaço vetorial V , munido de uma operação $\mathfrak{g} \times V \longrightarrow V$ dada por $(x, v) \longrightarrow x \cdot v$ é chamado $\mathfrak{g}$ -módulo se satisfaz as seguintes condições:

- (1) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,
 - (2) $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$,
 - (3) $[x, y] \cdot v = xy \cdot v - yx \cdot v$,
- $\forall x, y \in \mathfrak{g}, u, v \in V, a, b \in \mathbb{C}$.

Observação 1.2.4. A representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ pode ser vista como um $\mathfrak{g}$ -módulo via a ação $x \cdot v = \rho(x)(v)$ e, reciprocamente, dado um $\mathfrak{g}$ -módulo V e definindo $\rho(x)(v) = x \cdot v$, as propriedades (1) – (3) definem uma representação $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Assim temos uma equivalência entre a linguagem de módulos e a de representações.

1.3 Os espaços de Fock

Nos textos de físico-matemática, o espaço de Fock $\mathfrak{F}$ é o espaço das representações naturais irredutíveis de uma álgebra (de Lie) de Heisenberg $\mathfrak{H}$ de dimensão infinita. À saber, $\mathfrak{F}$ é o anel de polinômios $\mathbb{C}[\mathbf{x}_i \mid i \in \mathbb{N}^*]$ e $\mathfrak{H}$ é a álgebra de Lie gerada pelas derivações $\partial/\partial x_i$ e pelo operador multiplicação por x_i .

A cerca de 40 anos, percebeu-se que o espaço de Fock pode nos dar interessantes realizações de peso máximo de representações de uma álgebra de Lie de Kac-Moody afim $\widehat{\mathfrak{g}}$. Assim, $\widehat{\mathfrak{g}}$ possui uma subálgebra natural de Heisenberg $\mathfrak{p}$ chamada subálgebra principal e um $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo de peso máximo simples chamado representação básica de $\widehat{\mathfrak{g}}$, que mantém-se irredutível quando restrito a $\mathfrak{p}$. Além disso, temos uma extensão principal $\mathfrak{p}$ da representação de espaço de Fock $\mathfrak{F}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Isto foi feito inicialmente por Lepowski e Wilson (ver [LW78]) para $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$. Os geradores de Chevalley de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ agem em $\mathfrak{F}$ via operadores diferenciais de grau infinito fortemente ligados aos operadores de Vertex inventados pelos físicos na teoria dos modelos ressonantes duais. Mais tarde, tais construções foram generalizadas para todas as álgebras de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ de tipo A , D e E . (ver [KKLW81]).

De forma independente e com objetivos diferentes, resultados similares (na teoria de equações sóliton) foram obtidos por Date, Jimbo, Kashiwara e Miwa em [DJKM82] para álgebras de Lie afins clássicas. Neste trabalho, eles muniram $\mathfrak{F}$ com uma ação de álgebra de Lie afim de posto infinito e então a restringiram a várias subálgebras $\widehat{\mathfrak{g}}$ para obter suas representações básicas.

Neste trabalho não abordaremos de forma mais profunda a teoria relativa aos espaços de Fock devido a sua utilização restrita nesta tese.

1.4 Os módulos do tipo Verma e os $\mathbb{J}$ -módulos do tipo Verma

Seguindo as notações de [CF04] e [CF05], um subconjunto fechado $P \subset \Delta$ é chamado de partição se $P \cap (-P) = \emptyset$ e $P \cup (-P) = \Delta$. Para toda partição P de Δ , definimos a subálgebra de Borel $\mathfrak{b}_P \subset \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ gerada por H e pelos espaços de raízes a_α , com $\alpha \in P$.

Uma subálgebra parabólica é uma subálgebra que contém uma subálgebra de Borel. Se $\mathcal{P}$ é uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ então $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_+$, onde $\mathcal{P}_0$ é um fator de Levi redutível e $\mathcal{P}_+$ é uma subálgebra nilpotente. Subálgebras parabólicas correspondem a uma escolha de base Π de um sistema de raízes Δ e um subconjunto $S \subset \Pi$ (ver [Fut97] e [DFG09] para maiores detalhes).

Seja $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_+$ uma subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ contendo uma fixada subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$. Seja

$$B_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_+ \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\mathcal{P}_0 \otimes t\mathbb{C}[t]) \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}c. \quad (1.4.1)$$

Então $\{B_{\mathcal{P}}\}$ parametriza classes de conjugação de subálgebras de Borel de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$.

Definição 1.4.2. *Seja $\lambda : B_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}$ uma representação unidimensional de $B_{\mathcal{P}}$. Então*

$$\boxed{M_{\mathcal{P}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(B_{\mathcal{P}})} \mathbb{C}v_\lambda} \quad (1.4.3)$$

é um $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo induzido do tipo Verma definido por λ .

Observação 1.4.4. *Se $\mathcal{P}$ coincide com $\mathfrak{g}$ (isto é, $\mathcal{P}_+ = 0$) a correspondente subálgebra de Borel $B_{\mathfrak{g}}$ é a subálgebra de Borel standard definida pela escolha de raízes positivas em $\widehat{\mathfrak{g}}$. Neste caso, o correspondente $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo do tipo Verma*

$$M_{\mathfrak{g}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(B_{\mathfrak{g}})} \mathbb{C}v_\lambda \quad (1.4.5)$$

é o módulo de Verma clássico de peso máximo λ (ver [Kac90]).

Observação 1.4.6. *Se $\mathcal{P}_0 = \mathfrak{H}$, temos a subálgebra de Borel natural B_{nat} de $\widehat{\mathfrak{g}}$ estudada em [JK89] e*

$$M_{nat}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(B_{nat})} \mathbb{C}v_\lambda \quad (1.4.7)$$

é o módulo de Verma imaginário estudado em [Fut94].

Para $\Delta^+(r) = \Delta^+ \cap \Delta(\mathfrak{g}_r)$, sejam

$$\eta^\pm = \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \quad \eta_r^\pm = \eta^\pm \cap \mathfrak{g}_r \text{ e } \eta^\pm(r) = \oplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^+(r)} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Defina também

$$\bar{B}_r = (\eta^+(r) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\eta_r^+ \otimes \mathbb{C}[t]) \oplus (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]t) \oplus (\eta_r^- \otimes \mathbb{C}[t]t). \quad (1.4.8)$$

Segue que $B_r = \bar{B}_r \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ é uma subálgebra de Borel de $\widehat{\mathfrak{g}}$ (para todo $0 \leq r \leq n$). Sendo assim, dado $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$, definimos

$$M_r(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(B_r)} \mathbb{C}v_\lambda \quad (1.4.9)$$

como o módulo do tipo Verma de B_r . Por outro lado, seja

$$\rho_r = \mathfrak{a}_r + B_r + G$$

uma subálgebra parabólica de $\widehat{\mathfrak{g}}$ onde

$$\mathfrak{a}_r = \mathfrak{g}_r \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

e

$$G = \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \oplus \mathbb{C}c.$$

Temos que

$$\rho_r = \widehat{\mathfrak{a}}_r \oplus \mathfrak{N}_r,$$

onde $\widehat{\mathfrak{a}}_r = \mathfrak{a}_r + \widehat{\mathfrak{h}}$ e $\mathfrak{N}_r = (\eta^+(r) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus (\mathfrak{h}(r) \otimes \mathbb{C}[t]t)$ (aqui $\mathfrak{h}(r) = \mathfrak{h}_r^\perp$). Note que $[\mathfrak{h}(r), \widehat{\mathfrak{a}}_r] = 0$ e $\widehat{\mathfrak{a}}_r$ é um fator de Levi. Seja

$$\widehat{M}_r(\widehat{\lambda}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\rho_r)} M(\lambda_r), \quad (1.4.10)$$

onde $\lambda_r = \lambda|_{\widehat{\mathfrak{h}}_r}$, $M(\lambda_r)$ é um módulo sobre $\widehat{\mathfrak{a}}_r$ e $\mathfrak{N}_r M(\lambda_r) = 0$ (já que $[\mathfrak{h}(r), \widehat{\mathfrak{a}}_r] = 0$). Usando a propriedade universal do produto tensorial, segue imediatamente que

$$M_r(\lambda) \simeq \widehat{M}_r(\lambda). \quad (1.4.11)$$

Agora podemos definir o conceito de $\mathbb{J}$ -módulo do tipo Verma para $\mathbb{J} \subseteq N^*$ fixado.

Definição 1.4.12. Considere $\rho_{r,\mathbb{J}} = \widehat{\mathfrak{a}}_r \oplus \mathfrak{N}_{r,\mathbb{J}}$ e $\mathfrak{N}_{r,\mathbb{J}} = (\eta^+(r) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathcal{K}_{\mathbb{J}}$, onde $\mathcal{K}_{\mathbb{J}} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{h \otimes t^m \mid \psi_{\mathbb{J}}(m) = 1, h \in \mathfrak{h}(r)\}$. Temos que

$$\boxed{\widehat{M}_{r,\mathbb{J}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\rho_{r,\mathbb{J}})} M(\lambda_r)} \quad (1.4.13)$$

é o $\mathbb{J}$ -módulo do tipo Verma de $\rho_{r,\mathbb{J}}$.

1.4.1 Primeira realização de campo livre

Para obter uma realização de campo livre do módulo de Verma para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, Bernard e Felder utilizaram a construção de Borel-Weyl (ver [BF90]). Seja $\widehat{B}_-$ um subgrupo de Borel do grupo de Loop $\widehat{SL}(2)$ correspondente a uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}_{nat}$. Então $\widehat{B}_-$ consiste de elementos

$$\exp \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e_n \right) \exp \left(\sum_{m > 0} y_m h_m \right),$$

onde x_n, y_m são funções coordenadas. Considere uma representação unidimensional $\chi : \widehat{B}_- \rightarrow \mathbb{C}$, onde c age como escalar K , h age como escalar J (onde $J/2$ é chamado de *spin*) e todos os elementos agem trivialmente. Então podemos construir um fibrado de linha sobre $\widehat{SL}(2)/\widehat{B}_-$, tomando o produto fibrado

$$\mathcal{L}_\chi = \widehat{SL}(2) \times_{\widehat{B}_-} \mathbb{C}$$

e uma aplicação $g : \widehat{SL}(2) \times_{\widehat{B}_-} \mathbb{C} \rightarrow \widehat{SL}(2)/\widehat{B}_-$ tal que $(x, z) \mapsto x\widehat{B}_-$. Diferenciando a ação do grupo $\widehat{SL}(2, \mathbb{C})$ que age nas seções do fibrado de linha, obtemos uma ação na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e, assim, aplicando as duas anti-involuções

$$e_n \leftrightarrow -f_{-n}, \quad h_n \leftrightarrow h_{-n}, \quad c \leftrightarrow c$$

e

$$x_{-n} \leftrightarrow \partial x_n, \quad y_k \leftrightarrow -\partial y_k,$$

obtemos a seguinte realização de campo livre de $\mathfrak{g}$ no espaço de Fock $\mathbb{C}[x_m, m \in \mathbb{Z}] \otimes \mathbb{C}[y_n, n > 0]$:

$$f_n \mapsto x_n,$$

$$h_n \mapsto -2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_{m+n} \partial x_m + \delta_{n < 0} y_{-n} + \delta_{n > 0} 2nK \partial y_n + \delta_{n,0} J,$$

$$e_n \mapsto - \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} x_{k+m+n} \partial x_k \partial x_m + \sum_{k > 0} y_k \partial x_{-k-n} + 2K \sum_{m > 0} m \partial y_m \partial x_{m-n} + (Kn + J) \partial x_{-n}.$$

Este módulo é irredutível se, e somente se, $K \neq 0$. Se tomarmos $K = 0$ e o quociente fora do submódulo gerado por $y_m, m > 0$, obtemos a usualmente chamada *primeira realização de campo livre* de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$. Este quociente é irredutível se, e somente se, $J \neq 0$ (ver [Fut94]). Estes resultados já foram generalizados em [Cox05] para todas as álgebras de Lie afim.

1.4.2 Módulos de Wakimoto

Aqui apresentamos a construção, para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, dos módulos de Wakimoto (ver [Wak86]) também conhecida como *segunda realização de campos livres*. Sejam

$$a^*(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^* z^{-m}, \quad a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^{-m-1} \text{ e } b(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m z^{-m-1},$$

$$\text{onde } a_n = \begin{cases} x_n, & \text{se } n < 0 \\ \partial x_n, & \text{se } n \geq 0 \end{cases}, \quad a_n^* = \begin{cases} x_{-n}, & \text{se } n \leq 0 \\ -\partial x_{-n}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$b_m = \begin{cases} m \partial y_m, & \text{se } m \geq 0 \\ y_{-m}, & \text{se } m < 0 \end{cases}. \text{ Temos que } [a_n, a_m^*] = \delta_{n+m,0} \text{ e } [b_n, b_m] = n \delta_{n+m,0}.$$

Teorema 1.4.14. ([Wak86]). *As fórmulas*

$$c \mapsto K, \quad e(z) \mapsto a(z), \quad h(z) \mapsto -2 : a^*(z) a(z) : + b(z),$$

$$f(z) \mapsto - : a^*(z)^2 a(z) : + K \partial_z a^*(z) + a^*(z) b(z)$$

definem a segunda realização de campos livres da álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ agindo em

$$\mathbb{C}[x_n, n \in \mathbb{Z}] \otimes \mathbb{C}[y_m, m > 0].$$

Tais módulos são conhecidos como *módulos de Wakimoto*. Eles foram definidos para uma álgebra de Lie afim arbitrária por Feigin e Frenkel em [FF90] e [FF090].

Observação 1.4.15. *Genericamente, os módulos de Wakimoto são isomorfos aos módulos de Verma. No caso dos módulos de Verma imaginários com os módulos de Wakimoto imaginários, este isomorfismo ocorre quando a carga central é não-nula.*

1.4.3 Módulos intermediários de Wakimoto

Consideramos dois casos extremos de subálgebras de Borel para álgebras de Lie afins: standard e natural. Mas se o grau de $\mathfrak{g}$ é maior que 1 então a correspondente álgebra de Lie afim possui outras classes de conjugação de subálgebras de Borel. É possível associar a cada subálgebra de Borel uma realização tipo bóson rearranjando os operadores de aniquilação e de criação, como foi feito na primeira e na segunda realização de campos livres. Para álgebras de Lie afins do tipo $A_n^{(1)}$ associadas à $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ isto foi feito em [CF04], onde uma série de realizações tipo bóson foi construída dependendo de um parâmetro $0 \leq r \leq n$. Se $r = n$, estas construções coincidem com a construção de módulo de Wakimoto. Por outro lado, se $r = 0$, a representação obtida nos dá uma realização no espaço de Fock descrita em [Cox05].

Seja $\mathfrak{b}_r$ a subálgebra de Borel de $\tilde{\mathfrak{g}}$ correspondente à subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ cuja parte semisimples do fator de Levi é $\mathfrak{g}_r$. Fixe $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$ e seja $M_r(\tilde{\lambda})$ um módulo tipo Verma associado à $\mathfrak{b}_r$ e $\tilde{\lambda}$. Quando $r = n$, este módulo é um módulo de Verma standard enquanto que no caso $r = 0$ temos um módulo de Verma imaginário. Denote por $v_{\tilde{\lambda}}$ o gerador de $M_r(\tilde{\lambda})$.

Seja $\tilde{\lambda}_r = \tilde{\lambda}|_{\tilde{\mathfrak{h}}_r}$. O módulo $M_r(\tilde{\lambda})$ contém um $\tilde{\mathfrak{g}}_r$ -submódulo $M(\tilde{\lambda}_r) = U(\tilde{\mathfrak{g}}_r)(v_{\tilde{\lambda}_r})$ que é isomorfo ao módulo de Verma standard para $\tilde{\mathfrak{g}}_r$. Se $\tilde{\lambda}(c) \neq 0$ então a estrutura de submódulo $M_r(\tilde{\lambda})$ é completamente determinada pela estrutura de submódulo de $M(\tilde{\lambda}_r)$ (ver [Cox94] e [FS93]). No capítulo 3, define-se

$$E_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{in} z^{-n-1}, \quad F_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{in} z^{-n-1}, \quad H_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_{in} z^{-n-1},$$

e, para $a_{ij}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{i,j,m} z^{-m-1}$, $a_{ij}^*(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{i,j,m}^* z^{-m}$ e $b_i(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{i,m} z^{-m-1}$, com $1 \leq i \leq n$, prova-se o seguinte teorema.

Teorema 1.4.16. ([CF04]). *Seja $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ e $\lambda_i = \lambda(H_i)$. As funções geradoras*

$$F_i(z) \mapsto a_{ii} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} a_{i+1,j}^*,$$

$$\begin{aligned} H_i(z) \mapsto & 2 : a_{ii} a_{ii}^* : + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji} a_{ji}^* : - : a_{j,i-1} a_{j,i-1}^* : \right) \\ & + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij} a_{ij}^* : - : a_{i+1,j} a_{i+1,j}^* : \right) + b_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_i(z) \mapsto & a_{ii}^* \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* - \sum_{k=1}^i a_{ki} a_{ki}^* \right) + \sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k} a_{ik}^* \\ & - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1} a_{ki}^* - a_{ii}^* b_i - \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \partial a_{ii}^*, \end{aligned}$$

$$c \mapsto \gamma^2 - (r+1)$$

definem uma representação no espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}]$. Acima, a_{ij} , a_{ij}^* e b_i denotam $a_{ij}(z)$, $a_{ij}^*(z)$ e $b_i(z)$, respectivamente.

Esta realização tipo bóson de $\widetilde{sl}(n+1)$ depende do parâmetro $0 \leq r \leq n$ e define uma estrutura de módulo no espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ que é chamada *módulo intermediário de Wakimoto*. Denote-o por $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$ e considere um $\widetilde{\mathfrak{g}}_r$ -submódulo $W = U(\widetilde{\mathfrak{g}}_r)(v_{\widetilde{\lambda}}) \simeq W_{r,r}(\lambda, \gamma)$ de $W_{n,r}(\lambda, \gamma)$. Então W é isomorfo ao módulo de Wakimoto $W_{\lambda(r), \widetilde{\gamma}}$ ([FF09]), onde $\lambda(r) = \lambda|_{\mathfrak{h}_r}$ e $\widetilde{\gamma} = \gamma^2 - (r+1)$. Já que módulos de Wakimoto são genericamente isomorfos aos módulos de Verma, os módulos intermediários de Wakimoto provam genericamente uma realização para módulos tipo Verma.

Capítulo 2

Os módulos de Verma $\mathbb{J}$ -imaginários

O objetivo principal deste capítulo é apresentar ao leitor os resultados obtidos pelo autor em [Mar11]. Fixado um subconjunto $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$, construímos num certo espaço $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, (e posteriormente em $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$) operadores b_{im} , com $m \in \mathbb{Z}$, e $1 \neq i \neq n$. Para nos auxiliar, definimos uma função $\psi_{\mathbb{J}} : \mathbb{Z}^* \rightarrow \{0, 1\}$ e iniciamos nossa discussão sobre $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ dividindo nossa análise para os casos $n = 2$ e $n > 2$. No caso $n = 2$, apresentamos uma candidata $\varphi_{\mathbb{J}} : \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ a qual satisfaz quase todas as relações necessárias e, então, a utilizamos para definir uma $\rho_{\mathbb{J}}$ com as propriedades desejadas. Já no caso $n > 2$, apresentamos diretamente a candidata $\rho_{\mathbb{J}} : \widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ e, através da linguagem de distribuições formais, após enunciar e demonstrar alguns Lemas auxiliares, provamos as 6 relações necessárias obtendo, desta forma, uma realização para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$. Isto é o que nos permite definir o conceito de módulo de Verma $\mathbb{J}$ -imaginário.

Seguindo este esquema, começamos os estudos referentes ao artigo [Mar11].

2.1 Introdução

Seja $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ a álgebra de Lie complexa das $(n+1) \times (n+1)$ -matrizes de traço nulo com forma de Killing $(X|Y) = \text{tr}(XY)$. Denotemos por e_{ij} a matriz com 1 na (i, j) -ésima entrada e zero nas demais, com $i, j = 1, \dots, n$ e definimos $E_i = e_{i, i+1}$, $F_i = e_{i+1, i}$ e $H_i = e_{ii} - e_{i+1, i+1}$, onde $i = 1, \dots, n-1$. Então E_i , F_i , e H_i 's formam um conjunto gerador de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

A álgebra de Lie afim $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ é a extensão central da álgebra de Loop $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ com centro unidimensional $\mathbb{C}c$. Para todo $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ e $m \in \mathbb{Z}$, seja $X_m = t^m \otimes X$. Então $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ é gerado por E_{im} , F_{im} e H_{im} , com $m \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq i \leq n$, e pelo elemento central c .

Definição 2.1.1. Fixemos um símbolo A e uma sequência $\{A(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Então

$$A^+(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} A(m) z^{-m}, \quad (2.1.2)$$

$$A^-(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\leq 0}} A(m) z^{-m}, \quad (2.1.3)$$

$$A(z) = A^+(z) + A^-(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m) z^{-m}, \quad (2.1.4)$$

$$\dot{A}(z) = \dot{A}^+(z) + \dot{A}^-(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} mA(m)z^{-m} \quad (2.1.5)$$

onde temos, por exemplo, que $\dot{H}_i^+(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} mH_{im}z^{-m}$.

Teorema 2.1.6. *São verdadeiras as seguintes relações em $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$.*

$$(R_1) \quad [H_i(z), H_j(w)] = -(H_i|H_j)c\dot{\delta}(z/w),$$

$$(R_2) \quad [H_i(z), E_j(w)] = C_{ij} \sum_n E_j(z)z^n w^{-n} = C_{ij}E_j(z)\delta(z/w),$$

$$(R_3) \quad [H_i(z), F_j(w)] = -C_{ij} \sum_n F_j(z)z^n w^{-n} = -C_{ij}F_j(z)\delta(z/w),$$

$$(R_4) \quad [E_i(z), F_j(w)] = \delta_{ij}(H_i(z)\delta(z/w) - c\dot{\delta}(z/w)),$$

$$(R_5) \quad [E_i(z), E_j(w)] = [F_i(z), F_j(w)] = 0 \text{ se } C_{ij} \neq -1,$$

$$(R_6) \quad [F_i(z_1), F_i(z_2), F_j(w)] = [E_i(z_1), E_i(z_2), E_j(w)] = 0 \text{ se } C_{ij} = -1,$$

onde $C = (C_{ij})$ denota a matriz de Cartan do tipo A_n e $[X, Y, Z] = [X, [Y, Z]]$.

Elementos H_i , $i = 1, \dots, n-1$, e c geram uma subálgebra de Cartan de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ enquanto que H_{im} , $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$, e c geram uma subálgebra de Heisenberg de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$. O elemento central c age como escalar no módulo irredutível V . Este escalar é chamado de *carga central* de V . Agora fixe $\gamma \in \mathbb{C}^*$ e para todo $1 \leq i \leq n$, fixe $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Seja $2c = \gamma^2$. Então defina

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{ij,m} \mid i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i, j \leq n] \quad (2.1.7)$$

$$\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{im} \mid i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n] \quad (2.1.8)$$

como sendo as álgebras geradas sobre $\mathbb{C}$ por $x_{ij,m}$ e y_{im} , respectivamente. Em $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$, defina os operadores

$$a_{ij,m} = -x_{ij,m}, \quad (2.1.9)$$

$$a_{ij,m}^* = \frac{\partial}{\partial x_{ij,-m}}. \quad (2.1.10)$$

onde $[a_{ij,m}, a_{kl,p}^*] = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{m,-p}$. Fixe um $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$ arbitrário. Em $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, defina operadores b_{im} , com $m \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq i \leq n$, da seguinte forma:

$$b_{im} = \begin{cases} -\gamma^{-1}\lambda_i & \text{se } m = 0, \\ -\gamma m \frac{\partial}{\partial y_{im}} & \text{se } m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}, \\ -\gamma^{-1}y_{im} & \text{se } m \in \mathbb{J}, \\ \gamma m \frac{\partial}{\partial y_{i,-m}} & \text{se } -m \in \mathbb{J}, \\ -\gamma^{-1}y_{i,-m} & \text{se } -m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}. \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Temos que $[b_{im}, b_{jp}] = m\delta_{ij}\delta_{m,-p}$.

Definição 2.1.12. Fixe $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$ e seja $\psi_{\mathbb{J}} : \mathbb{Z}^* \rightarrow \{0, 1\}$ a função dada por

$$\psi_{\mathbb{J}}(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \in \mathbb{J} \text{ ou } -m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}, \\ 0 & \text{se } m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J} \text{ ou } -m \in \mathbb{J}. \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Seja $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ e considere

$$S_{\psi_{\mathbb{J}}} = \{\alpha + mn\delta \mid \alpha \in \dot{\Delta}_+, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{N}, \varphi_{\mathbb{J}}(m) = 1\} \cup \{-m\delta \mid m \in \mathbb{N}, \varphi_{\mathbb{J}}(m) = 0\}.$$

Então os espaços

$$\mathfrak{g}_{S_{\psi_{\mathbb{J}}}} = \bigoplus_{\alpha \in S_{\psi_{\mathbb{J}}}} \mathfrak{g}_{\alpha} \text{ e } \mathfrak{g}_{-S_{\psi_{\mathbb{J}}}} = \bigoplus_{\alpha \in -S_{\psi_{\mathbb{J}}}} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (2.1.14)$$

são subálgebras de $\mathfrak{g}$ tais que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-S_{\psi_{\mathbb{J}}}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{S_{\psi_{\mathbb{J}}}}. \quad (2.1.15)$$

Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e suponha que $\lambda(c) = a$, $a \in \mathbb{C}$. Seja $\mathfrak{b}_{\psi_{\mathbb{J}}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{S_{\psi_{\mathbb{J}}}}$ a subálgebra de Borel correspondente à $S_{\psi_{\mathbb{J}}}$, e observe que $\mathfrak{b}_{\psi_{\mathbb{J}}} \supset \mathbb{C}c \oplus \mathbb{L}_{\psi_{\mathbb{J}}}^+$. Seja $\mathbb{C}v_{\lambda}$ um módulo unidimensional de $\mathfrak{b}_{\psi_{\mathbb{J}}}$ tal que para todo $h \in \mathfrak{h}$, temos $\mathfrak{g}_{S_{\psi_{\mathbb{J}}}}v_{\lambda} = 0$ e $hv_{\lambda} = \lambda(h)v_{\lambda}$.

Definição 2.1.16. *Defina o $\mathfrak{g}$ -módulo*

$$\boxed{\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda) = \mathbb{M}_{\mathfrak{b}_{\psi_{\mathbb{J}}}}(\lambda) = \mathbb{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{b}_{\psi_{\mathbb{J}}})} \mathbb{C}v_{\lambda}} \quad (2.1.17)$$

como sendo o módulo de Verma $\mathbb{J}$ -imaginário. Identificando $1 \otimes v_{\lambda}$ com v_{λ} , o $\mathbb{U}(\mathbb{L})$ -submódulo de $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ gerado por v_{λ} é isomorfo à $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(a)$. Se $\psi_{\mathbb{J}}(n) = 1$ para todo n , então $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ coincide com o módulo de Verma imaginário $\mathbb{M}_S(\lambda)$, onde $S = \Delta_+$.

Temos as seguintes propriedades básicas de $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$.

Proposição 2.1.18. *[BBFK11, Proposição 3.4] Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(c) = a$. Se $a \neq 0$, as seguintes afirmações são verdadeiras para $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$.*

- $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é um $\mathbb{U}(\mathfrak{g}_{-S_{\psi_{\mathbb{J}}}})$ -módulo livre de posto 1.
- $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ tem um único submódulo maximal e assim um único quociente irredutível.
- $\text{supp} \left(\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda) \right) = \bigcup_{\beta \in \dot{\mathcal{Q}}_+} \{\lambda - \beta + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}\}$ onde $\dot{\mathcal{Q}}_+$ é um monóide abeliano livre gerado por todas as raízes simples em $\dot{\Delta}_+$.
- Se $\psi_{\mathbb{J}}(k) \neq \psi_{\mathbb{J}}(\ell)$ para algum $k, \ell \in \mathbb{N}$, então $\dim \mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)_{\mu} = \infty$ para todo $\mu \in \text{supp} \left(\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda) \right)$.

Temos o seguinte critério de irredutibilidade para os módulos $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$.

Teorema 2.1.19. *[BBFK11, Teorema 3.5] Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\lambda(c) = a$. Então $\mathbb{M}_{\psi_{\mathbb{J}}}(\lambda)$ é irredutível se, e somente se, $a \neq 0$.*

Agora defina

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{y}]. \quad (2.1.20)$$

2.2 Realização de campos livres de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$

2.2.1 O caso $n = 2$

Aqui denotaremos E_m ao invés de E_{1m} , a_m ao invés de $a_{11,m}$, etc.

Definição 2.2.1. *Seja $\varphi_{\mathbb{J}} : \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ a função dada por*

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbb{J}}(E_m) &= -\frac{\partial}{\partial x_m}, \\ \varphi_{\mathbb{J}}(F_m) &= \sum_{l,j} x_l x_{j-l-m} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j \in \mathbb{J}} x_{j-m} \frac{\partial}{\partial y_j} + 2K \sum_{i \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j-m} + K m x_{-m} - 2J x_{-m}, \\ \varphi_{\mathbb{J}}(H_m) &= -2 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(m) \frac{\partial}{\partial y_m} + \psi_{\mathbb{J}}(-m) 2m K y_{-m} + 2\delta_{m,0} J.\end{aligned}$$

Como estamos analisando o caso $n = 2$, é suficiente verificarmos as relações $(R_1) - (R_4)$, as quais seguem diretamente do Lema abaixo.

Lema 2.2.2. *Temos as relações*

- (a) $[\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(E_n)] = 2\varphi_{\mathbb{J}}(E_{m+n}),$
- (b) $[\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(H_n)] = 2\delta_{m,-n} m K,$
- (c) $[\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(F_n)] = -2\varphi_{\mathbb{J}}(F_{m+n}),$
- (d) $[\varphi_{\mathbb{J}}(E_m), \varphi_{\mathbb{J}}(F_n)] = \varphi_{\mathbb{J}}(H_{m+n}) + m\delta_{m,-n} K.$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}(a) \quad [\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(E_n)] &= \left[-2 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(m) \frac{\partial}{\partial y_m} \right. \\ &\quad \left. + \psi_{\mathbb{J}}(-m) 2m K y_{-m} + 2\delta_{m,0} J, -\frac{\partial}{\partial x_n} \right] \\ &= \left[-2 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_j}, -\frac{\partial}{\partial x_n} \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x_{m+n}} \\ &= 2\varphi_{\mathbb{J}}(E_{m+n}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad [\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(H_n)] &= \left[-2 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(m) \frac{\partial}{\partial y_m} + \psi_{\mathbb{J}}(-m) 2mK y_{-m} + 2\delta_{m,0}J, \right. \\
&\quad \left. -2 \sum_j x_{j-n} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(n) \frac{\partial}{\partial y_n} + \psi_{\mathbb{J}}(-n) 2nK y_{-n} + 2\delta_{n,0}J \right] \\
&= 4 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} - 4 \sum_j x_{j-n} \frac{\partial}{\partial x_{j+m}} \\
&\quad - \delta_{m,-n} \psi_{\mathbb{J}}(m) \psi_{\mathbb{J}}(-n) 2nK \\
&\quad + 2\delta_{m,-n} \psi_{\mathbb{J}}(n) \psi_{\mathbb{J}}(-m) Km + 0 \\
&= 2\delta_{m,-n} mK (\psi_{\mathbb{J}}(m) + \psi_{\mathbb{J}}(-m)) \\
&= 2\delta_{m,-n} mK. \\
(c) \quad [\varphi_{\mathbb{J}}(H_m), \varphi_{\mathbb{J}}(F_n)] &= \left[-2 \sum_j x_{j-m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(m) \frac{\partial}{\partial y_m} + \psi_{\mathbb{J}}(-m) 2mK y_{-m} \right. \\
&\quad + 2\delta_{m,0}J, \sum_{l,i} x_l x_{i-l-n} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i \in \mathbb{J}} x_{i-n} \frac{\partial}{\partial y_i} \\
&\quad \left. + 2K \sum_{i \in \mathbb{J}} i y_i x_{-i-n} + K n x_{-n} - 2J x_{-n} \right] \\
&= -2 \left(\sum_j x_{j-m} \left(\sum_i x_{i-j-n} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_l x_l \frac{\partial}{\partial x_{j+l+n}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i,l} x_l x_{i-l-n} \frac{\partial}{\partial x_{i+m}} \right) - 2 \sum_j x_{j-m} \psi_{\mathbb{J}}(j+n) \frac{\partial}{\partial y_{j+n}} \\
&\quad - 4K \sum_j x_{j-m} \psi_{\mathbb{J}}(-j-n) (-j-n) y_{-j-n} - 2K n x_{-m-n} \\
&\quad + 4J x_{-m-n} - 2\psi_{\mathbb{J}}(m) K \psi_{\mathbb{J}}(m) m x_{-m-n} \\
&\quad - \psi_{\mathbb{J}}(-m) 2K m \psi_{\mathbb{J}}(-m) x_{-m-n} \\
&= -4 \sum_{j,i} x_j x_{i-j-m-n} \frac{\partial}{\partial x_i} + 2 \sum_{l,i} x_l x_{i-l-m-n} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&\quad - 2 \sum_j \psi_{\mathbb{J}}(j) x_{j-m-n} \frac{\partial}{\partial y_j} - 4K \sum_j \psi_{\mathbb{J}}(-j) (-j) y_{-j} x_{j-m-n} \\
&\quad - 2K n x_{-m-n} + 4J x_{-m-n} - 2K m x_{-m-n} \\
&= -2 \sum_{j,i} x_j x_{i-j-m-n} \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \sum_{j \in \mathbb{J}} x_{j-m-n} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&\quad - 4K \sum_{j \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j-m-n} - 2K(m+n) x_{-m-n} + 4J x_{-m-n} \\
&= -2\varphi_{\mathbb{J}}(F_{m+n}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad [\varphi_{\mathbb{J}}(E_m), \varphi_{\mathbb{J}}(F_n)] &= \left[-\frac{\partial}{\partial x_m}, \sum_{l,j} x_l x_{j-l-n} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j \in \mathbb{J}} x_{j-n} \frac{\partial}{\partial y_j} \right. \\
&\quad \left. + 2K \sum_{j \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j-n} + K n x_{-n} - 2J x_{-n} \right] \\
&= -\left(\sum_j x_{j-m-n} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_l x_l \frac{\partial}{\partial x_{l+m+n}} + \psi_{\mathbb{J}}(m+n) \frac{\partial}{\partial y_{m+n}} \right. \\
&\quad \left. - 2K \psi_{\mathbb{J}}(-m-n)(m+n) Y_{-m-n} - \delta_{m,-n}(Km + 2J) \right) \\
&= -2 \sum_j X_{j-m-n} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(m+n) \frac{\partial}{\partial y_{m+n}} \\
&\quad + 2\psi_{\mathbb{J}}(-m-n)(m+n) K y_{-m-n} + 2\delta_{m,-n} J + Km \delta_{m,-n} \\
&= \varphi_{\mathbb{J}}(H_{m+n}) + m \delta_{m,-n} K.
\end{aligned}$$

□

Observe que, infelizmente,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbb{J}}(F_m) \cdot 1 &= \left(\sum_{l,j} x_l x_{j-l-m} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j \in \mathbb{J}} x_{j-m} \frac{\partial}{\partial y_j} \right. \\
&\quad \left. + 2K \sum_{i \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j-m} + K m x_{-m} - 2J x_{-m} \right) \cdot 1 \\
&= +2K \sum_{i \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j-m} + K m x_{-m} - 2J x_{-m},
\end{aligned}$$

que é uma soma infinita se o conjunto $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$ for infinito, logo $\varphi_{\mathbb{J}}$ não é a função desejada pois $\varphi_{\mathbb{J}}(F_m)$ sequer está bem-definida. Para solucionar este problema, seja $\rho_1 : \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ a função dada por

$$\rho_1(E_m) = -F_{-m}, \quad \rho_1(F_m) = -E_{-m}, \quad \rho_1(H_m) = H_{-m} \text{ e } \rho_1(K) = K \quad (2.2.3)$$

e seja $\rho_2 : \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ a função dada por

$$\rho_2(x_{-m}) = \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \rho_2\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right) = x_{-m}, \quad \rho_2(y_k) = -\frac{\partial}{\partial y_k} \text{ e } \rho_2\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -y_k. \quad (2.2.4)$$

Observe que ρ_1 e ρ_2 são antiautomorfismos de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$, respectivamente.

Definição 2.2.5. *Seja $\rho_{\mathbb{J}} = \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}} \circ \rho_1$. Temos*

$$(a) \quad \rho_{\mathbb{J}}(F_m) = \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}} \circ \rho_1(F_m) = \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}}(-E_{-m}) = \rho_2\left(\frac{\partial}{\partial x_{-m}}\right) = x_m.$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad \rho_{\mathbb{J}}(E_m) &= \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}} \circ \rho_1(E_m) \\
&= \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}}(-F_{-m}) \\
&= \rho_2 \left(- \sum_{l,j} x_l x_{j-l+m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j \in \mathbb{J}} x_{j+m} \frac{\partial}{\partial y_j} \right. \\
&\quad \left. - 2K \sum_{j \in \mathbb{J}} j y_j x_{-j+m} - K(-m)x_m + 2Jx_m \right) \\
&= - \sum_{l,j} x_{-j} \frac{\partial}{\partial x_{-l}} \frac{\partial}{\partial x_{-j+l-m}} - \sum_{j \in \mathbb{J}} (-y_j) \frac{\partial}{\partial x_{-j-m}} \\
&\quad - 2K \sum_{j \in \mathbb{J}} j \left(- \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_{j-m}} \frac{\partial}{\partial x_{-m}} + 2J \frac{\partial}{\partial x_{-m}} \\
&= - \sum_{l,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_{j-l-m}} + \sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \frac{\partial}{\partial x_{-j-m}} \\
&\quad + 2K \sum_{j \in \mathbb{J}} j \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_{j-m}} + (Km + 2J) \frac{\partial}{\partial x_{-m}} \\
&= - \sum_{l,j} x_{j+l+m} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j \in \mathbb{J}} y_j \frac{\partial}{\partial x_{-j-m}} \\
&\quad + 2K \sum_{j \in \mathbb{J}} j \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_{j-m}} + (Km + 2J) \frac{\partial}{\partial x_{-m}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \rho_{\mathbb{J}}(H_m) &= \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}} \circ \rho_1(H_m) \\
&= \rho_2 \circ \varphi_{\mathbb{J}}(H_{-m}) \\
&= \rho_2 \left(- 2 \sum_j x_{j+m} \frac{\partial}{\partial x_j} - \psi_{\mathbb{J}}(-m) \frac{\partial}{\partial y_{-m}} + \psi_{\mathbb{J}}(m) 2(-m) K y_m + 2\delta_{m,0} J \right) \\
&= - 2 \sum_j x_{-j} \frac{\partial}{\partial x_{-j-m}} + \psi_{\mathbb{J}}(-m) y_{-m} + \psi_{\mathbb{J}}(m) 2m K \frac{\partial}{\partial y_m} + 2\delta_{m,0} J \\
&= - 2 \sum_j x_{j+m} \frac{\partial}{\partial x_j} + \psi_{\mathbb{J}}(-m) y_{-m} + \psi_{\mathbb{J}}(m) 2m K \frac{\partial}{\partial y_m} + 2\delta_{m,0} J.
\end{aligned}$$

A função $\rho_{\mathbb{J}}$ satisfaz as relações de (R_1) à (R_4) , já que $\varphi_{\mathbb{J}}$ as satisfazem e ρ_1 e ρ_2 são antiautomorfismos. Desta forma, temos uma representação para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ com as propriedades desejadas.

2.2.2 O caso $n > 2$

Definição 2.2.6. *Seja $\rho_{\mathbb{J}}$ a função dada por*

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{J}}(E_{rm}) &= \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} a_{r, r+1, m-l_1-l_2} a_{r, r+1, l_1}^* a_{r, r+1, l_2}^* + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(- \sum_{j=r+2}^n a_{r+1, j, m-l} a_{r+1, j, l}^* \right) \\
&\quad + \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} a_{r, j, m-l_1-l_2} a_{r, j, l_1}^* a_{r, j, l_2}^* - \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} a_{r+1, j, m-l_1-l_2} a_{r+1, j, l_1}^* a_{r, r+1, l_2}^* \\
&\quad - \gamma \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(a_{r, r+1, l}^* b_{r, m-l} + \frac{1}{2} \delta_{m < 0} (a_{r, r+1, l}^* b_{r-1, m-l} + a_{r, r+1, l}^* b_{r+1, m-l}) \right) \\
&\quad - \frac{\gamma}{2} a_{r, r+1, m+1}^*, \\
\rho_{\mathbb{J}}(F_{rm}) &= a_{r, r+1, m} + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{j, r+1, m-l} a_{j, r, l}^*, \\
\rho_{\mathbb{J}}(H_{rm}) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(2a_{r, r+1, m-l} a_{r, r+1, l}^* + \sum_{i=1}^{r-1} a_{i, r+1, m-l} a_{i, r+1, l}^* \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{r-1} a_{i, r, m-l} a_{i, r, l}^* + \sum_{j=r+2}^n a_{r, j, m-l} a_{r, j, l}^* - \sum_{j=r+2}^n a_{r+1, j, m-l} a_{r+1, j, l}^* \right. \\
&\quad \left. - \gamma b_{rm} + \delta_{m < 0} \frac{\gamma}{2} (b_{r-1, m} + b_{r+1, m}) \right).
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.7. A função $\rho_{\mathbb{J}} : \widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ é uma realização de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$.

Observação 2.2.8. Para provar que $\rho_{\mathbb{J}}$ define uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$, a reescrevemos na linguagem de distribuições formais. Assim para provar o Teorema 2.2.7, basta mostrar que para

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(w) &= -a_{r, r+1}(w) + \sum_{j=1}^{r-1} a_{j, r+1}(w) a_{j, r}^*(w), \\
\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w) &= 2a_{r, r+1}(w) a_{r, r+1}^*(w) + \sum_{i=1}^{r-1} \left(a_{i, r+1}(w) a_{i, r+1}^*(w) - a_{ir}(w) a_{ir}^*(w) \right) \\
&\quad + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) - a_{r+1, j}(w) a_{r+1, j}^*(w) \right) \\
&\quad - \gamma b_r(w) + \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(w) + b_{r+1}^+(w)), \\
\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(w) &= a_{r, r+1}(w) a_{r, r+1}^*(w)^2 - \sum_{j=r+2}^n a_{r+1, j}(w) a_{r+1, j}^*(w) + \sum_{j=1}^{r-1} a_{jr}(w) a_{j, r+1}^*(w) \\
&\quad + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) - a_{r+1, j}(w) a_{r+1, j}^*(w) \right) a_{r, r+1}^*(w) \\
&\quad - \gamma a_{r, r+1}^*(w) b_r(w) + \frac{\gamma}{2} a_{r, r+1}^*(w) (b_{r-1}^+(w) + b_{r+1}^+(w)) - \frac{\gamma}{2} a_{r, r+1}^*(w),
\end{aligned}$$

as relações (R_1) – (R_6) são verdadeiras.

Para provar o teorema, precisamos dos Lemas à seguir.

Lema 2.2.9. Temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
(a) \quad & [a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] = \delta_{i,k} \delta_{j,l} \delta(z/w), \\
(b) \quad & [a_{ij}(z) a_{kl}^*(z), a_{mn}(w) a_{pq}^*(w)] \\
& \quad = \delta_{pi} \delta_{qj} a_{mn}(w) a_{kl}^*(z) \delta(z/w) - \delta_{km} \delta_{ln} a_{ij}(z) a_{pq}^*(w) \delta(w/z), \\
(c) \quad & [a_{ij}(z), \dot{a}_{kl}^*(w)] = \delta_{ik} \delta_{jl} \dot{\delta}(z/w), \\
(d) \quad & \dot{a}_{ij}^*(z) \delta(w/z) = a_{ij}^*(z) \dot{\delta}(w/z) - a_{ij}^*(w) \dot{\delta}(w/z), \\
(e) \quad & [b_i(z), b_j^\pm(w)] = [b_i^\mp(z), b_j^\pm(w)] = \delta_{ij} \dot{\delta}^\mp(w/z), \\
(f) \quad & [b_i(z), b_j(w)] = [b_i^+(z), b_j^-(w)] + [b_i^-(z), b_j^+(w)] = \delta_{ij} \dot{\delta}(w/z), \\
(g) \quad & [a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(w)] \\
& \quad = a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(z) a_{r,r+1}^*(w) \delta(w/z), \\
(h) \quad & [a_{r,j}(z) a_{rj}^*(z), f(w) a_{kl}^*(w)] = f(w) \delta_{r,k} \delta_{jl} a_{rj}^*(z) \delta(w/z),
\end{aligned}$$

onde $f(w)$ comuta com $a_{rj}(z)$, $a_{rj}^*(z)$ e $a_{kl}^*(w)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(a) \quad & [a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} [a_{ij}(m), a_{kl}^*(n)] z^{-m} w^{-n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{m,-n} z^{-m} w^{-n} \\
& \quad = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{ik} \delta_{jl} z^n w^{-n} = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(z/w). \\
(b) \quad & [a_{ij}(z) a_{kl}^*(z), a_{mn}(w) a_{pq}^*(w)] = a_{ij}(z) [a_{kl}^*(z), a_{mn}(w)] a_{pq}^*(w) \\
& \quad + a_{ij}(z) a_{mn}(w) a_{kl}^*(z) a_{pq}^*(w) - a_{mn}(w) [a_{pq}^*(w), a_{ij}(z)] a_{kl}^*(z) - a_{mn}(w) a_{ij}(z) a_{pq}^*(w) a_{kl}^*(z) \\
& \quad = \delta_{pi} \delta_{qj} a_{mn}(w) a_{kl}^*(z) \delta(z/w) - \delta_{km} \delta_{ln} a_{ij}(z) a_{pq}^*(w) \delta(w/z). \\
(c) \quad & [a_{ij}(z), \dot{a}_{kl}^*(w)] = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} [a_{ij}(m), n a_{kl}^*(n)] z^{-m} w^{-n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} n \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{m,-n} z^{-m} w^{-n} \\
& \quad = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{ik} \delta_{jl} n z^n w^{-n} = \delta_{ik} \delta_{jl} \dot{\delta}(z/w). \\
(d) \quad & \dot{a}_{ij}^*(z) \delta(w/z) = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) a_{ij}^*(m) z^{-m} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} w^n \right) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (-m) a_{ij}^*(m) z^{-m-n} w^n \\
& \quad = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} -(m+n) a_{ij}^*(m) z^{-m-n} w^{(m+n)-m} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} n a_{ij}^*(m) z^{-m-n} w^n \\
& \quad = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} -n a_{ij}^*(m) z^{-n} w^{n-m} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} n a_{ij}^*(m) z^{-m} w^n z^{-n} \\
& \quad = - \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{ij}^*(m) w^{-m} \right) \dot{\delta}(w/z) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{ij}^*(m) z^{-m} \dot{\delta}(w/z) \\
& \quad = a_{ij}^*(z) \dot{\delta}(w/z) - a_{ij}^*(w) \dot{\delta}(w/z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad [b_i(z), b_j^-(w)] &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_-^*}} [b_{im}, b_j(n)] z^{-m} w^{-n} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}_-^*}} m \delta_{ij} \delta_{m, -n} z^{-m} w^{-n} \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}_+^* \\ n \in \mathbb{Z}_-^*}} m \delta_{ij} \delta_{m, -n} z^{-m} w^{-n} = [b_i^+(z), b_j^-(w)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}_-} (-n) \delta_{ij} z^n w^{-n} \\
&= \delta_{ij} \dot{\delta}^+(w - z)
\end{aligned}$$

e analogamente para a outra expressão. Juntando as duas, temos

$$\begin{aligned}
(f) \quad [b_i(z), b_j(w)] &= [b_i^+(z), b_j^-(w)] + [b_i^-(z), b_j^+(w)] = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} m \delta_{ij} \delta_{m, -n} z^{-m} w^{-n} \\
&= \delta_{ij} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n) z^n w^{-n} = \delta_{ij} \dot{\delta}(w/z).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(g) \quad [a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(w)] \\
&= a_{r,r+1}(z) [a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w)] a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \\
&\quad - a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) [a_{r,r+1}^*(w), a_{r,r+1}(z)] a_{r,r+1}^*(z) \\
&\quad + a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(z) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \\
&\quad - a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(z) \\
&= -a_{r,r+1}(z) \delta(w/z) a_{r,r+1}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \\
&\quad + a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) \delta(w/z) a_{r,r+1}^*(z) \\
&\quad + a_{r,r+1}(w) [a_{r,r+1}(z), a_{r,r+1}^*(w)] a_{r,r+1}^*(z) a_{r,r+1}^*(w) \\
&= a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(z) a_{r,r+1}^*(w) \delta(w/z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h) \quad [a_{rj}(z) a_{rj}^*(z), f(w) a_{kl}^*(w)] &= f(w) (a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) a_{kl}^*(w) - a_{kl}^*(w) a_{rj}(z) a_{rj}^*(z)) \\
&= f(w) [a_{rj}(z), a_{kl}^*(w)] a_{rj}^*(z) = f(w) \delta_{r,k} \delta_{jl} a_{rj}^*(z) \delta(w/z),
\end{aligned}$$

o que prova o Lema. □

Lema 2.2.10. *São verdadeiras*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \sum_{j=r+2}^n \sum_{k=1}^{s-1} [a_{ks}(w) a_{k,s+1}^*(w), a_{rj}(z) a_{rj}^*(z)] &= -\delta_{s,r+1} a_{r,r+1}(w) a_{r,r+2}^*(z) \delta(w/z), \\
(j) \quad \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=s+2}^n [a_{s+1,k}(w) a_{sk}^*(w), a_{jr}(z) a_{j,r+1}^*(z)] &= 0, \\
(l) \quad \sum_{j=r+2}^n \sum_{k=1}^{s-1} [a_{ks}(w) a_{k,s+1}^*(w), a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z)] &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(m) \quad & \sum_{j=r+2}^n \sum_{k=s+2}^n [a_{s+1,k}(w)a_{sk}^*(w), a_{rj}(z)a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z)a_{r+1,j}^*(z)] \\
& = -2\delta_{sr}\delta(w/z) \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(w)a_{rj}^*(z) + \delta_{s,r-1}\delta(w/z) \sum_{j=r+2}^n a_{rj}(z)a_{r-1,j}^*(w) \\
& \quad + \delta_{s,r+1}\delta(w/z) \sum_{j=r+3}^n a_{r+2,j}(w)a_{r+1,j}^*(z), \\
(n) \quad & \sum_{j=1}^{r-1} [a_{s,s+1}^*(w), a_{jr}(z)a_{j,r+1}^*(z)] = -\delta_{s,r-1}a_{r-1,r+1}^*(z)\delta(w/z), \\
(o) \quad & \sum_{j=r+2}^n [a_{s,s+1}^*(w), a_{r+1,j}(z)a_{rj}^*(z)] = -\delta_{r+1,s}a_{r,r+2}^*(z)\delta(w/z).
\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de verificar (R_1) - (R_6) .

Lema 2.2.11. (R_1) $[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_s)(w)] = -(H_r|H_s)c\delta(z/w)$.

Demonstração. Observe que se $|r-s| > 1$, então $[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_s)(w)] = 0$ já que todos os somandos são iguais a zero. Escreva em termos de $\delta_{s,f(r)}$. Temos o seguinte

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_s)(w)] & = \delta_{sr}([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w)]) \\
& \quad + \delta_{s,r-1}([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r-1})(w)]) + \delta_{s,r+1}([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)]) \\
& = \delta_{sr} \left([2a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w)] \right. \\
& \quad + \sum_{i=1}^{r-1} [a_{i,r+1}(z)a_{i,r+1}^*(z) - a_{i,r}(z)a_{i,r}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w)] \\
& \quad + \sum_{j=r+2}^n [a_{rj}(z)a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z)a_{r+1,j}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w)] \\
& \quad + \left[-\gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2}(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(w) \right] \Big) \\
& \quad + \delta_{s,r-1} \left([2a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r-1})(w)] \right. \\
& \quad + \sum_{i=1}^{r-1} [a_{i,r+1}(z)a_{i,r+1}^*(z) - a_{i,r}(z)a_{i,r}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r-1})(w)] \\
& \quad + \sum_{j=r+2}^n [a_{rj}(z)a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z)a_{r+1,j}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r-1})(w)] \\
& \quad + \left[-\gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2}(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r-1})(w) \right] \Big) \\
& \quad + \delta_{s,r+1} \left([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)] \right).
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_s)(w)] &= \delta_{sr} \left(4 \left[a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) \right] \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r+1}(z) a_{i,r+1}^*(z), a_{i,r+1}(w) a_{i,r+1}^*(w) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r}(z) a_{i,r}^*(z), a_{i,r}(w) a_{i,r}^*(w) \right] + 0 + \gamma^2 [b_r(z), b_r(w)] \\
&+ \frac{\gamma^2}{4} [b_{r-1}^+(z), b_{r-1}^+(w)] + \frac{\gamma^2}{4} [b_{r+1}^+(z), b_{r+1}^+(w)] \Big) \\
&+ \delta_{s,r-1} \left(\left[2a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), \sum_{j=r+1}^n -a_{(r-1)+1,j}(w) a_{(r-1)+1,j}^*(w) \right] \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{r-1} \left[-a_{i,r}(z) a_{i,r}^*(z), \sum_{j=1}^{r-2} -a_{j,r}(w) a_{j,r}^*(w) \right] \\
&+ \sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z), \sum_{i=r+1}^n -a_{ri}(w) a_{ri}^*(w) \right] \\
&+ \left[-\gamma b_r(z), \frac{\gamma}{2} b_{(r-1)+1}^+(w) \right] + \left[\frac{\gamma}{2} b_{r-1}^+(z), -\gamma b_{r-1}(w) \right] \Big) \\
&+ \delta_{s,r+1} \left([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)] \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_s)(w)] &= \delta_{sr} \left(0 + 0 + 0 + 0 + 2c\dot{\delta}(w/z) + 0 + 0 \right) \\
&+ \delta_{s,r-1} \left(-2 \left[a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(w) \right] \right. \\
&- \sum_{i=1}^{r-2} \left[a_{i,r}(z) a_{i,r}^*(z), a_{i,r}(w) a_{i,r}^*(w) \right] \\
&+ \sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z), -a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) \right] \\
&- c\dot{\delta}^-(w/z) + c\dot{\delta}^-(z/w) \Big) + \delta_{s,r+1} \left([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)] \right) \\
&= \delta_{sr} \left(2c\dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r-1} \left(0 + 0 + 0 + -c\dot{\delta}^-(w/z) - c\dot{\delta}^+(w/z) \right) \\
&+ \delta_{s,r+1} \left([\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)] \right) \\
&= \delta_{sr} \left(2c\dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r-1} \left(-c\dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r+1} \left(-c\dot{\delta}(w/z) \right),
\end{aligned}$$

o que nos dá

$$[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w)] = -[\rho_{\mathbb{J}}(H_{r+1})(w), \rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z)] = c\dot{\delta}(z/w) = -c\dot{\delta}(w/z).$$

Desta forma, a relação (R_1) está verificada.

□

Lema 2.2.12. $(R_2)[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = C_{rs} \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(z) \delta(z/w).$

Demonstração. Temos o seguinte

$$\begin{aligned}
(a) \quad & 2[a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] \\
&= \delta_{sr} \left(2 \left[a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w)a_{r,r+1}^*(w)a_{r,r+1}^*(w) \right] \right. \\
&\quad + 2 \left[a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), \left(\sum_{j=r+2}^n a_{rj}(w)a_{rj}^*(w) - a_{r+1,j}(w)a_{r+1,j}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(w) \right] \\
&\quad + 2 \left[a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), -\gamma a_{r,r+1}^*(w) \left(\frac{1}{2} + b_r(w) - \frac{1}{2}b_{r-1}^+(w) - \frac{1}{2}b_{r+1}^+(w) \right) \right] \Big) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(2[a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+1}(w)a_{r,r+2}^*(w)] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(-2a_{r-1,r+1}^*(z)a_{r,r+1}(w)\delta(w/z) \right) \\
&\stackrel{(h)}{=} \stackrel{(g)}{=} \delta_{s,r} \left(2a_{r,r+1}(w)a_{r,r+1}^*(z)a_{r,r+1}^*(w)\delta(w/z) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(w)a_{rj}^*(w) - a_{r+1,j}(w)a_{r+1,j}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(z)\delta(w/z) \\
&\quad - 2\gamma a_{r,r+1}^*(w)b_r(w)\delta(w/z) + \gamma a_{r,r+1}^*(z)(b_{r-1}^+(w) + b_{r+1}^+(w))\delta(w/z) \\
&\quad \left. - \gamma^2 a_{r,r+1}^*(z)\delta(w/z) \right) + \delta_{s,r+1} \left(2a_{r,r+1}(z)a_{r,r+2}^*(w)\delta(w/z) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(-2a_{r-1,r+1}^*(z)a_{r,r+1}(w)\delta(w/z) \right). \\
(b) \quad & \sum_{i=1}^{r-1} [a_{i,r+1}(z)a_{i,r+1}^*(z) - a_{i,r}(z)a_{i,r}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] \\
&= \delta_{sr} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r+1}(z)a_{i,r+1}^*(z) - a_{i,r}(z)a_{i,r}^*(z), \sum_{j=1}^{r-1} a_{jr}(w)a_{j,r+1}^*(w) \right] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(\sum_{i=1}^{r-1} [a_{i,r+1}(z)a_{i,r+1}^*(z), a_{i,r+1}(w)a_{i,r+2}^*(w)] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(-a_{r-1,r}(w)a_{r-1,r}^*(z)a_{r-1,r}^*(w) \right. \\
&\quad + \sum_{j=r+1}^n \left(a_{r-1,j}(w)a_{r-1,j}^*(w) - a_{rj}(w)a_{rj}^*(w) \right) a_{r-1,r}^*(z) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-2} a_{j,r-1}(w)a_{j,r}^*(z) - a_{r,r+1}(w)a_{r-1,r+1}^*(z) - \gamma a_{r-1}^*(w)b_{r-1}(w) \\
&\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \left(a_{r-1,r}^*(w)b_{r-2}^+(w) - a_{r-1,r}^*(w)b_r^+(w) \right) \delta(w/z) + \frac{\gamma^2}{2} a_{r-1,r}^*(z)\delta(w/z) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{sr} \left(2 \sum_{i=1}^{r-1} a_{ir}(w) a_{i,r+1}^*(w) \delta(w/z) \right) + \delta_{s,r+1} \left(- \sum_{i=1}^{r-1} a_{i,r+1}(z) a_{i,r+2}^*(w) \delta(w/z) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(- a_{r-1,r}(w) a_{r-1,r}^*(z) a_{r-1,r}^*(w) \right. \\
&\quad + \sum_{j=r+1}^n \left(a_{r-1,j}(w) a_{r-1,j}^*(w) - a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) \right) a_{r-1,r}^*(z) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-2} a_{j,r-1}(w) a_{jr}^*(z) - a_{r,r+1}(w) a_{r-1,r+1}^*(z) - \gamma a_{r-1}^*(w) b_{r-1}(w) \\
&\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \left(a_{r-1,r}^*(w) b_{r-2}^+(w) - a_{r-1,r}^*(w) b_r^+(w) \right) \delta(w/z) + \frac{\gamma^2}{2} a_{r-1,r}^*(z) \dot{\delta}(w/z) \right). \\
(c) \quad &\sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
&= \delta_{sr} \left(\sum_{j=r+2}^n \left[- a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z), - a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \right] \right. \\
&\quad + \sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z), a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) \right] + \sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z), \right. \\
&\quad \quad \left. \left(a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) - a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(w) \right] \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(- a_{r+1,r+2}(w) a_{r+1,r+2}^*(z) a_{r+1,r+2}^*(w) \right. \\
&\quad + \sum_{j=r+3}^n \left(a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) - a_{r+2,j}(w) a_{r+2,j}^*(w) \right) a_{r+1,r+2}^*(z) \\
&\quad - a_{r,r+1}(w) a_{r,r+2}^*(z) - \sum_{j=r+3}^n a_{r+2,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \\
&\quad - \gamma a_{r+1,r+2}^*(w) b_{r+1}(w) + \frac{\gamma}{2} a_{r+1,r+2}^*(w) \left(b_r^+(w) + b_{r+2}^+(w) \right) \delta(w/z) \\
&\quad \left. + \frac{\gamma^2}{2} a_{r+1,r+2}^*(z) \dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r-1} \left(\sum_{j=r+2}^n a_{rj}(w) a_{r-1,j}^*(w) \delta(w/z) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{sr} \left(0 + 0 + 2 \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(w) a_{rj}^*(z) \delta(w/z) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(-a_{r+1,r+2}(w) a_{r+1,r+2}^*(z) a_{r+1,r+2}^*(w) \right. \\
&\quad + \sum_{j=r+3}^n \left(a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) - a_{r+2,j}(w) a_{r+2,j}^*(w) \right) a_{r+1,r+2}^*(z) \\
&\quad - a_{r,r+1}(w) a_{r,r+2}^*(z) - \sum_{j=r+3}^n a_{r+2,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \\
&\quad - \gamma a_{r+1,r+2}^*(w) b_{r+1}(w) + \frac{\gamma}{2} a_{r+1,r+2}^*(w) \left(b_r^+(w) + b_{r+2}^+(w) \right) \delta(w/z) \\
&\quad \left. + \frac{\gamma^2}{2} a_{r+1,r+2}^*(z) \dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r-1} \left(\sum_{j=r+2}^n a_{rj}(w) a_{r-1,j}^*(w) \delta(w/z) \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
(d) \quad &[-\gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = \delta_{sr} \left(\gamma^2 [b_r(z), a_{r,r+1}^*(w) b_r(w)] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(-\frac{\gamma^2}{2} a_{r+1,r+2}^*(w) \left([b_r(z), b_r^+(w)] + [b_{r+1}^+(z), b_{r+1}(w)] \right) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(\frac{\gamma^2}{2} a_{r-1,r}^*(w) \left([b_r(z), b_r^+(w)] + [b_{r-1}^+(z), b_{r-1}(w)] \right) \right) \\
&= \delta_{sr} \left(\gamma^2 a_{r,r+1}^*(w) \dot{\delta}(w/z) \right) + \delta_{s,r+1} \left(-\frac{\gamma^2}{2} a_{r+1,r+2}^*(w) \dot{\delta}(w/z) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(\frac{\gamma^2}{2} a_{r-1,r}^*(w) \dot{\delta}(w/z) \right).
\end{aligned}$$

Somando as quatro equações, temos

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] &= \delta_{sr} 2\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z) \delta(w/z) + \delta_{s,r+1} \left(-\rho_{\mathbb{J}}(E_{r+1})(z) \delta(w/z) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(-\rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(z) \delta(w/z) \right),
\end{aligned}$$

o que prova (R_2) . □

Lema 2.2.13. $(R_3)[\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = -C_{rs} \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(z) \delta(z/w)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(a) \quad &2[a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = \delta_{sr} \left(2a_{r,r+2}(z) \delta(z/w) \right) + \delta_{s,r-1} 0 \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(2[a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z), a_{r,r+2}(w) a_{r,r+1}^*(w)] \right) \\
&= \delta_{sr} \left(2a_{r,r+2}(z) \delta(z/w) \right) + \delta_{s,r+1} \left(2a_{r,r+2}(w) a_{r,r+1}^*(z) \delta(w/z) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & \sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r+1}(z) a_{i,r+1}^*(z) - a_{i,r}(z) a_{i,r}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w) \right] \\
&= \delta_{sr} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r+1}(z) a_{i,r+1}^*(z), a_{i,r+1}(w) a_{i,r}^*(w) \right] - \sum_{i=1}^{r-1} \left[a_{i,r}(z) a_{i,r}^*(z), a_{i,r+1}(w) a_{i,r}^*(w) \right] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(\sum_{j=1}^r \left[a_{i,r+1}(z) a_{i,r+1}^*(z), a_{j,r+2}(w) a_{j,r+1}^*(w) \right] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(\left[a_{r-1,r}(z) a_{r-1,r}^*(z), a_{r-1,r}(w) \right] - \sum_{i=1}^{r-2} a_{ir}(z) \left[a_{ir}^*(z), a_{ir}(w) \right] a_{i,r-1}^*(w) \right) \\
&= \delta_{sr} \left(-2 \sum_{i=1}^{r-1} a_{i,r+1}(z) a_{ir}^*(w) \delta(z/w) \right) + \delta_{s,r+1} \left(\sum_{i=1}^{r-1} a_{i,r+2}(w) a_{i,r+1}^*(z) \delta(z/w) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r-1} \left(\left(-a_{r-1,r}(z) + \sum_{i=1}^{r-2} a_{ir}(z) a_{i,r-1}^*(w) \right) \delta(z/w) \right). \\
(c) \quad & \sum_{j=r+2}^n \left[a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
&= \delta_{sr} 0 + \delta_{s,r+1} \left(\sum_{j=r+2}^n \sum_{k=1}^r \left[a_{r,j}(z) a_{r,j}^*(z), a_{k,r+2}(w) a_{k,r+1}^*(w) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=r+2}^n \left[a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z), a_{r+1,r+2}(w) \right] \right) + \delta_{s,r-1} 0 \\
&= \delta_{s,r+1} \left(-a_{r,r+2}(z) a_{r,r+1}^*(w) \delta(z/w) - a_{r+1,r+2}(z) \delta(z/w) \right). \\
(d) \quad & \left[-\gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Somando as quatro parcelas, temos o resultado. □

Lema 2.2.14. $(R_4) \quad [\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = \delta_{sr} (\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z) \delta(z/w) - c \dot{\delta}(z/w)).$

Demonstração. Se $|s - r| > 1$, então $[\rho(E_r)(z), -a_{r,r+1}(w)] = 0$. Desta forma,

$$\sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=1}^{s-1} \left[a_{kr}(z) a_{k,r+1}^*(z), a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] = 0,$$

já que $r \neq s$. Assim

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{s-1} \left[\sum_{k=r+2}^n \left(a_{rk}(z) a_{rk}^*(z) - a_{r+1,k}(z) a_{r+1,k}^*(z) \right) a_{r,r+1}^*(z) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=r+2}^n a_{r+1,k}(z) a_{rk}^*(z), a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=r+2}^n \left[a_{rk}(z) a_{rk}^*(z) - a_{r+1,k}(z) a_{r+1,k}^*(z), a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] a_{r,r+1}^*(z) \\
& \quad - \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=r+2}^n \left[a_{r+1,k}(z) a_{rk}^*(z), a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=r+2}^n \left(a_{j,s+1}(w) a_{rk}^*(z) \delta_{sk} \delta_{rj} - a_{rk}(z) a_{js}^*(w) \delta_{s+1,k} \delta_{jr} \right. \\
& \quad \left. - a_{j,s+1}(w) a_{r+1,k}^*(z) \delta_{r+1,j} \delta_{ks} + a_{r+1,k}(z) a_{js}^*(w) \delta_{r+1,j} \delta_{k,s+1} \right) a_{r,r+1}^*(z) \delta(z/w) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{k=r+2}^n \left(a_{r+1,k}(z) a_{js}^*(w) \delta_{rj} \delta_{k,s+1} - a_{j,s+1}(w) a_{rk}^*(z) \delta_{r+1,j} \delta_{ks} \right) \delta(z/w) \\
&= \circledast.
\end{aligned}$$

Se $s+1 > n$, então $a_{j,s+1}(w) = 0 = \delta_{k,s+1}$ e $\circledast = 0$. Agora suponhamos que $s+1 \leq n$. Se $s-1 < r$ então $j \leq s-1 < r$, $\delta_{jr} = \delta_{j,r+1} = 0$ e $\circledast = 0$. Se $s-1 \geq r$, temos $s-1 > r$ já que $|s-r| > 1$. Então $s \geq r+2$ e por esta razão os termos $j = r, r+1$ e $k = s, s+1$ aparecem na expressão. Então

$$\begin{aligned}
\circledast &= \left(a_{r,s+1}(w) a_{rs}^*(z) - a_{r,s+1}(z) a_{rs}^*(w) - a_{r+1,s+1}(w) a_{r+1,s}^*(z) \right. \\
& \quad \left. + a_{r+1,s+1}(z) a_{r+1,s}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(z) \delta(z/w) \\
& \quad + \left(a_{r+1,s+1}(z) a_{rs}^*(w) - a_{r+1,s+1}(w) a_{rs}^*(z) \right) \delta(z/w) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo temos expressões não-triviais apenas quando $r = s$, $r = s-1$ ou $r = s+1$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] &= \delta_{sr} \left(\left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r(z)), -a_{r,r+1}(w) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r(z)), \sum_{j=1}^{r-1} a_{j,r+1}(w) a_{jr}^*(w) \right] \right) + \delta_{s,r+1} \left(\left[\rho_{\mathbb{J}}(E_{s-1}(z)), -a_{s,s+1}(w) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_{s-1}(z)), \sum_{j=1}^{s-1} a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] \right) + \delta_{s,r-1} \left(\left[\rho_{\mathbb{J}}(E_{s+1})(z), -a_{s,s+1}(w) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_{s+1})(z), \sum_{j=1}^{s-1} a_{j,s+1}(w) a_{js}^*(w) \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{sr} \left(\left(2a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z) + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}^*(z)a_{rj}(z) - a_{r+1,j}^*(z)a_{r+1,j}(z) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2} \left(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z) \right) \right) \delta(z/w) - \frac{\gamma^2}{2} \dot{\delta}(z/w) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{r-1} \left[a_{jr}(z)a_{j,r+1}^*(z), a_{j,r+1}(w)a_{jr}^*(w) \right] \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(- \sum_{j=s+1}^n \left[a_{s,s+1}(w), a_{sj}(z)a_{s-1,s}^*(z)a_{sj}^*(z) \right] + a_{s,s+1}(z)a_{s-1,s}^*(z)\delta(w/z) \right) \\
&= \delta_{sr} \left(\left(2a_{r,r+1}(z)a_{r,r+1}^*(z) + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}^*(z)a_{rj}(z) - a_{r+1,j}^*(z)a_{r+1,j}(z) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \gamma b_r(z) + \frac{\gamma}{2} \left(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z) \right) \right) \delta(z/w) - \frac{\gamma^2}{2} \dot{\delta}(z/w) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{r-1} \left(a_{j,r+1}(z)a_{j,r+1}^*(z) - a_{jr}(z)a_{jr}^*(z) \right) \delta(z/w) \right) \\
&\quad + \delta_{s,r+1} \left(- a_{s,s+1}(z)a_{s-1,s}^*(z)\delta(w/z) + a_{s,s+1}(z)a_{s-1,s}^*(z)\delta(w/z) \right) \\
&= \delta_{sr} \left(\rho_{\mathbb{J}}(H_r)(z)\delta(z/w) - c\dot{\delta}(z/w) \right),
\end{aligned}$$

o que prova o Lema. □

Lema 2.2.15. *Valem as relações*

$$\begin{aligned}
(R_5|R_6) \quad &[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = [\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = 0 \text{ se } C_{rs} \neq -1, \\
&[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_1), \rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = [\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_1), \rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = 0 \\
&\text{se } C_{rs} = -1.
\end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] &= \left[-a_{r,r+1}(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w) \right] + \left[\sum_{j=1}^{r-1} a_{j,r+1}(z)a_{jr}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w) \right] \\
&= \delta_{s,r+1}a_{r,r+2}(w)\delta(w/z) + \delta_{s,r-1}a_{r-1,r+1}(w)\delta(w/z) \\
&\quad - \delta_{s,r-1} \sum_{j=1}^{s-1} a_{j,r+1}(w)a_{js}^*(w)\delta(w/z) + \delta_{s,r+1} \sum_{j=1}^{r-1} a_{j,r+2}(w)a_{jr}^*(w)\delta(w/z) \\
&= \left(\delta_{s,r+1} \left(a_{r,r+2}(w) + \sum_{j=1}^{r-1} a_{j,r+2}(w)a_{jr}^*(w) \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta_{s,r-1} \left(a_{r-1,r+1}(w) - \sum_{j=1}^{r-2} a_{j,r+1}(w)a_{j,r-1}^*(w) \right) \right) \delta(w/z).
\end{aligned}$$

Então $[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = 0$ se $|r-s| \neq 1$, isto é, se $C_{rs} \neq -1$. Agora

$$\begin{aligned}
& [\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = \left[a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z)^2, \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
& + \left[\sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z) \right) a_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
& + \left[\sum_{j=1}^{r-1} a_{jr}(z) a_{j,r+1}^*(z) - \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z) a_{rj}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
& + \left[-\gamma a_{r,r+1}^*(z) \left(b_r(z) - \frac{1}{2} a_{r,r+1}^*(z) (b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)) \right) - \frac{\gamma^2}{2} \dot{a}_{r,r+1}^*(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w) \right] \\
& = -\delta_{sr} \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) - a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(z)^2 \delta(w/z) \\
& - \delta_{s,r-1} a_{r,r+1}(w) a_{r-1,r}^*(w) a_{r,r+1}^*(z)^2 \delta(w/z) + 2\delta_{s,r+1} a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z) a_{r,r+2}^*(w) \delta(w/z) \\
& - 2\delta_{s,r-1} a_{r,r+1}(z) a_{r,r+1}^*(z) a_{r-1,r+1}^*(w) \delta(w/z) \\
& - \delta_{sr} \gamma a_{r,r+1}^*(z)^2 \left(b_r(w) - \frac{1}{2} (b_{r-1}^+(w) + b_{r+1}^+(w)) \right) \delta(w/z) - \delta_{sr} \frac{\gamma^2}{2} a_{r,r+1}^*(z)^2 \dot{\delta}(w/z) \\
& + \left(\delta_{sr} \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(w) a_{rj}^*(w) - a_{r+1,j}(w) a_{r+1,j}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(z)^2 \right) \delta(w/z) \\
& + \delta_{s,r+1} a_{s,s+1}(w) a_{s,s+1}^*(z)^2 a_{s,s+1}^*(w) \delta(w/z) \\
& + \delta_{s,r+1} \sum_{k=r+3}^n \left(a_{r+1,k}(w) a_{r+1,k}^*(w) - a_{r+2,k}(w) a_{r+2,k}^*(w) \right) a_{r,r+1}^*(z) a_{r+1,r+2}^*(z) \delta(w/z) \\
& - \delta_{s,r-1} \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z) \right) a_{r-1,r}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \delta(w/z) \\
& + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z) a_{rj}^*(z) - a_{r+1,j}(z) a_{r+1,j}^*(z) \right) \\
& \quad \cdot \left(\delta_{s,r-1} a_{r,r+2}^*(w) - \delta_{s,r-1} a_{r-1,r+1}^*(w) \right) \delta(w/z) \\
& - \delta_{s,r+1} \left(a_{r,r+1}(w) a_{r,r+2}^*(z) + \sum_{j=r+3}^n a_{r+2,k}(w) a_{r+1,j}^*(z) \right) a_{r,r+1}^*(z) \delta(w/z) \\
& + 2\delta_{sr} \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(w) a_{rj}^*(z) a_{r,r+1}^*(z) \delta(w/z) - \delta_{s,r-1} \sum_{j=r+2}^n a_{rj}(z) a_{r-1,j}^*(w) a_{r,r+1}^*(z) \delta(w/z) \\
& + a_{r,r+1}^*(z) a_{r+1,r+2}^*(z) \delta_{s,r+1} \left(\gamma b_s(w) \delta(w/z) - \frac{\gamma}{2} (b_{s-1}^+(w) + b_{s+1}^+(w)) \delta(w/z) \right. \\
& \left. + \frac{\gamma^2}{2} \dot{\delta}(w/z) \right) + \left(\left(-2\delta_{s+1,r} a_{s,s+1}(z) a_{s,s+1}^*(z) a_{s,s+2}^*(w) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\delta_{r+1,s} a_{s,s+1}(z) a_{s,s+1}^*(z) a_{s-1,s+1}^*(w) \right) \right. \\
& \left. - \delta_{s,r-1} \left(\sum_{j=s+2}^n \left(a_{sj}(z) a_{sj}^*(z) - a_{s+1,j}(z) a_{s+1,j}^*(z) \right) a_{s,s+2}^*(w) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{s,s+1}(w)a_{s,s+1}^*(z)a_{s,s+2}^*(z) - \sum_{j=s+3}^n a_{s+2,k}(w)a_{s+1,j}^*(z)a_{s,s+1}^*(z) \\
& + \delta_{s,r+1} \sum_{j=s+2}^n a_{sj}(z)a_{s-1,j}^*(w)a_{s,s+1}^*(z) \\
& + \delta_{s,r+1} \sum_{j=s+2}^n \left(a_{sj}(z)a_{sj}^*(z) - a_{s+1,j}(z)a_{s+1,j}^*(z) \right) a_{s-1,s+1}^*(w) \\
& + \delta_{s+1,r} \left(- \sum_{j=1}^{r-2} a_{j,r-1}(w)a_{j,r+1}^*(z) + \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z)a_{r-1,j}^*(w) \right) \\
& + \delta_{s,r+1} \left(\sum_{j=1}^{r-1} a_{jr}(z)a_{j,r+2}^*(w) - \sum_{j=r+3}^n a_{r+2,j}(w)a_{rj}^*(z) \right) \delta(w/z) \\
& + \left(\delta_{r+1,s}a_{s-1,s+1}^*(z) - \delta_{s,r-1}a_{r-1,r+1}^*(z) \right) \left(\left(\gamma b_s(z) - \frac{\gamma}{2}(b_{s-1}^+(z) + b_{s+1}^+(z)) \right) \delta(w/z) \right. \\
& + \left. \frac{\gamma}{2} \dot{\delta}(w/z) \right) - \frac{\gamma^2}{2} \delta_{s,r-1} \dot{a}_{r-1,r+1}(z) \delta(w/z) \\
& + \left(\delta_{sr} \gamma a_{s,s+1}^*(z)^2 \left(b_s(w) - \frac{1}{2}(b_{s-1}^+(w) + b_{s+1}^+(w)) \right) \delta(w/z) \right. \\
& + \delta_{sr} \frac{\gamma^2}{2} a_{s,s+1}^*(z)^2 \dot{\delta}(w/z) - a_{s,s+1}^*(w)a_{s+1,s+2}^*(w) \delta_{s,r-1} \left(\gamma b_r(z) \delta(z/w) \right. \\
& - \left. \frac{\gamma}{2}(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)) \delta(z/w) + \frac{\gamma^2}{2} \dot{\delta}(z/w) \right) \\
& + \left(\delta_{s,r+1}a_{s-1,s+1}^*(z) - \delta_{s+1,r}a_{r-1,r+1}^*(z) \right) \left(\left(\gamma b_r(z) - \frac{\gamma}{2}(b_{r-1}^+(z) + b_{r+1}^+(z)) \right) \delta(w/z) \right. \\
& + \left. \frac{\gamma^2}{2} \dot{\delta}(w/z) \right) - \frac{\gamma^2}{2} \delta_{s,r-1} \dot{a}_{r-1,r+1}(z) \delta(w/z) \\
& + \left. \gamma^2 a_{r,r+1}^*(z)a_{s,s+1}^*(w) \left(\delta_{sr} - \frac{1}{2}(\delta_{s,r-1} + \delta_{s,r+1}) \right) \dot{\delta}(w/z) \right).
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos acima, o termo em δ_{sr} torna-se igual a zero. Logo temos termos apenas em $\delta_{s,r-1}$ e $\delta_{s,r+1}$. Assim

$$[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z), \rho_{\mathbb{J}}(E_s)(w)] = 0 \text{ se } |r-s| \neq 1,$$

e (R_5) está verificado. Para terminar, temos

$$\begin{aligned}
& [\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_1), \rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w)] = \left[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_1), \left[\rho_{\mathbb{J}}(F_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(F_s)(w) \right] \right] \\
& = \left[-a_{r,r+1}(z_1), \left(a_{r-1,r+1}(w) - \sum_{j=1}^{r-2} a_{j,r+1}(w)a_{j,r-1}^*(w) \right) \delta(w/z_2) \right] \\
& + \left[\sum_{j=1}^{r-1} a_{j,r+1}(z_1)a_{jr}^*(z_1), a_{r-1,r+1}(w) - \sum_{l=1}^{r-2} a_{l,r+1}(w)a_{l,r-1}^*(w) \right] \delta(w/z_2) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos fazer o mesmo para $s = r + 1$. Se $s = r - 1$, temos

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \left[a_{r,r+1}(z_1) a_{r,r+1}^*(z_1)^2, \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(w) \right] \right] \\
&= -a_{r,r+1}(w) a_{r,r+1}^*(z_1)^2 a_{r-1,r+1}^*(w) \dot{\delta}(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad + \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z_2) a_{rj}^*(z_2) - a_{r+1,j}(z_2) a_{r+1,j}^*(z_2) \right) a_{r,r+1}^*(z_1)^2 a_{r-1,r}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad + \sum_{j=r+2}^n a_{rj}(z_2) a_{r-1,j}^*(w) a_{r,r+1}^*(z_1)^2 \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad + a_{r,r+1}^*(z_1)^2 a_{r-1,r}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \left(\gamma b_r(z_2) - \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^*(z_2) + b_{r+1}^+(z_2)) \right) \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{2} a_{r,r+1}^*(z_1)^2 a_{r-1,r}^*(w) \dot{\delta}(w/z_1) \delta(z_2/w). \\
(b) \quad & \left[\sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z_1) a_{rj}^*(z_1) - a_{r+1,j}(z_1) a_{r+1,j}^*(z_1) \right) a_{r,r+1}^*(z_1), \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(w) \right] \right] \\
&= - \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z_1) a_{rj}^*(z_1) - a_{r+1,j}(z_1) a_{r+1,j}^*(z_1) \right) a_{r,r+1}^*(z_1)^2 a_{r-1,r}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad - \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}(z_1) a_{rj}^*(z_1) - a_{r+1,j}(z_1) a_{r+1,j}^*(z_1) \right) a_{r,r+1}^*(z_1) a_{r-1,r+1}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad - 2 \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z_1) a_{rj}^*(w) a_{r,r+1}^*(z_1) a_{r-1,r}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad - \sum_{j=r+2}^n a_{rj}(z_2) a_{r-1,j}^*(w) a_{r,r+1}^*(z_1)^2 \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \\
&\quad - \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z_1) a_{r-1,j}^*(w) a_{r,r+1}^*(z_1) \delta(w/z_2) \delta(z_1/z_2). \\
(c) \quad & \left[\sum_{j=1}^{r-1} a_{jr}(z_1) a_{j,r+1}^*(z_1) - \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z_1) a_{rj}^*(z_1), \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(w) \right] \right] \\
&= \left(a_{r-1,r+1}^*(z_1) a_{r,r+1}^*(w) \sum_{j=r+2}^n \left(a_{rj}^*(z_2) a_{rj}(z_2) - a_{r+1,j}^*(z_2) a_{r+1,j}(z_2) \right) \right. \\
&\quad \left. - a_{r-1,r+1}^*(z_1) a_{r,r+1}^*(w) \left(\gamma b_r(z_1) - \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(z_1) + b_{r+1}^+(z_1)) \right) \right) \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{2} a_{r-1,r+1}^*(z_1) \dot{a}_{r,r+1}^*(w) + 2 \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z_1) a_{rj}^*(z_1) a_{r-1,r}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \\
&\quad \left. + \sum_{j=r+2}^n a_{r+1,j}(z_1) a_{r-1,j}^*(w) a_{r,r+1}^*(z_2) \right) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) & \left[-\gamma a_{r,r+1}^*(z_1)(b_r(z_1) - \frac{1}{2}a_{r,r+1}^*(z_1)(b_{r-1}^+(z_1) + b_{r+1}^+(z_1))) - \frac{\gamma^2}{2}\dot{a}_{r,r+1}^*(z_1) \right. \\
& \quad \left. , \left[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(w) \right] \right] \\
& = -a_{r,r+1}^*(z_2)^2 a_{r-1,r}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \left(\gamma b_r(z_1) - \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(z_1) + b_{r+1}^+(z_1)) \right) \\
& \quad - \frac{\gamma^2}{2} a_{r,r+1}^*(z_2)^2 a_{r-1,r}^*(w) \dot{\delta}(z_1/w) \delta(w/z_2) \\
& \quad + a_{r,r+1}^*(z_2) a_{r-1,r+1}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(w/z_2) \cdot \left(\gamma b_r(z_1) - \frac{\gamma}{2} (b_{r-1}^+(z_1) + b_{r+1}^+(z_1)) \right) \\
& \quad - \frac{\gamma^2}{2} a_{r,r+1}^*(z_2) a_{r-1,r+1}^*(w) \dot{\delta}(z_1/z_2) \delta(w/z_1) - \gamma^2 a_{r,r+1}^*(z_1) a_{r-1,r}^*(w) a_{r,r+1}^*(w) \delta(z_2/w) \dot{\delta}(z_2/z_1) \\
& \quad + \frac{\gamma^2}{2} a_{r,r+1}^*(z_1) a_{r-1,r+1}^*(z_2) \dot{\delta}(z_1/z_2) \delta(w/z_2).
\end{aligned}$$

Somando as quatro expressões acima, temos

$$[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_1), \rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r-1})(w)] = 0$$

e, de forma análoga, prova-se que

$$[\rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_1), \rho_{\mathbb{J}}(E_r)(z_2), \rho_{\mathbb{J}}(E_{r+1})(w)] = 0$$

e assim, (R_6) está provada. □

Como as relações (R_1) - (R_6) são verdadeiras, o Teorema 2.2.7 está provado.

Capítulo 3

Os módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto

Este capítulo tem o objetivo de expor ao leitor os resultados obtidos por B. Cox e V. Futorny em [CF04] e [CF05] para, em seguida, apresentar os obtidos em [Mar12]. A razão para tal escolha é que, em [Mar12], a idéia básica é definir, para $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ e, posteriormente, para $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, operadores b_{im} 's que não apenas desempenham nos módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto papéis similares aos dos b_{im} 's do artigo [CF05] (para os módulos intermediários de Wakimoto) mas que também sejam tais que na hora de se fazer os cálculos, contribuam com “exatamente” os mesmos resultados, tornando a prova da representação por nós obtida completamente análoga à esta.

Por tal razão, a seção 3.1 aborda os conceitos e resultados necessários para o caso dos módulos intermediários de Wakimoto no qual o conceito de produto ordenado normal de duas ou mais distribuições formais é apresentado. Para uma melhor compreensão dos resultados aqui expostos, sugiro ao leitor interessado a leitura de [Kac98]. Posteriormente, apresentamos alguns Lemas auxiliares com o intuito de facilitar os cálculos futuros até finalmente enunciar o Teorema 3.1.27, finalizando sua demonstração através das relações (R_1) – (R_6) .

À partir da seção 3.2, nosso objetivo é expor os resultados obtidos em [Mar12]. Para fazer isso, primeiro obtemos um elemento auxiliar $H_{r+1}^* \in \widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ e então, convenientes b_{im} 's tais que os cálculos subseqüentes sejam os “mesmos” que os da seção 3.1, facilitando assim nosso trabalho.

É importante frisar que, neste capítulo, alguns conceitos vistos em diferentes tipos de módulos como, por exemplo, $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$, diferem “levemente” dependendo do caso abordado, além de não coincidirem necessariamente com os do capítulo 2. Quando tal situação ocorrer, uma observação mencionando explicitamente a diferença entre eles será utilizada.

Com tudo isso em mente, damos início a este capítulo.

3.1 Os módulos intermediários de Wakimoto

Fixemos $0 \leq r \leq n$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$, $k = \gamma^2 - (r+1)$. Seja $H_i, E_i, F_i, i = 1, \dots, n$, um conjunto gerador de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ e denote

$$X_m = t^m \otimes X \text{ para } X \in \mathfrak{g} \text{ e } m \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uma base para Δ^+ , o conjunto de raízes positivas de $\mathfrak{g}$, tal que $H_i = \check{\alpha}_i$ e seja Δ_r o sistema de raízes $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ ($\Delta_r = \emptyset$, se $r = 0$) da subálgebra de Lie $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$. Denote por $\mathfrak{h}_r$ uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{g}_r$ gerada por H_i , $i = 1, \dots, r$. Seja $\mathfrak{h}_0 = 0$ e

$$\tilde{\mathfrak{h}}_r = \mathfrak{h}_r \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d.$$

Denote por E_{im}, F_{im}, H_{im} , $i = 1, \dots, n$, $m \in \mathbb{Z}$, os geradores da correspondente álgebra de Loop de $\mathfrak{g}$.

3.1.1 Álgebra de oscilação

Seja $\hat{\mathfrak{a}}$ a álgebra de Heisenberg de dimensão infinita com geradores $a_{ij,m}$, $a_{ij,m}^*$, e $\mathbf{1}$, com $1 \leq i \leq j \leq n$ e $m \in \mathbb{Z}$, munidos das relações

$$\begin{aligned} [a_{ij,m}, a_{kl,n}] &= [a_{ij,m}^*, a_{kl,n}^*] = 0, \\ [a_{ij,m}, a_{kl,n}^*] &= \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{m+n,0}\mathbf{1}, \\ [a_{ij,m}, \mathbf{1}] &= [a_{ij,m}^*, \mathbf{1}] = 0. \end{aligned}$$

Tal álgebra age em

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{ij,m} | i, j, m \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq j \leq n] \quad (3.1.1)$$

por

$$a_{ij,m} = \begin{cases} \partial/\partial x_{ij,m} & \text{se } m \geq 0 \text{ e } j \leq r, \\ x_{ij,m} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$a_{ij,m}^* = \begin{cases} x_{ij,-m} & \text{se } m \leq 0 \text{ e } j \leq r, \\ -\partial/\partial x_{ij,-m} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

com $\mathbf{1}$ agindo como identidade. Neste caso, $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ é um $\hat{\mathfrak{a}}$ -módulo gerado por v , onde

$$a_{ij,m}v = 0, \text{ se } m \geq 0 \text{ e } j \leq r,$$

$$a_{ij,m}^*v = 0, \text{ se } m > 0 \text{ ou } j > r.$$

Denote por $\hat{\mathfrak{a}}_r$ a subálgebra gerada por $a_{ij,m}$ e $a_{ij,m}^*$ e $\mathbf{1}$, onde $1 \leq i \leq j \leq r$ e $m \in \mathbb{Z}$. Se $r = 0$, então $\hat{\mathfrak{a}}_r = 0$. Seja $A_n = ((\alpha_i|\alpha_j))$ a matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ e seja $\mathfrak{B}$ a matriz cujas entradas são

$$\mathfrak{B}_{ij} = (\alpha_i|\alpha_j) \left(\gamma^2 - \delta_{i>r}\delta_{j>r}(r+1) + \frac{r}{2}\delta_{i,r+1}\delta_{j,r+1} \right), \quad (3.1.2)$$

$$\text{onde } \delta_{i>r} = \begin{cases} 1 & \text{se } i > r, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras,

$$\mathfrak{B} = \gamma^2 A_n - (r+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{n-r} \end{pmatrix} + r E_{r+1,r+1}. \quad (3.1.3)$$

Também temos a álgebra (de Lie) de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{b}}$ com geradores b_{im} , $1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{1}$, e relações

$$[b_{im}, b_{jp}] = m \mathfrak{B}_{ij} \delta_{m+p,0} \mathbf{1}, \quad [b_{im}, \mathbf{1}] = 0.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, fixe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então a álgebra $\widehat{\mathfrak{b}}$ age no espaço

$$\mathbb{C}[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[y_{im} | i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq n] \quad (3.1.4)$$

por

$$b_{i0} \mapsto \lambda_i, \quad b_{i,-m} \mapsto \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y}_m, \quad b_{im} \mapsto m \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} \quad \text{para } m > 0$$

e $\mathbf{1} \mapsto 1$. Aqui

$$\mathbf{y}_m = (y_{1m}, \dots, y_{nm}), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m} = \left(\frac{\partial}{\partial y_{1m}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{nm}} \right)$$

e $\mathbf{e}_i$ são vetores em $\mathbb{C}^n$ tais que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathfrak{B}_{ij}$ onde $\cdot$ é o produto escalar. Como $\mathfrak{B}_{ij}$ é simétrica, ela é ortogonalmente diagonalizável, isto é, existe uma matriz ortogonal P tal que $P^t \mathfrak{B} P$ é uma matriz diagonal e então podemos encontrar vetores $\mathbf{e}_i$ em $\mathbb{C}^n$ com tais propriedades. De fato, para $m \geq 0$ e $n < 0$, temos

$$\begin{aligned} [b_{im}, b_{jn}] &= [m \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_m}, \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{y}_{-n}] = m \sum_{k,l} [e_{ik} \frac{\partial}{\partial y_{km}}, e_{jl} y_{l,-n}] = m \delta_{m+n,0} \sum_k e_{ik} e_{jk} \\ &= m \delta_{m+n,0} \mathfrak{B}_{ij}. \end{aligned}$$

Definamos também, para $0 \leq r \leq n$,

$$\mathbb{C}_r[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[e_i y_m | i, m \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq r] \quad (3.1.5)$$

onde, se $\mathfrak{B}$ é não-degenerada, temos $\mathbb{C}_n[\mathbf{y}] = \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ (ver [CF05] para maiores detalhes).

Definição 3.1.6. Para qualquer sequência de elementos $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ no anel $\text{End}(V)$, V um espaço vetorial, a distribuição formal

$$a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^{-m-1}$$

é dita um campo se, para todo $v \in V$, $a_m v = 0$ para $m \gg 0$.

Sejam $a^-(z) = \sum_{m \geq 0} a_m z^{-m-1}$ e $a^+(z) = \sum_{m < 0} a_m z^{-m-1}$. Em particular,

$$\delta^-(z/w) = i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right),$$

$$\delta^+(z/w) = -i_{w,z} \left(\frac{1}{z-w} \right).$$

Observe que

$$-\partial_z \delta(z/w) = \partial_w \delta(z-w) = i_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right) - i_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right).$$

Definição 3.1.7. O produto ordenado normal de duas distribuições formais $a(z)$ e $b(w)$ é definido por

$$: a(z)b(w) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : a_m b_n : z^{-m-1} w^{-n-1}$$

donde segue que:

$$: a(z)b(w) := \begin{cases} a^+(z)b(w) + b(w)a^-(z), & \text{se } a(z) \text{ e } b(z) \text{ são campos,} \\ a(z)b(w) & \text{se } a(z) \text{ não é um campo,} \\ b(w)a(z) & \text{se } a(z) \text{ é um campo, mas } b(z) \text{ não é.} \end{cases}$$

Para todo $1 \leq i \leq j \leq n$, defina

$$a_{ij}^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{ij,n}^* z^{-n}, \quad (3.1.8)$$

$$a_{ij}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{ij,n} z^{-n-1}, \quad (3.1.9)$$

$$b_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{in} z^{-n-1}. \quad (3.1.10)$$

Observe que $a_{ij}(z)$ para $j > r$ não é um campo, enquanto que $a_{ij}^*(z)$ é. Se $j > r$, chamemos $a_{ij}(z)$ de operador de criação puro e $a_{ij}^*(z)$ de aniquilação. Para $j > r$, seja

$$a_{ij}(z)_+ = a_{ij}(z), \quad a_{ij}(z)_- = 0, \quad a_{ij}^*(z)_+ = 0 \text{ e } a_{ij}^*(z)_- = a_{ij}^*(z). \quad (3.1.11)$$

Definição 3.1.12. Por indução, definimos o produto ordenado normal de três ou mais distribuições formais da seguinte forma.

$$: a^1(z_1) a^2(z_2) \cdots a^m(z_m) := : a^1(z_1) (: a^2(z_2) \cdots a^m(z_m) :) : \quad (3.1.13)$$

e também

$$: a(z)b(z) := \lim_{w \rightarrow z} : a(z)b(w) : \quad (3.1.14)$$

para apenas alguns pares $a(z)$ e $b(z)$ satisfazendo determinadas propriedades uma vez que nem sempre tal limite está bem-definido. No nosso caso, o produto ordenado

$$: a_{ij}(z) a_{kl}^*(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} : a_{ij,n} a_{kl,m-n} : \right) z^{-m-1}$$

está bem-definido como um elemento em $\text{End}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}])[[z, z^{-1}]]$, para todo $l > r$ (já que $a_{kl,m}^* = -\partial/\partial x_{kl,-m}$, para $l > r$) ou caso $l \leq r$ e $j \leq r$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} [b_i(z), b_j(w)] &= \sum_{m,n} [b_{i,m}, b_{j,n}] z^{-m-1} w^{-n-1} \\ &= \sum_{m,n} m \delta_{ij} \delta_{m+n,0} z^{-m-1} w^{-n-1} \\ &= \sum_m m \delta_{ij} z^{-m-1} w^{m-1} \\ &= \mathfrak{B}_{ij} \partial_w \delta(z/w) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
[a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] &= \sum_{m,n} [a_{\alpha,m}, a_{\beta,n}^*] z^{-m-1} w^{-n} \\
&= \sum_m \delta_{\alpha,\beta} \mathbf{1} z^{-m-1} w^m \\
&= \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{1} \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Definição 3.1.15. Denote por

$$[ab] = a(z)b(w) - :a(z)b(w): = \begin{cases} [a^-(z), b(w)], & \text{se } a(z) \text{ e } b(z) \text{ são campos,} \\ 0 & \text{se } a(z) \text{ não é um campo,} \\ [a(z), b(w)] & \text{se } a(z) \text{ é um campo, mas } b(z) \text{ não é.} \end{cases} \quad (3.1.16)$$

a contração de duas distribuições formais $a(z)$ e $b(w)$.

Por exemplo, se $j, l \leq r$, então

$$[a_{ij} a_{kl}^*] = \sum_{m \geq 0} \delta_{ik} \delta_{jl} z^{-m-1} w^m = \delta_{i,k} \delta_{j,l} \delta^-(z/w) = \delta_{ik} \delta_{jl} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right), \quad (3.1.17)$$

$$[a_{kl}^* a_{ij}] = - \sum_{n < 0} \delta_{ik} \delta_{jl} z^n w^{-n-1} = -\delta_{ik} \delta_{jl} \delta^+(w-z) = \delta_{ik} \delta_{jl} i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right). \quad (3.1.18)$$

Teorema 3.1.19 (Teorema de Wick, [Kac98]). Sejam $a_i(z)$ e $b_j(z)$ distribuições formais com coeficientes na álgebra associativa $\text{End}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}])$, satisfazendo

1. $[a_i b_j], c_k(z) = 0$, para todo i, j, k e $c = a$ ou $c = b$,
2. $[a_i^\pm(z), b_j^\pm(w)] = 0$ para todo i e j .

Então

$$:a_1(z) a_2(z) \cdots a_k(z) : b(w) = \sum_{i=1}^k : a_1(z) \cdots [a_i b] \cdots a_k(z) :$$

e

$$\begin{aligned}
&:a_1(z) \cdots a_m(z) :: b_1(w) \cdots b_k(w) := \\
&= \sum_{s=0}^{\min(m,k)} \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ j_1 \neq \cdots \neq j_s}} [a_{i_1} b_{j_1}] \cdots [a_{i_s} b_{j_s}] : a_1(z) \cdots a_m(z) b_1(w) \cdots b_k(w) :_{(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s)}
\end{aligned}$$

onde os subscritos $(i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s)$ significam que tais fatores $a_i(z)$, $b_j(w)$ com índices $i \in \{i_1, \dots, i_s\}$, $j \in \{j_1, \dots, j_s\}$ estão omitidos do produto $:a_1(z) \cdots a_m(z) b_1(w) \cdots b_k(w):$.

Teorema 3.1.20 ([Kac98], Teorema 1.4.3 e 2.3.2). São verdadeiros

(a) Seja $a(z)$ uma distribuição formal. Então na região $|z-w| < |w|$,

$$a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \partial_w^{(j)} a(w) (z-w)^j. \quad (3.1.21)$$

(b) Sejam $a(z)$ e $b(z)$ distribuições formais com coeficientes na álgebra associativa $\text{End}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}])$. São equivalentes:

1. $[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} \partial_w^{(j)} \delta(z/w) c^j(w)$, onde $c^j(w) \in \text{End}(\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}])[[w, w^{-1}]]$.
2. $[ab] = \sum_{j=0}^{N-1} i_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w)$.

Em outras palavras, a parte singular das *expansões de produtos de operadores*

$$[ab] = \sum_{j=0}^{N-1} i_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^{j+1}} \right) c^j(w)$$

determinam completamente o colchete das distribuições formais $a(z)$ e $b(w)$. Escrevamos

$$a(z)b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z-w)^{j+1}}.$$

Por exemplo, temos

$$b_i(z)b_j(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{(z-w)^2}.$$

(para maiores detalhes, ver capítulo 2 de [Kac98])

3.1.2 Cálculos de campos

Seja

$$\mathcal{H}_i(z) := 2 : a_{ii} a_{ii}^* : + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji} a_{ji}^* : - : a_{j,i-1} a_{j,i-1}^* : \right) + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij} a_{ij}^* : - : a_{i+1,j} a_{i+1,j}^* : \right),$$

onde a_{ij} e a_{ij}^* denotam respectivamente $a_{ij}(z)$ e $a_{ij}^*(z)$. Para todos $\alpha \in \Delta^+$ podemos encontrar únicos $1 \leq k \leq l \leq n$ tais que

$$\alpha = \alpha_k + \cdots + \alpha_l.$$

Seja $a_\alpha = a_{kl}$ e $a_\alpha^* = a_{kl}^*$. Observe que

$$(\alpha_i | \alpha) = \sum_{j=k}^l (\alpha_i | \alpha_j) = \left(2\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{k<i} \left(\delta_{il} - \delta_{i-1,l} \right) + \delta_{l>i} \left(\delta_{ik} - \delta_{i+1,k} \right) \right).$$

Além disso, temos

$$[a_\alpha a_\beta^*] = \begin{cases} \delta_{\alpha,\beta} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) & \text{se } \alpha, \beta \in \Delta_r^+, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1.22)$$

$$[a_\alpha^* a_\beta] = \begin{cases} -\delta_{\alpha,\beta} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) & \text{se } \alpha, \beta \in \Delta_r^+, \\ -\delta_{\alpha,\beta} \delta(w/z) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1.23)$$

Reescrevamos

$$\mathcal{H}_i(z) := \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) : a_\alpha a_\alpha^* : .$$

Lema 3.1.24. Para $1 \leq i \leq j \leq n$, com $\alpha, \beta \in \Delta^+$, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (a) [\mathcal{H}_i(z), a_\alpha(w)] &= -\delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) a_\alpha(z) \delta(z/w), \\ (b) [\mathcal{H}_i(z), a_\alpha^*(w)] &= \delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) a_\alpha^*(z) \delta(z/w), \\ (c) [\mathcal{H}_i(z), \partial_w a_\alpha^*(w)] &= \delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) a_\alpha^*(z) \partial_w \delta(z/w), \\ (d) [\mathcal{H}_i(z), H_j(w)] &= -(\alpha_i | \alpha_j) \left((1 - \delta_{i>r} \delta_{j>r}) (r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \delta_{j,r+1} \right) \partial_w \delta(z/w), \\ (e) [\mathcal{H}_i(z), : a_\alpha(w) a_\beta(w) a_\gamma^*(w) :] &= (\alpha_i | \gamma - \alpha + \beta) : a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : \delta(z/w) \\ &\quad - \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) (\delta_{\alpha,\beta} a_\gamma^*(w) + \delta_{\alpha,\gamma} a_\beta^*(w)) \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Teorema de Wick, temos

$$\begin{aligned} \sum_j : a_{ij}(z) a_{ij}^*(z) : a_{kl}(w) &= \sum_j (: a_{ij}(z) [a_{ij}^* a_{kl}] : + : [a_{ij} a_{kl}] a_{ij}^* :) \\ &= \sum_j \left(-\delta_{ik} \delta_{jl} : a_{ij}(z) i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) : + 0 \right) \\ &= \delta_{ik} : a_{kl}(z) i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right) : \\ &= \delta_{ik} a_{kl}(z) i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right). \end{aligned}$$

Como $\alpha = \alpha_k + \dots + \alpha_l$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(z) a_{kl}(w) &= \left(2 : a_{ii} a_{ii}^* : + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji} a_{ji}^* : - : a_{j,i-1} a_{j,i-1}^* : \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij} a_{ij}^* : - : a_{i+1,j} a_{i+1,j}^* : \right) \right) a_{kl}(w) \\ &\sim -\delta_{1 \leq i, l \leq r} \left(2\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{k < i} (\delta_{il} - \delta_{i-1,l}) + \delta_{l > i} (\delta_{ik} - \delta_{i+1,k}) \right) a_{kl}(z) i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right) \\ &\quad - \delta_{r < l} \left(2\delta_{ik} \delta_{il} + \delta_{k < i} (\delta_{il} - \delta_{i-1,l}) + \delta_{l > i} (\delta_{ik} - \delta_{i+1,k}) \right) a_{kl}(z) \delta(z/w) \\ &\sim \delta_{1 \leq i, l \leq r} (\alpha_i | \alpha) a_{kl}(z) i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right) - \delta_{r < l} (\alpha_i | \alpha) a_{kl}(z) \delta(z/w). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$a_{kl}(w) \mathcal{H}_i(z) \sim \delta_{1 \leq i, l \leq r} (\alpha_i | \alpha) a_{kl}(w) i_{w,z} \left(\frac{1}{z-w} \right)$$

e assim

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_i(z), a_\alpha(w)] &= \delta_{1 \leq i, j \leq r} (\alpha_i | \alpha) a_{kl}(z) \delta(z/w) - \delta_{r < l} (\alpha_i | \alpha) a_{kl}(z) \delta(z/w) \\ &= \delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) a_\alpha(z) \delta(z/w), \end{aligned}$$

o que prova (a). Cálculos similares provam (b). Para mostrar (c), basta observar que

$$[\mathcal{H}_i(z), \partial_w a_\alpha^*(w)] = \partial_w([\mathcal{H}_i(z), a_\alpha^*(w)]) = \delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_i | \alpha) a_\alpha^*(z) \partial_w \delta(z/w).$$

Quanto à (d), temos pelo Teorema de Wick:

$$\begin{aligned} : a_\nu(z) a_\mu^*(z) : : a_\alpha(w) a_\beta^*(w) : &= : a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\nu(z) a_\mu^*(z) : + [a_\alpha a_\beta^*] : a_\nu(z) a_\beta^* : \\ &+ [a_\beta^* a_\nu] a_\alpha(w) a_\mu^*(z) : + [a_\alpha a_\mu^*] [a_\beta^* a_\nu]. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(z) \mathcal{H}_j(w) &= \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \beta) : a_\alpha(z) a_\alpha^*(z) : : a_\beta(w) a_\beta^*(w) : \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \beta) : a_\alpha(z) a_\beta(w) a_\alpha^*(z) a_\beta^*(w) : + \sum_{\beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \beta) (\alpha_j | \beta) : a_\beta(w) a_\beta^*(z) : [a_\beta^* a_\beta] \\ &+ \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) : a_\alpha(z) a_\alpha^*(w) : [a_\alpha^* a_\alpha] + \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) [a_\alpha^* a_\alpha] [a_\alpha a_\alpha^*] \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \beta) : a_\alpha(z) a_\beta(w) a_\alpha^*(z) a_\beta^*(w) : + \sum_{\beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \beta) (\alpha_j | \beta) : a_\beta(w) a_\beta^*(z) : [a_\beta^* a_\beta] \\ &+ \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) : a_\alpha(z) a_\alpha^*(w) : [a_\alpha^* a_\alpha] \\ &+ \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) \left(-i_{z,w} \left(\frac{1}{w-z} \right) \right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \beta) : a_\alpha(z) a_\beta(w) a_\alpha^*(z) a_\beta^*(w) : + \sum_{\beta \in \Delta^+} (\alpha_i | \beta) (\alpha_j | \beta) : a_\beta(w) a_\beta^*(z) : [a_\beta^* a_\beta] \\ &+ \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) : a_\alpha(z) a_\alpha^*(w) : [a_\alpha^* a_\alpha] + \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) i_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right). \end{aligned}$$

Logo ao considerarmos $[\mathfrak{h}_i(z), \mathfrak{h}_j(w)]$, teremos que as três primeiras parcelas se cancelam sobrando apenas a última, o que nos dá

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_i(z), \mathcal{H}_j(w)] &= \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\alpha_i | \alpha) (\alpha_j | \alpha) \left(i_{w,z} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right) - i_{z,w} \left(\frac{1}{(z-w)^2} \right) \right) \\ &= -(\alpha_i | \alpha_j) \left((1 - \delta_{i>r} \delta_{j>r}) (r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \delta_{j,r+1} \right) \partial_w \delta(z/w) \end{aligned}$$

já que, para $j \leq r$, temos

$$\sum_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_j | \alpha) \alpha = (r+1) \alpha_j, \text{ e } \sum_{\alpha \in \Delta_r^+} (\alpha_{r+1} | \alpha)^2 = r.$$

Finalmente, provemos (e):

$$\begin{aligned} : a_\nu(z) a_\nu^*(z) : : a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : &= : a_\nu(z) a_\beta^*(z) a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : \\ &+ [a_\nu^* a_\alpha] : a_\nu(z) a_\beta^*(w) : + [a_\nu a_\beta^*] : a_\alpha(w) a_\nu^*(z) a_\gamma^*(w) : \\ &+ [a_\nu a_\gamma^*] : a_\alpha(w) a_\beta^*(z) a_\gamma^*(z) : + [a_\nu^* a_\alpha] [a_\nu a_\beta^*] a_\gamma^*(w) + [a_\nu^* a_\alpha] [a_\nu a_\gamma^*] a_\beta^*(w). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_i(z) : a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) &:= \sum_{\nu \in \Delta^+} (\alpha_i | \nu) : a_\nu(z) a_\nu^*(z) :: a_\alpha(w) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : \\
&\sim \sum_{\nu \in \Delta^+} (\alpha_i | \nu) \left(\left([a_\nu^* a_\alpha] : a_\nu(z) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : + [a_\nu a_\beta^*] : a_\alpha(w) a_\nu^*(z) a_\gamma^*(w) : \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [a_\nu a_\gamma^*] : a_\alpha(w) a_\beta^*(z) a_\nu^*(z) : \right) + \left([a_\nu^* a_\alpha] [a_\nu a_\beta^*] a_\gamma^*(w) + [a_\nu^* a_\alpha] [a_\nu a_\gamma^*] a_\beta^*(w) \right) \right) \\
&\sim \left((\alpha_i | \alpha) [a_\alpha^* a_\alpha] : a_\alpha(z) a_\beta^*(w) a_\gamma^*(w) : + (\alpha_i | \beta) [a_\beta a_\beta^*] : a_\alpha(w) a_\beta^*(z) a_\gamma^*(w) : \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_i | \gamma) [a_\gamma a_\gamma^*] : a_\alpha(z) a_\beta^*(z) a_\mu^*(w) \right) : + (\alpha_i | \alpha) \left(\delta_{\alpha, \beta} a_\gamma^*(w) + \delta_{\alpha, \gamma} a_\beta^*(w) \right) [a_\alpha^* a_\alpha] [a_\alpha a_\alpha^*],
\end{aligned}$$

o que nós dá o resultado desejado. $\square$

Lema 3.1.25. *São verdadeiras as relações*

- (1) $[a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(z/w),$
- (2) $[a_{ij}(z) a_{ij}^*(z), a_{ij}(w) a_{ij}^*(w)] = \delta_{1 \leq i, j \leq r} \partial_w \delta(z/w),$
- (3) $[a_{ij}(z), \partial_w a_{kl}^*(w)] = \delta_{ik} \delta_{jl} \partial_w \delta(z/w),$
- (4) $\partial_w a_{ij}^*(w) \delta(z/w) = a_{ij}^*(z) \partial_w \delta(z/w) - a_{ij}^*(w) \partial_w \delta(z/w).$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(1) \quad [a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)] &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} [a_{ij, n}, a_{kl, m}] z^{-n-1} w^{-m} = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{m, -n} z^{-n-1} w^{-m} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{ik} \delta_{jl} z^{-n-1} w^n = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad [a_{ij}(z) a_{ij}^*(z), a_{ij}(w) a_{ij}^*(w)] &= a_{ij}(z) [a_{ij}^*(z), a_{ij}(w)] a_{ij}^*(w) + a_{ij}(w) [a_{ij}(z), a_{ij}^*(w)] a_{ij}^*(z) \\
&= -a_{ij}(z) \delta(z/w) a_{ij}^*(w) + a_{ij}(w) \delta(z/w) a_{ij}^*(z) \\
&= \delta_{1 \leq i, j \leq r} \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Derivando a expressão (1) em w , temos

$$(3) \quad \delta_{ik} \delta_{jl} \partial_w \delta(z/w) = \partial_w ([a_{ij}(z), a_{kl}^*(w)]) = [a_{ij}(z), \partial_w a_{kl}^*(w)]$$

e, para finalizar,

$$\begin{aligned}
(4) \quad a_{ij}^*(z) \partial_w \delta(z/w) &= \partial_w (a_{ij}^*(z) \delta(z/w)) = \partial_w (a_{ij}^*(w) \delta(z/w)) \\
&= \partial_w a_{ij}^*(w) \delta(z/w) + a_{ij}^*(w) \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\partial_w a_{ij}^*(w) \delta(z/w) = a_{ij}^*(z) \partial_w \delta(z/w) - a_{ij}^*(w) \partial_w \delta(z/w),$$

o que prova o Lema. $\square$

Lema 3.1.26. *São verdadeiras as relações*

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n [a_{ik}(z)a_{i+1,k}^*(z), a_{jl}(w)a_{j+1,l}^*(w)] \\
&= \left(\delta_{i,j+1} \sum_{k=j+2}^n a_{jk}(z)a_{j+2,k}^*(z) - \delta_{j,i+1} \sum_{k=i+2}^n a_{ik}(z)a_{i+2,k}^*(z) \right) \delta(z/w), \\
(b) \quad & \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left[a_{k,i-1}(z)a_{ki}^*(z), a_{jl}(w)a_{j+1,l}^*(w) \right] = -\delta_{j,i-1} a_{i-1,i-1}(z)a_{ii}^*(z) \delta(z/w), \\
(c) \quad & \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , a_{jl}(w)a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&\quad - \sum_{k=1}^i \sum_{l=j+1}^n \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{jl}(w)a_{j+1,l}^*(w) \right] = 0, \\
(d) \quad & \sum_{k=1}^{i-1} \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , a_{jj}(w) \right] - \sum_{k=1}^i \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{jj}(w) \right] = \\
&\quad - \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{k,i-1}(z)a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{ki}(z)a_{ki}^*(z) : \right) \delta(z/w) \\
&\quad - (\delta_{j,i-1} a_{i-1,i-1}(z)a_{ii}^*(z) - \delta_{ij} : a_{ii}(z)a_{ii}^*(z) :) \delta(z/w), \\
(e) \quad & \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} : a_{jj}^* a_{l,j-1} a_{l,j-1}^* : \right] \\
&= \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z)a_{i-1,i-1}^*(z)a_{k,i-2}(w)a_{k,i-2}^*(w) : \delta(z/w) \\
&\quad - \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{jj}^*(w)a_{j-1,j-1}^*(w)a_{l,j-2}(z)a_{l,j-2}^*(z) : \delta(z/w) \\
&\quad - (i-1)\delta_{1 \leq i-1 \leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w), \\
(f) \quad & \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , \sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right] \\
&= \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z)a_{i-1,i-1}^*(z)a_{k,i-1}(w)a_{k,i-1}^*(w) : \delta(z/w) \\
&\quad - \delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(w)a_{ii}^*(w)a_{l,i-1}(z)a_{l,i-1}^*(z) : \delta(z/w) \\
&\quad - i\delta_{1 \leq i-1 \leq r} \delta_{j,i-1} : a_{ii}^*(z)a_{i-1,i-1}^*(w) : \partial_w \delta(z/w), \\
(g) \quad & \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , \sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right] \\
&= -(3+i)\delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h) & \sum_{l=j+1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] - \sum_{k=1}^i \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] \right) \\
&= -\delta_{j,i-1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^*(w) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{i-1,i}^*(w) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \right) \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{i \leq r} \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^*(z) \partial_w \delta(z/w), \\
(i) & \sum_{k=1}^{i-1} \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] - \sum_{k=1}^i \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] \\
&= \left(\delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{l,i-1}^* : - 2\delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{l,i-1} a_{li}^* : + \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^* a_{li} a_{l,i+1}^* : \right. \\
&\quad \left. - \delta_{i,j-1} \left(\sum_{l=1}^{i-1} : a_{i,i+1}^* a_{l,i-1} a_{l,i-1}^* : - \sum_{l=1}^i : a_{i,i+1}^* a_{li} a_{li}^* : \right) \right) \delta(z/w), \\
(j) & \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1} a_{ki}^* , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] = \left(\delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{l,i-2} a_{li}^* : - \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{l,j-2} a_{lj}^* : \right) \delta(z/w), \\
(k) & \left[\sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k}(z) a_{ik}^*(z) , \sum_{l=j+1}^n a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] \\
&= \left(\delta_{i,j-1} \sum_{l=i+2}^n : a_{i+2,l} a_{il}^* : - \delta_{j,i-1} \sum_{l=j+2}^n : a_{j+2,k} a_{jk}^* : \right) \delta(z/w), \\
(l) & \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}(z) a_{ki}^*(z) , \sum_{l=j+1}^n a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
(a) & \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n \left[a_{ik}(z) a_{i+1,k}^*(z) , a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&= \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n \left(a_{jl}(w) \left[a_{ik}(z) , a_{j+1,l}^*(w) \right] a_{i+1,k}^*(z) + a_{ik}(z) \left[a_{i+1,k}^*(z) , a_{jl}(w) \right] a_{j+1,l}^*(w) \right) \\
&= \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n \left(a_{jl}(w) \delta_{i,j+1} \delta_{kl} \delta(z/w) a_{i+1,k}^*(z) + a_{ik}(z) \left(-\delta_{j,i+1} \delta_{kl} \delta(z/w) \right) a_{j+1,l}^*(w) \right) \\
&= \delta_{i,j+1} \left(\sum_{k=j+2}^n a_{jk}(w) \delta(z/w) a_{j+2,k}^*(z) \right) - \delta_{j,i+1} \left(\sum_{i+2}^n a_{ik}(z) \delta(z/w) \right) a_{i+2,k}^*(w) \\
&= \left(\delta_{i,j+1} \sum_{k=j+2}^n a_{jk}(z) a_{j+2,k}^*(z) - \delta_{j,i+1} \sum_{k=i+2}^n a_{ik}(z) a_{i+2,k}^*(z) \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) & \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left[a_{k,i-1}(z) a_{ki}^*(z), a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left(a_{k,i-1}(z) \left[a_{ki}^*(z), a_{jl}(w) \right] a_{j+1,l}^*(w) + a_{jl}(w) \left[a_{k,i-1}(z), a_{j+1,l}^*(w) \right] a_{ki}^*(z) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left(a_{k,i-1}(z) \left(-\delta_{kj} \delta_{il} \delta(z/w) \right) a_{j+1,l}^*(w) + a_{jl}(w) \delta_{k,j+1} \delta_{i-1,l} \delta(z/w) a_{ki}^*(z) \right) \\
&= -\delta_{j,i-1} a_{i-1,i-1}(z) a_{ii}^*(z) \delta(z/w). \\
(c) & \sum_{l=j+1}^n \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&= \sum_{l=j+1}^n \sum_{k=1}^{i-1} \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , a_{jl} a_{j+1,l}^* \right] - \sum_{l=j+1}^n \sum_{k=1}^i \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{jl} a_{j+1,l}^* \right] \\
&= \delta_{i \geq j+1} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* a_{i+1,i}^* : \delta(z/w) - \delta_{j+1 \leq i-1} : a_{j,i-1} a_{ii}^* a_{j+1,i-1}^* : \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{j+1 \leq i-1} : a_{j,i-1} a_{ii}^* a_{j+1,i-1}^* : \delta(z/w) + \delta_{ij} \delta_{i \geq j+1} \sum_{k=1}^i : a_{ki} a_{ki}^* a_{j+1,l}^* : \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{j \leq i-1} : a_{ji} a_{ii}^* a_{j+1,i}^* : \delta(z/w) - \delta_{j \leq i-1} : a_{ji} a_{ii}^* a_{j+1,i}^* : \delta(z/w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para (d), temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : a_{jj}(w) - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : a_{jj}(w) \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} : [a_{ii}^* a_{jj}] a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : + \sum_{k=1}^i : [a_{ii}^* a_{jj}] a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \\
&\quad + \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{k,i-1}(z) [a_{k,i-1}^* a_{jj}] : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{k,i}(z) [a_{ki}^* a_{jj}] : \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \delta_{ij} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) : a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i \delta_{ij} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) : a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \\
&\quad + \delta_{jk} \delta_{j,i-1} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}(z) : - \delta_{jk} \delta_{ji} i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) : a_{ii}^*(z) a_{ii}(z) : .
\end{aligned}$$

De forma análoga, fazemos os cálculos para

$$a_{jj}(w) \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : a_{jj}(w) - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \right)$$

obtendo (d).

Pelo Teorema de Wick, temos

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : \right) \left(\sum_{l=1}^{j-1} : a_{jj}^* a_{l,j-1} a_{l,j-1}^* : \right) \\
& \sim \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-2}(w) a_{k,i-2}^*(w) : [a_{i-1,i-1} a_{jj}^*] \\
& + \delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) a_{l,i-1}(w) a_{l,i-1}^*(z) : [a_{i-1,i-1} a_{j-1,j-1}^*] \\
& + \delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) a_{l,i-1}(z) a_{l,i-1}^*(w) : [a_{i-1,i-1}^* a_{j-1,j-1}] \\
& + \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{jj}^*(w) a_{j-1,j-1}^*(w) a_{l,j-2}(z) a_{l,j-2}^*(z) : [a_{i,i}^* a_{j-1,j-1}] \\
& + \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \left(\sum_{l=1}^{i-1} [a_{l,i-1} a_{l,j-1}^*] [a_{l,i-1}^* a_{l,j-1}] \right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
(e) & \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} : a_{jj}^* a_{l,j-1} a_{l,j-1}^* : \right] \\
& = \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-2}(w) a_{k,i-2}^*(w) : \delta(z/w) \\
& + \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{jj}^*(w) a_{j-1,j-1}^*(w) a_{l,j-2}(z) a_{l,j-2}^*(z) : \delta(z/w) \\
& - (i-1) \delta_{1 \leq i-1 \leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema de Wick

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : \right) \left(\sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right) \sim \delta_{ij} : a_{ii}^*(z)^2 \left(\sum_{k=1}^i a_{ki}(w) a_{ki}^*(w) \right) : [a_{ii} a_{jj}^*] \\
& + \delta_{ij} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) a_{li}(w) a_{li}^*(z) : [a_{ii} a_{jj}^*] + \delta_{ij} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^*(w) a_{ii}^*(z) a_{li}(z) a_{li}^*(w) : [a_{ii}^* a_{jj}] \\
& + \delta_{ij} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) a_{li}(z) a_{li}^*(w) : [a_{ii}^* a_{jj}] + 3 \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : [a_{ii} a_{jj}^*] [a_{ii}^* a_{jj}] \\
& + \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \left(\sum_{l=1}^i [a_{li} a_{lj}^*] [a_{li}^* a_{lj}] \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : \right) \left(\sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right) \\
& \sim \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-1}(w) a_{k,i-1}^*(w) : [a_{i-1,i-1} a_{jj}^*] \\
& \quad + \delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) a_{l,i-1}(w) a_{l,i-1}^*(z) : [a_{i-1,i-1} a_{jj}^*] \\
& \quad + \delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(w) a_{ii}^*(w) a_{l,i-1}(z) a_{l,i-1}^*(z) : [a_{i-1,i-1}^* a_{j-1,j-1}] \\
& \quad + \delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) a_{l,i-1}(z) a_{l,i-1}^*(w) : [a_{jj}^* a_{i-1,i-1}] \\
& \quad + \delta_{j,i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) : [a_{i-1,i-1} a_{i-1,i-1}^*] [a_{i-1,i-1}^* a_{i-1,j-1}] \\
& \quad + \delta_{j,i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) : \left(\sum_{l=1}^{i-1} [a_{l,i-1} a_{l,j-1}^*] [a_{l,i-1}^* a_{l,j-1}] \right).
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
(f) & \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* :, \sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right] \\
& = \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-1}(w) a_{k,i-1}^*(w) : \delta(z/w) \\
& \quad + \delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^*(w) a_{ii}^*(w) a_{l,i-1}(z) a_{l,i-1}^*(z) : \delta(z/w) \\
& \quad - i \delta_{1 \leq i-1 \leq r} \delta_{j,i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) : \partial_w \delta(z/w). \\
(g) & \left[\sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* :, \sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{lj} a_{lj}^* : \right] = -(3+i) \delta_{1 \leq i \leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Agora não temos contrações duplas para $i = j + 1 \leq r$, $l = i$ e $k = j$. Logo

$$\begin{aligned}
(h) \quad & \sum_{l=j+1}^n \left[\sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] \\
&= -\delta_{j,i-1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^*(w) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{i-1,i}^*(w) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \right) \delta(z/w) \\
&\quad - \delta_{j+1 \leq i-1} : a_{ii}^* a_{j+1,i-1}(z) a_{j,i-1}^*(z) : \delta(z/w) + \delta_{j+1 \leq i} : a_{ii}^* a_{j+1,i}(z) a_{j,i}^*(z) : \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{j+1 \leq i-1} a_{ii}^* a_{j+1,i-1}(z) a_{j,i-1}^*(z) \delta(z/w) - \delta_{j+1 \leq i} : a_{ii}^* a_{j+1,i}(z) a_{j,i}^*(z) : \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{i \leq r} \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&= -\delta_{j,i-1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^*(w) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{i-1,i}^*(w) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \right) \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{i \leq r} \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^*(z) \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Em (i), também não temos contrações duplas, o que nos dá

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_{k=1}^{i-1} \left[: a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] - \sum_{k=1}^i \left[: a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* : , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] \\
&= \left(-\delta_{i,j-1} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* a_{i,i+1}^* : - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i}^* : \right. \\
&\quad + \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{k,i-2} a_{k,i-1}^* : + \delta_{i,j-1} \sum_{k=1}^i : a_{ki} a_{ki}^* a_{i,i+1}^* : \\
&\quad \left. - \delta_{ij} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{ki}^* : + \delta_{i,j-1} \sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{k,i+1}^* \right) \delta(z/w) \\
&= \left(\delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{l,i-1}^* : - 2\delta_{ij} \sum_{l=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{l,i-1} a_{li}^* : + \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^* a_{li} a_{l,i+1}^* : \right. \\
&\quad \left. - \delta_{i,j-1} \left(\sum_{l=1}^{i-1} : a_{i,i+1}^* a_{l,i-1} a_{l,i-1}^* : - \sum_{l=1}^i : a_{i,i+1}^* a_{li} a_{li}^* : \right) \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Para (j) e para (k), temos

$$(j) \quad \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1} a_{ki}^* , \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j-1} a_{lj}^* \right] = \left(\delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{l,i-2} a_{li}^* : - \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{l,j-2} a_{lj}^* : \right) \delta(z/w)$$

e também

$$a_{i+1,k}(z) a_{ik}^*(z) a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) = a_{i+1,k}(z) a_{jl}^*(w) [a_{ik}^* a_{j+1,l}] + a_{ik}^*(z) a_{j+1,l}(w) [a_{i+1,k} a_{jl}^*]$$

já que em (k), não temos contrações duplas (pois só temos $i + 1 = j$, $k = l$ e $i = j + 1$).

Assim

$$\begin{aligned}
(k) & \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n \left[a_{i+1,k}(z) a_{ik}^*(z), a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] \\
&= \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n a_{i+1,k}(z) \left[a_{ik}^*(z), a_{j+1,l}(w) \right] a_{jl}^*(w) \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n a_{ik}^*(z) \left[a_{i+1,k}(z), a_{jl}^*(w) \right] a_{j+1,l}(w) \\
&= \left(\delta_{i,j-1} \sum_{l=i+2}^n : a_{i+2,l} a_{il}^* : - \delta_{j,i-1} \sum_{l=j+2}^n : a_{j+2,k} a_{jk}^* : \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
(l) & \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n \left[a_{k,i-1}(z) a_{ki}^*(z), a_{j+1,l}(w) a_{jl}^*(w) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n a_{ki}^*(z) a_{j+1,l}(w) \delta_{k,j} \delta_{l,i-1} \delta(z/w) - \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{l=j+1}^n a_{k,i-1}(z) a_{jl}^*(w) \delta_{k,j+1} \delta_{i,l} \delta(z/w) \\
&= \delta_{j \leq i-2} a_{j+1,i-1}(w) a_{ji}^*(z) \delta(z/w) - \delta_{j \leq i-2} a_{j+1,i-1}(z) a_{ji}^*(w) \delta(z/w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

3.1.3 A representação

Teorema 3.1.27. *Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e seja $\lambda_i = \lambda(H_i)$. A função ρ obtida através da função*

$$\begin{aligned}
\rho(F_i)(z) &= a_{ii}(z) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(z) a_{i+1,j}^*(z), \\
\rho(H_i)(z) &= 2 : a_{ii}(z) a_{ii}^*(z) : + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji}(z) a_{ji}^*(z) : - : a_{j,i-1}(z) a_{j,i-1}^*(z) : \right) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij}(z) a_{ij}^*(z) : - : a_{i+1,j}(z) a_{i+1,j}^*(z) : \right) + b_i, \\
\rho(E_i)(z) &= \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{k,i-1}(z) a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z) a_{ki}(z) a_{ki}^*(z) : \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k}(z) a_{ik}^*(z) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}(z) a_{ki}^*(z) - a_{ii}^*(z) b_i(z) \\
&\quad - (\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2) \partial a_{ii}^*(z), \\
\rho(c) &= \gamma^2 - (r+1),
\end{aligned}$$

escrita na linguagem de distribuições formais (ver Teorema 2.2.4) define uma ação no espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ via geradores $c, E_{im}, F_{im}, H_{im}$, $i = 1, \dots, n$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Para simplificar, denotemos a_{ij} ao invés de $a_{ij}(z)$, a_{ij}^* ao invés de $a_{ij}^*(z)$ e b_i ao invés

de $b_i(z)$. Este teorema define uma realizao tipo bson de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$ e uma estrutura de mdulo no espao de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}]$ que depende do parmetro $0 \leq r \leq n$ o qual chamamos de mdulos intermedirios de Wakimoto. Agora demonstremos o teorema acima checando as relaes (R_1) - (R_6) .

Lema 3.1.28. (R_1) $[\rho(H_i)(z), \rho(H_j)(w)] = (\alpha_i | \alpha_j) \rho(c) \partial_w \delta(z/w)$.

Demonstrao. Temos

$$\begin{aligned} [\rho(H_i)(z), \rho(H_j)(w)] &= [\mathcal{H}_i(z) + b_i(z), \mathcal{H}_j(z) + b_j(z)] \\ &= \left(-(\alpha_i | \alpha_j) \left((1 - \delta_{i>r} \delta_{j>r})(r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \delta_{j,r+1} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_i | \alpha_j) \left(\gamma^2 - \delta_{i>r} \delta_{j>r}(r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \delta_{j,r+1} \right) \right) \partial_w \delta(z/w) \\ &= (\alpha_i | \alpha_j) \rho(c) \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.29. (R_2) $[\rho(H_i)(z), \rho(E_j)(w)] = (\alpha_i | \alpha_j) \rho(E_j)(z) \delta(z/w)$.

Demonstrao. Temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_i(z), \rho(E_j)(w)] &= \left[\mathcal{H}_i(z), \sum_{k=1}^{j-1} : a_{jj}^* a_{k,j-1} a_{k,j-1}^* : - \sum_{k=1}^j : a_{jj}^* a_{kj} a_{kj}^* : + \sum_{k=j+1}^n a_{j+1,k} a_{jk}^* \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j-1} a_{kj}^* - a_{jj}^* b_j - \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j\leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) \partial a_{jj}^* \right] \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \left[\mathcal{H}_i(z), : a_{jj}^* a_{k,j-1} a_{k,j-1}^* : \right] - \sum_{k=1}^j \left[\mathcal{H}_i(z), : a_{jj}^* a_{kj} a_{kj}^* : \right] \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^n \left[\mathcal{H}_i(z), a_{j+1,k} a_{jk}^* \right] - \sum_{k=1}^{j-1} \left[\mathcal{H}_i(z), a_{k,j-1} a_{kj}^* \right] - \left[\mathcal{H}_i(z), a_{jj}^* \right] b_j \\ &\quad - \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j\leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) \left[\mathcal{H}_i(z), \partial_w a_{jj}^*(w) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \left((\alpha_i | \alpha_j) : a_{jj}^* a_{k,j-1} a_{k,j-1}^* : \delta(z/w) - \delta_{1\leq j-1\leq r} (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_{j-1}) a_{jj}^*(w) \partial_w \delta(z/w) \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^j \left((\alpha_i | \alpha_j) : a_{jj}^* a_{kj} a_{kj}^* : \delta(z/w) \right. \\ &\quad \left. - \delta_{1\leq j\leq r} (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_j) \left(\delta_{jk} a_{kk}^*(w) + a_{jj}^*(w) \right) \partial_w \delta(z/w) \right) \\ &\quad + (\alpha_i | \alpha_j) \sum_{k=j+1}^n a_{j+1,k}(z) a_{jk}^*(w) \delta(z/w) - (\alpha_i | \alpha_j) \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j-1}(z) a_{kj}^*(w) \delta(z/w) \\ &\quad - (\alpha_i | \alpha_j) a_{jj}^*(z) b_j(w) \delta(z/w) - (\alpha_i | \alpha_j) \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j\leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_i | \alpha_j) \left(\sum_{k=1}^{j-1} : a_{jj}^* a_{k,j-1} a_{k,j-1}^* : - \sum_{k=1}^j : a_{jj}^* a_{kj} a_{kj}^* : \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=j+1}^n a_{j+1,k} a_{jk}^* - \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j-1} a_{kj}^* - a_{jj}^* b_j \right) \delta(z/w) \\
&\quad + \sum_{k=1}^j \delta_{1 \leq j \leq r} (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_j) (\delta_{jk} a_{kk}^*(w) + a_{jj}^*(w)) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{j-1} \left(\delta_{1 \leq j-1 \leq r} (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_{j-1}) a_{jj}^*(w) \partial_w \delta(z/w) \right) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_j) (\delta_{j>r} (r+1) + \delta_{j \leq r} (j+1) - \gamma^2) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

e também

$$[b_i(z), \rho(E_j)(w)] = -\mathfrak{B}_{ij} a_{jj}(w) \partial_w \delta(z/w).$$

São três casos a considerar

- Caso $j \leq r$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^j (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_j) (\delta_{jk} a_{kk}^*(w) + a_{jj}^*(w)) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{j-1} (\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_{j-1}) a_{jj}^*(w) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_j) (\delta_{j>r} (r+1) + \delta_{j \leq r} (j+1) - \gamma^2) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_j) \left(\gamma^2 - \delta_{i>r} \delta_{j>r} (r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \delta_{j,r+1} \right) a_{jj}(w) \partial_w \delta(z/w) \\
&= (j+1) (\alpha_i | \alpha_j) a_{jj}^*(w) \partial_w \delta(z/w) - (\alpha_i | \alpha_j) (j+1 - \gamma^2) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_j) \gamma^2 a_{jj}(w) \partial_w \delta(z/w) \\
&= -(\alpha_i | \alpha_j) (j+1 - \gamma^2) \partial_w a_{jj}(w) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

- Caso $j = r+1$.

$$\begin{aligned}
&- \sum_{k=1}^r \left((\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_r) a_{r+1,r+1}^*(w) \partial_w \delta(z/w) \right) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_{r+1}) \left((r+1) - \gamma^2 \right) a_{r+1,r+1}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - (\alpha_i | \alpha_{r+1}) \left(\gamma^2 - \delta_{i>r} (r+1) + \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \right) a_{r+1,r+1}(w) \partial_w \delta(z/w) \\
&= -(\alpha_i | \alpha_{r+1}) \left((r+1) - \gamma^2 \right) (\partial_w a_{r+1,r+1}^*(w)) \delta(z/w),
\end{aligned}$$

que segue de

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^r \left(\alpha_i | \alpha_k + \dots + \alpha_r \right) + (\alpha_i | \alpha_{r+1}) \left(\delta_{i>r}(r+1) - \frac{r}{2} \delta_{i,r+1} \right) \\
& = \begin{cases} -2 & \text{se } 1 = i = r \\ 0 & \text{se } 1 \leq i < r \\ -(r+1) & \text{se } 1 < i = r \\ 2(r+1) & \text{se } 1 \leq i = r+1 \\ (\alpha_i | \alpha_{r+1})(r+1) & \text{se } i > r+1 \end{cases} \\
& = (\alpha_i | \alpha_{r+1})(r+1)
\end{aligned}$$

• Caso $j > r+1$.

$$\begin{aligned}
& -(\alpha_i | \alpha_j) \left(r+1 - \gamma^2 \right) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w) - \mathfrak{B}_{ij} a_{jj}(w) \partial_w \delta(z/w) \\
& = -(\alpha_i | \alpha_j) \left(r+1 - \gamma^2 \right) a_{jj}^*(z) \partial_w \delta(z/w) + (\alpha_i | \alpha_j) (\gamma^2 - \delta_{i>r}(r+1)) a_{jj}(w) \partial_w \delta(z/w) \\
& = -(\alpha_i | \alpha_j) \left(r+1 - \gamma^2 \right) (\partial_w a_{jj}^*(w)) \delta(z/w)
\end{aligned}$$

já que $(\alpha_i | \alpha_j) = 0$ para $i \leq r < r+1 < j$. Juntando todos estes casos, temos

$$[\rho(H_i)(z), \rho(E_j)(w)] = (\alpha_i | \alpha_j) \rho(E_j)(w) \delta(z/w).$$

provando (R_2) . □

Lema 3.1.30. (R_3) $[\rho(H_i)(z), \rho(F_j)(w)] = -(\alpha_i | \alpha_j) \rho(F_j)(z) \delta(z/w)$.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[\rho(H_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= \left[\mathcal{H}_i(z), a_{jj}(w) + \sum_{k=j+1}^n a_{jk}(w) a_{j+1,k}^*(w) \right] \\
&= -(\alpha_i | \alpha_j) a_{jj}(w) \delta(z/w) + \sum_{k=j+1}^n \left[\mathcal{H}_i(z), a_{jk}(w) \right] a_{j+1,k}^*(w) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^n a_{jk}(w) \left[\mathcal{H}_i(z), a_{j+1,k}^*(w) \right] \\
&= \left(-(\alpha_i | \alpha_j) a_{jj}(w) - \sum_{k=j+1}^n (\alpha_i | \alpha_j + \dots + \alpha_k) a_{jk}(z) a_{j+1,k}^*(w) \right) \\
&\quad + \sum_{k=j+1}^n \left(\alpha_i | \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_k \right) a_{jk}(w) a_{j+1,k}^*(z) \delta(z/w) \\
&= -(\alpha_i | \alpha_j) \rho(F_j)(z) \delta(z/w).
\end{aligned}$$
□

Lema 3.1.31. (R_4) $[\rho(E_i)(z), \rho(F_j)(w)] = \delta_{ij} \left(\rho(H_i)(z) \delta(z/w) + \rho(c) \partial_w \delta(z/w) \right)$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[\rho(E_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= \delta_{ij} \left([\rho(E_i)(z), a_{ii}(w)] + \sum_{l=i+1}^n [\rho(E_i)(z), a_{il}(w) a_{i+1,l}^*(w)] \right) \\
&+ \delta_{i \neq j} \left([\rho(E_i)(z), a_{jj}(w)] + \sum_{l=j+1}^n [\rho(E_i)(z), a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w)] \right) \\
&= \delta_{ij} \left(\left(2 : a_{ii}(z) a_{ii}^*(z) : - \sum_{k=1}^{i-1} \left(: a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : - : a_{ki} a_{ki}^* : \right) + b_i(z) \right) \delta(z/w) \right. \\
&+ (\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2) \partial_z \delta(z/w) \Big) \\
&+ \delta_{ij} \left(\sum_{l=i+1}^n \left[\sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k}(z) a_{ik}^*(z), a_{il}(w) a_{i+1,l}^*(w) \right] \right) \\
&+ \delta_{i \neq j} \left(-\delta_{j,i-1} a_{i-1,i-1}(z) a_{ii}^*(z) \delta(z/w) \right) + \delta_{i \neq j} \left(\delta_{j,i-1} a_{i-1,i-1}(z) a_{ii}^*(z) \delta(z/w) \right) \\
&= \delta_{ij} \left(\rho(H_i)(z) \delta(z/w) + \rho(c) \partial_w \delta(z/w) \right).
\end{aligned}$$

□

Finalmente, só nos falta provar as relações de Serre.

Lema 3.1.32. $(R_5 | R_6)$

$$\begin{aligned}
[\rho(F_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= [\rho(E_i)(z), \rho(E_j)(w)] = 0 \text{ se } (\alpha_i | \alpha_j) \neq -1 \\
[\rho(F_i)(z_1), \rho(F_i)(z_2), \rho(F_j)(w)] &= [\rho(E_i)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_j)(w)] = 0, \\
&\text{se } (\alpha_i | \alpha_j) = -1.
\end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
[\rho(F_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= \left[a_{ii}(z), a_{jj}(w) + \sum_{l=j+1}^n a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&+ \left[\sum_{k=i+1}^n a_{ik}(z) a_{i+1,k}^*(z), a_{jj}(w) + \sum_{l=j+1}^n a_{jl}(w) a_{j+1,l}^*(w) \right] \\
&= \delta_{i,j+1} a_{j,j+1}(w) \delta(z/w) + \left(\delta_{i,j+1} \sum_{k=j+2}^n a_{jk}(z) a_{j+2,k}^*(z) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{j,i+1} \sum_{k=i+2}^n a_{ik}(z) a_{i+2,k}^*(z) - \delta_{j,i+1} a_{i,i+1}(z) \right) \delta(z/w) \\
&= \left(\delta_{i,j+1} a_{i-1,i} - \delta_{j,i+1} a_{i,i+1} \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{i,j+1} \sum_{k=i+1}^n a_{i-1,k} a_{i+1,k}^* - \delta_{j,i+1} \sum_{k=i+2}^n a_{ik} a_{i+2,k}^* \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Como todas as parcelas aparecem multiplicadas por $\delta_{j,i+1}$ ou $\delta_{i,j+1}$, temos que

$$[\rho(F_i)(z), \rho(F_j)(w)] = 0$$

quando $|i - j| \neq 1$, isto é, quando $(\alpha_i, \alpha_j) \neq -1$. Agora para $j = i + 1$, temos

$$\begin{aligned} [\rho(F_i)(z_1), \rho(F_i)(z_1), \rho(F_{i+1})(w)] &= [\rho(F_i)(z_1), [\rho(F_i)(z_1), \rho(F_{i+1})(w)]] \\ &= \left[\rho(F_i)(z_1), -a_{i,i+1}(z_2) - \sum_{k=i+2}^n a_{ik}a_{i+2,k}^* \right] \delta(z/w) \\ &= \left[a_{ii}(z_1) + \sum_{l=i+1}^n a_{il}(z_1)a_{i+1,l}^*(z_1), -a_{i,i+1}(z) - \sum_{k=i+2}^n a_{ik}a_{i+2,k}^* \right] \delta(z/w) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, fazemos os cálculos para $i = j + 1$, provando $(R_5|R_6)$ para $\rho(F_i)(z)$. Só nos resta prová-lo para $\rho(E_i)(z)$. Defina

$$\begin{aligned} \rho(E_i^1)(z) &= \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{ki} a_{ki}^* :, \\ \rho(E_i^2)(z) &= \sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k} a_{ik}^* - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1} a_{ki}^*, \\ \rho(E_i^3)(z) &= -a_{ii}^* b_i - \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i\leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \partial a_{ii}^*. \end{aligned}$$

Temos os seguintes colchetes:

$$\begin{aligned} (a) \quad [\rho(E_i^1)(z), \rho(E_j^1)(w)] &= \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-2}(w) a_{k,i-2}^*(w) : \delta(z/w) \\ &\quad - \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{jj}^*(w) a_{j-1,j-1}^*(w) a_{l,j-2}(z) a_{l,j-2}^*(z) : \delta(z/w) \\ &\quad - \delta_{j,i-1} \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) a_{k,i-1}(w) a_{k,i-1}^*(w) : \delta(z/w) \\ &\quad + \delta_{i,j-1} \sum_{k=1}^{j-1} : a_{jj}^*(z) a_{j-1,j-1}^*(z) a_{k,j-1}(w) a_{k,j-1}^*(w) : \delta(z/w) \\ &\quad - (i-1) \delta_{1\leq i-1\leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w) \\ &\quad + i \delta_{1\leq i-1\leq r} \delta_{j,i-1} : a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(w) : \partial_w \delta(z/w) \\ &\quad - j \delta_{1\leq j-1\leq r} \delta_{i,j-1} : a_{jj}^*(w) a_{j-1,j-1}^*(z) : \partial_z \delta(z/w) \\ &\quad - (3+i) \delta_{1\leq i\leq r} \delta_{ij} : a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) & \left[\rho(E_i^1)(z), \rho(E_j^2)(w) \right] + \left[\rho(E_i^2)(z), \rho(E_j^1)(w) \right] \\
&= -\delta_{j,i-1} \left(\sum_{k=1}^{i-2} : a_{i-1,i}^* a_{k,i-2} a_{k,i-2}^* : - \sum_{k=1}^i : a_{i-1,i}^* a_{ki} a_{ki}^* : \right) \delta(z/w) \\
&+ \delta_{i,j-1} \left(\sum_{k=1}^{i-1} : a_{i,i+1}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : - \sum_{k=1}^{i+1} : a_{i,i+1}^* a_{k,i+1} a_{k,i+1}^* : \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(-\delta_{i-1,j} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{l,i-1}^* : + \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^i : a_{ii}^* a_{l,i} a_{l,i+1}^* : \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{j-1,i} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{jj}^* a_{l,j-2} a_{l,j-1}^* : + \delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^j : a_{jj}^* a_{l,j} a_{l,j+1}^* : \right) \delta(z/w) \\
&+ \delta_{i \leq r} \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^*(z) \partial_w \delta(z/w) - \delta_{j \leq r} \delta_{i,j-1} a_{j-1,j}^*(w) \partial_z \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) & \left[\rho(E_i^1)(z) \rho(E_j^3)(w) \right] + \left[\rho(E_i^3)(z), \rho(E_j^1)(w) \right] \\
&= \left(-\delta_{i-1,j} a_{ii}^* a_{i-1,i-1}^* b_j + \delta_{j-1,i} a_{jj}^* a_{j-1,j-1}^* b_i \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j \leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) \left(-\delta_{i-1,j} a_{ii}^*(z) a_{i-1,i-1}^*(z) + \delta_{ij} a_{ii}^*(z) a_{ii}^*(z) \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \left(\delta_{j-1,i} a_{jj}^*(w) a_{j-1,j-1}^*(w) - \delta_{ij} a_{jj}^*(w) a_{jj}^*(w) \right) \partial_z \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) & \left[\rho(E_i^2)(z), \rho(E_j^2)(w) \right] = \left(\delta_{j,i-1} \sum_{l=1}^{i-2} : a_{l,i-2} a_{li}^* : - \delta_{i,j-1} \sum_{l=1}^{j-2} : a_{l,j-2} a_{lj}^* : \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{i,j-1} \sum_{l=i+2}^n : a_{i+2,l} a_{il}^* : - \delta_{j,i-1} \sum_{l=j+2}^n : a_{j+2,k} a_{jk}^* : \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e) & \left[\rho(E_i^2)(z), \rho(E_j^3)(w) \right] + \left[\rho(E_i^3)(z), \rho(E_j^2)(w) \right] \\
&= \left(-\delta_{j,i+1} a_{i,i+1}^* b_{i+1} + \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^* b_{i-1} \right) \delta(z/w) \\
&- \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j \leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) \left(\delta_{j,i+1} a_{i,i+1}^*(z) - \delta_{j,i-1} a_{i-1,i}^*(z) \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&- \left(-\delta_{i,j+1} a_{j,j+1}^* b_{j+1} + \delta_{i,j-1} a_{j-1,j}^* b_{j-1} \right) \delta(z/w) \\
&+ \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \left(\delta_{i,j+1} a_{j,j+1}^*(w) - \delta_{i,j-1} a_{j-1,j}^*(w) \right) \partial_z \delta(z/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f) & \left[\rho(E_i^3)(z), \rho(E_j^3)(w) \right] = \left[-a_{ii}^* b_i - \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \partial a_{ii}^*, \right. \\
&\quad \left. -a_{jj}^* b_j - \left(\delta_{j>r}(r+1) + \delta_{j \leq r}(j+1) - \gamma^2 \right) \partial a_{jj}^* \right] = a_{ii}^*(z) a_{jj}^*(w) \mathfrak{B}_{ij} \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Agora todas as parcelas acima são nulas se $|i-j| \notin \{0, 1\}$, isto é, se $(\alpha_i | \alpha_j) = 0$ já que todos os termos estão multiplicados por δ_{ij} , $\delta_{j,i+1}$ ou $\delta_{i,j+1}$ e, então,

$$\left[\rho(E_i)(z), \rho(E_j)(w) \right] = 0, \quad \text{se } (\alpha_i | \alpha_j) = 0.$$

Ainda nos resta mostrar o que acontece quando $i = j$. Temos

$$\begin{aligned}
\left[\rho(E_i)(z), \rho(E_i)(w) \right] &= -(i-1)\delta_{1 \leq i-1 \leq r} : a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - (3+i)\delta_{1 \leq i \leq r} : a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad + \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad - \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(w)a_{ii}^*(w) \partial_z \delta(z/w) \\
&\quad + 2a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) \left(\gamma^2 + (\delta_{1 \leq i \leq r} - 1)(r+1) + \delta_{i,r+1} \frac{r}{2} \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&= - \left((i-1)\delta_{1 \leq i-1 \leq r} + (3+i)\delta_{1 \leq i \leq r} - \delta_{i,r+1}r \right) : a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) : \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad + \delta_{i \leq r}(i+1) \left(a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(z) + a_{ii}^*(w)a_{ii}^*(w) \right) \partial_z \delta(z/w) \\
&\quad + (r+1)\delta_{i>r} \left(a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(z) + a_{ii}^*(w)a_{ii}^*(w) - 2a_{ii}^*(z)a_{jj}^*(w) \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&\quad + \gamma^2 \left(2a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(w) - a_{ii}^*(z)a_{ii}^*(z) - a_{ii}^*(w)a_{ii}^*(w) \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E, assim, mostramos que

$$\left[\rho(E_i)(z), \rho(E_j)(w) \right] = 0 \quad \text{se} \quad (\alpha_i | \alpha_j) \neq -1.$$

Agora mostremos que $[\rho(E_i)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_j)(w)] = 0$, se $(\alpha_i | \alpha_j) = -1$.

$$\begin{aligned}
\left[\rho(E_i)(z), \rho(E_{i-1})(w) \right] &= \left(\sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z)a_{i-1,i-1}^*(z)a_{k,i-2}(w)a_{k,i-2}^*(w) : \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z)a_{i-1,i-1}^*(z)a_{k,i-1}(w)a_{k,i-1}^*(w) : \right) \delta(z/w) \\
&\quad + \left(- \sum_{k=1}^{i-2} : a_{i-1,i}^*a_{k,i-2}a_{k,i-2}^* : - \sum_{k=1}^i : a_{i-1,i}^*a_{ki}a_{ki}^* : \right) \delta(z/w) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^*a_{l,i-2}a_{l,i-1}^* : \delta(z/w) + \sum_{l=1}^{i-1} : a_{i-1,i-1}^*a_{l,i-1}a_{li}^* : \delta(z/w) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{i-2} : a_{l,i-2}a_{li}^* : \delta(z/w) - \sum_{l=i+1}^n : a_{i+1,k}a_{i-1,k}^* : \delta(z/w) \\
&\quad - a_{ii}^*a_{i-1,i-1}^*b_{i-1}\delta(z/w) + a_{i-1,i}^*(b_{i-1} + b_i)\delta(z/w) \\
&\quad + \left(\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) \partial_w a_{i-1,i}^*(w)\delta(z/w) \\
&\quad + a_{ii}^*(z)\partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r}i - \delta_{i-1>r}(r+1) \right) \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
(g) & \left[\rho(E_i^1)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{i-1,i} a_{k,i-2} a_{k,i-2}^* : \delta(z_1/w) \delta(z_2/w) \\
&+ \left(\sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{i-1,i}^* a_{ki} a_{ki}^* : - \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{i-1,i}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : \right) \delta(z_1/w) \delta(z_2/w) \\
&- \sum_{k=1}^i : a_{ii}^* a_{i-1,i}^* a_{ki} a_{ki}^* : \delta(z_1/w) \delta(z_2/w) \\
&+ i \delta_{1 \leq i-1 \leq r} : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&+ (i+2) \delta_{1 \leq i \leq r} a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&+ \delta_{1 \leq i \leq r} a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&- \delta_{1 \leq i-1 \leq r} a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&- \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{li}^* : \delta(z_1/w) \delta(z_2/w) - : a_{ii}^* a_{i-1,i}^* : (b_{i-1} + b_i) \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&- \left(\delta_{i > r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_1) : \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
&- \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r}(r+1) \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_1) \partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&+ \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r}(r+1) \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) : \partial_w \delta(z_1/w) \delta(z_2/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h) & \left[\rho(E_i^2)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] = \left(- \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) a_{k,i-2}(w) a_{k,i-2}^*(w) : \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^* a_{i-1,i}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : + \sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^* a_{k,i-1} a_{ki}^* : + \sum_{l=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{li}^* : \\
&\quad \left. - \sum_{l=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^* a_{l,i-1} a_{li}^* : + a_{ii}^* a_{i-1,i}^* b_{i-1} \right) \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&- \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r}(r+1) \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) : \partial_w \delta(z_1/w) \delta(z_2/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i) & \left[\rho(E_i^3)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] = : a_{i-1,i}^* a_{ii}^* : b_i \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&+ \left(\delta_{i > r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&+ \left(- a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \left(\gamma^2 - \delta_{i > r}(r+1) - \delta_{i,r+1} \right) \right. \\
&\quad \left. - a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 > r}(r+1) \right) \right) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2).
\end{aligned}$$

Somando as 3 parcelas, temos

$$\begin{aligned}
& \left[\rho(E_i)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] = \left(i\delta_{1 \leq i-1 \leq r} : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \right. \\
& \quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_1) \partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) : \\
& \quad + \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) : \\
& \quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) a_{ii}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) \Big) \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& \quad + (i+2) \delta_{1 \leq i \leq r} a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad - \delta_{1 \leq i-1 \leq r} a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + \delta_{1 \leq i \leq r} a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad - \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_1) : \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& \quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) : \partial_w \delta(z_1/w) \delta(z_2/w) \\
& \quad - \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& \quad - a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \left(\gamma^2 - \delta_{i > r} (r+1) - \delta_{i,r+1} \right) \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& = \left(\left((i+2) \delta_{1 \leq i \leq r} - \delta_{1 \leq i-1 \leq r} - \gamma^2 + \delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i,r+1} \right) a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \right. \\
& \quad + \left(\delta_{1 \leq i \leq r} - \gamma^2 + \delta_{i-1 \leq r} i + \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) : \\
& \quad - \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_1) : \\
& \quad \left. - \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) \right) \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& = \left(- \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_1) : \right. \\
& \quad + \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \\
& \quad - \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) \\
& \quad \left. + \left(\delta_{i > r} (r+1) + \delta_{i \leq r} (i+1) - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_1) : \right) \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Agora só nos resta analisar o caso em que $j = i + 1$. Como já analisamos o caso em que $j = i - 1$ podemos aproveitar estes cálculos lembrando que

$$\left[\rho(E_i)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i+1})(w) \right] = - \left[\rho(E_i)(z_1), \rho(E_{i+1})(w), \rho(E_i)(z_2) \right]$$

e substituindo i por $i - 1$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
(j) & \left[\rho(E_{i-1}^1)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] \\
& = -(i-2)\delta_{i-2 \leq r} : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad - (i+2)\delta_{i-1 \leq r} : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + (i-2)\delta_{i-2 \leq r} : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + 2\delta_{i-1 \leq r} : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + 2 \sum_{l=1}^{i-2} : a_{i-1,i-1}^* a_{ii}^* a_{l,i-2} a_{l,i-1}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad - \sum_{k=1}^{i-2} : a_{i-1,i-1}^* a_{i-1,i}^* a_{k,i-2} a_{k,i-2}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^* a_{i-1,i-1}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad - \sum_{l=1}^{i-2} : a_{i-1,i-1}^* a_{l,i-2} a_{li}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) + : a_{i-1,i-1}^* a_{i-1,i-1}^* a_{ii}^* : b_{i-1} \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k) & \left[\rho(E_{i-1}^2)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] = \sum_{k=1}^{i-2} : a_{i-1,i}^* a_{i-1,i-1}^* a_{k,i-2} a_{k,i-2}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad - 2 \sum_{k=1}^{i-2} : a_{ii}^* a_{i-1,i-1}^* a_{k,i-2} a_{k,i-1}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) - \sum_{k=1}^{i-1} : a_{i-1,i}^* a_{i-1,i-1}^* a_{k,i-1} a_{k,i-1}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad + \sum_{l=1}^{i-2} : a_{i-1,i-1}^* a_{l,i-2} a_{li}^* : \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) - a_{i-1,i}^* a_{i-1,i-1}^* b_{i-1} \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad + \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) a_{i-1,i}^*(z_1) \partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l) & \left[\rho(E_{i-1}^3)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] = - : a_{ii}^* a_{i-1,i-1}^* a_{i-1,i-1}^* : b_{i-1} \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + : a_{i-1,i-1}^* a_{i-1,i}^* : b_{i-1} \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
& \quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad - (\gamma^2 - (r+1)\delta_{i > r+2} - \delta_{i,r+2}) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
& \quad + 2 \left(\gamma^2 - (r+1)\delta_{i > r+1} + \frac{r}{2} \delta_{i,r+2} \right) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2).
\end{aligned}$$

Somando as 3 parcelas, temos

$$\begin{aligned}
& \left[\rho(E_{i-1})(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_{i-1})(w) \right] \\
&= -(i-2)\delta_{i-2 \leq r} : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad - (i+2)\delta_{i-1 \leq r} : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + (i-2)\delta_{i-2 \leq r} : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + 2\delta_{i-1 \leq r} : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
&\quad + \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) a_{i-1,i}^*(z_1) \partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&\quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad - \left(\gamma^2 - (r+1)\delta_{i > r+2} - \delta_{i,r+2} \right) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + 2 \left(\gamma^2 - (r+1)\delta_{i > r+1} + \frac{r}{2} \delta_{i,r+2} \right) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&= - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{ii}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_w \delta(z_1/w) \\
&\quad + 2(\gamma^2 - (r+1)\delta_{i > r+1} - i\delta_{i \leq r+1}) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{ii}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i-1}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + \left(\delta_{i-1 > r} (r+1) + \delta_{i-1 \leq r} i - \gamma^2 \right) : a_{i-1,i-1}^*(z_2) a_{i-1,i}^*(z_2) : \delta(z_2/w) \partial_{z_1} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad - \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) a_{i-1,i-1}^*(z_1) a_{i-1,i}^*(z_2) \delta(z_2/w) \partial_{z_2} \delta(z_1/z_2) \\
&\quad + \left(\gamma^2 - \delta_{i-1 \leq r} i - \delta_{i-1 > r} (r+1) \right) a_{i-1,i}^*(z_1) \partial_w a_{i-1,i-1}^*(w) \delta(z_1/z_2) \delta(z_2/w) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que prova o Lema. $\square$

3.2 Construção dos módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto

Nesta seção e nas próximas, demonstramos os resultados obtidos em [Mar12].

3.2.1 As $\mathbb{J}$ -realizações boson

Fixemos um subconjunto $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$. Primeiramente precisamos, em toda esta seção e na próxima, substituir $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ de [CF04] por

$$\mathbb{C}[\mathbf{y}]_r = \mathbb{C}[y_{i,m} | i, -m \in \mathbb{N}^*, 0 \leq i \leq r \text{ or } r+2 \leq i \leq n]. \quad (3.2.1)$$

Por abuso de notação, também denotaremos $\mathbb{C}[\mathbf{y}]_r$ por $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$. Definamos a ação de $a_{ij,m}$, $a_{ij,m}^*$ e b_{im} da seguinte forma:

$$a_{ij,m} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_{ij,m}}, & \text{se } m \geq 0 \text{ e } j \leq r, \\ x_{ij,m}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$a_{ij,m}^* = \begin{cases} x_{ij,-m}, & \text{se } m \leq 0 \text{ e } j \leq r, \\ -\frac{\partial}{\partial x_{ij,-m}}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $0 \leq i \leq r$, defina

$$b_{im} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } m = 0, \\ me_i \frac{\partial}{\partial y_m}, & \text{se } m > 0, \\ e_i y_{-m}, & \text{se } m < 0, \end{cases}$$

e, se $r+2 \leq i \leq n$, defina

$$b_{im} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } m = 0, \\ me_i \frac{\partial}{\partial y_m}, & \text{se } m \in \mathbb{J}, \\ e_i y_m, & \text{se } m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}, \\ -me_i \frac{\partial}{\partial y_{-m}}, & \text{se } -m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}, \\ e_i y_{-m}, & \text{se } -m \in \mathbb{J}. \end{cases}$$

Temos que redefinir $b_{r+1,m}$ (note que nossa definição de b_{im} para $i > r+1$ é um pouco diferente das de [CF04] e [CF05] mas aqui os colchetes também serão iguais a $\mathfrak{B}_{ij}\partial_w\delta(z/w)$ se $i, j \neq r+1$). Usamos o fato de que em $H = \langle H_1, \dots, H_n \rangle$ temos $\langle H_1, \dots, H_r \rangle \perp \langle H_{r+2}, \dots, H_n \rangle$. Logo basta substituir H_{r+1} por um conveniente H_{r+1}^* tal que

$$H_{r+1}^* \perp \langle H_1, \dots, H_r, H_{r+2}, \dots, H_n \rangle.$$

Definição 3.2.2. *Seja $H_{r+1}^* = \left(\sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} H_i \right) + H_{r+1} + \left(\sum_{j=1}^{n-r-1} \frac{j}{n-r} H_{n-j+1} \right)$,*

onde $H_{r+1}^ \perp H_i, \quad \forall i = 1, \dots, r, r+2, \dots, n$.*

Seguindo [CF04] e [CF05], temos

$$\rho(H_{r+1}^*) = \sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} \rho(H_i) + \rho(H_{r+1}) + \sum_{j=1}^{n-r-1} \frac{j}{n-r} \rho(H_{n-j+1})$$

Nosso objetivo será encontrar $b_{r+1}^*(z)$ tal que

$$b_{r+1}^*(z) = \sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} b_i(z) + b_{r+1}(z) + \sum_{j=1}^{n-r-1} \frac{j}{n-r} b_{n-j+1}(z)$$

com $[b_i(z), b_j(w)] = \mathfrak{B}_{ij}\partial_w\delta(z/w)$. Desta forma, as relações (R_1) -(R_6) serão satisfeitas.

Seja

$$c_{r+1}(z) = -\sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} b_i(z) - \sum_{j=1}^{n-r-1} \frac{j}{n-r} b_{n-j+1}(z).$$

e $b_{r+1}(z) = c_{r+1}(z) + b_{r+1}^*(z)$.

Para começar, faremos os cálculos de $c_{r+1}(z)$ considerando cada um dos casos abaixo.

Caso 1) $0 < j < r$.

$$\begin{aligned} [c_{r+1}(z), b_j(w)] &= -\frac{j-1}{r+1} [b_{j-1}(z), b_j(w)] - \frac{j}{r+1} [b_j(z), b_j(w)] - \frac{j+1}{r+1} [b_{j+1}(z), b_j(w)] \\ &= \left(-\frac{j-1}{r+1}(-\gamma^2) - \frac{j}{r+1}(2\gamma^2) - \frac{j+1}{r+1}(-\gamma^2) \right) \partial_w \delta(z/w) \\ &= \frac{j\gamma^2 - \gamma^2 - 2j\gamma^2 + j\gamma^2 + \gamma^2}{r+1} \partial_w \delta(z/w) = 0 \partial_w \delta(z/w) \\ &= \mathfrak{B}_{r+1,j} \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

Caso 2) $j = r$.

$$\begin{aligned} [c_{r+1}(z), b_r(w)] &= -\frac{r-1}{r+1} [b_{r-1}(z), b_r(w)] - \frac{r}{r+1} [b_r(z), b_r(w)] \\ &= \left(-\frac{r-1}{r+1}(-\gamma^2) - \frac{r}{r+1}(2\gamma^2) \right) \partial_w \delta(z/w) \\ &= -\frac{-r\gamma^2 + \gamma^2 + 2r\gamma^2}{r+1} \partial_w \delta(z/w) = -\gamma^2 \partial_w \delta(z/w) \\ &= \mathfrak{B}_{r+1,r} \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

Caso 3) $j > r+2$.

$$\begin{aligned} [c_{r+1}(z), b_j(w)] &= -\frac{n-j+2}{n-r} [b_{j-1}(z), b_j(w)] - \frac{n-j+1}{n-r} [b_j(z), b_j(w)] - \frac{n-j}{n-r} [b_{j+1}(z), b_j(w)] \\ &= \left(-\frac{n-j+2}{n-r}(-(\gamma^2 - (r+1))) - \frac{n-j+1}{n-r}(2(\gamma^2 - (r+1))) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n-j}{n-r}(-(\gamma^2 - (r+1))) \right) \partial_w \delta(z/w) \\ &= \frac{(\gamma^2 - (r+1))(n-j+2 - 2n + 2j - 2 + n-j)}{n-r} \partial_w \delta(z/w) = 0 \partial_w \delta(z/w) \\ &= \mathfrak{B}_{r+1,j} \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

Caso 4) $j = r+2$.

$$\begin{aligned} [c_{r+1}(z), b_{r+2}(w)] &= -\frac{n-r-1}{n-r} [b_{r+2}(z), b_{r+2}(w)] - \frac{n-r-2}{n-r} [b_{r+3}(z), b_{r+2}(w)] \\ &= \left(-\frac{n-r-1}{n-r}(2(\gamma^2 - (r+1))) - \frac{n-r-2}{n-r}(-(\gamma^2 - (r+1))) \right) \partial_w \delta(z/w) \\ &= \frac{(\gamma^2 - (r+1))(-2n + 2r + 2 + n - r - 2)}{n-r} \partial_w \delta(z/w) = -(\gamma^2 - (r+1)) \partial_w \delta(z/w) \\ &= \mathfrak{B}_{r+1,r+2} \partial_w \delta(z/w). \end{aligned}$$

Caso 5) $j = r+1$. Temos

$$\begin{aligned}
[c_{r+1}(z), c_{r+1}(w)] &= -\frac{r}{r+1} [c_{r+1}(z)(z), b_r(w)] - \frac{n-r-1}{n-r} [c_{r+1}(z), b_{r+2}(w)] \\
&= \left(-\frac{r}{r+1}(-\gamma^2) - \frac{n-r-1}{n-r}(-\gamma^2 + r + 1) \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&\neq 2\left(\gamma^2 - \frac{r}{2} - 1\right) \partial_w \delta(z/w) = \mathfrak{B}_{r+1, r+1} \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Observe que apenas

$$[c_{r+1}(z), c_{r+1}(w)] \neq \mathfrak{B}_{r+1, r+1} \partial_w \delta(z/w),$$

logo basta encontrar $b_{r+1}^*(z)$ tal que

$$[b_{r+1}^*(z), b_j(w)] = 0, \quad \forall j \neq r+1.$$

Para definir $b_{r+1}^*(z)$ usaremos

$$b_0(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_{0m} z^{-m-1}$$

para nos auxiliar. Seja

$$K_1(z) = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{i}{r+1} b_{r-i+1}(z).$$

Temos $[K_1(z), b_j(w)] = 0, \quad \forall j = 1, \dots, r, r+2, \dots, n$ e, consequentemente,

$$[K_1(z), c_{r+1}(w)] = 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
[K_1(z), K_1(w)] &= [b_0(z), b_0(w)] + \frac{r}{r+1} [b_0(z), b_1(w)] = \left(2\gamma^2 - \frac{r}{r+1} \gamma^2 \right) \partial_w \delta(z/w) \\
&= \left(\frac{r+2}{r+1} \gamma^2 \right) \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Seja $K(z) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{r+1}{r+2}} K_1(z)$. Então $[K(z), K(w)] = \partial_w \delta(z/w)$. Agora definamos

$$b_{r+1}^*(z) = \alpha K(z),$$

para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\alpha^2 = 2\left(\gamma^2 - \frac{r}{2} - 1\right) - \left(\frac{r}{r+1} \gamma^2 + \frac{n-r-1}{n-r} \gamma^2 - \frac{n-r-1}{n-r} (r+1)\right)$$

e então

$$[b_{r+1}(z), b_{r+1}(w)] = \mathfrak{B}_{r+1, r+1} \partial_w \delta(z/w). \quad (3.2.3)$$

Assim encontramos $b_{r+1}^*(z)$ com as propriedades desejadas.

Observação 3.2.4. *Precisamos usar b_{0m} já que não utilizamos $b_{r+1, m}$ de [CF04]. Isto altera a matriz $\mathfrak{B}$ definida nas seções anteriores.*

Observação 3.2.5. Note que os produtos ordenados normais

$$: a_{ij}(z)a_{ij}^*(z) := f_{ij}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{ij,m} z^{-m-1}$$

estão todos bem-definidos, logo também o está $\rho(H_i)(z)$. Temos

$$f_{ij,m}.1 = 0, \quad \forall m > 0 \quad \text{quando} \quad j \leq r \quad e$$

$$f_{ij,m}.1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \text{quando} \quad j \geq r+1.$$

Por esta razão, temos

$$\rho(H_{im}).1 = 0, \quad \forall m > 0 \quad \text{quando} \quad i \leq r \quad e$$

$$\rho(H_{im}).1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{J} \quad \text{ou} \quad -m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{J}, \quad \text{quando} \quad i \geq r+2.$$

Observe que $\rho(H_{r+1,m}).1 \neq 0$, mas $\rho(H_{r+1,m}^*).1 = 0$, $\forall m > 0$. Agora podemos definir nossa representação para módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto.

Teorema 3.2.6. Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\lambda_i = \lambda(H_i)$. A função geradora

$$\begin{aligned} \rho(F_i)(z) &= a_{ii}(z) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(z)a_{i+1,j}^*(z), \\ \rho(H_i)(z) &= 2 : a_{ii}(z)a_{ii}^*(z) : + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji}(z)a_{ji}^*(z) : - : a_{j,i-1}(z)a_{j,i-1}^*(z) : \right) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij}(z)a_{ij}^*(z) : - : a_{i+1,j}(z)a_{i+1,j}^*(z) : \right) + b_i(z), \\ \rho(E_i)(z) &= \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z)a_{k,i-1}(z)a_{k,i-1}^*(z) : - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z)a_{ki}(z)a_{ki}^*(z) : \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k}(z)a_{ik}^*(z) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}(z)a_{ki}^*(z) - a_{ii}^*(z)b_i(z) \\ &\quad - (\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i \leq r}(i+1) - \gamma^2) \partial a_{ii}^*(z), \\ \rho(c) &= \gamma^2 - (r+1), \end{aligned}$$

define uma ação nos geradores c , E_{im} , F_{im} , H_{im} , $i = 1, \dots, n$, $m \in \mathbb{Z}$ e c , no espaço $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}]$.

Precisamos verificar as relações (R_1) -(R_6).

Lema 3.2.7. Temos

$$\begin{aligned} (R_1) [\rho(H_i)(z), \rho(H_j)(w)] &= (\alpha_i | \alpha_j) \rho(c) \partial_w \delta(z/w), \\ (R_2) [\rho(H_i)(z), \rho(E_j)(w)] &= (\alpha_i |, \alpha_j) \rho(E_j)(z) \delta(z/w), \\ (R_3) [\rho(H_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= -(\alpha_i | \alpha_j) \rho(F_j)(z) \delta(z/w), \\ (R_4) [\rho(E_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= \delta_{ij} (\rho(H_i)(z) \delta(z/w) + \rho(c) \partial_w \delta(z/w)), \\ (R_5 | R_6) [\rho(F_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= [\rho(E_i)(z), \rho(E_j)(w)] = 0 \text{ se } (\alpha_i | \alpha_j) \neq -1, \\ [\rho(F_i)(z_1), \rho(F_i)(z_2), \rho(F_j)(w)] &= [\rho(E_i)(z_1), \rho(E_i)(z_2), \rho(E_j)(w)] = 0, \\ \text{se } (\alpha_i | \alpha_j) &= -1. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração é similar à feita no Teorema 3.1.27 para módulos intermediários de Wakimoto já que $[b_i(z), b_j(w)] = \mathfrak{B}_{ij} \partial_w \delta(z/w)$. $\square$

Assim definimos uma realização tipo bóson de $\widehat{\mathfrak{sl}}(n+1, \mathbb{C})$ e uma estrutura de módulo no espaço $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}]_r$ que depende do subconjunto $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{N}^*$ e do parâmetro $0 \leq r \leq n$. Chamamos estes módulos de módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto e os denotamos por $W_{n,r,\mathbb{J}}(\lambda, \gamma)$.

3.3 Gerando módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto

Nesta seção, estudamos a estrutura de módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto (lembrando que aqui $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ também significa $\mathbb{C}[\mathbf{y}]_r$).

Seja $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(r+1)$ com $\widehat{\mathfrak{a}} \subseteq \widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(n+1)$. $M_r(\lambda)$ denota um módulo do tipo Verma com peso máximo λ e

$$W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda) = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}], \quad (3.3.1)$$

com a ação definida pelo Teorema 3.2.6. Como em [CF05], onde $\mathfrak{B}$ é não-degenerada, $W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda)$ é o módulo $\mathbb{J}$ -intermediário de Wakimoto $W_{n,r,\mathbb{J}}(\lambda, \gamma)$. Para $1 \leq k \leq n$, sejam

$$\mathbb{C}_k[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_{ij,m} | 1 \leq i \leq j \leq k, \quad m \in \mathbb{Z}] \quad (3.3.2)$$

e

$$W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r) = \mathbb{C}_r[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_r[\mathbf{y}]. \quad (3.3.3)$$

Então $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r) \simeq W$ é um $\widehat{\mathfrak{a}}$ -módulo. Mostremos que, de fato, $W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda)$ é gerado por $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$.

Teorema 3.3.4. $W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$.

Demonstração. Observe que

$$L(n^-(r)) = n^-(r) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

é gerado por $F_{i,m}$, com $r < i \leq n$, e $W_{\mathfrak{a}}(\lambda_r)$ é gerado por $x_{ij,m}$ e $e_j \cdot y_p$, com $1 \leq i \leq j \leq r$, $m \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{N}$. Para $r \leq k \leq n$, seja

$$W_k = \mathbb{C}_k[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}].$$

A idéia é provar que

$$W_r \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$$

e depois, por indução, mostrar que, para todo $r \leq k_1 < k_2$,

$$W_{k_1} \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r) \implies W_{k_2} \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$$

e usando o fato que $W_n = W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda)$, o resultado segue.

Mostremos que $W_r \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$. Um elemento arbitrário em W_r é da forma

$$\sum_j u_j \otimes v_j, \quad u_j \in \mathbb{C}_r[\mathbf{x}], \quad v_j \in \mathbb{C}_n[\mathbf{y}],$$

e assim é suficiente mostrar que todo elemento da forma $u \otimes v$, com $u \in \mathbb{C}_r[\mathbf{x}]$ e $v \in \mathbb{C}_r[\mathbf{y}]$ monômios, está em $U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$. Seja $v = v^r v_r$, onde

$$v_r \in \mathbb{C}[e_j \cdot y_m | 1 \leq j \leq r, m \in \mathbb{N}]$$

e

$$v^r \in \mathbb{C}[e_j \cdot y_m | r < j \leq n, m \in \mathbb{N}].$$

Assuma que

$$v^r = (e_r \cdot y_{i_1})^{p_{i_1}} \dots (e_n \cdot y_{i_s})^{p_{i_s}}$$

é um monômio não-constante (aqui $i_1, \dots, i_s \in \mathbb{N}$). Seja

$$\begin{aligned} \rho(H_i)(z) = & 2: a_{ii}(z)a_{ii}^*(z): + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji}(z)a_{ji}^*(z): - : a_{j,i-1}(z)a_{j,i-1}^*(z): \right) \\ & + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij}(z)a_{ij}^*(z): - : a_{i+1,j}(z)a_{i+1,j}^*(z): \right) + b_i(z). \end{aligned}$$

Caso 1) $i > r + 1$

Para $m \in \mathbb{J}$ e $-m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$, os somandos acima possuem fatores com $a_{ik,m}^*$, $k \geq r + 1$, agindo como zero em $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$, já que eles são iguais a $\partial/\partial x_{ik,-m}$, com $k \geq r + 1$ e $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r) = \mathbb{C}_r[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_r[\mathbf{y}]$. Então temos, quando restrito a $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$, que $\rho(H_{im}) = b_{im}$ e este é dado pela multiplicação a esquerda por $e_i \cdot y_m$, se $m \in \mathbb{J}$, e por $e_i \cdot y_{-m}$, se $-m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$.

Caso 2) $i = r + 1$

Neste caso temos, quando restrito à $W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$,

$$\rho(H_{r+1,m}) = - \sum_{j=1}^r \sum_{p \in \mathbb{Z}} : a_{jr,p} a_{jr,m-p}^* : + b_{r+1,m}$$

onde, para $m \in \mathbb{J}$ e $-m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$, temos o primeiro somando aplicando $\mathbb{C}_r[\mathbf{x}]$ em si mesmo e o segundo somando sendo multiplicação à esquerda por $e_i \cdot y_m$ se $m \in \mathbb{J}$, ou por $e_i \cdot y_{-m}$ se $-m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$.

Assim, provemos que $W_r \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$.

$$\begin{aligned} u \otimes v &= u \otimes (e_0 \cdot y_{i_1})^{p_{i_1}} (e_{r+2} \cdot y_{i_2})^{p_{i_2}} \dots (e_n \cdot y_{i_s})^{p_{i_s}} v_r \\ &= \left(\sum_{l=0}^r \alpha_l b_{l,|i_1|} + \sum_{l=r+2}^n \alpha_l b_{l,j_1} \right)^{p_{i_1}} b_{r+2,j_2}^{p_{i_2}} \dots b_{n,j_s}^{p_{i_s}} (u \otimes v_r) \\ &= \left(\sum_{l=0}^r \beta_l (\rho(H_{l,|i_1|}) + X_{l,|i_1|}) + \sum_{r+2}^n \beta_l (\rho(H_{l,j_1}) + X_{l,j_1}) + \rho(H_{r+1,j_1}^*) - X_{r+1,j_1} \right)^{p_{i_1}} \\ &\quad \cdot (\rho(H_{r+2,j_2}) - X_{r+2,j_2})^{p_{i_2}} \dots (\rho(H_{n,j_s}) - X_{n,j_s})^{p_{i_s}} (u \otimes v_r), \end{aligned}$$

onde $j_k = i_k$ se $i_k \in \mathbb{J}$, e $j_k = -i_k$ se $-i_k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}$. Então denotando por $\mathcal{H}$ a álgebra de Lie abeliana gerada por H_{im} , com $1 \leq i \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, temos

$$u \otimes v \in U(\mathcal{H})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$$

e assim,

$$W_r \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r).$$

Fixe $r \leq k < n$ e suponha $W_k \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$. Provemos que $W_{k+1} \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$. Considere $u \otimes v \in W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda)$ tal que $u = x_{k+1,k+1,m_1}^p u_k$, onde $u_k \in \mathbb{C}_k[\mathbf{x}]$, $m_1 \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{C}_n[\mathbf{y}]$. Assuma que $W_k \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$. De (4.7) para $i > k$, temos que, quando restrito à W_k ,

$$\rho(F_{im}) = x_{ii,m} - \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{j=i+1}^n x_{ij,p} \partial_{x_{i+1,j,p-m}}$$

e, como consequência,

$$\begin{aligned} \rho(F_{k+1,m}^p)(u_k \otimes v) &= x_{k+1,k+1,m}^p u_k \otimes v \\ &= u \otimes v \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$. Então

$$u_k \otimes v \in U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r) \implies u \otimes v \in U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a}}(\lambda_r).$$

Da prova do Teorema 4.5 de [CF04]

$$\begin{aligned} [\rho(F_i)(z), \rho(F_j)(w)] &= (\delta_{i,j+1} a_{j,j+1}(w) - \delta_{j,i+1} a_{i,i+1}(z)) \delta(z/w) \\ &\quad + \left(\delta_{i,j+1} \sum_{q=j+2}^n a_{jq}(z) a_{j+2,q}^*(z) - \delta_{j,i+1} \sum_{q=i+2}^n a_{iq}(z) a_{i+2,q}^*(z) \right) \delta(z/w). \end{aligned}$$

Pode-se mostrar por indução que, para $1 \leq j < i$,

$$[\rho(F_i)(z_i), \dots, \rho(F_j)(z_j)] = \left(a_{ji}(z_j) + \sum_{q=i+1}^n a_{jq}(z_j) a_{i+1,q}^*(z_j) \right) \prod_{q=1}^{i-1} \delta(z_q - z_{q+1}).$$

Então, para todo $j < k+1$, temos

$$[\rho(F_{k+1})(z_{k+1}), \dots, \rho(F_j)(z_j)]_m = a_{j,k+1,m} + \sum_{q=k+2}^n \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_{jq,p} a_{k+2,q,m-p}^*,$$

onde

$$a_{k+2,q,m-p}^* = -\partial x_{k+2,q,p-m}, \quad \forall k+2 \leq q \leq n,$$

age como zero em W_k . Sabemos que todos os elementos de W_{k+1} são uma combinação linear de monômios $u \otimes v = u_{i-1,m}^k u_k \otimes v$, onde

$$u_{i-1,m}^k = x_{i-1,k+1,m_i}^{p_{i-1}} \cdots x_{k+1,k+1,m_{k+1}}^{p_{k+1}} \quad \text{e} \quad u_k \otimes v \in \mathbb{C}_k[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}] = W_k.$$

Temos

$$\begin{aligned} u \otimes v &= u_{i-1,m}^k u_k \otimes v = x_{i-1,k+1,m_{i-1}}^{p_{i-1}} x_{i,k+1,m_i}^{p_i} \cdots x_{k+1,k+1,m_{k+1}}^{p_{k+1}} u_k \otimes v \\ &= [\rho(F_{k+1})(z_{k+1}), \dots, \rho(F_{i-1})(z_{i-1})]_{m_{i-1}}^{p_{i-1}} (u_k \otimes v), \end{aligned}$$

onde $[\rho(F_{k+1})(z_{k+1}), \dots, \rho(F_{i-1})(z_{i-1})]_{m_{i-1}}^{p_{i-1}} \in L(n^-(r))$ e

$$u_k \otimes v \in W_k \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r).$$

Isto prova que $W_{k+1} \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r)$ e então

$$W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}})W_{\mathfrak{a},\mathbb{J}}(\lambda_r).$$

□

Segue imediatamente o seguinte resultado (ver [CF05] para maiores detalhes):

Corolário 3.3.5. *Se $\lambda \in \mathcal{H}^*$ é geral tal que $M_r(\lambda)$ é irredutível, então $M_r(\lambda) \simeq W_{\mathfrak{g},\mathbb{J}}(\lambda)$.*

Observação 3.3.6. *Note que $\mathbb{J}_1 \neq \mathbb{J}_2 \implies W_{n,r,\mathbb{J}_1}(\lambda, \gamma) \not\cong W_{n,r,\mathbb{J}_2}(\lambda, \gamma)$.*

Usando resultados similares aos da seção 6 de [CF05], podemos obter uma descrição da estrutura dos submódulos dos módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto.

3.4 Módulos $(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2)$ -intermediários de Wakimoto

Primeiramente precisamos substituir $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ por

$$\mathbb{C}[\mathbf{y}]_{(r,j)} = \mathbb{C}[y_{i,m} | i, -m \in \mathbb{N}^*, 0 \leq i \leq n+1, i \neq r+1, j+2]. \quad (3.4.1)$$

Analogamente às seções anteriores, usaremos a notação $\mathbb{C}[\mathbf{y}]$ ao invés de $\mathbb{C}[\mathbf{y}]_{(r,j)}$. Definamos $\rho(b_{im})$ da seguinte forma:

Se $0 \leq i \leq r$, então

$$\rho(b_{im}) = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } m = 0, \\ me_i \frac{\partial}{\partial y_m}, & \text{se } m > 0, \\ e_i y_{-m}, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Se $r+2 \leq i \leq j+1$, então

$$\rho(b_{im}) = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } m = 0, \\ me_i \frac{\partial}{\partial y_m}, & \text{se } m \in \mathbb{J}_1, \\ e_i y_m, & \text{se } m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}_1, \\ -me_i \frac{\partial}{\partial y_{-m}}, & \text{se } -m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}_1, \\ e_i y_{-m}, & \text{se } -m \in \mathbb{J}_1. \end{cases}$$

Finalmente, se $j+3 \leq i \leq n+1$, então

$$\rho(b_{im}) = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } m = 0, \\ me_i \frac{\partial}{\partial y_m}, & \text{se } m \in \mathbb{J}_2, \\ e_i y_m, & \text{se } m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}_2, \\ -me_i \frac{\partial}{\partial y_{-m}}, & \text{se } -m \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{J}_2, \\ e_i y_{-m}, & \text{se } -m \in \mathbb{J}_2. \end{cases}$$

Aqui abusamos da notação, escrevendo b_{im} ao invés de $\rho(b_{im})$. Também definimos $b_{r+1,m}$ e $b_{j+2,m}$ de forma similar ao feito para módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto. Sendo assim, seja

$$H_{r+1}^* = \left(\sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} H_i \right) + H_{r+1} + \left(\sum_{l=1}^{j-r-1} \frac{l}{j-r} H_{j-l+1} \right),$$

e seja

$$H_{j+1}^* = \left(\sum_{i=1}^{j-r-1} \frac{i}{j-r} H_{r+i+1} \right) + H_{j+1} + \left(\sum_{l=1}^{n-j-1} \frac{l}{n-j} H_{n-l+1} \right)$$

onde $H_{r+1}^* \perp H_i$ e $H_{j+1}^* \perp H_i$, $\forall i \neq r+1, j+1$. Temos

$$\begin{aligned} \rho(H_{r+1}^*) &= \sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} \rho(H_i) + \rho(H_{r+1}) + \sum_{l=1}^{j-r-1} \frac{l}{j-r} \rho(H_{j-l+1}) \\ \rho(H_{j+1}^*) &= \sum_{i=1}^{j-r-1} \frac{i}{j-r} \rho(H_{r+i+1}) + \rho(H_{j+1}) + \sum_{l=1}^{n-j-1} \frac{l}{n-j} \rho(H_{n-l+1}). \end{aligned}$$

Seja $d_k(z) = b_k(z)$ se $1 \leq k \leq r$ e seja $d_k(z) = b_{k+1}(z)$ se $r+2 \leq k \leq n$. Analogamente ao caso dos módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto, definamos

$$b_{j+1}(z) = - \left(\sum_{i=1}^{j-r-1} \frac{i}{j-r} b_{r+i+2}(z) \right) - \left(\sum_{l=1}^{n-j-1} \frac{l}{n-j} b_{n-l+2}(z) \right) + \alpha \left(\sum_{p=1}^{j-r} \frac{p}{j-r} b_{j+2-p}(z) \right),$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é tal que

$$[d_{j+1}(z), d_{j+1}(w)] = \mathfrak{B}_{j+1,j+1} \partial_w \delta(z/w). \quad (3.4.2)$$

Temos

$$[d_{j+1}(z), d_k(w)] = \mathfrak{B}_{j+1,k} \partial_w \delta(z/w), \quad \forall k = 1, \dots, r, r+2, \dots, n. \quad (3.4.3)$$

Precisamos definir $d_{r+1}(z)$ tal que

$$[d_{j+1}(z), d_{r+1}(w)] = \mathfrak{B}_{j+1,r+1} \partial_w \delta(z/w). \quad (3.4.4)$$

Seja

$$d_{r+1}(z) = - \left(\sum_{i=1}^r \frac{i}{r+1} d_i(z) \right) - \left(\sum_{l=1}^{n-r-1} \frac{l}{n-r} d_{n-l+1}(z) \right) + \beta \left(\sum_{p=1}^{r+1} \frac{p}{r+1} b_{r+1-p}(z) \right)$$

onde $\beta \in \mathbb{C}$ é tal que

$$[d_{r+1}(z), d_{r+1}(w)] = \mathfrak{B}_{r+1,r+1} \partial_w \delta(z/w).$$

Temos

$$[d_{r+1}(z), d_k(w)] = \mathfrak{B}_{j+1,k} \partial_w \delta(z/w), \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (3.4.5)$$

Teorema 3.4.6. *Sejam $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\lambda_i = \lambda(H_i)$. A função dada por*

$$\begin{aligned}\rho(F_i)(z) &= a_{ii}(z) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(z)a_{i+1,j}^*(z), \\ \rho(H_i)(z) &= 2: a_{ii}(z)a_{ii}^*(z): + \sum_{j=1}^{i-1} \left(: a_{ji}(z)a_{ji}^*(z): - : a_{j,i-1}(z)a_{j,i-1}^*(z): \right) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n \left(: a_{ij}(z)a_{ij}^*(z): - : a_{i+1,j}(z)a_{i+1,j}^*(z): \right) + d_i(z), \\ \rho(E_i)(z) &= \sum_{k=1}^{i-1} : a_{ii}^*(z)a_{k,i-1}(z)a_{k,i-1}^*(z): - \sum_{k=1}^i : a_{ii}^*(z)a_{ki}(z)a_{ki}^*(z): \\ &\quad + \sum_{k=i+1}^n a_{i+1,k}(z)a_{ik}^*(z) - \sum_{k=1}^{i-1} a_{k,i-1}(z)a_{ki}^*(z) - a_{ii}^*(z)d_i(z) \\ &\quad - (\delta_{i>r}(r+1) + \delta_{i\leq r}(i+1) - \gamma^2)\partial a_{ii}^*(z), \\ \rho(c) &= \gamma^2 - (r+1),\end{aligned}$$

onde $d_i(z) = b_i(z)$, se $i \neq j+1$, define uma ação nos geradores $c, E_{im}, F_{im}, H_{im}$, $i = 1, \dots, n$, $m \in \mathbb{Z}$ e c , no espaço $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}_n[\mathbf{y}]_{(r,j)}$ que nos dará a estrutura de módulos $(\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2)$ -intermediários de Wakimoto.

Pode-se checar as relações (R_1) - (R_6) de forma análoga ao do Teorema 3.2.6 para módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto.

Observação 3.4.7. *Temos*

$$\begin{aligned}\rho(H_{im}).1 &= 0, \quad \forall m > 0 \quad \text{quando } i \leq r \text{ e} \\ \rho(H_{im}).1 &= 0, \quad \forall m \in \mathbb{J}_1 \quad \text{ou} \quad -m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{J}_1, \quad \text{quando } r+2 \leq i \leq j \text{ e} \\ \rho(H_{im}).1 &= 0, \quad \forall m \in \mathbb{J}_2 \quad \text{ou} \quad -m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{J}_2, \quad \text{quando } j+2 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

Note que

- (1) $\rho(H_{r+1,m}).1 \neq 0$ mas $\rho(H_{r+1,m}^*).1 = 0, \forall m > 0$ e
- (2) $\rho(H_{j+1,m}).1 \neq 0$ mas $\rho(H_{j+1,m}^*).1 = 0, \forall m \in \mathbb{J}_1$ ou $-m \in \mathbb{N}^* - \mathbb{J}_1$.

Observação 3.4.8. *Para inteiros positivos fixados $r_1, \dots, r_k$ pode-se definir módulos $(\mathbb{J}_1, \dots, \mathbb{J}_k)$ -intermediários de Wakimoto usando basicamente os mesmos argumentos apresentados nesta seção.*

Capítulo 4

A ação de Virasoro nos módulos imaginários de Wakimoto para $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$

Neste capítulo, nosso objetivo principal é mostrar que os módulos imaginários de Wakimoto, assim como os módulos de Verma imaginários, admitem uma ação de álgebra de Virasoro, como já o admitiam os módulos de Verma clássicos (ver [EFK98]). Para tal propósito, definimos primeiramente para $m \in \mathbb{Z}$, operadores auxiliares $\bar{L}_m$ e, posteriormente, L_m que agem em nossos módulos.

Depois algumas definições auxiliares se fazem necessárias como, por exemplo, o conceito de módulo topológico, de completamento e de limite inverso, definições estas que o leitor poderá encontrar em [War93]. Feito isto, introduz-se uma equação análoga à de Knizhnik-Zamolodchikov feita em [EFK98] para os módulos de Verma clássicos e, usando o fato de que os módulos de Verma imaginários são genericamente isomorfos aos módulos de Wakimoto imaginários (confrontar Observação 1.4.15), finalizamos nosso trabalho com o análogo desta equação para os módulos imaginários de Wakimoto

Vale ressaltar que os resultados obtidos neste capítulo referem-se ao artigo [CFMar12], em que somente levamos em consideração a álgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$, e não $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$, como nos capítulos anteriores. Acreditamos que, neste caso, o resultado para módulos intermediários de Wakimoto sejam válidos (neste capítulo abordamos apenas os imaginários pois estamos em $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$), sendo que o estudo para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ será feito em pesquisas futuras.

4.1 Introdução

Seja $e = e_{12}$, $f = e_{21}$ e $h = e_{11} - e_{22}$ a base usual de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, onde e_{ij} é a base canônica de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Temos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^- \quad (4.1.1)$$

onde $\mathfrak{n}^+ = \mathbb{C}e$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$ e $\mathfrak{n}^- = \mathbb{C}f$. Defina

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c = \widehat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^- \quad (4.1.2)$$

onde

$$\widehat{\mathfrak{n}}^+ = \mathfrak{n}^+ \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathfrak{h} \otimes t\mathbb{C}[t], \quad (4.1.3)$$

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c, \quad (4.1.4)$$

$$\widehat{\mathfrak{n}}^- = \mathfrak{n}^- \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]. \quad (4.1.5)$$

A álgebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ é gerada pelos elementos e_m, f_m, h_m , onde $m \in \mathbb{Z}$, e pelo elemento central c , com o produto

$$[X_m, Y_n] = [X, Y]_{m+n} + \delta_{m+n,0}m(X|Y)c,$$

onde $X_m = X \otimes t^m$, para $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Seja

$$(X|Y) = \text{tr}(XY).$$

a forma de Killing. Defina

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d = \widehat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^-, \quad (4.1.6)$$

onde $\widetilde{\mathfrak{h}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d$, $[d, X_m] = mX_m$ e $[d, c] = 0$. A subálgebra $\mathfrak{b}_{nat} = \widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^+$ é a *subálgebra de Borel natural* introduzida por Jakobsen e Kac em [JK85]. Em $\widetilde{\mathfrak{h}}$, temos o espaço dual $\widetilde{\mathfrak{h}}^*$ tal que

$$\widetilde{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta \quad (4.1.7)$$

onde, para todo $h \in \mathfrak{h}$,

$$\Lambda_0(c) = 1, \quad \Lambda_0(d) = \Lambda_0(h) = 0,$$

$$\delta(d) = 1, \quad \delta(c) = \delta(h) = 0.$$

Denotemos por Δ o sistema de raízes de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, e seja $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ uma base de Δ . Então $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$ é a raiz imaginária positiva e indivisível e

$$\Delta = \{\pm\alpha_1 + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Definição 4.1.8. *Seja $\Lambda \in \widetilde{\mathfrak{h}}^*$ um peso e seja $\mathbb{C}_\Lambda$ uma representação unidimensional de $\widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^+$ tal que $\mathbb{C}_\Lambda$ é gerada por um vetor v_Λ , $\widehat{\mathfrak{n}}^+$ age como zero e $\widetilde{h}v_\Lambda = \Lambda(\widetilde{h})v_\Lambda$, para todo $\widetilde{h} \in \widetilde{\mathfrak{h}}$. O módulo de Verma imaginário pode ser definido da seguinte forma (ver [Fut94], [Cor94]):*

$$\boxed{V_\Lambda = \text{Ind}_{\widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^+}^{\widetilde{\mathfrak{g}}} \mathbb{C}_\Lambda.} \quad (4.1.9)$$

Quando uma representação V de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ é gerada por um vetor v_Λ de peso Λ que é aniquilado por $\widehat{\mathfrak{n}}^+$, dizemos que V tem peso máximo (imaginário) Λ . Para todo peso Λ podemos escrever

$$\Lambda = \lambda + \kappa\Lambda_0 - \Delta\delta, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ e } \kappa, \Delta \in \mathbb{C}. \quad (4.1.10)$$

onde, por (4.1.7), temos $\lambda(h) = \Lambda(h)$, $\kappa = \Lambda(c)$ e $\Delta = -\Lambda(d)$.

Observação 4.1.11. *Daqui em diante consideraremos apenas pesos Λ tais que*

$$\Delta = \Delta(\lambda) = \frac{\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle}{2(k + h^v)} \quad (4.1.12)$$

e, para este Λ , denotaremos $V_{\lambda, \kappa}$ ao invés de V_Λ . Quando κ e Δ estão fixados chamaremos $V_{\lambda, \kappa}$ de módulo imaginário de peso máximo com peso máximo imaginário λ .

Seja

$$H = (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t]t) \oplus (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}) \oplus \mathbb{C}c$$

uma subálgebra de Heisenberg de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Seja V_λ o H -módulo de Verma gerado por v_λ . Então

$$V_{\lambda,\kappa} = \text{Ind}_{H+\mathfrak{b}_{nat}}^{\tilde{\mathfrak{g}}} V_\lambda, \quad (4.1.13)$$

onde d age em V_λ por multiplicação por $-\Delta(\lambda)$. Em $V_{\lambda,\kappa}$ temos uma $\mathbb{Z}$ -graduação:

$$V_{\lambda,\kappa} = \bigoplus_{n \geq 0} V_{\lambda,\kappa}[-n].$$

Observe que $V_{\lambda,\kappa}[-n]$ é o autoespaço de d de autovalor $-n - \Delta(\lambda)$, com cada $V_{\lambda,\kappa}[-n]$ sendo um H -módulo e $V_{\lambda,\kappa}[0] = V_\lambda$.

Observação 4.1.14. *Seja V um $\mathfrak{g}$ -módulo e fixe $z \in \mathbb{C}^*$. Para todo polinômio $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ e $x \in \hat{\mathfrak{g}}$, $u \in V$, seja*

$$x \otimes P(t) \cdot u = P(z)xu, \quad cu = 0. \quad (4.1.15)$$

Esta é chamada de representação de avaliação de $\hat{\mathfrak{g}}$ e a denotemos por $V(z)$.

Infelizmente não podemos estendê-la a uma ação de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Seja Δ o conveniente número complexo que definiremos na Proposição 4.3.13 e seja z uma variável formal. Considere o espaço

$$z^{-\Delta}V[z, z^{-1}] = V \otimes z^{-\Delta}\mathbb{C}[z, z^{-1}].$$

Este espaço possui uma estrutura de módulo em $\tilde{\mathfrak{g}}$, onde d age como $z \frac{\partial}{\partial z}$. Para todo $z_0 \neq 0$, temos a aplicação de avaliação

$$\epsilon_{z_0} : z^{-\Delta}V[z, z^{-1}] \longrightarrow V(z_0) \quad (4.1.16)$$

que é um $\hat{\mathfrak{g}}$ -epimorfismo. Denote por

$$V_{\lambda,\kappa} \hat{\otimes} V(z_0) \quad (4.1.17)$$

o produto tensorial completo gerado por todas as somas infinitas da forma $\sum_{i=1}^{\infty} w_i \otimes v_i$, onde $w_i \in V_{\lambda,\kappa}$, é um vetor homogêneo, $\{\text{degree}(w_i)\} \longrightarrow -\infty$ e $v_i \in V(z_0)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

Aqui iremos reescrever a primeira realização de campos livres em termos de campos.

Definição 4.1.18. *Seja $\hat{\mathfrak{a}}$ uma álgebra de Heisenberg de dimensão infinita gerada por a_m , a_m^* e $\mathbf{1}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e com as relações*

$$\begin{aligned} [a_m, a_n] &= [a_m^*, a_n^*] = 0, \\ [a_m, a_n^*] &= \delta_{m+n,0} \mathbf{1}, \\ [a_m, \mathbf{1}] &= [a_m^*, \mathbf{1}] = 0. \end{aligned}$$

Esta álgebra age em $\mathbb{C}[x_m | m \in \mathbb{Z}]$ por

$$a_m \mapsto x_m, \quad a_m^* \mapsto -\partial/\partial x_{-m}$$

com $\mathbf{1}$ agindo como a identidade. Então temos um $\hat{\mathfrak{a}}$ -módulo gerado por v tal que

$$a_m^* v = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Observe que $a(z)$ não é um campo enquanto que $a^*(z)$ é. Chamemos este operador $a(z)$ (respectivamente $a^*(z)$) de *operador de criação puro* (respectivamente *aniquilação*). Seja

$$\begin{aligned} a(z)_+ &= a(z), & a(z)_- &= 0, \\ a^*(z)_+ &= 0, & a^*(z)_- &= a^*(z). \end{aligned}$$

Definição 4.1.19. *Seja $e(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n z^{-n-1}$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^{-n-1}$ e $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^{-n-1}$.*

Teorema 4.1.20. *([CF05]). Seja $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $\gamma \in \mathbb{C}$. As funções geradoras*

$$\begin{aligned} f(z) &\mapsto a(z), \\ h(z) &\mapsto 2 : a(z)a^*(z) : + b(z), \\ e(z) &\mapsto a^*(z)^2 a(z) : - a^*(z)b(z) - (1 - \gamma^2) \partial_z a^*(z), \\ c &\mapsto \gamma^2 - 1, \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

definem uma representação de $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ no espaço de Fock $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\mathbf{y}]$.

Em outras palavras, a primeira e a segunda realização de campos livres podem ser obtidas pela mesma fórmula de Wakimoto tomando diferentes representações da álgebra de Heisenberg $\widehat{\mathfrak{a}}$. Denotemos este $\widehat{\mathfrak{sl}}(2)$ -módulo por $W_{\lambda, \kappa}$, onde $\kappa = \gamma^2 - 1$ e o chamemos de *módulo imaginário de Wakimoto*. Podemos olhar $W_{\lambda, \kappa}$ como um $\widetilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ -módulo definindo

$$d \cdot a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot 1 = \left(\sum_{j=1}^k n_k - \sum_{i=1}^l m_i - \Delta(\lambda) \right) a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot 1$$

onde, em particular, $d \cdot 1 = -\Delta(\lambda) \cdot 1$. Denotemos por $w_{\lambda, \kappa}$ o gerador 1 de $W_{\lambda, \kappa}$.

Teorema 4.1.22 *([CF05]). Fixemos Λ como em (4.1.10). Para $\kappa = \gamma^2 - 1 \neq 0$, a aplicação $\Psi_{\lambda, \kappa} : V_{\lambda, \kappa} \longrightarrow W_{\lambda, \kappa}$ dada por*

$$\Psi_{\lambda, \kappa}(f_{n_1} \cdots f_{n_k} h_{-m_1} \cdots h_{-m_l} \cdot v_{\lambda, \kappa}) = a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}$$

é um isomorfismo de $\widetilde{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ -módulos.

4.2 A ação de Virasoro

Nosso primeiro objetivo é definir uma ação da álgebra de Virasoro no módulo de Verma imaginário para posteriormente poder definí-la nos módulos imaginários de Wakimoto. Para isso seguiremos a construção feita em [KR87]. A álgebra de Virasoro é definida tendo base L_n , $n \in \mathbb{Z}$ e centro gerado por c com as relações

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n, 0}c. \tag{4.2.1}$$

Agora defina o operador

$$\bar{L}_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - k) a_j a_{k-j}^* \tag{4.2.2}$$

o qual agirá no módulo de Wakimoto imaginário. Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

e

$$\bar{L}_k(\epsilon) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - k) a_j a_{k-j}^* \psi(\epsilon j).$$

Assim $\bar{L}_n(\epsilon)$ possui apenas uma quantidade finita de somandos e como $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $\bar{L}_n(\epsilon) \rightarrow \bar{L}_n$.

Lema 4.2.3. *Temos que $[a_k, \bar{L}_n] = k a_{k+n}$ e $[a_k^*, \bar{L}_n] = (k + n) a_{k+n}^*$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$[a_k, \bar{L}_n(\epsilon)] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - n) [a_k, a_j a_{n-j}^*] \psi(\epsilon j) = k a_{k+n} \psi(\epsilon(n + k)),$$

e também que

$$[a_k^*, \bar{L}_n(\epsilon)] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - n) [a_k^*, a_j a_{n-j}^*] \psi(\epsilon j) = (k + n) a_{k+n}^* \psi(\epsilon(-k)). \quad \square$$

Lema 4.2.4. $[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n) \bar{L}_{m+n}$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} [\bar{L}_m(\epsilon), \bar{L}_n] &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) [a_j a_{m-j}^*, \bar{L}_n] \psi(\epsilon j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) [a_j, \bar{L}_n] a_{m-j}^* \psi(\epsilon j) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) a_j [a_{m-j}^*, \bar{L}_n] \psi(\epsilon j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) j a_{j+n} a_{m-j}^* \psi(\epsilon j) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) (m + n - j) a_j a_{m+n-j}^* \psi(\epsilon j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - n - m) (j - n) a_j a_{m+n-j}^* \psi(\epsilon(j - n)) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - m) (m + n - j) a_j a_{m+n-j}^* \psi(\epsilon j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left((j - n - m) (j - n) \psi(\epsilon(j - n)) + (j - m) (m + n - j) \psi(\epsilon j) \right) a_j a_{m+n-j}^*. \end{aligned}$$

Para ϵ suficientemente pequeno e j fixado, temos

$$\begin{aligned} &(j - n - m) (j - n) \psi(\epsilon(j - n)) + (j - m) (m + n - j) \psi(\epsilon j) \\ &= (j - n - m) (j - n) + (j - m) (m + n - j) \\ &= (m - n) (j - m - n). \end{aligned}$$

e então

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m - n) \bar{L}_{m+n}. \quad \square$$

Desta forma, o operador $\bar{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, define uma estrutura de álgebra de Witt, mas não a de Virasoro, como desejamos. Contudo, antes de continuar, escreveremos tal operador na linguagem de distribuições formais.

Lema 4.2.5. *Seja $\bar{L}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n z^{-n-2}$. Temos*

$$\begin{aligned}
[\bar{L}(z), \bar{L}(w)] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} [\bar{L}_k, \bar{L}_q] z^{-k-2} w^{-q-2} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (k - q) \bar{L}_{k+q} z^{-k-2} w^{-q-2} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (l - 2q) \bar{L}_l z^{-l+q-2} w^{-q-2} \\
&= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} (l + 2) \bar{L}_l z^{-l-3} \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} z^{q+1} w^{-q-2} \right) + \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{L}_l z^{-l-2} \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} (-2q - 2) z^q w^{-q-2} \right) \\
&= -\partial_z \bar{L}(z) \delta(z/w) + 2\bar{L}(z) \partial_w \delta(z/w) \\
&= \partial_w \bar{L}(w) \delta(z/w) + 2\bar{L}(w) \partial_w \delta(z/w).
\end{aligned}$$

Agora definiremos o adador que nos dará a ação de álgebra de Virasoro.

Definição 4.2.6. *Fixemos $\mu \in \mathbb{C}$. Definamos L_k tal que*

$$L(z) = \bar{L}(z) + \frac{1}{4} : b(z)^2 : + \frac{\mu}{2} \partial_z b(z). \quad (4.2.7)$$

Temos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} L_k z^{-k-2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - k) a_j a_{k-j}^* + \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} : b_j b_{k-j} : - \frac{\mu}{2} (k + 1) b_k \right) z^{-k-2} \quad (4.2.8)$$

e assim

$$L_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j - k) a_j a_{k-j}^* + \frac{1}{4} \sum_{j \in \mathbb{Z}} : b_j b_{k-j} : - \frac{\mu}{2} (k + 1) b_k \quad (4.2.9)$$

onde

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} : = \sum_{n > m} b_{m-n} b_n + \sum_{n \leq m} b_n b_{m-n} \quad (4.2.10)$$

já que

$$\begin{aligned}
: b(z) b(z) : &= b(z)_+ b(z) + b(z) b(z)_- \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m < 0} b_m b_n z^{-m-n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \geq 0} b_n b_m z^{-m-n-2} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m < 0} b_m b_{n-m} z^{-n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \geq 0} b_{n-m} b_m z^{-n-2} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m < n} b_{m-n} b_n z^{-n-2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \geq n} b_n b_{m-n} z^{-n-2}
\end{aligned}$$

O centro da álgebra de Virasoro age como escalar $\mathcal{C} = 6 - 6\mu^2 \in \mathbb{C}$. Temos que b_i satisfaz a relação

$$[b_m, b_p] = 2m \delta_{m+p, 0},$$

e, portanto,

$$[b(z), b(w)] = 2\partial_w \delta(z/w)$$

e

$$b(z)b(w) = : b(z)b(w) : + \frac{2}{(z-w)^2}.$$

Proposição 4.2.11. *Seja $b_0v = \lambda v$, $cv = \not{c}v$ onde v é o vetor vácuo. Então*

$$[L(z), L(w)] = \frac{c}{12} \partial_w^3 \delta(z/w) + 2L(w) \partial_w \delta(z/w) + \partial_w L(w) \delta(z/w). \quad (4.2.12)$$

e então, temos que $\bar{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, satisfaz (4.2.1), nos dando a ação de álgebra de Virasoro no módulo de Verma imaginário, como queríamos.

Demonstração. Faremos estes cálculos usando os Teoremas de Kac, Wick e Taylor (ver [Kac98]). Temos

$$\begin{aligned} :b(z)^2::b(w)^2 &= :b(z)^2 b(w)^2: + \frac{8}{(z-w)^2} :b(z)b(w): + \frac{8}{(z-w)^4} \\ &=:b(z)^2 b(w)^2: + \frac{8}{(z-w)^2} :b(w)b(w): + \frac{8}{(z-w)} :b(w)\partial_w b(w): + \frac{8}{(z-w)^4}, \end{aligned}$$

logo

$$\left[\frac{1}{4} :b(z)^2:, \frac{1}{4} :b(w)^2:\right] = 2\left(\frac{1}{4}\right) :b(w)b(w): \partial_w \delta(z/w) + \frac{1}{2} :b(w)\partial_w b(w): + \frac{1}{2} \partial_w^3 \delta(z/w).$$

Agora temos

$$:b(z)^2:b(w) = :b(z)^2 b(w): + \frac{4}{(z-w)^2} b(w) + \frac{4}{z-w} \partial_w b(w)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{4} :b(z)^2:, \frac{\mu}{2} \partial_w b(w)\right] + \left[\frac{\mu}{2} \partial_z b(z), \frac{1}{4} :b(w)^2:\right] \\ &= \partial_w \left(\frac{\mu}{2} b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w b(w) \delta(z/w)\right) + \partial_z \left(\frac{\mu}{2} b(z) \partial_z \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_z b(z) \delta(z/w)\right) \\ &= \frac{2\mu}{2} \partial_w b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w) \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu}{2} \partial_z^2 (b(w) \delta(z/w)) \\ &= \mu \partial_w b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w) \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu}{2} \partial_z^2 (b(w) \delta(z/w)) \\ &= \mu \partial_w b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w) \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu}{2} b(w) \partial_z^2 \delta(z/w) \\ &= \mu \partial_w b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w) \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w). \end{aligned}$$

Para finalizar, observe que $[\frac{\mu}{2} \partial_z b(z), \frac{\mu}{2} \partial_w b(w)] = -\frac{\mu^2}{2} \partial_w^3 \delta(z/w)$. Juntando todas estas expressões, temos que

$$\begin{aligned} [L(z), L(w)] &= \partial_w \bar{L}(w) \delta(z/w) + 2\bar{L}(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{1}{2} :b(w)b(w): \partial_w \delta(z/w) \\ &\quad + \frac{1}{2} :b(w)\partial_w b(w): + \frac{1}{2} \partial_w^3 \delta(z/w) + \mu \partial_w b(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w) \delta(z/w) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu}{2} b(w) \partial_w^2 \delta(z/w) - \frac{\mu^2}{2} \partial_w^3 \delta(z/w) \\ &= \left(\partial_w \bar{L}(w) + \frac{1}{2} :b(w)\partial_w b(w): + \frac{\mu}{2} \partial_w^2 b(w)\right) \delta(z/w) \\ &\quad + \left(2\bar{L}(w) + \frac{1}{2} :b(w)^2: + \frac{\mu}{2} \partial_w b(w)\right) \partial_w \delta(z/w) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2}{2}\right) \partial_w^3 \delta(z/w) \\ &= \partial_w L(w) \delta(z/w) + 2L(w) \partial_w \delta(z/w) + \frac{c}{12} \partial_w^3 \delta(z/w). \end{aligned}$$

□

Proposição 4.2.13. *Temos os seguintes colchetes:*

$$[a(z), L(w)] = a(w)\partial_w\delta(z/w), \quad (4.2.14)$$

$$[a^*(z), L(w)] = -\partial_w a^*(w)\delta(z/w), \quad (4.2.15)$$

$$[b(z), L(w)] = b(w)\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w). \quad (4.2.16)$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} [a(z), L(w)] &= [a(z), \bar{L}(w)] = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} [a_k, \bar{L}_n] z^{-k-1} w^{-n-2} = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} k a_{k+n} z^{-k-1} w^{-n-2} \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} k a_{k+n} z^{-k-1} w^{k-1} w^{-n-k-1} = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} k a_{n-k} z^{k-1} w^{-k-1} w^{-n+k-1} \\ &= a(w)\partial_w\delta(z/w), \\ [a^*(z), L(w)] &= [a^*(z), \bar{L}(w)] = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} [a_k^*, \bar{L}_n] z^{-k} w^{-n-2} = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} (k+n) a_{k+n}^* z^{-k} w^{-n-2} \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} (k+n) a_{k+n}^* z^{-k} w^k w^{-1} w^{-n-k-1} = -\partial_w a^*(w)\delta(z/w), \end{aligned}$$

e, utilizando os cálculos da Proposição 4.2.11, temos que

$$\begin{aligned} [b(z), L(w)] &= [b(z), \frac{1}{4} : b(w)^2 : + \frac{\mu}{2} \partial_w b(w)] \\ &= \frac{1}{4} \left(-4\partial_z b(z)\delta(z/w) - 4b(z)\partial_z\delta(z/w) \right) + \mu\partial_w^2\delta(z/w) \\ &= -\partial_w b(w)\delta(z/w) + b(z)\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w) \\ &= b(w)\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.2.17. *Temos que*

$$[L_{-1}, a(z)] = \partial_z a(z), \quad [L_{-1}, a^*(z)] = \partial_z a^*(z), \quad [L_{-1}, b(z)] = \partial_z b(z), \quad (4.2.18)$$

$$[L_0, a(z)] = a(z) + z\partial_z a(z), \quad [L_0, a^*(z)] = z\partial_z a^*(z), \quad [L_0, b(z)] = b(z) + z\partial_z b(z). \quad (4.2.19)$$

De fato, temos que

$$[L_{-1}, a^*(z)] = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} (k-1) a_{k-1}^* z^{-k} = -\sum_{s \in \mathbb{Z}} s a_s^* z^{-s-1} = \partial_z a^*(z).$$

Observação 4.2.20. $L(z) = a(z)\partial_z a^*(z) + \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \mu\partial_z b(z).$

Proposição 4.2.21. *Temos as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} [\rho(f(z)), L(w)] &= \rho(f(w))\partial_w\delta(z/w), \\ [\rho(h(z)), L(w)] &= \rho(h(w))\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w), \\ [\rho(e(z)), L(w)] &= \rho(e(w))\partial_w\delta(z/w) - \mu\partial_w^2(a^*(w)\delta(z/w)). \end{aligned}$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} [\rho(f(z)), L(w)] &= [a(z), L(w)] = a(w)\partial_w\delta(z/w) = \rho(f(w))\partial_w\delta(z/w). \\ [\rho(h(z)), L(w)] &= [2a(z)a^*(z) + b(z), L(w)] \\ &= -2a(z)(\partial_w a^*(w))\delta(z/w) + 2a(w)a^*(w)\partial_z\delta(z/w) + [b(z), L(w)] \\ &= 2a(w)(-\partial_w a^*(w)\delta(z/w) + \partial_w(a^*(w)\delta(z/w))) + [b(z), L(w)] \\ &= 2a(w)a^*(w)\partial_w\delta(z/w) + b(w)\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w) \\ &= \rho(h(w))\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w). \\ [\rho(e(z)), L(w)] &= -[a(z)a^*(z)^2 + a^*(z)b(z) + (1 - \gamma^2)\partial_z a^*(z), L(w)] \\ &= -a(w)a^*(z)^2\partial_w\delta(z/w) + 2a(z)a^*(z)\partial_w a^*(w)\delta(z/w) \\ &\quad - (b(w)\partial_w\delta(z/w) + \mu\partial_w^2\delta(z/w))a^*(z) + b(z)\partial_w a^*(w)\delta(z/w) \\ &\quad + (1 - \gamma^2)\partial_z(\partial_w a^*(w)\delta(z/w)) \\ &= -a(w)a^*(w)^2\partial_w\delta(z/w) - b(w)a^*(w)\partial_w\delta(z/w) \\ &\quad - \mu\partial_w^2\delta(z/w)a^*(z) + (1 - \gamma^2)\partial_w a^*(w)\partial_z\delta(z/w) \\ &= -a(w)a^*(w)^2\partial_w\delta(z/w) - b(w)a^*(z)\partial_w\delta(z/w) \\ &\quad - \mu(a^*(w)\partial_w^2\delta(z/w) + 2\partial_w a^*(w)\partial_w\delta(z/w) + \partial_w^2 a^*(z)\delta(z/w)) \\ &\quad - (1 - \gamma^2)\partial_w a^*(w)\partial_w\delta(z/w) \\ &= \rho(e(w))\partial_w\delta(z/w) - \mu(a^*(w)\partial_w^2\delta(z/w) + 2\partial_w a^*(w)\partial_w\delta(z/w) + \partial_w^2 a^*(z)\delta(z/w)) \\ &= \rho(e(w))\partial_w\delta(z/w) - \mu\partial_w^2(a^*(w)\delta(z/w)). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.2.22.

$$\begin{aligned} [L_{-1}, \rho(f(z))] &= \partial_z \rho(f(z)), \quad [L_{-1}, \rho(e(z))] = \partial_z \rho(e(z)), \\ [L_{-1}, \rho(h(z))] &= \partial_z \rho(h(z)), \quad [L_{-1}, b(z)] = \partial_z b(z), \\ [L_0, \rho(f(z))] &= z\partial_z \rho(f(z)) + \rho(f(z)), \quad [L_0, \rho(e(z))] = z\partial_z \rho(e(z)) + \rho(e(z)), \\ [L_0, \rho(h(z))] &= z\partial_z \rho(h(z)) + \rho(h(z)), \quad [L_0, b(z)] = z\partial_z b(z) + b(z), \end{aligned}$$

como operadores em todo módulo de Verma imaginário.

4.3 Operadores entrelaçantes

4.3.1 Módulos Topológicos

Seguindo as definições dadas em [War93], página 22, temos

Definição 4.3.1. Uma família $\mathcal{N}$ de subconjuntos de um conjunto S é chamado filtro de S se $S \in \mathcal{N}$, $\emptyset \notin \mathcal{N}$, a intersecção de dois elementos de $\mathcal{N}$ pertence a $\mathcal{N}$, e todo subconjunto de S contendo um conjunto de $\mathcal{N}$ está em $\mathcal{N}$. Suponha que $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de um dado conjunto S e considere o conjunto $\mathcal{N} = \{F \subseteq S \mid \exists B \in \mathcal{B}, B \subseteq F\}$. Se $\mathcal{N}$ é um filtro em S , então $\mathcal{B}$ é chamado um filtro base em S . Um sistema fundamental de vizinhanças de zero num espaço vetorial é qualquer filtro base que gere todas as vizinhanças de zero.

Teorema 4.3.2 ([War93], Teorema 3.5). Suponha que A é um anel. Se $\mathcal{N}$ é um filtro base de vizinhanças de A , então $\mathcal{N}$ satisfaz as seguintes condições:

(TRN1) Para todo $N \in \mathcal{N}$ existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $U + U \subseteq N$.

(TRN2) $N \in \mathcal{N}$ implica que existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $U \subseteq -N$.

(TRN3) Para todo $N \in \mathcal{N}$ existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $UU \subseteq N$.

(TRN4) Para todo $N \in \mathcal{N}$, $b \in A$ existe $U \in \mathcal{N}$ tal que $bU \subseteq N$ e $Ub \subseteq N$.

Se $\mathcal{N}$ é um filtro base em A satisfazendo (TRN1)-(TRN4), então existe um único anel topológico em A tal que $\mathcal{N}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero.

Agora para definir módulos topológicos, precisamos de uma coleção de vizinhanças de zero $\mathfrak{n} = \{N\}$ tal que

(M1) Para cada $N \in \mathfrak{n}$ existe $U \in \mathfrak{n}$ tal que $U + U \subseteq N$.

(M2) Para cada $N \in \mathfrak{n}$ existe $U \in \mathfrak{n}$ tal que $U \subseteq -N$.

(M3) Para cada $N \in \mathfrak{n}$ existe uma vizinhança T de zero em A e $U \in \mathfrak{n}$ tal que $TU \subseteq N$.

(M4) Para cada $N \in \mathfrak{n}$ e cada $b \in E$ existe uma vizinhança T de zero em A tal que $Tb \subseteq N$.

(M5) Para cada $N \in \mathfrak{n}$ e cada $\beta \in A$ existe $U \in \mathfrak{n}$ tal que $\beta U \subseteq N$.

Assim $\{N\}$ forma uma base para o módulo topológico M . Queremos encontrar um completamento de $M = U(\widehat{\mathfrak{g}}_-) \cdot 1 \subseteq V_{\lambda-m}$ e $W_{\lambda-m}$ tal que

$$f_{m_1} \cdots f_{m_k} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi 1 \right) \in \widehat{V}_{\lambda-m}.$$

Sejam

$$U_n = \text{span}\langle h_{n_1} \cdots h_{n_k} \mid n \leq \sum_{i=1}^k n_i \rangle \subseteq A,$$

$\mathfrak{n} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ uma topologia para A ,

$\mathfrak{n}' = \{U_n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ topologia para M ,

e sejam

$$\begin{aligned} U_n \subseteq U(\widehat{\mathfrak{g}}_-) = A, \quad M_n = U_n \cdot 1, \quad M = U(\mathfrak{g}) \cdot 1, \\ \widehat{M} = \varprojlim_n M/M_n \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

o completamento de M . Então temos

(M1) Se $N = M_n \in \mathfrak{n}$, então $U = M_n$ satisfaz $M_n + M_n \subseteq M_n$.

(M2) Se $N = M_n \in \mathfrak{n}$, então $U = M_n$ satisfaz $M = M_n \subseteq -N$.

(M3) Se $N = M_n \in \mathfrak{n}$, então para $T = U_n$ e $U = M_n \in \mathfrak{n}$ temos $TM = U_n U_n \cdot 1 \subseteq U_{2n} \cdot 1 \subseteq$

$$U_n \cdot 1 = M_n.$$

(M4) Para $N = M_k \in \mathfrak{n}$, $b = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi \cdot 1$, tome $T = U_k$ e então $U_k b \subseteq M_k$.

(M5) Para $N = M_k \in \mathfrak{n}$, $\beta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi \in A$, tome $U = M_k$ e teremos $bM_k \subseteq M_k$.

Temos que ter certeza que $\widehat{M}$ pode ser visto como um $\widehat{\mathfrak{n}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{h}}$ -módulo. Precisamos verificar que a multiplicação à esquerda por h_n , $n \in \mathbb{N}$, é contínua: $h_n M_m \subseteq M_{n+m}$. Logo h_n se estende a uma aplicação $h_n : \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$.

Definição 4.3.4. Defina $\widehat{V}_{\lambda, \kappa} = \varprojlim_n V_{\lambda, \kappa} / (V_{\lambda, \kappa})_n$ e, de forma análoga, defina $\widehat{W}_{\lambda, \kappa}$, $\widehat{V}(z)$, etc.

Definição 4.3.5. Seja $\mathfrak{F}_m$ o $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -módulo de dimensão finita com peso máximo $m \in \mathbb{N}$ e vetor de peso máximo u^m .

Observe que as definições de $\mathfrak{F}_m(z)$ e $V_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z)$ são similares às definições dadas em (4.1.15) e (4.1.17). Seja $u_k^m = u^m \otimes z^k \in \mathfrak{F}_m(z)$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 4.3.6. Defina $P_n = \{(-n_1, -n_2, \dots, -n_p) | n_1 + \dots + n_p = n\}$ e, para $\pi = (-n_1, \dots, -n_p) \in P_n$ fixado, defina $h_\pi = h_{n_1} \dots h_{n_p}$.

Proposição 4.3.7. Suponha $\kappa \neq 0$ e fixe $\beta_{(1)} \in \mathbb{C}$. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $V_{\lambda-m, \kappa}$ o módulo de Verma imaginário para $\widehat{\mathfrak{g}}$ e $v_{\lambda-m, \kappa} \in V_{\lambda-m, \kappa}$ um vetor de peso máximo imaginário com peso máximo $\lambda - m$. Para $(n_1, n_2, \dots, n_r) = (n_1, n_2, \dots, n_r, 0, 0, \dots)$, com $n_i \in \mathbb{N}$, defina

$$\beta_{(n_1, \dots, n_r)} = \frac{m^{n_r + \dots + n_1 - 1}}{(-\kappa)^{n_r + \dots + n_1 - 1} (r^{n_r} \dots 2^{n_2}) \cdot n_r! \dots n_1!} \cdot \beta_{(1)}$$

Para uma partição

$$\pi = (\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n_1}, \underbrace{-2, -2, \dots, -2}_{n_2}, \dots, \underbrace{-r, -r, \dots, -r}_{n_r})$$

de $-n$ (logo $n = \sum_{l=1}^r l n_l$), defina

$$\alpha_{(\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n_1}, \underbrace{-2, -2, \dots, -2}_{n_2}, \dots, \underbrace{-r, -r, \dots, -r}_{n_r})} = \beta_{(n_1, n_2, \dots, n_r)}$$

e

$$h_\pi = h_{-1}^{n_1} h_{-2}^{n_2} \dots h_{-r}^{n_r}.$$

O vetor

$$v_{\lambda, \kappa}^\sharp = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \in V_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z)$$

é um vetor de peso máximo imaginário λ . Então existe um $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo homomorfismo não-nulo $\Phi^V(z) : V_{\lambda, \kappa} \rightarrow V_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z)$ tal que $\Phi^V(z)(v_{\lambda, \kappa}) = v_{\lambda, \kappa}^\sharp$.

Demonstração. Faremos um esboço da demonstração para o caso da ação de h_1 .

$$\begin{aligned}
& h_1 \left(\alpha_0 v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_0^m + \alpha_{(-1)} h_{-1} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_1^m + \left(\alpha_{(-1, -1)} h_{-1}^2 + \alpha_{(-2)} h_{-2} \right) v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_2^m \right. \\
& \quad + \left(\alpha_{(-1, -1, -1)} h_{-1}^3 + \alpha_{(-2, -1)} h_{-1} h_{-2} + \alpha_{(-3)} h_{-3} \right) v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_3^m \\
& \quad + \left(\alpha_{(-1, -1, -1, -1)} h_{-1}^4 + \alpha_{(-2, -1, -1)} h_{-1}^2 h_{-2} + \alpha_{(-2, -2)} h_{-2}^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + \alpha_{(-3, -1)} h_{-1} h_{-3} + \alpha_{(-4)} h_{-4} \right) v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_4^m + \dots \right) \\
& = 0 + m \alpha_0 v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_1^m + \alpha_{(-1)} \kappa v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_1^m + m \alpha_{(-1)} h_{-1} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_2^m \\
& \quad + 2 \alpha_{(-1, -1)} \kappa h_{-1} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_2^m + m \alpha_{(-1, -1)} h_{-1}^2 v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_3^m + m \alpha_{(-2)} h_{-2} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_3^m \\
& \quad + 3 \alpha_{(-1, -1, -1)} \kappa h_{-1}^2 v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_3^m + m \alpha_{(-1, -1, -1)} h_{-1}^3 v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_4^m \\
& \quad + \alpha_{(-2, -1)} \kappa h_{-2} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_3^m + m \alpha_{(-2, -1)} h_{-1} h_{-2} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_4^m + m \alpha_{(-3)} h_{-3} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_4^m + \\
& \quad + \kappa \left(4 \alpha_{(-1, -1, -1, -1)} h_{-1}^3 + 2 \alpha_{(-2, -1, -1)} h_{-1} h_{-2} + \alpha_{(-3, -1)} h_{-3} \right) v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_4^m + \dots .
\end{aligned}$$

Para $1 \leq k \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
h_k \left(\beta_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \right) \\
= k \cdot n_k \cdot \kappa \cdot \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k-1} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \\
+ m \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_{n+k}^m .
\end{aligned}$$

Por esta razão temos, no caso geral, que

$$m \beta_{(n_1, \dots, n_k-1, \dots, n_r)} + k \cdot n_k \cdot \kappa \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)} = 0. \quad (4.3.8)$$

Neste caso, quando aplicamos h_k , o coeficiente de $h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k-1} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m$ (onde $n = \sum_{i=1}^r i n_i$) é $m \beta_{(n_1, \dots, n_k-1, \dots, n_r)} + k \cdot n_k \cdot \kappa \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)}$ e este será zero por definição. Então fixemos $\beta_{(1)}$ e encontremos todas as outras condições observando que

$$\begin{aligned}
m \beta_{(1)} + l \cdot \kappa \beta_{(1, 0, \dots, 0, 1)} = 0 & \implies \beta_{(1, 0, \dots, 0, 1)} = \frac{-m}{l \cdot \kappa} \beta_{(1)}, \\
m \beta_{(0, \dots, 0, 1)} + 1 \cdot \kappa \beta_{(1, 0, \dots, 0, 1)} = 0 & \implies \beta_{(0, \dots, 0, 1)} = \frac{1}{l} \beta_{(1)},
\end{aligned}$$

onde 1 aparece na (última) l -entrada de $(1, 0, \dots, 0, 1)$ e $(0, \dots, 0, 1)$. Similarmente, aplicando h_k repetidamente, teremos

$$m^{n_k} \beta_{(n_1, \dots, n_{k-1}, 0, n_{k+1}, \dots, n_r)} = (-1)^{n_k} \cdot k^{n_k} \cdot \kappa^{n_k} \cdot n_k! \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $n_1 \neq 0$ e obter

$$\beta_{(1)} = \frac{(-\kappa)^{n_r + \dots + n_1 - 1} \cdot (r^{n_r} \dots 2^{n_2}) \cdot n_r! \dots n_1!}{m^{n_r + \dots + n_1 - 1}} \cdot \beta_{(n_1, \dots, n_r)}.$$

Sob a hipótese $\kappa \neq 0$,

$$\beta_{(n_1, \dots, n_r)} = \frac{m^{n_r + \dots + n_1 - 1}}{(-\kappa)^{n_r + \dots + n_1 - 1} (r^{n_r} \dots 2^{n_2}) \cdot n_r! \dots n_1!} \cdot \beta_{(1)}$$

está bem-definida e força $v_{\lambda, \kappa}^\#$ a ser aniquilada por h_k , para todo $k \geq 1$. Assim temos

$$\begin{aligned} h_m(v_{\lambda, \kappa}^\#) &= 0, \\ e_m(v_{\lambda, \kappa}^\#) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi(e_m h_\pi v_{\lambda-m, \kappa}) \otimes u_n^m + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi v_{\lambda-m, \kappa} \otimes e_m u_n^m \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $m > 0$ (já que $e_m h_k = -2e_{m+k} + h_k e_m$, $\forall k$). Então $v_{\lambda, \kappa}^\#$ é um vetor de peso máximo imaginário de peso $\lambda + \kappa \Lambda_0$. Pela propriedade universal das aplicações dos módulos de Verma imaginários, existe um homomorfismo de $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo $\varphi : V_{\lambda, \kappa} \longrightarrow V_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z)$, para $\kappa \neq 0$, mandando $v_{\lambda, \kappa}$ para $v_{\lambda, \kappa}^\#$. $\square$

Corolário 4.3.9.

$$((zh(z))_- \otimes 1) \widehat{\Phi}^V(z)(v_{\lambda, \kappa}) = -m \widehat{\Phi}^V(z)(v_{\lambda, \kappa}). \quad (4.3.10)$$

Demonstração. Por (4.3.8), temos

$$\begin{aligned} (h_k \otimes 1) &(\beta_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m) \\ &= k \cdot n_k \cdot \kappa \cdot \beta_{(n_1, \dots, n_k, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k-1} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \\ &= -m \beta_{(n_1, \dots, n_k-1, \dots, n_r)} h_{-1}^{n_1} \dots h_{-k}^{n_k-1} \dots h_{-r}^{n_r} v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} ((zh(z))_- \otimes 1) \widehat{\Phi}^V(z)(v_{\lambda, \kappa}) &= \sum_{k>0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi [h_k, h_\pi] v_{\lambda-m, \kappa} \otimes z^{-\Delta} u_n^m z^{-k} \\ &= -m \sum_{k>0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi v_{\lambda-m, \kappa} \otimes z^{-\Delta-k} u_{n+k}^m \\ &= -m z^{-\Delta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi h_\pi v_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m \\ &= -m \widehat{\Phi}^V(z)(v_{\lambda, \kappa}). \end{aligned}$$

$\square$

Em particular observe a propriedade entrelaçante de $\Phi^V(z)$: Se denotarmos por $*$ a ação do produto tensorial, então

$$\Phi^V(z)x_n = x_n * \Phi(z) = (x_n \otimes 1 + z^n(1 \otimes x)) \Phi^V(z) \quad (4.3.11)$$

para $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

4.3.2 Forma operadora das equações de Knizhnik-Zamolodchikov

Defina $\Phi^W(z) : W_{\lambda, \kappa} \rightarrow W_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z)$ de forma a satisfazer o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_{\lambda, \kappa} & \xrightarrow{\Phi^W(z)} & W_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z) \\ \Psi_{\lambda, \kappa}^{-1} \downarrow & & \Psi_{\lambda-m, \kappa} \otimes 1 \uparrow \\ V_{\lambda, \kappa} & \xrightarrow{\Phi^V(z)} & V_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m(z) \end{array}$$

onde $\Psi_{\lambda, \kappa} : V_{\lambda, \kappa} \rightarrow W_{\lambda, \kappa}$ é o isomorfismo canônico dado no Teorema 4.1.22 e

$$(\Psi_{\lambda-m, \kappa} \otimes 1)(v_1 \otimes v_2) = \Psi_{\lambda-m, \kappa}(v_1) \otimes v_2.$$

Então

$$\Phi^W(z) = (\Psi_{\lambda-m, \kappa} \otimes 1) \circ \Phi^V(z) \circ \Psi_{\lambda, \kappa}^{-1}. \quad (4.3.12)$$

Considere z como uma variável formal e

$$\mathfrak{F}_m \otimes z^{-\Delta} \mathbb{C}[z, z^{-1}] = z^{-\Delta} \mathfrak{F}_m[z_1, z_1^{-1}]$$

que é uma representação de dimensão infinita de $\widehat{\mathfrak{g}}$ com base $v \otimes z^{n-\Delta}$, $n \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathfrak{F}_m$.

Proposição 4.3.13. *Temos que a aplicação de $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo $z^{-\Delta} \Phi^W(z) : W_{\lambda, \kappa} \rightarrow W_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} z^{-\Delta} \mathfrak{F}_m[z, z^{-1}]$ é um homomorfismo de $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo (aqui d age como $z \frac{\partial}{\partial z}$ no segundo fator)*

$$z^{-\Delta} \Phi^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes z^{-\Delta} u_n^m$$

se, e somente se,

$$\Delta = \Delta(\lambda) - \Delta(\lambda - m). \quad (4.3.14)$$

Demonstração. Por definição, temos que $d \cdot w_{\lambda, \kappa} = -\Delta(\lambda) \cdot w_{\lambda, \kappa}$, para $w_{\lambda, \kappa} \in W_{\lambda, \kappa}$ (ver (4.1.13)). Agora $z^{-\Delta} \Phi^W(z)$ é $\widehat{\mathfrak{g}}$ -entrelaçante se, e somente se, satisfaz

$$z^{-\Delta} \Phi^W(z)d - (d \otimes 1)z^{-\Delta} \Phi^W(z) = \left(1 \otimes z \frac{\partial}{\partial z}\right) z^{-\Delta} \Phi^W(z). \quad (4.3.15)$$

Aplicamos ambos os lados desta igualdade ao vetor de peso máximo imaginário $w_{\lambda, \kappa}$ e teremos que esta é verdadeira se, e somente se, a condição (4.3.14) for satisfeita. Então como $W_{\lambda, \kappa}$ é gerada por este vetor, os dois lados valerão para todo o $W_{\lambda, \kappa}$ se, e somente se, (4.3.14) for satisfeita. O lado esquerdo de (4.3.15) aplicado à $w_{\lambda, \kappa}$ nos dá

$$\begin{aligned} & \left(z^{-\Delta} \Phi^W(z)d - (d \otimes 1)z^{-\Delta} \Phi^W(z) \right) (w_{\lambda, \kappa}) \\ &= -\Delta(\lambda) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta} \\ & \quad - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} (-n - \Delta(\lambda - m)) b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta} \\ &= -\left(\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda - m) \right) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta} \\ & \quad + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} n \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta} \end{aligned}$$

enquanto que o lado direito nos dá

$$\begin{aligned} \left(1 \otimes z \frac{\partial}{\partial z}\right) z^{-\Delta} \Phi^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) &= \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes z \frac{\partial}{\partial z} u_n^m z^{-\Delta} \\ &= -\Delta \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta} + \sum_{\pi \in P_n} n \alpha_{\pi} b_{\pi} w_{\lambda-m, \kappa} \otimes u_n^m z^{-\Delta}. \end{aligned}$$

Para completar a demonstração, basta usar (4.3.12) e ver que $\Psi_{\lambda, \kappa}$ é um homomorfismo de $\tilde{\mathfrak{g}}$ -módulo. □

Para $x \in \mathfrak{F}_m^*$, defina $\Phi_x^V(z) : V_{\lambda, \kappa} \longrightarrow \widehat{V}_{\lambda-m, \kappa}$ por

$$\Phi_x^V(z)(w) = x(\Phi^V(z)(w)). \quad (4.3.16)$$

Por exemplo,

$$\Phi_x^V(z)(v_{\lambda, \kappa}) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_{\pi} h_{\pi} v_{\lambda-m, \kappa} x(u_n^m), \quad (4.3.17)$$

onde $xu_n^m = (xu_n^m)z^n$. Analogamente, defina $\Phi_x^W(z) : W_{\lambda, \kappa} \rightarrow \widehat{W}_{\lambda-m, \kappa}$. A propriedade entrelaçante (4.3.15), para $x = f$, nos dá

$$\begin{aligned} \Phi_x^W(z)a_m &= \Phi_x^W(z)f_m = f_m * \Phi_x^W(z) = (f_m \otimes 1)\Phi_x^W(z) + z^m(1 \otimes f)\Phi_x^V(z) \\ &= (a_m \otimes 1)\Phi_x^W(z) - z^m\Phi_{fx}^W(z). \end{aligned}$$

onde fx denota a ação de f em um elemento do espaço dual $\mathfrak{F}_m^*$. Então

$$[a_m, \Phi_x^W(z)] = z^m\Phi_{fx}^W(z). \quad (4.3.18)$$

Cálculos similares mostram que

$$[b_m, \Phi_x^W(z)] = z^m\Phi_{hx}^W(z). \quad (4.3.19)$$

As equações (4.3.18) e (4.3.19) mostram que

$$[b(\zeta)_+, \Phi_x^W(z)] = \frac{1}{z - \zeta} \Phi_{hx}^W(z), \quad (4.3.20)$$

$$[b(\zeta)_-, \Phi_x^W(z)] = \frac{1}{\zeta - z} \Phi_{hx}^W(z), \quad (4.3.21)$$

$$[a(\zeta), \Phi_x^W(z)] = \Phi_{fx}^W(z)\delta(\zeta/z). \quad (4.3.22)$$

Para $x \in \mathfrak{F}_m^*$ e $\Delta = \Delta(\lambda) - \Delta(\lambda - m)$, seja

$$\tilde{\Phi}_x^W(z) = z^{-\Delta}\Phi_x^W(z). \quad (4.3.23)$$

Teorema 4.3.24 (Forma operadora das equações de Knizhnik-Zamolodchikov). *Para $x \in \mathfrak{F}_m^*$ de peso $\alpha \in \mathbb{C}$, seja*

$$\Delta(\mu, \alpha) = \frac{\alpha(\alpha - 2\mu)}{4} \quad e \quad \widehat{\Phi}_x^W(z) = z^{-\Delta(\mu, \alpha)} \widetilde{\Phi}_x^W(z),$$

onde μ foi fixado anteriormente (ver Definição 4.2.6).

O operador $\widehat{\Phi}_x^W(z) : W_{\lambda, \kappa} \longrightarrow W_{\lambda-m, \kappa} \widehat{\otimes} \mathfrak{F}_m[z, z^{-1}] \cdot z^{-\Delta}$ satisfaz a equação diferencial

$$\boxed{\frac{d}{dz} \widehat{\Phi}_x^W(z) = \widehat{\Phi}_{f_x}^W(z) \partial_z a^*(z) + \frac{\alpha}{2} : b(z) \widehat{\Phi}_x^W(z) : .} \quad (4.3.25)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \widehat{\Phi}_x^W(z) \circ a_n^*(a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\ &= - \sum_{i=1}^k \delta_{n+n_i, 0} \widehat{\Phi}_x^W(z) \left(a_{n_1} \cdots a_{n_{i-1}} a_{n_{i+1}} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa} \right) \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} & a_n^* \circ \widehat{\Phi}^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\ &= a_n^* \circ (a_{n_1} * \cdots * a_{n_k} * b_{-m_1} * \cdots * b_{-m_l} * \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa})) \\ &= a_n^* ((a_{n_1} \otimes 1 + z^{n_1} \otimes f) \cdots (a_{n_k} \otimes 1 + z^{n_k} \otimes f) \\ & \quad \times (b_{-m_1} \otimes 1 + z^{-m_1} \otimes h) \cdots (b_{-m_l} \otimes 1 + z^{-m_l} \otimes h)) \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) \\ &= - \sum_{i=1}^k \delta_{n+n_i, 0} (a_{n_1} \otimes 1 + z^{n_1} \otimes f) \cdots (a_{n_{i-1}} \otimes 1 + z^{n_{i-1}} \otimes f) \\ & \quad \cdot (a_{n_{i+1}} \otimes 1 + z^{n_{i+1}} \otimes f) \cdots (a_{n_k} \otimes 1 + z^{n_k} \otimes f) \\ & \quad \cdot (b_{-m_1} \otimes 1 + z^{-m_1} \otimes h) \cdots (b_{-m_l} \otimes 1 + z^{-m_l} \otimes h) \cdot \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) \\ & \quad + a_{n_1} * \cdots * a_{n_k} * b_{-m_1} * \cdots * b_{-m_l} * (a_n^* \otimes 1) \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) \\ &= - \sum_{i=1}^k \delta_{n+n_i, 0} \widehat{\Phi}^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_{i-1}} a_{n_{i+1}} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\ & \quad + a_{n_1} * \cdots * a_{n_k} * b_{-m_1} * \cdots * b_{-m_l} * (a_n^* \otimes 1) \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a_n^* \widehat{\Phi}^W(z)(w_{\lambda, \kappa}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\pi \in P_n} \alpha_\pi a_n^* b_\pi w_{\lambda-m, \kappa} \otimes z^{-\Delta} u_n^m = 0$$

e assim,

$$\begin{aligned}
& (a_n^* \otimes 1) \circ \widehat{\Phi}_x^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\
&= (1 \otimes x) \circ (a_n^* \otimes 1) \circ \widehat{\Phi}^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\
&= - \sum_{i=1}^k \delta_{n+n_i, 0} (1 \otimes x) \widehat{\Phi}^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_{i-1}} a_{n_{i+1}} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}) \\
&= - \sum_{i=1}^k \delta_{n+n_i, 0} \widehat{\Phi}_x^W(z) (a_{n_1} \cdots a_{n_{i-1}} a_{n_{i+1}} \cdots a_{n_k} b_{-m_1} \cdots b_{-m_l} \cdot w_{\lambda, \kappa}).
\end{aligned}$$

Logo $[a_n^*, \widehat{\Phi}_x^W(z)] = 0$. Temos

$$z \frac{d}{dz} \widehat{\Phi}_x^W(z) = -[d, \widehat{\Phi}_x^W(z)] - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z).$$

Substituindo d por $-L_0$ e usando (4.2.7), temos

$$\begin{aligned}
z \frac{d}{dz} \widehat{\Phi}_x^W(z) &= [L_0, \widehat{\Phi}_x^W(z)] - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) \\
&= \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n a_{-n}^* + \frac{1}{4} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{-n} : \right) - \frac{\mu}{2} b_0, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left[a_n, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] a_{-n}^* - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) \\
&\quad + \left[\frac{1}{4} \left(\sum_{n > 0} b_{-n} b_n \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{n < 0} b_n b_{-n} \right) + \frac{1}{4} b_0^2 - \frac{\mu}{2} b_0, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] \\
&= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_{-n}^* z^n - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n > 0} [b_{-n}, \widehat{\Phi}_x^W(z)] b_n \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n > 0} b_{-n} [b_n, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left([b_0, \widehat{\Phi}_x^W(z)] b_0 + b_0 [b_0, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \right) - \frac{\mu}{2} [b_0, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \\
&= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z \partial_z a^*(z) - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) + \frac{1}{2} \left(\sum_{n > 0} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) b_n z^{-n} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{n > 0} b_{-n} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) z^n \right) + \frac{1}{4} \left(\widehat{\Phi}_{hx}^W(z) b_0 + b_0 \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \right) - \frac{\mu}{2} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \\
&= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z \partial_z a^*(z) - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) + \frac{z}{2} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(- \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) b_0 + b_0 \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \right) - \frac{\mu}{2} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \\
&= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z \partial_z a^*(z) + \frac{z}{2} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : + \frac{1}{4} \widehat{\Phi}_{h^2x}^W(z) - \frac{\mu}{2} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) - \Delta(\mu, \alpha) \widehat{\Phi}_x^W(z) \\
&= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z \partial_z a^*(z) + \frac{\alpha z}{2} : b(z) \widehat{\Phi}_x^W(z) : .
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.26. *Segundo as notações do Teorema anterior, temos*

$$\boxed{[L_m, \widehat{\Phi}_x^W(z)] = \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z^{m+1} \partial_z a^*(z) + \frac{\alpha}{2} z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_x^W(z) : + (m+1) \Delta(\mu, \alpha) z^m \widehat{\Phi}_x^W(z).} \quad (4.3.27)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} [L_m, \widehat{\Phi}_x^W(z)] &= \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} (n-m) a_n a_{m-n}^* + \frac{1}{4} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} : \right) - \frac{\mu}{2} (m+1) b_m, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n-m) \left([a_n, \widehat{\Phi}_x^W(z)] a_{m-n}^* + a_n [a_{m-n}^*, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] - \frac{\mu}{2} (m+1) [b_m, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \\ &= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n-m) a_{m-n}^* z^n - \frac{\mu}{2} (m+1) [b_m, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] \\ &= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z^{m+1} \partial_z a^*(z) - \frac{\mu}{2} (m+1) z^m \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) + \frac{1}{4} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] \\ &= \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z^{m+1} \partial_z a^*(z) - \frac{\mu \alpha}{2} (m+1) z^m \widehat{\Phi}_x^W(z) + \frac{1}{4} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, precisamos apenas calcular $\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} : b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right]$.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [: b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z)] &= 2 \sum_{n > m} [b_{m-n} b_n, \widehat{\Phi}_x^W(z)] + \sum_{i=0}^m [b_{m-i} b_i, \widehat{\Phi}_x^W(z)] \\ &= 2 \sum_{n > m} b_{m-n} [b_n, \widehat{\Phi}_x^W(z)] + 2 \sum_{n > m} [b_{m-n}, \widehat{\Phi}_x^W(z)] b_n \\ &\quad + \sum_{i=0}^m b_{m-i} [b_i, \widehat{\Phi}_x^W(z)] + \sum_{i=0}^m [b_{m-i}, \widehat{\Phi}_x^W(z)] b_i \\ &= 2z^{m+1} \left(\sum_{n > m} b_{m-n} z^{n-m-1} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) + \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{n > m} b_n z^{-n-1} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^m b_{m-i} z^i \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) + \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{m-i} \right) \\ &= 2z^{m+1} \left(\sum_{n < 0} b_n z^{-n-1} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) + \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{n \geq 0} b_n z^{-n-1} \right) - 2z^{m+1} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{n=0}^m b_n z^{-n-1} \\ &\quad + z^{m+1} \sum_{i=0}^m b_{m-i} z^{-i-1} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) + z^{m+1} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{-i-1} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[: b_n b_{m-n} :, \widehat{\Phi}_x^W(z) \right] &= 2z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : + \sum_{i=0}^m b_{m-i} z^{m-i} \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) - \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{m-i} \\
&= 2z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : + \sum_{i=0}^m z^{m-i} [b_i, \widehat{\Phi}_{hx}^W(z)] \\
&= 2z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : + \sum_{i=0}^m z^m \widehat{\Phi}_{h^2x}^W(z) \\
&= 2z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_{hx}^W(z) : + (m+1) z^m \widehat{\Phi}_{h^2x}^W(z) \\
&= 2\alpha z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_x^W(z) : + (m+1) \alpha^2 z^m \widehat{\Phi}_x^W(z)
\end{aligned}$$

e, desta forma,

$$[L_m, \widehat{\Phi}_x^W(z)] = \widehat{\Phi}_{fx}^W(z) z^{m+1} \partial_z a^*(z) + \frac{\alpha}{2} z^{m+1} : b(z) \widehat{\Phi}_x^W(z) : + (m+1) \Delta(\mu, \alpha) z^m \widehat{\Phi}_x^W(z).$$

□

Capítulo 5

Considerações finais

Nesta seção faremos uma breve introdução aos problemas que pretendemos estudar futuramente dando prosseguimento ao que já fizemos no doutorado. Primeiramente tentaremos estender os resultados expostos no capítulo 3 para o caso das álgebras de Lie toroidais no caso dos módulos intermediários de Wakimoto para, em seguida, verificar se faz sentido ou não sua generalização para módulos $\mathbb{J}$ -intermediários de Wakimoto. Também tentaremos estender os resultados do capítulo 4 para $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$ seguindo [EFK98]. Certamente, tais problemas podem ser abordados para outras álgebras de Lie sendo tal estudo também de nosso interesse.

Para começar, as álgebras de Lie toroidais foram inicialmente introduzidas em [MRY90] como uma generalização natural das álgebras de Lie afins. Álgebras toroidais podem ser vistas como iterações das álgebras de Loop em várias variáveis que comutam. Uma grande motivação para o estudo de álgebras de Lie toroidais é seu potencial de aplicações em Matemática e Física. Por exemplo, um dos cociclos usados na construção de álgebras de Lie afins toroidais estendidas é também usada no estudo de Y. Billig de equação hidrodinâmica magnética com tensor pressão assimétrico (ver [Bil07] e [Bil05]). Além disso, Billig e, independentemente Iohara, Saito, e Wakimoto (ver [Bil99] e [ISW99]) derivou das equações bilineares de Hirota relações tanto principais quanto homogêneas de representações de operadores de Vertex de álgebras de Lie 2-toroidais do tipo A_l , D_l , E_l . Por isso, nosso interesse em estudar uma realização de módulos intermediários de Wakimoto para a álgebra de Lie toroidal $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$.

Lembremos que representações de álgebras de Lie e suas generalizações são uma das áreas mais importantes e ativas da teoria de representações com uma variedade ampla de resultados e aplicações. A teoria das álgebras de Kac-Moody e suas representações é bastante complexa, com estruturas que relacionam diversas áreas, tais como teoria quântica de campos, sistemas integráveis, álgebras e grupos quânticos, geometria algébrica, teoria dos números, correspondência geométrica de Langlands, etc. Por esta razão, as álgebras de Lie de Kac-Moody, que foram introduzidas em 1967 por V. Kac e R. Moody, se tornaram uma área de estudo importante na Matemática e na Física.

As álgebras de Lie afins são as mais estudadas das álgebras de Lie de Kac-Moody de dimensão infinita, possuindo interessantes aplicações, sendo sua teoria de representações muito mais rica que as das álgebras de Lie de dimensão finita. As álgebras de Lie afins possuem módulos contendo tanto espaços de peso de dimensão finita quanto infinita, algo que não ocorre no caso de dimensão finita. Tais representações surgem partindo-se de

partições não-standard do sistema de raízes, isto é, partições que não são equivalentes sobre o grupo de Weyl das partições standard em raízes positivas e negativas (ver [DFG09]). Para álgebras de Lie afins, há sempre uma quantidade finita de classes de equivalência de tais partições não-standard (ver [Fut97]). A cada partição corresponde uma subálgebra de Borel, a qual pode-se formar representações obtendo os módulos denominados do tipo Verma, os quais foram inicialmente estudados por Jakobsen e Kac [JK89] e por Futorny [Fut96], [Fut97]. Resultados sobre a estrutura de módulos tipo Verma podem ser encontrados em [Cox94], [Fut91] e [FS93].

Uma das razões da popularidade das álgebras de Kac-Moody afins é a existência de realizações concretas dessas álgebras. Em particular, uma realização muito útil é dada pela extensão central das álgebras de “Loop”, i.e., a extensão central do produto tensorial de álgebras simples por polinômios de Laurent. Usando esta realização, pode-se obter informação sobre dimensões de espaços de raízes da álgebra junto com aplicações de álgebras afins à teoria das funções theta, às formas modulares, aos operadores de Vertex, à correspondência Bóson-Férmion e aos sólitons.

As álgebras de Vertex vêm sendo, nas últimas décadas, uma importante ferramenta em diversos assuntos da Física e da Matemática como, por exemplo, na representação de álgebras de dimensão infinita e na teoria de grupos finitos. Uma álgebra de Vertex é basicamente, um espaço vetorial V onde a cada elemento se corresponde uma distribuição formal com certos axiomas satisfeitos. A primeira definição histórica foi dada em [B86] para superálgebras de Lie conformes. As (super)álgebras conformes possuem, em particular, uma conexão fascinante com os Hamiltonianos na teoria das “equações não-lineares evolucionárias”. De fato, a primeira aparição na literatura de estruturas do tipo conforme antecedeu a descoberta das álgebras de Vertex e chegou ao Cálculo de Variações [GD79]. A teoria das álgebras conformes tem sido muito utilizada na tentativa de resolver o problema da classificação de álgebras de Lie de dimensão infinita. Cerca de 40 anos atrás, V. Kac propôs (e parcialmente resolveu) o problema da classificação das álgebras de Lie simples $\mathbb{Z}$ -graduadas de Gelfand-Kirillov de dimensão finita ([Kac68]). Este problema foi completamente resolvido por Mathieu em [M86], [M086] e [M92].

Os novos desenvolvimentos na geometria não-comutativa e física-matemática sugeriram a necessidade de estudar módulos de dimensão infinita, tais como módulos de Gelfand-Tsetlin ([Z73]) e módulos de Harish-Chandra ([D74]). A estrutura destes módulos no caso de álgebras de dimensão finita está bem entendida. Certas categorias de tais módulos levaram a teoria de álgebras projetivamente estratificadas à teoria de representações. Por outro lado, a teoria de tais representações está desenvolvida muito pouco no caso de álgebras de Kac-Moody afins. Um dos problemas principais é a construção das realizações destas representações em operadores de Vertex e o desenvolvimento da teoria de álgebras de Vertex generalizadas que correspondem a tais realizações. Já os primeiros exemplos de realizações de álgebras de Lie em operadores diferenciais num espaço de Fock levaram a teoria dos módulos de Wakimoto para álgebras de Kac-Moody afins que foi desenvolvida por H. Jakobsen e V. Kac [JK89], M. Wakimoto [?], B. Feigin e E. Frenkel [?], D. Bernard e G. Felder [BF90].

Algumas construções particulares foram recentemente obtidas por Y. Billig, A. Molev, R. Zhang [BMZ08], B. Cox, V. Futorny [CF04], [CF05], e R.A. Martins [Mar12], generalizando as construções clássicas de módulos de Wakimoto. Em particular, os resultados do trabalho [BMZ08] tem aplicações importantes na teoria de equações diferenciais. No trabalho [CF04], foi definida a classe de módulos do tipo Wakimoto

torcidos para álgebras de Kac-Moody afins $A_n^{(1)}$. Estes módulos fornecem uma série de realizações novas do tipo bóson para álgebras afins do tipo A.

Todos estes resultados sugerem a necessidade de se estudar a teoria de estruturas de Vertex relacionadas as realizações de módulos de dimensão infinita de álgebras de Kac-Moody afins.

Desta forma, entre os nossos maiores objetivos estão a construção e o estudo de realizações do tipo Vertex para módulos de Verma generalizados sem peso máximo sobre as álgebras de Lie simples de dimensão finita e sobre as álgebras afins e o desenvolvimento da teoria de álgebras de Vertex generalizadas associadas com as realizações de módulos de Verma generalizados sem peso máximo. A realização de módulos de Verma generalizados sem peso máximo em operadores do tipo Vertex poderá trazer novas informações sobre a estrutura destes módulos e, portanto, seria uma contribuição importante à teoria de representações. Além disso, espera-se que o estudo de estruturas de Vertex relacionadas aos tais módulos leve a uma teoria nova de álgebras de Vertex generalizadas.

Referências Bibliográficas

- [B86] Borchers R., *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 83: 3068-3071, 1986.
- [BBFK11] Bekkert, V., Benkart, G., Futorny, V., Kashuba, I., *New Irreducible modules for Heisenberg and Affine Lie Algebras*, preprint, 2011.
- [BF90] Bernard D., Felder G., *Fock representations and BRST cohomology in $sl(2)$ current algebra*, Comm. Math. Phys., 127(1):145-168, 1990.
- [Bil05] Billig Y., *Magnetic hydrodynamics with asymmetric stress tensor*, J. Math. Phys., 46(4):043101, 13, 2005.
- [Bil07] Billig Y., *Representations of toroidal extended affine Lie algebras*, J. Algebra, 308(1):252-269, 2007.
- [Bil99] Billig Y., *An extension of the Korteweg-de Vries hierarchy arising from a representation of a toroidal Lie algebra*, J. Algebra, 217(1):40-64, 1999.
- [BMZ08] Billig Y., Molev A., Zhang R., *Differential equations in vertex algebras and simple modules for the Lie algebra of vector fields on a torus*, Advances in Math., 218:1972-2004, 2008.
- [C86] Chari V., *Integrable representations of affine Lie Algebras*, Invent. Math., 85:317-335, 1986.
- [CF04] Cox B., Futorny V., *Intermediate Wakimoto modules for affine $sl(n+1)$* , J. Phys. A, 37(21): 5589-5603, 2004.
- [CF05] Cox B., Futorny V., *Structure of Intermediate Wakimoto modules*, J. Algebra, 306: 682-702, 2006
- [CFMar12] Cox, B., Futorny, V., Martins, R.A., *Virasoro action on imaginary Verma modules and the operator form of the KZ-equation*, preprint.
- [Cox05] Cox, B., *Fock Space Realizations of Imaginary Verma Modules*, Algebr. Represent. Theory, 8:173-206, 2005.
- [Cox94] Cox B., *Verma modules induced from nonstandard Borel subalgebras*, Pacific J. Math., 165: 269-294, 1994.

- [CP088] Chari V., Pressley A., *Integrable representations of Kac-Moody algebras: Results and open problems*, *Infinite dimensional Lie Algebras and Groups*, Adv. series in Math. Physics (ed. V. Kac), World Scientific, 1988.
- [CP88] V. Chari, A. Pressley, *Integrable representations of toric affine Lie algebras*, J. Algebra, 113:438-464, 1988.
- [D74] Dixmier J., *Algebras enveloppantes*, Gauthier-Villarrd, Paris, 1974.
- [DFG09] Dimitrov I., Futorny V., Grantcharov D., *Parabolic sets of roots, Groups, Rings and Group Rings*, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 499:61-73, 2009.
- [DGK82] Deodhar V., Gabber O., Kac V., *Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Adv. in Math., 45:92-116, 1982.
- [DJKM82] Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T., *Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 18:1077-1110, 1982.
- [EFK98] Etingof P.I., Frenkel I.B., Kirillov Jr. A.A., *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, 58, Mathematical Surveys and Monographs. AMS, 1998.
- [FF90] Feigin B., Frenkel E., *Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds*, Com. Math. Phys., (1):161-189, 1990.
- [FF090] Feigin B., Frenkel E., *Representations of affine Kac-Moody algebras and bosonization*, In Physics and Mathematics of Strings, World Scientific, Teaneck, NJ, 271-316, 1990.
- [FF88] Feigin B., Frenkel E., *A family of representations of affine Lie algebras*, Uspekhi Mat. Nauk, 43(5(263)):227-228, 1988.
- [FK09] Futorny V., Kashuba I., *Induced modules for Kac-Moody Lie algebras*, SIGMA - Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 5:026, 2009.
- [FKM01] Futorny V., Konig S., Mazorchuk V., *Categories of induced modules for Lie algebras with triangular decomposition*, Forum Math., 13(5):641-661, 2001.
- [FS93] Futorny V., Saifi H., *Modules of Verma type and new irreducible representations for affine Lie algebras*, Representations of algebras (Ottawa, ON, 1992), CMS Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 14:185-191, 1993.
- [Fut90] Futorny V., *Parabolic partitions of root systems and corresponding representations of affine Lie algebras*, Root systems, Representations and Geometries, Inst. math. Acad. Sci. Ukraine. Preprint 90.8, Kiev, 30-39, 1990.

- [Fut91] Futorny V., *The graded representations of affine Lie algebras*, Suppl. Rend. Circolo Matem. di Palermo, serie II, 26:155-161, 1991.
- [Fut92] Futorny V., *The parabolic subsets of root systems and corresponding representations of affine Lie algebras*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 131:45-52, 1992.
- [Fut94] Futorny V., *Imaginary Verma modules for affine Lie algebras*, Canad. Math. Bull., 37(2):213-218, 1994.
- [Fut96] Futorny V., *Irreducible non-dense $A_1^{(1)}$ -módulos*, Pacific J. Math., 172:83-99, 1996.
- [Fut97] Futorny V., *Representations of Affine Lie Algebras*, Queen's Papers in Pure and Applied Math., Queen's University, Kingston, ON, 106, 1997.
- [FS93] Futorny V., Saifi H., *Modules of Verma type and new irreducible representations for affine Lie algebras*, Representations of algebras (Ottawa, ON, 1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 185-191, 1993.
- [FZ01] Frenkel E., Ben-Zvi D., *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surveys and Monographs, AMS 83, 2001.
- [GD79] Gelfand I., Dorfman I., *Hamiltonian operators and algebraic structures related to them*, Funct. Anal. and Appl. 13:248-262, 1979.
- [ISW99] Iohara K., Saito Y., Wakimoto M., *Hirota bilinear forms with 2-toroidal symmetry*, Phys. Lett. A, 254(1-2):37-46, 1999.
- [JK85] Jakobsen H.P., Kac V.G., *A new class of unitarizable highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Nonlinear equations in classical and quantum field theory (Meudon/Paris, 1983/1984), Springer, Berlin, 1-20, 1985.
- [JK89] Jakobsen H.P., Kac V.G., *A new class of unitarizable highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, J. Funct. Anal., 82:69-90, 1989.
- [Kac68] Kac V., *Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth.*, Math. USSR-Izvestija 2, 1271-1311, 1968.
- [Kac90] Kac V., *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, third edition, 1990.
- [Kac98] Kac V., *Vertex algebra for beginners*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, second edition, 1998.
- [KKLW81] Kac V., Kazhdan D., Lepowsky J., Wilson R., *Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebra*, Adv. in Math., 42:83-112, 1981.

- [KR87] Kac V.G., Raina A.K., *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1987.
- [LW78] Lepowski J., Wilson R.L., *Constructions of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$* , Comm. Math. Phys. 62:179-194, 1978.
- [M86] Mathieu O., *Sur un problème de V.G.Kac: la classification de certaines algèbres de Lie graduées simples*, J. Algebra 102:505-536, 1986.
- [M086] Mathieu O., *Classification des algèbres de Lie graduées simples de croissance ≤ 1* , Invent. Math., 86:371-426, 1986.
- [M92] Mathieu O., *Classification of simple graded Lie algebras of finite growth*, Invent. Math. 108:455-519, 1992.
- [Mar11] Martins R.A., *Free field realizations of certain modules for affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{C})$* , Algebra Discrete Math., Volume 12 , Number 1., 28-52, 2011.
- [Mar12] Martins R.A., *$\mathbb{J}$ -Intermediate Wakimoto Modules*, Comm. Algebra, to appear.
- [MRY90] Moody R.V., Rao S.E, Yokonuma T., *Toroidal Lie algebras and Vertex representations*, Geom. Dedicata, 35(1-3):283-307, 1990.
- [R89] Rao S.E, *A new class of unitary representations for Affine Lie Algebras*, J. Algebra, 120(1):54-73, 1989.
- [R93] Rao S.E., *On representations of Loop Algebras*, Comm. Algebra, 21(6):2131-2153, 1993.
- [RW82] Rocha A., Wallach N., *Projective modules over graded Lie Algebras I*, Math. Z., 180:151-177, 1982.
- [SM99] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie.*, 1. ed. Campinas: Unicamp, 1999.
- [Wak86] Wakimoto M., *Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$* , Comm. Math. Phys., 104(4):605-609, 1986.
- [War93] Warner S., *Topological Rings*, Mathematics Studies , North-Holland, 178, 1993.
- [Z73] Zelobenko D., *Compact Lie groups and their representation*, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 40. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973.