Uma descrição das aplicações de conexão em K-teoria de C*-álgebras usando cones

Renata Akemi Maekawa

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Matemática

Programa: Matemática

Orientador: Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, dezembro de 2013

Uma descrição das aplicações de conexão em K-teoria de C*-álgebras usando cones

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 04/04/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dra. Martha Salerno Monteiro (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC

Resumo

MAEKAWA, R.A. **Uma descrição das aplicações de conexão em K-teoria de C^*-álgebras usando cones**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Dada uma aplicação $f : B \longrightarrow A$ entre duas C^*-álgebras, o cone dessa aplicação, Cf, é o conjunto formado pelos pares (b, ϕ) em $B \oplus CA$ tais que $f(b) = \phi(0)$, sendo CA o cone de A. Neste trabalho estudamos o funtor determinado pela associação da sequência exata curta $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$ para cada *-homomorfismo $f : B \longrightarrow A$, e demonstramos que esse funtor é exato. Caracterizamos as aplicações de conexão associadas à sequência exata $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$, mostrando que a aplicação do índice é dada por $\theta_A \circ K_1(f)$ e que a aplicação exponencial é dada por $\beta_A \circ K_0(f)$, sendo θ_A o isomorfismo entre $K_1(A)$ e $K_0(SA)$ e β_A a aplicação de Bott. Por fim, usando que toda sequência exata curta de C^*-álgebras pode ser vista na forma $0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \hookrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$, mostramos que as aplicações de conexão δ_1 e δ_0 associadas a cada sequência exata curta podem ser dadas por $\delta_n = K_{n+1}(j)^{-1} \circ K_{n+1}(i) \circ \alpha_n$, em que j é a inclusão do núcleo de f em Cf, i é a inclusão da suspensão SA também em Cf, $\alpha_0 = \beta_A$ e $\alpha_1 = \theta_A$.

Palavras-chave: K-teoria de C^*-álgebras, cone de uma aplicação, aplicações de conexão, transformações naturais.

Abstract

MAEKAWA, R. A. **A description of the connecting maps in K-theory for C^*-algebras using cones**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

If $f : B \longrightarrow A$ is a map between the C^*-algebras A and B, the mapping cone is the set of pairs (b, ϕ) in $B \oplus CA$ such that $f(b) = \phi(0)$, where CA is the cone of A. In this work, we study the functor determined by the assignment of the exact sequence $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$ to each *-homomorphism $f : B \longrightarrow A$, and we show that this functor is exact. We characterize the connecting maps associated with the short exact sequence $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$ and we prove that its index map is $\theta_A \circ K_1(f)$ and that its exponential map is $\beta_A \circ K_0(f)$, where θ_A is the isomorphism between $K_1(A)$ and $K_0(SA)$, and β_A is the Bott map. Finally, using that every short exact sequence of C^*-algebras can be seen as $0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \hookrightarrow B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$, we prove that the connecting maps, δ_1 and δ_0, associated with a short exact sequence are given by $\delta_n = K_{n+1}(j)^{-1} \circ K_{n+1}(i) \circ \alpha_n$, where j is the inclusion of f's kernel in Cf, i is the inclusion of the suspension SA in Cf, $\alpha_0 = \beta_A$ and $\alpha_1 = \theta_A$.

Keywords: K-theory for C^*-algebras, mapping cones, connecting maps, natural transformations.

Sumário

Introdução

Este trabalho consiste em fazer uma exposição das definições básicas de K-teoria de C*-álgebras e enunciados dos teoremas de teoremas fundamentais para este, esboçando a demonstração de alguns deles, tendo como principal objetivo o estudo detalhado da seção 2 do artigo [MSS06]. Nessa seção os autores apresentam algumas definições e resultados de K-teoria que serão usados para a prova de um dos teoremas do artigo.

O artigo em questão usa a K-teoria para demonstrar o teorema do índice de Boutet de Monvel para problemas de fronteira em variedades com bordo compactas. Para isso, os autores trazem um teorema cujo objetivo é caracterizar a K-teoria da álgebra de Boutet de Monvel e o provam mostrando que uma sequência de grupos gerados por K_0 e K_1 é exata cindida para, assim, garantir o isomorfismo entre a soma direta dos grupos dos extremos e o grupo central da sequência. A seção analisada nesta dissertação, intitulada preliminares de K-teoria, é composta por algumas definições relacionadas ao cone de uma aplicação de C^*-álgebras e por três lemas, descritos brevemente a seguir:

- O primeiro lema (Lema 9 de [MSS06]) mostra que um diagrama composto por sequências exatas curtas de C^*-álgebras,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & f\Big\uparrow & & g\Big\uparrow & & h\Big\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1}$$

  induz uma grade comutativa formada por três sequências exatas curtas de C^*-álgebras, sendo a primeira formada pelas C^*-álgebras A', B', C', a segunda pelos cones das aplicações f, g e h e a terceira pelas suspensões de A, B e C.

- O segundo lema (Lema 10 de [MSS06]) afirma que, considerando $f : B \longrightarrow A$ um *-homomorfismo entre C^*-álgebras, as aplicações de conexão associadas à sequência $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$ são as aplicações induzidas por $K_i(f)$, $i = 0, 1$, compostas com os isomorfimos canônicos, θ_A e β_A.

- No terceiro lema (Lema 11 de [MSS06]), considerando $f : B \longrightarrow A$ um *-homomorfismo sobrejetor e a inclusão

$$j : \mathrm{Ker} f \ni x \mapsto (x, 0) \in Cf, \tag{2}$$

é mostrada a comutatividade de um diagrama induzido pelas sequências $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$.

Para fazer as demonstrações detalhadas destes lemas, estudamos primeiramente as principais estruturas e aplicações da K-teoria e os resultados associados a estes. Optamos por fazer esse estudo usando os livros [rLL00] e [WO93], importantes referências na K-teoria para C^*-álgebras.

Este trabalho foi estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos a construção dos grupos K_0 e K_1, explorando primeiramente algumas definições e propriedades das C^*-álgebras, a construção da unitização e as definições de categorias e funtores. Dedicamos a última seção desse capítulo para o estudo do cone e da suspensão de C^*-álgebras, conjuntos esses que foram bastante importantes para o desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 2 traz as principais aplicações relacionadas a K-teoria, a saber: aplicação do índice (δ_1), aplicação de Bott (β_A) e aplicação exponencial (δ_0). Vale ressaltar que a questão da naturalidade dos funtores associados a essas aplicações foi analisada por meio da definição dada pela teoria de categorias e funtores, análise esta que não costuma ser feita nos livros sobre K-teoria.

O Capítulo 3 dedica-se a definir e estudar as propriedades do cone de uma aplicação de C^*-álgebras e de um funtor associado a este, visando demonstrar o resultado do Lema 9 de [MSS06], que afirma que esse funtor é exato, isto é, que a grade induzida pelo diagrama (1) é comutativa e formada por sequências exatas curtas.

Para finalizar, o Capítulo 4 tem como objetivo demonstrar os Lemas 10 e 11 de [MSS06]. Iniciamos o capítulo com uma seção que traz uma identificação entre o cone da suspensão e a suspensão do cone de uma C^*-álgebra. Essa identificação foi necessária para mostrar que a aplicação de Bott, β_A, é a aplicação exponencial associada à sequência $0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \longrightarrow A \longrightarrow 0$. Esse resultado foi importante para demonstrar o Lema 10, na segunda seção do capítulo. Além desse resultado, foram usadas as naturalidades das aplicações de conexão (índice e exponencial), aplicadas no seguinte diagrama comutativo formado por sequências exatas curtas de C^*-álgebras:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}_{SA}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_{CA}}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & CA & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

O Lema 11 de [MSS06] foi estudado na última seção desse capítulo. Pensando em tornar mais fácil a compreensão dessa demonstração, fizemos um lema inicial que cobre parte do resultado, afirmando que ao aplicar os funtores K_0 e K_1 no *-homomorfismo j definido em (2) encontramos isomorfismos entre $K_i(\mathrm{Ker} f)$ e $K_i(Cf)$, para $i = 0, 1$. Depois foi preciso mostrar que as aplicações $K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{i}) \circ \theta_A$ e $K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_A$ induzem funtores que coincidem com os funtores associados à aplicação do índice e à aplicação exponencial, respectivamente. Esse resultado juntamente com o Teorema 4.2.1 e a funtorialidade de K_0 e K_1 foram suficientes para demonstrar o Lema 11 de [MSS06], que neste trabalho é chamado de Teorema 4.3.3.

Capítulo 1

Introdução à K-teoria de C^*-álgebras

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos de K-teoria de C^*-álgebras necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Como preparação, enunciamos uma gama de resultados cujas demonstrações serão eventualmente omitidas. Ao leitor interessado em mais detalhes, recomendamos a leitura de [rLL00].

1.1 Definições básicas

Definição 1.1.1. Uma *C^*-álgebra A* é uma álgebra de *Banach* com uma *involução $a \mapsto a^*$* tal que $\| a^*a \| = \| a \|^2$ para todo $a \in A$. Se A possui unidade, 1_A, dizemos que A é uma C^*-álgebra *com unidade* ou que A é *unital*.

Exemplo 1.1.2. Seja X um espaço de *Hausdorff* localmente compacto e considere o conjunto $\mathscr{C}_0(X)$ formado pelas funções contínuas $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, isto é, funções que têm a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$ existe um subespaço compacto K de X tal que $|f| \leqslant \varepsilon$ para todo $x \in X \setminus K$. Esse espaço, munido das operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação definidas pontualmente, a involução definida pela conjugação e a norma do supremo é uma C^*-álgebra comutativa. Além disso, $\mathscr{C}_0(X)$ é unital se e somente se X é compacto e, nesse caso, a unidade é a função constante igual a 1.

Exemplo 1.1.3. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de *Hilbert* e seja $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores limitados $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Com as operações

$$\begin{array}{rcl} (T+S)(a) & = & T(a) + S(a) \\ (\lambda T) & = & \lambda T(a) \\ (TS)(a) & = & T \circ S(a), \quad T, S \in \mathscr{B}(\mathcal{H}), a \in \mathcal{H} \end{array}$$

a norma

$$\| T \| = \sup \{ \| T(h) \| : T \in \mathscr{B}(\mathcal{H}), \| h \| \leqslant 1 \}$$

e involução definida pelo adjunto usual de T, ou seja o único operador T^* tal que

$$\langle T(a), b \rangle = \langle a, T^*(b) \rangle, \ \forall a, b \in \mathcal{H}$$

o conjunto $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ é, em geral, uma C^*-álgebra não comutativa. Note $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ é unital, sendo o operador identidade a sua unidade.

Definição 1.1.4. Dizemos que $\varphi : A \longrightarrow B$ é um **-homomorfismo* entre duas C^*-álgebras A e B se essa aplicação for linear, multiplicativa e satisfizer $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$, para todo $a \in A$. Se A e B são C^*-álgebras unitais e $\varphi(1_A) = 1_B$, dizemos que φ é um *-homomorfismo *unital* (ou que φ *preserva a unidade*).

É possível mostrar que se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras, então $\| \varphi(a) \| \leqslant \| a \|$ para todo $a \in A$ e, portanto, que todo *-homomorfismo é contínuo.

Teorema 1.1.5. *Existe no máximo uma norma em uma *-álgebra que a torna uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Esse resultado pode ser visto no Corolário 2.1.2 de [Mur90]. □

A seguir serão enunciados dois resultados importantes sobre C^*-álgebras que permitem caracterizá-las. As demonstrações podem ser encontradas respecitvamente em [Mur90], Parágrafo 3.4. e em [rLL00], Teorema 1.2.3.

Teorema 1.1.6. *(Gelfand) Toda C^*-álgebra comutativa é isometricamente *-isomorfa a $\mathscr{C}_0(X)$, para algum espaço de* Hausdorff *localmente compacto X.*

Teorema 1.1.7. *(Gelfand-Naimark) Toda C^*-álgebra é isometricamente *-isomorfa a uma sub-C^*-álgebra de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Definição 1.1.8. Uma sequência de C^*-álgebras e *-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\theta_i} A_{i+1} \xrightarrow{\theta_{i+1}} A_{i+2} \longrightarrow \cdots$$

é dita *exata* se $Im(\theta_i) = Ker(\theta_{i+1})$, para todo i.

Se uma sequência exata é da forma

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

ela é chamada *sequência exata curta.*

Se em (1.1) existe um *-homomorfismo $\lambda : B \longrightarrow A$ tal que $\psi \circ \lambda = id_B$, dizemos que (1.1) é uma sequência *exata cindida.*

Um resultado bastante conhecido de álgebra garante que se uma sequência de $R-$módulos, com R um anel,

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{f} U \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} V \longrightarrow 0$$

é exata cindida, então U é isomorfo a $T \oplus V$, como R-módulos.

1.2 Unitização de uma C^*-álgebra

Dada uma C^*-álgebra A, é possível construir sua *unitização* $\widetilde{A}$, ou seja, uma C^*-álgebra unital associada a A que contém A como ideal fechado e tal que $\widetilde{A}/A \cong \mathbb{C}$. Defina:

$$\widetilde{A} = \{(a, \alpha) : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

munida das operações

$$\begin{aligned}
(a, \alpha) + (b, \beta) &= (a + b, \alpha + \beta), \\
\lambda(a, \alpha) &= (\lambda a, \lambda\alpha), \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}, \\
(a, \alpha) \cdot (b, \beta) &= (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta), \\
(a, \alpha)^* &= (a^*, \bar{\alpha})
\end{aligned}$$

Note que, dado qualquer elemento (a, α) de $\widetilde{A}$, $(a, \alpha)\cdot(0, 1_{\mathbb{C}}) = (a\cdot 0+1_{\mathbb{C}}\cdot a+\alpha.0, \alpha\cdot 1_{\mathbb{C}}) = (a, \alpha)$ e, analogamente, $(0, 1_{\mathbb{C}}) \cdot (a, \alpha) = (a, \alpha)$. Ou seja, $1_{\widetilde{A}} = (0, 1_{\mathbb{C}})$ é a unidade de $\widetilde{A}$.

Defina as seguintes funções:

$$i : A \longrightarrow \widetilde{A}, \;\; \pi : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; \text{e} \; \lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \widetilde{A}$$

por $i(a) = (a, 0)$, $\pi(a, \alpha) = \alpha$ e $\lambda(\alpha) = \alpha 1_{\widetilde{A}}$. Com essas aplicações, fica construída a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\;i\;} \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

que é exata cindida.

Fazendo a identificação $i(a) = a$, podemos ver que

$$\widetilde{A} = \{a + \alpha \cdot 1_{\widetilde{A}} : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

A demonstração da existência de uma única norma que torna a construção da unitização acima uma C^*-álgebranão é feita com detalhes em boa parte dos livros usados como referência. Assim, fazendo o uso do exercício 1.3 de [rLL00], optamos por fazê-la no Apêndice A.

Teorema 1.2.1. *Se A é uma C^*-álgebra, então existe uma (única) norma em $\widetilde{A}$ que torna $\widetilde{A}$ uma C^*-álgebra e que estende a norma de A.*
Demonstração. Ver apêndice A.

Definição 1.2.2. Dado $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, definimos o *-homomorfismo $\widetilde{\varphi}$ associado a φ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi} : \quad \widetilde{A} &\longrightarrow \widetilde{B} \\
a + \alpha 1_{\widetilde{A}} &\longmapsto \varphi(a) + \alpha 1_{\widetilde{B}}, a \in A, \alpha \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{\varphi}(1_{\widetilde{A}}) = 1_{\widetilde{B}}$, $\widetilde{\varphi}$ sempre preserva a unidade.

Proposição 1.2.3. *Se A é uma C^*-álgebra unital com unidade 1_A e $\widetilde{A}$ é sua unitização, então $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$ é uma projeção em $\widetilde{A}$ e*

$$\widetilde{A} = \{a + \alpha f : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

Demonstração. Note que $1_{\widetilde{A}} \cdot a = (0, 1_{\mathbb{C}})(a, 0) = (0.a + 0.0 + 1_{\mathbb{C}}.a, 1_{\mathbb{C}}.0) = (a, 0) = a, \forall a \in A$. Logo $1_{\widetilde{A}}$ é a unidade em $i(A)$.

Em particular, $1_{\widetilde{A}} \cdot 1_A = 1_A$ e, daí

$$\begin{aligned} f^2 &= (1_{\widetilde{A}} - 1_A)(1_{\widetilde{A}} - 1_A) \\ &= 1_{\widetilde{A}} \cdot 1_{\widetilde{A}} - 1_{\widetilde{A}} \cdot 1_A - 1_A \cdot 1_{\widetilde{A}} + 1_A \cdot 1_A \\ &= 1_{\widetilde{A}} - 1_A - 1_A + 1_A \\ &= 1_{\widetilde{A}} - 1_A = f. \end{aligned}$$

Além disso, $f^* = (1_{\widetilde{A}} - 1_A)^* = (1_{\widetilde{A}})^* - (1_A)^* = 1_{\widetilde{A}} - 1_A = f$. Portanto, $f^2 = f$ e $f^* = f$, ou seja, f é uma projeção em $\widetilde{A}$.

Falta mostrar que $\widetilde{A} = \{a + \alpha f : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$. Observe que

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \{a + \beta 1_{\widetilde{A}} : a \in A, \beta \in \mathbb{C}\} \\ &= \{a + \beta 1_A - \beta 1_A + \beta 1_{\widetilde{A}} : a \in A, \beta \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(a + \beta 1_A) + \beta(1_{\widetilde{A}} - 1_A) : a \in A, \beta \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(a + \beta 1_A) + \beta f : a \in A, \beta \in \mathbb{C}\} = \{b + \alpha f, b \in A : \alpha \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2.4. *Se A é uma C^*-álgebra, então a C^*-álgebra $A \oplus \mathbb{C}$, munida das operações usuais da soma direta*

$$\begin{aligned} (a, \alpha) + (b, \beta) &= (a + b, \alpha + \beta) \\ (a, \alpha) \cdot (b, \beta) &= (ab, \alpha\beta), \qquad \forall\ (a, \alpha), (b, \beta) \in A \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

é isomorfa a $\widetilde{A}$ (como C^*-álgebra) se, e somente se, A é unital.

Demonstração. Suponha A com unidade 1_A e defina $\widetilde{A}$ como na proposição 1.2.3. A aplicação $\widetilde{A} \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}$ que associa $a + \alpha f \longmapsto (a, \alpha)$ é um *-isomorfismo e portanto $\widetilde{A}$ é isomorfa a $A \oplus \mathbb{C}$.

Para mostrar a recíproca, note que a soma direta $A \oplus \mathbb{C}$ só poderia ter unidade se A tivesse unidade, pois a operação de multiplicação é feita coordenada a coordenada. Portanto, se A não tem unidade, $A \oplus \mathbb{C}$ não tem unidade e, consequentemente não pode ser isomorfa a $\widetilde{A}$ que, por construção, tem unidade. □

1.3 Categorias e funtores

Definição 1.3.1. Uma *categoria* $\mathbf{C}$ consiste de uma classe $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ de *objetos* e, para cada par de objetos A e B em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$, de um conjunto $\mathrm{Mor}(A, B)$ de *morfismos* de A em B que satisfaz uma regra associativa de composição:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

tal que, para cada objeto A, existe um elemento id_A em $\mathrm{Mor}(A, A)$ tal que $\mathrm{id}_B \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_A$ para todo φ em $\mathrm{Mor}(A, B)$.

Definição 1.3.2. Um *funtor covariante* F entre as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ consiste de uma aplicação $A \mapsto F(A)$ de $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ em $\mathcal{O}(\mathbf{D})$ e, para cada par de objetos A, B em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$, de uma coleção de aplicações $\varphi \mapsto F(\varphi)$ de $\mathrm{Mor}(A, B)$ em $\mathrm{Mor}(F(A), F(B))$ tais que

(i) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$, para todo A em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$;

(ii) $F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$, quaisquer que sejam os morfismos φ em $\mathrm{Mor}(A, B)$ e ψ em $\mathrm{Mor}(B, C)$, com A, B e C em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.

Exemplo 1.3.3. As C^*-álgebras formam uma categoria $\mathbf{C}$ em que $\mathcal{O}(\mathbf{C}) = \{A : \ A \text{ é } C^* - \text{álgebra}\}$ e dados A e B em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$, $\mathrm{Mor}(A, B)$ é o conjunto formado pelos *-homomorfismos de A em B. A composição é dada pela composição usual de homomorfismos (que é associativa) e para cada A em $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ pode-se associar o *-homomorfismo identidade id_A.

Definição 1.3.4. Sejam $F, G : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ funtores covariantes entre categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$. Uma *transformação natural* entre os funtores F e G é uma família de morfismos $\tau = (\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A))_{A \in \mathcal{O}(\mathbf{C})}$ tais que, para todo $\varphi : A \longrightarrow B$ em $\mathbf{C}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \stackrel{F(\varphi)}{\longrightarrow} & F(B) \\ \tau_A \big\downarrow & & \big\downarrow \tau_B \\ G(A) & \stackrel{G(\varphi)}{\longrightarrow} & G(B) \end{array}$$

Se cada τ_A é um isomorfismo, então τ é chamado *isomorfismo natural* e F e G são ditos *naturalmente isomorfos.*

1.4 Construção do grupo K_0 de uma C^*-álgebra

Para cada C^*-álgebra A, $M_{m,n}(A)$ é o conjunto das matrizes $m \times n$ da forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{com } a_{ij} \in A, \quad i = 1, \cdots, m \ \text{ e } \ j = 1, \cdots, n$$

Nesse conjunto, a conjugação é definida da seguinte forma: se $v \in M_{m,n}(A)$ com $v = (a_{ij})$, então $v^* = (a_{ji}^*)$.

Observação. O conjunto $M_{n,n}(A)$ será denotado por $M_n(A)$.

Dada A uma C^*-álgebra, $\mathcal{P}(A)$ representará o conjunto das projeções de A, isto é, o conjunto dos elementos p de A tais que $p^2 = p = p^*$. Considere também

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)), n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

Defina a relação de equivalência $\sim_0$ em $\mathcal{P}_\infty(A)$ da seguinte forma: dados p e q em $\mathcal{P}_\infty(A)$ com $p \in \mathcal{P}_n(A)$ e $q \in \mathcal{P}_m(A)$,

$$p \sim_0 q \iff \exists\, v \in M_{m,n}(A) \text{ tal que } p = v^*v \text{ e } q = vv^*$$

Defina também a operação $\oplus$ em $\mathcal{P}_\infty(A)$ por

$$p \oplus q = \operatorname{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

Definição 1.4.1. Defina $\mathcal{D}(A)$ por

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0$$

Para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, considere $[p]_\mathcal{D}$ a classe de equivalência que contém p. Defina a adição em $\mathcal{D}(A)$ por

$$[p]_\mathcal{D} + [q]_\mathcal{D} = [p \oplus q]_\mathcal{D}.$$

Com essa operação, $\mathcal{D}(A)$ torna-se um semigrupo Abeliano com identidade (aditiva) $0 = [0]_\mathcal{D}$.

Para mais detalhes, consultar a seção 2.3 de [rLL00].

Definição 1.4.2. Seja S um conjunto que, munido da operação $+$, é um semigrupo abeliano e considere a seguinte relação de equivalência em $S \times S$: dados (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in S \times S$,

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff \exists\, c \in S \text{ tal que } a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$$

Considere o conjunto das classes de equivalência $G(S) = S \times S/\sim$, denotando por $\langle a, b\rangle$ a classe de equivalência em $G(S)$ que contém (a, b). Defina a operação em $G(S)$:

$$\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$$

Esta operação está bem definida e torna $(G(S), +)$ um grupo abeliano. Esse grupo é chamado *grupo de Grothendieck de S*. Note que $\langle a, a\rangle$ é o elemento neutro e, portanto, $-\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ para cada $a,\ b \in S$.

Além disso, para cada $c \in S$ fixado é possível definir γ_S, a *aplicação de Grothendieck*, por:

$$\gamma_S : S \longrightarrow G(S)\ , \quad a \longmapsto \langle a + c, c\rangle$$

que é aditiva e independe da escolha de c, uma vez que$\langle a + c, c\rangle = \langle a, 0\rangle + \langle c, c\rangle$ e $\langle c, c\rangle = 0$, para qualquer $c \in S$.

Observe que dado $\langle a, b\rangle \in G(S)$,

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle &= \langle a + (a + b), b + (a + b)\rangle = \langle a + b, b\rangle + \langle a, a + b\rangle \\ &= \langle a + b, b\rangle - \langle b + a, a\rangle = \gamma_S(a) - \gamma_S(b) \end{aligned}$$

Segue então que

$$G(S) = \{\gamma_S(a) - \gamma_S(b) : a,\ b \in S\}$$

Exemplo 1.4.3. O grupo de Grothendieck do semigrupo abeliano $\{0, 1, 2, \cdots\}$ com a operação $+$ usual de adição no conjunto dos números naturais é isomorfo ao grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$, sendo $+$ a operação usual de adição em $\mathbb{Z}$.

Definição 1.4.4. Dada A uma C^*-álgebra, seja $K_{00}(A)$ o grupo de *Grothendieck* do semigrupo abeliano $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0$. Sendo $\gamma_{\mathcal{D}(A)} : \mathcal{D}(A) \longrightarrow K_{00}(A)$ a aplicação de *Grothendieck* associada a $\mathcal{D}(A)$, defina

$$[p]_0 = \gamma_{\mathcal{D}(A)}([p]_{\mathcal{D}})$$

Pela construção, segue que

$$K_{00}(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : \ p, \ q \in \mathcal{P}_\infty(A)\}$$

Proposição 1.4.5. *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B. A aplicação induzida $\varphi_* : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(B)$ dada por*

$$\varphi_*([(x_{i,j})_{i,j}]) = [(\varphi(x_{i,j}))_{i,j}]$$

é um homomorfismo de semigrupos bem definido.

Além disso, a correspondência $A \longmapsto \mathcal{D}(A)$, $\varphi \longmapsto \varphi_*$ é um funtor da categoria das C^*-álgebras na categoria dos semigrupos abelianos.

Demonstração. Ver proposição 6.1.3 de [WO93].

Definição 1.4.6. Dadas A e B duas C^*-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo, defina a aplicação $K_{00}(\varphi)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} K_{00}(\varphi) : K_{00}(A) & \longrightarrow & K_{00}(B) \\ [p]_0 - [q]_0 & \longmapsto & [\varphi_*(p)]_0 - [\varphi_*(q)]_0, \quad p, q \in \mathcal{P}_\infty(A) \end{array}$$

Definição 1.4.7. Dada uma C^*-álgebra A , considere $\pi : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $a + \lambda 1_{\widetilde{A}} \longmapsto \lambda$, se $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Defina

$$K_0(A) := \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi)) \tag{1.3}$$

A seguir, serão dados alguns exemplos do grupo $K_0(A)$ para algumas C^*-álgebras. Esses resultados podem ser encontrados em [rLL00].

Exemplo 1.4.8. Para a C^*-álgebra $A = M_n(\mathbb{C})$,

$$K_0(A) = \mathbb{Z}$$

De fato, considerando $\tau : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ a função traço usual, a aplicação $K_0(\tau)$ é um isomorfismo entre $K_0(M_n(\mathbb{C}))$ e $\mathbb{Z}$.

Os detalhes desse resultado podem ser encontrados no exemplo 3.3.2 de [rLL00].

Observe que, para o caso $n = 1$, encontra-se $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.4.9. Considere a C^*-álgebra $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, definida no exemplo 1.1.3. Nesse caso,

$$K_0(\mathscr{B}(\mathcal{H})) = 0$$

pois a aplicação

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{D}(\mathscr{B}(\mathcal{H})) & \longrightarrow & \{0, 1, 2, 3, ..., \infty\} \\ [p]_{\mathcal{D}} & \longmapsto & \dim(p) \end{array}$$

é um isomorfismo e o grupo de Grothendiek do semigrupo $\{0, 1, 2, 3, ..., \infty\}$ é zero (ver exemplo 3.1.3 de [rLL00]).

Exemplo 1.4.10. Para $A = \mathbb{K}$, álgebra dos operadores compactos de um espaço de Hilbert separável, tem-se

$$K_0(A) = \mathbb{Z}$$

Definição 1.4.11. Dadas A e B duas C^*-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo, considere $\widetilde{\varphi}$ como na definição 1.2.2. Defina a aplicação $K_0(\varphi)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} K_0(\varphi) : K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) \\ [p]_0 - [q]_0 & \longmapsto & [\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [\widetilde{\varphi}(q)]_0, \ p, q \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{A}) \end{array}$$

Observação 1.4.12. Dado $\varphi : A \longrightarrow B$, é possível construir o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A} \arrow[rr, "\pi_A"] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"'] & & \mathbb{C} \\ & \widetilde{B} \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\pi_B(\widetilde{\varphi}(a+\lambda 1_{\widetilde{A}})) = \pi_B(\varphi(a)+\lambda 1_{\widetilde{B}}) = \lambda = \pi_A(a+\lambda 1_{\widetilde{A}})$ para todo $a+\lambda 1_{\widetilde{A}} \in \widetilde{A}$, o diagrama acima comuta. Logo, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} K_{00}(\widetilde{A}) \arrow[rr, "K_{00}(\pi_A)"] \arrow[dr, "K_{00}(\widetilde{\varphi})"'] & & K_{00}(\mathbb{C}) \\ & K_{00}(\widetilde{B}) \arrow[ur, "K_{00}(\pi_B)"'] & \end{tikzcd}$$

também comuta. Então $K_{00}(\pi_B) \circ K_{00}(\widetilde{\varphi}) = K_{00}(\pi_A)$ e daí segue que

$$a \in \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi_A)) \Rightarrow K_{00}(\pi_B)(K_{00}(\widetilde{\varphi})(a)) = 0$$

ou seja, $K_{00}(\widetilde{\varphi})(a) \in \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi_B))$. Logo, $K_{00}(\widetilde{\varphi})(K_0(A)) \subset K_0(B)$, o que mostra que a aplicação $K_0(\varphi)$, dada em 1.4.11, está bem definida.

Já a unicidade do homomorfismo $K_{00}(\varphi)$ é garantida pela propriedade universal do grupo K_0 (Proposição 3.1.8 de [rLL00]), considerando a aplicação $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \to K_0(B)$ tal que $\nu(p) = [\varphi(p)]_0$ para cada $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Note que a definição dada acima é equivalente a

$$K_0(\varphi) = K_{00}(\widetilde{\varphi})|_{K_0(A)}$$

Observação 1.4.13. Se A e B são duas C^*-álgebras sendo A unital, e se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo, então, dado $g \in \mathcal{P}_\infty(A)$

$$K_0(\varphi)([g]_0) = K_{00}(\widetilde{\varphi})|_{K_0(A)}([g]_0) = [\varphi(g)]_0$$

A construção do funtor K_0 feita no parágrafo 4.1.2 de [rLL00] fornece mais detalhes sobre essa igualdade.

A seguir, será mostrado que as associações $A \longmapsto K_0(A)$ e $\varphi \longmapsto K_0(\varphi)$, com $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B definem um funtor covariante K_0 entre a categoria das C^*-álgebras e a categoria dos grupos abelianos.

Proposição 1.4.14. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$, *para toda C^*-álgebra A.*

(ii) *Se A, B e C são C^*-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ e $\psi : B \longrightarrow C$ são *-homomorfismos, então $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.*

Demonstração.

(i) Seja $[p]_0 \in K_0(A)$ tal que $p = p_0 + \alpha 1_{\widetilde{A}}$, $p_0 \in M_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$K_0(\mathrm{id}_A)([p]_0) = [\widetilde{\mathrm{id}_A}(p)]_0 = [\mathrm{id}_A(p_0) + \alpha 1_{\widetilde{A}}]_0 = [p_0 + \alpha 1_{\widetilde{A}}]_0 = [p]_0 = \mathrm{id}_{K_0(A)}([p]_0)$$

Como a escolha de p foi arbitrária, segue que $K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$.

(ii) Seja $[p]_0 \in K_0(A)$ tal que $p = p_0 + \alpha 1_{\widetilde{A}}, p_0 \in M_n(A)$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

$$K_0(\psi\circ\varphi)([p]_0) = [\widetilde{\psi \circ \varphi}(p)]_0 = [\psi\circ\varphi(p_0)+\alpha 1_{\widetilde{C}}]_0 = [\widetilde{\psi}(\varphi(p_0)+\alpha 1_{\widetilde{B}})]_0 = K_0(\psi)([\varphi(p_0)+\alpha 1_{\widetilde{B}}]_0) =$$

$$= K_0(\psi)([\widetilde{\varphi}(p)]_0) = K_0(\psi)(K_0(\varphi)([p]_0)) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)([p]_0).$$

Como a escolha de p foi arbitrária, segue que $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

□

Proposição 1.4.15. *Se A é uma C^*-álgebra unital, então $K_0(A) \cong K_{00}(A)$.*

Demonstração. Como A é unital, da proposição (1.2.4), segue que $\widetilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$. Então, usando a proposição 6.2.1 de [WO93],

$$K_{00}(\widetilde{A}) \cong K_{00}(A) \oplus K_{00}(\mathbb{C})$$

em que $K_{00}(\mathbb{C})$ é a imagem de $K_{00}(\pi)$. Logo,

$$K_{00}(A) \cong \mathrm{Ker}(K_{00}(\pi)) = K_0(A)$$

□

Proposição 1.4.16. *O funtor K_0 possui as seguintes propriedades:*

(i) $K_0(\{0\}) = \{0\}$

(ii) $K_0(0_{A,B}) = 0_{K_0(A),K_0(B)}$, *para todo par A e B de C^*-álgebras.*

Demonstração.

(i) Construa a sequência (1.2) para a C^*-álgebra $A = \{0\}$:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \widetilde{\{0\}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Como $\widetilde{\{0\}} = \mathbb{C}$,

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata. Logo, $\pi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

Como K_0 é funtor, $K_0(\pi) = K_0(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})}$ e como a sequência é exata, $K_0(\{0\}) = \mathrm{Ker}(K_0(\pi)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{K_0(\mathbb{C})}) = \{0\}$.

(ii) Note que se $0_{A,0} : A \to \{0\}$ e $0_{0,B} : \{0\} \to B$ então $0_{A,B} : A \to B$ é igual a composta $0_{0,B} \circ 0_{A,0}$. Logo, como K_0 é funtor, $K_0(0_{0,B} \circ 0_{A,0}) = K_0(0_{0,B}) \circ K_0(0_{A,0})$.

Além disso, observe que

$$\begin{array}{rcl} K_0(0_{A,0}) & : & K_0(A) \to K_0(\{0\}) \overset{(i)}{=} 0 \Rightarrow K_0(0_{A,0}) = 0_{K_0(A),0} \\ & \text{e} & \\ K_0(0_{0,B}) & : & \{0\} = K_0(\{0\}) \to K_0(B) \Rightarrow K_0(0_{0,B}) = 0_{0,K_0(B)} \end{array}$$

Assim,

$$K_0(0_{A,B}) = 0_{0,K_0(B)} \circ 0_{K_0(A),0} = 0_{K_0(A),K_0(B)}.$$

□

Definição 1.4.17. Seja $0 \longrightarrow A \overset{i}{\longrightarrow} \widetilde{A} \underset{\lambda}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$ a sequência definida em (1.2). Defina a *aplicação escalar* s por:

$$s = \lambda \circ \pi : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$$

isto é, $s(a + \alpha 1_{\widetilde{A}}) = \alpha 1_{\widetilde{A}}$, para todo $a \in A$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$.

A seguir será enunciado um resultado muito útil. Trata-se da proposição 4.2.2 de [rLL00].

Proposição 1.4.18. *Dada A uma C^*-álgebra,*

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(A)\}$$

Proposição 1.4.19. *O funtor K_0 é* meio exato*, isto é, se*

$$0 \longrightarrow I \overset{\varphi}{\longrightarrow} A \overset{\psi}{\longrightarrow} B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de C^*-álgebras, então

$$K_0(I) \overset{K_0(\varphi)}{\longrightarrow} K_0(A) \overset{K_0(\psi)}{\longrightarrow} K_0(B)$$

é uma sequência exata de grupos abelianos.

Demonstração. Basta verificar que $\mathrm{Im}(K_0(\varphi)) = \mathrm{Ker}(K_0(\psi))$.
Para mais detalhes, consultar a prova da proposição 4.3.2 de [rLL00] □

Proposição 1.4.20. *O funtor K_0 é* exato cindido*, isto é, se*

$$0 \longrightarrow I \overset{\varphi}{\longrightarrow} A \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida de C^*-álgebras, então

$$0 \longrightarrow K_0(I) \overset{K_0(\varphi)}{\longrightarrow} K_0(A) \underset{K_0(\lambda)}{\overset{K_0(\psi)}{\rightleftarrows}} K_0(B) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida de grupos abelianos.
Demonstração. Ver a proposição 4.3.3 de [rLL00].

1.5 Construção do grupo K_1

Definição 1.5.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que dois pontos a e b de X são *homotópicos em X* se existe uma função contínua $v : [0,1] \to X$ tal que $v(0) = a$ e $v(1) = b$. Escrevemos $a \sim_h b$. A relação $\sim_h$ é uma relação de equivalência em X. A função contínua v da definição é chamada *caminho contínuo* de a até b.

Definição 1.5.2. Dada A uma C^*-álgebra unital, $\mathcal{U}(A)$ representa o conjunto dos unitários de A, isto é, o conjunto dos elementos u de A tais que $uu^* = u^*u = 1$. Considere também $\mathcal{U}_0(A)$ o conjunto formado pelos elementos $u \in \mathcal{U}(A)$ tais que $u \sim_h 1_A$ em $\mathcal{U}(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina ainda

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathcal{U}_n(A))$$

Definição 1.5.3. Dada A uma C^*-álgebra unital, defina a operação $\oplus$ em $\mathcal{U}_\infty(A)$ por

$$u \oplus v = \operatorname{diag}(u,v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Note que se u e v pertencem a $\mathcal{U}_n(A)$, então $u \oplus v \in \mathcal{U}_{2n}(A)$.

Finalmente, defina a relação de equivalência $\sim_1$ em $\mathcal{U}_\infty(A)$ da seguinte forma: dados u e v em $\mathcal{U}_\infty(A)$ com $u \in \mathcal{U}_n(A)$ e $v \in \mathcal{U}_m(A)$, $u \sim_1 v$ se existe um natural $k \geqslant \max\{m,n\}$ tal que $u \oplus 1_{k-n} \sim_h v \oplus 1_{k-m}$ em $\mathcal{U}_k(A)$.

Definição 1.5.4. Para cada C^*-álgebra A, defina

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 .$$

Para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, considere $[u]_1$ a classe de equivalência que contém u. Dados $u,\ v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$, defina a adição em K_1 por

$$[u]_1 + [v]_1 = [u \oplus v]_1.$$

Com essa operação, K_1 torna-se um grupo Abeliano.

Observe que para cada $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, considerando $1^m_{\widetilde{A}} = \operatorname{diag}(1_{\widetilde{A}}, 1_{\widetilde{A}}, \cdots, 1_{\widetilde{A}}) \in M_m(\widetilde{A})$,

$$[u]_1 + [1^m_{\widetilde{A}}]_1 = \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1^m_{\widetilde{A}} \end{pmatrix}\right]_1 = [u]_1,\ \forall m \in \mathbb{N}, \text{pois} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1^m_{\widetilde{A}} \end{pmatrix} \sim_1 u$$

Logo, para todo m natural, $1^m_{\widetilde{A}}$ é um representante da classe do elemento neutro de $K_1(A)$. Denotaremos tal classe por $[1]_1$.

Além disso, como consequência do lema de Whitehead (Lema 2.1.5 de [rLL00]),

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1_{\widetilde{A}} \end{pmatrix}, \forall\, u,\, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$$

segue que $0 = [1]_1 = [uu^*]_1 = [u]_1 + [u^*]_1$, e portanto, $-[u]_1 = [u^*]_1$, $\forall [u]_1 \in K_1(A)$.

Para mais detalhes sobre a construção do grupo K_1, consulte a seção 8.1 de [rLL00].

Observação 1.5.5. Pela definição de K_1, segue que

$$K_1(A) = \{[u]_1 : u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})\}$$

.

Se A é uma C^*-álgebra unital, segue da proposição 1.2.3 que $\widetilde{A} = \{a + \alpha f : a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$, para $f = 1_{\widetilde{A}} - 1_A$.

Considere o *-homomorfismo $\mu : \widetilde{A} \longrightarrow A$ dado por $\mu(a + \alpha f) = a$. Esse *-homomorfismo é unital, pois $\mu(1_{\widetilde{A}}) = \mu(1_A + f) = 1_A$. Logo, $\mu(\mathcal{U}(\widetilde{A})) \subseteq \mathcal{U}(A)$. Agora, estenda essa aplicação a

$$\begin{array}{rcll} \mu^n : M_n(\widetilde{A}) & \longrightarrow & M_n(A), & n \in \mathbb{N}, \\ (x_{i,j})_{i,j} & \longmapsto & (\mu(x_{i,j}))_{i,j}, & i,j = 1,2,...,n \end{array}$$

Esse *-homomorfismo também é unital e vale que $\mu^n(\mathcal{U}_n(\widetilde{A})) \subseteq \mathcal{U}_n(A)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dados $u, v \in M_n(\widetilde{A})$, $\mu(u \oplus v) = \mu(u) \oplus \mu(v)$.

Isso permite definir $\mu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(A)$.

Proposição 1.5.6. *Seja A uma C^*-álgebra unital. Então existe um isomorfismo $\rho : K_1(A) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1$ que torna o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "{[\cdot]_1}"] & \mathcal{U}_\infty(A) \arrow[d] \\ K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1 \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

comutativo.

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} \rho : K_1(A) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1 \\ [u]_1 & \longmapsto & [\mu(u)]_1 \end{array}$$

Para mostrar que ρ é um isomorfismo, provaremos que

(1) ρ está bem definido;

(2) ρ é homomorfismo de grupo;

(3) ρ é sobrejetor;

(4) ρ é injetor.

Usaremos que $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}f))$ é um conjunto conexo por caminhos (já que $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_0(M_n(\mathbb{C}))$ e $M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}f)$).

(1) Sejam $u, v \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ com $u \sim_1 v$. Então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $u \oplus 1^p_{\widetilde{A}} \sim_h v \oplus 1^q_{\widetilde{A}}$. Compondo essa homotopia com μ, encontramos $\mu(u) \oplus 1^p_A \sim_h \mu(v) \oplus 1^q_A$. Logo, vale que $[\mu(u)]_1 = [\mu(v)]_1$ e assim, ρ está bem definido.

(2) Sejam $[u]_1, [v]_1 \in K_1(A)$. Então

$$\rho([u]_1 + [v]_1) = \rho([u \oplus v]_1) = [\mu(u \oplus v)]_1 = [\mu(u) \oplus \mu(v)]_1 = [\mu(u)]_1 + [\mu(v)]_1 = \rho([u])_1 + \rho([v]_1)$$

(3) Seja $g \in \mathcal{U}_\infty(A)/\sim_1$. Então existe uma matriz $a = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{U}_\infty(A)$ tal que $g = [a]_1$. Como $(a_{ij} + f)_{ij} \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$ e $\mu((a_{ij} + f)_{ij}) = (\mu(a_{ij} + f))_{ij} = (a_{ij})_{ij}$, temos

$$\rho([(a_{ij} + f)_{ij}]_1) = [\mu((a_{ij} + f)_{ij})]_1 = [(a_{ij})_{ij}]_1 = [a]_1 = g$$

com $[(a_{ij} + f)_{ij}]_1 \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 = K_1(A)$.

(4) Seja $[u]_1 \in K_1(A)$ tal que $\rho([u]_1) = 0 = [1_A]_1$. Como $[\mu(u)]_1 = [1_A]_1$, existem $l, k \in \mathbb{N}$ tais que $\mu(u) \oplus 1_A^l \sim_h 1_A^k$. Note que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, $u - \mu(u) \sim_h f_m$, já que $u - \mu(u)$ está em $\mathcal{U}_\infty(\mathbb{C}f)$ e $\mathcal{U}_\infty(\mathbb{C}f)/\sim_1 = \{0\}$. Então, vale que $(u - \mu(u)) \oplus f_l \sim_h f_k$.

Como $u = \mu(u) + (u - \mu(u))$, segue que

$$u \oplus 1_{\widetilde{A}}^l = (\mu(u) \oplus 1_A^l) + ((u - \mu(u)) \oplus f_l) \sim_h 1_A^k + f_k = 1_{\widetilde{A}}^k.$$

Portanto $[u]_1 \sim 1_{\widetilde{A}}$, ou seja, $[u]_1 = 0$.

□

Corolário 1.5.7. *$K_1(A) \cong K_1(\widetilde{A})$, para toda C^*-álgebra A.*

Demonstração. Como $\widetilde{A}$ é sempre unital, segue da proposição 1.5.6 que

$$K_1(\widetilde{A}) \cong \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})/\sim_1 = K_1(A).$$

□

Definição 1.5.8. Dadas A e B duas C^*-álgebras e $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo, considere $\widetilde{\varphi}$ como na definição 1.2.2. Defina a aplicação $K_1(\varphi)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} K_1(\varphi) : K_1(A) & \longrightarrow & K_1(B) \\ [u]_1 & \longmapsto & [\widetilde{\varphi}(u)]_1, \ u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \end{array}$$

Observação 1.5.9. A unicidade do homomorfismo $K_1(\varphi)$ é garantida pela propriedade universal do grupo K_1 (Proposição 8.1.5 de [rLL00]), considerando a aplicação $\nu : \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A}) \to K_1(B)$ tal que $\nu(u) = [\widetilde{\varphi}(u)]_0$ para cada $u \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{A})$.

A seguir, serão dados alguns exemplos do grupo $K_1(A)$ para algumas C^*-álgebras. Esses resultados podem ser encontrados em [rLL00].

Exemplo 1.5.10. Para a C^*-álgebra $A = M_n(\mathbb{C})$,

$$K_1(A) = 0$$

De fato, como o conjunto $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ é conexo, segue que $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C})) = \mathcal{U}_0(M_n(\mathbb{C}))$ e, portanto, $K_1(M_n(\mathbb{C})) = 0$.

Em particular, para o caso $n = 1$, encontra-se $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

Exemplo 1.5.11. Considere a C^*-álgebra $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, definida no exemplo 1.1.3. Nesse caso,

$$K_1(\mathscr{B}(\mathcal{H})) = 0$$

Exemplo 1.5.12. Para $A = \mathbb{K}$, álgebra dos operadores compactos de um espaço de Hilbert separável, tem-se

$$K_1(A) = 0$$

A seguir, será mostrado que as associações $A \longmapsto K_1(A)$ e $\varphi \longmapsto K_1(\varphi)$, em que $\varphi : A \longrightarrow B$ um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B definem um funtor covariante K_1 entre a categoria das C^*-álgebras e a categoria dos grupos abelianos.

Proposição 1.5.13. *Se A, B e C são C^*-álgebras, então*

(i) $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$,

(ii) *Se $\varphi : A \longrightarrow B$ e $\psi : B \longrightarrow C$ são *-homomorfismos, então $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)$.*

Em particular, K_1 é um funtor.

Demonstração.

(i) Seja $[u]_1 \in K_1(A)$ tal que $u = v + z1_{\widetilde{A}}$, com $v \in A$ e $z \in \mathbb{C}$. Temos

$$K_1(\mathrm{id}_A)([u]_1) = [\widetilde{\mathrm{id}_A}(u)]_1 = [\mathrm{id}_A(v) + z1_{\widetilde{A}}]_1 = [v + z1_{\widetilde{A}}]_1 = [u]_1 = \mathrm{id}_{K_1(A)}([u]_1)$$

Como a escolha de u foi arbitrária, segue que $K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$.

(ii) Seja $[u]_1 \in K_1(A)$ tal que $u = v + z1_{\widetilde{A}}$, com $v \in A$ e $z \in \mathbb{C}$

$$K_1(\psi\circ\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\psi\circ\varphi}(u)]_1 = [\psi\circ\varphi(v)+z1_{\widetilde{C}}]_1 = [\widetilde{\psi}(\varphi(v)+z1_{\widetilde{B}})]_1 = K_1(\psi)([\varphi(v)+z1_{\widetilde{B}}]_1 =$$

$$= K_1(\psi)([\widetilde{\varphi}(u)]_1) = K_1(\psi)(K_1(\varphi)([u]_1)) = K_1(\psi) \circ K_1(\varphi)([u]_1).$$

Como a escolha de u foi arbitrária, segue que $K_1(\psi \circ \varphi) = K_1(\psi) \circ K_0(\varphi)$.

□

Proposição 1.5.14. *O funtor K_1 possui as seguintes propriedades:*

(i) $K_1(\{0\}) = \{0\}$

(ii) $K_1(0_{A,B}) = 0_{K_1(A),K_1(B)}$, *para todo par A e B de C^*-álgebras.*

Demonstração.

(i) Aplicando o resultado do Corolário 1.5.7 para $A = \{0\}$ obtemos:

$$K_1(\{0\}) \cong K_1(\widetilde{\{0\}}) = K_1(\mathbb{C}) = 0$$

(ii) Note que $0_{A,B} : A \to B$ é igual a composta $0_{0,B} \circ 0_{A,0}$, uma vez que $0_{A,0} : A \longrightarrow \{0\}$ e $0_{0,B} : \{0\} \to B$. Assim, como K_1 é funtor, segue que $K_1(0_{0,B} \circ 0_{A,0}) = K_1(0_{0,A}) \circ K_1(0_{A,0})$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} K_1(0_{A,0}) \quad &: \quad K_1(A) \to K_1(\{0\}){=}0 \Rightarrow K_1(0_{A,0}) = 0_{K_1(A),0} \\ &\text{e} \\ K_1(0_{0,B}) \quad &: \quad \{0\} = K_1(\{0\}) \to K_1(B) \Rightarrow K_1(0_{0,B}) = 0_{0,K_1(B)} \end{aligned}$$

Assim,

$$K_1(0_{A,B}) = 0_{0,K_1(B)} \circ 0_{K_1(A),0} = 0_{K_1(A),K_1(B)}.$$

□

Proposição 1.5.15. *O funtor K_1 é* meio exato*, isto é, se*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de C^*-álgebras, então

$$K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B)$$

é uma sequência exata de grupos abelianos, ou seja, vale que $Im(K_1(\varphi)) = Ker(K_1(\psi))$.
Demonstração. Ver a proposição 8.2.4 de [rLL00].

Proposição 1.5.16. *O funtor K_1 é* exato cindido*, isto é, se*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \underset{\lambda}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida de C^*-álgebras, então

$$0 \longrightarrow K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \underset{K_1(\lambda)}{\overset{K_1(\psi)}{\rightleftarrows}} K_1(B) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida de grupos abelianos.
Demonstração. Ver a proposição 8.2.5 de [rLL00].

1.6 Homotopias

Definição 1.6.1. Sejam A e B duas C^*-álgebras. Dois C^*-homomorfismos $\varphi, \psi : A \to B$ são *homotópicos*, em símbolos $\varphi \sim_h \psi$, se existe uma caminho de C^*-homomorfismos $\varphi_t : A \to B, t \in [0,1]$ tais que, para cada $a \in A$, $t \longmapsto \varphi_t(a)$ é uma aplicação contínua de [0,1] em B, $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$. Dizemos que o caminho $t \longmapsto \varphi_t$ é contínuo ponto a ponto.

Lema 1.6.2. *Sejam* A *e* B *duas C^*-álgebras. Se os *-homomorfismos $\varphi, \psi : A \to B$ são homotópicos, então $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ e $\widetilde{\psi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ também são homotópicos.*

Demonstração.
Como $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são *-homomorfismos homotópicos, existe um caminho de *-homomorfismos $\varphi_t : A \to B, t \in [0,1]$, tais que, para cada $a \in A$, $t \longmapsto \varphi_t(a)$ é uma aplicação contínua de [0,1] em B, $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$ (φ_t é homotopia entre φ e ψ).
Observe que para cada $t \in [0,1]$, $\widetilde{\varphi_t} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ tal que $\widetilde{\varphi_t}(a + z1_{\widetilde{A}}) = \varphi_t(a) + z1_{\widetilde{B}}$ é homotopia de $\widetilde{\varphi}$ em $\widetilde{\psi}$.
De fato:

- $\widetilde{\varphi_0}(a + z1_{\widetilde{A}}) = \varphi_0(a) + z1_{\widetilde{B}} \overset{\varphi_0 = \varphi}{=} \varphi(a) + z1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}(a + z1_{\widetilde{A}}), \forall (a + z1_{\widetilde{A}}) \in \widetilde{A}$. Isso mostra que $\widetilde{\varphi_0} = \widetilde{\varphi}$.
- Analogamente, $\widetilde{\varphi_1} = \widetilde{\psi}$.
- Para todo $s \in \widetilde{A}$, a aplicação $t \longmapsto \widetilde{\varphi_t}(s)$ é uma aplicação contínua de [0,1] em $\widetilde{B}$, pois, se $s = a + z1_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{\varphi_t}(s) = \varphi_t(a) + z1_{\widetilde{B}}$ e φ_t é contínua.

□

Lema 1.6.3. *Se $\widetilde{\varphi}_t : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ é uma homotopia entre dois *-homomorfismos de C^*-álgebras, $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\varphi}_t$ pode ser estendido a uma homotopia entre $\widetilde{\varphi}^n$ e $\widetilde{\psi}^n$, aplicações de $M_n(\widetilde{A})$ em $M_n(\widetilde{B})$.*

Demonstração. Estenda as homotopias $\widetilde{\varphi}_t$ a

$$\begin{array}{rcll} \widetilde{\varphi}_t{}^n : M_n(\widetilde{A}) & \longrightarrow & M_n(\widetilde{B}), & n \in \mathbb{N}, \\ (x_{i,j})_{i,j} & \longmapsto & (\widetilde{\varphi}_t(x_{i,j}))_{i,j}, & i,j = 1,2,...,n \end{array}$$

É fácil verificar que $\widetilde{\varphi}_t{}^n$ é homotopia entre $\widetilde{\varphi}^n$ e $\widetilde{\psi}^n$. □

Definição 1.6.4. (Equivalência homotópica) Duas C^*-álgebras A e B são *homotopicamente equivalentes* se existem C^*-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ tais que $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$ e $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$. Nesse caso, dizemos que

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

é *homotopia* (entre A e B).

Proposição 1.6.5. *(Invariância homotópica por K_0). Sejam A e B duas C^*-álgebras.*

(i) *Se $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são *-homomorfismos homotópicos, então $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.*

(ii) *Se A e B são C^*-álgebras homotopicamente equivalentes, então $K_0(A)$ é isomorfo a $K_0(B)$. Mais especificamente, se*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$$

é homotopia entre A e B, então $K_0(\varphi) : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ e $K_0(\psi) : K_0(B) \longrightarrow K_0(A)$ são isomorfismos e $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

Demonstração.

(i) Como $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são *-homomorfismos homotópicos, dos lemas 1.6.2 e 1.6.3 segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, os *-homomorfismos $\widetilde{\varphi}^n$ e $\widetilde{\psi}^n$ são homotópicos. Para simplificar, essas aplicações serão denotadas apenas por $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$, respectivamente.

Note que, dada uma projeção $p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$, $\widetilde{\varphi}_t(p) \in \mathcal{P}_n(\widetilde{B})$, pois $\widetilde{\varphi}_t(p)\widetilde{\varphi}_t(p) = \widetilde{\varphi}_t(pp) = \widetilde{\varphi}_t(p)$ e $\widetilde{\varphi}_t(p)^* = \widetilde{\varphi}_t(p^*) = \widetilde{\varphi}_t(p)$. Assim, para cada $p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$, o caminho contínuo $t \longmapsto \widetilde{\varphi}_t(p)$ fica dentro de $P_n(\widetilde{A})$. Daí, $\widetilde{\varphi}(p) = \widetilde{\varphi_0}(p) \sim_h \widetilde{\varphi_1}(p) = \widetilde{\psi}(p)$, em que a homotopia é dada por $\widetilde{\varphi}_t(p)$.

Portanto, $\widetilde{\varphi}(p) \sim_h \widetilde{\psi}(p)$ *em* $\mathcal{P}_n(\widetilde{B}), \forall p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$.

Como $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_0 q$ (Proposição 2.2.7 de [rLL00]) e $\widetilde{\varphi}(p) \sim_h \widetilde{\psi}(p)$, segue que $\widetilde{\varphi}(p) \sim_0 \widetilde{\psi}(p)$ e assim,

$$[\widetilde{\varphi}(p)]_0 = [\widetilde{\psi}(p)]_0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A}) \qquad (*)$$

Então, dado $[p]_0 \in K_0(A)$,

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\widetilde{\varphi}(p)]_0 \overset{(*)}{=} [\widetilde{\psi}(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0)$$

e, dessa forma, concluímos que $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Como A e B são homotopicamente equivalentes, existem *-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ tais que $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$ e $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$. Daí, pela funtorialidade de K_0 e pelo item (i), temos:

$$K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_0(A)} \quad \text{e}$$

$$K_0(\varphi) \circ K_0(\psi) = K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{K_0(B)}$$

Aplicando o funtor K_0 na homotopia entre A e B encontramos a seguinte sequência:

$$K_0(A) \overset{K_0(\varphi)}{\longrightarrow} K_0(B) \overset{K_0(\psi)}{\longrightarrow} K_0(A)$$

Como $K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = \mathrm{id}_{K_0(A)}$, $K_0(\varphi)$ é injetor e $K_0(\psi)$ é sobrejetor e como $K_0(\varphi) \circ K_0(\psi) = \mathrm{id}_{K_0(B)}$, $K_0(\psi)$ é injetor e $K_0(\varphi)$ é sobrejetor. Portanto, $K_0(\varphi)$ e $K_0(\psi)$ são isomorfismos e $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

□

Proposição 1.6.6. *(Invariância homotópica por K_1). Sejam A e B duas C^*-álgebras.*

(i) *Se $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são *-homomorfismos homotópicos, então $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.*

(ii) *Se A e B são C^*-álgebras homotopicamente equivalentes, então $K_1(A)$ é isomorfo a $K_1(B)$. Mais especificamente, se*

$$A \overset{\varphi}{\longrightarrow} B \overset{\psi}{\longrightarrow} A$$

é homotopia entre A e B, então $K_1(\varphi) : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ e $K_1(\psi) : K_1(B) \longrightarrow K_1(A)$ são isomorfismos e $K_1(\varphi)^{-1} = K_1(\psi)$.

Demonstração.

(i) Como $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ são *-homomorfismos homotópicos, exite um caminho de *-homomorfismos $\varphi_t : A \to B, t \in [0,1]$ tais que, para cada $a \in A$, $t \longmapsto \varphi_t(a)$ é uma aplicação contínua de [0,1] em B, com $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = \psi$ (φ_t é homotopia entre φ e ψ).

Observe que, para cada $t \in [0,1]$, a aplicação $\widetilde{\varphi}_t : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ dada por $\widetilde{\varphi}_t(a + z1_{\widetilde{A}}) = \varphi_t(a) + z1_{\widetilde{B}}$ é homotopia de $\widetilde{\varphi}$ em $\widetilde{\psi}$.

De fato:

- $t \longmapsto \widetilde{\varphi}_t(s)$ é uma aplicação contínua de [0,1] em $\widetilde{B}$, para cada $s \in \widetilde{A}$.
- $\widetilde{\varphi_0}(a + z1_{\widetilde{A}}) = \varphi_0(a) + z1_{\widetilde{B}} \overset{\varphi_0 = \varphi}{=} \varphi(a) + z1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}(a + z1_{\widetilde{A}})$, $\forall (a + z1_{\widetilde{A}}) \in \widetilde{A}$. Logo,

$$\widetilde{\varphi_0} = \widetilde{\varphi}$$

- Analogamente, $\widetilde{\varphi_1} = \widetilde{\psi}$.

Estenda essas homotopias a

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_t : M_n(\widetilde{A}) &\longrightarrow M_n(\widetilde{B}), \quad n \in \mathbb{N}, \\ (x_{i,j})_{i,j} &\longmapsto (\widetilde{\varphi}_t(x_{i,j}))_{i,j}, \quad i,j = 1,2,...,n \end{aligned}$$

Se $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$ então $\widetilde{\varphi}_t(u) \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$. De fato,

$$\widetilde{\varphi}_t(u)\widetilde{\varphi}_t(u)^* = \widetilde{\varphi}_t(u)\widetilde{\varphi}_t(u^*) = \widetilde{\varphi}_t(uu^*) = \widetilde{\varphi}_t(1_{\widetilde{A}}) = 1_{\widetilde{B}}$$

e

$$\widetilde{\varphi}_t(u)^*\widetilde{\varphi}_t(u) = \widetilde{\varphi}_t(u^*)\widetilde{\varphi}_t(u) = \widetilde{\varphi}_t(u^*u) = \widetilde{\varphi}_t(1_{\widetilde{A}}) = 1_{\widetilde{B}}.$$

Assim, para cada $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, o caminho $t \longmapsto \widetilde{\varphi}_t(u)$ é contínuo em $\mathcal{U}_n(\widetilde{A})$. Daí,

$$\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi_0}(u) \sim_h \widetilde{\varphi_1}(u) = \widetilde{\psi}(u)$$

Temos então que dado $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A})$, $\widetilde{\varphi}(u) \sim_h \widetilde{\psi}(u)$ *em* $\mathcal{U}_n(\widetilde{B})$. Dessa forma, segue que

$$[\widetilde{\varphi}(u)]_1 = [\widetilde{\psi}(u)]_1, \quad \forall u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{A}) \qquad (*)$$

Logo, dado $[u]_1 \in K_1(A)$,

$$K_1(\varphi)([u]_1) = [\widetilde{\varphi}(u)]_1 \overset{(*)}{=} [\widetilde{\psi}(u)]_1 = K_1(\psi)([u]_1)$$

e dessa forma concluímos que $K_1(\varphi) = K_1(\psi)$.

(ii) Como A e B são homotopicamente equivalentes, existem *-homomorfismos $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to A$ tais que $\psi \circ \varphi \sim_h \mathrm{id}_A$ e $\varphi \circ \psi \sim_h \mathrm{id}_B$. Daí, pelo item (i), temos:

$$K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = K_1(\psi \circ \varphi) {=} K_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{K_1(A)} \quad \text{e}$$

$$K_1(\varphi) \circ K_1(\psi) = K_1(\varphi \circ \psi) {=} K_1(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{K_1(B)}$$

Aplicando o funtor K_1 na homotopia entre A e B encontramos a seguinte sequência:

$$K_1(A) \overset{K_1(\varphi)}{\longrightarrow} K_1(B) \overset{K_1(\psi)}{\longrightarrow} K_1(A)$$

Como $K_1(\psi) \circ K_1(\varphi) = \mathrm{id}_{K_1(A)}$, $K_1(\varphi)$ é injetor e $K_1(\psi)$ é sobrejetor e como $K_1(\varphi) \circ K_1(\psi) = \mathrm{id}_{K_1(B)}$, $K_1(\psi)$ é injetor e $K_1(\varphi)$ é sobrejetor. Então vale que $K_1(\varphi)$ e $K_1(\psi)$ são isomorfismos, $K_1(\varphi)^{-1} = K_1(\psi)$ e, portanto, $K_1(A)$ é isomorfo a $K_1(B)$.

□

1.7 Cone e suspensão de uma C^*-álgebra

A seguir serão dadas duas definições para o *cone* de uma C^*-álgebra e será mostrado que elas definem conjuntos isomorfos.

Definição 1.7.1. Seja A uma C^*-álgebra, defina o *cone* $\widehat{C}A$ por

$$\widehat{C}A = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : f(0) = 0\}$$

Definição 1.7.2. Seja A uma C^*-álgebra. O *cone* CA de A é a C^*-álgebra

$$CA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : f(1) = 0\}$$

Proposição 1.7.3. $CA \cong \widehat{C}A$

Demonstração. Defina a função $F : CA \longrightarrow \widehat{C}A$ da seguinte forma: para cada $f \in CA$,

$$\begin{array}{rcl} F(f) : [0,1] & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(1-x) \end{array}$$

Note que se $x \in [0,1]$ então $1-x \in [0,1]$ e que a continuidade de f implica na continuidade de $F(f)$. Além disso, como $F(f)(0) = f(1-0) = f(1) \overset{f \in CA}{=} 0$, segue que $F(f) \in \widehat{C}A, \forall f \in CA$.

Observe agora que $F : CA \longrightarrow \widehat{C}A$ definida acima é

(1) um *-homomorfismo entre CA e $\widehat{C}A$.

(2) injetor.

(3) sobrejetor.

De fato:

(1) Dados $f, g \in CA$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in [0,1]$,

- $F(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)(1-x) = (\alpha f)(1-x) + g(1-x) = \alpha f(1-x) + g(1-x) = \alpha F(f)(x) + F(g)(x) = (\alpha F(f) + F(g))(x)$
- $F(fg)(x) = (fg)(1-x) = f(1-x)g(1-x) = F(f)(x)F(g)(x) = (F(f)F(g))(x)$
- $F(f^*)(x) = f^*(1-x) = (f(1-x))^* = (F(f)(x))^* = (F(f)^*)(x)$

(2) Suponha $f, g \in CA$ tais que $F(f) = F(g)$. Então

$$\begin{aligned} & F(f)(x) = F(g)(x), \qquad \forall x \in [0,1] \\ \Leftrightarrow \ & f(1-x) = g(1-x), \forall x \in [0,1] \\ \Leftrightarrow \ & f(y) = g(y), \forall y \in [0,1] \\ \Leftrightarrow \ & f = g \end{aligned}$$

(3) Dada $h \in \widehat{C}A$, seja $f : [0,1] \longrightarrow A$ dada por $f(x) = h(1-x)$. Note que f é contínua e que $f(1) = h(1-1) = h(0) \overset{h \in \widehat{C}A}{=} 0$. Então $f \in CA$.

Observe agora que

$$F(f)(x) = f(1-x) = h(1-(1-x)) = h(x), \forall x \in [0,1]$$

Portanto, $F(f) = h$, o que mostra que F é sobrejetora.

De (1), (2) e (3), segue que F é um isomorfismo entre CA e $\widehat{C}A$. □

Proposição 1.7.4. $K_0(\widehat{C}A) = 0$.

Demonstração. Para cada $t \in [0,1]$, seja

$$\begin{aligned} \varphi_t : \widehat{C}A & \longrightarrow \widehat{C}A \\ f & \longmapsto \varphi_t(f), \quad \varphi_t(f)(s) = f(st), \ \forall s \in [0,1] \end{aligned}$$

Para cada $f \in \widehat{C}A$, a aplicação $t \longmapsto \varphi_t(f)$ é contínua. De fato:

Observe primeiramente que se $\| f \| = 0$ então f é identicamente nula. Logo $\varphi(f) \equiv 0$ e a aplicação $t \mapsto 0$ é contínua.

Se $\| f \| \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \| \varphi_t(f) - \varphi_{t_0}(f) \| &= \sup_{s \in [0,1]} \{|f(st) - f(st_0)|\} \leqslant \sup_{s \in [0,1]} \{\| f \| \cdot |st - st_0|\} \\ &= \sup_{s \in [0,1]} \{\| f \| \cdot |s| \cdot |t - t_0|\} \leqslant \| f \| \cdot |t - t_0| \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando-se $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|}$, tem-se:

$$|t - t_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{\| f \|} \Rightarrow \| \varphi_t(f) - \varphi_{t_0}(f) \| < \| f \| \frac{\varepsilon}{\| f \|} = \varepsilon$$

Portanto, $t \longmapsto \varphi_t(f)$ é contínua.

Observe agora que, para cada $f \in \widehat{C}A$, tem-se $\varphi_0(f)(s) = f(0 \cdot s) = f(0) = 0, \forall s \in [0,1]$. Logo, $\varphi_0(f) = 0, \forall f \in \widehat{C}A$ e, portanto, $\varphi_0 = 0$ Analogamente, $\varphi_1(f)(s) = f(1 \cdot s) = f(s), \forall s \in [0,1]$, o que implica $\varphi_1(f) = f, \forall f \in \widehat{C}A$ e, daí, $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\widehat{C}A}$.

Então, como $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \mathrm{id}_{\widehat{C}A}$ e a aplicação $t \longmapsto \varphi_t(f)$ é contínua, segue que 0 e $\mathrm{id}_{\widehat{C}A}$ são *-homomorfismos homotópicos, ou seja,

$$0 \sim_h \mathrm{id}_{\widehat{C}A}$$

Agora, note que como $0_{0,\widehat{C}A} \circ 0_{\widehat{C}A,0} = 0_{\widehat{C}A,\widehat{C}A} = \varphi_0 \sim_h \varphi_1 = \mathrm{id}_{\widehat{C}A}$ e $0_{\widehat{C}A,0} \circ 0_{0,\widehat{C}A} = 0_{0,0} = \mathrm{id}_{\{0\}}$, a sequência

$$\widehat{C}A \overset{0_{\widehat{C}A,0}}{\longrightarrow} \{0\} \overset{0_{0,\widehat{C}A}}{\longrightarrow} \widehat{C}A$$

é homotopia entre $\widehat{C}A$ e 0.

Da proposição 1.6.5, segue que $K_0(\widehat{C}A) = K_0(\{0\})$ e como $K_0(\{0\}) = \{0\}$ (1.4.16), concluímos que

$$K_0(\widehat{C}A) = 0.$$

□

Proposição 1.7.5. $K_1(\widehat{C}A) = 0$.

Demonstração. Na demonstração da proposição 1.7.4 foi mostrado que

$$CA \overset{0_{\widehat{C}A,0}}{\longrightarrow} \{0\} \overset{0_{0,\widehat{C}A}}{\longrightarrow} \widehat{C}A$$

é homotopia entre $\widehat{C}A$ e 0. Da proposição 1.6.6, segue que $K_1(\widehat{C}A) = K_1(\{0\})$ e como $K_1(\{0\}) = \{0\}$ (1.5.14), concluímos que

$$K_1(\widehat{C}A) = 0.$$

□

Proposição 1.7.6. $K_0(CA) = 0$ *e* $K_1(CA) = 0$

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 1.7.3. □

Definição 1.7.7. Se $\alpha : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, defina

$$\begin{array}{rccccccc} C\alpha : & CA & \longrightarrow & CB & & & \\ & f & \longmapsto & C\alpha(f) : & [0,1] & \longrightarrow & B \\ & & & & t & \longmapsto & \alpha(f(t)) \end{array}$$

Note que para qualquer $f \in CA$, $C\alpha(f)$ está de fato em CB, pois

- $C\alpha(f)$ é contínua

- $C\alpha(f)(1) = \alpha(f(1)) \overset{f \in CA}{=} \alpha(0) = 0$

Definição 1.7.8. Seja A uma C^*-álgebra. A *suspensão* de A é dada por

$$SA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : f(0) = f(1) = 0\} = \{f \in CA : f(0) = 0\}$$

Definição 1.7.9. Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, defina

$$\begin{array}{cccccc} S\varphi : & SA & \longrightarrow & SB & & \\ & f & \longmapsto & S\varphi(f) : & [0,1] \longrightarrow & A \\ & & & & t \longmapsto & \varphi(f(t)) \end{array}$$

Note que para qualquer $f \in SA$, $S\varphi(f)$ está de fato em SB, pois

- $S\varphi(f)$ é contínua

- $S\varphi(f)(0) = \varphi(f(0)) \overset{f \in SA}{=} \varphi(0) = 0$

- $S\varphi(f)(1) = \varphi(f(1)) \overset{f \in SA}{=} \varphi(0) = 0$

Proposição 1.7.10. *S é um funtor da categoria das C^*-álgebras nela mesma.*

Demonstração. Seja S o funtor que associa cada C^*-álgebra A a SA e cada C^*-homomorfismo φ a $S\varphi$, como definido acima.

(i) Dada A uma C^*-álgebra, como $S(\mathrm{id}_A)(f)(t) = \mathrm{id}(f(t)) = f(t)$ para todo $t \in [0,1]$, então $S(\mathrm{id}_A)(f) = f$ para todo $f \in SA$, ou seja, $S(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{SA}$.

(ii) Dados C^*-homomorfismos $\varphi : A \longrightarrow B$ e $\psi : B \longrightarrow C$, temos

$$\begin{aligned} S(\psi \circ \varphi)(f)(t) &= (\psi \circ \varphi)(f(t)) = \psi(\varphi(f)(t)) = \psi(S\varphi(f)(t)) \\ &= S\psi(S\varphi(f))(t) = (S\psi \circ S\varphi)(f)(t), \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Portanto, $S(\psi \circ \varphi)(f) = (S\psi \circ S\varphi)(f)$ para todo $f \in SA$, isto é, $S(\psi \circ \varphi) = S\psi \circ S\varphi$.

□

Para a próxima demonstração, precisaremos do seguinte lema:

Lema 1.7.11. *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e seja A uma C^*-álgebra. Para cada f em $\mathcal{C}_0(X)$ e $a \in A$, considere fa o elemento em $\mathcal{C}_0(X, A)$ dado por $(fa)(x) = f(x)a$. Então o subespaço gerado pelos elementos fa, que denotaremos por $\mathrm{ger}\{fa : f \in \mathcal{C}_0(X), a \in A\}$, é denso em $\mathcal{C}_0(X, A)$.*

*Demonstração:*Ver a Lema 10.1.1 de [rLL00].

Proposição 1.7.12. *O funtor S é exato, isto é, se*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de C^*-álgebras, então

$$0 \longrightarrow SI \xrightarrow{S\varphi} SA \xrightarrow{S\psi} SB \longrightarrow 0$$

também é uma sequência exata curta.

Demonstração.

(i) $S\varphi$ é injetor.

Seja $f \in SI$ tal que $S\varphi(f) = 0$. Então, $S\varphi(f)(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Como $S\varphi(f)(t) = \varphi(f(t))$ e φ é injetor, uma vez que a sequência $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ é exata, concluímos que $f(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$ e, portanto, $f = 0$.

(ii) $\mathrm{Im}(S\varphi) = \mathrm{Ker}(S\psi)$.

A exatidão da sequência $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ implica $\psi \circ \varphi = 0$. Então, como S é funtor, $S\psi \circ S\varphi = S(\psi \circ \varphi) = S(0) = 0$, o que mostra que $\mathrm{Im}(S\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(S\psi)$.

Seja $g \in SA$ tal que $S\psi(g) = 0$. Então, $S\psi(g)(t) = \psi(g(t)) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. Isso mostra que $g(t) \in \mathrm{Ker}(\psi), \forall t \in [0,1]$. Usando novemante a exatidão da sequência $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$, segue que $g(t) \in \mathrm{Im}(\varphi), \forall t \in [0,1]$, ou seja, para cada $t \in [0,1]$ existe único (φ é injetor) $f(t)$ tal que $g(t) = \varphi(f(t))$. Note que $f \in SI$, pois, como $g \in SA$, $g(0) = g(1) = 0$ e φ é injetor, $f(1) = f(0) = 0$ e, além disso, como $g = \varphi \circ f$ e g e φ são contínuas, f também é contínua. Assim, $g = S\varphi(f)$, o que mostra que $\mathrm{Ker}(S\psi) \subseteq \mathrm{Im}(S\varphi)$.

(iii) $S\psi$ é sobrejetor.

Considere a seguinte identificação: dada X uma C^*-álgebra qualquer,

$$SA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], A) : f(1) = f(0) = 0\} = \mathcal{C}_0((0,1), A)$$

Além disso, dada $\rho \in \mathcal{C}_0((0,1)) = \mathcal{C}_0((0,1), \mathbb{C})$, para cada $x \in A$, defina $\rho x \in \mathcal{C}_0((0,1), A)$ tal que $\rho x(t) = \rho(t)x, t \in [0,1]$.

Utilizando essas identificações, o lema 1.7.11 garante que

$$\mathrm{ger}(\{\rho a : \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), a \in A\})$$

é denso em $\mathcal{C}_0((0,1), A) = SA$.

Seja $\rho a \in \mathcal{C}_0((0,1), A)$ com $\rho \in \mathcal{C}_0((0,1))$ e $a \in A$. Observe que

$$S\psi(\rho a)(t) = \psi(\rho a(t)) = \psi(\rho(t)a) = \rho(t)\psi(a), \quad \forall t \in [0,1]$$

Logo, $S\psi(\rho a) = \psi(a)\rho$.

Note que, como ρ é uma aplicação contínua e $\psi(a)$ é um elemento de B, $\psi(a)\rho$ é uma aplicação contínua de $[0,1]$ em B. Além disso, como $\rho \in \mathcal{C}_0((0,1))$, segue que $\rho(0) = \rho(1) = 0$ e, daí, $S\psi(\rho a)(0) = S\psi(\rho a)(1) = 0$. Então, como $S\psi(\rho a)$ é contínua e $S\psi(\rho a)(0) = S\psi(\rho a)(1) = 0$, $S\psi(\rho a) \in SB$.

A exatidão da sequência $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ garante que ψ é sobrejetor. Então,

$$S\psi(\mathrm{ger}(\{\rho a : \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), a \in B\}) = \mathrm{ger}(\{\rho b : \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), b \in B\})$$

sendo o segundo conjunto denso em SB.

Seja $Y = \mathrm{ger}(\{\rho a; \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), a \in A\}$, conjunto denso em SA. Sendo $S\psi$ uma aplicação contínua (uma vez que ψ é contínua), tem-se $S\psi(\bar{Y}) = \overline{S\psi(Y)}$. Então,

$$S\psi(SA) = S\psi(\bar{Y}) = \overline{S\psi(\mathrm{ger}(\{\rho a : \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), a \in A\})} = \overline{\mathrm{ger}(\{\rho b : \rho \in \mathcal{C}_0((0,1)), b \in B\})} = SB$$

Logo, $S\psi$ é sobrejetora.

□

Capítulo 2

Principais resultados da K-teoria

Este capítulo tem como finalidade apresentar alguns resultados básicos sobre a K-teoria de C^*-álgebras. Omitimos algumas demonstrações de conteúdo extenso, que podem ser encontradas em [rLL00] e em [WO93]. Entretanto, os resultados sobre a naturalidade de certas aplicações estão redigidas de forma detalhada, uma vez que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Aplicações importantes em K-teoria

2.1.1 Aplicação do índice

Seja $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de C^*-álgebras. É possível provar (ver proposição 9.1.1 de [rLL00]) que para cada $u \in \mathcal{U}_n(\widetilde{B})$, existem $v \in \mathcal{U}_{2n}(\widetilde{A})$ e $p \in \mathcal{P}_{2n}(\widetilde{I})$ tais que

$$\widetilde{\varphi}(p) = v \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\psi}(v) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

Utilizando a propriedade universal de K_1, podemos demonstrar que a aplicação

$$\begin{aligned} \delta_1 : K_1(B) &\longrightarrow K_0(I) \\ [u]_1 &\longmapsto [p]_0 - [s(p)]_0 \end{aligned}$$

está bem definida.

Definição 2.1.1. A aplicação δ_1 é chamada *aplicação do índice.*

Teorema 2.1.2. *Para toda sequência exata curta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

a aplicação do índice $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_0(I)$ torna exata *a seguinte sequência de K-grupos:*

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_1} \\ K_0(B) & \xleftarrow{K_0(\psi)} & K_0(A) & \xleftarrow{K_0(\varphi)} & K_0(I) \end{array}$$

*Demonstração.*Veja a proposição 9.3.3 de [rLL00].

Proposição 2.1.3. *Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.1}$$

*um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas curtas de C^*-álgebras e α, β e γ são *-homomorfismos. Sejam $\delta_1 : K_1(B) \longrightarrow K_0(I)$ e ${\delta'}_1 : K_1(B') \longrightarrow K_0(I')$ as aplicações do índice associadas às sequências exatas curtas do diagama acima. Então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(I) \\ K_1(\beta)\big\downarrow & & \big\downarrow K_0(\gamma) \\ K_1(B') & \xrightarrow{{\delta'}_1} & K_0(I') \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. Ver a proposiçã 9.1.5 de [rLL00] □

Definição 2.1.4. Seja $\mathbf{D_s}$ a categoria cujos objetos são as sequências exatas curtas de C^*-álgebras, isto é,

$$\mathcal{O}(\mathbf{D_s}) = \{0 \to I \to A \to B \to 0 \mid \ I, \ A \text{ e } B \text{ são } C^*\text{-álgebras e } 0 \to I \to A \to B \to 0 \text{ é exata}\}.$$

Dados dois objetos $S : 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ e $S' : 0 \longrightarrow I' \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow 0$ em $\mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, defina o conjunto dos morfismos $\mathrm{Mor}(S, S')$ formado pelos diagramas comutativos η da forma

$$\eta : \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & k\big\downarrow & & l\big\downarrow & & m\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com $k, \ l, \ m$ *-homomorfismos.

Considere S e S' como definidos acima e $S'' : 0 \longrightarrow I'' \longrightarrow A'' \longrightarrow B'' \longrightarrow 0$. Dados os morfismos

$$\eta : \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & k\big\downarrow & & l\big\downarrow & & m\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in Mor(S, S')$$

e

$$\nu : \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\ & & k'\big\downarrow & & l'\big\downarrow & & m'\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I'' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in Mor(S', S'')$$

defina a composta

$$\nu \circ \eta : \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & k' \circ k\big\downarrow & & l' \circ l\big\downarrow & & m' \circ m\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I'' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in Mor(S, S'')$$

Essa composição é associativa, pois as composições de *-homomorfismos feitas nas verticais do diagrama são associativas.

Para cada $S:\ 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, defina

$$id_S: \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle id_I}\big\downarrow & & {\scriptstyle id_A}\big\downarrow & & {\scriptstyle id_B}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in Mor(S,S)$$

É fácil verificar que dado $\eta \in Mor(S,S')$, $id_{S'} \circ \eta = \eta = \eta \circ id_S$, ou seja, a aplicação id_S é a identidade da categoria $\mathbf{D_s}$.

Isso mostra que, de fato, $\mathbf{D_s}$ possui as propriedades de uma categoria.

Definição 2.1.5. Defina a categoria $\mathbf{E_g}$ cujos objetos são os grupos abelianos e para cada par de objetos G e H, o conjunto dos morfismos $\mathrm{Mor}(G,H)$ é formado pelos homomorfismos do grupo G no grupo H, munido da composição usual de homomorfismos.

Observe que a composição usual é associativa. Além disso, vale a propriedade que para cada G em $\mathcal{O}(\mathbf{E_g})$ existe o homomorfismo identidade id_G tal que, para qualquer $\varphi : G \longrightarrow H$, $id_H \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ id_G$.

Note que $K_i(A) \in \mathcal{O}(\mathbf{E_g}),\ i = 0,1$ para toda C^*-álgebra A.

Seja $M : \mathbf{D_s} \longrightarrow \mathbf{E_g}$ tal que

(M_1) M associa cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ ao grupo abeliano $K_1(B) \in \mathcal{O}(\mathbf{E_g})$.

(M_2) Dados $S : 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$, $S' : 0 \longrightarrow I' \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ e

$$\eta: \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \gamma}\big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in \mathrm{Mor}(S,S')$$

M associa η a $M(\eta) = K_1(\beta) \in \mathrm{Mor}(M(S), M(S'))$

Seja $N : \mathbf{D_s} \longrightarrow \mathbf{E_g}$ tal que

(N_1) N associa cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ ao grupo abeliano $K_0(I) \in \mathcal{O}(\mathbf{E_g})$.

(N_2) Dados $S : 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$, $S' : 0 \longrightarrow I' \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ e

$$\eta: \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \gamma}\big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \in \mathrm{Mor}(S,S')$$

N associa η a $N(\eta) = K_0(\gamma) \in \mathrm{Mor}(N(S), N(S'))$

Da funtorialidade de K_0 e K_1, segue que M e N definidos acima são funtores da categoria $\mathbf{D_s}$ na categoria $\mathbf{E_g}$

Para cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, seja

$$(\delta_1)_S : K_1(B) = M(S) \longrightarrow N(S) = K_0(I)$$

a aplicação do índice associada à sequência exata curta S. Nessas condições, o diagrama 2.1 da proposição 2.1.3 pode ser considerado um elemento do conjunto $\mathrm{Mor}(S,S')$, considerando as sequências $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ e $S' : 0 \longrightarrow I' \xrightarrow{\varphi'} A' \xrightarrow{\psi'} B' \longrightarrow 0$

Seja $\delta_1 = (\,(\delta_1)_S : M(S) \longrightarrow N(S)\,)_{S\in\mathcal{O}(\mathbf{D_s})}$ a família formada pelas aplicações do índice. A proposição 2.1.3 mostra a *naturalidade* da aplicação do índice, uma vez que satisfaz as condições dadas na definição 1.3.4.

2.1.2 Isomorfismo entre $K_1(A)$ e $K_0(SA)$

Teorema 2.1.6. *Para cada C^*-álgebra A, os grupos $K_1(A)$ e $K_0(SA)$ são isomorfos.*

Demonstração. Primeiramente, construa a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} \widehat{C}A \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

em que i é a inclusão e $\pi : \widehat{C}A \longrightarrow A$ é dada por $\pi(f) = f(1), \forall f \in \widehat{C}A$. Note que

- $\mathrm{Im}(0_{0,SA}) = 0 = \mathrm{Ker}(i)$.
- $\mathrm{Im}(i) = SA = \mathrm{Ker}(\pi)$, já que $\pi(f) = 0$ se, e somente de $f(1) = 0$. Como $f \in \widehat{C}A,\ f(0) = 0$, logo, $f \in \mathrm{Ker}(\pi)$ se, e somente se, $f \in SA$.
- $\mathrm{Im}(\pi) = A = \mathrm{Ker}(0_{A,0})$.

Logo, (2.2) é uma sequência exata curta.

Seja $\theta_A : K_1(A) \longrightarrow K_0(SA)$ a aplicação do índice associada a sequência 2.2. Do teorema 2.1.2 segue que a seguinte sequência é exata:

$$\begin{array}{ccccc} K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(i)} & K_1(\widehat{C}A) & \xrightarrow{K_1(\pi)} & K_1(A) \\ & & & & \Big\downarrow \theta_A \\ K_0(A) & \xleftarrow{K_0(\pi)} & K_0(\widehat{C}A) & \xleftarrow{K_0(i)} & K_0(SA) \end{array}$$

Como $K_1(\widehat{C}A) = 0$, segue que $\mathrm{Im}(K_1(\pi)) = 0 = \mathrm{Ker}(\theta_A)$. Logo, θ_A é injetor.

Como $K_0(\widehat{C}A) = 0$, segue que $\mathrm{Ker}(K_0(i)) = K_0(SA) = \mathrm{Im}(\theta_A)$. Logo, θ_A é sobrejetor.

Portanto, θ_A é um isomorfismo entre $K_1(A)$ e $K_0(SA)$. □

Proposição 2.1.7. *O isomorfismo θ é uma transformação natural entre os funtores K_1 e K_0S, isto é, se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(B) \\ \theta_A \Big\downarrow & & \Big\downarrow \theta_B \\ K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(S\varphi)} & K_0(SB) \end{array} \tag{2.3}$$

é comutativo.

Demonstração. O *-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{i} & \widehat{C}A & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & S\varphi \Big\downarrow & & \widehat{C}\varphi \Big\downarrow & & \varphi \Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SB & \xrightarrow{i'} & \widehat{C}B & \xrightarrow{\pi'} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

em que $\widehat{C}\varphi : \widehat{C}A \longrightarrow \widehat{C}B$ é tal que, para cada $f \in \widehat{C}A$, $(\widehat{C}\varphi)(f)(t) = \varphi(f(t))$, $t \in [0,1]$. Esse diagrama é, de fato, comutativo, pois, pela definição da aplicação $S\varphi$ dada em 1.7.9, se $f \in SA$,

$$\widehat{C}\varphi(i(f))(t) = \widehat{C}\varphi(f)(t) = \varphi(f(t)) = S\varphi(f)(t) = i'(S\varphi(f))(t), \forall t \in [0,1]$$

e, se $g \in \widehat{C}A$

$$\pi' \circ \widehat{C}\varphi(g) = \pi'(\widehat{C}\varphi(g)) = (\widehat{C}\varphi(g))(1) = \varphi(g(1)) = \varphi(\pi(g)) = \varphi \circ \pi(g)$$

Então, pela naturalidade da aplicação do índice, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] \arrow[d, "\delta_1"'] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1'"] \\ K_0(SA) \arrow[r, "K_0(S\varphi)"] & K_0(SB) \end{tikzcd}$$

comuta, sendo δ_1 a aplicação do índice associada a sequência $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} \widehat{C}A \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$ e δ_1' a aplicação do índice associada a sequência $0 \longrightarrow SB \xrightarrow{i'} \widehat{C}B \xrightarrow{\pi'} B \longrightarrow 0$. Como, por definição, $\theta_A = \delta_1$ e $\theta_B = \delta_1'$, concluímos que o diagrama 2.3 é comutativo. □

2.1.3 Aplicações de índices maiores e a sequência longa em K-teoria

Definição 2.1.8. Para cada C^*-álgebra A e cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, defina, indutivamente,

$$K_n(A) = K_{n-1}(SA)$$

e, para cada *-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ entre C^*-álgebras A e B, defina

$$K_n(\varphi) = K_{n-1}(S\varphi) : K_n(A) \longrightarrow K_n(B)$$

Seja

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de C^*-álgebras.

Observe que, como o funtor S é exato, para cada $n \geqslant 2 \in \mathbb{N}$, a sequência

$$0 \longrightarrow S^{n-1}I \xrightarrow{S^{n-1}\varphi} S^{n-1}A \xrightarrow{S^{n-1}\psi} S^{n-1}B \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

é exata.

Note que $K_1(S^{n-2}I) = K_{n-1}(I)$. Seja $\theta_{S^{n-2}I} : K_1(S^{n-2}I) \longrightarrow K_0(S^{n-1}I)$ o isomorfismo definido no teorema 2.1.6.

Seja $\widehat{\delta}$ a aplicação do índice associada à sequência (2.4). Então, para cada $n \geqslant 2$ existe um único homomorfismo de grupos, $\delta_n : K_n(B) \longrightarrow K_{n-1}(I)$, que torna comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_n(B) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "="'] & K_{n-1}(I) \arrow[d, "\theta_{S^{n-2}I}"] \\ K_1(S^{n-1}B) \arrow[r, "\widehat{\delta}"] & K_0(S^{n-1}I) \end{tikzcd}$$

Definição 2.1.9. Chamaremos a aplicação δ_n de *aplicação do índice*.

Observação 2.1.10. Note que as aplicações do índice $\delta_1, \delta_2, ...$, definidas acima são naturais no sentido que, dado um diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\Big\downarrow & & \alpha\Big\downarrow & & \beta\Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

cujas linhas são sequências exatas curtas de C^*-álgebras e α, β e γ são *-homomorfismos, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}(B) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & K_n(I) \\ K_{n+1}(\beta)\Big\downarrow & & \Big\downarrow K_n(\gamma) \\ K_{n+1}(B') & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & K_n(I') \end{array}$$

é comutativo.

Proposição 2.1.11. *(Sequência longa em K-teoria) Toda sequência exata curta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} \psi \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

induz uma sequência exata de K-grupos:

$$\cdots \xrightarrow{K_{n+1}(\psi)} K_{n+1}(B) \xrightarrow{\delta_{n+1}} K_n(I) \xrightarrow{K_n(\varphi)} K_n(A) \xrightarrow{K_n(\psi)} K_n(B) \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1}(I) \xrightarrow{K_{n-1}(\varphi)} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta_2} K_1(I) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(A) \xrightarrow{K_1(\psi)} K_1(B) \xrightarrow{\delta_1} K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K(\psi)} K_0(B),$$

em que δ_1 é a aplicação do índice associada à sequência 2.5 e, para cada $n \geqslant 2$, δ_n é a aplicação definida em 2.1.9.

Demonstração. Vide proposição 10.2.4. de [rLL00].

2.1.4 Aplicação de Bott

Definição 2.1.12. Seja A uma C^*-álgebra unital. Para cada natural n e cada projeção p em $\mathcal{P}_n(A)$, defina

$$f_p(z) = zp + 1_n - p = 1_n + p(z-1)$$

com $z \in S^1 = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| = 1\}$.

É possível mostrar que f_p pertence a $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA})$. Isso pode ser visto na seção 11.1 de [rLL00].

Definição 2.1.13. Para cada C^*-álgebra A unital, defina

$$\begin{array}{rcl} \beta_A : K_0(A) & \longrightarrow & K_1(SA) \\ [p]_0 - [q]_0 & \longmapsto & [f_p f_q^*]_1 \end{array}$$

Essa aplicação é denominada *aplicação de Bott.*

Observação 2.1.14. Pode ser demonstrado (seção 11.1 de [rLL00]) que a definição acima pode ser estendida para A não unital.

Proposição 2.1.15. *A aplicação de Bott é uma transformação natural entre os funtores K_0 e K_1S, isto é, se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(B) \\ \beta_A \big\downarrow & & \big\downarrow \beta_B \\ K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(S\varphi)} & K_1(SB) \end{array}$$

é comutativo.

Demonstração. Seja f um elemento de $M_n(\widetilde{SA})$. Então existem $g \in SA$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $f = g + \lambda 1_{\widetilde{SA}}$. Para cada $t \in [0,1]$, note que

$$\begin{aligned} \widetilde{S\varphi}(f)(t) &= \widetilde{S\varphi}(g + \lambda 1_{\widetilde{SA}})(t) = (S\varphi(g) + \lambda 1_{\widetilde{SB}})(t) = S\varphi(g)(t) + \lambda 1_{\widetilde{SB}}(t) \\ &= \varphi(g(t)) + \lambda 1_{\widetilde{B}} = \widetilde{\varphi}((g + \lambda 1_{\widetilde{SA}})(t)) = \widetilde{\varphi}(f(t)) \end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{S\varphi}(f)(t) = \widetilde{\varphi}(f(t))$ para todo $f \in M_n(\widetilde{SA})$ e todo $t \in [0,1]$. Como f_p sempre pertence a $\mathcal{U}_n(\widetilde{SA}) \subset M_n(\widetilde{SA})$, segue que $\widetilde{S\varphi}(f_p)(z) = \widetilde{\varphi}(f_p(z))$ para toda projeção p em $\mathcal{P}_n(\widetilde{A})$.

Como $\widetilde{\varphi}$ é um *-homomorfismo unital, dado $z \in S^1$, $\widetilde{\varphi}(f_p(z)) = \widetilde{\varphi}(zp+1-p) = z\widetilde{\varphi}(p)+1-\widetilde{\varphi}(p) = f_{\widetilde{\varphi}(p)}(z)$. Assim, segue que, para todo $z \in S^1$,

$$\widetilde{S\varphi}(f_p)(z) = \widetilde{\varphi}(f_p(z)) = f_{\widetilde{\varphi}(p)}(z)$$

Seja $[p]_0 - [q]_0 \in K_0(A)$, com $p,\ q \in \mathcal{P}_n(\widetilde{A})$. Então

$$\begin{aligned} \beta_B(K_0(\varphi)([p]_0 - [q]_0)) &= \beta_B([\widetilde{\varphi}(p)]_0 - [\widetilde{\varphi}(q)]_0) = [f_{\widetilde{\varphi}(p)} f_{\widetilde{\varphi}(q)^*}]_1 \\ &= [\widetilde{S\varphi}(f_p)(\widetilde{S\varphi}(f_q))^*]_1 = [\widetilde{S\varphi}(f_p f_q^*)]_1 \\ &= K_1(S\varphi)([f_p f_q^*]_1) = K_1(S\varphi)(\beta_A([p]_0 - [q]_0)) \end{aligned}$$

o que mostra que o diagrama comuta. □

A seguir, será enunciado um resultado importante da K-teoria.

Teorema 2.1.16. *(Periodicidade de Bott) Para toda C^*-álgebra A, a aplicação de Bott associada a A, $\beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$, é um isomorfismo.*
Demonstração. Ver Teorema 11.1.2 de [rLL00].

Observação 2.1.17. Dada A uma C^*-álgebra, a periodicidade de Bott garante que $K_2(A) \cong K_0(A)$.

A peridiocidade de Bott permite calcular os K-grupos de várias C*-álgebras. A seguir, daremos dois exemplos cujos detalhes podem ser encontrados na seção 11.3 de [rLL00]

Exemplo 2.1.18. Para todo n natural,

$$K_0(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$K_1(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)) \cong \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Exemplo 2.1.19. Para todo n natural,

$$K_0(\mathcal{C}_0(S^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$K_1(\mathcal{C}_0(S^n)) \cong \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{Z}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

2.1.5 Aplicação exponencial

Definição 2.1.20. Para cada sequência exata curta de C^*-álgebras, $0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$, defina a *aplicação exponencial* $\delta_0 : K_0(B) \longrightarrow K_1(I)$ pela composição

$$K_0(B) \xrightarrow{\beta_B} K_1(SB) = K_2(B) \xrightarrow{\delta_2} K_1(I)$$

Teorema 2.1.21. *(Sequência exata de seis termos) Para cada sequência exata curta de C^*-álgebras*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

é possível associar a seguinte sequência exata de seis termos:

$$\begin{array}{ccccc} K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(B) \\ \delta_0 \big\uparrow & & & & \big\downarrow \delta_1 \\ K_0(B) & \xleftarrow{K_0(\psi)} & K_0(A) & \xleftarrow{K_0(\varphi)} & K_0(I) \end{array}$$

Demonstração. Como os funtores K_0 e K_1 são exatos e a exatidão em $K_1(B)$ e em $K_0(I)$ é dada pelo teorema 2.1.2, basta provar que o diagrama acima é exato em $K_0(B)$ e em $K_1(I)$. Para isso, considere a seguinte o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} K_2(A) & \xrightarrow{K_2(\psi)} & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) \\ \beta_A \big\uparrow \cong & & \beta_B \big\uparrow \cong & & \big\uparrow = & & \big\uparrow = \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(I) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(A) \end{array}$$

Esse diagrama é comutativo:

- A naturalidade da aplicação de Bott garante a comutatividade da parte esquerda do diagrama;
- A definição da aplicação exponencial garante a comutatividade da parte central do diagrama;
- Por construção, a parte direita do diagrama comuta.

Precisamos mostrar que a linha de baixo do diagrama (2.6) é exata. Para isso usaremos que a linha de cima do diagrama é exata (Proposição 2.1.11) e que as aplicações de Bott são isomorfismos:

- Seja $a \in \mathrm{Im}(K_0(\psi))$. Então existe $a' \in K_0(A)$ tal que $K_0(\psi)(a') = a$. Como a parte esquerda do diagrama (2.6) comuta, $K_2(\psi)(\beta_A(a')) = \beta_B(K_0(\psi)(a')) = \beta_B(a)$. Logo, $\beta_B(a) \in \mathrm{Im}(K_2(\psi))$. Como a linha de cima do diagrama (2.6) é exata, $\mathrm{Im}(K_2(\psi)) = \mathrm{Ker}(\delta_2)$. Então, $\delta_2(\beta_B(a)) = 0$. Como $\delta_0 = \delta_2 \circ \beta_B$, segue que

$$\delta_0(a) = 0$$

Logo, $a \in \mathrm{Ker}(\delta_0)$ e, portanto, $\mathrm{Im}(K_0(\psi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_0)$.

- Seja $b \in \mathrm{Ker}(\delta_0)$. Então $\delta_0(b) = \delta_2(\beta_B(b)) = 0$. Então $\beta_B(b) \in \mathrm{Ker}(\delta_2)$. Como a linha de cima do diagrama (2.6) é exata, $\mathrm{Ker}(\delta_2) = \mathrm{Im}(K_2(\psi))$. Logo, existe $a \in K_2(A)$ tal que $K_2(\psi)(a) = \beta_B(b)$. Além disso, como β_A é um isomorfismo, existe $a' \in K_0(A)$ tal que $\beta_A(a') = a$.

  Da comutatividade da parte esquerda do diagrama (2.6) segue que $\beta_B(b) = K_2(\psi)(\beta_A(a')) = \beta_B(K_0(\psi)(a'))$. Então $b = K_0(\psi)(a')$, uma vez que β_B é isomorfismo.

  Logo, $b \in \mathrm{Im}(K_0(\psi))$ e, portanto, $\mathrm{Ker}(\delta_0) \subseteq \mathrm{Im}(K_0(\psi))$.

- Seja $c \in \mathrm{Im}(\delta_0)$. Então existe $b \in K_0(B)$ tal que $\delta_0(b) = \delta_2(\beta_B(b)) = c$. Então $c \in \mathrm{Im}(\delta_2)$. Como a linha de cima do diagrama (2.6) é exata, $\mathrm{Im}(\delta_2) = \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$. Assim, $K_1(\varphi(c)) = 0$.

  Logo, $c \in \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$ e, portanto, $\mathrm{Im}(\delta_0) \subseteq \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$.

- Seja $d \in \mathrm{Ker}(K_1(\varphi))$. Como a linha de cima do diagrama (2.6) é exata, $\mathrm{Ker}(K_1(\varphi)) = \mathrm{Im}(\delta_2)$. Logo, existe $c \in K_2(B)$ tal que $\delta_2(c) = d$. Além disso, como β_B é um isomorfismo, existe $b \in K_0(B)$ tal que $\beta_B(b) = c$. Então, $d = \delta_2(\beta_B(b)) = \delta_0(b)$, pela definição da aplicação exponencial.

  Logo, $d \in \mathrm{Im}(\delta_0))$ e, portanto, $\mathrm{Ker}(K_1(\varphi)) \subseteq \mathrm{Im}(\delta_0)$.

□

A seguir mostraremos um exemplo de aplicação do teorema demonstrado acima para calcular os K-grupos de C^*-álgebras.

Seja $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{D} \setminus S^1$ e definindo as aplicações $\psi(g) = g|_{S^1}$ para toda g de $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ e

$$\varphi(f)(t) \begin{cases} 0, & \text{se } t \in S^1, \\ f(t), & \text{se } t \notin S^1 \end{cases}$$

vemos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(\mathbb{D}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}(S^1) \longrightarrow 0$$

é exata.

O teorema 2.1.21 garante a exatidão da seguinte sequência:

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(\mathcal{C}(\mathbb{D})) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & K_1(\mathcal{C}(S^1)) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(\mathcal{C}(S^1)) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(\mathcal{C}(\mathbb{D})) \arrow[l, "K_0(\psi)"'] & K_0(\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)) \arrow[l, "K_0(\varphi))"']
\end{tikzcd}$$

Usando os resultados dados nos exemplos 2.1.18 e 2.1.19, podemos reescrever a sequência acima da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "K_1(\varphi)"] & K_1(\mathcal{C}(\mathbb{D})) \arrow[r, "K_1(\psi)"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\delta_1"] \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(\mathcal{C}(\mathbb{D})) \arrow[l, "K_0(\psi)"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "K_0(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

Então, como a sequência é exata, $0 = \mathrm{Im}(K_1(\varphi)) = \mathrm{Ker}(K_1(\psi))$ e $\mathrm{Im}(K_1(\psi)) = \mathrm{Ker}(\delta_1) = 0$ e, portanto,

$$K_1(\mathcal{C}(\mathbb{D})) = 0$$

Além disso, a exatidão da sequência cíclica também garante que $\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Ker}(K_0(\varphi))$ e $\mathrm{Im}(K_0(\psi)) = \mathrm{Ker}(\delta_0) = \mathbb{Z}$ e, portanto,

$$K_0(\mathcal{C}(\mathbb{D})) = \mathbb{Z}$$

Proposição 2.1.22. *(Naturalidade da aplicação exponencial) Se*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\psi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\varphi'} & A' & \xrightarrow{\psi'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

*é um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas curtas de C^*-álgebras e α, β e γ são *-homomorfismos, então, considerando $\delta_0 : K_0(B) \longrightarrow K_1(I)$ e $\delta'_0 : K_0(B') \longrightarrow K_1(I')$ as aplicações exponenciais associadas às sequências exatas curtas do diagama (2.6), o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(I) \\ K_0(\beta)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(\gamma) \\ K_0(B') & \xrightarrow{\delta'_0} & K_1(I') \end{array} \tag{2.7}$$

é também comutativo.

Demonstração. O diagrama (2.7) pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(B) & \xrightarrow{\beta_B} & K_2(B) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(I) \\ K_0(\beta)\big\downarrow & & K_2(\beta)\big\downarrow & & K_1(\gamma)\big\downarrow \\ K_0(B') & \xrightarrow{\beta_{B'}} & K_2(B') & \xrightarrow{\delta'_2} & K_1(I') \end{array}$$

A comutatividade do quadrado da esquerda segue da naturalidade da aplicação de Bott (Proposição 2.1.15) e a comutatividade do quadrado da direita segue a naturalidade de δ_2 (Observação 2.1.10). $\square$

Considere $\mathbf{D_s}$ e $\mathbf{E_g}$ as categorias definidas em 2.1.4 e 2.1.5 respectivamente.

Seja $V : \mathbf{D_s} \longrightarrow \mathbf{E_g}$ tal que

(V_1) V associa cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ ao grupo abeliano $K_0(B) \in \mathcal{O}(\mathbf{E_g})$.

(V_2) Dados $S : 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$, $S' : 0 \longrightarrow I' \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ e

$$\eta : \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \in \mathrm{Mor}(S, S')$$

V associa η a $V(\eta) = K_0(\beta) \in \mathrm{Mor}(M(S), M(S'))$

Seja $T : \mathbf{D_s} \longrightarrow \mathbf{E_g}$ tal que

(T_1) T associa cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ ao grupo abeliano $K_1(I) \in \mathcal{O}(\mathbf{E_g})$.

(T_2) Dados $S : 0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$, $S' = 0 \longrightarrow I' \longrightarrow A' \longrightarrow B' \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$ e

$$\eta : \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \gamma\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array} \in \mathrm{Mor}(S, S')$$

T associa η a $T(\eta) = K_1(\gamma) \in \mathrm{Mor}(M(S), M(S'))$

Da funtorialidade de K_0 e K_1, segue que V e T definidos acima são funtores da categoria $\mathbf{D_s}$ na categoria $\mathbf{E_g}$

Para cada $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, seja

$$(\delta_0)_S : K_0(B) = V(S) \longrightarrow T(S) = K_1(I)$$

a aplicação exponencial associada à sequência exata curta S. Nessas condições, o diagrama 2.6 da proposição 2.1.22 pode ser visto como um elemento do conjunto $\mathrm{Mor}(S, S')$, considerando as sequências $S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$ e $S' : 0 \longrightarrow I' \xrightarrow{\varphi} A' \xrightarrow{\psi} B' \longrightarrow 0$.

Considere $\delta_0 = (\,(\delta_0)_S : V(S) \longrightarrow T(S)\,)_{S \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})}$ a família formada pelas aplicações exponenciais. Com essa identificação, a proposição 2.1.22 pode ser reformulada da seguinte maneira:

Proposição 2.1.23. *Dada uma sequência exata curta de C^*-álgebras,*

$$S : 0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

a aplicação exponencial

$$(\delta_0)_S : K_0(B) = V(S) \longrightarrow T(S) = K_1(I)$$

é uma aplicação natural *entre os funtores V e T.*

Capítulo 3

O cone de uma aplicação e suas propriedades

Este capítulo tem como finalidade definir e estudar algumas propriedades do *cone* de uma aplicação de C^*-álgebras e do funtor associado a ele para, em seguida, demonstrar o Lema 9 do artigo [MSS06].

3.1 Definição

Definição 3.1.1. Se $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, o *cone da aplicação* f, denotado por Cf, é definido por:

$$Cf := \{(b, \phi) \in B \oplus CA : f(b) = \phi(0)\}$$

Dado um C^*-homomorfismo $f : B \longrightarrow A$ entre duas C^*-álgebras A e B, defina a inclusão $\hat{i} : SA \longrightarrow Cf$, $\hat{i}(\phi) = (0, \phi)$[1] e a projeção $q : Cf \longrightarrow B$, $q(b, \phi) = b$. Então, a cada $f : B \longrightarrow A$ é possível associar a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\hat{i}} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

Note que $\mathrm{Ker}(\hat{i}) = 0$, $\mathrm{Im}(\hat{i}) = 0 \oplus SA$, $\mathrm{Im}(q) = B$ e

$$\mathrm{Ker}(q) = \{(0, \phi) \in Cf\} = \{(0, \phi) \mid \phi \in CA \text{ e } \phi(0) = f(0) = 0\} = \{(0, \phi) \mid \phi \in SA\} = 0 \oplus SA.$$

A sequência (3.1) é de fato exata, pois

- $\mathrm{Im}(0_{0,SA}) = 0 = \mathrm{Ker}(\hat{i})$
- $\mathrm{Im}(\hat{i}) = 0 \oplus SA = \mathrm{Ker}(q)$
- $\mathrm{Im}(q) = B = \mathrm{Ker}(0_{B,0})$

A seguir serão dados alguns exemplos. Considere, em todos os casos, que A e B são C^*-álgebras.

Exemplo 3.1.2. Para a aplicação nula, $0 : B \longrightarrow A$,

$$C0 = \{(b, \phi) \in B \oplus CA : 0(b) = \phi(0)\} = \{(b, \phi) \in B \oplus CA : \phi(0) = 0\}$$

Note que, se $\phi \in SA$, $(b, \phi) \in C0$, para qualquer $b \in B$. Então,

$$C0 = B \oplus SA$$

[1] Se $\phi \in SA$ então $\phi(0) = 0 = f(0)$.

Exemplo 3.1.3. Para a aplicação $\mathrm{id} : A \longrightarrow A$,

$$C\mathrm{id} = \{(b, \phi) \in A \oplus CA : \phi(0) = \mathrm{id}(b) = b\}$$

Como $\phi \in CA$ é uma aplicação contínua de $[0, 1]$ em A tal que $\phi(1) = 0$ e $\phi(0) = b$, segue que $b \sim_h 0$. Portanto,

$$C\mathrm{id} = \{(b, \phi) \in B \oplus CA \mid b \sim_h 0 \text{ pela homotopia } \phi\}$$

Exemplo 3.1.4. Considere $\pi : CA \longrightarrow A$ tal que $\pi(g) = g(0)$. Essa é a aplicação que torna exata a sequência $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$. Tem-se:

$$C\pi = \{(g, \phi) \in CA \oplus CA : \pi(g) = \phi(0)\} = \{(g, \phi) \in CA \oplus CA : g(0) = \phi(0)\}$$

3.2 Estudo de um funtor associado a Cf

Definição 3.2.1. Seja $\mathbf{C_h}$ a categoria dos *-homomorfismos em C^*-álgebras, cujos objetos são

$$\mathcal{O}(\mathbf{C_h}) = \{f : A \longrightarrow B \mid A \text{ e } B \text{ são } C^*\text{-álgebras e } f \text{ é *-homomorfismo}\}.$$

Dados $f,\ g \in \mathcal{O}(\mathbf{C_h}),\ f : A \longrightarrow B,\ g : C \longrightarrow D$ em que A, B, C e D são C^*-álgebras, defina o conjunto dos morfimos formados pelos diagramas comutativos:

$$Mor(f, g) = \left\{ \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ \alpha\Big\downarrow & & \Big\downarrow\beta, \\ C & \xrightarrow{\quad g \quad} & D \end{array} \ : \alpha, \beta \ \text{ são *-homomorfismos e } \beta \circ f = g \circ \alpha \right\}$$

$$\text{Seja } \varphi : \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & D \\ f\uparrow & & \uparrow g \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array} \in Mor(f, g) \text{ e } \psi : \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & F \\ g\uparrow & & \uparrow h \\ C & \xrightarrow{\gamma} & E \end{array} \in Mor(g, h).$$

A composição $\psi \circ \varphi$ é dada da seguite forma:

$$\psi \circ \varphi : \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & D \\ f\Big\uparrow & & \Big\uparrow g \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array} \circ \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\delta} & F \\ g\Big\uparrow & & \Big\uparrow h \\ C & \xrightarrow{\gamma} & E \end{array} = \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta\circ\beta} & F \\ f\uparrow & & \Big\uparrow h \\ A & \xrightarrow{\gamma\circ\alpha} & E \end{array} \in Mor(f, h)$$

Essa composição é associativa, pois as composições de *-homomorfismos feitas nas linhas do diagrama são associativas.

Para cada $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C_h}),\ f : A \longrightarrow B$, defina

$$\mathrm{id}_f : \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & B \\ f\Big\uparrow & & \Big\uparrow f \\ A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A \end{array} \in Mor(f, f)$$

É fácil verificar que dado $\varphi \in Mor(f, g)$, $\mathrm{id}_g \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_f$, ou seja, $\mathrm{id}_{\{.\}}$ é a identidade de $\mathbf{C_h}$.

Segue então que $\mathbf{C_h}$ é, de fato, uma categoria.

Definição 3.2.2. Para cada diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{f} & A_1 \\ \beta\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha \\ B_2 & \xrightarrow{g} & A_2 \end{array}$$

com A_1, A_2, B_1 e B_2 C^*-álgebras, f, g, α e β *-homomorfismos, defina

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{f,g} \quad : Cf & \longrightarrow & Cg \\ (b,\varphi) & \longmapsto & (\beta(b), C\alpha(\varphi)) \end{array}$$

Observe que $C\alpha(\varphi) = \alpha \circ \varphi$, ou seja, $\Lambda_{f,g}(b,\varphi) = (\beta(b), \alpha \circ \varphi)$

Da comutatividade do diagrama segue que $g(\beta(b)) = \alpha(f(b))$, para todo $b \in B_1$. Além disso, como $(b,\varphi) \in Cf$, $f(b) = \varphi(0)$. Então, $g(\beta(b)) = \alpha(\varphi(0))$ e portanto, $(\beta(b), \alpha\circ\varphi) \in Cg$.

Considere $\mathbf{C_h}$ e $\mathbf{D_s}$ as categorias definidas em 3.2.1 e 2.1.4 respectivamente, e considere a aplicação $F : \mathbf{C_h} \longrightarrow \mathbf{D_s}$ tal que

a) F associa cada $f : B \longrightarrow A \in \mathcal{O}(\mathbf{C_h})$ à sequência $0 \longrightarrow SA \longrightarrow Cf \longrightarrow B \longrightarrow 0 \in \mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, como definida em (3.1).

b) Dados $f, g \in \mathcal{O}(\mathbf{C_h})$ e um morfismo $\varphi \in \mathrm{Mor}(f,g)$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{f} & A_1 \\ \beta\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha \\ B_2 & \xrightarrow{g} & A_2 \end{array}$$

F associa φ a $F(\varphi) \in Mor(F(f), F(g))$ definido da seguinte forma:

$$F(\varphi) : \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA_1 & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & S\alpha\big\downarrow & & \Lambda_{f,g}\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA_2 & \longrightarrow & Cg & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

em que a primeira linha é a sequência $F(f)$ e a segunda, a sequência $F(g)$.

É fácil verificar que o diagrama acima é comutativo, observando que $C\alpha|_{SA} = S\alpha$.

Proposição 3.2.3. *F é funtor entre as categorias* $\mathbf{C_h}$ *e* $\mathbf{D_s}$.

Demonstração.

(i) Dado $f : B \longrightarrow A$ em $\mathcal{O}(\mathbf{C_h})$, seja

$$\mathrm{id}_f : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathrm{id}_A} & A \\ f\big\uparrow & & \big\uparrow f \\ B & \xrightarrow{\mathrm{id}_B} & B \end{array} \in Mor(f,f)$$

a identidade associada a f.

Então,

$$F(\mathrm{id}_f) : \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & S(\mathrm{id}_A)\big\downarrow & & \Lambda_{f,f}\big\downarrow & & \mathrm{id}_B\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.2}$$

Como S é funtor, $S(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{SA}$.

Observe agora que o diagrama comutativo id_f define

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_{f,f} & : Cf & \longrightarrow & Cf \\ & (b,\varphi) & \longmapsto & (\mathrm{id}_B(b), \mathrm{id}_A \circ \varphi) \end{array}$$

Como $\mathrm{id}_A(\varphi(t)) = \varphi(t), \forall t \in [0,1]$, segue que $(\mathrm{id}_B(b), \mathrm{id}_A \circ \varphi) = (b,\varphi)$, para todo $(b,\varphi) \in Cf$, ou seja, $\Lambda_{f,f} = \mathrm{id}_{Cf}$.

Assim, o diagrama (3.2) fica da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ F(\mathrm{id}_f): & & & \mathrm{id}_{SA}\big\downarrow & & \mathrm{id}_{Cf}\big\downarrow & & \mathrm{id}_B\big\downarrow & & \\ & 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

o que mostra que $F(\mathrm{id}_f) = \mathrm{id}_{F(f)}$

(ii) Sejam $f : B_1 \longrightarrow A_1$, $g : B_2 \longrightarrow A_2$ e $h : B_3 \longrightarrow A_3$ elementos de $\mathcal{O}(\mathbf{C_h})$ com A_i, B_i C^*-álgebras, $i = 1,2,3$. Sejam

$$\begin{array}{cccc} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \\ \varphi: & f\big\uparrow & & \big\uparrow g & \in Mor(f,g) \\ & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \\ \psi: & g\big\uparrow & & \big\uparrow h & \in Mor(g,h) \\ & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \end{array}$$

Por definição,

$$\begin{array}{cccc} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_2\circ\alpha_1} & A_3 & \\ \psi\circ\varphi: & f\big\uparrow & & \big\uparrow h & \in Mor(f,h) \\ & B_1 & \xrightarrow{\beta_2\circ\beta_1} & B_3 & \end{array} \tag{3.3}$$

Então,

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & SA_1 & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ F(\psi\circ\varphi): & & & S(\alpha_2\circ\alpha_1)\big\downarrow & & \Lambda_{f,h}\big\downarrow & & \beta_2\circ\beta_1\big\downarrow & & \\ & 0 & \longrightarrow & SA_3 & \longrightarrow & Ch & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.4}$$

em que $\Lambda_{f,h}$ é definido a partir do diagrama (3.3). Então,

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_{f,h} & : Cf & \longrightarrow & Ch \\ & (b,\varphi) & \longmapsto & ((\beta_2\circ\beta_1)(b), (\alpha_2\circ\alpha_1)(\varphi)) \end{array}$$

Segue assim que $\Lambda_{f,h}(b,\varphi) = (\beta_2(\beta_1(b)), (\alpha_2(\alpha_1(\varphi))) = (\Lambda_{g,h} \circ \Lambda_{f,g})(b,\varphi)$, para qualquer $(b,\varphi) \in Cf$. Portanto,

$$\Lambda_{f,h} = \Lambda_{g,h} \circ \Lambda_{f,g} \tag{3.5}$$

Além disso, como S é funtor,

$$S(\alpha_2 \circ \alpha_1) = S\alpha_2 \circ S\alpha_1 \tag{3.6}$$

Aplicando (3.5) e (3.6) em (3.4), obtemos o diagrama:

$$F(\psi\circ\varphi):\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA_1 & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle S\alpha_2\circ S\alpha_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Lambda_{g,h}\circ\Lambda_{f,g}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta_2\circ\beta_1}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA_3 & \longrightarrow & Ch & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.7}$$

Como

$$F(\varphi):\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA_1 & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle S\alpha_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Lambda_{f,g}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta_1}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA_2 & \longrightarrow & Cg & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e

$$F(\psi):\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA_2 & \longrightarrow & Cg & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle S\alpha_2}\big\downarrow & & {\scriptstyle \Lambda_{g,h}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \beta_2}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA_3 & \longrightarrow & Ch & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

segue da definição da composição em $\mathcal{O}(\mathbf{D_s})$, que $F(\psi)\circ F(\varphi)$ é dada pelo diagrama (3.7), ou seja,

$$F(\psi\circ\varphi) = F(\psi)\circ F(\varphi)$$

□

Para a demonstrar o teorema 3.2.6, será utilizado o lema abaixo e seu corolário. Para esses, considere as seguintes notações:

(1) $\mathcal{C}_c(0,1)$ é o conjunto das funções $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ contínuas de suporte compacto.

(2) $\mathcal{C}_c(0,1)\otimes A$ denota aqui o produto tensorial algébrico, isto é, o conjunto das funções da forma $\phi_{00}(t)=\sum_{j=1}^n \rho_j(t)a_j$, tais que $\rho_j\in\mathcal{C}_c(0,1)$ e $a_j\in A$.

Lema 3.2.4. *O conjunto $D=\{\phi:\phi(t)=ta+(1-t)b+\phi_{00}(t); a,b\in A; \phi_{00}\in\mathcal{C}_c(0,1)\otimes A\}$ é denso em $\mathcal{C}([0,1],A)$. Além disso, para todo $\phi\in\mathcal{C}([0,1],A)$ e todo $\epsilon>0$, existe $\phi_0\in D$ da forma*

$$\phi_0(t)=t\phi_0(1)+(1-t)\phi_0(0)+\phi_{00}(t),\ \textit{com}\ \phi_{00}\in C_c((0,1)\otimes A\ \textit{e}\ ||\phi-\phi_0||<\epsilon.$$

Demonstração. Dados $\phi\in\mathcal{C}([0,1],A)$ e $\epsilon>0$, definimos ψ por

$$\phi(t)=t\phi(1)+(1-t)\phi(0)+\psi(t).$$

Então $\psi(0)=\phi(0)-\phi(0)=0$, $\psi(1)=\phi(1)-\phi(1)=0$ e $\psi\in\mathcal{C}_0((0,1),A)$.
Tome $\psi_0\in\mathcal{C}[0,1]\otimes A$ tal que $||\psi-\psi_0||<\frac{\epsilon}{4}$. Escolha $\delta>0$ de modo que

$$0<t<\delta \text{ ou } t>1-\delta \Rightarrow |\psi_0(t)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Tome $\chi\in C_c(0,1)$ tal que $0\le\chi(t)\le 1$ para todo t e $\chi(t)=1$ para $t\in[\delta,1-\delta]$. Então $||\psi_0-\chi\psi_0||<\frac{\epsilon}{2}$, pois,

$$\begin{array}{ll} |\psi_0(t)-\chi(t)\psi_0(t)|=0, & \text{se } t\in[\delta,1-\delta] \text{ e} \\ |\psi_0(t)-\chi(t)\psi_0(t)|=|\psi_0(t)|\cdot|1-\chi(t)|\le|\psi_0(t)|<\frac{\epsilon}{2}, & \text{se } t<\delta \text{ ou } t>1-\delta \end{array}$$

Logo,

$$||\psi-\chi\psi_0||\le||\psi-\psi_0||+||\psi_0-\chi\psi_0||<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.$$

Finalmente, defina
$$\phi_0(t) = t\phi(1) + (1-t)\phi(0) + \chi(t)\psi_0(t).$$
Então, $\phi_0(1) = \phi(1), \phi_0(0) = \phi(0)$ e $\phi_0 \in C_c(0,1) \otimes A$.
Para concluir, note que $||\phi - \phi_0|| = ||\psi - \chi\psi_0||$. Logo, $||\phi - \phi_0|| < \epsilon$.

□

Corolário 3.2.5. *Dado $f : A' \to A$, o conjunto*
$$(Cf)_0 = \{(a', \phi) : a' \in A', \phi \in CA \cap D; \phi(0) = f(a')\}$$
é denso em $Cf = \{(a', \phi) \in A' \oplus CA; \phi(0) = f(a')\}$.

Demonstração. Dado $(a', \phi) \in Cf$ e dado $\epsilon > 0$, tome ϕ_0 como no lema. Então $\phi_0(0) = \phi(0) = f(a')$. Logo, $(a', \phi_0) \in (Cf)_0$ e $||(a', \phi) - (a', \phi_0)|| = ||\phi - \phi_0|| < \epsilon$. □

Teorema 3.2.6. *Assuma que o seguinte diagrama é comutativo e é formado por sequências exatas curtas de C^*-álgebras:*
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & f\uparrow & & g\uparrow & & h\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
*Além disso, assuma que α, α', β, β', f, g e h são *-homomorfismos. Então teremos uma grade induzida pelo funtor F que também é comutativa e formada por sequências exatas curtas de C^*-álgebras:*
$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \pi_{A'}\uparrow & & \pi_{B'}\uparrow & & \pi_{C'}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Cf & \xrightarrow{\Lambda_{f,g}} & Cg & \xrightarrow{\Lambda_{g,h}} & Ch & \longrightarrow & 0 \\ & & \hat{i}_{SA}\uparrow & & \hat{i}_{SB}\uparrow & & \hat{i}_{SC}\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{S\alpha} & SB & \xrightarrow{S\beta} & SC & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{3.8}$$

Demonstração. Observe que

- a sequência que está na primeira linha é exata por hipótese;
- as sequências que estão nas colunas desse diagrama são $F(f)$, $F(g)$ e $F(h)$ e, portanto são sequências exatas (veja a definição 3.1.1);
- a sequência que está na terceira linha é exata, pois $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ é, por hipótese, exata e o funtor S é exato.

Então, para provar o teorema, é necessário mostrar que a sequência que está na segunda linha é exata e que o diagrama comuta.

(I) Vamos provar primeiramente que a sequência $0 \longrightarrow Cf \xrightarrow{\Lambda_{f,g}} Cg \xrightarrow{\Lambda_{g,h}} Ch \longrightarrow 0$ é exata.

(i) $\mathrm{Ker}(\Lambda_{f,g}) = 0$

Seja $(a', \varphi) \in Cf$ tal que $\Lambda_{f,g}(a', \varphi) = (\alpha'(a'), C\alpha(\varphi)) = 0$.

Como $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$ é exata, $\mathrm{Ker}(\alpha') = 0$. Então, $\alpha'(a') = 0$ implica $a' = 0$.

Como $C\alpha(\varphi) = 0$, segue que, para todo $t \in [0,1]$, $0 = C\alpha(\varphi)(t) = \alpha(\varphi(t))$. Daí, segue que $\varphi(t) = 0$ para todo t em $[0,1]$, uma vez que, como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ é exata, $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$. Assim, $\varphi = 0$.

Como $(\alpha'(a'), C\alpha(\varphi)) = 0$ implica $(a', \varphi) = (0,0)$, segue que $\mathrm{Ker}(\Lambda_{f,g}) = 0$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\Lambda_{g,h}) = \mathrm{Im}(\Lambda_{f,g})$

Dado$(a', \varphi) \in Cf$, $\Lambda_{g,h}(\Lambda_{f,g}(a', \varphi)) = (\beta'(\alpha'(a')), C\beta(C\alpha(\varphi))) \in Ch$.

Como $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$ é exata, $\beta' \circ \alpha' = 0$. Em particular, $\beta'(\alpha'(a')) = 0$.

Note que, para $t \in [0,1]$,

$$C\beta(C\alpha(\varphi))(t) = \beta(C\alpha(\varphi)(t)) = \beta(\alpha(\varphi(t)))$$

Como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ é exata, $\beta \circ \alpha = 0$. Daí, $\beta(\alpha(\varphi(t)) = 0$ para todo t em $[0,1]$ e, portanto, $C\beta(C\alpha(\varphi)) = 0$.

Logo, $\Lambda_{g,h}(\Lambda_{f,g}(a', \varphi)) = 0$ para todo $(a', \varphi) \in Cf$, o que implica

$$\mathrm{Im}(\Lambda_{f,g}) \subseteq \mathrm{Ker}(\Lambda_{g,h})$$

Seja $(b', \psi) \in Cg$ tal que $\Lambda_{g,h}(b', \psi) = (\beta'(b'), C\beta(\psi)) = 0$.

Note que como $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$ é exata, $\mathrm{Ker}(\beta') = \mathrm{Im}(\alpha')$. Então, $\beta'(b') = 0$ implica $b' \in \mathrm{Ker}(\beta') = \mathrm{Im}(\alpha')$. Logo, existe $a' \in A'$ tal que $\alpha'(a') = b'$.

Além disso, como $C\beta(\psi) = 0$, segue que, para todo $t \in [0,1]$, $0 = C\beta(\psi)(t) = \beta(\psi(t))$. Então, $\psi(t) \in \mathrm{Ker}(\beta), \forall t \in [0,1]$. Como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ é exata, $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$.

Como $\psi(t) \in \mathrm{Im}(\alpha)$ para todo $\TeX \in [0,1]$ e α é injetora, concluímos que para cada $t \in [0,1]$ existe único $a_t \in A$ tal que $\alpha(a_t) = \psi(t)$.

Seja $\varphi_0 : [0,1] \longrightarrow A$ tal que $t \longmapsto a_t$. Note que para cada $t \in [0,1]$, $\alpha(\varphi_0(t)) = \alpha(a_t) = \psi(t)$, e, portanto,

$$\alpha \circ \varphi_0 = \psi \tag{3.9}$$

Como ψ e α são aplicações contínuas, segue que φ_0 é contínua.

Observe agora que $\varphi_0(1) = a_1$ é tal que $\alpha(a_1) = \psi(1) \overset{\psi \in CB}{=} 0$. Como α é *-homomorfismo, $\alpha(a_1) = 0$ implica $a_1 = 0$. Como φ_0 é contínua e $\varphi_0(1) = 0$, segue que $\varphi_0 \in CA$.

Além disso, da equação (3.9), segue que $C\alpha(\varphi_0) = \psi$. Tem-se então $(b', \psi) = (\alpha'(a'), C\alpha(\varphi_0)) = \Lambda_{f,g}(a', \varphi_0)$, com $(a', \varphi_0) \in Cf$. Assim,

$$\mathrm{Ker}(\Lambda_{g,h}) \subseteq \mathrm{Im}(\Lambda_{f,g})$$

Portanto,

$$\mathrm{Ker}(\Lambda_{g,h}) = \mathrm{Im}(\Lambda_{f,g})$$

(iii) $\mathrm{Im}(\Lambda_{g,h}) = Ch$

O corolário 3.2.5 garante que, para provar que $\mathrm{Im}(\Lambda_{g,h}) = Ch$, basta mostrar que $(Ch)_0$ está contido na imagem de $\Lambda_{g,h}$.

Seja $(c', \phi) \in (Ch)_0$. Então $\phi(0) = h(c')$ e $\phi(t) = (1-t)\phi(0) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(t)c_j$, com $\rho_j \in C_c(0,1)$ e $c_j \in C$.

Como $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} B' \xrightarrow{\beta'} C' \longrightarrow 0$ é exata, β' é sobrejetora. Logo, podemos escolher $b' \in B'$ tal que $\beta'(b') = c'$. Como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} B \xrightarrow{\beta'} C \longrightarrow 0$ também é exata, β também é sobrejetora. Então é possível encontra $b_j \in B$ tais que $\beta(b_j) = c_j$ para todo j.

Defina $\psi(t) = (1-t)g(b') + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(t)b_j$. Então $\beta \circ \phi = \phi$, pois $\beta(g(b')) = h(c') = \phi(0)$ e $\beta(b_j) = c_j$. Além disso, $\beta'(b') = c'$ e $\psi(0) = g(b')$. Portanto,

$$(b', \psi) \in Cg \text{ e } \Lambda g, h(b', \psi) = (c', \phi)$$

De (i), (ii) e (iii), segue que $0 \longrightarrow Cf \xrightarrow{\Lambda_{f,g}} Cg \xrightarrow{\Lambda_{g,h}} Ch \longrightarrow 0$ é exata.

(II) Vamos agora provar que o diagrama (3.8) é comutativo.

Note que, tomando

$$\mu = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ f\big\uparrow & & \big\uparrow g \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \end{array} \in Mor(f,g) \quad \text{e} \quad \nu = \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C \\ g\big\uparrow & & \big\uparrow h \\ B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \end{array} \in Mor(g,h)$$

ao aplicar o funtor F, obtêm-se os diagramas:

$$F(\mu) = \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & Cg & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\ & & S\alpha\big\uparrow & & \Lambda_{f,g}\big\uparrow & & \alpha'\big\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e

$$F(\nu) = \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SC & \longrightarrow & Ch & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \\ & & S\beta\big\uparrow & & \Lambda_{g,h}\big\uparrow & & \beta'\big\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & Cg & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A comutatividade desses diagramas segue da definição do funtor F. Como esses diagramas são comutativos, segue que o diagrama (3.8) também é comutativo. $\square$

Capítulo 4

Relações entre o cone de uma aplicação e a K-teoria

Este capítulo tem como objetivo fazer a exposição detalhada das demonstrações de dois teoremas que apresentam caracterizações das aplicações de conexão, aqui chamados de Teorema 4.2.1 e Teorema 4.3.3. Cabe mencionar que a demonstração do teorema 4.3.3 exigiu o uso de diversos resultados intermediários (lemas 4.3.4 a 4.3.7).

4.1 Cone da suspensão e suspensão do cone de uma C^*-álgebra

Notação 4.1.1. Sempre que for conveniente, CCA, SCA, CSA e SSA serão identificadas como subálgebras de $\mathcal{C}([0,1]^2, A)$ de forma a considerar $f(x,y) = (f(x))(y)$, ou seja, cada $f(x,y) : [0,1]^2 \longrightarrow A$ será identificada com

$$\begin{array}{rcccccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1],A) & & & \\ & x & \longmapsto & f(x): & [0,1] & \longrightarrow & A \\ & & & & y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Lema 4.1.2. *Dada A uma C^*-álgebra, os conjuntos SCA e CSA são isomorfos.*

Demonstração. Usando a notação 4.1.1, observe que

(i) $SCA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], CA) : f(0) = 0 = f(1)\}$, logo, $f(x,y) \in SCA$ se, e somente se,

- $f(0,y) = 0, \forall y \in [0,1]$
- $f(1,y) = 0, \forall y \in [0,1]$
- $f(x,1) = 0, \forall x \in [0,1]$

(ii) $CSA = \{f \in \mathcal{C}([0,1], SA) : f(1) = 0\}$, logo, $f(x,y) \in CSA$ se, e somente se,

- $f(1,y) = 0, \forall y \in [0,1]$
- $f(x,0) = 0, \forall x \in [0,1]$
- $f(x,1) = 0, \forall x \in [0,1]$

Defina $\tau : \mathcal{C}([0,1]^2, A) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1]^2, A)$ tal que $\tau(f)(x,y) = f(y,x)$.

Observe que, se $f \in SCA$, $\tau(f) \in CSA$ e se $f \in CSA$, $\tau(f) \in SCA$. Como τ é injetor, segue que τ é um isomorfismo entre SCA e CSA.

$\square$

4.2 Sequência de seis termos induzida pelo cone Cf

Seja $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B e seja

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\hat{i}} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

a sequência exata curta associada a f.

Primeiramente, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{i_1} & Cf & \xrightarrow{q} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \mathrm{id}_{SA}\Big\downarrow & & \pi_{CA}\Big\downarrow & & f\Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{i_2} & CA & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.2}$$

em que

- i_1 e q são as aplicações que tornam a sequência da primeira linha exata (veja a definição 3.1.1);
- i_2 é a inclusão de SA em CA;
- π_{CA} é a projeção de Cf em CA, ou seja, é a projeção na segunda coordenada;
- $\pi : CA \longrightarrow A$ é tal que $\pi(\varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in CA$.

O diagrama (4.2) é comutativo, pois dado $\phi \in SA$,

$$\pi_{CA}(i_1(\phi)) = \pi_{CA}((0, \phi)) = \phi = i_2(\mathrm{id}_{SA}(\phi))$$

e, dado $(b, \varphi) \in Cf$,

$$f(q(b, \varphi)) = f(b) = \varphi(0) = \pi(\varphi) = \pi(\pi_{CA}(b, \varphi)).$$

Considere δ_1^1 e δ_0^1 as aplicações do índice e exponencial, respectivamente, associadas à sequência exata $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i_1} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$ e considere δ_1^2 e δ_0^2 as aplicações do índice e exponencial, respectivamente, associadas à sequência exata $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i_2} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$.

A naturalidade da aplicação do índice, aplicada ao diagrama (4.2), garante que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1^1} & K_0(SA) \\ K_1(f)\Big\downarrow & & \Big\downarrow = \\ K_1(A) & \xrightarrow{\delta_1^2} & K_0(SA) \end{array}$$

é comutativo. Note que a aplicação δ_1^2 é o isomorfismo definido em 2.1.6, ou seja, $\delta_1^2 = \theta_A$. Como o diagrama acima é comutativo, segue que

$$\delta_1^1 = \theta_A \circ K_1(f) \tag{4.3}$$

A naturalidade da aplicação exponencial, aplicada ao diagrama (4.2), garante que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0^1} & K_1(SA) \\ K_0(f)\Big\downarrow & & \Big\downarrow = \\ K_0(A) & \xrightarrow{\delta_0^2} & K_1(SA) \end{array}$$

é comutativo e que, portanto,

$$\delta_0^1 = \delta_0^2 \circ K_0(f) \tag{4.4}$$

Note que, pela definição, a exponencial δ_0^2 é dada pela composta $\delta_2 \circ \beta_A$ em que $\beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(SA)$ e $\delta_2 : K_2(A) \longrightarrow K_1(SA)$, lembrando que $K_2(A) = K_1(SA)$.

Além disso, a aplicação δ_2 associada à sequência $0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \longrightarrow A \longrightarrow 0$ é o *-homomorfismo que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_2(A) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "="'] & K_1(SA) \arrow[d, "\theta_{SA}"] \\ K_1(SA) \arrow[r, "\widehat{\delta}"] & K_0(SSA) \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

comutativo, em que $\widehat{\delta}$ é a aplicação do índice associada à sequência $0 \longrightarrow SSA \longrightarrow SCA \longrightarrow SA \longrightarrow 0$ e $\theta_{SA} : K_1(SA) \longrightarrow K_0(SSA)$ é o isomorfimso definido em 2.1.6, ou seja, é a aplicação do índice associada à sequência $0 \longrightarrow SSA \longrightarrow CSA \longrightarrow SA \longrightarrow 0$.

Como o lema 4.1.2 garante que $CSA \cong SCA$, segue que $\widehat{\delta} \cong \theta_{SA}$. Dessa forma, o diagrama (4.5) torna-se

$$\begin{tikzcd} K_2(A) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "="'] & K_1(SA) \arrow[d, "\theta_{SA}"] \\ K_1(SA) \arrow[r, "\theta_{SA}"] & K_0(SSA) \end{tikzcd}$$

Como esse diagrama é comutativo e θ_{SA} é um isomorfismo, conclui-se que $\delta_2 = \mathrm{id}_{K_1(SA)}$.

Assim, como $\delta_0^2 = \delta_2 \circ \beta_A$, obtem-se $\delta_0^2 = \mathrm{id}_{K_1(SA)} \circ \beta_A = \beta_A$. Fazendo essa substituição em (4.4), conclui-se que

$$\delta_0^1 = \beta_A \circ K_0(f) \tag{4.6}$$

Observe que

$$\begin{tikzcd} K_0(SA) \arrow[r] & K_0(Cf) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[d, "\delta_0^1"] \\ K_1(B) \arrow[u, "\delta_1^1"] & K_1(Cf) \arrow[l] & K_1(SA) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

é a sequência exata cíclica de seis termos induzida pela sequência (4.1). Utilizando os resultados (4.3) e (4.6), o diagrama acima fica da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd} K_0(SA) \arrow[r] & K_0(Cf) \arrow[r] & K_0(B) \arrow[d, "\beta_A \circ K_0(f)"] \\ K_1(B) \arrow[u, "\theta_A \circ K_1(f)"] & K_1(Cf) \arrow[l] & K_1(SA) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

ou seja, as aplicações de conexão, índice e exponencial, são dadas respectivamente por $K_1(f)$ e $K_0(f)$ compostas com os isomorfismos canônicos θ_A e β_A, respectivamente.

Com isso, fica provado o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1. *Seja $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B e seja*

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\hat{i}} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$$

a sequência exata curta associada a f.

Então, na sequência exata cíclica de seis termos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(SA) & \longrightarrow & K_0(Cf) & \longrightarrow & K_0(B) \\ \delta_1 \Big\uparrow & & & & \Big\downarrow \delta_0 \\ K_1(B) & \longleftarrow & K_1(Cf) & \longleftarrow & K_1(SA) \end{array}$$

as aplicações δ_0 e δ_1 são dadas por:

$$\delta_0 = \beta_A \circ K_0(f)$$
$$\delta_1 = \theta_A \circ K_1(f)$$

isto é, as aplicações de conexão são induzidas por $K_0(f)$ composta com o isomorfismo β_A e por $K_1(f)$ composta com o isomorfismo θ_A.

Corolário 4.2.2. *Se $f : B \longrightarrow A$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras A e B, então os seguintes diagramas*

$$\begin{array}{ccc} K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(SA) \\ = \Big\uparrow & & \Big\uparrow \theta_A \\ K_1(B) & \xrightarrow{K_1(f)} & K_1(A) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(SA) \\ = \Big\uparrow & & \Big\uparrow \beta_A \\ K_0(B) & \xrightarrow{K_0(f)} & K_0(A) \end{array}$$

comutam, onde δ_1 e δ_0 denotam, respectivamente, a aplicação do índice e a aplicação exponencial induzidas pela sequência $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\hat{i}} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$, θ_A é o isomorfismo definido em 2.1.6 e β_A é a aplicação de Bott.

4.3 Aplicações entre sequências exatas de K-grupos

Lema 4.3.1. *Se $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo sobrejetor, então a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} j: & \mathrm{Ker}(f) & \longrightarrow & Cf \\ & x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

induz um isomorfismo de K-teoria $K_i(j) : K_i(\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow K_i(Cf)$ para $i = 0, 1$.

Demonstração. Como j é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebra, $K_0(j)$ e $K_1(j)$ são *-homomorfismos entre grupos.

Considere a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{j} Cf \xrightarrow{\pi} CA \longrightarrow 0 \tag{4.7}$$

em que π é a projeção de Cf em CA.

Note que

(i) j é um *-homomorfismo injetor, pois $j(x) = 0_{Cf} = (0,0)$ se, e somente se, $x = 0$;

(ii) $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(\pi)$, uma vez que:

- Dado qualquer x em $\mathrm{Ker}(f)$, $\pi(j(x)) = \pi(x,0) = 0$. Logo, $\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$.
- Se $(b,\varphi) \in Cf$ é tal que $\pi(b,\varphi) = 0$, então $\varphi = 0$. Como $(b,\varphi) \in Cf$, $f(b) = \varphi(0) = 0(0) = 0$. Logo, $b \in \mathrm{Ker}(f)$ e, daí, segue que $(b,\varphi) = (b,0) \in \mathrm{Im}(j)$. Portanto, $\mathrm{Ker}(\pi) \subseteq \mathrm{Im}(j)$

(iii) π é sobrejetor, pois dado $\varphi \in CA$, como f é sobrejetor, existe $b_0 \in B$ tal que $f(b_0) = \varphi(0) \in A$ e, daí, $\pi(b_0, \varphi) = \varphi$ com $(b_0, \varphi) \in Cf$.

De (i), (ii) e (iii) segue que a sequência (4.7) é exata.

Ao construir a sequência exata cíclica associada à sequência (4.7), obtemos a seguinte sequência exata:

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathrm{Ker}(f)) \arrow[r, "K_1(j)"] & K_1(Cf) \arrow[r, "K_1(\pi)"] & K_1(CA) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(CA) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(Cf) \arrow[l, "K_0(\pi)"'] & K_0(\mathrm{Ker}(f)) \arrow[l, "K_0(j)"']
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Como $K_0(CA) = 0$, $\mathrm{Im}(\delta_0) = 0$. Então, como a sequência (4.8) é exata em $K_1(\mathrm{Ker}(f))$, $\mathrm{Ker}(K_1(j)) = \mathrm{Im}(\delta_0) = 0$, ou seja, $K_1(j)$ é injetor.

Como $K_1(CA) = 0$, $\mathrm{Ker}(K_1(\pi)) = K_1(Cf)$ e, pela exatidão da sequência (4.8), $\mathrm{Im}(K_1(j)) = \mathrm{Ker}(K_1(\pi)) = K_1(Cf)$, ou seja, $K_1(j)$ é sobrejetor. Logo, $K_1(j)$ é um isomorfismo.

Analogamente segue que $K_0(j)$ é um isomorfismo. □

Observação 4.3.2. A sequência $0 \longrightarrow SA \xrightarrow{\hat{i}} Cf \xrightarrow{q} B \longrightarrow 0$ induz a seguinte sequência cíclica:

$$\begin{tikzcd}
K_1(SA) \arrow[r, "K_1(\hat{i})"] & K_1(Cf) \arrow[r, "K_1(q)"] & K_1(B) \arrow[d, "\delta_1"] \\
K_0(B) \arrow[u, "\delta_0"] & K_0(Cf) \arrow[l, "K_0(q)"'] & K_0(SA) \arrow[l, "K_0(\hat{i})"']
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

e a sequência $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \xrightarrow{i_2} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ induz a seguinte sequência cíclica:

$$\begin{tikzcd}
K_1(\mathrm{Ker}f) \arrow[r, "K_1(i_2)"] & K_1(B) \arrow[r, "K_1(f)"] & K_1(A) \arrow[d, "\bar{\delta}_1"] \\
K_0(A) \arrow[u, "\bar{\delta}_0"] & K_0(B) \arrow[l, "K_0(f)"'] & K_0(\mathrm{Ker}f) \arrow[l, "K_0(i_2)"']
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Teorema 4.3.3. *Se $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo sobrejetor entre duas C^*-álgebras, então os isomorfismos $K_0(j) : K_0(\mathrm{Ker}f) \longrightarrow K_0(Cf)$ e $K_1(j) : K_1(\mathrm{Ker}f) \longrightarrow K_1(Cf)$, definidos no lema anterior, tornam comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & K_1(B) \arrow[r, "\delta_1"] & K_0(SA) \arrow[r, "K_0(\hat{i})"] & K_0(Cf) \arrow[r, "K_0(q)"] & K_0(B) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & K_1(B) \arrow[u, "="] \arrow[r, "K_1(f)"] & K_1(A) \arrow[u, "\theta_A"] \arrow[r, "\bar{\delta}_1"] & K_0(\mathrm{Ker}f) \arrow[u, "K_0(j)"] \arrow[r, "K_0(i_2)"] & K_0(B) \arrow[u, "="'] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & K_0(B) \arrow[r, "\delta_0"] & K_1(SA) \arrow[r, "K_1(\hat{i})"] & K_1(Cf) \arrow[r, "K_1(q)"] & K_1(B) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & K_0(B) \arrow[u, "="] \arrow[r, "K_0(f)"] & K_0(A) \arrow[u, "\beta_A"] \arrow[r, "\bar{\delta}_0"] & K_1(\mathrm{Ker}f) \arrow[u, "K_1(j)"] \arrow[r, "K_1(i_2)"] & K_1(B) \arrow[u, "="'] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Note que os diagramas acima podem ser representados simultaneamente por

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & K_{i+1}(B) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} & K_i(SA) & \xrightarrow{K_i(\hat{\imath})} & K_i(Cf) & \xrightarrow{K_i(q)} & K_i(B) & \longrightarrow \\
& = \Big\uparrow & & \rho_{i+1}\Big\uparrow & & K_i(j)\Big\uparrow & & \Big\uparrow = & \\
\longrightarrow & K_{i+1}(B) & \xrightarrow{K_{i+1}(f)} & K_{i+1}(A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_{i+1}} & K_i(\mathrm{Ker} f) & \xrightarrow{K_i(i_2)} & K_i(B) & \longrightarrow
\end{array} \tag{4.11}$$

considerando como ρ_{i+1} o isomorfismo conviente em cada caso.

Em cada um deles, a linha de cima é parte da sequência cíclica (4.9) e a linha debaixo é parte da sequência cíclica (4.10).

Sendo assim, os diagramas podem ser vistos como partes de um diagrama cíclico, fato esse indicado pelas setas nas extremidades das linhas.

Para demonstrar o teorema 4.3.3, serão utilizados os lemas abaixo.

Lema 4.3.4. *A aplicação*

$$K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{\imath}) \circ \theta_A : K_1(A) \longrightarrow K_0(\mathrm{Ker} f)$$

é uma transformação natural entre os funtores M e N definidos na subseção 2.1.1.

Demonstração. Seja

$$\eta: \quad \begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\
& & \gamma\Big\downarrow & & \beta\Big\downarrow & & \alpha\Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{f'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

um diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas curtas de C^*-álgebras e α, β e γ são $*$-homomorfismos.

Como $0 \longrightarrow I \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker} f$ e g é injetora. Logo, $g : I \longrightarrow \mathrm{Ker} f$ é um isomorfismo e, daí, $I \cong \mathrm{Ker} f$. Analogamente, $I' \cong \mathrm{Ker}(f')$.

Assim, é possivel, a menos de isomorfismo, considerar

$$\eta: \quad \begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} f & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\
& & \hat{\gamma}\Big\downarrow & & \beta\Big\downarrow & & \alpha\Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} f' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{f'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

em que i e i' são inclusões e $\hat{\gamma} = g' \circ \gamma \circ g^{-1}$.

Como o diagrama acima é comutativo, para todo $x \in \mathrm{Ker} f$, $i' \circ \hat{\gamma}(x) = \beta \circ i(x)$, o que implica $\hat{\gamma}(x) = \beta(x)$. Logo, $\hat{\gamma} = \beta|_{\mathrm{Ker} f}$.

Então, para mostrar que as aplicações do enunciado são naturais, basta mostrar que se o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} f & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\
& & \beta|_{\mathrm{Ker} f}\Big\downarrow & & \beta\Big\downarrow & & \alpha\Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} f' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{f'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

é comutativo e formado por sequências exatas curtas de C^*-álgebras, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
K_1(A) & \xrightarrow{K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{\imath}) \circ \theta_A} & K_0(\mathrm{Ker} f) \\
K_1(\alpha)\Big\downarrow & & \Big\downarrow K_0(\beta|_{\mathrm{Ker} f}) \\
K_1(A') & \xrightarrow{K_0(j')^{-1} \circ K_0(\hat{\imath}') \circ \theta'_A} & K_0(\mathrm{Ker} f')
\end{array} \tag{4.12}$$

é comutativo.

Para isso, considere a seguinte expansão do diagrama acima:

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(A) & \xrightarrow{\theta_A} & K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(\hat{i})} & K_0(Cf) & \xrightarrow{K_0(j)^{-1}} & K_0(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle K_1(\alpha)}\downarrow & & {\scriptstyle K_0(S\alpha)}\downarrow & & {\scriptstyle K_0(\Lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f})} \\ K_1(A') & \xrightarrow{\theta_{A'}} & K_0(SA') & \xrightarrow{K_0(\hat{i}')} & K_0(Cf')' & \xrightarrow{K_0(j')^{-1}} & K_0(\mathrm{Ker}f') \end{array} \tag{4.13}$$

em que $\Lambda : Cf \longrightarrow Cf'$ é tal que, dado $(b, \varphi) \in Cf$, $\Lambda((b, \varphi)) = (\beta(b), C\alpha(\varphi))$.

Observe que, considerando i e π definidas em 2.1.6, o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{i} & \widehat{C}A & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle S\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle C\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & SA' & \xrightarrow{i'} & \widehat{C}A' & \xrightarrow{\pi'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo, pois

(i) Dado $\varphi \in SA$, $i' \circ S\alpha(\varphi) = S\alpha(\varphi)$ e $C\alpha \circ i(\varphi) = C\alpha(\varphi)$. Como $C\alpha|_{SA} = S\alpha$ e $\varphi \in SA$, $S\alpha(\varphi) = C\alpha(\varphi)$, o que mostra que $i' \circ S\alpha = C\alpha \circ i$

(ii) Dado $\psi \in \widehat{C}A$, $\pi' \circ C\alpha(\psi) = \pi'(C\alpha(\psi)) = \alpha(\psi(1))$ e $\alpha \circ \pi(\psi) = \alpha(\psi(1))$, o que mostra que $\pi' \circ C\alpha = \alpha \circ \pi$

Então, como θ_A e $\theta_{A'}$ são as aplicações do índice associadas à primeira e à segunda sequência exata do diagrama, respectivamente, a naturalidade da aplicação do índice garante que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\theta_A} & K_0(SA) \\ {\scriptstyle K_1(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_0(S\alpha)} \\ K_1(A') & \xrightarrow{\theta_{A'}} & K_0(SA') \end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da esquerda do diagrama (4.13).

Considere agora o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} SA & \xrightarrow{\hat{i}} & Cf \\ {\scriptstyle S\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda} \\ SA' & \xrightarrow{\hat{i}'} & Cf' \end{array}$$

Dado $\varphi \in SA$, $\hat{i}' \circ S\alpha(\varphi) = \hat{i}'(S\alpha(\varphi)) = (0, S\alpha(\varphi))$ e $\Lambda \circ \hat{i}(\varphi) = \Lambda((0, \varphi)) = (\beta(0), C\alpha(\varphi)) = (0, C\alpha(\varphi))$. Como $C\alpha|_{SA} = S\alpha$ e $\varphi \in SA$, temos $S\alpha(\varphi) = C\alpha(\varphi)$, o que mostra que

$$\hat{i}' \circ S\alpha = \Lambda \circ \hat{i}$$

Daí, usando que K_0 é funtor, segue que

$$K_0(\hat{i}' \circ S\alpha) = K_0(\Lambda \circ \hat{i}) \Rightarrow K_0(\hat{i}') \circ K_0(S\alpha) = K_0(\Lambda) \circ K_0(\hat{i})$$

Logo, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(\hat{i})} & K_0(Cf) \\ {\scriptstyle K_0(S\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\Lambda)} \\ K_0(SA') & \xrightarrow{K_0(\hat{i}')} & K_0(Cf') \end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da central do diagrama (4.13).

Para finalizar, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(Cf) & \xleftarrow{K_0(j)} & K_0(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle K_0(\Lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f})} \\ K_0(Cf') & \xleftarrow{K_0(j')} & K_0(\mathrm{Ker}(f')) \end{array}$$

Seja $[x]_0$ um elemento de $K_0(\mathrm{Ker}f)$, com $x \in \mathcal{P}_\infty(\widetilde{\mathrm{Ker}f})$ tal que $x = x_0 + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}f}}$, sendo $x_0 \in \mathrm{Ker}f$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Então,

$$\begin{aligned} K_0(\Lambda) \circ K_0(j)([x]_0) &= K_0(\Lambda)([\widetilde{j}(x_0 + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}f}})]_0) = K_0(\Lambda)([j(x_0) + \alpha 1_{\widetilde{Cf}}]_0) = \\ &= K_0(\Lambda)([(x_0, 0) + \alpha 1_{\widetilde{Cf}}]_0) = [\widetilde{\Lambda}((x_0, 0) + \alpha 1_{\widetilde{Cf}})]_0 = \\ &= [\Lambda((x_0, 0)) + \alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 = [(\beta(x_0), 0) + \alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K_0(j') \circ K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f})([x]_0) &= K_0(j')([\widetilde{\beta|_{\mathrm{Ker}f}}(x_0 + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}f}})]_0) = \\ &= K_0(j')([\beta|_{\mathrm{Ker}f}(x_0) + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}}]_0) = \\ &= K_0(j')([\beta(x_0) + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}}]_0) = \\ &= [\widetilde{j'}(\beta(x_0) + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}})]_0 = [j'(\beta(x_0)) + \alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 = \\ &= [(\beta(x_0), 0)) + \alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 \end{aligned}$$

Logo,

$$K_0(\Lambda) \circ K_0(j) = K_0(j') \circ K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f})$$

Compondo com as inversas dos isomorfismos $K_0(j)$ e $K_0(j')$ (Lema 4.3.1), obtêm-se

$$K_0(j')^{-1} \circ K_0(\Lambda) = K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f}) \circ K_0(j)^{-1}$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(Cf) & \xrightarrow{K_0(j)^{-1}} & K_0(\mathrm{Ker}f) \\ {\scriptstyle K_0(\Lambda)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\beta|_{\mathrm{Ker}f})} \\ K_0(Cf') & \xrightarrow{K_0(j')^{-1}} & K_0(\mathrm{Ker}(f')) \end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da direita do diagrama (4.13).

Assim, conclui-se que o diagrama (4.12) é comutativo, o que prova que $K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{i}) \circ \theta_A$ é uma transformação natural. □

Lema 4.3.5. *A aplicação*

$$K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_A : K_0(A) \longrightarrow K_1(\mathrm{Ker}f)$$

é uma transformação natural entre os funtores V e T definidos na subseção 2.1.5

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}f & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{f} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta|_{\mathrm{Ker}f}\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \alpha\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}f' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{f'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4.14}$$

em que as linhas são sequências exatas curtas de C^*-álgebras.

A transformação $K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_A$ é natural, se o diagrama (4.14) induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{K_1(j)^{-1}\circ K_1(\hat{i})\circ\beta_A} & K_1(\mathrm{Ker}f) \\ K_0(\alpha)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(\beta|_{\mathrm{Ker}f}) \\ K_0(A') & \xrightarrow{K_1(j')^{-1}\circ K_1(\hat{i}')\circ\beta'_A} & K_1(\mathrm{Ker}f') \end{array} \tag{4.15}$$

Para isso mostrar a comutatividade do diagrama acima, considere a seguinte expansão:

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(A) & \xrightarrow{\beta_A} & K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(\hat{i})} & K_1(Cf) & \xrightarrow{K_1(j)^{-1}} & K_1(\mathrm{Ker}f) \\ K_0(\alpha)\big\downarrow & & K_0(S\alpha)\big\downarrow & & K_1(\Lambda)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(\beta|_{\mathrm{Ker}f}) \\ K_0(A') & \xrightarrow{\beta_{A'}} & K_1(SA') & \xrightarrow{K_1(\hat{i}')} & K_1(Cf') & \xrightarrow{K_1(j')^{-1}} & K_1(\mathrm{Ker}f') \end{array} \tag{4.16}$$

em que $\Lambda : Cf \longrightarrow Cf'$ é tal que, dado $(b, \varphi) \in Cf$, $\Lambda((b, \varphi)) = (\beta(b), C\alpha(\varphi))$.

Como $\alpha : A \longrightarrow A'$ é um *-homomorfismo, a naturalidade da aplicação de Bott (Proposição 2.1.15) garante que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\beta_A} & K_1(SA) \\ K_0(\alpha)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(S\alpha) \\ K_0(A') & \xrightarrow{\beta_{A'}} & K_1(SA') \end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da esquerda do diagrama (4.16).

Analogamente ao que foi feito na demonstração anterior, como K_1 também é funtor, segue que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(\hat{i})} & K_1(Cf) \\ K_1(S\alpha)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(\Lambda) \\ K_1(SA') & \xrightarrow{K_1(\hat{i}')} & K_1(Cf') \end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da central do diagrama (4.16).

Para finalizar, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_1(Cf) & \xleftarrow{K_1(j)} & K_1(\mathrm{Ker}f) \\ K_1(\Lambda)\big\downarrow & & \big\downarrow K_1(\beta|_{\mathrm{Ker}f}) \\ K_1(Cf') & \xleftarrow{K_1(j')} & K_1(\mathrm{Ker}(f')) \end{array}$$

Seja $[y]_0$ um elemento de $K_1(\mathrm{Ker}f)$, com $y \in \mathcal{U}_\infty(\widetilde{\mathrm{Ker}f})$ tal que $y = y_0 + \alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}f}}$, sendo $y_0 \in \mathrm{Ker}f$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Então,

$$\begin{aligned}
K_1(\Lambda)\circ K_1(j)([y]_0) &= K_1(\Lambda)([\widetilde{j}(y_0+\alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker} f}})]_0) = K_1(\Lambda)([j(y_0)+\alpha 1_{\widetilde{Cf}}]_0) = \\
&= K_1(\Lambda)([(y_0,0)+\alpha 1_{\widetilde{Cf}}]_0) = [\widetilde{\Lambda}((y_0,0)+\alpha 1_{\widetilde{Cf}})]_0 = \\
&= [\Lambda((y_0,0))+\alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 = [(\beta(y_0),0)+\alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
K_1(j')\circ K_1(\beta|_{\mathrm{Ker} f})([y]_0) &= K_1(j')([\widetilde{\beta|_{\mathrm{Ker} f}}(y_0+\alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker} f}})]_0) = \\
&= K_1(j')([\beta|_{\mathrm{Ker} f}(y_0)+\alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}}]_0) = \\
&= K_1(j')([\beta(y_0)+\alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}}]_0) = \\
&= [\widetilde{j'}(\beta(y_0)+\alpha 1_{\widetilde{\mathrm{Ker}(f')}})]_0 = [j'(\beta(y_0))+\alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0 = \\
&= [(\beta(y_0),0)+\alpha 1_{\widetilde{Cf'}}]_0
\end{aligned}$$

Logo,

$$K_1(\Lambda)\circ K_1(j) = K_1(j')\circ K_1(\beta|_{\mathrm{Ker} f})$$

Compondo com as inversas dos isomorfismos $K_1(j)$ e $K_1(j')$ (Lema 4.3.1), obtêm-se

$$K_1(j')^{-1}\circ K_1(\Lambda) = K_1(\beta|_{\mathrm{Ker} f})\circ K_1(j)^{-1}$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
K_1(Cf) & \xrightarrow{K_1(j)^{-1}} & K_1(\mathrm{Ker} f) \\
{\scriptstyle K_1(\Lambda)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle K_1(\beta|_{\mathrm{Ker} f})} \\
K_1(Cf') & \xrightarrow{K_1(j')^{-1}} & K_1(\mathrm{Ker}(f'))
\end{array}$$

comuta. Isso mostra a comutatividade da parte da direita do diagrama (4.16).

Assim, conclui-se que o diagrama (4.15) é comutativo, o que prova que $K_1(j)^{-1}\circ K_1(\hat{i})\circ\beta_A$ é uma transformação natural. □

Para o próximo lema, considere a aplicação π que torna exata a sequência

$$0 \longrightarrow S\mathbb{C} \xrightarrow{i} C\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

isto é, $\pi : C\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é tal que $\pi(f) = f(0)$.

Serão feitas as seguintes identificações :

(i) $\widetilde{C\mathbb{C}} \cong \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$

- para cada $f\in C\mathbb{C}$ e $\alpha\in\mathbb{C}$, $f+\alpha 1_{\widetilde{C\mathbb{C}}}\in\widetilde{C\mathbb{C}}$ será identificado com $f+\alpha\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$;
- $g\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ será identificado com $g-g(1)+g(1)\cdot 1_{\widetilde{C\mathbb{C}}}\in\widetilde{C\mathbb{C}}$

(ii) $\widetilde{C\pi}\cong\{\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C} \mid \gamma(0)=\gamma(1)\}$

Como $C\pi = \{(f,g)\in C\mathbb{C}\oplus C\mathbb{C}, \pi(f)=f(0)=g(0) \text{ e } f(1)=g(1)=0\}$, $\widetilde{C\pi}$ pode ser identificado com

$$\widetilde{C\pi} = \{(m,n)+\alpha 1_{\widetilde{C\pi}}\} = \{(f,g)\in C\mathbb{C}\oplus C\mathbb{C}, f(0)=g(0) \text{ e } f(1)=g(1)\}$$

Considere agora que

– $(f,g) \in \widetilde{C\pi}$ será identificado com $\gamma_{(f,g)} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\gamma_{(f,g)}(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

– Se $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ é tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, então ela será identificada com

$$\left(\gamma\left(\frac{t}{2}\right) - \gamma\left(\frac{1}{2}\right), \gamma\left(1-\frac{t}{2}\right) - \gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \gamma\left(\frac{1}{2}\right) 1_{\widetilde{C\pi}} \in \widetilde{C\pi}$$

Lema 4.3.6. *Se $(f,g) \in \mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$, então $(f,g) \sim_h (g,f)$ em $\mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$.*

Demonstração. Primeiramente, identifique (f,g) com:

$$\gamma_1 = \gamma_{(f,g)}(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

e (g,f) por:

$$\gamma_2 = \gamma_{(g,f)}(t) = \begin{cases} g(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Seja $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$, $r \longmapsto \varphi_r$ tal que $\varphi_r(t) = \gamma_1((1-t)r + t(1-r))$, $t \in [0,1]$. Note que φ é uma aplicação contínua e, para cada $r, t \in [0,1]$, $\varphi_r(t)\varphi_r^*(t) = 1_{\widetilde{C\pi}}$, uma vez que $\gamma_1 \in \mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$.

Como $\varphi_0(t) = \gamma_1((1-t)0 + t(1-0)) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [0,1]$, segue que $\varphi_0 = \gamma_1$ e como

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \gamma_1(1-t) \begin{cases} g(2-2(1-t)) = g(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2(1-t)) = f(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \gamma_2(t), \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

segue que $\varphi_1 = \gamma_2$, o que mostra que φ é uma homotopia entre (f,g) e (g,f) em $\mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$. $\square$

Lema 4.3.7. *Se $f : B \longrightarrow A$ é um *-homomorfismo entre duas C^*-álgebras, então $C(Sf) = S(Cf)$.*

Demonstração. Note que $C(Sf) = \{(b,\phi) \in SB \oplus C(SA) : Sf(b) = \phi_0\}$

Se $\phi \in C(SA)$, então

$$\begin{array}{rcl} \phi : [0,1] & \longrightarrow & SA \\ t & \longmapsto & \phi_t : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & A \\ r & \longmapsto & \phi_t(r) \end{array} \end{array}$$

é tal que $\phi_1(r) = 0, \forall r \in [0,1]$ e $\phi_t(0) = \phi_t(1) = 0, \forall t \in [0,1]$.

Assim, dado $b \in SB$, $Sf(b) = \phi_0$ se, e somente se, para todo $r \in [0,1]$, $Sf(b)(r) = \phi_0(r)$, ou seja,

$$(b,\phi) \in C(Sf) \Leftrightarrow f(b(r)) = \phi_0(r), \forall r \in [0,1] \tag{4.17}$$

Observe agora que $S(Cf) = \{\varphi : [0,1] \longrightarrow Cf, \varphi_0 = \varphi_1 = 0\}$.

Se $\varphi \in S(Cf)$, então existem $\alpha : [0,1] \longrightarrow B$ e $\beta : [0,1] \longrightarrow CA$ tais que $\varphi = (\alpha,\beta) \in S(Cf)$ e com as seguintes restrições:

(i) $\beta_t \in CA, \forall t \in [0,1] \Rightarrow \beta_t(1) = 0, \forall t \in [0,1]$

(ii) $\varphi \in S(Cf) \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1 = 0$, ou seja,

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha \in SB$$

e

$$\beta_0 = \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta \in S(CA)$$

(iii) Para todo $t \in [0,1]$, $(\alpha_t, \beta_t) \in Cf \Rightarrow f(\alpha_t) = \beta_t(0)$, $\forall t \in [0,1]$

Então, $\varphi = (\alpha, \beta) \in S(Cf) \Leftrightarrow f(\alpha_t) = \beta_t(0)$, $\forall t \in [0,1]$.

Usando a identificação entre $S(CA)$ e $C(SA)$ como subálgebras de $\mathcal{C}([0,1]^2, A)$, podemos reescrever a implicação acima da seguinte forma:

$$\varphi = (\alpha, \beta) \in S(Cf) \Leftrightarrow f(\alpha(t)) = \beta_0(t),\ \forall t \in [0,1]$$

Então, usando (4.17), concluímos que $(\alpha, \beta) \in C(Sf) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in S(Cf)$ e, portanto, $C(Sf) = S(Cf)$.

$\square$

Reenunciaremos o Teorema 4.3.3 para, em seguida, fazendo uso dos lemas acima, demonstrá-lo.

Teorema 4.3.3 *Se $f : B \longrightarrow A$ é um C^*-homomorfismo sobrejetor entre duas C^*-álgebras, então os isomorfismos $K_0(j) : K_0(\mathrm{Ker} f) \longrightarrow K_0(Cf)$ e $K_1(j) : K_1(\mathrm{Ker} f) \longrightarrow K_1(Cf)$, definidos no lema anterior, tornam comutativos os seguintes diagramas:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(\hat{i})} & K_0(Cf) & \xrightarrow{K_0(q)} & K_0(B) & \longrightarrow \\
 & = \uparrow & & \theta_A \uparrow & & K_0(j) \uparrow & & \uparrow = & \\
\longrightarrow & K_1(B) & \xrightarrow{K_1(f)} & K_1(A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & K_0(\mathrm{Ker} f) & \xrightarrow{K_0(i_2)} & K_0(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(\hat{i})} & K_1(Cf) & \xrightarrow{K_1(q)} & K_1(B) & \longrightarrow \\
 & = \uparrow & & \beta_A \uparrow & & K_1(j) \uparrow & & \uparrow = & \\
\longrightarrow & K_0(B) & \xrightarrow{K_0(f)} & K_0(A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & K_1(\mathrm{Ker} f) & \xrightarrow{K_1(i_2)} & K_1(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

Demonstração. Primeiramente, note que os quadrados da esquerda dos diagramas

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & K_1(B) & \xrightarrow{\delta_1} & K_0(SA) & \xrightarrow{K_0(\hat{i})} & K_0(Cf) & \xrightarrow{K_0(q)} & K_0(B) & \longrightarrow \\
 & = \uparrow & & \theta_A \uparrow & & K_0(j) \uparrow & & \uparrow = & \\
\longrightarrow & K_1(B) & \xrightarrow{K_1(f)} & K_1(A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & K_0(\mathrm{Ker} f) & \xrightarrow{K_0(i_2)} & K_0(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\longrightarrow & K_0(B) & \xrightarrow{\delta_0} & K_1(SA) & \xrightarrow{K_1(\hat{i})} & K_1(Cf) & \xrightarrow{K_1(q)} & K_1(B) & \longrightarrow \\
 & = \uparrow & & \beta_A \uparrow & & K_1(j) \uparrow & & \uparrow = & \\
\longrightarrow & K_0(B) & \xrightarrow{K_0(f)} & K_0(A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & K_1(\mathrm{Ker} f) & \xrightarrow{K_1(i_2)} & K_1(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

são os diagramas do Corolário 4.2.2 e, portanto, são comutativos.

Considere agora o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Cf & \xrightarrow{q} & B \\ j\big\uparrow & & \big\uparrow\mathrm{id} \\ \mathrm{Ker}f & \xrightarrow{i_2} & B \end{array}$$

em que $i_2 : \mathrm{Ker}f \longrightarrow B$ é a inclusão e $q : Cf \longrightarrow B$ é a projeção de Cf em B, ou seja, a projeção na primeira coordenada. Note que, dado $a \in \mathrm{Ker}f$, $q \circ j(a) = q(a, 0) = a = \mathrm{id} \circ i_2(a)$, o que mostra que esse diagrama é comutativo.

Pela funtorialidade de K_0 e K_1, segue que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} K_0(Cf) & \xrightarrow{K_0(q)} & K_0(B) \\ K_0(j)\big\uparrow & & \big\uparrow = \\ K_0(\mathrm{Ker}f) & \xrightarrow{K_0(i_2)} & K_0(B) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} K_1(Cf) & \xrightarrow{K_1(q)} & K_1(B) \\ K_1(j)\big\uparrow & & \big\uparrow = \\ K_1(\mathrm{Ker}f) & \xrightarrow{K_1(i_2)} & K_1(B) \end{array}$$

comutam, o que mostra que os quadrados da direita dos diagramas do teorema são comutativos.

A demonstração do teorema estará completa se provarmos a comutatividade do quadrado central. Para isso, será necessário utilizar o lema a seguir, cuja demonstração será feita ao final da demonstração do teorema.

Lema 4.3.8. *A aplicação $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}$ $(i = 0, 1)$ torna exata a sequência cíclica associada à sequência $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}f \xrightarrow{i_2} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$, isto é, a seguinte sequência*

$$\longrightarrow K_{i+1}(B) \xrightarrow{K_{i+1}(f)} K_{i+1}(A) \xrightarrow{K_i(j)^{-1}\circ K_i(\hat{i})\circ\rho_{i+1}} K_i(\mathrm{Ker}f) \xrightarrow{K_i(i_2)} K_i(B) \longrightarrow \tag{4.18}$$

é exata.

Com esse resultado, podemos concluir que as aplicações $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}$, para i=0 e i=1, são transformações naturais que tornam exata a seguinte sequência cíclica de seis termos:

$$\begin{array}{ccccc} K_1(\mathrm{Ker}f) & \xrightarrow{K_1(i_2)} & K_1(B) & \xrightarrow{K_1(f)} & K_1(A) \\ K_1(j)^{-1}\circ K_1(\hat{i})\circ\beta_A\big\uparrow & & & & \big\downarrow K_0(j)^{-1}\circ K_0(\hat{i})\circ\theta_A \\ K_0(A) & \xleftarrow{K_0(f)} & K_0(B) & \xleftarrow{K_0(i_2)} & K_0(\mathrm{Ker}f) \end{array} \tag{4.19}$$

Por outro lado, sabe-se que, se τ_i é uma transformação que, a cada sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

com A uma C^*-álgebra e J um ideal de A, associa a aplicação $\delta_i : K_i(A/J) \longrightarrow K_{i+1}(J)$ que torna a sequência

$$K_i(A) \longrightarrow K_i(A/J) \xrightarrow{\delta_i} K_{i+1}(J) \longrightarrow K_{i+1}(A)$$

exata, então τ_i é única, a menos de sinal. Esse é o resultado (c) do exercício 9F de [WO93].

Com isso, podemos garantir que

$$K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \rho_0 = \pm\, \delta_0$$

e

$$K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{i}) \circ \rho_1 = \pm\, \delta_1$$

Será mostrado que, em ambos os casos, o sinal é positivo, demonstrando assim que a parte central dos diagramas do teorema é comutativa. Para isso, como o sinal da transformação deve ser válido para qualquer sequência exata de C^*-álgebras, a prova para um caso particular é suficiente.

Considere então a sequência exata

$$0 \longrightarrow S\mathbb{C} \xrightarrow{i} C\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \tag{4.20}$$

em que $\pi(f) = f(0)$.

Nesse caso, a aplicação exponencial associada à sequência (4.20) é o isomorfismo $\beta_{\mathbb{C}}$. Então, para mostrar que $K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_{\mathbb{C}} = \delta_0$, basta mostrar que $K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) = \mathrm{id}_{K_1(S\mathbb{C})}$, ou seja, $K_1(\hat{i}) = K_1(j)$. Como já é sabido que $K_1(\hat{i}) = \pm K_1(j)$, é suficiente mostrar que $K_1(\hat{i})(g) = K_1(j)(g)$ para algum elemento g não nulo de $K_1(S\mathbb{C})$.

Seja $u = f + 1_{\widetilde{S\mathbb{C}}} \in \mathcal{U}(\widetilde{S\mathbb{C}})$, com $f \in S\mathbb{C}$ e tal que $[u]_1 \neq 0$.

Tem-se que

$$K_1(\hat{i})([u]_1) = [\widetilde{\hat{i}}(f + 1_{\widetilde{S\mathbb{C}}})]_1 = [(0, f) + 1_{\widetilde{C\pi}}]_1$$

e

$$K_1(j)([u]_1) = [\widetilde{j}(f + 1_{\widetilde{S\mathbb{C}}})]_1 = [(f, 0) + 1_{\widetilde{C\pi}}]_1$$

Observe que $(0, f) + 1_{\widetilde{C\pi}}$ pode ser identificado por $(1, f + 1) \in \widetilde{C\pi}$ e que $(f, 0) + 1_{\widetilde{C\pi}}$ pode ser identificado por $(f + 1, 1) \in \widetilde{C\pi}$. Pelo lema 4.3.6

$$(1, f + 1) \sim_h (f + 1, 1) \text{ em } \mathcal{U}(\widetilde{C\pi})$$

Logo, $K_1(\hat{i})([u]_1) = [(1, f + 1)]_1 = [(f + 1, 1)]_1 = K_1(j)([u]_1)$.

Assim, fica demonstrado que, para qualquer sequência exata de C^*-álgebras,

$$K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \circ \rho_0 = \delta_0$$

Observação 4.3.9. Uma demonstração mais concreta poderia ser feita mostrando que $K_1(\hat{i})$ e $K_1(j)$ são iguais quando calculadas na classe do elemento $g = f + 1_{\widetilde{S\mathbb{C}}} \in \mathcal{U}(\widetilde{S\mathbb{C}})$, com $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(r) = \cos(2\pi r) - 1 + i \operatorname{sen}(2\pi r)$. Essa igualdade é dada pela homotopia

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\longrightarrow \mathcal{U}(\widetilde{C\pi}) \\ t &\longmapsto \varphi_t = (b_t, \rho_t) + 1_{\widetilde{C\pi}} \end{aligned}$$

sendo, para cada $r \in [0, 1]$,

$$b_t(r) = \cos(2\pi(r-1)t) - 1 + i \operatorname{sen}(2\pi(r-1)t) \text{ e}$$

$$\rho_t(r) = \cos(2\pi(r-1)(t-1)) - 1 + i \operatorname{sen}(2\pi(r-1)(t-1))$$

Já sabemos que a aplicação exponencial associada à sequência (4.20) é igual $K_1(j)^{-}1 \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_{\mathbb{C}}$.

Também sabemos que, pela definição, a aplicação exponencial associada à sequência (4.20) é igual a

$$\delta_0 : K_0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\beta_{\mathbb{C}}} K_1(S\mathbb{C}) = K_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\delta_2} K_1(S\mathbb{C}),$$

em que δ_2 é a aplicação que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_2(C) & \xrightarrow{\delta_2} & K_1(S\mathbb{C}) \\ = \big\downarrow & & \big\downarrow \theta_{S\mathbb{C}} \\ K_1(S\mathbb{C}) & \xrightarrow{\widehat{\delta}} & K_0(S(S\mathbb{C})) \end{array}$$

comutativo, sendo $\widehat{\delta}$ a aplicação do índice associada a sequência

$$0 \longrightarrow S(S\mathbb{C}) \xrightarrow{i} S(C\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} S\mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Então, $\delta_2 = \theta_{S\mathbb{C}}^{-1} \circ \widehat{\delta}$.

Logo, como, por um lado $\delta_0 = \delta_2 \circ \beta_{\mathbb{C}}$ e, por outro, $\delta_0 = K_1(j)^{-}1 \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_{\mathbb{C}}$, segue que $\theta_{S\mathbb{C}}^{-1} \circ \widehat{\delta} \circ \beta_{\mathbb{C}} = K_1(j)^{-}1 \circ K_1(\hat{i}) \circ \beta_{\mathbb{C}}$. Como $\beta_{\mathbb{C}}$ é isomorfismo, temos

$$\widehat{\delta} = \theta_{S\mathbb{C}} \circ K_1(j)^{-1} \circ K_1(\hat{i}) \tag{4.21}$$

Sabemos que a aplicação do índice, $\widehat{\delta}$, associada a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S(S\mathbb{C}) \xrightarrow{i} S(C\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} S\mathbb{C} \longrightarrow 0$$

é igual a $\pm K_0(j')^{-1} \circ K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}}$, considerando

$$\begin{array}{rcl} \hat{i}_2 : SS\mathbb{C} & \longrightarrow & C(S\pi) \\ f & \longmapsto & (0, f) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} j' : SS\mathbb{C} & \longrightarrow & C(S\pi) \\ f & \longmapsto & (f, 0) \end{array}$$

Note que $S\hat{i}(f) : [0,1] \longrightarrow C\pi$ é tal que $t \longmapsto \hat{i}(f(t)) = (0, f(t))$. Logo, $S\hat{i}(f) = (0, f) = \hat{i}_2(f)$ para toda $f \in SS\mathbb{C}$. Portanto,

$$\hat{i}_2 = S\hat{i}$$

Analogamente prova-se que

$$j' = Sj$$

Aplicando a naturalidade do isomorfismo θ para a aplicação $\hat{i} : S\mathbb{C} \longrightarrow C\pi$, garantimos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K_1(S\mathbb{C}) & \xrightarrow{K_1(\hat{i})} & K_1(C\pi) \\ \theta_{S\mathbb{C}} \big\downarrow & & \big\downarrow \theta_{C\pi} \\ K_0(SS\mathbb{C}) & \xrightarrow{K_0(S\hat{i})} & K_0(S(C\pi)) \end{array}$$

Logo, $\theta_{C\pi} \circ K_1(\hat{i}) = K_0(S\hat{i}) \circ \theta_{S\mathbb{C}}$. Como $\hat{i}_2 = S\hat{i}$, concluímos que

$$\theta_{C\pi} \circ K_1(\hat{i}) = K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}}$$

ou seja,

$$K_1(\hat{i}) = \theta_{C\pi}^{-1} \circ K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}} \tag{4.22}$$

Analogamente, aplicando a naturalidade do isomorfismo θ para $j : S\mathbb{C} \longrightarrow C\pi$, concluímos que

$$\theta_{C\pi} \circ K_1(j) = K_0(j') \circ \theta_{S\mathbb{C}}$$

Como $K_i(j)$ é isomorfismo para $j = 0, 1$, podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$K_1(j)^{-1} = \theta_{S\mathbb{C}}^{-1} \circ K_0(j')^{-1} \circ \theta_{C\pi} \tag{4.23}$$

Usando as igualdades (4.22) e (4.23) e substituindo em (4.21), encontramos

$$\widehat{\delta} = \quad \theta_{S\mathbb{C}} \circ \theta_{S\mathbb{C}}^{-1} \circ K_0(j')^{-1} \circ \theta_{C\pi} \circ \theta_{C\pi}^{-1} \circ K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}} = \quad K_0(j')^{-1} \circ K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}}$$

o que mostra a igualdade

$$\widehat{\delta} = K_0(j')^{-}1 \circ K_0(\hat{i}_2) \circ \theta_{S\mathbb{C}}$$

Notemos que o lema 4.3.7 garante que as substituições feitas acima são bem determinadas.

Assim, fica demonstrado que, para qualquer sequência exata de C^*-álgebras,

$$K_0(j)^{-1} \circ K_0(\hat{i}) \circ \rho_1 = \delta_1$$

■

Demonstração do lema 4.3.8. Para mostrar que a sequência (4.18) é exata, será necessário mostrar que

(i) $\mathrm{Im}(K_{i+1}(f)) = \mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1})$

(ii) $\mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}) = \mathrm{Ker}(K_i(i_2))$

Demonstração de (i). Seja $g \in \mathrm{Im}(K_{i+1}(f))$. Então existe $h \in K_{i+1}(B)$ tal que $K_{i+1}(f)(h) = g$. Como a parte esquerda do diagrama $(*)$ comuta,

$$\rho_{i+1}(K_{i+1}(f)(h)) = \delta_{i+1}(h) \text{, ou seja, } \rho_{i+1}(g) = \delta_{i+1}(h) \tag{4.24}$$

Logo, $\rho_{i+1}(g) \in \mathrm{Im}(\delta_{i+1})$. Como a linha de cima do diagrama $(*)$ é exata, $\mathrm{Im}(\delta_{i+1}) = \mathrm{Ker}(K_i(\hat{i}))$. Então, $K_i(\hat{i}))(\rho_{i+1}(g)) = 0$.

Como $K_i(j)$ é isomorfismo, $K_i(j)^{-1}(K_i(\hat{i}))(\rho_{i+1}(g))) = K_i(j)^{-1}(0) = 0$, ou seja, $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}(g) = 0$.

Logo, $g \in \mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1})$ e, portanto,

$$\mathrm{Im}(K_{i+1}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}) \tag{4.25}$$

Seja $b \in \mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1})$. Então $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}(b) = 0$. Como $K_i(j)^{-1}$ é isomorfismo, segue que $K_i(\hat{i}) \circ \rho_{i+1}(b) = 0$. Logo, $\rho_{i+1}(b) \in \mathrm{Ker}(K_i(\hat{i}))$. Como a linha de cima do diagrama $(*)$ é exata, $\mathrm{Ker}(K_i(\hat{i})) = \mathrm{Im}(\delta_{i+1})$. Portanto, existe $a \in K_{i+1}(B)$ tal que $\delta_{i+1}(a) = \rho_{i+1}(b)$.

Da comutatividade da parte esquerda do diagrama $(*)$ segue que $\delta_{i+1}(a) = \rho_{i+1}(K_{i+1}(f)(a))$ e, assim,

$$\rho_{i+1}(b) = \rho_{i+1}(K_{i+1}(f)(a))$$

Como ρ_{i+1} é isomorfismo, a igualdade acima implica $b = K_{i+1}(f)(a)$, o que mostra que $b \in \mathrm{Im}(K_{i+1}(f))$. Logo,

$$\mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}) \subseteq \mathrm{Im}(K_{i+1}(f)) \tag{4.26}$$

As inclusões (4.25) e (4.26) mostram que $\mathrm{Im}(K_{i+1}(f)) = \mathrm{Ker}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1})$

Demonstração de (ii). Seja $c \in \mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1})$. Então existe $b \in K_{i+1}(A)$ tal que $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}(b) = c$. Então $K_i(\hat{\imath})(\rho_{i+1}(b)) = K_i(j)(c) \in \mathrm{Im}(K_i(\hat{\imath}))$. Como a linha de cima do diagrama $(*)$ é exata, $\mathrm{Im}(K_i(\hat{\imath})) = \mathrm{Ker}(K_i(q))$. Assim, segue que

$$K_i(q)(K_i(\hat{\imath})(\rho_{i+1}(b))) = 0$$

Como a parte direita do diagrama $(*)$ comuta, $K_i(i_2) \circ K_i(j)^{-1}(K_i(\hat{\imath})(\rho_{i+1}(b))) = 0$. Usando a igualdade $K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}(b) = c$, segue que $K_i(i_2)(c) = 0$, ou seja, $c \in \mathrm{Ker}(K_i(i_2))$. Logo,

$$\mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(K_i(i_2)) \tag{4.27}$$

Seja $d \in \mathrm{Ker}(K_i(i_2))$. Então $K_i(i_2)(d) = 0$.

Da comutatividade da parte direita do diagrama $(*)$ segue que $K_i(q)(K_i(j)(d)) = K_i(i_2)(d) = 0$. Logo, $K_i(j)(d) \in \mathrm{Ker}(K_i(q))$.

Como a linha de cima do diagrama $(*)$ é exata, $\mathrm{Ker}(K_i(q)) = \mathrm{Im}(K_i(\hat{\imath}))$.Então, como $K_i(j)(d) \in \mathrm{Ker}(K_i(q)) = \mathrm{Im}(K_i(\hat{\imath}))$, existe $c \in K_i(SA)$ tal que $K_i(\hat{\imath})(c) = K_i(j)(d)$. Como $K_i(j)$ é um isomorfismo, segue que

$$K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath})(c) = d \tag{4.28}$$

Ainda, como $\rho_{i+1} : K_{i+1}(A) \longrightarrow K_i(SA)$ é um isomorfismo e $c \in K_i(SA)$, existe $b \in K_{i+1}(A)$ tal que $\rho_{i+1}(b) = c$. Fazendo essa substituição em (4.28), encontra-se

$$K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath})(\rho_{i+1}(b)) = d$$

.

Isso mostra que $d \in \mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1})$. Logo,

$$\mathrm{Ker}(K_i(i_2)) \subseteq \mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}) \tag{4.29}$$

As inclusões (4.27) e (4.29) mostram que

$$\mathrm{Im}(K_i(j)^{-1} \circ K_i(\hat{\imath}) \circ \rho_{i+1}) = \mathrm{Ker}(K_i(i_2))$$

□

Apêndice A

Norma da unitização de uma C^*-álgebra

Neste apêndice será mostrada a existência de uma única norma que torna a unitização (de uma C^*-álgebra) uma C^*-álgebra. Esta demonstração foi feita usando como referência o exercício 1.3 de [rLL00].

Teorema A.0.10. *Se A é uma C^*-álgebra, então existe uma (única) norma em $\widetilde{A}$ que torna $\widetilde{A}$ uma C^*-álgebra e que estende a norma de A.*

Demonstração. Como a unicidade é dada pelo teorema 1.1.5, basta provar a existência.

Seja $\| \cdot \|_A$ a norma em A. Considere, para cada $x \in \widetilde{A}$,

$$|||x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\| yx \|_A \colon y \in A, \| y \| \leqslant 1\}$$

Defina

$$\| x \|_{\widetilde{A}} = \max\{|||x|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x)|\}$$

Tem-se:

(i) $\| \cdot \|_{\widetilde{A}}$ estende a norma de A.

Primeiramente, observe que se $a \in A$, então

$$|||a|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\| y(a + 0 \cdot 1_{\widetilde{A}}) \|_A \colon y \in A, \| y \| \leqslant 1\} = \sup\{\| ya \|_A \colon y \in A, \| y \| \leqslant 1\}$$

e, como $\| \cdot \|_A$ é uma norma e $\| y \|_A \leqslant 1$,

$$\| ya \|_A \leqslant \| y \|_A \| a \|_A \leqslant \| a \|_A$$

Logo,

$$|||a|||_{\widetilde{A}} \leqslant \| a \|_A$$

Além disso, como $\frac{a^*}{\|a^*\|_A}$ é um elemento de norma 1 em A,

$$\left\| \frac{a^*}{\| a^* \|_A} a \right\|_A = \frac{\| a^* a \|_A}{\| a^* \|_A} = \frac{\| a \|_A^2}{\| a \|_A} = \| a \|_A$$

é um elemento de $\{\| ya \|_A \colon y \in A, \| y \| \leqslant 1\}$. Portanto,

$$|||a|||_{\widetilde{A}} = \| a \|_A$$

Como $\pi(a) = 0$ para todo $a \in A$,

$$\| a \|_{\widetilde{A}} = \max\{|||a|||_{\widetilde{A}}, |\pi(a)|\} = |||a|||_{\widetilde{A}} = \| a \|_A$$

(ii) $\| \cdot \|_{\widetilde{A}}$ é uma norma.

- Se $x \in \widetilde{A}$ é tal que $\| x \|_{\widetilde{A}} = 0$, então $|\pi(x)| = 0$ e $|||x|||_{\widetilde{A}} = 0$. Como $|\pi(x)| = 0$ implica que x é um elemento de A, usando o item (i),

$$0 = |||x|||_{\widetilde{A}} = \| x \|_A = \| x \|_{\widetilde{A}}$$

  Sendo $\| \cdot \|_A$ uma norma, $\| x \|_A = 0$ implica $x = 0$.

- Seja $x \in \widetilde{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Temos

$$|||\lambda x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\| y(\lambda x) \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} = |\lambda| \sup\{\| yx \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} = |\lambda| \cdot |||x|||_{\widetilde{A}}$$

  e

$$|\pi(\lambda x)| = |\lambda(\pi(x)| = |\lambda| \cdot |\pi(x)|$$

  então

$$\| \lambda x \|_{\widetilde{A}} = \max\{|\lambda| \cdot |||x|||_{\widetilde{A}}, |\lambda| \cdot |\pi(x)|\} = |\lambda| \max\{|||x|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x)|\} = |\lambda| \, \| x \|_{\widetilde{A}}$$

- Sejam $x, w \in \widetilde{A}$. Como

$$\begin{aligned} |||x+w|||_{\widetilde{A}} &= \sup\{\| y(x+w) \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{\| yx + yz \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{\| yx \|_A + \| yw \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{\| yx \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} + \sup\{\| yw \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} \\ &= |||x|||_{\widetilde{A}} + |||w|||_{\widetilde{A}} \end{aligned}$$

  e

$$|\pi(x+w)| = |\pi(x) + \pi(w)| \leqslant |\pi(x)| + |\pi(w)|$$

  segue que

$$\begin{aligned} \| x+w \|_{\widetilde{A}} &= \max\{|||x+w|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x+w)|\} \\ &\leqslant \max\{|||x|||_{\widetilde{A}} + |||w|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x)| + |\pi(w)|\} \\ &\leqslant \max\{|||x|||_{\widetilde{A}}, |\pi(x)|\} + \max\{|||w|||_{\widetilde{A}}, |\pi(w)|\} \\ &= \| x \|_{\widetilde{A}} + \| w \|_{\widetilde{A}} \end{aligned}$$

(iii) $\| \cdot \|_{\widetilde{A}}$ é submultiplicativa.
Seja $\mathscr{B}(A)$ o conjunto dos operadores limitados em A. Defina

$$\begin{array}{rcl} R : \widetilde{A} & \longrightarrow & \mathscr{B}(A) \\ x & \longmapsto & R_x : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & ax \end{array} \end{array}$$

Sejam $x, w \in \widetilde{A}$. Note que, para qualquer $a \in A$,

$$R_{xw}(a) = a(xw) = (ax)w = R_x(a)w = R_w(R_x(a)) = R_w \circ R_x(a)$$

Então, para quaisquer $x, w \in \widetilde{A}$, $R_{xw} = R_w R_x$.
Além disso, observe que, para todo $x \in \widetilde{A}$,

$$\| R_x \|_{\mathscr{B}(A)} = \sup\{\| R_x(y) \| : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} = \sup\{\| yx \| : y \in A, \| y \| \leqslant 1\} = |||x|||_{\widetilde{A}}$$

Então, dados $x, w \in \widetilde{A}$,

$$|||xw|||_{\widetilde{A}} = \| R_{xw} \|_{\mathscr{B}(A)} = \| R_w R_x \|_{\mathscr{B}(A)} \leqslant \| R_w \|_{\mathscr{B}(A)} \| R_x \|_{\mathscr{B}(A)} = |||x|||_{\widetilde{A}} |||w|||_{\widetilde{A}}$$

Portanto, $||| \cdot |||_{\widetilde{A}}$ é submultiplicativa.

Como $|\pi(xw)| = |\pi(x)\pi(w)| = |\pi(x)| \cdot |\pi(w)|$ para todos $x, w \in \widetilde{A}$, segue que

$$\| xw \|_{\widetilde{A}} \leqslant \| x \|_{\widetilde{A}} \| w \|_{\widetilde{A}}$$

(iv) $\| \cdot \|_{\widetilde{A}}$ é tal que $\| x^* x \|_{\widetilde{A}} = \| x \|^2_{\widetilde{A}}$ para todo $x \in \widetilde{A}$.

Seja $x \in \widetilde{A}$. Como $||| \cdot |||_{\widetilde{A}}$ é submultiplicativa e $\| a \|_A = \| a^* \|_A$ para todo $a \in A$, temos que,

$$|||xx^*|||_{\widetilde{A}} \leqslant |||x|||^2_{\widetilde{A}}$$

Considere agora $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Como $|||x|||_{\widetilde{A}} = \sup\{\| yx \|_A : y \in A, \| y \| \leqslant 1\}$, então existe $y_0 \in A$ tal que $r|||x|||_{\widetilde{A}} \leqslant \| y_0 x \|_A$. Logo,

$$\begin{aligned} r^2 |||x|||^2_{\widetilde{A}} &\leqslant \| y_0 x \|^2_A = \| (y_0 x)(y_0 x)^* \|_A = |||(y_0 x x^* y_0^*)|||_{\widetilde{A}} \\ &\leqslant |||y_0|||_{\widetilde{A}} |||(xx^*)|||_{\widetilde{A}} |||(y_0^*)|||_{\widetilde{A}} = \| y_0 \|_A \, |||(xx^*)|||_{\widetilde{A}} \, \| y_0^* \|_A \leqslant |||(xx^*)|||_{\widetilde{A}} \end{aligned}$$

Fazendo $r \to 1$, encontramos

$$|||x|||^2_{\widetilde{A}} \leqslant |||(xx^*)|||_{\widetilde{A}}$$

Logo, $|||x|||^2_{\widetilde{A}} = |||(xx^*)|||_{\widetilde{A}}$.

Como $|\pi(x^*x)| = |\overline{\pi(x)}\pi(x)| = |\pi(x)|^2$, segue que

$$\| x^* x \|_{\widetilde{A}} = \| x \|^2_{\widetilde{A}}$$

(v) Com a norma $\| \cdot \|_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{A}$ é completo.

Seja $(a_n + \lambda_n 1_{\widetilde{A}})_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n \in A$ e $\lambda_n \in \mathbb{C}$, uma sequência de Cauchy em $(\widetilde{A}, \| \cdot \|_{\widetilde{A}})$. Logo, $(a_n + \lambda_n 1_{\widetilde{A}})_n$ é limitada. Isso implica que $(\lambda_n)_n$ é limitada, pois, caso contrário, existiria uma subsequência $(\lambda_{n_k})_k$ tal que $\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}\right) \to 0$. Desta forma, considerando $b_{n_k} = (a_{n_k} + \lambda_{n_k} 1_{\widetilde{A}}) \frac{1}{\lambda_{n_k}}$ teríamos

$$b_{n_k} = \left(\frac{1}{\lambda_{n_k}} a_{n_k} + 1_{\widetilde{A}}\right) \to 0$$

pois $\| b_{n_k} \| = \frac{1}{|\lambda_{n_k}|} \| a_{n_k} + \lambda_{n_k} 1_{\widetilde{A}} \|$ e $\left(\frac{1}{|\lambda_{n_k}|}\right) \to 0$. Mas isso implica $\lim \frac{a_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = -1_{\widetilde{A}}$, o que é uma contradição, já que A é completa.

Sendo $(\lambda_n)_n$ limitada, existe subsequência tal que (λ_{n_j}) que converge para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Considere

$$(a_{n_j}) = (a_{n_j} + \lambda_{n_j} 1_{\widetilde{A}}) - \lambda_{n_j} 1_{\widetilde{A}}$$

Como $(a_{n_j} + \lambda_{n_j} 1_{\widetilde{A}})$ é de Cauchy e (λ_{n_j}) é convergente, (a_{n_j}) é uma sequência de Cauchy que está em A. Como A é completo, $(a_{n_j}) \to a$, para algum $a \in A$.

Logo, $(a_{n_j} + \lambda_{n_j} 1_{\widetilde{A}}) \to a + \lambda 1_{\widetilde{A}}$. Então, como $(a_n + \lambda_n 1_{\widetilde{A}})$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente, conclui-se que $(a_n + \lambda_n 1_{\widetilde{A}})$ é convergente.

Portanto $\| \cdot \|_A$ é uma norma que torna $\widetilde{A}$ uma C^*-álgebra e estende a norma de A. $\square$

Referências Bibliográficas

[Con90] J.B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer-Verlag, New York, segunda edição, 1990.

[Dia01] D. P. Dias. *O produto cruzado de C^*-álgebras por grupos mediáveis*. Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 2001.

[Dia08] D. P. Dias. *O caráter de Chern-Connes para C^*-sistemas dinâmicos calculado em algumas álgebras de operadores pseudodiferenciais*. Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 2008.

[ERR12] S. Eilers, G. Restorff e E. Ruiz. Ideal related K-theory with coefficients. *arXiv:1210.2737*, 2012.

[Hun89] T. W. Hungerford. *Algebra*. Springer-Verlag, New York, quinta edição, 1989.

[MSS06] S. T. Melo, T. Schick e E. Schrohe. A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems. *J. Reine Angew. Math*, 599:217–233, 2006. vii, viii, 35

[Mur90] G. J. Murphy. *C^*-Algebras and Operator Theory*. Academic Press, New York, 1990. 2

[Ped95] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Springer, New York, segunda edição, 1995.

[rLL00] M. Rørdam, F. Larsen e N. Lausten. *An introduction to K-theory for C^*-Algebras*. Cambridge University Press, UK, primeira edição, 2000. viii, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 21, 23, 24, 28, 29, 61

[Rot10] J.J. Rotman. *Advanced modern algebra*. American Mathematical Society, segunda edição, 2010.

[WO93] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-Algebras*. Oxford University Press, 1993. viii, 7, 9, 23, 55