Diferenciação de medidas em Espaços Métricos

Juan David Cabrera Cuellar

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Gláucio Terra

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, maio de 2021

Diferenciação de medidas em Espaços Métricos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 10/05/2021. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Gláucio Terra (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva - UFABC
- Prof. Dr. Marcus Marrocos - UFABC

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Glaucio Terra, meu orientador, pela dedicação, disposição e paciência durante o mestrado. A meus amigos e colegas, aprecio muito sua amizade e convivência durante todo esse tempo. Por ultimo, agradeço a minha família pelo apoio e compreensão em todo momento. *Gracias totales.*

Resumo

CABRERA, J. D. C. **Diferenciação de medidas em espaços métricos**. 2020. 63 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

Com motivação no campo da *Teoria Geométrica da Medida*, o objetivo neste trabalho é fazer um estudo da teoria de *diferenciação de medidas em espaços métricos*, discutindo primeiramente *teoremas de coberturas* relevantes para a referida teoria, com particular destaque para o *teorema de cobertura de Besicovitch-Federer* em espaços métricos direcionalmente limitados. Daí, para uma certa classe de medidas borelianas em espaços métricos, são investigadas propriedades de diferenciabilidade de uma medida em relação a outra, bem como versões abstratas do teorema fundamental do cálculo nesse contexto. Por último, como aplicação desta teoria, apresentaremos a *fórmula da área* para aplicações contínuas entre espaços métricos, sob suposições de regularidade mínima.

Palavras-chave: Teorema de cobertura de Besicovitch, fórmula da área, teoremas de cobertura, diferenciação de medidas em espaços métricos.

Abstract

CABRERA, J. D. C. **Differentiation of Measure in Metric Spaces**. 2020. 63 f. Thesis (Master)
- Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

With motivation in the field of *Geometric Theory of Measure*, the objective in this work is to study the theory of *differentiation of measures in metric spaces*. We investigate some covering theorems related to that theory, in particular the *Besicovitch-Federer's covering theorem* on directionally limited metric spaces. For a certain class of Borelian measures on metric spaces, we study the notion of differentiability of a measure with respect to another, as well as abstract versions of the fundamental theorem of calculus in this context. Finally, as an application of this theory, we present the *Area Formula* for continuous applications between metric spaces, under assumptions of minimal regularity.

Keywords: Besicovitch's covering Theorem, Area formula, Covering's Theorem, Differentiation of Measure, Metric Spaces.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Introdução	xi
1 Conceitos Básicos	1
1.1 Medidas	1
1.2 Funções mensuráveis	5
1.3 Integrais	6
1.4 Construção de Caratheodory	7
2 Teoremas de Cobertura	11
2.1 Famílias adequadas	11
2.2 Espaços métricos direcionalmente limitados	15
2.3 Teorema de Cobertura de Besicovitch-Federer	22
2.4 Relações de cobertura	25
3 Diferenciação de medidas	31
3.1 Derivadas	31
3.2 Densidade e Continuidade aproximada	40
3.3 Derivação de medidas usando bolas centralizadas	43
3.4 Fórmula da área em espaços métricos	45
Referências Bibliográficas	47

Lista de Símbolos

2^X	conjunto de partes X
$\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty, \infty]$ a reta real estendida
$\mathbb{U}(x, r)$	bola aberta de centro x e raio r
$\mathbb{B}(x, r)$	bola fechada de centro x e raio r
$\mathcal{F}$	família de fechados em X
$\bigcup \mathcal{F}$	$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$
$\bigcap \mathcal{F}$	$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$
$\sigma(\mu)$	conjunto de todos os subconjuntos μ -mensuráveis
$\mu \ll C$	restrição de μ a C
$\mathcal{B}_X$	conjunto de todos os conjuntos de Borel
$\text{spt } \mu$	suporte de uma medida μ
$\text{spt } f$	suporte de uma função f
χ_A	função característica do conjunto A
$N(f, y)$	função multiplicidade
$\hat{S}$	(δ, τ) -ampliação de S
$\text{card } A$	cardinalidade do conjunto A
$\ \cdot\ _1$	norma da soma
$\mathbf{M}$	variedade diferenciável
$\mathbf{TM}$	espaço tangente
$\mathbf{T}_p \mathbf{M}$	espaço tangente de p
$\exp_p$	aplicação exponencial
$\mathbf{C}^1$	o espaço de funções contínuas e diferenciais
$\mathbf{C}^\infty$	o espaço de funções com derivadas contínuas de todas as ordens
$\mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$	espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$
$(C) \lim_x f$	limite ao longo de uma cobertura
$\mathcal{M}$	classe de todas as medidas Borel-regulares finitas nas partes limitadas de X
ν_μ	$\inf\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{B}_X, \mu(A \setminus B) = 0\}$
$D(\nu, \mu, V, x)$	V -derivada de $\nu \in \mathcal{M}$
$(\mu, V) \text{ ap } \lim_x f$	(μ, V) -limite aproximado de f em x
$f^* \nu$	medida pull-back de ν
Jf	métrica Jacobiana

Introdução

A *Teoria Geométrica da Medida* estuda a estrutura e as propriedades geométricas dos conjuntos através da Teoria da Medida. Esta teoria permite abordar questões em áreas muito diferentes da matemática, incluindo-se o *cálculo de variações*, *análise geométrica* e *análise harmônica* [Sil11, Dom14, Tor19]. A principal referência para os leitores que desejarem iniciar seus estudos na referida teoria é o texto enciclopédico de H. Federer [Fed96], cujo título deu origem ao nome da área.

O objetivo neste trabalho é fazer um estudo da teoria de *diferenciação de medidas em espaços métricos*, a qual tem origem nas obras de Besicovitch em [Bes45] e [Bes46]. Tais trabalhos, assim como seus desenvolvimentos subsequentes (vide apanhado histórico em [Rig18], bem como referências lá citadas), usam como ferramentas fundamentais certos teoremas de coberturas, o mais notável dos quais leva o nome de Besicovitch, bem como o de Federer numa versão mais abstrata a ser apresentada no capítulo 2. Em particular, a compreensão e o detalhamento das ideias contidas em [Fed96], na seção 2.8 para teoremas de cobertura e na seção 2.9 para os teoremas de diferenciação, fizeram parte importante das motivações para o desenvolvimento do presente trabalho.

A seguir, apresentamos um breve resumo dos tópicos abordados em cada capítulo desta dissertação.

No capítulo 1, faremos uma revisão dos conceitos, terminologia e resultados básicos na *teoria da medida* que serão usados ao longo deste trabalho. Começando com as propriedades gerais de medidas sobre um espaço métrico (X, d) , seguimos com alguns teoremas sobre funções mensuráveis e integração em espaços de medida, finalizando com a chamada *construção de Carathéodory*, a qual é uma ferramenta importante para a construção de medidas borelianas regulares em espaços métricos.

No capítulo 2, serão discutidos os teoremas de coberturas relevantes para a teoria de diferenciação de medidas. Será introduzida, em particular, a noção de *espaço métrico direcionalmente limitado*, proposta por Federer, a qual pretendemos apresentar de forma intuitiva e geométrica, de modo a detalhar as ideias implícitas em [Fed96]. Em tais espaços, será enunciada uma generalização do clássico teorema de cobertura de Besicovitch em $\mathbb{R}^n$ (cf. [EG91]), a saber, o *teorema de Besicovitch-Federer*, que desempenha um papel central na teoria de diferenciação de medidas borelianas regulares com propriedades de finitude adequadas.

O capítulo 3 é dedicado à *teoria da diferenciação de medidas em espaços métricos*. Aplicando os teoremas vistos no capítulo anterior para uma certa classe de medidas de Borel em espaços métricos, são investigados teoremas básicos de diferenciação e propriedades de diferenciabilidade de uma medida em relação a outra, bem como versões abstratas do Teorema Fundamental do Cálculo

nesse contexto. A seguir, são introduzidas noções de “densidades de medidas”, através das quais definiremos modificações dos conceitos de limite e continuidade clássicos, o que resulta em noções correspondentes no âmbito da teoria da medida mais adequadas para se tratar problemas nesta teoria. Por último, como uma aplicação dessa teoria de diferenciação, apresentaremos a *fórmula de área*, que generaliza o teorema de mudança de variáveis clássico (i.e. no contexto de integrais múltiplas do Cálculo Avançado) a uma versão abstrata para aplicações contínuas entre espaços métricos sob suposições de regularidade mínima, cf. [Mag11].

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos teóricos gerais, terminologia, notações e resultados da Teoria da Medida que serão necessários ao longo deste trabalho. A maior parte deste material pode ser encontrada em [Fol99], [Fed96], [Mat95] e [EG91]. Os resultados que usaremos sobre espaços métricos e espaços topológicos podem ser consultados em [BI01] e [Lim70]. Muitas das provas, salvo exceções, serão omitidas.

Notação. Seja X um conjunto. Dados subconjuntos A e B de X , denotaremos $A \subset B$ para dizer que A está contido em B ou $A = B$. Caso haja risco de confusão, será escrito $A \subseteq B$ para a inclusão não estrita e $A \subsetneq B$ para a inclusão estrita.

Seguindo 2.1.1. em [Fed96, pag. 51], cada conjunto $S \subset \mathbb{R}$ tem um maior limite inferior $\inf S$ e um menor limite superior $\sup S$. Se S for não-vazio, então $\inf S \leq \sup S$. No entanto, $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

Para um espaço métrico (X, d) , as bolas abertas e fechadas com centro $a \in X$ e raio $r > 0$ são denotadas por, respectivamente,

$$\mathbb{U}(a, r) = \{x \mid d(a, x) < r\} \quad \text{e} \quad \mathbb{B}(a, r) = \{x \mid d(a, x) \leq r\}.$$

Para mais notações, pode-se verificar a Lista de Símbolos na página [ix](#).

1.1 Medidas

Neste texto, seguindo [Fed96] e a nomenclatura tradicional em teoria geométrica da medida, usaremos o termo “*medida*” tanto para denotar *medidas exteriores* como para *medidas σ -aditivas numa σ -álgebra $\mathcal{A}$ de X* . Caso haja risco de confusão, usaremos explicitamente a nomenclatura “*medida exterior*” no primeiro caso.

Definição 1.1. Uma *medida exterior* ou, simplesmente, uma *medida* em um conjunto X é uma função de conjunto $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (subaditividade enumerável).

Definição 1.2 (Condição de Caratheodory). Dada uma medida μ sobre X , um subconjunto $A \subset X$ é dito *mensurável em relação a μ* ou *μ -mensurável* se satisfaz a *Condição de Caratheodory*:

$$\forall T \subset X, \quad \mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A).$$

Definição 1.3 (Restrição de medidas). Sejam μ uma medida sobre X e $C \subset X$. Definimos a *restrição de μ a C* , denotado por $\mu \lfloor C$, como

$$\forall A \subset X, \quad \mu \lfloor C(A) = \mu(A \cap C).$$

Note que $\mu \lfloor C$ é uma medida em X e todos os conjuntos μ -mensuráveis são $\mu \lfloor C$ -mensuráveis também.

Teorema 1.4 (Propriedades elementares das medidas). *Sejam μ uma medida sobre X e $A, B \subset X$:*

- i) *Se $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
- ii) *Se A é μ -mensurável, $X \setminus A$ também é μ -mensurável.*
- iii) *Se $\mathcal{F}$ é uma família enumerável não vazia de conjuntos μ -mensuráveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ e $\bigcap \mathcal{F}$ são μ -mensuráveis.*
- iv) *Se $A_1, A_2, A_3, \dots$ são conjuntos μ -mensuráveis disjuntos, então*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

- v) *(Continuidade para baixo) Se $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$ formam uma sequência crescente de conjuntos μ -mensuráveis, então*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i).$$

- vi) *(Continuidade para acima) Se $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ formam uma sequência decrescente de conjuntos μ -mensuráveis, com $\mu(C_1) < \infty$, então*

$$\mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(C_i).$$

- vii) *Os conjuntos $\emptyset$ e X são μ -mensuráveis. Se $\mu(A) = 0$, então A é μ -mensurável.*
- viii) *Se A é μ -mensurável e $B \subset X$, então*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B).$$

Demonstração. Ver o Teorema 2.1.3. em [Fed96, pág. 54 e 55]. Também o Teorema 1.1 para os itens i), ii) e vii), o Teorema 1.2 para os outros itens em [EG91, pág. 2 e 3].

□

Definição 1.5 (Envoltório). Sejam μ uma medida sobre X e $A \subset X$. Dizemos que $B \subset X$ é um μ -envoltório de A se for μ -mensurável, $A \subset B$ e, para todo $T \subset X$ μ -mensurável,

$$\mu(T \cap A) = \mu(T \cap B).$$

Observação 1.6. Note que, se $A \subset B$, com B μ -mensurável e $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, então B é um μ -envoltório de A . De fato, para todo $T \subset X$ μ -mensurável tem-se,

$$\mu(A \cap T) \leq \mu(B \cap T) \quad \text{e} \quad \mu(A \setminus T) \leq \mu(B \setminus T).$$

E por outro lado, como T é μ -mensurável, da condição de Caratheodory temos

$$\mu(A) = \mu(A \cap T) + \mu(A \setminus T) \quad \text{e} \quad \mu(B) = \mu(B \cap T) + \mu(B \setminus T),$$

então, como $\mu(B) < \infty$, segue

$$\mu(B \cap T) = \mu(B) - \mu(B \setminus T) \leq \mu(A) - \mu(A \setminus T) = \mu(A \cap T).$$

Portanto $\mu(A \cap T) = \mu(B \cap T)$.

Definição 1.7 (Medidas regulares). Uma medida μ sobre X é chamada *regular* se, para cada $A \subset X$ existe um conjunto B μ -mensurável tal que

$$A \subset B \quad \text{e} \quad \mu(A) = \mu(B).$$

Proposição 1.8. *Sejam μ uma medida regular sobre X , A e B subconjuntos de X . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) *Para toda sequência crescente $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ de subconjuntos de X (não necessariamente μ -mensuráveis),*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

- ii) *Se $\mu(A) < \infty$, então A tem um μ -envoltório.*

- iii) *Se $A \cup B$ é μ -mensurável e $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) < \infty$, então A e B são μ -mensuráveis.*

- iv) *Se $C \subset X$ e $\mu(C) < \infty$, então a classe de todos os conjuntos $\mu \llcorner C$ -mensuráveis é igual a*

$$\{(B \cap C) \cup S \mid S \subset X \setminus C \text{ e } B \text{ é } \mu\text{-mensurável}\}.$$

Demonstração. Note que, o item ii) obtém-se da Observação 1.6. Para os outros itens, ver 2.1.5. em [Fed96, pág. 56 e 57]. □

Definição 1.9. Dados um conjunto X e $\mathcal{A} \subset 2^X$, dizemos que:

- i) $\mathcal{A}$ é uma *álgebra* de subconjuntos de X se contém o conjunto vazio, é fechado sob complementação e fechado sob uniões finitas.
- ii) $\mathcal{A}$ é uma σ -*álgebra* se é uma álgebra fechada sob uniões enumeráveis.
- iii) Os conjuntos em $\mathcal{A}$ são chamados *mensuráveis em relação a $\mathcal{A}$* , ou $\mathcal{A}$ -*mensuráveis*, ou (se é claro a partir do contexto) simplesmente *mensuráveis*.
- iv) Dada uma σ -álgebra $\mathcal{A} \subset 2^X$, chamamos uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ de *medida em $\mathcal{A}$* se $\mu(\emptyset) = 0$ e, para toda sequência disjunta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$, $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definição 1.10. Uma medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ é chamada:

- i) *completa* se $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ e $A \subset E$ implica $A \in \mathcal{A}$,
- ii) *finita* se $\mu(X) < \infty$,
- iii) σ -*finita* se existe uma sequência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$. Mais geralmente, um conjunto $A \subset X$ é σ -finito se pode ser coberto por uma família enumerável de conjuntos mensuráveis de medida finita.

Definição 1.11. Dado um subconjunto $S \subset 2^X$, definimos a σ -álgebra gerada por S , denotada por $\sigma(S)$, como sendo a menor σ -álgebra contendo S , a qual é a interseção da família de todas as σ -álgebras que contêm S .

Definição 1.12 (Medida de Borel). Para um espaço topológico (X, τ) , definimos:

- i) A σ -álgebra de Borel de X é a σ -álgebra gerada por τ , i.e. $\sigma(\tau)$, que denotaremos por $\mathcal{B}_X$. Os elementos de $\mathcal{B}_X$ são chamados *conjuntos de Borel* ou simplesmente *borelianos*.
- ii) Uma medida μ em X é uma *medida de Borel* ou *boreliana* se cada boreliano for μ -mensurável.

Note que, se $S \subset 2^X$ e $\mathcal{A}$ é a σ -álgebra de subconjuntos de X , então $\sigma(S) \subset \mathcal{A}$ se, e somente se, $S \subset \mathcal{A}$. Em particular, para (X, τ) um espaço topológico e uma medida μ em X , temos que μ é uma medida de Borel se, e somente se, cada subconjunto aberto de X é μ -mensurável (ou equivalentemente, se cada subconjunto fechado de X é μ -mensurável). No caso que a topologia seja metrizável por uma métrica d , um critério simples para que uma medida μ seja boreliana é dado pelo Critério de Caratheodory no Teorema 1.20.

Definição 1.13. Seja μ uma medida de Borel num espaço topológico (X, τ) . Dizemos que:

- i) μ é *aberta σ -finita* se existe uma sequência $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abertos de X tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(U_n) < \infty$.
- ii) μ é *localmente finita* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mu(U) < \infty$.

Definição 1.14. Uma família $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X é uma *partição boreliana* de um conjunto de Borel A se $\mathcal{G}$ é uma família enumerável disjunta de borelianos com $\bigcup \mathcal{G} = A$.

Definição 1.15. Seja μ uma medida num espaço topológico (X, τ) .

- i) Dizemos que μ é *concentrada* sobre um conjunto $A \subset X$ se $\mu(X \setminus A) = 0$.
- ii) O *suporte* de μ é o complemento da união de todos os conjuntos abertos V em X tais que $\mu(V) = 0$, i.e

$$\text{spt } \mu := X \setminus \bigcup \{V \mid V \in \tau \text{ e } \mu(V) = 0\}.$$

Na situação da definição acima, em geral não é verdade que μ seja concentrada em seu suporte, ou seja, que $\mu(X \setminus \text{spt } \mu) = 0$. A Proposição 1.35 em [Ter19, pág. 12] fornece duas condições suficientes para que esta propriedade seja cumprida.

Teorema 1.16 (Aproximação por conjuntos fechados e abertos). *Suponhamos que μ é uma medida num espaço métrico (X, d) , todos os conjuntos abertos em X são μ -mensuráveis e $B \in \mathcal{B}_X$.*

- i) *Se $\mu(B) < \infty$ e $\epsilon > 0$, então B contém um conjunto fechado C para o qual*

$$\mu(B \setminus C) < \epsilon.$$

- ii) *Se B pode ser coberto por uma família enumerável de conjuntos abertos $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $\mu(V_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, então B está contido num conjunto aberto W para o qual*

$$\mu(W \setminus B) < \epsilon.$$

Demonstração. Ver o Teorema 2.2.2. em [Fed96, pág. 60 e 61]. Também o Teorema 1.10 em [Mat95, pág. 11 e 12]. $\square$

Definição 1.17 (Medida Borel-regular). Uma medida sobre um espaço topológico (X, τ) é chamada *Borel-regular* se μ é boreliana e, para cada $A \subset X$, existe $B \in \mathcal{B}_X$ para o qual $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.

Teorema 1.18. *Sejam μ uma medida Borel-regular em X e $A \subset X$ μ -mensurável com $\mu(A) < \infty$. Então,*

i) $\mu \ll A$ é Borel-regular.

ii) *Existem borelianos B e D tais que $D \subset A \subset B$ e $\mu(B \setminus D) = 0$.*

Demonstração. De fato, usando a Borel regularidade de μ para A existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$, logo como A é μ -mensurável temos $\mu(B \setminus A) = 0$.

1) Dado $C \subset X$, seja $D \in \mathcal{B}_X$ com $B \cap C \subset D$ e $\mu(B \cap C) = \mu(D)$. Então $C \subset D \cup B^c := E$, e

$$\mu \ll A(E) = \mu(A \cap E) \leq \mu(B \cap E) = \mu(B \cap D) \leq \mu(D) = \mu(B \cap C) = \mu(A \cap C) = \mu \ll A(C).$$

Como $C \subset E$, temos também $\mu \ll A(C) \leq \mu \ll A(E)$, de modo que $\mu \ll A(E) = \mu \ll A(C)$. Portanto $\mu \ll A$ é Borel-regular.

2) Pela Borel regularidade de μ , para $B \setminus A$ existe $E \in \mathcal{B}_X$, $B \setminus A \subset E$ e $\mu(E) = \mu(B \setminus A) = 0$. Agora, como $(B \cap A^c) = B \setminus A \subset E$ temos $E^c \subset (B \cap A^c)^c = B^c \cup A$, daí

$$B \setminus E = B \cap E^c \subset B \cap (B^c \cup A) = A.$$

Assim, temos o boreliano $D := B \setminus E \subset A$ com,

$$\mu(B \setminus D) = \mu(B \setminus (B \setminus E)) = \mu(E) = 0.$$

□

Observação 1.19. O item i) do Teorema 1.18 também é válido para qualquer medida Borel-regular em X e A boreliano, não necessariamente de medida finita. Além disso, do item ii) pode-se afirmar que, se μ é uma medida Borel-regular num espaço métrico, o Teorema 1.16 é válido para $B \in \sigma(\mu)$, não necessariamente boreliano.

Teorema 1.20 (Critério de Caratheodory). *Uma medida μ num espaço métrico (X, d) é de Borel se, e somente se,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

para todo $A, B \subset X$ que satisfaz $d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$.

Demonstração. Ver o Teorema 1.18 em [Ter19, pág. 6].

□

1.2 Funções mensuráveis

Agora vamos estender a noção de mensurabilidade de conjuntos para funções, considerando X um conjunto não vazio, Y um espaço topológico e μ uma medida em X .

Definição 1.21. Seja μ uma medida em X e $P(X)$ uma propriedade relativa aos pontos de X . Diz-se que P vale em quase todo X com respeito à medida μ se o complemento do conjunto $\{x \in X \mid P(x)\}$ tem medida nula, i.e. P vale μ -q.t. $x \in X$ se $\mu(X \setminus \{x \in X \mid P(x)\}) = 0$. Similarmente, dizemos que:

- Se $A, B \subset X$, B contem μ -q.t. A se, $\mu(A \setminus B) = 0$.
- Se f e g duas funções com valores em $\overline{\mathbb{R}}$, então $f(x) = g(x)$ para μ -q.t. x se

$$\mu(X \setminus \{x \mid f(x) = g(x)\}) = 0.$$

Neste caso, podemos usar a frase equivalente “ f e g são μ -quase sempre iguais”.

Definição 1.22 (Funções mensuráveis). Sejam μ uma medida em X e Y um espaço topológico. Uma função $f : \text{dom } f \subset X \rightarrow Y$ é chamada *mensurável em relação a μ* ou μ -mensurável se as seguintes condições forem válidas:

- i) seu domínio cobre μ -q.t. X , i.e. $\mu(X \setminus \text{dom } f) = 0$,
- ii) para todo $E \subset Y$ aberto, $f^{-1}(E)$ é μ -mensurável.

Definição 1.23. Seja μ uma medida sobre o espaço topológico (X, τ) . Dizemos que:

- i) Uma função $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma *função de Borel* se A é um conjunto de Borel e, para todo $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in A \mid f(x) < c\}$ é de Borel.
- ii) Se Y é um espaço topológico, a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma *aplicação de Borel* se, para todo aberto $U \subset Y$ o conjunto $f^{-1}(U)$ é de Borel.

Notação. Seja f uma função com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Usaremos as notações:

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad \text{e} \quad f = f^+ - f^-.$$

Todas as propriedades das funções μ -mensuráveis podem ser consultadas no 2.3.2 em [Fed96, pág. 73 e 74], também no Teorema 1.42 em [Ter19, pág. 15]. Para nosso uso, iremos destacar a seguinte propriedade:

Proposição 1.24. Sejam X um conjunto e μ uma medida em X . Uma função $f : \text{dom } f \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida μ -q.s. em X é μ -mensurável se, e somente se, para todo $T \subset X$ e $-\infty < a < b < \infty$,

$$\mu(T \cap \{x \mid f(x) \leq a\}) + \mu(T \cap \{x \mid f(x) \geq b\}) \leq \mu(T).$$

Demonstração. Ver 2.3.2 (7) em [Fed96, pág. 74 e 75]. □

Teorema 1.25 (Teorema de Lusin). Sejam μ uma medida Borel-regular num espaço métrico X , f uma função μ -mensurável com valores num espaço métrico separável Y , A um conjunto μ -mensurável para o qual $\mu(A) < \infty$ e $\epsilon > 0$. Então A contém um conjunto fechado C tal que $\mu(A \setminus C) < \epsilon$ e $f|_C$ é contínua.

Demonstração. Ver o Teorema 2.3.5 em [Fed96, pág. 76 e 77]. □

1.3 Integrais

Para nosso uso, mencionaremos aqui apenas algumas propriedades e observações sobre a Teoria da Integração conforme o descrito em [Fol99, Cap. 2], [Fed96, Sec. 2.4] e [Ter19, Sec 1.3].

Notação. Dados μ uma medida num conjunto X e f uma função μ -mensurável em X a valores em $[0, \infty]$, a *integral* de f com respeito a μ é denotada por

$$\int f \, d\mu \quad \text{ou} \quad \int f(x) \, d\mu(x).$$

Se f for uma função μ -mensurável em X a valores em $\overline{\mathbb{R}}$, diz-se que f é *integrável* se $\int f^+ \, d\mu < \infty$ ou $\int f^- \, d\mu < \infty$; em caso afirmativo, definimos

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Se $\int f^+ \, d\mu < \infty$ e $\int f^- \, d\mu < \infty$ (ou, equivalentemente, se $\int |f| \, d\mu < \infty$), diz-se que f é *somável*. Alguns autores usam a nomenclatura “integrável” para o que chamamos de “somável” e “quase integrável” para o que chamamos de “integrável”.

Finalmente, se $A \in \sigma(\mu)$ e f for uma função μ -mensurável em X a valores em $\overline{\mathbb{R}}$, definimos

$$\int_A f d\mu := \int \chi_A f d\mu$$

caso $\chi_A f$ seja integrável, onde χ_A denota a função característica de A .

Definição 1.26. Sejam μ uma medida sobre o conjunto X e f uma função $X \rightarrow [0, \infty]$, não necessariamente mensurável. Definimos a *integral inferior* de f por

$$\int_* f d\mu := \sup \left\{ \int \phi d\mu \mid \phi \mu\text{-mensurável, } \text{Im } \phi \subset [0, \infty) \text{ enumerável, } \phi \leq f \mu\text{-q.s.} \right\},$$

e analogamente a *integral superior* de f como

$$\int^* f d\mu := \inf \left\{ \int \psi d\mu \mid \psi \mu\text{-mensurável, } \text{Im } \psi \subset [0, \infty) \text{ enumerável, } f \leq \psi \mu\text{-q.s.} \right\}.$$

Proposição 1.27. Se uma função $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é μ -mensurável, então

$$\int f d\mu = \int_* f d\mu = \int^* f d\mu.$$

Observação 1.28. Sejam g uma função com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ e μ uma medida no conjunto X . Suponha que $g(x) \geq 0$ para μ -q.t. $x \in X$ e defina, para todo $A \subset X$,

$$\nu(A) := \int_A^* g d\mu := \int^* \chi_A g d\mu.$$

Então ν é uma medida em X , e todo conjunto μ -mensurável é ν -mensurável. Além disso, se μ for σ -finita, g é μ -mensurável e: 1) se μ for regular, ν também o é; 2) se X for um espaço topológico e μ for Borel-regular, ν também o é.

1.4 Construção de Caratheodory

Nesta seção, apresentaremos a construção de Caratheodory, a qual é um instrumento importante para obter medidas borelianas regulares em espaços métricos. Para mais detalhes, remetemos o leitor para o parágrafo 2.10.1 em [Fed96]. Isto será de utilidade na Seção 3.4.

Teorema 1.29 (Construção de Caratheodory). *Sejam (X, d) um espaço métrico, $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X e ζ uma função não-negativa definida sobre $\mathcal{F}$ tal que, para todo $S \in \mathcal{F}$, $0 \leq \zeta(S) \leq \infty$. Para todo $0 < \delta \leq \infty$, seja*

$$\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F} \cap \{S \mid \text{diam } S \leq \delta\}.$$

Para todo $A \subset X$ definimos

$$\mu_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{S \in \mathcal{G}} \zeta(S) \mid A \subset \bigcup \mathcal{G}, \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\delta \text{ enumerável} \right\}.$$

O fato de que $\mu_\delta \geq \mu_{\delta'}$ para $0 < \delta < \delta' \leq \infty$ implica, para todo $A \subset X$, a existência de

$$\nu(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(A).$$

Então μ_δ e ν são medidas em X .

Observação 1.30. Claramente μ_δ e ν são medidas sobre X . Do Critério de Caratheodory, Teorema 1.20, segue-se que todos os conjuntos abertos de X são ν -mensuráveis. De fato,

$$\mu_\delta(A \cup B) \geq \mu_\delta(A) + \mu_\delta(B)$$

sempre que $d(A, B) > \delta > 0$, porque, para cada cobertura $\mathcal{G}$ de $A \cup B$ consistindo de conjuntos cujos diâmetros não excedam δ , as famílias

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G} \cap \{S \mid S \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_B = \mathcal{G} \cap \{S \mid S \cap B \neq \emptyset\}$$

são disjuntas e cobrem A e B respectivamente.

Além disso, se todos os membros de $\mathcal{F}$ são conjuntos de Borel, então cada subconjunto de X está contido num conjunto de Borel com igual medida μ_δ para todo $\delta > 0$, e ν é uma medida Borel-regular. De fato, dados $A \subset X$ e $\delta > 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $(B_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ subfamília enumerável de $\mathcal{F}_\delta$ (em particular, todos os $B_{n,k}$ são borelianos) com $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,k}$ e

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta(B_{n,k}) \leq \mu_\delta(A) + \frac{1}{k}.$$

Pondo $B_\delta := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,k} \right)$, temos que B_δ é um conjunto de Borel tal que $A \subset B_\delta$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $B_\delta \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{n,k}$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_\delta(B_\delta) \leq \mu_\delta(A) + \frac{1}{k}.$$

Portanto $\mu_\delta(B_\delta) \leq \mu_\delta(A)$ e, como $A \subset B_\delta$, temos também $\mu_\delta(A) \leq \mu_\delta(B_\delta)$, de modo que $\mu_\delta(B_\delta) = \mu_\delta(A)$. Finalmente, pondo $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{1/n} \in \mathcal{B}_X$, por monotonicidade tem-se, para todo $\delta > 0$, $\mu_\delta(B) = \mu_\delta(A)$, logo

$$\nu(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_\delta(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_\delta(B) = \nu(B).$$

Então ν é Borel-regular, como afirmado.

Definição 1.31. Com a notação do teorema e observação acima, diremos que ν é o resultado da construção de Caratheodory com método ζ sobre $\mathcal{F}$, e nos referiremos a μ_δ como a δ -aproximação de ν .

Exemplo 1.32 (Medidas de Hausdorff). Seja m um real não negativo. Tome $\mathcal{F} = 2^X$ e $\zeta : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ dada por, para todo $S \subset X$,

$$\zeta(S) := \alpha(m) \frac{(\text{diam } S)^m}{2^m},$$

onde $\alpha(m) = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2+1)}$ (de modo a coincidir com o volume da bola unitária de $\mathbb{R}^m$ caso m seja inteiro). O resultado da construção de Caratheodory com método ζ sobre 2^X chama-se *medida de Hausdorff m -dimensional* em X , denotada por $\mathcal{H}^m$.

Proposição 1.33 ([Fed96, 2.2.13]). *Sejam X um espaço métrico completo separável, Y um espaço Hausdorff e μ uma medida em Y . Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e todo subconjunto fechado de Y é μ -mensurável, então para todo $B \in \mathcal{B}_X$, $f(B)$ é μ -mensurável.*

Definição 1.34. Sejam X e Y espaços topológicos e a função $f : X \rightarrow Y$. A *função de multiplicidade* de f , $N(f, y) : Y \rightarrow [0, \infty]$ é definida por

$$N(f, y) = \begin{cases} \#(f^{-1}\{y\}) & \text{se } f^{-1}\{y\} \text{ é finito} \\ \infty & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Teorema 1.35. *Sejam (X, d) um espaço métrico separável, ν uma medida sobre o espaço topológico Y , $f : X \rightarrow Y$ e suponha que para todo subconjunto de Borel $A \subset X$, $f(A)$ é ν -mensurável. Seja, para $S \subset X$, $\zeta(S) = \nu(f(S))$, e μ a medida sobre X obtida pela aplicação da construção de Caratheodory com o método ζ na família de todos os subconjuntos de Borel em X , então para todo $A \subset X$ boreliano, $N(f|_A, \cdot)$ é ν -mensurável e*

$$\mu(A) = \int N(f|_A, y) d\nu(y).$$

Demonstração. Ver Teorema 2.10.10 em [Fed96, pág 176].

□

Capítulo 2

Teoremas de Cobertura

Os teoremas de cobertura são ferramentas fundamentais em diferentes campos da Análise, usados para criar conexões entre propriedades locais e globais de medidas, e também refletem a geometria do espaço. Grosso modo, os vários teoremas de cobertura que estudaremos têm todos o mesmo objetivo qualitativo: a partir de uma cobertura arbitrária de um conjunto num espaço métrico, tenta-se extrair uma subfamília que seja, em algum sentido a ser precisado, a mais disjunta possível e que cubra quase todo o conjunto dado.

O foco do nosso estudo será dirigido a três tipos teoremas de cobertura: teoremas de cobertura para famílias adequadas em relação a uma medida, o teorema de Besicovitch-Federer e teoremas de cobertura para relações de cobertura de tipo μ -Vitali, os quais serão úteis para a teoria de diferenciação de medidas que iremos desenvolver no Capítulo 3.

Salvo menção em contrário, todos os teoremas deste capítulo são devidos a Federer (cf. [Fed96, seção 2.8]).

Notação. Consideramos um espaço métrico (X, d) fixo, $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos fechados não vazios em X e μ uma medida de Borel sobre X , a qual é finita nas partes limitadas de X .

2.1 Famílias adequadas

Definição 2.1 (Coberturas finas e adequadas). Dado $A \subset X$, diz-se que

- i) $\mathcal{F}$ cobre A finamente se, para todo $a \in A$, e todo $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $a \in F \subset \mathbb{U}(a, \epsilon)$.
- ii) $\mathcal{F}$ é μ -adequada para A se, para todo $U \subset X$ aberto, existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável tal que

$$\bigcup \mathcal{G} \subset U \quad \text{e} \quad \mu\left((U \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Teorema 2.2. Seja $\mathcal{K} \subset 2^X$ enumerável. Suponha que, para todo $A \in \mathcal{K}$, existe um número real $0 < \sigma(A) < 1$ tal que, para todo $W \subset X$ aberto, existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável com

$$\bigcup \mathcal{H} \subset W \quad \text{e} \quad \mu\left((W \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{H}\right) \leq \sigma(A) \mu(W \cap A).$$

Então, $\mathcal{F}$ é μ -adequada para $\bigcup \mathcal{K}$.

Demonstração. É suficiente considerar o caso em que todos os elementos de $\mathcal{K}$ são limitados, portanto μ -finitos. Com efeito, no caso geral podemos substituir $\mathcal{K}$ por

$$\mathcal{K}_b := \{A \cap \mathbb{U}(0, i) \mid A \in \mathcal{K}, i \in \mathbb{N}\}.$$

Então $\mathcal{K}_b$ é enumerável, $\bigcup \mathcal{K}_b = \bigcup \mathcal{K}$ e, para todo $A_b \in \mathcal{K}_b$, escolhemos $A \in \mathcal{K}$ e $i \in \mathbb{N}$ tais que $A_b = A \cap \mathbb{U}(0, i)$ e definimos $\sigma_b(A_b) := \sigma(A)$. Para todo $W \subset X$ aberto, podemos aplicar a hipótese para o aberto $W \cap \mathbb{U}(0, i)$ para concluir que existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável tal que

$$\bigcup \mathcal{H} \subset W \cap \mathbb{U}(0, i) \quad \text{e} \quad \mu\left((W \cap \mathbb{U}(0, i) \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{H}\right) \leq \sigma(A) \mu(W \cap \mathbb{U}(0, i) \cap A).$$

Portanto,

$$\bigcup \mathcal{H} \subset W \quad \text{e} \quad \mu\left((W \cap A_b) \setminus \bigcup \mathcal{H}\right) \leq \sigma_b(A_b) \mu(W \cap A_b),$$

o que mostra que $\mathcal{K}_b$ e $\sigma_b(A_b)$ satisfazem a hipótese do teorema.

Suponhamos, pois, que todos os elementos de $\mathcal{K}$ sejam limitados. Seja $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{K}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{K}$, $I_A := \{i \in \mathbb{N} \mid B_i = A\}$ é infinito. Fixe $V \subset X$ aberto. Definamos indutivamente sequências $(W_i)_{i \geq 0}$ e $(\mathcal{G}_i)_{i \geq 0}$ (onde, para cada $i \geq 0$, $W_i \subset X$ aberto e $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}$ finita disjunta) por:

- 1) $W_0 := V$ e $\mathcal{G}_0 := \emptyset$.
- 2) $W_1 := W_0 \setminus \bigcup \mathcal{G}_0 = V$. Aplique hipótese para $A = B_1 \in \mathcal{K}$, o que fornece $0 < \sigma(B_1) < 1$ e $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ disjunta tal que $\bigcup \mathcal{H} \subset W_1$ e $\mu((W_1 \cap B_1) \setminus \bigcup \mathcal{H}) \leq \sigma(B_1) \mu(W_1 \cap B_1)$.
 - a) Se $\mu(W_1 \cap B_1) = 0$, defina $\mathcal{G}_1 := \emptyset$ de modo que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$ finito disjunto e

$$\mu\left((W_1 \cap B_1) \setminus \bigcup \mathcal{G}_1\right) = 0 \leq \sigma(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(W_1 \cap B_1).$$

- b) Se $\mu(W_1 \cap B_1) > 0$, então $\sigma(B_1) \mu(W_1 \cap B_1) < \sigma(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(W_1 \cap B_1)$. Como $\{W_1 \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_i\}_{n \in \mathbb{N}}$ decresce para $W_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}$ e como $\mu \ll B_1$ é uma medida Boreliana finita, pela continuidade para baixo, Teorema 1.4 item v), da medida $\mu \ll B_1$ obtém-se $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\mu\left((W_1 \cap B_1) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_i\right) < \sigma(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(W_1 \cap B_1).$$

Defina $\mathcal{G}_1 := \{\mathcal{H}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Em qualquer dos dois casos, obtém-se $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$ finita disjunta tal que

$$\bigcup \mathcal{G}_1 \subset W_1 \quad \text{e} \quad \mu\left((W_1 \cap B_1) \setminus \bigcup \mathcal{G}_1\right) < \sigma(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(W_1 \cap B_1).$$

- 3) Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(\mathcal{G}_i)_{1 \leq i \leq n}$ tais que, para $1 \leq i \leq n$,

- $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}$ finita disjunta com $\bigcup \mathcal{G}_i \subset W_i$;
- $W_i = W_{i-1} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{i-1}$ (portanto, W_i é aberto em X);
- $\mu((W_i \cap B_i) \setminus \bigcup \mathcal{G}_i) < \sigma(B_i)^{\frac{1}{2}} \mu(W_i \cap B_i)$.

Definimos $W_{n+1} := W_n \setminus \bigcup \mathcal{G}_n$ e, para definir $\mathcal{G}_{n+1}$, reaplicamos o argumento do passo 2) com W_{n+1} no lugar de W_1 e B_{n+1} no lugar de B_1 .

Note que $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de abertos de V e, se $1 \leq i < j$, $\mathcal{G}_i$ é disjunta de $\mathcal{G}_j$, pois $\bigcup \mathcal{G}_j \subset W_j \subset W_{i+1} = W_i \setminus \bigcup \mathcal{G}_i$. Portanto, $\mathcal{G} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_i \subset \mathcal{F}$ é enumerável e disjunta, e $\bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\bigcup \mathcal{G}_i) \subset W_1 = V$. Além disso, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $\bigcup \mathcal{G}_i = W_i \setminus W_{i+1}$, donde

$$V \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i \setminus W_{i+1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigcup \mathcal{G}_i \right) = \bigcup \mathcal{G},$$

de modo que $V \setminus \bigcup \mathcal{G} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i$. Assim, para todo $A \in \mathcal{K}$, $(V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G} = A \cap (\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_i)$, o que implica, tendo em vista que $\mu \ll A$ é uma medida Boreliana finita e que $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de abertos:

$$\mu \left((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G} \right) = \lim \mu(A \cap W_i).$$

Seja $\ell := \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap W_i) < \infty$. Para todo $i \in I_A = \{i \in \mathbb{N} \mid B_i = A\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mu(A \cap W_{i+1}) &= \mu(B_i \cap W_{i+1}) = \mu \left(B_i \cap \left(W_i \setminus \bigcup \mathcal{G}_i \right) \right) = \mu \left((B_i \cap W_i) \setminus \bigcup \mathcal{G}_i \right) < \\ &< \sigma(B_i)^{\frac{1}{2}} \mu(W_i \cap B_i) = \sigma(A)^{\frac{1}{2}} \mu(W_i \cap A). \end{aligned}$$

Como I_A é infinito, temos que $\{\mu(A \cap W_{i+1})\}_{i \in I_A}$ e $\{\mu(A \cap W_i)\}_{i \in I_A}$ são ambas subsequências de $\{\mu(A \cap W_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, logo convergem ambas para ℓ ; daí podemos concluir que $\ell \leq \sigma(A)^{\frac{1}{2}} \ell$, o que implica $\ell = 0$, pois $0 < \sigma(A) < 1$.

Está provado, pois, que $\mu((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$ para todo $A \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ é enumerável, segue

$$\mu \left(\left(V \cap \bigcup \mathcal{K} \right) \setminus \bigcup \mathcal{G} \right) \leq \sum_{A \in \mathcal{K}} \mu \left((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G} \right) = 0,$$

donde a tese. □

Corolário 2.3. *Seja $\mathcal{K} \subset 2^X$ enumerável. Se $\mathcal{F}$ é μ -adequada para cada $A \in \mathcal{K}$, então $\mathcal{F}$ é μ -adequada para $\bigcup \mathcal{K}$.*

Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{K}$, seja $0 < \sigma(A) < 1$ arbitrário. Como $\mathcal{F}$ é μ -adequada para A , temos que para todo $U \subset X$ aberto, existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável tal que

$$\bigcup \mathcal{G} \subset U \quad \text{e} \quad \mu \left((U \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G} \right) = 0 \leq \sigma(A) \mu(U \cap A).$$

Então pelo Teorema 2.2, $\mathcal{F}$ é μ -adequada para $\bigcup \mathcal{K}$. □

O seguinte teorema é uma versão abstrata do *teorema de cobertura de Vitali* ou “five times covering lemma” (cf. [EG91, Teorema 1.24], [Sim83, Lema 3.4]).

Teorema 2.4. *Sejam δ uma função não negativa e limitada em $\mathcal{F}$ e $1 < \tau < \infty$. Então $\mathcal{F}$ admite uma subfamília disjunta $\mathcal{G}$ tal que, para todo $T \in \mathcal{F}$, existe $S \in \mathcal{G}$ com*

$$T \cap S \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \delta(T) \leq \tau \delta(S).$$

Demonstração. Seja Ω a classe de todas as subfamílias disjuntas $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $T \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} &\text{ou } T \cap S = \emptyset \text{ para todo } S \in \mathcal{H}, \\ &\text{ou } T \cap S \neq \emptyset \text{ e } \delta(T) \leq \tau \delta(S) \text{ para algum } S \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ω está parcialmente ordenado pela inclusão e podemos aplicar o Lema de Zorn para concluir que Ω admite um elemento maximal $\mathcal{G}$. Seja $\mathcal{K} := \mathcal{F} \cap \{T \mid T \cap \bigcup \mathcal{G} = \emptyset\}$. Se $\mathcal{K} \neq \emptyset$, tendo em vista que $\tau > 1$ e $\sup\{\delta(T) \mid T \in \mathcal{K}\} < \infty$ (pois δ é limitada, por hipótese), poderíamos escolher um $W \in \mathcal{K}$ tal que

$$\sup\{\delta(T) \mid T \in \mathcal{K}\} \leq \tau \delta(W).$$

Note que $W \notin \mathcal{G}$, pois $W \in \mathcal{G}$ contradiz a definição de $\mathcal{K}$, e daí se conclui que $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{G} \cup \{W\} = \tilde{\mathcal{G}}$. Agora, para todo $T \in \mathcal{F}$, se $T \cap \bigcup \mathcal{G} = \emptyset$ e $T \cap W \neq \emptyset$, então $T \in \mathcal{K}$, logo $\delta(T) \leq \tau \delta(W)$. Portanto $\tilde{\mathcal{G}} \in \Omega$ contrariando a maximalidade de $\mathcal{G}$.

Então $\mathcal{K} = \emptyset$, o que significa que, para todo $T \in \mathcal{F}$, $T \notin \{T \mid T \cap \bigcup \mathcal{G} = \emptyset\}$, ou seja, $T \cap \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{G} \in \Omega$, pela definição de Ω conclui-se que existe $S \in \mathcal{G}$ tal que $T \cap S \neq \emptyset$ e $\delta(T) \leq \tau \delta(S)$. $\square$

Os corolários a seguir obtêm-se como consequência do Teorema 2.4, e para seu uso como suas aplicações usaremos a definição a seguir.

Definição 2.5 (Ampliação). Seja δ uma função não negativa em $\mathcal{F}$ e $1 < \tau < \infty$. Definimos, para cada membro $S \in \mathcal{F}$, a sua (δ, τ) -ampliação como

$$\widehat{S} := \bigcup \{T \mid T \in \mathcal{F}, T \cap S \neq \emptyset, \delta(T) \leq \tau \delta(S)\}.$$

Corolário 2.6. *Seja $\mathcal{G}$ uma subfamília disjunta de $\mathcal{F}$ satisfazendo a tese do Teorema 2.4. Então*

$$\bigcup \mathcal{F} \subset \bigcup \{\widehat{S} \mid S \in \mathcal{G}\}.$$

Corolário 2.7. *Sejam $A \subset X$ e $\mathcal{G}$ uma subfamília disjunta de $\mathcal{F}$ satisfazendo a tese do Teorema 2.4. Se $\mathcal{F}$ cobre A finamente e $\mathcal{H}$ é um subconjunto finito qualquer de $\mathcal{G}$, então*

$$A \setminus \bigcup \mathcal{H} \subset \bigcup \{\widehat{S} \mid S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}\}.$$

Demonstração. Note que $\bigcup \mathcal{H}$ é fechado, por ser uma união finita de fechados. Como $\mathcal{F}$ cobre A finamente, cada ponto de $A \setminus \bigcup \mathcal{H}$ pertence a algum $T \in \mathcal{F}$ tal que $T \cap \bigcup \mathcal{H} = \emptyset$. Daí, pelo Teorema 2.4 existe $S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ tal que $T \cap S \neq \emptyset$ e $\delta(T) \leq \tau \delta(S)$, de modo que $T \subset \widehat{S}$. Portanto,

$$A \setminus \bigcup \mathcal{H} \subset \bigcup \{\widehat{S} \mid S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}\}.$$

$\square$

Teorema 2.8. *Sejam $A \subset X$, δ uma função limitada não negativa em $\mathcal{F}$, $1 < \tau < \infty$, $1 < \lambda < \infty$. Se $\mathcal{F}$ cobre A finamente e $\mu(\widehat{S}) < \lambda \mu(S)$ sempre que $S \in \mathcal{F}$ e $\widehat{S}$ é a (δ, τ) -ampliação de S , então, $\mathcal{F}$ é μ -adequada para A .*

Demonstração. Pelo Corolário 2.3 podemos assumir que A é limitado. Para todo aberto limitado $V \subset X$ temos que

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cap \{S \mid S \subset V\}$$

cobre $V \cap A$ finamente; portanto, pelo Corolário 2.7 existe uma subfamília disjunta $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$ tal que, para toda $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}'$ finita,

$$(V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{H} \subset \bigcup \{\widehat{S} \mid S \in \mathcal{G}' \setminus \mathcal{H}\}.$$

Note que, para todo $S \in \mathcal{G}'$, $\mu(S) > 0$ (pois, por hipótese, $\mu(S) > \lambda^{-1} \mu(\widehat{S})$). Além disso,

$$\sum_{S \in \mathcal{G}'} \mu(\widehat{S}) \leq \lambda \sum_{S \in \mathcal{G}'} \mu(S) \leq \lambda \mu(V) < \infty.$$

Conclui-se, portanto, que $\mathcal{G}'$ é enumerável. Agora,

$$\sum_{S \in \mathcal{G}'} \mu(\widehat{S}) = \sup \left\{ \sum_{S \in \mathcal{H}} \mu(\widehat{S}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{G}' \text{ finito} \right\}.$$

Dai, para todo $\epsilon > 0$, existe uma subfamília finita $\mathcal{H}' \subset \mathcal{G}'$ tal que

$$\sum_{S \in \mathcal{G}'} \mu(\hat{S}) < \sum_{S \in \mathcal{H}'} \mu(\hat{S}) + \epsilon,$$

donde

$$\sum_{S \in \mathcal{G}' \setminus \mathcal{H}'} \mu(\hat{S}) < \epsilon.$$

Logo, tendo em vista que $\mathcal{H}'$ é finita,

$$\mu\left((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}'\right) \leq \mu\left((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{H}'\right) \leq \mu\left(\bigcup \{\hat{S} \mid S \in \mathcal{G}' \setminus \mathcal{H}'\}\right) \leq \sum_{S \in \mathcal{G}' \setminus \mathcal{H}'} \mu(\hat{S}) < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, conclui-se que $\mu((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}') = 0$.

Agora, para $V \subset X$ um aberto arbitrário (i.e. não necessariamente limitado), podemos tomar um aberto limitado $W \subset V$ tal que $V \cap A = W \cap A$ (por exemplo, tomamos W como sendo a intersecção de V com uma bola aberta de raio suficientemente grande que contenha o limitado A). Dai, aplicando o caso já provado para o aberto W , existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ enumerável disjunta tal que $\bigcup \mathcal{G} \subset W \subset V$ e $\mu((V \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}) = \mu((W \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$. $\square$

2.2 Espaços métricos direcionalmente limitados

A fim de enunciar e demonstrar o Teorema da Cobertura de Besicovitch-Federer na próxima seção, introduziremos a noção de *espaço métrico direcionalmente limitado*, proposta por Federer no parágrafo 2.8.9. de [Fed96, pág. 145]. Tentaremos detalhar e ilustrar as ideias geométricas subjacentes (tais ideias nos parecem estar implícitas no Federer, mas o que segue é a nossa interpretação) a esta noção nas seguintes definições e exemplos.

Definição 2.9 (Ponto metricamente intermediário a dois pontos dados num espaço métrico). Sejam (X, d) um espaço métrico e $a, b \in X$. Diz-se que $x \in X$ é um ponto *metricamente intermediário* aos pontos a e b se $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$.

Exemplo 2.10. Sejam dois pontos distintos $a, b \in \mathbb{R}^2$ com a distância euclidiana temos que x é um ponto metricamente intermediário entre a e b se ele está em $L = \{\alpha a + \beta b \mid \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$ como na Figura 2.1. Agora, se $\mathbb{R}^2$ tem a distância Manhattan (i.e. a distância induzida pela norma $\|\cdot\|_1$), o x é um ponto metricamente intermediário entre a e b se ele está em $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ como na Figura 2.2.

Figura 2.1: O ponto x metricamente intermediário entre a e b dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ com a distância euclidiana.

Figura 2.2: O ponto x metricamente intermediário entre a e b dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ com a distância Manhattan.

Definição 2.11 (Conjunto suficientemente espalhado em torno de um ponto). Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$, $B \subset X \setminus \{a\}$ e $\eta > 0$. Diz-se que B é η -suficientemente espalhado em torno de a se, para todos $b \neq c$ em B com $d(b, a) \geq d(c, a)$, para todo x metricamente intermediário a b e a na esfera de centro a e raio $d(c, a)$, tem-se $d(x, c) \geq \eta d(c, a)$.

Figura 2.3: Temos $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ conjunto suficientemente espalhado ao ponto a em $\mathbb{R}^n$ com a distância euclidiana.

Definição 2.12 (Métricas direcionalmente limitadas). Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$, $\xi \in (0, \infty]$, $\eta \in (0, \frac{1}{3}]$ e ζ um inteiro positivo. Diz-se que

- i) d é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A se, para todo $a \in A$ e todo $B \subset A \cap (\mathbb{U}(a, \xi) \setminus \{a\})$ η -suficientemente espalhado em torno de a , tem-se $\text{card}(B) \leq \zeta$.
- ii) X é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitado se d for (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em $A = X$.
- iii) (X, d) é um espaço métrico direcionalmente limitado se for (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitado para algum terno (ξ, η, ζ) .

Seguindo [Fed96], apresentamos dois exemplos de espaços métricos direcionalmente limitados. O Exemplo 2.13, no qual X é um espaço vetorial de dimensão finita, motiva o termo “*direcional*”. O segundo exemplo 2.14, no qual X é uma variedade Riemanniana (de classe maior ou igual a 2) munido da métrica intrínseca, foi o que levou a Federer a formular o conceito geral.

Em [Ito18] é provado que, no espaço euclidiano, a métrica parabólica não é direcionalmente limitada; em [BL16] são apresentados dois espaços métricos que não são direcionalmente limitados.

Exemplo 2.13 (Espaços normados de dimensão finita). Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado de dimensão finita. Para $\xi = \infty$ e para todo $\eta \in (0, \frac{1}{3}]$, existe ζ inteiro positivo tal que X é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitado.

Com efeito, sejam $a \in X$ e $B \subset X \setminus \{a\}$ η -suficientemente espalhado em torno de a . Fazendo uma translação da situação toda, basta considerar o caso $a = 0$. Dados $b, c \in B$ com $b \neq c$ e $\|b\| \geq \|c\|$, o ponto

$$x := \frac{\|c\|}{\|b\|}b$$

está na esfera de centro 0 e raio $\|c\|$ e está metricamente intermediário entre 0 e b . Portanto, $\|x - c\| \geq \eta\|c\|$, o que é equivalente a

$$\left\| \frac{b}{\|b\|} - \frac{c}{\|c\|} \right\| \geq \eta.$$

Portanto, conclui-se que dois pontos distintos quaisquer b, c de B se projetam na esfera unitária de $(X, \|\cdot\|)$ em pontos cuja distância é maior ou igual a η .

Segue-se que a projeção radial define uma bijeção de B sobre um conjunto de pontos da esfera unitária cuja distância um do outro é maior ou igual a η . Denote por ζ o supremo dos cardinais de todos os subconjuntos da esfera unitária de $(X, \|\cdot\|)$ que gozam da referida propriedade; então é claro que $\text{card}(B) \leq \zeta$.

Basta verificar, pois, que ζ é finito. De fato, como a referida esfera unitária é compacta, podemos cobri-la com um número finito N de abertos com diâmetro estritamente menor que η ; daí $\zeta \leq N$, pois, para qualquer conjunto de pontos da esfera com cardinal maior ou igual a $N + 1$, pelo princípio da casa dos pombos ao menos dois pontos de tal conjunto pertencerão ao mesmo aberto da cobertura e, portanto, a distância entre eles será estritamente menor que η .

Para o seguinte exemplo, a teoria e notação sobre variedades e métricas Riemannianas pode ser consultada em [dC15, Cap. 0 e 1]; consultar também a Lista de Símbolos (ver pág. ix).

Exemplo 2.14 (Variedades Riemannianas). Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e d a distância riemanniana em M . Verifiquemos que, para todo $A \subset M$ compacto, d é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A se tomarmos $\xi > 0$ tal que $\mathbb{U}(p, \xi)$ seja uma bola normal para todo $p \in A$ (que existe, em virtude da compacidade de A), $\eta \in (0, \frac{1}{3}]$ qualquer e ζ inteiro positivo convenientemente escolhido, conforme abaixo.

- 1) Existe $\lambda > 0$ tal que, substituindo ξ por $\xi/2$, se necessário, λ é constante de Lipschitz para $\exp_p : \mathbb{U}(0_p, \xi) \subset T_p M \rightarrow \mathbb{U}(p, \xi) \subset M$ para todo $p \in A$.

Com efeito, como $K := \bigcup_{p \in A} \mathbb{B}(0_p, \xi/2) \subset \text{dom exp} \subset TM$ é compacto e a função $\text{dom exp} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v_p \mapsto \|(\exp_p)_* v_p\|_{L(T_p M, T_{\exp_p(v_p)} M)}$ é contínua (vide a Observação 2.15 ao final da prova), tem-se

$$\lambda := \sup \left\{ \|(\exp_p)_* v_p\|_{L(T_p M, T_{\exp_p(v_p)} M)} \mid v_p \in K \right\} < \infty.$$

Afirmo que, para todo $p \in A$, λ é constante de Lipschitz para

$$\exp_p : \mathbb{U}(0_p, \xi/2) \subset \mathbb{T}_p \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{U}(p, \xi/2) \subset \mathbb{M}.$$

De fato, dados $p \in A$, $v, w \in \mathbb{U}(0_p, \xi/2) \subset \mathbb{T}_p \mathbb{M}$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{U}(0_p, \xi/2)$ curva seccionalmente $\mathcal{C}^1$ ligando v a w , tem-se $\Gamma := \exp_p \circ \gamma$ seccionalmente $\mathcal{C}^1$ ligando $\exp_p v$ a $\exp_p w$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(\exp_p v, \exp_p w) &\leq \ell(\Gamma) = \int_0^1 \|\Gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|(\exp_p)_* \gamma'(t)\| dt \\ &\leq \lambda \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \lambda \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Tomando-se o ínfimo do segundo membro para γ no conjunto das curvas seccionalmente $\mathcal{C}^1$ a valores em $\mathbb{U}(0_p, \xi/2)$ ligando v a w , conclui-se que

$$d(\exp_p v, \exp_p w) \leq \lambda \|v - w\|_{\mathbb{T}_p \mathbb{M}},$$

o que prova a afirmação.

- 2) Sejam $a \in A$ e $B \subset \mathbb{U}(a, \xi) \setminus \{a\}$ η -suficientemente espalhado em torno de a . Provemos que $\text{card}(B) \leq \zeta$, onde ζ é a cardinalidade máxima de um subconjunto da esfera unitária do $\mathbb{R}^n$ (munido da norma euclidiana) cujos pontos distam entre si $\frac{\eta}{\lambda}$ ou mais; conforme visto no exemplo anterior, ζ é um inteiro positivo.

Com efeito, dados $b \neq c \in B$ com $d(b, a) \geq d(c, a)$, seja x o ponto obtido pela intersecção da esfera geodésica de centro a e raio $d(a, c)$ com o traço da geodésica radial de a até c (a qual é minimizante, pois $\mathbb{U}(a, \xi) \subset \mathbb{M}$ é uma bola normal). Então x está metricamente intermediário entre a e b , de modo que, pela hipótese sobre B , $d(x, c) \geq \eta d(a, c)$. Denotando com um “til” as imagens dos pontos a, b, c, x em $\mathbb{U}(0_a, \xi) \subset \mathbb{T}_a \mathbb{M}$ por $\exp_a^{-1}$, $\tilde{x}$ é um ponto na intersecção do segmento $[\tilde{a} = 0_a, \tilde{b}]$ com a esfera de centro 0_a e raio $d(a, c) = \|\tilde{c}\|_{\mathbb{T}_a \mathbb{M}}$ de $(\mathbb{T}_a \mathbb{M}, \mathbf{g}_a)$; em vista do item anterior, tem-se

$$\|\tilde{x} - \tilde{c}\|_{\mathbb{T}_a \mathbb{M}} \geq \frac{1}{\lambda} d(x, c) \geq \frac{\eta}{\lambda} d(a, c) = \frac{\eta}{\lambda} \|\tilde{c}\|_{\mathbb{T}_a \mathbb{M}}.$$

Daí se conclui que

$$\underbrace{\left\| \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|} - \frac{\tilde{c}}{\|\tilde{c}\|} \right\|_{\mathbb{T}_a \mathbb{M}}}_{=\frac{\tilde{b}}{\|\tilde{b}\|}} \geq \frac{\eta}{\lambda}.$$

Portanto, a projeção radial de $\mathbb{T}_a \mathbb{M}$ composta com $\exp_a^{-1}$ leva B bijetivamente sobre um conjunto da esfera unitária de $(\mathbb{T}_a \mathbb{M}, \mathbf{g}_a)$ cujos pontos distam entre si $\frac{\eta}{\lambda}$ ou mais. Como $(\mathbb{T}_a \mathbb{M}, \mathbf{g}_a)$ é linearmente isométrico ao $\mathbb{R}^n$ com a norma euclidiana, segue-se que o cardinal de um tal conjunto é menor ou igual a ζ , i.e. $\text{card}(B) \leq \zeta$, como afirmado.

Observação 2.15. Sejam $\mathbb{M}$ variedade diferenciável e $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ fibrados riemannianos sobre $\mathbb{M}$. Então a aplicação $\|\cdot\| : \mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T \in \mathbf{L}(\mathbf{E}_q, \mathbf{F}_q) \mapsto \|T\|_{\mathbf{L}(\mathbf{E}_q, \mathbf{F}_q)}$ (i.e. associa cada T à sua norma de operador) é contínua.

Com efeito, em alguma vizinhança U de cada ponto de $\mathbb{M}$ podemos trivializar $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ por referenciais ortonormais $\mathcal{E} := (E_1, \dots, E_n)$ e $\mathcal{F} := (F_1, \dots, F_m)$, com respectivos correferenciais duais $(E^1, \dots, E^n)$ e $(F^1, \dots, F^m)$. Então $(E^i \otimes F_j)_{i,j}$ pode ser usado para trivializar $\mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})|_U \equiv U \times \mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; como as trivializações por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são isometrias lineares nas fibras, o representante

de $\|\cdot\|$ na trivialização acima é dado pela projeção no segundo fator seguida pela norma de operador de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, a qual é contínua.

Para mostrar que, na prova do teorema acima, a função $\text{dom exp} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v_p \mapsto \|(\exp_p)_* v_p\|_{L(T_p M, T_{\exp_p(v_p)} M)}$$

é contínua, tomamos $\mathcal{U} := \text{dom exp}$ (um aberto de TM contendo a seção nula), $E := \text{VTM}|_{\mathcal{U}}$ (i.e. a restrição do fibrado vertical de $\tau_M : \text{TM} \rightarrow M$ a $\mathcal{U}$) e $F := \exp^* \text{TM}$ (i.e. o fibrado pullback de TM pela exponencial $\exp : \mathcal{U} \subset \text{TM} \rightarrow M$), os quais são fibrados riemannianos com as métricas induzidas pelo tensor métrico g de M . A função em questão é obtida pela composição de $\|\cdot\| : L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ (a qual é contínua, como vimos acima) com a aplicação $C^\infty \mathcal{U} \rightarrow L(E, F)$ dada por $v_p \mapsto (\exp_p)_* v_p \in L(T_{v_p}(T_p M), T_{\exp_p(v_p)} M) \equiv L(E, F)_{v_p}$.

Como a discussão sobre famílias de bolas fechadas envolve uma referência constante a centros e raios, e como nem o centro nem o raio de uma bola precisam ser únicos, provaremos certas proposições sobre os subconjuntos $P \subset X \times \{r \mid 0 < r < \infty\}$ e, posteriormente, associando-se a cada par $(a, r) \in P$ a bola fechada $\mathbb{B}(a, r)$, serão obtidos resultados sobre suas famílias correspondentes $\{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in P\}$.

Definição 2.16 (Conjunto τ -controlado). Sejam (X, d) um espaço métrico, $P \subset X \times (0, \infty)$ e $1 < \tau < \infty$. Diz-se que P é τ -controlado se, para todos $(a, r), (b, s)$ distintos em P ,

$$d(a, b) > r > s/\tau \quad \text{ou} \quad d(a, b) > s > r/\tau.$$

Em particular, com a condição acima, tem-se $a \neq b$ e $\mathbb{B}(a, r) \neq \mathbb{B}(b, s)$, pois $b \notin \mathbb{B}(a, r)$ ou $a \notin \mathbb{B}(b, s)$.

Temos uma vaga intuição geométrica sobre o significado da definição acima, mas não temos clareza sobre qual foi a ideia que motivou Federer. Eis o que interpretamos: associando-se a cada par $(a, r) \in P$ a bola fechada $\mathbb{B}(a, r)$, a ideia é que as tais bolas fiquem “suficientemente separadas”, de modo a serem verificadas as observações abaixo:

1. Duas tais bolas, digamos, associadas as pares (a, r) e (b, s) , podem se intersectar, mas a intersecção não pode conter ambos os centros a e b . Isso decorre da primeira desigualdade na definição, i.e. $d(a, b) > r$ ou $d(a, b) > s$.
2. A segunda desigualdade, i.e. $r > s/\tau$ ou $s > r/\tau$, controla, de certa forma, o tamanho da intersecção das bolas da família. Por exemplo, com esta condição, garante-se a existência de um $0 < k < 1$ tal que, se multiplicarmos os raios de todas as bolas por esta mesma constante k , as bolas ficam duas a duas disjuntas; $k = \frac{1}{1+\tau}$ funciona para isso.

Lema 2.17. Sejam (X, d) um espaço métrico, $1 < \tau < \infty$, $0 < \lambda < \infty$ e $Q \subset X \times (0, \lambda)$ não vazio. Então Q possui um subconjunto R tal que:

- i) Se $(a, r), (b, s) \in R$ são distintos, então $d(a, b) > r + s$.
- ii) Para todo $(a, r) \in Q$, existe $(b, s) \in R$ tal que $d(a, b) \leq r + s$ e $s > r/\tau$.

Pensando na interpretação dos pares ordenados em $X \times (0, \lambda)$ em termos de bolas fechadas, o lema acima é uma versão abstrata do Teorema 2.4, ou seja, uma abstração do teorema de cobertura de Vitali no caso em que $\mathcal{F}$ é uma família de bolas fechadas e a função δ daquele teorema é o raio das bolas (num espaço métrico em que o raio das bolas não fique intrinsecamente determinado, δ é uma escolha do raio para cada bola da família $\mathcal{F}$).

Demonstração. Consideremos Ω a classe de todos os subconjuntos R de Q que satisfazem *i*) assim como a seguinte condição:

iii) Para todo $(a, r) \in Q$

$$\begin{aligned} &\text{ou } d(a, b) > r + s, \text{ para todo } (b, s) \in R, \\ &\text{ou } d(a, b) \leq r + s \text{ e } s > r/\tau \text{ para algum } (b, s) \in R. \end{aligned}$$

Temos que Ω é diferente de vazio (pois $\emptyset \in \Omega$) e está ordenado parcialmente pela inclusão. Dado $T \subset \Omega$ totalmente ordenado, $R := \bigcup T \in \Omega$ é um limitante superior para T . Podemos, pois, aplicar o Lema de Zorn para concluir que Ω admite um elemento maximal.

Supondo que R seja um tal elemento maximal em Ω e não satisfaça *ii*), a condição *iii*) implica que existe $(a, r) \in Q$ tal que, para todo $(b, s) \in R$, $d(a, b) > r + s$. Ou seja, o conjunto

$$K := Q \cap \{(a, r) \mid d(a, b) > r + s, \text{ para todo } (b, s) \in R\}$$

é não vazio. É possível tomar $(c, t) \in K$ com $\tau t > \sup\{r \mid (a, r) \in K\}$ porque $\tau > 1$ e o sup é finito (pois $\lambda < \infty$). Note que $(c, t) \notin R$, caso contrário obteríamos uma contradição com $(b, s) = (c, t)$, i.e. $0 = d(c, c) > 2t$.

Seja $\tilde{R} := R \cup \{(c, t)\} \supsetneq R$. Provemos que $\tilde{R} \in \Omega$. De fato, é claro que $\tilde{R}$ satisfaz *i*). Agora, dado $(a, r) \in Q$, se não valer a primeira condição de *iii*) para $\tilde{R}$, existe $(b, s) \in \tilde{R}$ tal que $d(a, b) \leq r + s$. Se $(b, s) \in R$, então vale a segunda condição de *iii*) porque $R \in \Omega$. Se, por outro lado $d(a, b) > r + s$ para todo $(b, s) \in R$ e $d(a, c) \leq r + t$, então $(a, r) \in K$, logo $r < \tau t$ pela escolha de (c, t) , portanto vale a segunda condição de *iii*) com $(b, s) = (c, t)$. Então $\tilde{R} \in \Omega$ contrariando a maximalidade de R . Portanto, qualquer elemento maximal R de Ω deve satisfazer a condição *ii*). □

Teorema 2.18. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Suponha que d seja (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A e que $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaça*

$$1 < \tau < 2 - \eta, \quad \eta + \frac{\tau}{2 - \eta} + \tau(\tau - 1) < 1. \quad (2.1)$$

Seja P um subconjunto τ -controlado de $A \times (0, \infty)$. Se existir $(a, r) \in P$ tal que, para todo $(b, s) \in P$,

$$d(a, b) < \xi, \quad d(a, b) \leq r + s \quad \text{e} \quad s > r/\tau,$$

então $\text{card } P \leq 2\zeta + 1$.

Note que, como $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$, temos que $\eta + \frac{1}{2 - \eta} \leq \frac{1}{3} + \frac{3}{5} < 1$. Assim, qualquer número um pouco maior que 1 é uma escolha permissível para τ .

Demonstração. Suponha que exista $(a, r) \in P$ satisfazendo a hipótese. Com $k = \frac{2 - \eta}{\tau} > 1$, definamos

$$\begin{aligned} P_1 &:= P \cap \{(b, s) \mid 0 < d(a, b) \leq kr\}, \\ P_2 &:= P \cap \{(b, s) \mid d(a, b) > kr\}. \end{aligned}$$

Como P é τ -controlado, para $j = 1, 2$ a projecção no primeiro fator induz uma correspondência um a um entre P_j e o conjunto

$$B_j = \{b \mid (b, s) \in P_j \text{ para algum } s\}.$$

Verifiquemos que B_j é η -suficientemente espalhado em torno de a , no sentido da Definição 2.11. Para todo (b, s) e (c, t) membros distintos de P_j , com $d(a, b) \geq d(a, c)$ e $x \in X$ metricamente

intermediário entre b e a (cf. 2.9) na esfera de centro a e raio $d(a, c)$, tem-se:

$$d(b, c) \leq d(b, x) + d(x, c) = d(a, b) - d(a, x) + d(x, c) = d(a, b) - d(a, c) + d(x, c).$$

Portanto,

$$d(x, c) \geq d(a, c) + d(b, c) - d(a, b). \quad (2.2)$$

1) No caso $j = 1$, usamos as desigualdades

$$\begin{aligned} d(b, c) &> \inf\{s, t\} > r/\tau, & kr &\geq d(a, b), \\ d(a, c) &> \inf\{r, t\} > r/\tau, & k\tau - 1 &= 1 - \eta > 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d(x, c) &> d(a, c) + \frac{r}{\tau} - kr = d(a, c) - \frac{r}{\tau}(k\tau - 1) = d(a, c) - \frac{r}{\tau}(1 - \eta) > \\ &> d(a, c) (1 - (1 - \eta)) = d(a, c) \eta. \end{aligned}$$

2) Para o caso $j = 2$, pela hipótese e pela definição de P_2 , temos $d(a, b) \leq r + s$, $d(a, c) > kr$, bem como

$$\begin{aligned} d(b, c) &> s \quad \text{ou} \quad d(b, c) > t > s/\tau, & \text{portanto} \quad d(b, c) - s &> t - \tau t, \\ d(a, c) &> t \quad \text{ou} \quad d(a, c) > r > t/\tau, & \text{portanto} \quad d(a, c) &> t/\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} d(x, c) &\stackrel{(2.2)}{\geq} d(a, c) + d(b, c) - d(a, b) \geq \\ &\geq d(a, c) + d(b, c) - (r + s) = (d(a, c) - r) + (d(b, c) - s) > \\ &> d(a, c) - r + t(1 - \tau) = d(a, c) - r - t(\tau - 1) \stackrel{-r > -k^{-1}d(a, c), -t > -\tau d(a, c)}{>} \\ &> d(a, c) - k^{-1}d(a, c) - \tau d(a, c)(\tau - 1) = \\ &= d(a, c) (1 - k^{-1} - \tau(\tau - 1)) = d(a, c) \left(1 - \frac{\tau}{2 - \eta} - \tau(\tau - 1)\right) > \\ &> d(a, c) \eta. \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer dos casos $j = 1$ ou $j = 2$, temos $d(x, c) \geq \eta d(a, c)$, provando que B_j é η -suficientemente espalhado em torno de a , como afirmado. Finalmente, como a métrica d é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A e $B_j \subset A \cap \mathbb{U}(a, \xi) \setminus \{a\}$, segue $\text{card } P_j = \text{card } B_j \leq \zeta$. Portanto, como $P = P_1 \cup P_2 \cup \{a\}$, conclui-se que $\text{card } P \leq 2\zeta + 1$. $\square$

Corolário 2.19. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$. Suponha que d seja (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A e que $\tau \in \mathbb{R}$ satisfaça (2.1). Se $0 < \lambda < \xi/2$ e Q é um subconjunto τ -controlado de $A \times \{r \mid 0 < r < \lambda\}$, então a família de bolas fechadas $\{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in Q\}$ é a união de $2\zeta + 1$ subfamílias disjuntas.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} := \{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in Q\}$. Sabemos que existe uma correspondência um a um entre $\mathcal{G}$ e Q pelo fato de que Q é τ -controlado. Definiremos os subconjuntos Q_j e R_j de Q por indução, iniciando com $Q_0 = Q$ e $R_0 = \emptyset$. Dado $j \geq 1$, assumindo-se os Q_i e R_i definidos para $i < j$, defina

$$Q_j := Q_{j-1} \setminus R_{j-1}.$$

O Lema 2.17 garante a existência de $R_j \subset Q_j$ satisfazendo as condições:

1) Para todo (a, r) e (b, s) elementos distintos de R_j , $d(a, b) > r + s$.

2) Para todo $(a, r) \in Q_j$ existe $(b, s) \in R_j$ com $d(a, b) \leq r + s$ e $s > r/\tau$.

Para cada j , da condição 1) conclui-se que $\{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in R_j\}$ é disjunto. Concluiremos a prova mostrando que

$$Q_{2\zeta+2} = \bigcap_{j=1}^{2\zeta+1} (Q \setminus R_j) = Q \setminus \bigcup_{j=1}^{2\zeta+1} R_j$$

é vazio. De fato, se $(a, r) \in Q_{2\zeta+2}$, podemos usar a condição 2) para escolher

$$(b_j, s_j) \in R_j \quad \text{com} \quad d(a, b) \leq r + s_j \quad \text{e} \quad s_j > r/\tau$$

para $j = 1, 2, \dots, 2\zeta + 1$. Obtemos, assim, o conjunto τ -controlado

$$P := \{(a, r)\} \cup \{(b_j, s_j) \mid j = 1, 2, \dots, 2\zeta + 1\}.$$

Como os pares (b_j, s_j) , (a, r) são dois a dois distintos, temos $\text{card } P = 2\zeta + 2$. No entanto, como $d(a, b_j) \leq r + s_j < 2\lambda < \xi$, o Teorema 2.18 implica que $\text{card } P \leq 2\zeta + 1$, chegando-se a uma contradição. Daí $Q_{2\zeta+2} = \emptyset$, como afirmado. Logo, $\bigcup_{j=1}^{2\zeta+1} R_j = Q$ e, portanto,

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{2\zeta+1} \{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in R_j\}.$$

□

2.3 Teorema de Cobertura de Besicovitch-Federer

Iniciamos esta seção com o clássico Teorema de Cobertura de Besicovitch, inicialmente estabelecido para o plano por Besicovitch em [Bes45] e [Bes46]. O enunciado abaixo e seu corolário são generalizações para o $\mathbb{R}^n$ de resultados obtidos por Besicovitch no $\mathbb{R}^2$ nos artigos mencionados supra. Cabe mencionar, no entanto, que os resultados originais de Besicovitch no plano parecem ser mais gerais.

Teorema 2.20 (Teorema de cobertura de Besicovitch, [EG91, Teorema 1.27]). *Existe uma constante inteira positiva N_n , dependendo apenas da dimensão n do espaço $X = \mathbb{R}^n$, tal que, se $\mathcal{F}$ for uma coleção de bolas fechadas de raios estritamente positivos com $\sup\{\text{diam } B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty$, então o conjunto A formado pelos centros das bolas de $\mathcal{F}$ pode ser coberto pela reunião de N_n subfamílias disjuntas de $\mathcal{F}$. Ou seja, existem subfamílias disjuntas $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_n} \subset \mathcal{F}$ tais que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_i} B.$$

Corolário 2.21 ([EG91, Teorema 1.28]). *Sejam μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma coleção de bolas fechadas de raios estritamente positivos em $\mathbb{R}^n$. Seja A o conjunto dos centros das bolas de $\mathcal{F}$. Suponha $\mu(A) < \infty$ e $\inf\{r \mid \mathbb{B}(a, r) \in \mathcal{F}\} = 0$ para todo $a \in A$. Então, para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, existe uma família enumerável $\mathcal{G}$ de bolas disjuntas de $\mathcal{F}$ tal que*

$$\bigcup \mathcal{G} \subset U \quad \text{e} \quad \mu\left((U \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) = 0.$$

Além da referência citada junto ao enunciado acima, o leitor interessado poderá encontrar mais detalhes e ideias sobre a geometria do Teorema de Cobertura de Besicovitch para famílias de bolas em $\mathbb{R}^n$ em [Hei01], [Tal13], [BL16] e [Mat95].

Tendo em vista o Exemplo 2.13, o teorema acima e seu corolário são casos particulares, respectivamente, do Teorema 2.22 e do Corolário 2.24, que estudaremos a seguir, devidos a Federer ([Fed96, 2.8.14, 2.8.15]), nos quais o teorema de cobertura de Besicovitch clássico é estendido a espaços métricos direcionalmente limitados. Esta versão generalizada, que chamaremos *Teorema de Cobertura de Besicovitch-Federer*, é sobre a geometria das bolas no espaço envolvendo a função de distância, e sua aplicabilidade é, em geral, mais ampla que a dos teoremas de cobertura vistos anteriormente na Seção 2.1 (por exemplo, é necessária alguma estrutura adicional para a “ (δ, τ) -ampliação” do Teorema 2.8).

Outras versões deste teorema podem ser consultadas em [Ito18] para bolas parabólicas no espaço euclidiano, embora a métrica parabólica não seja direcionalmente limitada, e em [Rig18] onde se foca numa propriedade de cobertura chamada de *Propriedade de Cobertura Fraca de Besicovitch*, analisando resultados recentes sobre a validade ou não validade desta propriedade de cobertura.

Não imporemos nenhuma hipótese adicional à medida μ sobre X (recorde que μ é uma medida boreliana em X , finita nas partes limitadas de X , conforme fixado no início do capítulo), mas assumiremos que $\mathcal{F}$ é uma família de bolas fechadas com raios estritamente positivos. Dado $A \subset X$, exigiremos que todos os pontos de A sejam o centro (não apenas um elemento) de algum membro da família de bolas fechadas $\mathcal{F}$ e que a métrica d satisfaça a condição geométrica de limitação direcional conforme a Definição 2.12.

Teorema 2.22 (Teorema de cobertura de Besicovitch-Federer). *Sejam (X, d) um espaço métrico, d (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em $A \subset X$, $0 < \lambda < \xi/2$, $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas em X com raios estritamente positivos e menores que λ . Suponha que cada ponto de A é o centro de algum membro de $\mathcal{F}$. Então A está contido na união de $2\zeta + 1$ subfamílias disjuntas de $\mathcal{F}$.*

Este teorema será demonstrado a partir do lema a seguir.

Lema 2.23. *Seja (X, d) um espaço métrico. Se $1 < \tau < \infty$, $0 < \lambda < \infty$ e $P \subset X \times \{r \mid 0 < r < \lambda\}$, então P tem um subconjunto τ -controlado Q tal que*

$$\{a \mid (a, r) \in P \text{ para algum } r\} \subset \bigcup \{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in Q\}.$$

Demonstração. Seja $\Omega \subset 2^P$ a classe de todos os subconjuntos τ -controlados Q de P com a seguinte propriedade: para todo $(b, s) \in P$,

$$\begin{aligned} &\text{ou } d(a, b) \leq r \text{ para algum } (a, r) \in Q, \\ &\text{ou } d(a, b) > r > s/\tau \text{ para todo } (a, r) \in Q. \end{aligned}$$

Note que Ω é não vazio (pois $\emptyset \in \Omega$) e está parcialmente ordenado pela inclusão. Dado um subconjunto T totalmente ordenado em Ω , $Q := \bigcup T \in \Omega$ é uma cota superior para T . Podemos, pois, aplicar o Lema de Zorn para concluir que Ω tem um elemento maximal. Seja Q um maximal de Ω . O lema se cumpre, pois, caso contrário, temos

$$K := P \cap \{(b, s) \mid d(a, b) > r, \text{ para todo } (a, r) \in Q\} \neq \emptyset.$$

Podemos escolher $(c, t) \in K$ com $\tau t > \sup\{s \mid (b, s) \in K\}$ (pois $\tau > 1$ e o sup no segundo membro é finito). Definamos $\tilde{Q} := Q \cup \{(c, t)\}$. Então $(c, t) \notin Q$ (caso contrário $(c, t) \in Q \cap K$, o que acarreta a contradição $0 = d(c, c) > t$), logo $Q \subsetneq \tilde{Q}$.

Para todo $(a, r) \in Q$, temos $d(a, c) > r$. Daí, como $(c, t) \in P$ e $Q \in \Omega$, para $(b, s) = (c, t)$ deve valer a segunda condição na definição de Ω , i.e. $d(a, c) > r > t/\tau$ para todo $(a, b) \in Q$. Então $\tilde{Q}$ é τ -controlada.

Agora, suponhamos que existe $(b, s) \in P$ tal que a primeira condição na definição de Ω não valha para $\tilde{Q}$, i.e. $d(a, b) > r$ para todo $(a, r) \in \tilde{Q}$. Em particular, como $Q \subset \tilde{Q}$, temos que a última desigualdade vale para todo $(a, r) \in Q$, e tendo em vista que $Q \in \Omega$ isso implica $d(a, b) > r > s/\tau$ para todo $(a, r) \in Q$. Daí $(b, s) \in K$, logo $t > s/\tau$ pela escolha de (c, t) , e $d(c, b) > t$ vale pela hipótese assumida sobre (b, s) com $(a, r) = (c, t)$. Assim, (b, s) cumpre a segunda condição da definição de Ω para $\tilde{Q}$.

Portanto $\tilde{Q} \in \Omega$ o que contradiz a maximalidade de Q . Está provado que $K = \emptyset$, o que significa que, para todo $(b, s) \in P$, existe $(a, r) \in Q$ tal que $d(a, b) \leq r$, i.e. $b \in \mathbb{B}(a, r)$. $\square$

Prova do Teorema 2.22. Escolhendo τ de modo a satisfazer (2.1) do Teorema 2.18 e aplicando o Lema 2.23 com

$$P := \{(a, r) \mid a \in A, \mathbb{B}(a, r) \in \mathcal{F}\} \subset X \times \{r \mid 0 < r < \lambda\},$$

obtemos um subconjunto τ -controlado Q de P tal que A é coberto pela família de bolas fechadas

$$\mathcal{G} := \{\mathbb{B}(a, r) \mid (a, r) \in Q\} \subset \mathcal{F}.$$

Pelo Corolário 2.19, temos que $\mathcal{G}$ é a união de $2\zeta + 1$ subfamílias disjuntas $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{2\zeta+1} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Portanto,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{2\zeta+1} \mathcal{G}_j.$$

$\square$

Corolário 2.24. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $A \subset X$ separável, d (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada em A , $0 < \lambda < \xi/2$, $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas em X com raios estritamente positivos e menores que λ . Suponha que cada ponto de A é o centro de algum membro de $\mathcal{F}$ e $\inf\{r \mid \mathbb{B}(a, r) \in \mathcal{F}\} = 0$ para todo $a \in A$. Então $\mathcal{F}$ é μ -adequada para A .*

Demonstração. Mostraremos que a hipótese do Teorema 2.2 se satisfaz com

$$\mathcal{K} = \{A\} \quad \text{e} \quad \sigma(A) = \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} < 1.$$

Seja W aberto em X . Podemos supor que $\mu(A \cap W) < \infty$, caso contrário a desigualdade na hipótese do teorema 2.2 se verifica trivialmente. Cada ponto de $A \cap W$ é o centro de algum membro da família

$$\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cap \{\mathbb{B}(a, r) \mid a \in A, r > 0 \text{ e } \mathbb{B}(a, r) \subset W\}.$$

Portanto, o Teorema 2.22 implica que $A \cap W$ está contido na união de $2\zeta + 1$ subfamílias disjuntas $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2\zeta+1}$ de $\mathcal{F}'$ i.e.

$$A \cap W \subset \bigcup_{j=1}^{2\zeta+1} \mathcal{H}_j.$$

Como A é separável, qualquer família de conjuntos com interior não vazio em A é enumerável. Assim, cada $\mathcal{H}_j$ é enumerável e, portanto, $\bigcup \mathcal{H}_j$ é um F- σ e, em particular, um boreliano. Por outro lado, a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{2\zeta+1} \mu \left(A \cap \bigcup \mathcal{H}_j \right) \geq \mu(A \cap W),$$

permite escolher um inteiro j para o qual

$$\mu \left(A \cap \bigcup \mathcal{H}_j \right) \geq \frac{\mu(A \cap W)}{2\zeta + 1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\mu\left((A \cap W) \setminus \bigcup \mathcal{H}_j\right) &= \mu\left(A \cap \left(W \setminus \bigcup \mathcal{H}_j\right)\right) = \\
&= \mu \llcorner A \left(W \setminus \bigcup \mathcal{H}_j\right) \stackrel{\mu \llcorner A \text{ boreliana}}{=} \\
&= \mu \llcorner A(W) - \mu \llcorner A\left(\bigcup \mathcal{H}_j\right) = \mu(A \cap W) - \mu\left(A \cap \bigcup \mathcal{H}_j\right) \leq \\
&\leq \mu(A \cap W) - \frac{\mu(A \cap W)}{2\zeta + 1} = \left(1 - \frac{1}{2\zeta + 1}\right) \mu(A \cap W).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu\left((A \cap W) \setminus \bigcup \mathcal{H}_j\right) \leq \frac{2\zeta}{2\zeta + 1} \mu(A \cap W) = \sigma(A) \mu(A \cap W),$$

mostrando que $\mathcal{F}$ é μ -adequada para $\bigcup \mathcal{K} = A$, pelo Teorema 2.2. □

Para o Corolário 2.26 vamos usar a *Propriedade de Vitali simétrica* (SVP), descrita na Definição 3.10 em [Sim14, pág. 17].

Definição 2.25 (Propriedade de Vitali simétrica (SVP)). Uma medida μ num espaço métrico X satisfaz a *propriedade de Vitali simétrica* se, para todo $A \subset X$ com $\mu(A) < \infty$ e para toda cobertura $\mathcal{F}$ de A for bolas fechadas com raios estritamente positivos que cubra A finamente no sentido forte (i.e. para todo $x \in A$, temos $\inf\{r > 0 \mid \mathbb{B}(x, r) \in \mathcal{F}\} = 0$), existe uma subfamília enumerável disjunta $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$.

Corolário 2.26. *Sejam (X, d) um espaço métrico separável (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitado, e μ uma medida exterior Boreliana finita nos limitados de X . Então μ satisfaz a propriedade de Vitali simétrica.*

Demonstração. Sejam $A \subset X$ com $\mu(A) < \infty$ e $\mathcal{F}$ uma família de bolas fechadas com raios estritamente positivos que cobre A finamente no sentido forte. Em particular, A é separável e, substituindo-se $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}' := \{B \in \mathcal{F} \mid B = \mathbb{B}(a, r), r < \xi/4\}$, se necessário, a hipótese do Corolário 2.24 se verifica. Daí, pelo referido corolário, temos que $\mathcal{F}$ é μ -adequada para A , i.e para todo $U \subset X$ aberto existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável tal que $\bigcup \mathcal{G} \subset U$ e $\mu((U \cap A) \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$. Em particular para $U = X$, obtém-se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ disjunta enumerável tal que $\mu(A \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$. □

2.4 Relações de cobertura

Apresentaremos agora a noção de μ -relação de Vitali, a qual será usada na teoria de derivação a ser discutida no Capítulo 3. Lembre que μ é uma medida de Borel em X , finita nas partes limitadas de X , fixada no início deste capítulo.

Definição 2.27 (Relação de cobertura). Uma *relação de cobertura em X* é um subconjunto C de

$$\{(x, S) \mid x \in S \subset X\}.$$

Para a relação de cobertura C em X e $Z \subset X$, denotamos por $C(Z)$ o subconjunto de 2^X dado por

$$C(Z) := \{S \subset X \mid \exists x \in Z, (x, S) \in C\}.$$

Definição 2.28 (Relação de cobertura fina). Dados $x \in X$ e C uma relação de cobertura em X , diz-se que C é *fina em x* se,

$$\inf\{\text{diam } S \mid (x, S) \in C\} = 0.$$

Definição 2.29 (Relação de Vitali). Seja V uma relação de cobertura em X . Diz-se que V é uma μ -relação de Vitali em X se:

- i) $V(X) \subset \mathcal{B}_X$.
- ii) Para todo $x \in X$, V é fina em x .
- iii) Para todo $Z \subset X$ e todo $C \subset V$ tal que C é fina em todo ponto de Z , existe uma subfamília enumerável disjunta $\mathcal{F}$ de $C(Z)$ tal que $\mu(Z \setminus \bigcup \mathcal{F}) = 0$.

Observação 2.30. Note que, se $V = \{(x, \mathbb{B}(x, r)) \mid x \in X, r > 0\}$, e se μ for finita, então V é uma μ -relação de Vitali em X se, e somente se, μ tem a propriedade de Vitali simétrica (SVP) descrita na Definição 2.25. Para uma medida μ não necessariamente finita, vale a implicação: se V for uma μ -relação de Vitali em X , então μ tem SVP.

Definição 2.31 (Limite ao longo de uma cobertura). Sejam C uma relação de cobertura em X tal que C é fina em $x \in X$ e f uma função de conjunto a valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Definimos

$$(C) \limsup_x f = (C) \limsup_{S \rightarrow x} f(S) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup \{f(S) \mid (x, S) \in C, \text{diam } S \leq \epsilon, S \in \text{dom } f\},$$

$$(C) \liminf_x f = (C) \liminf_{S \rightarrow x} f(S) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \inf \{f(S) \mid (x, S) \in C, \text{diam } S \leq \epsilon, S \in \text{dom } f\}.$$

Usaremos $(C) \lim_x$ nos pontos onde $(C) \limsup_x$ coincide com $(C) \liminf_x$ i.e.

$$(C) \lim_x f := (C) \limsup_x f = (C) \liminf_x f.$$

Observação 2.32. Na definição acima, podemos substituir $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ por $\inf_{\epsilon > 0}$ no caso do $(C) \limsup$ ou por $\sup_{\epsilon > 0}$ no caso do $(C) \liminf$ i.e.

$$(C) \limsup_x f = \inf_{\epsilon > 0} \sup \{f(S) \mid (x, S) \in C, \text{diam } S \leq \epsilon, S \in \text{dom } f\}$$

$$(C) \liminf_x f = \sup_{\epsilon > 0} \inf \{f(S) \mid (x, S) \in C, \text{diam } S \leq \epsilon, S \in \text{dom } f\}.$$

Definição 2.33. Dados $1 < \tau < \infty$ e $\delta : V(X) \rightarrow [0, \infty)$, definimos, para cada $S \in V(X)$, sua (δ, τ) -ampliação como na Definição 2.5, i.e.

$$\widehat{S} = \bigcup \{T \mid T \in V(X), T \cap S \neq \emptyset, \delta(T) \leq \tau \delta(S)\}.$$

Note que $\widehat{S}$ depende de $V(X)$; se for necessário indicar esta dependência, usaremos a notação $\widehat{S}_{V(X)}$.

A seguir, investigaremos alguns critérios para que uma relação de cobertura seja uma μ -relação de Vitali. Iniciemos com o enunciado de um teorema de Federer:

Teorema ([Fed96, 2.8.17]). Sejam V uma relação de cobertura em X com $V(X)$ contida nas partes fechadas limitadas de X e V fina em cada ponto de X , $\delta : V(X) \rightarrow [0, \infty)$ e $1 < \tau < \infty$. Para cada $S \in V(X)$, denotamos por $\widehat{S}$ a (δ, τ) -ampliação de S . Suponha que, para μ -q.t. $x \in X$,

$$0 \leq (V) \limsup_{S \rightarrow x} \left(\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \right) < \infty.$$

Então V é uma μ -relação de Vitali em X .

Parece-nos que o enunciado acima contém uma pequena imprecisão, conforme mostra o contra-exemplo abaixo. A demonstração dada por Federer tem um problema na chamada que se faz ao Teorema 2.8.7 (que corresponde ao nosso Teorema 2.8); no referido teorema, a hipótese exige uma

desigualdade estrita $\mu(\widehat{S}) < \lambda\mu(S)$, mas o argumento do Federer, pelo que apuramos, só permite concluir a desigualdade não estrita. Esta pequena imprecisão será corrigida no Teorema 2.34, abaixo, colocando-se a hipótese adicional de que, para μ -q.t. $x \in X$, μ é estritamente positiva em todo $S \in V(\{x\})$.

Contra-exemplo para o enunciado de 2.8.17. Seja $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \mathcal{L}^n$ e

$$V = \{(x, \mathbb{B}(x, r)) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq r < \infty\}$$

(atenção: bolas degeneradas fazem parte de V). Tome $\delta := \text{diam}$ e $\tau = 2$. Então $V(X) \subset \{\text{fechados e limitados de } X\}$ e, para todo $x \in X$, V é fina em x e

$$0 \leq (V) \limsup_{S \rightarrow x} \left(\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \right) = 5^n < \infty.$$

Por outro lado, tomando $Z = \mathbb{R}^n$ (ou qualquer conjunto de medida estritamente positiva) e $C = \{(x, \{x\}) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset V$, tem-se $C(Z) = \{\text{singletons de } Z\}$, o qual não admite subconjunto enumerável que cubra μ -q.t. Z . Portanto, V não é uma μ -relação de Vitali em X . □

Teorema 2.34. *Sejam V uma relação de cobertura em X com $V(X)$ contida nas partes fechadas limitadas de X e V fina em cada ponto de X , $\delta : V(X) \rightarrow [0, \infty)$ e $1 < \tau < \infty$. Para cada $S \in V(X)$, denotamos por $\widehat{S}$ a (δ, τ) -ampliação de S , como na Definição 2.33. Suponhamos que, para μ -q.t. $x \in X$, μ é estritamente positiva em todo $S \in V(\{x\})$ e*

$$0 \leq (V) \limsup_{S \rightarrow x} \left(\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \right) < \infty.$$

Então V é uma μ -relação de Vitali em X .

Demonstração. Da hipótese segue diretamente que $V(X) \subset \mathcal{B}_X$ e que V é fina em cada ponto de X . Resta provar a condição iii) na definição de μ -relação de Vitali. Suponha $Z \subset X$ e $C \subset V$ fina em cada ponto de Z . Sem perda de generalidade, podemos supor que $Z \subset \{x \mid \forall S \in V(\{x\}), \mu(S) > 0\}$, pois o complementar do último conjunto é μ -nulo por hipótese.

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n := C \cap \left\{ (x, S) \mid x \in Z, \delta(S) + \mu(\widehat{S})/\mu(S) < n \right\},$$

$$A_n := Z \cap \left\{ x \mid 0 \leq (V) \limsup_{S \rightarrow x} \left(\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \right) < n \right\}.$$

Afirmo que C_n é uma relação de cobertura em X fina em cada ponto de A_n . Com efeito, é claro que é uma relação de cobertura, pois é um subconjunto de V . Além disso, dado $x \in A_n$, o fato de que $0 \leq (V) \limsup_{S \rightarrow x} \left(\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \right) < n$ implica que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tem-se

$$0 \leq \sup \left\{ \delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} \mid (x, S) \in V, \text{diam } S \leq \epsilon \right\} < n.$$

O mesmo vale com C no lugar de V na linha acima, pois C é fina em x (logo vale o $0 \leq \sup$, i.e. o conjunto onde se está tomando o supremo é não vazio) e $C \subset V$ (logo vale o $\sup < n$). Portanto, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $S \in C\{x\}$ tal que $\text{diam } S \leq \epsilon$ e $\delta(S) + \frac{\mu(\widehat{S})}{\mu(S)} < n$, i.e. para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ existe $S \in C_n(\{x\})$ com $\text{diam } S \leq \epsilon$, o que mostra que C_n é fina em x , como afirmado.

Assim, $C_n(A_n)$ é uma coleção de fechados de X que cobre A_n finamente, $\delta|_{C_n(A_n)} : C_n(A_n) \rightarrow [0, \infty)$ é limitada por n e, para todo $S \in C_n(A_n)$, tem-se $\frac{\mu(\hat{S})}{\mu(S)} < n$ (lembre que $A_n \subset Z \subset \{x \mid \forall S \in V(\{x\}), \mu(S) > 0\}$). Aqui, $\hat{S}$ denota a (δ, τ) -ampliação de S com respeito a $V(X)$ e $\delta : V(X) \rightarrow [0, \infty)$; denotando por $\hat{S}_{C_n(A_n)}$ a (δ, τ) -ampliação de S com respeito a $C_n(A_n)$ e $\delta|_{C_n(A_n)} : C_n(A_n) \rightarrow [0, \infty)$, é claro que $\hat{S}_{C_n(A_n)} \subset \hat{S}$, portanto $\mu(\hat{S}_{C_n(A_n)}) < n\mu(S)$.

Podemos aplicar, pois, o Teorema 2.8 com A_n no lugar de A , $C_n(A_n)$ no lugar de $\mathcal{F}$, $\delta|_{C_n(A_n)}$ e $\lambda = n + 1 > 1$. Conclui-se, pois, que $C_n(A_n)$ é μ -adequada para A_n . Como $C_n(A_n) \subset C(Z)$, segue-se que $C(Z)$ é μ -adequada para A_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Do Corolário 2.3, conclui-se que $C(Z)$ é μ -adequada para $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, portanto μ -adequada para Z , uma vez que $\mu(Z \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$. $\square$

Teorema 2.35. *Seja $\mathcal{K} \subset 2^X$ enumerável tal que $X = \bigcup \mathcal{K}$. Suponha que a métrica d de X é (ξ, η, ζ) -direcionalmente limitada cada membro de $\mathcal{K}$, e que X seja separável. Então*

$$V := \{(x, \mathbb{B}(x, r)) \mid x \in X, 0 < r < \infty\}$$

é uma μ -relação de Vitali em X .

Demonstração. É claro que $V(X) \subset \mathcal{B}_X$ e que V é fina em cada ponto de X . Sejam $Z \subset X$ e $C \subset V$ tais que C é fina em cada ponto de Z . Para cada $A \in \mathcal{K}$, aplicando o Corolário 2.24 com $A \cap Z$ no lugar de A , temos que $C(Z)$ é μ -adequada para $A \cap Z$. Daí, como $\mathcal{K}$ é enumerável, segue do Corolário 2.3 que $C(Z)$ é μ -adequada para $Z \cap (\bigcup \mathcal{K}) = Z$. $\square$

Corolário 2.36. *Com a mesma hipótese do Teorema 2.35, μ tem a propriedade de Vitali simétrica em X .*

Demonstração. Ver o Corolário 2.26 e a Observação 2.30. $\square$

Exemplo 2.37. O Teorema 2.35 e o Corolário 2.36 valem, em particular, se X for uma variedade Riemanniana munida da métrica Riemanniana d . De fato, X é σ -compacta (i.e. é a união de uma coleção enumerável de conjuntos compactos) e, pelo Exemplo 2.14, d é direcionalmente limitada em todo compacto de X .

Para o seguinte teorema, a medida μ sobre X pode ser qualquer, i.e. podemos dispensar as restrições sobre μ impostas no início do capítulo.

Teorema 2.38. *Seja $(\mathcal{P}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições borelianas enumeráveis de X tal que:*

- i) cada membro de $\mathcal{P}_1$ é limitado;*
- ii) para todo $i \in \mathbb{N}$, cada membro de $\mathcal{P}_i$ é reunião de uma subfamília de $\mathcal{P}_{i+1}$;*
- iii) $\sup\{\text{diam } S \mid S \in \mathcal{P}_i\} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.*

Então $V = \{(x, S) \mid \exists j \in \mathbb{N}, S \in \mathcal{P}_j, x \in S\}$ é uma μ -relação de Vitali.

Demonstração. Pelas hipóteses, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_i$ é uma partição Boreliana de X então $\mathcal{P}_i$ é uma família enumerável disjunta de Borelianos com $\bigcup \mathcal{P}_i = X$. É claro que $V(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i \subset \mathcal{B}_X$, o qual é enumerável pois cada $\mathcal{P}_i$ é enumerável. Em vista da condição iii) V é fina em cada ponto de X .

Sejam $Z \subset X$ e $C \subset V$ tal que C seja fina em cada ponto de Z . Para cada $x \in Z$, definamos $N_x := \{i \in \mathbb{N} \mid \exists S \in C(Z) \cap \mathcal{P}_i, x \in S\}$. Então N_x é não vazio, logo possui um menor elemento; sejam $i_x := \min N_x$ e S_x o único membro de $C(Z) \cap \mathcal{P}_{i_x}$ tal que $x \in S_x$. Note que esta unicidade decorre do fato de que cada $\mathcal{P}_i$ é disjunta.

Segue da condição *ii*) que, para todo $S \in C(Z)$ tal que $x \in S$, tem-se $S \subset S_{i_x}$. Daí, se $x \neq y \in Z$, ou $S_x = S_y$, ou $S_x \cap S_y = \emptyset$; pois, se $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, então $i_x = i_y$ porque se $i_x < i_y$, teríamos $S_y \subset S_x$, contrariando a minimalidade de i_y , e de forma análoga não se pode ter $i_y < i_x$. Assim, $S_x = S_y$ pelo fato de $\mathcal{P}_{i_x}$ ser disjunta. Então $\{S_{i_x} \mid x \in Z\}$ é uma subfamília disjunta de $C(Z)$ que cobre Z . Tal subfamília é enumerável, pois $V(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_i$ é enumerável, uma vez que cada $\mathcal{P}_i$ é enumerável. $\square$

Capítulo 3

Diferenciação de medidas

Para uma classe de medidas Borel-regular com propriedades de finitude adequada em espaços métricos, definiremos a noção de derivada de uma medida em relação a outra. Serão estudadas propriedades desta noção de diferenciabilidade e versões abstratas do Teorema Fundamental do Cálculo nesse contexto. A seguir, serão introduzidas noções de densidades de medidas, com as quais poderemos reformular as noções clássicas de limite e continuidade de funções no âmbito da teoria da medida, resultando nas noções chamadas de "limite e continuidade aproximada". Finalmente, na Secção 3.4, combinaremos estes fatos sobre a teoria de diferenciação de medidas para apresentar a *fórmula da área* para aplicações contínuas entre espaços métricos, sob suposições de regularidade mínima no Teorema 3.29.

Notação. Neste capítulo, fixamos um espaço métrico (X, d) e denotamos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as medidas (exteriores) Borel-regular em X , finitas nas partes limitadas de X . Fixamos $\mu \in \mathcal{M}$ e V uma μ -relação de Vitali, como na Definição 2.29.

Definição 3.1. Para cada $\nu \in \mathcal{M}$, associaremos a medida ν_μ definida, para todo $A \subset X$, por:

$$\nu_\mu(A) := \inf\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{B}_X, \mu(A \setminus B) = 0\}.$$

No Teorema 3.3 será mostrado que ν_μ é, de fato, uma medida Borel-regular em X . Também será provado que ν_μ coincide com a parte absolutamente contínua da decomposição de Lebesgue de ν com respeito a μ . Preliminarmente, note que, pelo fato de ser ν Borel-regular, $\nu_\mu \leq \nu$.

3.1 Derivadas

Os resultados centrais desta seção são o Teorema 3.8, onde mostraremos que a derivada $D(\nu, \mu, V, x)$ (Definição 3.5) existe μ -q.s., e o Teorema 3.10, onde mostramos que a medida ν_μ pode ser obtida integrando $D(\nu, \mu, V, x)$, o que corresponde ao Teorema Fundamental do Cálculo nesse contexto.

Definição 3.2. Com $\nu \in \mathcal{M}$ e $\mu \in \mathcal{M}$, dizemos que:

- i) ν é *absolutamente contínua em relação a μ* se para todo $A \subset X$, $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$.
Notação: $\nu \ll \mu$.
- ii) ν e μ são *mutuamente singulares* se existe um $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $\nu(B) = \mu(X \setminus B) = 0$.
Notação: $\nu \perp \mu$.

Teorema 3.3. Para cada $\nu \in \mathcal{M}$, existe um $B \in \mathcal{B}_X$ tal que

$$\nu_\mu = \nu \llcorner B \quad e \quad \mu(X \setminus B) = 0.$$

Portanto, $\nu_\mu \in \mathcal{M}$, $\nu \llcorner B^c \in \mathcal{M}$ e $\nu = \nu_\mu + \nu \llcorner B^c$. Além disso, $\nu_\mu \ll \mu$ e $\nu \llcorner B^c \perp \mu$; a igualdade $\nu = \nu_\mu$ vale se, e somente se, ν é absolutamente contínua com relação a μ .

Demonstração.

1) Mostremos que ν_μ é uma medida de Borel em X .

- a) Inicialmente, verifiquemos que ν_μ é uma medida em X . É claro que $\nu_\mu(\emptyset) = 0$. Para provar a subaditividade enumerável, seja $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\mu(A_n) < \infty$. Fixe $\epsilon > 0$. Pela definição de ν_μ , para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $E_i \in \mathcal{B}_X$ tal que $\mu(A_i \setminus E_i) = 0$ e

$$\nu(E_i) \leq \nu_\mu(A_i) + \epsilon 2^{-i}.$$

Portanto, $\cup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}_X$ e

$$\begin{aligned} \mu \left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \right) &= \mu \left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j^c \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j^c \right) \right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu \left(A_i \cap \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j^c \right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \setminus E_i) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nu_\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \nu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(E_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu_\mu(A_i) + \epsilon.$$

Pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$ fixado, segue

$$\nu_\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu_\mu(A_i),$$

como queríamos.

- b) Verifiquemos, pelo critério de Carathéodory, Teorema 1.20, que todos os borelianos são ν_μ -mensuráveis. Sejam $A_1, A_2 \subset X$ tais que $\delta := d(A_1, A_2) > 0$. Pondo $A := A_1 \cup A_2$, mostremos que $\nu_\mu(A_1) + \nu_\mu(A_2) \leq \nu_\mu(A)$. Podemos supor que $\nu_\mu(A_1) < \infty$ e $\nu_\mu(A_2) < \infty$, caso contrário $\nu_\mu(A) = \infty$ por monotonicidade e a desigualdade se verifica trivialmente. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $E \in \mathcal{B}_X$ tal que

$$\mu(A \setminus E) = 0 \quad \text{e} \quad \nu(E) \leq \nu_\mu(A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Cortando E com a união das vizinhanças abertas de raio $\delta/2$ de A_1 e A_2 , podemos supor $E := E_1 \dot{\cup} E_2$ com E_i boreliano contido na vizinhança aberta de raio $\delta/2$ de A_i para $i \in \{1, 2\}$.

Como $A \setminus E = (A_1 \setminus E_1) \cup (A_2 \setminus E_2)$ e $d(A_1 \setminus E_1, A_2 \setminus E_2) \geq d(A_1, A_2) > 0$, o Critério de Carathéodory aplicado à medida boreliana μ fornece $\mu(A_1 \setminus E_1) + \mu(A_2 \setminus E_2) = \mu(A \setminus E) = 0$, logo $\mu(A_i \setminus E_i) = 0$ para $i \in \{1, 2\}$. Portanto,

$$\nu_\mu(A_1) + \nu_\mu(A_2) \leq \nu(E_1) + \nu(E_2) = \nu(E) \leq \nu_\mu(A) + \epsilon.$$

Pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$ tomado, segue a desigualdade que queríamos mostrar.

- 2) Seja $A \subset X$ um boreliano. Afirmamos que existe $B \subset A$ boreliano tal que $\nu_\mu(A) = \nu(B)$ e $\mu(A \setminus B) = 0$. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos $D_n \in \mathcal{B}_X$ tal que

$$\mu(A \setminus D_n) = 0 \quad \text{e} \quad \nu(D_n) \leq \nu_\mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Substituindo D_n por $D_n \cap A \in \mathcal{B}_X$, se necessário, podemos supor que $D_n \subset A$.
 Pondo $B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n \subset A$, temos $B \in \mathcal{B}_X$ e

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \mu\left(A \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n\right)\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^c\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap D_n^c)\right) \leq \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap D_n^c) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \setminus D_n) = 0, \end{aligned}$$

portanto $\nu_\mu(A) \leq \nu(B)$. Além disso para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\nu(B) = \nu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) \leq \nu(D_i) \leq \nu_\mu(A) + \frac{1}{i}.$$

Como i é arbitrário, segue $\nu(B) \leq \nu_\mu(A)$, portanto $\nu_\mu(A) = \nu(B)$, como queríamos.

3) Sejam $A \subset X$ um boreliano limitado e $B \in \mathcal{B}_X$ dado pelo item anterior, i.e. tal que $B \subset A$, $\nu_\mu(A) = \nu(B)$ e $\mu(A \setminus B) = 0$. Mostremos que, para todo $S \subset A$, $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$. Com efeito:

a) Caso 1: S é um boreliano contido em A . Como $B \cap S \in \mathcal{B}_X$ e $S \setminus (B \cap S) = S \setminus B \subset A \setminus B$ temos $\mu(S \setminus (B \cap S)) \leq \mu(A \setminus B) = 0$, portanto

$$\nu_\mu(S) \leq \nu(B \cap S).$$

Analogamente, substituindo-se S por $A \setminus S$, conclui-se que

$$\nu_\mu(A \setminus S) \leq \nu(B \setminus S).$$

Logo,

$$\nu_\mu(S) + \nu_\mu(A \setminus S) = \nu_\mu(A) = \nu(B) = \nu(B \cap S) + \nu(B \setminus S) \geq \nu_\mu(S) + \nu_\mu(A \setminus S).$$

Portanto, a desigualdade acima deve ser uma igualdade e, pelo fato de que $\nu(A) < \infty$ (pois A é limitado e $\nu \in \mathcal{M}$, logo é finita nos limitados), as duas desigualdades anteriores também devem ser igualdades. Em particular, $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$, estando provada a afirmação no caso em que S é boreliano.

b) Caso geral: S é um subconjunto arbitrário de A . Como ν e μ são Borel-regular, existe $T' \in \mathcal{B}_X$ tal que

$$S \subset T', \quad \mu(S) = \mu(T'), \quad \nu(S) = \nu(T').$$

Seja $T := A \cap T' \in \mathcal{B}_X$. Temos $S \subset T \subset A$ e

$$\mu(S) \leq \mu(T) = \mu(A \cap T') \leq \mu(T') = \mu(S).$$

Assim, $\mu(S) = \mu(T)$, e de forma análoga, temos $\nu(S) = \nu(T)$.

Como $S \subset A$, temos $\mu(S) < \infty$ e $\nu(S) < \infty$. Daí segue da Observação 1.6 que T é tanto um μ -envoltório como um ν -envoltório de S . Então, para todo conjunto μ -mensurável E , temos $\mu(S \cap E) = \mu(T \cap E)$ e, para todo E ν -mensurável, tem-se $\nu(S \cap E) = \nu(T \cap E)$. Em particular, para todo $E \in \mathcal{B}_X$, $\mu(T \setminus E) = 0$ se, e somente se, $\mu(S \setminus E) = 0$, e daí segue

$$\begin{aligned} \nu_\mu(S) &= \inf\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{B}_X, \mu(S \setminus E) = 0\} = \\ &= \inf\{\nu(E) \mid E \in \mathcal{B}_X, \mu(T \setminus E) = 0\} = \\ &= \nu_\mu(T). \end{aligned}$$

Por outro lado, por *a)* e pelo fato de que T é um ν -envoltório de S , temos

$$\nu_\mu(T) = \nu(T \cap B) = \nu(S \cap B).$$

Logo, $\nu_\mu(S) = \nu(B \cap S)$, como queríamos.

- 4) Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência disjunta de borelianos limitados tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$. Segue da parte 2) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n contém um $B_n \in \mathcal{B}_X$, tal que $\mu(A_n \setminus B_n) = 0$ e $\nu_\mu(A_n) = \nu(B_n)$. Da parte 3), tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\nu_\mu \llcorner A_n = \nu \llcorner B_n$.

Daí, pondo $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}_X$, temos

$$\nu_\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\mu \llcorner A_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu \llcorner B_n = \nu \llcorner B.$$

Além disso, $\mu(X \setminus B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \setminus B_n) = 0$.

- 5) Se $A \subset X$ e $\mu(A) = 0$, para $E = \emptyset \in \mathcal{B}_X$ tem-se $\mu(A \setminus E) = \mu(A) = 0$, logo $\nu_\mu(A) \leq \nu(E) = \nu(\emptyset) = 0$, donde se conclui que $\nu_\mu \ll \mu$.
- 6) Finalmente, se $\nu \ll \mu$, tomando B como em 4), tem-se $\nu \llcorner B^c = 0$, pois $\mu(B^c) = 0$. Logo, $\nu = \nu \llcorner B + \nu \llcorner B^c = \nu \llcorner B = \nu_\mu$. Reciprocamente, se $\nu = \nu_\mu$, então $\nu \ll \mu$ pela parte 5). □

Observação 3.4. O Teorema 3.3 fornece a *Decomposição de Lebesgue de ν com respeito a μ* , i.e. a parte absolutamente contínua é $\nu_\mu = \nu \llcorner B$ e a parte singular é $\nu \llcorner B^c$. A existência desta decomposição também pode ser obtida a partir do Lema 3.36 em [Ter19, pag. 74].

Definição 3.5 (*V-Derivada*). Seja $\nu \in \mathcal{M}$. Com a notação da Definição 2.31 sobre limites ao longo de coberturas, para cada $x \in X$ definimos

$$\underline{D}(\nu, \mu, V, x) := (V) \liminf_x \frac{\nu}{\mu}, \quad \text{e} \quad \overline{D}(\nu, \mu, V, x) := (V) \limsup_x \frac{\nu}{\mu}.$$

Nos pontos onde os dois limites acima coincidem, definiremos a *V-derivada* de ν como

$$D(\nu, \mu, V, x) := \overline{D}(\nu, \mu, V, x) = \underline{D}(\nu, \mu, V, x).$$

Consideraremos $S \in V(X)$ tal que $\mu(S) = 0$ no domínio de ν/μ , adotando, por convenção aritmética da reta estendida, $0/0 := 0$ e, se $c > 0$, $c/0 := \infty$. Como as medidas são finitas nos conjuntos limitados, para o cômputo dos $(V) \limsup$ ou $(V) \liminf$ basta considerar os conjuntos em $V(X)$ com medidas finitas.

Lema 3.6. Se $\alpha \in \mathcal{M}$, $\beta \in \mathcal{M}$, $0 < c < \infty$ e $A \subset \{x \mid \underline{D}(\alpha, \beta, V, x) < c\}$, então $\alpha_\mu(A) \leq c\beta_\mu(A)$.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Pela definição de β_μ , existe $E \in \mathcal{B}_X$ com $\mu(A \setminus E) = 0$ tal que

$$\beta(E) \leq \beta_\mu(A) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, usando a hipótese $\beta \in \mathcal{M}$, existe uma sequência $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abertos com medida β finita tal que $E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$. Então, pelo Teorema 1.16, E está contido num aberto W para o qual

$$\beta(W \setminus E) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí,

$$\beta(W) = \beta(E) + \beta(W \setminus E) \leq \beta_\mu(A) + \epsilon.$$

Note que $A \setminus W \subset A \setminus E$, logo $\mu(A \setminus W) \leq \mu(A \setminus E) = 0$. E, como $\alpha \in \mathcal{M}$, pelo Teorema 3.3 temos $\alpha_\mu \ll \mu$, portanto $\alpha_\mu(A \setminus W) = 0$.

Definamos

$$C := V \cap \left\{ (x, S) \mid S \subset W, \frac{\alpha(S)}{\beta(S)} < c \right\}.$$

Dado $x \in A \cap W$, o fato de $(V) \liminf_x \frac{\alpha}{\beta} < c$ garante que a existência de $\epsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tem-se

$$0 \leq \inf \left\{ \frac{\alpha(S)}{\beta(S)} \mid (x, S) \in V, \text{diam } S \leq \epsilon \right\} < c.$$

Portanto, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $S \in C$ com $\text{diam } S \leq \epsilon$, o que mostra que C é fina em cada ponto de $A \cap W$. Note que, para todo $S \in C(A \cap W)$ tem-se $\frac{\alpha(S)}{\beta(S)} < c$, logo $\alpha(S) \leq c\beta(S)$.

Assim, como V é uma μ -relação de Vitali, $C(A \cap W)$ tem uma subfamília enumerável disjunta $\mathcal{G}$ cobrindo μ -q.t. $A \cap W$ i.e. $\mu((A \cap W) \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$. Logo, lembrando que $\alpha_\mu(A \setminus W) = 0$, segue

$$\alpha_\mu(A) = \alpha_\mu(A \cap W) \leq \alpha \left(\bigcup \mathcal{G} \right) = \sum_{S \in \mathcal{G}} \alpha(S) \leq c \sum_{S \in \mathcal{G}} \beta(S) \leq c\beta(W) \leq c(\beta_\mu(A) + \epsilon).$$

Como isso vale para todo ϵ tal que $0 < \epsilon < \epsilon_0$, temos $\alpha_\mu(A) \leq c\beta_\mu(A)$, como queríamos. $\square$

Corolário 3.7. *Se $\nu \in \mathcal{M}$ e $0 < c < \infty$ então*

i) $A \subset \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < c\}$ implica $\nu_\mu(A) \leq c\mu(A)$,

ii) $A \subset \{x \mid \overline{D}(\nu, \mu, V, x) > c\}$ implica $\nu_\mu(A) \geq c\mu(A)$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.3, note que $\mu_\mu = \mu$, pois $\mu \ll \mu$ i.e. μ é absolutamente contínua com respeito a si mesma. O item i) é consequência do Lema 3.6 aplicado para $A \subset \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < c\}$, o que acarreta

$$\nu_\mu(A) \leq c\mu_\mu(A) = c\mu(A).$$

Agora, para o item ii), o fato de que $(V) \limsup_x \frac{\nu}{\mu} > c$ garante a existência de $\epsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, tem-se

$$\sup \left\{ \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \mid (x, S) \in V, \text{diam } S \leq \epsilon \right\} > c.$$

Isto implica que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$0 \leq \inf \left\{ \frac{\mu(S)}{\nu(S)} \mid (x, S) \in V, \text{diam } S \leq \epsilon \right\} < \frac{1}{c}.$$

Logo,

$$\underline{D}(\mu, \nu, V, x) = (V) \liminf_x \frac{\mu}{\nu} \leq \frac{1}{c}.$$

Daí, pelo Lema 3.6, temos $\mu(A) = \mu_\mu(A) \leq c^{-1}\nu_\mu(A)$, donde $c\mu(A) \leq \nu_\mu(A)$. $\square$

Teorema 3.8. *Se $\nu \in \mathcal{M}$, então $0 \leq \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < \infty$ para μ -q.t. $x \in X$.*

Demonstração.

1) Definamos

$$C := V \cap \{(x, S) \mid \mu(S) = 0\} \quad \text{e} \quad P := \{x \mid C \text{ é fina em } x\}.$$

Pelo fato de que V é uma μ -relação de Vitali, temos que $C(P)$ admite uma subfamília enumerável disjunta $\mathcal{G}$ cobrindo μ -q.t. P , i.e. $\mu(P \setminus \bigcup \mathcal{G}) = 0$. Então encontramos que

$$\mu(P) = \mu\left(P \cap \bigcup \mathcal{G}\right) + \mu\left(P \setminus \bigcup \mathcal{G}\right) \leq \mu\left(\bigcup \mathcal{G}\right) = \sum_{S \in \mathcal{G}} \mu(S) = 0.$$

- 2) Seja $Q := \{x \mid \overline{D}(\nu, \mu, V, x) = \infty\}$. Note que, para cada $c > 0$, $Q \subset \{x \mid \overline{D}(\nu, \mu, V, x) > c\}$. Para qualquer subconjunto limitado A de Q , pelo Corolário 3.7

$$\mu(A) \leq \frac{1}{c} \nu_\mu(A) < \infty.$$

Assim, tomando $c \rightarrow \infty$, conclui-se que $\mu(A) = 0$. Podemos inferir que $\mu(Q) = 0$. De fato, como X é união enumerável de uma família disjunta $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de borelianos limitados, temos $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Q \cap A_n)$. Para cada n , $Q \cap A_n$ é um subconjunto limitado de Q , logo $\mu(Q \cap A_n) = 0$, donde $\mu(Q) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q \cap A_n) = 0$.

- 3) Agora, para cada $0 < a < b$, definamos

$$R(a, b) := \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < a < b < \overline{D}(\nu, \mu, V, x)\}.$$

Segue do Corolário 3.7 que, para qualquer subconjunto limitado A de $R(a, b)$,

$$b \mu(A) \leq \nu_\mu(A) \leq a \mu(A) < \infty,$$

o que implica, tendo em vista que $a < b$ e $\mu(A) < \infty$, que $\mu(A) = 0$. De forma análoga a 2), conclui-se que $\mu(R(a, b)) = 0$.

Finalmente, note que o conjunto dos pontos onde a derivada deixa de existir e é finita está contido na união de P , Q e dos conjuntos $R(a, b)$ correspondendo a todos os racionais $a < b$, i.e. está contido numa união enumerável de conjuntos μ -nulos, a qual é μ -nula. Consequentemente $\underline{D}(\nu, \mu, V, x)$ existe e é finita em μ -q.t. $x \in X$, como queríamos. □

Lema 3.9. *Se $\nu \in \mathcal{M}$, então $\underline{D}(\nu, \mu, V, \cdot)$ é μ -mensurável.*

Demonstração. Sejam $0 < a < b < \infty$ e A, B conjuntos limitados tais que

$$A \subset P := \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < a\}, \quad \text{e} \quad B \subset Q := \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) > b\}.$$

- 1) Como $\mu, \nu_\mu \in \mathcal{M}$, pela Borel-regularidade existem borelianos A' e B' tais que

$$\begin{aligned} A &\subset A', & \mu(A) &= \mu(A'), & \nu_\mu(A) &= \nu_\mu(A') \\ B &\subset B', & \mu(B) &= \mu(B'), & \nu_\mu(B) &= \nu_\mu(B'). \end{aligned}$$

Note que, como A e B têm medidas μ e ν_μ finitas (pois são limitados), segue da Observação 1.6 que A' é um *envoltório* de A e B' um *envoltório* de B , ambos com respeito a μ e ν_μ . Daí, como $B' \in \mathcal{B}_X$, segue

$$\mu(A' \cap B') = \mu(A \cap B') \quad \text{e} \quad \nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A \cap B').$$

Analogamente, como $A' \in \mathcal{B}_X$, segue

$$\mu(A' \cap B') = \mu(A' \cap B) \quad \text{e} \quad \nu_\mu(A' \cap B') = \nu_\mu(A' \cap B).$$

Do Corolário 3.7, para $A \cap B' \subset P$ e $A' \cap B \subset Q$ vemos que

$$\begin{aligned}\nu_\mu(A \cap B') &\leq a \mu(A \cap B'), \\ \nu_\mu(A' \cap B) &\geq b \mu(A' \cap B).\end{aligned}$$

Portanto, $b \mu(A' \cap B') \leq a \mu(A' \cap B')$. Tendo em vista que $a < b$ e que $\mu(A' \cap B') \leq \mu(A') = \mu(A) < \infty$, segue $\mu(A' \cap B') = 0$.

Agora,

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \cup B) \cap (A' \cup B')) = \mu \llcorner (A \cup B)(A' \cup B')$$

e, como $\mu \llcorner (A \cup B)$ é uma medida boreliana finita, segue

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \mu \llcorner (A \cup B)(A') + \mu \llcorner (A \cup B)(B') - \underbrace{\mu \llcorner (A \cup B)(A' \cap B')}_{\leq \mu(A' \cap B') = 0} \geq \\ &\geq \mu(A') + \mu(B') = \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

Portanto, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

- 2) Como X é união enumerável de uma família disjunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de borelianos limitados, todo $T \subset X$ pode ser escrito como $T = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} (T \cap E_n)$, donde $T \cap P = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} (T \cap P \cap E_n)$ e $T \cap Q = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} (T \cap Q \cap E_n)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $T \cap P \cap E_n$ e $T \cap Q \cap E_n$ são subconjuntos limitados de P e Q , respectivamente; daí, pelo item 1), para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(T \cap P \cap E_n) + \mu(T \cap Q \cap E_n) = \mu((T \cap P \cap E_n) \cup (T \cap Q \cap E_n)) \leq \mu(T \cap E_n).$$

Então,

$$\begin{aligned}\mu(T \cap P) + \mu(T \cap Q) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T \cap P \cap E_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T \cap Q \cap E_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T \cap E_n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu \llcorner T(E_n) = \mu \llcorner T(X) = \mu(T).\end{aligned}$$

Como $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b < \infty$ foram tomados arbitrariamente, segue da Proposição 1.24 que $D(\nu, \mu, V, \cdot)$ é μ -mensurável.

□

Teorema 3.10. *Se $\nu \in \mathcal{M}$ e A é μ -mensurável, então A é ν_μ -mensurável e*

$$\nu_\mu(A) = \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x).$$

Demonstração. Pela Borel-regularidade e pela σ -finitude de μ (note que μ é σ -finita porque, por hipótese, é finita nas partes limitadas de X), existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $A \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$. Como $\nu_\mu \ll \mu$, temos $\nu_\mu(B \setminus A) = 0$; portanto, A é ν_μ -mensurável.

Sejam

$$Z := \{x \mid D(\nu, \mu, V, x) = 0\} \quad \text{e} \quad W := \{x \mid D(\nu, \mu, V, x) = \infty\}.$$

Pelo Lema 3.9, os conjuntos Z e W são μ -mensuráveis. E, pelo Teorema 3.8, $\mu(W) = 0$, logo $\nu_\mu(W) = 0$. Por outro lado, para cada $c > 0$, $Z \subset \{x \mid \underline{D}(\nu, \mu, V, x) < c\}$. Portanto, para todo

subconjunto limitado A' de Z e para todo $c > 0$, segue do Corolário 3.7 que

$$\nu_\mu(A') \leq c \mu(A') < \infty.$$

Logo, fazendo $c \rightarrow 0$, segue $\nu_\mu(A') = 0$. Finalmente, como Z pode ser escrito como união enumerável de limitados, por subaditividade enumerável conclui-se que $\nu_\mu(Z) = 0$.

Fixe $1 < t < \infty$. Definamos, para cada inteiro n ,

$$P_n := A \cap \{x \mid t^n \leq D(\nu, \mu, V, x) < t^{n+1}\}.$$

Pelo Lema 3.9, os P_n 's são μ -mensuráveis e, portanto, como visto acima, ν_μ -mensuráveis. Além disso, $A \setminus (Z \cup W) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} P_n$ i.e. é a união enumerável dos conjuntos disjuntos P_n . Note que $\nu_\mu(A \setminus \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} P_n) = \nu_\mu(Z \cup W) = 0$.

Do Corolário 3.7, segue

$$\begin{aligned} \nu_\mu(A) &= \nu_\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n+1} \mu(P_n) = t \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \mu(P_n) \leq \\ &\leq t \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{P_n} D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x) = t \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nu_\mu(A) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \nu_\mu(P_n) \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n \mu(P_n) = t^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{n+1} \mu(P_n) \\ &\geq t^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{P_n} D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x) = t^{-1} \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Portanto, para todo $1 < t < \infty$, $t^{-1} \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x) \leq \nu_\mu(A) \leq t \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x)$, Fazendo $t \rightarrow 1$, segue

$$\nu_\mu(A) = \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x).$$

□

Teorema 3.11 (Teorema de diferenciação de Lebesgue). *Seja f uma função μ -mensurável em X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$ tal que, para todo conjunto limitado μ -mensurável A ,*

$$\int_A |f| d\mu < \infty.$$

Então, para μ -q.t. $x \in X$

$$(V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu = f(x).$$

Demonstração. Suponhamos que f é não negativa. Para todo $A \subset X$, definimos ν por¹

$$\nu(A) := \int_A^* f d\mu.$$

Pela Observação 1.28, ν é uma medida Borel-regular em X . Pela hipótese, ν é finita nos limitados de X , logo $\nu \in \mathcal{M}$. É claro que $\nu \ll \mu$; portanto, pelo Teorema 3.3, $\nu = \nu_\mu$. Assim, do Teorema

¹Equivalentemente, podemos definir ν por $A \mapsto \int_A f d\mu$ se $A \in \mathcal{B}_X$ e tomar a medida exterior induzida, i.e. $\forall E \subset X$, $\nu(E) := \inf\{\nu(A) \mid E \subset A \in \mathcal{B}_X\}$. As duas definições são equivalentes porque ambas resultam em medidas borelianas regulares que coincidem em $\mathcal{B}_X$.

3.10, temos, para todo A μ -mensurável,

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \nu(A) = \nu_\mu(A) = \int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x).$$

e daí se conclui que, para μ -q.t. $x \in X$,

$$f(x) = D(\nu, \mu, V, x) = (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} = (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f d\mu.$$

Isso conclui a prova no caso que $f \geq 0$; no caso geral, podemos aplicar o anterior para f^+ e f^- . $\square$

Corolário 3.12 (Pontos de Lebesgue). *Seja f uma função μ -mensurável em X com valores num espaço vetorial normado separável Y , e suponha que, para todo conjunto limitado μ -mensurável A ,*

$$\int_A |f| d\mu < \infty.$$

Então, para μ -q.t. $x \in X$,

$$(V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - f(x)| d\mu(z) = 0. \quad (3.1)$$

Demonstração. A cada ponto $x \in X$ associaremos o conjunto $T(x)$ de todos os pontos $y \in Y$ para os quais

$$(V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - y| d\mu(z) = |f(x) - y|.$$

Seja $C := \{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso enumerável de Y . Para cada $i \in \mathbb{N}$, o Teorema 3.11 aplicado a $|f - y_i|$ garante a existência de $P_i \subset X$ μ -nulo tal que $y_i \in T(x)$ se $x \in X \setminus P_i$. Tomemos $N := P \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$, onde P é definido como na prova do Teorema 3.8. Então N é μ -nulo, pois é união enumerável de μ -nulos. Seja $x \in X \setminus N$ e fixe $\epsilon > 0$. Escolhamos $y_i \in C$ tal que $|f(x) - y_i| < \epsilon/2$. Então, para todo $S \in V(\{x\})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - f(x)| d\mu(z) &\leq \frac{1}{\mu(S)} \int_S (|f(z) - y_i| + |y_i - f(x)|) d\mu(z) \\ &\leq \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - y_i| d\mu(z) + |y_i - f(x)|, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - f(x)| d\mu(z) &\leq (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(z) - y_i| d\mu(z) + |y_i - f(x)| \\ &= 2|f(z) - y_i| < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi fixado arbitrariamente, conclui-se que (3.1) vale para todo x no complementar do μ -nulo N . $\square$

Definição 3.13. Com a notação do corolário anterior, o conjunto dos pontos onde (3.1) se verifica é chamado o (μ, V) -conjunto Lebesgue de f .

Proposição 3.14. *Seja $\nu \in \mathcal{M}$. Tem-se:*

i) *Para μ -q.t. $x \in X$,*

$$D(\nu_\mu, \mu, V, x) = D(\nu, \mu, V, x) \quad e \quad D(\nu - \nu_\mu, \mu, V, x) = 0.$$

ii) Se V_1 e V_2 são duas μ -relações Vitali, então, para μ -q.t. $x \in X$,

$$D(\nu, \mu, V_1, x) = D(\nu, \mu, V_2, x).$$

Demonstração. Note que $\nu_\mu = (\nu_\mu)_\mu$, pois $\nu_\mu \ll \mu$. Do Teorema 3.10 com $\nu_\mu \in \mathcal{M}$ no lugar de ν , obtém-se, para todo $A \subset X$ μ -mensurável,

$$\nu_\mu(A) = \int_A D(\nu_\mu, \mu, V, x) d\mu(x).$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.10 aplicado a ν , o que vai acima também coincide com $\int_A D(\nu, \mu, V, x) d\mu(x)$. Pela arbitrariedade do $A \subset X$ μ -mensurável tomado, conclui-se que, para μ -q.t. $x \in X$,

$$D(\nu_\mu, \mu, V, x) = D(\nu, \mu, V, x).$$

Portanto, para μ -q.t. $x \in X$,

$$D(\nu - \nu_\mu, \mu, V, x) = 0.$$

Finalmente, como ν_μ foi definida sem referência a V , a igualdade enunciada no Teorema 3.10 vale para todo A μ -mensurável com V_1 ou V_2 no lugar de V . Isso implica, para μ -q.t. $x \in X$,

$$D(\nu, \mu, V_1, x) = D(\nu, \mu, V_2, x).$$

□

3.2 Densidade e Continuidade aproximada

Nesta seção, estudamos a noção de *densidade* associada a uma medida $\mu \in \mathcal{M}$. Na Definição 3.18, por meio da referida noção, introduziremos os conceitos de *limite* e *continuidade aproximados*.

Observação 3.15. Note que, se $\mu \in \mathcal{M}$, todo $A \subset X$ tem um μ -envoltório boreliano. De fato, se A for limitado (portanto, $\mu(A) < \infty$), pela Borel-regularidade de μ existe $B \in \mathcal{B}_X$ tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B) < \infty$; daí, pela Observação 1.6, o boreliano B é um μ -envoltório de A .

No caso geral, podemos escrever A como união de uma sequência crescente $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limitados e, para cada $n \in \mathbb{N}$, o caso já provado garante a existência de um envoltório boreliano B_n para A_n . Substituindo-se, para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n por $\bigcup_{i=1}^n B_i$ (que também será um envoltório boreliano de A_n), podemos supor que a sequência $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é crescente. Daí $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}_X$ é um envoltório boreliano de A , pois, para todo $T \in \sigma(\mu)$, $\mu(T \cap B) = \lim \mu(T \cap B_n) = \lim \mu(T \cap A_n) \leq \mu(T \cap A)$.

Além disso, se $B \in \mathcal{B}_X$, segue do Teorema 1.18 e da Observação 1.19 que $\mu \ll B \in \mathcal{M}$.

Teorema 3.16. Se $A \subset X$ e

$$P := \left\{ x \mid (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \cap A)}{\mu(S)} = 1 \right\}, \quad Q := \left\{ x \mid (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \setminus A)}{\mu(S)} = 0 \right\}.$$

Então P e Q são μ -mensuráveis,

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus P) &= 0, & A \cup P &\text{ é um } \mu\text{-envoltório de } A, \\ \mu(Q \setminus A) &= 0, & (A \cap Q)^c &\text{ é um } \mu\text{-envoltório de } A^c. \end{aligned}$$

Além disso, a μ -mensurabilidade de A é equivalente a cada uma das duas condições:

$$\mu(P \setminus A) = 0; \quad \mu(A \setminus Q) = 0.$$

Demonstração. Pela Observação 3.15, todo $A \subset X$ tem um μ -envoltório boreliano.

1. Seja B um μ -envoltório boreliano de A . Então $B \in \mathcal{B}_X$, $A \subset B$ e, para todo conjunto μ -mensurável S , em particular para $S \in V(X)$, temos $\mu(S \cap A) = \mu(S \cap B) = \mu \perp B(S)$. Logo, para todo $x \in X$,

$$(V) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \cap A)}{\mu(S)} = (V) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\mu \perp B(S)}{\mu(S)} = \overline{D}(\mu \perp B, \mu, V, x),$$

e o mesmo vale para $(V) \liminf$. Então, como $\mu \perp B \in \mathcal{M}$ temos que

$$P = \{x \mid D(\mu \perp B, \mu, V, x) = 1\}$$

é μ -mensurável pelo Lema 3.9. Aplicando o Teorema 3.11 para $f = \chi_B$, conclui-se que $\mu(B \setminus P) = 0$ e $\mu(P \setminus B) = 0$.

Como $A \subset B$ temos $A \setminus P \subset B \setminus P$, logo $\mu(A \setminus P) = 0$. Além disso, como P é μ -mensurável e $(A \cup P) \setminus P = A \setminus P$ é μ -nulo, conclui-se que $A \cup P$ é μ -mensurável. Por outro lado, $A \subset A \cup P$ e $A \cup P \subset B \cup P = B \cup (P \setminus B)$.

Daí, para todo T μ -mensurável, temos $\mu(T \cap A) \leq \mu(T \cap (A \cup P))$ e

$$\begin{aligned} \mu(T \cap (A \cup P)) &\leq \mu(T \cap (B \cup (P \setminus B))) \leq \mu(T \cap B) + \mu(T \cap (P \setminus B)) \leq \\ &\leq \mu(T \cap B) + \mu(P \setminus B) = \mu(T \cap B) = \mu(T \cap A), \end{aligned}$$

onde a última igualdade vale porque B é μ -envoltório de A . Portanto, $A \cup P$ é um μ -envoltório de A .

2. De forma análoga, seja C um μ -envoltório boreliano de A^c . Então $C \in \mathcal{B}_X$, $A^c \subset C$ e, para todo $S \subset X$ μ -mensurável, em particular para $S \in V(X)$, temos $\mu(S \setminus A) = \mu(S \cap C)$. Logo, para todo $x \in X$,

$$(V) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \setminus A)}{\mu(S)} = (V) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{\mu \perp C(S)}{\mu(S)} = \overline{D}(\mu \perp C, \mu, V, x),$$

e o mesmo vale para $(V) \liminf$. Então, como $\mu \perp C \in \mathcal{M}$, segue do Lema 3.9 que

$$Q = \{x \mid D(\mu \perp C, \mu, V, x) = 0\}$$

é μ -mensurável. Aplicando o Teorema 3.11 para $f = \chi_C$, conclui-se que $\mu(Q \cap C) = 0$ e $\mu((C \cup Q)^c) = 0$.

Como $A^c \subset C$ temos $Q \setminus A = Q \cap A^c \subset Q \cap C$, portanto $\mu(Q \setminus A) = 0$. Além disso, como C é μ -mensurável e $(A \cap Q)^c \setminus C \subset Q^c \setminus C = (Q \cup C)^c$ é μ -nulo, conclui-se que $(A \cap Q)^c$ é μ -mensurável. Por outro lado, como $A \cap Q \subset A$, temos

$$A^c \subset (A \cap Q)^c = A^c \cup Q^c \subset C \cup Q^c = C \cup (C^c \cap Q^c) = C \cup (C \cup Q)^c.$$

Daí, para todo T μ -mensurável, temos

$$\begin{aligned} \mu(T \cap A^c) &\leq \mu(T \cap (A \cap Q)^c) \leq \mu(T \cap (C \cup (C \cup Q)^c)) \leq \mu(T \cap C) + \mu(T \cap (C \cup Q)^c) \leq \\ &\leq \mu(T \cap C) + \mu((C \cup Q)^c) = \mu(T \cap C) = \mu(T \cap A^c). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu(T \cap (A \cap Q)^c) = \mu(T \cap A^c)$, provando que $(A \cap Q)^c$ é um μ -envoltório de A^c .

3. Agora, se A for μ -mensurável, como $A \cup P$ é um μ -envoltório de A , temos

$$\mu(P \setminus A) = \mu(P \cap A^c) = \mu((A \cup P) \cap A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0.$$

Por outro lado, como $(A \cap Q)^c$ é um μ -envoltório de A^c , temos

$$\mu(A \setminus Q) = \mu(A \cap Q^c) = \mu(A \cap (A^c \cup Q^c)) = \mu(A \cap (A \cap Q)^c) = \mu(A \cap A^c) = 0.$$

Reciprocamente, suponha que $\mu(P \setminus A) = 0$. Para todo $T \subset X$, temos

$$\mu(T) \leq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A).$$

Como P é μ -mensurável,

$$\mu(T \cap A) = \mu((T \cap A) \cap P) + \mu((T \cap A) \setminus P) \leq \mu(T \cap P) + \mu(A \setminus P) = \mu(T \cap P),$$

pois $\mu(A \setminus P) = 0$. Por outro lado,

$$\mu(T \cap A^c) = \mu((T \cap A^c) \cap P) + \mu((T \cap A^c) \cap P^c) \leq \mu(P \cap A^c) + \mu(T \cap P^c) = \mu(T \cap P^c),$$

pois $\mu(P \setminus A) = 0$.

Logo, para todo $T \subset X$, $\mu(T \cap A) + \mu(T \cap A^c) \leq \mu(T \cap P) + \mu(T \cap P^c) = \mu(T)$, donde a μ -mensurabilidade de A .

De forma análoga se prova que, se $\mu(A \setminus Q) = 0$, então A é μ -mensurável.

□

Definição 3.17 (Densidade). Para todo $A \subset X$ e $x \in X$, definimos a (μ, V) -densidade de A em x por

$$\Theta(\mu, A, x) := (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \cap A)}{\mu(S)},$$

caso o limite exista.

Definição 3.18 (Limites aproximados). Sejam Y um espaço topológico, $f : \text{dom } f \subset X \rightarrow Y$ e $x \in X$. Um ponto $y \in Y$ é chamado de (μ, V) -limite aproximado de f em x se, para toda vizinhança W de $y \in Y$, o conjunto $X \setminus f^{-1}(W)$ tem (μ, V) -densidade 0 em x .

Observação 3.19. Da Definição 3.18, no caso que Y seja um espaço Hausdorff, pode haver no máximo um limite aproximado em x , o qual será denotado por

$$(\mu, V) \text{ ap } \lim_x f, \quad \text{ou} \quad (\mu, V) \text{ ap } \lim_{z \rightarrow x} f(z).$$

De fato, se Y for um espaço Hausdorff e a função f tiver limites aproximados $y \neq y'$ em X , teríamos dois abertos disjuntos W e W' em Y tais que $X \setminus f^{-1}(W)$ e $X \setminus f^{-1}(W')$ tem ambos densidade 0 em x . Como a união dos dois últimos conjuntos é X , conclui-se que X tem densidade 0 em x , chegando-se a uma contradição.

Definição 3.20. Sejam $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in X$. Definimos o *limite superior aproximado* de x ,

$$(\mu, V) \text{ ap } \limsup_x f \in \overline{\mathbb{R}},$$

como sendo o ínfimo do conjunto de todos os números reais t tal que $\{z \mid f(z) > t\}$ tem densidade 0 em x . Analogamente, definimos *limite inferior aproximado* de x ,

$$(\mu, V) \text{ ap } \liminf_x f \in \overline{\mathbb{R}},$$

como sendo o supremo do conjunto de todos os números reais t tal que $\{z \mid f(z) < t\}$ tem densidade 0 em x .

Definição 3.21. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é (μ, V) -aproximadamente contínua em x se $x \in \text{dom } f$ e

$$(\mu, V) \text{ ap } \lim_x f = f(x).$$

Segundo [Fed96], o Teorema de Lusin, descrito no Teorema 1.25, mostra uma conexão global entre mensurabilidade e continuidade; o seguinte teorema localiza essa relação.

Teorema 3.22. *Seja f uma função levando μ -q.t. X num espaço métrico separável Y . Então f é μ -mensurável se, e somente se f é (μ, V) -aproximadamente contínua em μ -q.t. ponto de X .*

Demonstração. Podemos decompor X numa união enumerável disjunta de uma família de borelianos $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$. Para cada $n, k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema de Lusin 1.25 podemos tomar um fechado $C_{n,k}$ em X tal que $C_{n,k} \subset E_n$, $\mu(E_n \setminus C_{n,k}) < 1/k$ e $f|_{C_{n,k}}$ contínua. Tomando-se uma enumeração $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e pondo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n := C_{\phi(n)}$, obtém-se uma sequência $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fechados em X tal que $\mu(X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f|_{C_n}$ é contínua.

Além disso, o Teorema 3.16 implica que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para μ -q.t. $x \in C_n$,

$$(V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \setminus C_n)}{\mu(S)} = 0;$$

para um tal x , f é (μ, V) -aproximadamente contínua em x , o que mostra que f é (μ, V) -aproximadamente contínua μ -q.s. em X .

Reciprocamente, se f é (μ, V) -aproximadamente contínua em μ -q.t. ponto de X , e se W é um subconjunto aberto em Y , temos, para todo $x \in f^{-1}(W)$,

$$(V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{\mu(S \setminus f^{-1}(W))}{\mu(S)} = 0,$$

o que garante a μ -mensurabilidade de $f^{-1}(W)$ pelo Teorema 3.16. Portanto, pela arbitrariedade do aberto $W \subset Y$ tomado, conclui-se que f é μ -mensurável. □

3.3 Derivação de medidas usando bolas centralizadas

Proposição 3.23. *Suponha $J \subset \{r \mid 0 < r < \infty\}$ aberto. Sejam α, β medidas em X , com $\beta \in \mathcal{M}$. Então $\{x \mid \alpha(\mathbb{B}(x, r)) > \beta(\mathbb{B}(x, r))\}$, para algum $r \in J\}$ é aberto.*

Demonstração. De fato, suponha que $\alpha(\mathbb{B}(a, r)) > \beta(\mathbb{B}(a, r))$, com $r \in J$. Como $\beta \in \mathcal{M}$, é finita nos limitados de X , a continuidade para baixo de β permite concluir que $\beta(\mathbb{B}(x, \cdot))$ é contínua à direita. Assim, existe $\epsilon > 0$ para o qual $r + \epsilon \in J$ e $\alpha(\mathbb{B}(a, r)) > \beta(\mathbb{B}(a, r + 2\epsilon))$. Portanto, $x \in \mathbb{B}(a, r)$ implica que

$$\alpha(\mathbb{B}(x, r + \epsilon)) \geq \alpha(\mathbb{B}(a, r)) > \beta(\mathbb{B}(a, r + 2\epsilon)) \geq \beta(\mathbb{B}(x, r + \epsilon)).$$

□

Corolário 3.24. *Sejam $\mu \in \mathcal{M}$ e $0 < t < \infty$.*

i) Se ν é uma medida em X , então $\{x \mid \nu(\mathbb{B}(x, r)) > t\mu(\mathbb{B}(x, r))\}$, para algum $r \in J\}$ é aberto.

ii) Se $\nu \in \mathcal{M}$, então $\{x \mid \nu(\mathbb{B}(x, r)) < t\mu(\mathbb{B}(x, r))\}$, para algum $r \in J\}$ é aberto.

Demonstração. O item *i)* se obtém aplicando a Proposição 3.23 para $\alpha = \nu$ e $\beta = t\mu \in \mathcal{M}$. Analogamente obtemos *ii)* aplicando de novo a Proposição 3.23 para $\alpha = \mu$ e $\beta = t^{-1}\nu \in \mathcal{M}$. □

Observação 3.25. Considere a relação de cobertura $V = \{(x, \mathbb{B}(x, r)) \mid x \in X, 0 < r < \infty\}$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in X$ e f uma função definida em $V(\{x\}) = \{\mathbb{B}(x, r) \mid r > 0\}$ a valores em $\overline{\mathbb{R}}$, tem-se:

a) Se $g(r) := f(\mathbb{B}(x, r))$:

- $\limsup_{r \rightarrow 0} g(r) \leq a$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $r_0 > 0$ tal que $g(r) \leq a + \epsilon$ sempre que $0 < r \leq r_0$.
- $\limsup_{r \rightarrow 0} g(r) \geq a$ se, e somente se, para todo $r_0 > 0$ e todo $\epsilon > 0$, existe $0 < r < r_0$ tal que $g(r) \geq a - \epsilon$, i.e. se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existe $r_n \downarrow 0$ tal que $g(r_n) \geq a - \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Caracterizações análogas valem para $\liminf_{r \rightarrow 0} g(r)$ e também para $(V) \limsup_{S \rightarrow x} f(S)$ ou $(V) \liminf_{S \rightarrow x} f(S)$.

b) Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $f(S) < a$ sempre que $\text{diam } S < \delta$. Então, se $0 < 2r < \delta$, tem-se $\text{diam } \mathbb{B}(x, r) \leq 2r < \delta$, portanto $f(\mathbb{B}(x, r)) < a$. Respectivamente para $f(S) > b$, temos $f(\mathbb{B}(x, r)) > b$.

c) Suponha que exista $\delta > 0$ tal que $f(\mathbb{B}(x, r)) < a$ sempre que $0 < r \leq \delta$. Então, se $B \in V(\{x\})$ e $\text{diam } B \leq \delta$, tem-se $B \subset \mathbb{B}(x, \delta)$, logo existe $r \leq \delta$ tal que $B = \mathbb{B}(x, r)$, daí $f(B) < a$. Analogamente com $f(\mathbb{B}(x, r)) > b$, temos $f(B) > b$.

d) Dos dois itens anteriores, seguem-se que $\limsup_{r \rightarrow 0} f(\mathbb{B}(x, r)) \leq a$ e $\liminf_{r \rightarrow 0} f(\mathbb{B}(x, r)) \geq b$ se, e somente se, $(V) \limsup_{S \rightarrow x} f(S) \leq a$ e $(V) \liminf_{S \rightarrow x} f(S) \geq b$, respectivamente.

e) Se $r_n \downarrow 0$, então $\text{diam } \mathbb{B}(x, r_n) \downarrow 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, se $(S_n = \mathbb{B}(x, \rho_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $\text{diam } S_n \downarrow 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher, por argumento análogo ao feito acima, $0 < r_n \leq \text{diam } S_n$ tal que $S_n = \mathbb{B}(x, r_n)$ e, portanto, $r_n \downarrow 0$. Em vista da caracterização feita no item a), conclui-se que o item d) vale com as desigualdades trocadas.

O que vai acima permite concluir que, para todo $x \in X$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} f(\mathbb{B}(x, r)) = (V) \limsup_{S \rightarrow x} f(S) \quad \text{e} \quad \liminf_{r \rightarrow 0} f(\mathbb{B}(x, r)) = (V) \liminf_{S \rightarrow x} f(S).$$

Teorema 3.26. *Sobre o espaço métrico (X, d) , suponha uma das seguintes condições:*

i) *ou para μ -q.t. $x \in X$ e todo $r > 0$, $\mu(\mathbb{B}(x, r)) > 0$, além de*

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\mathbb{B}(x, 5r))}{\mu(\mathbb{B}(x, r))} < \infty,$$

ii) *ou X é união de uma família enumerável $\mathcal{K}$ tal que d é direcionalmente limitada para cada membro de $\mathcal{K}$ e X é separável.*

Se $\nu \in \mathcal{M}$ e

$$W := \left\{ x \mid \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\mathbb{B}(x, r))}{\mu(\mathbb{B}(x, r))} = \infty \right\}, \quad P := \{x \mid \mu(\mathbb{B}(x, r)) = 0, \text{ para algum } r > 0\}.$$

Então $W \in \mathcal{B}_X$, P é aberto em X e $\nu_\mu = \nu \llcorner (W \cup P)^c$.

Demonstração. Ver o Teorema 2.9.15 em [Fed96], juntamente com a Observação 3.25.

□

3.4 Fórmula da área em espaços métricos

Nesta seção, combinaremos fatos sobre a *teoria de diferenciação de medidas* e outros resultados sobre medidas para apresentar, no Teorema 3.29, a *fórmula da área* para aplicações contínuas entre espaços métricos, sob suposições de regularidade mínima, feita em [Mag11] por Valentino Magnani. Esta é uma consequência de uma noção abstrata de *Jacobiano* introduzida na Definição 3.28, considerada como uma relação entre duas medidas. Em particular, não será exigida qualquer noção de diferenciabilidade.

Na exposição a seguir, para simplificar e deixar as ideias mais claras, consideraremos as funções e medidas definidas em X , ao contrário de [Mag11], onde as mesmas são definidas num subconjunto $E \subset X$ fechado fixo.

Notação. Consideraremos (X, d, μ) e (Y, ρ, ν) dois espaços métricos, onde X é completo e separável, $\mu \in \mathcal{M}$ (i.e. é uma medida Borel-regular sobre X finita nas partes limitadas de X), ν é uma medida de Borel sobre Y , $f : X \rightarrow Y$ contínua e V uma μ -relação de Vitali em X , como na Definição 2.29.

Para todo $S \subset X$, definimos a função ζ como $\zeta(S) := \nu(f(S))$. Denotaremos por $f^*\nu$ a medida que resulta da construção de Carathéodory, Teorema 1.29, com o método ζ na família $\mathcal{F} = \mathcal{B}_X$. Pela Observação 1.30, temos que $f^*\nu$ é uma medida Borel-regular em X .

Definição 3.27 (Medida Pull-Back). Sejam (X, d) um espaço métrico completo e separável e $f : X \rightarrow Y$ contínua. Chamaremos $f^*\nu$ como a *medida pull-back de ν por f* .

Lembrando a Definição 1.34, definimos a *função de multiplicidade* de $f : X \rightarrow Y$ em relação a $A \subset X$ por, para todo $y \in Y$, $N(f, A, y) := N(f|_A, y) = \#(A \cap f^{-1}\{y\})$. Com a Definição 2.31 sobre *limites ao longo de uma cobertura*, introduziremos abaixo uma noção de *jacobiano* de f , através do qual será possível provar a fórmula da área no Teorema 3.29.

Definição 3.28 (Jacobiana Métrica). Sejam $f : X \rightarrow Y$ contínua e $x \in X$. A *Jacobiana Métrica* de f em x é definida por:

$$Jf(x) := (V) \limsup_{S \rightarrow x} \frac{f^*\nu(S)}{\mu(S)}.$$

Teorema 3.29 (Fórmula da Área). *Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Suponha que a medida pull-back $f^*\nu$ seja finita nos conjuntos limitados de X e que $f^*\nu \ll \mu$. Então Jf é μ -mensurável, finita μ -q.s. e, para todo conjunto boreliano $A \subset X$, temos*

$$\int_A Jf(x) d\mu(x) = \int_Y N(f, A, y) d\nu(y).$$

Demonstração. Note que $f^*\nu \in \mathcal{M}$, pois é Borel-regular (em vista da construção de Carathéodory) e, pela hipótese, $f^*\nu$ é finita sobre conjuntos limitados de X . Do Teorema 3.10 segue que qualquer conjunto μ -mensurável $A \subset X$ (o que vale, em particular, se A boreliano) também é $f^*\nu$ -mensurável e

$$f^*\nu(A) = \int_A D(f^*\nu, \mu, V, x) d\mu(x),$$

onde $D(f^*\nu, \mu, V, x)$ é a derivada de $f^*\nu$ em relação a μ , definida μ -q.s. em X por

$$D(f^*\nu, \mu, V, x) = (V) \lim_{S \rightarrow x} \frac{f^*\nu(S)}{\mu(S)} = Jf(x),$$

sendo que a última igualdade vale μ -q.s. em X pela Definição 3.28 da métrica Jacobiana. Em particular, segue do Lema 3.9 e do Teorema 3.8 que Jf é μ -mensurável e finita μ -q.s.

Por outro lado, para qualquer boreliano $A \subset X$, segue do Teorema 1.35 (o qual pode ser aplicado, tendo em vista que, para todo $A \in \mathcal{B}_X$, $f(A)$ é ν -mensurável pela Proposição 1.33 e pelo fato de que X é espaço métrico completo separável, Y é Hausdorff e f é contínua) que $N(f|_A, \cdot)$ é ν -mensurável e

$$f^*\nu(A) = \int_Y N(f|_A, y) d\nu(y),$$

donde a tese. □

Observação 3.30. Uma outra versão da fórmula da área também é provada em [Mag11], a qual se baseia numa noção modificada de jacobiano métrico.

Referências Bibliográficas

- [Bes45] Abram S. Besicovitch. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 41, páginas 103–110. Cambridge University Press, 1945. [xi](#), [22](#)
- [Bes46] Abram S. Besicovitch. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. II. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 42, páginas 1–10. Cambridge University Press, 1946. [xi](#), [22](#)
- [BI01] Dmitri Burago; Yuri Burago e Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry*, volume 33. American Mathematical Soc., 2001. [1](#)
- [BL16] Blanche Buet e Gian Paolo Leonardi. Recovering measures from approximate values on balls. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 41:947–972, 2016. [17](#), [22](#)
- [dC15] Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, quinta edição, 2015. [17](#)
- [Dom14] Xavier Tolsa Domènech. Teoría geométrica de la medida e integrales singulares. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 17(2):361–382, 2014. [xi](#)
- [EG91] Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Taylor & Francis, 1991. [xi](#), [1](#), [2](#), [13](#), [22](#)
- [Fed96] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in mathematics. Springer, 1996. [xi](#), [1](#), [2](#), [3](#), [4](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#), [11](#), [15](#), [17](#), [23](#), [26](#), [43](#), [44](#)
- [Fol99] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. Second edition. [1](#), [6](#)
- [Hei01] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on Metric Spaces*. Universitext. Springer, 2001. [22](#)
- [Ito18] Tsubasa Itoh. The Besicovitch covering theorem for parabolic balls in Euclidean space. *Hiroshima Math. J.*, 48(3):279–289, 2018. [17](#), [23](#)
- [Lim70] Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Textos universitários. SBM, 1970. [1](#)
- [Mag11] Valentino Magnani. An area formula in Metric Spaces. *Colloquium Mathematicum*, 124(2):275–283, 2011. [xii](#), [45](#), [46](#)
- [Mat95] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability. [1](#), [4](#), [22](#)
- [Rig18] Severine Rigot. Differentiation of measures in Metric Spaces. *arXiv preprint arXiv:1802.02069*, 2018. [xi](#), [23](#)
- [Sil11] João Vitor da Silva. Teoria Geométrica da Medida e Aplicações. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 2011. [xi](#)

- [Sim83] Leon Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis*. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983. 13
- [Sim14] Leon Simon. *Introduction to geometric measure theory*, volume 91. Lectures on geometric measure theory (Canberra, 1983), revised edition, 2014. 25
- [Tal13] Mohammad Talebi. Covering Theorems, 2013. URL:http://aurora.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/sem_talebi.pdf. 22
- [Ter19] Gláucio Terra. Introduction to Geometric Measure Theory - Lecture Notes Version: 1.6, 2019. URL:<https://www.ime.usp.br/~glaucio/mat6704/textos/GMTLectureNotes.pdf>. 4, 5, 6, 34
- [Tor19] Tatiana Toro. Geometric measure theory. *Notices of the American Mathematical Society*, 66(4), 2019. xi