Uma Introdução ao Cálculo das Partições para Espaços Topológicos

Rubens Rodrigues Onishi

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientadora: Prof^{a} Dr^{a} Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, maio de 2019

Uma Introdução ao Cálculo das Partições para Espaços Topológicos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 01/04/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos - DMAT-UFBA
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

À Ofelia e ao Rodrigo Carvalho pela ajuda em soluções de alguns problemas e indicações de erros, principalmente durante os seminários apresentados por mim.

Ao Michel pelo apoio e informações acerca de fatos históricos.

À CAPES pela bolsa que me permitiu dedicação exclusiva a este mestrado.

À minha mãe por ter me socorrido num momento difícil.

Ao Rafael, ao Lucas e ao Rodrigo Carvalho (novamente) pela ajuda na preparação da minha defesa.

Ao Marcelo, ao Leandro e ao Renan, membros da banca, pelas valiosas sugestões de alterações nesta dissertação.

E finalmente à Lúcia. Não só pela orientação – a qual foi baseada em bastante diálogo – e pela matemática, como também por toda sua preocupação com o bem-estar de seus alunos.

Resumo

ONISHI, R. R. **Uma Introdução ao Cálculo das Partições para Espaços Topológicos**. 2019. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

O objetivo deste trabalho é apresentar o cálculo das partições para espaços topológicos. Essa área trata do estudo de resultados do seguinte tipo: "dados os espaços topológicos X e Y, um número natural n e um cardinal κ, para qualquer que seja a partição de $[X]^n$ em κ pedaços, existe um subespaço H de X homeomorfo ao Y tal que $[H]^n$ está contido num mesmo pedaço". Iremos estudar esse tipo de afirmação, principalmente no caso em que $n = 1$ e Y é igual a um ordinal enumerável ou igual ao ω_1. Também veremos resultados que envolvem o cubo de Cantor.

Palavras-chave: relações de partições para espaços topológicos, derivativa de Cantor-Bendixson, cubo de Cantor, ordinais.

Abstract

ONISHI, R. R. **An Introduction to Partition Calculus for Topological Spaces**. 2019. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

The purpose of this work is to present the partition calculus for topological spaces. This area deals with the study of results of the following type: "given the topological spaces X and Y, a natural number n and a cardinal number κ, for whatever the partition of $[X]^n$ into κ pieces, there is a subspace H of X homeomorphic to Y such that $[H]^n$ is contained in the same piece". We will study results of this type mainly in the case where $n = 1$ and Y is a countable ordinal or the ω_1. We will also see results involving the Cantor cube.

Keywords: topological partition relations, Cantor-Bendixson derivative, Cantor cube, ordinals.

Sumário

Lista de Abreviaturas

club	Fechado e não limitado, do inglês closed unbounded
a.d	quase disjunta (do inglês almost disjoint)
CH	Hipótese do Continuum
MA	Axioma de Martin
MA_κ	Axioma de Martin quando a família de densos tem cardinalidade menor ou igual a κ

Lista de Símbolos

$\subset$	"Está contido" ou "é subconjunto" (podendo ser igual)
$\subsetneq$	"Está contido propriamente" ou "é subconjunto próprio"
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto de todos os subconjuntos do conjunto X
$[X]^\kappa$	Conjunto de todos os subconjuntos de X de cardinalidade κ
$[X]^{<\kappa}$	Conjunto de todos os subconjuntos de X de cardinalidade menor do que κ
$f[X]$	Imagem do conjunto X pela função f
$f^{-1}[X]$	Imagem inversa (ou pré-imagem) do conjunto X pela função f
$\operatorname{dom} f$	Domínio da função f
$\operatorname{im} f$	Imagem da função f
$\operatorname{ot}(X)$	Tipo de ordem do conjunto bem ordenado X
$\operatorname{cf}(\alpha)$	Cofinalidade do ordinal α
$\diamondsuit$	Diamante
$\operatorname{int}_X(A)$ ou $\operatorname{int}(A)$	Interior de A no espaço topológico X
$\operatorname{cl}_X(A)$	Fecho de A no espaço topológico X
$w(X)$	Peso do espaço X
$\chi(x, X)$	Caráter de x em X
$\chi(X)$	Caráter de X
$d(X)$	Densidade de X
$X \cong Y$	X e Y são homeomorfos
A^d	Conjunto dos pontos de acumulação de A
X' ou $X^{(1)}$	A derivativa de Cantor-Bendixson do espaço X
$X^{(\alpha)}$	A α-ésima derivativa de Cantor-Bendixson do espaço X
$I_\xi(X)$	Conjunto dos pontos isolados de $X^{(\xi)}$

Lista de Figuras

Introdução

No ano de 1930, em seu artigo "On a Problem of Formal Logic", Ramsey publicou os dois teoremas famosos abaixo:

> "Para todos naturais n, γ e λ, existe um natural κ tal que, se $[\kappa]^n$ é particionado em γ pedaços, então existe um $H \in [\kappa]^\lambda$ tal que $[H]^n$ está contido num mesmo pedaço"

e

> "Para todos naturais n e γ, se o conjunto $[\omega]^n$ é particionado em γ pedaços, então existe $H \subset \omega$ enumerável tal que $[H]^n$ está contido num desses pedaços."

Respectivamente esses dois teoremas podem ser abreviados com as seguintes notações

$$\forall n, \gamma, \lambda \in \omega \quad \exists \kappa \in \omega \qquad \text{tal que} \qquad \kappa \longrightarrow (\lambda)^n_\gamma$$

e

$$\forall n, \gamma \in \omega \qquad \text{vale} \qquad \omega \longrightarrow (\omega)^n_\gamma.$$

O estudo das generalizações desses teoremas no sentido de trocar os números κ, λ e γ por outros números cardinais é conhecido como *cáculo das partições* (por exemplo (Erdös *et al.*, 1984) e (Schipperus, 2012)). Generalizações também têm sido feitas trocando-se os números cardinais κ e λ por tipos de ordem ou por espaços topológicos por exemplo. Ao estudo desses últimos resultados é o que vamos chamar de *cálculo das partições para espaços topológicos*.

Apesar do cálculo das partições para espaços topológicos se originar do cálculo das partições para números cardinais (Hajnal *et al.*, 1990) após os teoremas de Ramsey de 1930, segundo Hajnal *et al.* (1986), já no ano de 1908 podemos encontrar no artigo "Zur Theorie der Trigonometrischen Reichen" de Bernstein um teorema com esse sabor de partições de espaços topológicos, o qual nos afirma que existe um subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que nem A nem $\mathbb{R} \setminus A$ contém uma cópia do cubo de Cantor. Segundo os mesmos autores, esse é um dos resultados mais antigos, não apenas da teoria em questão, como também de aplicação da teoria dos conjuntos em topologia.

O objetivo desta dissertação é apresentar o cálculo das partições para espaços topólogicos. O principal artigo que iremos estudar é o "Partitioning Topological Spaces", de William Weiss. Muitos dos resultados apresentados neste artigo estão apresentados apenas com um esboço de suas demonstrações. Nesse sentido, uma parte substancial desta dissertação foi desenvolvida para dar uma demonstração mais completa de alguns desses resultados.

No capítulo 2, "Primeiros Resultados", obteremos algumas relações de partições a partir de resultados conhecidos de topologia ou de teoria dos conjuntos, como o teorema 2.1.10 de Sierpinski (que nos dá uma caracterização topológica do espaço dos números racionais), o teorema 1.2.45 de

Baire e a proposição 1.1.29. Em seguida (no mesmo capítulo) veremos um teorema considerado parte do folclore dessa teoria. Este teorema é interessante, não apenas pela sua demonstração em si, como também pelo modo como ele se apresenta em outros resultados conforme veremos na seção 2.2. Neste capítulo serão obtidas cópias *homogêneas* (ver 2.0.3) de números ordinais enumeráveis, o que nos leva ao capítulo seguinte (o capítulo 3, "Ordinais Enumeráveis") no qual estudaremos alguns espaços que contém cópias homogêneas desses ordinais. Veremos aplicações do princípio $\diamondsuit$, do axioma de Martin e da derivativa de Cantor-Bendixson. Começaremos o capítulo 4, "O ω_1 e o Cubo de Cantor", com relações negativas envolvendo cópias homogêneas do ω_1 e, em seguida, uma condição necessária para obter relações positivas. Por fim, veremos algumas relações de partições envolvendo o cubo de Cantor, compactificação de um ponto de espaços discretos e espaços diádicos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, enunciamos alguns resultados básicos que serão utilizados neste trabalho. As demonstrações omitidas podem ser encontradas em referências clássicas como Kunen (1980), Hrbacek e Jech (1999), Jech (2003), Ciesielski (1997), Engelking (1989) e Munkres (1975). Além disso, iremos convencionar algumas notações e definições.

1.1 Teoria dos Conjuntos

Vamos assumir a familiaridade do leitor com as notações usuais (que podem ser consultadas, por exemplo, em Kunen (1980)), com os axiomas de ZFC e com a técnica de demonstração por indução transfinita.

Sejam X e Y conjuntos. Para indicar que X é subconjunto de Y (podendo ser igual a Y) iremos escrever $X \subset Y$. Caso X seja um subconjunto próprio de Y (isto é, um subconjunto diferente de Y) e quisermos enfatizar isso iremos escrever $X \subsetneq Y$.

Funções

Vamos usar os símbolos $\operatorname{dom} f$ e $\operatorname{im} f$ para indicar, respectivamente, o domínio e a imagem de uma dada função f.

Definição 1.1.1 (Funções compatíveis)**.** Duas funções f e g são *compatíveis* quando $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.

Proposição 1.1.2. Se $\mathcal{F}$ é uma família de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função cujo domínio é $\bigcup\{\operatorname{dom} f : f \in \mathcal{F}\}$.

Números Ordinais

Definição 1.1.3 (Ordem Linear)**.** Dado um conjunto ordenado $(X, <)$, dizemos que $<$ é uma *ordem linear* quando quaisquer dois elementos x e y de X são comparáveis, isto é, $x < y$, $x = y$ ou $y < x$. Neste caso, vamos dizer que X é um conjunto linearmente ordenado.

Definição 1.1.4 (Isomorfismo de Ordem, conjuntos ordem-isomorfos)**.** Dados dois conjuntos ordenados $(X, <)$ e $(Y, \prec)$, chamamos de isomorfismo de ordem a uma função bijetiva $f : X \to Y$ tal que $x < y$ se, e somente se, $f(x) \prec f(y)$. Caso uma tal função exista, dizemos que os conjuntos X e Y são ordem-isomorfos.

Um resultado interessante nessa teoria é o corolário 1.1.7 que nos diz que o conjunto dos racionais contém uma cópia ordem-isomorfa de cada conjunto linearmente ordenado enumerável. Por exemplo, o conjunto $\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ é uma cópia ordem-isomorfa do $\mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ com a ordem definida por $x < y$ se e somente $x \in y$ e o conjunto $\{m - 1/n : m, n \in \omega \setminus \{0\}\}$ é uma cópia do $\mathbb{N}^2$ com a ordem lexicográfica.

Mais à frente, no capítulo 2, de modo análogo aos dois resultados seguintes, iremos ver uma caracterização topológica do espaço $\mathbb{Q}$ (teorema 2.1.10), e que ele também contém uma cópia homeomorfa de cada ordinal enumerável com a topologia induzida pela ordem (lema 2.1.13).

Definição 1.1.5 (Conjunto denso com respeito à ordem)**.** Dizemos que um conjunto ordenado $(X, <)$ com pelo menos dois elementos é denso com respeito à ordem ou simplesmente denso (quando não houver risco de confusão) quando, dados $x, y \in X$ tais que $x < y$, existe um $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Proposição 1.1.6. Dois conjuntos enumeráveis, linearmente ordenados, densos e sem extremos (isto é, sem um menor e sem um maior elemento) são ordem-isomorfos.

Demonstração. Sejam $(A, <)$ e $(B, \prec)$ duas ordens lineares nas condições do teorema. Sejam $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ e $\langle b_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ duas sequências tais que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vamos construir uma família $\{f_n : n \in \omega\}$ de funções parciais f_n, cada uma definida num subconjunto finito de A, tais que $f_n \subset f_{n+1}$ (e, portanto, compatíveis) e tais que $x < x'$ se, e somente se, $f_n(x) \prec f_n(x')$ para todos $a, a' \in \operatorname{dom} f_n$, de modo que $\bigcup_{n\in\omega} \operatorname{dom} f_n = A$. Uma vez tendo feita essa construção, $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n : A \to B$ será o isomorfismo procurado.

Vamos chamar de isomorfismo parcial a uma função f definida num subconjunto finito de A tal que $x < x'$ se, e somente se, $f(x) \prec f(x')$ para todos $x, x' \in \operatorname{dom} f$. Dados um isomorfismo parcial f, $a \in A$ e $b \in B$, vamos construir um isomorfismo parcial $f_{a,b}$ tal que $a \in \operatorname{dom} f_{a,b}$, $b \in \operatorname{im} f_{a,b}$ e $f \subset f_{a,b}$. Seja $f = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)\}$ e suponha $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. E, portanto, $y_1 \prec y_2 \prec \ldots \prec y_k$. Se $a \notin \operatorname{dom} f$, temos 3 possibilidades, a saber: (i) $a < x_1$, (ii) $x_i < a < x_{i+1}$ para algum i ou (iii) $x_k < a$. Usando a boa ordem dos naturais e as hipóteses acerca de B dadas no teorema, vamos escolher o menor m tal que: No caso (i): $b_m \prec y_1$; No caso (ii) $y_i \prec b_m \prec y_{i+1}$, e, no caso (iii) $y_k \prec b_m$. Deste modo $f' = f \cup \{(a, b_m)\}$ é um isomorfismo parcial. Se $b \in \operatorname{im} f'$, então não há nada a fazer. Se $b \notin \operatorname{im} f'$, então repita este processo para B no lugar de A e A no lugar de B, usando agora o fato de A não ter extremos e ser denso, obtendo um a_n tal que $f' \cup \{(a_n, b)\}$ é um isomorfismo parcial. O $f_{a,b} = f' \cup \{(a_n, b)\}$ é, então, o isomorfismo parcial desejado.

Seguindo esta construção agora é só construir a sequência definida de modo recursivo por $f_0 = \emptyset$ e $f_{n+1} = (f_n)_{a_n,b_n}$. Segue a tese. ■

De uma parte dessa demonstração segue o resultado desejado:

Corolário 1.1.7. A qualquer conjunto linearmente ordenado enumerável existe um subconjunto de $\mathbb{Q}$ (com a ordem induzida) ordem-isomorfo a ele.

Chamamos de *número ordinal* um conjunto que é bem ordenado (pelo $\in$) e *transitivo*. Um conjunto é transitivo quando ele contém (como subconjunto) todos seus elementos. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Nesse sentido, como um número ordinal, iremos denotá-lo com a letra ω. Um ordinal α é *sucessor* quando existe um ordinal β tal que $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} = \alpha$. Caso contrário (para $\alpha \neq 0$), α é um ordinal *limite*. Dados dois números ordinais α e β, definimos $\alpha < \beta$ se, e somente se, $\alpha \in \beta$. Isso define uma relação bem ordenada em qualquer conjunto não vazio de números ordinais.

Proposição 1.1.8. Todo conjunto bem ordenado é ordem-isomorfo a um único número ordinal.

Definição 1.1.9 (Tipo de ordem)**.** Dado um conjunto bem ordenado X, chamamos de *tipo de ordem* de X e denotamos por $\mathrm{ot}(X)$ ao único número ordinal ordem-isomorfo ao X.

Proposição 1.1.10. Sejam X e Y dois conjuntos bem ordenados. Se eles são ordem-isomorfos, então o isomorfismo de ordem $f : X \to Y$ que existe é único.

Definição 1.1.11 (Cofinalidade)**.** Dado um número ordinal α, dizemos que uma sequência $\langle \alpha_\xi : \xi < \lambda \rangle$ de elementos de α é *cofinal* em α quando para todo $\gamma \in \alpha$ existe um $\xi \in \lambda$ tal que $\gamma \leqslant \alpha_\xi$. Chamamos de *cofinalidade* de α ao menor ordinal λ tal que existe uma sequência $\langle \alpha_\xi : \xi < \lambda \rangle$ cofinal em α. Denotamos a cofinalidade de α por $\mathrm{cf}(\alpha)$.

Observações.

1. Temos $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha$, pois a sequência $\langle \xi : \xi \in \alpha \rangle$ é cofinal em α;

2. A cofinalidade de um ordinal sucessor $\alpha + 1$ é $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$ pois a sequência $\langle \alpha \rangle$ é cofinal em $\alpha+1$. Reciprocamente, se $\mathrm{cf}(\alpha) = 1$, então α é um sucessor. Além disso $\mathrm{cf}(\alpha) \in \omega \Rightarrow \mathrm{cf}(\alpha) = 1$.

Proposição 1.1.12. O ω_1 tem cofinalidade ω_1.

Demonstração. Isso acontece porque o ω_1 não pode ser o supremo de uma sequência enumerável de ordinais enumeráveis, uma vez que um supremo de uma tal sequência é enumerável e, portanto, estritamente menor do que o ω_1. ■

Proposição 1.1.13. Dado um ordinal α, existe uma sequência cofinal e estritamente crescente $\langle \alpha_\xi : \xi \in \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ em α.

Aritmética Ordinal

Dado um ordinal α, definimos:

1. a soma de ordinais por

   (a) $\alpha + 0 = \alpha$;

   (b) $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ para todo ordinal β;

   (c) $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$, se β é limite;

2. e o produto de ordinais por

   (a) $\alpha \cdot 0 = \alpha$;

   (b) $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ para todo ordinal β;

   (c) $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$, se β é limite.

No caso em que β é limite, poderíamos (e daria na mesma) ter feito as definições tomando sequências cofinais em β. Por exemplo, se $\{\beta_\xi : \xi < \lambda\}$ é cofinal em β, então:

$$\sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\} = \sup\{\alpha + \beta_\xi : \xi < \lambda\}.$$

Proposição 1.1.14. Sejam $(X_1, <_1)$ e $(X_2, <_2)$ dois conjuntos bem ordenados e disjuntos, ordem-isomorfos aos ordinais α_1 e α_2, respectivamente. Seja $(X, <)$ definido por $X = X_1 \cup X_2$ e $x < y$ se, e somente se: $x, y \in X_1$ e $x <_1 y$, ou $x \in X_1$ e $y \in X_2$, ou $x, y \in X_2$ e $x <_2 y$. Então $(X, <)$ é bem ordenado e ordem-isomorfo ao ordinal $\alpha_1 + \alpha_2$.

Proposição 1.1.15. Sejam X e Y dois conjuntos bem ordenados e ordem-isomorfos respectivamente aos ordinais α e β. O produto cartesiano $X \times Y$ com a ordem antilexicográfica é ordem-isomorfo ao ordinal $\alpha \cdot \beta$ e o produto $X \times Y$ com a ordem lexicográfica é ordem-isomorfo ao ordinal $\beta \cdot \alpha$.

Cardinais

Dizemos que dois conjuntos A e B são *equipotentes* quando existe uma função bijetiva de A em B. Definimos a *cardinalidade* $|A|$ de um conjunto A como o menor número ordinal equipotente a A. Um tal número ordinal será chamado de *número cardinal* ou simplesmente de *cardinal*. Denotaremos por ω a cardinalidade do conjunto dos número naturais, por ω_1 a cardinalidade do menor conjunto que não é enumerável e assim por diante [1]. Um *cardinal regular* κ é um cardinal tal que $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

Proposição 1.1.16. A $\mathrm{cf}(\alpha)$ é um cardinal regular qualquer que seja o número ordinal α.

Proposição 1.1.17. Se A é um subconjunto de um cardinal regular κ tal que $|A| < \kappa$, então existe $\alpha < \kappa$ tal que $A \subset \alpha$.

Definição 1.1.18 (A função característica)**.** Dados um conjunto X e um subconjunto $A \subset X$, chamamos de *função característica* de A a função $\chi_A : X \to 2$ definida por $\chi_A(x) = 1\ \forall x \in A$ e $\chi_A(x) = 0\ \forall x \in X \setminus A$.

As funções características são úteis, por exemplo, para mostrar que o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X e o conjunto 2^X de todas as funções de X em 2 são equipotentes. Mais à frente, no capítulo 4 iremos ver mais aplicações das funções características.

Definição 1.1.19 (Família dominante, família não limitada)**.** Uma família $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$ de funções de ω em ω é:

1. *dominante* quando para toda $g \in \omega^\omega$ existe uma $f \in \mathcal{F}$ tal que $g(n) < f(n)$ para todo, com excessão de um número finito, de $n \in \omega$;

2. *não limitada* quando para toda $g \in \omega^\omega$ existe uma $f \in \mathcal{F}$ tal que $g(n) \leqslant f(n)$ para infinitos $n \in \omega$.

[1] Na literatura também é comum o uso dos "alephs" para denotar cardinalidade, e a notação dos "omegas" para enfatizar a ordem. Assim, por exemplo, $\aleph_0$ é a cardinalidade de um conjunto enumerável e $\aleph_1$ é a do menor conjunto que não é enumerável.

Note que ser dominante é mais forte do que ser não limitada, ou seja, toda família dominante é também não limitada. Com esses conceitos definimos os números cardinais:

$$\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ é família dominante}\}$$

e

$$\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ é família não limitada}\}.$$

Da observação que acabamos de fazer segue que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$. O resultado seguinte nos diz que $\omega < \mathfrak{b}$.

Proposição 1.1.20. Nenhuma família $\mathcal{G} \subset \omega^\omega$ com cardinalidade menor ou igual a ω pode ser não limitada. Isto é, para uma tal $\mathcal{G}$, existe $f \in \omega^\omega$ tal que, qualquer que seja a $g \in \mathcal{G}$, vale $g(n) < f(n)$ para todos, com excessão de finitos, $n \in \omega$.

Demonstração. Sejam as enumerações $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \omega\}$ e $\omega = \{x_n : n \in \omega\}$. Defina a sequência $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ de funções f_n cujos domínios são subconjuntos finitos de ω, ou seja, $\operatorname{dom} f_n \in [\omega]^{<\omega}$ e que satisfaçam:

(i) $f_0 \subset f_1 \subset f_2 \subset \cdots$ e

(ii) $f_n(x) > g_i(x)\ \forall x \in \operatorname{dom} f_n \setminus \operatorname{dom} f_{n-1}\ \forall i < n$.

Por exemplo:

$$f_0 = \{(x_0, 0)\} \qquad \text{e} \qquad f_n = f_{n-1} \cup \{(x_n, f_n(x_n))\}\ \ \forall n \geqslant 1,$$

onde $f_n(x_n) > \max\{g_i(x_n) : i < n\}$.

Daí $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ é tal que, para qualquer $g \in \mathcal{G}$, $f(n) > g(n)$ para todos, com excessão de finitos, $n \in \omega$. Pois seja $g_i \in \mathcal{G}$. Tome $m > i$ e temos

$$g_i(x_m) < f_m(x_m) \qquad \text{e} \qquad g_i(x_l) < f_l(x_l) \quad \forall l \geqslant m$$

de modo que $f(x_l) = f_l(x_l) > g_i(x_l)\ \forall l \geqslant m$. Portanto $g_i(n) < f(n)$ para todos, com excessão de finitos, $n \in \omega$ como queríamos. ■

Portanto, sendo

$$\mathfrak{c} = |2^\omega| = |\mathbb{R}|$$

a cardinallidade do conjunto dos reais e sabendo que $|\omega^\omega| = \mathfrak{c}$, podemos concluir as seguintes desigualdades

$$\omega_1 \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Observação: Neste trabalho também usaremos o símbolo 2^ω para indicar o número cardinal $\mathfrak{c}$.

Definição 1.1.21 (A hipótese do contínuo CH)**.** A hipótese do contínuo, abreviada por CH, é a afirmação de que vale a igualdade

$$\mathfrak{c} = \omega_1.$$

O Pressing-Down

Nesta seção trabalharemos com o lema do Pressing-Down, uma técnica bastante útil em Teoria dos Conjuntos, conforme veremos ao longo deste trabalho.

Definição 1.1.22 (Club)**.** Dado um ordinal limite μ, dizemos que um conjunto $C \subset \mu$ é fechado quando, para todo ordinal limite $\delta < \mu$, se $C \cap \delta$ é não limitado em δ, então $\delta \in C$. Vamos dizer que C é um club (abreviação de *closed and unbounded*) de μ quando C for fechado e não limitado em μ. Quando não houver risco de ambiguidade vamos dizer simplesmente club.

Será comum trabalharmos com club's de ω_1. Neste caso, uma forma equivalente de dizer que um subconjunto $C \subset \omega_1$ é fechado é dizer que $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\} \in C$ qualquer que seja a sequência crescente $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de C.

Proposição 1.1.23. Seja μ um ordinal limite de cofinalidade maior do que ω. A interseção de menos do que $\mathrm{cf}(\mu)$ club's em μ é um club em μ.

Para a próxima proposição, vamos precisar das seguintes definições:

Definição 1.1.24 (Função n-ária)**.** Uma *função n-ária sobre um conjunto A* é uma função $f : A^n \to A$ se n é um natural maior ou igual a 1 ou é um elemento de A caso $n = 0$.

Definição 1.1.25 (Função finitária)**.** Uma *função finitária* é uma função n-ária para algum n.

Definição 1.1.26 (Conjunto fechado sob uma função finitária)**.** Dada uma função n-ária f sobre um dado conjunto A para um dado natural n, dizemos que um subconjunto B de A é *fechado sob f* quando $f[B^n] \subset B$ se n é não nulo ou quando $f \in B$ se $n = 0$.

Proposição 1.1.27. Dados um cardinal regular não enumerável κ e uma família $\mathcal{A}$ com menos do que κ funções finitárias sobre κ. O conjunto

$$C = \{\gamma < \kappa : \gamma \text{ é fechado sob todos os elementos de } \mathcal{A}\}$$

é um club em κ.

Definição 1.1.28 (Estacionário)**.** Dado um ordinal limite μ, é *estacionário* um subconjunto $S \subset \mu$ tal que $S \cap C \neq \emptyset$ qualquer que seja o club C de μ.

Desta definição é imediato que é estacionário um conjunto que contém um estacionário. Outros exemplos de conjuntos estacionários são o conjunto de ordinais limites e o conjunto $\{\gamma \in \mu : \mathrm{cf}\,(\gamma) = \lambda\}$ se λ é regular e $\mathrm{cf}(\mu) > \lambda$.

Proposição 1.1.29. Seja μ um ordinal limite de cofinalidade maior do que ω. Se uma reunião de menos do que $\mathrm{cf}(\mu)$ subconjuntos de μ é um estacionário em μ, então algum desses subconjuntos é um estacionário em μ.

Demonstração. Fixe um $\lambda < \mathrm{cf}(\mu)$ e seja $\{S_i : i < \lambda\}$ a família desses subconjuntos. Seja $S = \bigcup_{i<\lambda} S_i$ essa reunião. Se nenhum dos S_i é estacionário, então, para cada $i < \lambda$, existe um club C_i em μ tal que $C_i \cap S_i = \emptyset$. Pelo lema 1.1.23, o conjunto $C = \bigcap_{i<\lambda} C_i$ é um club em μ. Ele é tal que $C \cap S = \emptyset$. Portanto S não é um estacionário. ■

Proposição 1.1.30. Para qualquer κ regular maior do que o ω existe uma família com κ conjuntos estacionários em κ dois a dois disjuntos.

Definição 1.1.31 (Função Regressiva)**.** Uma função f é chamada de regressiva quando $f(\alpha) < \alpha$ para todo α não nulo de seu domínio. Também vamos usar a expressão *associação regressiva*.

Teorema 1.1.32 (Lema do Pressing-Down)**.** Sejam $\kappa > \omega$ um cardinal regular e $S \subset \kappa$ um conjunto estacionário. Se a função $f : S \to \kappa$ é regressiva, então ela é constante em algum subconjunto estacionário de S.

Definição 1.1.33 (O princípio $\diamondsuit$)**.** O *princípio* $\diamondsuit$ (princípio diamante) é a afirmação da existência de uma sequência $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ de $A_\alpha \subset \alpha\ \forall \alpha \in \omega_1$ tal que o conjunto

$$\{\alpha \in \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\}$$

é estacionário em ω_1, qualquer que seja o subconjunto $A \subset \omega_1$. Uma tal sequência é chamada de *sequência* $\diamondsuit$.

Proposição 1.1.34. Diamante implica CH

Família quase disjunta e Δ-sistema

Definição 1.1.35 (Família Quase Disjunta)**.** Dado um cardinal infinito κ, dizemos que dois subconjuntos $x, y \subset \kappa$ são quase disjuntos quando $|x \cap y| < \kappa$. De forma abreviada, vamos dizer que eles são a.d. (do inglês *almost disjoint*). Uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ é a.d. quando todos seus elementos têm cardinalidade κ e são dois a dois a.d..

Teorema 1.1.36. Seja κ um cardinal regular maior ou igual ao ω.

1. Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ é uma família a.d. e $|\mathcal{A}| = \kappa$, então $\mathcal{A}$ não é maximal.

2. Existe uma família a.d. maximal $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ de cardinalidade maior ou igual a κ^+.

Definição 1.1.37 (Δ-sistema)**.** Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos é chamada de Δ-sistema (delta sistema) quando existe um conjunto r, chamado a *raiz do* Δ*-sistema*, tal que $x \cap y = r\ \forall x, y \in \mathcal{A}$ distintos.

O Axioma de Martin

Fixemos um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leqslant)$.

Definição 1.1.38 (Elementos compatíveis)**.** Dizemos que dois elementos x e y de P são compatíveis quando existe um $z \in P$ tal que $z \leqslant x$ e $z \leqslant y$. Caso contrário dizemos que x e y são *incompatíveis*.

Definição 1.1.39 (Anti-cadeia)**.** Uma anti-cadeia em P é um subconjunto $A \subset P$ cujos elementos são dois a dois incompatíveis.

Definição 1.1.40 (A propriedade ccc)**.** Dizemos que P satisfaz a *ccc* (do inglês *countable chain condition*) quando toda anti-cadeia em P é no máximo enumerável.

Um subconjunto $X \subset P$ é:

1. *denso* em P quando para todo $p \in P$ existe um $d \in X$ tal que $d \leqslant p$;

2. *filtro* em P quando, dados $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que $z \leqslant x$ e $z \leqslant y$ e, para $q \in X$ e $p \in P$, se $q \leqslant p$, então $p \in X$.

Definição 1.1.41 (Filtro $\mathcal{D}$-genérico)**.** Dada uma família $\mathcal{D}$ de conjuntos densos em P, dizemos que um filtro F em P é $\mathcal{D}$-genérico quando $F \cap D \neq \emptyset \; \forall D \in \mathcal{D}$.

Definição 1.1.42 (O Axioma de Martin)**.** Sejam $(P, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado que satisfaz a ccc e $\mathcal{D}$ uma família de densos em P tal que $|\mathcal{D}| < 2^\omega$. Nessas condições, o Axioma de Martin é a afirmação da existência de um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P. Também iremos nos referir ao Axioma de Martin pela sigla MA.

Definição 1.1.43 (O MA_κ)**.** Na definição acima, fixado um cardinal infinito κ e trocando-se $|\mathcal{D}| < 2^\omega$ por $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$, teremos o MA_κ.

As duas proposições seguintes também podem ser encontradas em Kunen (2013).

Proposição 1.1.44. O MA_κ implica $\kappa < 2^\omega$. Em particular, MA_{ω_1} implica a negação da CH.

Proposição 1.1.45. MA_κ implica $\mathfrak{b} > \kappa$.

Proposição 1.1.46. O MA implica $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

1.2 Topologia

Vamos assumir a familiaridade do leitor com as definições de: espaço métrico, topologia, conjunto aberto e fechado. Como de costume, iremos dizer simplesmente *o espaço topológico* X para nos referir ao espaço topológico (X, τ). Ou, ainda de forma mais resumida, *o espaço* X. O X também pode ser chamado de *suporte do espaço* (X, τ). Dados um espaço topológico X, um elemento $x \in X$ e um aberto U que tem x como elemento, iremos chamar U de *vizinhança* de x. Quando todos os subconjuntos de um dado espaço X forem abertos, chamaremos a topologia de X de *discreta*. Para que isso ocorra, basta que os subconjuntos unitários de X sejam abertos.

Definição 1.2.1 (Topologia mais fina)**.** Dadas duas topologias τ_1 e τ_2 sobre um mesmo conjunto X, dizemos que τ_1 é mais fina que τ_2 quando $\tau_2 \subset \tau_1$.

Definição 1.2.2 (Base para um espaço topológico)**.** Uma coleção $\mathcal{B}$ de conjuntos abertos de um espaço X é uma base para X quando dados um aberto U e um $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de *abertos básicos*.

Proposição 1.2.3. Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de um dado conjunto X tal que:
(i) dado $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, e;
(ii) dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
Então a coleção τ de todos os elementos da forma $\bigcup \mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ é uma topologia para X. Assim, a coleção $\mathcal{B}$ é uma base para (X, τ).

Com as notações da proposição acima, dizemos que $\mathcal{B}$ *gera* τ ou que τ *é gerada por* $\mathcal{B}$.

Dizemos que um espaço topológico Y é *subespaço topológico* de um dado espaço X, ou simplesmente subespaço de X, quando: $Y \subset X$ e dado um aberto V em Y, existe um aberto U em X tal que $V = U \cap Y$. Se Y for um subconjunto de um dado espaço topológico X e estivermos nos referindo ao Y como um espaço topológico sem mencionar qual topologia, ficará subentendido que estamos olhando para Y qual a topologia de subespaço de X.

Dados um espaço X e um $x \in X$, uma coleção $\mathcal{B}(x)$ de vizinhanças de x é uma *base local para X em x* quando para toda vizinhança U de x, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in V \subset U$.

Notações: Dados um espaço topológico X e um subconjunto $A \subset X$, vamos denotar o *interior* (que, por definição, é o maior subconjunto aberto contido em A) por $\mathrm{int}(A)$ ou por $\mathrm{int}_X(A)$ caso houver risco de ambiguidade. O *fecho de A em X* (que, por definição, é o menor conjunto fechado que contém A) iremos denotar por $\overline{A}$. Para reforçar que estamos tomando o fecho de A no espaço X (para evitar ambiguidades), iremos também usar a notação $\mathrm{cl}_X(A)$.

Proposição 1.2.4. Se Y é um subespaço de um dado espaço X, então, para um dado $A \subset Y$, temos:

$$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y.$$

Proposição 1.2.5. Sejam X um espaço e Y um subespaço de X. Se $F \subset Y$ é fechado em X, então ele também é fechado em Y. Se F é fechado em Y e Y é fechado em X, então F é fechado em X.

Definição 1.2.6 (Ponto de acumulação, ponto isolado, conjunto derivado)**.** Dados um espaço X e um subconjunto $A \subset X$, dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de A (ou *ponto limite de A*) quando toda vizinhança de x intersecta A num ponto distinto de x. Isso acontece se, e somente se, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Chamamos de *conjunto derivado de A* ao conjunto de todos os pontos de acumulação de A. Denotamos este conjunto por A^d. Um ponto $x \in A$ que não é de acumulação de A é chamado de ponto isolado de A.

Note que, dados um espaço X e um subconjunto $A \subset X$, um $x \in A$ é um ponto isolado de A se, e somente se, $\{x\}$ é aberto em A (com a topologia de subespaço de X).

Para subconjuntos A e B de um espaço topológico X valem as seguintes propriedades. A última delas pode ser encontrada em Kuratowski (1966).

1. $\overline{A} = A \cup A^d$;
2. Se $A \subset B$, então $A^d \subset B^d$;
3. $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;
4. $\bigcup_{s \in S} A_s^d \subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^d$;
5. Se todo subconjunto unitário de X é fechado, então $(A^d)^d \subset A^d$.

Definição 1.2.7. Dados um espaço topológico X e um subconjunto $A \subset X$, dizemos que A é:

- *denso em X* quando $\overline{A} = X$;
- *raro* em X quando $X \setminus \overline{A}$ é denso em X;
- *denso em si mesmo* quando $A \subset A^d$.

As seguintes caracterizações são úteis.

- A é denso em X se, e somente se, todo aberto não vazio de X tem interseção não vazia com A;

- A é raro em X se, e somente se, todo aberto não vazio de X contém um aberto não vazio contido em $X \setminus A$;

- A é raro se, e somente se, $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

  Demonstração do último item. Se $\text{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, então existe um aberto não vazio U contido em $\overline{A}$. Assim, dado um aberto não vazio $V \subset U$, temos que $V \cap A \neq \emptyset$. Logo, A não é raro. Reciprocamente, suponha que $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Dado um aberto não vazio U, temos, então, que $U \not\subset \overline{A}$. Assim, existe um $x \in U$ que não pertence a $\overline{A}$, o que mostra que $U \cap X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$, como queríamos. ■

  Observação: O último item acima também é imediato da igualdade

$$\text{int}(S) = X \setminus \overline{X \setminus S},$$

  para qualquer que seja o subconjunto S do espaço X.

Lema 1.2.8. Seja dado um espaço X denso em si mesmo. Se A é um subconjunto aberto não vazio de X, então A é denso em si mesmo.

Demonstração. Suponha que exista um ponto $x \in A$ isolado em A, de modo que existe um aberto U em X tal que $U \cap A = \{x\}$. Mas agora temos que o $U \cap A$ é um aberto em X, donde segue que $\{x\}$ é um aberto em X. Portanto, x é um ponto isolado de X, o que faz X não ser denso em si mesmo. ■

A demonstração do lema abaixo foi traduzida de Kuratowski (1966).

Lema 1.2.9. Seja dado um espaço X denso em si mesmo e tal que $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. Se A é denso em X, então A é denso em si mesmo.

Demonstração. Se A é denso em X, então $A \cup A^d = X$, o que implica $A^d \cup (A^d)^d = X^d$. Por outro lado sabemos que $(A^d)^d \subset A^d$. Assim, $X^d = A^d \cup (A^d)^d = A^d$. Da hipótese $X \subset X^d$, obtemos $X \subset A^d$. Como $A \subset X$, segue $A \subset A^d$, como queríamos. ■

Definição 1.2.10 (Convergência de sequências)**.** Dizemos que uma sequência de pontos $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ num espaço X converge para um ponto $x \in X$ quando, dada uma vizinhança qualquer U de x, existe $n_U \in \omega$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geqslant n_U$.

Note que, se uma sequência de pontos de um dado espaço Y converge para um $x \in Y$ e Y é subespaço de X, então essa sequência também converge para x na topologia de X.

Definição 1.2.11 (Continuidade de uma função)**.** Uma função $f : X \to Y$ entre os espaços X e Y é contínua quando o conjunto $f^{-1}[V]$ é aberto em X qualquer que seja o aberto V em Y.

Por exemplo, se X é um espaço com a topologia discreta e Y é um espaço qualquer, então toda função de X em Y é contínua.

Proposição 1.2.12. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ para todo subconjunto A de X.

Proposição 1.2.13 (Funções contínuas preservam convergências)**.** Se a função $f : X \to Y$ é contínua e a sequência de pontos $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ em X converge para um $x \in X$, então a sequência $\langle f(x_n) : n \in \omega \rangle$ converge para $f(x)$.

Definição 1.2.14 (Função aberta, função fechada)**.** Uma função $f : X \to Y$ tal que $f[U]$ é aberto (fechado) em Y qualquer que seja o aberto (fechado) U em X é chamada de função aberta (função fechada).

Definição 1.2.15 (Homeomorfismo)**.** Uma função bijetiva $f : X \to Y$ contínua entre os espaços X e Y cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua é chamada de homeomorfismo.

A seguinte caracterização é imediata

Proposição 1.2.16. Uma função $f : X \to Y$ bijetiva e contínua é um homeomorfismo se, e somente se, ela é aberta.

Da proposição 1.2.12 vista anteriormente, vem a

Proposição 1.2.17. Uma função bijetiva $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, $f[\overline{A}] = \overline{f[A]}$ para todo subconjunto A de X.

Demonstração. Suponha que f seja um homeomorfismo. Fixado um $A \subset X$, vamos mostrar a igualdade $f[\overline{A}] = \overline{f[A]}$. Por ser contínua temos $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$. Considerando o subconjunto $f[A] \subset Y$, como f^{-1} é contínua, pela proposição 1.2.12 e pela injetividade de f vem

$$f^{-1}[\overline{f[A]}] \subset \overline{f^{-1}[f[A]]} = \overline{A}.$$

Aplicando f dos "dois lados" da inclusão $f^{-1}[\overline{f[A]}] \subset \overline{A}$, pela sobrejetividade de f, obtemos a outra inclusão $\overline{f[A]} \subset f[\overline{A}]$. Logo $f[\overline{A}] = \overline{f[A]}$.

Reciprocamente, se $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ qualquer que seja o $A \subset X$, então f é contínua. Se $\overline{f[A]} \subset f[\overline{A}]$ para todo subconjunto $A \subset X$, para mostrar que $f^{-1} : Y \to X$ é contínua, dado um $B \subset Y$, seja $A = f^{-1}[B]$. Por f ser sobrejetiva temos $B = f[A]$. Daí, por hipótese, $\overline{B} \subset f[\overline{f^{-1}[B]}]$ e, aplicando f aos "dois lados" dessa inclusão, pela injetividade de f, vem $f^{-1}[\overline{B}] \subset \overline{f^{-1}[B]}$. Logo pela proposição 1.2.12, f^{-1} é contínua. ■

Definição 1.2.18 (Espaços homeomorfos)**.** Diremos que os espaços X e Y são homeomorfos quando existir um homeomorfismo entre eles. Neste caso escreveremos $X \cong Y$.

Definição 1.2.19 (Imersão homeomorfa)**.** Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva e contínua entre os espaços X e Y, de modo que a função $g : X \to f[X]$ obtida restringindo o contradomínio de f é bijetiva. Caso g seja um homeomorfismo ($f[X]$ equipado com a topologia de subespaço de Y), diremos que f é uma *imersão topológica* de X em Y. Como sinônimos, em vez de imersão topológica, usaremos também a expressão imersão homeomorfa ou diremos simplesmente *imersão*.

Por exemplo, fixados os espaços X e Y não vazios e os pontos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ são imersões as funções $f : X \to X \times Y$ e $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$ $\forall x \in X$ e $g(y) = (x_0, y)$ $\forall y \in Y$, onde os abertos de $X \times Y$ são da forma $A \times B$ com A aberto em X e B aberto em Y.

Espaço linearmente ordenado

Seja um conjunto linearmente ordenado $(X, <)$ com pelo menos dois elementos. Considere a família $\mathcal{B}$ de todos os subconjuntos de X que tem uma das três formas abaixo

- $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$ para $a, b \in X$;
- $[x_0, b) = \{x \in X : a \leqslant x < b\}$, onde x_0 é o menor elemento de X caso exista e $b \in X$, ou;
- $(a, y_0] = \{x \in X : a < x \leqslant b\}$, onde y_0 é o maior elemento de X caso exista e $a \in X$.

Nessas condições, a família $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ sobre X. Essa τ é a topologia induzida pela ordem de X. Quando a topologia τ sobre X provier de uma ordem linear fixada de X, também iremos chamar (X, τ) de *espaço linearmente ordenado*.

Por exemplo, os número ordinais. Quando estivermos trabalhando com um número ordinal como espaço topológico ficará implícito que o estaremos munindo com a topologia induzida por sua ordem linear.

A principal propriedade que iremos usar desses espaços é que eles são *Hausdorff* (ver a seção Axiomas de Separação, link: 1.2).

Observação. Nesse sentido, os espaços linearmente ordenados têm uma propriedade mais forte do que essa, a saber, eles são *hereditariamente normais*, o que signficia que todos seus subespaços são *normais* (ver a seção Axiomas de Separação, link: 1.2).

Espaço Soma

Dada uma família $\{X_s\}_{s \in S}$ de espaços topológicos dois a dois disjuntos. Sejam $X = \bigcup_{s \in S} X_s$ e τ a família de todos os subconjuntos U de X tal que $U \cap X_s$ é aberto em X_s para todo $s \in S$. Então (X, τ) é um espaço topológico. Denotamos esse espaço por $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$ ou por $X = X_1 \bigoplus \cdots \bigoplus X_k$ se $S = \{1, \ldots, k\}$. Chamaremos esse X de *soma dos espaços* $\{X_s\}_{s \in S}$ ou de *espaço soma*.

Teorema 1.2.20. Se um espaço topológico X pode ser escrito como reunião de uma família $\{X_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos abertos dois a dois disjuntos, então $X = \bigoplus_{s \in S} X_s$.

Teorema 1.2.21. Sejam $\{X_s\}_{s \in S}$ e $\{Y_s\}_{s \in S}$ duas famílias de espaços topológicos dois a dois disjuntos tais que X_s e Y_s são homeomorfos para todo $s \in S$. Então $\bigoplus_{s \in S} X_s$ e $\bigoplus_{s \in S} Y_s$ são homeomorfos.

Espaço produto

Dada uma família $\{X_s\}_{s \in S}$ de espaços topológicos e, para cada $s \in S$, seja $\mathcal{B}_s$ uma base para X_s. Seja $X = \prod_{s \in S} X_s$ e seja $\mathcal{B}$ uma família de conjuntos da forma $\prod_{s \in S} B_s$, onde $B_s \in \mathcal{B}_s$ para todo $s \in S$ e o conjunto $F = \{s \in S : B_s \neq X_s\}$ é finito. Este $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia τ, chamada de *topologia produto*. Vamos chamar o X, com essa topologia, de *produto dos espaços* $\{X_s\}_{s \in S}$ ou de *espaço produto*.

Considerando a notação acima, para cada $t \in S$, definimos também a *projeção sobre o espaço* X_t por

$$\begin{array}{rccc} \pi_t\colon & X & \longrightarrow & X_t \\ & (x_s)_{s \in S} & \longmapsto & x_t \end{array}$$

Um espaço produto com o qual iremos trabalhar nesta dissertação é o da forma 2^κ para algum cardinal κ. Vamos convencionar que toda vez que nos referirmos a esse espaço estaremos munindo cada um dos κ's fatores do produto 2^κ com a topologia discreta $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, 2\}$. Com relação a seus abertos básicos, uma observação que será útil é a seguinte. Seja $U = \prod_{\xi \in \kappa} U_\xi$ um aberto básico não vazio de 2^κ. Seja F o subconjunto finito de κ tal que $U_\xi \neq 2$ para todo $\xi \in F$, ou seja, $U_\xi = \{0\}$ ou $U_\xi = \{1\}$ para todo $\xi \in F$. Assim, para um fixado $f \in U$, podemos caracterizar U pela existência de um subconjunto finito $F \subset \kappa$ tal que

$$g \in U \iff g(x) = f(x) \qquad \forall x \in F$$

Funções Cardinais

Fixado um espaço topológico X, definimos:

- o *peso de* X como o menor número cardinal da forma $|\mathcal{B}|$, onde $\mathcal{B}$ é uma base para X. Este número é denotado por $w(X)$;
- para um $x \in X$ fixado, o *caráter de* x *em* X como o menor número cardinal da forma $|\mathcal{B}(x)|$, onde $\mathcal{B}(x)$ é uma base para X em x. Ele é denotado por $\chi(x, X)$;
- o *caráter de* X, denotado por $\chi(X)$, como

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\};$$

- a *densidade de* X como o menor número cardinal da forma $|D|$, onde D é denso em X. Denotamos este número por $d(X)$.

De modo geral, uma *função cardinal* f é uma função que associa a cada espaço topológico X a um número cardinal $f(X)$ de um modo que, se X e Y são homeomorfos, então $f(X) = f(Y)$.

Axiomas de Enumerabilidade

Dizemos que X é

- *1º enumerável* quando $\chi(X) \leqslant \omega$;
- *2º enumerável* quando $w(X) \leqslant \omega$;
- *separável* quando $d(X) \leqslant \omega$.

Proposição 1.2.22. Seja X um espaço topológico. Vale $d(X) \leqslant w(X)$.

Proposição 1.2.23. Sejam um espaço X e um subconjunto $A \subset X$. Dado um ponto $x \in X$, se existe uma sequência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ de pontos $x_n \in A$ que converge para x, então $x \in \overline{A}$. A recíproca vale quando X é primeiro enumerável. Isto é, se X é primeiro enumerável e $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência de pontos em A que converge para x.

Caso o espaço seja primeiro enumerável, também vale a recíproca da proposição 1.2.13, que dizia que funções contínuas preservam convergências de sequências:

Proposição 1.2.24. Seja $f : X \to Y$ uma função e suponha X primeiro enumerável. Dada uma sequência qualquer $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ de pontos em X que converge para x, se a sequência $\langle f(x_n) : n \in \omega \rangle$ converge para $f(x)$, então f é contínua.

Uma outra definição que também iremos usar neste trabalho é a de *localmente enumerável.*

Definição 1.2.25 (Espaço localmente enumerável)**.** Dizemos que um espaço é localmente enumerável quando cada um de seus elementos admite uma vizinhança enumerável.

Axiomas de Separação

Dizemos que um espaço topológico X é:

- T_0 quando dados dois pontos distintos de X existe um aberto ao qual apenas um desses dois pontos pertence;
- T_1 quando o conjunto $\{x\}$ é fechado qualquer que seja o $x \in X$;
- T_2 ou *Hausdorff* ou *espaço de Hausdorff* quando dados dois pontos distintos $x, y \in X$ existem abertos U e V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- T_3 ou *regular* quando é T_1 e dados um $x \in X$ e um fechado F tal que $x \notin F$ existem abertos U e V tais que $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- $T_{3\frac{1}{2}}$ ou *completamente regular* quando é T_1 e dados um $x \in X$ e um fechado F tal que $x \notin F$ existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = \{1\}$;
- T_4 ou *normal* quando é T_1 e dados os fechados F e G disjuntos existem abertos U e V tais que $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 1.2.26. Num espaço Hausdorff os limites de sequências convergentes são únicos.

Proposição 1.2.27. Seja X um espaço T_1. Este espaço é regular se, e somente se, dados $x \in X$ e uma vizinhança U de x existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

Definição 1.2.28 (Espaço zero-dimensional)**.** Um espaço T_1 é zero-dimensional quando ele é não vazio e admite uma base de conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados.

Em particular, pela proposição acima, é regular um espaço que é zero-dimensional (basta tomar um V da base de abertos e fechados tal que $x \in V$ e $V \subset U$; para este V temos $\overline{V} = V$ (na verdade é mais forte: todo espaço zero-dimensional é completamente regular).

Definição 1.2.29 (Conexidade)**.** Um espaço X é *conexo* quando não existem abertos disjuntos e não vazios U e V tais que $X = U \cup V$. Ou, em outras palavras, quando, para abertos U e V disjuntos, se $X = U \cup V$, então $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Espaços Compactos e Localmente Compactos

Um espaço X é *compacto* quando dada uma família $\{U_s\}_{s\in S}$ de abertos em X tal que $X = \bigcup_{s\in S} U_s$ (uma coleção com essa propriedade é uma *cobertura aberta para* X), existe um conjunto $F \subset S$ finito tal que $X \subset \bigcup_{s\in F} U_s$.

Um fato que será usado neste trabalho é o da

Proposição 1.2.30. Os ordinais sucessores são compactos.

Demonstração. Suponha que não e seja $\alpha + 1$ um ordinal sucessor não compacto. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta para $\alpha + 1$ tal que nenhuma de suas sub-coleções finitas cobre o $\alpha + 1$. Podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{U}$ são intervalos abertos. O α pertence a algum intervalo $(\alpha_1, \alpha] \in \mathcal{U}$, com $\alpha_1 \neq 0$, pois, se $\alpha_1 = 0$, então o $(\alpha_1, \alpha]$ e o intervalo que cobre o α_1 cobrem o espaço todo. O α_1 pertence a algum intervalo $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{U}$, com $\alpha_2 \neq 0$ pelo mesmo motivo anterior. Assim, por indução, obtemos uma sequência estritamente decrescente $\alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n > \ldots$, o que é um absurdo, pois, desse modo, obteríamos um subconjunto $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ do conjunto bem ordenado $\alpha + 1$ que não admite um menor elemento. ■

Proposição 1.2.31. Se X é compacto e $f : X \to Y$ é uma função contínua, então $f[X]$ é compacto.

Proposição 1.2.32. Se X é Hausdorff e $Y \subset X$ é compacto, então Y é fechado em X.

Definição 1.2.33 (Propriedade da interseção finita)**.** Dizemos que uma família $\{A_s\}_{s\in S}$ não vazia de subconjuntos de um dado X tem a propriedade da interseção finita quando $\bigcap_{s\in F} A_s \neq \emptyset$ qualquer que seja o subconjunto finito F de S.

Proposição 1.2.34. Um espaço X é compacto se, e somente se, toda família $\mathcal{A}$ de subconjuntos fechados de X com a propriedade da interseção finita tem a interseção $\bigcap \mathcal{A}$ não vazia.

A compacidade é hereditária para subconjuntos fechados, isto é, vale a

Proposição 1.2.35. Se X é compacto e F é fechado em X, então F é compacto.

Proposição 1.2.36. Sejam X um espaço compacto e Y um espaço Hausdorff. Se $f : X \to Y$ é uma função bijetiva e contínua, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. Só falta mostrar que sua inversa f^{-1} é contínua. Para tanto, fixado um subconjunto fechado F de X, vamos mostrar que $f[F]$ é fechado em Y. Como X é compacto e F é fechado, pela proposição 1.2.35, F é compacto em X. Como f e contínua e F é compacto, pela proposição 1.2.31, $f[F]$ é compacto. Finalmente, como Y é Hausdorff e $f[F]$ é compacto, pela proposição 1.2.32, $f[F]$ é fechado em Y como queríamos. ■

Muito importante em topologia também é o

Teorema 1.2.37 (Teorema de Tychonoff)**.** Seja $\{X_s\}_{s\in S}$ uma família de espaços topológicos onde $X_s \neq \emptyset\ \forall s \in S$. O espaço produto $\prod_{s\in S} X_s$ é compacto se, e somente se, todos os espaços X_s são compactos.

Definição 1.2.38 (Localmente compacto)**.** Um espaço X é localmente compacto num ponto $x \in X$ quando existe um $C \subset X$ compacto que contém alguma vizinhança de x. Quando X é localmente compacto em cada um de seus pontos dizemos que X é localmente compacto.

Proposição 1.2.39. Um espaço Hausdorff X é localmente compacto num dado ponto $x \in X$ se, e somente se, para cada vizinhança U de x existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.

Definição 1.2.40 (Compactificação de um ponto)**.** Seja X um espaço Hausdorff localmente compacto e considere o conjunto $Y = X \cup \{\infty\}$, onde $\infty \notin X$, com a topologia cujos abertos são todos os abertos de X e os conjuntos da forma $Y \setminus C$, onde C é um subconjunto compacto de X. O espaço Y definido desse modo é chamado de *compactificação de um ponto de* X.

Proposição 1.2.41. Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff que não é compacto. Se Y é um espaço compacto, Hausdorff, que contém o X como subespaço e é tal que $Y \setminus X$ é um conjunto unitário e $\overline{X} = Y$, então Y é homeomorfo a compactificação de um ponto de X.

Espaços de Baire

Definição 1.2.42 (Espaço de Baire)**.** Dizemos que um espaço topológico X é um espaço de *Baire* quando dada uma família enumerável $\{A_n\}_{n\in\omega}$, onde cada A_n é aberto e denso em X, a interseção $\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n$ é densa em X.

O teorema abaixo nos dá exemplos de espaços que são de Baire. Para ele vamos precisar das seguintes definições.

Definição 1.2.43 (Sequência de Cauchy)**.** Dado um espaço métrico (X, d), dizemos que uma sequência $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ de pontos em X é de *Cauchy* quando, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $n_\varepsilon \in \omega$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Definição 1.2.44 (Espaço Métrico Completo)**.** Um espaço métrico é *completo* quando todas suas sequências de Cauchy convergem.

Por exemplo, $\mathbb{R}$ com a métrica usual é um espaço métrico completo.

Teorema 1.2.45 (Teorema de Baire)**.** Todo espaço métrico completo e todo espaço localmente compacto são de Baire.

1.3 O Conjunto de Cantor

Nesta seção iremos ver a definição do conjunto de Cantor, bem como alguns fatos topológicos referentes a ele.

Definição 1.3.1 (O conjunto de Cantor)**.** Seja $S = \bigcup\limits_{n\in\omega} \{0,1\}^n$ o conjunto de todas as sequências finitas de zeros e uns. Seja a sequência $\langle D_s : s \in S\rangle$ definida por

$$D_\emptyset = [0, 1]$$

e, se $D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1}\rangle} = [a, b]$, então

$$D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1},0\rangle} = [a, a + \frac{1}{3}(b - a)] \qquad \text{e} \qquad D_{\langle s_0,\ldots,s_{n-1},1\rangle} = [a + \frac{2}{3}(b - a), b].$$

Seja $F_n = \bigcup\{D_s : s \in \{0,1\}^n\}$ $\forall n \in \omega$. Chamamos de conjunto de Cantor ao conjunto

$$K = \bigcap_{n\in\omega} F_n.$$

Teorema 1.3.2. O conjunto de Cantor K e o espaço produto 2^ω são homeomorfos.

Demonstração. Vamos construir o homeomorfismo entre 2^ω e K. Dada $f \in 2^\omega$, defina $D_f = \bigcap_{n\in\omega} D_{f|_n}$. A família $\{D_{f|_n}\}_{n\in\omega}$ é uma família de conjuntos fechados para o espaço compacto de Hausdorff $[0,1]$ e tem a propriedade da interseção finita. Portanto, pelo teorema 1.2.34, $D_f \neq \emptyset$. Além disso a sequência $\langle \frac{1}{3^n} : n \in \omega\rangle$, onde cada $\frac{1}{3^n}$ é o comprimento do intervalo $D_{f|_n}$, tende a zero. Logo $D_f = \{d_f\}$ é um conjunto com apenas um ponto. Reciprocamente, dado $a \in K$, existe uma única $f \in 2^\omega$ tal que $D_f = \{a\}$; ela é $f = \bigcup\{s \in S : a \in D_s\}$. Essa associação $\psi : 2^\omega \to K$ definida por $\psi(f) = d_f$, onde d_f é o único elemento do conjunto $D_f = \bigcap_{n\in\omega} D_{f|_n}$, é uma bijeção. Para mostrar agora que ψ é um homeomorfismo, como o 2^ω é compacto (pelo teorema de Tychonoff) e K é Hausdorff (por ser subespaço de $\mathbb{R}$), pela proposição 1.2.36 basta mostrar que ψ é contínua. Isto é o que faremos a seguir.

Seja (a,b) um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ tal que o aberto $V = (a,b) \cap K$ em K seja não vazio. Dada uma f tal que $d_f \in V$, queremos um aberto básico U de 2^ω tal que $f \in U$ e $d_g \in V$ $\forall g \in U$. Existe $n \in \omega$ tal que $D_{f|_n} \subset (a,b)$. Assim, para todo $m > n$, temos $D_{f|_m} \subset (a,b)$. Então vamos definir $U = \prod_{n\in\omega} U_i$ por $U_i = \{f(i)\}$ $\forall i \in n$ e $U_i = 2$ $\forall i \in \omega \setminus n$. Seja $g \in U$ e vejamos que $d_g \in (a,b) \cap K$. Por construção temos $D_{g|_i} = D_{f|_i}$ $\forall i \in n$, de modo que $D_{g|_n} \subset (a,b)$ também. O resultado desejado segue de $D_g = \bigcap_{i\in\omega} D_{g|_i} \subset D_{g|_n}$.

■

O teorema acima motiva a seguinte

Definição 1.3.3 (O κ-cubo de Cantor)**.** Vamos chamar o espaço produto 2^ω de cubo de Cantor. De um modo geral, dado um cardinal κ, vamos chamar o espaço 2^κ de κ-cubo de Cantor. Nesse sentido, o cubo de Cantor é o ω-cubo de Cantor.

Por ser um subespaço de $\mathbb{R}$, K é segundo enumerável. Portanto, como consequência do lema 1.3.2, obtemos o seguinte

Corolário 1.3.4. O 2^ω é segundo enumerável.

Lembrando que, pela proposição 1.2.22, $d(X) \leqslant w(X)$ qualquer que seja o espaço topológico X, segue também o

Corolário 1.3.5. O 2^ω é separável.

Abaixo outras propriedades do conjunto de Cantor que serão usadas posteriormente.

Proposição 1.3.6. K é compacto.

Demonstração. Isso segue da compacidade de 2^ω e do fato de 2^ω e K serem homeomorfos. ■

Proposição 1.3.7. K é denso em si mesmo.

Demonstração. Isso acontece porque nenhum aberto básico de 2^ω é um conjunto unitário. De fato, se U é um aberto básico de 2^ω, então $|U| = \mathfrak{c}$, porque existem $|2^{\omega\setminus F}| = \mathfrak{c}$ modos de se "variar" uma certa g em U, uma vez que $|F| < \omega \Rightarrow |\omega \setminus F| = \omega$. ■

Proposição 1.3.8. K é raro em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Por definição, dado um intervalo aberto (a, b) em $\mathbb{R}$ queremos ver que existem elementos em (a, b) que não pertencem a $\overline{K} = K$. Como nenhum elemento menor do que 0 ou maior do que 1 pertence a K, podemos supor $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Note que, dados os naturais k e n, podem acontecer somente um dos dois casos: ou $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}] = D_s$ para algum $s \in \{0,1\}^n$ ou $(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}) \cap K = \emptyset$. Se $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}] = D_s$, então, por construção, seu terço médio $(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}})$ não tem interseção com K. Dessa forma, basta encontrarmos um k e um n tais que $(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}) \subset (a, b)$. Tomando $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{3^n} < \frac{b-a}{2}$ e $k = \min \{i \in \omega : \frac{i}{3^n} \geqslant a\}$, temos

$$\frac{k-1}{3^n} < a \Longrightarrow \frac{k}{3^n} < a + \frac{1}{3^n} < a + \frac{b-a}{2} \Longrightarrow \frac{k+1}{3^n} = \frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^n} < (a + \frac{b-a}{2}) + \frac{b-a}{2} = b.$$

Logo $a \leqslant \frac{k}{3^n} < \frac{k+1}{3^n} < b$ e segue a tese, pois, como já observamos anteriormente, $(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}) \cap \mathbb{R} \setminus K \neq \emptyset$. ■

1.4 Um Cuidado

Ao considerar uma relação de partição que envolve os números ordinais α e β, em particular o que queremos é (sem perda de generalidade) encontrar um subespaço A de α homeomorfo ao β. É importante enfatizarmos aqui a palavra *subespaço*, isto é, apesar de podermos munir A com sua topologia induzida pela ordem – o que seria muito natural uma vez que A também é um conjunto bem ordenado – o que vamos fazer é olhar para A munido com a topologia de subespaço de α. Confundir essas duas topologias pode parecer inofensivo e é de se esperar que nossa intuição seja guiada pelas nossas experiências com números ordinais vistos como conjuntos bem ordenados (e não como espaços topológicos, mesmo que essa topologia seja a gerada pela ordem).

O exemplo 1.4.1 abaixo nos mostra que, dado um subconjunto de um espaço linearmente ordenado, nem sempre as topologias de subespaço e a de ordem com as quais podemos munir esse subconjunto coincidem. Nos lemas 2.1.1 e 2.1.3 do capítulo 2 iremos ver condições necessárias sobre esses subconjuntos para que essas duas topologias coincidam. Nesta seção iremos dar mais ênfase aos casos em que o espaço em questão é um número ordinal. Nestes casos, o subespaço A mencionado no primeiro parágrafo sequer tem necessidade de ser homeomorfo ao seu tipo de ordem. Introduziremos o importante conceito da *derivativa de Cantor-Bendixson*, o qual será utilizado em seguida para demonstrar um teorema que nos diz quando existe um conjunto de números ordinais que é ao mesmo tempo homeomorfo e ordem-isomorfo a um dado ordinal da forma $\omega^\beta + 1$.

Exemplo 1.4.1. Considere os subconjuntos $X = [0, 1]$ e $Y = [0, 1) \cup [2, 3]$ de $\mathbb{R}$ com sua topologia usual. Esses dois conjuntos são ordem-isomorfos. Um exemplo de isomorfismo de ordem que os associa é $f : X \to Y$ definida por $f(x) = 2x$ para $0 \leqslant x < 1/2$ e $f(x) = 2x + 1$ para $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. Porém eles não são homeomorfos se olhados como subespaços de $\mathbb{R}$. Veja por exemplo que X é conexo e Y não.

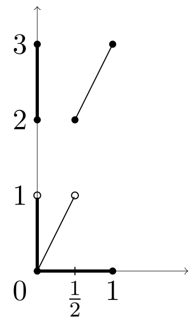

Figura 1.1: *Os espaços* $[0,1]$ *e* $[0,1) \cup [2,3]$ *são ordem-isomorfos.*

Sejam Y_1 o Y como subespaço topológico de $\mathbb{R}$ e Y_2 o Y com a topologia induzida por sua ordem. Note que os espaços topológicos Y_1 e Y_2 não coincidem. Para ver isso considere o conjunto $[2,3]$. Ele é aberto em Y_1, pois $[2,3] = Y \cap (3/2, 4)$. Se ele também fosse aberto em Y_2, então existiriam $a, b \in Y$ com $a < b$ e tais que $2 \in (a,b)$ e $(a,b) \subset [2,3]$. E, portanto, teríamos $a < 2$ e $2 \leqslant a$, o que é impossível. Logo $[2,3]$ não é aberto em Y_2.

Exemplo 1.4.2. O $\omega^2 + 1$ e o $\omega^2 + \omega + 1$ são homeomorfos apesar de seus tipos de ordens serem distintos. Este é um exemplo tirado de Weiss (1990b). Uma maneira de começar nossa procura pelo homeomorfismo que mostre essa afirmação é tentando associar pontos isolados a pontos isolados e pontos de acumulação a pontos de acumulação. Assim podemos chegar, por exemplo, na seguinte associação

$$\begin{array}{ccccc} n & \mapsto & \omega^2 + (n+1) & & \forall n \in \omega \\ \omega & \mapsto & \omega^2 + \omega & & \\ \omega + (n+1) & \mapsto & n & & \forall n \in \omega \\ \omega \cdot (m+1) + n & \mapsto & \omega \cdot m + n & & \forall n \in \omega, \forall m \in \omega,\, m \neq 0 \\ \omega^2 & \mapsto & \omega^2. & & \end{array}$$

Em seguida, uma simples verificação mostra que isso é de fato um homeomorfismo. Note a "bagunça" que esse homeomorfismo faz nas ordens dos conjuntos.

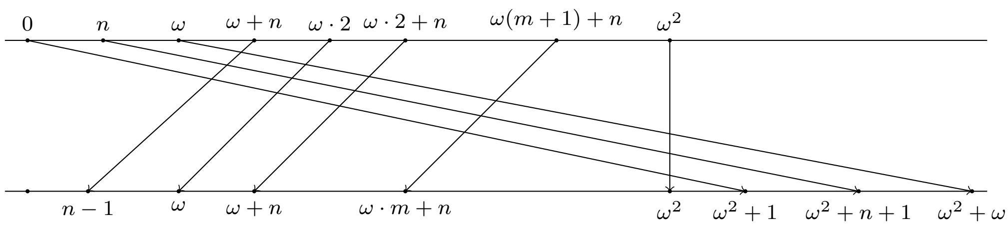

Figura 1.2: $\omega^2 + 1 \cong \omega^2 + \omega + 1$

Com relação ao exemplo 1.4.1 temos os seguintes resultados.

Proposição 1.4.3. Sejam $(X, <)$ e $(Y, \prec)$ conjuntos linearmente ordenados. Suponha que eles sejam ordem-isomorfos. Se $f : X \to Y$ é um isomorfismo de ordem, então f também é um homeomorfismo entre os espaços topológicos X e Y com suas topologias induzidas por suas ordens.

Demonstração. Por hipótese já temos que f é uma bijeção. Se U é um aberto básico não vazio de X da forma $U = \{x \in X : a < x < b\}$ para certos $a, b \in X$, então $f[U] = \{y \in Y : f(a) \prec y \prec f(b)\}$, pois f é um isomorfismo de ordem. Portanto, $f[U]$ é um aberto em Y. De modo análogo, se $V = \{y \in Y : a \prec y \prec b\}$ é um aberto básico não vazio de Y para certos $a, b \in Y$, então $f^{-1}[V] = \{x \in X : f^{-1}(a) < x < f^{-1}(b)\}$, ou seja, $f^{-1}[V]$ é um aberto em X. Logo f é um homeomorfismo. ■

Proposição 1.4.4. Sejam um ordinal α e um $A \subset \alpha$. Seja $\gamma = \mathrm{ot}(A)$, de modo que existe um único isomorfismo de ordem $f : A \to \gamma$. Equipe A com a topologia de subespaço. Se A é compacto, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. Como γ é Hausdorff, pela proposição 1.2.36 (que dizia que são homeomorfismos as funções contínuas bijetivas entre um compacto e um Hausdorff), basta mostrar que f é contínua. Seja $I = \{\xi \in \gamma : a < \xi < b\}$ um aberto básico não vazio de γ, com $a, b \in \gamma$. Do fato de f ser um isomorfismo de ordem, temos

$$f^{-1}[I] = \{\xi \in \alpha : f^{-1}(a) < \xi < f^{-1}(b)\} \cap A.$$

Como $\{\xi \in \alpha : f^{-1}(a) < \xi < f^{-1}(b)\}$ é um aberto em α, segue que $f^{-1}[I]$ é um aberto em A como queríamos.

■

Note que se X é um conjunto linearmente ordenado, munido com a topologia induzida pela ordem e $Y \subset X$, então os abertos de Y na topologia da ordem são também abertos na topologia de subespaço e que o conjunto $f^{-1}[I]$ obtido na demonstração acima era, de um modo mais forte, um aberto básico daquele A com a topologia da ordem. Hilton (2016), com a proposição abaixo, generaliza a proposição acima utilizando a definição de *conjunto internamente fechado* de Schipperus (2012).

Definição 1.4.5. Um conjunto A de ordinais é internamente fechado quando $\sup X \in A$ qualquer que seja o subconjunto não vazio X de A tal que $\sup X < \sup A$.

Proposição 1.4.6. Num conjunto de números ordinais A as topologias de ordem e a de subespaço coincidem se, e somente se, A é internamente fechado.

E isso é de fato uma generalização da proposição 1.4.4 porque a seguinte proposição (que também pode ser encontrado em Hilton (2016)) implica que conjuntos compactos são internamente fechados.

Proposição 1.4.7. Sejam α um número ordinal e $A \subset \alpha$. Este A com a topologia de subespaço é compacto se, e somente se, $\sup X \in A$ qualquer que seja o subconjunto não vazio X de A.

Ainda neste contexto, Baumgartner (1986) define o conceito de *order-homeomorphism* que iremos traduzir como *homeomorfismo de ordem*.

Definição 1.4.8 (Homeomorfismo de ordem)**.** Sejam α um ordinal e B um subespaço de α. Considere o único isomorfismo de ordem que associa B ao seu tipo de ordem. Caso ele também seja um homeomorfismo (B como um subespaço de α), o chamaremos de homeomorfismo de ordem e diremos que B e $\mathrm{ot}(B)$ são ordem-homeomorfos.

Antes de enunciar os resultados de Baumgartner relacionados a este assunto, voltemos ao exemplo 1.4.2. Naquele exemplo, note o papel crucial que os pontos de acumulação e os isolados tiveram: considerar apenas eles bastou para concluirmos o resultado desejado. Não é à toa que a *derivativa de Cantor-Bendixson* merece um destaque nessa teoria.

1.4.1 A derivativa de Cantor-Bendixson

Definição 1.4.9 (A derivativa de Cantor-Bendixson). Para um espaço topológico X definimos a derivativa de Cantor-Bendixson X' de X pela seguinte igualdade

$$X' = X \setminus \{x \in X : x \text{ é isolado em } X\}.$$

Definimos também $X^{(0)} = X$, $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, para um ordinal α qualquer, e $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$, se α é um ordinal limite. Vamos chamar X' simplesmente de derivativa de X ou ainda de primeira derivativa de X, e, de modo mais geral, vamos chamar $X^{(\alpha)}$ de a *α-ésima derivativa de X* ou de *derivativa de X de grau α*.

Observação: Dados um espaço X e um subconjunto $A \subset X$, vamos definir também A' como o conjunto dos pontos de acumulação de A que pertencem a A – essa definição é equivalente à definição acima se munirmos o conjunto A com a topologia de subespaço de X.

O lema abaixo vai nos permitir definir a *altura de Cantor-Bendixson*. A ideia de sua demonstração foi adaptada de Solomon (2008).

Lema 1.4.10. Seja X um espaço topológico de peso $w(X) = \kappa$. Existe $\alpha < \kappa^+$ tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$.

Demonstração. Suponha que não, isto é, suponha que $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} \neq \emptyset$ para todo ordinal $\alpha < \kappa^+$, ou seja, $X^{(\alpha)}$ tem um ponto isolado x_α para cada $\alpha < \kappa^+$. Seja $\{U_\xi : \xi < \kappa\}$ uma base para X, de um modo que $U_{\xi_\alpha} \cap X^{(\alpha)} = \{x_\alpha\}$ para algum $\xi_\alpha < \kappa$. Se $\beta < \alpha$, então $X^{(\alpha)} \subset X^{(\beta)}$, de modo que $x_\alpha \in X^{(\beta)}$. Além disso $x_\beta \in X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)} \supset X^{(\beta)} \setminus X^{(\alpha)}$ (pois $x \in X^{(\alpha)} \Rightarrow x \in X^{(\beta+1)}$ já que $\beta + 1 \leqslant \alpha$). Portanto, $x_\beta \neq x_\alpha$. Por outro lado, temos $U_{\xi_\alpha} \cap X^{(\alpha)} \subset U_{\xi_\alpha} \cap X^{(\beta)}$ e, então, $x_\alpha \in U_{\xi_\alpha} \cap X^{(\beta)}$, com $x_\alpha \neq x_\beta$. Isso significa que U_{ξ_α} não pode ser o U_{ξ_β} donde, em particular, vem $\xi_\alpha \neq \xi_\beta$ se $\alpha \neq \beta$. Então a função $f : \kappa^+ \to \kappa$ definida por $f(\alpha) = \xi_\alpha$ é injetiva, o que é um absurdo uma vez que $\kappa^+ > \kappa$. Logo, devemos ter $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$ para alguma $\alpha < \kappa^+$ como queríamos. ∎

Definição 1.4.11 (A altura de Cantor-Bendixson). Ao menor ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$ chamamos de altura de Cantor-Bendixson de X. Iremos denotar este número ordinal por $\mathrm{ht}(X)$.

Observação. Na literatura, em vez do termo "altura" podemos encontrar também os termos "posto" ou "índice". Também há autores que definem a altura para um ponto em vez de definir para o conjunto.

Proposição 1.4.12. Se $\mathrm{ht}(X) = \alpha$, então $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ para todo $\beta \geqslant \alpha + 1$.

Demonstração. Isso segue por indução em β. Se $\mathrm{ht}(X) = \alpha$, então $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$ por definição de $\mathrm{ht}(X)$. Se $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$, então $X^{(\beta+1)} = (X^{(\beta)})' = (X^{(\alpha)})' = X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$. Se γ é um ordinal limite maior do que $\alpha+1$ e $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ para todo β maior ou igual a $\alpha+1$ e menor do que γ, então:

$$X^{(\gamma)} = \bigcap_{\beta<\gamma} X^{(\beta)} = \bigcap_{\alpha+1\leqslant\beta<\gamma} X^{(\beta)} \cap \left(\bigcap_{\beta<\alpha+1} X^{(\beta)}\right) = X^{(\alpha)} \cap \left(\bigcap_{\beta<\alpha+1} X^{(\beta)}\right) = X^{(\alpha)},$$

pois $\bigcap\limits_{\alpha+1\leqslant\beta<\gamma} X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$, pela hipótese de indução, e $X^{(\alpha)} \subset X^{(\beta)}$ para todo $\beta \leqslant \alpha$ (da definição da derivativa), o que implica $X^{(\alpha)} \subset \bigcap\limits_{\beta<\alpha+1} X^{(\beta)}$. Logo $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ para todo $\beta \geqslant \alpha+1$. ∎

O teorema abaixo nos diz que a altura de Cantor-Bendixson é um *ordinal invariante*, ou, em outras palavras, que a altura de Cantor-Bendixson é uma propriedade topológica.

Teorema 1.4.13. Se X e Y são espaços homeomorfos, então $\mathrm{ht}(X) = \mathrm{ht}(Y)$.

Demonstração. Fixemos o homeomorfismo $f : X \to Y$ entre X e Y. Vamos mostrar que $f[X^{(\alpha)}] = Y^{(\alpha)}$ qualquer que seja o ordinal α. Supondo essa igualdade verdadeira, se $\mathrm{ht}(X) = \alpha$, então teremos

$$Y^{(\alpha+1)} = f[X^{(\alpha+1)}] = f[X^{(\alpha)}] = Y^{(\alpha)}$$

e

$$\xi < \alpha \Longrightarrow X^{(\xi)} \neq X^{(\xi+1)} \Longrightarrow f[X^{(\xi)}] \neq f[X^{(\xi+1)}] \Longrightarrow Y^{(\xi)} \neq Y^{(\xi+1)}.$$

Daí, pela definição de $\mathrm{ht}(Y)$, seguirá $\mathrm{ht}(Y) = \alpha$, como queremos.

Vamos mostrar a igualdade $f[X^{(\alpha)}] = Y^{(\alpha)}$ por indução em α. Para $\alpha = 0$ temos $f[X^{(0)}] = f[X] = Y = Y^{(0)}$. Dado um ordinal limite α, se $f[X^{(\xi)}] = Y^{(\xi)}$ para todo $\xi < \alpha$, então:

$$f[X^{(\alpha)}] = f[\bigcap_{\xi<\alpha} X^{(\xi)}] = \bigcap_{\xi<\alpha} f[X^{(\xi)}] = \bigcap_{\xi<\alpha} Y^{(\xi)} = Y^{(\alpha)}.$$

No caso em que α é um ordinal sucessor, basta mostrar que $f[X'] = Y'$. Seja $x \in X'$ e seja V uma vizinhança de $f(x)$ em Y. Pela continuidade de f, $f^{-1}[V]$ é uma vizinhança de x em X. Como x é um ponto de acumulação de X, existe um $y \in f^{-1}[V]$ distinto de x. Daí $f(y) \in V$, além de $f(y)$ e $f(x)$ serem distintos pela injetividade de f. Portanto $f(x) \in Y'$, o que mostra a inclusão $f[X'] \subset Y'$. Reciprocamente, se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então $f^{-1} : Y \to X$ é contínua. Conforme acabamos de ver, pela continuidade temos $f^{-1}[Y'] \subset X'$, donde vem $Y' \subset f[X']$ uma vez que a sobrejetividade de f implica $f[f^{-1}[Y']] = Y'$. Segue a tese. ∎

Se X é T_1, para cada ordinal $\xi \neq 0$, o conjunto $X^{(\xi)}$ é fechado em X. Para um espaço qualquer, a igualdade $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$ pode acontecer, por exemplo, caso o $X^{(\alpha)}$ seja vazio. Isso só pode acontecer quando qualquer subconjunto não vazio de X admitir um ponto isolado, o que nos leva à

Definição 1.4.14 (Espaço disperso)**.** É disperso um espaço tal que todos seus subconjuntos não vazios admitem um ponto isolado.

Definição 1.4.15 (Conjunto perfeito)**.** É perfeito um conjunto fechado e denso em si mesmo.

De acordo com a Encyclopedia of General Topology (Hart *et al.*, 2003), de um ponto de vista histórico, as investigações sobre os conjuntos dispersos começaram com Cantor ao estudar séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ele descobriu é que se a sequência das somas parciais dessa série converge para zero com excessão possivelmente nos pontos de um conjunto de altura finita, então todos os coeficientes dessa série são nulos. Uma outra curiosidade histórica é que, segundo Hilton (2016), Cantor introduziu os números ordinais apenas para iterar esse processo de tomar derivativas. Relacionado com essa definição temos o seguinte resultado considerado folclórico, cuja demonstração também pode ser encontrada em Hilton (2016).

Teorema 1.4.16. Para qualquer ordinal enumerável α não nulo vale

$$(\omega^\alpha + 1)^{(\alpha)} = \{\omega^\alpha\}.$$

Finalizamos essa seção com um teorema de Baumgartner (1986) envolvendo o conceito de homeomorfismo de ordem.

Teorema 1.4.17. Sejam α um ordinal não nulo e β um ordinal enumerável. Se existe um $A \subset \alpha$ homeomorfo ao $\omega^\beta + 1$, então existe $B \subset A$ ordem-homeomorfo ao $\omega^\beta + 1$.

Demonstração. Imagens contínuas de compactos são compactas e $\omega^\beta + 1$ é compacto. Assim, um tal conjunto A é compacto. Seja γ o tipo de ordem de A. Pela proposição 1.4.4, existe um homeomorfismo de ordem $f : \gamma \to A$. Vamos ver que $\gamma \geqslant \omega^\beta + 1$. Se $\gamma \leqslant \omega^\beta$, então $A^{(\beta)} = \emptyset$. Mas, pelo teorema anterior e pelo fato de a altura de Cantor-Bendixson ser um ordinal invariante (teorema 1.4.13), como $A \cong \omega^\beta + 1$, temos que $A^{(\beta)} \neq \emptyset$. Portanto $\gamma \geqslant \omega^\beta + 1$. Agora, basta tomar o segmento inicial de γ apropriado, isto é, tomar $B = f[\omega^\beta + 1]$, os $\omega^\beta + 1$ primeiros elementos de A. Ele tem tipo de ordem igual a $\omega^\beta + 1$ e é homeomorfo ao $\omega^\beta + 1$ (a própria restrição de f atesta isso) como queríamos. ■

Essa demonstração foi tirada de Baumgartner (1986). Neste artigo também podemos encontrar que o mesmo resultado vale caso A seja homeomorfo ao ω^β. Hilton generaliza esse teorema com o conceito de *order-reinforcing*. De fato ele encerra esse assunto dizendo que o resultado do teorema 1.4.17 é válido se, e somente se, A é homeomorfo a um ordinal finito, ao ω^γ, ou ao $\omega^\gamma \cdot m + 1$ para algum ordinal γ não nulo e algum inteiro positivo m (Hilton, 2016).

Capítulo 2

Primeiros Resultados

Neste capítulo iremos ver as primeiras *relações de partições* (ver definição 2.0.1) do cálculo das partições para espaços topólogicos dessa dissertação. As duas primeiras delas, isto é, $\omega^2 \not\longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$ e $\omega^2 + 1 \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$, foram propostas como exercícios em Weiss (1990b). Em seguida, iremos ver uma demonstração do teorema de Sierpinski. Este teorema, anunciado em 1915 e demonstrado em 1920 por Sierpinski, diz que qualquer espaço metrizável, sem pontos isolados e enumerável é homeomorfo ao espaço dos racionais com sua topologia usual (Sierpinski, 1920). Como aplicação desse resultado, fixado um natural não nulo n e um ordinal enumerável α, vamos conseguir demonstrar as seguintes relações de partições

$$\mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \mathbb{Q})^1_n, \qquad \mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_n, \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega,$$

sendo que, nesta última, também iremos precisar do auxílio do teorema de Baire. Isto nos dá um exemplo interessante de como propriedades conhecidas em topologia podem ser usadas pra concluir relações de partições. O mesmo acontece com a relação

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega,$$

a qual foi obtida com o lema 1.1.29 de teoria dos conjuntos e com o lema 2.1.17 de Friedman (1974).

Na seção 2.2 iremos ver a relação

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^2_2,$$

considerada como fazendo parte do folclore dessa teoria. Essencialmente com a mesma demonstração dessa relação, vamos mostrar

$$\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^2_2.$$

Em seu artigo, Gerlits e Szentmiklóssy (2002) desenvolvem toda a maquinaria necessária para aproveitar a mesma demonstração desse resultado folclórico em

$$X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^2_2,$$

caso X seja primeiro enumerável, *monotonicamente normal* (ver definição 2.2.4) e não *separado à esquerda* (ver definição 2.2.3). Por fim, vamos comentar as perguntas deixadas por Laver e Weiss em 1990 sobre uma possibilidade de generalização do teorema que abriu a referida seção, perguntas essas que foram respondidas por Schipperus em 2012.

Definição 2.0.1 (A relação da seta)**.** Dados os espaços topológicos X e Y, um natural não nulo n e um cardinal κ, vamos abreviar por

$$X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\kappa$$

a seguinte afirmação:

> Dada uma função $f : [X]^n \to \kappa$, existe um subespaço H de X homeomorfo ao Y tal que a restrição de f a $[H]^n$ é constante.

Vamos nos referir a afirmação do tipo $X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\kappa$ como relação da seta, relação de partição ou simplesmente relação.

Lembrando que qualquer função $f : A \to B$ entre os conjuntos A e B define a partição $\{f^{-1}[\{y\}] : y \in B\}$ sobre o conjunto A e que, reciprocamente, qualquer partição $\{A_y : y \in B\}$ sobre o conjunto A define a função $f : A \to B$ dada por $f(x) = y$ para todo $x \in A$ se $x \in A_y$, podemos também interpretar a notação $X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\kappa$ por:

> Dada uma partição $\{X_\xi : \xi \in \kappa\}$ de cardinalidade κ sobre $[X]^n$, existem um subespaço H de X homeomorfo ao Y e um $\xi \in \kappa$ tais que $[H]^n \subset X_\xi$.

Nessa teoria também é comum o uso dos termos *homogêneo*, *ξ-homogêneo*, *coloração* e *monocromático*.

Definição 2.0.2 (Coloração, função partição)**.** Vamos chamar de coloração do conjunto $[X]^n$ a qualquer função $f : [X]^n \to \kappa$. Nesse sentido, vamos chamar $f(x)$ de cor do elemento $x \in [X]^n$. Ocasionalmente também chamamos essa função de partição.

Definição 2.0.3 (Espaço homogêneo, monocromático, ξ-homogêneo)**.** Vamos chamar de espaço homogêneo ou de espaço monocromático a qualquer subespaço $H \cong Y$ de X que satisfaz a relação $X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\kappa$. Fixada uma coloração $f : [X]^n \to \kappa$ do conjunto $[X]^n$, caso $f[[H]^n] = \{\xi\}$ para $H \subset X$, vamos chamar H de espaço ξ-homogêneo.

2.1 Aquecendo

Só para começar, vamos resolver as duas relações de partições propostas por Weiss (1990b). A primeira é uma relação negativa; ela diz que há um modo de particionar o ω^2 em dois pedaços de tal forma que nenhum desses pedaços contenha uma cópia homeomorfa do $\omega + 1$. A segunda diz que essa relação se torna positiva ao substituirmos o ω^2 por seu sucessor. Isto é, valem

$$\omega^2 \not\longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_2 \qquad \text{e} \qquad \omega^2 + 1 \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_2.$$

Solução. Vamos começar observando que um espaço homeomorfo ao $\omega + 1$ é simplesmente uma sequência convergente junto com seu ponto de convergência. Os únicos pontos do espaço ω^2 que são limites de alguma sequência são os pontos da forma $\omega \cdot n$ para algum n natural não nulo. Assim, nossa função que atesta a relação $\omega^2 \not\longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_2$ é uma função que vai "colorir" todos esses pontos com uma mesma cor e todos os demais com outra cor (figura 2.1). Isto é, definindo a função $f : \omega^2 \to 2$ por $f(\omega \cdot n) = 0$ para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in \omega^2 \setminus \{\omega \cdot n : 1 \leqslant n < \omega\}$, se $H \subset \omega^2$ é uma cópia do $\omega + 1$, então a restrição de f a H não é constante, pois tal conjunto H obrigatoriamente tem algum elemento da forma $\omega \cdot n$ para algum $n \neq 0$ e algum elemento da forma $\omega \cdot m + k$ para algum $m \leqslant n$ e algum $k \in \omega \setminus \{0\}$.

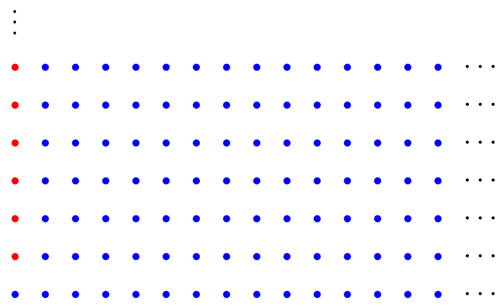

Figura 2.1: $\omega^2 \not\longrightarrow (top\ \omega + 1)^1_2$. *Lembre que ot($\omega \times \omega$, anti-lexico.) $= \omega^2$.*

Para a segunda relação, note, por exemplo, que, se estendermos a f do parágrafo anterior para uma $g : \omega^2 + 1 \to 2$ tal que $g(\omega^2) = 0$, então $H = \{\omega \cdot n : 1 \leqslant n < \omega\} \cup \{\omega^2\}$ é uma cópia homogênea do $\omega + 1$ (ou seja $H \cong \omega + 1$ e $g[H] = \{0\}$). Se fosse $g(\omega^2) = 1$, então $H = \{\omega \cdot n + 1 : n \in \omega\} \cup \{\omega^2\}$ seria uma das cópias homogêneas do $\omega + 1$ (ou seja $H \cong \omega + 1$ e $g[H] = \{1\}$; existem muitos outros conjuntos nessas condições).

Vamos considerar uma coloração qualquer em vermelho ou azul. Suponha, sem perda de generalidade, que a cor do ω^2 seja azul. Além disso, vamos supor também que existe um certo $n_0 \in \omega$ tal que acontecem simultaneamente duas coisas:

1. todo $\omega \cdot n$ para $n \in \omega$ maior do que n_0 é vermelho, e

2. dado um natural n maior do que n_0 existe um natural m_n tal que $\omega \cdot (n - 1) + m$ é azul para todo m natural maior ou igual a m_n.

Nessas condições, o subespaço $\{\omega \cdot n + m_n : n_0 < n < \omega\} \cup \{\omega^2\}$ é uma cópia monocromática do $\omega + 1$ (figura 2.2).

Suponha agora que não exista um $n_0 \in \omega$ tal que valham ambos os itens 1 e 2. Em outras palavras, isso significa que, para todo $n \in \omega$ acontecem um dos dois casos seguintes.

1'. Existe um $m_n > n$ tal que $\omega \cdot m_n$ é azul, ou;

2'. Existe um $m_n > n$ tal que para todo $k \in \omega$ existe um $l_k \geqslant k$ tal que $\omega \cdot (m_n - 1) + l_k$ é vermelho.

Seja T o conjunto dos naturais para os quais vale o caso 1'. Temos duas situações a considerar: ou T é infinito ou T é finito. Se T é infinito, para cada $n \in T$, fixe o $m_n \in \omega$ maior do que n tal que $\omega \cdot m_n$ é azul. Assim, o conjunto procurado é $\{\omega \cdot m_n : n \in T\} \cup \{\omega^2\}$. Se T é finito, seja n_0 um natural maior do que todo elemento de T; ele é tal que $\omega \cdot m$ é vermelho para todo $m \in \omega$ maior do que n_0. Para $n = n_0$, considere o conjunto $\{\omega \cdot (m_n - 1) + l_k : k \in \omega\} \cup \{\omega \cdot m_n\}$, onde os m_n e l_k são os dados pelo item 2'. Este conjunto é o conjunto procurado ($\omega \cdot m_n$ é vermelho pois $m_n > n = n_0$).

Logo, de qualquer forma, temos a nossa relação $\omega^2 + 1 \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_2$ provada.

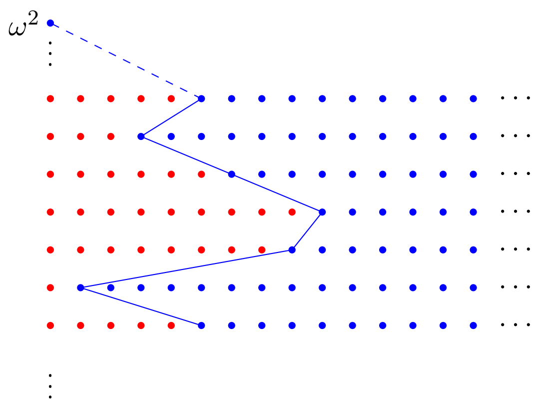

Figura 2.2: $\omega^2 + 1 \longrightarrow (top\ \omega + 1)^1_2$. *Lembre que* $ot(\omega \times \omega,$ *anti-lexico.*$) = \omega^2$.

A demonstração que iremos apresentar do teorema de Sierpinski 2.1.10 foi tirada do artigo de Dasgupta (2005). Uma curiosidade é que, além dessa demonstração, esse artigo apresenta outras duas demonstrações para esse mesmo teorema. Essas duas, por sua vez, são sugeridas como exercícios no livro de Engelking (1989) na seção 6.2.

O teorema de Sierpinski nos diz que qualquer espaço métrico enumerável e sem pontos isolados é homeomorfo ao $\mathbb{Q}$. Serão úteis para a sua demonstração as considerações e os lemas feitos abaixo.

Seja X um espaço metrizável, sem pontos isolados e enumerável. Pela proposição 1.1.6, sabemos que um conjunto enumerável, linearmente ordenado, denso com respeito à ordem e sem extremos é ordem-isomorfo aos racionais com a ordem usual. Nosso objetivo é, então, obter um subespaço $D \subset \mathbb{R}$ homeomorfo ao X com todas essas propriedades (com a ordem usual herdada de $\mathbb{R}$) e tal que, além disso, suas topologias de subespaço e de ordem coincidam. Assim teremos, não apenas que D é ordem-isomorfo ao $\mathbb{Q}$, como também $D \cong \mathbb{Q}$, donde seguirá o resultado desejado $X \cong \mathbb{Q}$ do fato de ser $X \cong D$.

Na seção 1.4 vimos quando essas duas topologias coincidem no caso particular em que X era um conjunto de números ordinais. No caso mais geral, o mesmo acontece caso Y seja compacto como subespaço.

Lema 2.1.1. Seja Y um subconjunto de um espaço linearmente ordenado. Se Y é compacto como subespaço, então as topologias sobre Y como espaço linearmente ordenado e como subespaço coincidem.

Demonstração. Vamos denotar por Y_{sub} o Y com a topologia de subespaço $\mathcal{S}$ e por Y_{ord} o Y com a topologia da ordem $\mathcal{O}$. A topologia sobre Y_{sub} é sempre mais fina do que a sobre Y_{ord} pois, dados $a, b \in Y$, se $I = \{x \in Y : a < x < b\}$ é um intervalo em Y, então $I = J \cap X$, onde $J = \{x \in X : a < x < b\}$ é um intervalo em X e, portanto, I é aberto em Y_{sub}. Reciprocamente, defina a função

$$\begin{aligned} i : Y_{sub} &\rightarrow Y_{ord} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Ela é claramente bijetiva. O fato de ser $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$ implica que i é contínua. Como Y_{sub} é compacto por hipótese, Y_{ord} é Hausdorff e i é contínua e bijetiva, pela proposição 1.2.36 segue que i é um homeomorfismo. Disso obtemos $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$. Logo $\mathcal{O} = \mathcal{S}$, como queríamos. ■

Um outro caso em que essas topologias coincidem é quando todo elemento de Y é um *ponto limite de ambos os lados de* Y.

Definição 2.1.2 (Ponto limite de ambos os lados de um subconjunto linearmente ordenado)**.** Dados um conjunto linearmente ordenado X e um subconjunto $Y \subset X$, vamos dizer que um elemento $x \in X$ é um ponto limite de ambos os lados de Y quando x não for nem o primeiro nem o último elemento de X e, dados $a, b \in X$ tais que $a < x < b$, existem $y_1, y_2 \in Y$ tais que $a < y_1 < x < y_2 < b$.

Lema 2.1.3. Seja Y um subconjunto de um espaço linearmente ordenado. Se todo elemento de Y é um ponto limite de ambos os lados de Y, então as topologias sobre Y como espaço linearmente ordenado e como subespaço coincidem.

Demonstração. Já vimos que a topologia de subespaço sempre é mais fina do que a da ordem. Basta, então, mostrar a recíproca. Sejam (a, b) um intervalo aberto em X, com $a, b \in X$. Queremos ver que $(a, b) \cap Y$ é aberto em Y_{ord}. Se $x \in (a, b) \cap Y$, então $a < x < b$ e $x \in Y$. Se x é um ponto limite de ambos os lados de Y, então existem $y_1, y_2 \in Y$ tais que $a < y_1 < x < y_2 < b$. Para estes y_1 e y_2 temos $(y_1, y_2) \cap Y \subset (a, b) \cap Y$, onde $(y_1, y_2) \cap Y$ é um intervalo aberto em Y. Segue a tese. ■

Um modo de obter esse conjunto D é por meio do conjunto K de Cantor (conforme definido na seção 1.3). Note que, intuitivamente, K pode ser obtido a partir do intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ removendo, em cada passo, os intervalos abertos que são os "terços médios" de cada intervalo que sobrou no passo anterior. Seja N o conjunto enumerável cujos elementos são o 0, o 1 e todos os extremos dos intervalos que foram removidos na construção de K. Se D é um subconjunto denso de $C \setminus N$, então D não tem extremos, é denso com respeito à ordem e todo elemento de D é um ponto limite de ambos os lados de D. Isso porque, se $x, y \in D$, então $(x, y) \cap C \neq \emptyset$, o que implica $((x, y) \cap C) \cap D = (x, y) \cap D \neq \emptyset$ e, de modo análogo, se $p \in D$ e $x < p$ e $p < y$, então $(x, p) \cap D \neq \emptyset$ e $(p, y) \cap D \neq \emptyset$.

Lema 2.1.4. Seja M um subconjunto enumerável de K. Se Y é um subconjunto enumerável e denso em K, então existe um subconjunto enuméravel D de $K \setminus M$ homeomorfo ao Y e denso em K.

Demonstração. Vamos demonstrar este lema para 2^ω em vez de K. O resultado desejado vai seguir do fato de K e 2^ω serem homeomorfos (teorema 1.3.2) e do fato já visto anteriormente de que, se ψ é homeomorfismo, então $\psi[\overline{A}] = \overline{\psi[A]}$ para qualquer subconjunto A de seu domínio (proposição 1.2.17).

Dados dois elementos f e g de 2^ω, vamos definir a soma $f + g$ como a função de ω em 2 onde $(f + g)(n)$ é o resto da divisão de $f(n) + g(n)$ por 2 para todo $n \in \omega$. É um fato que não iremos demonstrar aqui que o 2^ω com essa soma é um grupo abeliano [1] e que a função que associa cada $f \in 2^\omega$ a $f + p \in 2^\omega$ para um dado $p \in 2^\omega$ é um homeomorfismo (sua inversa é a função que associa cada f a $f + (-p)$).

Seja $F = \{m - y : y \in Y, m \in M\}$. Como ele é enumerável e 2^ω é não enumerável, tome $p \in 2^\omega \setminus F$. Faça $D = p + Y = \{p + x : x \in Y\}$. O D e o M são disjuntos, pois, se $x \in D \cap M$, então $x = p + y$

[1] Isto é, essa soma é comutativa, admite um elemento neutro, a saber a função identicamente nula, e cada elemento f admite um único inverso aditivo que iremos denotar por $-f$.

para algum elemento $y \in Y$; se $p + y \in M$, então $p + y = m \in M$ para algum $m \in M$ e teríamos $p \in F$. Desses fatos, segue, então, $D \subset 2^\omega \setminus M$, $D \cong Y$ e $\overline{D} = \overline{p + Y} = p + \overline{Y} = p + 2^\omega = 2^\omega$. ■

Se X é metrizável, então, X é T_0. Se, além disso, X é também enumerável, então X admite uma base de abertos e fechados. De fato, dado $x_0 \in X$, seja $S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$ o conjunto de todos os pontos de X cuja distância até x_0 é igual a r. Por ser enumerável, para todo ϵ positivo, temos que $S(x_0, r) = \emptyset$ para, pelo menos, um $r < \epsilon$ positivo. E é pra este r que a bola aberta centrada em x_0 e com raio r é aberta e fechada em X. Espaços com essas propriedades são homeomorfos a algum subconjunto de K.

Lema 2.1.5. Se Z é um espaço T_0 que admite uma base enumerável de abertos e fechados, então Z é homeomorfo a algum subconjunto de K.

Demonstração. Vamos construir uma imersão de Z em 2^ω e o resultado desejado vai seguir do fato de $K \cong 2^\omega$. Seja $\{U_n : n \in \omega\}$ a base enumerável de Z onde todo U_n é aberto e fechado. Para cada $n \in \omega$, seja χ_n a função característica de U_n. A imersão procurada é a função $\psi : Z \to 2^\omega$ definida por $\psi(x)(n) = \chi_n(x)$ $\forall x \in Z$, $\forall n \in \omega$.

Dados dois pontos distintos x e y de Z, por ser T_0, seja U_m tal que (sem perda de generalidade) $x \in U_m$ e $y \notin U_m$. Como U_m é fechado, existe um $n \in \omega$ tal que $y \in U_n \subset Z \setminus U_m$. Para este $n \in \omega$ temos $\chi_n(y) = 1$ e $\chi_n(x) = 0$, onde $\chi_n(y) = \psi(y)(n)$ e $\chi_n(x) = \psi(x)(n)$, o que mostra que ψ é injetiva.

Seja V um aberto básico de 2^ω e suponha que exista um $x \in \psi^{-1}[V]$. Como $V = \prod_{i\in\omega} V_i$ é básico, existe um conjunto finito $F \subset \omega$ tal que $V_i = \{\psi(x)(i)\} = \{\chi_i(x)\}$ para todo $i \in F$. Se $x \in U_i$, então $V_i = \{1\}$. Se $x \notin U_i$, então $V_i = \{0\}$. Para cada $i \in F$ defina

$$W_i = \begin{cases} U_i & \text{se } x \in U_i, \\ Z \setminus U_i & \text{se } x \notin U_i \end{cases}$$

Assim $W = \bigcap_{i\in F} W_i$ é uma vizinhança de x. Se $y \in W$, então $y \in W_i$ para todo $i \in F$. Se $W_i = U_i$, então $\{\psi(y)(i)\} = \{\chi_i(y)\} = \{1\} = V_i$ (pois, se $W_i = U_i$, então $x \in U_i$). Analogamente, se $W_i = Z \setminus U_i$, então $\{\psi(y)(i)\} = \{0\} = V_i$. Portanto $W \subset \psi^{-1}[V]$ e ψ é contínua.

Dado um U_n, defina $V = \prod_{i\in\omega} V_i$ por $V_n = \{1\}$ e $V_i = 2$ para todo $i \in \omega \setminus \{n\}$. Com isso, teremos $\psi[U_n] = V \cap \psi[Z]$ e seguirá que ψ é aberta como função de Z em $\psi[Z]$, o que concluirá a demonstração. Se $f \in \psi[U_n]$, então $f = \psi(x)$ para algum $x \in U_n$. Daí $f(n) = \psi(x)(n) = \chi_n(x) = 1$ e, portanto, $f \in V \cap \psi[Z]$. Se $f \in V \cap \psi[Z]$, então existe um $y \in Z$ tal que $f = \psi(y)$. Como $f \in V$, temos $f(n) = 1$. Portanto $1 = f(n) = \psi(y)(n) = \chi_n(y)$. Segue $y \in U_n$ e, então, $f \in \psi[U_n]$. ■

Portanto, se X é métrico e enumerável (lembrando da observação feita antes do lema acima), existe um $Y \subset K$ homeomorfo ao X. Se X é denso em si mesmo, então Y é também denso em si mesmo, além de ser enumerável. Consideremos o seu fecho $\overline{Y}$ em K. Este fecho é compacto (por ser subespaço fechado de um compacto) e é perfeito pois $\overline{Y} = Y \cup Y^d$, onde Y é denso em si mesmo. Ele é também raro pois $\text{int}(\overline{Y}) \subset \text{int}(K) = \emptyset$.

Com a ajuda do *completamento de Dedekind*, vamos concluir que, a menos de isomorfismo de ordem, em $\mathbb{R}$ só existe um conjunto compacto, raro e perfeito. Por serem compactos, suas topologias de ordem e de subespaço coincidem, de modo que vamos poder concluir que todos esses espaços são homeomorfos entre si.

Definição 2.1.6 (Gap de Dedekind, conjunto completo com respeito à ordem)**.** Um gap de Dedekind num conjunto linearmente ordenado P é um par (U, V) cujas coordenadas são subconjuntos disjuntos e não vazios de P tais que: $P = U \cup V$, todo elemento de U é menor do que todo elemento de V, U não tem máximo e V não tem mínimo. Quando P não tem gaps dizemos que ele é *completo com respeito à ordem*.

Definição 2.1.7 (Completamento de Dedekind)**.** Dados um conjunto linearmente ordenado P e um subconjunto $A \subset P$, dizemos que P é um completamento de Dedekind de A quando P é completo com respeito à ordem e todo elemento de $P \setminus A$ é um ponto limite de ambos os lados de A.

Lema 2.1.8. A menos de isomorfismo de ordem, os completamentos são únicos. De modo mais preciso, se A e B são ordem- isomorfos e W e Z são seus respectivos completamentos de Dedekind, então W e Z são ordem-isomorfos.

Demonstração. Fixemos o isomorfismo de ordem $f : A \to B$. Cada $x \in W \setminus A$ determina um gap de Dedekind (U, V) em A, a saber definindo $U = \{w \in A : w < x\}$ e $V = \{w \in A : w > x\}$. Desse gap, obtemos o gap $(f[U], f[V])$ em B. Como Z é um completamento de Dedekind de B, existe um único $y \in Z$ tal que $y > w$ para todo $w \in f[U]$ e $y < w$ para todo $w \in f[V]$. Deste modo, seja $y = g(x)$ este y. Para $x \in A$ defina $g(x) = f(x)$ e temos nosso isomorfismo de ordem $g : W \to Z$. ■

Lema 2.1.9. Se W e Z são dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ raros, perfeitos e compactos, então W e Z são ordem-isomorfos.

Demonstração. Sejam $w_1 = \inf W$, $w_2 = \sup W$, $z_1 = \inf Z$ e $z_2 = \sup Z$. Como W e Z são compactos, $W \subset [w_1, w_2]$ e $Z \subset [z_1, z_2]$, temos $[w_1, w_2] \setminus W = (w_1, w_2) \setminus W$ e $[z_1, z_2] \setminus Z = (z_1, z_2) \setminus Z$, ambos subconjuntos abertos. Assim, sejam $\mathcal{W}$ e $\mathcal{Z}$ coleções enumeráveis de intervalos abertos dois a dois disjuntos tais que $\bigcup \mathcal{W} = [w_1, w_2] \setminus W$ e $\bigcup \mathcal{Z} = [z_1, z_2] \setminus Z$. Em cada uma dessas coleções, vamos definir uma ordem linear densa e sem extremos, de um modo que, pela proposição 1.1.6, seguirá que $\mathcal{W}$ e $\mathcal{Z}$ são, com essas ordens, ordem-isomorfos.

Dados os intervalos $I, J \in \mathcal{W}$ basta definir $I \prec J$ se, e somente se, todo elemento de I é menor do que todo elemento de J. Esta ordem é linear e não tem extremos. Ela é densa pelo seguinte. Sejam $I, J \in \mathcal{W}$ e suponha $I \prec J$. Queremos encontrar um $L \in \mathcal{W}$ tal que $I \prec L \prec J$. Sejam $I = (a, b)$ e $J = (c, d)$. Note que b pertence a W, pois, se não pertencesse, então b pertenceria a algum intervalo I_0 de $\mathcal{W}$ e teríamos $I_0 \cap I \neq \emptyset$. Como nenhum ponto de W é isolado, existe um $e \in W$ distinto de b dentro do intervalo (a, d). Note que este e não pode pertencer a I nem a J, pois nenhum elemento de I nem de J pertence a W. Considere agora o intervalo $(b, e) \subset (w_1, w_2)$. Como W é raro, $\mathrm{int}(\overline{W}) = \emptyset$ e, em particular, $\overline{W}$ não contém nenhum intervalo aberto. Assim, existe um $w \in (b, e) \setminus \overline{W} = (b, e) \setminus W$ (uma vez que W é fechado). Como $w \in (w_1, w_2) \setminus W = \bigcup \mathcal{W}$, existe um $I_1 \in \mathcal{W}$ ao qual w pertence. Pelo fato de os elementos de $\mathcal{W}$ serem dois a dois disjuntos, segue que I_1 é o intervalo L procurado.

Se A é o conjunto cujos elementos são o w_1, o w_2 e todos os extremos dos intervalos que pertencem a $\mathcal{W}$ e B é o conjunto cujos elementos são o z_1, o z_2 e todos os extremos dos intervalos que pertencem a $\mathcal{Z}$, o fato de $\mathcal{W}$ e $\mathcal{Z}$ serem ordem-isomorfos implica que A e B são também ordem-isomorfos. Por construção, W e Z são os respectivos completamentos de Dedekind de A e de B. Portanto, pelo resultado anterior, W e Z são ordem-isomorfos, como queríamos. ■

Finalmente o

Teorema 2.1.10 (Sierpinski)**.** Qualquer espaço métrico enumerável e sem pontos isolados é homeomorfo ao $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Seja X esse espaço. Já observamos anteriormente que X é T_0 e admite uma base enumerável de abertos e fechados. Assim, pelo lema 2.1.5, seja Y o subconjunto de K homeomorfo ao X. Já observamos também que seu fecho $\overline{Y}$ é raro, perfeito e compacto. Daí, pelo lema 2.1.9, temos $\overline{Y} \cong K$, uma vez que K é também raro, perfeito e compacto (proposições 1.3.8, 1.3.7 e 1.3.6 respectivamente). Como Y é também enumerável, tomando novamente o conjunto N cujos elementos são o 0, o 1 e todos os extremos dos intervalos removidos na construção de K, pelo lema 2.1.4, existe um denso $D \subset K \setminus N$ tal que $Y \cong D$. Além de ser enumerável e linearmente ordenado, este D não tem extremos e é denso com respeito à sua ordem. Assim, pela proposição 1.1.6, por um lado D e $\mathbb{Q}$ são ordem-isomorfos. Por outro, conforme já vimos anteriormente, todo elemento de D é um ponto limite de ambos os lados de D. Pelo lema 2.1.3, segue, então, $D \cong \mathbb{Q}$. Logo $X \cong \mathbb{Q}$, como queríamos. ■

Deste teorema vem o

Corolário 2.1.11. $\mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \mathbb{Q})^1_n$, qualquer que seja o n natural maior ou igual a 1.

Demonstração. Para $n = 1$ há nada a fazer. Vamos mostrar que vale para $n = 2$. Em seguida vamos mostrar que apenas o fato de valer para $n = 2$ vai implicar que vale para qualquer $n \geqslant 2$.

Vale para $n = 2$: Seja $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$ uma partição para $\mathbb{Q}$ em dois pedaços. Claramente, qualquer subconjunto de cada um dos A_i's é um espaço métrico (com a métrica induzida de $\mathbb{Q}$) enumerável. Então, pelo teorema anterior, basta ver que algum desses dois pedaços contém um subconjunto sem pontos isolados. Se todo ponto de A_1 é de acumulação, então há nada a fazer, é o próprio A_1 que é homeomorfo ao $\mathbb{Q}$. Suponha, então, que exista um ponto $p \in A_1$ isolado. Assim, existe um aberto U em $\mathbb{Q}$ tal que $U \cap A_1 = \{p\}$.

Afirmamos que $X = U \setminus \{p\}$ é o conjunto procurado. Primeiro veja que $X \subset A_2$, pois, se $x \in X$, então $x \in U$ e $x \neq p$, de modo que $x \notin A_1$ por hipótese. Como $x \in A_1$ ou $x \in A_2$, só podemos ter, então, $x \in A_2$. Agora, se houvesse algum $x \in X$ isolado em X, então existiria um aberto V em $\mathbb{Q}$ tal que $V \cap X = \{x\}$. Como X é aberto em $\mathbb{Q}$ (porque ele é um aberto menos um fechado), $V \cap X$ é um aberto em $\mathbb{Q}$, donde segue que $\{x\}$ é um aberto em $\mathbb{Q}$, o que não é verdade. Logo, A_2 contém uma cópia homeomorfa ao $\mathbb{Q}$, como queríamos.

Se vale para $n = 2$, então vale para qualquer n natural maior ou igual a dois: Vamos mostrar isso por indução em n. Fixe um $n \geqslant 2$ e suponha que valha para todo $2 \leqslant m \leqslant n$. Seja $\mathbb{Q} = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$ uma partição para $\mathbb{Q}$ em $n+1$ pedaços. Isso determina a partição $\mathbb{Q} = B_1 \cup A_{n+1}$ em dois pedaços, com $B_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Como vale para 2, ou o A_{n+1} ou o B_1 contém a cópia desejada. Se for o A_{n+1}, então acabou. Se for o B_1, seja X essa cópia. Ou este X está inteiramente contido em A_i para algum $1 \leqslant i \leqslant n$ e teremos acabado ou não, isto é existem $2 \leqslant m \leqslant n$ pedaços com os quais ele tem interseção. Sejam, então, $A_1, \ldots, A_m$ esses pedaços. Isso determina a partição $X = (X \cap A_1) \cup \cdots \cup (X \cap A_m)$ em m pedaços para X. Como X é uma cópia de $\mathbb{Q}$ e supomos o resultado válido para esse m, algum $X \cap A_j$ contém uma cópia de $\mathbb{Q}$ e, em particular, o A_j contém essa cópia, como queríamos. ■

Note que, no raciocínio do último parágrafo, não foi usada nenhuma propriedade específica dos racionais, de modo que ele pode ser generalizado. De forma mais precisa, vale a

Proposição 2.1.12. Dados um espaço topológico X e um natural $m \geqslant 1$, se $X \longrightarrow (\text{top } X)^m_2$, então

$$X \longrightarrow (\text{top } X)^m_n,$$

para todo n natural não nulo.

Anteriormente (no corolário 1.1.7) vimos que o conjunto bem ordenado $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ contém uma cópia ordem-isomorfa de cada conjunto linearmente ordenado enumerável. Em particular, $\mathbb{Q}$ contém uma cópia ordem-isomorfa de cada ordinal enumerável. Não só vale esse resultado como também o seguinte, cuja solução apresentada é devida à Ofelia Alas.

Lema 2.1.13. $\mathbb{Q}$ contém uma cópia homeomorfa de qualquer número ordinal enumerável.

Demonstração. Seja α um ordinal enumerável. O α pode ter pontos isolados, mas o $\alpha \times \mathbb{Q}$ não, de modo que ele é homeomorfo ao $\mathbb{Q}$ pelo teorema 2.1.10 de Sierpinski. Existe uma cópia do α em $\alpha \times \mathbb{Q}$ e, portanto, pelo fato de $\alpha \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ serem homeomorfos, existe também uma cópia de α em $\mathbb{Q}$, como queríamos. ■

Juntando o corolário 2.1.11 e o lema 2.1.13, podemos concluir o seguinte teorema, apresentado por Weiss (1990b):

Teorema 2.1.14. Sejam α um ordinal enumerável e n um natural maior ou igual a 1. Vale a seguinte relação da seta

$$\mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_n.$$

Vimos que, ao particionar o conjunto dos números racionais num número finito de pedaços, pelo menos um desses pedaços contém um conjunto denso em si mesmo. Com o conjunto dos números reais podemos concluir o mesmo, mas de maneira mais forte, onde a partição pode ser agora enumerável. Isto é, pelo menos um elemento de uma partição qualquer de $\mathbb{R}$ em ω pedaços contém um subconjunto denso em si mesmo. O contrário dessa afirmação seria dizer que existe um modo de particionar $\mathbb{R}$ em ω pedaços tal que nenhum desses pedaços contenha um conjunto denso em si mesmo (além do conjunto vazio), ou seja, de modo que todos esses pedaços sejam dispersos. Com o teorema abaixo, cuja ideia da demonstração foi tirada de Kuratowski (1966), e o teorema de Baire, vamos concluir, na demonstração do teorema 2.1.16, que isso não é possível.

Teorema 2.1.15. Os subespaços dispersos de um espaço X T_1 e denso em si mesmo são raros.

Demonstração. Vamos mostrar a contrapositiva. Seja A um subconjunto de X que não é raro. Vimos na seção 1.2 que isso significa o interior de $\overline{A}$ ser não vazio, de modo que existe um aberto não vazio U em X contido em $\overline{A}$. Como U é aberto e X é denso em si mesmo, vimos, naquela mesma seção (lema 1.2.8), que U é denso em si mesmo. Considerando agora o espaço topológico U denso em si mesmo, note que $A \cap U$ é denso em U. De fato, seja V um aberto não vazio de U, que será aberto em X pois U é aberto em X. De $V \subset U$, temos

$$V \cap (A \cap U) = A \cap (V \cap U) = A \cap V,$$

onde $A \cap V \neq \emptyset$ uma vez que V é aberto em X e $U \subset \overline{A}$. Portanto $A \cap U$, sendo denso num denso em si mesmo, é denso em si mesmo (lema 1.2.9). Assim, encontramos um subconjunto não vazio de A denso em si mesmo, o que mostra que A não é disperso, como queríamos. ■

O teorema abaixo foi tirado de Weiss (1990b). O argumento apresentado aqui para sua demonstração pode ser encontrado em Homayouni (1997).

Teorema 2.1.16. Se α é um ordinal enumerável, então

$$\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega.$$

Demonstração. Suponha que exista uma família $\{A_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos dispersos de $\mathbb{R}$ cuja reunião é $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ é denso em si mesmo, temos, então, $\mathbb{R}$ escrito como uma reunião enumerável de raros:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} A_n \Longrightarrow \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n} \Longrightarrow \emptyset = \mathbb{R} \setminus (\bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}) = \bigcap_{n\in\omega} \mathbb{R} \setminus \overline{A_n}.$$

Deste modo obtemos uma família enumerável de abertos e densos cuja interseção é vazia. Por outro lado, $\mathbb{R}$, por ser um espaço métrico completo, é de Baire e, portanto, uma tal família não pode existir, uma vez que a interseção de qualquer família enumerável de abertos e densos deve ser densa e, em particular, não vazia.

Fixada, então, uma partição enumerável $\{A_n : n \in \omega\}$ para $\mathbb{R}$, temos um $n \in \omega$ tal que A_n contém um subespaço Y denso em si mesmo. Note que este Y é separável (ele é segundo enumerável por exemplo). Seja D um conjunto enumerável e denso em Y. Já vimos que um conjunto denso num espaço T_1 e denso em si mesmo é denso em si mesmo (lema 1.2.9). Assim D é denso em si mesmo [2] e, portanto, pelo teorema 2.1.10 de Sierpinski, $D \cong \mathbb{Q}$. Deste modo, pelo lema 2.1.13, D contém uma cópia de qualquer ordinal enumerável, donde segue o resultado desejado. ■

Note que a interseção de dois subconjuntos abertos e densos de um dado espaço é aberta e densa. Essa observação e a afirmação abaixo (tirada de Homayouni (1997)) nos dão uma demonstração alternativa, e também mais geral, da relação $\mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \mathbb{Q})^1_2$ vista acima.

Afirmação: *Um espaço não vazio e denso em si mesmo não pode ser a reunião de dois dispersos.*

Solução. Seja X um espaço denso em si mesmo. Se A e B são dois subconjuntos dispersos de X, então, conforme visto acima (no teorema 2.1.15), eles também são raros, isto é, os abertos $X \setminus \overline{A}$ e $X \setminus \overline{B}$ são densos em X. Segue que a interseção $(X \setminus \overline{A}) \cap (X \setminus \overline{B}) = X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ é densa em X. Em particular o conjunto $X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B})$ não pode ser vazio. Logo $\overline{A} \cup \overline{B} \neq X$. Como $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$, segue, então, que a reunião $A \cup B$ está contida propriamente em X, como queríamos.□

Apresentaremos o lema abaixo, cuja demonstração é atribuído a Friedman (1974). Além do artigo dele, uma demonstração também pode ser encontrada em Weiss (1990b). Este lema vai nos ajudar a concluir que podemos trocar o $\mathbb{R}$ por ω_1 na relação $\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$, obtendo a relação $\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$ (Weiss, 1990b).

Lema 2.1.17. Em qualquer subconjunto estacionário do ω_1 podemos encontrar uma cópia homeomorfa de um número ordinal enumerável qualquer.

Teorema 2.1.18. Fixado um ordinal enumerável α, vale

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega.$$

[2] Note também que ser T_1 é uma propriedade *hereditária*, ou seja, qualquer subespaço de um dado espaço T_1 é também T_1.

Demonstração. Pelo lema 1.1.29, como o próprio ω_1 é um estacionário, ao particioná-lo em $\omega < \mathrm{cf}(\omega_1)$ pedaços, um desses pedaços será estacionário. Logo, pelo lema anterior, a cópia desejada do α encontra-se nesse estacionário. ■

2.2 Um Resultado Folclórico e Alguns de Seus Frutos

Nesta seção vamos ver um resultado considerado parte do folclore dessa teoria, dando ênfase à sua demonstração. Nela temos a oportunidade de ver uma aplicação interessante do lema de Pressing-Down. Em seguida iremos comentar alguns resultados relacionados com ele, seja porque a ideia da demonstração é a mesma, seja porque surgiram de tentativas de generalizações.

Alguns destes resultados tratam de particionar os subconjuntos de dois elementos de certos espaços topológicos em dois pedaços e encontrar uma cópia homogênea do $\omega + 1$. Encontrar uma cópia do ordinal $\omega+1$ dentro de um dado espaço topológico é simplesmente encontrar uma sequência convergente junto com o ponto para o qual ela converge dentro desse espaço. De agora em diante, vamos simplesmente falar sequência convergente para nos referir a essa sequência com seu ponto de convergência.

Fixado um desses dois pedaços, começamos a demonstração considerando os dois casos possíveis. Ou neste pedaço já encontramos todos os pares de uma certa sequência convergente – caso no qual não teremos nada a fazer –. Ou dado qualquer elemento, não existe uma sequência convergindo para ele tal que todos os pares estejam neste pedaço. Neste último caso o objetivo será, então, encontrar uma sequência convergente tal que todos os pares estejam no outro pedaço. Para isso, vamos nos aproximar o máximo que conseguirmos desse elemento dado sem sair do pedaço fixado. É neste momento que irá surgir nossa função regressiva, função esta que nos dará, pelo Lema de Pressing-Down 1.1.32, um conjunto estacionário. A partir daí o que irá nos permitir concluir a demonstração é o lema 2.1.17 (sobre estacionários do ω_1 conterem cópias dos ordinais enumeráveis).

Teorema 2.2.1 (Um resultado folclórico)**.**

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^2_2$$

Demonstração. Começamos fixando nossa partição $f : [\omega_1]^2 \to 2$ dos pares de ω_1 em dois pedaços. Dado um $\alpha \in \omega_1$, vamos obter uma sequência crescente $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de ω_1 tal que $\sup\{\alpha_n : n \in \omega\} = \alpha$ e tal que o conjunto $\{\alpha_n : n \in \omega\} \cup \{\alpha\}$ é 0-homogêneo. Se encontrarmos essa sequência, então teremos acabado.

Suponha, então, que tal sequência não exista. Assim, dado um ordinal limite $\alpha \in \omega_1$, seja $\langle \alpha_n : n \leqslant m(\alpha) \rangle$ (onde $m(\alpha) \in \omega$) uma sequência finita e crescente, com todos elementos menores do que α e tal que o conjunto $\{\alpha_n : n \leqslant m(\alpha)\} \cup \{\alpha\}$ é 0-homogêneo. Suponha também que ela seja maximal, ou seja, que, se $\alpha_{m(\alpha)} < \xi < \alpha$, então $f(\{\xi, \alpha\}) = 1$ ou $f(\{\xi, \alpha_n\}) = 1$ para algum $0 \leqslant n \leqslant m(\alpha)$ (figura 2.3). Note que essa sequência também pode ser vazia. Ela ser vazia para um dado ordinal limite α significa que $f(\{\alpha, \xi\}) = 1$ $\forall \xi \in \omega_1$ $(\xi \neq \alpha)$. Em particular $f(\{\alpha, \alpha_n\}) = 1$ para todo $n \in \omega$ onde $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência que converge para α. E, neste caso, temos nossa sequência convergente 1-homogênea. Então podemos supor que este $m(\alpha)$ de fato existe para todo α.

Como o fixado $\alpha_{m(\alpha)}$ é menor do que α por construção, temos a nossa associação regressiva

$\alpha \mapsto \alpha_{m(\alpha)}$ definida num estacionário de ω_1 (a saber o estacionário $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha$ é ordinal limite$\}$). Deste modo, pelo lema de Pressing-Down 1.1.32, existem um conjunto estacionário $S \subset \omega_1$ e um $\delta \in \omega_1$ tal que $\alpha_{m(\alpha)} = \delta$, $\forall \alpha \in S$. Além disso, como $\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$, pelo lema 1.1.29 podemos supor que existe um $l \in \omega$ tal que $m(\alpha) = l$, $\forall \alpha \in S$. Para ver isso basta escrever S como a reunião enumerável $S = \bigcup_{l \in \omega} \{\alpha \in \omega_1 : m(\alpha) = l\}$.

Vamos repetir esse processo e associar cada $\alpha \in S$ ao α_{l-1} (caso $l > 1$; se $l = 0$ o processo já terá parado). Pelo mesmo argumento anterior, aplicando o Pressing-Down novamente, encontramos um subconjunto estacionário de S tal que todo α desse estacionário está associado a um mesmo $\delta_{l-1} \in \omega_1$. Podemos supor que este estacionário é o próprio S. Prosseguindo assim, podemos supor que todo elemento α de S está associado (da maneira como feito no segundo parágrafo) a uma mesma sequência $\langle \delta_n : n \leqslant l \rangle$.

Afirmamos agora que o conjunto S é 1-homogêneo por causa do seguinte. Suponha que existam elementos α e β em S tais que $f[\{\alpha, \beta\}] = 0$. Suponha $\beta < \alpha$. Este β teria, então, tudo o que é necessário para também fazer parte da sequência $\langle \alpha_n : n \leqslant m(\alpha) \rangle = \langle \delta_n : n \leqslant l \rangle$ já que: $\beta < \alpha$, $f[\{\beta, \delta_n\}] = 0$ para todo $n \leqslant l$ por construção (pois $l = m(\beta)$ e $\delta_n = \beta_n \forall 0 \leqslant n \leqslant l$) e $f[\{\beta, \alpha\}] = 0$, além de ser $\beta > \beta_l = \delta_l = \alpha_l$. Por outro lado isto contrariaria a maximalidade da sequência $\langle \alpha_n : n \leqslant m(\alpha) \rangle$. Pelo lema 2.1.17, existe em S uma cópia homeomorfa do $\omega + 1$, como queríamos.

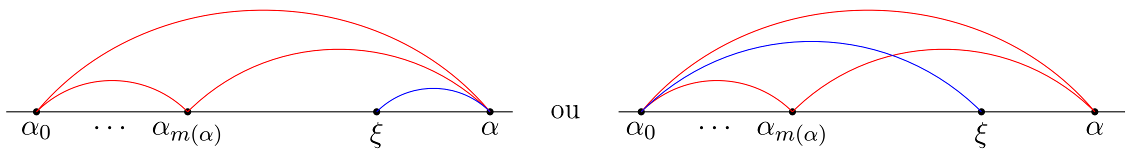

Figura 2.3: *A maior sequência 0-homogênea que se 'aproxima' de α.*

■

Segundo Weiss (1990b), o teorema abaixo é devido a Erdös e Rado.

Teorema 2.2.2.

$$\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^2_2.$$

Demonstração. Com relação à demonstração do teorema anterior, para a demonstração deste teorema basta fazer apenas algumas adaptações. Sejam $f : [\mathbb{R}]^2 \to 2$ uma partição qualquer e $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ uma enumeração para um subconjunto de $\mathbb{R}$ de cardinalidade ω_1. Fixado um $\alpha \in \omega_1$, queremos agora uma sequência $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ que, além de ser crescente, 0-homogênea e tal que $\alpha_n < \alpha \ \forall n \in \omega$, também satisfaça $|x_{\alpha_{n+1}} - x_\alpha| < \frac{1}{n+1} \ \forall n \in \omega$. Caso essa sequência exista para algum α, teremos a convergência da sequência $\langle x_{\alpha_n} : n \in \omega \rangle$ para x_α. Sequência convergente essa 0-homogênea. Caso não, basta proceder como na demonstração do teorema anterior

■

Gerlits e Szentmiklóssy (2002) usam a mesma ideia da demonstração do resultado folclórico 2.2.1 visto acima nas duas demonstrações que eles dão para o teorema 2.2.5 abaixo. Este teorema trata de espaços topológicos *monotonicamente normais* e não *separáveis à esquerda*.

Definição 2.2.3 (Espaço separado à esquerda)**.** Um espaço topológico X é *separado à esquerda* quando ele pode ser bem ordenado de um modo que para todo $x \in X$ exista um conjunto U tal que U contém alguma vizinhança de x e $x = \min U$.

Definição 2.2.4 (Espaço monotonicamente normal)**.** Um espaço topológico T_1 é *monotonicamente normal* quando conseguimos associar a cada par (z, W), onde $z \in X$ e W é uma vizinhança de z, uma vizinhança W' de z com a propriedade de que, se $x \notin V$ e, se $y \notin U$, então as respectivas vizinhanças U' e V' associadas aos pares (x, U) e (y, V) são disjuntas.

Teorema 2.2.5. Seja X um espaço topológico primeiro enumerável, monotonicamente normal e não separado à esquerda. Para $r \geqslant 2$ e $n \in \omega$. Vale

$$X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^r_n.$$

Este teorema surgiu da tentativa de mostrar a recíproca do teorema 1.1 do mesmo artigo, o qual iremos reproduzir aqui junto com sua demonstração (também tirada de Gerlits e Szentmiklóssy (2002)) por ser tratar de um exemplo interessante do modo como podemos usar propriedades topológicas para criar uma função com essas propriedades nesse tipo de resultado.

Teorema 2.2.6. Se X é regular e separado à esquerda, então existe uma função $f : [X]^2 \to 2$ tal que, se a restrição de f a $[H]^2$, para um dado $H \subset X$, é constante, então H é discreto.

Demonstração. Por ser separado à esquerda, vamos começar fixando a boa ordem $<$ e a vizinhança $U(x)$ de $x \in X$ tal que $\min U(x) = x$ (nesta boa ordem). Por ser regular, podemos supor esse $U(x)$ fechado. Daí, supondo $y > x$, basta definir

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} 0 \text{ se } y \notin U(x), \\ 1 \text{ se } y \in U(x). \end{cases}$$

Se H é 0-homogêneo, para cada $x \in H$, é o próprio $U(x)$ que atesta que H é discreto. Nenhum $y \in H$ distinto de x pertence a $U(x)$, pois, se $y < x$, então $y \notin U(x)$ já que $x = \min U(x)$. E, se $y > x$, então $f(\{x, y\}) = 0$. Portanto, $y \notin U(x)$ por construção. Em particular, nenhum elemento de H distinto de x pertence a vizinhança de x contida em $U(x)$.

Se H é 1-homogêneo, fixe um $x \in H$. Se $z < x$ para todo $z \in H$ distinto de X, então $z \notin U(x)$ pois x é o menor elemento de $U(x)$. Caso contrário (usando a boa ordem de $<$), seja $y = \min \{z \in H : z > x\}$, o menor elemento de H maior do que o x. Neste caso é a vizinhança de x contida no conjunto $U(x) \setminus U(y)$ a testemunha de H ser discreto: se z é um elemento de $H \cap U(x)$ distinto de x, então $z > x$. Assim, pela minimalidade de y, temos $z \geqslant y$. Se $z = y$, então $z \in U(y)$. Se $z > y$, também ocorre $z \in U(y)$ (pois $f(\{y, z\}) = 1$ por hipótese). Logo, de qualquer modo, não existe um elemento de H distinto de x na vizinhança de x contida em $U(x) \setminus U(y)$ (ou em $U(x)$ caso todo elemento de H seja menor ou igual a x), como queríamos. ■

Segundo Weiss (1990b), é atribuída a Laver a pergunta de que se o teorema 2.2.1 podia ser generalizado para

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha)^2_2 \quad \forall \alpha < \omega_1.$$

E Weiss (1990b) também coloca a seguinte: vale

$$\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^2_2 \quad \forall \alpha < \omega_1?$$

No mesmo artigo no qual Weiss coloca essas perguntas, ele já mostra algumas evidências de que as respostas para ambas sejam positivas. De fato são, conforme Schipperus (2012) mostrou com as seguintes relações da seta, usando submodelos elementares:

$$\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha + 1)^2_k \qquad \text{e} \qquad \mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha + 1)^2_k \qquad \forall \alpha < \omega_1, \quad \forall k \in \omega.$$

Capítulo 3

Ordinais Enumeráveis

Motivados pelas relações $\mathbb{Q} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_n$, $\mathbb{R} \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$ e $\omega_1 \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$, vistas no capítulo anterior, podemos nos fazer agora a seguinte pergunta, o que um espaço precisa satisfazer para conter uma cópia de um ordinal enumerável? É nesta linha que os principais resultados deste capítulo – a saber, o teorema 3.3.1, o teorema 3.3.2 e o seu corolário e o terema 3.4.2 – vão, todos tirados de Weiss e Komjáth (1987). Em todos eles, vamos supor o espaço X regular.

Para o teorema 3.3.1 vamos fazer um breve estudo sobre os *níveis de Cantor-Bendixson* (para espaços quaisquer, e não apenas para espaços regulares) e sobre os números ordinais, principalmente os *ordinais indecomponíveis*.

3.1 Ordinais indecomponíveis

Com exceção do teorema abaixo que pode ser encontrado em Kunen (1980), na página 43, todos os demais resultados desta seção podem ser encontrados em Hrbacek e Jech (1999).

Teorema 3.1.1. Dado um ordinal α, os seguintes itens são equivalentes

1. $\xi + \eta < \alpha$, $\forall \xi, \eta < \alpha$;

2. $\xi + \alpha = \alpha$, $\forall \xi < \alpha$;

3. Se $X \subset \alpha$, então $\text{ot}(X) = \alpha$ ou $\text{ot}(\alpha \setminus X) = \alpha$;

4. $\alpha = \omega^\beta$, para algum ordinal β.

Como curiosidade, note que o item 3. acima implica a relação de partição $\alpha \longrightarrow (\alpha)^1_2$ para tipos de ordens.

Definição 3.1.2. Chamamos de *ordinal indecomponível* a um número ordinal que satisfaz qualquer um dos itens (e portanto todos) do teorema acima.

O lema abaixo nos dá algumas propriedades básicas da soma de números ordinais. Os dois primeiros itens nos dizem que a soma à esquerda define uma função estritamente crescente.

Lema 3.1.3. Sejam α_1, α_2, β e γ ordinais quaisquer. Valem:

1. $\alpha_1 < \alpha_2$ se, e somente se, $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$;

2. $\beta + \alpha_1 = \beta + \alpha_2$ se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2$;

3. a associatividade para a soma: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Lema 3.1.4. Se $\alpha \leqslant \beta$, então existe um único ordinal ξ tal que $\alpha + \xi = \beta$, a saber $\xi = \mathrm{ot}(\beta \setminus \alpha)$.

Lema 3.1.5. Se $\alpha > 1$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Com esses últimos resultados, dados um ordinal indecomponível α e um $\beta < \alpha$, podemos concluir que a função ψ que associa cada $\xi \in \alpha$ ao $\beta + \xi$ é um isomorfismo de ordem. O fato de α ser indecomponível implica que ψ está bem definida. O item 1. do lema 3.1.3 implica que ψ é injetiva e que preserva a ordem e o lema 3.1.4 implica que ψ é sobrejetiva. Portanto, podemos enunciar o seguinte

Lema 3.1.6. Dados um ordinal indecomponível α e um $\beta < \alpha$, a função que associa cada $\xi \in \alpha$ ao $\beta + \xi$ é um homeomorfismo. Em particular, segmentos finais de um ordinal indecomponível α, não apenas têm tipo de ordem α, como também são homeomorfos ao α.

Uma outra observação a respeito dos ordinais indecomponíveis é que eles podem ser escritos como uma *soma infinita de ordinais* indecomponíveis. Essa soma entendida de acordo com a definição abaixo:

Definição 3.1.7 (Soma infinita de ordinais)**.** Dada uma sequência $\langle \alpha_m : m \in \omega \rangle$ de ordinais, definimos sua soma como

$$\alpha = \sum \alpha_m = \sup \{\sum_{m=0}^{n} \alpha_m : n \in \omega\}.$$

No caso em que a cofinalidade do expoente β do ordinal $\alpha = \omega^\beta$ é no máximo enumerável, por exemplo, podemos fazer o seguinte. Se β é um ordinal limite, seja $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência estritamente crescente e cofinal em β. Por um lado, sabemos que ω^β é o supremo da sequência cujos termos são ω^{β_0}, $\omega^{\beta_1}, \ldots, \omega^{\beta_n}, \ldots$. Por outro lado, para cada $n \in \omega$, temos $\omega^{\beta_n} = \sum_{i=0}^{n} \omega^{\beta_i}$, pois $\omega^{\beta_0} = \sum_{i=0}^{0} \omega^{\beta_i}$ e $\omega^{\beta_{n+1}} = \omega^{\beta_n} + \omega^{\beta_{n+1}}$ (já que $\omega^{\beta_n} < \omega^{\beta_{n+1}}$) e o resultado segue por indução. Se β é um sucessor $\gamma + 1$, então $\omega^\beta = \omega^\gamma \cdot \omega$ é o supremo do conjunto cujos elementos são da forma $\omega^\gamma \cdot n$, para $n \in \omega$. Assim, de qualquer modo, existe uma sequência $\langle \alpha_m : m \in \omega \rangle$ de ordinais indecomponíveis tais que $\alpha = \sum \alpha_m$, onde $\sum \alpha_m$ é o supremo do conjunto cujos elementos são as somas parciais $\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1, \ldots, \alpha_0 + \cdots + \alpha_n, \ldots$. Com essas considerações, podemos enunciar o seguinte

Lema 3.1.8. Seja $\alpha = \omega^\beta$ um ordinal indecomponível. Então

$$\alpha = \sum \alpha_m,$$

onde $\alpha_m = \omega^\delta$ se $\beta = \delta + 1$ e $\alpha_m = \omega^{\beta_m}$ se β é um ordinal limite de cofinalidade enumerável e $\langle \beta_m : m \in \omega \rangle$ é uma sequência crescente e cofinal em β.

Os seguintes resultados também serão úteis.

Lema 3.1.9. Para números ordinais α e β, onde α é qualquer e $\beta \geqslant \omega$ vale: $(\alpha + 1) + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ e, de modo geral, se $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, são números ordinais, onde $\alpha_n \geqslant \omega$, então $(\alpha_0 + 1) + \cdots + (\alpha_n + 1) = (\alpha_0 + \cdots + \alpha_n) + 1$.

Demonstração. Note que, se $\beta \geqslant \omega$, então $1 + \beta = \beta$ (por indução transfinita em β por exemplo). Assim, primeiro pela definição de soma (em particular de um ordinal com um sucessor), em segundo pela propriedade associativa da soma vista no lema 3.1.3 e, em terceiro, usando que $1 + \beta = \beta$, obtemos:

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) = ((\alpha + 1) + \beta) + 1 = (\alpha + (1 + \beta)) + 1 = (\alpha + \beta) + 1,$$

como queríamos nessa primeira parte.

Para a segunda parte, por indução em n, temos

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + 1) + \cdots + (\alpha_{n-1} + 1) + (\alpha_n + 1) &= (\alpha_0 + 1) + [(\alpha_1 + 1) + \cdots + (\alpha_{n-1} + 1) + (\alpha_n + 1)] \\ &= (\alpha_0 + 1) + [(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + 1], \end{aligned}$$

pois $\alpha_n \geqslant \omega$. Usando sucessivamente o item 1 do lema 3.1.3, note que, se $\alpha_n \geqslant \omega$, então $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqslant \omega$ também. Portanto, pelo parágrafo anterior, podemos concluir o resultado desejado:

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + 1) + [(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + 1] &= [\alpha_0 + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)] + 1 \\ &= (\alpha_0 + \cdots + \alpha_n) + 1. \end{aligned}$$

■

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em Hrbacek e Jech (1999).

Teorema 3.1.10 (A forma normal de Cantor)**.** Todo número ordinal α não nulo pode ser escrito unicamente na forma

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

onde $\beta_1 > \cdots > \beta_n$ são números ordinais e $k_1, \ldots, k_n$ são números naturais não nulos.

3.2 Os níveis de Cantor-Bendixson

Lembrando que, para um espaço topológico X, $X^{(\alpha)}$ indica a α-ésima derivativa de Cantor-Bendixson de X, temos a seguinte

Definição 3.2.1 (O nível de Cantor-Bendixson)**.** Dado um número ordinal ξ, definimos o ξ-ésimo nível de Cantor-Bendixson de X, denotado por $I_\xi(X)$, pela igualdade

$$I_\xi(X) = X^{(\xi)} \setminus X^{(\xi+1)},$$

ou seja, como o conjunto dos pontos isolados de $X^{(\xi)}$.

Proposição 3.2.2. Para um espaço topológico X qualquer temos

$$X = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi < \alpha} I_\xi(X),$$

qualquer que seja o ordinal α não nulo.

Demonstração. Vamos provar isso por indução em α. Para $\alpha = 1$ temos

$$X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) = X' \cup I_0(X) = X' \cup (X \setminus X') = X.$$

Suponha agora que valha para α, isto é, que

$$(*) \qquad X = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X).$$

Queremos mostrar que vale para $\alpha + 1$. Como já mostramos, a igualdade vale para 1 e para um espaço qualquer, de modo que

$$X^{(\alpha)} = X^{(\alpha)'} \cup I_0(X^{(\alpha)}) = X^{(\alpha+1)} \cup I_0(X^{(\alpha)}),$$

onde $I_0(X^{(\alpha)}) = X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} = I_\alpha(X)$. Assim, fazendo as devidas substituições em $(*)$, obtemos:

$$\begin{aligned} X &= X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) \\ &= (X^{(\alpha+1)} \cup I_0(X^{(\alpha)})) \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) \\ &= (X^{(\alpha+1)} \cup I_\alpha(X)) \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) \\ &= X^{(\alpha+1)} \cup (I_\alpha(X) \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X)) \\ &= X^{(\alpha+1)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha+1} I_\xi(X), \end{aligned}$$

como queríamos.

Suponha agora que α seja um ordinal limite e que valha $X = X^{(\beta)} \cup \bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X)$ para todo $\beta < \alpha$. Note que, para cada $\beta < \alpha$, os conjuntos $X^{(\beta)}$ e $\bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X)$ são disjuntos. Assim, desta última igualdade, obtemos

$$X^{(\beta)} = X \setminus \bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X) = \bigcap_{\xi<\beta} X \setminus I_\xi(X),$$

para todo $\beta < \alpha$. Substituindo na definição de $X^{(\alpha)}$, temos

$$X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} = \bigcap_{\beta<\alpha} \bigcap_{\xi<\beta} X \setminus I_\xi(X) = \bigcap_{\xi<\alpha} X \setminus I_\xi(X) = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X),$$

donde vem a desejada igualdade $X = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X)$, o que conclui a demonstração. ■

Lembrando que, para um espaço X, $\mathrm{ht}(X) = \min\{\alpha : X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}\}$ é a altura de Cantor-Bendixson de X, temos o

Corolário 3.2.3. Se X é disperso e $\alpha = \mathrm{ht}(X)$, então $X = \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X)$.

Corolário 3.2.4. Fixado um ordinal α, se $\beta < \alpha$, então

$$X^{(\beta)} = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} I_\xi(X).$$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos

$$X = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) \quad \text{e} \quad X = X^{(\beta)} \cup \bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X),$$

donde vem

$$X^{(\alpha)} = X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X) \quad \text{e} \quad X^{(\beta)} = X \setminus \bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X).$$

Portanto:

$$X^{(\beta)} \setminus X^{(\alpha)} = (X \setminus \bigcup_{\xi<\beta} I_\xi(X)) \setminus (X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} I_\xi(X)).$$

Agora é uma simples verificação de que o lado direito desta última igualdade é igual à $\bigcup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} I_\xi(X)$. Logo

$$X^{(\beta)} = X^{(\alpha)} \cup \bigcup_{\beta \leqslant \xi < \alpha} I_\xi(X),$$

como queríamos. ■

Proposição 3.2.5. Dado um espaço X, se $x \in I_\alpha(X)$ e U é uma vizinhança de x, então $U \cap I_\xi(x) \neq \emptyset$, para todo $\xi < \alpha$.

Demonstração. Vamos fazer essa demonstração por indução em α. Se x pertence ao primeiro nível de X, então, por definição, x é ponto isolado de X'. Portanto x admite uma vizinhança V tal que $V \cap X' = \{x\}$. Dada uma vizinhança qualquer U de x, temos também $(U \cap V) \cap X' = \{x\}$ pois $x \in (U \cap V) \cap X'$ e $(U \cap V) \cap X' \subset V \cap X'$. Como x pertence a X' e $U \cap V$ é uma vizinhança de x, em $(U \cap V) \cap X$ existe um elemento y distinto de x. Este y não pode pertencer a X' uma vez que $(U \cap V) \cap X' = \{x\}$ e $y \neq x$. Logo, como $X = X' \cup I_0(X)$ (reunião esta disjunta), $y \in I_0(X)$ e $U \cap I_0(X) \neq \emptyset$.

Se α é um sucessor $\beta + 1$, então $I_\alpha(X) = I_{\beta+1}(X) = X^{(\beta)} \setminus X^{(\beta+1)} = I_1(X^{(\beta)})$. Portanto, se $x \in I_\alpha(X)$ então $x \in I_1(X^{(\beta)})$. Assim, pelo parágrafo anterior, existe um $y \in U \cap I_0(X^{(\beta)}) = U \cap I_\beta(X)$. Agora U é a vizinhança de um y que pertence ao β-ésimo nível de X. Portanto, pela hipótese de indução, $U \cap I_\xi(X) \neq \emptyset$ para todo $\xi < \beta$. Como $U \cap I_\beta(X) \neq \emptyset$ (por causa do y), segue $U \cap I_\xi(X) \neq \emptyset$ para todo $\xi < \beta + 1 = \alpha$.

Suponha agora que α seja um ordinal limite. Por hipótese, existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap X^{(\alpha)} = \{x\}$. Pelo corolário anterior, dado um $\xi < \alpha$, temos $X^{(\xi)} = X^{(\alpha)} \cup (\bigcup_{\xi \leqslant \eta < \alpha} I_\eta(X))$. Deste modo, dada uma vizinhança U qualquer de x, se $W = U \cap V$, então:

$$W \cap X^{(\xi)} = (W \cap X^{(\alpha)}) \cup (W \cap \bigcup_{\xi \leqslant \eta < \alpha} I_\eta(X)) = \{x\} \cup (\bigcup_{\xi \leqslant \eta < \alpha} (W \cap I_\eta(X))).$$

Como $x \in X^{(\xi+1)}$ e W é uma vizinhança de x, existe um $y \in W \cap X^{(\xi)}$ distinto de x. Portanto $y \in \bigcup_{\xi \leqslant \eta < \alpha} W \cap I_\eta(X)$, ou seja, $y \in W \cap I_\eta(X)$ para algum η tal que $\xi \leqslant \eta < \alpha$. Concluímos então, com essas contas, que, dada a vizinhança U de x, para todo $\xi < \alpha$ existe um η, $\xi \leqslant \eta < \alpha$ e um $y \in I_\eta(X)$ que também admite o mesmo U como vizinhança. Assim, pela hipótese de indução, $U \cap I_\xi(X) \neq \emptyset$, como queríamos. ■

Corolário 3.2.6. Se X é primeiro enumerável e $x \in I_1(X)$, então existe uma sequência de elementos em $I_0(X)$ que converge para x.

Demonstração. Seja $\{V_n : n \in \omega\}$ uma base enumerável em X para x. Dessa base podemos obter uma nova base $\{U_n : n \in \omega\}$ tal que $U_m \subset U_n$ se $m > n$, definindo $U_n = \bigcap_{m \leqslant n} V_m$ para todo $n \in \omega$. Conforme vimos na proposição anterior, para cada $n \in \omega$, existe um $x_n \in U_n \cap I_0(X)$, o que nos dá a sequência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ procurada. ■

Corolário 3.2.7. Seja X um espaço primeiro enumerável. Se $x \in I_\alpha(X)$, onde α é um ordinal limite de cofinalidade enumerável e $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência crescente de ordinais que converge para α, então existe uma sequência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ que converge para x e tal que, para cada $n \in \omega$, $x_n \in I_{\alpha_n}(X)$.

Demonstração. Fixada a base enumerável $\{U_n : n \in \omega\}$ em x tal que $U_m \subset U_n$ se $m > n$, pela proposição anterior, para cada $n \in \omega$, basta tomar $x_n \in U_n \cap I_{\alpha_n}(X)$. ■

Já vimos anteriormente que, se A^d denota o conjunto dos pontos de acumulação de A, então $\bigcup_{s \in S} A_s^d \subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^d$. Além disso, também vale a seguinte

Proposição 3.2.8. Para um ordinal α qualquer temos

$$\bigcup_{s \in S} A_s^{(\alpha)} \subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^{(\alpha)}.$$

Demonstração. Vamos fazer essa demonstração por indução em α. Note que $A' = A \cap A^d$ por definição. Assim temos

$$\bigcup_{s \in S} A'_s = \bigcup_{s \in S} (A_s \cap A_s^d).$$

Se $x \in A_s \cap A_s^d$ para algum s, então $x \in \bigcup_{s \in S} A_s$ e $x \in \bigcup_{s \in S} A_s^d \subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^d$. Portanto

$$x \in (\bigcup_{s \in S} A_s) \cap (\bigcup_{s \in S} A_s)^d = (\bigcup_{s \in S} A_s)'.$$

De modo análogo demonstramos o caso sucessor. Se α é um ordinal limite, então, por definição

$$\bigcup_{s \in S} A_s^{(\alpha)} = \bigcup_{s \in S} \bigcap_{\xi < \alpha} A_s^{(\xi)}.$$

Se

$$\bigcup_{s \in S} A_s^{(\xi)} \subset (\bigcup_{s \in S} A_s)^{(\xi)}$$

para todo $\xi < \alpha$, então

$$\bigcap_{\xi < \alpha} \bigcup_{s \in S} A_s^{(\xi)} \subset \bigcap_{\xi < \alpha} (\bigcup_{s \in S} A_s)^{(\xi)} = (\bigcup_{s \in S} A_s)^{(\alpha)}$$

Agora o resultado segue de

$$\bigcup_{s\in S} A_s^{(\alpha)} = \bigcup_{s\in S}\bigcap_{\xi<\alpha} A_s^{(\xi)} \subset \bigcap_{\xi<\alpha}\bigcup_{s\in S} A_s^{(\xi)}.$$

■

O teorema abaixo é devido a Sierpinski e Mazurkiewicz. Sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Hilton (2016). Tal teorema nos permitirá concluir a demonstração do teorema 3.3.1.

Teorema 3.2.9 (Mazurkiewicz & Sierpinski)**.** Se Y é um espaço enumerável, compacto e Hausdorff, então sua altura é um ordinal sucessor e sua β-ésima derivativa $Y^{(\beta)}$ é um conjunto finito. Sejam $\mathrm{ht}(Y) = \beta + 1$ e $|Y^{(\beta)}| = m$. Para este ordinal β e este número natural m temos $Y \cong \omega^\beta \cdot m + 1$.

3.3 Respostas positivas

Feitas as considerações das duas seções anteriores, vamos para o primeiro teorema principal deste capítulo. A demonstração que iremos apresentar aqui é essencialmente a mesma demonstração para o caso em que $\chi(x, X) < \mathfrak{b}\ \forall x \in X$, encontrada em Weiss e Komjáth (1987).

Teorema 3.3.1. Se X é primeiro enumerável e $X \longrightarrow (\text{top } \omega+1)^1_\omega$, então $X \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega\ \forall \alpha < \omega_1$.

Demonstração. Fixada uma partição $\{X_n : n \in \omega\}$ de X, queremos encontrar um $n \in \omega$ tal que X_n contenha uma cópia de um dado ordinal enumerável α. Este n vai ser o mesmo n para o qual vale um dos dois casos seguintes:

(i) a altura de Cantor-Bendixson $\mathrm{ht}(X_n)$ de X_n é não enumerável, ou

(ii) X_n contém um conjunto Y denso em si mesmo.

Um desses casos acontece porque se existisse uma partição $\{X_n : n \in \omega\}$ (embora fixada a partição no início dessa demonstração, vamos usar as mesmas letras por abuso de notação) para a qual não valesse nenhum dos casos (i) ou (ii) qualquer que fosse o $n \in \omega$, X_n seria um conjunto disperso cuja altura $\mathrm{ht}(X_n) = \alpha_n$ seria um ordinal no máximo enumerável, para cada $n \in \omega$, de modo que $X_n = \bigcup_{\xi<\alpha_n} I_\xi(X_n)$ seria uma reunião de uma família no máximo enumerável de conjuntos dois a dois distintos. A partir daí obteríamos uma nova partição $X = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{\xi<\alpha_n} I_\xi(X_n)$ para X e ela seria tal que nenhum dos conjuntos da forma $I_\xi(X_n)$ conteria uma sequência convergente (com seu ponto de convergência), uma vez que, por definição, todo ponto de $I_\xi(X_n)$ é isolado em $X_n^{(\xi)}$ e $I_\xi(X_n) \subset X_n^{(\xi)}$. Isto é, teríamos $X \not\longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$.

Fixemos, então, o n tal que vale um dos dois casos (i) ou (ii). A demonstração será feita por indução em α do seguinte modo. No caso (i) vamos mostrar que, se x está no α-ésimo nível de X_n, então existe um H, contido nos α's primeiros níveis de X_n, tal que $H \cong \alpha$ e $H \cup \{x\} \cong \alpha + 1$. No caso (ii), se $x \in Y$, então existe $H \subset Y$ tal que $H \cong \alpha$ e $H \cup \{x\} \cong \alpha + 1$. Esses dois casos serão feitos de uma vez só.

Basta mostrar o resultado desejado para ordinais indecomponíveis devido ao seguinte raciocínio. Pela Forma Normal de Cantor, vamos escrever $\alpha = \alpha_k + \cdots + \alpha_0$ para um certo $k \in \omega$, onde α_m é um ordinal indecomponível para cada $m \in k + 1$ e $\alpha_k \geqslant \cdots \geqslant \alpha_0$. Note que, fazendo $A_k = [0, \alpha_k + 1[$ e $A_{k-j} =]\alpha_k + \cdots + \alpha_{k-(j-1)}, (\alpha_k + 1) + \cdots + (\alpha_{k-j} + 1)[$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, temos: $A_m \cong \alpha_m + 1$, $\bigcup_{m\in k+1} A_m = (\alpha_k + 1) + \cdots + (\alpha_0 + 1) = \alpha + 1$ (pelo lema 3.1.9), além de cada A_m ser aberto em $\alpha+1$ e a família dos A_m's serem de conjuntos dois a dois disjuntos. Portanto $\alpha+1$ é a soma topológica dos A_m's, cada um homeomorfo ao α_m+1. Supondo, então, o resultado válido para os indecomponíveis e $k>0$, podemos fazer o seguinte. Fixemos $k+1$ pontos distintos $x_0,\ldots,x_k$ e (para cada $m\in k+1$) os conjuntos Y_m contidos em X_n homeomorfos ao α_m e tais que a reunião de cada um deles com o $\{x_m\}$ é uma cópia do α_m+1. Usando o fato de X ser Hausdorff, podemos encontrar vizinhanças U_m para cada x_m tal que os conjuntos $U_0,\ldots,U_k$ são dois a dois disjuntos. A interseção $U_m\cap(Y_m\cup\{x_m\})$ é aberta em $Y_m\cup\{x_m\}$ e, portanto, contém uma cópia do α_m+1 (pois segmentos finais de ordinais indecomponíveis são homeomorfos a esse ordinal indecomponível, conforme vimos anteriormente). Seja S_m essa cópia. Então $S=\bigcup_{m\in k+1}S_m$ é a cópia desejada do $\alpha+1$, pois cada S_m é aberto em S e a família dos S_m's é de conjuntos dois a dois disjuntos de um modo que $S=\bigoplus_{m\in k+1}S_m\cong\bigoplus_{m\in k+1}A_m=\alpha+1$.

Para concluir, só falta então mostrar que o resultado é válido para ordinais indecomponíveis. Suponha, então, que α seja o ordinal indecomponível $\alpha=\omega^\beta$. Já vimos como escrevê-lo como uma soma infinita $\alpha=\sum\alpha_m$, onde cada α_m é um ordinal indecomponível. Fixado o x no lugar apropriado (no α-ésimo nível no caso (i) e em Y no caso (ii)), pelos corolários acima, podemos obter uma sequência $\langle x_m : m\in\omega\rangle$ que converge para x tal que, para cada $m\in\omega$, existe um conjunto $\{s_m(\eta):\eta\in\alpha_m\}$ contido em X_n homeomorfo ao α_m e cuja reunião com o $\{x_m\}$ é homeomorfo ao α_m+1. Para cada $m\in\omega$ o que vamos fazer é obter um $\gamma_m<\alpha_m$ tal que

$$H=\bigcup_{m\in\omega}\{s_m(\eta):\gamma_m<\eta<\alpha_m\}\cup\{x_m\}\cup\{x\}$$

é uma cópia do $\alpha+1$. Para isso, para uma dada vizinhança U de x, basta encontrar o γ_m de um modo que tenhamos

$$\bigcup_{m>k}\{s_m(\eta):\gamma_m<\eta<\alpha_m\}\cup\{x_m\}\cup\{x\}\subset U$$

para algum $k\in\omega$. Desse modo, H será um conjunto enumerável, compacto e Hausdorff e poderemos concluir nossa demonstração pelo teorema de Mazurkiewicz e Sierpinski.

Seja $\{U_\xi:\xi<\omega\}$ uma base local enumerável para X em x. Fixado o U_ξ (para $\xi<\omega$), existe m_ξ tal que $x_m\in U_\xi$ para todo $m>m_\xi$. Fixada também uma sequência $\langle\eta_j : j\in\omega\rangle$ cofinal e crescente em α_m, existe $j\in\omega$ tal que $s_m(\eta)\in U_\xi$ para todo $\eta>\eta_j$. Assim definimos

$$f_\xi(m)=\min\{j\in\omega:\{s_m(\eta):\eta_j<\eta<\alpha_m\}\subset U_\xi\}$$

e $f_\gamma(m)=0$ para o número finito de m's tal que a igualdade acima não faz sentido. A família $\{f_\xi : \xi<\omega\}\subset\omega^\omega$ assim construída é enumerável. Portanto, lembrando que $\mathfrak{b}>\omega$, existe uma $f\in\omega^\omega$ tal que, para cada ξ existe um $l_\xi\in\omega$ tal que $f(l)>f_\xi(l)$ para todo $l>l_\xi$. Assim, se $m>\max\{m_\xi,l_\xi\}$, então $x_m\in U_\xi$ e $f(m)>f_\xi(m)$, donde vem $\eta_{f(m)}>\eta_{f_\xi(m)}$ e $\{s_m(\eta):\eta_{f(m)}<\eta<\alpha_m\}\subset U_\gamma$. Portanto basta definir $\gamma_m=\eta_{f(m)}$ e teremos a nossa propriedade desejada (para $k=\max\{m_\gamma,l_\gamma\}$).

Conforme já observamos anteriormente, este H é enumerável, compacto e Hausdorff. Assim, pelo teorema de Mazurkiewicz e Sierpinski, basta ver que x é o único elemento do conjunto $H^{(\beta)}$ (lembre que $\alpha=\omega^\beta$). Para cada $m\in\omega$, seja $H_m=\{s_m(\eta):\eta\in\alpha_m\setminus\gamma_m\}\cup\{x_m\}$. Se β é um sucessor $\delta+1$, então, por construção, $H_m\cong\alpha^\delta+1$ para todo $m\in\omega$. Deste modo, temos $H_m^{(\delta)}=\{x_m\}$. Assim, pela proposição 3.2.8, segue $x_m\in H^{(\delta)}$ para todo $m\in\omega$, donde vem $x\in H^{(\beta)}$ uma vez que os x_m's convergem para x. Se α é um ordinal limite, para cada m seja $\alpha_m=\omega^{\beta_m}$, onde cada α_m é uma parcela da soma infinita na qual o α foi escrito e β_m é a sequência crescente que converge para β (de acordo com o lema 3.1.8). Queremos ver que $x \in H^{(\xi)}$ para todo $\xi < \beta$. Pela convergência, existe m_0 tal que $\beta_m > \xi$ para todo $m > m_0$. Temos, então, $x_m \in H_m^{(\beta_m)} \subset H_m^{(\xi)}$ para todo $m > m_0$. Portanto, novamente pela proposição 3.2.8 e pela convergência, agora da subsequência $\langle x_m : m > m_0 \rangle$, segue $x \in H^{(\xi)}$ como queríamos. Além disso x é o único elemento de $H^{(\beta)}$, pois, se $y \in H$ é um elemento distinto de x, então $y \notin H^{(\beta)}$. ■

Em Weiss e Komjáth (1987) podemos encontrar um teorema mais forte do que o teorema acima:

Teorema 3.3.2. Se $\chi(x, X) < \mathfrak{b}$ $\forall x \in X$ e $X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$, então $X \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$ $\forall \alpha < \omega_1$.

E, desse teorema, como MA_{ω_1} implica $\omega_1 < \mathfrak{b}$ (proposição 1.1.45), segue o

Corolário 3.3.3. Assuma MA_{ω_1}. Se $\chi(X) = \omega_1$ e $X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$, então $X \longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$ $\forall \alpha < \omega_1$.

3.4 Uma resposta negativa

Trocando-se o MA_{ω_1} pelo princípio $\diamondsuit$, o teorema seguinte vai nos dar a negação do corolário anterior. Nele vamos construir um espaço topológico regular X de caráter ω_1 tal que $X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$, mas que $X \not\longrightarrow (\text{top } \alpha)^1_\omega$ para algum $\alpha < \omega_1$. Este α será o $\omega^2 + 1$. Note que uma primeira condição para isso ocorrer é X ser não enumerável, pois, se $|X| = \omega$, então $\{\{x\} : x \in X\}$ é uma partição enumerável para X tal que nenhum de seus elementos contém uma cópia do ordinal $\omega + 1$. O que faremos, então, é construir uma topologia conveniente no conjunto ω_1. O princípio diamante será usado nessa construção e sua importância aparecerá principalmente na hora de se mostrar a relação $X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$. Isto é, que fixada uma função de ω_1 em ω, exista uma sequência convergente (lembrando que, com isso, nos referimos à sequência junto com o ponto para a qual ela converge) na qual ela seja constante. Assim sendo, o que será mais útil será uma forma equivalente ao $\diamondsuit$, conforme podemos encontrar, por exemplo, em Devlin (1979). Esta forma equivalente diz o seguinte:

Teorema 3.4.1. Vale o princípio diamante se, e somente se, existe uma sequência $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ de funções $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ (para cada $\alpha \in \omega_1$) tal que, dada uma função $f : \omega_1 \to \omega_1$, o conjunto $\{\alpha \in \omega_1 : f|_\alpha = f_\alpha\}$ é estacionário.

Vamos chamar essa sequência de $\diamondsuit$-sequência.

Em particular, o que teremos será uma função $f : \omega_1 \to \omega$. Essa função também é uma função de ω_1 em ω_1. Dado um club $C \subset \omega_1$, existe um $\alpha \in C$ tal que $f_\alpha = f|_\alpha$. Como $f[\alpha] \subset \omega$, segue $f_\alpha[\alpha] \subset \omega$ também. Nesse sentido vamos poder supor que as funções $f_\alpha : \alpha \to \alpha$ da nossa $\diamondsuit$-sequência são funções de α em ω.

Teorema 3.4.2. Assuma $\diamondsuit$. Existe um espaço X de caráter ω_1 tal que $X \longrightarrow (\text{top } \omega + 1)^1_\omega$ mas que $X \not\longrightarrow (\text{top } \omega^2 + 1)^1_\omega$. De modo mais forte, nenhum subespaço de X é homeomorfo ao $\omega^2 + 1$.

Demonstração. Construção. Fixemos a $\diamondsuit$-sequência $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ conforme mencionado acima. Vamos construir nossa topologia τ em ω_1 construindo por recursão, para cada $\alpha \in \omega_1$, uma topologia τ_α sobre α que seja: zero-dimensional (e, portanto, regular), mais fina que a topologia da ordem de

α e tal que, para cada $\beta < \alpha$, $\tau_\beta = \tau_\alpha \cap \mathcal{P}(\beta)$. A τ será construída de um modo a preservar algumas propriedades topológicas do ω_1 com sua topologia da ordem. Nela, por exemplo, ordinais sucessores vão continuar sendo pontos isolados e certas sequências que convergiam para um certo ordinal limite vão continuar convergindo para este ordinal. São essas sequências que vão nos permitir mostrar a relação positiva.

Para ordinais sucessores de sucessores, isto é, ordinais da forma $\alpha + 2$, vamos definir $\tau_{\alpha+2}$ como a topologia gerada por $\tau_{\alpha+1}$ e por $\{\alpha + 1\}$. Se α é um ordinal limite, vamos definir τ_α como a topologia gerada pelo conjunto $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \tau_\beta$.

Para ordinais da forma $\alpha + 1$, onde α é um ordinal limite vamos fazer o seguinte. Vamos obter uma sequência $\langle t_k : k \in \omega \rangle$ de tipo de ordem ω convergindo para α com a seguinte propriedade: se $f_\alpha^{-1}[\{i\}]$ é não limitado em α para $i \in \omega$, então $f_\alpha(t_k) = i$ para infinitos $k \in \omega$ (mais abaixo vamos ver um modo de obter uma sequência com essas propriedades). Para cada $k \in \omega$ seja $\langle a(k, j) : j \in \omega \rangle$ uma sequência crescente de ordinais sucessores cofinal em t_k caso t_k seja limite e $a(k, j) = t_k$ para todo $j \in \omega$ caso t_k seja sucessor. Para cada $n \in \omega$ e cada $g : \omega \setminus n \to \omega$ vamos definir

$$U(n, g) = \{\alpha\} \cup \{\eta : a(k, g(k)) \leqslant \eta \leqslant t_k \text{ e } k \geqslant n\} = \{\alpha\} \cup \bigcup_{k \geqslant n} \{\eta : a(k, g(k)) \leqslant \eta \leqslant t_k\}.$$

Daí definimos a topologia $\tau_{\alpha+1}$ como sendo gerada pela coleção

$$\tau_\alpha \cup \{U(n, g) : n < \omega \text{ e } g : \omega \setminus n \to \omega\}.$$

Note que $t_k \in U(n, g)\ \forall k \geqslant n$, de modo que a sequência $\langle t_k : k \in \omega \rangle$ continua convergindo para α na topologia $\tau_{\alpha+1}$, uma vez que os abertos básicos que contém o α são da forma $U(n, g)$. E acabamos essa construção definindo o espaço X como o ω_1 com a topologia τ gerada pela coleção $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha$.

Antes de continuar verificando que o espaço $X = (\omega_1, \tau)$ tem todas as propriedades desejadas, vamos justificar as "pontas soltas" dessa construção.

1. <u>Um modo de obter a sequência $\langle t_k : k \in \omega \rangle$</u>. Seja $\{i_l : l \in \omega\}$ uma enumeração para os $i \in \omega$ tais que $f_\alpha^{-1}[\{i\}]$ é não limitado em α. Considere essa enumeração com repetições quando necessário (por exemplo quando o número de i's com essa propriedade for finito). Sejam $f_\alpha^{-1}[\{i_l\}] = \{s_n^{i_l} : n \in \omega\}\ \forall l \in \omega$ (esses conjuntos são enumeráveis porque o domínio de f_α é um conjunto enumerável), de um modo que $f_\alpha(s_n^{i_l}) = i_l$ para todo $l \in \omega$ e para todo $n \in \omega$. Para cada $l \in \omega$ o que devemos fazer, então, é escolher infinitos elementos da forma $s_n^{i_l}$ para comporem a sequência desejada.

$$\begin{array}{cccc} s_0^{i_0} & s_1^{i_0} & s_2^{i_0} & \cdots \\ s_0^{i_1} & s_1^{i_1} & s_2^{i_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_0^{i_l} & s_1^{i_l} & s_2^{i_l} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

O que podemos fazer, por exemplo, é, na tabela ao lado, tomar o t_0 da primeira linha, os t_1 e t_2 das primeira e segunda linhas respectivamente, o t_3, o t_4 e o t_5 das primeira, segunda e terceira linhas respectivamente e assim por diante.
Assim, façamos:

$$t_0 = \min\{s_n^{i_0} : n \in \omega\},\ t_1 = \min\{s_n^{i_0} : s_n^{i_0} > t_0,\ n \in \omega\},\ t_2 = \min\{s_n^{i_1} : s_n^{i_1} > t_1,\ n \in \omega\},$$

$t_3 = \min\{s_n^{i_0} : s_n^{i_0} > t_2,\, n \in \omega\},\ t_4 = \min\{s_n^{i_1} : s_n^{i_1} > t_3,\, n \in \omega\}, t_5 = \min\{s_n^{i_2} : s_n^{i_2} > t_4,\, n \in \omega\}.$

De um modo geral, dado um k natural maior do que 1, seja l a diferença de k com o maior número natural da forma $m(m+1)/2$ menor ou igual a k e defina

$$t_k = \min\{s_n^{i_l} : s_n^{i_l} > t_{k-1} \text{ e } n \in \omega\}.$$

Isso sempre é possível de se fazer uma vez que os conjuntos $\{s_n^{i_l} : n \in \omega\}$ são todos não limitados. A sequência $\langle t_k : k \in \omega\rangle$ possui todas as propriedades desejadas.

2. As topologias construídas de fato são topologias. Além da indução, vamos ter em mente também a proposição 1.2.3 que nos dizia o seguinte:

   > Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um dado conjunto A com as propriedades $\bigcup \mathcal{B} = A$ e, se $x \in U_1 \cap U_2$ para dados $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, então existe $U_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ gera uma topologia sobre A. A saber a topologia cujos abertos são os elementos da forma $\bigcup \mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

   (a) Caso $\mathcal{B} = \tau_{\alpha+1} \cup \{\{\alpha+1\}\}$ (sobre $\alpha+2$). Temos

   $$\bigcup \mathcal{B} = \bigcup \tau_{\alpha+1} \cup \{\alpha+1\} = (\alpha+1) \cup \{\alpha+1\} = \alpha+2.$$

   Dados $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, se $U_1, U_2 \in \tau_{\alpha+1}$, então $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\alpha+1}$. Se um dos U_1 ou U_2 for o $\{\alpha+1\}$, então $U_1 \cap U_2 = \{\alpha+1\} \in \mathcal{B}$ ou $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

   (b) Caso $\mathcal{B} = \bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta$ (sobre α, com α limite). Temos

   $$\bigcup \mathcal{B} = \bigcup \bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup \tau_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha.$$

   Se $U_1, U_2 \in \bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta$, então existem $\beta, \gamma < \alpha$ tais que $U_1 \in \tau_\beta$ e $U_2 \in \tau_\gamma$. Sem perda de generalidade, podemos supor por exemplo $\beta \leqslant \gamma$. Assim pela hipótese de indução, temos $\tau_\beta = \tau_\gamma \cap \mathcal{P}(\beta)$. Disso obtemos que ambos U_1, U_2 são elementos de τ_γ. Logo $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.

   (c) Caso $\mathcal{B} = \tau_\alpha \cup \{U(n,g) : n < \omega \text{ e } g : \omega \setminus n \to \omega\}$ (sobre $\alpha+1$, com α limite). Que a reunião dessa coleção é igual ao $\alpha+1$ também é imediato, pois $\bigcup \tau_\alpha = \alpha$ e $\alpha \in U(n,g)$ para todo $n \in \omega$ e toda $g : \omega \setminus n \to \omega$.

   Fixemos agora os elementos U_1 e U_2 de $\mathcal{B}$ e um $x \in U_1 \cap U_2$ (supondo essa interseção não vazia). Se ambos pertencem a τ_α, então o U_3 tal que $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ pode ser o próprio $U_1 \cap U_2$. Se $U_1 \in \tau_\alpha$ e se $U_2 = U(n,g)$ para algum $n \in \omega$ e alguma função $g : \omega \setminus n \to \omega$, então existe um $k \in \omega$ tal que $a(k, g(k)) \leqslant x \leqslant t_k$ (se $U_1 \in \tau_\alpha$, então $x \neq \alpha$). Lembre que todos os $a(k,j)$ são ordinais sucessores e, portanto, x pertence ao intervalo aberto $I = [a(k,g(k)), t_k+1)$. Por outro lado temos também $I \in \tau_\alpha$, pois $t_k < \alpha$ e a topologia de τ_α é mais fina do que a topologia da ordem de α. Para concluir este caso basta tomar $U_3 = U_1 \cap I$. Por fim, suponha $U_1 = U(n,g)$ e $U_2 = U(m,h)$ para certos $m, n \in \omega$ e certas funções $g : \omega \setminus n \to \omega$ e $h : \omega \setminus m \to \omega$. Se $x \neq \alpha$, então existem naturais k e l tais que $x \in I = [a(k,g(k)), t_k+1)$ e $x \in J = [a(l,g(l)), t_l+1)$ e podemos fazer algo parecido ao caso anterior, tomando $U_3 = I \cap J \in \tau_\alpha$. Se $x = \alpha$, então, sem perda de generalidade, suponha $m \leqslant n$ e defina $f(y) = \max\{g(y), h(y)\}$ para todo y natural maior ou igual a n e teremos $x \in U(n, f) \subset U(n, g) \cap U(m, h)$, onde $U(n, f) \in \mathcal{B}$, como queríamos.

(d) Caso $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha$ (sobre ω_1). Aqui o raciocínio é exatamente o mesmo do caso (b).

3. Dessa construção é imediato que, se $\beta < \alpha < \omega_1$, então

$$\tau_\beta = \tau_\alpha \cap \mathcal{P}(\beta).$$

4. Cada τ_α é mais fina do que a topologia da ordem de α. Pois:

- para um α qualquer temos

$$(\beta, \alpha + 1) = (\beta, \alpha] \in \tau_{\alpha+1} \Rightarrow (\beta, \alpha] = (\beta, \alpha + 1) \in \tau_{\alpha+2},$$

$$(\beta, \alpha + 1] = (\beta, \alpha + 1) \cup \{\alpha + 1\} \in \tau_{\alpha+2}, \text{ uma vez que } (\beta, \alpha], \{\alpha + 1\} \in \tau_{\alpha+2};$$

- para α limite,

$$(\beta, \gamma) \in \tau_\xi \text{ para algum } \xi < \alpha \text{ se } \gamma < \alpha, \text{ o que implica } (\beta, \gamma) \in \tau_\alpha \text{ e } (\beta, \gamma) \in \tau_{\alpha+1},$$

$$(\beta, \alpha) = \bigcup_{n\in\omega} (\beta, \alpha_n), \text{ onde } (\beta, \alpha_n) \in \tau_{\alpha+1} \text{ se } \langle \alpha_n : n \in \omega \rangle \text{ é cofinal em } \alpha.$$

No caso do $(\beta, \alpha]$ (para $\beta < \alpha$), fixe um $k \in \omega$ tal que $\beta < t_k$ e defina uma $g : \omega \setminus k \to \omega$ tal que $a(k, g(k)) > \beta$ (por exemplo $g(k) = \min\{j \in \omega : a(k, j) > \beta\}$, o que faz sentido uma vez que os $a(k, j)$ são cofinais em t_k). Deste modo, temos:

$$(\beta, \alpha] = (\beta, \alpha) \cup U(k, g),$$

onde $(\beta, \alpha) \in \tau_{\alpha+1}$ (conforme já vimos) e $U(k, g) \in \tau_{\alpha+1}$ por definição. Como já demonstramos que $\tau_{\alpha+1}$ é uma topologia, segue $(\beta, \alpha] \in \tau_{\alpha+1}$.

5. Cada τ_α é T_1. Isso é imediato do fato de τ_α ser mais fina do que a topologia da ordem de α. Se $x \in \alpha$, então $\alpha \setminus \{x\}$ é aberto na topologia da ordem de α, de modo que $\alpha \setminus \{x\} \in \tau_\alpha$. Logo $\{x\}$ é fechado em τ_α.

6. Cada τ_α é zero-dimensional. Construímos cada base de abertos e fechados $\mathcal{B}_\xi$ para o espaço (ξ, τ_ξ) por indução:

$$\mathcal{B}_{\alpha+2} = \mathcal{B}_{\alpha+1} \cup \{\{\alpha + 1\}\}$$

e, se α é limite,

$$\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$$

e

$$\mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha \cup \{U(n, g) : n \in \omega \text{ e } g : \omega \setminus n \to \omega\}$$

(note que o complementar de cada $U(n, g)$ em $\alpha + 1$ é uma reunião de intervalos abertos em $\alpha + 1$ e, portanto, cada $U(n, g)$ é fechado em $\alpha + 1$).

Assim, além de ser T_1, a reunião $\bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ é uma base de abertos e fechados para para o espaço X. Portanto ele é zero-dimensional e, em particular, é regular como queríamos. Abaixo vamos mostrar as outras propriedades desejadas de X.

7. O caráter de X é ω_1. Se x é um ponto de ω_1, então $x \in \alpha$ para algum $\alpha \in \omega_1$. Podemos extrair uma base local em x da base $\mathcal{B}_\alpha$ do espaço (α, τ_α). Que o caráter de X é menor do que ω_1 agora segue de $|\mathcal{B}_\alpha| \leqslant |\mathcal{P}(\alpha)| = \omega_1$. Isto vale pois $\mathcal{B}_\alpha \subset \tau_\alpha \subset \mathcal{P}(\alpha)$ e $|\mathcal{P}(\alpha)| = 2^\omega = \omega_1$, uma vez que α é enumerável e o princípio diamante implica CH, conforme vimos anteriormente.

   Por outro lado, se X fosse primeiro enumerável, pelo corolário 3.3.1 que acabamos de ver, em particular, ele deveria conter uma cópia do ω^2+1. Porém, mais abaixo vamos demonstrar que isso não ocorre.

8. Vale $X \longrightarrow (\text{top } \omega+1)^1_\omega$. Seja $f : \omega_1 \to \omega$ uma partição qualquer para o nosso espaço $X = \omega_1$. Seja I o conjunto de todos os $i \in \omega$ tais que $f^{-1}[\{i\}]$ é limitado em ω_1 e seja J o conjunto de todos os $i \in \omega$ tais que $f^{-1}[\{i\}]$ é não limitado em ω_1. Assim, para cada $i \in I$, existe um $\beta_i \in \omega_1$ tal que $f^{-1}[\{i\}] \subset \beta_i$. Tomando $\beta = \sup\{\beta_i : i \in \omega\}$, como a cofinalidade de ω_1 é ω_1, temos que $\beta \in \omega_1$ e temos um $\beta \in \omega_1$ tal que $f^{-1}[\{i\}] \subset \beta \ \forall i \in I$.

   Além disso, vamos mostrar que o conjunto

$$C = \{\alpha \in \omega_1 : f^{-1}[\{i\}] \text{ é não limitado em } \alpha \text{ para todo } i \in J\}$$

   é um club em ω_1. Assim, este C sendo um club, vai acontecer o seguinte. Como o conjunto dos α tais que $f_\alpha = f|_\alpha$ é estacionário pelo princípio $\diamondsuit$, vai existir um $\alpha \in C$ tal que $f_\alpha = f|_\alpha$. Podemos supor este $\alpha > \beta$, de um modo que $i = f(\alpha) \in J$. Portanto, por construção, temos que $f_\alpha(t_k) = i$ para infinitos $k \in \omega$. Logo

$$\{t_k : f_\alpha(t_k) = f(t_k) = i\} \cup \{\alpha\}$$

   é o conjunto homeomorfo ao $\omega+1$ i-homogêneo procurado.

   Vamos, então, à demonstração de que C é um club em ω_1.

   (a) C é fechado. Sejam $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ elementos de C e seja $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Queremos mostrar que $\alpha \in C$. Se existisse um $i \in J$ tal que $f^{-1}[\{i\}]$ é limitado em α, então $f^{-1}[\{i\}]$ seria limitado em algum α_n e teríamos $\alpha_n \notin C$. Logo $f^{-1}[\{i\}]$ é não limitado em α para todo $i \in J$ e $\alpha \in C$ como queríamos.

   (b) C é não limitado. Vamos supor que C seja limitado por um certo α, isto é, que $\xi < \alpha$ para todo $\xi \in C$. Assim, para todo $\gamma \in \omega_1 \setminus \alpha$, existe um $i_\gamma \in J$ tal que $f^{-1}[\{i_\gamma\}]$ é limitado em γ. Um conjunto ser limitado em γ significa que existe um $\xi < \gamma$ tal que $\gamma \setminus \xi$ não tem interseção com esse conjunto. Para cada $\gamma \in \omega_1 \setminus \alpha$ seja, então, $\xi_\gamma < \gamma$ tal que $(\gamma \setminus \xi_\gamma) \cap f^{-1}[\{i_\gamma\}] = \emptyset$. Temos, então, a associação regressiva $\gamma \mapsto \xi_\gamma$ definida no estacionário $\omega_1 \setminus \alpha$. Pelo Lema de Pressing-Down, sejam $S \subset \omega_1 \setminus \alpha$ o conjunto estacionário (em particular não limitado) e $\xi \in \omega_1$ tal que $\xi_\gamma = \xi \ \forall \gamma \in S$. Ainda temos a associação $\gamma \mapsto i_\gamma \ \forall \gamma \in S$. Como $|S| = \omega_1$, existem $A \subset S$ com cardinalidade ω_1 e $i \in \omega$ tal que $i_\gamma = i \ \forall \gamma \in A$. Com essas coisas vai seguir que o $f^{-1}[\{i\}]$ é limitado em ω_1 pelo ξ, pois se existisse um $x \in f^{-1}[\{i\}]$ maior ou igual a ξ, como A é não limitado em ω_1, tome $\zeta \in A$ maior do que o x. Mas, por construção, $(\zeta \setminus \xi) \cap f^{-1}[\{i\}] = \emptyset$ e este x não poderia existir. O $f^{-1}[\{i\}]$ não poderia ser limitado em ω_1 porque $i \in J$ por construção, o que (lembrando da definição de J) significa que $f^{-1}[\{i\}]$ é não limitado em ω_1. Logo C é não limitado em ω_1 como queríamos.

9. <u>X não contém uma cópia do $\omega^2 + 1$</u>. Primeiramente vamos demonstrar a

<u>Afirmação</u>: *Se α é um ordinal limite e $Y \subset \alpha$ é tal que $Y \cup \{\alpha\}$ é compacto, então existe um $\beta < \alpha$ tal que*

$$Y \cap (\alpha \setminus \beta) \subset \{t_k : k \in \omega\} \cap (\alpha \setminus \beta).$$

Isto significa que algum segmento final de Y é, na verdade, uma subsequência do fim da sequência $\langle t_k : k \in \omega \rangle$. Em seguida, vamos ver de que modo a existência de uma cópia homeomorfa ao $\omega^2 + 1$ vai ferir essa afirmação.

Vamos trabalhar com a contrapositiva da afirmação acima. Isto é, sejam α um ordinal limite e $Y \subset \alpha$ tal que para todo $\beta < \alpha$ existe um $x \in [Y \cap (\alpha \setminus \beta)] \setminus [\{t_k : k \in \omega\} \cap (\alpha \setminus \beta)]$. Vamos mostrar que $Y \cup \{\alpha\}$ não é compacto construindo para ele uma cobertura de abertos que não admite uma subcobertura finita.

Em particular, podemos trocar o β que apareceu acima pelos t_n's que apareceram na construção do nosso espaço X. Assim, por ser não vazio e bem ordenado, para cada $n \in \omega$, seja

$$x_n = \min(Y \cap (\alpha \setminus t_n)) \setminus (\{t_k : k \in \omega\} \cap (\alpha \setminus t_n)).$$

Para cada $n \in \omega$, pela fato de $\langle t_m : m \in \omega \rangle$ ser cofinal em α, seja também

$$t_{k_n} = \min\{t_m : t_m > x_n\}.$$

Como a sequência $\langle a(k_n, j) : j \in \omega \rangle$ é cofinal em t_{k_n}, existe um $j \in \omega$ tal que $a(k_n, j) > x_n$. Vamos definir $g : \omega \to \omega$ por

$$g(k_n) = \min\{j \in \omega : a(k_n, j) > x_n\} \quad \forall n \in \omega \qquad \text{e} \qquad g(i) = 0 \quad \forall i \in \omega \setminus \{k_n : n \in \omega\}.$$

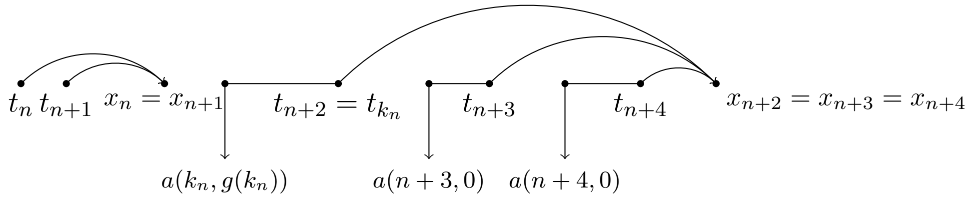

Figura 3.1: *Cada x_n é o menor elemento de Y maior que t_n e distinto de todos os t_m's. Cada t_{k_n} é o menor dos t_m's maior que o x_n.*

Note que esta g está bem definida. Agora considere a vizinhança aberta $U(0, g)$ que cobre o elemento α e todos os t_k's. Só falta cobrir os $y \in Y \setminus U(0, g)$. Este y só pode ser $y < t_0$ ou $x_n \leqslant y < a(k_n, g(k_n))$ para algum $n \in \omega$ pelas minimalidades de x_n e de t_{k_n}. Então, para algum $n \in \omega$, $y \in a(k_n, g(k_n))$ (como ordinal) e consideramos a topologia $\tau_{a(k_n,g(k_n))}$. Seja U_y uma vizinhança aberta deste y nesta topologia. Com esta construção, afirmamos que a cobertura aberta procurada para $Y \cup \{\alpha\}$ é a coleção $\{U(0,g)\} \cup \{U_y : y \in Y \setminus U(0,g)\}$. De fato, sejam $U(0,g)$, $U_1, \ldots, U_n$ elementos desta cobertura, com $U_i \in \tau_{a(k_i,g(k_i))}$ para todo $i \in \{1, \ldots n\}$. Seja $a(k, g(k))$ o maior dos ordinais $a(k_1, g(k_1)), \ldots, a(k_n, g(k_n))$. Por hipótese existe um $x \in Y$ tal que $x > t_k$ e que, por construção, não pertence ao $U(0,g)$. Este x, sendo maior do que o t_k, em particular não pertence a nenhum dos U_i's. Logo, nenhuma subcoleção finita da coleção considerada pode cobrir o $Y \cup \{\alpha\}$, como queríamos.

Vamos supor agora que exista uma imersão homeomorfa $\psi : \omega^2 + 1 \to X$. Seja $Z = \psi[\omega^2 + 1]$ o subespaço de X homeomorfo ao $\omega^2 + 1$. Note que, se $x \in \omega^2 + 1$ é um ordinal limite, então $\psi(x)$ também é um ordinal limite por causa do seguinte. Se $\psi(x)$ é sucessor, então $\{\psi(x)\}$ é um aberto em X por construção e $\{\psi(x)\} \cap Z = \{\psi(x)\}$ é aberto em Z também. Então $\psi^{-1}[\{\psi(x)\}] = \{x\}$ é um aberto em ω^2+1 e, portanto, x é um ordinal sucessor. Em particular, temos que o $\psi(\omega^2)$ é um ordinal limite.

Consideremos, então, o conjunto Y definido por $Y = \{y \in Z : y < \alpha\}$, com $\alpha = \psi(\omega^2)$. Claramente $Y \subset \alpha$. Dado $\beta < \alpha$, conseguimos um aberto $U(n,g) \subset (\alpha + 1) \setminus \beta$, vizinhança aberta do α. Vamos considerar as seguintes sequências

$$\langle \omega \cdot (k+1) : k \in \omega \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle \omega \cdot k + j : j \in \omega \rangle \quad \forall k \in \omega.$$

A primeira delas converge para ω^2 e, a segunda, para $\omega \cdot (k + 1)$. Lembrando que funções contínuas preservam convergências, existe um $N \in \omega$ tal que

$$\psi(\omega \cdot (k+1)) \in U(n,g) \qquad \forall k+1 > N$$

e, como $U(n,g)$ também é vizinhança desses $\psi(\omega \cdot (k+1))$, para cada $k+1 > N$, existe um $n_k \in \omega$ tal que

$$\psi(\omega \cdot k + j) \in U(n,g) \qquad \forall j > n_k.$$

Agora temos

$$\{\psi(\omega \cdot (k+1)) : k+1 > N\} \cup \bigcup_{k+1>N} \{\psi(\omega \cdot k + j) : j > n_k\} \subset Y \setminus (\alpha \cap \beta) = Y \cap (\alpha \setminus \beta).$$

Note que o conjunto escrito à esquerda da inclusão acima não tem tipo de ordem ω, de um modo que existe algum elemento neste conjunto que não pode ser nenhum dos t_k.

Por outro lado, vamos ver agora que o conjunto $Y \cup \{\alpha\}$ é compacto em X. Vamos fazer isso mostrando que sua imagem inversa

$$F = \{x \in \omega^2 + 1 : \psi(x) \leqslant \psi(\omega^2)\}$$

é fechada em $\omega^2 + 1$, porque fechados em compactos são compactos e imagens contínuas de compactos são compactas, donde vai seguir o resultado desejado.

Vamos supor que exista um $x \in \overline{F} \setminus F$. Isso implica que x é um ordinal limite, porque, se x fosse sucessor, então $\{x\}$ seria aberto e teríamos: $x \in \overline{F} \Rightarrow \{x\} \cap F \neq \emptyset \Rightarrow x \in F$. Já vimos que, se x é um ordinal limite, então $\psi(x)$ também é um ordinal limite. Da hipótese $x \notin F$ temos $\psi(x) > \psi(\omega^2)$. De $x \in \overline{F}$ e x limite obtemos uma sequência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ crescente de elementos de F que converge para x (lembre que $\omega^2 + 1$ é primeiro enumerável). Da continuidade da ψ temos a convergência da sequência $\langle \psi(x_n) : n \in \omega \rangle$ para $\psi(x)$ em τ. Mas podemos obter uma vizinhança $U(m, h)$ de $\psi(x)$ (porque ele é um ordinal limite) inteiramente contida no intervalo $(\psi(\omega^2), \psi(x)]$, intervalo este o qual não tem nenhum dos $\psi(x_n)$ como elemento (figura abaixo), pois $x_n \in F \Rightarrow \psi(x_n) \leqslant \psi(\omega^2)$. Portanto, a sequência $\langle \psi(x_n) : n \in \omega \rangle$ não converge para $\psi(x)$, o que nos dá uma contradição. Logo F é fechado como queríamos.

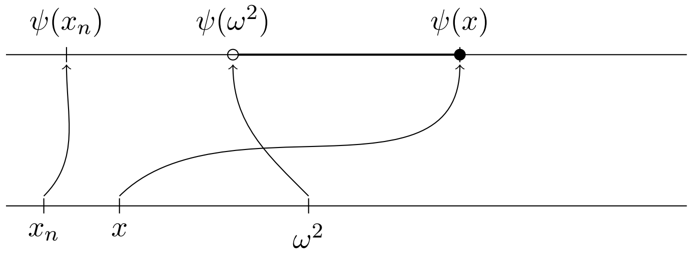

Figura 3.2: *Temos $U(m, h) \subset (\psi(\omega^2), \psi(x)]$, mas $\psi(x_n) \leqslant \psi(\omega^2)$ para todo n.*

Vimos, então, que a existência de uma cópia homeomorfa ao ω^2+1 em X contraria a afirmação feita no início da demonstração deste item, o que finaliza a demonstração.

■

Capítulo 4

O ω_1 e o Cubo de Cantor

No capítulo anterior trabalhamos com cópias de ordinais enumeráveis. Neste iremos trabalhar com cópias de espaços não enumeráveis, principalmente o ω_1 e o cubo de Cantor. Vamos continuar vendo resultados de Weiss (1990b), de Weiss e Komjáth (1987) e de Homayouni (1997).

Vamos introduzir a notação da relação dos colchetes e começar com a negação $\omega_1 \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$, a qual vai constituir o primeiro passo da demontração por indução da negação $\alpha \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$ para todo α tal que $\omega_1 \leqslant \alpha < \omega_2$. Como consequência dessa negação poderemos voltar para a nossa conhecida relação da seta e concluir $\alpha \not\longrightarrow (\text{top } \omega_1)^1_2$ para todo ordinal α de cardinalidade ω_1. Em seguida, utilizando o princípio $\diamondsuit$ vamos poder trocar esse α por um espaço regular de cardinalidade ω_1. Em contrapartida, a relação positiva $X \longrightarrow (\text{top } \omega_1)^1_2$ surge como consequência de um axioma conhecido como *SPFA* para $X = \omega_2$, $X = 2^{\omega_1}$ ou $X = \sum_{\omega_2}$ (definição 4.3.3). Por fim vamos ver alguns resultados envolvendo os κ's-cubos de Cantor.

4.1 O 1º passo e uma preparação para os demais passos

Definição 4.1.1 (Relação dos colchetes)**.** Dados os espaços topológicos X e Y, um natural $n > 0$ e um número cardinal λ, vamos definir a relação dos colchetes

$$X \longrightarrow [\text{top } Y]^n_\lambda$$

pela seguinte afirmação:

> Dada uma função qualquer $f : [X]^n \to \lambda$, existe uma cópia $H \subset X$ de Y tal que $f[[H]^n] \neq \lambda$. Ou, de forma equivalente, se $\{X_\xi : \xi \in \lambda\}$ é uma partição qualquer de $[X]^n$ de cardinalidade λ, então existem um subespaço H de X homeomorfo ao Y e um $\xi \in \lambda$ tais que $[H]^n \cap X_\xi = \emptyset$.

Note que

$$X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\lambda \Longrightarrow X \longrightarrow [\text{top } Y]^n_\lambda,$$

pois, se $f : [X]^n \to \lambda$ é uma função e $f[[H]^n] = \{i\}$ para um subconjunto H de X e algum $i \in \lambda$, então $f[[H]^n] \neq \lambda$.

Revisitando o teorema 1.1.30 (que dizia: para um κ regular existem κ estacionários em κ dois a dois disjuntos), e lembrando que é estacionário qualquer conjunto que contém um estacionário, podemos concluir que existe um modo de particionar o ω_1 em ω_1 subconjuntos estacionários. Com essa observação e com o lema abaixo vamos poder concluir a relação $\omega_1 \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$., encontrada em Weiss (1990b).

Lema 4.1.2. Um subespaço do ω_1 homeomorfo ao ω_1 é um club em ω_1.

Demonstração. Seja H esse subespaço. Devemos mostrar que ele é não limitado e fechado na topologia da ordem.

Afirmação: *H é não limitado.*

Solução. Se H fosse limitado em ω_1, então $|H|$ seria enumerável. Porém, como $H \cong \omega_1$, em particular, $|H| = \omega_1$. Logo H não pode ser limitado em ω_1. □

Afirmação: *H é fechado.*

Solução. Seja $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência estritamente crescente de elementos de H e seja x seu supremo. Queremos mostrar que $x \in H$. Seja $\psi : H \to \omega_1$ um homeomorfismo. Indo para o conjunto ω_1 com o auxílio da ψ, o que vamos fazer é construir uma sequência conveniente que convirja para x e para um $x' \in H$ e, depois, usando o fato que num espaço de Hausdorff o limite de uma sequência é único, vamos concluir que $x = x'$ e, portanto, $x \in H$.

Seja a_0 um elemento menor do que x_0 e sejam $a_{n+1} = x_n$ $\forall n \in \omega$ de modo que $x_n \in H \cap (a_n, x]$ $\forall n \in \omega$ e

$$\psi[H \cap (a_m, x]] \supset \psi[H \cap (a_n, x]] \qquad \text{se } m < n.$$

Seja $y_n = \min \psi[H \cap (a_n, x]]$ $\forall n \in \omega$ (note que esses conjuntos são não vazios) e a inclusão acima implica que a sequência $\langle y_n : n \in \omega \rangle$ é crescente, de modo que o y definido por $y = \sup\{y_n : n \in \omega\} = \bigcup_{n\in\omega} y_n$ pertence a ω_1, porque reunião enumerável de enumeráveis é enumerável, e $y_n \longrightarrow y$.

De $y_n \in \psi[H \cap (a_n, x]]$ para todo $n \in \omega$, temos $y_n = \psi(x'_n)$ para algum (único) $x'_n \in H \cap (a_n, x]$. Também $y = \psi(x')$ para algum $x' \in H$ pela sobrejetividade de ψ. Segue, então, $\psi(x'_n) \longrightarrow \psi(x')$ e, pela continuidade de ψ^{-1}, temos a convergência $x'_n \longrightarrow x'$ em H (na topologia de subespaço). Por construção temos também a convergência $x'_n \longrightarrow x$ em ω_1, porque, dada uma vizinhança básica $(\gamma, x]$ de x em ω_1, existe $n_0 \in \omega$ tal que $H \cap (a_n, x] \subset (\gamma, x]$ $\forall n \geqslant n_0$ de modo que $x'_n \in (\gamma, x]$ $\forall n \geqslant n_0$. Se $x'_n \longrightarrow x'$ em H como subespaço de ω_1, então $x'_n \longrightarrow x'$ em ω_1 também. Agora temos ambas as convergências $x'_n \longrightarrow x'$ e $x'_n \longrightarrow x$ em ω_1. Como ω_1 é Hausdorff segue $x' = x$ como queríamos. □

■

Teorema 4.1.3.

$$\omega_1 \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}.$$

Demonstração. Pelo teorema 1.1.30 escreva $\omega_1 = \bigcup_{i\in\omega_1} S_i$, onde cada S_i é estacionário em ω_1 e $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Se $H \subset \omega_1$ é uma cópia de ω_1, então, pelo lema acima, H é um club em ω_1. Logo $H \cap S_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \omega_1$, o que mostra o resultado desejado. ■

A recíproca do lema 4.1.2 visto acima também é verdadeira:

Proposição 4.1.4. Se C é um club em ω_1, então C é uma cópia homeomorfa do ω_1.

Demonstração. Para mostrar isso, fixado o club $C \subset \omega_1$, vamos construir uma função $\psi : \omega_1 \to C$ que seja crescente, bijetiva e contínua. Em seguida, vamos mostrar que qualquer função com essas propriedades é um homeomorfismo.

Usando que C é bem ordenado (com a ordem induzida de ω_1), não limitado e fechado com respeito à sua topologia induzida pela ordem, vamos construir a função

$$\psi : \omega_1 \to C,$$

definindo, para cada $\alpha \in \omega_1$, o elemento $\psi(\alpha) \in C$ por indução em α do seguinte modo

- $\psi(0) = \min\ C$;
- $\psi(\alpha + 1) = \min\ \{y \in C : y > \psi(\alpha)\}$ e;
- $\psi(\alpha) = \sup\ \{\psi(\xi) : \xi < \alpha\}$ se α é um ordinal limite.

Afirmação: *ψ é estritamente crescente.*

Solução. Vamos verificar que $\xi < \eta \Rightarrow \psi_(\xi) < \psi(\eta)$ por indução em η. Se η é um ordinal sucessor $\gamma + 1$, então $\xi < \eta \Rightarrow \xi \leqslant \gamma \Rightarrow \psi(\xi) \leqslant \psi(\gamma)$, pela hipótese de indução. Como $\psi(\eta) = \psi(\gamma + 1) = \min\ \{y \in C : y > \psi(\gamma)\} > \psi(\gamma)$, segue $\psi(\xi) < \psi(\eta)$. Se η é limite, então tome um γ menor do que η e maior do que o ξ. Pela hipótese de indução temos $\psi(\xi) < \psi(\gamma)$ e $\psi(\gamma) \leqslant \psi(\eta)$ por construção. Logo $\psi(\xi) < \psi(\eta)$ como queríamos. □

Afirmação: *ψ é bijetiva.*

Solução. A injetividade é imediata do fato de ser estritamente crescente conforme acabamos de ver. Vamos mostrar que ψ é sobrejetiva por indução nos elementos de C. Por construção, o menor elemento de C pertence à imagem de ψ. Então fixe o $y > \min\ C$ e suponha que todo elemento de C menor do que y, ou seja, todo elemento do conjunto $D = \{z \in C : z < y\} = C \cap [0, y)$, pertença à imagem de ψ. Vamos mostrar que y também é imagem de algum elemento de ω_1.

Note que $\psi^{-1}[D]$ é um número ordinal enumerável. É enumerável porque D é enumerável e ψ é injetiva, é bem ordenado porque é subconjunto não vazio do ω_1 e é transitivo por causa da monotonicidade de ψ:

$$\beta \in \alpha \in \psi^{-1}[D] \Rightarrow \psi(\beta) < \psi(\alpha) < y \Rightarrow \beta \in \psi^{-1}[D].$$

Com respeito a ele, temos dois casos a considerar, ou $\psi^{-1}[D]$ é um ordinal limite, ou $\psi^{-1}[D]$ é um ordinal sucessor.

Se $\psi^{-1}[D]$ é um ordinal limite, temos

$$\psi(\psi^{-1}[D]) = \sup\{\psi(x) : x \in \psi^{-1}[D]\} = \sup\ D,$$

pois $D = \{\psi(x) : x \in \psi^{-1}[D]\}$. Por outro lado temos $\sup\ D \leqslant y$ (pois todo elemento de D é menor do que y). Se $\sup\ D = y$, então $y = \psi(\psi^{-1}[D])$ e acabou. Então suponha $\sup\ D < y$. Seja

$$y_1 = \psi(\psi^{-1}[D] + 1) = \min\ \{x \in C : x > \psi(\psi^{-1}[D])\} = \min\ \{x \in C : x > \sup\ D\},$$

por construção. Temos $y_1 \leqslant y$ pois $y > \sup\ D$, por hipótese, e y_1 é o menor elemento de C com essa propriedade. Se fosse $y_1 < y$, então teríamos $y_1 \in D$ pela definição de D e, portanto, teríamos $y_1 \leqslant \sup\ D$, o que contraria a definição de y_1 como sendo o menor elemento estritamente maior do que $\sup\ D$. Logo $y = y_1 = \psi(\psi^{-1}[D] + 1)$.

Se o $\psi^{-1}[D]$ é um ordinal sucessor $x_1 + 1$, então $\psi(\psi^{-1}[D]) = \min\{x \in C : x > \psi(x_1)\}$, que é justamente o y, pois $\psi(x_1)$ é o maior elemento de D, uma vez que x_1 é o maior elemento de $\psi^{-1}[D]$.

Logo, de qualquer forma, temos $y \in \operatorname{im} \psi$ como queríamos. □

Afirmação: *ψ é contínua.*

Solução. Como o ω_1 é primeiro enumerável, pela proposição 1.2.24, basta verificar que ψ preserva convergências. Seja, então, $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência que converge para um ordinal α. Se α é um ordinal sucessor, como $\{\alpha\}$ é um aberto em ω_1, existe um $n_0 \in \omega$ tal que $\alpha_n = \alpha$ para todo $n \geqslant n_0$ e temos $\psi(\alpha_n) = \psi(\alpha)$ para todo $n \geqslant n_0$. Se α é um ordinal limite, seja U uma vizinhança de $\psi(\alpha)$ em C. Existe um $\gamma < \psi(\alpha)$ tal que $(\gamma, \psi(\alpha)] \cap C \subset U$. Da definição de $\psi(\alpha)$, existe um $\xi < \alpha$ tal que $\psi(\xi) > \gamma$. E, da convergência $\alpha_n \to \alpha$, existe um $n_0 \in \omega$ tal que $\alpha \geqslant \alpha_n > \xi$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto, do fato de ψ ser crescente, segue $\gamma < \psi(\xi) < \psi(\alpha_n) \leqslant \psi(\alpha)$ para todo $n \geqslant n_0$. Logo $\psi(\alpha_n) \in U$ para todo $n \geqslant n_0$, ou seja, ψ é contínua como queríamos. □

Afirmação: *Por ser crescente, contínua e bijetiva, ψ é um homeomorfismo.*

Solução. Seja $U = (\alpha, \beta)$ um aberto básico em ω_1. Por ser crescente, temos $\psi[U] = (\psi(\alpha), \psi(\beta)) \cap C$. Logo ψ é aberta. □

■

Além dos clubs em ω_1, vamos mostrar também que ω_1-sequências cofinais, crescentes e *contínuas* são cópias homeomorfas do ω_1.

Definição 4.1.5 (Sequências Contínuas)**.** Dado um número ordinal λ, vamos chamar a sequência $\langle c_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ de contínua caso ela possua a seguinte propriedade de continuidade:

$$\text{se } \beta = \bigcup_{\nu<\gamma} \beta_\nu, \text{ então } c_\beta = \bigcup_{\nu<\gamma} c_{\beta_\nu}.$$

Dado um número ordinal α, sabemos que sempre podemos obter uma sequência estritamente crescente e cofinal em α. Na verdade, podemos fazer mais do que isso:

Proposição 4.1.6. Dado um número ordinal α de cofinalidade λ, existe uma sequência $\langle c_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ que, além de ser crescente e cofinal em α, é também contínua.

Demonstração. Seja $\langle \alpha_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ uma sequência cofinal e estritamente crescente em α. Por indução, basta definir a sequência $\langle c_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ por

- $c_0 = \alpha_0$;
- $c_{\xi+1} = \max\{\alpha_{\xi+1}, c_\xi + 1\}$, e;
- $c_\beta = \sup\{c_\xi : \xi < \beta\}$, se β é um ordinal limite.

Note que, se $\beta < \lambda = \operatorname{cf}(\alpha)$ é um ordinal limite, então a sequência $\langle c_\xi : \xi < \beta \rangle$ não pode ser cofinal em α, donde vem $c_\beta \in \alpha$. A cofinalidade da sequência $\langle \alpha_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ é "transmitida" para a sequência $\langle c_\xi : \xi \in \lambda \rangle$ através do segundo item e o terceiro item garante a continuidade desejada. Verificamos que $\xi < \eta \Rightarrow c_\xi < c_\eta$ por indução em η: Se η é um ordinal sucessor $\gamma+1$, então $\xi < \eta \Rightarrow \xi \leqslant \gamma \Rightarrow c_\xi \leqslant c_\gamma$ (pela hipótese de indução). Como $c_\eta = c_{\gamma+1} = \max\{\alpha_{\gamma+1}, c_\gamma + 1\} \geqslant c_\gamma + 1 > c_\gamma$, segue $c_\xi < c_\eta$. Se η é limite, então tome um γ menor do que η e maior do que o ξ. Pela hipótese de indução temos $c_\xi < c_\gamma$ e $c_\gamma \leqslant c_\eta$ por construção. Logo $c_\xi < c_\eta$ como queríamos. ■

Proposição 4.1.7. Seja α um ordinal de cofinalidade ω_1 e seja $\langle c_\xi : \xi \in \omega_1\rangle$ uma sequência estritamente crescente, contínua e cofinal em α. Seja c a função de ω_1 em α definida por $c(\xi) = c_\xi$ para todo $\xi \in \omega_1$. Então im $c = \{c_\xi : \xi \in \omega_1\} \cong \omega_1$.

Demonstração. O homeomorfismo entre ω_1 e im c é a própria função c. Não há problemas quanto sua injetividade e sobrejetividade. Vamos ver, então, que ela é aberta e contínua.

Afirmação: *c é aberta.*

Solução. Isso segue do fato de a sequência dada ser crescente. Dados $a, b \in \omega_1$, um aberto básico do ω_1 pode ser da forma (a, b) ou da forma $[0, a)$. Suas respectivas imagens $[(a, b)] = (c_a, c_b) \cap \text{im } c$ e $c[[0, a)] = [c_0, c_a) \cap \text{im } c = [0, c_a) \cap \text{im } c$ são todas abertas em im c como queríamos. □

Afirmação: *c é contínua.*

Solução. Dado o aberto básico $V = (a, b) \cap$ im c no espaço im c, com $a, b \in \alpha$, vamos mostrar que $c^{-1}[V]$ é aberto em ω_1. Em outras palavras, dado um $\beta \in c^{-1}[V]$, queremos um $\gamma \leqslant \beta$ tal que $a < c_\xi < b$ para todo ξ tal que $\gamma < \xi \leqslant \beta$. Se β é sucessor, então o próprio conjunto $\{\beta\}$ é uma vizinhança aberta de β contida em $c^{-1}[V]$. Se β é um ordinal limite, pela continuidade da sequência considerada, se $a < c_\beta < b$, então existe $\nu < \lambda$ tal que $a < c_{\beta_\nu} < c_\beta < b$, donde (lembrando que a sequência é crescente) seguirá $(\beta_\nu, \beta] \subset \psi^{-1}[V]$ e o γ procurado será este β_ν. Logo c é contínua. □

■

4.2 Os passos seguintes e uma generalização

Estamos agora em condições de generalizar o teorema 4.1.3 para qualquer ordinal α tal que $\omega_1 \leqslant \alpha < \omega_2$. O teorema abaixo, bem como seu corolário, foram tirados de Weiss (1990b).

Teorema 4.2.1. Se α é um ordinal de cardinalidade ω_1, então

$$\alpha \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}.$$

Demonstração. Vamos fazer essa demonstração por indução em $\alpha \geqslant \omega_1$. O primeiro passo ($\alpha = \omega_1$) já foi dado no teorema 4.1.3. Temos agora três, e somente três, casos a considerar, a saber quando o ordinal é sucessor, quando sua cofinalidade é enumerável ou quando sua cofinalidade é ω_1.

Caso sucessor. Seja $\beta + 1$ esse ordinal sucessor e suponha $\beta \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$. Vamos mostrar que

$$\beta + 1 \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}.$$

Por hipótese, seja $f : \beta \to \omega_1$ uma função tal que $f[H_1] = \omega_1$ qualquer que seja o $H_1 \subset \beta$ homeomorfo ao ω_1. Afirmamos que a única propriedade que uma função $g : \beta + 1 \to \omega_1$ precisa satisfazer para mostrar o resultado desejado é extender f. De fato, seja $g : \beta + 1 \to \omega_1$ uma função cuja restrição a β seja igual à f e seja $H \subset \beta + 1$ uma cópia do ω_1. Se $\beta \notin H$, então $H \subset \beta$ é uma cópia do ω_1 e $g[H] = f[H] = \omega_1$. Se $\beta \in H$, seja $\psi : H \to \omega_1$ um homeomorfismo e consideremos o elemento $\psi(\beta) \in \omega_1$. O conjunto $C = \omega_1 \setminus \psi(\beta)$ é um club em ω_1 e, portanto, pela proposição 4.1.4, é uma cópia do ω_1. Por outro lado, a imagem inversa $H_1 = \psi^{-1}[C]$ de C por ψ é uma cópia homeomorfa de C que não possui o β como elemento por construção. Agora $H_1 \subset \beta$ é uma cópia do ω_1, além de ser subconjunto do H. Logo $g[H] \supset g[H_1] = f[H_1] = \omega_1$ e o resultado segue do fato de $g[H]$ ser subconjunto de ω_1.

Uma outra forma de ver que o conjunto C obtido na construção acima é uma cópia do ω_1 é imitar a ideia do lema 3.1.6, no qual foi mostrado que um segmento final de um dado ordinal indecomponível é homeomorfo a este ordinal, e considerar a função que associa cada $x \in \omega_1$ ao $(\gamma+1)+x$, para um dado $\gamma < \omega_1$. Ela está bem definida porque $|(\gamma+1)+x| \leqslant \omega \ \forall x \in \omega_1$.

Cofinalidade enumerável. Seja α um ordinal limite de cofinalidade enumerável e suponha $\beta \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$ para todo $\omega_1 \leqslant \beta < \alpha$. Vamos mostrar que

$$\alpha \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}.$$

Seja $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência estritamente crescente e cofinal em α de elementos maiores ou iguais a ω_1. Por hipótese, para cada $n \in \omega$, existe uma função $f_n : \alpha_n \to \omega_1$ tal que se H é um subespaço de α_n homeomorfo ao ω_1, então $f_n[H] = \omega_1$. Note que podemos supor f_m a restrição de f_n a α_m se $m < n$, pois, se $m < n$, $H \subset \alpha_m$ e $H \cong \omega_1$, então $H \subset \alpha_n$ e $H \cong \omega_1$ (note que a topologia de H visto como subespaço de α_n é a mesma de H como subespaço de α_m), de modo que $f_m[H] = f_n[H] = \omega_1$ se f_m é a restrição de f_n a α_m. Assim, a função $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ de $\bigcup_{n\in\omega} \alpha_n = \alpha$ em ω_1 é a função procurada.

Para verificar isso, seja $H \subset \alpha$ uma cópia do ω_1. Afirmamos que o fato da cofinalidade do α ser enumerável implica na existência de um $n \in \omega$ tal que $H \subset \alpha_n$. Para este n, teremos $f[H] = f_n[H] = \omega_1$.

Suponha que não, isto é, suponha que, para todo $n \in \omega$, exista um elemento em H maior ou igual ao α_n. Seja $x_n = \min H \setminus \alpha_n$ o menor desses elementos. Os fatos de termos $\bigcup_{n\in\omega} \alpha_n = \alpha$, $\alpha_n \subset x_n$ e $x_n \subset \alpha$ para todo n implicam $\sup\{x_n : n \in \omega\} = \alpha$. Apesar de essa sequência não ser necessariamente estritamente crescente, para um dado x_n sempre podemos encontrar um $x_m > x_n$. Agora, raciocinando do mesmo modo como no lema 4.1.2 – em particular, quando mostramos que subespaços de ω_1 homeomorfos ao ω_1 são fechados em ω_1 na topologia da ordem –, concluímos que o supremo α dos x_n's pertence a H, o que não pode ocorrer se supormos $H \subset \alpha$. Portanto, existe um $n \in \omega$ tal que $H \subset \alpha_n$ como queríamos

Cofinalidade não enumerável. Seja α um ordinal limite de cofinalidade ω_1. Suponha

$$\beta \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1} \qquad \forall \omega_1 \leqslant \beta < \alpha.$$

Vamos mostrar que

$$\alpha \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$$

Já vimos como obter a sequência $\langle c_\beta : \beta \in \omega_1 \rangle$ estritamente crescente, contínua e cofinal em α, sequência essa que, por sua vez, é uma cópia do ω_1. Assim, fazendo $d = \{c_\beta : \beta \in \omega_1\}$, seja $g : d \to \omega_1$ uma função que atesta a afirmação $\omega_1 \not\to [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$.

Para cada $\omega_1 \leqslant \beta < \alpha$, particione o intervalo $I_{\beta+1} = (c_\beta, c_{\beta+1})$ usando a hipótese de indução

$$\beta \not\longrightarrow [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}.$$

do seguinte modo. Considere a família $\{f_\beta : \beta < \omega_1\}$ de funções $f_\beta : c_\beta \to \omega_1$ que atestam a negação $\beta \not\to [\text{top } \omega_1]^1_{\omega_1}$ e tais que, se $\beta < \gamma$, então a função f_β é a restrição da função f_γ a c_β, do mesmo modo como feito no caso em que a cofinalidade de α era enumerável. Em seguida, para cada $\beta \in \omega_1$, defina a função $g_{\beta+1}$ como a restrição de $f_{\beta+1}$ ao intervalo $I_{\beta+1}$.

Feito isso, defina a função f como sendo a união $g \cup \bigcup_{\beta \in \omega_1} g_{\beta+1}$. Afirmamos que esta é a função procurada. Seja $H \subset \alpha$, $H \cong \omega_1$. Se H é limitado em α, seja $\beta \in \omega_1$ tal que $H \subset c_{\beta+1}$. Se nenhum c_ξ pertence a H, então: $f[H] = (\bigcup_{\xi \leqslant \beta+1} g_\xi)[H] = f_{\beta+1}[H] = \omega_1$. Se algum c_ξ pertence a H, seja $\psi : H \to \omega_1$ um homeomorfismo. Seja y um elemento de ω_1 maior do que todos os elementos da forma $\psi(c_\xi)$ onde $c_\xi \in H$ (este y existe porque só existe, no máximo, uma quantia enumerável desses c_ξ). Olhe agora para o segmento final $\omega_1 \setminus y$. Já sabemos que ele é uma cópia do ω_1, de um modo que $H_1 = \psi^{-1}[\omega_1 \setminus y]$ como subespaço de H é também uma cópia do ω_1. Como a topologia de H_1 como subespaço de H é a mesma de H_1 como subespaço de $c_{\beta+1}$, temos H_1 uma cópia do ω_1 como subespaço de $c_{\beta+1}$. Além disso, nenhum dos c_ξ pertencem a H_1 uma vez que

$$c_\xi \in H_1 \Rightarrow \psi(c_\xi) \in \omega_1 \setminus y \Rightarrow \psi(c_\xi) \geqslant y.$$

Logo:

$$\omega_1 = f[H_1] \subset f[H] \subset \omega_1,$$

como queríamos.

Suponha agora que H é não limitado em α. Seja $H_1 = d \cap H$. Note o seguinte: tomando $\xi_n \in d$, $\eta_n \in H$ tais que $\xi_n < \eta_n < \xi_{n+1}$, se $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$ e $\eta = \sup\{\eta_n : n \in \omega\}$, então $\xi = \eta$, $\xi \in d$ (pela continuidade da sequência c) e $\eta \in H$, pelo mesmo argumento do lema 4.1.2. Isso mostra que H_1 é não limitado em α. Assim, podemos definir a função $\psi : \omega_1 \to H_1$ do mesmo modo como fizemos na proposição 4.1.4 quando mostramos que club's do ω_1 são cópias do ω_1 e concluir que H_1 como subespaço de d é também uma cópia do ω_1. Portanto,

$$\omega_1 \supset f[H] \supset f[H_1] = g[H_1] = \omega_1.$$

Logo, em qualquer um desses casos, se $H \subset \alpha$ é tal que $H \cong \omega_1$, então $f[H] = \omega_1$ como queríamos.

■

Corolário 4.2.2.

$$\alpha \not\longrightarrow (\text{top } \omega_1)^1_2,$$

se α é um ordinal de cardinalidade ω_1.

Demonstração. Pois, se $\{A_i : i < \omega_1\}$ é uma partição de cardinalidade ω_1 para α tal que $H \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \omega_1$ qualquer que seja o $H \subset \alpha$ homeomorfo ao ω_1, então $\{A_0, B_1\}$ com $B_1 = \bigcup\{A_i : 1 \leqslant i < \omega_1\}$ é uma partição com 2 elementos para α tal que nenhum de seus elementos contém uma cópia do ω_1. ■

No próximo teorema iremos ver que, assumindo $\diamondsuit$, podemos generalizar esse último corolário, trocando o ordinal α de cardinalidade ω_1 por um espaço regular de cardinalidade ω_1. Para este teorema iremos precisar do lema abaixo, cuja solução é devida à Ofelia Alas. Este lema é uma generalização dos argumentos vistos no lema 4.1.2 e no teorema 4.2.1.

Lema 4.2.3. Seja H um subconjunto de um espaço Hausdorff X e suponha H homeomorfo ao ω_1. Seja N um subconjunto enumerável de H. Então seu fecho $\text{cl}_X(N)$ em X está contido em H.

Demonstração. Seja $\psi : H \to \omega_1$ um homeomorfismo. O $\psi[N]$, sendo enumerável, é um conjunto limitado em ω_1, de modo que existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\psi[N] \subset \beta$, donde vem $\overline{\psi[N]} \subset \beta + 1$. Isso implica que $\overline{\psi[N]}$ é compacto porque $\beta + 1$ é compacto e $\overline{\psi[N]} = \overline{\psi[N]} \cap (\beta + 1)$ é fechado em $\beta+1$ (subconjuntos fechados de compactos são compactos). Agora temos o fechado $\mathrm{cl}_H(N)$ contido no compacto $\psi^{-1}[\overline{\psi[N]}]$ (porque ψ é homeomorfismo e $\overline{\psi[N]}$ é fechado). Disso segue que $\mathrm{cl}_H(N)$ é compacto em H e, portanto, em X também. Como X é Hausdorff, temos que $\mathrm{cl}_H(N)$ é fechado em X (compactos em Hausdorff são fechados). Vamos verificar agora que $\mathrm{cl}_H(N) = \mathrm{cl}_X(N)$. Sabemos que $\mathrm{cl}_H(N) = \mathrm{cl}_X(N) \cap H$, donde, em particular, vem $\mathrm{cl}_H(N) \subset \mathrm{cl}_X(N)$. Dado $x \in \mathrm{cl}_X(N)$ e um aberto U em X, basta mostrar que $U \cap \mathrm{cl}_H(N) \neq \emptyset$; daí seguirá que x pertence ao fecho de $\mathrm{cl}_H(N)$ em X e, portanto, a $\mathrm{cl}_H(N)$ (porque $\mathrm{cl}_H(N)$ é fechado em X). Da hipótese $x \in \mathrm{cl}_X(N)$, temos que $U \cap N \neq \emptyset$. Mas $U \cap N \subset U \cap \mathrm{cl}_H(N)$. Logo $\mathrm{cl}_X(N) = \mathrm{cl}_H(N)$ e $\mathrm{cl}_X(N) \subset H$ como queríamos. ■

O teorema seguinte pode ser encontrado em Weiss (1990b). Com as mesmas hipóteses e com algumas modificações na demonstração abaixo, Weiss e Komjáth (1987) mostram que o mesmo resultado vale caso o X fosse particionado em ω pedaços em vez de apenas 2.

Teorema 4.2.4. Assuma $\diamondsuit$. Para qualquer espaço regular X de cardinalidade ω_1 vale

$$X \not\longrightarrow (\text{top } \omega_1)^1_2.$$

Demonstração. Seja $\langle S_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ uma $\diamondsuit$-sequência (onde $S_\alpha \subset \alpha\ \forall \alpha \in \omega_1$) e vamos supor que o espaço topológico X em questão seja o ω_1 com uma topologia τ qualquer. Vamos construir a função $f : X \to 2$ (que mostra o resultado desejado) em estágios, construindo uma sequência $\langle f_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$, onde, para cada $\alpha \in \omega_1$, $f_\alpha : C_\alpha \to 2$ é uma função com domínio $C_\alpha \subset \omega_1$ tal que $\alpha \subset C_\alpha$ e $f_\eta \subset f_\xi$ se $\eta < \xi$ com $\eta, \xi \in \omega_1$.

Como passo inicial, sejam $f_0 = \emptyset$ e $C_0 = \emptyset$. Se α é um ordinal limite, sejam $f_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} f_\xi$ e $C_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} C_\xi$. Construída uma $f_\alpha : C_\alpha \to 2$, para construir a $f_{\alpha+1} : C_{\alpha+1} \to 2$, olhamos se existe um $\beta \geqslant \alpha$ tal que $\beta \in \overline{S_\alpha}$ e $\beta \notin C_\alpha$. Se sim, então fazemos o seguinte: se $f_\alpha[S_\alpha] = \{0\}$, então $f_{\alpha+1}(\beta) = 1$; se $f_\alpha[S_\alpha] = \{1\}$, então $f_{\alpha+1}(\beta) = 0$ e; se $f_\alpha[S_\alpha] = 2 = \{0,1\}$, então $f_{\alpha+1}(\beta) = 0$. Além disso, se $\alpha \notin C_\alpha$ e se este α não é um tal β nestas condições, então $f_{\alpha+1}(\alpha) = 0$. Feita essa construção, definimos $f = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f_\alpha$.

Vamos mostrar agora que essa construção funciona. Para isso, seja S um subconjunto de X homeomorfo ao ω_1 (com a topologia da ordem). Suponhamos as seguintes afirmações (posteriormente vamos mostrar que elas são verdadeiras):

1. O conjunto $B = \{\alpha \in \omega_1 : S \cap \alpha \text{ é aberto em S}\}$ é um club;

2. O conjunto $C = \{\gamma \in \omega_1 : \gamma \text{ é ponto de acumulação de } B \text{ na topologia da ordem de } \omega_1\}$ é um club;

3. Se $\gamma \in C$, então $S \cap \gamma$ não é fechado em S, e;

4. O conjunto $D = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha \text{ é limite e } \alpha = C_\alpha\}$ é um club.

Como estamos supondo o princípio diamante, pelas afirmações 1, 2 e 4, temos que o conjunto

$$E = \{\alpha \in \omega_1 : S_\alpha = S \cap \alpha\} \cap B \cap C \cap D$$

é estacionário. Em particular ele é não limitado, donde segue $S = \bigcup_{\alpha \in E} S_\alpha$, pois

$$\bigcup_{\alpha \in E} S_\alpha = \bigcup_{\alpha \in E} S \cap \alpha = S \cap \bigcup_{\alpha \in E} \alpha = S \cap \omega_1 = S.$$

Dado um $\alpha \in E$, pela afirmação 3, existe um $\beta_\alpha \in \overline{S_\alpha} \setminus S_\alpha$. Este $\beta_\alpha \in S$, pois S, sendo uma cópia de ω_1 (com a topologia da ordem), contém os fechos de seus subconjuntos enumeráveis pelo lema anterior (lembrando que $S_\alpha \subset \alpha$). Assim, de $\beta_\alpha \notin S_\alpha$ e $S_\alpha = S \cap \alpha$, segue $\beta_\alpha \geqslant \alpha$. Com $\alpha = C_\alpha$ vem também $\beta_\alpha \notin C_\alpha$. Se $f_\alpha[S_\alpha] = 2$, então $f[S] = 2$ e não há nada a fazer. Se $f_\alpha[S_\alpha] = \{0\}$, então, por construção, $f(\beta_\alpha) = 1$. Analogamente $f_\alpha[S_\alpha] = \{1\} \Rightarrow f(\beta_\alpha) = 0$. De qualquer forma temos $f[S] = 2$ como queríamos.

Para completar a demonstração só falta, então, justificar as afirmações acima.

Afirmação: *O conjunto $B = \{\alpha \in \omega_1 : S \cap \alpha$ é aberto em $S\}$ é um club.*

Solução. Ele é fechado porque se $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência crescente de elementos de B e $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$, então

$$S \cap \alpha = S \cap \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n = \bigcup_{n \in \omega} S \cap \alpha_n$$

é aberto em S já que uma reunião qualquer de abertos é aberta.

Vamos supor agora que B seja limitado. Isto é, que existe um $\xi \in \omega_1$ tal que, se $\alpha \geqslant \xi$, então $S \cap \alpha$ não é aberto, ou seja, $\mathrm{int}(S \cap \alpha) \subsetneq S \cap \alpha$. Seja x_α o menor elemento de $(S \cap \alpha) \setminus (\mathrm{int}(S \cap \alpha))$ e seja U_α uma vizinhança (em S) enumerável (ela existe porque S é localmente enumerável[1]). Então existe um $y \in U_\alpha$ tal que $y \geqslant \alpha$, e portanto $\alpha \leqslant \sup U_\alpha$.

Temos, então, uma função regressiva $\alpha \mapsto x_\alpha$ (pois $x_\alpha \in \alpha$) definida no estacionário $\omega_1 \setminus \xi$. Então, pelo lema 1.1.32 do Pressing-Down, ela é constante em algum $T \subset \omega_1 \setminus \xi$ não limitado. Isto é, existe um $x \in S$ tal que $\alpha \mapsto x \; \forall \alpha \in T$. Seja U uma vizinhança enumerável de x. Ela é tal que $U \not\subset S \cap \alpha \; \forall \alpha \in T$ e, então, $\alpha \leqslant \sup U \; \forall \alpha \in T$. Mas $|U| \leqslant \omega \Rightarrow \sup U \in \omega_1$. Portanto T é limitado, absurdo. Logo B não é limitado. □

Afirmação: *O conjunto $C = \{\gamma \in \omega_1 : \gamma$ é ponto de acumulação de B na topologia da ordem de $\omega_1\}$ é um club.*

Solução. Dado um $\xi \in \omega_1$, como B é não limitado, seja α_0 um elemento de B maior do que o ξ. Ainda usando a não limitação de B, obtemos uma sequência $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ crescente de elementos de B. Seu supremo α é um elemento de C e é tal que $\alpha > \xi$. Portanto C é não limitado.

Para ver que C é fechado sejam $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ elementos de C e α o supremo desses elementos. Como ω_1 (com a ordem) é primeiro enumerável, para cada $i \in \omega$, existe uma sequência $\langle \alpha_n^i : n \in \omega \rangle$ crescente de elementos de B tal que $\sup\{\alpha_n^i : n \in \omega\} = \alpha_i$. Disso obtemos uma nova sequência $\alpha_0^0 < \alpha_{i_1}^1 < \alpha_{i_2}^2 < \cdots$ de elementos de B que também converge para α. Logo $\alpha \in C$ como queríamos. □

Afirmação: *Se $\gamma \in C$, então $S \cap \gamma$ é não compacto em S e, portanto, não fechado em S.*

Solução. Fixado o $\gamma \in C$, seja $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência crescente de elementos de B que converge

[1]Lembre que é localmente enumerável um espaço no qual cada um de seus elementos admite uma vizinhança enumerável.

para γ. Pela definição do conjunto B, todo $S \cap \alpha_n$ é aberto em S. Além disso, temos

$$\bigcup_{n\in\omega} S \cap \alpha_n = S \cap \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n = S \cap \gamma,$$

de modo que $\{S\cap\alpha_n : n \in \omega\}$ é uma cobertura aberta para $S\cap\gamma$ que não admite uma subcobertura finita por causa da convergência sup $\{\alpha_n : n \in \omega\} = \gamma$. Portanto $S \cap \gamma$ é não compacto em S.

Vejamos agora que o fato de ser não compacto implica ser não fechado em S. Seja $\psi : S \to \omega_1$ um homeomorfismo. Agora $\psi[S\cap\gamma]$ é não compacto em ω_1 (pois $\psi[S\cap\gamma]$ compacto e ψ^{-1} contínua implicaria $S \cap \gamma$ compacto em S). Além disso, como γ é enumerável, $\psi[S \cap \gamma]$ é enumerável e, portanto, limitado em ω_1. Seja, então, o compacto $\xi + 1 \in \omega_1$ tal que

$$\psi[S \cap \gamma] \subset \xi + 1.$$

Seja $F = \psi[S \cap \gamma]$. Se $S \cap \gamma$ fosse fechado em S, então F seria fechado em ω_1. Se F é fechado em ω_1, então F é fechado em $\xi + 1$ pois $F = F \cap \xi + 1$. Agora F é fechado no compacto $\xi + 1$, donde segue F compacto em $\xi + 1$ e em ω_1. Mas já tínhamos visto que F é não compacto em ω_1. Logo, $S \cap \gamma$ é não fechado como queríamos. □

Afirmação: *O conjunto* $D = \{\alpha \in \omega_1 : \alpha$ *é limite e* $\alpha = C_\alpha\}$ *é um club.*

Solução. Dada uma sequência crescente $\langle\alpha_n : n \in \omega\rangle$ de elementos de D, seja α seu limite. A primeira igualdade abaixo vale por construção. As segunda e a terceira por hipótese.

$$C_\alpha = \bigcup_{n\in\omega} C_{\alpha_n} = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n = \alpha.$$

Logo, D é fechado.

Para ver agora que D é não limitado, vamos ver que ele contém um conjunto não limitado. De fato ele vai conter um club. Considere a função finitária[2] $g : \omega_1 \to \omega_1$ definida por $g(\alpha) = \sup C_\alpha$ para todo α não nulo e $g(0) = 0$. Por indução e pelo fato de termos $\overline{S_\alpha} \subset \alpha + 1$, note que g está bem definida. A proposição 1.1.27 nos dizia que um conjunto de cardinais fechados sob uma família de funções finitárias é um club. Dessa proposição, considerando a família $\mathcal{A} = \{g\}$, concluímos que o conjunto de todos os α's tais que $g[\alpha] \subset \alpha$ é um club em ω_1. Isto é, o conjunto de todos os α's tais que $\sup C_\xi \in \alpha\ \forall\xi \in \alpha$ é um club. Em particular, se α é um elemento desse club, então $C_\xi \subset \alpha$ $\forall\xi \in \alpha$. Se, além disso, α é um ordinal limite, então $C_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} C_\xi$. Assim, se $\alpha < \omega_1$ é um ordinal limite fechado pela função g, então $C_\alpha \subset \alpha$. Lembrando que $\alpha \subset C_\alpha$ por construção, temos, então, que $\alpha = C_\alpha$. Logo $\alpha \in D$ como queríamos. □

■

4.3 Três resultados positivos

Na seção anterior vimos relações negativas do tipo $X \not\longrightarrow (\text{top } \omega_1)^1_2$. Nesta iremos ver espaços X que tornam essa relação positiva. Isso vai ser conseguido supondo um axioma conhecido como SPFA (do inglês *semi-proper forcing axiom*). Usando a noção de *forcing*, tal axioma diz que se

[2]Lembre que é uma função finitária sobre um conjunto A qualquer elemento de A ou qualquer função f da forma $f : A^n \to A$ para algum n natural não nulo.

P é um conjunto parcialmente ordenado que *preserva* os subconjuntos estacionários do ω_1 e se $\mathcal{D}$ é uma família de densos em P tal que $|\mathcal{D}| \leqslant \omega_1$, então existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P. Em outras palavras, podemos obter o enunciado do SPFA trocando a hipótese ccc do axioma MA_{ω_1} pela hipótese de preservar subconjuntos estacionários do ω_1.

Com o uso do SPFA, Shelah (1982) mostra a relação de partição positiva

$$\omega_2 \longrightarrow (\mathrm{top}\ \omega_1)^1_2.$$

Segundo Weiss (1990b) também é de Shelah o fato de que SPFA implica a seguinte afirmação

> $(*)$ Se o conjunto $[\omega_2]^\omega$ é particionado em dois pedaços, então um desses pedaços contém uma família $\mathcal{S} = \{S_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que $S_\alpha \subsetneq S_\beta$ para $\alpha < \beta$ e $S_\beta = \bigcup\{S_\alpha : \alpha < \beta\}$ caso β seja um ordinal limite.

Vamos nos referir à ela como propriedade $(*)$. Nos teoremas 4.3.1 e 4.3.4 vamos ver que a propriedade $(*)$ implica as relações positivas $2^{\omega_1} \longrightarrow (\mathrm{top}\ \omega_1)^1_2$ e $\sum_{\omega_2} \longrightarrow (\mathrm{top}\ \omega_1)^1_2$.

O teorema abaixo é parte do teorema 2.12 de Weiss (1990b). Segundo esse mesmo artigo, a ideia da solução que iremos apresentar aqui, considerando a função ψ que será construída, é devida a Velickovic. A ideia da demonstração de que ψ é injetiva foi tirada de Homayouni (1997).

Teorema 4.3.1. Se vale a propriedade $(*)$, então vale a relação

$$2^{\omega_1} \longrightarrow (\mathrm{top}\ \omega_1)^1_2.$$

Demonstração. Nesta demonstração vamos construir uma função injetiva

$$\phi : [\omega_2]^\omega \longrightarrow 2^{\omega_1}.$$

Se $\{A_1, A_2\}$ é uma partição de 2^{ω_1}, então $\{\phi^{-1}[A_1], \phi^{-1}[A_2]\}$ é uma partição para $[\omega_2]^\omega$ em dois pedaços. Daí, por hipótese, para algum $i \in \{1, 2\}$, teremos uma família $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subset \phi^{-1}[A_i]$ e, portanto, $\phi[\mathcal{S}] \subset A_i$. A nossa ϕ construída será tal que $\phi[\mathcal{S}] \cong \omega_1$ e a demonstração terá acabado. Vamos, então, construir essa ϕ de tal modo que ela seja injetiva e satisfaça $\phi[\mathcal{S}] \cong \omega_1$.

<u>Construção da ϕ</u>. Vamos primeiro construir uma função injetiva $\psi : [\omega_2]^\omega \to \mathcal{P}(\omega_1)$. Feito isso, iremos definir ϕ por $\phi(X) = \chi_{\psi(X)}$ para todo $X \in [\omega_2]^\omega$, onde $\chi_{\psi(X)}$ é a função característica de $\psi(X)$. A injetividade de ϕ virá do fato de ψ ser injetiva. Além disso ψ será tal que $\psi(X) \subset \psi(Y)$ caso $X \subset Y$.

Pelo teorema 1.1.36, seja $\{A_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ uma família a.d. de subconjuntos de ω_1, isto é, $A_\alpha \in [\omega_1]^{\omega_1}$ $\forall \alpha \in \omega_2$ e $|A_\alpha \cap A_\beta| \leqslant \omega$ se α e β são elementos distintos de ω_2. Com o auxílio dessa família, vamos definir

$$\psi : [\omega_2]^\omega \longrightarrow \mathcal{P}(\omega_1)$$

por

$$\psi(X) = \bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha \qquad \forall X \in [\omega_2]^\omega.$$

Essa ψ é, então, uma reunião enumerável. Em outras palavras, $\phi(X)$ é a função característica do conjunto $\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha$.

<u>Afirmação</u>: *A ψ é injetiva e preserva as inclusões.*

Solução. Que ψ preserva as inclusões é imediato: $\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in Y} A_\alpha$ se $X \subset Y$. Para a injetividade, vamos usar mais hipóteses, a saber que $|X| = \omega$ $\forall X \in [\omega_2]^\omega$, $|A_\alpha| = \omega_1$ e $|A_\alpha \cap A_\beta| \leqslant \omega$ para $\alpha, \beta \in \omega_2$ distintos.

Tome $X \in [\omega_2]^\omega$. Para $\alpha \in \omega_2 \setminus X$ temos $|A_\alpha \cap A_\gamma| \leqslant \omega$ $\forall \gamma \in X$ (pois $\gamma \neq \alpha$ $\forall \gamma \in X$). Assim, como X é enumerável,

$$|\bigcup_{\gamma \in X} (A_\alpha \cap A_\gamma)| = |A_\alpha \cap (\bigcup_{\gamma \in X} A_\gamma)| \leqslant \omega.$$

Portanto, como $|A_\alpha| = \omega_1$, segue

$$|A_\alpha \setminus \bigcup_{\gamma \in X} A_\gamma| = |A_\alpha \setminus (A_\alpha \cap (\bigcup_{\gamma \in X} A_\gamma))| = \omega_1,$$

pois estamos tirando um conjunto no máximo enumerável do não enumerável A_α. Assim, dados $X, Y \in [\omega_2]^\omega$ distintos, sem perda de generalidade, vamos supor que exista $\alpha \in Y \setminus X$. Por um lado, como $\alpha \notin X$, pelo que acabamos de ver, temos $|A_\alpha \setminus \psi(X)| = \omega_1$. Por outro, como $\alpha \in Y$, temos $A_\alpha \setminus \psi(X) \subset \psi(Y) \setminus \psi(X)$. Portanto, em particular, segue $\psi(Y) \setminus \psi(X) \neq \emptyset$. Logo ψ é injetiva como queríamos. $\square$

Afirmação: *O conjunto $\phi[\mathcal{S}]$ é homeomorfo ao ω_1.*

Solução. O homeomorfismo é simplesmente a função que associa cada α do ω_1 ao $\phi(S_\alpha) \in 2^{\omega_1}$.

Vamos começar mostrando que a função considerada é contínua. Seja U um aberto básico do 2^{ω_1} e seja

$$U \cap \phi[\mathcal{S}] = \{\phi(S_\alpha) : \phi(S_\alpha) \in U\}$$

um aberto básico do $\phi[\mathcal{S}]$ não vazio. Fixemos um $\phi(S_\alpha) \in U$ e suponhamos que α seja um ordinal limite. Queremos um $\beta < \alpha$ tal que $\phi(S_\xi) \in U$ para todo ξ tal que $\beta < \xi \leqslant \alpha$ (se α é sucessor, não há nada a fazer porque $\{\alpha\}$ é aberto em ω_1).

Já sabemos que existe um subconjunto $F \subset \omega_1$ finito tal que $\phi(S_\xi) \in U \iff \phi(S_\xi)|_F = \phi(S_\alpha)|_F$. Seja $F = \{\delta_1, \dots \delta_n\}$ esse conjunto. Observando que se $A \subset B \subset \omega_1$, então as funções características de A e de B coincidem apenas dentro de A e fora de B, basta encontrar um $\beta < \alpha$ tal que $\phi(S_\beta)|_F = \phi(S_\alpha)|_F$, porque, se $\beta < \gamma \leqslant \alpha$, então $\psi(S_\beta) \subset \psi(S_\gamma) \subset \psi(S_\alpha)$ e se $\phi(S_\beta)|_F = \phi(S_\alpha)|_F$, então

$$F \cap (\psi(S_\alpha) \setminus \psi(S_\beta)) = \emptyset.$$

Assim, de $\phi(S_\gamma)(x) = \phi(S_\alpha)(x)$ $\forall x \in F \cap \psi(S_\beta)$ e $\phi(S_\gamma)(x) = \phi(S_\alpha)(x)$ $\forall x \in F \cap (\omega_1 \setminus \psi(S_\alpha))$ segue $\phi(S_\gamma)(x) = \phi(S_\alpha)(x)$ $\forall x \in F$ (pois $x \in F \Rightarrow x \in \psi(S_\beta) \subset \psi(S_\gamma)$ ou $x \notin \psi(S_\alpha)$).

Ainda pela observação acima, se existe $\beta < \alpha$ tal que $F \subset \psi(S_\beta)$ ou, se $F \cap \psi(S_\alpha) = \emptyset$, então teremos acabado. Então vamos supor, sem perda de generalidade, $F \subset \psi(S_\alpha) = \bigcup_{\xi \in S_\alpha} A_\xi$ (sem perda de generalidade porque $\phi(S_\alpha)(x) = \phi(S_\beta)(x)$ $\forall x \notin \psi(S_\alpha)$ $\forall \beta < \alpha$).

Temos, então, o seguinte. Cada δ_i do F pertence a A_{ξ_i} para algum $\xi_i \in S_\alpha$ que, por sua vez, é $S_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$ por hipótese, de modo que cada $\xi_i \in S_{\beta_i}$ para algum $\beta_i < \alpha$. Disso segue

$$F \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (\bigcup_{\xi \in S_{\beta_i}} A_\xi) \subset \bigcup_{\xi \in S_\beta} A_\xi,$$

onde $\beta = \max\{\beta_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} < \alpha$ é o β procurado. Isso mostra a continuidade da função considerada.

Vamos ver agora que ela é aberta. Primeiro vamos mostrar que $\phi(S_{\alpha+1})$ é um ponto isolado do $\phi[\mathcal{S}]$ e depois estudar o caso $\phi(S_\alpha)$ em que α é um ordinal limite.

Vamos construir o aberto básico U de 2^{ω_1} tal que se $\phi(S_\xi) \in U$, então $\xi = \alpha + 1$. Como $S_\alpha \subsetneq S_{\alpha+1} \subsetneq S_{\alpha+2}$, ψ é injetiva e preserva inclusões, basta tomar

$$x \in \psi(S_{\alpha+2}) \setminus \psi(S_{\alpha+1}) \qquad \text{e} \qquad y \in \psi(S_{\alpha+1}) \setminus \psi(S_\alpha)$$

e definir $U = \prod_{i \in \omega_1} U_i$ por $U_x = \{0\}$, $U_y = \{1\}$ e $U_i = 2 \ \forall i \in \omega_1 \setminus \{x, y\}$ (note que $x \neq y$ pois $y \in \psi(S_{\alpha+1})$ e $x \notin \psi(S_{\alpha+1})$). Para este U temos que, $\forall \xi \in \omega_1$,

$$\phi(S_\xi) \in U \Longrightarrow \phi(S_\xi)(x) = 0 \text{ e } \phi(S_\xi)(y) = 1 \Longrightarrow x \notin \psi(S_\xi) \text{ e } y \in \psi(S_\xi).$$

Isso implica $\xi = \alpha + 1$, pois

$$\xi \geqslant \alpha + 2 \Longrightarrow \psi(S_{\alpha+2}) \subset \psi(S_\xi) \Longrightarrow x \in \psi(S_\xi), \text{ e}$$

$$\xi \leqslant \alpha \Longrightarrow \psi(S_\xi) \subset \psi(S_\alpha) \Longrightarrow y \notin \psi(S_\xi).$$

Vamos supor agora o α do $\phi(S_\alpha)$ um ordinal limite. Dados um aberto básico V do ω_1 e um $\phi(S_\alpha)$ tal que $\alpha \in V$ queremos um aberto U do 2^{ω_1} tal que $\phi(S_\alpha) \in U$ e valha a implicação

$$\phi(S_\xi) \in U \Longrightarrow \xi \in V.$$

Como α é um ordinal limite, podemos supor V um intervalo da forma $[\beta, \alpha]$ para algum $\beta < \alpha$. Então este U deverá ser construído de modo a não possuir como elemento nenhum $\phi(S_\xi)$ para $\xi > \alpha$ ou $\xi < \beta$.

Vamos ver que condição o U precisa satisfazer para não conter nenhum $\phi(S_\xi)$ com $\xi > \alpha$. Por exemplo, para $\alpha + 1$, tomemos $x_0 = \min \psi(S_{\alpha+1}) \setminus \psi(S_\alpha)$. Daí, se o x_0-ésimo fator de U for $\{\phi(S_\alpha)(x_0)\} = \{0\}$, como $\phi(S_\xi)(x_0) = 1 \ \forall \xi \geqslant \alpha + 1$ e $\phi(S_\alpha)(x_0) = 0$, teremos $\phi(S_\xi) \notin U$.

Para que tenhamos $\phi(S_\xi) \notin U$ para todo $\xi < \beta$ observemos o seguinte. Temos $S_\beta \subsetneq S_\alpha$ de modo que existe $x \in \psi(S_\alpha) \setminus \psi(S_\beta)$. Se o x-ésimo fator de U for $\{\phi(S_\alpha)(x)\} = \{1\}$ e, se $\phi(S_\xi) \in U$, então $\phi(S_\xi)(x) = 1$. Portanto, $x \in \psi(S_\xi)$. Por outro lado $x \notin \psi(S_\beta)$ e vai seguir $\psi(S_\beta) \subsetneq \psi(S_\xi)$, donde vem $\beta < \xi$.

Logo, para termos a implicação desejada, basta que $U = \prod_{i \in \omega_1} U_i$ seja tal que $U_y = \{\phi(S_\alpha)(y)\} = \{0\}$ para um fixado $y \in \psi(S_{\alpha+1}) \setminus \psi(S_\alpha)$ e $U_x = \{\phi(S_\alpha)(x)\} = \{1\}$ para um fixado $x \in \psi(S_\alpha) \setminus \psi(S_\beta)$. $\square$

$\blacksquare$

Observação. Em Homayouni (1997) podemos encontrar mais aplicações da função ϕ construída acima. Lá, ela foi usada, por exemplo, para construir cópias homeomorfas do ω_1 em 2^{ω_1} e do espaço $B(\omega_1)$, o espaço de Baire ω_1^ω (com a topologia produto, e ω_1 com a topologia discreta) de peso ω_1. Essas últimas vão ser imagens por ϕ de um certo espaço que, por sua vez, é construído utilizando submodelos elementares.

Weiss (1990b) observa que no teorema anterior podemos trocar o 2^{ω_1} pelo $\sum$*-produto de* 2^{ω_2}, conforme iremos definir a seguir.

Definição 4.3.2 (Suporte de uma função)**.** Dados um cardinal κ, vamos definir o suporte de uma função $f \in 2^\kappa$ como o conjunto de todos os elementos $\alpha \in \kappa$ tais que $f(\alpha) \neq 0$. Vamos denotar esse conjunto por $\mathrm{supp}(f)$. Ou seja:

$$\mathrm{supp}(f) = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = 1\}.$$

Definição 4.3.3 ($\sum$-produto)**.** Dado um cardinal κ vamos definir o $\sum$-produto de 2^κ como o subespaço de 2^κ de todas aquelas $f \in 2^\kappa$ cujo suporte é no máximo enumerável. Vamos denotar este espaço por $\sum_\kappa$. Em outras palavras

$$\textstyle\sum_\kappa = \{f \in 2^\kappa : |\mathrm{supp}(f)| \leqslant \omega\}.$$

Note que cada $f \in 2^\kappa$ é a função característica de $\mathrm{supp}(f)$, isto é, $f = \chi_{\mathrm{supp}(f)}$ e, reciprocamente, $\mathrm{supp}(\chi_A) = A \ \forall A \subset \kappa$. Então podemos reescrever

$$\textstyle\sum_\kappa = \{\chi_A \in 2^\kappa : |A| \leqslant \omega\}.$$

Teorema 4.3.4. Se vale a propriedade $(*)$, então vale a relação

$$\textstyle\sum_{\omega_2} \longrightarrow (\mathrm{top}\ \omega_1)^1_2.$$

Demonstração. Seja $\{A_1, A_2\}$ uma partição para $\sum_{\omega_2}$. Se $f \in \sum_{\omega_2}$, então $f \in A_i$ para algum $i \in 2$. Esta f satisfaz $\mathrm{supp}(f) \in [\omega_2]^{\leqslant\omega}$. Então vamos particionar $[\omega_2]^{\leqslant\omega} = B_1 \cup B_2$, definindo $B_i = \{\mathrm{supp}(f) : f \in A_i\}$ para cada $i \in 2$, pois, se $A \in [\omega_2]^{\leqslant\omega}$, então $A = \mathrm{supp}(f)$ para alguma $f \in \sum_{\omega_2}$, a saber para $f = \chi_A$. Assim, se $\chi_A \in A_i$, então $A \in B_i$. A interseção $B_1 \cap B_2$ é vazia, porque, se $A = \mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g)$, então $f = g$ (já que $f(x) = 0\, \forall x \in \omega_2 \setminus \mathrm{supp}(f)$). Claramente isso determina uma partição $[\omega_2]^\omega = B'_1 \cup B'_2$, com $B'_1 = B_1 \cap [\omega_2]^\omega$ e $B'_2 = B_2 \cap [\omega_2]^\omega$.

Portanto, se vale a referida propriedade, então $\mathcal{S}$ está contido em B'_i para algum $i \in 2$, isto é, $\mathcal{S} \subset B_i$, já que $B'_i \subset B_i$ por construção. A mesma demonstração do teorema 4.3.1 anterior serve para mostrar que

$$\{\chi_{S_\alpha} : \alpha \in \omega_1\} \cong \omega_1,$$

onde $\{\chi_{S_\alpha} : \alpha \in \omega_1\} \subset A_i$ como queríamos. ■

4.4 O Cubo de Cantor

Segundo Homayouni (1997), talvez um dos resultados mais antigos do Cálculo das Partições para Espaços Topológicos seja um de 1908 devido a Bernstein. Este resultado afirma a existência de um modo de particionar a reta real em dois pedaços de uma tal forma que nenhum desses dois pedaços contenha uma cópia do conjunto de Cantor. Lembrando que o conjunto de Cantor e o cubo de Cantor 2^ω são indistinguivéis do ponto de vista topológico (teorema 1.3.2), em outras palavras, o que o Bernstein nos diz está expresso no teorema 4.4.1 abaixo. A ideia da demonstração que iremos apresentar para este teorema foi tirada de Homayouni (1997).

Teorema 4.4.1. [Bernstein]

$$\mathbb{R} \not\longrightarrow (\mathrm{top}\ 2^\omega)^1_2.$$

Demonstração. Seja $\{Y_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ uma enumeração sem repetições de todos os subespaços de $\mathbb{R}$ homeomorfos ao 2^ω. Como 2^ω é separável (corolário 1.3.5), para cada $\alpha \in \kappa$, fixe um $D_\alpha \subset Y_\alpha$ enumerável e denso em Y_α. Pelo teorema 1.2.37 de Tychonoff, 2^ω é compacto. Usando esse fato e o fato de $\mathbb{R}$ ser Hausdorff, temos que cada Y_α é fechado em $\mathbb{R}$, pois imagens contínuas de compactos são compactas e compactos em Hausdorff são fechados. Com isso, e pela regularidade de $\mathbb{R}$, teremos a injetividade da associação $\alpha \mapsto D_\alpha$. De fato, se $\alpha \neq \beta$, então, por hipótese, $Y_\alpha \neq Y_\beta$. Suponha sem perda de generalidade que exista um $x \in Y_\beta \setminus Y_\alpha$. Como Y_α é fechado em $\mathbb{R}$ e $x \notin Y_\alpha$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}$ disjunta de Y_α. Por causa do x temos $U \cap Y_\beta \neq \emptyset$; assim, pela densidade de D_β em Y_β, existe um $y \in (U \cap Y_\beta) \cap D_\beta$. Por um lado $y \in D_\beta$ e, por outro, $y \in U \Rightarrow y \notin Y_\alpha \Rightarrow y \notin D_\alpha$. Logo $D_\alpha \neq D_\beta$ como queríamos. Podemos concluir, então, que $|\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\}| = \kappa$. Como $\{D_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subset [\mathbb{R}]^\omega$, segue $\kappa \leqslant |[\mathbb{R}]^\omega| = \mathfrak{c}$. Portanto $|Y_\alpha| \geqslant \kappa$ para todo $\alpha \in \kappa$. A conclusão agora vem da

Afirmação: *Fixados os espaços X e Y, se $\{Y_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ é a coleção de todos os subespaços de X homeomorfos ao Y e se $|Y_\alpha| \geqslant \kappa$ para todo $\alpha \in \kappa$, então*

$$X \not\longrightarrow (top\ Y)^1_2.$$

Solução. Por indução, fixado um $\alpha \in \kappa$, tome

$$\{x^0_\alpha, x^1_\alpha\} \subset Y_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \{x^0_\beta, x^1_\beta\}.$$

Isso pode ser feito porque $\alpha \in \kappa \Rightarrow |\alpha| < \kappa$ e, daí, $|\bigcup_{\beta<\alpha}\{x^0_\beta, x^1_\beta\}| < \kappa \leqslant |Y_\alpha|$. Construídos esses x^i_α, a única condição que a função $f : X \to 2$ precisa satisfazer para atestar o resultado desejado é $f(x^i_\alpha) = i\ \forall \alpha \in \kappa, \forall i \in 2$. $\square$

$\blacksquare$

Em 1990, utilizando o *princípio quadrado*, Weiss estende esse resultado no teorema 4.4.3, o qual iremos apenas enunciar. Sua demonstração pode ser encontrada em Weiss (1990b).

Definição 4.4.2 (O princípio $\square_\lambda$)**.** Dado um número cardinal λ, o princípio $\square_\lambda$ é a seguinte afirmação: Existe uma sequência $\langle C_\alpha : \alpha < \lambda^+$ e α limite$\rangle$ (onde λ^+ é o cardinal sucessor de λ) tal que:

- Cada C_α é um club em α;
- Se $\mathrm{cf}(\alpha) < \lambda$, então $|C_\alpha| < \lambda$;
- Se β é um ponto de acumulação de C_α, então $C_\beta = \beta \cap C_\alpha$.

Teorema 4.4.3. Suponha que X seja um espaço regular cuja cardinalidade $|X|$ satisfaça a seguinte propriedade: $\lambda^\omega \leqslant \lambda^+$ e $\square_\lambda$ é verdadeiro para todo cardinal λ tal que $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ e $2^\omega < \lambda < |X|$. Então $X \not\longrightarrow (\mathrm{top}\ 2^\omega)^1_2$.

Nesta seção iremos ver outros resultados envolvendo cópias de um dado κ-cubo de Cantor e relações de partições. O primeiro deles vai ser obtido como corolário do teorema abaixo, o qual nos dá um subespaço de 2^κ homeomorfo ao 2^ω.

Teorema 4.4.4. Seja dado um cardinal κ. Se $\{A_i : i \in \omega\} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ é uma família de elementos dois a dois disjuntos, então $\{\chi_{A_I} : I \in \mathcal{P}(\omega)\}$ e 2^ω são homeomorfos, onde

$$A_I = \bigcup_{i \in I} A_i \subset \kappa \qquad \forall I \in \mathcal{P}(\omega)$$

e, dado $A \subset \kappa$, χ_A é a função característica de A definida por $\chi_A[A] = \{1\}$ e $\chi_A[\kappa \setminus A] = \{0\}$.

Demonstração. Dada $f \in 2^\omega$, fazendo $I = f^{-1}[\{1\}]$, o homeomorfismo entre 2^ω e $\{\chi_{A_I} : I \in \mathcal{P}(\omega)\}$ é dado por

$$f \longmapsto \chi_{A_I}.$$

Para ver que essa associação é bijetiva basta ver que a função que associa cada χ_{A_I} à função característica $\chi_I \in 2^\omega$ de I é a sua inversa. Só falta ver que ela preserva as topologias.

Seja U um aberto básico do 2^κ tal que exista $\chi_{A_I} \in U$ para algum $I \in \mathcal{P}(\omega)$. Fixemos este $\chi_{A_I} \in U$. Queremos ver que

$$\{\chi_J : \chi_{A_J} \in U\}$$

é uma vizinhança de χ_I em 2^ω. Seja $F \in [\kappa]^{<\omega}$ o subconjunto finito de κ tal que, se $\xi \in \kappa \setminus F$, então o ξ-ésimo fator de U é 2 e, se $\xi \in F$, então o ξ-ésimo fator de U é $\{0\}$ ou $\{1\}$. Fixemos também o χ_I tal que $\chi_{A_I} \in U$.

Observemos que um $\xi \in F$ pode: pertencer a A_k para algum $k \in I$; pertencer a A_k para algum $k \in \omega \setminus I$, ou ainda; não pertencer a nenhum A_k (com $k \in \omega$). Considerando, então, ambos os conjuntos finitos

$$I_1 = \{i \in I : F \cap A_i \neq \emptyset\} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \{j \in \omega \setminus I : F \cap A_j \neq \emptyset\},$$

vamos definir $V_i = \{1\}$ $\forall i \in I_1$, $V_j = \{0\}$ $\forall j \in I_2$, $V_i = 2$ $\forall i \in \omega \setminus (I_1 \cup I_2)$ e $V = \prod_{i \in \omega} V_i$. Para o que segue, vamos supor ambos os conjuntos I_1 e I_2 não vazios. O caso em que um deles for vazio sai, em particular, do mesmo raciocínio.

Vamos mostrar que $\chi_I \in V$ e que $\chi_{A_J} \in U$ $\forall \chi_J \in V$. Temos $\chi_I(i) = 1$ $\forall i \in I_1$ e $\chi_I(j) = 0$ $\forall j \in I_2$ porque, se $j \in I_2$, então $j \notin I$. Portanto, V é de fato uma vizinhança para χ_I. Se $\chi_J \in V$, então $\chi_J(i) = 1$ $\forall i \in I_1$ e $\chi_J(j) = 0$ $\forall j \in I_2$. Para ver que $\chi_{A_J} \in U$, vamos verificar que $\chi_{A_J}(\xi) = \chi_{A_I}(\xi)$ $\forall \xi \in F$. Dados $i \in I_1$ e $j \in I_2$ temos

$$(*) \qquad \chi_J(i) = 1 \Longrightarrow i \in J \Longrightarrow A_i \subset A_J$$

e

$$(**) \qquad \chi_J(j) = 0 \Longrightarrow j \notin J \Longrightarrow A_j \subset \kappa \setminus A_J.$$

Se $\xi \in F$ e $\xi \in A_i$ para algum $i \in I_1$, então $\chi_{A_I}(\xi) = 1$, enquanto $\chi_{A_J}(\xi) = 1$ também por $(*)$. Se $\xi \in F$ e $\xi \notin A_i$ $\forall i \in I_1$, então $\xi \notin A_I$ e $\chi_{A_I}(\xi) = 0$. Mas, ainda com relação a este mesmo ξ, podem ocorrer duas coisas. Ou $\xi \in A_j$ para algum $j \in I_2$; daí, por $(**)$, $\chi_{A_J}(\xi) = 0$. Ou ainda $\xi \notin A_k$ $\forall k \in \omega$. Neste caso, em particular, $\xi \notin A_J$ também e $\chi_{A_J}(\xi) = 0$. Logo, se $\chi_J \in V$, então $\chi_{A_J} \in U$ e podemos concluir que a nossa associação é contínua.

Note agora que 2^κ é Hausdorff, pois, se f e g são dois elementos distintos de 2^κ, então existe um $\alpha \in \kappa$ tal que $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ e as respectivas vizinhanças básicas $\prod_{\xi \in \kappa} U_\xi$ e $\prod_{\xi \in \kappa} V_\xi$ de f e g

definidas por $U_\alpha = \{f(\alpha)\}$, $V_\alpha = \{g(\alpha)\}$ e $U_\xi = V_\xi = 2$ $\forall \xi \in \kappa \setminus \{\alpha\}$ são disjuntas. O fato agora de a nossa associação $\chi_i \mapsto \chi_{A_I}$ ser um homeomorfismo segue da proposição 1.2.36, já que, além de ela ser bijetiva e contínua, seu domínio 2^ω é compacto e sua imagem é Hausdorff.

■

Como corolário temos o resultado abaixo, encontrado como um teorema em Weiss (1990b).

Corolário 4.4.5. Se $2^\kappa \not\longrightarrow (\text{top } 2^\omega)^1_2$, então existe um modo de particionar $\mathcal{P}(\kappa)$ em dois pedaços tal que nenhum deles contenha uma família $\{A_i : i \in \omega\}$ de elementos dois a dois disjuntos tal que todas suas reuniões pertençam a um mesmo pedaço.

Demonstração. Pela contrapositiva, seja $2^\kappa = X_1 \cup X_2$ uma partição de 2^κ. Se χ é a função que associa cada subconjunto de κ à sua função característica, então $\mathcal{P}(\kappa) = \chi^{-1}[X_1] \cup \chi^{-1}[X_2]$ é uma partição para $\mathcal{P}(\kappa)$. Daí, por hipótese, algum $\chi^{-1}[X_j]$ contém, não só a família $\{A_i : i \in \omega\}$ de elementos dois a dois disjuntos, como também a família $\{\bigcup_{i\in I} A_i : I \in \mathcal{P}(\omega)\}$ de todas suas reuniões. Portanto, $\{\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} : I \in \mathcal{P}(\omega)\} \subset X_j$ para este j, onde $\{\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} : I \in \mathcal{P}(\omega)\} \cong 2^\omega$ pelo teorema anterior. Logo $2^\kappa \longrightarrow (\text{top } 2^\omega)^1_2$, como queríamos. ■

Para finalizar este capítulo, vamos ver alguns resultados envolvendo compactificações de um ponto e o κ-cubo de Cantor.

Definição 4.4.6. Por A_κ, vamos denotar a compactificação de um ponto de um espaço discreto de cardinalidade κ.

Segundo Weiss (1990b) é devido ao Todorcevic a relação

$$2^\kappa \longrightarrow (\text{top } A_\kappa)^1_{\text{cf}(\kappa)},$$

para todo cardinal infinito κ. Em particular, essa partição afirma a existência de uma cópia homeomorfa ao A_κ dentro do κ-cubo de Cantor.

A prova, ainda devida a Todorcevic, pode ser encontrada no próprio Weiss (1990b). Nela, assim como no resultado anterior, através da associação que identifica cada subconjunto de κ com sua função característica, é demonstrada a afirmação de que ao particionar $\mathcal{P}(\kappa)$ em $\text{cf}(\kappa)$ pedaços, um desses pedaços contém um Δ-sistema com sua raiz.

Teorema 4.4.7. Seja $\{D_\xi : \xi \in \kappa\} \subset \mathcal{P}(\kappa)$ um Δ-sistema sobre κ de tamanho κ e seja R sua raiz, isto é $D_\alpha \cap D_\beta = R$ $\forall \alpha, \beta \in \kappa$ com $\alpha \neq \beta$. Suponha $R \neq D_\xi$ $\forall \xi < \kappa$. Então

$$X = \{\chi_{D_\xi} : \xi \in \kappa\} \subset 2^\kappa$$

é discreto, localmente compacto e Hausdorff. Além disso

$$Y = X \cup \{\chi_R\}$$

é compacto, Hausdorff e tal que $\overline{X} = Y$. Isto é, Y é uma compactificação de um ponto de X pelo teorema 1.2.41.

Demonstração. Vamos começar vendo que X é discreto. Fixe um elemento χ_{D_α} qualquer de X. Existe $\xi \in D_\alpha \setminus R$. Defina $U_\xi = \{1\}$ e considere $U = \prod_{\eta<\kappa} U_\eta$ onde $U_\eta = 2$ para todo $\eta < \kappa$ tal que

$\eta \neq \xi$. Não existe $\chi_{D_\eta} \in U$ com $\eta \neq \alpha$, pois, como $D_\eta \cap D_\alpha = R$ se $\eta \neq \alpha$ e $\xi \in D_\alpha \setminus R$, segue $\xi \notin D_\eta$ e, portanto, $\chi_{D_\eta}(\xi) = 0$, o que implica $\chi_{D_\eta} \notin U$. Como X é discreto, X é localmente compacto e Hausdorff.

As justificativas do porquê $\overline{X} = Y$ e Y é compacto são semelhantes. Seja U um aberto básico do 2^κ tal que $U \cap Y \neq \emptyset$. Assim existe $f \in U \cap Y$. Se este f é $f = \chi_{D_\xi}$ para algum $\xi < \kappa$, então não há nada a fazer. Suponha, então, que este U seja vizinhança do χ_R. Vamos mostrar (para mostrar a igualdade $\overline{X} = Y$) que existe $\xi < \kappa$ tal que $\chi_{D_\xi} \in U$. Além disso, já vamos mostrar também que existe só um número finito de elementos de X fora de U, de onde vai seguir que Y é compacto.

Seja $F \in [\kappa]^{<\omega}$ o subconjunto finito de κ tal que os ξ-ésimos fatores de U são iguais a 2 se $\xi \in \kappa \setminus F$ e distintos de 2 se $\xi \in F$. Temos este

$$F = (F \cap R) \cup (F \cap (\kappa \setminus R)).$$

Se $F \cap (\kappa \setminus R) = \emptyset$, então não há nada a fazer: teremos $\chi_{D_\xi} \in U$ $\forall \xi < \kappa$ porque $F \subset R \Rightarrow \chi_{D_\xi}(x) = 1 = \chi_R(x)$ $\forall x \in F$.

Então suponha $F \cap (\kappa \setminus R) \neq \emptyset$. Vamos chamar $G = F \cap (\kappa \setminus R)$ esse pedaço de F fora de R. Da hipótese $D_\alpha \cap D_\beta = R$ se $\alpha, \beta \in \kappa$ e $\alpha \neq \beta$, segue que, se $x \in G \cap D_\alpha$, então, de todos os D_ξ's, este x pertence apenas ao D_α. De um modo mais preciso: $x \in G \cap D_\alpha \Rightarrow x \notin D_\xi$ para todo $\xi < \kappa$, $\xi \neq \alpha$. Pode ocorrer também de termos $G \cap D_\alpha = \emptyset$ $\forall \alpha < \kappa$. Neste caso também teremos $\chi_{D_\xi} \in U$ $\forall \xi < \kappa$ porque $\chi_{D_\xi}(x) = 0$ $\forall x \in G$ já que $x \in G \Rightarrow x \notin D_\xi$ (na verdade o caso $G = F \cap (\kappa \setminus R) = \emptyset$ considerado anteriormente também está englobado aqui, porque $G \cap D_\alpha = \emptyset$ caso $G = \emptyset$).

Se $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para algum $\alpha < \kappa$, pela observação anterior, sejam $D_{\xi_1}, \ldots, D_{\xi_n}$ tal que $G \cap D_{\xi_i} \neq \emptyset$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (lembre que G é um conjunto finito). Por um lado $\chi_R(x) = 0$ $\forall x \in G$. Por outro, fixado $1 \leqslant i \leqslant n$, existe $x \in G \cap D_{\xi_i}$ e, para este x, $\chi_{D_{\xi_i}}(x) = 1$, o que faz $\chi_{D_{\xi_i}} \notin U$. Mas é só este número finito de elementos de U que cairão fora de U. Para os outros teremos $\chi_{D_\xi}(x) = 0$ $\forall x \in G$, pois, como $G \cap D_\xi = \emptyset$, temos $x \in G \Rightarrow x \notin D_\xi$. Segue Y compacto e $\overline{X} = Y$ como queríamos. ■

Para obter um corolário da relação $2^\kappa \longrightarrow (\text{top } A_\kappa)^1_{\text{cf}(\kappa)}$ mencionada acima, basta, por exemplo, encontrarmos um espaço que contenha uma cópia do κ-cubo de Cantor.

Definição 4.4.8 (Espaço diádico)**.** Um espaço compacto X é diádico quando ele é imagem contínua de um κ-cubo de Cantor para algum $\kappa \geqslant \omega$.

Fixado um cardinal κ, Efimov (1977) nos diz quais são as condições necessárias e suficientes para que um espaço diádico de peso κ contenha uma cópia do κ-cubo de Cantor. De seu trabalho, podemos concluir, em particular, que, se X é um espaço diádico cuja cofinalidade do seu peso é não enumerável, então X contém uma cópia do $w(X)$-cubo de Cantor. Dessa forma, e da relação $2^\kappa \longrightarrow (\text{top } A_\kappa)^1_{\text{cf}(\kappa)}$, obtemos o corolário abaixo, extraído de Weiss (1990b).

Corolário 4.4.9. Seja X um espaço diádico tal que a cofinalidade de seu peso κ seja não enumerável. Vale

$$X \longrightarrow (\text{top } A_\kappa)^1_{\text{cf}(\kappa)}.$$

Capítulo 5

Comentários Finais

Quase todas as relações de partições $X \longrightarrow (\text{top } Y)^n_\kappa$ vistas no presente trabalho foram feitas para $n = 1$. Naturalmente podemos também estudar essas relações para qualquer outro natural n. Para $n = 2$ ou $n = 3$ temos, por exemplo, o artigo "Partitioning the Pairs and Triples of Topological Spaces" (Hajnal *et al.*, 1990); para $n = 4$, o "Partitioning the Quadruples of Topological Spaces" (Weiss, 1990c). Além do próprio "Partitioning Topological Spaces", outros problemas em aberto podem ser encontrados no artigo "Weiss's Questions" (Weiss, 1990a).

Referências Bibliográficas

Baumgartner(1986) James E. Baumgartner. Partition relations for countable topological spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 43(2):178–195. doi: https://doi.org/10.1016/0097-3165(86)90059-2. Citado na pág. 20, 23

Ciesielski(1997) Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*. Cambridge University Press. Citado na pág. 1

Dasgupta(2005) Abhijit Dasgupta. Countable metric spaces without isolated points. http://at.yorku.ca/p/a/c/a/25.pdf, Junho 2005. último acesso em 21/2/2019. Citado na pág. 28

Devlin(1979) Keith J. Devlin. Variations on $\diamondsuit$. *The Journal of Symbolic Logic*, 44(1):51–58. Citado na pág. 47

Efimov(1977) B. A. Efimov. Mappings and imbeddings of dyadic spaces. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 32(1):45–57. doi: 10.1070/sm1977v032n01abeh002315. Citado na pág. 72

Engelking(1989) Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag Berlin. Citado na pág. 1, 28

Erdös *et al.*(1984) Paul Erdös, András Hajnal, Attila Máté e Ricard Rado. *Combinatorial Set Theory: Partition relations for cardinals*. North-Holland Publishing Company. Citado na pág. xv

Friedman(1974) Harvey Friedman. On closed sets of ordinals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 43(1):190–192. Citado na pág. 25, 34

Gerlits e Szentmiklóssy(2002) János Gerlits e Zoltán Szentmiklóssy. A ramsey-type topological theorem. *Topology and its Applications*, 125:343–355. Citado na pág. 25, 36, 37

Hajnal *et al.*(1986) András Hajnal, István Juhász e Saharon Shelah. Splitting strongly almost disjoint families. *Transactions of the American Mathematical Society*, 295(1):369–387. Citado na pág. xv

Hajnal *et al.*(1990) András Hajnal, István Juhász e William Weiss. Partitioning the pairs and triples of topological spaces. *Topology and its Applications*, 35:177–184. doi: 10.1016/0166-8641(90)90103-9. Citado na pág. xv, 73

Hart *et al.*(2003) Kaas Pieter Hart, Jun iti Nagata e Jerry E. Vaughan, editors. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier Science. ISBN 9780080530864. Citado na pág. 22

Hilton(2016) Jacob Haim Hilton. *Combinatorics of Countable Ordinal Topologies*. Tese de Doutorado, School of Mathematics, The University of Leeds. Citado na pág. 20, 23, 45

Homayouni(1997) Soheil Homayouni. *Partition Calculus for Topological Spaces*. Tese de Doutorado, Graduate Department of Mathematics, University of Toronto, Canadá. Citado na pág. 34, 55, 65, 67, 68

Hrbacek e Jech(1999) Karel Hrbacek e Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Explained*. Marcel Dekker, 3rd edição. Citado na pág. 1, 39, 41

Jech(2003) Thomas Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3rd edição. Citado na pág. 1

Kunen(1980) Kenneth Kunen. *Set Theory: An introduction to independence proofs.* Elsevier Science Pubishers B. V., 1st edição. Citado na pág. 1, 39

Kunen(2013) Kenneth Kunen. *Set Theory.* Citado na pág. 8

Kuratowski(1966) Kazimierz Kuratowski. *Topology*, volume 1. PWN and Academic Press. Tradução J. Jaworowski. Citado na pág. 9, 10, 33

Munkres(1975) James Raymond Munkres. *Topology: a first course.* Prentice-Hall. Citado na pág. 1

Ramsey(1930) F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1):264–286. ISSN 0024-6115. doi: 10.1112/plms/s2-30.1.264. Citado na pág.

Schipperus(2012) René Schipperus. The topological baumgartner-hajnal theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(8):3903–3914. Citado na pág. xv, 20, 38

Shelah(1982) Saharon Shelah. *Proper Forcing*, volume 940 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Citado na pág. 65

Sierpinski(1920) Wacław Sierpinski. Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi. *Fundamenta Mathematicae*, 1(1):11–16. doi: 10.4064/fm-1-1-11-16. Citado na pág. 25

Solomon(2008) Reed Solomon. Some descriptive set theory. http://www.math.uconn.edu/~solomon/notes/desc2.pdf, Agosto 2008. último acesso em 20/2/2019. Citado na pág. 21

Weiss(1990a) William Weiss. Weiss's questions. Em Jan van Mill e George M. Reed, editors, *Open Problems in Topology*, páginas 78–84. North-Holland. Citado na pág. 73

Weiss(1990b) William Weiss. Partitioning topological spaces. Em *Mathematics of Ramsey Theory*, páginas 154–171. Springer-Verlag. Citado na pág. 19, 25, 26, 33, 34, 36, 37, 55, 56, 59, 62, 65, 67, 69, 71, 72

Weiss(1990c) William Weiss. Partitioning the quadruples of topological spaces. Em A. Baker, B. Ballobás e A. Hajnal, editors, *A Tribute to Paul Erdös*, páginas 459–465. Cambridge University Press. Citado na pág. 73

Weiss e Komjáth(1987) William Weiss e Péter Komjáth. Partitioning topological spaces into countably many pieces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 101(4):767–770. Citado na pág. 39, 45, 47, 55, 62

Índice Remissivo