Formalismo termodinâmico para *shifts*
de Markov enumeráveis
topologicamente *mixing*

Jose Manuel Chauta Torres

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ricardo dos Santos Freire Júnior

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, janeiro de 2017

**Formalismo termodinâmico para *shifts*
de Markov enumeráveis
topologicamente *mixing***

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 03/02/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ricardo dos Santos Freire Júnior (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Rodrigo Bissacot Proença - IME-USP
- Prof. Dr. Artur Oscar Lopes - UFGRS
- Prof. Dr. Leandro Martins Ciolleti - UNB
- Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera - UFGRS

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Ricardo por ter acompanhado de perto este trabalho, suas recomendações e ajuda foram parte muito importantes no desenvolvimento desta tese.

À minha esposa Diana, pelo apoio, amor e paciência.

Resumo

CHAUTA-TORRES, J. M. **Formalismo termodinâmico para *shifts* de Markov enumeráveis topologicamente *mixing***. 2017. 77 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Nesta tese são estudados alguns tópicos sobre otimização ergódica e formalismo termodinâmico que generalizam resultados, de [CLT01, GL08] no primeiro caso e [BLT06, BMP16] no segundo, para contextos onde não existem medidas de Gibbs, ou, em outras palavras, não é satisfeita a propriedade BIP.

É demonstrada a existência de subações calibradas para potenciais coercivos de variação finita em espaços *shift* transitivos de alfabeto enumerável. O método usado é a construção da barreira de Peierls nesse contexto. Provam-se algumas das propriedades da barreira de Peierls e, como consequência das construções, é mostrada uma classificação dos *shifts* que possuem subações calibradas e limitadas. Posteriormente é realizado um estudo do formalismo termodinâmico para potenciais somáveis de variação finita e pressão finita com medida maximizante única f em *shifts* topologicamente *mixing*. Fazendo uso dos resultados de [FV15], são estudadas a família de estados de equilíbrio μ_β correspondente com βf e a família de funções $\frac{\log h_\beta}{\beta}$, onde h_β são auto vetores do operador de Ruelle para βf . É demonstrado que os pontos de acumulação quando β vai para infinito são subações uniformemente contínuas. Finalmente é provada uma propriedade dos grandes desvios para a família de estados de equilíbrio μ_β com hipóteses sobre a convergência de uma família de funções g_β que normaliza o operador de Ruelle para cada $\beta > 1$ (Veja seção 4.4).

Palavras-chave: Formalismo termodinâmico, *shift* de Markov, barreira de Peierls, princípio dos grandes desvios.

Abstract

CHAUTA-TORRES, J. M. **Thermodynamic formalism for topologically mixing countable Markov shifts**. 2017. 77 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

In this thesis, the study of topics on ergodic optimization and thermodynamic formalism for countable Markov shifts is presented. It provides a generalization of the previous results, in [CLT01, GL08] for the first subject and [BLT06, BMP16] for the second one, to situations where there are no Gibbs measures, ie, the BIP property is not verified.

The existence of calibrated subactions for coercive potentials with finite variation over transitive countable Markov shifts is proved. The method is based on the construction of the Peierls' barrier in this context. Some properties of the Peierls' barrier are proved and, as consequence of the proof, a classification of the Markov shifts wich support calibrated and limited subactions is shown. Subsequently, the thermodynamic formalism for topologically mixing Markov shift and summable potentials with finite variation, finite pressure and unique maximizing measure μ is studied. Using results in [FV15], the class of equilibrium states μ_β corresponding with βf and the class of functions $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$ are studied where h_β are the eigenfunctions for the Ruelle operator. It is proved that its accumulation points, as β goes to infinity, are uniformly continuous subactions. Finally, it is proved a large deviation principle for the equilibrium states family μ_β , assuming a hypothesis about the convergence in a family of functions that normalizes the Ruelle operator (See section 4.4 for more details).

Keywords: Thermodynamic formalism, Markov shifts, Peierls' barrier, large deviation principle.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Preliminares	7
2.1	Otimização ergódica	10
2.2	Pressão de Gurevic	11
2.3	Operador de Ruelle	12
2.4	Formalismo em espaços BIP	13
2.5	<i>Shift</i> de <i>renewal</i>	14
3	Barreira de Peierls	17
3.1	Definição da barreira	19
3.2	A barreira de Peierls como subação calibrada	21
3.3	Prova do teorema A	25
3.4	Propriedades da barreira de Peierls	26
3.5	Exemplo de <i>shift</i> sem subação calibrada limitada	31
4	Formalismo termodinâmico	33
4.1	Pontos de acumulação para a família $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$	35
4.2	Pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log \mu_\beta$	41
4.3	Relação entre os pontos de acumulação	43
4.4	Convergência de $\frac{g_\beta}{\beta}$	48
4.5	Princípio dos grandes desvios	51
5	Caracterização da função taxa	55
6	Conclusões e outras questões	63

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese são estudados dois tópicos da teoria ergódica para *shifts* de Markov com alfabeto enumerável: otimização ergódica e formalismo termodinâmico.

Dados um sistema dinâmico (X, T) e um potencial $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitado superiormente, seja

$$m(f) := \sup\left\{\int f d\mu : \mu \text{ é medida de probabilidade invariante}\right\}.$$

Uma medida de probabilidade invariante μ tal que $\int f d\mu = m(f)$ é chamada medida maximizante. O estudo da existência, unicidade e propriedades de medidas maximizantes é chamado otimização ergódica [Jen06]. Se a dinâmica T for contínua, o espaço X for compacto e o potencial f for contínuo, a existência de medidas maximizantes é consequência da compacidade, na topologia fraca*, do espaço de medidas de probabilidade invariantes e a continuidade da aplicação $\mu \rightarrow \int f d\mu$ nessa topologia. Para espaços não compactos a existência de medidas maximizantes foi estudada, por exemplo, em [JMU07]. No contexto de *shifts* de Markov enumeráveis os resultados em [JMU06] são, principalmente, condições para existência de medidas maximizantes, já em [BF14] os autores provaram que se Σ é um *shift* transitivo e f é um potencial de variação finita e coercivo, então existe medida maximizante e o suporte das medidas maximizantes estão contidas num *subshift* finito.

Uma das principais ferramentas em otimização ergódica é o conceito de subação, isto é, uma função V tal que para todo $x \in X$

$$f(x) \leq (V \circ T - V + m(f))(x),$$

V se diz calibrada se para todo $x \in \Sigma$ existe uma pré-imagem y tal que $f(y) = V(x) - V(y) + m(f)$.

O conjunto dos pontos que satisfazem

$$f(x) = (V \circ T - V + m(f))(x)$$

é chamado *conjunto de Mañé* ou conjunto de V -ação. O conjunto de Mañé está contido no conjunto dos pontos f -não errantes (também chamado conjunto de Aubry em virtude da relação que ele tem com um conceito similar na teoria de Aubry-Mather para sistemas Lagrangeanos [CLT01, GL08]). Os pontos f -não errantes são base da definição da barreira de Peierls $S_f(y, x)$ que é introduzida no capítulo 3.

Nesta tese é provado que quando $\bar{y}$ é um ponto fixado no conjunto dos pontos f -não errantes, a função $S_f(\bar{y}, \cdot)$ define uma subação calibrada. O resultado principal desta tese em otimização ergódica

é a seguinte generalização do caso BIP (veja [Pé15]).

Teorema A. *Seja Σ um shift topologicamente transitivo e f um potencial coercivo e de variação finita com medida maximizante única. Seja $S_f := S_f(\bar{y}, \cdot)$, a barreira de Peierls, onde $\bar{y}$ é um ponto no suporte da medida maximizante $\mu_{\max}$. Então S_f é uma subação calibrada, uniformemente contínua e limitada superiormente.*

Também é provado que uma subação calibrada e limitada, caso exista, difere da barreira de Peierls por uma constante. Em particular, duas subações calibradas e limitadas diferem por uma constante (veja teorema C). Essa afirmação tem sido provada para *shifts* compactos (i.e. quando o alfabeto é finito), [CLT01] e *shifts* enumeráveis finitamente primitivos, [GL08, BMP16]. Entretanto, note que a existência de uma subação calibrada limitada no caso geral só ocorre se o *shift* for satisfazer a propriedade BP, veja (2.1).

Neste trabalho se faz uma generalização desses resultados removendo a hipótese BIP, e assumindo que o *shift* é topologicamente transitivo.

Outro resultado importante é a seguinte caracterização: A existência de subações calibradas e limitadas é equivalente a que o *shift* satisfaça a propriedade BP, que é discutida mais para frente e que é uma hipótese menos restritiva que a BIP, veja teorema D. Como consequência disso, as seguintes afirmações são equivalentes (veja corolário 2):

1. Σ satisfaz BP.
2. Existe subação calibrada e limitada.
3. A barreira de Peierls é limitada.

Também é dado um exemplo de quando a barreira de Peierls não pode ser limitada inferiormente.

O formalismo termodinâmico tem suas origens no trabalho de Ruelle [Rue78] e Bowen [Bow75], que caracterizaram os estados de equilíbrio para potenciais Hölder contínuos em *shifts* de Markov topologicamente *mixing* de alfabeto finito. Suas técnicas e construções tem sido usadas desde fim do século passado para generalizar os resultados ao contexto em que o *shift* tem alfabeto enumerável. O. Sarig, por exemplo, em [Sar99] definiu a pressão de Gurevic para um potencial Hölder contínuo e mostrou que, quando finita, ela coincide com a pressão topológica do potencial.

$$P_G(f) = \sup\left\{\int f d\mu + h(\mu) : \mu \in \mathcal{M}_\sigma \text{ e } \int f d\mu > -\infty\right\},$$

onde $\mathcal{M}_\sigma$ é o conjunto de medidas de probabilidade σ -invariantes e $h(\mu)$ é a entropia da medida μ . Uma medida de probabilidade que satisfaz $\int f d\mu + h(\mu) = P_G(f)$, é chamada *estado de equilíbrio* para f . A existência de estados de equilíbrio depende da regularidade do potencial e das propriedades topológicas do sistema dinâmico. Em *shifts* topologicamente *mixing*, quando existe um estado de equilíbrio para um potencial de variação finita ele é único [BS03] e, além disso, o estado de equilíbrio é uma medida de Gibbs se e somente se o *shift* satisfaz a propriedade BIP, veja capítulo 2, [MU01, Sar03].

Se para todo $\beta > 1$ existe um estado de equilíbrio para βf e sua correspondente família de estados de equilíbrio é notada por μ_β , aparecem relações do formalismo termodinâmico com a otimização ergódica. No caso compacto e BIP, por exemplo, todo ponto de acumulação dos estados de equilíbrio, quando β vai para infinito, é uma medida maximizante, [Mor07], um caso mais geral foi provado em

[BMP16]. A constante β pode ser interpretada como o inverso da temperatura, $\beta = \frac{1}{T}$, é por esse motivo que fazer $\beta \rightarrow \infty$ e estudar as medidas μ_β é chamado o estudo a temperatura zero. Essa interpretação vem da mecânica estatística.

Neste trabalho são estudados tópicos de formalismo termodinâmico para *shifts* topologicamente *mixing* de alfabeto enumerável sem a condição BIP. Consideram-se potenciais somáveis (isto é, tal que $\sum_{j \geq 0} \exp(\sup f|_{[j]}) < \infty$), de variação finita e pressão finita. Cada uma destas condições é importante para mostrar existência de estados de equilíbrio, veja [FV15]. Uma consequência destas hipóteses é que a automedida do operador de Ruelle pode ser escolhida como uma medida de probabilidade [BS03].

Em trabalhos anteriores, [BLT06] (veja também [BLL13]) para *shifts* compactos e recentemente [BMP16] e [Pé15] em *shifts* finitamente primitivos, foi provada a seguinte propriedade dos grandes desvios.

Teorema 1 ([Pé15]). *Seja Σ um shift finitamente primitivo e f um potencial de variação finita e pressão finita, suponha que existe uma única medida maximizante. Então existe uma função I não negativa, semicontínua inferiormente e tal que para todo cilindro $C \subset \Sigma$,*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) = - \inf_{x \in C} I(x).$$

A hipótese de unicidade da medida maximizante não pode ser removida, pois por exemplo pode ser que a família de estados de equilíbrio não convirja, [CH10]. No artigo sobre princípio dos grandes desvios para *shift* compactos, [BLT06], os autores notam que o método por eles usado funciona se a família de estados de equilíbrio converge quando β vai para infinito e que a família $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$ é convergente quando fixada a condição $\mu_\beta = h_\beta \nu_\beta$, com $\nu_\beta(\Sigma) = 1$.

Os métodos usados neste trabalho combinam os métodos tradicionais do formalismo termodinâmico, como o operador de Ruelle, a construção de subações usando pontos de acumulação das autofunções associadas a βf entre outras, com aproximação por *subshifts* finitos baseados em ideias de [MU01] e [FV15]. A intenção é generalizar a propriedade dos grandes desvios para *shifts* topologicamente *mixing* e potenciais somáveis de variação finita e pressão finita que têm uma única medida maximizante.

As aproximações por *subshifts* compactos são realizadas construindo uma sequência crescente de *shifts* compactos Σ_k transitivos contidos em Σ e considerando $f_k = f|_{\Sigma_k}$ com seus correspondentes estados de equilíbrio

$$\mu_{\beta,k} = \nu_{\beta,k} h_{\beta,k}.$$

É importante ressaltar que essas aproximações são realizadas usando conjuntos que do ponto de vista de medida são pequenos, pois todo *subshift* finito tem medida zero para os estados de equilíbrio μ_β . Para mostrar esse fato observe que, quando existe, o estado de equilíbrio tem suporte total e é ergódico. Por outro lado, mesmo sendo densa em Σ , a união dos *subshifts* compactos não cobre o espaço inteiro, o qual não é σ -compacto. Além do mais, um cilindro em Σ_k é diferente de um cilindro em Σ , então vários cuidados devem ser tomados na hora de trabalhar com resultados em *shifts* compactos e usá-los no espaço inteiro.

Os resultados mais importantes sobre formalismo termodinâmico obtidos nesta tese, são os seguintes.

Para todo ponto de acumulação V uniforme em compactos da família $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$, V é uma subação

uniformemente contínua. Para mostrar isso é demonstrado que a família é equicontínua e uniformemente limitada quando restrita a qualquer cilindro, usando um argumento diagonal é provado que existem pontos de acumulação na topologia uniforme em compactos. Posteriormente mostra-se que esses pontos de acumulação são subações contínuas. Uma consequência da demonstração é que para *shifts* de *renewal*, esses pontos de acumulação são calibrados.

Dado um cilindro C , a sequência $\frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C)$ é uniformemente limitada, portanto admite pontos de acumulação quando $\beta \rightarrow \infty$, usando um argumento diagonal é possível construir sequências β_k tal que para todo cilindro C , existe o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}(C)$ e $\frac{1}{\beta_k} \log h_{\beta_k}$ converge uniformemente em compactos.

Para qualquer sequência β_k que satisfaça essas propriedades é provado que

$$I(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}([x_0 \dots x_n]),$$

define uma função positiva, semicontínua inferiormente e para todo cilindro C

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}(C) = - \inf_{x \in C} I(x).$$

O objetivo é mostrar que a função I não depende da escolha da subsequência β_k . Para estudar essa dependência é usada a aproximação por *subshifts* finitos.

A condição BIP pode ser separada em duas condições independentes, a condição BP ou *Big Preimages* e a BI (*Big Images*), veja (2.1). No intuito de enfraquecer as condições do teorema anterior é mudada a condição BIP pela BP, essa hipótese é necessária para garantir existência de subações calibradas e limitadas, veja capítulo 3. A condição BP implica que a barreira de Peierls é calibrada e limitada inferiormente, então a prova da propriedade dos grandes desvios seria consequência de mostrar que os pontos de acumulação de $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$ são subações calibradas e limitadas, veja capítulo 4. Para pontos em *subshifts* finitos é observado que a sequência $V_k(x)$ é eventualmente constante, portanto pode-se esperar que nesse caso $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log h_\beta(x)$ coincida com $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log h_{\beta,k}(x)$ para k suficientemente grande.

Assumindo que existe o limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta},$$

onde $g_\beta = \log h_\beta \circ \sigma - \log h_\beta - f + m$ e h_β é uma autofunção do operador de Ruelle, é demonstrado o princípio dos grandes desvios para o caso de *shifts* BP.

Teorema B. *Seja Σ um shift topologicamente mixing que satisfaz a propriedade BP e f um potencial somável de variação finita, pressão finita tal que f possui uma única medida maximizante. Suponha que para a família de funções $g_\beta := h_\beta \circ \sigma - h_\beta - f + P(\beta f)$ (onde h_β é a autofunção do operador de Ruelle para βf tal que $h_\beta(\bar{y}) = 1$) o seguinte limite existe.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_\beta.$$

Então existe uma função I não negativa e semicontínua inferiormente tal que para todo cilindro $C \subset \Sigma$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) = - \inf_{x \in C} I(x).$$

Finalmente, seguindo as ideias de [Men16], é mostrado que quando as medidas de equilíbrio satisfazem o princípio dos grandes desvios as automedidas de probabilidade ν_β também satisfazem esse princípio. Esse resultado generaliza para espaços topologicamente *mixing* (que inclui o caso BIP), os resultados de [Men16]. Formalmente, o resultado é o seguinte.

Teorema E. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável, de variação finita e pressão finita. Suponha que para todo cilindro C existe o limite*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_\beta(C)}{\beta}. \quad (1.1)$$

Seja I definida por

$$I(x) := - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0 \dots x_n]).$$

Então

1. *Existe o limite $R := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta}$ e satisfaz*

$$I(x) = R(x) + I(\sigma(x))$$

- 2.

$$I(x) = \inf_{y \in X_{\max}} \liminf_n (R^n(x_0 x_1 \dots x_{n-1} y) + I(y))$$

Além disso se $R^\infty := \sum_{j \geq 0} R(\sigma^j(x)) < \infty$, então existe $y \in X_{\max}$ ($X_{\max}$ é a união dos suportes das medidas maximizantes para f) ponto de acumulação para $\{\sigma^n(x)\}_{n \geq 1}$. Para um tal y

$$I(x) = R^\infty(x) + I(y)$$

3. *Existe o limite uniforme $V = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log h_\beta$.*

4. *As medidas ν_β satisfazem um princípio dos grandes desvios com função taxa $I + V$.*

O trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo 2 são apresentados os espaços *shift* e as definições dos objetos a serem usados durante o trabalho inteiro. São apresentados, também, resultados para *shifts* compactos e finitamente primitivos. Os *shifts* de *renewal* serão introduzidos numa seção desse capítulo.

No capítulo 3 é definida a barreira de Peierls para *shifts* topologicamente transitivos e estudadas suas principais propriedades.

No capítulo 4 são demonstrados os resultados até agora obtidos sobre formalismo termodinâmico e discutidas algumas conjecturas que permitem provar uma propriedade dos grandes desvios. É importante ressaltar que no capítulo 3 o espaço é assumido transitivo enquanto no capítulo 4 é topologicamente *mixing*. Muitos dos resultados sobre formalismo termodinâmico para *shifts* topologicamente *mixing* podem ser generalizados para transitivos, por uma questão de tempo não foi feita essa generalização neste documento mas é natural pensar que os resultados sejam válidos para *shifts* topologicamente transitivos.

No capítulo 5 é realizada uma generalização de um resultado de J. Mengue [Men16], onde se assume o princípio dos grandes desvios para mostrar a convergência da família $\frac{1}{\beta} h_\beta$.

No capítulo final são feitas conclusões e levantadas questões para pesquisa futura.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo são apresentados o *shift* de Markov, os principais objetos de estudo da otimização ergódica e do formalismo termodinâmico e os principais resultados já conhecidos nos casos compacto e BIP.

Seja A uma matriz $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. O *shift de Markov* é o sistema dinâmico (Σ, σ) onde os elementos de Σ são as sequências $x = x_0 x_1 \dots x_n \dots$ tais que $A(x_i, x_{i+1}) = 1$ para todo $i \geq 0$ e a transformação σ está definida por

$$\sigma(x_0 x_1 \dots) = x_1 x_2 \dots$$

Um cilindro de tamanho n é o conjunto

$$[x_0 x_1 \dots x_{n-1}] = \{y \in \Sigma : y_0 = x_0, y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}\}.$$

A concatenação $w = x_0 x_1 \dots x_{n-1}$ se diz *palavra permitida* se o cilindro $[w] = [x_0 x_1 \dots x_{n-1}]$ for não vazio. O comprimento da palavra w , que é notado por $|w|$, é definido pelo tamanho do cilindro $[w]$, a partição natural de Σ está formada pelos cilindros de tamanho 1.

Fixado $0 < \lambda < 1$, define-se a distância

$$d_\lambda(x, y) = \lambda^{\inf\{j : x_j \neq y_j\}}.$$

No espaço métrico (Σ, d_λ) o *shift* é uma transformação expansora: Se $d(x, y) < \lambda$, então

$$d_\lambda(\sigma(x), \sigma(y)) \geq \frac{1}{\lambda} d_\lambda(x, y).$$

Daqui para frente será fixado o λ e a distância será notada por d .

A topologia gerada pela distância d coincide com a gerada pelos cilindros definidos acima e não depende do λ fixado. Munido desta topologia, Σ é um espaço separável, isto é, possui uma base enumerável de abertos (os cilindros).

Uma transformação $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$ se diz *topologicamente transitiva*, ou simplesmente transitiva se para todo par de conjuntos abertos não vazios B e C , existe $n = n(B, C)$ tal que $T^{-n}C \cap B \neq \emptyset$, no caso do *shift* isso é equivalente a ser *irredutível*: Dados $a, b \in \mathbb{N}$ existe palavra permitida w_a^b tal que $aw_a^b b$ é palavra permitida.

A transformação σ é *topologicamente mixing* se dados $a, b \in \mathbb{N}$ existe $N = N(a, b)$ tal que $\sigma^{-N}[a] \cap$

$[b] \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Todo *shift* topologicamente *mixing* é transitivo mas nem todo transitivo é topologicamente *mixing*.

Quando o alfabeto é finito a propriedade de ser transitivo é equivalente a dizer que para cada $i, j \in I$ existe n tal que $A^n(i, j) \neq 0$ e ser topologicamente *mixing* é equivalente à existência de um N tal que $A^N > 0$ isto é, todas as entradas de A^N são positivas.

A matriz de transição A se diz *primitiva* se existem $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ e $L_0 > 0$ tal que para todo par a, b de elementos de $\mathcal{N}$, existe w palavra permitida de tamanho L_0 e letras em $\mathcal{F}$ tal que awb é palavra permitida. Se $\mathcal{F}$ é um conjunto finito Σ é dito *Finitamente primitivo*. Note que se um *shift* é primitivo, então é topologicamente *mixing*. Existe outra propriedade topológica que resulta equivalente a ser finitamente primitivo, esta propriedade tem sido estudada nos últimos anos e permite generalizar alguns resultados do caso compacto.

Definição 1. Um *shift* de Markov Σ satisfaz a propriedade BIP (do inglês *Big Images and Preimages*) se existe um conjunto finito de palavras permitidas B tal que para todo $i, j \in \mathcal{N}$ existe palavra $w \in B$ tal que $iwwj$ é permitida.

É claro das definições acima que um *shift* de Markov topologicamente *mixing* é finitamente primitivo se e somente se satisfaz a propriedade BIP.

A propriedade BIP pode ser estudada através de duas propriedades.

Definição 2. Um *shift* topologicamente *mixing* Σ é BP se existe um conjunto finito $D \subset \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $j \in D$ tal que ji é uma palavra permitida. Ou, equivalentemente, se existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{j=0}^J [ji] \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

Definição 3. Um *shift* topologicamente *mixing* Σ é BI se existe um conjunto finito $D \subset \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $j \in D$ tal que ij é uma palavra permitida. Ou, equivalentemente, se existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{j=0}^J [ij] \neq \emptyset.$$

É claro que Σ satisfaz a propriedade BIP se e somente se satisfaz as propriedades BI e BP.

Seja $\mathcal{M}$ a classe das medidas de Borel no espaço Σ munido da topologia fraca*. A convergência nesta topologia está dada pela seguinte proposição

Proposição 1 ([Bil68]). Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de medidas em $\mathcal{M}$. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$ se, e somente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi d\mu_n = \int \phi d\mu$ para toda função ϕ contínua e limitada.

Seja $\mathcal{M}_\sigma$ o conjunto de medidas de probabilidade invariantes por σ , isto é, $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ se para todo $A \subset \Sigma$ mensurável $\mu(A) = \mu(\sigma^{-1}(A))$.

Um exemplo simples de medida invariante é uma medida definida por um ponto periódico. Se $x \in \Sigma$ é tal que $\sigma^p(x) = x$ e $\sigma^j(x) \neq x$ para $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, então a medida

$$\mu_x = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{\sigma^j(x)}$$

pertence a $\mathcal{M}_\sigma$ além disso μ_x é uma medida ergódica. Essa construção pode ser generalizada para pontos não necessariamente periódicos, seja $x \in M$, se a sequência de medidas

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\sigma^j(x)}$$

tem pontos de acumulação em $\mathcal{M}$, então esses pontos de acumulação são invariantes mas não necessariamente ergódicos. O suporte de uma medida μ está formado pelos pontos x tais que para toda vizinhança U de x , $\mu(U) > 0$. O suporte de uma medida μ é notado por $\text{supp}(\mu)$. O suporte de uma medida definida por uma órbita periódica é exatamente essa órbita periódica.

Quando o alfabeto é finito, $\mathcal{M}_\sigma$ é um espaço compacto. Além disso as medidas definidas por pontos periódicos são densas nas medidas invariantes. Uma medida invariante é *ergódica* se todo conjunto mensurável invariante tem medida nula ou medida total [OV14, Wal00].

Um *potencial* é uma função definida em Σ a valor real. A variação do potencial f é definida por

$$\text{Var}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}_j(f).$$

Onde $V_j(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x, y) \leq \lambda^j\}$. Se $\text{Var}(f) < \infty$, f se diz um potencial de *variação finita*. Um potencial de variação finita é uniformemente contínuo mas pode ser não limitado.

Os potenciais de variação finita foram estudados por exemplo, em [Sar01a, JMU06]. No capítulo sobre formalismo termodinâmico será mostrada a importância desta regularidade para mostrar existência de estados de equilíbrio. Outro tipo de regularidade para os potenciais estudada por exemplo em [Sar99] é definida a seguir.

Definição 4. Um potencial $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é *localmente Hölder* se existe $A > 0$ e $\theta \leq 1$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{(d(x, y))^\theta} \leq A.$$

Se f é um potencial de variação finita, então para $x, y \in \Sigma$ tal que $d(x, y) < \lambda^n$

$$S_n f(x) - S_n f(y) \leq \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(x)) - f(\sigma^j(y)) \leq \sum_{j=1}^n \text{Var}_j(f). \quad (2.2)$$

Um potencial f é *coercivo* se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in [j]} f(x) = -\infty.$$

Neste documento é usada a notação $\sup f|_{[j]} = \sup_{x \in [j]} f(x)$ e $f|_{[j]}$ denota a restrição do potencial f ao cilindro $[j]$, note que se um potencial f é coercivo, então f é limitado superiormente.

Um potencial f se diz *somável* se

$$\sum_{j=0}^{\infty} \exp(\sup f|_{[j]}) < \infty.$$

É claro que todo potencial somável é coercivo e, portanto, limitado superiormente.

2.1 Otimização ergódica

Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial contínuo limitado superiormente, defina

$$m(f) = \sup \left\{ \int f \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}_\sigma \right\}.$$

Uma medida invariante ν tal que $\nu(f) := \int f \, d\nu = m(f)$ se diz *medida maximizante*. O estudo de existência, unicidade e propriedades de medidas maximizantes é chamado *otimização ergódica* [Jen06]. Para potenciais contínuos em espaços compactos a existência de medidas maximizantes segue da compacidade do espaço $\mathcal{M}_\sigma$ e a continuidade, com respeito à topologia fraca*, da aplicação $\mu \rightarrow \int f \, d\mu$. Em espaços não compactos pode não existir medida maximizante, em [JMU06, JMU07] pode encontrar uma introdução e vários resultados sobre otimização ergódica para espaços não necessariamente compactos.

Uma das ferramentas mais importantes na otimização ergódica é o conceito de subação [CLT01, Jen06] (também chamada forma normal). Estas funções permitem caracterizar os suportes das medidas maximizantes.

Definição 5. *Seja f um potencial contínuo, se S é um potencial contínuo tal que para todo $x \in \Sigma$,*

$$f(x) \leq (S \circ \sigma)(x) - S(x) + m(f).$$

Então S se diz uma subação para f .

Se para todo $x \in \Sigma$ existe $y \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = x$ e $f(y) = S(x) - S(y) + m(f)$, S se diz calibrada.

A existência de medidas maximizantes em *shift* não compactos é estudada em [JMU06, BF14], um dos resultados mais importantes e que será usado várias vezes no desenvolvimento desta tese é o seguinte teorema.

Teorema 2 ([BF14]). *Seja Σ um shift topologicamente transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo, então existe um subshift finito Σ_0 compacto tal que toda medida maximizante tem suporte contido em Σ_0 , em particular $m(f) = \sup\{\int f \, d\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_0)\}$.*

Como foi mostrado em [MU03] existe uma sequência crescente de *subshifts* finitos $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que se $\mathcal{A}_k$ é o alfabeto do *subshift* Σ_k ,

1. Cada Σ_k é transitivo.
2. $\mathcal{A}_k$ é finito e $\{0, 1, \dots, n_k\} \subset \mathcal{A}_k$, $n_k > n_{k-1}$.

Veja também [BF14, FV15] onde usam esse tipo de construção.

A seguir é mostrado o argumento para a construção dessa sequência de *subshift* compactos. Veja também [MU01]. Seja $n_1 > 1$, para cada $i, j < n_1$ considere uma palavra permitida w_i^j que conecta i com j . Se v é uma palavra permitida de tamanho n seja $\pi(v) = \{a \in \mathbb{N} : a = v_i \text{ para algum } i\}$ ($\pi(v)$ é o conjunto de letras que aparecem em v), analogamente para cada $x \in \Sigma$, $\pi(x)$ é o conjunto de letras que aparecem em x . Defina

$$\mathcal{A}_1 = \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \cup \bigcup_{i, j < n_1} \pi(w_i^j).$$

Dito de outra forma, $\mathcal{A}_1$ é o conjunto $\{0, 1, \dots, n_1\}$ unido com as letras que aparecem nas palavras w_i^j . Observe que $\mathcal{A}_1$ é finito, pois cada w_i^j é uma palavra finita e tem sido consideradas no máximo n_1^2 palavras.

Seja

$$\Sigma_1 = \{x \in \Sigma \mid \pi(x) \subset \mathcal{A}_1\}$$

Para cada par $a, b \in \mathcal{A}_1$ existe palavra permitida em Σ_1 que conecta a com b . Se a e b são menores que n_1 a palavra w_a^b conecta essas duas letras. Caso $a < n_1$ e b uma letra em alguma palavra w_i^j considere a palavra w_a^i e o segmento v da palavra w_i^j que conecta i com b , então $w_a^i v$ conecta a com b e tem letras em $\mathcal{A}_1$. Analogamente se a aparece em w_i^j e b é uma letra de w_k^l , considere u o segmento de palavra que conecta a com j , a palavra w_j^k e o segmento v de w_k^l que conecta k com b , então a palavra $u j w_j^k v$ conecta a com b . Portanto Σ_1 é um *subshift* transitivo.

O processo de construção dos Σ_k compactos transitivos continua da seguinte forma. Considere

$$n_2 = \sup\{j \mid j \in \mathcal{A}_1\} + 1$$

e repita o processo acima, dessa forma $\mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}_2$.

é preciso lembrar que se f é um potencial localmente Hölder contínuo (de variação finita) então $f_k = f|_{\Sigma_k}$ é, também, Hölder contínuo (de variação finita). Seja $P(f_k)$ a pressão de f_k , então para todo $\beta > 1$ e todo k existe estado de equilíbrio $\mu_{\beta,k}$ correspondente ao potencial βf_k , além disso a função $P(\beta f_k)$ é real analítica na variável β [Rue78]. Uma relação entre formalismo termodinâmico e otimização ergódica aparece no seguinte fato [Mor07, CLT01].

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{P(\beta f_k)}{\beta} = m(f_k).$$

Além disso, todo ponto de acumulação dos estados de equilíbrio $\mu_{\beta,k}$, quando $\beta \rightarrow \infty$, é uma medida maximizante de entropia máxima entre as medidas maximizantes [Mor07],

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} h(\mu_{\beta,k}) = \sup\{h(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{max}(f_k, \Sigma_k)\}.$$

2.2 Pressão de Gurevic

Nesta seção são seguidas as definições de [Sar99, Sar01a]. Para cada $a \in \mathbb{N}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ positivo seja

$$Z_n(f, a) = \sum_{\sigma^n(x)=x} \exp(S_n f(x)) 1_{[a]}(x).$$

Considere $N(a, n) = \{x \in [a] : \sigma^n(x) = x, x_j \neq a \text{ para } j \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$ isto é, o conjunto de pontos periódicos de período n que pertencem ao cilindro $[a]$ e que o primeiro retorno a $[a]$ é feito em n iterações de σ .

Definição 6. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial contínuo. A pressão de Gurevic de f em Σ é definida por*

$$P_G(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(Z_n(f, a)).$$

A definição é independente do a . Além disso a pressão de Gurevic satisfaz o seguinte princípio variacional, veja [Sar99].

Teorema 3 ([Sar99]). *Seja Σ topologicamente mixing e f um potencial de variação finita tal que $\|\mathcal{L}_f 1\|_\infty < \infty$, então*

$$P_G(f) = \sup \left\{ \int f d\mu + h(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma) \text{ e } \int f d\mu > -\infty \right\}.$$

Onde $h(\mu)$ é a entropia métrica de μ e $\mathcal{L}_f$ é o operador de Ruelle que será definido mais para frente.

Uma propriedade da Pressão de Gurevic é que pode ser caracterizada pela pressão topológica em *subshifts* finitos topologicamente *mixing*.

Teorema 4 ([Sar99]). *Seja Σ topologicamente mixing e f um potencial localmente Hölder contínuo, então*

$$P_G(f) = \sup_{Y \subset \Sigma} \{P_{top}(f|_Y) \mid Y \text{ é um shift compacto topologicamente mixing}\}.$$

Para cada $a \in \mathbb{N}$ seja

$$Z_n^*(f, a) = \sum_{N(a, n)} \exp(S_n f(x)).$$

A função $Z_n^*(f, a)$ permite definir a recorrência de um potencial f [Sar01b].

Definição 7. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial de pressão finita e variação finita. Então f se diz:*

1. *Recorrente se*

$$\sum_{n \geq 0} \exp(-nP_G(f)) Z_n(f, a) = \infty;$$

2. *positivamente recorrente se é recorrente e*

$$\sum_n n \exp(-nP_G(f)) Z_n^*(f, a) < \infty.$$

2.3 Operador de Ruelle

O operador de Ruelle foi introduzido em [Rue78] como um operador de transferência para potenciais Hölder contínuos em *shifts* compactos topologicamente *mixing*. É uma das ferramentas mais importantes do formalismo termodinâmico e tem sido generalizada para espaços não compactos e potenciais não necessariamente Hölder contínuos.

Seja ϕ um potencial contínuo e Σ um *shift* topologicamente transitivo. O operador de Ruelle $\mathcal{L}_\phi : C^0(\Sigma) \rightarrow C^0(\Sigma)$ é definido por

$$(\mathcal{L}_\phi f)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} \exp(\phi(y)) f(y).$$

Note que a soma pode ter infinitos termos e portanto pode não ser convergente. Uma condição para que operador de Ruelle esteja bem definido é que $\|\mathcal{L}_\phi 1\|_\infty < \infty$, note que se ϕ é somável então essa condição é satisfeita. Portanto, se ϕ é somável então o operador de Ruelle está bem definido.

Para *shifts* topologicamente *mixing* o operador $\mathcal{L}$ caracteriza os estados de equilíbrio para potenciais de variação finita e Pressão finita. Formalmente tem-se o seguinte

Teorema 5 ([Sar99]). *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial localmente Hölder contínuo tal que $P_G(f) < \infty$. Então f é positivamente recorrente se e somente se existe uma medida σ -finita ν e uma função h positiva, contínua tal que $\mathcal{L}_f^* \nu = e^{P_G(f)} \nu$, $\mathcal{L}_f h = e^{P_G(f)} h$, $\int h d\nu = 1$ e tal que para toda função g uniformemente contínua tal que $\|fh^{-1}\|_\infty < \infty$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nP_G(f)} \mathcal{L}_f^n g = \nu(g)h$$

uniformemente em compactos.

A prova desse teorema pode ser feita mudando a hipótese de Hölder contínua por variação finita [Sar01a].

A existência de estados de equilíbrio está relacionada com ser positivamente recorrente. Em [BS03] é provado que sempre que exista um estado de equilíbrio ele tem de ser único. Além disso os autores mostram que, nas condições do teorema anterior, se existe um estado de equilíbrio μ para f , então

$$\mu = h d\nu.$$

Onde h e ν são os autovetores de $\mathcal{L}_f$ e $\mathcal{L}_f^*$ respectivamente.

Em [FV15] foi provada a existência de estados de equilíbrio para potenciais somáveis de pressão finita em *shifts* topologicamente transitivos (veja teorema 9).

2.4 Formalismo termodinâmico em espaços compactos e BIP

Sejam Σ um *shift* transitivo que satisfaz a propriedade BIP e f é um potencial de variação finita e pressão finita. Para todo $\beta > 1$ existe um único estado de equilíbrio $\mu_\beta = h_\beta \nu_\beta$ que coincide com a única medida de Gibbs σ -invariante [MU01, Sar03]. Todo ponto de acumulação da sequência de estados de equilíbrio quando $\beta \rightarrow \infty$ é uma medida maximizante de entropia máxima entre as medidas maximizantes [Mor07]: Se $\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\beta_k}$ para alguma sequência $\beta_k \rightarrow \infty$, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_{\beta_k} = \int f d\nu = m(f).$$

e se $h(\nu)$ é a entropia da medida ν ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(\mu_{\beta_k}) = h(\nu) = \sup\{h(\mu) \mid \mu(f) = m(f), \mu \in \mathcal{M}_\sigma\}.$$

Se a medida maximizante é única, a família de estados de equilíbrio converge para a medida maximizante e satisfaz a propriedade dos grandes desvios [BLT06].

Existe uma função positiva semicontínua inferiormente I tal que para todo cilindro C

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\log(\mu_\beta(C))}{\beta} = - \inf_{x \in C} I(x).$$

Onde

$$I(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (V \circ \sigma - V - f + m)(\sigma^j(x)).$$

V é qualquer subação contínua calibrada e limitada. A definição de I não depende da escolha da subação pois duas subações calibradas e limitadas diferem por uma constante [GLT09], veja também teorema C na seção 3.4 deste trabalho.

A condição de unicidade na medida maximizante não pode ser removida como mostra o exemplo construído em [CH10].

Como foi mencionado anteriormente, um dos objetivos desta tese é generalizar o princípio dos grandes desvios para *shifts* topologicamente *mixing*. Veja capítulo 4.

2.5 *Shift de renewal*

O *shift de renewal* é uma classe de exemplos de *shift* de Markov introduzida em [Sar01a], veja também [Iom07]. Esta classe é disjunta da classe dos *shifts* BIP e permite construir exemplos que satisfazem BP mas não são BI, mais para frente são usados exemplos de *shift de renewal* para exibir casos onde, por exemplo, não existem subações limitadas e calibradas.

Um *shift de renewal* é um *shift* de Markov topologicamente *mixing* tal que para cada n existe, no máximo, uma órbita periódica $x = x_0 x_1 \dots x_{n-1}$ de período n tal que $x_j = 0$ se, e somente se $j = kn$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Este tipo de *shift* tem sido estudado no contexto de formalismo termodinâmico [Sar01b, Iom07] e fornece exemplos interessantes que serão usados posteriormente.

Seja A a matriz de transição dada por $A(0, n) = 1$, $A(n + 1, n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A(i, j) = 0$ em outro caso. O *shift* definido por essa matriz é um *shift de renewal*.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ a palavra $0n$, é uma palavra permitida em Σ_A , então Σ_A satisfaz a propriedade BP. Para cada $n > 0$ a imagem do cilindro $[n]$ está contida no cilindro $[n - 1]$, portanto Σ_A não satisfaz a propriedade BI.

Para construir um segundo exemplo, considere A^T a transposta da matriz A do exemplo anterior. O *shift* definido por A^T também é um *shift de renewal*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ a palavra $n0$ é uma palavra permitida em Σ_A , em particular Σ_{A^T} é um *shift* que satisfaz a propriedade BI. Para cada n a imagem do cilindro $[n]$ está contida no cilindro $[n + 1]$, portanto Σ_{A^T} não satisfaz a propriedade BI.

Uma construção mais geral dos exemplos anteriores é a seguinte. Dada uma sequência crescente de naturais d_n seja A matriz tal que $A(i, j) = 1$ se, e somente se acontece um dos seguintes casos

1. $i = j = 0$,
2. $i = j + 1$
3. $i = 0, j = d_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

O *shift* gerado pela matriz de transição A é um *shift de renewal* (Veja figura 2.1). Como visto anteriormente a matriz transposta também define um *shift de renewal*. Se $\limsup_n (d_{n+1} - d_n) > 1$ o *shift de renewal* por ela definido não satisfaz as propriedades BP nem BI.

A otimização ergódica para *shifts de renewal* está caracterizada usando o teorema 2, e outros resultados conhecidos que serão rescritos aqui para facilitar a leitura.

Figura 2.1: Shift de renewal.

Teorema 2 ([BF14]). *Seja Σ um shift topologicamente transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo, então existem medidas maximizantes para f e um subshift compacto Σ_{K_0} tal que toda medida maximizante tem suporte contido em Σ_{K_0} .*

Teorema 6 ([Sar01b]). *Seja Σ um shift de renewal e f um potencial localmente Hölder Contínuo tal que $\sup f < \infty$. Então existe uma constante $\beta_c \in (0, \infty]$ tal que,*

1. *Para $0 < \beta < \beta_c$ existe um estado de equilíbrio correspondente a βf . Para $\beta \geq \beta_c$ não existe estado de equilíbrio.*
2. *$P(\beta f)$ é real analítica em $(0, \beta_c)$ e linear em (β_c, ∞) . Em β_c é contínua mas não analítica.*

Teorema 7 ([Iom07]). *Seja Σ um shift de renewal e f um potencial localmente Hölder Contínuo tal que $\sup f < \infty$. Então*

1. *Se $\beta_c = \infty$, existem medidas maximizantes para f .*
2. *Se $\beta_c < \infty$, então não existem medidas maximizantes e $m(f)$ é a pendente da parte linear de $P(\beta f)$.*

Se $\beta_c = \infty$, algumas das medidas maximizantes podem ser descritas como limite de medidas de equilíbrio.

Como consequência desses teoremas temos o seguinte

Corolário 1. *Seja Σ um shift de renewal e f um potencial localmente Hölder Contínuo e coercivo, então existem medidas maximizantes para f e um subshift finito Σ_{K_0} transitivo tal que toda medida maximizante tem suporte contido em Σ_{K_0} . Além disso, a função $P(\beta f)$ é real analítica em $(1, \infty)$ e todo ponto de acumulação dos estados de equilíbrio é uma medida maximizante.*

Capítulo 3

Barreira de Peierls

A barreira de Peierls e o potencial de Mañé têm sido usados na otimização ergódica para mostrar a existência de subações calibradas em *shifts* compactos transitivos [CLT01, GL08] e *shifts* finitamente primitivos [BMP16]. Neste capítulo estas funções são generalizadas para o caso de *shifts* topologicamente transitivos e potenciais coercivos de variação finita. No conhecimento do autor esta é a primeira vez que esse conceito é utilizado em *shifts* transitivos sem a propriedade BIP. É demonstrado, usando argumentos parecidos com [BF14, CLT01, GL08], que essas funções definem uma subação calibrada, limitada em cilindros e uniformemente contínua. Também são provadas algumas propriedades importantes e por meio de exemplos são mostradas as diferenças com o caso BIP.

Ao longo deste capítulo Σ denota um *shift* transitivo de alfabeto enumerável e f um potencial coercivo, de variação finita. Essas hipóteses implicam a existência de medidas maximizantes [BF14]. Além disso, é assumido que a medida maximizante é única.

Inicialmente é definido o conceito de ponto f -não errante, depois é provado que todo ponto do suporte de uma medida maximizante é um ponto f -não errante. Posteriormente é fixado um ponto $\bar{y}$ no suporte da medida maximizante para definir a barreira de Peierls e o potencial de Mañé. Os quais coincidem nessas condições, veja proposição 2.

Seja $m := m(f)$. Então $m \geq \int f d\mu$ para toda medida de probabilidade invariante μ , em particular para medidas periódicas. Se $p \in \Sigma$ é um ponto periódico de período n e μ_p é a medida invariante associada a esse ponto periódico,

$$m \geq \int f d\mu_p = \frac{1}{n} S_n f(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(p)).$$

Definição 8. $x^0 \in \Sigma$ é f -não errante se para todo $\epsilon > 0$ existem $z \in \Sigma$ e um inteiro positivo n tais que $d(z, x^0) < \epsilon$, $\sigma^n(z) = x^0$ e

$$|S_n(f - m)(z)| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} (f - m)(\sigma^j(z)) \right| < \epsilon.$$

O conjunto dos pontos f -não errantes é notado por $\Omega(\Sigma)^1$.

A existência de pontos f -não errantes no caso compacto [CLT01], aplicado no *subshift* finito Σ_{k_0}

---

¹Alternativamente, pode ser usada a condição $d(\sigma^n(z), x^0) < \epsilon$, sendo as duas definições equivalentes.

que contém o suporte das medidas maximizantes de f , implica que o conjunto $\Omega(\Sigma)$ é não vazio. Além disso o suporte de toda medida maximizante está contido em $\Omega(\Sigma_{k_0})$ [CLT01]. Por outro lado, é claro que

$$\bigcup_{k \geq k_0} \Omega(\Sigma_k) \subset \Omega(\Sigma).$$

Agora é definida a barreira de Peierls.

Definição 9. *Sejam $x, y \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$, defina*

$$S_f^\epsilon(y, x) := \sup_n \sup_z \{S_n(f - m)(z) : d(y, z) < \epsilon, \sigma^n(z) = x\}$$

e

$$S_f(y, x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_f^\epsilon(y, x).$$

A função $S_f(y, x)$ é chamada *barreira de Peierls*. Uma definição equivalente para S_f é dada pela seguinte construção.

Para cada $x, y \in \Sigma$ e cada $\epsilon > 0$ seja

$$\begin{aligned} \bar{S}_f^\epsilon(y, x) &:= \sup_n \sup_z \{S_n(f - m)(z) : d(y, z) < \epsilon, d(\sigma^n(z), x) < \epsilon\} \\ \bar{S}_f(y, x) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{S}_f^\epsilon(y, x). \end{aligned}$$

Evidentemente $\bar{S}_f^\epsilon(y, x) \geq S_f^\epsilon(y, x)$. Se $x, y \in \Sigma$ são fixados, então $\bar{S}_f^\epsilon(y, x)$ e $S_f^\epsilon(y, x)$ são funções decrescentes na variável ϵ . Note que para o primeiro caso considera o supremo da soma ergódica parcial para $(f - m)$ de pontos ϵ -próximos de y que são pré-imagem de x e na segunda toma pré-imagens próximas a y de pontos próximos a x , este processo procura minimizar o custo de ir desde y até x .

Proposição 2. *Sejam $x, y \in \Sigma$. Se existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{S}_f^\epsilon(y, x) < \infty$, então $S_f(y, x) = \bar{S}_f(y, x)$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $x \in \Sigma$ tal que $\bar{S}_f^\epsilon(y, x) < \infty$, então existe M tal que para todo $\tilde{z}$ da forma

$$\tilde{z} = y_0 y_1 \dots y_l w_{l+1} \dots w_{n-1} x_0 x_1 \dots x_l \tilde{z}_{n+l} \dots$$

$S_n f(\tilde{z}) \leq M$, em particular para todo z tal que $d(z, y) < \epsilon$ e $\sigma^n(z) = x$

$$S_n f(z) \leq M.$$

Isso implica que $S_f^\epsilon(y, x) < \infty$ e portanto $S_f(y, x) < \infty$. Note que $d(z, \tilde{z}) < \lambda^n$ e $d(\sigma^n(\tilde{z}), x) < \epsilon$, então

$$|\bar{S}_f^\epsilon(y, x) - S_f^\epsilon(y, x)| \leq \text{Var}_l(f).$$

Onde $l \rightarrow \infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ pode se concluir que $S_f(y, x) = \bar{S}_f(y, x)$.

□

De agora em diante é fixado um $\bar{y} \in \text{supp}(\mu_{\max}) \subset \Omega$. Seja $S_f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S_f(x) := S_f(\bar{y}, x).$$

Neste texto S_f é chamada a barreira de Peierls, é importante deixar claro que essa função depende do $\bar{y}$ escolhido. Os resultados aqui obtidos são válidos para essa família de potenciais indexados por pontos no suporte da medida maximizante $\mu_{\max}$.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema. A versão no caso compacto aparece, por exemplo, em [CLT01, GLT09]. A versão no caso BIP pode ser encontrada em [Pé15] e [BMP16].

Teorema A. *Seja Σ um shift topologicamente transitivo e f um potencial coercivo e de variação finita com medida maximizante única. Seja $S_f := S_f(\bar{y}, \cdot)$, a barreira de Peierls, onde $\bar{y}$ é um ponto no suporte da medida maximizante $\mu_{\max}$. Então S_f é uma subação calibrada, uniformemente contínua e limitada superiormente.*

Inicialmente é provado que a barreira de Peierls está bem definida (é finita em cada $x \in \Sigma$) isso é realizado na primeira seção. A ideia é mostrar que na definição de S_f podem ser considerados z construídos com palavras que conectam uma vizinhança de $\bar{y}$ com x usando palavras em um alfabeto finito (veja lema 4), nesta parte são usados argumentos parecidos com aqueles usados em [BF14, FV15]. Depois é usada a teoria sobre a barreira de Peierls no caso compacto [CLT01, GL08]. Na segunda seção é mostrado que S_f é uma subação calibrada uniformemente contínua. Na terceira seção é realizada a demonstração da limitação superior concluindo a prova do teorema A. Da demonstração aparecem outras propriedades herdadas do caso compacto e que foram provadas para *shifts* de Markov com a propriedade BIP em [BMP16]. Essas propriedades e outras consequências são mostradas na seção 3.4. Uma diferença importante com os casos BIP e compacto é que a barreira de Peierls pode não ser limitada inferiormente. No teorema D é mostrado que S_f é limitada se e somente se Σ satisfaz BP. No final do capítulo é mostrado um exemplo onde S_f não é limitada.

3.1 Definição da barreira

O seguinte lema garante que para todo ϵ , $S_f^\epsilon(\bar{y}, x) < \infty$, ou seja, que a barreira está bem definida. Os argumentos usados foram inspirados nas construções e limitações [BMP16] ou [GL08]. Porém, as limitações em nosso caso dependem da primeira letra de x , comparando com os artigos mencionados, nesses argumentos é fortemente usado o fato de que Σ seja finitamente primitivo para obter uma limitação uniforme.

Lema 1. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo. Então $S_f(x) < \infty$ para todo $x \in \Sigma$.*

Demonstração. Como foi observado anteriormente, a função $S_f^\epsilon(y, x)$ é decrescente em ϵ , quando fixados x e y , então é suficiente mostrar que para cada $x \in \Sigma$ e cada $\epsilon > 0$, $S_f^\epsilon(y, x) < \infty$.

Sejam $x \in \Sigma$ e $\epsilon \in (0, 1)$. Um ponto $z \in \Sigma$ tal que $d(\bar{y}, z) < \epsilon$ e $\sigma^n(z) = x$, pode ser escrito da forma

$$z = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_l w_{l+1} \dots w_{n-1} x$$

Onde $\bar{y} = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots$ e $\lambda^{l+1} < \epsilon < \lambda^l$.

Dado que o *shift* é transitivo, para cada x_0 existe uma palavra permitida $v = v(x_0, \bar{y}_0)$ que conecta x_0 com $\bar{y}_0$, isto é, $x_0 v \bar{y}_0$ é uma palavra permitida. Seja $\tilde{z} \in \Sigma$ definido por

$$\tilde{z} = \bar{y}_0 y_1 \dots \bar{y}_l w_{l+1} \dots w_{n-1} x_0 v \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots$$

Note que $\tilde{z}$ é um ponto periódico de período $n + A$, com $A = |v|$. Dessa forma

$$S_{n+A}f(\tilde{z}) \leq m(n + A)$$

ou equivalentemente

$$S_n f(\tilde{z}) - nm \leq Am - S_A f(\sigma^n(\tilde{z})).$$

Escrevendo $\tilde{z} = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2 \dots$ e $v = v_1 v_2 \dots v_A$ note que $\tilde{z}_n = x_0$, $\tilde{z}_{n+1} = v_1, \dots, \tilde{z}_{n+A} = v_A$. Considere

$$\alpha := \inf_j \{ \inf_{f|_{[\tilde{z}_j]}} : j \in [n, n + A] \} > -\infty$$

Então

$$S_A f(\sigma^n(\tilde{z})) \geq A\alpha.$$

Portanto

$$S_n f(\tilde{z}) - nm \leq A(m - \alpha). \quad (3.1)$$

Por outro lado $d(z, \tilde{z}) < \lambda^{n+1}$, logo

$$S_n(f - m)(z) - S_n(f - m)(\tilde{z}) \leq \sum_{j=0}^n \text{Var}_j(f) \leq \text{Var}(f). \quad (3.2)$$

Dessa forma, usando (3.1) e (3.2)

$$S_n f(z) - nm \leq S_n f(\tilde{z}) - nm + \text{Var}(f) \leq A(m - \alpha) + \text{Var}(f).$$

Tomando $\sup_n \sup_z$ pode-se concluir que para todo $\epsilon > 0$

$$S_f^\epsilon(x) \leq A(m - \alpha) + \text{Var}(f) < \infty.$$

Finalmente tomando limite quando ϵ vai para zero, (observe que A, α não dependem de ϵ) pode se concluir que $S_f(x) < \infty$. $\square$

Lembrando que Σ_k é a família de *subshifts* compactos construídos anteriormente e S_{f_k} denota a barreira de Peierls para Σ_k e $f_k = f|_{\Sigma_k}$, então para $x \in \Sigma_k$

$$S_{f_k}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_n \sup_z \{ S_n(f - m)(z) \mid \sigma^n(z) = x, d(z, \bar{y}) < \epsilon, \text{ e } z \in \Sigma_k \}.$$

É claro, das definições, que $S_{f_k}(x) \leq S_f(x)$ para todo $x \in \Sigma_k$. Sem perda de generalidade, é assumido que Σ_1 contém o suporte da medida maximizante, isto é, $k_0 = 1$.

Na prova do lema 1 se observa que como $\bar{y}$ está fixado, tanto A quanto α dependem unicamente

de x_0 , em particular,

$$\sup S_f|_{[a]} \leq (m - \alpha_a)A_a + \text{Var}(f).$$

Essa observação é importante no momento de restringir a barreira de Peierls a *subshifts* finitos.

O seguinte lema usa fortemente o fato de $\bar{y}$ ser ponto do suporte de uma medida maximizante pois, em particular, é f -não errante.

Lema 2. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo. Para todo $x \in \Sigma$, $S_f(x) > -\infty$.*

Demonstração. Dado $x \in \Sigma_k$, tem-se que $S_{f_k}(x) > -\infty$ pois $\bar{y} \in \Omega(\Sigma_k)$ [CLT01, GL08]. Assim, $S_f(x) \geq S_{f_k}(x) > -\infty$.

Para x arbitrário considere $\tilde{x}$ em algum compacto Σ_k tal que $d(x, \tilde{x}) < \lambda^2$. Dado z da forma

$$z = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_l w_{l+1} \dots w_{n-1} x.$$

Considere $\tilde{z}$ definido por

$$\tilde{z} = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_l w_{l+1} \dots w_{n-1} \tilde{x}.$$

Como f tem variação finita e $d(z, \tilde{z}) < \lambda^{n+2}$, $S_n f(z) > S_n f(\tilde{z}) - \sum_{j \geq 2} \text{Var}(f)$, veja (2.2), tomando supremo em n e z e limite em $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos que $S_f(x) \geq S_f(\tilde{x}) - \text{Var}(f) > -\infty$. □

Esse último fato também mostra que S_f é uniformemente contínua pois se $d(x, y) < \lambda^n$ então

$$|S_f(x) - S_f(y)| \leq \sum_{j \geq n} \text{Var}_j(f). \quad (3.3)$$

Os lemas 1 e 2 mostram que S_f está bem definida (é finita) e como foi mencionado (3.3) mostra que é uniformemente contínua.

3.2 A barreira de Peierls como subação calibrada

Para mostrar que define uma subação considere $x, y \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = x$. Dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} S_f^\epsilon(x) &= \sup_n \sup_z \{S_n(f - m)(z) \mid d(z, \bar{y}) < \epsilon, \sigma^n(z) = x\} \\ &\geq \sup_n \sup_z \{S_{n-1}(f - m)(z) + f(y) - m \mid d(z, \bar{y}) < \epsilon, \sigma^{n-1}(z) = y\} \\ &= S_f^\epsilon(y) + f(y) - m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tomando limite em ϵ pode se concluir que $S_f(y) \leq S_f(x) - f(y) + m$.

Para terminar a prova do teorema é usado um argumento de corte do alfabeto baseado no argumento de [BF14]. São, de fato, dois cortes do alfabeto que visam restringir o tipo de pontos z a considerar na definição da barreira de Peierls em x . Estes cortes dependem apenas da primeira letra do ponto x . O primeiro corte, definido no lema 3, mostra que para cada $a \in \mathbb{N}$ existe um J tal que os pontos z que aparecem na definição da barreira de Peierls podem ser tomados com letras nem todas muito grandes. O segundo corte faz com que para cada a exista K suficientemente grande tal que o

supremo é atingido quando a palavra que une $\bar{y}$ com x tem todas suas letras menores que K (Veja lema 4).

Para simplificar a notação é assumido que $m = 0$ considerando $f' = f - m$.

Lema 3. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo. Para cada $a \in \mathbb{N}$ existe J tal que se $x \in [a]$, então*

$$S_f^\epsilon(x) = \sup_n \sup_z \{S_n f(z) : d(y, z) < \epsilon, \sigma^n(z) = x, \text{ existe } l < i < n \text{ com } z_i < J\}$$

para todo $\epsilon \in (0, 1)$. Onde l é o maior inteiro tal que $\lambda^l \geq \epsilon$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{N}$ e Σ_k um subshift compacto tal que o alfabeto $\mathcal{A}_k$ contenha as letras menores ou iguais que a e contenha o alfabeto $\mathcal{A}_{k_0}$, lembre que $\bar{y} \in \Sigma_{k_0}$. Σ_k é transitivo, então dado $b \in \mathcal{A}_k$ existe uma palavra $w_b^a \in \Sigma_k^*$ que conecta b com a . Seja $W = \{w_i^a | i \in \mathcal{A}\}$, W é um conjunto finito pois para cada letra i somente foi escolhida uma palavra que conecta i com a , seja N o maior comprimento das palavras em W .

Em virtude da coercividade de f , existe J tal que para todo $j > J$ e todo $i \in \mathcal{A}_k$

$$\sup f|_{[j]} < N(\inf f|_{[i]} - \text{Var}(f)). \quad (3.5)$$

sem perda de generalidade pode-se assumir que $\sup f|_{[j]} < 0$ para todo $j > J$.

Fixados $\epsilon > 0$ e $x \in [a]$, como já foi mencionado se $\sigma^n(z) = x$ e $d(z, \bar{y}) < \epsilon$, z é da forma $z = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_l w_{l+1} \dots w_{n-1} x$.

Se $w_j > J$ para todo $j \in \{l+1, l+2, \dots, n-1\}$ seja $\tilde{z} = \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots \bar{y}_l w_{\bar{y}_l}^a x$, observe que $\sigma^{\tilde{n}}(\tilde{z}) = x$ com $\tilde{n} = l + |w_{\bar{y}_l}^a|$ e que $d(\tilde{z}, \bar{y}) < \epsilon$.

$$\begin{aligned} S_n f(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(z)) \\ &= \sum_{j=0}^l f(\sigma^j(z)) + \sum_{j=l+1}^{n-1} f(\sigma^j(z)) \\ &\leq \sum_{j=0}^l f(\sigma^j(\tilde{z})) + \text{Var}(f) + \sum_{j=l+1}^{n-1} \sup f|_{[w_j]}, \end{aligned}$$

como $\sup f|_{[j]} < 0$ para todo $j > J$ e $w_i > j$ para $i = l+1, \dots, n-1$ e usando a condição (3.5),

$$\begin{aligned} S_n f(z) &\leq \sum_{j=0}^l f(\sigma^j(\tilde{z})) + \text{Var}(f) + \sup f|_{[w_{l+1}]} \\ &\leq \sum_{j=0}^l f(\sigma^j(\tilde{z})) + \text{Var}(f) + (\inf_j \inf f|_{[\tilde{z}_j]})N - \text{Var}(f) \\ &\leq S_{\tilde{n}} f(\tilde{z}). \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo z tal que $d(z, \bar{y}) < \epsilon$ e $\sigma^n(z) = x$ existe um $\tilde{z}$ com $d(\tilde{z}, \bar{y}) < \epsilon$ $\sigma^{\tilde{n}}(\tilde{z}) = x$ e

$S_{\tilde{n}}f(\tilde{z}) \geq S_nf(z)$, onde $\tilde{z}$ satisfaz $\tilde{z}_j < J$ para algum $l < j < n$, portanto o supremo pode ser tomado apenas sobre tais pontos. $\square$

O seguinte lema garante que o supremo pode, de fato, ser tomado em pontos z com letras iniciais (aquelas que aparecem em z antes de x_0) em um alfabeto finito que depende apenas da primeira letra do x .

Lema 4. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial de variação finita e coercivo. Para cada $a \in \mathbb{N}$ existe J tal que se $x \in [a]$ e $\epsilon \in (0, 1)$,*

$$S_f^\epsilon(x) = \sup_n \sup_z \{S_nf(z) : d(y, z) < \epsilon, \sigma^n(z) = x, e \ z_i < J \ \forall i < n\}$$

onde l é o maior inteiro tal que $\lambda^l \geq \epsilon$.

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{N}$ pelo lema 3 existe $J = J(a)$ tal que para todo $x \in [a]$ e todo $\epsilon > 0$, $S_f^\epsilon(x)$ pode ser definido por

$$S_f^\epsilon(x) = \sup_n \sup_z \{S_nf(z) : d(y, z) < \epsilon, \sigma^n(z) = x, \text{ existe } l < i < n \text{ com } z_i < J\}$$

Considere Σ_{k_2} tal que $\mathcal{A}_{k_2}$ contenha todas as letras menores que $J + 1$, então $\Sigma_{k_0} \subset \Sigma_k \subset \Sigma_{k_2}$ e $\{0, 1, 2, 3 \dots J\} \subset \mathcal{A}_{k_2}$. Da coercividade da f , segue que existe I tal que para todo $i \in \mathcal{A}_{k_2}$ e todo $j > I$

$$\sup f|_{[j]} < N_2 \inf f|_{[i]} - \text{Var}(f). \quad (3.6)$$

N_2 é definido pela seguinte construção. Para cada $i_1, i_2 \in \mathcal{A}_{k_2}$ seja $w_{i_1}^{i_2}$ uma palavra permitida em Σ_{k_2} que conecta i_1 com i_2 . Seja $W_2 = \{w_{i_1}^{i_2} \mid i_1, i_2 \in \mathcal{A}_{k_2}\}$, W_2 é um conjunto finito de palavras pois para cada par de elementos do alfabeto $\mathcal{A}_{k_2}$ é escolhida uma única palavra. Denote por N_2 o maior comprimento das palavras em W_2 .

Como consequência do lema 3, pode-se assumir que $\sup f|_{[j]} < 0$ para todo $j \notin \mathcal{A}_{k_2}$.

Dados $x \in [a]$ e $\epsilon > 0$, se $z \in \Sigma$ satisfaz $d(z, \bar{y}) < \epsilon$, $\sigma^n(z) = x$ e existe $k < n$ tal que $z_k > I$, então existem $i_I < k$ e $i_D > k$ tais que $i_I, i_D \in \mathcal{A}_{k_2}$ e para todo $i_I < i < i_D$, $z_i \notin \mathcal{A}_{k_2}$. Então z pode ser escrito da forma

$$z = \bar{y}_0 \dots \bar{y}_l z_{l+1} \dots z_{i_I-1} z_{i_I} z_{i_I+1} \dots z_k \dots z_{i_D-1} z_{i_D} z_{i_D+1} \dots z_{n-1} x.$$

Seja $\tilde{z}$ definido da seguinte forma, note que $z_{i_I+1} \dots z_k \dots z_{i_D-1}$ é substituído por $w_{i_I}^{i_D}$ que é uma palavra permitida em W_2 .

$$\tilde{z} = \bar{y}_0 \dots \bar{y}_l z_{l+1} \dots z_{i_I-1} z_{i_I} w_{i_I}^{i_D} z_{i_D} z_{i_D+1} \dots z_{n-1} x.$$

Então $\tilde{z}$ satisfaz $d(\tilde{z}, \bar{y}) < \epsilon$, $\sigma^{\tilde{n}}(\tilde{z}) = x$ onde $\tilde{n} = i_D + |w_{i_I}^{i_D}| + (n - i_D)$. Agora é provado que

$$S_n f(z) \leq S_{\tilde{n}} f(\tilde{z}).$$

$$\begin{aligned} S_n f(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(z)) \\ &= \sum_{j=0}^{i_I} f(\sigma^j(z)) + \sum_{j=i_I+1}^{i_D-1} f(\sigma^j(z)) + \sum_{j=i_D}^{n-1} f(\sigma^j(z)). \end{aligned}$$

Para a primeira soma, $d(z, \tilde{z}) < \lambda^{i_I}$, então

$$\sum_{j=0}^{i_I} f(\sigma^j(z)) \leq \sum_{j=0}^{i_I} f(\sigma^j(\tilde{z})) + \text{Var}(f). \quad (3.7)$$

A segunda soma satisfaz

$$\sum_{j=i_I+1}^{i_D-1} f(\sigma^j(z)) \leq f(\sigma^{i_I}(z))$$

pois $\sup f|_{[j]} < 0$ para todo $j > J$, além disso, em virtude da equação (3.6),

$$f(\sigma^{i_I}(z)) \leq N_2 \left(\inf_{i \in \mathcal{A}_{k_2}} \inf_{y \in [i]} f(y) \right) - \text{Var}(f).$$

Note também que, denotando $C = |w_{i_I}^{i_D}|$

$$N_2 \left(\inf_j \inf_{y \in [\tilde{z}_j]} f(y) \right) \leq \sum_{j=i_I}^{i_I+C} f(\sigma^j(\tilde{z})),$$

logo

$$\sum_{j=i_I+1}^{i_D-1} f(\sigma^j(z)) \leq \sum_{j=i_I}^{i_I+C} f(\sigma^j(\tilde{z})). \quad (3.8)$$

Finalmente, observe que $\sigma^{i_D}(z) = \sigma^{i_I+C}(\tilde{z})$, então

$$\sum_{j=i_D}^{n-1} f(\sigma^j(z)) = \sum_{j=i_I+C}^{\tilde{n}-1} f(\sigma^j(\tilde{z})). \quad (3.9)$$

Somando (3.7), (3.8) e (3.9), pode-se concluir que

$$S_n f(x) \leq S_{\tilde{n}} f(\tilde{z}).$$

Repetindo esse argumento finitas vezes pode-se encontrar $z' \in \Sigma$ tal que $\sigma^{n'}(z') = x$, $d(z', \bar{y}) < \epsilon$, $z'_i < J_2$ para todo $j < n$ e $S_{n'} f(z') \geq S_n f(z)$.

□

O lema 4 permite generalizar várias propriedades da barreira de Peierls, a primeira consequência é que restrito a um *subshift* compacto Σ_J , S_f coincide com S_{f_K} para algum $K \geq J$.

Proposição 3. *Se $J \geq K_0$, então existe $K \geq J$ tal que para todo $x \in \Sigma_J$ tem-se $S_f(x) = S_{f_K}(x)$.*

Além disso para cada ponto $x \in \Sigma_J$ existe $y \in \Sigma_K$ tal que $\sigma(y) = x$ e

$$S_f(y) = S_f(x) - f(y) + m.$$

Demonstração. Para provar a primeira parte seja $I = \max\{J(i) | i \in \mathcal{A}_k\}$ onde $J(i)$ vem do lema 4, dessa forma para todo $x \in \Sigma_J$

$$S_f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_n \sup_z \{S_n(f)(z) | \sigma^n(z) = x, d(z, \bar{y}) < \epsilon, z_j < I \quad \forall j \leq n\}.$$

Se Σ_K é tal que $\{0, 1, 2 \dots I\} \subset \mathcal{A}_J$, então $S_f(x) = S_{f_K}(x)$ para todo $x \in \Sigma_J$.

Para provar a segunda parte da proposição, note que se $S_f(x) = S_{f_K}(x)$ e $y \in \Sigma_K$ é tal que $\sigma(y) = x$, $S_{f_K}(y) = S_{f_K}(x) - f(y) + m$, então

$$\begin{aligned} S_f(x) &= S_{f_K}(x) = S_{f_K}(y) + f(y) - m \\ &\leq S_f(y) + f(y) - m \leq S_f(x). \end{aligned}$$

Logo todas as desigualdades são de fato igualdades, então $S_f(y) = S_{f_K}(y)$ e $S_f(y) = S_f(x) - f(y) + m$. $\square$

Como consequência da proposição anterior é possível mostrar que S_f é calibrada. A prova da seguinte proposição é uma adaptação do mesmo fato para *shift* compactos. É importante ressaltar que uma pré-imagem que calibra x pode ser de letra inicial grande pois S_f pode não ser limitada.

Proposição 4. [CLT01] S_f é uma subação calibrada.

Demonstração. Dado $x \in \Sigma$ seja $z^k \rightarrow \bar{y}$ tal que $\sigma^{n_k}(z^k) = x$ e $\lim_k S_{n_k}(f - m)(z^k) = S_f(x)$, pela proposição 3 assumo que para todo k , $z_i^k \leq I(x_0)$ para todo $i < n_k$. Em particular $z_{n_k-1}^k < I(x_0)$, então, existe $L < I$ e uma subsequência z^{k_j} tal que $z_{n_{k_j}-1}^{k_j} = L$. Seja $y = (Lx_0x_1\dots)$, observe que $\sigma^{n_{k_j}-1}(z^{k_j}) = y$ então

$$S_f(y) \geq \lim_j S_{n_{k_j}-1}(f - m)(z_{k_j})$$

somando $f(y) - m$ nos dois lados da desigualdade tem-se

$$S_f(y) + f(y) - m \geq \lim_j S_{n_{k_j}}(f - m)(z_{k_j}) = S_f(x).$$

Por outra parte, como S_f é subação, $S_f(x) \geq S_f(y) + f(y) - m$ e portanto $S_f(x) = S_f(y) + f(y) - m$. $\square$

3.3 Prova do teorema A

Nesta seção é realizada a demonstração do teorema principal deste capítulo.

Demonstração do teorema A. Seja Σ um *shift* transitivo e f um potencial coercivo de variação finita. Então S_f é um potencial uniformemente contínuo (lemas 1 e 2), Além disso usando a equação (3.4) e a proposição 4, S_f é uma subação calibrada.

Para mostrar que a barreira de Peierls é limitada superiormente, defina N tal que para todo $i > N$,

$$\sup f|_{[i]} < -Var(f).$$

Seja J suficientemente grande tal que $\{0, 1 \dots N\} \subset \mathcal{A}_J$ e para cada $i < N$ fixe $x^i \in \Sigma_J$ tal que $x^i \in \sigma([i])$. Dado $x \in \Sigma$ existem dois casos:

1. Existe $i < N$ tal que $ix \in \Sigma$.
2. Para todo $i < N$, $ix \notin \Sigma$.

Suponha que x satisfaz o primeiro caso. Note para todo $\epsilon > 0$ e todo z tal que $d(\bar{y}, z) < \epsilon$, usando o lema 4, pode se assumir que $z_i \leq K$ para todo $i < n$ onde K depende apenas do x_0 . Para cada $i < N$, se $\sigma^{n-1}(z) = i$, então para $\tilde{z} = z_0 z_1 \dots z_{n-2} i x^i$

$$S_n f(z) \leq S_n f(\tilde{z}) + Var(f).$$

Tomando supremo em z, n pode se concluir que

$$S_f^\epsilon(x) \leq \sup_{i < N} S_f^\epsilon(x^i) + Var(f) < \infty. \quad (3.10)$$

Caso 2. Seja $x \in \Sigma$ como no segundo caso. Dado $\epsilon > 0$ note que se n, z satisfazem $\sigma^n(z) = x$, $d(\bar{y}, z) < \epsilon$, então $z_{n-1} > N$. Aqui são considerados dois casos, o primeiro é que $z_i > N$ para todo $l < i < n$, onde $\lambda^l < \epsilon < \lambda^{l+1}$. Nesse caso $S_n f(z) < \sup S_n f(\bar{y}) + Var(f) < \infty$. No segundo caso existe $z_i < N$ com $l < i < n$, então considere $\tilde{x} := \sigma^i(z)$, portanto, $\tilde{x}$ satisfaz o primeiro caso. Tomando supremo em n e z e considerando (3.10), pode-se concluir que

$$S_f^\epsilon(x) < \sup_{i < N} S_f^\epsilon(x^i) + Var(f) < \infty.$$

□

Note que até aqui não foi usada a hipótese de unicidade da medida maximizante.

3.4 Propriedades da barreira de Peierls

Na seção anterior foi provado que a barreira de Peierls define uma subação calibrada e uniformemente contínua. Além disso a barreira definida em Σ coincide, quando restrita a um *subshift* finito, com a barreira definida em algum compacto Σ_k . ($S_f(x) = S_{f_k}(x)$ se $x \in \Sigma_j$) esse fato permitiu mostrar que S_f é calibrada. O seguinte lema permite encontrar uma pré-órbita calibrada contida em um *subshift* compacto se $x \in \Sigma_k$ para algum k .

Lema 5. *Seja $x \in \Sigma_k$ para algum $k \geq k_0$ então existe uma pré-órbita de x que S_f -calibra x . Isto é, uma sequência y^n tal que para todo $n \geq 0$ $\sigma^n(y^n) = x$ e $S_f(y^n) = S_f(y^{n-1}) - f(y^n) + m(f)$. Além disso pode-se escolher a sequência contida no compacto Σ_j tal que $S_f|_{\Sigma_k} = S_{f_j}$. Todo ponto de acumulação de y^n pertence ao suporte de uma medida maximizante.*

Demonstração. Seja $x \in \Sigma_k$, pela proposição 3, existe $J \geq k$ tal que $S_f|_{\Sigma_k} = S_{f_J}|_{\Sigma_k}$, em particular $S_f(x) = S_{f_J}(x)$. A barreira de Peierls S_{f_J} é calibrada em Σ_J , então existe $y \in \Sigma_J$ tal que $\sigma(y) = x$ e

$$S_{f_J}(y) = S_{f_J}(x) - f(y) + m = S_f(x) - f(y) + m \geq S_f(y). \quad (3.11)$$

Da definição, é claro que $S_f \geq S_{f_J}$, consequentemente $S_{f_J}(y) = S_f(y)$. Substituindo em (3.11), tem-se

$$S_f(y) = S_f(x) - f(y) + m.$$

Seja $y^1 := y$. Para y^1 existe $y^2 \in \Sigma_J$ tal que $S_{f_J}(y^2) = S_{f_J}(y) + f(y^2) + m(f)$ dessa forma $S_f(y^2) = S_{f_J}(y^2)$, e portanto $S_f(y^2) = S_f(y) + f(y^2) + m(f)$. Indutivamente pode-se construir a sequência y^n contida em Σ_J que calibra x . A sequência $(y^n)_{n \geq 1}$ está contida no *subshift* compacto Σ_J , então possui pontos de acumulação em Σ_J .

Para provar que todo ponto de acumulação dessa sequência é um ponto no suporte de uma medida maximizante suponha que $\lim_{i \rightarrow \infty} y^{n_i} = z$. A sequência de medidas $\mu_i = \delta_{y^{n_i}}$ está contida em $\mathcal{M}_\sigma(\Sigma_J)$ que é um conjunto compacto na topologia fraca*. todo ponto de acumulação dessa sequência de medidas é uma medida maximizante [BMP16], $\square$

Versões do seguinte teorema em *shift* compactos e *shift* finitamente primitivos foram provadas em [CLT01] e [BMP16] respectivamente. Uma diferença com a prova em [BMP16] é que neste contexto pode não existir uma subação limitada.

Teorema C. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial coercivo de variação finita com medida maximizante única. Seja S_f a barreira de Peierls definida por $S_f(x) = S_f(\bar{y}, x)$, onde $\bar{y}$ é um ponto na medida maximizante. Então*

1. *Se V é uma subação contínua, então para todo $x \in \Sigma$*

$$S_f(x) \leq V(x) - V(\bar{y}).$$

2. *Se f é um potencial Hölder contínuo, S_f tem variação finita.*

3. *Se existe uma subação contínua, calibrada e limitada V , então*

$$S_f(x) = V(x) - V(\bar{y})$$

em particular, duas subações calibradas e limitadas diferem por uma constante.

Demonstração. 1. Seja V uma subação contínua e $x \in \Sigma$. Para cada $y \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = x$, como V é subação, $V(y) \leq V(x) - f(y) + m(f)$, da mesma forma se $\sigma(y^2) = y$

$$\begin{aligned} V(y^2) &\leq V(y) - f(y^2) + m(f) \\ &\leq (V(x) - f(y) + m(f)) - f(y^2) + m(f) \\ &= V(x) - \sum_{j=0}^1 f(y^j) - m(f). \end{aligned}$$

Indutivamente, para todo $y \in \Sigma$ tal que $\sigma^n(y) = x$,

$$V(y) \leq V(x) - \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(y)) - m(f). \quad (3.12)$$

Como foi mostrado na prova do lema 4, existe uma sequência $(y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^{n_k}(y^k) = x$, $d(y^k, \bar{y}) \rightarrow 0$, e $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(f - m)(y^k) = S_f(x)$, aplicando (3.12) nesta sequência particular tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(y^k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} V(x) - \sum_{j=0}^{n_k-1} f(\sigma^j(y^k)) - m(f).$$

O limite da esquerda é $V(\bar{y})$, pela continuidade de V , então

$$V(\bar{y}) \leq V(x) - S_f(x).$$

Essa igualdade é equivalente à afirmação do teorema.

2. Lembre que $Var_l(S_f) \leq \sum_{j=l}^{\infty} Var_j(f)$, (3.3). Se f for Hölder contínua $Var_j(f) \leq A\theta^j$ portanto

$$Var(S_f) = \sum_{l \geq 1} Var_l(S_f) \leq \sum_{l \geq 1} \sum_{j=0}^{l-1} Var_j(f) = \sum_{l \geq 1} \sum_{j=0}^{l-1} A\theta^j.$$

A ultima soma é finita pois pode ser escrita da forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \theta^j.$$

3. Para demonstrar este item é usado o resultado correspondente em espaços compactos, [BLT06], para pontos em *subshifts* finitos. Depois é aproximado um ponto qualquer por uma sequência de pontos em *subshifts* compactos.

Afirmção 1. *Seja V uma subação calibrada limitada. Existe $\bar{K}$ tal que para todo $k \geq \bar{K}$, $V|_{\Sigma_k}$ é uma subação calibrada.*

Demonstração. Se $\sigma(y) = x$ e

$$V(y) = V(x) - f(y) + m,$$

então

$$f(y) = V(x) - V(y) + m \geq \inf V - \sup V + m. \quad (3.13)$$

Como f é coerciva, existe J tal que se $j > J$, então

$$\sup f|_{[j]} < \inf V - \sup V + m.$$

Portanto, todo ponto y que satisfaça (3.13) satisfaz $y_0 \leq J$. Se Σ_k satisfaz $\{0, 1, \dots, J\} \subset \mathcal{A}_k$, então para todo $x \in \Sigma_k$ existe $y \in \Sigma$ tal que $\sigma(y) = x$ e $V(y) = V(x) - f(y) + m$, como foi

observado acima $y_0 \leq J$, portanto $y \in \Sigma_k$. Então $V|_{\Sigma_k}$ é calibrada. $\square$

Para cada k , f_k é um potencial com medida maximizante única no *shift* compacto Σ_k , portanto para todo $j > J$ $V|_{\Sigma_j}$ é calibrada em Σ_j . Isso implica que para todo $x \in \Sigma_j$ e todo $y \in \text{supp}(\mu_{\max})$

$$V(x) = S_{f_k}(y, x) + V(y). \quad (3.14)$$

A igualdade em (3.14) é válida no conjunto denso $\cup_{j>J} \Sigma_j$, usando a continuidade de V e S_f , pode se concluir que essa equação vale para todo $x \in \Sigma$. Sejam V_1 e V_2 duas subações calibradas e limitadas e $x \in \Sigma$, então em virtude da equação (3.14)

$$V_1(x) - V_1(\bar{y}) = V_2(x) - V_2(\bar{y}).$$

Portanto

$$V_1(x) - V_2(x) = V_2(\bar{y}) - V_1(\bar{y}).$$

$\square$

Como já foi mencionado, S_f pode não ser limitada. O seguinte teorema dá uma condição suficiente e necessária para que S_f seja limitada.

Teorema D. *Sejam Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial coercivo de variação finita. Então S_f é limitada se, e somente se, Σ satisfaz BP.*

Observe que como consequência imediata do teorema anterior, tem-se a seguinte caracterização dos *shifts* que admitem subações calibradas e limitadas. Na literatura não foi achado um resultado deste tipo. Este corolário é importante no estudo do formalismo termodinâmico que é o tema do próximo capítulo.

Corolário 2. *Seja Σ um shift transitivo e f um potencial coercivo de variação finita. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

- a) f tem uma subação calibrada e limitada.
- b) S_f é limitada.
- c) Σ satisfaz BP.

Demonstração. É claro que b) $\Rightarrow$ a). Além disso, pelo item 4. do teorema C, b) $\Leftrightarrow$ c). Então basta mostrar que a) $\Rightarrow$ b)

Suponha que existe uma subação limitada e calibrada V , então pelo teorema C

$$S_f = V - V(\bar{y}).$$

Então $-\infty < \inf V - V(\bar{y}) \leq S_f(x) \leq \sup V - V(\bar{y}) < \infty$. $\square$

Agora é realizada a prova do teorema D.

Demonstração. Suponha que S_f é limitada.

Dado $x \in \Sigma$ existe y tal que $\sigma(y) = x$ e $S_f(y) = S_f(x) - f(y) + m(f)$, então

$$f(y) \geq \inf S_f - \sup S_f + m(f) := K > \infty.$$

Como f é coerciva, existe J tal que para todo $j > J$, $\sup f|_{[j]} < K$. Em particular, para todo ponto x existe y tal que $\sigma(y) = x$ tal que $y_0 < J$, isso é equivalente à propriedade BP (veja (2.1)).

Agora, suponha que Σ satisfaz a propriedade BP.

Considere I tal que para todo $x \in \Sigma$ existe $i < I$ com $ix \in \Sigma$. Para cada $i < I$ defina $x^i \in \Sigma_J$ tal que $ix^i \in \Sigma_J$, onde J é tomado tal que $i \in \mathcal{A}_J$ para todo $i < I$. Então dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in \Sigma$, existe z tal que $\sigma^n(z) = x$ e $d(z, \bar{y}) < \epsilon$, e $z_{n-1} < I$, mais ainda, existe $\tilde{z}$ tal que $\sigma^l(\tilde{z}) = x$ e $\tilde{z}_i < I$ para todo $i < l$. Isso implica que

$$S_f(x) \geq S_{f_J}(x^{z_{n-1}}) - \text{Var}f(f) > \infty.$$

Então para todo $x \in \Sigma$

$$S_f(x) \geq \inf_{i < I} S_{f_J}(x^i) - \text{Var}f(f) > \infty.$$

Portanto S_f é limitada inferiormente. A limitação superior foi provada no teorema A.

□

A seguir são listadas algumas consequências do corolário 2 para *shifts* topologicamente *mixing* com a propriedade BP.

Teorema 8. *Seja Σ um shift topologicamente mixing que satisfaz BP, então*

1. *Toda subação contínua para um potencial coercivo e de variação finita é limitada inferiormente.*
2. *Se f é coercivo e de variação finita, toda pré-órbita que S_f -calibre x , tem seus pontos de acumulação contidos no suporte da medida maximizante.*
3. *Existe J tal que para todo $k > J$,*

$$S_f|_{\Sigma_k} = S_{f_k}.$$

Demonstração. 1. Da propriedade BP e o corolário 2, S_f é limitado inferiormente. isto é, existe M tal que para todo $x \in \Sigma$ $S_f(x) \geq M$. por outra parte, do teorema C para toda subação V , $S_f \leq V - V(\bar{y})$, então para todo $x \in \Sigma$

$$V(x) \geq S_f(x) + V(\bar{y}) \geq M + V(\bar{y}).$$

Portanto V é limitada inferiormente.

2. Seja $x \in \Sigma$ e $(y^n)_{n \geq 1}$ sequência tal que $\sigma(y^n) = y^{n-1}$, $y_0 = x$ e $S_f(y^n) = S_f(y^{n-1}) - f(y^n) + m(f)$, e seja z um ponto de acumulação dos y^n , como Σ é BP existe J tal que $y_0^n \leq J$ para todo n ,
3. Seja J tal que todo ponto y que calibre algum ponto x tem-se $y_0 \leq J$. Se $\mathcal{A}_k$ contem todos os símbolos menores que $J + 1$ então para todo ponto de Σ_k existe um ponto, também em Σ_k que calibra x , isso implica que S_f restrito ao compacto Σ_k é uma subação calibrada, então

$S_f = S_{f_k}$ pois em compactos duas subações calibradas diferem por uma constante [GLT09] e $S_f(\bar{y}) = S_{f_k}(\bar{y})$.

□

3.5 Exemplo de *shift* sem subação calibrada limitada

Usando o corolário 2 podem-se construir exemplos de *shifts* topologicamente *mixing* que não possuem potenciais coercivos com subações calibradas limitadas. Considere Σ um *shift* de renewal tal que para alguma sequência d_n a matriz de transição A satisfaz $A(0, d_k) = 1$, $A(0, 0) = 1$ e $A(j, j-1) = 1$ e 0 em qualquer outro caso (veja figura 2.1). Desta forma, para qualquer potencial de variação finita e coercivo f , existe uma subação calibrada e limitada se, e somente se, existe J tal que $d_{i+1} = d_i + 1$ para todo $i > J$. Para provar esta afirmação basta observar que a condição dada é equivalente à propriedade BP para esse caso.

Capítulo 4

Formalismo termodinâmico

Recentemente foi provado um princípio dos grandes desvios para potenciais coercivos de variação finita e pressão finita em *shifts* finitamente primitivos [BMP16]. Neste capítulo é desenvolvido o formalismo termodinâmico para *shifts* topologicamente *mixing* e potenciais somáveis de variação finita e pressão finita com medida maximizante única, em particular inclui contextos onde não existem medidas de Gibbs ou, equivalentemente, quando Σ não satisfaz a propriedade BIP. É estudada a família de medidas de probabilidade $(\mu_\beta)_{\beta>1}$ onde cada μ_β é o estado de equilíbrio correspondente ao potencial βf . A existência dos estados de equilíbrio foi provada em [FV15]. Os argumentos usados neste trabalho são inspirados nos resultados correspondentes para o caso compacto [BLT06] e para o caso BIP [Pé15].

Seja Σ um *shift* topologicamente *mixing* e f um potencial somável, de variação finita e pressão finita. Em [FV15] foi provado que para todo $\beta > 1$ existe um estado de equilíbrio μ_β associado a βf . A prova é feita construindo uma sequência de *subshifts* compactos $(\Sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

1. $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1}$ para todo $k \geq 0$,
2. $\mathcal{A}_k$ contem $\{0, 1, 2 \dots n_k\}$ com $n_k < n_{k+1}$,
3. Cada Σ_k é topologicamente transitivo.

Usando essa sequência de *subshifts* compactos é demonstrado o seguinte

Teorema 9 ([FV15]). *Seja Σ um shift de Markov topologicamente transitivo e f um potencial somável, com pressão de Gurevic finita e $\text{Var}(f) < \infty$. Então para cada $\beta > 1$ existe um estado de equilíbrio μ_β associado ao βf , além disso a sequência μ_β , $\beta > 1$ tem um ponto de acumulação quando $\beta \rightarrow \infty$.*

Observe que no teorema anterior Σ é transitivo. Em particular, o teorema é valido para o caso topologicamente *mixing*.

O argumento usado na prova do teorema 9 é uma aproximação dos estados de equilíbrio de βf usando os estados de equilíbrio $\mu_{\beta,k}$ correspondentes a $\beta f_k = \beta f|_{\Sigma_k}$, de fato é provado que, para cada $\beta > 1$, a família $\mu_{\beta,k}$ é justa, que todo ponto de acumulação é um estado de equilíbrio e, portanto usando a unicidade de estados de equilíbrio [BS03],

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\beta,k} = \mu_\beta. \quad (4.1)$$

A existência de um estado de equilíbrio μ_β implica que o potencial βf é positivamente recorrente (veja definição 7). Portanto o estado de equilíbrio pode ser caracterizado pelo operador de Ruelle [BS03],

$$\mu_\beta = h_\beta \nu_\beta,$$

onde h_β é uma função positiva, uniformemente contínua que tal que

$$\mathcal{L}_{\beta f}(h_\beta) = \exp(P(\beta f))h_\beta,$$

ν_β é uma medida invariante, positiva em cilindros tal que

$$\mathcal{L}_{\beta f}^*(\nu_\beta) = \exp(P(\beta f))\nu_\beta$$

e $\int h_\beta d\nu_\beta = 1$.

Neste ponto é importante ressaltar que ν_β pode ser escolhida uma medida de probabilidade pois f é somável de variação finita [MU01]. Também é importante levar em conta que tanto a autofunção h_β quanto a automedida ν_β são únicas a menos multiplicação por uma constante positiva. Em outras palavras, se h é uma autofunção do operador de Ruelle e $\alpha > 0$, então αh também é uma autofunção com o mesmo valor próprio.

As técnicas usadas para mostrar a existência de automedidas para o operador de Ruelle [MU01] e de estados de equilíbrio [FV15] têm um fato comum: ambos argumentos usam uma aproximação usando subespaços compactos. Neste capítulo é usado esse tipo de argumento para mostrar alguns dos resultados obtidos.

O capítulo está organizado da seguinte forma. Na primeira parte é mostrado que a seguinte família possui pontos de acumulação (convergência uniforme em compactos) quando $\beta \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{1}{\beta} \log h_\beta \right)_{\beta > 1}. \quad (4.2)$$

Para mostrar a existência dos pontos de acumulação é provado que essa família é limitada e equicontínua em cilindros. Aplicando o teorema de Arzelá-Ascoli é mostrado que existem pontos de acumulação em cada cilindro. Finalmente é aplicado um argumento diagonal para mostrar a existência de pontos de acumulação no espaço inteiro. No caso BP a família resulta uniformemente limitada inferiormente (veja proposição 7). É mostrado também que os pontos de acumulação são subações contínuas.

Posteriormente é mostrado que para cada cilindro $C \subset \Sigma$ existem pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C)$ quando $\beta \rightarrow \infty$. Usando um argumento diagonal é provado que existem subsequências $\beta_j \rightarrow \infty$ tal que para todo cilindro existe o seguinte limite

$$\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}(C).$$

Na seção 4.3 a relação dos dois tipos de pontos de acumulação acima é estudada. Finalmente, é introduzida a conjectura 4.4. Essa conjectura é naturalmente válida em espaços compactos e BIP, veja [BLT06, BMP16]. Na última seção é provado o teorema B, note que uma das hipóteses desse teorema seria removida se a conjectura for verdadeira, neste caso o teorema B seria uma generalização

direta do teorema central em [BMP16].

4.1 Pontos de acumulação para a família $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$

Nesta seção é provado que existem pontos de acumulação para a família em (4.2). Inicialmente é mostrado que a família está limitada uniformemente em cilindros e portanto pelo teorema de Arzelà-Ascoli, possui pontos de acumulação para cada elemento da partição natural. Posteriormente é usado um argumento diagonal para mostrar que é possível encontrar pontos de acumulação uniforme em compactos do espaço inteiro. Finalmente é mostrado que esses pontos de acumulação definem subações contínuas.

Este tipo de argumento é similar ao usado em casos BIP e compactos, a diferença mais importante é que as limitações são locais e portanto é preciso concluir usando um argumento diagonal.

A seguinte proposição segue argumentos similares a [LM10, BMP16] onde aparece este resultado em *shifts* compactos e BIP, respectivamente.

Proposição 5. [LM10, BMP16] *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de pressão finita e variação finita. Para cada $\beta > 1$ seja h_β uma autofunção do operador de Ruelle $\mathcal{L}_{\beta f}$. Então se $d(x, y) < \lambda^l < 1$,*

$$\frac{h_\beta(x)}{h_\beta(y)} \leq \exp \left(\beta \sum_{j=l}^{\infty} \text{Var}_j(f) \right).$$

Com o intuito de simplificar um pouco a escrita, é usada a seguinte notação. $\gamma = \exp(P(\beta f))$, além disso, em

$$\sum_{|p|=n} \exp(S_n \beta f(px)) 1_{[a]}(px)$$

aparece somente o conjunto das palavras p de tamanho n tal que $px \in \Sigma$.

Demonstração. Seja $\beta > 1$, βf é positivamente recorrente, pois possui estado de equilíbrio [Sar01b], então para todo $x \in \Sigma$

$$\nu_\beta([a]) h_\beta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \mathcal{L}_{\beta f}^n 1_{[a]}(x).$$

Sejam x, y tais que $d(x, y) < \lambda^l$ com $l \geq 1$. Dada uma palavra permitida p de tamanho $n \geq 1$, $px \in \Sigma$ se e somente se $py \in \Sigma$ pois $x_0 = y_0$.

Então

$$\begin{aligned} \nu_\beta([a]) h_\beta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \mathcal{L}_{\beta f}^n 1_{[a]}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \sum_{|p|=n} \exp(S_n \beta f(px)) 1_{[a]}(px) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \sum_{|p|=n} \exp(S_n \beta f(px) - S_n \beta f(py)) 1_{[a]}(px) \exp(S_n \beta f(py)). \end{aligned}$$

Em virtude da desigualdade (2.2), para todo p tal que $px \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \beta S_n f(px) - \beta S_n f(py) &\leq \beta \sum_{j=1}^n \text{Var}_{l+j} f \\ &\leq \beta \sum_{j=l}^{\infty} \text{Var}_j f. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \nu_\beta([a])h_\beta(x) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}_{l+j} f\right) \sum_{|p|=n} 1_{[a]}(py) \exp(S_n \beta f(py)) \\ &\leq \exp\left(\beta \sum_{j=l}^{\infty} \text{Var}_j f\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{-n} \mathcal{L}_{\beta f}^n 1_{[a]}(y) \\ &= \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}_j f\right) h_\beta(y) \nu_\beta([a]). \end{aligned}$$

□

Daqui para frente é fixado um $\bar{y} = \bar{y}_0 \dots \bar{y}_n \dots$ no suporte da medida maximizante μ_{max} , essa medida maximizante é assumida única. Sem perda de generalidade pode-se assumir que $h_\beta(\bar{y}) = 1$ para todo β pois os auto vetores do operador de Ruelle são únicos a menos de multiplicação por uma constante [Sar01b].

Na seguinte proposição são calculadas as cotas para h_β em cada cilindro, essas limitações são usadas para garantir existência de pontos de acumulação para família de funções $\frac{1}{\beta} \log(h_\beta)$. É importante ressaltar que as cotas dependem do cilindro $[a]$ considerado. No caso BIP estas cotas podem ser tomadas uniformes [BMP16].

Proposição 6. *Para cada $a \in \mathbb{N}$ existem $L_a, l_a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\beta > 1$ e todo $x \in [a]$*

$$\exp(\beta l_a) \leq h_\beta(x) \leq \exp(\beta L_a).$$

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $x \in [a]$, como Σ é topologicamente *mixing*, existe uma palavra permitida $w_{\bar{y}_0}^a$ que conecta $\bar{y}_0$ com $a = x_0$. Então $z = \bar{y}_0 w_{\bar{y}_0}^a x$ pertence a Σ , e $z_0 = \bar{y}_0$. Usando o lema 5 tem-se que

$$\frac{h_\beta(\bar{y})}{h_\beta(z)} \leq \exp(\beta \text{Var}(f))$$

note que $\sigma^n(z) = x$ onde $n = |w_{\bar{y}_0}^a| + 1$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta f}^n h_\beta(x) &= \sum_{|p|=n} \exp(S_n f(px)) h_\beta(px) \\ &\geq \exp(S_n f(z)) h_\beta(z). \end{aligned}$$

Por outro lado, h_β satisfaz $\mathcal{L}_{\beta f}^n h_\beta = \exp(nP(\beta f))h_\beta$, então

$$\begin{aligned} \exp(nP(\beta f))h_\beta(x) &\geq \exp(S_n\beta f(z))h_\beta(z) \\ &\geq \exp(S_n\beta f(z)) \frac{h_\beta(\bar{y})}{\exp(\beta \text{Var}(f))} \end{aligned}$$

e como $h_\beta(\bar{y}) = 1$, obtém-se que

$$\begin{aligned} h_\beta(x) &\geq \exp(\beta S_n f(z) - nP(\beta f) - \beta \text{Var}(f)) \\ &\geq \exp(\beta[S_n f(z) - nP(f) - \text{Var}(f)]). \end{aligned}$$

Inicialmente, a cota depende de x pois o z foi definido por $z = \bar{y}_0 w_{\bar{y}_0}^a x$. Para obter uma cota uniforme em $[a]$ considere $x_a \in [a]$ fixado e $z_a = \bar{y}_0 w_{\bar{y}_0}^a x_a$, então para todo $x \in [a]$ e z como acima,

$$S_n f(z_a) \geq S_n f(z) - \text{Var}(f).$$

Dessa forma,

$$h_\beta(x) \geq \exp(\beta(S_n f(z_a) - nP(f) - 2\text{Var}(f))). \quad (4.3)$$

Para a cota superior é usado um argumento similar. Seja $a \in \mathbb{N}$, existe palavra permitida $w_a^{\bar{y}_0}$ que conecta a com $\bar{y}_0$, defina

$$\tilde{z} = aw_a^{\bar{y}_0} \bar{y}_0 \bar{y}_1 \dots$$

é claro que existe n tal que $\sigma^n(\tilde{z}) = \bar{y}$. Usando a definição do operador de Ruelle,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\beta f}^n h_\beta(\bar{y}) &= \sum_{|p|=n} \exp(\beta S_n f(p\bar{y})) h_\beta(p\bar{y}) \\ &\geq \exp(\beta S_n f(\tilde{z})) h_\beta(\tilde{z}). \end{aligned}$$

Note que $\tilde{z}_0 = x_0 = a$ então, usando a proposição 5

$$\frac{h_\beta(\tilde{z})}{h_\beta(x)} \geq \exp(-\text{Var}(\beta f)).$$

Substituindo na desigualdade anterior,

$$h_\beta(x) \leq \exp(-\beta S_n f(\tilde{z}) + nP(\beta f) + \beta \text{Var}(f)).$$

Dessa forma, basta tomar

$$l_a = S_n f(z_a) - nP(f) - 2\text{Var}(f), \quad (4.4)$$

onde z é da forma $z = \bar{y}_0 w_{\bar{y}_0}^a x_a$ para algum $x_a \in [a]$ e

$$L_a = -S_n f(\tilde{z}) + nP(f) + \text{Var}(f), \quad (4.5)$$

com $\tilde{z}$ da forma $\tilde{z} = aw_a^{\bar{y}_0} \bar{y}$. □

Os n que aparecem em 4.4 e 4.5 podem ser diferentes. Por facilidade de leitura foram denotadas

dessa forma.

Tanto L_a quanto l_a dependem fortemente de a , mas como é mostrado na seguinte proposição, no caso em que Σ satisfaz a propriedade BP (veja (2.1)), a cota inferior pode ser tomada uniforme, isto é, l não depende de a . A ideia da prova é observar que para cada a a cota depende de uma palavra que conecte $\bar{y}_0$ com a . A propriedade BP permite encontrar um conjunto finito de palavras ligantes. A demonstração é feita seguindo ideias de [BMP16].

Proposição 7. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de variação finita e pressão finita. Suponha que Σ satisfaz a propriedade BP. Então existe l tal que para todo $\beta > 1$ e $x \in \Sigma$*

$$h_\beta(x) \geq \exp(\beta l)$$

Demonstração. Como foi mostrado no lema 6, para cada a existe um $l_a = S_n f(z_a) - nP(f) - 2\text{Var}(f)$ onde $z_a = \bar{y}_0 w x_a$ e x_a é um ponto no cilindro $[a]$. Por outro lado, da propriedade BP, existe J tal que para todo $x \in \Sigma$ existe uma preimagem na união finita de cilindros

$$\bigcup_{j=0}^J [j], \quad (4.6)$$

em particular existe um conjunto finito de palavras permitidas W tal que para todo a , existe uma palavra $w \in W$ tal que $\bar{y}_0 w a$ é permitida. Considere, para cada w , z_w um ponto em $[\bar{y}_0 w]$.

Para cada $a \in \mathbb{N}$ seja $\hat{z}_a = \bar{y}_0 w x_a$ onde x_a vem da proposição acima (veja 4.4), tomando $n_w = |w|$ tem-se

$$S_{n_w} f(\hat{z}_a) \geq S_{n_w} f(z_w) - \text{Var}(f). \quad (4.7)$$

Pela finitude do conjunto W , para todo $x \in \Sigma$

$$h_\beta(x) \geq \inf_{w \in W} \exp(\beta(S_{n_w} f(z_w) - 3\text{Var}(f) - n_w P(f))).$$

Então, $l := \inf_{w \in W} \exp(\beta(S_{n_w} f(z_w) - 3\text{Var}(f) - n_w P(f)))$ satisfaz as condições da proposição. $\square$

Agora deseja-se mostrar que a família de funções em (4.2) tem pontos de acumulação quando β vai para infinito e que os pontos de acumulação são subações contínuas. No caso compacto e caso BIP os correspondentes pontos de acumulação resultam subações calibradas e limitadas. Essas duas propriedades nem sempre são válidas para *shifts* topologicamente *mixing* em geral.

Inicialmente é mostrado que a família considerada é equicontínua e uniformemente limitada em cilindros. Depois, usando o lema de Arzelá-Ascoli, é provada a existência de pontos de acumulação para cada cilindro $[a]$, e, finalmente um argumento diagonal permitirá encontrar um ponto de acumulação V definido em Σ .

Uma observação importante é que no caso BIP a família é uniformemente limitada no espaço todo e portanto V fica limitada. Como foi visto no capítulo anterior, existem exemplos de *shifts* topologicamente *mixing* em que não podem existir subações calibradas e limitadas. Esse é um dos problemas a serem resolvidos posteriormente de forma diferente aos resultados existentes sobre princípio dos grandes desvios.

Lema 6. *A família $\left(\frac{1}{\beta} \log h_\beta\right)_{\beta > 1}$ é equicontínua e uniformemente limitada em cilindros.*

Demonstração. Pela proposição 6, dado $a \in \mathbb{N}$ existem l_a, L_a tal que para todo $\beta > 1$ e $x \in [a]$

$$\exp(\beta l_a) \leq h_\beta(x) \leq \exp(\beta L_a),$$

portanto

$$l_a \leq \frac{\log h_\beta(x)}{\beta} \leq L_a$$

para todo $x \in [a]$ e todo $\beta > 1$. Isso mostra que é uniformemente limitada em $[a]$.

No lema 5 foi demonstrado que se $d(x, y) < \lambda^l$, então

$$\frac{h_\beta(x)}{h_\beta(y)} \leq \exp \left(\sum_{j \geq l} \text{Var}_j(\beta f) \right)$$

dai pode-se concluir que, para todo x, y com $d(x, y) < \lambda^l$

$$\left| \frac{\log h_\beta(x)}{\beta} - \frac{\log h_\beta(y)}{\beta} \right| \leq \sum_{j \geq l} \text{Var}_j(f)$$

Portanto,

$$\text{Var}_l \left(\frac{1}{\beta} \log h_\beta \right) \leq \sum_{j \geq l} \text{Var}_j(f)$$

Como f tem variação finita, a soma do lado direito vai para zero quando l vai para infinito. Note que o lado direito não depende de β , logo a família é equicontínua. $\square$

O lema 6 e o lema de Arzelá-Ascoli implicam que para cada cilindro $[a]$ existe uma sequência $\beta_j \rightarrow \infty$ tal que $\frac{1}{\beta_j} \log(h_{\beta_j})$ converge para uma função V , uniformemente em compactos contidos em $[a]$. O seguinte argumento diagonal permite construir uma subsequência β_k tal que $\lim_k \frac{1}{\beta_k} \log(h_{\beta_k}) = V$ existe uniformemente em compactos.

Seja $\beta_{k,1}$ uma subsequência tal que $\lim_k \frac{1}{\beta_{k,1}} \log(h_{\beta_{k,1}})$ existe no cilindro $[1]$, essa subsequência é uniformemente contínua e limitada no cilindro $[2]$, portanto existe uma subsequência $\beta_{k,2}$ tal que $\lim_k \frac{1}{\beta_{k,2}} \log(h_{\beta_{k,2}})$ é convergente. Indutivamente pode-se construir uma sequência $\beta_{k,k}$ tal que existe o seguinte limite uniforme em compactos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_{k,k}} \log(h_{\beta_{k,k}}). \quad (4.8)$$

Para provar que esses pontos de acumulação definem subações contínuas vai ser útil o seguinte resultado. No caso BIP a prova aparece em [Mor07]. A demonstração é realizada usando aproximação da pressão no espaço todo por pressões do potencial restrito a *subshifts* compactos.

Lema 7. [CLT01] *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de variação finita e pressão finita, então*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{P(\beta f)}{\beta} = m.$$

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ e cada β , $P(\beta f_k) < P(\beta f)$,

$$\liminf_{\beta} \frac{P(\beta f_k)}{\beta} \leq \liminf_{\beta} \frac{P(\beta f)}{\beta}.$$

Para todo $k \geq 1$

$$\lim_{\beta} \frac{P(\beta f_k)}{\beta} = m,$$

e portanto

$$m \leq \liminf_{\beta} \frac{P(\beta f)}{\beta}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, μ_{max} é a medida maximizante, então para todo $\beta > 1$

$$\frac{P(\beta f)}{\beta} = \int f \, d\mu_{\beta} + \frac{h(\mu_{\beta})}{\beta} \leq \int f \, d\mu_{max} + \frac{h(\mu_{\beta})}{\beta}.$$

Observe que para todo k a função $h(\mu_{\beta,k})$ é decrescente como função de β [Mor07] e, ainda, fixado um $\beta > 1$ $\lim_k h(\mu_{\beta,k}) = h(\mu_{\beta})$ [FV15], então a função $h(\mu_{\beta})$ é decrescente como função de β . Em particular é limitada. Isso implica que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{h(\mu_{\beta})}{\beta} = 0.$$

Dessa forma

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{P(\beta f)}{\beta} \leq \limsup_{\beta \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_{max} + \frac{h(\mu_{\beta})}{\beta} = m. \quad (4.10)$$

Então de (4.9) e (4.10) tem-se que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{P(\beta f)}{\beta} = m$. $\square$

O seguinte lema mostra que todos os pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log h_{\beta}$ quando β vai para infinito são subações contínuas.

Lema 8. *Todo ponto de acumulação uniforme em compactos, quando $\beta \rightarrow \infty$, da família $\frac{1}{\beta} \log(h_{\beta})$ é uma subação contínua.*

Demonstração. Como já foi destacado, μ_{β} é da forma $\mu_{\beta} = h_{\beta} \nu_{\beta}$, onde $\mathcal{L}_{\beta f} h_{\beta} = \exp(P(\beta f)) h_{\beta}$ em particular para cada $x \in \Sigma$

$$\exp(P(\beta f)) h_{\beta}(x) = \mathcal{L}_{\beta f} h_{\beta}(x) = \sum_j \exp(\beta f(jx)) h_{\beta}(jx).$$

Da equação anterior, para todo $x \in \Sigma$ e todo $\beta > 1$

$$\sum_j \exp(\beta f(jx) + \log(h_{\beta}(jx)) - \log(h_{\beta}(x)) - P(\beta f)) = 1,$$

que pode ser escrito da forma

$$\sum_j \exp \left(\beta(f(jx) + \frac{\log(h_{\beta}(jx))}{\beta} - \frac{\log(h_{\beta}(x))}{\beta} - \frac{P(\beta f)}{\beta}) \right) = 1.$$

Claramente é uma soma de termos positivo, então para todo $\beta > 1$, todo $x \in \Sigma$ e j tal que $jx \in \Sigma$,

$$f(jx) + \frac{\log(h_\beta(jx))}{\beta} - \frac{\log(h_\beta(x))}{\beta} - \frac{P(\beta f)}{\beta} < 0.$$

Se $V = \lim_{\beta_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log h_{\beta_k}$ para alguma sequência $\beta_k \rightarrow \infty$, então

$$f(jx) + V(jx) - V(x) - m \leq 0.$$

□

A prova feita é similar à prova em [CLT01], embora não seja possível concluir que esses pontos de acumulação sejam subações calibradas. A dificuldade neste caso está no fato da soma não ser de finitos termos e também não pode ser usado um argumento como em [BMP16] pois o argumento dos autores desse artigo usa que a família está uniformemente limitada, no caso geral a limitação é apenas em cilindros.

A regularidade dos pontos de acumulação V está caracterizada no seguinte lema, note que se f for Hölder contínua então V é uma função Hölder contínua.

Lema 9. [BMP16] *Se $V = \lim_{\beta_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log(h_{\beta_k})$ uniformemente em compactos, para alguma sequência $\beta_k \rightarrow \infty$, então V é uma função uniformemente contínua. Mais precisamente*

$$\text{Var}_j(V) \leq \sum_{i=j}^{\infty} \text{Var}_i(f).$$

Demonstração. Dados $x, y \in \Sigma$ tais que $d(x, y) \leq \lambda^r$ pela proposição 5

$$\frac{h_\beta(y)}{h_\beta(x)} \leq \exp\left(\sum_{j=r}^{\infty} \beta \text{Var}_j(f)\right),$$

então

$$\frac{\log h_\beta(y)}{\beta} - \frac{\log h_\beta(x)}{\beta} \leq \sum_{j=r}^{\infty} \text{Var}_j(f).$$

Como x e y são arbitrários,

$$\left| \frac{\log h_\beta(y)}{\beta} - \frac{\log h_\beta(x)}{\beta} \right| \leq \sum_{j=r}^{\infty} \text{Var}_j(f).$$

Portanto, tomando limite em β , $\text{Var}_r(V) \leq \sum_{j \geq r} \text{Var}_j(f)$.

□

4.2 Pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log \mu_\beta$

O próximo interesse é mostrar que para toda sequência $\beta_k \rightarrow \infty$, existe uma subsequência β_j tal que para cada cilindro $C \subset \Sigma$ existe o limite

$$\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}(C). \quad (4.11)$$

Para tal fim é usado um argumento de aproximação dos estados de equilíbrio μ_β por estados de equilíbrio em *subshifts* compactos, esse argumento segue ideias de [FV15] para limitar a família em cada cilindro e posteriormente usando um argumento diagonal similar ao usado na seção anterior é construída uma subsequência que satisfaz as condições de (4.11).

Em cada *subshift* compacto Σ_k , o potencial $f_k := f|_{\Sigma_k}$ possui um único estado de equilíbrio $\mu_{\beta,k}$. Esse estado de equilíbrio é a medida de Gibbs em Σ_k [Rue78, Wal00]. Isto é, para todo cilindro $C = [x_0 \dots x_{n-1}]$ não vazio em Σ_k e todo $x \in C \cap \Sigma_k$,

$$\exp(-4\text{Var}(\beta f_k)) \leq \frac{\mu_{\beta,k}(C)}{\exp(\beta S_n f(x) - nP(\beta f_k))} \leq \exp(4\text{Var}(\beta f_k)). \quad (4.12)$$

Usando (4.12) e a convergência em (4.1) é possível provar a seguinte proposição. Esse resultado é importante na hora de provar existência de pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta}\mu_\beta(C)$ em cada cilindro C .

Proposição 8. *Sejam $n \geq 1$ e C um cilindro de tamanho n , então para todo $\beta > 1$ e $y \in C$*

$$\mu_\beta(C) \geq \exp(\beta(-5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(\beta f))).$$

Demonstração. Um cilindro C de tamanho $n \geq 1$ é um conjunto de continuidade em Σ , no sentido de $\partial C \cup \partial C^c = \emptyset$, em virtude da caracterização de convergência de medidas na topologia fraca* dada pelo teorema de Pourmanteu [Bil68], (veja também [OV14]) e a convergência das medidas $\mu_{\beta,k}$ para μ_β , (4.1). Para todo $\beta > 1$,

$$\lim_k \mu_{\beta,k}(C) = \mu_\beta(C). \quad (4.13)$$

Por outro lado, para cada k tal que $C \neq \emptyset$ em Σ_k (note que se k for suficientemente grande essa condição é satisfeita), todo $\beta > 1$ e todo $x \in C \cap \Sigma_k$, e de (4.12) tem-se que

$$\mu_{\beta,k}(C) \geq \exp(\beta(-4\text{Var}(f) + S_n f(x) - nP(\beta f_k))).$$

É preciso ressaltar que a desigualdade vale para pontos x em cada compacto Σ_k .

Se $y \in C$, então para todo $x \in C \cap \Sigma_k$, $d(x, y) < \lambda^n$. Do lema 5,

$$S_n f(x) \leq S_n f(y) + \text{Var}(f).$$

Além disso, para todo $\beta > 1$, $\beta P(f) \geq P(\beta f) > P(\beta f_k)$. Então para todo k suficientemente grande, todo $y \in C$ e $\beta > 1$

$$\mu_{\beta,k}(C) \geq \exp(\beta(-5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(f))).$$

Tomando limite em k e usando (4.13) conclui-se que,

$$\mu_\beta(C) \geq \exp(\beta(-5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(f))). \quad (4.14)$$

□

De forma similar é possível mostrar a seguinte cota superior.

Proposição 9. Para todo $x \in \Sigma$, $n \geq 0$ e todo $\beta > 1$,

$$\mu_\beta([x_0x_1 \dots x_{n-1}]) \leq \exp(5\text{Var}(\beta f) + S_n\beta f(x) - n\beta m). \quad (4.15)$$

Demonstração. Sejam $x \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$ e $\beta > 1$, se k é suficientemente grande, $[x_0x_1 \dots x_{n-1}]$ é um cilindro não vazio em Σ_k , como $\mu_{\beta,k}$ é uma medida de Gibbs em Σ_k , de (4.12) tem-se que para todo $y \in \Sigma_k \cap ([x_0x_1 \dots x_{n-1}])$,

$$\mu_{\beta,k}([x_0x_1 \dots x_{n-1}]) \leq \exp(4\text{Var}(f) + \beta S_n f(y) - nP(\beta f_k)).$$

Observe que $P(\beta f_k) \geq \int \beta f_k d\mu + h(\mu)$ para toda medida de probabilidade invariante com suporte contido em Σ_k , em particular para a medida maximizante, então $P(\beta f_k) - \beta m \geq h(\mu) \geq 0$. Por outro lado, para todo $z \in [x_0x_1 \dots x_{n-1}]$,

$$S_n\beta f(z) - S_n\beta f(x) \leq \text{Var}(\beta f) = \beta \text{Var}(f).$$

substituindo na equação acima obtém-se

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,k}(C) &\leq \exp(4\text{Var}(\beta f) + \beta S_n f(x) - nP(\beta f_k)) \\ &\leq \exp(5\text{Var}(\beta f) + \beta S_n f(z) - nP(\beta f_k)) \\ &= \exp(5\text{Var}(f) + \beta S_n f(z) - \beta nm) \exp(\beta nm - nP(\beta f_k)) \\ &\leq \exp(\beta(5\text{Var}(f) + S_n f(z) - nm)). \end{aligned}$$

Tomando limite em k e usando a convergência em (4.1), pode-se concluir (4.15). $\square$

Usando o lema 8, tomando logaritmo e dividindo por β em (4.14),

$$0 > \frac{\log(\mu_\beta(C))}{\beta} \geq -5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(f).$$

Portanto, para toda sequência $\beta_n \rightarrow \infty$, existem pontos de acumulação de $\frac{1}{\beta_n} \log(\mu_{\beta_n}(C))$ quando $n \rightarrow \infty$.

4.3 Relação entre os pontos de acumulação

Nesta seção são mostradas as relações entre os limites em (4.2) e (4.11), essas relações são muito importantes para definir a função taxa no princípio dos grandes desvios. O objetivo principal é demonstrar o lema 12 o qual é usado na prova do teorema B na seguinte seção.

Na seção anterior foi mostrado que para toda sequência $\beta_k \rightarrow \infty$, existe uma subsequência β_j tal que os limites em (4.11) existem. Em particular para toda sequência $\beta_k \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log h_{\beta_k}$$

converge uniformemente em compactos. A existência de esse tipo de sequências foi mostrado em (4.8), usando um argumento diagonal pode-se construir subsequência $\beta_n \rightarrow \infty$ tal que o seguinte limite

existe (uniformemente em compactos)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(h_{\beta_n})}{\beta_n} \quad (4.16)$$

e para para todo cilindro C a sequência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\mu_{\beta_n})}{\beta_n}(C) \quad (4.17)$$

é convergente.

O seguinte lema é usado para mostrar a relação entre os limites em (4.16) e (4.17).

Lema 10. [PP90] *Se g é um potencial de variação finita e pressão finita e μ uma medida σ -invariante tal que $\mathcal{L}_g^* \mu = \mu$, então para todo cilindro $[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]$*

$$\mu[x_1 \dots x_{n-1}] = \int_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(z)) d\mu(z).$$

Demonstração. Seja g tal que $\mathcal{L}_g^* \mu = \mu$, para todo cilindro $[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(z)) d\mu(z) &= \int 1_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(z)) d\mu(z) \\ &= \int \mathcal{L}_g (1_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(z))) d\mu(z). \end{aligned}$$

Note que para cada $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g (1_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(x))) &= \sum \exp(g(ix)) 1_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]}(ix) \exp(-g(ix)) \\ &= \sum 1_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]}(ix) = 1_{[x_1 \dots x_{n-1}]}(x). \end{aligned}$$

Então

$$\int_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g(z)) d\mu(z) = \int 1_{[x_1 \dots x_{n-1}]}(x) d\mu = \mu([x_1 x_2 \dots x_n]).$$

□

Para cada $\beta > 1$, defina

$$g_\beta := \beta f + \log(h_\beta) - \log(h_\beta) \circ \sigma - P(\beta f) \quad (4.18)$$

Lema 11. *Seja g_β como em (4.18), então para todo $\beta > 1$ $\mathcal{L}_{g_\beta} 1 = 1$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{g_\beta} 1(x) &= \sum_i \exp(g_\beta(ix)) \\
&= \sum_i \exp(\beta f + \log(h_\beta) - \log(h_\beta) \circ \sigma - P(\beta f)(ix)) \\
&= \sum_i \exp(-P(\beta f) - \log h_\beta(x)) \exp(f(ix) + \log h_\beta(ix)) \\
&= \exp(-P(\beta f) - \log h_\beta(x)) \sum_i \exp(f(ix)) h_\beta(ix) \\
&= \exp(-P(\beta f) - \log h_\beta(x)) \mathcal{L}_{\beta f} h_\beta(x) \\
&= \exp(-P(\beta f) - \log h_\beta(x)) \exp(P(\beta f)) h_\beta(x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Devido ao lema anterior, g_β é chamada a normalizada do operador de Ruelle para βf .

Em virtude do lema 10 aplicado em g_β , pode-se obter a seguinte proposição.

Proposição 10. *Seja $\beta_j \rightarrow \infty$ uma sequência tal que o limite*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log h_{\beta_j} = V$$

existe na topologia uniforme em compactos e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}(C)$$

existe para todo cilindro C . Então, para todo $x \in \Sigma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \frac{\mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n])}{\mu_{\beta_j}([x_1 \dots x_n])} = V \circ \sigma(x) - V(x) - f(x) + m.$$

Demonstração. Pelo lema 10 como $\mathcal{L}_{g_\beta} 1 = 1$, então

$$\mu_\beta([x_1 \dots x_{n-1}]) = \int_{[x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g_\beta) d\mu_\beta.$$

Para todo β . Dessa forma

$$\begin{aligned}
\inf_{z \in [x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g_\beta(z)) &\leq \frac{\mu_\beta([x_1 \dots x_{n-1}])}{\mu_\beta([x_0 x_1 \dots x_{n-1}])} \leq \sup_{z \in [x_0 x_1 \dots x_{n-1}]} \exp(-g_\beta(z)) \\
\exp(-g_\beta(x) - Var_n(g_\beta)) &\leq \frac{\mu_\beta([x_1 \dots x_{n-1}])}{\mu_\beta([x_0 x_1 \dots x_{n-1}])} \leq \exp(-g_\beta(x) + Var_n(g_\beta)).
\end{aligned}$$

Tomando logaritmo e dividindo por β , obtém-se

$$-\frac{g_\beta(x)}{\beta} - Var_n\left(\frac{g_\beta}{\beta}\right) \leq \frac{1}{\beta} \log \frac{\mu_\beta([x_1 \dots x_n])}{\mu_\beta([x_0 \dots x_n])} \leq -\frac{g_\beta(x)}{\beta} - Var_n\left(\frac{g_\beta}{\beta}\right).$$

Finalmente tomando limite primeiro em β e depois em n obtém-se o resultado. $\square$

A prova do seguinte lema foi feita em [BMP16] para o caso BIP. A prova dos numerais 1 e 2 é igual à prova em [Men16]. O item 3 é uma extensão não trivial pois a prova em [BMP16] usa a condição BIP.

Lema 12. *Seja $\beta_j \rightarrow \infty$ uma sequência tal que o limite em 4.16 existe uniformemente em compactos e os limites em 4.17 existem para todo cilindro $C \subset \Sigma$. Então*

1. *Para todo $x \in \Sigma$, a função I definida por*

$$I(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_{\beta_j}([x_0 x_1 \dots x_{n-1}])}{\beta_j} \quad (4.19)$$

está bem definida, é não negativa e semicontínua inferiormente.

2. *Para todo x , $I(\sigma(x)) \leq I(x)$.*

3. *Para todo cilindro C não vazio*

$$\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_{\beta_j}(C)}{\beta_j} = - \inf_{x \in C} I(x).$$

4. *Para todo $x \in \Sigma$*

$$I(x) = \lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{g_{\beta_j}}{\beta_j}(x) + I(\sigma(x)).$$

Demonstração. 1. Seja $\beta_j \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}(C)$$

existe para todo cilindro $C \subset \Sigma$. Dado $x \in \Sigma$, se $n \geq m$, então

$$\mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) \leq \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_m]),$$

portanto o limite

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n])$$

é decrescente como função de n . Isso implica que existe o limite

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]).$$

Note que esse limite pode ser infinito. Como μ_β é uma medida de probabilidade, $I(x) \geq 0$.

Para mostrar que I é semicontínua inferiormente, observe que

$$\begin{aligned}
I(x) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}]) \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in [x_0 \dots x_{n-1}]} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}]) \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in [x_0 \dots x_{n-1}]} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([z_0 \dots z_{n-1}]) \\
&\leq - \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in [x_0 \dots x_{n-1}]} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([z_0 \dots z_{n-1}]) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in [x_0 \dots x_{n-1}]} I(z).
\end{aligned}$$

2. é claro que $\mu_{\beta_j}([x_0 x_1 \dots x_n]) \leq \mu_{\beta_j}([x_1 \dots x_n])$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) &\leq \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_1 \dots x_n]) \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_1 \dots x_n]) \\
I(x) &\geq I(\sigma(x)).
\end{aligned}$$

3. Sejam $[x_0 \dots x_n]$ um cilindro e $x \in [x_0 \dots x_n]$, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]),$$

portanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) \geq -I(x).$$

Dessa forma,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n]) \geq \sup_{x \in [x_0 \dots x_n]} -I(x) = - \inf_{x \in [x_0 \dots x_n]} I(x).$$

Para mostrar a outra desigualdade considere $C = [x_0 \dots x_{n-1}]$ um cilindro em Σ ,

$$\mu_\beta(C) = \sum_j \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]).$$

Para cada j tal que $x_{n-1}j$ é uma palavra permitida, usando a desigualdade (4.15), para todo $\beta > 1$, e todo $z_j \in [x_0 \dots x_{n-1}j]$

$$\begin{aligned}
\mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]) &\leq \exp(\beta(S_n f(z_j) + 5\text{Var}(f) - nm)) \exp(\beta(\sup f|_{[j]} - m)) \\
&\leq \exp(\beta S_n f(\bar{z}) + 6\text{Var}(f) - nm) \left(\sum_j \exp(\sup f|_{[j]} - m) \right)^\beta.
\end{aligned}$$

Onde $\bar{z}$ é um ponto fixado em C (note que $d(\bar{z}, z_j) < \lambda^n$ para todo j).

Como f é somável, existe J tal que

$$\sum_{j>J} \exp(\sup f|_{[j]} - m) \leq \exp(\inf f|_{[j_0]} - m) \frac{\exp(S_n f(\bar{z}) - 5Var(f) - (n+1)P(f))}{\exp(\beta S_n f(\bar{z}) + 6Var(f) - nm)}.$$

Onde j_0 é o menor inteiro tal que $[x_0 \dots x_{n-1}j_0]$ é não vazio.

Dessa forma, em virtude da desigualdade (4.14)

$$\begin{aligned} \sum_{j>J} \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]) &\leq \exp(S_n f(\bar{z}) - 5Var(f) - (n+1)P(f)) \exp(\inf f|_{[j_0]}) \\ &\leq \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j_0]). \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \left(2 \sum_{j<J} \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]) \right).$$

Portanto existe $j < J$ tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]).$$

Dessa forma pode-se construir uma sequência de cilindros $[x_0 \dots x_1 y_0 y_1 \dots y_k]$ tal que para todo k ,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1} y_0 y_1 \dots y_k]).$$

Tomando z na interseção de uma sequência assim construída e usando a semicontinuidade da função I , tem-se que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \mu_\beta([x_0 \dots x_{n-1} y_0 y_1 \dots y_k] \leq -I(z).$$

Isso completa a prova do item 3.

4. Dado $x \in \Sigma$, da proposição 10

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \frac{\mu_\beta([x_0 \dots x_n])}{\mu_\beta([x_1 \dots x_n])} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta}.$$

Usando propriedades do logaritmo nessa igualdade obtém-se o resultado. □

4.4 Convergência de $\frac{g_\beta}{\beta}$

O lema 12 na seção anterior pode ser aplicado a qualquer ponto de acumulação de $\frac{g_{\beta_j}}{\beta_j}$. Mas a função I poderia depender da escolha da subsequência.

Na tese [LM10] foi mostrado que a convergência da família $\frac{g_\beta}{\beta}$ quando $\beta \rightarrow \infty$ é uma condição necessária para convergência de $\frac{\log \mu_\beta(C)}{\beta}$ para todo cilindro C .

Proposição 11 ([LM10]). *Se existem dois pontos de acumulação R_1 e R_2 diferentes para $\frac{g_\beta}{\beta}$ quando β vai para infinito, então existem cilindros C tal que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C)$ não existe.*

Usando o lema 12 e assumindo que a família $\frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C)$ é convergente, obtém-se que I não depende da subsequência escolhida, portanto nesse caso o limite de $\frac{1}{\beta} g_\beta$ existe.

A seguinte proposição mostra que as autofunções h_β podem ser aproximadas pontualmente pela sequência de autofunções $h_{\beta,k}$.

Proposição 12. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de variação finita e pressão finita. Se $x \in \Sigma_j$ para algum j , então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = h(x).$$

Demonstração. Seja $x \in \Sigma_j$. Para cada $k \geq j$ considere h_k autofunção de $\mathcal{L}_{f_k}$ e ν_k medida de probabilidade tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f_k} h_k &= \exp(P(f_k)) h_k \\ \mathcal{L}_{f_k}^* \nu_k &= \exp(P(f_k)) \nu_k \\ \int h_k d\nu_k &= 1. \end{aligned}$$

Para cada $n \geq 1$, em virtude da convergência (4.1),

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k([x_0 x_1 \dots x_n]) &= \mu([x_0 x_1 \dots x_n]) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[x_0 \dots x_n]} h_k d\nu_k &= \int_{[x_0 \dots x_n]} h d\nu. \end{aligned}$$

em cada cilindro $C = [x_0 \dots x_{n-1}]$, para cada $x \in C$

$$(h_k(x) - \text{Var}_n(h_k)) \nu_k(C) \leq \mu_k(C) \leq (h_k(x) + \text{Var}_n(h_k)) \nu_k(C)$$

Por outro lado, usando os argumento da proposição 6, para cada $a \in \mathbb{N}$ e $y \in [a] \cap \Sigma_k$

$$h_{\beta,k}(y) \leq \exp(P(\beta f_k) + S_n \beta f_k(\tilde{z}_a) + \beta \text{Var}(f_k)).$$

Onde $\tilde{z}_a$ é da forma $aw\bar{y}$. Em particular, $\tilde{z}_a$ pode ser tomado igual para todo k suficientemente grande (basta que aw seja uma palavra permitida em Σ_k). Dessa forma, lembrando que $P(\beta f_k) \leq P(\beta f)$ e $\text{Var}(f_k) \leq \text{Var}(f)$,

$$h_{\beta,k}(y) \leq \exp(P(\beta f) + S_n \beta f(\tilde{z}) + \beta \text{Var}(f)) =: \Delta_a \quad (4.20)$$

para todo $y \in [a]$ que pertença a algum *subshift* compacto. Em virtude da proposição 5, aplicada no espaço Σ_k , para todo $y \in \Sigma_k$ tal que $d(x, y) < \lambda^l < 1$

$$h_{\beta,k}(x) \leq \exp\left(\sum_{j \geq l} \text{Var}_j(\beta f_k)\right) h_{\beta,k}(y).$$

Então

$$h_{\beta,k}(x) - h_{\beta,k}(y) \leq (\exp(\sum_{j \geq l} \text{Var}_j(\beta f_k)) - 1)h_{\beta,k}(y),$$

usando a limitação em (4.20) para $a = x_0$,

$$h_{\beta,k}(x) - h_{\beta,k}(y) \leq (\exp(\sum_{j \geq l} \text{Var}_j(\beta f_k)) - 1)\Delta_a.$$

Portanto, para todo k e todo $l > 1$

$$\text{Var}_l(h_{\beta,k}) \leq (\exp(\sum_{j > l} \text{Var}_j(f)) - 1)\Delta_a. \quad (4.21)$$

Para cada cilindro $C = [x_0 \dots x_n]$ e cada k ,

$$h_k(x) - \text{Var}_n(h_{\beta,k}) \leq \frac{\mu_{\beta,k}(C)}{\nu_{\beta,k}(C)} \leq h_{\beta,k}(x) + \text{Var}_n(h_{\beta,k}).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) - \text{Var}_n(h_{\beta,k}) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_k(C)}{\nu_k(C)} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) + \text{Var}_n(h_{\beta,k}). \end{aligned}$$

Na parte central da equação, usando a convergência $\mu_k \rightarrow \mu$ e $\nu_k \rightarrow \nu$,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) - \text{Var}_n(h_{\beta,k}) &\leq \frac{\mu(C)}{\nu(C)} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) + \text{Var}_n(h_{\beta,k}). \end{aligned}$$

Para provar a convergência procurada observe que da equação 4.21,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) - (\exp(\sum_{j > n} \text{Var}_j(f)) - 1)\Delta_a &\leq \frac{\mu(C)}{\nu(C)} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) + (\exp(\sum_{j > n} \text{Var}_j(f)) - 1)\Delta_a. \end{aligned}$$

Tomando limite quando $n \rightarrow \infty$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \leq h(x) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} h_k(x)$$

De forma análoga pode ser realizado o análise com $\liminf$ no lugar do $\limsup$. Portanto, pode-se concluir que $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = h(x)$. $\square$

Baseados no caso compacto, onde a sequência $\frac{1}{\beta}g_{\beta,k}$ converge quando existe uma única medida maximizante [BLT06] e a proposição anterior pode-se pensar que a convergência vale para o caso topologicamente *mixing*.

Conjectura. *Sejam Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de variação finita e pressão finita. Suponha que f possui uma única medida maximizante μ_{max} , então existe o limite*

$$R := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta}.$$

A conjectura foi provada para *shifts* compactos [BLT06] e *shifts* enumeráveis que satisfazem a propriedade BIP [BMP16]. A prova nesses casos é consequência do fato que duas subações calibradas e limitadas diferem por uma constante e de que todo ponto de acumulação de $\frac{1}{\beta} h_\beta$ é uma subação calibrada e limitada.

Por outro lado, se x pertence a um *subshift* compacto Σ_j , os limites $R_k(x) := \lim_{\beta} \frac{1}{\beta} g_{\beta,k}(x)$ são iguais para k suficientemente grande (veja teorema C).

Alguns possíveis métodos para provar a conjectura acima seriam:

- a) Todo ponto de acumulação V da família $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$ é uma subação calibrada e limitada.
- b) Os seguintes limites existem e são iguais

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_{\beta,k}}{\beta}$$

O item a se baseia no estudo feito no capítulo 3 da hipótese BP. Se Σ satisfaz BP, existem subações calibradas e limitadas. Lembre que se Σ não satisfaz esta propriedade, não pode existir subação calibrada e limitada. Em virtude do teorema C duas subações calibradas e limitadas diferem por uma constante. (argumento usado em [BMP16, BLT06]). Portanto se o item a fosse verdade a conjectura também seria verdadeira.

No caso em que Σ não satisfaz BP é preciso usar um argumento diferente. Uma primeira aproximação é considerar as seguintes observações.

Em cada *subshift* compacto Σ_j existe o limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_{\beta,j}}{\beta} =: R_j$$

onde $R_k(x) = S_{f_k}(x) + f(x) - S_{f_k}(\sigma(x)) - m$. Em virtude do teorema 8, existe K tal que $S_f(x) = S_{f_K}(x)$ para todo $x \in \Sigma_k$, então para todo $k > K$ e todo $x \in \Sigma_j$, $R_k(x) = R_K(x)$. Isso implica que o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_{\beta,k}(x)$$

existe para todo ponto x que pertence a um *subshift* finito. A continuidade da R implicaria que o limite é único no espaço todo pois a união dos *subshifts* compactos é densa em Σ .

4.5 Princípio dos grandes desvios

Colocando como hipótese a conjectura discutida na seção anterior, nesta seção é demonstrado que a família de estados de equilíbrio $(\mu_\beta)_{\beta > 1}$ satisfaz o princípio dos grandes desvios. Os argumentos usados para demonstrar o teorema B combinam aproximação por *subshift* compactos e argumentos de [BMP16]. A condição do *shift* ser BP implica que qualquer ponto de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log h_\beta$ está limitado inferiormente, veja seção 3.4.

Teorema B. *Seja Σ um shift topologicamente mixing que satisfaz a propriedade BP e f um potencial somável de variação finita, pressão finita tal que f possui uma única medida maximizante. Suponha que para a família de funções $g_\beta := h_\beta \circ \sigma - h_\beta - f + P(\beta f)$ (onde h_β é a autofunção do operador de Ruelle para βf tal que $h_\beta(\bar{y}) = 1$) o seguinte limite existe.*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_\beta.$$

Então existe uma função I não negativa e semicontínua inferiormente tal que para todo cilindro $C \subset \Sigma$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) = - \inf_{x \in C} I(x).$$

Demonstração. Seja $\beta_k \rightarrow \infty$ uma sequência qualquer, como já foi mostrado, existe uma subsequência $\beta_j \rightarrow \infty$ tal que os limites

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log h_{\beta_j} = V.$$

existe uniformemente em compactos e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \mu_{\beta_j}(C)$$

existe para todo cilindro C . Note que V pode depender da subsequência β_j mas por hipótese $R = V \circ \sigma - V - f + m$ não depende da escolha da subsequência. Em virtude do lema 12 e notando $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{g_{\beta_j}(x)}{\beta_j} = R(x)$.

$$I(x) = R(x) + I(\sigma(x))$$

para todo $x \in \Sigma$, onde I está definida como em (4.19). Mais ainda, para todo $n \geq 0$, somando na equação acima

$$I(x) = I(\sigma^n(x)) + \sum_{i=0}^{n-1} R(\sigma^i(x)). \quad (4.22)$$

Note que como $I \geq 0$, se $\sum_{i=0}^{\infty} R(\sigma^i(x)) = \infty$, então $I(x) = \infty$. O objetivo agora é mostrar que quando a soma converge, $I(x)$ é igual à soma $\sum_{i=0}^{\infty} R(\sigma^i(x))$.

Seja x tal que $x \notin \cup_{j \geq 0} \Sigma_j$, isso é, x não pertence a nenhum compacto Σ_j em particular x tem letras arbitrariamente grandes. Para cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} R(\sigma^i(x)) &= \sum_{i=0}^{n-1} (V \circ \sigma - V - f + m)(\sigma^i(x)) \\ &= V(\sigma^n(x)) - V(x) - S_n(f - m)(x). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Do lado direito como V é limitada inferiormente pois Σ satisfaz a propriedade BP (veja teorema 8) e pela coercividade de f , $S_n(f - m)(x) \rightarrow -\infty$. Então a parte direita de (4.23) vai para infinito quando n vai para infinito. Isso implica que para todo ponto $x \notin \cup_{j \geq 0} \Sigma_j$, $I(x) = \infty$.

Agora seja $x \in \Sigma_j$ para algum Σ_j compacto e suponha que $\sum_{i=0}^{n-1} R(\sigma^i(x)) < \infty$. O seguinte argumento é igual ao usado em [BMP16]

Como x está em um *subshift* compacto e a soma é finita, todo ponto de acumulação $\bar{x}$ da órbita de x satisfaz $R(\bar{x}) = 0$, então o ω -limite de x , $w(x)$ está contido em $R^{-1}(0)$, isto é, um conjunto invariante

contido no conjunto de pontos onde $f = V \circ \sigma - v + m$. Portanto, como todo conjunto invariante que satisfaz essa condição [CLT01], $\text{supp}(\mu_{\max}) = w(x)$. Dessa forma $\bar{x} \in \text{supp}(\mu_{\max})$.

Para terminar a demonstração, note que para todo ponto z no suporte da medida maximizante $I(z) = 0$. Pois

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{\beta}(C) = \mu_{\max}(C)$$

e cada cilindro $[z_0 \dots z_n]$ é uma vizinhança do z , então $\mu_{\max}([z_0 \dots z_n]) > 0$.

Usando isso e a semicontinuidade da função I , tem-se que

$$0 = I(z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\sigma^n(x)).$$

Para todo $n \geq 1$, $I(x) = \sum_{j=0}^{n-1} R(\sigma^j(x)) + I(\sigma^n(x))$, então

$$\begin{aligned} I(x) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} R(\sigma^j(x)) + I(\sigma^n(x)) \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} R(\sigma^j(x)) + 0. \end{aligned}$$

Isso implica que $I(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R(\sigma^j(x))$ para todo $x \in \Sigma$. Em particular I não depende da subsequência escolhida em (4.19).

Portanto, para todo cilindro $C \subset \Sigma$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_{\beta}(C) = - \inf_{x \in C} I(x). \quad (4.24)$$

Pelo lema 12, I é não negativa e semicontínua inferiormente. □

Capítulo 5

Caracterização da função taxa

No capítulo anterior foi estudado o princípio dos grandes desvios para potenciais somáveis de variação finita e pressão finita com medida maximizante única. Neste capítulo é estudado o caso em que os estados de equilíbrio μ_β satisfazem o princípio dos grandes desvios e a hipótese sobre unicidade da medida maximizante é removida. Este trabalho foi inspirado em [Men16] e visa provar que, neste contexto, pode-se obter um inverso para os resultados sobre princípio dos grandes desvios. Basicamente é caracterizada a função taxa que no caso estudado no capítulo 4 coincide com $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta}$, o teorema aqui apresentado é similar ao provado por J. Mengue [Men16], sendo sua generalização para o caso não compacto.

Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável de variação finita e pressão finita. Para cada $\beta > 1$ seja μ_β o estado de equilíbrio para βf . Considere ν_β e h_β os vetores próprios do operador de Ruelle $\mathcal{L}_{\beta f}$ onde ν_β é uma medida de probabilidade (note que por hipótese f é um potencial somável) e $\int h_\beta d\nu_\beta = 1$. Defina $g_\beta := \log h_\beta \circ \sigma - \beta f - \log h_\beta + P(\beta f)$, note que $g_\beta \geq 0$ para todo $\beta > 1$. O objetivo deste capítulo é provar o seguinte.

Teorema E. *Seja Σ um shift topologicamente mixing e f um potencial somável, de variação finita e pressão finita. Suponha que para todo cilindro C existe o limite*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_\beta(C)}{\beta}. \quad (5.1)$$

Seja I definida por

$$I(x) := - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta([x_0 \dots x_n]).$$

Então

1. *Existe o limite $R := \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{g_\beta}{\beta}$ e satisfaz*

$$I(x) = R(x) + I(\sigma(x)).$$

- 2.

$$I(x) = \inf_{y \in X_{max}} \liminf_n (R^n(x_0 x_1 \dots x_{n-1} y) + I(y))$$

Além disso se

$$R^\infty := \sum_{j \geq 0} R(\sigma^j(x)) < \infty,$$

então existe $y \in X_{max}$ ponto de acumulação para $\{\sigma^n(x)\}_{n \geq 1}$. Para um tal y

$$I(x) = R^\infty(x) + I(y).$$

3. Existe o limite uniforme $V = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log h_\beta$.

4. As medidas ν_β satisfazem um princípio dos grandes desvios com função taxa $I + V$.

A seguir é provado que μ_β satisfaz as conclusões do lema 12 (veja capítulo 4). O seguinte lema é consequência direta do lema 12 onde não foi usada a hipótese de unicidade na medida maximizante.

Lema 13. *Sejam $\beta_j \rightarrow \infty$ e η_{β_j} , uma sequência de medidas de probabilidade tal que para todo cilindro C , existe o limite*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \eta_{\beta_j}(C). \quad (5.2)$$

Então

1. A função

$$I(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \eta_\beta([x_0 x_1 \dots x_{n-1}]).$$

Está bem definida, é positiva e semicontínua inferiormente.

2. Para todo ponto $x \in \Sigma$, $I(\sigma(x)) \leq I(x)$.

No seguinte lema é provado que a família $\frac{1}{\beta} \log \nu_\beta$ tem pontos de acumulação quando $\beta \rightarrow \infty$.

Note que no capítulo 4 foi fixada a condição $\tilde{h}_\beta(\bar{y}) = 1$, neste capítulo são considerados h_β correspondentes às automedidas de probabilidade ν_β . No lema 6 foram encontradas constantes L_a, l_a tais que para todo $x \in [a]$,

$$\exp(\beta l_a) \leq \tilde{h}_\beta(x) \leq \exp(\beta L_a). \quad (5.3)$$

O estado de equilíbrio satisfaz

$$h_\beta \nu_\beta = \mu_\beta = \tilde{h}_\beta \tilde{\nu}_\beta. \quad (5.4)$$

Então

$$\tilde{h}_\beta = \frac{h_\beta}{h_\beta(\bar{y})}$$

e

$$\tilde{\nu}_\beta = \nu_\beta h_\beta(\bar{y}).$$

Usando essa relação e (5.3), tem-se que

$$\exp(\beta(l_a + \frac{1}{\beta} \log h_\beta(\bar{y}))) \leq h_\beta(x) \leq \exp(\beta(L_a + \frac{1}{\beta} \log h_\beta(\bar{y}))). \quad (5.5)$$

por outro lado, $\frac{1}{\beta} \log h_\beta(\bar{y})$ é limitado [BMP16]. Portanto, existem constantes l_a, L_a tais que para todo $x \in [a]$,

$$\exp(\beta l_a) \leq h_\beta(x) \leq \exp(\beta L_a). \quad (5.6)$$

São denotadas da mesma forma para não sobrecarregar a notação.

Lema 14. *Nas hipóteses do teorema E. Para cada cilindro $C = [x_0 \dots x_{n-1}]$ e cada sequência $\beta_j \rightarrow \infty$, existem pontos de acumulação para*

$$\frac{1}{\beta_j} \log \nu_{\beta_j}(C).$$

Demonstração. Seja C um cilindro e β_j uma sequência tal que $\lim_j \beta_j = \infty$, pela proposição 8, para todo $y \in C$,

$$\mu_{\beta_j}(C) \geq \exp(\beta_j(-5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(f))).$$

Em virtude da proposição 6, existe $N = N_{x_0}$ tal que para todo $x \in C$,

$$h_\beta(x) \leq \exp(\beta N).$$

Lembrando que $\mu_\beta(C) = \int_C h_\beta d\nu_\beta$, então $\nu_\beta(C) \sup_C h_\beta(x) \geq \mu_\beta(C)$, combinando as duas desigualdades acima,

$$\nu_{\beta_j}(C) \geq \frac{\mu_{\beta_j}(C)}{\sup_{x \in C} h_{\beta_j}(x)} \geq \exp(\beta_j(-5\text{Var}(f) + S_n f(y) - nP(f) - N)).$$

Então, como ν_β é uma medida de probabilidade, $\frac{1}{\beta} \log \nu_\beta$ é uma família limitada e portanto possui pontos de acumulação quando $\beta \rightarrow \infty$. □

Novamente, um argumento diagonal permite mostrar que existe uma subsequência β_k tal que o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \nu_{\beta_k}(C), \quad (5.7)$$

existe para todo cilindro C .

No lema 12 item 3, foi provado que quando existe o limite $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}(C)$ para todo cilindro, então a função I definida acima satisfaz

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \mu_{\beta_j}(C) = - \inf_{x \in C} I(x). \quad (5.8)$$

Devido à hipótese em (5.2) a função I não depende da sequência β_j . O seguinte lema mostra que a família de automedidas satisfaz um resultado no mesmo sentido.

Lema 15. *Seja ν_β a sequência de automedidas de probabilidade para βf , suponha que para qualquer cilindro C , existe o limite*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C).$$

Então

1. *A função*

$$J(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta([x_0 x_1 \dots x_{n-1}]).$$

Está bem definida, é positiva e semicontínua inferiormente.

2. *Para todo cilindro C ,*

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C) = \inf_{x \in C} J(x).$$

3. Para todo ponto $x \in \Sigma$, $J(\sigma(x)) \leq J(x)$.

Demonstração. A prova dos itens 1 e 3 é consequência direta do lema 13.

Prova do item 3. Seja C um cilindro e $\beta > 1$, da proposição 9, tem-se

$$\mu_\beta([x_0x_1 \dots x_{n-1}]) \leq \exp(5\text{Var}(\beta f) - S_n\beta f(x) - n\beta m).$$

Por outra parte, em virtude da proposição 6, existe l tal que para todo $x \in [x_0]$

$$h_\beta(x) \geq \exp(\beta l).$$

Para todo $x \in [a]$, então para todo $x \in C$

$$\nu_\beta(C) \leq \frac{\mu_\beta(C)}{\inf_{z \in C} h_\beta(z)} \leq \exp(\beta(5\text{Var}(f) - S_n f(x) - nm - l)).$$

Com essa cota é usado um argumento similar ao usado no lema 12, o argumento está baseado na hipótese de f ser somável.

Para todo $\beta > 1$, e todo $z \in C$

$$\begin{aligned} \nu_\beta(C) &= \sum_j \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]) \\ &\leq \sum_j \exp(\beta(S_n f(z) + 5\text{Var}(f) - nm)) \exp(\beta(\sup f|_j - m)) \\ &\leq \exp(\beta S_n f(z) + 5\text{Var}(f) - nm - l) \left(\sum_j \exp(\sup f|_j - m) \right)^\beta \end{aligned}$$

Como f é somável, existe K tal que

$$\sum_{j > K} \exp(\sup f|_j - m) \leq \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j_0]).$$

Onde j_0 é o menor inteiro tal que $[x_0 \dots x_{n-1}j_0]$ é não vazio.

Dessa forma,

$$\nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}]) \leq 2 \sum_{j < K} \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]).$$

Então

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \sum_{j < K} \log \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]).$$

Portanto existe $j < K$ tal que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1}j]).$$

Dessa forma, é possível construir uma sequência de cilindros $[x_0 \dots x_1 y_0 y_1 \dots y_k]$ tal que para todo k ,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C) \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta([x_0 \dots x_{n-1} y_0 y_1 \dots y_k]).$$

Tomando z na interseção de uma sequência assim construída e usando a semi-continuidade da função J , tem-se que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_{\beta}(C) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log \nu_{\beta}([x_0 \dots x_{n-1} y_0 y_1 \dots y_k] \leq -J(z).$$

□

Agora seguindo o mesmo esquema da prova em [Men16] é realizada a demonstração do Teorema E, que após adaptações dos lemas anteriores é idêntica à prova em [Men16].

Demonstração do teorema E. 1. Da proposição 10 para todo ponto de acumulação V da família $\frac{1}{\beta} \log h_{\beta}$, note que tais pontos de acumulação existem devido ao lema 6).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \frac{\mu_{\beta_j}([x_0 \dots x_n])}{\mu_{\beta_j}([x_1 \dots x_n])} = V \circ \sigma(x) - V(x) - f(x) + m.$$

Note que por hipótese, (5.2), a parte esquerda da equação acima não depende da escolha da subsequência β_j , portanto $\lim_{\beta} \frac{g_{\beta}}{\beta}$ existe e

$$I(x) = R(x) + I(\sigma(x)).$$

2. No capítulo 4 foi provado que se

$$\sum_{j \geq 0} R(\sigma^j(x)) < \infty,$$

então x pertence a algum *subshift* compacto Σ_j , portanto este item é consequência direta da versão compacta feita em [Men16]. Quando a soma não converge, é claro que tanto $I(x)$ quanto a soma são infinitas.

3. Como já foi mencionado no item 1, para toda sequência $\beta_j \rightarrow \infty$ existe uma subsequência β_k tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log h_{\beta_k} \tag{5.9}$$

existe uniformemente em compactos. Note que da convergência (5.2) e o lema 13, para todo cilindro C

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}(C) = - \inf_{x \in C} I(x).$$

É possível assumir que a sequência β_k em (5.9) satisfaz que os limites em (5.7) existem para todo cilindro C .

Portanto, dado que para todo cilindro C e todo k

$$\begin{aligned} (\inf_{x \in C} h_{\beta}(x)) \nu_{\beta_k}(C) &\leq \mu_{\beta_k}(C) \\ &\leq (\sup_{x \in C} h_{\beta}(x)) \nu_{\beta_k}(C), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C} \frac{1}{\beta} \log h_\beta(x) + \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C) &\leq \frac{1}{\beta} \log \mu_\beta(C) \\ &\leq \sup_{x \in C} \frac{1}{\beta} \log h_\beta(x) + \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(C). \end{aligned}$$

Tomando limite em $\beta_k \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C} V(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \nu_{\beta_k}(C) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}(C) \\ &\leq \sup_{x \in C} V(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \nu_{\beta_k}(C). \end{aligned}$$

Fixando um x e tomando limite quando $n \rightarrow \infty$ na equação acima obtém-se

$$V(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \nu_{\beta_k}(C) = -I(x).$$

Dessa forma e chamando $J = V + I$, então pelo lema 13

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \nu_{\beta_k}(C) = - \inf_{x \in C} J(x). \quad (5.10)$$

Essa equação implica que toda sequência $\beta_k \rightarrow \infty$ tal que (5.7) é convergente para todo cilindro C determina uma função J . O seguinte passo é mostrar que a função J não depende da sequência escolhida.

Como $\frac{g_\beta}{\beta}$ converge quando $\beta \rightarrow \infty$, para quaisquer dois pontos de acumulação V_1 e V_2 da família $\frac{\log h_\beta}{\beta}$ tem-se que

$$V_1(\sigma(x)) - V_1(x) - f(x) + m = V_2(\sigma(x)) - V_2(x) - f(x) + m,$$

então para todo $x \in \Sigma$

$$V_2(x) - V_1(x) = V_2(\sigma(x)) - V_1(\sigma(x)).$$

Note que isso implica que se y é um ponto periódico, então $V_1 - V_2$ é constante na órbita de y , mais ainda, a função $V_1 - V_2$ é invariante, então usando que o estado de equilíbrio é ergódico e de suporte total, $V_1 - V_2$ é uma função constante. Para terminar a prova basta mostrar que essa constante é zero.

Suponha que para $(\beta_j)_{j>1}$, $V_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} h_{\beta_j}$.

Afirmção 2. *Existe $a \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \nu_{\beta_j}([a]) = 0. \quad (5.11)$$

Demonstração. Em virtude da proposição 8 e a proposição 7 existe l tal que para todo a ,

$$\nu_\beta([a]) \leq \exp(\beta(\sup f|_{[a]} - m + 5\text{Var}(f) - l)).$$

Para mostrar isso note que $\mu_\beta([a]) \leq \exp(\sup f|_{[a]} - m + 5\text{Var}(f))$ e $h_\beta(x) \geq \exp(\beta l)$ (Lema 7),

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{a=0}^{\infty} \nu_{\beta}([a]) &\leq \sum_{a=0}^{\infty} \exp(\beta(\sup f|_{[a]} - m + 5Var(f) - l)) \\
&\leq \exp(\beta(-m + 5Var(f) - l)) \sum_{a=0}^{\infty} \exp(\beta \sup f|_{[a]}) \\
&\leq \exp(\beta(-m + 5Var(f) - l)) \left(\sum_{a=0}^{\infty} \exp(\sup f|_{[a]}) \right)^{\beta}.
\end{aligned}$$

Como f é somável existe K tal que

$$\sum_{a=K}^{\infty} \exp(\sup f|_{[a]}) < \frac{1}{2} \exp(m - 5Var(f) + l),$$

Portanto,

$$\sum_{a=K}^{\infty} \nu_{\beta}([a]) < \frac{1}{2}.$$

Dessa forma,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \sum_{a=0}^{\infty} \log \nu_{\beta_j}([a]) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \sum_{a=0}^K \log \nu_{\beta_j}([a]),$$

então existe $a < K$ tal que

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \sum_{a=0}^{\infty} \log \nu_{\beta_j}([a]) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \nu_{\beta_j}([a]).$$

□

Seja J_1 a função determinada pelo ponto de acumulação V_1 , e J_2 a correspondente para V_2 . Para cada cilindro $[a]$ pela equação 5.10

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_j} \log \nu_{\beta_j}([a]) = - \inf_{x \in [a]} J_1(x) \\
&= - \inf_{x \in [a]} J_2(x) = - \inf_{x \in [a]} J_1(x) + cte.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a afirmação 2, para J_2 pode-se mostrar que $\inf_{x \in \Sigma} J_2(x) = 0$, mas $J_2 = J_1 + cte$, e tanto J_1 quanto J_2 são positivas, isso implica que a constante é zero.

□

Finalmente, como consequência imediata do teorema E, no caso em que a medida maximizante é única, a função taxa para um princípio dos grandes desvios tem que ser da forma dada pelo limite na conjectura 4.4.

Capítulo 6

Conclusões e outras questões

Nesta tese é estudada a existência de subações calibradas para *shift* de Markov topologicamente transitivos e potenciais coercivos de variação finita. É provado que a barreira de Peierls define uma subação calibrada e limitada inferiormente. Este resultado generaliza as construções similares nos casos compacto e finitamente primitivo. É provado também que a existência de subações calibradas e limitadas é equivalente à propriedade BP.

Se a medida maximizante para f é única, toda subação calibrada e limitada difere da barreira de Peierls por uma constante. A caracterização dada pela barreira de Peierls permite, por exemplo, mostrar o princípio dos grandes desvios em espaços finitamente primitivos [BMP16].

No intuito de generalizar o princípio dos grandes desvios para *shifts* topologicamente *mixing* em geral (sem a hipótese BIP) é importante deixar claro que, nesse caso, existem exemplos de potenciais coercivos de variação finita e pressão finita que não possuem estados de equilíbrio [Sar01a]. Para um potencial somável de variação finita e pressão finita, existem os estados de equilíbrio para βf [FV15]. Para os estados de equilíbrio μ_β , é mostrado que toda sequência $\beta_j \rightarrow \infty$, possui uma subsequência $\beta_k \rightarrow \infty$ tal que para todo cilindro C , existe o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log \mu_{\beta_k}(C) \quad (6.1)$$

e o seguinte limite existe uniformemente em compactos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k} \log g_{\beta_k} =: R. \quad (6.2)$$

Se algum dos limites acima não dependesse da escolha da subsequência β_k , seria possível provar o princípio dos grandes desvios pois a relação entre esses limites está dada pela seguinte equação.

$$I(x) = \lim_{\beta_j \rightarrow \infty} g_{\beta_j}(x) + I(\sigma(x)).$$

Onde I e g_β estão determinados pelos limites 6.1 e 6.2 respectivamente. Isso implica que se os pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} g_\beta$ não dependem da subsequência escolhida, isto é, existe $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_\beta$, então a função I também não depende dessa escolha.

Para pontos de *subshifts* finitos é mostrado que se

$$\sum_{j=0}^{\infty} R(x) < \infty,$$

então a órbita futura de x acumula pontos no suporte da medida maximizante. Nesse caso,

$$I(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R(\sigma^j(x)).$$

Algumas das tentativas para mostrar essa independência é usando um argumento diagonal. Isto é, usando aproximações por *subshifts* compactos e observando que para x em algum compacto a sequência de limites a temperatura zero é eventualmente constante.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_{\beta,k}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} g_{\beta,J}(x)$$

para algum J suficientemente grande. Por outro lado, para cada β fixado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{\beta,k}(x) = g_{\beta}(x).$$

Então seria suficiente mostrar que

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{\beta,k}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} g_{\beta}(x).$$

Uma dificuldade na hora de tentar mostrar a independência na escolha da subsequência acima mencionada é que os pontos de acumulação de $\frac{1}{\beta} \log h_{\beta}$ podem não ser limitados. Isso dificulta o argumento que tinha sido usado até agora para mostrar princípio dos grandes desvios. A hipótese de f ser somável foi importante na hora de garantir existência de estados de equilíbrio, mas pode se pensar que caso em que f não necessariamente é somável mas βf possua estado de equilíbrio para todo $\beta > 1$ sejam válidos os argumentos descritos. Outra parte onde foi importante a hipótese de f ser somável foi garantir que a automedida ν_{β} for finita, isso foi usado para mostrar que $h_{\beta,k}(x) \rightarrow h_{\beta}(x)$ para x em algum Σ_k . É interessante a questão de saber se o argumento diagonal acima descrito pode ser usado nesse contexto.

Para o caso particular em que Σ satisfaz que para cada $x \in \Sigma$ existem apenas finitas pré-imagens, os pontos de acumulação para $\frac{1}{\beta} \log h_{\beta}$ resultam subações calibradas. Então para *shift* de renewal que satisfazem BP, todo ponto de acumulação dessa família é uma subação calibrada e limitada inferiormente. Portanto, para mostrar o princípio dos grandes desvios para *shifts* de renewal e potenciais somáveis de variação finita e pressão finita, bastaria mostrar que esses pontos de acumulação são limitados superiormente.

Finalmente, é interessante estudar o caso em que os estados de equilíbrio satisfazem o princípio dos grandes desvios mesmo quando a medida maximizante não é única. Em um artigo recente J. Mengue faz esse estudo no caso compacto. Alguns dos lemas que são usados em [Men16] foram generalizados nesta tese com a hipótese BP. A questão é se no contexto geral de *shifts* não compactos, assumindo a convergência dos estados de equilíbrio para uma medida maximizante e que satisfazem o princípio

dos grandes desvios, a função taxa é caracterizada como no último capítulo desta tese.

Bibliografia

- [BF14] R. Bissacot e R. Freire. On the existence of maximizing measures for irreducible countable Markov shifts: a dynamical proof. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(04):1103–1115, 2014.
- [Bil68] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.
- [BLL13] A. Baraviera, A. Lopes, e R. Leplaideur. Ergodic optimization, zero temperature limits and the max-plus algebra. *29 Colóquio Brasileiro de Matemática*, 2013.
- [BLT06] A. Baraviera, A. Lopes, e P. Thieullen. A large deviation principle for the equilibrium states of Hölder potentials: the zero temperature case. *Stochastics and Dynamics*, 6(01):77–96, 2006.
- [BMP16] R. Bissacot, J. Mengue, e E. Pérez. A large deviation principle for Gibbs states on countable Markov shifts at zero temperature. *www.arxiv.org/abs/1612.05831v2*, 2016.
- [Bow75] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470. Springer, 1975.
- [BS03] J. Buzzi e O. Sarig. Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(05):1383–1400, 2003.
- [CH10] J. Chazottes e M. Hochman. On the zero-temperature limit of Gibbs states. *Communications in Mathematical Physics*, 297(1):265–281, 2010.
- [CLT01] G. Contreras, A. Lopes, e P. Thieullen. Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, (21):1379–1409, 2001.
- [FV15] R. Freire e V. Vargas. Equilibrium states and zero temperature limit on topologically transitive countable Markov shifts. *www.arxiv.org/abs/1511.01527*, 2015.
- [GL08] E. Garibaldi e A. Lopes. On the Aubry-Mather theory for symbolic dynamics. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28(3):791–815, 2008.
- [GLT09] E. Garibaldi, A. Lopes, e P. Thieullen. On calibrated and separating sub-actions. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 40(4):577–602, 2009.

- [Iom07] G. Iommi. Ergodic optimization for renewal type shifts. *Monatshefte für Mathematik*, 150(2):91–95, 2007.
- [Jen06] O. Jenkinson. Ergodic optimization. *Discrete and Cont Dynamical Systems*, (15):197–224, 2006.
- [JMU06] O. Jenkinson, R. Mauldin, e M. Urbanski. Ergodic optimization for countable alphabet subshifts of finite type. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26(06):1791–1803, 2006.
- [JMU07] O. Jenkinson, R. Mauldin, e M. Urbanski. Ergodic optimization for noncompact dynamical systems. *Dynamical Systems*, 22(3):379–388, 2007.
- [LM10] A. Lopes e J. Mengue. Zeta measures and thermodynamic formalism for temperature zero. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(3):449–480, 2010.
- [Men16] J. Mengue. Large deviations for equilibrium measures and selection of subaction. <https://arxiv.org/abs/1608.05881v1>, 2016.
- [Mor07] I. Morris. Entropy for zero-temperature limits of Gibbs-equilibrium states for countable-alphabet subshifts of finite type. *Journal of Statistical Physics*, 126(2):315–324, 2007.
- [MU01] R. Mauldin e M. Urbański. Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet. *Israel Journal of Mathematics*, 125(1):93–130, 2001.
- [MU03] R. Mauldin e M. Urbanski. *Graph directed Markov systems: geometry and dynamics of limit sets*, volume 148. Cambridge University Press, 2003.
- [OV14] K. Oliveira e M. Viana. *Fundamentos da teoria ergódica*. 2014.
- [PP90] W. Parry e M. Pollicott. *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*. Société mathématique de France, 1990.
- [Pé15] E. Pérez. *Princípio dos grandes desvios para estados de Gibbs-equilíbrio sobre shifts enumeráveis à temperatura zero*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2015.
- [Rue78] D. Ruelle. *Thermodynamic formalism, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, volume 5. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1978.
- [Sar99] O. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19(06):1565–1593, 1999.
- [Sar01a] O. Sarig. Phase transitions for countable Markov shifts. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):555–577, 2001.
- [Sar01b] O. Sarig. Thermodynamic formalism for null recurrent potentials. *Israel Journal of Mathematics*, 121(1):285–311, 2001.
- [Sar03] O. Sarig. Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(6):1751–1758, 2003.

- [Wal00] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.