**Integrais concentradas na fronteira
e aplicações para problemas
elípticos semilineares**

Ariadne Nogueira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTORA EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira

Co-orientador: Prof. Dr. José Maria Arrieta Algarra

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq.

São Paulo, agosto de 2017

Integrais concentradas na fronteira e aplicações para problemas elípticos semilineares

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 09/08/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho - ICMC-USP
- Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto - ICMC-USP
- Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP

*“Mira a la derecha y a la izquierda del tiempo,
y que tu corazón aprenda a estar tranquilo.”*
(Federico García Lorca)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela força e pela oportunidade de concluir mais esta etapa na minha vida. Agradeço muito também a minha família pelo suporte e por acreditar, junto comigo, que tudo seria possível. Em especial minha mãe, meu modelo de pessoa e grande orgulho, sou grata pela ajuda em todos os aspectos, paciência e dedicação para que eu conseguisse seguir meu próprio rumo na vida, sabendo que há alguém que me ama sem restrições, sempre com muito respeito, confiança e incentivo. Sem sombra de dúvida, tal presença me ajudou muito em todas as fases deste trabalho.

Gostaria também de lembrar dos meus amigos distantes, de minha cidade natal e de outras épocas da vida, agradecer pela paciência com as minhas ausências e por me fazerem tão bem no momento em que eu voltava pra casa ou quando vinham me visitar aqui, me ajudando a passar pelas turbulências da jornada. Vocês me fizeram ter certeza que, muitas vezes, a distância só potencializa os sentimentos quando eles são bem cultivados, não importa se temos um oceano nos separando.

Sem esquecer das pessoas que São Paulo, essa cidade gigantesca, aproxima e distancia, mas que continuam sendo parte importante da vida aqui. Meu agradecimento vai para Rafa, Marina, Stefani e Will, que, há muito ou pouco tempo, já são parte importante da minha vida e eu espero que continuem por perto.

Agradeço, em especial, a quem me ajudou durante minha fantástica e enriquecedora estadia em Madri, Espanha. Queria agradecer a hospitalidade pessoal e profissional do Prof. Dr. José M. Arrieta, sempre muito atencioso e gentil, com sugestões e correções que, ao longo de todo o trabalho, só enriqueceram minha experiência no doutorado sanduíche. Ao Manuel e à Lourdes pelo auxílio constante, dentro e fora da academia, e a todas as outras pessoas da Universidad Complutense de Madrid que, de alguma maneira, me ajudaram em um ambiente novo e diferente, especialmente ao grupo de pesquisa “Comportamento Asintótico y Dinámica de Ecuaciones Diferenciales”. Além deles, não sei o que eu faria sem a Pricila sendo minha parceira de viagem e enfermeira no momento em que eu mais precisei, ou sem minhas americanas Ashley e Hannah como companheiras de vida madrileña, meu muito obrigado de coração por estarem lá comigo.

Não posso me esquecer também dos amigos que o IME/USP me trouxe e que me ajudaram

a enfrentar todos os obstáculos desses anos de doutorado. Particularmente gostaria de agradecer Tonton, Glauce, Tatá e Maikel por estarem sempre presentes quando precisei. Mesmo que a vida acadêmica tenha nos separado, os levarei comigo onde estiver.

Finalmente, gostaria de agradecer ao grupo de Dinâmica de Equações de Evolução do IME/USP pela ajuda durante o desenvolvimento da tese. Em particular, gostaria de agradecer meu orientador Prof. Dr. Marcone Corrêa Pereira pela amizade e pelo companheirismo nesses anos, me ajudando sempre que necessário e me guiando nesse caminho que, de certa forma, foi novo para nós dois.

Por último, agradeço ao IME/USP e ao CNPq pela confiança e apoio financeiro neste projeto.

Resumo

Neste trabalho estudamos propriedades de integrais concentradas, ou seja, integrais cujo integrando atua apenas em uma vizinhança do domínio em questão. Tais termos são utilizados para conhecer o comportamento do integrando em regiões cuja medida de Lebesgue se aproxima de zero quando um parâmetro tende a zero. Ilustraremos estes resultados abstratos através de duas aplicações, ambas em domínios Lipschitz de $\mathbb{R}^2$, onde adicionamos um termo de concentração em problemas semilineares elípticos: domínio com fronteira oscilante que tende a um domínio limite fixo; e domínio do tipo fino com fronteira oscilante. Em ambos os casos, provamos a semi-continuidade superior e inferior da família de soluções dos problemas.

Palavras-chave: integrais concentradas, perturbação de contorno, equações diferenciais parciais, equações elípticas, semi-continuidade superior e inferior.

Abstract

In this work we study concentrating integrals properties, in other words, we analyze integrals which function that is been integrated acts only in a neighborhood of the boundary of the domain. Such terms are use to know the behaviour of the integrand in regions which Lebesgue measure tends to zero when a parameter goes to zero. We will illustrate these abstract results through two applications, both in Lipschitz domains of $\mathbb{R}^2$, where we add a concentration term in semi linear elliptic problems: oscillating boundary domain which tends to a fixed limit domain; and a thin domain with a oscillatory boundary. In both cases we prove the upper and lower semicontinuity of the family of solutions from these problems.

Keywords: concentrating integrals, boundary perturbations, partial differential equations, semilinear elliptic equations, upper and lower semicontinuity.

Sumário

Introdução	1
I Teoria geral: integrais concentradas	11
1 Preliminares	13
1.1 Espaços de Sobolev Fracionários	13
1.1.1 Espaços euclidianos	14
1.1.2 Subconjuntos abertos de espaços euclidianos	16
1.2 Espaços de Lebesgue-Bochner e Sobolev-Bochner generalizados	20
1.3 Teorema do traço, densidade e imersões de Sobolev	22
1.4 Teoria abstrata sobre convergência compacta de operadores	27
2 Integrais concentradas	33
2.1 Equivalência de normas em domínios não-regulares de $\mathbb{R}^2$	33
2.2 Integrais concentradas	42
2.2.1 Para $\varepsilon > 0$ fixo	42
2.2.2 Comportamento no limite $\varepsilon \rightarrow 0$	45
2.3 Perturbações da não-linearidade	49
II Aplicações	57
3 Domínios com fronteira oscilante	59
3.1 Operador de extensão e E -convergência	61
3.2 Caso linear	62
3.2.1 Existência de solução	63
3.2.2 Convergência de soluções	64

3.3	Caso semilinear	67
3.3.1	Existência de solução	67
3.3.2	Semicontinuidade de soluções	69
4	Domínio fino com fronteira oscilante	77
4.1	Operador de extensão e E -convergência	81
4.2	Caso linear	84
4.2.1	Existência de solução	85
4.2.2	Convergência de soluções	87
4.3	Caso semilinear	88
4.3.1	Existência de solução	89
4.3.2	Semicontinuidade de soluções	91
	Referências Bibliográficas	99

Contextualização histórica e objetivos

As equações diferenciais parciais, também chamadas EDPs, são amplamente utilizadas como ferramentas para a modelagem matemática de fenômenos em diversas áreas de estudo, como Engenharia, Física, Química, Biologia, Economia, entre outros. Entender o comportamento das equações e suas soluções pode ajudar a compreender melhor os modelos e, conseqüentemente, as situações modeladas. De modo mais específico, aqui estamos interessados em problemas de perturbação de contorno em EDPs, que são importantes ao se garantir que o comportamento qualitativo observado no sistema aproximado pode ser transferido ao problema original de alguma forma.

Problemas de perturbação de contorno foram estudados por diversos autores, desde o pioneiro Rayleigh [1945], até estudos mais recentes de shape optimization (Delfour e Zolésio [2011]), homogeneização (Cioranescu e Donato [1999], Tartar [2009]), domínios finos (Elsken [2005], Hale e Raugel [1992a]), domínios que possuem fronteira oscilante (Arrieta e Carvalho [2004], Chechkin, Friedman, e Piatnitski [1999], Henry, Hale, e Pereira [2005], Pereira e Pereira [2007]), domínios perfurados (Cioranescu *et al.* [2012]), domínios do tipo dumbbell (Arrieta *et al.* [2006, 2009a,b]), entre outros. Neste trabalho falaremos um pouco mais de problemas com fronteira oscilante e domínios finos, acrescentando termos concentrados próximos à fronteira em ambos os casos e analisando seu comportamento.

O caso abordando soluções de problemas elípticos com reações concentradas em uma vizinhança da fronteira foi estudado inicialmente em Arrieta, Jiménez-Casas, e Rodríguez-Bernal [2008a], onde a vizinhança é uma faixa de espessura ε e tem base na fronteira, não possui oscilação e está dentro de Ω , como ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Domínio fixo suave com faixa de concentração de ordem ε na fronteira.

Mais precisamente, em [Arrieta *et al.* \[2008a\]](#) foi provado que as soluções convergem, em certos espaços, à solução de um problema elíptico definido em Ω , onde os termos concentrados se tornam uma condição de fronteira no limite. Tal comportamento notar-se-á típico, fazendo com que esses resultados de convergência possam ser vistos como uma maneira de se transferir informações do interior para a fronteira. Depois disso, em [Jiménez-Casas e Rodríguez-Bernal \[2009\]](#) e [Jiménez-Casas e Rodríguez-Bernal \[2011\]](#) foi analisado o problema parabólico e o comportamento assintótico dos atratores quando há concentração, onde a semicontinuidade superior dos atratores foi provada. Em ambos os artigos, o domínio Ω base em questão é C^2 .

Posteriormente, alguns resultados de [Arrieta *et al.* \[2008a\]](#) foram adaptados a um problema elíptico semilinear definido em um quadrado Ω de $\mathbb{R}^2$ em [Aragão, Pereira, e Pereira \[2012\]](#), considerando a vizinhança interior da fronteira dada por ω_ϵ , com $\omega_\epsilon \subset \Omega$ e alto comportamento oscilatório. Note que tal domínio, ilustrado na Figura 2, não é mais suave como os anteriores.

Figura 2: Domínio fixo com concentração determinada por função com comportamento oscilatório na fronteira.

Com este mesmo enfoque, o trabalho de [Aragão e Oliva \[2011\]](#) estudou problemas de reação-difusão com retardo envolvendo uma faixa de concentração em uma fronteira suave. Além disso, foi estudado em [Pereira \[2013\]](#) e [Aragão, Pereira, e Pereira \[2014\]](#) a dinâmica do fluxo gerado pelo caso parabólico definido em um domínio C^2 com termos concentrados na fronteira interior, como ilustrado na Figura 3, onde tal vizinhança apresenta grande oscilação, provando-se a semicontinuidade superior e inferior da família de atratores nestes casos.

Figura 3: Concentração determinada por função oscilante na fronteira de um domínio fixo

O comportamento das soluções de equações elípticas não-lineares, com condições de fronteira de Neumann não-homogêneas e definidas em domínios cujas fronteiras variam rapidamente foi estudado em [Arrieta e Bruschi \[2007\]](#), para o caso de deformação Lipschitz uniforme da fronteira, e em [Arrieta e Bruschi \[2010\]](#), para caso de deformação não-Lipschitz, porém sem concentração de termos e ambos definidos em domínios suaves. Casos homogêneos mais gerais de perturbações do domínio, incluindo particularmente estes problemas, foram estudados em [Arrieta e Carvalho](#)

[2004], onde prova-se resultados sobre convergência espectral e semicontinuidade superior de atratores do problema parabólico.

No que diz respeito à concentração de termos, em Aragão e Bruschi [2016] e Aragão e Bruschi [2015] foram estudados os casos de Arrieta e Bruschi [2007] e Arrieta e Bruschi [2010], respectivamente, com concentração exterior na fronteira, isto é, a reação acontece no exterior da fronteira do aberto limite. Novamente, a reação concentrada na vizinhança do domínio perturbado se transforma em fluxo atuando na fronteira do domínio no problema limite. Note que, neste caso, como a concentração acontece em uma vizinhança exterior do domínio, o domínio perturbado não está contido no domínio limite, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Domínio com fronteira oscilante e concentração exterior na fronteira.

No Capítulo 3 deste trabalho analisaremos o comportamento das soluções de problemas elípticos, com condições de fronteira Neumann homogêneas, da forma

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(v^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

com $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do domínio Ω_ε , $\partial/\partial \nu^\varepsilon$ a derivada na direção do vetor ν^ε , $\chi^{\theta_\varepsilon}$ função característica do conjunto θ_ε , f uma função C^2 , definidos em domínios como os da Figura 5.

Figura 5: Domínio com concentração na fronteira oscilante estudado no Capítulo 3.

Note que a aplicação abordada aqui difere dos casos anteriores por não restringir tal concentração como exterior ou interior ao domínio limite. Além disso, trabalhamos apenas com deformações do tipo Lipschitz, como se estivéssemos em uma carta do domínio estudado em Arrieta e Bruschi [2007], porém, no caso de condições de fronteira homogênea, e aplicamos uma concentração dada

de forma mais geral que em [Aragão e Bruschi \[2016\]](#). Aqui estudaremos a convergência de soluções no caso linear na Seção 3.2 e a semicontinuidade superior e inferior do problema semilinear na Seção 3.3 em $H^1(\Omega_\varepsilon)$, onde mostramos como a concentração do problema perturbado novamente se transforma em um fluxo que atua na fronteira do domínio limite.

Por outro lado, também nos interessará neste trabalho o chamado domínio fino. Aqui nos referimos a problemas de domínios finos quando assumimos que os abertos onde as EDPs estão definidas se degeneram em subconjuntos de espaços Euclidianos de dimensão menor que o original. Tais domínios aparecem em muitos campos da ciência, como dinâmica de fluidos (lubrificação, condução de fluidos em tubos finos, dinâmica de oceanos), mecânica de sólidos (barras ou placas finas) ou fisiologia (circulação do sangue).

Existem muitos trabalhos na literatura lidando com equações diferenciais parciais em domínios finos, como os pioneiros [Hale e Raugel \[1992a\]](#), [Hale e Raugel \[1992b\]](#) e [Raugel \[1995\]](#), além dos subsequentes [Prizzi e Rybakowski \[2001\]](#), [Prizzi et al. \[2002\]](#) e [Elsken \[2005\]](#), onde os autores estudam o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos dados por uma classe de equações parabólicas definidas em um domínio fino de $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$.

Mais recentemente, trabalhos como [Arrieta e Pereira \[2010\]](#), [Arrieta, Carvalho, Pereira, e Silva \[2011\]](#), [Arrieta e Pereira \[2011\]](#), [Arrieta e Pereira \[2013\]](#), [Arrieta e Villanueva-Pesqueira \[2014a\]](#), [Arrieta e Villanueva-Pesqueira \[2014b\]](#), [Arrieta e Villanueva-Pesqueira \[2014c\]](#), [Pereira \[2016\]](#) e [Arrieta e Villanueva-Pesqueira \[2017\]](#) estudaram problemas lineares e semilineares em diferentes classes de domínios finos que possuem fronteira oscilante, com condições de fronteira de Neumann, discutindo problemas limites e propriedades de convergência de soluções e atratores nas equações elípticas e parabólicas, respectivamente.

De forma mais específica, quando incluímos termos concentrados na fronteira do domínio, podemos citar o trabalho de [Barros e Pereira \[2016\]](#), onde é analisado um problema não-linear elíptico definido em um domínio fino sem oscilação, porém com concentração numa vizinhança da fronteira definida por uma função altamente oscilante, ilustrado na Figura 6.

Figura 6: Domínio fino padrão com concentração oscilante na fronteira.

Sendo assim, no Capítulo 4 trabalharemos também com equações elípticas, sob condições de fronteira de Neumann homogênea, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon\gamma} \chi^{o_\varepsilon} f(v^\varepsilon) & \text{em } R_\varepsilon, \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial R_\varepsilon, \end{cases} \quad (2)$$

com $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do domínio fino R_ε , $\partial/\partial \nu^\varepsilon$ a derivada na direção do vetor ν^ε , χ^{o_ε} função característica do conjunto o_ε , f de classe C^2 , definidas em um domínio fino que possui fronteira altamente oscilante e, além disso, há um termo concentrado em uma vizinhança da fronteira. Tal domínio é ilustrado na Figura 7.

Note que tal aplicação generaliza os trabalhos anteriores por unificar os problemas de domínio fino com fronteira altamente oscilante e com termos concentrados em uma vizinhança da fronteira. Dessa forma, novamente estudaremos o problema elíptico de modo a provar a convergência das soluções no problema linear na Seção 4.2 e a semicontinuidade superior e inferior da família de

Figura 7: Domínio fino com concentração na fronteira oscilante estudado no Capítulo 4.

soluções no caso semilinear na Seção 4.3 em $L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))$, para $1/2 < s < 1$, onde G_ε é a função que define o domínio fino R^ε , mostrando a influência da geometria do domínio perturbado e da concentração no problema limite obtido.

Para tal análise de problemas, neste trabalho estudaremos com mais cuidado propriedades de um termo integral que contém funções concentradas em uma vizinhança da fronteira de seu domínio. A aplicação mostrada aqui implicará em generalizar casos de problemas definidos em domínios com fronteira variante, adicionando um termo de integral concentrada. Assim, procuramos identificar propriedades relacionadas à variação do domínio e à concentração agindo de forma simultânea, tentando entender o comportamento limite dos problemas e como tais termos o influenciam. Mais especificamente, estudamos integrais da forma

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u(x)|^q dx$$

para diferentes valores de $q \geq 2$ e conjuntos abertos $\theta_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ da forma

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in (0, 1), 0 < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\}, \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in (0, 1), G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1) < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\}, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\gamma > 0$, $G_\varepsilon = G(x_1, \varepsilon)$ e $H_\varepsilon = H(x_1, \varepsilon)$ são funções positivas cujas hipóteses específicas serão estabelecidas a cada situação. Integrais assim descritas foram estudadas nos trabalhos de [Arrieta, Jiménez-Casas, e Rodríguez-Bernal \[2008a\]](#) e [Arrieta, Rodríguez-Bernal, e Rossi \[2008b\]](#), apontando propriedades importantes destes termos.

Desta forma, a primeira metade deste trabalho tem como foco entender melhor a análise assintótica deste termo via estimativas e passagens ao limite. Depois disso, aplicamos tais resultados às equações elípticas semilineares e estudamos suas soluções.

Resultados Obtidos

No começo desta tese, durante o Capítulo 1, organizamos notações e definições de espaços funcionais, de modo a usá-los com mais segurança no decorrer do trabalho. Um dos pontos principais é dado no estudo de equivalência de normas em espaços de Sobolev cujo domínio não é suave e varia com relação a um parâmetro ε , além de estabelecer hipóteses necessárias para a utilização de certas inclusões com constantes independentes deste parâmetro.

Além disso, a Seção 1.4 desenvolve as ferramentas abstratas necessárias para melhor abordagem da semicontinuidade superior e inferior das soluções de problemas, através do conceito de E -convergência e convergência compacta, como utilizadas, por exemplo, em [Carvalho e Piskarev \[2006\]](#), [Arrieta et al. \[2006\]](#) e [Arrieta e Bruschi \[2007\]](#). Tal seção será um guia no desenvolvimento da segunda parte deste trabalho, mostrando os passos necessários para obtenção de resultados de convergência.

Sobre as integrais concentradas, no Capítulo 2 obtemos resultados estimando seus valores para

cada $\varepsilon > 0$ e analisando o comportamento das integrais quando fazemos ε tender a zero. Mais especificamente, buscamos resultados similares aos obtidos em [Arrieta *et al.* \[2008a\]](#) e [Barros e Pereira \[2016\]](#), por exemplo, onde os autores buscaram estudar o comportamento das integrais concentradas para depois aplicá-lo em problemas semilineares elípticos.

Nosso principal objetivo foi desenvolver estimativas nas integrais concentradas exigindo menos da suavidade do domínio. Os casos abordados nesta tese possuem fronteira Lipschitz, onde parte do domínio é descrito como o gráfico de uma função. A suavidade de tal função é designada em cada caso, através de hipóteses específicas.

Na Seção 2.1, estabelecemos:

Hipótese 1: $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva e uniformemente limitada, com $0 < G_0 \leq G(x, \varepsilon) \leq G_1$ para todo $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Hipótese 2: O aberto Ω_ε admite operador de extensão contínuo $P_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(U)$, onde o fecho de Ω_ε está contido em U para todo $\varepsilon > 0$, com $U = U_1 \times U_2$, tal que, para $u^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(U)} &\leq C_0 \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \\ \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(U_1; H^s(U_2))} &\leq C_s \|u^\varepsilon\|_{L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))}, \\ \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(U)} &\leq C_1 \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $C_0, C_s, C_1 > 0$ independem de $\varepsilon > 0$.

e, a partir destas hipóteses, desenvolvemos propriedades dos espaços de Sobolev e Sobolev-Bochner generalizados (ver o conceito de espaço de Sobolev-Bochner generalizados na Definição 1.2.3) que serão utilizados nos estudos das integrais concentradas.

Os principais resultados ao analisar integrais concentradas, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, são obtidos nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2, onde estabelecemos estimativas da integral a partir da norma dos espaços base $H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))$, isto é, dado $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ obtemos estimativas, com constantes $C > 0$ independentes de ε , da forma

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))}^2,$$

sob a Hipótese 1, e

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^q, \quad \text{para } 2 \leq q < 4,$$

ao acrescentarmos a Hipótese 2, por exemplo.

Para o estudo do comportamento assintótico das integrais concentradas, introduzimos

Hipótese 3:

- (i) a função G_ε converge uniformemente a m , onde $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ao menos Lipschitz, de modo que $G_\varepsilon(x_1) \rightarrow m(x_1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $x_1 \in (0, 1)$;
- (ii) a função $H_\varepsilon(\cdot)$ deve convergir fraco-estrela em $L^\infty(0, 1)$ a uma função que representaremos por μ_h .

O conjunto $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ é chamado de *conjunto admissível* quando as funções que o definem satisfazem as Hipóteses 1, 2 e 3 (ver Definição 2.2.4).

Ao considerarmos o aberto dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\}$$

tal que sua fronteira superior seja dada como

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\},$$

onde $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva limitada ao menos Lipschitz e com derivada limitada, obtemos propriedades sobre a convergência das integrais concentradas quando ε tende a zero.

Um dos principais resultados, ao trabalhar em um conjunto admissível, é dado pela Proposição 2.2.5, que afirma, para $u, \varphi \in H^1(U)$, valer

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \longrightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u) \gamma(\varphi) dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Note que o termo $\hat{\mu}$ capta a influência da concentração do problema perturbado e a geometria do domínio limite.

Tendo em vista tais propriedades, a Seção 2.3 aborda a análise da aplicação dada por

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x))) &\rightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \\ u &\longmapsto F_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) v, \end{aligned}$$

onde $1/2 < s < 1$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$, que será utilizada na elaboração dos problemas elípticos semilineares vistos na sequência do trabalho, estabelecendo condições para continuidade e diferenciabilidade desta aplicação (ver Proposições 2.3.2 e 2.3.4).

Após o estudo cuidadoso das integrais concentradas, partimos para as aplicações às equações elípticas semilineares com concentração na fronteira oscilante, tendo como objetivo provar a semi-continuidade superior e inferior das soluções. Na análise de cada problema citado há uma repetição de certos procedimentos. Como descrito, conseguimos dar um embasamento abstrato suficientemente satisfatório na primeira parte do trabalho e, com isso, o problema se resume a checar as hipóteses necessárias aos teoremas abstratos.

Como mencionado antes, no Capítulo 3 estudaremos o comportamento das soluções de problemas elípticos, com condições de fronteira Neumann homogêneas, da forma dada em (1).

A formulação do domínio (3) que usaremos aqui é tal que

(i) $G_\varepsilon(x_1) = m(x_1) + \varepsilon g(x_1/\varepsilon^\alpha)$, com

(a) $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ao menos Lipschitz com derivada limitada e

(b) $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 , limitada, L_g -periódica com derivada limitada e $\alpha \leq 1$.

(ii) $H_\varepsilon(x_1) = h(x_1/\varepsilon)$, h limitada e L_h -periódica.

Observação: Note que, sob essas condições, se denotarmos $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon^\alpha)$ e $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon)$, existem $\mu_g, \mu_h \in \mathbb{R}$ tais que

$$g_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_g = \frac{1}{L_g} \int_0^{L_g} g(s) ds \text{ e } h_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_h = \frac{1}{L_h} \int_0^{L_h} h(s) ds$$

em $L^\infty(0, 1)$ usando [Cioranescu e Donato, 1999, Teorema 2.6].

Neste caso, o problema limite de (1) é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \hat{\mu} f(u) & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

onde o domínio limite é dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\},$$

com $\Gamma = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\}$ sua fronteira superior e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Note que o termo $\hat{\mu}$ traduz a influência da concentração através da média da função H_ε , dada por μ_h , e da geometria do espaço limite, definido pela função m . Tal termo também sugere que o domínio limite não pode ser qualquer, implicando condições mínimas de suavidade à fronteira do aberto Ω . Além disso, note que a concentração se transforma em um termo na fronteira da equação limite, fazendo com que ela seja um problema de Neumann com condições de fronteira não-homogênea, diferentemente do problema perturbado.

Por outro lado, no Capítulo 4 trabalharemos com equações em domínio fino, sob condições de fronteira de Neumann homogênea, do tipo (2). Mas, sendo R_ε fino, optamos por fazer uma mudança de variáveis e trabalhamos com o problema equivalente

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

com $N^\varepsilon = (N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do novo domínio Ω_ε .

Neste caso, o domínio (3) do problema (4) tem as propriedades:

- (i) $G(x, \varepsilon) = g(x/\varepsilon)$ e $H(x, \varepsilon) = h(x/\varepsilon^\beta)$, $\beta > 0$, onde as funções $g, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves, positivas, L_g e L_h -periódicas, respectivamente, e tais que existem $g_0, g_1, h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ com

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1 < \infty, \quad 0 \leq h_0 \leq h(x) \leq h_1 < \infty, \quad \forall x \in (0, 1);$$

- (ii) g possui derivadas limitadas.

Sob estas hipóteses, o problema limite de (4) é da forma

$$\begin{cases} -q_0 u_{xx} + u = f_0(u) & \text{em } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases}$$

com

$$q_0 = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left[1 - \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 \text{ e } f_0(\cdot) = \frac{L_g}{|Y^*|} \mu_h f(\cdot),$$

onde X é definido pelo problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta X = 0 & \text{em } Y^*, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = 0 & \text{em } B_2, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = -\frac{g'(y_1)}{\sqrt{1 + g'(y_1)^2}} & \text{em } B_1, \\ X \text{ é } L_g\text{-periódica em } y_1, \\ \int_{Y^*} X dy_1 dy_2 = 0 \end{cases}$$

e a célula representativa dada por

$$Y^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < y_1 < L_g, 0 < y_2 < g(y_1)\},$$

sendo B_1 e B_2 são as fronteiras superior e inferior de ∂Y^* , respectivamente.

Observe que tal coeficiente $0 < q_0 < 1$ reflete como a geometria do domínio, em particular sua rugosidade, influencia o coeficiente de difusão da equação unidimensional limite. Entretanto, percebe-se que neste caso as condições de fronteira do problema limite se mantêm Neumann homogêneas e a concentração se torna um termo na não-linearidade que age no interior do intervalo limite.

Além disso, é importante notar que o caso estudado no Capítulo 3 é em um conjunto admissível, aonde foram utilizados todos os resultados desenvolvidos no Capítulo 2. Enquanto isso, a análise do Capítulo 4 se fez de forma mais manual, analisando a situação de forma mais específica, por se tratar de uma perturbação mais singular.

Em ambos os casos analisou-se:

- (i) a família de equações elípticas lineares associada ao problema (ver Seções 3.2 e 4.2);
- (ii) a convergência de soluções da família de equações lineares (ver Teorema 3.2.4 e Corolário 4.2.4);
- (iii) a família de equações elípticas semilineares (ver Seções 3.3 e 4.3);
- (iv) semicontinuidade superior das soluções da família de problemas semilineares (ver Teoremas 3.3.7 e 4.3.8)
- (v) supondo adicionalmente que a solução do problema limite é hiperbólica, a semicontinuidade inferior das soluções da família de problemas semilineares (ver Teoremas 3.3.8 e 4.3.9);

Ademais, no caso do Capítulo 3, provou-se na Proposição 3.3.13 também a unicidade de soluções na semicontinuidade inferior, ou seja, que, próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico da equação limite, existe apenas um ponto de equilíbrio do sistema perturbado para cada $\varepsilon > 0$.

Organização geral do trabalho

De maneira geral, a tese está dividida em duas partes. A primeira diz respeito ao embasamento teórico necessário para o melhor entendimento do problema proposto: integrais concentradas. Por

outro lado, a segunda parte contém duas aplicações com problemas definidos em domínios Lipschitz de $\mathbb{R}^2$ e apresentando termos concentrados na fronteira, modificando artigos publicados anteriormente.

A primeira parte consiste de dois capítulos. O Capítulo 1 apresenta as definições e propriedades iniciais necessárias para a leitura da tese, como os espaços de Sobolev fracionários, Lebesgue e Sobolev-Bochner generalizados, seus teoremas principais e a teoria abstrata de E -convergência e convergência compacta. No Capítulo 2, por sua vez, após o estudo das propriedades das normas dos espaços de Sobolev fracionários em um domínio Lipschitz específico de $\mathbb{R}^2$, estima-se as integrais concentradas e estuda-se as propriedades de sua passagem ao limite sob certas hipóteses adicionais; terminando o capítulo, temos a análise da aplicação não-linear que pode ser obtida perturbando uma função f de classe C^2 , restringindo-a a apenas uma vizinhança da fronteira e utilizando os resultados de integral concentrada.

Já a segunda parte é focada nas aplicações das propriedades obtidas na primeira através de dois problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$. O Capítulo 3 aborda o problema elíptico definido em um domínio com fronteira Lipschitz com fronteira oscilante, que “tende” a um domínio limite quando ε tende a zero, como descrito em (1). Finalmente, o Capítulo 4 fala sobre o problema elíptico definido em um domínio com fronteira Lipschitz que é fino e possui fronteira oscilante, dado em (2).

Parte I

Teoria geral: integrais concentradas

CAPÍTULO 1

Preliminares

O objetivo principal deste capítulo será apresentar os espaços que serão utilizados durante este trabalho e as ferramentas abstratas importantes para o estudo da convergência de soluções de problemas elípticos lineares e semilineares. O foco principal será definir formalmente e explicitar propriedades básicas úteis, principalmente no que diz respeito à equivalência de normas entre os espaços definidos.

A Seção 1.1 lidará com as diferentes definições da literatura clássica para espaços de Sobolev fracionários, mostrando em quais situações tais definições são equivalentes. Outro ponto será mostrar em detalhes como se comporta a equivalência das normas entre esses espaços, a dependência do domínio nessa relação e suas consequências.

Tal detalhe será de suma importância, pois, nos Capítulos 2, 3 e 4, analisaremos propriedades de integrais concentradas e EDPs elípticas semilineares definidas em domínios que variam dependendo de um parâmetro ε , estudando seu comportamento quando ε tende a zero. Assim, necessitamos controlar de maneira refinada tais constantes de equivalência para navegar com segurança entre as diferentes definições quando necessário.

Além disso, na Seção 1.2 definiremos os chamados espaços de Lebesgue-Bochner e Sobolev-Bochner generalizados. Tais espaços, amplamente utilizados, em sua forma simplificada, na análise de equações de evolução, aqui ganham um novo significado. No nosso contexto, ajudam a desenvolver diferentes propriedades das integrais concentradas na fronteira, implicando na posterior convergência de soluções (vide seções 2.2 e 2.3, por exemplo).

Por sua vez, a Seção 1.3 enunciará teoremas de traço, propriedades de densidade, imersão contínua e compacta para espaços de Sobolev fracionários, resultados que serão úteis para melhor entendimento dos espaços.

Finalmente, a Seção 1.4 tratará das definições de E -convergência e convergência compacta, que serão utilizadas na segunda parte da tese para a demonstração de continuidade das soluções de problemas elípticos semilineares cujos domínios serão perturbados com relação a um parâmetro ε .

1.1 Espaços de Sobolev Fracionários

Nesta seção explicitaremos as definições para espaços de Sobolev que serão utilizadas posteriormente. Para tanto, usaremos como referências principais os trabalhos de Adams [1975], Grisvard [1985], Lions e Magenes [1972], Yagi [2010], Nečas [2012], Triebel [1978], McLean

[2000] e [Di Nezza et al. \[2012\]](#), apontando as diferentes abordagens com respeito a este assunto quando necessário, começando com a definição em todo o $\mathbb{R}^n$, depois se estendendo-a para abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Diremos que dois espaços X, Y são algébrica e topologicamente equivalentes se $X = Y$ como conjuntos e as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ são equivalentes (ver [Nečas \[2012\]](#)).

1.1.1 Espaços euclidianos

No que segue, seja α multi-índice, tome $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por m a parte inteira e σ a parte não-inteira de s , respectivamente, e, assim, $s = m + \sigma$, onde $\sigma \in [0, 1)$.

Definição 1.1.1. Para $s > 0$, denotaremos por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$ tais que

(i) $\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $|\alpha| \leq m$, quando $s = m \in \mathbb{N}$;

(ii) $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy < \infty,$$

para $|\alpha| = m$, quando $s = m + \sigma$.

Definimos a norma em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, que o torna Banach, como:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u(x)|^p dx \quad \text{no caso (i)}$$

e

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \quad \text{no caso (ii)}.$$

Observação 1.1.2. Note que esta definição é equivalente à habitual dada em [Adams \[1975\]](#) ou [Lions e Magenes \[1972\]](#), dentre muitos outros, para espaços de Sobolev $W^{m,p}$, onde $m \in \mathbb{N}$. O interessante para nosso trabalho será analisar tais espaços quando lidamos com $W^{s,p}$ para s não inteiro.

Para o espaço dual:

Definição 1.1.3. Para $s < 0$ denotamos por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ o espaço dual de $W^{-s,q}(\mathbb{R}^n)$, onde q é o conjugado de p (isto é, $1/p + 1/q = 1$).

Observação 1.1.4. No caso $p = 2$ usaremos a notação $H^s(\mathbb{R}^n)$ em vez de $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$. Neste caso, os espaços serão Hilbert.

Além disso, podemos definir também:

Definição 1.1.5. Denotamos por $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço das distribuições temperadas u em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\int (1 + |\xi|^2)^{sp/2} |\mathcal{F}u(\xi)|^p d\xi < \infty,$$

onde $\mathcal{F}$ é a transformada de Fourier dada por

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix\xi} u(x) dx.$$

Sobre estes espaços obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.6. *Os espaços $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\mathbb{R}^n)$ são algébrica e topologicamente equivalentes para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver [Yagi, 2010, pg 41]. □

Para o próximo resultado, precisaremos de uma definição auxiliar: espaços de interpolação (ver [Yagi, 2010, pg. 14]).

Sejam X_0 e X_1 espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_{X_0}$ e $\|\cdot\|_{X_1}$, respectivamente, com X_1 sendo imerso de forma densa e contínua em X_0 . Considere

$$S = \{z; 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

no plano complexo $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ o espaço das funções analíticas com as seguintes propriedades:

$$\mathcal{H}(X_0, X_1) = \{F(z); F(z) \text{ é uma função analítica para } z \in S \text{ com valores em } X_0, \\ \text{e é limitada e contínua para } z = 1 + iy \text{ com valores em } X_1\}$$

Para $F \in \mathcal{H}(X_0, X_1)$ definimos sua norma por

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \max \left\{ \sup_{-\infty < y < \infty} \|F(iy)\|_{X_0}, \sup_{-\infty < y < \infty} \|F(1 + iy)\|_{X_1} \right\}$$

e, com isso, $\mathcal{H}$ é um espaço de Banach (vide [Triebel, 1978, Teorema 1.9.1]).

Para cada $0 \leq \theta \leq 1$, definimos o espaço $[X_0, X_1]_{\theta}$, que chamaremos de interpolação complexa entre X_0 e X_1 , como

$$[X_0, X_1]_{\theta} = \{U \in X_0; \text{ existe uma função } F \in \mathcal{H}(X_0, X_1) \text{ tal que } U = F(\theta)\} \quad (1.1)$$

e, para $U \in [X_0, X_1]_{\theta}$, sua norma é definida por

$$\|U\|_{\theta} = \inf_{F \in \mathcal{H}, F(\theta)=U} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Com esta norma, $[X_0, X_1]_{\theta}$ é um espaço de Banach (ver [Triebel, 1978, Teorema 1.9.2]). Temos, com isso, as seguintes propriedades destes espaços.

Proposição 1.1.7. *São válidas:*

- (a) $[X_0, X_1]_0 = X_0$ e $[X_0, X_1]_1 = X_1$ com isometrias;
- (b) Para $0 < \theta < 1$, $X_1 \subset [X_0, X_1]_{\theta} \subset X_0$ de forma densa e contínua;
- (c) Para $0 < \theta < 1$, $\|U\|_{\theta} \leq \|U\|_{X_0}^{1-\theta} \|U\|_{X_1}^{\theta}$, para todo $U \in X_1$;
- (d) Sejam Y_0 e Y_1 espaços de Banach tais que $Y_1 \subseteq Y_0$ densamente e $B : X_j \rightarrow Y_j$, $j = 0, 1$, um operador linear. Se $\|Bx\|_{Y_0} \leq C_0 \|x\|_{X_0}$ e $\|Bx\|_{Y_1} \leq C_1 \|x\|_{X_1}$, então $\|Bx\|_{\theta} \leq C_{\theta} \|x\|_{\theta}$, onde $C_{\theta} = C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$.

Demonstração. Ver [Triebel, 1978, Teorema 1.9.3] e [Yagi, 2010, Teorema 1.15]. □

Sendo assim, temos o seguinte teorema que relaciona isometricamente os espaços de potências fracionárias de um operador (ver [Henry, 1981, Definição 1.4.1]) com espaços de interpolação complexa.

Teorema 1.1.8. *Sejam X espaço de Hilbert e A um operador definido positivo e auto-adjunto em X . Então, para $0 < \theta < 1$, temos que $D(A^\theta) = [X, D(A)]_\theta$ com isometria de normas.*

Demonstração. Ver [Yagi, 2010, Teorema 16.1]. □

Além disso, obtemos o seguinte teorema, que nos mostra uma outra maneira de definir espaços de Sobolev fracionários com uma norma equivalente.

Teorema 1.1.9. *Para $0 \leq s_0 < s_1 < \infty$,*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = [H^{s_0}(\mathbb{R}^n), H^{s_1}(\mathbb{R}^n)]_\theta$$

com normas equivalentes, onde $0 \leq \theta \leq 1$ e $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$.

Demonstração. Ver [Yagi, 2010, Teorema 1.35]. □

Observação 1.1.10. *Note que, de certa forma, conseguimos obter espaços de Sobolev fracionários em $\mathbb{R}^n$ usando os Teoremas 1.1.8 e 1.1.9 de outras duas maneiras algébrica e topologicamente equivalentes, tomando operadores e espaços convenientes.*

1.1.2 Subconjuntos abertos de espaços euclidianos

Lidaremos agora com um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e nosso propósito será definir espaços de Sobolev fracionários em Ω . Para tanto, pode-se seguir escolas independentes, com distintas definições deste espaço. Cada abordagem possui suas vantagens e, em geral, isto pode nos levar a diferentes espaços.

As propriedades de uma função em um espaço de Sobolev, quando esta é definida em um aberto Ω contido no espaço euclidiano, dependem fortemente das propriedades de sua fronteira $\partial\Omega$. Nesta seção estenderemos as ideias da seção anterior, pontuando as diferentes definições de espaços de Sobolev, que coincidem algebricamente e possuem normas equivalentes para fronteiras suficientemente regulares.

Primeiramente, explicitaremos definições de suavidade da fronteira do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tal conceito se mostra primordial pois, em razão deste, podemos obter mais propriedades de um espaço de funções definidas em Ω , como será visto em seguida.

Definição 1.1.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ é contínua (resp. Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$, m vezes diferenciável, suave) se, para todo $x \in \partial\Omega$, existe vizinhança V de x e novas coordenadas $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tais que*

- (i) *V é um hipercubo nas novas coordenadas: $V = \{(y_1, \dots, y_n); -a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq n\}$;*
- (ii) *existe uma função contínua (resp. Lipschitz, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,1}$, m vezes diferenciável, suave) φ definida em $V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}); -a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq n-1\}$ tal que*
 - (a) $|\varphi(y')| \leq a_n/2, \forall y' \in V',$
 - (b) $\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V; y_n < \varphi(y')\},$
 - (c) $\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V; y_n = \varphi(y')\}.$

Em outras palavras, em uma vizinhança de x , Ω está abaixo do gráfico de φ e, conseqüentemente, a fronteira $\partial\Omega$ é o gráfico de φ .

Observação 1.1.12. Dizemos que uma função f é de classe $C^{k,\alpha}(O)$ se suas derivadas até ordem k são Hölder-continúas com expoente α . Desta forma, para $k \geq 0$ temos um espaço com norma

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(O)} = \|f\|_{C^k(O)} + \max_{|\beta|=k} |\partial^\beta f|_{C^{0,\alpha}(O)},$$

onde β é multi-índice,

$$|\partial^\beta f|_{C^{0,\alpha}(O)} = \sup_{x,y \in O} \frac{|\partial^\beta f(x) - \partial^\beta f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

e

$$\|f\|_{C^k(O)} = \max_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in O} |\partial^\beta f(x)|.$$

Note que para $\alpha = 1$ e $k = 0$ temos funções Lipschitz definidas em $O \subset \mathbb{R}^n$.

Um outro conceito importante é a chamada propriedade do cone.

Definição 1.1.13. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que Ω tem a propriedade uniforme do segmento (respectivamente, do cone) se para todo $x \in \Gamma = \partial\Omega$, existem uma vizinhança V de x em $\mathbb{R}^n$ e novas coordenadas $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ tais que

- (a) V é um hipercubo nas novas coordenadas, isto é, $V = \{(y_1, y_2, \dots, y_n); -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}$;
- (b) $y - z \in \Omega$ quando $y \in \bar{\Omega} \cap V$ e $z \in C$, onde C é o segmento aberto $\{(0, \dots, 0, z_n); 0 < z_n < h\}$ (respectivamente, C é o cone aberto $\{(z', z_n); (\cot \theta)|z'| < z_n < h, \text{ para algum } \theta \in (0, \pi/2)\}$), para algum $h > 0$.

Com isso, obtemos a seguinte equivalência.

Teorema 1.1.14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado. Então Ω tem a propriedade do cone uniforme se, e somente se, Ω tem fronteira Lipschitz.

Demonstração. Ver [Grisvard, 1985, Teorema 1.2.2.2].

□

Vejamos agora diferentes definições de espaços que, posteriormente, serão unificadas para designar os espaços de Sobolev fracionários utilizados neste trabalho. Note que eles não são necessariamente iguais para qualquer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então mostraremos em que condições tal equivalência é atingida.

Definição 1.1.15. Para $s > 0$, denotaremos por $W^{s,p}(\Omega)$ o espaço das distribuições definidas em Ω tais que

(i) $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para $|\alpha| \leq m$, quando $s = m \in \mathbb{N}$;

(ii) $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e

$$\iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy < \infty$$

para $|\alpha| = m$, quando $s = m + \sigma$.

Definimos a norma em $W^{s,p}(\Omega)$, que o torna Banach, como:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u(x)|^p dx \text{ no caso (i)}$$

e

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=m} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(x) - \partial^{\alpha} u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx dy \text{ no caso (ii)}.$$

Observação 1.1.16. Não podemos reproduzir diretamente a definição da subseção anterior de dual para $s < 0$ pois, em geral, $\mathcal{D}(\Omega)$, o espaço das funções C^{∞} com suporte compacto definidas em Ω , não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$. Consequentemente, o espaço dual de $W^{s,p}(\Omega)$ não pode ser identificado como um espaço de distribuições em Ω . E esta é a razão para definir outra família de espaços de Sobolev.

Definição 1.1.17. Para $s > 0$ denotamos por $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{s,p}(\Omega)$.

Com esse espaço auxiliar podemos então definir:

Definição 1.1.18. Para $s < 0$, denotamos por $W^{s,p}(\Omega)$ o dual do espaço $\mathring{W}^{-s,q}(\Omega)$, onde q é conjugado de p (ou seja, $1/p + 1/q = 1$).

Ademais, outra definição de mesmo estilo é dada por:

Definição 1.1.19. Para $s > 0$ denotamos por $\bar{W}^{s,p}(\Omega)$ o espaço de todas as restrições a Ω de elementos de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Em outras palavras,

$$\bar{W}^{s,p}(\Omega) = \{r_{\Omega}(u); u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)\},$$

onde a restrição de $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $r_{\Omega}(u)$, é definida por

$$\langle r_{\Omega}(u), \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

com $\tilde{\varphi}$ sendo a extensão trivial de φ por zero fora de Ω .

A norma em $\bar{W}^{s,p}(\Omega)$, que o torna Banach, é definida por

$$\|u\|_{\bar{W}^{s,p}(\Omega)} = \inf_{r_{\Omega}(U)=u} \|U\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Observação 1.1.20. No caso $p = 2$ usamos novamente as notações $H^s(\Omega)$, $\mathring{H}^s(\Omega)$ e $\bar{H}^s(\Omega)$ ao invés de $W^{s,2}(\Omega)$, $\mathring{W}^{s,2}(\Omega)$ e $\bar{W}^{s,2}(\Omega)$, respectivamente. Mais uma vez, estes espaços são Hilbert.

Com essas definições em mãos, temos o seguinte resultado relacionado à existência de operador contínuo de extensão que nos ajuda a esclarecer a relação entre $W^{s,p}(\Omega)$ e $\bar{W}^{s,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1.21. Seja Ω subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz. Então existe um operador linear contínuo $P_{\Omega} : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $r_{\Omega}(P_{\Omega}u) = u$.

Demonstração. Ver [Grisvard, 1985, Teorema 1.4.3.1]. □

Observação 1.1.22. Tal operador definido no Teorema 1.1.21 não é necessariamente único.

Sendo assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.1.23. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e de fronteira Lipschitz, então $H^s(\Omega) = \bar{H}^s(\Omega)$, com*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq \|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)} \leq \|P_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^s(\Omega), H^s(\mathbb{R}^n))} \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

onde $\|P_\Omega\|$ é a norma de algum operador de extensão contínuo $P_\Omega : H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Dado $u \in \bar{H}^s(\Omega)$, existe $U \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = r_\Omega(U)$ e $\|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)} = \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Segue que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)}.$$

Reciprocamente, se $u \in H^s(\Omega)$, então $u = U|_\Omega$ para $U = P_\Omega u$, onde P é um operador extensão linear contínuo de $H^s(\Omega)$ a $H^s(\mathbb{R}^n)$, que existe pelo Teorema 1.1.21, segue que $u \in \bar{H}^s(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)} \leq \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|P_\Omega u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|P_\Omega\| \|u\|_{H^s(\Omega)},$$

concluindo a prova. $\square$

Observação 1.1.24. *Note que a norma $\|P_\Omega\|$ do operador construído no Teorema 1.1.21 pode depender fortemente do domínio Ω . Tal dependência deverá ser analisada cuidadosamente no nosso trabalho, pois lidamos com domínios Ω_ε , que dependem fortemente de um parâmetro ε e serão analisados tomando o limite de ε a zero.*

Além disso, podemos enunciar também o seguinte resultado novamente, como no caso $\mathbb{R}^n$:

Teorema 1.1.25. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e de fronteira Lipschitz. Então temos que, para $0 \leq s_0 < s_1 < \infty$,*

$$H^s(\Omega) = [H^{s_0}(\Omega), H^{s_1}(\Omega)]_\theta$$

com normas equivalentes, onde $0 \leq \theta \leq 1$ e $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$.

Demonstração. Ver [Yagi, 2010, Teorema 1.35]. $\square$

O teorema acima é técnico e não deixa margens para um melhor controle das constantes de equivalência das normas e sua dependência com relação ao operador de extensão do domínio. Um resultado mais acessível que nos ajudará a entender, em casos específicos, como as normas equivalentes citadas no teorema anterior se relacionam foi provado em Chandler-Wilde *et al.* [2015].

Teorema 1.1.26. *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $s_0 \leq s_1$, $0 < \theta < 1$ e defina $s = s_0(1 - \theta) + \theta s_1$. Se chamarmos $H_\square^\theta := [\bar{H}^{s_0}(\Omega), \bar{H}^{s_1}(\Omega)]_\theta$, então $\bar{H}^s(\Omega) \subset H_\square^\theta$, com $\|u\|_{H_\square^\theta} \leq \|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)}$ para $u \in \bar{H}^s(\Omega)$.*

Além disso, se para alguns $\lambda_0, \lambda_1 \geq 1$ existir operador de extensão contínuo $P : \bar{H}^{s_0}(\Omega) \rightarrow H^{s_0}(\mathbb{R}^n) = \bar{H}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|Pu\|_{H^{s_j}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_j \|u\|_{\bar{H}^{s_j}(\Omega)}, \quad \forall u \in \bar{H}^{s_j}(\Omega), \quad j = 0, 1,$$

então $\bar{H}^s(\Omega) = H_\square^\theta$ e

$$\lambda_0^{\theta-1} \lambda_1^{-\theta} \|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)} \leq \|u\|_{H_\square^\theta} \leq \|u\|_{\bar{H}^s(\Omega)}, \quad \forall u \in \bar{H}^s(\Omega).$$

Demonstração. Vide [Chandler-Wilde *et al.*, 2015, Lema 4.2]. $\square$

Isto implica que, com a construção de um operador contínuo de extensão conveniente, podemos controlar as normas dos espaços. Desta forma, utilizamos tal resultado para provar o seguinte teorema.

Proposição 1.1.27. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto que admite operador de extensão P_Ω com as propriedades do Teorema 1.1.26 com $s_0 = 0$, $s_1 = 1$. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ (dependendo de $\lambda_1, \lambda_2, \|P_\Omega\|$) tais que*

$$C_1 \|v\|_{H^s(\Omega)} \leq \|v\|_{H^s_\square(\Omega)} \leq C_2 \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad \forall v \in H^s(\Omega), 0 \leq s \leq 1.$$

Demonstração. Dado $v \in H^s(\Omega)$, pelo Corolário 1.1.23

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \leq \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \leq \|P_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^s(\Omega), H^s(\mathbb{R}^n))} \|v\|_{H^s(\Omega)},$$

onde $\|P_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^s(\Omega), H^s(\mathbb{R}^n))}$ está bem definida pelo Teorema 1.1.26 e pode depender do domínio Ω . Analogamente, usando a notação do Teorema 1.1.26, obtemos

$$\lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \leq \|v\|_{H^\theta_\square(\Omega)} \leq \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}.$$

Assim, juntando estas informações temos

$$\begin{aligned} \lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} \|v\|_{H^s(\Omega)} &\leq \lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \leq \|v\|_{H^\theta_\square(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} \leq \|P_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^s(\Omega), H^s(\mathbb{R}^n))} \|v\|_{H^s(\Omega)}, \end{aligned}$$

concluindo o resultado. $\square$

Sendo assim, como os domínios com o quais trabalharemos nesta tese são abertos limitados de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Lipschitz, obtemos diferentes definições, porém algébrica e topologicamente equivalentes, para o que chamaremos de espaço de Sobolev fracionário associado a este aberto. Porém, note que a equivalência de normas depende fortemente do domínio em que tal espaço está definido.

Utilizaremos a definição que for mais conveniente no momento, mas sempre tendo em mente que tais definições não seriam equivalentes para um aberto qualquer e que a equivalência de normas deve ser vista com cuidado.

1.2 Espaços de Lebesgue-Bochner e Sobolev-Bochner generalizados

Nesta seção definiremos o conceito de espaços de Lebesgue-Bochner e Sobolev-Bochner de maneira mais generalizada, ambos importantes para a posterior análise do comportamento das integrais concentradas presentes nos problemas apresentados nesta tese (vide, por exemplo, Seção 2.2).

O conceito apresentado nesta seção foi visto de forma análoga em Meier e Böhm [2008]. Construiremos então os espaços $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$, $L^p(\Omega; W^{s,q}(Y_x))$ e $W^{s,p}(\Omega; L^q(Y_x))$ espaços de funções definidas em uma família de limitados $Q = \cup_{x \in \Omega} (\{x\} \times Y_x)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $Y_x \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ são abertos, com $n, m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Tais espaços se apresentam como uma natural generalização dos espaços de Lebesgue e Sobolev usando o conceito da integral de Bochner, ou seja, o estudo de espaços contendo funções que tomam valores em espaços de Banach. A generalização dada aqui volta à definição usual de espaços de Lebesgue-Bochner e Sobolev-Bochner quando $Y_x = Y$. Alguns resultados aqui são mais conhecidos quando $\Omega = [0, T]$ e x é a variável que representa o tempo, porém lidaremos com casos mais gerais. Livros que abordam este tipo de espaço são Gasiński e Papageorgiou [2006], Robinson [2001] e Cazenave e Haraux [1998].

Definição 1.2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ domínios limitados. Para cada $x \in \Omega$, seja $Y_x \subset Y$ outro domínio tal que*

$$Q = \Omega \times Y_x := \bigcup_{x \in \Omega} (\{x\} \times Y_x) \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

é mensurável com respeito a medida de Lebesgue $(n+m)$ dimensional. Consideraremos $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$. O caso $q = \infty$ não será considerado.

Os espaços Lebesgue-Bochner generalizados, denotados por $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$, são definidos por

$$L^p(\Omega; L^q(Y_x)) := \{u : Q \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável ; } u(x, \cdot) \in L^q(Y_x) \text{ para quase todo } x \in \Omega\}$$

e se tornam Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega; L^q(Y_x))} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} \|u(x, \cdot)\|_{L^q(Y_x)}^p dx \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} \|u(x, \cdot)\|_{L^q(Y_x)}, & p = \infty \end{cases}$$

No caso $p = q = 2$, tais espaços se tornam Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega; L^2(Y_x))} = \int_{\Omega} (u(x, \cdot), v(x, \cdot))_{L^2(Y_x)} dx.$$

Observação 1.2.2. *Como $q < \infty$, a função $x \mapsto \|u(x, \cdot)\|_{L^q(Y_x)}$ é mensurável pelo teorema de Fubini. Então, o espaço $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$ está bem definido.*

De forma análoga podemos também definir outros espaços.

Definição 1.2.3. *Os espaços de Sobolev-Bochner generalizados, denotados por $L^p(\Omega; W^{s,q}(Y_x))$ para $s > 0$, são definidos por*

$$L^p(\Omega; W^{s,q}(Y_x)) := \{u \in L^p(\Omega; L^q(Y_x)); u(x, \cdot) \in W^{s,q}(Y_x)\}.$$

Tais espaços se tornam Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega; W^{s,q}(Y_x))} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} \|u(x, \cdot)\|_{W^{s,q}(Y_x)}^p dx \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} \|u(x, \cdot)\|_{W^{s,q}(Y_x)}, & p = \infty. \end{cases}$$

No caso $p = q = 2$ tais espaços se tornam, novamente, Hilbert.

Observação 1.2.4. *A prova da completude desses espaços se reduz à completude de $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$ de forma análoga ao argumento para espaços de Sobolev.*

Sobre tais espaços, podemos listar algumas propriedades gerais provadas em [Meier e Böhm, 2008, Proposição 2, Proposição 3, Proposição 5].

Proposição 1.2.5. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) *Se $p < \infty$ então as funções simples e as funções contínuas em $\bar{Q}$ são densas em $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$. Em particular, $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$ é separável.*

(ii) *(Espaço dual) Se $1 \leq p < \infty$ e $1 < q < \infty$, com p', q' seus conjugados, então o operador $J : L^{p'}(\Omega; L^{q'}(Y_x)) \rightarrow [L^p(\Omega; L^q(Y_x))]'$ dado por*

$$J(f)g = \int_{\Omega} \int_{Y_x} f(x, y)g(x, y) dy dx, \quad g \in L^p(\Omega; L^q(Y_x)), \quad f \in L^{p'}(\Omega; L^{q'}(Y_x)),$$

é um isomorfismo isométrico. Em particular, $L^p(\Omega; L^q(Y_x))$ é reflexivo para $p > 1$.

(iii) O espaço $L^p(\Omega; W^{s,q}(Y_x))$ é separável se $p < \infty$ e reflexivo se $1 < p, q < \infty$.

No Capítulo 2 lidaremos com propriedades mais específicas de tais espaços quando os mesmos forem definidos em abertos convenientes do $\mathbb{R}^2$, onde se situarão nossas aplicações dos Capítulos 3 e 4.

1.3 Teorema do traço, densidade e imersões de Sobolev

Nesta seção enunciaremos teoremas sobre densidade e traço para espaços de Sobolev fracionários, que serão utilizados algumas vezes durante o trabalho. Além disso, mostraremos quando certas constantes obtidas nas imersões de Sobolev de abertos com fronteira Lipschitz de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, são independentes do domínio e, assim, poderão ser utilizadas posteriormente quando analisarmos problemas em domínios que variam com um parâmetro ε .

Os resultados reproduzidos e adaptados ao nosso contexto são de [Grisvard, 1985, Seção 1.5], Nečas [2012], Cioranescu e Donato [1999] e [Di Nezza, Palatucci, e Valdinoci, 2012, Seção 2], sendo focados muitas vezes no caso $p = 2$, que nos será importante posteriormente.

Começamos a seção enunciando o Teorema do Traço para domínios não-regulares e, para tanto, precisaremos de uma definição auxiliar: vetor normal à fronteira Lipschitz.

Usando a notação da Definição 1.1.11, quando Γ é a fronteira Lipschitz de um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então um vetor normal exterior unitário ν está definido quase sempre (para a medida usual de superfície em Γ) por

$$\nu(y', \varphi(y')) := \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_1 \varphi(y')^2 + \dots + \partial_{n-1} \varphi(y')^2}} \{-\partial_1 \varphi(y'), \dots, -\partial_{n-1} \varphi(y'), 1\}$$

para $y \in V'$. Finalmente, usando uma partição da unidade, é possível definir um campo de vetores em uma vizinhança de $\bar{\Omega}$ tal que ν é um vetor normal exterior unitário quase sempre sobre $\Gamma = \partial\Omega$. Observe que, quando a fronteira é de classe $C^{k,1}$, o campo de vetores é apenas de classe $C^{k-1,1}$.

Agora denotamos por γ o operador definido por $\gamma(u) = u|_{\Gamma}$ quando u é uma função suave.

Teorema 1.3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $C^{k,1}$. Assuma $s-1/p$ não inteiro, $s \leq k+1$, $s-1/p = l+\sigma$, $0 < \sigma < 1$, $l \in \mathbb{N}$. Então a aplicação*

$$u \mapsto \left\{ \gamma u, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \gamma \frac{\partial^l u}{\partial \nu^l} \right\},$$

que é definida para $u \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$, tem uma única extensão contínua a um operador de $W^{s,p}(\Omega)$ em $\Pi_{i=0}^l W^{s-j-1/p,p}(\partial\Omega)$. Tal operador possui inversa à direita contínua que independe de p .

Demonstração. Ver [Grisvard, 1985, Teorema 1.5.1.2]. □

Mais especificamente usaremos o seguinte corolário para $k = 0$.

Corolário 1.3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz e considere $1/2 < s \leq 1$, $1 < p < \infty$. Então a aplicação $u \mapsto \gamma u$ definida para $u \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ tem uma única extensão contínua a um operador de $W^{s,p}(\Omega)$ a $W^{s-1/p,p}(\partial\Omega)$. Tal operador possui inversa à direita contínua que independe de p .*

Observação 1.3.3. Para o caso $p = 2$ e $n = 1$ no Corolário 1.3.2 anterior, dado um intervalo não-degenerado qualquer em $\mathbb{R}$, digamos (a, b) com $a < b$, temos que existe difeomorfismo

$$\begin{aligned}\Phi : (0, 1) &\rightarrow (a, b) \\ z &\mapsto \Phi(z) = (b - a)z + a,\end{aligned}$$

onde $a = \Phi(0)$ e $b = \Phi(1)$. Note que tal difeomorfismo também induz um isomorfismo de $H^s(a, b)$ em $H^s(0, 1)$, para $1/2 < s \leq 1$, bastando utilizar Φ^{-1} como uma mudança de variáveis nas integrais que definem tais normas. De fato, dado $v \in H^s(a, b)$ temos que $v \circ \Phi \in H^s(0, 1)$ com

$$\begin{aligned}\|v \circ \Phi\|_{H^s(0,1)}^2 &= \int_0^1 |v \circ \Phi(y)|^2 dy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|v \circ \Phi(y_1) - v \circ \Phi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy_1 dy_2 \\ &= \int_a^b |v(z)|^2 \frac{1}{(b-a)} dz + \int_a^b \int_a^b \frac{|v(z_1) - v(z_2)|^2}{|z_1 - z_2|^{1+2s}} \frac{(b-a)^{1+2s}}{(b-a)} dz_1 dz_2 \\ &\leq \max\{(b-a)^{-1}, (b-a)^{2s}\} \|v\|_{H^s(a,b)}^2, \text{ para } 1/2 < s \leq 1.\end{aligned}$$

Logo, usando a continuidade do operador traço dado no Corolário 1.3.2, obtemos que, para $1/2 < s \leq 1$, existe $C > 0$ tal que

$$|v(b)| = |v \circ \Phi(1)| \leq C \|v \circ \Phi\|_{H^s(0,1)} \leq K \|v\|_{H^s(a,b)}$$

onde $K > 0$ depende de $C > 0$ e do tamanho do intervalo (a, b) .

Para um domínio com fronteira Lipschitz, dada a existência do vetor exterior normal unitário quase sempre, é possível demonstrar outro resultado de suma importância no estudo de problemas utilizando espaços de Sobolev: o Teorema de Green, reproduzido abaixo.

Teorema 1.3.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira Lipschitz, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,q}(\Omega)$, onde $1/p + 1/q = 1$. Então

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u = \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \gamma(v) \nu_i dS,$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ é o vetor normal unitário exterior, que existe em quase todo ponto de $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [Nečas, 2012, Cap. 3, Teorema 1.1]. □

Além disso, temos o seguinte teorema de densidade:

Teorema 1.3.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então, para todo $p > 1$ e $s > 0$, valem:

- (i) O conjunto $C^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{s,p}(\Omega)$;
- (ii) Se Ω tem fronteira contínua, $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ é denso em $W^{s,p}(\Omega)$, onde

$$C_c^\infty(\bar{\Omega}) = \{u|_{\Omega}; u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Demonstração. Ver [Grisvard, 1985, Teorema 1.4.2.1]. □

Com tais resultados estabelecidos, podemos agora trabalhar com as imersões contínuas dos espaços de Sobolev fracionários. Algumas dessas imersões são condicionadas às propriedades do domínio Ω , como veremos a seguir.

Proposição 1.3.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s \leq s' < 1$. Então*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{s'}(\Omega)},$$

para alguma constante $C = C(n, s) \geq 1$ independente do domínio Ω . Em particular, $H^{s'}(\Omega) \subseteq H^s(\Omega)$.

Demonstração. Se $s = 0$ segue diretamente da definição. Considerando $0 < s \leq s' < 1$, temos primeiramente que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx \leq \int_{\Omega} |u(x)|^2 \int_{|z| \geq 1} \frac{1}{|z|^{n+2s}} dz dx \leq K(n, s) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Consequentemente, se levarmos em conta a estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx &\leq 2 \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x)|^2 + |u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx \right) \\ &\leq 2K(n, s) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| < 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s'}} dy dx. \quad (1.3)$$

Combinando (1.2) e (1.3) obtemos

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq (2K(n, s) + 1) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s'}} dy dx,$$

de onde segue o resultado, obtendo $C = C(n, s)$ independente de Ω . $\square$

Para a inclusão no caso $s' = 1$ pedimos mais sobre a fronteira do aberto Ω para que possamos estender as funções de $H^1(\Omega)$ para $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira Lipschitz, $0 < s < 1$ e $P_{\Omega} : H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ operador de extensão contínuo. Então*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

onde $C = C(\|P_{\Omega}\|, s, n)$. Em particular, $H^1(\Omega) \subseteq H^s(\Omega)$.

Demonstração. Como temos pela Proposição 1.3.5 que as funções $C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$ são densas em $H^s(\Omega)$, para todo $s > 0$, podemos provar este resultado usando tais funções e a conclusão sai por densidade.

Seja $u \in C_c^{\infty}(\bar{\Omega})$. Provamos em (1.2) que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y| \geq 1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx \leq C_1(n, s) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (1.4)$$

onde tal constante independe do domínio.

Por outro lado, como Ω possui fronteira Lipschitz, pelo Teorema 1.1.21 existe extensão contínua P_{Ω} tal que $P_{\Omega}u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|P_{\Omega}u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|P_{\Omega}\| \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.5)$$

Sendo assim, obtemos, mudando variáveis e considerando B_1 a bola unitária centrada em zero,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \frac{|P_{\Omega}u(x) - P_{\Omega}u(z+x)|^2}{|z|^{n+2s}} dz dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \frac{|P_{\Omega}u(x) - P_{\Omega}u(z+x)|^2}{|z|^2} \frac{1}{|z|^{n+(s-1)2}} dz dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, para $0 < t < 1$,

$$\frac{|P_{\Omega}u(x) - P_{\Omega}u(z+x)|^2}{|z|^2} \leq |\nabla P_{\Omega}u(x+tz)|^2 = \left(\int_0^1 |\nabla P_{\Omega}u(x+tz)| dt \right)^2.$$

Assim, ao voltarmos à integral anterior, aplicando a Desigualdade de Hölder e (1.5),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \frac{|P_{\Omega}u(x) - P_{\Omega}u(z+x)|^2}{|z|^2} \frac{1}{|z|^{n+(s-1)2}} dz dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \left(\int_0^1 |\nabla P_{\Omega}u(x+tz)| dt \right)^2 \frac{1}{|z|^{n+(s-1)2}} dz dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \int_0^1 \frac{|\nabla P_{\Omega}u(x+tz)|^2}{|z|^{n+(s-1)2}} dt dz dx \\ &\leq \int_{B_1} \int_0^1 \frac{\|\nabla P_{\Omega}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{|z|^{n+(s-1)2}} dt dz \leq C(s, n) \|\nabla P_{\Omega}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq C(s, n) \|P_{\Omega}u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(s, n) \|P_{\Omega}\| \|u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dy dx \leq C_2(s, n, \|P_{\Omega}\|) \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.6)$$

Portanto, de (1.4) e (1.6),

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

onde $C = C(\|P_{\Omega}\|, n, s)$.

□

Observação 1.3.8. Note que, na Proposição 1.3.7, a constante de imersão dos espaços depende de Ω devido ao operador de extensão contínuo.

Com estas proposições demonstradas, o próximo teorema segue quase diretamente.

Teorema 1.3.9. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $s, s' \geq 0$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, se $s < s'$ segue que

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{s'}(\Omega)},$$

onde $C = C(s, s', n, \Omega) > 0$. Em particular, $H^{s'}(\Omega) \subseteq H^s(\Omega)$.

Demonstração. O caso $0 \leq s < s' \leq 1$ foi provado nas Proposições 1.3.6 e 1.3.7. Quando $s' > s > 1$, escreva $s = k + \sigma$ e $s' = k' + \sigma'$, onde k, k' inteiros e $\sigma, \sigma' \in (0, 1)$. Se $k = k'$ podemos usar a Proposição 1.3.6 para concluir que $H^{s'}(\Omega)$ está imerso em $H^s(\Omega)$ continuamente. Por outro lado, se $k' \geq k+1$, usando novamente as Proposições 1.3.6 e 1.3.7 obtemos a seguinte cadeia de imersões contínuas,

$$H^{s'}(\Omega) = H^{k'+\sigma'}(\Omega) \subseteq H^{k'}(\Omega) \subseteq H^{k+1}(\Omega) \subseteq H^{k+\sigma}(\Omega) = H^s(\Omega),$$

concluindo o teorema. $\square$

De forma geral, temos os seguintes teoremas gerais de imersão e imersão compacta de espaços de Sobolev fracionários, que podem ser encontrados, por exemplo, em [Yagi, 2010, Cap 1, Seção 11.6] e [Grisvard, 1985, Cap. 1, Seção 1.4.4].

Teorema 1.3.10. *Sejam $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^n$ ou um aberto limitado com fronteira Lipschitz de $\mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}_+^n$ é o semiplano positivo. Seja $1 < p < \infty$ e $0 \leq s < \infty$.*

- (a) *Se $0 \leq s < n/p$, então $W^{s,p}(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$ com inclusão contínua, onde $p \leq r \leq pn/(n - ps)$.*
- (b) *Se $s = n/p$, então $W^{n/p,p}(\Omega) \subseteq L^r(\Omega)$ com inclusão contínua, onde r é qualquer número tal que $p \leq r < \infty$.*
- (c) *Se $s > n/p$, então*

$$W^{s,p}(\Omega) \subset \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) (\text{resp. } \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n)), & \text{quando } \Omega = \mathbb{R}^n (\text{resp. } \mathbb{R}_+^n), \\ \mathcal{C}(\bar{\Omega}), & \text{quando } \Omega \text{ é limitado.} \end{cases}$$

Quando Ω é limitado, tal imersão é contínua.

Teorema 1.3.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Lipschitz. Para $1 < p < \infty$ e $s > 0$, a imersão $i : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é compacta.*

Teorema 1.3.12. *São válidas as seguintes inclusões se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira Lipschitz, $1 < p, q < \infty$:*

- (a) *$W^{s,p}(\Omega) \subseteq W^{t,q}(\Omega)$ para $t \leq s$ e $p \leq q$ tais que $s - n/p = t - n/q$; e*
- (b) *$W^{s,p}(\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ para $k < s - n/p < k + 1$, onde $\alpha = s - k - n/p$ e k um inteiro não-negativo.*

Os teoremas de imersão de Sobolev desta seção podem ser adaptados para os espaços de Lebesgue e Sobolev-Bochner generalizados da Seção 1.2. Por exemplo, se $s < s'$ então temos que $L^2(\Omega; H^{s'}(Y_x)) \subseteq L^2(\Omega; H^s(Y_x))$ e

$$\|u\|_{L^2(\Omega; H^s(Y_x))} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega; H^{s'}(Y_x))}.$$

Porém, para casos de imersão compacta necessitamos ter mais cuidado. Não é sempre verdade que, se $B_0 \subset B$ com imersão compacta, então $L^p(0, 1; B_0) \subset L^p(0, 1; B)$ com imersão compacta (ver [Cioranescu e Donato, 1999, pg. 60]). Desta forma, o próximo resultado é importante e indica a construção de um espaço onde tal propriedade de imersão compacta é mantida.

Proposição 1.3.13. *Sejam $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach tais que B_0 e B_1 são reflexivos. Suponha também que a imersão $B_0 \subset B$ é compacta. Se $a, b \in \mathbb{R}$, defina*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(a, b; B_0), \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^{p_1}(a, b; B_1) \right\},$$

com $1 < p_0 < p_1 < \infty$. Então

- (i) *W é um espaço de Banach com a norma do gráfico definida por*

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(a, b; B_0)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^{p_1}(a, b; B_1)};$$

(ii) a imersão $W \subset L^{p_0}(a, b; B)$ é compacta.

Demonstração. Ver [Cioranescu e Donato, 1999, Proposição 3.57]. $\square$

Corolário 1.3.14. Se $Q = (0, 1) \times (0, 1)$, então a imersão $H^1(Q) \subset L^2(0, 1; H^s(0, 1))$ é compacta, para $0 < s < 1$.

Demonstração. Sabendo, pelo Teorema 1.3.11, que $H^1(0, 1) \subset L^2(0, 1)$ com imersão compacta. Assim, se tomarmos $a = 0$, $b = 1$, $p_0 = p_1 = 2$, $B_0 = H^1(0, 1)$, $B_1 = L^2(0, 1)$ e $B = H^s(0, 1)$ na notação de Proposição 1.3.13, então obtemos que W é um espaço de Banach com a norma do gráfico definida por

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^2(0,1;H^1(0,1))} + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L^2(0,1;L^2(0,1))} = \|v\|_{H^1(Q)}$$

e, dessa forma, W é isométrico a $H^1(Q)$.

Logo, usando a Proposição 1.3.13, obtemos que $H^1(Q) \subset L^2(0, 1; H^s(0, 1))$ com imersão compacta. $\square$

1.4 Teoria abstrata sobre convergência compacta de operadores

Como mencionado anteriormente, nos Capítulos 3 e 4 estudaremos o comportamento assintótico das soluções de problemas elípticos com reações concentradas na fronteira. Para tanto, além das estimativas de integrais concentradas que serão obtidas no Capítulo 2, vamos utilizar as noções de E -convergência e convergência compacta. Notamos que tal noção se mostrou muito adequada na análise assintótica de uma vasta gama de problemas associados, por exemplo, a perturbação de contorno para EDPs (Arrieta e Bruschi [2007], Arrieta e Bruschi [2010], Aragão e Bruschi [2016], Aragão e Bruschi [2015]) e a EDPs definidas em domínios finos (Arrieta *et al.* [2006], Arrieta *et al.* [2011], Pereira [2016]), entre outros.

Nesta seção estabeleceremos uma notação que será utilizada no resto do trabalho e enunciaremos os principais resultados relacionados a esse tipo de convergência. O objetivo será, ao final, ter a mão um método que nos levará à prova da semi-continuidade superior e inferior de uma família de soluções num contexto abstrato, problema que será retomado de forma mais concreta na segunda parte da tese.

Aqui compilaremos alguns resultados que serão úteis posteriormente e estão provados em Arrieta, Carvalho, e Lozada-Cruz [2006], Arrieta e Bruschi [2007], Carvalho [2012], Silva [2007] e Carvalho [2017]. Uma teoria mais geral pode ser encontrada em Carvalho e Piskarev [2006].

Considere $\{Z_\varepsilon\}_\varepsilon$ uma família de espaços de Hilbert, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, e suponhamos que existe uma família de operadores lineares limitados

$$E_\varepsilon : Z_0 \rightarrow Z_\varepsilon$$

com a seguinte propriedade:

$$\|E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \rightarrow \|u\|_{Z_0}, \forall u \in Z_0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme Generalizado, segue que existem $\varepsilon_0 < 1$ e $M > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \|E_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Z_0, Z_\varepsilon)} \leq M.$$

(ver [Silva, 2007, pg 24] ou [Carvalho, 2017, pg 80]).

Com isso, podemos definir os seguintes conceitos.

Definição 1.4.1. Uma sequência $\{u^\varepsilon\}$, com $u^\varepsilon \in Z_\varepsilon$, é dita ser E -convergente a $u \in Z_0$ se $\|u^\varepsilon - E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Denotaremos tal convergência por $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Definição 1.4.2. Uma sequência $\{u^\varepsilon\}$, com $u^\varepsilon \in Z_\varepsilon$, é dita ser fracamente E -convergente a $u \in Z_0$ se para qualquer sequência E -convergente a w temos $(w^\varepsilon, u^\varepsilon)_{Z_\varepsilon} \rightarrow (u, w)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Denotaremos tal convergência por $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Estamos interessados em estudar o comportamento das soluções dos problemas semilineares. Para tanto, buscaremos provar o que será definido como semi-continuidade superior e inferior em relação ao operador E_ε .

Assim, dizemos que uma família de conjuntos $J_\varepsilon \subset Z_\varepsilon$ é

- (i) semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ se $\text{dist}_H(J_\varepsilon, E_\varepsilon J_0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$,
- (ii) semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$ se $\text{dist}_H(E_\varepsilon J_0, J_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$,

onde, se $A, B \subset Z_\varepsilon$, $\text{dist}_H(A, B)$ é a semidistância de Hausdorff dada por

$$\text{dist}_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_{Z_\varepsilon}. \quad (1.7)$$

Sabendo da definição acima, pode-se obter o seguinte Lema, que explicita convenientes condições para a semi-continuidade e que será utilizado posteriormente.

- Lema 1.4.3.** (i) A família $\{J_\varepsilon\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$ se toda sequência $\{u_\varepsilon\}$, com $u_\varepsilon \in J_\varepsilon$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, possui uma subsequência E -convergente para um elemento de J_0 ;
- (ii) A família $\{J_\varepsilon\}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$ se J_0 é compacto e para todo $u \in J_0$ existe uma sequência $\{u_\varepsilon\}$, com $u_\varepsilon \in J_\varepsilon$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Demonstração. Ver [Carvalho, 2012, Lema 1.2.2]. □

Começamos com proposições básicas lidando com E -convergência.

Proposição 1.4.4. Se $\|u^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} \leq K$, $u \in Z_0$ e para todo $w \in Z_0$ vale $(E_\varepsilon w, u^\varepsilon)_{Z_\varepsilon} \rightarrow (w, u)$, então $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Proposição 3.1]. □

Proposição 1.4.5. Se $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$ e $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} \leq \|u\|_{Z_0}$ então $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Proposição 3.2]. □

Agora vamos introduzir uma noção de compacidade entre os operadores usando esta convergência.

Definição 1.4.6. Uma sequência $\{u_n\}$, $u_n \in Z_{\varepsilon_n}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, é E -relativamente compacta se para toda subsequência $\{u_{n'}\}$ existem uma subsequência $\{u_{n''}\}$ e um elemento $u \in Z_0$ tais que $u_{n''} \xrightarrow{E} u$. Uma família é dita E -relativamente compacta se toda sequência $\{u_n\}$, $u_n \in X_{\varepsilon_n}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, é E -relativamente compacta.

Definição 1.4.7. Uma família de operadores lineares contínuos $\{T_\varepsilon\}$, com $T_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$, E -converge para $T : Z_0 \rightarrow Z_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $T_\varepsilon u^\varepsilon \xrightarrow{E} Tu$ para qualquer $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$. Denotaremos por $T_\varepsilon \xrightarrow{EE} T$.

Finalmente, podemos definir uma noção de convergência compacta com os operadores.

Definição 1.4.8. Uma família de operadores compactos $\{T_\varepsilon\}$, com $T_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$, converge compactamente para $T : Z_0 \rightarrow Z_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se, para qualquer família $\{u^\varepsilon\}$ com $\|u^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon}$ limitado, temos que $\{T_\varepsilon u^\varepsilon\}$ é E -relativamente compacta e $T_\varepsilon \xrightarrow{EE} T$. Denotaremos por $T_\varepsilon \xrightarrow{CC} T$.

Com essas definições temos o seguinte lema.

Lema 1.4.9. Se $T_\varepsilon \xrightarrow{CC} T$, então:

- (a) existem $\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ tais que $\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0} \|T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq M$;
- (b) se $N(I + T_0) = \{0\}$, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $C > 0$ tais que $N(I + T_\varepsilon) = \{0\}$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e

$$\|(I + T_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq C, \quad \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Lema 3.1]. □

Além disso, o seguinte teorema será de suma importância posteriormente.

Teorema 1.4.10. Seja $T_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$ uma família de operadores compactos tal que $T_\varepsilon \xrightarrow{CC} T_0$. Seja $u^\varepsilon \in Z_\varepsilon$ ponto fixo de T_ε tal que $\|u^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon}$ é uniformemente limitado. Então existe subsequência, que também chamaremos u^ε , e $u \in Z_0$ com $u = T_0 u$ tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Teorema 3.1]. □

Nas aplicações que serão vistas nos Capítulos 3 e 4, consideraremos tais T_ε como as inversas de certos operadores diferenciais $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$.

Sendo assim, considere problemas semilineares da forma

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = F_\varepsilon(u^\varepsilon) \tag{1.8}$$

e

$$A_0 u = F_0(u) \tag{1.9}$$

definidos em um espaço de Banach Z_ε , com o operador linear $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$ e aplicação $F_\varepsilon : Z_\varepsilon \rightarrow Z_\varepsilon$, tais que:

Hipótese 1.4.11. (i) A_ε é fechado, densamente definido, com resolvente compacto e $0 \in \rho(A_\varepsilon)$;

$$(ii) \quad A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1};$$

$$(iii) \quad A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1} F_0.$$

A técnica utilizada é primeiramente analisar tal operador através de propriedades de convergência das soluções dos problemas lineares dados por

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon \quad \text{e} \quad A_0 u_0 = f_0,$$

com certos $f^\varepsilon \in Z_\varepsilon$ e $f_0 \in Z_0$ (representada pela Hipótese 1.4.11(ii)). Feito isso, estabeleceremos as propriedades de F_ε necessárias para analisar a convergência, em certo sentido, de $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon)$ dado em (1.8) (representada pela Hipótese 1.4.11(iii)).

A primeira proposição válida neste contexto, usando o Teorema 1.4.10, é a seguinte:

Proposição 1.4.12. *Para qualquer sequência $\{u_*^\varepsilon\}$, u_*^ε solução de (1.8), existe uma subsequência, que também denotaremos como u_*^ε , e u_* solução de (1.9) tal que $u_*^\varepsilon \xrightarrow{E} u_*$.*

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Corolário 5.2] ou [Arrieta et al., 2006, Proposição 5.6]. $\square$

Tal proposição nos leva à semi-continuidade superior das soluções. Porém, para o resultado “recíproco”, a semi-continuidade inferior, precisaremos de mais uma definição auxiliar:

Definição 1.4.13. *Seja u_* solução de (1.9). Dizemos que ela é hiperbólica se o espectro $\sigma(A_0 - F'_0(u_*))$ do operador linearizado $A_0 - F'_0(u_*)$ é disjunto do eixo imaginário.*

Com isso, podemos enunciar:

Proposição 1.4.14. *Para qualquer ponto de equilíbrio hiperbólico u_* solução de (1.9), existe sequência $\{u_*^\varepsilon\}$, u_*^ε solução de (1.8), tal que $u_*^\varepsilon \xrightarrow{E} u_*$.*

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Corolário 5.3] ou [Arrieta et al., 2006, Proposição 5.7]. $\square$

Note, porém, que o tipo de continuidade visto até agora não exclui a possibilidade de que, próximo a uma solução do limite, existam várias soluções diferentes do problema perturbado para certo $\varepsilon > 0$. Nosso próximo passo agora é mostrar que, com mais algumas propriedades, é possível obter uma certa unicidade dos pontos de equilíbrio.

Para tanto precisamos impor condições na não-linearidade F_ε para garantir que, próxima a uma solução hiperbólica do problema limite (1.9), teremos uma, e apenas uma, solução da equação perturbada (1.8). Isto é obtido ao analisarmos o problema linearizado em torno de uma solução e estabelecendo condições para F'_ε . O problema linearizado em torno de u_*^ε solução de (1.8) é dado por

$$A_\varepsilon v^\varepsilon = F_\varepsilon(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon$$

Dessa forma, precisaremos que nosso problema satisfaça mais hipóteses:

Hipóteses 1.4.15. (i) *Se $\{u_*^\varepsilon\}$, com $u_*^\varepsilon \in Z_\varepsilon$, é família de soluções de (1.8) tais que $u_*^\varepsilon \xrightarrow{E} u_*$ então $A_\varepsilon^{-1} F'_\varepsilon(u_*^\varepsilon) \xrightarrow{CC} A_0^{-1} F'_0(u_*)$;*

(ii) *Dado $u_*^\varepsilon \in Z_\varepsilon$ solução de (1.8), existe $K > 0$ tal que, para todo $v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ com $\|v^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} \leq 1$, vale*

$$\|A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - A_\varepsilon^{-1} F'_\varepsilon(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} \leq K \|v^\varepsilon\|_{Z_\varepsilon}^{1+\delta}, \text{ para algum } \delta \in (0, 1).$$

E com isso pode-se mostrar o seguinte resultado:

Proposição 1.4.16. *Para qualquer ponto de equilíbrio hiperbólico u_* solução de (1.9), existem $\eta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que há um, e apenas um, equilíbrio u_*^ε solução de (1.8) com $\|u_*^\varepsilon - E_\varepsilon u_*\|_{Z_\varepsilon} \leq \eta$, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.*

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Proposição 5.5] ou [Arrieta *et al.*, 2006, Teorema 5.8]. $\square$

Logo, usando as Proposições 1.4.12, 1.4.14 e 1.4.16 prova-se a semicontinuidade superior e inferior das soluções de (1.8) em $\varepsilon = 0$, além de um conceito de unicidade de solução do problema perturbado quando analisada próxima à solução do problema limite (1.9). Tais resultados serão retomados nos Capítulos 3 e 4.

CAPÍTULO 2

Integrais concentradas

Neste capítulo veremos com mais detalhes o comportamento de integrais da forma

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u(x)|^q dx$$

para diferentes valores de $q \geq 2$ e de conjuntos abertos $\theta_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ da forma

$$\theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in (0, 1), G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1) < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\},$$

onde $\gamma > 0$, $G_\varepsilon = G(x_1, \varepsilon)$ e $H_\varepsilon = H(x_1, \varepsilon)$ são funções reais cujas hipóteses serão estabelecidas a cada situação. Este termo será referido durante este trabalho como integral concentrada, por representar o efeito de uma função quando analisada apenas em uma vizinhança da fronteira.

De maneira geral, um bom controle dessa integral será importante para a análise de modelos definidos em abertos de $\mathbb{R}^2$, que possuem um comportamento de “degeneração” ou “convergência” a um domínio limite quando um parâmetro ε tende a zero, e tal que existem termos reagindo apenas em uma vizinhança de ordem ε^γ próxima da fronteira, com $\gamma > 0$, e que é descrita através de funções limitadas.

Sendo assim, na Seção 2.1 explicitaremos resultados sobre um domínio com fronteira Lipschitz (usando a Definição 1.1.11), analisando espaços de Sobolev e Lebesgue-Bochner neste contexto. Na Seção 2.2 estaremos interessados, primeiramente, em estimar as integrais concentradas na Subseção 2.2.1 e, depois, em analisar certos limites destas integrais, sob hipóteses adicionais no domínio, durante a Subseção 2.2.2. Por último, na Seção 2.3 estudaremos as propriedades da função definida como uma integral concentrada, representando a reação na vizinhança da fronteira, e que será utilizada posteriormente como não-linearidade nos problemas elípticos.

2.1 Equivalência de normas em domínios não-regulares de $\mathbb{R}^2$

Nosso objetivo nesta seção será provar propriedades mais específicas dos espaços de Lebesgue e Sobolev-Bochner já utilizando o contexto que nos interessa neste trabalho.

Dado $\varepsilon \in (0, 1)$ fixo, seja Ω_ε o aberto de $\mathbb{R}^2$ da forma

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\}.$$

Chamaremos $G(x_1, \varepsilon) = G_\varepsilon(x_1)$. Sabendo válidas as imersões de Sobolev provadas na Seção 1.3, explicitemos algumas propriedades que serão úteis mais adiante para este tipo de domínio.

Para tanto, considere:

Hipótese 1: $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva e uniformemente limitada, com $0 < G_0 \leq G(x, \varepsilon) \leq G_1$ para todo $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Vejamos primeiramente um lema de extensão unidimensional que nos ajudará a explicitar as constantes envolvidas no cálculo da equivalência de normas entre as diferentes definições de espaços de Sobolev.

Lema 2.1.1. Fixados $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in (0, 1)$, se chamarmos $I_\varepsilon = (0, G_\varepsilon(x_1))$, onde $G_\varepsilon(x_1) = G(x_1, \varepsilon)$, com $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a Hipótese 1, existe um operador contínuo linear $P : L^2(I_\varepsilon) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tal que $Pu = u$ em I_ε , com $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \lambda_0 \|u\|_{L^2(I_\varepsilon)}$, $\|Pu\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \lambda_s \|u\|_{H^s(I_\varepsilon)}$ e $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \lambda_1 \|u\|_{H^1(I_\varepsilon)}$, para $0 < s < 1$, onde $\lambda_0, \lambda_s, \lambda_1 \geq 1$ independentes de $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in (0, 1)$.

Demonstração. Note que $I_0 := (0, G_0) \subset I_\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Iremos construir o operador extensão pedido no enunciado primeiro estendendo de I_ε até $I = (0, G_1)$ e depois de I até $\mathbb{R}$. Começamos dividindo a primeira parte em dois casos.

Se $2G_0 \geq G_1$, defina P_ε através de uma reflexão em y na fronteira como: dado $\varphi \in L^2(I_\varepsilon)$,

$$(P_\varepsilon \varphi)(y) = \begin{cases} \varphi(y), & \text{se } y \in I_\varepsilon, \\ \varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y), & \text{se } y \in I \setminus I_\varepsilon. \end{cases}$$

Mostremos que, de fato, P_ε está bem definido, isto é, que $(2G_\varepsilon(x_1) - y) \in I_\varepsilon$ se $y \in I \setminus I_\varepsilon$. Com efeito, se $y \in I \setminus I_\varepsilon$,

$$\begin{cases} 2G_\varepsilon(x_1) - y > 2G_\varepsilon(x_1) - G_1 \geq 2G_\varepsilon(x_1) - 2G_0 > 0, \\ 2G_\varepsilon(x_1) - y < 2G_\varepsilon(x_1) - G_\varepsilon(x_1) = G_\varepsilon(x_1). \end{cases}$$

Logo, $(2G_\varepsilon(x_1) - y) \in I_\varepsilon$. Provemos agora a continuidade. Dado $\varphi \in H^1(I_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon \varphi\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I |P_\varepsilon \varphi|^2 = \int_{I_\varepsilon} |P_\varepsilon \varphi|^2 + \int_{I \setminus I_\varepsilon} |P_\varepsilon \varphi|^2 = \int_{I_\varepsilon} |\varphi|^2 + \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} |\varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y)|^2 dy \\ &= \|\varphi\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \int_{2G_\varepsilon(x_1)-G_1}^{G_\varepsilon(x_1)} |\varphi(z)|^2 dz \leq \|\varphi\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \int_{2G_0-G_1}^{G_\varepsilon(x_1)} |\varphi(z)|^2 dz \leq 2\|\varphi\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P'_\varepsilon \varphi\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I \left| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi}{\partial y} \right|^2 = \int_{I_\varepsilon} \left| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi}{\partial y} \right|^2 + \int_{I \setminus I_\varepsilon} \left| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi}{\partial y} \right|^2 \\ &= \int_{I_\varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 + \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} \left| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y) \right|^2 dy \\ &= \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} \left| -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(2G_\varepsilon(x_1) - y) \right|^2 dy \\ &\leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \int_{2G_0-G_1}^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(z) \right|^2 dz \leq 2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 \end{aligned}$$

e, para $0 < s < 1$ temos

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon \varphi\|_{H^s(I)}^2 &= \|P_\varepsilon \varphi\|_{L^2(I)}^2 + \iint_{I \times I} \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \\ &\leq 2\|\varphi\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \iint_{I_\varepsilon \times I_\varepsilon} \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy + \iint_A \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \\ &\quad + \iint_B \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy + \iint_C \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2 + \|\varphi\|_{H^s(I_\varepsilon)}^2 + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \{G_\varepsilon(x_1) < y_1 < G_1\} \times \{G_\varepsilon(x_1) < y_2 < G_1\}, \\ B &= \{G_\varepsilon(x_1) < y_1 < G_1\} \times \{0 < y_2 < G_\varepsilon(x_1)\}, \\ C &= \{0 < y_1 < G_\varepsilon(x_1)\} \times \{G_\varepsilon(x_1) < y_2 < G_1\}. \end{aligned}$$

Analisando as integrais separadamente, obtemos, com a mudança de variáveis

$$z_1 = 2G_\varepsilon(x_1) - y_1 \quad \text{e} \quad z_2 = 2G_\varepsilon(x_1) - y_2$$

a seguinte integral:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy &= \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} \frac{|\varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y_1) - \varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \\ &\leq 2 \iint_{I_\varepsilon \times I_\varepsilon} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|^2}{|z_1 - z_2|^{1+2s}} dz. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $(y_1, y_2) \in B$, então $y_2 < G_\varepsilon(x_1)$ e se chamarmos $z_1 = 2G_\varepsilon(x_1) - y_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy &= \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \frac{|\varphi(2G_\varepsilon(x_1) - y_1) - \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \\ &= \iint_{I_\varepsilon \times I_\varepsilon} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(y_2)|^2}{|2G_\varepsilon(x_1) - z_1 - y_2|^{1+2s}} dy_2 dz_1 \\ &\leq 3 \iint_{I_\varepsilon \times I_\varepsilon} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(y_2)|^2}{|z_1 - y_2|^{1+2s}} dy_2 dz_1, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} |z_1 - y_2| &= |2G_\varepsilon(x_1) - y_1 - y_2| = |y_2 + y_1 - 2G_\varepsilon(x_1)| \\ &\leq |y_2 - y_1| + 2|y_1 - G_\varepsilon(x_1)| \leq 3|y_1 - y_2| = 3|2G_\varepsilon(x_1) - z_1 - y_2|. \end{aligned}$$

E de forma análoga,

$$\iint_C \frac{|P_\varepsilon \varphi(y_1) - P_\varepsilon \varphi(y_2)|^2}{|y_1 - y_2|^{1+2s}} dy \leq 3 \iint_{I_\varepsilon \times I_\varepsilon} \frac{|\varphi(y_1) - \varphi(z_2)|^2}{|y_1 - z_2|^{1+2s}} dz_2 dy_1,$$

provando que

$$\|P_\varepsilon \varphi\|_{H^s(I)} \leq C \|\varphi\|_{H^s(I_\varepsilon)}.$$

Agora, se $G_1 > 2G_0$, precisamos primeiro estender a função inicial φ na direção de y negativo

para depois construir P_ε de modo análogo ao caso anterior. Ou seja, se φ_0 está definido em I_ε , a estenderemos ao conjunto $\{y \in \mathbb{R}; -G_0 < y < G_\varepsilon(x_1)\}$ como

$$\varphi_1(y) = \begin{cases} \varphi_0(y), & \text{se } 0 < y < G_\varepsilon(x_1), \\ \varphi_0(-y), & \text{se } -G_0 < y \leq 0. \end{cases}$$

Continuando este processo iterativamente, obtemos

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} \varphi_{n-1}(y), & \text{se } -(n-1)G_0 < y < G_\varepsilon(x_1), \\ \varphi_{n-1}(-y - 2(n-1)G_0), & \text{se } -nG_0 < y \leq -(n-1)G_0. \end{cases}$$

Dado $\varphi_0 \in H^1(I_\varepsilon)$, existe n suficientemente grande tal que $nG_0 > G_1$, e desta forma podemos construir φ_n e definir P_ε como

$$(P_\varepsilon \varphi_0)(y) = \begin{cases} \varphi_n(y), & \text{se } y \in I_\varepsilon, \\ \varphi_n(2G_\varepsilon(x_1) - y), & \text{se } y \in I \setminus I_\varepsilon, \end{cases}$$

satisfazendo as condições requeridas. De fato, note que P_ε está bem definido, pois se $y \in I_\varepsilon$ então $P_\varepsilon \varphi_0(y) = \varphi_n(y) = \varphi_0(y)$ e se $y \in I \setminus I_\varepsilon$ então $G_\varepsilon(x_1) < y < G_1$ e, sabendo que $nG_0 > G_1$, segue que

$$\begin{cases} 2G_\varepsilon(x_1) - y < 2G_\varepsilon(x_1) - G_\varepsilon(x_1) = G_\varepsilon(x_1) \\ 2G_\varepsilon(x_1) - y > 2G_\varepsilon(x_1) - G_1 > 2G_\varepsilon(x_1) - nG_0 > -nG_0 \end{cases}$$

e, portanto, $(2G_\varepsilon(x_1) - y)$ está no domínio de φ_n , mostrando que P_ε está bem definida.

Além disso, usando $nG_0 > G_1$ e a definição de φ_n , temos, se chamarmos $I_\varepsilon^n = (-nG_0, G_1)$,

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon \varphi_0\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I |P_\varepsilon \varphi_0|^2 = \int_{I_\varepsilon} |P_\varepsilon \varphi_0|^2 + \int_{I \setminus I_\varepsilon} |P_\varepsilon \varphi_0|^2 \\ &= \int_{I_\varepsilon} |\varphi_n|^2 + \int_{G_\varepsilon(x_1)}^{G_1} |\varphi_n(2G_\varepsilon(x_1) - y)|^2 dy \leq \int_{I_\varepsilon} |\varphi_n|^2 + \int_{2G_\varepsilon(x_1) - G_1}^{G_\varepsilon(x_1)} |\varphi_n(y)|^2 dy \\ &\leq 2\|\varphi_n\|_{L^2(I_\varepsilon^n)}^2 \leq 2(n+1)\|\varphi_0\|_{L^2(I_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

e os outros resultados em $H^s(I)$ e $H^1(I)$ seguem de forma análoga.

Podemos, novamente refletindo valores, estender o domínio de P_ε para funções definidas $(-nG_0, 2G_1)$ se $nG_0 > G_1$, para algum n . Desta forma, podemos definir a extensão para toda a reta real. Sendo assim, para $u \in H^1(I_\varepsilon)$, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $I \subset \text{supp}(\psi)$, com $\psi = 1$ em I , $\psi = 0$ em $\mathbb{R} \setminus (-G_0, G_1 + G_0)$, e defina

$$Pu = \psi P_\varepsilon(u).$$

Assim, este operador satisfaz as propriedades do enunciado pois herdará propriedades de P_ε . $\square$

Agora explicitaremos a relação das normas de $H^s(0, G_\varepsilon(x_1))$, $\bar{H}^s(0, G_\varepsilon(x_1))$ e $H_\square^s(0, G_\varepsilon(x_1))$ para $x_1 \in (0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ fixados.

Teorema 2.1.2. *Seja $I_\varepsilon = (0, G_\varepsilon(x_1))$, com $\varepsilon > 0$, $x_1 \in (0, 1)$ e $1/2 < s \leq 1$ fixados, onde $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $G_\varepsilon(x) = G(x, \varepsilon)$, satisfaz a Hipótese 1. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ independentes de $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in (0, 1)$ tais que*

$$C_1 \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)} \leq \|v\|_{H_\square^s(I_\varepsilon)} \leq C_2 \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)}, \forall v \in H^s(I_\varepsilon).$$

Demonstração. Dado $v \in H^s(I_\varepsilon)$, pelo Corolário 1.1.23 já provado

$$K^{-1} \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)} \leq \|v\|_{\bar{H}^s(I_\varepsilon)} \leq K \|P\|_{\mathcal{L}(H^s(I_\varepsilon), H^s(\mathbb{R}))} \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)}$$

onde $K, \|P\|_{\mathcal{L}(H^s(I_\varepsilon), H^s(\mathbb{R}))}$ independem de ε . Analogamente, pelo Teorema 1.1.26, se usarmos o Lema 2.1.1 e sua notação, obtemos que

$$\lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} \|v\|_{\bar{H}^s(I_\varepsilon)} \leq \|v\|_{H_{\square}^\theta(I_\varepsilon)} \leq \|v\|_{\bar{H}^s(I_\varepsilon)},$$

onde λ_0, λ_1 independem de ε pela construção de P .

Assim, juntando estas informações temos que

$$\begin{aligned} \lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} K^{-1} \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)} &\leq \lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} \|v\|_{\bar{H}^s(I_\varepsilon)} \leq \|v\|_{H_{\square}^\theta(I_\varepsilon)} \\ &\leq \|v\|_{\bar{H}^s(I_\varepsilon)} \leq K \|P\|_{\mathcal{L}(H^s(I_\varepsilon), H^s(\mathbb{R}))} \|v\|_{H^s(I_\varepsilon)} \end{aligned}$$

concluindo o resultado para $C_1 = \lambda_0^{s-1} \lambda_1^{-s} K^{-1}$ e $C_2 = K \|P\|_{\mathcal{L}(H^s(I_\varepsilon), H^s(\mathbb{R}))}$. $\square$

Consequentemente, podemos enunciar novas propriedades dos espaços de Lebesgue e Sobolev-generalizados em Ω_ε utilizando de alguma forma as normas equivalentes dos espaços de Sobolev $H^s(I_\varepsilon)$, já que elas se relacionam através de constantes que independem de ε . Um exemplo é dado a seguir.

Proposição 2.1.3. *Se $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $G_\varepsilon(x) = G(x, \varepsilon)$, satisfaz a Hipótese 1, então $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$, para $0 \leq s \leq 1$, com constante de inclusão independente de ε .*

Demonstração. Para cada $x_1 \in (0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ fixados, sabemos pelo Teorema 2.1.2 que

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{H_{\square}^s(0, G_\varepsilon(x_1))},$$

onde $C > 0$ independe de $\varepsilon > 0$ e de $x_1 \in (0, 1)$.

Assim, pela Proposição 1.1.7(c),

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, G_\varepsilon(x_1))}^{1-s} \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s$$

Aplicando o Teorema 1.3.6, obtemos

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^{1-s} \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s,$$

seguindo que

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^s \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s.$$

Consequentemente, ao integrarmos obtemos,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))}^2 &= \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^2 dx_1 \leq C \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^2 dx_1 \\ &= C \|u\|_{L^2(0, 1; H^1(0, G_\varepsilon(x_1)))}^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

concluindo o resultado. $\square$

Uma pergunta relevante seria se a inclusão provada na Proposição 2.1.3 seria compacta. Para tal situação ocorrer, precisaremos de mais hipóteses sobre o domínio, como veremos a seguir.

Proposição 2.1.4. *Suponha $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $G_\varepsilon(x) = G(x, \varepsilon)$, satisfazendo a Hipótese 1 e $|G'_\varepsilon(x)| \leq C$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $1/2 < s < 1$, então $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$ com imersão compacta.*

Demonstração. Primeiramente, seja $Q = (0, 1) \times (0, 1)$. Se definirmos

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon : Q &\rightarrow \Omega_\varepsilon \\ (x, y) &\mapsto (x_1, x_2) = \phi_\varepsilon(x, y) := (x, yG_\varepsilon(x)) \end{aligned}$$

temos que ϕ_ε é injetora, de classe C^1 , com

$$J\phi_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ yG'_\varepsilon(x) & G_\varepsilon(x) \end{pmatrix}$$

e $G_0 \leq \det(J\phi_\varepsilon) = G_\varepsilon(x) \leq G_1$. Note que, assim, ϕ_ε é um difeomorfismo sobre sua imagem e sua inversa está bem definida, com

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon^{-1} : \Omega_\varepsilon &\longrightarrow Q \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x, y) = \phi_\varepsilon^{-1}(x_1, x_2) := (x_1, x_2/G_\varepsilon(x_1)). \end{aligned}$$

Com isso, ao considerar

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow H^1(Q) \\ u &\mapsto \Phi_\varepsilon(u) := u \circ \phi_\varepsilon \end{aligned}$$

temos que

$$\|\Phi_\varepsilon(u)\|_{H^1(Q)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (2.1)$$

com constante $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$. De fato, fazendo a mudança de coordenadas conveniente e usando ϕ_ε^{-1} ,

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon(u)\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 |u(x, yG_\varepsilon(x))|^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2)|^2 \frac{1}{G_\varepsilon(x_1)} dx_2 dx_1 \leq \frac{1}{G_0} \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Phi_\varepsilon(u)}{\partial x} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x, yG_\varepsilon(x)) + yG'_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, yG_\varepsilon(x)) \right|^2 dy dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \frac{2}{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right|^2 dx_2 dx_1 + \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \frac{2G'_\varepsilon(x_1)^2}{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_2 dx_1 \\ &\leq C_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + C_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Phi_\varepsilon(u)}{\partial y} \right\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x, yG_\varepsilon(x)) G_\varepsilon(x_1) \right|^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 \frac{G_\varepsilon^2(x_1)}{G_\varepsilon(x_1)} dx_2 dx_1 \leq G_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

provando a desigualdade (2.1).

Por outro lado, se considerarmos

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon : L^2(0, 1; H^s(0, 1)) &\rightarrow L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1))) \\ u &\mapsto \Psi_\varepsilon(u) := u \circ \phi_\varepsilon^{-1}\end{aligned}$$

temos que, para todo $1/2 < s < 1$,

$$\|\Psi_\varepsilon(u)\|_{L^2(0,1;H^s(0,G_\varepsilon(x_1)))} \leq K \|u\|_{L^2(0,1;H^s(0,1))}, \quad (2.2)$$

com constante $K > 0$ independente de $\varepsilon > 0$. Com efeito, para $1/2 < s < 1$, fazendo a mudança de coordenadas conveniente e usando ϕ_ε

$$\begin{aligned}\|\Psi_\varepsilon(u)\|_{L^2(0,1;H^s(0,G_\varepsilon(x)))}^2 &= \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2/G_\varepsilon(x_1))|^2 dx_2 dx_1 + \\ &\quad + \int_0^1 \left[\int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \frac{|u(x_1, z_1/G_\varepsilon(x_1)) - u(x_1, z_2/G_\varepsilon(x_1))|^2}{|z_1 - z_2|^{1+2s}} dz_1 dz_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |u(x, y)|^2 G_\varepsilon(x) dy dx + \int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x, w_1) - u(x, w_2)|^2}{|G_\varepsilon(x)(w_1 - w_2)|^{1+2s}} G_\varepsilon(x) dw_1 dw_2 \right] dx_1 \\ &\leq G_1 \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{G_0^{2s}} \int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{|u(x, w_1) - u(x, w_2)|^2}{|w_1 - w_2|^{1+2s}} dw_1 dw_2 \right] dx_1 \leq K \|u\|_{L^2(0,1;H^s(0,1))}^2,\end{aligned}$$

Agora, para $s = 1$, de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned}\|\Psi_\varepsilon(u)\|_{L^2(0,1;H^1(0,G_\varepsilon(x)))}^2 &= \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2/G_\varepsilon(x_1))|^2 dx_2 dx_1 + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x_1, x_2/G_\varepsilon(x_1)) \frac{1}{G_\varepsilon(x_1)} \right|^2 dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 |u(x, y)|^2 G_\varepsilon(x) dy dx + \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 \frac{1}{G_\varepsilon(x_1)} dy dx \\ &\leq G_1 \|u\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{1}{G_0} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(Q)}^2 \leq K \|u\|_{L^2(0,1;H^1(0,1))}^2,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Pelo Corolário 1.3.14 temos que a inclusão

$$H^1(Q) \hookrightarrow L^2(0, 1; H^s(0, 1))$$

é compacta. Porém, note que

$$H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{\Phi_\varepsilon} H^1(Q) \hookrightarrow L^2(0, 1; H^s(0, 1)) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1))),$$

onde as aplicações definidas por Φ_ε e Ψ_ε possuem constantes que independem de ε , como visto em (2.1) e (2.2).

Portanto, compondo as aplicações, $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$ com imersão compacta, para $1/2 < s < 1$, concluindo a demonstração.

□

Agora, considere:

Hipótese 2: O aberto Ω_ε admite operador de extensão contínuo $P_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(U)$, onde o fecho de Ω_ε está contido em U para todo $\varepsilon > 0$, com $U = U_1 \times U_2$, tal que

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(U)} &\leq C_0 \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \\ \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(U_1; H^s(U_2))} &\leq C_s \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))}, \\ \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(U)} &\leq C_1 \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $C_0, C_s, C_1 > 0$ independem de $\varepsilon > 0$.

Observação 2.1.5. Note que, se G satisfaz a Hipótese 1 e $|G'_\varepsilon(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde C independe de $\varepsilon > 0$, então o aberto Ω_ε satisfaz a Hipótese 2. Para tanto, veja os operadores de extensão definidos em [Arrieta et al., 2011, Lema 3.1] e [McLean, 2000, Apêndice A], que são obtidos por construções análogas a realizada na prova do Lema 2.1.1.

Sobre a equivalência das normas entre as definições de espaço de Sobolev temos novamente:

Teorema 2.1.6. Seja $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, com $\varepsilon > 0$, onde $G : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $G_\varepsilon(x) = G(x, \varepsilon)$, satisfaz as Hipóteses 1 e 2. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$ independentes de ε tal que

$$C_1 \|v\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \leq \|v\|_{H^s_{\square}(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2 \|v\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)}, \forall v \in H^s(\Omega_\varepsilon)$$

Demonstração. Análogo à demonstração do Teorema 2.1.2. □

Além disso, outras propriedades referentes aos espaços de Lebesgue e Sobolev-Bochner generalizados podem ser provadas.

Proposição 2.1.7. Suponha $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo as Hipóteses 1 e 2. Então são válidas as seguintes inclusões, com constantes de imersão que independem de ε :

- (a) $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^\infty(0, 1; L^2(0, G_\varepsilon(x)))$;
- (b) dado $q \geq 2$, temos $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^q(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x)))$, onde $s = 2/q$;
- (c) $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^q(\Omega_\varepsilon)$, para $1 \leq q \leq 6$.

Demonstração. (a) Fixado $x_1 \in (0, 1)$, usando o operador de extensão da Hipótese 2 temos que

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq \|P_\varepsilon u(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, G_1)}.$$

Consequentemente,

$$\|u\|_{L^\infty(0,1; L^2(0, G_\varepsilon(x_1)))} \leq \|P_\varepsilon u\|_{L^\infty(0,1; L^2(0, G_1))}. \quad (2.3)$$

Ao usarmos [Cazenave e Haraux, 1998, Corolário 1.4.36], temos que

$$\|P_\varepsilon u\|_{L^\infty(0,1; L^2(0, G_1))} \leq C \|P_\varepsilon u\|_{H^1(0,1; L^2(0, G_1))} \leq C \|P_\varepsilon u\|_{H^1(U)}. \quad (2.4)$$

Logo, usando (2.4) em (2.3) e a continuidade do operador de extensão $\|P_\varepsilon\|$ independe de ε , temos que

$$\|u\|_{L^\infty(0,1; L^2(0, G_\varepsilon(x_1)))} \leq C \|P_\varepsilon u\|_{H^1(U)} \leq CC_1 \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

concluindo o resultado.

- (b) Primeiramente, seja $q \geq 2$ e defina $s = 2/q$, $0 < s \leq 1$. Para cada $x_1 \in (0, 1)$ fixo, temos novamente pelo Teorema 2.1.2 e Proposição 1.1.7(c) que existe $C > 0$ independente de ε e x_1 tal que

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s_{\square}(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u(x_1, \cdot)\|_{L^2(0, G_\varepsilon(x_1))}^{1-s} \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s.$$

Temos que $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^\infty(0, 1; L^2(0, G_\varepsilon(x_1)))$ pelo item (a). Consequentemente,

$$\|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1-s} \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s.$$

Pela Proposição 2.1.3, $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^2(0, 1; H^1(0, G_\varepsilon(x_1)))$ e, então,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))}^q &= \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^{2/s} dx_1 \\ &\leq \int_0^1 \left(C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1-s} \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^s \right)^{2/s} dx_1 \\ &\leq C^{2/s} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2(1-s)/s} \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1(0, G_\varepsilon(x_1))}^2 dx_1 \\ &\leq C^{2/s} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2(1-s)/s} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = C^{2/s} \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2/s} = C^q \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^q. \end{aligned}$$

- (c) Pelo item anterior, temos que $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq L^q(0, 1; H^{2/q}(0, G_\varepsilon(x_1)))$ para $q \geq 2$. Sabendo que $L^q(\Omega_\varepsilon) = L^q(0, 1; L^q(0, G_\varepsilon(x_1)))$ isometricamente, basta provar que, para cada $x_1 \in (0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ fixos,

$$H^{2/q}(0, G_\varepsilon(x_1)) \subseteq L^q(0, G_\varepsilon(x_1)),$$

com constante de imersão independente de x_1, ε .

Se $1 \leq q \leq 2$, então teríamos que provar que $H^1(0, G_\varepsilon(x_1)) \subseteq L^2(0, G_\varepsilon(x_1))$, o que segue direto da definição dos espaços.

Por outro lado, se $2 < q \leq 4$, então $1/2 \leq 2/q < 1$. Pelos Teoremas 1.3.9 e 1.3.10(b), temos que,

$$H^{2/q}(\mathbb{R}) \subseteq H^{1/2}(\mathbb{R}) \subseteq L^r(\mathbb{R}), \quad \forall r \geq 2.$$

Em particular a inclusão acima vale para $r = q$, com $2 \leq q \leq 4$. Além disso, pelo Lema 2.1.1, existe operador contínuo de extensão $P : H^s(0, G_\varepsilon(x_1)) \rightarrow H^s(\mathbb{R})$, com constante independente de ε, x_1 para qualquer $1/2 < s < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \|u(x_1, \cdot)\|_{L^q(0, G_\varepsilon(x_1))} &\leq \|Pu(x_1, \cdot)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|Pu(x_1, \cdot)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|Pu(x_1, \cdot)\|_{H^{2/q}(\mathbb{R})} \leq C \|P\| \|u(x_1, \cdot)\|_{H^{2/q}(0, G_\varepsilon(x_1))}. \end{aligned}$$

Finalmente, se $4 < q \leq 6$ então $1/3 \leq 2/q < 1/2$. Pelos Teoremas 1.3.9 e 1.3.10(a), temos que,

$$H^{2/q}(\mathbb{R}) \subseteq L^r(\mathbb{R}), \quad \forall 2 \leq r \leq \frac{2}{1-2s}.$$

Notando que $q = \frac{2}{s} \leq \frac{2}{1-2s}$, temos

$$H^{2/q}(\mathbb{R}) \subseteq L^q(\mathbb{R}).$$

De forma análoga ao feito no caso anterior, usando o operador de extensão, prova-se o resultado. $\square$

2.2 Integrais concentradas

Um ponto chave para o melhor entendimento do problema proposto é saber como se comportam as funções quando concentradas numa vizinhança oscilatória da fronteira. Para tanto, necessitamos encontrar relações entre tais integrais concentradas e normas definidas no espaço todo, para cada $\varepsilon > 0$. Veremos que a constante $1/\varepsilon^\gamma$, fator que aparece multiplicado às funções concentradas na vizinhança de espessura ε^γ , terá um papel importante no controle destas integrais.

2.2.1 Para $\varepsilon > 0$ fixo

Considere os domínios, para $\varepsilon > 0$, dados por

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, G(x_1, \varepsilon) - \varepsilon^\gamma H(x_1, \varepsilon) < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$, $G, H : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções positivas.

Utilizando esta notação, obtemos os importantes lemas, que serão usados durante todo o trabalho:

Lema 2.2.1. *Suponha $G, H : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a Hipótese 1. Para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, existe constante $C > 0$, independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e de $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, tal que, para todo $1/2 < s \leq 1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, vale*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,1;H^s(0,G_\varepsilon(x_1)))}^2,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \leq C \left(\|u^\varepsilon\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right),$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^q \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^q(0,1;H^s(0,G_\varepsilon(x_1)))}^q, \forall q \geq 1.$$

Em particular,

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Demonstração. Para $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, fixe $x_1 \in (0, 1)$ e, assim, temos que $u(x_1, \cdot) \in H^1(0, G_\varepsilon(x_1))$ quase sempre. Defina

$$z^* := G_0 - \varepsilon_0^\gamma H_1 \text{ e } z^\varepsilon := G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)$$

para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, vale

$$[z^\varepsilon - z^*, z^\varepsilon] \subset [0, G_\varepsilon(x_1)].$$

Veja Figura 2.1 para um melhor entendimento do contexto. A busca de z^* ocorre para transferir a análise de um domínio que varia para um intervalo fixo, fazendo com que as constantes obtidas sejam uniformes em ε , como veremos a seguir.

Figura 2.1: Fixado $x_1 \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, obtemos a seguinte fibra, para $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Usando o Teorema do Traço 1.3.2 para $n = 1$ segue que, para $(G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)) < x_2 < G_\varepsilon(x_1)$ e $1/2 < s \leq 1$, existe $K > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que

$$|u(x_1, x_2)| \leq K \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}. \quad (2.5)$$

Note que tal constante $K > 0$ obtida independe de ε e de x_1 fixados, já que o intervalo onde tal teorema foi aplicado é fixo e independente destas variáveis. Além disso, também independe de x_2 usando a Observação 1.3.3.

Sendo assim, usando (2.5),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 &= \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} K^2 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^2 dx_2 dx_1 \\ &\leq K^2 H_1 \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^2 dx_1 = C_1 \|u\|_{L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))}^2, \end{aligned}$$

onde C_2 independe de ε , concluindo a primeira desigualdade.

Consequentemente, usando a mesma ideia anterior, ao elevar a integral a $q \geq 2$ segue, por (2.5),

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^q \leq C_2 \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^q dx_1 = C_2 \|u\|_{L^q(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))}^q,$$

mostrando a última desigualdade.

Por outro lado, temos pelo Teorema 1.3.5 que $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ é denso em $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Logo, podemos tomar $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e depois argumentar por densidade. Sendo assim, fixado $x_1 \in (0, 1)$ temos que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vale

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, 0) + \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|u(x_1, x_2)|^2 &\leq 2|u(x_1, 0)|^2 + 2 \left| \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) ds \right|^2 \\
&\leq 2|u(x_1, 0)|^2 + 2 \left[\left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) \right|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{x_2} 1^2 ds \right)^{1/2} \right]^2 \\
&\leq 2|u(x_1, 0)|^2 + 2x_2 \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) \right|^2 ds \\
&\leq 2|u(x_1, 0)|^2 + 2G_\varepsilon(x_1) \int_0^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) \right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2)|^2 dx_2 &\leq 2 \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, 0)|^2 dx_2 \\
&\quad + 2G_\varepsilon(x_1) \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} \left(\int_0^{x_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, s) \right|^2 ds \right) dx_2 \\
&\leq 2\varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1) |u(x_1, 0)|^2 + 2G_\varepsilon(x_1) \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1) \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_2 \\
&\leq 2\varepsilon^\gamma H_1 |u(x_1, 0)|^2 + 2G_1 \varepsilon^\gamma H_1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, se $\gamma(u)$ é o traço da função u ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_0^1 \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} |u(x_1, x_2)|^2 dx_2 dx_1 \\
&\leq 2H_1 \int_0^1 |u(x_1, 0)|^2 dx_1 + 2G_1 H_1 \int_0^1 \int_0^{G_\varepsilon(x_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^2 dx_2 dx_1 \\
&\leq 2H_1 \left(\|\gamma(u)\|_{L^2(0,1)}^2 + G_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Traço dado pelo Corolário 1.3.2, se $\Omega_0 = (0, 1) \times (0, G_0)$ independente de ε , com $\Omega_0 \subset \Omega_\varepsilon$, existe constante $c > 0$ tal que $\|\gamma(u)\|_{L^2(0,1)} \leq c \|u\|_{H^s(\Omega_0)}$, para $1/2 < s \leq 1$. Assim, voltando à desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 \leq 2H_1 \left(c \|u\|_{H^s(\Omega_0)}^2 + G_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) \leq C_1 \left(\|u\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right),$$

com C_1 independente de ε . Finalmente, a última afirmação segue utilizando a desigualdade acima, pois

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 \leq C_1 \left(\|u\|_{H^s(\Omega_0)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

ou equivalentemente usando a Proposição 2.1.3 a partir da primeira desigualdade obtida, concluindo o lema. $\square$

Lema 2.2.2. *Sejam G, H satisfazendo a Hipótese 1 e $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo a Hipótese 2. Para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, existe constante $C > 0$, independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e de $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,*

tal que, para todo $2 \leq q < 4$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, vale

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^q \leq C \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^q, \quad 2 \leq q < 4.$$

Demonstração. Usando (2.5), da demonstração do Lema 2.2.1, obtemos que

$$|u(x_1, x_2)| \leq K \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))},$$

onde $K > 0$ independe de $\varepsilon > 0$ e $x_1 \in (0, 1)$.

Consequentemente, tomando $q = 2/s$, como $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset L^q(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$ continuamente para $1/2 < s \leq 1$ com constante independente de ε pela Proposição 2.1.7(b), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^q &\leq K^q \int_0^1 \|u(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, G_\varepsilon(x_1))}^q dx_1 \\ &= K^q \|u\|_{L^q(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))}^q \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^q, \end{aligned}$$

provando a desigualdade. □

2.2.2 Comportamento no limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Após estimarmos as integrais concentradas para um $\varepsilon > 0$ dado, o próximo passo será lidar com o comportamento das mesmas quando passamos o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$. Para tanto, necessitaremos supor mais hipóteses sobre as funções G e H que definem a vizinhança oscilante onde estudamos tais reações.

Novamente em $\mathbb{R}^2$ com os abertos

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, G(x_1, \varepsilon) - \varepsilon^\gamma H(x_1, \varepsilon) < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$, $G, H : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, e chamaremos $G(x, \varepsilon) = G_\varepsilon(x)$ e $H(x, \varepsilon) = H_\varepsilon(x)$.

Considere também o aberto dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\}$$

tal que sua fronteira superior seja dada como

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\},$$

onde $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Além disso, considere

Hipótese 3:

- (i) a função G_ε converge uniformemente a m , onde $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ao menos Lipschitz, com derivada (que existe em quase todo ponto) limitada, de modo que $G_\varepsilon(x_1) \rightarrow m(x_1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para todo $x_1 \in (0, 1)$;
- (ii) a função $H_\varepsilon(\cdot)$ converge fraco-estrela em $L^\infty(0, 1)$ a uma função que representaremos por μ_h ;

Observação 2.2.3. Uma expressão natural para H é ser da forma $H_\varepsilon(x_1) = h(x_1/\varepsilon^\beta)$, onde $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e de período L_h . Com estas hipóteses, podemos usar o Teorema da convergência à média (ver [Cioranescu e Donato, 1999, Teorema 2.6]) e obter

$$H_\varepsilon \rightharpoonup \mu_h = \frac{1}{L_h} \int_0^{L_h} h(s) ds \text{ fraco* em } L^\infty(0, 1).$$

Definição 2.2.4. Se as funções que definem o par $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ de abertos de $\mathbb{R}^2$ satisfazem as Hipóteses 1, 2 e 3 chamaremos de conjunto admissível.

Com isso, podemos provar os seguintes resultados. Note que eles evidenciam um comportamento do tipo “traço” às funções, ou ainda, que as integrais convergem à integrais na fronteira quando fazemos o limite de ε a zero.

Proposição 2.2.5. Seja $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível. Se $u, \varphi \in H^1(U)$, então

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \longrightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u) \gamma(\varphi) dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Além disso, a função $\hat{\mu}$ independe da parametrização escolhida em Γ e, assim, é única.

Demonstração. Dado $\eta > 0$, queremos provar que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u \varphi dx - \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u) \gamma(\varphi) dS \right| < \eta.$$

Como sabe-se que o conjunto

$$C_c^\infty(\bar{U}) := \{u \in C^\infty(U); u = v|_U, \text{ com } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)\}$$

é denso em $H^1(U)$, dados $u, \varphi \in H^1(U)$ existem sequências $\{u^\nu\}, \{\varphi^\nu\}$ em $C_c^\infty(\bar{U})$ tais que

$$\|u^\nu - u\|_{H^1(U)} \rightarrow 0 \text{ e } \|\varphi^\nu - \varphi\|_{H^1(U)} \rightarrow 0 \text{ quando } \nu \rightarrow 0.$$

Note que, como as sequências $\{u^\nu\}, \{\varphi^\nu\}$ são convergentes, existem constantes $C, C_\varphi > 0$ independentes de $\varepsilon > 0$ tais que $\|u^\nu\|_{H^1(U)} \leq C, \|\varphi^\nu\|_{H^1(U)} \leq C_\varphi$.

Dessa forma, dado $\eta > 0$, existe $\nu_0 > 0$ tal que, para todo $\nu < \nu_0$, temos que

$$\|u^\nu - u\|_{H^1(U)} \leq \frac{\eta}{6K_1} \text{ e } \|\varphi^\nu - \varphi\|_{H^1(U)} \leq \frac{\eta}{6K_2}, \quad (2.6)$$

onde

$$\begin{cases} K_1 &= \max\{C^2 C_\varphi, \|\hat{\mu}\|_{L^\infty(0,1)} \|\gamma\|^2 C_\varphi\} \\ K_2 &= \max\{C^2 \|u\|_{H^1(U)}, \|\hat{\mu}\|_{L^\infty(0,1)} \|\gamma\|^2 \|u\|_{H^1(U)}\}, \end{cases}$$

com $C > 0$ sendo a constante dada no Lema das Integrais Concentradas 2.2.1 e $\|\gamma\|$ é a norma do operador contínuo traço.

Com isso, para cada $\nu < \nu_0$, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u\varphi - \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(u)\gamma(\varphi) \right| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(\varphi - \varphi^\nu) + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (u - u^\nu)\varphi^\nu \right| + \\ & \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u^\nu\varphi^\nu - \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(u^\nu)\gamma(\varphi^\nu) \right| + \\ & \quad + \left| \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(u^\nu)(\gamma(\varphi^\nu) - \gamma(u)) + \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(u)(\gamma(\varphi^\nu) - \gamma(\varphi)) \right| \\ & = I + II + III. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vejamos agora como cada parte da integral dada em (2.7) se comporta. Sendo assim, para I , usando a desigualdade de Hölder, o Lema das Integrais Concentradas 2.2.1 e as propriedades dadas em (2.6),

$$\begin{aligned} I &= \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(\varphi - \varphi^\nu) + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (u - u^\nu)\varphi^\nu \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi - \varphi^\nu|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u - u^\nu|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi^\nu|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C^2 \|u\|_{H^1(U)} \|\varphi - \varphi^\nu\|_{H^1(U)} + C^2 \|u - u^\nu\|_{H^1(U)} \|\varphi^\nu\|_{H^1(U)} \leq \frac{\eta}{6} + \frac{\eta}{6} = \frac{\eta}{3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder, as propriedades do operador traço e as limitações dadas em (2.6), segue em III que

$$\begin{aligned} III &= \left| \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(\varphi^\nu)(\gamma(u^\nu) - \gamma(u)) + \int_{\Gamma} \hat{\mu}\gamma(u)(\gamma(\varphi^\nu) - \gamma(\varphi)) \right| \\ &\leq \|\hat{\mu}\|_{L^\infty(0,1)} \left[\left(\int_{\Gamma} |\gamma(\varphi^\nu)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma} |\gamma(u^\nu) - \gamma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Gamma} |\gamma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma} |\gamma(\varphi^\nu) - \gamma(\varphi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq \|\hat{\mu}\|_{L^\infty(0,1)} [\|\gamma\|^2 \|\varphi^\nu\|_{H^1(U)} \|u^\nu - u\|_{H^1(U)} + \|\gamma\|^2 \|u\|_{H^1(U)} \|\varphi^\nu - \varphi\|_{H^1(U)}] \\ &\leq \frac{\eta}{6} + \frac{\eta}{6} = \frac{\eta}{3}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalmente, para estimar o termo dado em II , faremos primeiramente uma mudança de variáveis dada por

$$y_1 = x_1 \text{ e } y_2 = \frac{x_2 - G_\varepsilon(x_1) + \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}{\varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)},$$

obtendo, para cada $\nu < \nu_0$ e usando as propriedades de $G_\varepsilon, H_\varepsilon$ dadas,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u^\nu(x_1, x_2) \varphi^\nu(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_0^1 \int_{G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1)}^{G_\varepsilon(x_1)} u^\nu(x_1, x_2) \varphi^\nu(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 u^\nu(y_1, G_\varepsilon(y_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(y_1)(1 - y_2)) \varphi^\nu(y_1, G_\varepsilon(y_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(y_1)(1 - y_2)) H_\varepsilon(x_1) dy_2 dy_1 \\ &\rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \mu_h u^\nu(y_1, m(y_1)) \varphi^\nu(y_1, m(y_1)) dy_2 dy_1 = \int_0^1 \mu_h u^\nu(y_1, m(y_1)) \varphi^\nu(y_1, m(y_1)) dy_1 \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}} \gamma(u^\nu) \gamma(\varphi^\nu) dS = \int_{\Gamma} \hat{\mu} \gamma(u^\nu) \gamma(\varphi^\nu) dS, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente, onde a última integral segue da mudança de variáveis para transformá-la em uma integral de linha.

Assim, dado $\eta > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ vale

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u^\nu \varphi^\nu - \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u^\nu) \gamma(\varphi^\nu) dS \right| < \frac{\eta}{3}. \quad (2.10)$$

Portanto, dado $\eta > 0$, usando (2.8), (2.9) e (2.10) em (2.7) temos que, para $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u \varphi - \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u) \gamma(\varphi) \right| < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta,$$

como queríamos demonstrar.

Para provar a segunda parte do enunciado, suponha que $\hat{\mu}$ dependa da parametrização. Então existem $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$, ambos satisfazendo a Proposição 2.2.5 para $u \equiv 1$. Pela unicidade do limite segue que

$$\int_\Gamma \hat{\mu}_1 \varphi dS = \int_\Gamma \hat{\mu}_2 \varphi dS, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\bar{U}).$$

Isso implica que $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$ quase sempre em Γ , o que é uma contradição. □

Analogamente à Proposição 2.2.5, provam-se também os seguintes resultados:

Corolário 2.2.6. *Seja $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível. Se $u \in H^1(U)$, então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(x_1, x_2)^2 dx_2 dx_1 \longrightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u)^2 dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Demonstração. Basta tomar $u = \varphi$ na Proposição 2.2.5. □

Corolário 2.2.7. *Seja $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível. Se $u, \varphi \in H^1(U)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e de classe C^1 , então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u(x_1, x_2)) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(\varphi) dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Demonstração. Utilizando o mesmo cálculo da demonstração da Proposição 2.2.5, podemos assumir $u, \varphi \in C_c^\infty(\bar{U})$ e depois utilizar a densidade em $H^1(U)$. Assim, usando a mesma mudança de variáveis da Proposição 2.2.5 e o fato de f ser C^1 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) \varphi dx_2 dx_1 &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_0^1 \int_{G(x_1, \varepsilon - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1))}^{G_\varepsilon(x_1)} f(u(x_1, x_2)) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(u(y_1, G_\varepsilon(y_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(y_1)(1 - y_2))) \varphi(y_1, G_\varepsilon(y_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(y_1)(1 - y_2)) H_\varepsilon(y_1) dy_2 dy_1 \\ &\rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(\varphi) dS \end{aligned}$$

e o final da demonstração segue de modo análogo ao já feito na prova da Proposição 2.2.5. $\square$

Corolário 2.2.8. *Seja $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível. Se $u, \varphi, \psi \in H^1(U)$, então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} u(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(u) \gamma(\varphi) \gamma(\psi) dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Corolário 2.2.9. *Seja $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível. Se $u, \varphi, \psi \in H^1(U)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e de classe C^1 , então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u(x_1, x_2)) \varphi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(\varphi) \gamma(\psi) dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde γ é o operador traço dado no Corolário 1.3.2 e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Observação 2.2.10. *Um exemplo de $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ um conjunto admissível é dado no Capítulo 3, definido em (3.2), onde usaremos tais propriedades de convergência na análise do problema elíptico definido neste domínio.*

Observação 2.2.11. *Note que quando não possuímos a “convergência do domínio”, no sentido de que não existe função m tal que G_ε converge uniformemente a $m(x_1)$, cada caso deverá ser estudado independentemente, dependendo fortemente de outras propriedades específicas das funções em cada contexto. Teremos um exemplo de um domínio não admissível no Capítulo 4, definido em (4.3), associado com o problema elíptico de domínio fino.*

2.3 Perturbações da não-linearidade

Considere novamente os domínios, para $\varepsilon > 0$, dados por

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < 1, G(x_1, \varepsilon) - \varepsilon^\gamma H(x_1, \varepsilon) < x_2 < G(x_1, \varepsilon)\} \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$, $G, H : \mathbb{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções positivas.

O objetivo desta seção é apresentar uma proposição mais geral com as principais características da função que definirá a não-linearidade dos problemas elípticos abordados nos próximos capítulos.

Tal aplicação foi escolhida para representar o que chamaremos de reação concentrada. Com ela, pretendemos analisar a influência de certa função quando a estudamos apenas em uma região do domínio oscilante, numa vizinhança que se degenera quando passamos o limite em um parâmetro ε .

Sendo assim, considere os espaços de Lebesgue-Bochner generalizados como na Seção 1.2, para $1/2 < s < 1$ e $0 < \varepsilon < 1$ fixados, $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, G(x_1, \varepsilon)))$ com as normas usuais. Além

disso, considere a função

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow X'_\varepsilon \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ com derivadas limitadas até segunda ordem.

Observação 2.3.1. Consideramos $f \in C^2$ limitada e com derivada limitada até segunda ordem, porque estaremos interessados em analisar $f(u)$ onde u possui imagem uniformemente limitada, isto, satisfazendo $\|u\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, para $K > 0$ independente de ε . Logo, podemos “cortar” a não-linearidade, que será determinada por f , de modo que $|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Maiores detalhes podem ser vistos em [Arrieta et al., 2006, Observação 2.2] ou [Arrieta e Bruschi, 2007, Observação 2.2].

Dessa forma, conseguimos provar um resultado análogo ao apresentado em [Aragão et al., 2014, Lema 3.6] e [Pereira, 2016, Lema 3.1].

Proposição 2.3.2. Se G, H satisfazem a Hipótese 1, então são válidas as seguintes afirmações, onde todas as constantes mencionadas independem de $\varepsilon > 0$:

(a) existe $K > 0$ tal que

$$\sup_{u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \|F_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq K;$$

(b) F_ε é Lipschitz e, conseqüentemente, contínua, ou seja, existe $L > 0$ tal que

$$\|F_\varepsilon(u_1^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_2^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq L \|u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Demonstração. (a) Para $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\|F_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} = \sup_{\|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}=1} |\langle F_\varepsilon(u^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle|.$$

Logo, dado $v^\varepsilon \in X_\varepsilon$, segue do Lema 2.2.1 que

$$\begin{aligned} |\langle F_\varepsilon(u^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle| &\leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon)v^\varepsilon| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} C \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \|F_\varepsilon(u^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} C = K.$$

(b) De fato, dados $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, temos

$$\|F_\varepsilon(u_1^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_2^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} = \sup_{\|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}=1} |\langle F_\varepsilon(u_1^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle - \langle F_\varepsilon(u_2^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle|.$$

Usando o Lema 2.2.1 novamente, segue que

$$\begin{aligned} |\langle F_\varepsilon(u_1^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle - \langle F_\varepsilon(u_2^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle| &= |\langle F_\varepsilon(u_1^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_2^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle| \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |(f(u_1^\varepsilon) - f(u_2^\varepsilon))v^\varepsilon| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u_1^\varepsilon) - f(u_2^\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) C^2 \|u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|F_\varepsilon(u_1^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_2^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) C^2 \|u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} = L \|u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}$$

e, portanto, F_ε é Lipschitz com constante independente de ε . □

Observação 2.3.3. Note que os resultados provados na Proposição 2.3.2 também são válidas se tomarmos

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : X_\varepsilon &\rightarrow X'_\varepsilon \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : X_\varepsilon &\rightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v \end{aligned}$$

pois, pela Proposição 2.1.3, temos que $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq X_\varepsilon$ com constante de inclusão que independe de ε e o Lema 2.2.1 nos permite trabalhar com as desigualdades obtidas de forma análoga.

Acrescentando que Ω_ε satisfaz também a Hipótese 2, podemos provar mais propriedades sobre a aplicação F_ε definida em (2.11).

Proposição 2.3.4. Se G, H satisfazem a Hipótese 1 e Ω_ε satisfaz também a Hipótese 2, as seguintes propriedades adicionais são válidas, onde todas as constantes mencionadas independem de $\varepsilon > 0$.

(a) F_ε é Frechet-diferenciável, com

$$\begin{aligned} F'_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow B(H^1(\Omega_\varepsilon), X'_\varepsilon) \\ u^\varepsilon &\mapsto F'_\varepsilon(u^\varepsilon) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow X'_\varepsilon \\ w^\varepsilon &\mapsto F'_\varepsilon(u^\varepsilon)(w^\varepsilon) : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v^\varepsilon &\mapsto \langle F'_\varepsilon(u^\varepsilon)(w^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon)w^\varepsilon v^\varepsilon, \quad \forall w^\varepsilon \in X_\varepsilon; \end{aligned}$$

(b) fixado $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, existe constante $C > 0$ tal que

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon)(w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq \bar{C} \|w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon);$$

(c) existem $\vartheta \in (0, 1)$ e $M > 0$ tais que

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, H^{-1}(\Omega_\varepsilon))} \leq M \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^\vartheta, \quad \forall u^\varepsilon, v^\varepsilon \in X_\varepsilon;$$

(d) existem $\delta \in (0, 1)$ e $k > 0$ tais que

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), X'_\varepsilon)} \leq k \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\delta, \quad \forall \delta \in (0, 1), \quad \forall u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Demonstração. (a) De fato, dados $u^\varepsilon, h^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $v^\varepsilon \in X_\varepsilon$, aplicando o Teorema do Valor Médio, o Lema 2.2.1 e a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} |\langle F'_\varepsilon(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)h^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| &\leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - f(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)h^\varepsilon| |v^\varepsilon| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - f(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)h^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |(f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon))h^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $u^\varepsilon(x) \leq \xi^\varepsilon(x) \leq (u^\varepsilon + h^\varepsilon)(x)$. Note que, aplicando novamente o Teorema do Valor Médio, obtemos

$$|(f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon))h^\varepsilon|^2 \leq |f''(\eta^\varepsilon)|^2 |\xi^\varepsilon - u^\varepsilon|^2 |h^\varepsilon|^2 \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \right) |h^\varepsilon|^4 \quad (2.13)$$

para $\xi^\varepsilon(x) \leq \eta^\varepsilon(x) \leq u^\varepsilon(x)$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$.

Por outro lado,

$$|(f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon))h^\varepsilon|^2 = |f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)|^2 |h^\varepsilon|^2 \leq 2 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right)^2 |h^\varepsilon|^2. \quad (2.14)$$

Então juntando (2.13) e (2.14) segue que

$$|(f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon))h^\varepsilon|^2 \leq K \min\{|h^\varepsilon|^2, 1\} |h^\varepsilon|^2. \quad (2.15)$$

Entretanto, para todo $\delta \in [0, 1]$,

$$\min\{|h^\varepsilon|^2, 1\} = \min\{|h^\varepsilon|^2, 1\}^\delta \min\{|h^\varepsilon|^2, 1\}^{1-\delta} \leq |h^\varepsilon|^{2\delta}$$

e, então, (2.15) se torna

$$|(f'(\xi^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon))h^\varepsilon|^2 \leq K |h^\varepsilon|^{2(1+\delta)}, \quad \forall \delta \in [0, 1].$$

Segue de (2.12) que

$$|\langle F'_\varepsilon(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)h^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |h^\varepsilon|^{2(1+\delta)} \right)^{1/2} \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}.$$

Logo, se $\delta \in (0, 1)$, usando o Lema 2.2.2 obtemos

$$\|F_\varepsilon(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - F_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)h^\varepsilon\|_{X'_\varepsilon} \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |h^\varepsilon|^{2(1+\delta)} \right)^{1/2} \leq C^2 \|h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1+\delta}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{\|h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0} \frac{\|F_\varepsilon(u^\varepsilon + h^\varepsilon) - F_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)h^\varepsilon\|_{X'_\varepsilon}}{\|h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \leq \lim_{\|h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0} C^2 \|h^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\delta = 0$$

e, então, F_ε é Frechet diferenciável.

(b) Com efeito, como f, f', f'' são limitadas, se $w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $v^\varepsilon \in X_\varepsilon$, temos pelo Lema 2.2.2 que

$$\begin{aligned} |\langle F'_\varepsilon(u^\varepsilon)w_2^\varepsilon - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)w_1^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| &\leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |(f'(u^\varepsilon)w_2^\varepsilon - f'(u^\varepsilon)w_1^\varepsilon)v^\varepsilon| \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \|w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon)(w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon)\|_{X'_\varepsilon} \leq \bar{C} \|w_2^\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

provando o resultado.

(c) Se $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), X'_\varepsilon)} = \sup_{\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=1} \sup_{\|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}=1} \langle (F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon))w^\varepsilon, z^\varepsilon \rangle.$$

Logo, se $w^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $z^\varepsilon \in X_\varepsilon$, segue pelo Lema 2.2.2 e pela Desigualdade de Hölder generalizada com $3 < q < 4$ e $4 < p < 6$ (como $1/p + 1/q = 1/2$) que

$$\begin{aligned} |\langle (F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon))w^\varepsilon, z^\varepsilon \rangle| &\leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |(f'(u^\varepsilon) - f'(v^\varepsilon))w^\varepsilon z^\varepsilon| \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f'(u^\varepsilon) - f'(v^\varepsilon)|^p \right)^{1/p} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon|^q \right)^{1/q} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |z^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f'(u^\varepsilon) - f'(v^\varepsilon)|^p \right)^{1/p} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Então,

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), X'_\varepsilon)} \leq C^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f'(u^\varepsilon) - f'(v^\varepsilon)|^p \right)^{1/p}.$$

Agora, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$, temos

$$|f'(u^\varepsilon(x)) - f'(v^\varepsilon(x))| \leq 2 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right).$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f'(u^\varepsilon(x)) - f'(v^\varepsilon(x))| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \right) |u^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x)|.$$

Logo, se $\vartheta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} |f'(u^\varepsilon) - f'(v^\varepsilon)|^p &\leq K \min\{1, |u^\varepsilon - v^\varepsilon|^p\} \\ &= K \min\{1, |u^\varepsilon - v^\varepsilon|^p\}^\vartheta \min\{1, |u^\varepsilon - v^\varepsilon|^p\}^{1-\vartheta} \\ &\leq K |u^\varepsilon - v^\varepsilon|^{\vartheta p}. \end{aligned}$$

Tomando ϑ tal que $\vartheta p = 2$ (isto é, para algum $1/3 < \vartheta < 1/2$), segue que

$$\|F'_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, H^{-1}(\Omega_\varepsilon))} \leq C^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} K |u^\varepsilon - v^\varepsilon|^2 \right)^{1/p} \leq M \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\vartheta.$$

(d) Se $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\langle F_\varepsilon(u^\varepsilon + v^\varepsilon) - F_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)v^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)v^\varepsilon)w^\varepsilon.$$

Logo, utilizando a mesma técnica do item (c) obtemos, para qualquer $\delta \in (0, 1)$, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)v^\varepsilon| |w^\varepsilon| &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u^\varepsilon) - f'(u^\varepsilon)v^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^{2(1+\delta)} \right)^{1/2} \|w^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \leq k \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1+\delta} \|w^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|F_\varepsilon(u^\varepsilon + v^\varepsilon) - F_\varepsilon(u^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u^\varepsilon)v^\varepsilon\|_{X'_\varepsilon} \leq k \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^{1+\delta}, \quad \forall \delta \in (0, 1),$$

o que conclui a prova. □

Observação 2.3.5. Note que os resultados provados na Proposição 2.3.4 também são válidas se tomarmos

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : X_\varepsilon &\rightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v, \end{aligned}$$

pois, pela Proposição 2.1.3, temos que $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq X_\varepsilon$ com constante de inclusão que independe de ε e os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 nos permitem trabalhar com as desigualdades obtidas de forma análoga.

Tais propriedades serão utilizadas na segunda parte da tese, onde estudaremos o comportamento das soluções de problemas elípticos com a não-linearidade representada por F_ε .

Parte II

Aplicações

CAPÍTULO 3

Domínios com fronteira oscilante

Neste capítulo estudaremos um problema elíptico semilinear definido em um domínio oscilante de $\mathbb{R}^2$, onde há um fenômeno de reação concentrada em uma vizinhança da fronteira. Mais precisamente, considere a equação elíptica, com condições de fronteira de Neumann homogênea, dada por

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(v^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.1)$$

com $\varepsilon > 0$, $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do domínio Ω_ε , $\partial/\partial \nu^\varepsilon$ a derivada na direção do vetor ν^ε , f uma função C^2 e

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, G_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma H_\varepsilon(x_1) < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\} \end{cases} \quad (3.2)$$

onde os domínios são determinados por funções $G_\varepsilon(x_1) = G(x_1, \varepsilon)$ e $H_\varepsilon(x_1) = H(x_1, \varepsilon)$, com $G : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

As classes de funções G_ε e H_ε que consideraremos aqui são tais que:

(i) existem constantes $G_0, G_1, H_0, H_1, C \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 < G_0 \leq G_\varepsilon(x) \leq G_1, \quad 0 \leq H_0 \leq H_\varepsilon(x) \leq H_1 \quad \text{e} \quad |G'_\varepsilon(x)| \leq C, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

(ii) $G_\varepsilon(x_1) = m(x_1) + \varepsilon g(x_1/\varepsilon^\alpha)$, onde

(a) $m : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, ao menos Lipschitz, com derivada (que existe, então, pelo menos em quase todo ponto) limitada e

(b) $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, C^1 , L_g -periódica com derivada limitada e $\alpha \leq 1$;

(iii) $H_\varepsilon(x_1) = h(x_1/\varepsilon)$, h limitada e L_h -periódica.

Observação 3.0.1. Usando o [[Cioranescu e Donato, 1999](#), Teorema 2.6], temos que $g_\varepsilon(x) =$

$g(x/\varepsilon^\alpha)$ e $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon^\beta)$ satisfazem

$$g_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_g = \frac{1}{L_g} \int_0^{L_g} g(s) ds \quad e \quad h_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_h = \frac{1}{L_h} \int_0^{L_h} h(s) ds \quad em \quad L^\infty(0, 1),$$

com $\mu_g, \mu_h \in \mathbb{R}$.

Tal classe de domínios é um caso particular dos problemas estudados em [Carvalho e Piskarev \[2006\]](#), porém no caso sem concentração na fronteira. Os trabalhos de [Aragão e Bruschi \[2016\]](#) e [Aragão e Bruschi \[2015\]](#) introduziram termos concentrados, no entanto, considerando um caso particular de θ_ε do que é exposto neste capítulo.

Figura 3.1: Domínio com concentração na fronteira oscilante.

Sendo assim, as equações estão definidas em domínios que possuem fronteira oscilante Ω_ε e tendem a um domínio limite Ω , quando fazemos ε ir a zero (no sentido de $\text{dist}_H(\Omega_\varepsilon, \Omega) + \text{dist}_H(\partial\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde dist_H é a semidistância de Hausdorff dada em (1.7)). Neste capítulo consideramos uma classe de perturbações que, a grosso modo, é caracterizada pelo fato de que, localmente, em torno de cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e para todo $0 < r \leq 1$, temos $\frac{|\partial\Omega_\varepsilon \cap B(x_0, r)|}{|\partial\Omega \cap B(x_0, r)|} \leq C$, para alguma constante $C > 0$ independente de x_0, r e ε , onde $B(x_0, r)$ é a bola centrada em x_0 e com raio r e $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto. Chamamos tal perturbação de “deformação Lipschitz”, como em [Arrieta e Bruschi \[2007\]](#).

Além disso, existem termos concentrados em vizinhanças θ_ε da fronteira oscilante, explicitados pela função $\chi^{\theta_\varepsilon}$ e pelo termo $1/\varepsilon^\gamma$. Note que, neste termo, há a mesma ordem comparada à espessura da vizinhança da fronteira oscilatória onde há concentração, dada por ε^γ . Tal fator será de suma importância no estudo do comportamento das funções concentradas neste aberto.

A análise deste capítulo se baseia em estudar o comportamento das soluções da equação diferencial parcial dada em (3.1) quando fazemos ε tender a zero. Note que devemos ter cuidado pois as soluções estarão definidas em domínios diferentes, que podem variar com ε na fronteira oscilatória (por $G_\varepsilon(x)$) e na concentração da vizinhança oscilatória (de ordem ε^γ), simultaneamente.

Provaremos que, neste caso, o problema limite de (3.1) é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \hat{\mu}f(u) & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde o domínio limite é dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\},$$

com $\Gamma = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\}$ sua fronteira superior, e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Neste caso, note que o termo $\hat{\mu}$ traduz a influência da concentração através da média da função H_ε , dada por μ_h , e da geometria do espaço limite, definido pela função m . Tal termo também sugere que o domínio limite não pode ser qualquer, implicando condições mínimas de suavidade à fronteira de Ω .

3.1 Operador de extensão e E -convergência

Como vamos comparar funções definidas em domínios diferentes, Ω_ε e Ω , precisaremos de ferramentas que nos auxiliem na construção de um tipo de convergência. Um operador contínuo de extensão específico pode ser construído de modo a facilitar nossa abordagem do problema.

Proposição 3.1.1. *Seja Ω_ε uma família de domínios como definidos em (3.2). Então, para cada $1 \leq p \leq \infty$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e operador de extensão $P_{\Omega_\varepsilon} : L^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que, com a notação de $X(V) = L^p(V)$ ou $W^{1,p}(V)$ para um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, P_{Ω_ε} transforma funções de $X(\Omega_\varepsilon)$ em $X(\mathbb{R}^2)$ e*

$$\|P_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(X(\Omega_\varepsilon), X(\mathbb{R}^2))} \leq K, \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Além disso, a maneira como o operador P_{Ω_ε} é construído, temos que $P_{\Omega_\varepsilon}u \equiv 0$ fora do aberto U .

Demonstração. Ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Proposição 4.1]. □

Observação 3.1.2. *Tal construção dos operadores P_{Ω_ε} nos permite construir uma nova família de operadores $P_{\Omega_\varepsilon, V} : X(\Omega_\varepsilon) \rightarrow X(V)$ definidos por $P_{\Omega_\varepsilon, V} = R_V P_{\Omega_\varepsilon}$, onde R_V é o operador restrição ao aberto V . Com essa notação, $P_{\Omega_\varepsilon} = P_{\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^2}$. Também, $\|P_{\Omega_\varepsilon, V}\|_{\mathcal{L}(X(\Omega_\varepsilon), X(V))} \leq C$, com $C > 0$ independente de ε (ver [Arrieta e Bruschi, 2007, Observação 4.2]).*

Observação 3.1.3. *Desta forma, note que estamos trabalhando em um caso no qual $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ é um conjunto admissível, como na Definição 2.2.4.*

Agora, considere o operador

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : H^1(\Omega) &\rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon) \\ u &\mapsto E_\varepsilon u := R_\varepsilon P u, \end{aligned}$$

onde $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ é um operador contínuo de extensão (que existe pelo Teorema 1.1.21) e $R_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ o operador restrição a Ω_ε . Com esta definição, obtemos

$$\|E_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (ver [Arrieta e Bruschi \[2007\]](#)). Assim podemos definir uma noção de E -convergência como na Seção 1.4 e utilizar resultados ali mencionados. Desta forma, nesta seção dizemos que $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ E -converge para $u \in H^1(\Omega)$ se $\|u^\varepsilon - E_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde E_ε foi dado acima.

O próximo lema é geral e dele obtém-se a E -convergência de uma sequência conveniente de funções definidas em Ω_ε . Tal resultado será utilizado posteriormente.

Lema 3.1.4. *Seja uma família $\{u^\varepsilon\}$, com $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, tal que $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M$. Então*

- (i) *existe uma subsequência de u^ε , denotada por u^{ε_k} , e $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u^{\varepsilon_k} \xrightarrow{E} u_0$;*
- (ii) *existe uma subsequência de u^ε , denotada por u^{ε_n} , e $u \in H^1(U)$ tal que $P_{\Omega_{\varepsilon_n}, U} u^{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ em $H^1(U)$ e $u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} u|_\Omega$.*

Demonstração. Ver [[Arrieta e Bruschi, 2007](#), Lema 4.3]. □

3.2 Caso linear

Nesta seção estamos interessados no comportamento das soluções do problema linear com concentração na fronteira oscilante e com condição de fronteira homogênea de Neumann, dado por

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ com $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^\gamma$, para algum $C > 0$ independente de ε , com $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ dados em (3.2).

Mostraremos a convergência de soluções $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ de (3.4) para a solução do problema limite definido por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde o domínio limite é dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\},$$

com $\Gamma = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\}$ sua fronteira superior, e $f \in L^2(\Gamma)$ é tal que

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma f \gamma(\varphi) dS, \quad \forall \varphi \in C^\infty(U).$$

3.2.1 Existência de solução

A existência e unicidade de solução para o problema (3.4), $\varepsilon > 0$, segue do Teorema de Lax-Milgram ([Evans, 1998, Seção 6.2.1, Teorema 1]). De fato, defina

$$a_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \times H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \mapsto a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon v^\varepsilon \right).$$

Segue que a formulação fraca de (3.4) pode ser escrita como: encontrar $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Agora observe que, para todo $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, usando $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^\gamma$ e Lema 2.2.1, temos:

$$(i) \quad a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + uv \right) \leq \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)};$$

$$(ii) \quad |a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| = \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2;$$

(iii) define um funcional linear limitado, pois

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \leq C \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Logo, a_ε é uma forma bilinear estritamente coercitiva, para cada $\varepsilon > 0$, e usando Lax-Milgram existe uma única solução $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + uv \right) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

De forma análoga também podemos provar, usando o Teorema de Lax-Milgram, a existência de uma única solução $u \in H^1(\Omega)$ do problema limite (3.5). De fato, defina

$$a_0 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto a_0(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + uv \right).$$

Segue que a formulação fraca de (3.4) pode ser escrita como encontrar $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_0(u, v) = \int_{\Gamma} f \gamma(v) dS, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

e vale, para todo $u, v \in H^1(\Omega)$, usando as propriedades do operador traço $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$:

$$(i) \quad a_0(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + uv \right) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)};$$

$$(ii) \quad |a_0(u, u)| = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

(iii) define um funcional linear limitado, pois

$$\int_{\Gamma} f \gamma(v) dS \leq \left(\int_{\Gamma} |f|^2 dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} |\gamma(v)|^2 dS \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo, a_0 é uma forma bilinear estritamente coercitiva e usando Lax-Milgram existe uma única solução $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + uv \right) = \int_{\Gamma} f \gamma(v) dS, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

provando a afirmação.

3.2.2 Convergência de soluções

Com o objetivo de provar a convergência de uma sequência de soluções $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ de (3.4) para uma solução $u \in H^1(\Omega)$ de (3.5), estudaremos certas propriedades desses equilíbrios e analisaremos como eles se relacionam através de extensões e E -convergência.

Para cada $\varepsilon > 0$, considere o operador linear

$$\begin{aligned} A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon) \\ u^\varepsilon &\mapsto A_\varepsilon u^\varepsilon = -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{com } D(A_\varepsilon) = \left\{ u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon); \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \right\}.$$

Com isso note que o problema (3.4) pode ser escrito como

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon.$$

Sendo assim, começamos com um lema básico sobre limitação uniforme das soluções.

Lema 3.2.1. *Sejam $\phi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ uma sequência uniformemente limitada em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $w^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ dado por $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} \phi^\varepsilon$. Então $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ para algum $C > 0$ independente de ε .*

Demonstração. Como $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} \phi^\varepsilon$, segue pela definição dos operadores que, para qualquer $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} w^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \phi^\varepsilon \varphi^\varepsilon.$$

Assim, tomando $\varphi^\varepsilon = w^\varepsilon$ temos que, usando a Desigualdade de Hölder e a limitação de ϕ^ε ,

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} \phi^\varepsilon w^\varepsilon \leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \phi^\varepsilon \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} w^\varepsilon \right)^{1/2} = \|\phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Logo, $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$.

□

Se olharmos agora para integrais concentradas numa vizinhança da fronteira oscilante, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.2. *Seja $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ tal que*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \leq C,$$

para algum $C > 0$ independente de ε . Então, para qualquer sequência $\varepsilon \rightarrow 0$, existem subsequências, que também chamaremos de ε , e $f_0 \in L^2(\Gamma)$ tal que $\varepsilon \rightarrow 0$ e

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi) dS, \quad \forall \varphi \in C^\infty(U),$$

onde γ é o operador traço definido no Teorema 1.3.2.

Demonstração. Defina o operador

$$L_\varepsilon : H^1(U) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto L_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi.$$

Usando o Lema das Integrais Concentradas 2.2.1, temos

$$|L_\varepsilon(\varphi)| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi|^2 \right)^{1/2} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(U)}. \quad (3.6)$$

Logo, $L_\varepsilon \in (H^1(U))'$ e é uniformemente limitado neste espaço. Assim, pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki ([Brezis, 2010, Teorema 3.16]), tomando subsequências se necessário, existe $L_0 \in (H^1(U))'$ tal que

$$L_\varepsilon(\varphi) \rightarrow L_0(\varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(U), \quad (3.7)$$

e com limite uniforme quando φ estiver em subconjuntos compactos.

Além disso, como, pelo Corolário 2.2.6,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi|^2 \right)^{1/2} \rightarrow \left(\int_\Gamma \hat{\mu} |\gamma(\varphi)|^2 dS \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

e, olhando para (3.6), temos

$$|L_\varepsilon(\varphi)| \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

com $C > 0$ independente de ε , obtemos ao passar ao limite com $\varepsilon \rightarrow 0$ na desigualdade em (3.9), aplicando (3.7) e (3.8), que

$$|L_0(\varphi)| \leq C \left(\int_\Gamma \hat{\mu} |\gamma(\varphi)|^2 dS \right)^{1/2}, \quad \forall \varphi \in C^\infty(U).$$

Como o traço de $H^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Gamma)$, obtemos que existe $f_0 \in L^2(\Gamma)$ tal que

$$L_0(\varphi) = \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(U) dS,$$

provando o resultado. □

Observação 3.2.3. Assumindo $f \in C(\bar{U})$ e $f^\varepsilon = \chi^{\theta_\varepsilon} f$, então a Proposição 3.2.2 vale para $f_0 = f|_\Gamma$.

Sendo assim, podemos provar o seguinte resultado de convergência de soluções para o problema linear com concentração na fronteira oscilante.

Teorema 3.2.4. *Seja $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ solução fraca de (3.4), ou seja, de*

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

supondo que exista $C > 0$, independente de ε , tal que $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^\gamma$. Então:

(i) *se existe subsequência, também chamada ε , com $\varepsilon \rightarrow 0$ e tal que*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi) dS, \quad \forall \varphi \in C^\infty(U),$$

para algum $f_0 \in L^2(\Gamma)$, então existe $u \in H^1(U)$ tal que $P_{\Omega_\varepsilon, U} u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $H^1(U)$, onde $P_{\Omega_\varepsilon, U} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), H^1(U))$ é o operador extensão construído na Proposição 3.1.1, e $u_0 = u|_\Omega$ satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi + \int_\Omega u_0 \varphi = \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi) dS, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

com $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ operador traço dado no Corolário 1.3.2.

(ii) *para toda sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ existem subsequência (digamos também ε) e $f_0 \in L^2(\Gamma)$ tais que $\varepsilon \rightarrow 0$ e*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(U).$$

Em particular, para esta subsequência vale o item anterior.

Demonstração. Se definirmos $\phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon$ temos, pelo Lema 3.2.1, que a solução $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ do problema dado no enunciado, $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} \phi^\varepsilon$, é tal que existe $C > 0$ satisfazendo $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$.

Desta forma, pelo Lema 3.1.4, existe uma subsequência de u^ε , denotada novamente por u^ε , e $u \in H^1(U)$ tal que $P_{\Omega_\varepsilon, U} u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $H^1(U)$ e $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u|_\Omega$. Com isso, chamando $u_0 = u|_\Omega$, temos que, como $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$,

$$(u^\varepsilon, \varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow (u_0, \varphi)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi + \int_\Omega u_0 \varphi,$$

para todo $\varphi \in H^1(U)$. Por outro lado, como $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} \phi^\varepsilon$, então

$$(u^\varepsilon, \varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} \phi^\varepsilon \varphi = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma f_0 \gamma(\varphi) dS,$$

para todo $\varphi \in H^1(U)$ pela Proposição 3.2.2.

Logo, pela unicidade do limite,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla \varphi + \int_\Omega u_0 \varphi = \int_\Gamma f_0 \gamma(v) dS$$

e, assim, $u \in H^1(U)$ satisfaz o item (i). Para o item (ii) basta usar a Proposição 3.2.2 e aplicar o item (i). $\square$

3.3 Caso semilinear

Nesta subseção voltamos ao nosso objetivo principal: a análise do comportamento das soluções quando ε tende a zero no problema semilinear (3.1), dado por

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(v^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do domínio Ω_ε , $\partial/\partial \nu^\varepsilon$ a derivada na direção do vetor ν^ε e $\chi^{\theta_\varepsilon}$ a função característica do conjunto θ_ε . Neste caso, considere f de classe C^2 limitada e com derivadas limitadas até a segunda ordem.

Observação 3.3.1. *Tal restrição em f é justificada da mesma forma que na Observação 2.3.1.*

Mostraremos a convergência de soluções de (3.1) para uma solução do problema limite, definido em (3.3) e dado por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \hat{\mu} f(u) & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

onde o domínio limite é dado por

$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < m(x_1)\},$$

com $\Gamma = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, x_2 = m(x_1)\}$ sua fronteira superior, e

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Assim, estudaremos nesta seção existência e semicontinuidade das soluções neste caso, com concentração na fronteira oscilante.

3.3.1 Existência de solução

As soluções de (3.1) e (3.3) serão obtidas como pontos fixos de aplicações não-lineares apropriadas. Para tanto, vamos escrever tais problemas na forma abstrata.

Primeiramente, para o problema (3.1), considere novamente o operador linear

$$\begin{aligned} A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) &\subset L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon) \\ u^\varepsilon &\mapsto A_\varepsilon u^\varepsilon = -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon, \end{aligned}$$

com $D(A_\varepsilon) = \left\{ u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon); \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \right\}$.

Denote $Z_\varepsilon^0 = L^2(\Omega_\varepsilon)$, $Z_\varepsilon^1 = D(A_\varepsilon)$ e considere a escala de espaços de Hilbert construídos por interpolação complexa entre Z_ε^0 e Z_ε^1 (ver Definição em (1.1) no Capítulo 1). No nosso contexto, tais espaços coincidem isometricamente com os espaços de potência fracionária do operador A_ε (ver Teorema 1.1.8). Tal escala pode ser estendida para potências negativas tomando $Z_\varepsilon^{-\alpha} = (Z_\varepsilon^\alpha)'$, para $\alpha > 0$. Note que $Z_\varepsilon^{1/2} = H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $Z_\varepsilon^{-1/2} = (H^1(\Omega_\varepsilon))'$. Sendo assim, se considerarmos as

realizações de A_ε nesta escala, obtemos que $A_{\varepsilon,-1/2} \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon^{1/2}, Z_\varepsilon^{-1/2})$ é dado por

$$\langle A_{\varepsilon,-1/2} u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon + u^\varepsilon \varphi^\varepsilon, \quad \forall \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Com um certo abuso de notação, iremos identificar todas as diferentes realizações deste operador e as escreveremos como apenas A_ε .

Desta forma, o problema (3.1) pode ser reescrito na forma abstrata como

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = F_\varepsilon(u^\varepsilon), \quad (3.10)$$

onde a não-linearidade F_ε é dada por

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow X'_\varepsilon \\ u &\mapsto F_\varepsilon(u) : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_\varepsilon(u), v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u)v, \end{aligned}$$

onde $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$ para $1/2 < s < 1$, $X'_\varepsilon = L^2(0, 1; H^{-s}(0, G_\varepsilon(x_1)))$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ com derivadas limitadas até segunda ordem.

Sendo assim, $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é uma solução de (3.10) se, e somente se, $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon)$, ou seja, $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é ponto fixo da aplicação $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$. Com isso, a existência de solução neste caso segue do Teorema do Ponto Fixo de Schaefer [Evans, 1998, Seção 9.2.2, Teorema 4].

De fato, como provaremos na Proposição 3.3.6, o operador $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon$ é compacto. Logo, basta provar que o conjunto

$$O_\varepsilon = \{\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon); \varphi^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(\varphi^\varepsilon)\}$$

é limitado para concluir a existência. Porém, para qualquer $\varphi^\varepsilon \in O_\varepsilon$ temos, usando a Desigualdade de Hölder e o Lema 2.2.1,

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(\varphi^\varepsilon) \varphi^\varepsilon| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \leq C \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

e, portanto, $\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, concluindo a prova.

Da mesma forma podemos analisar o problema limite dado em (3.3) de modo abstrato definindo o operador linear

$$\begin{aligned} A_0 : D(A_0) &\subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \\ u &\mapsto A_0 u = -\Delta u + u, \end{aligned}$$

com $D(A_0) = \left\{ u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \right\}$. Com isso pode-se construir os espaços de potências fracionárias e considerar a não-linearidade dada por

$$\begin{aligned} F_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow L^2(0, 1; H^{-s}(0, m(x_1))) \\ u &\mapsto F_0(u) : L^2(0, 1; H^s(0, m(x_1))) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_0(u), v \rangle = \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(v) dS, \end{aligned}$$

onde $1/2 < s < 1$.

Assim, o problema (3.3) pode ser reescrito na forma abstrata como

$$A_0 u = F_0(u) \quad (3.11)$$

e, nesta notação, $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução de (3.11) se, e somente se, $u = A_0^{-1} F_0(u)$, ou seja, $u \in H^1(\Omega)$ é ponto fixo da aplicação $A_0^{-1} F_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$. Novamente, a existência de solução segue pelo Teorema do Ponto Fixo de Schaefer análogo ao feito no caso anterior.

3.3.2 Semicontinuidade de soluções

Novamente com o objetivo de provar um tipo de convergência de uma sequência de soluções $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ de (3.10) para uma solução $u \in H^1(\Omega)$ de (3.11), estudaremos certas propriedades desses equilíbrios, utilizando o que foi feito na seção anterior e analisaremos como eles se relacionam através de extensões e E -convergência.

Um resultado importante no que diz respeito a análise do comportamento das soluções é provar a limitação uniforme das mesmas na norma de $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Sendo assim, provaremos:

Proposição 3.3.2. *Considere $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ solução de (3.10). Então existe $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C$.*

Demonstração. Se $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de (3.10), então para todo $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ vale

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi^\varepsilon.$$

Assim, dado $k > 0$, tomando $\varphi^\varepsilon = (u^\varepsilon - k)^+ \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, onde

$$(u^\varepsilon - k)^+(x_1, x_2) = \begin{cases} u^\varepsilon(x_1, x_2) - k, & \text{se } (x_1, x_2) \in A_{\varepsilon, k} := \{(x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon; u^\varepsilon(x_1, x_2) > k\}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial (u^\varepsilon - k)^+}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial (u^\varepsilon - k)^+}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon (u^\varepsilon - k)^+ = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) (u^\varepsilon - k)^+$$

Isto implica que, usando a Desigualdade de Hölder e a definição de $A_{\varepsilon, k}$, somando e subtraindo termos adequados,

$$\begin{aligned} \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon \cap A_{\varepsilon, k}} f(u^\varepsilon) (u^\varepsilon - k) - \int_{\Omega_\varepsilon \cap A_{\varepsilon, k}} k (u^\varepsilon - k) \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon \cap A_{\varepsilon, k}} |f(u^\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon \cap A_{\varepsilon, k}} |u^\varepsilon - k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\frac{|\theta_\varepsilon| |A_{\varepsilon, k}|}{\varepsilon^\gamma} \right) \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

Como o conjunto θ_ε tem ordem ε^γ , obtemos a seguinte estimativa

$$\|(u^\varepsilon - k)^+\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 |A_{\varepsilon, k}|^{1/2} \quad (3.12)$$

onde $C > 0$ independe de $\varepsilon > 0$.

Por outro lado, note que, para p, q conjugados,

$$\begin{aligned} \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{L^1(A_{\varepsilon,k})} &= \int_{A_{\varepsilon,k}} (u^\varepsilon - k) \leq \left(\int_{A_{\varepsilon,k}} 1^p \right)^{1/p} \left(\int_{A_{\varepsilon,k}} (u^\varepsilon - k)^q \right)^{1/q} \\ &\leq |A_{\varepsilon,k}|^{1/p} \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pela Proposição 2.1.7(c) temos que $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq L^q(\Omega_\varepsilon)$ para $2 \leq q \leq 4$, com constante que independe de ε . Assim, tomando $2 < q < 4$ e $1 < p < 2$ seu conjugado, obtemos, utilizando (3.12) em (3.13) que

$$\begin{aligned} \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{L^1(A_{\varepsilon,k})} &\leq C_2 |A_{\varepsilon,k}|^{1/p} \|(u^\varepsilon - k)^+\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_2 |A_{\varepsilon,k}|^{1/p} C_1 |A_{\varepsilon,k}|^{1/2} = K |A_{\varepsilon,k}|^{1/2+1/p} = K |A_{\varepsilon,k}|^{1+\delta} \end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$, pois $1/2 < 1/p < 1$.

Logo, aplicando o [Ladyzhenskaya e Ural'tseva, 1968, Lema 5.1] obtemos que $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitada por constante que independe do domínio, provando a proposição. $\square$

Além disso, prova-se também que:

Lema 3.3.3. *Sejam $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ uma sequência uniformemente limitada e $w^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ dado por $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Então $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ para algum $C > 0$ independente de ε .*

Demonstração. Como $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon)$, segue pela definição dos operadores que, para qualquer $\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} w^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi^\varepsilon.$$

Assim, tomando $\varphi^\varepsilon = w^\varepsilon$ temos que, usando a Desigualdade de Hölder, a limitação de f e o Lema 2.2.1,

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Logo, $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$. $\square$

Agora iremos analisar o comportamento da parte não-linear do problema estudado.

Proposição 3.3.4. *Sejam $w^\varepsilon, u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $w, u \in H^1(U)$ tais que $P_{\Omega_\varepsilon, U}(u^\varepsilon) \rightharpoonup u$ e $P_{\Omega_\varepsilon, U}(w^\varepsilon) \rightharpoonup w$ em $H^1(U)$. Então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) w^\varepsilon \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(w) dS,$$

onde

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Demonstração. Usando a Desigualdade de Hölder e o Lema 2.2.1, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) w^\varepsilon - \int_{\Gamma} \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(w) dS \right| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u^\varepsilon) - f(u)) w^\varepsilon \right| + \\
& \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) (w^\varepsilon - w) \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) w - \int_{\Gamma} \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(w) dS \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon) - f(u)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon - w|^2 \right)^{1/2} + \\
& \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) w - \int_{\Gamma} \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(w) dS \right| \\
& \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) \|w^\varepsilon - w\|_{X_\varepsilon} + \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \\
& \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) w - \int_{\Gamma} \hat{\mu} \gamma(f(u)) \gamma(w) dS \right| = I + II + III,
\end{aligned}$$

onde $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, G_\varepsilon(x_1)))$ para $1/2 < s < 1$.

Note que podemos escrever $U \subset U_1 \times U_2$, com $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ abertos, $(0, 1) \subset U_1$ e $(0, G_\varepsilon(x_1)) \subset U_2$ para todo $x_1 \in (0, 1)$ e para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, e, assim, $H^1(U) \subset H^1(U_1 \times U_2) \subset L^2(U_1; H^s(U_2)) =: X_U$, onde a última inclusão é compacta pela Proposição 2.1.4. Logo,

$$I = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} \|w^\varepsilon - w\|_{X_\varepsilon} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) H_1^{1/2} \|P_{\Omega_\varepsilon, U} w^\varepsilon - w\|_{X_U} \rightarrow 0$$

e

$$II = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \|P_{\Omega_\varepsilon, U} w^\varepsilon - w\|_{X_U} \|P_{\Omega_\varepsilon, U} w^\varepsilon\|_{H^1(U)} \rightarrow 0.$$

Finalmente, $III \rightarrow 0$ pelo Corolário 2.2.7, e concluímos a demonstração da Proposição. $\square$

Sendo assim, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, denote por

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, R} = \{u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon); u^\varepsilon \text{ é solução de (3.10) e } \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq R\}$$

o conjunto das soluções de (3.10) uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e

$$\mathcal{E}_{0, R} = \{u \in H^1(\Omega); u \text{ é solução de (3.11) e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R\}$$

o conjunto das soluções de (3.11) uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega)$.

Como vamos comparar funções definidas em domínios diferentes Ω_ε e Ω , novamente consideramos o operador

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon : H^1(\Omega) &\rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon) \\
u &\mapsto E_\varepsilon u := R_\varepsilon P u
\end{aligned}$$

definido na Seção 3.1.

O principal objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

Teorema 3.3.5. *São válidos:*

(i) Para qualquer sequência $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon,R}$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, existe subsequência (também denominada u_ε) e $u_0 \in \mathcal{E}_{0,R}$ tais que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$.

(ii) Para qualquer ponto de equilíbrio hiperbólico $u_0 \in \mathcal{E}_{0,R}$, existe sequência $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon,R}$ tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Além disso, existem $\eta > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que existe um único $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon,R}$ que satisfaz

$$\|u_\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \eta, \text{ para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Semicontinuidade superior e inferior

Agora provaremos o resultado que implicará na semicontinuidade das soluções de (3.10) utilizando os resultados provados na Seção 1.4.

Proposição 3.3.6. Com a notação de (3.10) e (3.11) temos $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1}F_0$.

Demonstração. Para provar esta convergência compacta, vamos verificar os itens separadamente.

(a) $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ é um operador compacto, para todo $\varepsilon > 0$.

De fato, como $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq X_\varepsilon$ com inclusão compacta pela Proposição 2.1.4 para cada $\varepsilon > 0$ fixado, então $X'_\varepsilon \subseteq (H^1(\Omega_\varepsilon))'$ compactamente. Com isso, temos

$$H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{F_\varepsilon} X'_\varepsilon \xrightarrow{i} H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{A_\varepsilon^{-1}} H^1(\Omega_\varepsilon),$$

onde F_ε é Lipschitz pela Proposição 2.3.2(b), provando a compacidade de $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon$.

(b) Se $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, então $\{A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon)\}$ é E -relativamente compacto.

Seja $\{u^\varepsilon\}$ tal que $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$. Pelo Lema 3.1.4 obtemos uma subsequência, que também chamaremos de u^ε , e $u \in H^1(U)$ com $P_{\Omega_\varepsilon,U}u^\varepsilon \rightharpoonup u$ em $H^1(U)$ e $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u|_\Omega$. Considere agora $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Pelo Lema 3.3.3, $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ e, portanto, novamente pelo Lema 3.1.4, existe subsequência, que também denotaremos por w^ε , e função $w \in H^1(U)$ tal que $P_{\Omega_\varepsilon,U}w^\varepsilon \rightharpoonup w$ em $H^1(U)$ e $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w|_\Omega$. Denote $u_0 = u|_\Omega$ e $w_0 = w|_\Omega$.

Mostremos agora que $w_0 = A_0^{-1}F_0(u_0)$. Para tanto, note que $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w_0$ implica que, para qualquer $v \in H^1(U)$,

$$(w^\varepsilon, v)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow (w_0, v)_{H^1(\Omega)}.$$

Por outro lado, pela definição do problema e usando a Proposição 3.3.4, temos

$$(w^\varepsilon, v)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon)v \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu}\gamma(f(u_0))\gamma(v)dS.$$

Pela unicidade do limite obtemos

$$\langle A_0 w_0, v \rangle = (w_0, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Gamma \hat{\mu}\gamma(f(u_0))\gamma(v)dS = \langle F_0(u_0), v \rangle, \quad \forall v \in H^1(U),$$

e, portanto, $w_0 = A_0^{-1}F_0(u_0)$. Provemos, finalmente, que $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow \|w_0\|_{H^1(\Omega)}$, implicando

que $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w_0$ pela Proposição 1.4.5. Com efeito, usando a Proposição 3.3.4 novamente,

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &= (w^\varepsilon, w^\varepsilon)_{H^1(\Omega)} = (A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon), w^\varepsilon)_{H^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) w^\varepsilon \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f(u_0)) \gamma(w_0) dS \\ &= (A_0^{-1} F_0(u_0), w_0)_{H^1(\Omega)} = (w_0, w_0)_{H^1(\Omega)} = \|w_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(c) Se $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$ então $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon) \xrightarrow{E} A_0^{-1} F_0(u)$.

De fato, se assumimos que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$ então $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, para algum $C > 0$ independente de ε . Em particular, para qualquer subsequência de u^ε podemos encontrar outra subsequência, denotando todas por u^ε , tal que, usando o mesmo argumento do item anterior, temos $P_{\Omega_\varepsilon, U}(u^\varepsilon) \rightharpoonup u$, com $u_0 = u|_\Omega$ e, para essa subsequência, $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon) \xrightarrow{E} A_0^{-1} F_0(u_0)$. Como isto foi provado para qualquer subsequência, obtemos a E -convergência de toda a família, isto é, $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon) \xrightarrow{E} A_0^{-1} F_0(u_0)$.

□

Provado isso, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.7. *Para qualquer família de soluções $\{u^\varepsilon\}$ em $\mathcal{E}_{\varepsilon, R}$ existe u solução em $\mathcal{E}_{0, R}$ e uma subsequência de u^ε , também chamada de u^ε , tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.4.10. □

Também obtemos uma espécie de recíproca do teorema anterior quando a solução limite é hiperbólica.

Teorema 3.3.8. *Se u solução em $\mathcal{E}_{0, R}$ é hiperbólica, então existe sequência $\{u^\varepsilon\}$ de soluções em $\mathcal{E}_{\varepsilon, R}$ tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.4.14. □

Observação 3.3.9. *No caso em que todos os pontos de equilíbrio da equação limite (3.11) são hiperbólicos, temos que todos são isolados e existe apenas um número finito deles (ver [Arrieta et al., 2006, Corolário 5.4 e Proposição 5.5]).*

Assim, pelos resultados anteriores, obtemos a família de soluções $\{u_\varepsilon^*\}_{\varepsilon \geq 0}$ de (3.10) é semi-contínua superiormente e inferiormente em $\varepsilon = 0$ usando o Lema 1.4.3.

Unicidade na semicontinuidade inferior

Vejamos agora a unicidade, próximo um equilíbrio hiperbólico da equação limite, das soluções do problema para um mesmo valor de ε , provando o Teorema 3.3.5 de forma completa.

Já foi estudado na Seção 2.3, mais especificamente nas Proposições 2.3.2, 2.3.4 e Observação 2.3.5, que, dentre outras propriedades, a função F_ε é Frechet-diferenciável, com

$$\begin{aligned} F'_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow \mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), X'_\varepsilon) \\ u &\mapsto F'_\varepsilon(u) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow X'_\varepsilon \\ w &\mapsto F'_\varepsilon(u)w : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F'_\varepsilon(u)w, v \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u) w v. \end{aligned}$$

Com isso em mente, podemos provar mais resultados de convergência.

Proposição 3.3.10. *Sejam $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u, v \in H^1(U)$ tais que $P_{\Omega_\varepsilon, U}(u^\varepsilon) \rightharpoonup u$ e $P_{\Omega_\varepsilon, U}(v^\varepsilon) \rightharpoonup v$ em $H^1(U)$. Então, para todo $\varphi \in H^1(U)$,*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f'(u)) \gamma(v) \gamma(\varphi) dS$$

onde

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon \varphi &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) (v^\varepsilon - v) \varphi + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f'(u^\varepsilon) - f'(u)) v \varphi + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u) v \varphi = I + II + III. \end{aligned}$$

Analisando cada termo da integral acima separadamente obtemos, usando o Lema 2.2.1 lembrando da definição do espaço X_U usado na demonstração da Proposição 3.3.4,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) (v^\varepsilon - v) \varphi \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon - v|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v^\varepsilon - v\|_{X_\varepsilon} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|P_{\Omega_\varepsilon, U} v^\varepsilon - v\|_{X_U} \|\varphi\|_{H^1(U)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como f' é uma função limitada e C^1 , aplicando o Corolário 2.2.9 obtemos

$$III = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u) v \varphi \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f'(u)) \gamma(\varphi) \gamma(\psi) dS,$$

onde

$$\hat{\mu}(x_1) = \frac{\mu_h}{\sqrt{1 + m'(x_1)^2}}.$$

Finalmente, note que podemos escrever II como

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : H^1(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f'(u^\varepsilon) - f'(u)) v \varphi. \end{aligned}$$

Desta forma, Φ é um operador linear limitado em $H^1(U)$. Com efeito, usando o Lema 2.2.1,

$$|\Phi_\varepsilon(\varphi)| \leq 2 \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi|^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{H^1(U)} \|\varphi\|_{H^1(U)}.$$

Além disso, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\bar{U})$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\varphi) &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f'(u^\varepsilon) - f'(u)) v \varphi \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| \right) \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon - u|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v|^2 \right)^{1/2} \left(\sup_{x \in \bar{U}} |\varphi(x)| \right) \\ &\leq K \|P_{\Omega_\varepsilon, U} u^\varepsilon - u\|_{X_U} \|v\|_{H^1(U)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e, portanto, por densidade, $II = \Phi_\varepsilon(\varphi) \rightarrow 0$, para todo $\varphi \in H^1(U)$, concluindo o resultado. $\square$

Agora podemos provar um resultado importante sobre a convergência compacta dos operadores $A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u_\varepsilon)$, se $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de (3.10).

Proposição 3.3.11. *Se $\{u^\varepsilon\}$ sequência de soluções de (3.10), $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, e $u_0 \in H^1(\Omega)$ solução de (3.11) temos então que $A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u^\varepsilon) \xrightarrow{CC} A_0^{-1}F'_0(u_0)$ sempre que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$.*

Demonstração. Provaremos novamente por etapas, como na Proposição 3.3.6.

(i) $A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u^\varepsilon) : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ é compacto, para $\varepsilon > 0$.

Novamente, como $H^1(\Omega_\varepsilon) \subseteq X_\varepsilon$ com imersão compacta pela Proposição 2.1.4, então $X'_\varepsilon \subseteq (H^1(\Omega_\varepsilon))'$ compactamente. Com isso, fixado u^ε solução de (3.10), temos

$$H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{F'_\varepsilon(u^\varepsilon)} X'_\varepsilon \xrightarrow{i} (H^1(\Omega_\varepsilon))' \xrightarrow{A_\varepsilon^{-1}} H^1(\Omega_\varepsilon),$$

onde $F'_\varepsilon(u^\varepsilon)$ é contínua pela Proposição 2.3.2(b), provando a compacidade de $A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u^\varepsilon)$.

(ii) $\{A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u^\varepsilon)v^\varepsilon\}$ é uma família E -relativamente compacta sempre que $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$.

Seja $\{v^\varepsilon\}$ família em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$ e defina $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}F'_\varepsilon(u^\varepsilon)v^\varepsilon$. Isto significa que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ vale

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} w^\varepsilon \varphi = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon \varphi$$

Ao fazermos $\varphi = w^\varepsilon$ segue, usando a Desigualdade de Hölder, a limitação de f' e o Lema 2.2.1, que

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon w^\varepsilon \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) C^2 \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

e, assim, $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, para algum $K > 0$ independente de ε . Logo, pelo Lema 3.1.4 obtemos subsequências, que também denotaremos por v^ε e w^ε , e elementos $v, w \in H^1(U)$ tais que $P_{\Omega_\varepsilon, U}(v^\varepsilon) \rightarrow v$ e $P_{\Omega_\varepsilon, U}(w^\varepsilon) \rightarrow w$ ambas em $H^1(U)$, com $v^\varepsilon \xrightarrow{E} v|_\Omega$ e $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w|_\Omega$. Denote $v_0 = v|_\Omega$ e $w_0 = w|_\Omega$.

Provemos agora que $w_0 = A_0^{-1}F'_0(u_0)v_0$. Para tanto, primeiramente observe que, se $\varphi \in H^1(U)$, então

$$(w^\varepsilon, \varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon \varphi \quad (3.14)$$

Note que, por um lado, usando a Proposição 3.3.10,

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f'(u^\varepsilon) v^\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Gamma \hat{\mu} \gamma(f'(u_0)) \gamma(v_0) \gamma(\varphi) dS = (A_0^{-1}F'_0(u_0)v_0, \varphi)_{H^1(\Omega)}$$

e, por outro, como $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w_0$,

$$(w^\varepsilon, \varphi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow (w_0, \varphi)_{H^1(\Omega)}$$

Logo, $w_0 = A_0^{-1}F'_0(u_0)v_0$. Finalmente, mostremos que $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w_0$. Pela Proposição 1.4.5, basta mostrar que $\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow \|w_0\|_{H^1(\Omega)}$. Porém, se tomarmos $\varphi = w^\varepsilon$ em (3.14) obtemos, de forma análoga ao feito na demonstração da Proposição 3.3.6, a convergência das normas.

(iii) $A_\varepsilon^{-1} F'_\varepsilon(u^\varepsilon) v^\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1} F'_0(u_0) v_0$ se $v^\varepsilon \xrightarrow{E} v_0$.

Para provar que $w^\varepsilon \xrightarrow{E} w_0$ para a sequência toda usamos a prova análoga à demonstração deste passo na Proposição 3.3.6.

□

Finalmente, provemos mais uma propriedade da norma da linearização em torno de uma solução de (3.10) para depois podermos concluir o objetivo principal desta seção.

Lema 3.3.12. *Dado $u_*^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ solução de (3.10), existe $K > 0$ tal que, para todo $v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ com $\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$, vale*

$$\|A_\varepsilon^{-1}(F_\varepsilon(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1+\alpha}, \text{ para algum } \alpha \in (0, 1).$$

Demonstração. Seja $w^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}(F_\varepsilon(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - F_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - F'_\varepsilon(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon)$. Isto implica que w^ε é tal que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} w^\varepsilon \varphi = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon) \varphi$$

Tomando $\varphi = w^\varepsilon$, segue que, para fixado $p < 2$ de modo que seu conjugado q obedeça $2 < q < 4$, temos pelo Lema 2.2.2,

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon) w^\varepsilon \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon|^p \right)^{1/p} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |w^\varepsilon|^q \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u_*^\varepsilon + v^\varepsilon) - f(u_*^\varepsilon) - f'(u_*^\varepsilon)v^\varepsilon|^p \right)^{1/p} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

Analogamente à prova da Proposição 2.3.4(d) obtemos, para $\alpha \in (0, 1)$ tal que $p(1 + \alpha) = 2$, ou seja, $2/p = (1 + \alpha)$,

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v|^2 \right)^{\frac{1}{2} \frac{2}{p}} \leq C^2 \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2/p} = C^2 \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1+\alpha} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

e, portanto,

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{1+\alpha}$$

provando o resultado. □

Com essas ferramentas podemos provar a unicidade de soluções no teorema principal.

Proposição 3.3.13. *Se u_0^* é um equilíbrio hiperbólico de (3.11), então existem $\delta > 0$ e ε_0 tal que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ há uma, e apenas uma, u_*^ε solução de (3.1) tal que $\|u_*^\varepsilon - E_\varepsilon u_0^*\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \eta$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.4.16. □

Assim, unificando os resultados, obtemos:

Demonstração do Teorema 3.3.5. Para o item (i) temos o Teorema 3.3.7 e para o item (ii) aplica-se o Teorema 3.3.8 e a Proposição 3.3.13. □

CAPÍTULO 4

Domínio fino com fronteira oscilante

Nesta seção estamos interessados em estudar o comportamento das soluções de equações diferenciais parciais semilineares elípticas definidas em domínios finos, onde parte de sua fronteira apresenta comportamento oscilatório e há um fenômeno de reação concentrada nesta vizinhança. Dessa forma, iremos estudar problemas, com condições de fronteira de Neumann homogênea, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + v^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{o_\varepsilon} f(v^\varepsilon) & \text{em } R_\varepsilon, \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \nu^\varepsilon} = 0 & \text{em } \partial R_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.1)$$

com $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\nu^\varepsilon = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do domínio R^ε , $\partial/\partial \nu^\varepsilon$ a derivada na direção do vetor ν^ε , χ^{o_ε} a função característica do conjunto o_ε e

$$\begin{cases} R_\varepsilon = \{(x, y); 0 < x < 1, 0 < y < \varepsilon g(x/\varepsilon)\} \\ o_\varepsilon = \{(x, y); 0 < x < 1, \varepsilon(g(x/\varepsilon) - \varepsilon^\gamma h(x/\varepsilon^\beta)) < y < \varepsilon g(x/\varepsilon)\} \end{cases}$$

onde assumimos:

- (i) $\beta > 0$;
- (ii) a não-linearidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^2 ;
- (iii) as funções $g, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, que definem o domínio são funções suaves, positivas, L_g e L_h -periódicas, respectivamente, e tais que existem $g_0, g_1, h_0, h_1 \in \mathbb{R}$ com

$$0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1 < \infty, \quad 0 \leq h_0 \leq h(x) \leq h_1 < \infty, \quad \forall x \in (0, 1);$$

- (iv) g possui derivadas limitadas.

Observação 4.0.1. Usando o [Cioranescu e Donato, 1999, Teorema 2.6], temos que $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$ e $h_\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon^\beta)$ satisfazem

$$g_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_g = \frac{1}{L_g} \int_0^{L_g} g(s) ds \quad e \quad h_\varepsilon \xrightarrow{*} \mu_h = \frac{1}{L_h} \int_0^{L_h} h(s) ds \quad \text{em } L^\infty(0, 1),$$

com $\mu_g, \mu_h \in \mathbb{R}$.

Tal domínio é ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1: Domínio fino com concentração na fronteira oscilante.

Sendo assim, as equações estão definidas em domínios finos, com termos concentrados em vizinhanças o_ε da fronteira oscilante, explicitados pela função χ^{o_ε} e pelo termo $1/\varepsilon^\gamma$. Note que, neste termo, há a mesma ordem comparada à espessura da vizinhança da fronteira oscilatória onde há concentração, dada por ε^γ . Tal fator será de suma importância no estudo do comportamento das funções concentradas neste aberto.

Observe que nos referimos a problemas de domínios finos quando assumimos que os abertos onde as EDPs estão definidas se degeneram em subconjuntos de espaços Euclidianos de dimensão menor que o original. No nosso caso, os abertos de $\mathbb{R}^2$ se degeneram no intervalo $(0, 1)$.

A análise deste capítulo se baseia em estudar o comportamento das soluções da equação diferencial parcial dada em (4.1) quando fazemos ε tender a zero. Note que isto não é algo que pode ser feito diretamente posto que as soluções estarão definidas em domínios diferentes, que variam diretamente com ε tanto na espessura do domínio fino (de ordem ε), como na amplitude da função na fronteira oscilatória (variando como x/ε) e na concentração da vizinhança oscilatória (de ordem ε^γ), simultaneamente.

Dessa forma, nosso primeiro passo foi escolher qual seria o melhor método de encarar o problema, para que tal análise seja razoável e proveitosa do ponto de vista matemático. A estratégia escolhida foi fazer uma mudança de variáveis, transformando o domínio fino inicial em outro que não seja fino, mas ainda com propriedades que dependem fortemente de ε . Feito isso, nos baseamos em resultados já provados da literatura para provar nosso resultado de convergência.

Para tanto, reescalamos o domínio do nosso problema inicial de modo que ele não seja mais fino; porém, ele ainda terá fronteira altamente oscilante. Isto é obtido através da transformação clássica usada para esta abordagem em domínios finos, que mantém o eixo x e multiplica os valores de y por um fator $1/\varepsilon$, ou seja, tomando o isomorfismo $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $(x_1, x_2) = \psi_\varepsilon(x, y) := (x, y/\varepsilon)$, que nos leva ao problema equivalente:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.2)$$

com $N^\varepsilon = (N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon)$ vetor normal unitário apontando para fora na fronteira do novo domínio Ω_ε , $\chi^{\theta_\varepsilon}$ a função característica do conjunto θ_ε e

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1) < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \end{cases} \quad (4.3)$$

Tal domínio reescalado é ilustrado na Figura 4.2.

Note que os problemas (4.1) e (4.2) são equivalentes, no sentido de que uma solução $v^\varepsilon \in H^2(R_\varepsilon)$ de (4.1) se, e somente se, $u^\varepsilon = v^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon^{-1} \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ é solução de (4.2).

Figura 4.2: Domínio modificado, ainda dependendo fortemente de ε , com concentração na fronteira oscilante.

De fato, $v^\varepsilon \in H^2(R_\varepsilon)$ é solução de (4.1), temos, para todo $\phi^\varepsilon \in H^1(R_\varepsilon)$, a seguinte igualdade:

$$\int_{R_\varepsilon} \nabla v^\varepsilon \nabla \phi^\varepsilon + \int_{R_\varepsilon} v^\varepsilon \phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{o_\varepsilon} f(v^\varepsilon) \phi^\varepsilon. \quad (4.4)$$

Observe que definindo, como anteriormente feito, para cada $\varepsilon > 0$ fixado a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \psi_\varepsilon(x, y) := (x, y/\varepsilon) = (x_1, x_2), \end{aligned}$$

segue que ψ_ε é um difeomorfismo linear (usando o Teorema da Aplicação Aberta), com $\psi_\varepsilon(R_\varepsilon) = \Omega_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(o_\varepsilon) = \theta_\varepsilon$ e matriz jacobiana dada por

$$J_{\psi_\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Tal aplicação induz um isomorfismo entre $H^2(R_\varepsilon)$ e $H^2(\Omega_\varepsilon)$. Sendo assim, para $w^\varepsilon \in H^2(R_\varepsilon)$, ao considerarmos $u^\varepsilon = w^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon^{-1} \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, segue que $w^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon$ e, assim,

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}(\psi_\varepsilon(x, y)) \frac{\partial x_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

e

$$\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(\psi_\varepsilon(x, y)) \frac{\partial x_2}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

De maneira análoga, se tomarmos $\phi^\varepsilon \in H^1(R_\varepsilon)$ função teste, temos que $\varphi^\varepsilon = \phi^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon$ é função teste em $H^1(\Omega_\varepsilon)$, onde valem as mesmas relações explicitadas acima. Então, mudando variáveis na integral e substituindo tais funções em (4.4) obtemos para toda função $\varphi^\varepsilon = \phi^\varepsilon \circ \psi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{R_\varepsilon} \nabla v^\varepsilon \nabla \phi^\varepsilon + \int_{R_\varepsilon} v^\varepsilon \phi^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{o_\varepsilon} f(v^\varepsilon) \phi^\varepsilon \\ &= \varepsilon \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u) \varphi^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

e, portanto, u^ε satisfaz a fórmula variacional de (4.2) com $\varepsilon > 0$. Para provar que é solução, como $w^\varepsilon \in H^2(R_\varepsilon)$ por [Hale e Raugel \[1992b\]](#), resta mostrar que $u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ satisfaz a condição

de fronteira do problema. De fato, note que os vetores normais unitários exteriores às fronteiras superiores de R_ε e Ω_ε são dados por

$$\nu^\varepsilon(x, \varepsilon g_\varepsilon(x)) = (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon) = \left(\frac{-g'_\varepsilon(x)}{\sqrt{1 + g'_\varepsilon(x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + g'_\varepsilon(x)^2}} \right)$$

e

$$N^\varepsilon(x_1, g_\varepsilon(x_1)) = (N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon) = \left(\frac{-\varepsilon^{-1}g'_\varepsilon(x_1)}{\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}g'_\varepsilon(x_1)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}g'_\varepsilon(x_1)^2}} \right),$$

respectivamente. Como

$$(\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon) = k^\varepsilon(\varepsilon N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon), \quad \text{onde } k^\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}g'_\varepsilon(x_1)^2}}{\sqrt{1 + g'_\varepsilon(x)^2}},$$

segue que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \nu} &= \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y} \right) (\nu_1^\varepsilon, \nu_2^\varepsilon) = \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}, \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right) k^\varepsilon(\varepsilon N_1^\varepsilon, N_2^\varepsilon) = \varepsilon k^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon \right) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, provamos o resultado desejado.

Como citado anteriormente, note na Figura 4.3 que o novo domínio obtido após esta mudança ainda depende fortemente de ε e possui um comportamento específico quando mandamos tal parâmetro para zero, apesar de não ser fino como o inicial.

Figura 4.3: Ilustração do comportamento de Ω_ε quando ε decresce.

De agora em diante olharemos apenas para o problema modificado. Porém, ao trabalharmos com o limite das soluções desta equação diferencial, deve-se ter em mente que, como se trata inicialmente de um problema em domínio fino, seu limite, intuitivamente, deve ser um problema unidimensional. Com efeito, essa será nossa tarefa: mostrar que, num certo sentido, o problema singular que varia com ε proposto pode ser aproximado por um problema regular unidimensional.

Note que, nesta nova formulação, temos um grande mecanismo de difusão na direção de x_2 . Tal mecanismo, explicitado pelo termo $1/\varepsilon^2$ na equação, fará com que as soluções de (4.2) se tornem cada vez mais homogêneas na direção de x_2 conforme ε tende a zero. Espera-se que este fato nos guie a uma solução limite que não dependerá desta variável, sendo, como o esperado, definida

apenas em $(0, 1)$.

Mostraremos que o problema limite de (4.2) será da forma

$$\begin{cases} -q_0 u_{xx} + u = f_0(u) & \text{em } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

com

$$q_0 = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left[1 - \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 \text{ e } f_0(\cdot) = \frac{L_g}{|Y^*|} \mu_h f(\cdot),$$

onde X é definido pelo problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta X = 0 & \text{em } Y^*, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = 0 & \text{em } B_2, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = -\frac{g'(y_1)}{\sqrt{1 + g'(y_1)^2}} & \text{em } B_1, \\ X \text{ } L_g\text{-periódica em } y_1, \\ \int_{Y^*} X dy_1 dy_2 = 0 \end{cases}$$

e a célula representativa dada por

$$Y^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < y_1 < L_g, 0 < y_2 < g(y_1)\},$$

com B_1 e B_2 suas fronteiras superior e inferior, respectivamente.

Note que o coeficiente de difusão q_0 mostra a influência da geometria do domínio no operador limite, enquanto a aplicação f_0 também evidencia a presença da concentração no problema singular. Além disso, o problema limite ainda possui condições de fronteira de Neumann homogêneas e a influência da concentração se evidencia apenas na não-linearidade com a média μ_h da função que a determina.

4.1 Operador de extensão e E -convergência

Como nosso objetivo é, posteriormente, compreender o comportamento das soluções das equações perturbadas dados por (4.2) quando ε vai a zero, um primeiro passo é decidir de que forma iremos comparar tais funções que estão definidas em espaços diferentes que variam com ε . Uma possível abordagem é a utilização de operadores de extensão P_ε , onde se constrói um operador contínuo e que estende as funções definidas em Ω_ε para um domínio fixo Ω , que independe do parâmetro ε e contém todos os domínios Ω_ε , como na Figura 4.5. Tal técnica foi usada em [Arrieta et al. \[2011\]](#), onde $\Omega = (0, 1) \times (0, g_1)$, com g_1 sendo o valor máximo da função que define a oscilação da fronteira.

Figura 4.4: Exemplo de extensão do domínio com fronteira oscilante a um domínio fixo.

Considere, assim, $O_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G_\varepsilon(x_1)\}$ e $O = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < G_1\}$, onde $G_\varepsilon : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ função C^1 tal que $0 < G_0 \leq G_\varepsilon(x) \leq G_1$ e G_ε possui derivada contínua. Note que $O_\varepsilon \subset O$, para todo $\varepsilon > 0$.

Lema 4.1.1. *Com a notação acima, existem contante $K > 0$, independente de ε e p , e operador de extensão contínuo*

$$P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^p(O_\varepsilon), L^p(O)) \cap \mathcal{L}(W^{1,p}(O_\varepsilon), W^{1,p}(O)) \cap \mathcal{L}(W_{\partial_t}^{1,p}(O_\varepsilon), W_{\partial_t}^{1,p}(O))$$

(onde $W_{\partial_t}^{1,p}$ é o conjunto das funções em $W^{1,p}$ que zeram na fronteira lateral do domínio) tais que

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon \varphi^\varepsilon\|_{L^p(O)} &\leq K \|\varphi^\varepsilon\|_{L^p(O_\varepsilon)}, \\ \left\| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^p(O)} &\leq K \left(\left\| \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^p(O_\varepsilon)} + \eta(\varepsilon) \left\| \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^p(O_\varepsilon)} \right), \\ \left\| \frac{\partial P_\varepsilon \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^p(O)} &\leq K \left\| \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^p(O_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

para todo $\varphi^\varepsilon \in W^{1,p}(O_\varepsilon)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\eta(\varepsilon) = \sup_{x_1 \in (0,1)} |G'_\varepsilon(x_1)|$.

Demonstração. Ver [Arrieta et al., 2011, Lema 3.1]. □

Sendo assim, este operador será importante para a análise da convergência por estender funções definidas em um domínio perturbado Ω_ε para Ω , que é fixo, de modo conveniente.

Observação 4.1.2. *Um resultado semelhante pode ser construído no caso em que a função G_ε independente de ε .*

Ao considerarmos $H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ sendo o espaço $H^1(\Omega_\varepsilon)$ com a norma

$$\|u\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$$

temos que o operador de extensão criado no Lema 4.1.1 possui uma propriedade importante quando analisado em funções específicas, como dada na proposição a seguir.

Proposição 4.1.3. *Usando a notação anterior, para $G_\varepsilon(x_1) = g(x_1/\varepsilon)$ e $\Omega = (0, 1) \times (0, g_1)$, se $\|u\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, onde $K > 0$ independe de ε , então $\|P_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega)}$ será uniformemente limitado, onde P_ε é o operador construído no Lema 4.1.1.*

Além disso, se temos uma sequência u^ε tal que $\|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, então podemos extrair subsequência (com a mesma notação) tal que

$$P_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u_0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Omega) \text{ e } \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_2} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

para $u_0 \in H^1(\Omega)$. Neste caso, podemos considerar $u_0 \in H^1(0, 1)$, pois é uma função independente de x_2 .

Demonstração. De fato, temos

$$\|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \Rightarrow \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C \text{ e } \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon.$$

Pelo Lema 4.1.1,

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq K \left[\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left(\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \eta^2(\varepsilon) \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) + \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Sabendo que g tem derivadas limitadas, segue que

$$\eta(\varepsilon) = \sup_{x_1 \in (0,1)} |G'_\varepsilon(x_1)| = \frac{1}{\varepsilon} \sup_{x_1 \in (0,1)} |g'(x_1/\varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

e, então, para $0 < \varepsilon < 1$ existe $M > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} &\leq K \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + K \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left(\frac{KC^2\varepsilon^2 + \varepsilon^4}{\varepsilon^2} \right) \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq \bar{C} \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \bar{M}, \end{aligned}$$

implicando que

$$\|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad \left\| \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad \left\| \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon M.$$

Com isso, existem subsequência de $P_\varepsilon u^\varepsilon$ e $u_0 \in H^1(\Omega)$ tais que

$$P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\Omega), \quad \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_2} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Tais limites implicam que $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1)$ em Ω e, mais especificamente,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{qtp em } \Omega.$$

De fato, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \varphi dx_1 dx_2 &= - \int_\Omega u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega (P_\varepsilon u^\varepsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \frac{\partial P_\varepsilon u^\varepsilon}{\partial x_2} \varphi dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Em particular, podemos então considerar $u_0 \in H^1(0, 1)$, provando o resultado. □

Além disso, construiremos novamente estruturas abstratas que serão usadas para analisar problemas definidos em diferentes espaços. Agora também voltaremos ao conceito dos espaços de Sobolev e de Lebesgue-Bochner definidos na Seção 1.2, os quais serão úteis para a definição dos operadores E_ε e para as posteriores análises de convergência.

Fixado $1/2 < s < 1$, defina $X = L^2(0, 1; H^s(0, g_1))$, $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, g_\varepsilon(x_1)))$ para $\varepsilon > 0$ e $X_0 = L^2(0, 1)$ com a norma dada por $\|u\|_{X_0} = \sqrt{\mu_g} \|u\|_{L^2(0,1)}$.

Assim, $X_0 \subset X_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, $H^1(\Omega_\varepsilon) \subset X_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ pela Proposição 2.1.3 e claramente $H^1(0, 1) \subset X_0$. Sendo assim, considere os operadores E_ε definidos por

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : X_0 &\rightarrow X_\varepsilon \\ u &\mapsto (E_\varepsilon u)(x_1, x_2) = u(x_1). \end{aligned}$$

Note que dado $u \in X_0$, temos que

$$\|E_\varepsilon u\|_{X_\varepsilon}^2 = \int_0^1 \|(E_\varepsilon u)(x_1, \cdot)\|_{H^s(0, g_\varepsilon(x_1))}^2 dx_1 = \int_0^1 g_\varepsilon(x_1) |u(x_1)|^2 dx_1 \rightarrow \mu_g \|u\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u\|_{X_0}^2.$$

Com isso, podemos definir noções de E -convergência nestes espaços, como feito no Capítulo 1, na Seção 1.4.

Em trabalhos prévios (como [Arrieta et al. \[2011\]](#) e [Pereira \[2016\]](#), por exemplo), tais resultados são provados em outro espaço: $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Esta abordagem distinta se deve à não-linearidade F_ε ter melhores propriedades quando analisada em $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, g_\varepsilon(x_1)))$ ou em $H^1(\Omega_\varepsilon)$, como explicitado na Proposição 2.3.2.

Ademais, como não temos convergência forte de soluções em $H^1(\Omega_\varepsilon)$ por estarmos trabalhando em domínios finos com fronteira necessariamente oscilante (g não é uma função constante), o espaço $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, g_\varepsilon(x_1)))$ é o mais conveniente para espaço base deste problema.

4.2 Caso linear

Nesta seção analisaremos a convergência da família de soluções do problema linear com concentração na fronteira oscilante. Além de sua representatividade como problema individual, este resultado é importante e será utilizado na próxima seção, em um dos passos anteriores à demonstração da semicontinuidade superior e inferior das soluções de equilíbrio do problema semilinear.

Para tanto, considere

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (4.6)$$

com $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^\gamma$ para algum $C > 0$ independente de ε , e

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1) < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $g_\varepsilon(x) := g(x/\varepsilon)$, $h_\varepsilon(x) := h(x/\varepsilon^\beta)$, $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, positivas, L_g e L_h -periódicas, resp., e tais que existem $g_0, g_1, h_0, h_1 > 0$ com $0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1 < \infty$ e $0 \leq h_0 \leq h(x) \leq h_1 < \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, considere que g possui derivadas limitadas.

4.2.1 Existência de solução

Considere os operadores A_ε definidos por

$$\begin{aligned} D(A_\varepsilon) &:= \left\{ u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon); \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 \right\} \\ A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) &\subset L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon) \\ u^\varepsilon &\mapsto A_\varepsilon u^\varepsilon := -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, note que as soluções fracas do problema (4.6) são $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tais que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon \varphi^\varepsilon \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon \varphi^\varepsilon dx_1 dx_2, \quad \forall \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Sendo assim, usando as hipóteses iniciais sobre f^ε obtemos a existência e unicidade de soluções através do Teorema de Lax-Milgram ([Evans, 1998, Seção 6.2.1, Teorema 1]). De fato, defina o operador

$$\begin{aligned} a_\varepsilon : H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon) \times H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u^\varepsilon, v^\varepsilon) &\mapsto a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon v^\varepsilon \right). \end{aligned}$$

Segue que a formulação fraca de (4.6) pode ser escrita como: encontrar $u \in H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon),$$

e possui as seguintes propriedades, usando $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^\gamma$ e o Lema 2.2.1, para todo $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$:

$$(i) \quad a_\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon v^\varepsilon \right) \leq \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)};$$

$$(ii) \quad |a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| = \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

(iii) define um funcional linear limitado, pois

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|v^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Logo, a_ε é uma forma bilinear estritamente coercitiva, para cada $\varepsilon > 0$, e usando Lax-Milgram existe uma única solução $u^\varepsilon \in H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon v^\varepsilon \right) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon v^\varepsilon, \quad \forall v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon),$$

provando o resultado.

Estabelecemos agora o candidato a problema limite de (4.6). Com o método de múltiplas escalas usado em [Arrieta *et al.*, 2011, Seção 2] obtém-se formalmente o candidato a limite homogenizado de (4.6). Considere a célula representativa ilustrada na Figura 4.5, definida por

$$Y^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < y_1 < L_g, 0 < y_2 < g(y_1)\}$$

e sejam B_1 e B_2 as fronteiras superior e inferior de ∂Y^* , respectivamente.

Figura 4.5: Exemplo de célula representativa Y^* .

Ao considerarmos o problema auxiliar dado por

$$\begin{cases} -\Delta X = 0 & \text{em } Y^*, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = 0 & \text{em } B_2, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = -\frac{g'(y_1)}{\sqrt{1 + g'(y_1)^2}} & \text{em } B_1, \\ X \text{ é } L_g\text{-periódica em } y_1, \\ \int_{Y^*} X dy_1 dy_2 = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

nosso candidato a problema limite de (4.6) é da forma

$$\begin{cases} -q_0 u_{xx} + u = f_0 & \text{em } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde

$$q_0 = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left[1 - \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 \quad (4.9)$$

e, supondo que existe sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que

$$\hat{f}^\varepsilon(\cdot) := \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1)}^{g_\varepsilon(x_1)} f^\varepsilon(x_1, x_2) dx_2 \rightarrow \hat{f}(\cdot)$$

em $L^2(0, 1)$ para algum $\hat{f} \in L^2(0, 1)$, então $f_0(x_1) := \frac{L_g}{|Y^*|} \hat{f}(x_1)$.

Finalmente, mostra-se que o problema limite (4.8) está bem posto e possui uma única solução, utilizando o Teorema de Lax-Milgram, pois $0 < q_0 < 1$ (ver [Villanueva-Pesquera, 2015, Observação 1.2.8]).

Observe que tal coeficiente $0 < q_0 < 1$ reflete como a geometria do domínio, em particular sua rugosidade, influencia no coeficiente de difusão da equação unidimensional limite. Além disso, notaremos que, no caso linear, não há mudança no limite com relação ao caso sem concentração, pois o termo $\hat{f}$ “absorve” bem a reação próxima da vizinhança oscilante.

4.2.2 Convergência de soluções

Nesta subseção apontamos resultados já conhecidos de artigos anteriores e mostramos como nosso problema se encaixa como corolário sob certas condições.

No trabalho feito por [Arrieta *et al.*, 2011, Teorema 4.3] foi provado o seguinte resultado, utilizando a técnica das funções teste oscilantes, desenvolvida originalmente por Tartar [1977] e aplicadas em Cioranescu e Paulin [1979], para provar a convergência das soluções no domínio fino para o limite homogeneizado:

Teorema 4.2.1. *Seja $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ solução de*

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \phi^\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde $\phi^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, com $\|\phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, para algum $C > 0$ independente de ε . Então

(i) se temos sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que

$$\hat{\phi}^\varepsilon(x_1) = \int_0^{g(x_1/\varepsilon)} \phi^\varepsilon(x_1, x_2) dx_2 \rightharpoonup \hat{\phi}(x_1)$$

fracamente em $L^2(0, 1)$ para algum $\hat{\phi} \in L^2(0, 1)$, segue que $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\Omega)$ para algum $u_0 \in H^1(\Omega)$, onde $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega))$ é o operador extensão construído no Lema 4.1.1, $\Omega = (0, 1) \times (0, g_1)$, com $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$, implicando que podemos considerar $u_0 \in H^1(0, 1)$, e $u_0 \in H^1(0, 1)$ é a única solução de

$$\begin{cases} -q_0 u_{xx} + u = \phi_0 & \text{em } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases}$$

onde $0 < q_0 < 1$ é dado por (4.9) e

$$\phi_0(\cdot) = \frac{L_g}{|Y^*|} \hat{\phi}(\cdot).$$

(ii) para qualquer sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ existe subsequência tal que as funções $\hat{\phi}^\varepsilon \rightharpoonup \hat{\phi}$ em $L^2(0, 1)$ para alguma função $\hat{\phi} \in L^2(0, 1)$. Em particular, o resultado do item anterior vale para esta subsequência.

Observação 4.2.2. Como o Teorema de Lax-Milgram garante a unicidade da solução fraca do problema limite unidimensional, sabemos que toda subsequência fracamente convergente da sequência $P_\varepsilon u^\varepsilon$ converge ao mesmo limite. Portanto toda a sequência converge fracamente ao limite u_0 .

Observação 4.2.3. Note que, sendo q_0 uma constante, segue da teoria de regularidade de equações elípticas que $u_0 \in H^2(0, 1)$.

Dessa forma, podemos enunciar o resultado principal desta subseção como uma aplicação particular do teorema anterior, explicitado por:

Corolário 4.2.4. *Seja $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ solução de (4.6), ou seja, de*

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

e suponha que exista $C > 0$, independente de ε , tal que $\|f^\varepsilon\|_{L^2(\theta_\varepsilon)}^2 \leq C\varepsilon^\gamma$. Então

(i) se temos sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que

$$\hat{f}^\varepsilon(x_1) := \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1)}^{g_\varepsilon(x_1)} f^\varepsilon(x_1, x_2) dx_2 \rightarrow \hat{f}(x_1)$$

em $L^2(0, 1)$, para algum $\hat{f} \in L^2(0, 1)$, então

$$P_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u_0$$

em $H^1(\Omega)$ e, consequentemente,

$$P_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u_0$$

em $L^2(0, 1; H^s(0, g_1))$ para $1/2 < s < 1$, onde $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\varepsilon), L^2(\Omega)) \cap \mathcal{L}(H^1(\Omega_\varepsilon), H^1(\Omega))$ é o operador extensão construído no Lema 4.1.1, com $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$, implicando que podemos considerar $u_0 \in H^1(0, 1)$, e u_0 satisfaz

$$\int_0^1 \left(q_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u_0 \varphi \right) dx_1 = \int_0^1 f_0 \varphi dx_1, \quad \forall \varphi \in H^1(0, 1),$$

com q_0, f_0 dados por

$$q_0 := \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left(1 - \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right) dy_1 dy_2 \quad \text{e} \quad f_0(x_1) := \frac{L_g}{|Y^*|} \hat{f}(x_1),$$

onde temos a célula representativa $Y^ := \{(y_1, y_2); 0 < y_1 < L, 0 < y_2 < g(y_1)\}$ e X solução do problema auxiliar (4.7).*

(ii) para toda sequência $\varepsilon \rightarrow 0$ existe subsequência (digamos também $\varepsilon \rightarrow 0$) tal que $\hat{f}^\varepsilon \rightarrow \hat{f}$ em $L^2(\Omega)$ para algum $\hat{f} \in L^2(\Omega)$. Em particular, para esta subsequência vale o item anterior.

Demonstração. Basta tomar $\phi^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f^\varepsilon$ no Teorema 4.2.1. □

Observação 4.2.5. *Se f^ε independe de x_2 e de ε , isto é, se $f^\varepsilon(x_1, x_2) = f(x_1)$, então*

$$f_0 = \frac{L_g}{|Y^*|} \mu_h f,$$

onde μ_h é dada na Observação 4.0.1.

4.3 Caso semilinear

Nesta subseção temos como objetivo: estudar o comportamento das soluções do problema perturbado quando ε tende a zero. Para tanto, usaremos o operador de extensão construído na

Seção 4.1, mais especificamente na Proposição 4.1.1, e suas propriedades. Tais propriedades serão úteis para resultados de convergência compacta que implicarão na semicontinuidade superior e inferior das soluções do problema semilinear.

Para tanto, considere novamente (4.2) dado por

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \chi^{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 limitada e com derivadas limitadas até segunda ordem e

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \\ \theta_\varepsilon = \{(x_1, x_2); 0 < x_1 < 1, g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1) < x_2 < g_\varepsilon(x_1)\} \end{cases}$$

onde $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $g_\varepsilon(x) := g(x/\varepsilon)$, $h_\varepsilon(x) := h(x/\varepsilon^\beta)$, $g, h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, positivas, L_g e L_h -periódicas e tal que existem $g_0, g_1, h_0, h_1 > 0$ com $0 < g_0 \leq g(x) \leq g_1 < \infty$ e $0 \leq h_0 \leq h(x) \leq h_1 < \infty$, para todo $x \in (0, 1)$. Além disso, considere que g possui derivadas limitadas.

Observação 4.3.1. *Tal restrição em f é justificada da mesma forma que na Observação 2.3.1.*

4.3.1 Existência de solução

Inicialmente vamos escrever o problema (4.2) em uma forma abstrata e obter suas soluções como pontos fixos de aplicações não-lineares adequadas.

Para tanto, considere novamente os operadores

$$\begin{aligned} A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega_\varepsilon) &\rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon) \\ u^\varepsilon &\longmapsto A_\varepsilon u^\varepsilon := -\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_2^2} + u^\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{com } D(A_\varepsilon) := \left\{ u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon); \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} N_1^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} N_2^\varepsilon = 0 \right\}.$$

Denote $Z_\varepsilon^0 = L^2(\Omega_\varepsilon)$, $Z_\varepsilon^1 = D(A_\varepsilon)$ e considere a escala de espaços de Hilbert construídos por interpolação complexa entre Z_ε^0 e Z_ε^1 (ver definição em (1.1) no Capítulo 1). No nosso contexto, tais espaços coincidem isometricamente com os espaços de potência fracionária do operador A_ε (ver Teorema 1.1.8). Tal escala pode ser estendida para potências negativas tomando $Z_\varepsilon^{-\alpha} = (Z_\varepsilon^\alpha)'$, para $\alpha > 0$. Note que $Z_\varepsilon^{1/2} = H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ e $Z_\varepsilon^{-1/2} = (H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon))'$. Sendo assim, se considerarmos as realizações de A_ε nesta escala, obtemos que $A_{\varepsilon, -1/2} \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon^{1/2}, Z_\varepsilon^{-1/2})$ é dado por

$$\langle A_{\varepsilon, -1/2} u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon \varphi^\varepsilon \right), \quad \forall \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Com um certo abuso de notação, iremos identificar todas as diferentes realizações deste operador e as escreveremos como apenas A_ε .

Desta forma, o problema (4.2) pode ser reescrito na forma abstrata como

$$A_\varepsilon u^\varepsilon = F_\varepsilon(u^\varepsilon), \tag{4.10}$$

onde a não-linearidade F_ε é dada por

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : X_\varepsilon &\rightarrow X'_\varepsilon \\ u^\varepsilon &\mapsto F_\varepsilon(u^\varepsilon) : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R} \\ v^\varepsilon &\mapsto \langle F_\varepsilon(u^\varepsilon), v^\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) v^\varepsilon, \end{aligned}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ com derivadas limitadas até segunda ordem.

Sendo assim, $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é uma solução de (4.10) se, e somente se, $u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(u^\varepsilon)$, ou seja, $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é ponto fixo da aplicação $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$. A existência de solução como ponto fixo segue do Teorema do Ponto Fixo de Schaefer [Evans, 1998, Seção 9.2.2, Teorema 4].

De fato, como provaremos na Proposição 4.3.7, o operador $A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ é compacto e, assim, ao compor com a inclusão de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ em X_ε , que é contínua pela Proposição 2.1.3, e com a restrição de X_ε a $H^1(\Omega_\varepsilon)$ obtemos a compacidade. Logo, basta provar que o conjunto

$$O_\varepsilon = \{\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega); \varphi^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} F_\varepsilon(\varphi^\varepsilon)\}$$

é limitado para concluir a existência. Porém, para qualquer $\varphi^\varepsilon \in O_\varepsilon$ temos, usando o Lema 2.2.1 e $0 < \varepsilon < 1$,

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\varphi^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(\varphi^\varepsilon) \varphi^\varepsilon| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) h_1^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \leq C \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$$

e, portanto, $\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, concluindo a prova.

Da mesma forma podemos analisar nosso candidato a problema limite (4.5). Considere

$$\begin{cases} -q_0 u_{xx} + u = f_0(u) & \text{em } (0, 1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases}$$

com

$$q_0 = \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \left[1 - \frac{\partial X}{\partial y_1}(y_1, y_2) \right] dy_1 dy_2 \quad \text{e} \quad f_0(\cdot) = \frac{L_g}{|Y^*|} \mu_h f(\cdot),$$

onde X é definido pelo problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta X = 0 & \text{em } Y^*, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = 0 & \text{em } B_2, \\ \frac{\partial X}{\partial N} = -\frac{g'(y_1)}{\sqrt{1 + g'(y_1)^2}} & \text{em } B_1, \\ X \text{ } L_g\text{-periódica em } y_1, \\ \int_{Y^*} X dy_1 dy_2 = 0 \end{cases}$$

e a célula representativa dada por

$$Y^* = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < y_1 < L_g, 0 < y_2 < g(y_1)\},$$

com B_1 e B_2 as fronteiras superior e inferior de ∂Y^* , respectivamente.

Desta forma, ao escrever (4.5) de modo abstrato, definindo o operador linear no espaço $X_0 =$

$L^2(0, 1)$ com a norma dada por $\|u\|_{X_0}^2 = \mu_g \|u\|_{L^2(0,1)}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} A_0 : D(A_0) \subset Z_0 &\rightarrow Z_0 \\ u &\mapsto A_0 u = -q_0 u_{xx} + u, \end{aligned}$$

com $D(A_0) = \{u \in H^2(\Omega); u_x(0) = u_x(1) = 0\}$. Além disso, podemos considerar a não-linearidade dada por

$$\begin{aligned} F_0 : H^1(0, 1) &\rightarrow L^2(0, 1) \\ u &\mapsto F_0(u) : L^2(0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle F_0(u), v \rangle = \frac{L_g}{|Y^*|} \mu_h \int_0^1 f(u(x_1)) v(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

Assim, o problema (4.5) pode ser reescrito na forma abstrata como

$$A_0 u = F_0(u) \quad (4.11)$$

e, nesta notação, $u \in H^1(0, 1)$ é uma solução de (4.11) se, e somente se, $u = A_0^{-1} F_0(u)$, ou seja, $u \in H^1(0, 1)$ é ponto fixo da aplicação $A_0^{-1} F_0 : H^1(0, 1) \rightarrow H^1(0, 1)$. Novamente, o resultado segue pelo Teorema do Ponto Fixo de Schaefer de modo análogo ao feito no caso anterior.

4.3.2 Semicontinuidade de soluções

Nesta seção estamos interessados em analisar novamente o comportamento das soluções de (4.10) através do conceito de E -convergência definido na Seção 4.1.

Nosso primeiro passo é provar a limitação uniforme em $H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)$ das soluções de (4.10).

Proposição 4.3.2. *Se $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de (4.10), então $\|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, para algum $K > 0$ independente de ε .*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ é solução de (4.10) se, para toda $\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, vale

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_2} + u^\varepsilon \varphi^\varepsilon \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi^\varepsilon dx_1 dx_2,$$

Tomando $\varphi^\varepsilon = u^\varepsilon$ acima, podemos usar a hipótese de limitação sobre f e o Lema 2.2.1, seguindo que, para ε suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon) u^\varepsilon| dx_1 dx_2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) h_1^{1/2} C \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) h_1^{1/2} C \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, $\|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K$, com

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K, \quad \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K, \quad \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon K.$$

□

Feito isso, o próximo resultado nos mostra o comportamento das integrais concentradas quando ε tende a zero neste contexto. Perceba que a situação retratada aqui é distinta da analisada na Subseção 2.2.2 do Capítulo 2, pois o domínio analisado não tende, quando fazemos ε decrescer, de forma direta a um domínio limite.

Proposição 4.3.3. *Sejam $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0 \in H^1(\Omega)$ tais que $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\Omega)$, onde $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1)$, para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$. Então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi \rightarrow \mu_h \int_0^1 f(u_0) \varphi, \quad \forall \varphi \in H^1(0, 1), \quad (4.12)$$

onde μ_h é a média de h dada na Observação 4.0.1.

Demonstração. De fato,

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi - \mu_h \int_0^1 f(u_0) \varphi = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u^\varepsilon) - f(u_0)) \varphi + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u_0) \varphi - \int_0^1 \mu_h f(u_0) \varphi$$

Usando o Lema 2.2.1, a Observação 4.0.1 e a limitação de f e f' , segue que, para $1/2 < s < 1$,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi - \mu_h \int_0^1 f(u_0) \varphi \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) - f(u_0(x_1))| |\varphi(x_1)| dx_2 dx_1 \\ & \quad + \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_0^1 \int_{g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1)}^{g_\varepsilon(x_1)} f(u_0(x_1)) \varphi(x_1) dx_2 dx_1 - \int_0^1 f(u_0(x_1)) \mu_h \varphi(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) - f(u_0(x_1))|^2 dx_2 dx_1 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |\varphi(x_1)|^2 dx_2 dx_1 \right)^{1/2} \\ & \quad + \left| \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon^\gamma} [g_\varepsilon(x_1) - (g_\varepsilon(x_1) - \varepsilon^\gamma h_\varepsilon(x_1))] f(u_0(x_1)) \varphi(x_1) dx_1 - \int_0^1 f(u_0(x_1)) \mu_h \varphi(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon(x_1, x_2) - u_0(x_1)|^2 dx_2 dx_1 \right)^{1/2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ & \quad + \int_0^1 |f(u_0(x_1)) \varphi(x_1)| |h_\varepsilon(x_1) - \mu_h| dx_1 \\ & \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \right) C_1 C_2 \|u^\varepsilon - u_0\|_{X_\varepsilon} \|\varphi\|_{H^1(0,1)} + \int_0^1 |f(u_0(x_1)) \varphi(x_1)| |h_\varepsilon(x_1) - \mu_h| dx_1 \\ & \leq K \|P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0\|_X + \int_0^1 |f(u_0(x_1)) \varphi(x_1)| |h_\varepsilon(x_1) - \mu_h| dx_1 \rightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

onde $X = L^2(0, 1; H^s(0, g_1))$. □

Proposição 4.3.4. *Sejam $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $u_0, v_0 \in H^1(\Omega)$ tais que $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ e $P_\varepsilon v^\varepsilon \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$, com $u_0(x_1, x_2) = u_0(x_1)$ e $v_0(x_1, x_2) = v_0(x_1)$, para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$. Então*

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) v^\varepsilon \phi \rightarrow \mu_h \int_0^1 f(u_0) v_0 \phi, \quad \forall \phi \in H^1(0, 1).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) v^\varepsilon(x_1, x_2) \phi(x_1) dx_1 dx_2 - \mu_h \int_0^1 f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) (v^\varepsilon(x_1, x_2) - v_0(x_1)) \phi(x_1) dx_1 dx_2 \\
& \quad + \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} (f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) - f(u_0(x_1))) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 dx_2 \\
& \quad + \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 dx_2 - \mu_h \int_0^1 f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 \right) = I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

onde I_1, I_2, I_3 são as respectivas parcelas da desigualdade. Olhando-as separadamente, mostremos que todas convergem a zero quando ε tende a zero usando as limitações de f e f' , além do Lema 2.2.1, com $1/2 < s < 1$. Relembrando que $X_\varepsilon = L^2(0, 1; H^s(0, g_\varepsilon(x_1)))$ e $X = L^2(0, 1; H^s(0, g_1))$, segue que:

- Para I_1 , temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) \phi(x_1)| |v^\varepsilon(x_1, x_2) - v_0(x_1)| dx_1 dx_2 \leq \\
& \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) \phi(x_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v^\varepsilon(x_1, x_2) - v_0(x_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\
& \leq C \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right) \|\phi\|_{H^1(0,1)} \|v^\varepsilon - v_0\|_{X_\varepsilon} \leq K \|P_\varepsilon v^\varepsilon - v_0\|_X^2 \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

- Para I_2 , temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) - f(u_0(x_1))| |v_0(x_1) \phi(x_1)| dx_1 dx_2 \leq \\
& \leq \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f(u^\varepsilon(x_1, x_2)) - f(u_0(x_1))|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v_0(x_1) \phi(x_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} \\
& \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \sup_{x \in [0,1]} |\phi(x)| \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |u^\varepsilon(x_1, x_2) - u_0(x_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |v_0(x_1)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq K_1 \|u^\varepsilon - u_0\|_{X_\varepsilon} \|v_0\|_{H^1(0,1)} \leq K_2 \|P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0\|_X \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

- Para I_3 , temos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 dx_2 - \mu_h \int_0^1 f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 \right| = \\
& = \left| \int_0^1 f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) h_\varepsilon(x_1) dx_1 - \mu_h \int_0^1 f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1) dx_1 \right| \\
& \leq \int_0^1 |(h_\varepsilon(x_1) - \mu_h) f(u_0(x_1)) v_0(x_1) \phi(x_1)| dx_1 \rightarrow 0, \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Sendo assim, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, denote por

$$\mathcal{E}_{\varepsilon, R} = \{u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon); u^\varepsilon \text{ é solução de (4.10) e } \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq R\}$$

o conjunto das soluções de (4.10) uniformemente limitadas por R em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e

$$\mathcal{E}_{0,R} = \{u \in H^1(0,1); u \text{ é solução de (4.11) e } \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq R\}$$

o conjunto das soluções de (4.11) uniformemente limitadas por R em $L^\infty(0,1)$.

Considere então novamente os operadores E_ε definidos por

$$\begin{aligned} E_\varepsilon : X_0 &\rightarrow X_\varepsilon \\ u &\mapsto (E_\varepsilon u)(x_1, x_2) = u(x_1), \end{aligned}$$

onde, fixado $1/2 < s < 1$, define-se $X = L^2(0,1; H^s(0, g_1))$, $X_\varepsilon = L^2(0,1; H^s(0, g_\varepsilon(x_1)))$, para $\varepsilon > 0$, e $X_0 = L^2(0,1)$ com a norma dada por $\|u\|_{X_0} = \sqrt{\mu_g} \|u\|_{L^2(0,1)}$ definidos na Seção 4.1.

Novamente, o principal objetivo desta seção é provar o seguinte resultado, que implica na semicontinuidade superior e inferior das soluções uniformemente limitadas de (4.10) em $\varepsilon = 0$.

Teorema 4.3.5. *São válidos:*

- (i) *Para qualquer sequência $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon,R}$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, existem subsequência (também denominada u_ε) e $u_0 \in \mathcal{E}_{0,R}$ tais que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$.*
- (ii) *Para qualquer ponto de equilíbrio hiperbólico $u_0 \in \mathcal{E}_{0,R}$, existe sequência $u_\varepsilon \in \mathcal{E}_{\varepsilon,R}$ tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Para analisarmos as soluções de (4.10), precisaremos analisar propriedades de compacidade e do comportamento dos operadores relacionados a este problema.

Semi-continuidade superior e inferior

Um primeiro resultado a ser provado é, então, a convergência compacta dos operadores A_ε^{-1} , que definem o problema linear.

Proposição 4.3.6. *Considerando o operador definido em (4.10), temos que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$, com $A_\varepsilon^{-1} : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ e $A_0^{-1} : X_0 \rightarrow X_0$.*

Demonstração. Para demonstrar tal afirmação, dividiremos a prova em três partes.

- (i) A_ε^{-1} é compacto para cada $\varepsilon > 0$.

De acordo com resultados anteriores, como [Arrieta et al. \[2011\]](#), ao considerarmos $A_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Omega_\varepsilon)$ temos que ele é contínuo, pois $0 \in \rho(A_\varepsilon)$. Porém, no nosso caso consideramos o operador A_ε anterior definido em X_ε , que está continuamente incluído em $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Dessa forma, como $H^1(\Omega_\varepsilon)$ está incluído compactamente em X_ε pela Proposição 2.1.4, temos que

$$X_\varepsilon \xrightarrow{i} L^2(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{A_\varepsilon^{-1}} H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{i} X_\varepsilon.$$

Portanto, $A_\varepsilon^{-1} : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ é uma família de operadores compactos, para $\varepsilon > 0$. Analogamente para $\varepsilon = 0$.

- (ii) $\{A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon\}$ é uma família E -relativamente compacta quando $\|f^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}$ é limitada.

De fato, tome família $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ em X_ε tal que $\|f^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \leq M$ e defina $u^\varepsilon := A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon$. Com isso, $A_\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$ e u^ε satisfaz, para ε suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f^\varepsilon u^\varepsilon| \leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|f^\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M \|u^\varepsilon\|_{H_\varepsilon^1(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Assim, pelas propriedades do operador de extensão P_ε explicitadas na Proposição 4.1.3, segue que $\|P_\varepsilon u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ é uniformemente limitado e existem $u_0 \in H^1(0,1)$ e subsequência, também denominada $P_\varepsilon u^\varepsilon$ tais que $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\Omega)$ e, consequentemente, $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow u_0$ em X .

Portanto, segue que

$$\|A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{X_\varepsilon} = \|u^\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{X_\varepsilon} = \|(P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0)|_{\Omega_\varepsilon}\|_{X_\varepsilon} \leq \|P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0\|_X \rightarrow 0.$$

Logo, $A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$ em X_ε .

(iii) $A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}f_0$ se $f^\varepsilon \xrightarrow{E} f_0$.

Com efeito, como no item anterior suponha $u^\varepsilon := A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon$. Segue que $A_\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$, $\|f^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}$ é limitada por ser E -convergente e, assim, existem novamente subsequência de u^ε (também chamada u^ε) e $u_0 \in H^1(0,1)$ tais que $P_\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\Omega)$.

Como $f^\varepsilon \xrightarrow{E} f_0$, segue que

$$\hat{f}^\varepsilon := \int_0^{g(x_1/\varepsilon)} f^\varepsilon(x_1, x_2) dx_2 \rightharpoonup f_0$$

em $L^2(0,1)$. Logo, usando o Teorema 4.2.1 temos que u_0 satisfaz

$$\int_0^1 (-q_0 u_0'' + u_0) \varphi = \int_0^1 f_0 \varphi, \quad \forall \varphi \in H^1(0,1).$$

Portanto, $A_0 u_0 = f_0$, isto é, $u_0 = A_0^{-1}f_0$ e

$$\|A_\varepsilon^{-1}f^\varepsilon - E_\varepsilon A_0^{-1}f_0\|_{X_\varepsilon} = \|u^\varepsilon - E_\varepsilon u_0\|_{X_\varepsilon} = \|(P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0)|_{\Omega_\varepsilon}\|_{X_\varepsilon} \leq \|P_\varepsilon u^\varepsilon - u_0\|_X \rightarrow 0.$$

□

Agora analisaremos o comportamento dos operadores $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon$ no mesmo contexto. Como vimos na Seção 1.4, tais operadores são importantes para terminar a prova da continuidade das soluções em $\varepsilon = 0$.

Proposição 4.3.7. *Com a notação anterior, $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon \xrightarrow{CC} A_0^{-1}F_0$.*

Demonstração. De forma análoga à demonstração anterior, mostraremos as três etapas.

(a) $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon$ é compacto para cada $\varepsilon > 0$, onde $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$.

Como $H^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow X_\varepsilon$ com imersão compacta pela Proposição 2.1.4 para cada $\varepsilon > 0$ fixado, então $X'_\varepsilon \hookrightarrow H^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ compactamente. Com isso, temos

$$X_\varepsilon \xrightarrow{F_\varepsilon} X'_\varepsilon \xrightarrow{i} H^{-1}(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{A_\varepsilon^{-1}} H^1(\Omega_\varepsilon) \xrightarrow{i} X_\varepsilon,$$

onde F_ε é Lipschitz pela Proposição 2.3.2(b), provando a compacidade de $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon$.

(b) $\{A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon)\}$ é uma família E -relativamente compacta quando $\|u^\varepsilon\|_{X_\varepsilon}$ é limitada.

Defina $z^\varepsilon := A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon)$, isto é, $A_\varepsilon z^\varepsilon = F_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Temos que, como $u^\varepsilon \in X_\varepsilon$, $z^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Dessa forma, se chamarmos $f^\varepsilon = f(u^\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, obtemos $f^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e, por causa da limitação de f ,

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right)^2 h_1 = K,$$

onde K independe de ε . Com isso, segue que $\|z^\varepsilon\|_{H^1_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \leq K$ e, assim, pela Proposição 4.1.3 temos que $\|P_\varepsilon z^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ é uniformemente limitado, onde P_ε é o operador extensão construído no Lema 4.1.1.

Além disso, também pela Proposição 4.1.3, existem $z_0 \in H^1(\Omega)$ e subsequência, também denominada de $P_\varepsilon z^\varepsilon$, tais que $P_\varepsilon z^\varepsilon \rightarrow z_0$ em X e z_0 independe da segunda variável. Assim, podemos tomar z_0 como elemento de $H^1(0, 1) \subset X_0$.

Logo,

$$\|A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon) - E_\varepsilon z_0\|_{X_\varepsilon} = \|z^\varepsilon - E_\varepsilon z_0\|_{X_\varepsilon} = \|(P_\varepsilon z^\varepsilon - z_0)|_{\Omega_\varepsilon}\|_{X_\varepsilon} \leq \|P_\varepsilon z^\varepsilon - z_0\|_X \rightarrow 0.$$

(c) $A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon) \xrightarrow{E} A_0^{-1}F_0(u_0)$ se $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$.

De forma análoga ao item anterior, defina $z^\varepsilon := A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon)$, isto é, $A_\varepsilon z^\varepsilon = F_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Temos que, como $u^\varepsilon \in X_\varepsilon$, que $z^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. Dessa forma, se novamente chamarmos $f^\varepsilon = f(u^\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, já temos

$$\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 \leq K,$$

onde K independe de ε .

Além disso, como $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u_0$, se definirmos (como no Corolário 4.2.4 de convergência do caso linear)

$$\hat{f}^\varepsilon(x_1) = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{g(x_1/\varepsilon) - \varepsilon^\gamma h(x_1/\varepsilon)}^{g(x_1/\varepsilon)} f^\varepsilon(x_1, x_2) dx_2,$$

temos que $\hat{f}^\varepsilon \rightarrow \hat{f}$, com $\hat{f}(x_1) = \mu_h f(u_0(x_1))$, em $L^2(0, 1)$ pela Proposição 4.3.3, pois, para toda $\varphi \in L^2(0, 1)$,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{g(x_1/\varepsilon) - \varepsilon^\gamma h(x_1/\varepsilon)}^{g(x_1/\varepsilon)} f^\varepsilon dx_2 - \mu_h f(u_0) \right) \varphi dx_1 = \frac{1}{\varepsilon^\gamma} \int_{\theta_\varepsilon} f(u^\varepsilon) \varphi - \int_0^1 \mu_h f(u_0) \varphi \rightarrow 0.$$

Sendo assim, aplicando o Corolário 4.2.4 (item (a)), existe $z_0 \in H^1(0, 1)$ tal que $P_\varepsilon z^\varepsilon \rightarrow z_0$ em X , onde z_0 satisfaz, para todo $\varphi \in H^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 (q_0 z_0' \varphi' + z_0 \varphi) = \int_0^1 \frac{Lg}{|Y^*|} \mu_h f(u_0) \varphi.$$

Com isso, pela definição de A_0 e F_0 , segue que $z_0 = A_0^{-1}F_0(u_0)$ e, finalmente,

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^{-1}F_\varepsilon(u^\varepsilon) - E_\varepsilon A_0^{-1}F_0(u_0)\|_{X_\varepsilon} &= \|z^\varepsilon - E_\varepsilon z_0\|_{H^s(\Omega_\varepsilon)} \\ &= \|(P_\varepsilon z^\varepsilon - z_0)|_{\Omega_\varepsilon}\|_{X_\varepsilon} \leq \|P_\varepsilon z^\varepsilon - z_0\|_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

□

Desta forma, com isto provado, os seguintes resultados seguem novamente como consequência de um teorema de E -convergência enunciado no primeiro capítulo.

Teorema 4.3.8. *Para qualquer família de soluções $\{u^\varepsilon\}$ em $\mathcal{E}_{\varepsilon,R}$ existe u solução em $\mathcal{E}_{0,R}$ e uma subsequência de u^ε , também chamada de u^ε , tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.4.10. □

Além disso podemos provar a semicontinuidade inferior do conjunto $\mathcal{E}_{\varepsilon,R}$, quando a solução do problema limite é hiperbólica.

Teorema 4.3.9. *Se u solução em $\mathcal{E}_{0,R}$ é hiperbólica, então existe sequência $\{u^\varepsilon\}$ de soluções em $\mathcal{E}_{\varepsilon,R}$ tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.4.14. □

Observação 4.3.10. *No caso em que todos os pontos de equilíbrio da equação limite são hiperbólicos, temos que os mesmos são isolados e existe um número finito deles (ver [Arrieta et al., 2006, Corolário 5.4 e Proposição 5.5]).*

Portanto, unificando os resultados, obtemos:

Demonstração do Teorema 4.3.5. Para o item (i) temos o Teorema 4.3.8 e para o item (ii) aplica-se o Teorema 4.3.9. □

Observação 4.3.11. *Note que, neste caso, como não existe operador de extensão de modo que $\{\Omega_\varepsilon, \theta_\varepsilon\}$ se torne um par admissível, não provamos a unicidade na semicontinuidade inferior das soluções, como feito no capítulo anterior.*

Referências Bibliográficas

Adams(1975) R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics. Academic Press. Citado na pág. 13, 14

Aragão e Oliva(2011) Gleiciane da Silva Aragão e Sergio Muniz Oliva. Asymptotic behavior of a reaction-diffusion problem with delay and reaction term concentrated in the boundary. *São Paulo J. Math. Sci.*, 5(2):347–376. ISSN 1982-6907. doi: 10.11606/issn.2316-9028.v5i2p347-376. URL <http://dx.doi.org/10.11606/issn.2316-9028.v5i2p347-376>. Citado na pág. 2

Aragão e Bruschi(2015) Gleiciane da Silva Aragão e Simone Mazzini Bruschi. Limit of nonlinear elliptic equations with concentrated terms and varying domains: the non uniformly Lipschitz case. *Electron. J. Differential Equations*, páginas No. 217, 14. ISSN 1072-6691. Citado na pág. 3, 27, 60

Aragão e Bruschi(2016) Gleiciane S. Aragão e Simone M. Bruschi. Concentrated terms and varying domains in elliptic equations: Lipschitz case. *Math. Methods Appl. Sci.*, 39(12):3450–3460. ISSN 0170-4214. doi: 10.1002/mma.3791. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mma.3791>. Citado na pág. 3, 4, 27, 60

Aragão et al.(2012) Gleiciane S. Aragão, Antônio L. Pereira e Marcone C. Pereira. A nonlinear elliptic problem with terms concentrating in the boundary. *Math. Methods Appl. Sci.*, 35(9): 1110–1116. ISSN 0170-4214. doi: 10.1002/mma.2525. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mma.2525>. Citado na pág. 2

Aragão et al.(2014) Gleiciane S. Aragão, Antônio L. Pereira e Marcone C. Pereira. Attractors for a nonlinear parabolic problem with terms concentrating on the boundary. *J. Dynam. Differential Equations*, 26(4):871–888. ISSN 1040-7294. doi: 10.1007/s10884-014-9412-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10884-014-9412-z>. Citado na pág. 2, 50

Arrieta e Bruschi(2007) José M. Arrieta e Simone M. Bruschi. Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(10):1555–1585. ISSN 0218-2025. doi: 10.1142/S0218202507002388. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0218202507002388>. Citado na pág. 2, 3, 5, 27, 28, 29, 30, 31, 50, 60, 61, 62

- Arrieta e Bruschi(2010)** José M. Arrieta e Simone M. Bruschi. Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(2):327–351. ISSN 1531-3492. doi: 10.3934/dcdsb.2010.14.327. URL <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2010.14.327>. Citado na pág. 2, 3, 27
- Arrieta e Carvalho(2004)** Jose M. Arrieta e Alexandre N. Carvalho. Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain. *J. Differential Equations*, 199(1):143–178. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2003.09.004. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2003.09.004>. Citado na pág. 1, 2
- Arrieta e Pereira(2010)** José M. Arrieta e Marcone C. Pereira. Elliptic problems in thin domains with highly oscillating boundaries. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SēMA*, (51):17–24. ISSN 1575-9822. Citado na pág. 4
- Arrieta e Pereira(2011)** José M. Arrieta e Marcone C. Pereira. Homogenization in a thin domain with an oscillatory boundary. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 96(1):29–57. ISSN 0021-7824. doi: 10.1016/j.matpur.2011.02.003. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2011.02.003>. Citado na pág. 4
- Arrieta e Pereira(2013)** José M. Arrieta e Marcone C. Pereira. The Neumann problem in thin domains with very highly oscillatory boundaries. *J. Math. Anal. Appl.*, 404(1):86–104. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2013.02.061. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.02.061>. Citado na pág. 4
- Arrieta e Villanueva-Pesqueira(2014a)** José M. Arrieta e Manuel Villanueva-Pesqueira. Thin domains with doubly oscillatory boundary. *Math. Methods Appl. Sci.*, 37(2):158–166. ISSN 0170-4214. doi: 10.1002/mma.2875. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mma.2875>. Citado na pág. 4
- Arrieta e Villanueva-Pesqueira(2014b)** José M. Arrieta e Manuel Villanueva-Pesqueira. Fast and slow boundary oscillations in a thin domain. Em *Advances in differential equations and applications*, volume 4 of *SEMA SIMAI Springer Ser.*, páginas 13–22. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-06953-1_2. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06953-1_2. Citado na pág. 4
- Arrieta e Villanueva-Pesqueira(2014c)** José M. Arrieta e Manuel Villanueva-Pesqueira. Locally periodic thin domains with varying period. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(5):397–403. ISSN 1631-073X. doi: 10.1016/j.crma.2014.03.014. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.03.014>. Citado na pág. 4
- Arrieta e Villanueva-Pesqueira(2017)** José M. Arrieta e Manuel Villanueva-Pesqueira. Thin domains with non-smooth periodic oscillatory boundaries. *J. Math. Anal. Appl.*, 446(1):130–164. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.08.039. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.039>. Citado na pág. 4
- Arrieta et al.(2006)** José M. Arrieta, Alexandre N. Carvalho e German Lozada-Cruz. Dynamics in dumbbell domains. I. Continuity of the set of equilibria. *J. Differential Equations*, 231(2):551–597. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2006.06.002. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2006.06.002>. Citado na pág. 1, 5, 27, 30, 31, 50, 73, 97

- Arrieta et al.(2008a)** José M. Arrieta, Ángela Jiménez-Casas e Aníbal Rodríguez-Bernal. Flux terms and Robin boundary conditions as limit of reactions and potentials concentrating at the boundary. *Rev. Mat. Iberoam.*, 24(1):183–211. ISSN 0213-2230. doi: 10.4171/RMI/533. URL <http://dx.doi.org/10.4171/RMI/533>. Citado na pág. 1, 2, 5, 6
- Arrieta et al.(2008b)** José M. Arrieta, Aníbal Rodríguez-Bernal e J. D. Rossi. The best Sobolev trace constant as limit of the usual Sobolev constant for small strips near the boundary. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 138(2):223–237. ISSN 0308-2105. doi: 10.1017/S0308210506000813. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0308210506000813>. Citado na pág. 5
- Arrieta et al.(2009a)** José M. Arrieta, Alexandre N. Carvalho e German Lozada-Cruz. Dynamics in dumbbell domains. II. The limiting problem. *J. Differential Equations*, 247(1):174–202. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2009.03.014. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2009.03.014>. Citado na pág. 1
- Arrieta et al.(2009b)** José M. Arrieta, Alexandre N. Carvalho e German Lozada-Cruz. Dynamics in dumbbell domains. III. Continuity of attractors. *J. Differential Equations*, 247(1):225–259. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2008.12.014. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2008.12.014>. Citado na pág. 1
- Arrieta et al.(2011)** José M. Arrieta, Alexandre N. Carvalho, Marcone C. Pereira e Ricardo P. Silva. Semilinear parabolic problems in thin domains with a highly oscillatory boundary. *Nonlinear Anal.*, 74(15):5111–5132. ISSN 0362-546X. doi: 10.1016/j.na.2011.05.006. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2011.05.006>. Citado na pág. 4, 27, 40, 81, 82, 84, 85, 87, 94
- Barros e Pereira(2016)** Saulo R. M. Barros e Marcone C. Pereira. Semilinear elliptic equations in thin domains with reaction terms concentrating on boundary. *J. Math. Anal. Appl.*, 441(1): 375–392. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.04.011. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.011>. Citado na pág. 4, 6
- Brezis(2010)** Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. 65
- Carvalho(2017)** Alexandre N. Carvalho. Análise funcional ii. Notas de aula para ensino de pós graduação, 2017. URL <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf>. Citado na pág. 27, 28
- Carvalho(2012)** Alexandre N. Carvalho. Sistemas dinâmicos não lineares. Notas de aula para ensino de pós graduação, 2012. URL <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf>. Citado na pág. 27, 28
- Carvalho e Piskarev(2006)** Alexandre N. Carvalho e Sergey Piskarev. A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 27(7-8):785–829. ISSN 0163-0563. doi: 10.1080/01630560600882723. URL <http://dx.doi.org/10.1080/01630560600882723>. Citado na pág. 5, 27, 60
- Cazenave e Haraux(1998)** Thierry Cazenave e Alain Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations*, volume 13 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. ISBN 0-19-850277-X. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors. Citado na pág. 20, 40

- Chandler-Wilde et al.(2015)** S. N. Chandler-Wilde, D. P. Hewett e A. Moiola. Interpolation of Hilbert and Sobolev spaces: quantitative estimates and counterexamples. *Mathematika*, 61(2): 414–443. ISSN 0025-5793. doi: 10.1112/S0025579314000278. URL <http://dx.doi.org/10.1112/S0025579314000278>. Citado na pág. 19
- Chechkin et al.(1999)** Gregory A. Chechkin, Avner Friedman e Andrey L. Piatnitski. The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 231(1):213 – 234. ISSN 0022-247X. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1998.6226>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X98962266>. Citado na pág. 1
- Cioranescu e Donato(1999)** D. Cioranescu e P. Donato. *An Introduction to Homogenization*. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press. ISBN 9780198565543. URL <https://books.google.com.au/books?id=9f6SQgAACAAJ>. Citado na pág. 1, 8, 22, 26, 27, 46, 59, 77
- Cioranescu et al.(2012)** D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato, G. Griso e R. Zaki. The periodic unfolding method in domains with holes. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(2):718–760. ISSN 0036-1410. doi: 10.1137/100817942. URL <http://dx.doi.org/10.1137/100817942>. Citado na pág. 1
- Cioranescu e Paulin(1979)** Doi na Cioranescu e Jeannine Saint Jean Paulin. Homogenization in open sets with holes. *J. Math. Anal. Appl.*, 71(2):590–607. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/0022-247X(79)90211-7. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(79\)90211-7](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(79)90211-7). Citado na pág. 87
- Delfour e Zolésio(2011)** M. C. Delfour e J.-P. Zolésio. *Shapes and geometries*, volume 22 of *Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edição. ISBN 978-0-898719-36-9. doi: 10.1137/1.9780898719826. URL <http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898719826>. Metrics, analysis, differential calculus, and optimization. Citado na pág. 1
- Di Nezza et al.(2012)** Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci e Enrico Valdinoci. Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces. *Bull. Sci. Math.*, 136(5):521–573. ISSN 0007-4497. doi: 10.1016/j.bulsci.2011.12.004. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004>. Citado na pág. 14, 22
- Elsken(2005)** Thomas Elsken. Continuity of attractors for net-shaped thin domains. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 26(2):315–354. ISSN 1230-3429. doi: 10.12775/TMNA.2005.035. URL <http://dx.doi.org/10.12775/TMNA.2005.035>. Citado na pág. 1, 4
- Evans(1998)** L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society. ISBN 9780821807729. URL https://books.google.com.br/books?id=5Pv4LVB_m8AC. Citado na pág. 63, 68, 85, 90
- Gasiński e Papageorgiou(2006)** Leszek Gasiński e Nikolaos S. Papageorgiou. *Nonlinear analysis*, volume 9 of *Series in Mathematical Analysis and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. ISBN 978-1-58488-484-2; 1-58488-484-3. Citado na pág. 20
- Grisvard(1985)** P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 9781611972030. Citado na pág. 13, 17, 18, 22, 23, 26

- Hale e Raugel(1992a)** J. K. Hale e G. Raugel. Partial differential equations on thin domains. Em *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1990)*, volume 186 of *Math. Sci. Engrg.*, páginas 63–97. Academic Press, Boston, MA. doi: 10.1016/S0076-5392(08)63376-7. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0076-5392\(08\)63376-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0076-5392(08)63376-7). Citado na pág. 1, 4
- Hale e Raugel(1992b)** Jack K. Hale e Geneviève Raugel. Reaction-diffusion equation on thin domains. *J. Math. Pures Appl.* (9), 71(1):33–95. ISSN 0021-7824. Citado na pág. 4, 79
- Henry(1981)** D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag. ISBN 9783540105572. Citado na pág. 16
- Henry et al.(2005)** D. Henry, J. Hale e A.L. Pereira. *Perturbation of the Boundary in Boundary-Value Problems of Partial Differential Equations*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press. ISBN 9781139441179. URL <https://books.google.com.br/books?id=zCBJ5tP71h8C>. Citado na pág. 1
- Jiménez-Casas e Rodríguez-Bernal(2009)** Ángela Jiménez-Casas e Aníbal Rodríguez-Bernal. Asymptotic behavior of a parabolic problem with terms concentrated in the boundary. *Nonlinear Anal.*, 71(12):e2377–e2383. ISSN 0362-546X. doi: 10.1016/j.na.2009.05.036. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.05.036>. Citado na pág. 2
- Jiménez-Casas e Rodríguez-Bernal(2011)** Ángela Jiménez-Casas e Aníbal Rodríguez-Bernal. Singular limit for a nonlinear parabolic equation with terms concentrating on the boundary. *J. Math. Anal. Appl.*, 379(2):567–588. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2011.01.051. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.01.051>. Citado na pág. 2
- Ladyzhenskaya e Ural'tseva(1968)** O Ao Ladyzhenskaya e No N Ural'tseva. Linear and quasi-linear equations of elliptic type, 1968. Citado na pág. 70
- Lions e Magenes(1972)** J.-L. Lions e E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. Citado na pág. 13, 14
- McLean(2000)** W.C.H. McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press. ISBN 9780521663755. URL <https://books.google.com.br/books?id=RILqjEeMfK0C>. Citado na pág. 13, 40
- Meier e Böhm(2008)** Sebastian Meier e Michael Böhm. A note on the construction of function spaces for distributed-microstructure models with spatially varying cell geometry. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 5(suppl.):109–125. ISSN 1705-5105. Citado na pág. 20, 21
- Nečas(2012)** Jindřich Nečas. *Direct methods in the theory of elliptic equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg. ISBN 978-3-642-10454-1; 978-3-642-10455-8. doi: 10.1007/978-3-642-10455-8. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-10455-8>. Translated from the 1967 French original by Gerard Tronel and Alois Kufner, Editorial coordination and preface by Šárka Nečasová and a contribution by Christian G. Simader. Citado na pág. 13, 14, 22, 23
- Pereira e Pereira(2007)** Antônio L. Pereira e Marcone C. Pereira. Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain. *J. Differential Equations*, 239(2):343–370. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2007.05.018. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2007.05.018>. Citado na pág. 1

- Pereira(2013)** Marcone C. Pereira. Remarks on semilinear parabolic systems with terms concentrating in the boundary. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 14(4):1921–1930. ISSN 1468-1218. doi: 10.1016/j.nonrwa.2013.01.003. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.01.003>. Citado na pág. 2
- Pereira(2016)** Marcone C. Pereira. Asymptotic analysis of a semilinear elliptic equation in highly oscillating thin domains. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 67:1–14. Citado na pág. 4, 27, 50, 84
- Prizzi et al.(2002)** M Prizzi, M Rinaldi e KP Rybakowski. Curved thin domains and parabolic equations. *Studia mathematica*, 151:109–140. Citado na pág. 4
- Prizzi e Rybakowski(2001)** Martino Prizzi e Krzysztof P. Rybakowski. The effect of domain squeezing upon the dynamics of reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 173(2):271–320. ISSN 0022-0396. doi: 10.1006/jdeq.2000.3917. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2000.3917>. Citado na pág. 4
- Raugel(1995)** Geneviève Raugel. Dynamics of partial differential equations on thin domains. Em *Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994)*, volume 1609 of *Lecture Notes in Math.*, páginas 208–315. Springer, Berlin. doi: 10.1007/BFb0095241. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0095241>. Citado na pág. 4
- Rayleigh(1945)** John William Strutt Rayleigh, Baron. *The Theory of Sound*. Dover Publications, New York, N. Y. 2d ed. Citado na pág. 1
- Robinson(2001)** James C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-63204-8. doi: 10.1007/978-94-010-0732-0. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors. Citado na pág. 20
- Silva(2007)** Ricardo P. Silva. *Semicontinuidade Inferior de Atratores para Problemas Parabólicos em Domínios Finos*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC-USP. Citado na pág. 27, 28
- Tartar(2009)** L. Tartar. *The General Theory of Homogenization: A Personalized Introduction*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783642051951. URL https://books.google.com.br/books?id=P51k82nS_d0C. Citado na pág. 1
- Tartar(1977)** Luc Tartar. Problèmes d’homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles. *Cours Peccot, Collège de France*. Citado na pág. 87
- Triebel(1978)** Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland mathematical library. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, New York. ISBN 0-7204-0710-9. Citado na pág. 13, 15
- Villanueva-Pesquera(2015)** M. Villanueva-Pesquera. *Homogenization of elliptic problems in thin domains with oscillatory boundaries*. Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid. Citado na pág. 86
- Yagi(2010)** Atsushi Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 978-3-642-04630-8. doi: 10.1007/978-3-642-04631-5. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-04631-5>. Citado na pág. 13, 15, 16, 19, 26