**Operadores de convolução
tauberianos e cotauberianos
agindo sobre $L_1(G)$**

Liliana Cely Prieto

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTORA EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Co-orientador: Prof. Dr. Manuel González Ortiz

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da
CAPES/CNPq

São Paulo, Maio de 2017

**Operadores de convolução
tauberianos e cotauberianos
agindo sobre $L_1(G)$**

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 30/05/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Manuel Gonzalez Ortiz (Presidente)
Universidad de Cantabria - UC
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME - USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Pedro Levit Kaufmann - UNIFESP
- Leandro Candido - UNIFESP

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer às agências de apoio CAPES e CNPq pela sua ajuda econômica ao longo de todo o desenvolvimento do meu doutorado.

Existem três pessoas que merecem toda minha gratidão, pois sem elas este trabalho nunca teria sido possível: Meu orientador o professor Elói Medina Galego, meu Co-Orientador o professor Manuel González Ortiz e meu namorado Alex. Para elas minhas infinitas Graças.

Acho que não são suficientes as palavras para descrever o muito afortunada que eu me sinto por ter desenvolvido esse difícil processo da minha vida junto ao professor Manuel, foi como beber o conhecimento da própria fonte. Além de ser um excelente matemático, é um ser humano inatacável e em quem eu gostaria de poder me converter algum dia. Sempre me lembrarei de você com muita gratidão e muito afeto.

Para o professor Elói só tenho a gratidão por aceitar ser meu orientador e me deixar escolher o tema de pesquisa. Eu sempre desejei trabalhar com você pela sua qualidade na pesquisa. Mas devo dizer que também achei em você uma grande qualidade de pessoa.

Finalmente, a meu amado Alex agradeço por ser o melhor companheiro e amigo. Eu tenho muita sorte de ter uma pessoa tão inteligente e maravilhosa a meu lado.

RESUMO

CELY, L. **Operadores de convolução tauberianos e cotauberianos agindo sobre $L_1(G)$** . 2017. 89f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Na primeira parte desta tese nós estudamos os operadores de convolução T_μ que são tauberianos agindo nas álgebras de grupo $L_1(G)$, onde G é um grupo abeliano localmente compacto e μ é uma medida de Borel complexa sobre G . Nós mostramos que esses operadores são invertíveis se o grupo G não é compacto e que eles são de Fredholm quando têm imagem fechada e G é compacto. Além disso, se G é compacto nós provamos que T_μ é de Fredholm se a parte singular contínua de μ respeito à medida de Haar de G é zero.

Na segunda parte nós estudamos os operadores de convolução T_μ que são cotauberianos em $L_1(G)$. Nós mostramos que esses operadores são tauberianos e são de Fredholm (de índice zero). Além disso, mostramos que T_μ é tauberiano se, e somente se, sua extensão natural à álgebra de medidas $M(G)$ é tauberiano. Mostramos alguns resultados obtidos por dualidade de espaços de Banach para os operadores de convolução tauberianos e cotauberianos agindo sobre $C_0(G)$, o espaço de Banach das funções complexas que se anulam no infinito, e $L_\infty(G)$, o espaço de Banach das funções mensuráveis essencialmente limitadas.

Finalmente estendemos alguns dos resultados obtidos para álgebras de Banach que possuem uma identidade aproximada limitada.

Palavras-chave: Operadores tauberianos, operadores de convolução, multiplicadores.

ABSTRACT

CELY, L. **Tauberian and cotauberian convolution operators acting on $L_1(G)$** . 2017. 89f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

In the first part of this thesis we study the convolution operators T_μ which are tauberian as operators acting on the group algebras $L_1(G)$, where G is a locally compact abelian group and μ is a complex Borel measure on G . We show that these operators are invertible when G is non-compact, and that they are Fredholm when they have closed range and G is compact. Moreover, if G is compact, we prove that T_μ is Fredholm when the singular continuous part of μ with respect to the Haar measure on G is zero.

In the second part we study the convolution operators T_μ which are cotauberian as operators acting on $L_1(G)$. We show that these operators are tauberian and Fredholm of index zero. Moreover, we show that T_μ is tauberian as an operator on $L_1(G)$ if and only if so is its natural extension to the algebra of measures $M(G)$. We show some results, obtained by duality, about tauberian and cotauberian convolution operators on the Banach spaces $L_\infty(G)$ of equivalence classes of essentially bounded measurable functions on G and $C_0(G)$ of complex valued continuous functions on G which vanish at infinity.

Finally, we extend some results obtained to Banach algebras with a bounded identity approximate.

Keywords: Tauberian operators, convolution operators, multipliers.

SUMÁRIO

1	Preliminares	1
1.1	Álgebras de Banach	1
1.2	A álgebra de grupo $L_1(G)$	4
1.3	Operadores de Fredholm	11
1.4	Operadores tauberianos	12
1.4.1	Operadores tauberianos sobre $L_1(\mu)$	15
1.5	Operadores cotauberianos	16
2	Operadores de convolução tauberianos sobre $L_1(G)$	19
2.1	Operadores de convolução	20
2.2	O espectro de um operador de convolução sobre $L_1(G)$	23
2.3	Operadores de convolução tauberianos para G discreto	26
2.4	Operadores de convolução tauberianos para G não compacto	27
2.5	Operadores de convolução tauberianos para G compacto	28
2.6	Medidas tauberianas	35
3	Operadores de convolução cotauberianos sobre $L_1(G)$	39
3.1	O adjunto de um operador de convolução	40
3.2	$L_1(G)^{**}$ como uma álgebra de Banach	42
3.3	Operadores de convolução cotauberianos	48
4	Multiplicadores tauberianos em álgebras de Banach	57
4.1	Multiplicadores tauberianos em álgebras de Banach sem ordem	57
4.2	Multiplicadores em C^* -álgebras	59
4.3	Multiplicadores tauberianos em $C_0(L)$	63

SUMÁRIO

5 Trabalhos Futuros	67
Referências Bibliográficas	69

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{T}$	Conjunto dos números complexos de norma 1
$\mathcal{M}(A)$	Espaço dos multiplicadores da álgebra A
G	Grupo abeliano localmente compacto
Γ	Grupo dual do grupo G
$B(G)$	σ -álgebra de Borel de G
m	Medida de Haar de G
$L_1(G)$	Espaço das funções de Borel absolutamente m -integráveis q.t.p
$L_\infty(G)$	Espaço das funções de Borel limitadas m -q.t.p
$M(G)$	Espaço das medidas complexas regulares sobre $B(G)$
$C(G)$	Espaço das funções contínuas sobre G
$C_0(G)$	Espaço das funções contínuas que se anulam no infinito
$C_c(G)$	Espaço das funções contínuas e limitadas que têm suporte compacto
$D(f)$	$\{x \in X : f(x) \neq 0\}$
$supp(\cdot)$	Suporte de uma função contínua
$\mathcal{B}(X, Y)$	Espaço dos operadores lineares e limitados do espaço de Banach X no espaço de Banach Y
$\mathcal{B}(X)$	$\mathcal{B}(X, X)$
$N(T)$	Núcleo do operador T
$R(T)$	Imagem do operador T
X^*	$\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$
T^*	Operador adjunto do operador T

LISTA DE SÍMBOLOS

X^{co}	Espaço quociente X^{**}/X
T^{co}	Operador resíduo do operador T
T_μ	Operador de convolução em $L_1(G)$
L_μ	Operador de convolução em $L_\infty(G)$
S_μ	Operador de convolução em $C_0(G)$
M_μ	Operador de convolução em $M(G)$
$\sigma_p(\cdot)$	Espectro pontual de um operador
$\sigma_r(\cdot)$	Espectro residual de um operador
$\sigma_c(\cdot)$	Espectro contínuo de um operador
$\hat{f}$	Transformada de Fourier de uma função f
$\hat{\mu}$	Transformada de Fourier-Stieltjes de uma medida μ

INTRODUÇÃO

Os operadores tauberianos foram introduzidos em 1976 por Kalton e Wilansky [27] como aqueles operadores T , entre dois espaços de Banach X e Y , lineares e limitados que possuem a propriedade $T^{** -1}(i_Y(Y)) \subset i_X(X)$, onde T^{**} denota o segundo conjugado de T e i_X, i_Y são as inclusões naturais de X e Y em seus segundos adjuntos X^{**} e Y^{**} respectivamente. Mais especificamente, cada $m \in X^{**}$ tal que $T^{**}m \in i_Y(Y)$ deve pertencer a $i_X(X)$. Sua origem remonta-se a um problema de somabilidade [17].

É importante destacar que o comportamento dos operadores tauberianos é, em um certo sentido, oposto ao dos operadores fracamente compactos, tendo em conta que uma das definições equivalentes de operador fracamente compacto $T : X \rightarrow Y$ entre espaços de Banach X, Y é que $T^{**}(X^{**}) \subset i_Y(Y)$. Portanto é claro que um operador tauberiano não pode ser fracamente compacto se X não é reflexivo. Logo pode acontecer que o conjunto de todos os operadores tauberianos entre dois espaços de Banach seja vazio, como por exemplo, se Y é reflexivo e X não o é.

A partir de sua introdução os operadores tauberianos tiveram um grande impacto na teoria isomórfica dos espaços de Banach. De fato, esses operadores têm sido úteis em vários temas que, em aparência, não apresentavam relação alguma. Alguns exemplos são: a fatoração de Davis, Figiel, Johnson e Pelczynsky (*DFJP*) [13], no estudo de sequências exatas de espaços de Banach [35], no problema da equivalência entre a propriedade de Krein-Milman e a propriedade de Radon-Nikodým [34], na construção de espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis [8], na extensão do princípio de reflexibilidade local para operadores [10], entre outros.

Um operador $T : X \rightarrow Y$ é chamado de cotauberiano se T^* é tauberiano. A fatoração DFJP, mencionada acima, estabelece que cada operador T tem uma fatoração da forma $T = jA$, onde j é um operador tauberiano injetivo. Em [20, Proposição 17] foi provado que o operador A na verdade, é cotauberiano com imagem densa.

Um exemplo trivial de operador tauberiano é o operador identidade I_X de um espaço de Banach X . Os operadores $T : X \rightarrow Y$ que têm imagem fechada e núcleo de dimensão finita, conhecidos como operadores de semi-Fredholm à direita, são exemplos mais interessantes de operadores tauberianos. Logo, devido ao amplo estudo e aplicações que têm esses operadores, uma pergunta razoável é se o conjunto de todos os operadores de semi-Fredholm à direita coincide com o conjunto de todos os operadores tauberianos. A resposta a tal pergunta é negativa, pois como é conhecido, os operadores de semi-Fredholm à direita formam um conjunto aberto no espaço de todos os operadores lineares e limitados $\mathcal{B}(X, Y)$. Isso nem sempre acontece no caso dos operadores tauberianos [22, Exemplo 2.1.17]. Mas essa condição está longe de ser suficiente para ter uma equivalência entre ser de semi-Fredholm à direita e ser tauberiano.

Em geral, para qualquer medida σ -finita ν os operadores tauberianos no espaço $\mathcal{B}(L_1(\nu), Y)$ de todos os operadores lineares e limitados de $L_1(\nu)$ em qualquer espaço de Banach Y , onde $L_1(\nu)$ é o espaço de Banach das classes de equivalência de funções mensuráveis e absolutamente ν -integráveis, podem ser caracterizados em termos da imagem de sequências de funções disjuntas. Essa importante propriedade e algumas consequências foram apresentadas por M. González e A. Martínez Abejón em [21]. Em particular, o subconjunto dos operadores tauberianos de $L_1(\nu)$ é sempre aberto em $\mathcal{B}(L_1(\nu), Y)$. Além disso, se M é um subespaço reflexivo de $L_1(\nu)$ a aplicação quociente de $L_1(\nu)$ em $\frac{L_1(\nu)}{M}$ é um operador tauberiano ([21, Proposição 2.1.4]). Vale a pena notar que se $1 < p \leq 2$ o espaço $L_1(0, 1)$ contém subespaços reflexivos isomorfos a $L_p(0, 1)$.

A questão de saber se todo operador tauberiano de $L_1(0, 1)$ em $L_1(0, 1)$ é de semi-Fredholm à direita, estabelecida em [22], foi recentemente resolvida em

[26], com resposta negativa, onde os autores encontraram um exemplo de operador tauberiano $T : L_1(0, 1) \rightarrow L_1(0, 1)$ com imagem não fechada. Nesse sentido é importante destacar que, até agora, não se conhece nenhum exemplo de operador tauberiano em $\mathcal{B}(L_1(\nu))$ com imagem fechada que não seja de semi-Fredholm à direita.

Um dos espaços $L_1(\nu)$ mais estudados é a álgebra de grupo $(L_1(G), m)$, onde G é um grupo abeliano localmente compacto e m é uma medida regular positiva e invariante sob translações associada a G , denominada medida de Haar de G . Devido à importância desses grupos no desenvolvimento da análise harmônica, a álgebra $L_1(G)$ é um objeto interessante de estudo. A operação que torna $L_1(G)$ uma álgebra de Banach é chamada de convolução e definida, para cada $f, g \in L_1(G)$, como segue

$$(f * g)(x) = \int_G f(x)g(x - y)dm(y), \quad x \in G.$$

Por ser G abeliano, temos que $L_1(G)$ é uma álgebra de Banach comutativa. Sobre essa álgebra podemos definir, para cada medida regular μ sobre G , um operador T_μ denominado de convolução que atua da seguinte forma

$$(T_\mu(f))(x) = \int_G f(x - y) d\mu(y).$$

Em [18] tentaram responder à pergunta em que casos esses operadores de convolução têm imagem fechada. Esse problema foi completamente resolvido para grupos cujo grupo dual Γ é conexo. Mas em [25] os autores provaram que um operador de convolução T_μ tem imagem fechada se, e somente se, μ pode-se escrever como a convolução de uma medida invertível com uma medida idempotente. Portanto, a principal questão que deu origem ao presente trabalho foi o saber se, dado o bom comportamento dos operadores tauberianos em $\mathcal{B}(L_1(G), Y)$, um operador de convolução $T_\mu : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ é tauberiano se, e somente se, T_μ é de semi-Fredholm à direita?.

Nós resolvemos essa questão de forma afirmativa nos casos em que o grupo G não é compacto e para G um grupo discreto. Concretamente, se G é um grupo

abeliano localmente compacto não compacto, um operador de convolução T_μ é tauberiano se, e somente se, ele é invertível.

Se o grupo G é discreto, todos os operadores de convolução T_μ tauberianos são de Fredholm. Ou seja, o operador T_μ é de semi-Fredholm à direita e o espaço $L_1(G)/R(T_\mu)$ tem dimensão finita, com $R(T_\mu)$ a imagem de T_μ .

Se o grupo G é compacto existem operadores de convolução que não são invertíveis. Porém, nós mostramos que se a medida μ é uma medida discreta, o operador T_μ é tauberiano se, e somente se, ele é invertível. Mais ainda, usando a conhecida decomposição de medidas como a soma de uma medida discreta mais uma medida m -singular contínua e uma medida m -absolutamente contínua, respeito à medida de Haar m , temos que se a parte m -singular contínua de μ é zero, todo operador tauberiano T_μ é de Fredholm.

No caminho por fornecer uma resposta completa para o caso em que G é compacto foram aparecendo resultados interessantes sobre os operadores T_μ . Por exemplo, nós introduzimos o conceito de medida tauberiana, como uma medida μ tal que se sua convolução com qualquer outra medida ν é um elemento de $L_1(G)$, então ν deve pertencer a $L_1(G)$. Respeito a isso, nós damos uma resposta negativa à questão estabelecida por M. González [19]: uma medida μ é tauberiana se, e somente se, o operador T_μ é tauberiano?

Usando algumas propriedades que possui $L_1(G)$ como uma álgebra de Banach junto com o fato de que os operadores de convolução de $L_1(G)$ coincidirem com um tipo de operadores chamados de multiplicadores de $L_1(G)$ [29], que por sua vez comutam com as translações, nós demonstramos que se um operador de convolução é cotauberiano, então ele é tauberiano. Mais concretamente, eles são de Fredholm de índice zero, isto é, $L_1(G)/R(T_\mu)$ e $N(T_\mu)$ têm a mesma dimensão. Também obtivemos uma condição suficiente sobre uma medida tauberiana μ que torna o operador T_μ tauberiano.

Em termos gerais um operador $T : A \rightarrow A$, onde A é uma álgebra de Banach, é chamado de multiplicador de A se $(Tx)y = x(Ty)$ para todo x, y em A . Com isso em mente nós estendemos alguns dos resultados obtidos sobre operadores de convolução tauberianos em $L_1(G)$ para os multiplicadores de certas álgebras de

Banach, entre elas as C^* -álgebras.

Esta tese contém quatro capítulos. No capítulo 1 nós apresentamos os resultados preliminares que foram necessários para desenvolver todo o nosso trabalho.

No capítulo 2 usando propriedades de caracterização dos operadores tauberianos dadas pelas sequências disjuntas em $L_1(G)$, expomos e demonstramos nossos principais resultados sobre operadores de convolução tauberianos.

No capítulo 3 concentramos nossa atenção aos operadores de convolução que são cotauberianos sobre $L_1(G)$ usando as propriedades que tem $L_1(G)$ como uma álgebra de Banach e as propriedades de T_μ como um multiplicador de $L_1(G)$. Além disso, denotando por M_μ o operador de convolução sobre a álgebra de Banach $M(G)$, das medidas de Radon sobre G , nós demonstramos que M_μ é um operador tauberiano se, e somente se, T_μ é tauberiano.

No capítulo 4 damos ênfase aos multiplicadores de álgebras de Banach mais gerais, como as C^* -álgebras e a álgebra das funções contínuas sobre L que se anulam no infinito $C_0(L)$, onde L é um espaço de Hausdorff localmente compacto. Especificamente, demonstraremos que um multiplicador de $C_0(L)$ é tauberiano se, e somente se, é de Fredholm de índice zero.

Finalmente, no capítulo 5 estabelecemos alguns problemas para trabalhar no futuro que podem ser uma continuação desta tese.

INTRODUÇÃO

PRELIMINARES

No decorrer do presente capítulo vamos dar as principais definições e resultados que são usados no desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Na seção 1.1 vamos lembrar a definição de uma álgebra de Banach e vamos definir a subclasse das álgebras de Banach sem ordem. Também vamos introduzir um tipo de operadores sobre álgebras de Banach denominados de multiplicadores assim como suas características mas relevantes que usaremos nos capítulos 3 e 4.

Na seção 1.2 vamos definir a álgebra de grupo $L_1(G)$ e a álgebra de medidas $M(G)$ para um grupo G abeliano localmente compacto cujas propriedades são usadas nos capítulos 3 e 4.

Na seção 2.1 vamos tratar sobre os operadores de Fredholm.

Finalmente, as seções 1.4 e 1.5 são dedicadas aos operadores tauberianos e cotauberianos sobre espaços de Banach. Como é costume X e Y representam espaços de Banach e $\mathcal{B}(X, Y)$ denota o espaço de todas as aplicações lineares e limitadas de X em Y , se $X = Y$ esse espaço é denotado por $\mathcal{B}(X)$. Não vamos fazer nenhuma demonstração dos resultados apresentados a seguir, no entanto vamos indicar os textos onde podem ser encontradas as demonstrações e uma exposição mas detalhada desses temas.

1.1 Álgebras de Banach

No decorrer da presente seção vamos fornecer as definições de álgebras de Banach e alguns resultados da teoria dos multiplicadores. Uma muito completa e detalhada exposição desses conceitos pode ser encontrada em [29].

Definição 1.1 *Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach complexo A munido com uma multiplicação associativa e distributiva tal que*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}, a, b \in A)$$

e

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad (a, b \in A).$$

Se existir um elemento $e \in A$ tal que $ea = a$ para cada $a \in A$, então e é chamado de identidade à esquerda de A . Se $ae = a$ para todo $a \in A$, então e é dito de

identidade à direita de A . Se e é tanto identidade à direita quanto identidade à esquerda de A , então A é denominada uma álgebra com elemento unidade (ou uma álgebra unitária), e e é o elemento unidade de A . Um elemento $x \in A$ é dito invertível se existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$, o conjunto de todos os elementos invertíveis de A é denotado por $\mathcal{G}(A)$. A álgebra A é dita comutativa se $ab = ba$ para todos $a, b \in A$.

Como é conhecido, entre os conceitos de maior relevância no estudo das álgebras de Banach encontram-se os termos de espectro e resolvente que vamos definir a seguir.

Definição 1.2 Sendo A uma álgebra de Banach com unidade e , para cada $x \in A$ chama-se conjunto resolvente de x e representa-se por $\rho(x)$, o conjunto

$$\rho(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \in \mathcal{G}(A)\}.$$

O complemento em $\mathbb{C}$ de $\rho(x)$, chama-se de espectro de x e é representado por $\sigma(x)$. Tem-se que

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin \mathcal{G}(A)\}.$$

Para X um espaço de Banach complexo, indicaremos por $\mathcal{B}(X)$ a álgebra de Banach de todos os operadores lineares e limitados de X em X , cujo produto é a composição de operadores e seu unidade é o operador identidade I . Se $T \in \mathcal{B}(X)$ seu espectro $\sigma(T)$ é dividido em três conjuntos disjuntos como segue.

Definição 1.3 Para um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ definimos seu espectro pontual $\sigma_p(T)$ como o conjunto

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq 0\}.$$

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, λ é dito de valor próprio de T , isto é, λ é um valor próprio de T se existe $f \in X$ não nulo tal que $\lambda f = T(f)$. O espectro contínuo de T , $\sigma_c(T)$ é o conjunto

$$\sigma_c(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = 0, \overline{R(\lambda I - T)} = X \text{ e } R(\lambda I - T) \neq X \right\}$$

O espectro residual de T , $\sigma_r(T)$ é o conjunto

$$\sigma_r(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = 0 \text{ e } \overline{R(\lambda I - T)} \neq X \right\}.$$

Vamos definir um tipo de operador sobre uma álgebra de Banach cuja origem remonta à análise harmônica.

Definição 1.4 Seja A uma álgebra de Banach. Uma aplicação $T : A \rightarrow A$ é um

multiplicador se $(Tx)y = x(Ty)$ para cada $x, y \in A$.

Vamos introduzir um tipo de álgebras de Banach sobre as quais os multiplicadores têm propriedades interessantes.

Definição 1.5 *Seja A uma álgebra de Banach. Dado $E \subset A$, definimos o aniquilador esquerdo de E como sendo*

$$l(E) = \{m \in A : m \cdot E = \{0\}\}.$$

Analogamente, definimos o aniquilador direito de E como sendo

$$r(E) = \{n \in A : E \cdot n = \{0\}\}.$$

Uma álgebra de Banach A é chamada de sem ordem se $l(A) = \{0\}$ ou $r(A) = \{0\}$. A coleção de todos os multiplicadores de A é denotado por $\mathcal{M}(A)$.

Claramente $\mathcal{M}(A)$ é um espaço linear e $\mathcal{M}(A) \neq \{0\}$ pois o operador identidade $I \in \mathcal{B}(A)$ pertence a $\mathcal{M}(A)$. Note que na definição de multiplicador não assumimos linearidade nem continuidade para o operador T . O seguinte teorema estabelece que tais propriedades são consequência da definição.

Teorema 1.1 *Seja A uma álgebra de Banach sem ordem. Então $\mathcal{M}(A)$ é uma subálgebra fechada e comutativa de $\mathcal{B}(A)$ que contém o operador identidade de $\mathcal{B}(A)$.*

Demonstração: Ver [29, Teorema 1.1.1]. □

Observação 1.1 Notemos que se A é uma álgebra de Banach sem ordem e T é um multiplicador de A , $T(xy) = (Tx)y = x(Ty)$, $x, y \in A$. De fato, vamos supor $l(A) = \{0\}$. Então, para cada $w \in A$, temos $((Tx)y)w = (x(Ty))w = x(y(Tw)) = (T(xy))w$, portanto $((Tx)y - T(xy))w = 0$. Logo $(Tx)y - T(xy) \in l(A)$ e temos que $(Tx)y = T(xy)$. O mesmo vale se $r(A) = \{0\}$.

O seguinte resultado estabelece que $\mathcal{M}(A)$ é fechado sob inversão.

Teorema 1.2 *Sejam A uma álgebra de Banach sem ordem e T um multiplicador de A . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é bijetivo;
- (ii) T^{-1} existe e é um multiplicador de A .

Demonstração: Ver [29, Teorema 1.1.3]. □

Definição 1.6 *Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Uma rede limitada $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subset A$ é uma identidade aproximada se para cada $a \in A$ temos*

$$\lim_{\alpha} \|ae_\alpha - a\| = 0.$$

1.2 A álgebra de grupo $L_1(G)$

Nesta seção vamos lembrar o significado da ordem de um elemento em um grupo. Vamos introduzir as definições de grupo abeliano localmente compacto, o conceito de grupo dual, assim como os principais exemplos obtidos da teoria clássica da análise harmônica. Estabeleceremos o espaço $M(G)$ das medidas complexas regulares sobre a σ -álgebra de Borel de G , que vamos denotar por $B(G)$. Sobre essa álgebra introduziremos um produto chamado de convolução, com esse produto $M(G)$ é uma álgebra de Banach comutativa. Como um ideal de $M(G)$ obtemos a álgebra de grupo $L_1(G)$. O resto da seção complementa os conceitos anteriores com alguns resultados que serão úteis mais para a frente.

Da teoria clássica de grupos abelianos vamos precisar da seguinte:

Definição 1.7 *Seja $(G, +, 0)$ um grupo abeliano, um elemento $g \in G$ tem ordem finita se existe um inteiro positivo m tal que $mg = 0$ (onde mg denota a soma de m cópias de g). A ordem de g é $\min \{j \in \mathbb{N} : jg = 0\}$. Se não existe nenhum $i \in \mathbb{N}$ tal que $ig = 0$, então dizemos que g não tem ordem finita.*

Definição 1.8 *Um grupo abeliano localmente compacto é uma trinca $(G, +, \tau)$, onde $(G, +, 0)$ é um grupo algébrico abeliano e (G, τ) um espaço topológico Hausdorff localmente compacto, com as operações:*

- (i) $(x, y) \in G \times G \rightarrow x + y \in G$
- (ii) $x \in G \rightarrow -x \in G$

são contínuas.

Definição 1.9 *Uma função complexa γ sobre um grupo abeliano localmente compacto G é chamada de um caráter de G se $|\gamma(x)| = 1$ para todo $x \in G$ e se a equação funcional*

$$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad (x, y \in G)$$

é satisfeita.

O conjunto de todos os caracteres contínuos de G é um grupo, chamado de grupo dual de G e denotado por Γ , com a adição definida por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x).$$

Os exemplos mais relevantes são os grupos clássicos da análise harmônica:

- (a) O grupo aditivo $\mathbb{R}$ dos números reais, com a topologia natural da reta real;
- (b) o grupo aditivo dos números reais módulo 2π , ou, equivalentemente, o grupo do círculo $\mathbb{T}$ sob o produto dos números complexos, onde

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\};$$

- (c) o grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.

Os grupos duais desses grupos são bem conhecidos (ver [33, Exemplo 1.2.7]). Tem-se que o grupo dual de $\mathbb{R}$ pode-se identificar com $\mathbb{R}$, o grupo dual de $\mathbb{T}$ é identificado com $\mathbb{Z}$ e o grupo dual de $\mathbb{Z}$ se identifica com $\mathbb{T}$.

A seguinte definição tem-se para qualquer espaço de Hausdorff localmente compacto X .

Definição 1.10 *Uma medida complexa sobre um espaço de medida (X, Σ) é uma aplicação $\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

- (i) $\lambda(\emptyset) = 0$, e
- (ii) *se $\{E_j\}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em Σ , então $\lambda(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)$, onde a série do lado direito converge absolutamente. Em particular, não são tomados valores infinitos, uma medida positiva é uma medida complexa só se é finita.*

Definição 1.11 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Uma medida μ não negativa sobre a σ -álgebra de Borel de G é chamada de regular se*

$$\mu(E) = \inf \{\mu(U) : E \subset U, U \text{ aberto}\} = \sup \{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}. \quad (1.1)$$

Uma medida complexa λ tem uma decomposição $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3 - i\lambda_4$ com $\lambda_j \geq 0$, portanto λ é chamada de regular se cada λ_j é regular no sentido da fórmula 1.1.

Note que o requerimento de que $\lambda(E)$ seja um número complexo exclui a possibilidade de $\lambda(E) = \infty$. Com isso em mente estamos prontos para dar a seguinte:

Definição 1.12 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. $M(G)$ é o conjunto de todas as medidas complexas de Borel sobre G as quais são regulares.*

Podemos definir uma norma em $M(G)$ pondo:

$$\|\mu\| = |\mu|(G) = \sup \left(\sum \mu(E_i) \right), \quad (\mu \in M(G)). \quad (1.2)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coleções finitas de conjuntos de Borel E_i dois a dois disjuntos cuja união é G . $|\mu|$ é chamada de variação total da medida μ . Não é difícil ver que $\|\mu\| < \infty$ (ver [16, Proposição 7.17]).

Na verdade, $M(G)$ pode se tornar uma álgebra de Banach, como estabelece o seguinte:

Teorema 1.3 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então $M(G)$ é um álgebra de Banach comutativa com identidade sob o produto de convolução*

$$\mu * \lambda(E) = \int_G \mu(E - x) d\lambda(x), \quad (\mu, \lambda \in M(G)).$$

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.3.2]. □

Vamos definir a transformada de Fourier-Stieltjes sobre $M(G)$.

Definição 1.13 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Para todo $\mu \in M(G)$, a função $\hat{\mu}$ definida sobre Γ por*

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) d\mu(x) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

é chamada de a transformada de Fourier-Stieltjes de μ .

O seguinte teorema contém algumas das propriedades mais importantes da transformada de Fourier-Stieltjes de uma medida μ .

Teorema 1.4 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e Γ seu grupo dual. Então*

- (a) *Cada função $\hat{\mu}$ é limitada e uniformemente contínua.*
- (b) *Se $\omega = \mu * \lambda$, então $\hat{\omega}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)\hat{\lambda}(\gamma)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Então a aplicação $\mu \rightarrow \hat{\mu}(\gamma)$ é, para cada $\gamma \in \Gamma$, um homomorfismo complexo de $M(G)$.*

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.3.3]. □

Porém, temos um resultado sobre unicidade, isto é, $\hat{\mu}$ determina μ .

Teorema 1.5 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e Γ seu grupo dual. Se $\mu \in M(G)$ e $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\mu = 0$.*

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.3.6]. □

Sobre cada grupo abeliano localmente compacto G existe uma medida regular não negativa m definida sobre a σ -álgebra de Borel de G , chamada de *medida de*

Haar de G , que não é identicamente zero e é invariante por translações. Isto é,

$$m(E + x) = m(E)$$

para cada $x \in G$ e cada conjunto de Borel E em G . Para a construção de tal medida ver [16, Teorema 10.5]. A medida de Haar de G está em $M(G)$ só se G for compacto.

É importante destacar que, se o grupo G é compacto, é habitual normalizar m de modo que $m(G) = 1$. A medida de Haar é única a menos de uma constante multiplicativa positiva, como o estabelece o seguinte:

Teorema 1.6 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Se m e $\hat{m}$ são duas medidas de Haar sobre G , então $\hat{m} = \lambda m$ onde λ é uma constante positiva.*

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.1.3]. □

Definição 1.14 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto e seja $\mu \in M(G)$. Dizemos que uma medida μ está concentrada no conjunto mensurável E sempre que $\mu(A) = 0$ quando $E \cap A = \emptyset$.*

Se μ está concentrada em um conjunto enumerável, então μ é dita uma medida discreta.

Se $\mu(E) = 0$ para cada conjunto enumerável E , μ é dita de medida contínua.

Se $\mu(E) = 0$ sempre que $m(E) = 0$ para a medida de Haar m , a medida μ é denominada de medida m -absolutamente contínua.

Finalmente se μ está concentrada em um conjunto E com $m(E) = 0$, μ é dita medida m -singular.

Definição 1.15 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $x \in G$. Denotamos por δ_x a medida que satisfaz $\delta_x(F) = 1$ se $x \in F$ e $\delta_x(F) = 0$ se $x \notin F$, para cada conjunto mensurável F , δ_x é chamada de medida unitária concentrada em x .*

Observação 1.2 Note que se $\nu \in M(G)$ é uma medida discreta, então existem um conjunto enumerável $\{x_j\} \subset G$ e números complexos $\{\alpha_j\}$ tais que

$$\mu = \sum_j \alpha_j \delta_{x_j}, \quad \sum |\alpha_j| < \infty. \quad (1.3)$$

O seguinte resultado é bem conhecido na teoria da medida (ver [16]). Porém, vamos fornecer uma demonstração.

Lema 1.1 *Seja $\mu \in M(G)$. Então μ pode-se escrever de forma única como $\mu =$*

$\mu_d + \mu_c$ onde μ_d é uma medida discreta e μ_c uma medida contínua.

Demonstração: Seja $E := \{x \in G : \mu(\{x\}) \neq 0\}$. Se F é qualquer subconjunto enumerável de E a serie $\sum_{x \in F} \mu(\{x\})$ converge absolutamente para $\mu(F)$. Portanto $\{x \in E : |\mu(\{x\})| > \frac{1}{k}\}$ é finito para todo $k \in \mathbb{N}$, logo E deve ser enumerável. Então $\mu_d(A) := \mu(A \cap E)$ é uma medida discreta e $\mu_c(A) := \mu(A \setminus E)$ é contínua. $\square$

Definição 1.16 Para cada $\mu \in M(G)$, definimos a medida $\tilde{\mu} \in M(G)$ por

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(-E)$$

onde $-E = \{-x : x \in E\}$, para cada $E \in B(G)$. Analogamente, para $f \in L_1(G)$ definimos $\tilde{f} \in L_1(G)$ por

$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

Agora, vamos definir os espaços que vamos usar em nosso trabalho.

Definição 1.17 Seja G um grupo abeliano localmente compacto e m a medida de Haar de G . Denotamos por $L_1(G)$ o conjunto de todas as funções f sobre G mensuráveis respeito a m tais que

$$\|f\|_1 = \int_G |f| dm,$$

é finita.

Observe que se identificamos as funções de Borel que só diferem sobre um conjunto E com $m(E) = 0$, $L_1(G)$ torna-se um espaço de Banach.

Vamos definir a transformada de Fourier sobre $L_1(G)$

Definição 1.18 Seja G um grupo abeliano localmente compacto e Γ seu grupo dual. Para todo $f \in L_1(G)$, a função $\hat{f}$ definida sobre Γ por

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x) \gamma(-x) dm(x) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

é chamada de Transformada de Fourier de f .

Portanto as transformadas de Fourier, para os grupos clássicos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{T}$, têm as seguintes formas:

$$G = \mathbb{R} : \quad \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx \quad (y \in \mathbb{R}),$$

$$G = \mathbb{T} : \quad \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$G = \mathbb{Z} : \quad \widehat{f}(e^{i\alpha}) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\alpha} \quad (e^{i\alpha} \in \mathbb{T}).$$

Note que para um grupo G compacto $\Gamma \subset L_1(G)$, podemos estabelecer a seguinte:

Definição 1.19 *Sejam G um grupo abeliano compacto e Γ seu grupo dual, a série formal $\sum_{\gamma \in \Gamma} \widehat{f}(\gamma) \gamma$ é conhecida como a série de Fourier de $f \in L_1(G)$. Uma combinação linear finita de caracteres contínuos, $P = \sum_{j=1}^N a_j \gamma_j$, é chamada de polinômio trigonométrico.*

Teorema 1.7 *Sejam G um grupo abeliano compacto e Γ seu grupo dual. Então o conjunto dos polinômios trigonométricos é denso em $L_1(G)$.*

Demonstração: Ver [15, Corolário 14.8]. □

Definição 1.20 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto e m a medida de Haar de G . Denotamos por $L_\infty(G)$ o espaço de todas as funções f mensuráveis respeito a m tais que*

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in G} |f(x)| = \inf \{ \lambda > 0 : m(\{x : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \}$$

é finita. Identificando as funções de Borel que só diferem sobre um conjunto cuja medida de Haar é zero, $L_\infty(G)$ torna-se um espaço de Banach. Então $f \in L_\infty(G)$ se, e somente se, existe uma função de Borel limitada g tal que $f = g$ a menos de um conjunto de medida nula.

Como é bem conhecido, o espaço dual de $L_1(G)$ é isometricamente isomorfo com $L_\infty(G)$ [16, Teorema 6.5]. Note que quando G é um grupo abeliano localmente compacto, $\Gamma \subset L_\infty(G)$. Além disso, a cada $f \in L_1(G)$ podemos associar uma medida m -absolutamente contínua $m_f \in M(G)$:

$$m_f(E) = \int_E f dm.$$

Para mais clareza, nós reescreveremos o conhecido Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým da seguinte forma:

Teorema 1.8 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\nu \in M(G)$. Então existe uma única medida m -singular λ e uma única função f em $L_1(G)$ tais que $\nu = \lambda + m_f$.*

Demonstração: Ver [16, Teorema 3.12]. $\square$

Como consequência temos que para cada μ m -absolutamente contínua respeito à medida de Haar m , existe uma única $f \in L_1(G)$ tal que $\mu = m_f$. Então $L_1(G)$ pode ser visto como o subespaço fechado de $M(G)$ de todas as medidas absolutamente contínuas respeito a m . Ele torna-se uma álgebra de Banach comutativa com a convolução definida por

$$(f * g)(x) = \int_G f(x)g(x - y)dm(y) \quad (f, g \in L_1(G)). \quad (1.4)$$

A álgebra $L_1(G)$ é usualmente chamada de *álgebra de grupo* de G . Na verdade $L_1(G)$ é um ideal bilateral de $M(G)$ e não é difícil mostrar que $L_1(G)$ possui identidade se, e somente se, o grupo G é discreto (ver [33, 1.7.3]). Logo $L_1(G) = M(G)$ se, e somente se, o grupo G é discreto.

Na verdade é possível definir a convolução entre uma função de $L_1(G)$ e uma função em $L_\infty(G)$, igual que na fórmula 1.4. Temos o seguinte:

Teorema 1.9 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Se $f \in L_1(G)$ e $\varphi \in L_\infty(G)$, então $f * \varphi$ é limitada e uniformemente contínua.*

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.1.6]. $\square$

Portanto se G é compacto, $L_\infty(G) \subset L_1(G)$ e a inclusão é contínua, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ para cada $f \in L_\infty(G)$, e temos que $L_\infty(G)$ é uma álgebra de Banach comutativa com o produto de convolução.

Vamos agora definir um subespaço de $L_\infty(G)$ que será usado nos próximos capítulos. Para fazer isso vamos primeiro estabelecer a seguinte:

Definição 1.21 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida de um espaço topológico e localmente compacto X em $\mathbb{C}$. Dizemos que f se anula no infinito se para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K_ϵ de X tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \notin K_\epsilon$.*

Definição 1.22 *Seja X um espaço topológico localmente compacto. Denotamos por $C_0(X)$ o espaço de Banach de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas que se anulam no infinito, munido da norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Para um grupo G compacto, $C_0(G)$ coincide com o espaço de todas as funções contínuas a valor complexo $C(G)$ sobre G , e é uma álgebra de Banach munida com o produto de convolução. Além disso, para qualquer grupo abeliano localmente compacto, o seguinte teorema estabelece que o espaço dual de $C_0(G)$ pode-se identificar com $M(G)$.

Teorema 1.10 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto, e para $\mu \in M(X)$ e $f \in C_0(X)$ seja $I_\mu(f) = \int_X f d\mu$. Então a aplicação $\mu \rightarrow I_\mu$ é um isomorfismo isométrico de $M(X)$ em $(C_0(X))^*$.*

Demonstração: Ver [16, Teorema 7.17]. □

Vamos precisar da seguinte definição para introduzir um muito importante subespaço de $C_0(G)$.

Definição 1.23 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua definida de um espaço topológico X em $\mathbb{C}$. O suporte de f é definido como:*

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

A função f é dita ter suporte compacto se $\text{supp}(f)$ for um subconjunto compacto de X .

Definição 1.24 *Seja X um espaço topológico localmente compacto. Denotamos por $C_c(X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ que têm suporte compacto, munido da norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

É claro que $C_c(G) \subset L_1(G)$ e se G for compacto temos, para cada $f \in C_c(G)$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Além disso, como a medida de Haar m é regular, se G for localmente compacto, temos que $C_c(G)$ é denso em $L_1(G)$ (ver [16, Proposição 7.9]).

1.3 Operadores de Fredholm

Os operadores de Fredholm são uma classe bem conhecida e muito relevante na teoria dos espaços de Banach, vamos lembrar essa definição.

Definição 1.25 *Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é dito de semi-Fredholm à direita se sua imagem $R(T)$ é fechada e seu núcleo $N(T)$ tem dimensão finita. O conjunto de todos os operadores de semi-Fredholm à direita é denotado por $\Phi_+(X, Y)$.*

Um operador T é chamado de semi-Fredholm à esquerda se o espaço $Y/R(T)$

tem dimensão finita. Então $R(T)$ é fechada (ver [1, Corolário 1.15]). O conjunto de todos os operadores de semi-Fredholm à esquerda é denotado por $\Phi_-(X, Y)$.

Um operador T é chamado de semi-Fredholm se T é de semi-Fredholm à direita ou de semi-Fredholm à esquerda.

O índice de um operador semi-Fredholm T é a diferença entre a dimensão de $N(T)$ e a dimensão de $Y/R(T)$. O índice toma valores em $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

Um operador T é chamado de Fredholm se é de semi-Fredholm à direita e de semi-Fredholm à esquerda. O conjunto de todos os operadores de Fredholm é denotado por $\Phi(X, Y)$.

Dentre os resultados sobre operadores de Fredholm vamos precisar do seguinte:

Teorema 1.11 *Sejam $T, U \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Então*

- (i) *Se ST é de Fredholm, então T é de semi-Fredholm à direita e S é de semi-Fredholm à esquerda.*
- (ii) *Se T é Fredholm e U é compacto, então $T + U$ é de Fredholm.*

Demonstração: Ver [2, Teorema 1.46 e Teorema 1.56]. □

1.4 Operadores tauberianos

Nesta seção vamos introduzir a definição de operador tauberiano e os resultados de maior relevância que foram usados para o desenvolvimento de nosso trabalho. Além disso, vamos dedicar uma subseção aos operadores tauberianos sobre $L_1(\mu)$, onde μ é uma medida σ -finita; nesses espaços os operadores tauberianos apresentam um comportamento privilegiado que não possuem em espaços de Banach arbitrários. Como $L_1(G)$ faz parte desse tipo de espaços, fazemos uma introdução das propriedades mais destacadas que vamos usar. Uma exposição bem detalhada sobre esse tema pode ser encontrada em [22, Capítulo 2].

No decorrer do capítulo, vamos denotar por i_X a aplicação canônica de X em seu segundo adjunto X^{**} , para qualquer espaço de Banach X .

A seguinte definição de operador tauberiano foi formalmente introduzida por Kalton e Wilansky em [27].

Definição 1.26 *Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é dito tauberiano se $T^{**^{-1}}i_Y(Y) \subset i_X(X)$, isto é, T é tauberiano se satisfaz, $Tx^{**} \in X$ para algum $x^{**} \in X$ só se $x^{**} \in X$.*

Teorema 1.12 *Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é tauberiano se, e somente se, cada sequência limitada (x_n) em X tal que (Tx_n) é convergente, contém uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração: Ver [22, Teorema 2.2.4]. □

O exemplo mais trivial de operador tauberiano é o operador identidade sobre um espaço de Banach X . Agora vamos definir um tipo de operador muito conhecido cujo segundo adjunto vai se comportar de forma oposta ao de um operador tauberiano.

Definição 1.27 *Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é dito fracamente compacto se para cada subconjunto limitado $B \subset X$, $T(B)$ é relativamente fracamente compacto.*

Para ter mais clareza do por que os operadores fracamente compactos têm um comportamento de certa forma oposto ao dos operadores tauberianos precisamos do seguinte:

Teorema 1.13 *Sejam X e Y espaços de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $i_Y : Y \rightarrow Y^{**}$ a inclusão canônica. Então T é fracamente compacto se, e somente se, $T^{**}(X^{**}) \subseteq i_Y(Y)$.*

Demonstração: Ver [32, Teorema 3.5.8]. □

É possível dar uma caracterização algébrica dos operadores tauberianos em termos dos operadores fracamente compactos.

Teorema 1.14 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é tauberiano se, e somente se, para cada espaço de Banach Z e $S \in \mathcal{B}(Z, X)$, se TS é fracamente compacto, então S é fracamente compacto.*

Demonstração: Ver [32, Teorema 3.5.8]. □

Agora vamos dar outras propriedades importantes dos operadores tauberianos.

Proposição 1.1 *Sejam T e S um par de operadores em $\mathcal{B}(X, Y)$ e U um operador em $\mathcal{B}(Y, Z)$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *se os dois T e U são tauberianos, então UT é tauberiano;*
- (ii) *se UT é tauberiano, então T é tauberiano;*
- (iii) *T é tauberiano e fracamente compacto se, e somente se, X é reflexivo;*
- (iv) *se T é tauberiano e S é fracamente compacto, então $T + S$ é tauberiano.*

Demonstração: Ver [22, Proposição 2.1.3]. □

Note que o conjunto dos operadores tauberianos entre dois espaços de Banach X e Y pode ser vazio, pois se, por exemplo, Y é reflexivo todos os operadores em $\mathcal{B}(X, Y)$ são fracamente compactos e se X não é reflexivo, pela parte (iii) da Proposição 1.1, nenhum operador em $\mathcal{B}(X, Y)$ pode ser tauberiano.

Lema 1.2 *Seja Z um subespaço fechado de X . Então o mergulho canônico $J_Z : Z \rightarrow X$ é tauberiano*

Demonstração: Ver [22, Proposição 2.1.4]. □

Observação 1.3 Como uma consequência do item (ii) da Proposição 1.1 e do Lema 1.2, temos que para um operador tauberiano $T : X \rightarrow Y$ e um subespaço fechado Z de X a restrição de T a Z é tauberiano.

Agora, como T pode-se identificar com uma restrição de T^{**} , da Observação 1.3 temos que se um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é tal que T^{**} é tauberiano, então T é tauberiano. Mas a implicação contrária, em geral, não é verdade (ver [5]). O que temos é o seguinte resultado para operadores com imagem fechada.

Proposição 1.2 *Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ um operador com imagem fechada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é tauberiano;
- (ii) T^{**} é tauberiano;
- (iii) o núcleo $N(T)$ é reflexivo.

Demonstração: Ver [22, Teorema 2.1.5, Corolário 3.1.6]. □

Definição 1.28 *Dado um espaço de Banach X , denotamos por X^{co} o espaço quociente X^{**}/X . Para $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, a aplicação $T^{co} : X^{co} \rightarrow Y^{co}$ definida por*

$$T^{co}(z + X) := T^{**}z + Y, \quad z + X \in X^{co}$$

é chamada de operador resíduo de T .

Proposição 1.3 *Para um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $T^{co} \in \mathcal{B}(X^{co}, Y^{co})$ e $\|T^{co}\| \leq \|T\|$;
- (ii) T é fracamente compacto se, e somente se, $T^{co} = 0$;
- (iii) T é tauberiano se, e somente se, T^{co} é injetivo.

Demonstração: Ver [22, Proposição 3.1.8]. $\square$

Proposição 1.4 *Um espaço de Banach X não contém subespaços reflexivos de dimensão infinita se, e somente se, os operadores de semi-Fredholm à direita, $\Phi_+(X, Y)$, de X em qualquer espaço de Banach Y , coincidir com o conjunto dos operadores tauberianos de X em Y .*

Demonstração: Ver [22, Corolário 2.2.8]. $\square$

1.4.1 Operadores tauberianos sobre $L_1(\mu)$

Não é difícil provar que se um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é tauberiano, então $N(T) = N(T^{**})$, isso vai implicar que $N(T)$ é reflexivo. Essas duas propriedades não são equivalentes (ver [22, Exemplo 2.1.14]). Mas, se (X, Σ, μ) é um espaço de medida e μ uma medida σ -finita, para os operadores em $\mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$ temos a seguinte:

Proposição 1.5 *Seja μ uma medida σ -finita. Um operador $T \in \mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$ é tauberiano se, e somente se, $N(T) = N(T^{**})$.*

Demonstração: Ver [22, Proposição 4.1.2]. $\square$

Definição 1.29 *Uma sequência de funções $(f_n)_n$ em $L_1(\mu)$ é dita ser disjunta se $f_i(x)f_j(x) = 0$ para quase todo $x \in G$, sempre que $i \neq j$.*

Definição 1.30 *Seja $f \in L_1(\mu)$, denotamos por $D(f)$ ao conjunto*

$$D(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Teorema 1.15 *Seja μ uma medida σ -finita. Para um operador $T \in \mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é tauberiano;
- (b) para uma sequência normalizada e disjunta $(f_n)_n$ contida em $L_1(\mu)$,

$$\liminf_n \|Tf_n\| > 0;$$

- (c) existe um número $r > 0$ tal que para cada sequência normalizada e disjunta $(f_n)_n$ em $L_1(\mu)$,

$$\liminf_n \|Tf_n\| > r;$$

- (d) para cada sequência normalizada $(f_n)_n$ contida em $L_1(\mu)$ tal que $\lim_n \mu(D(f_n)) =$

0, temos

$$\liminf_n \|Tf_n\| > 0.$$

Demonstração: Ver [22, Teorema 4.1.3, Teorema 4.1.8]. $\square$

Proposição 1.6 *Seja μ uma medida σ -finita. Então o conjunto dos operadores tauberianos de $L_1(\mu)$ em Y é um subconjunto aberto de $\mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$.*

Demonstração: Ver [22, Corolário 4.1.4]. $\square$

Outra característica que possui um operador $T \in \mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$ é que se T é tauberiano, então T^{**} é tauberiano. Como mencionamos antes essa propriedade só é satisfeita por operadores com imagem fechada em espaços arbitrários.

Teorema 1.16 *Seja μ uma medida σ -finita. Para um operador $T \in \mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é tauberiano;
- (b) T^{co} é injetivo com imagem fechada;
- (c) T^{**} é tauberiano.

Demonstração: Ver [22, Teorema 4.4.2]. $\square$

1.5 Operadores cotauberianos

Finalmente, a presente seção abarca as principais características dos operadores cotauberianos e esboça alguns dos resultados obtidos até o momento sobre esses operadores. Uma exposição bem detalhada sobre esse tema pode ser encontrada em [22, Capítulo 3].

Na verdade, que um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ seja tauberiano não é uma propriedade que seja preservada por conjugação, isto é, existem operadores tauberianos cujo adjunto T^* não vai ser tauberiano. Portanto faz sentido estudar aqueles operadores que possuem tal propriedade.

Definição 1.31 *Um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é dito cotauberiano quando T^* é tauberiano.*

A seguinte proposição contém os resultados que vamos precisar sobre os operadores cotauberianos.

Proposição 1.7 *Para um operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) T é cotauberiano;
- (b) T^{co} tem imagem densa;
- (c) $R(T^{**}) + Y$ é denso em Y^{**} .

Demonstração: Ver [22, Corolário 3.1.12]. □

Proposição 1.8 *Seja $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ um operador com imagem fechada. Então T é cotauberiano se, e somente se, $\frac{Y}{R(T)}$ é reflexivo.*

Demonstração: Ver [22, Proposição 3.1.5]. □

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO TAUBERIANOS SOBRE $L_1(G)$

Este capítulo será dedicado a fazer uma exposição em detalhe dos resultados sobre os operadores de convolução de $L_1(G)$, onde G é um grupo abeliano localmente compacto. Primeiro, na seção 2.1 vamos introduzir os operadores de convolução e algumas de suas propriedades. Depois, na seção 2.2, vamos estabelecer o comportamento do espectro, com maior relevância do espectro pontual, de um operador de convolução T_μ .

Na seção 2.3 vamos nos referir ao caso em que G é um grupo discreto, onde temos que para um operador de convolução sobre $L_1(G)$ ser tauberiano é equivalente a ser de Fredholm de índice zero. Mais especificamente, no caso em que G seja um grupo discreto e finito temos que os operadores de convolução coincidem com a convolução por um elemento de $L_1(G)$, portanto todos os operadores de convolução são compactos. Isso contrasta com o fato de que se G é um grupo cujo grupo dual Γ não contém pontos isolados, por exemplo $\mathbb{R}$, temos que nenhum operador T_f distinto de zero é fracamente compacto.

Na seção 2.4 vamos nos concentrar no caso em que o grupo G é não compacto, sob essa condição nós provamos que os operadores de convolução tauberianos são operadores invertíveis.

Na seção 2.5 consideramos o caso em que G é compacto, pois ser tauberiano e ser invertível não são equivalentes para T_μ , se G possui essa característica. Porém nós provamos, usando a caracterização para os operadores tauberianos da subseção 1.4.1 por meio de sequências disjuntas, que se a parte m -singular contínua da medida μ é zero, o operador T_μ é tauberiano se, e somente se, T_μ é invertível.

Finalmente, na seção 2.6 vamos introduzir o conceito de medida tauberiana para poder dar uma resposta negativa à questão sobre se toda medida tauberiana gera um operador de convolução tauberiano. Essa pergunta foi estabelecida por M. González em [19].

2.1 Operadores de convolução

Esta seção contém a definição de operador de convolução em $M(G)$ e $L_1(G)$. Como nossos principais resultados foram obtidos sobre esses operadores é preciso elucidar algumas das principais características que possuem e que vamos precisar mais para frente. Em particular vamos lembrar a definição de operador de Fredholm e apresentar algumas condições para que um operador de convolução seja de Fredholm.

Por ser $M(G)$ uma álgebra de Banach com a operação de convolução de medidas, podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 2.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Definimos o operador de convolução $M_\mu : M(G) \rightarrow M(G)$ por*

$$M_\mu \nu = \mu * \nu.$$

Sejam $m_f \in M(G)$ a medida associada com $f \in L_1(G)$ e $E \in B(G)$, então pelo bem conhecido Teorema de Fubini-Tonelli (ver [16, Teorema 7.27]), temos

$$\begin{aligned} M_\mu m_f(E) &= \int_G m_f(E - y) d\mu(y) \\ &= \int_G \left(\int_E f(x - y) dm(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_E \left(\int_G f(x - y) d\mu(y) \right) dm(x). \end{aligned}$$

Então $M_\mu m_f$ é m -absolutamente contínua. Portanto a função

$$(\mu * f)(x) := \int_G f(x - y) d\mu(y) \quad (x \in G)$$

está bem definida e pertence a $L_1(G)$. Temos a seguinte:

Definição 2.2 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Definimos o operador de convolução $T_\mu : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ por*

$$T_\mu f = \mu * f.$$

Uma propriedade importante e útil dos operadores T_μ é que, para um grupo abeliano localmente compacto, a álgebra de grupo $L_1(G)$ possui equivalentes caracterizações para seus multiplicadores. Antes de estabelecer formalmente esse resultado, vamos definir os operadores de translação.

Definição 2.3 *Seja $x \in G$, onde G é um grupo abeliano localmente compacto, o operador $T_x : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$, $(T_x f)(y) = f(y - x)$ para cada $f \in L_1(G)$ é chamado de operador de translação.*

Note que os operadores de translação são bem definidos devido à invariância sob translações da medida de Haar m .

O resultado principal sobre os multiplicadores de $L_1(G)$ está contido no seguinte:

Teorema 2.1 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto e suponha $S : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ um operador linear limitado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *S comuta com os operadores de translação, isto é, $ST_x = T_x S$ para cada $x \in G$;*
- (ii) *$S(f * g) = Sf * g$ para cada $f, g \in L_1(G)$;*
- (iii) *existe uma única medida $\mu \in M(G)$ tal que $Sf = \mu * f$ para cada $f \in L_1(G)$.*

Demonstração: Ver [29, Teorema 0.1.1]. □

Em particular, os operadores de convolução sobre $L_1(G)$ coincidem com os multiplicadores de $L_1(G)$.

Outro resultado importante sobre os operadores de convolução da álgebra de grupo $L_1(G)$ é o seguinte:

Teorema 2.2 *Seja G um grupo abeliano compacto. Seja $\mu \in M(G)$ tal que $\mu \in L_1(G)$. Então T_μ é um operador compacto.*

Demonstração: Ver [12, Lema 2.1.4]. □

O seguinte teorema, de B. Host e F. Parreau, estabelece quando um operador de convolução T_μ tem imagem fechada.

Teorema 2.3 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Então o operador de convolução T_μ tem imagem fechada se, e somente se, $\mu = \nu * \xi$, onde $\nu, \xi \in M(G)$, ν é invertível e ξ é idempotente.*

Demonstração: Ver [25, Teorema 1]. □

Nós vamos precisar da seguinte consequência.

Corolário 2.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Suponha que o operador de convolução T_μ tem imagem fechada. Então $L_1(G) =$*

$$R(T_\mu) \oplus N(T_\mu).$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.3 $\mu = \nu * \xi$ onde ν é invertível e ξ é idempotente. Então T_ξ é uma projeção e, pela comutatividade do produto de convolução em $M(G)$, temos que $T_\mu = T_\nu T_\xi = T_\xi T_\nu$. Portanto $N(T_\xi) = N(T_\mu)$ e $R(T_\xi) = R(T_\mu)$. $\square$

O seguinte exemplo ilustra que em $G = \mathbb{T}$ podemos encontrar operadores de convolução com imagem fechada e núcleo tanto de dimensão finita quanto de dimensão infinita.

Exemplo 2.1 Se $G = \mathbb{T}$ temos que $m \in M(G)$ e $m * m = m$. Logo T_m é uma projeção. Portanto $R(T_m)$ e $R(I - T_m)$ são fechados. Por outro lado, $\widehat{m}(n) = 0$ se $n \neq 0$ e $\widehat{m}(0) = 1$, então para $n \neq 0$, as funções $f_n(x) = e^{inx}$ estão contidas em $N(T_m)$, pois $T_m(f_n) = \widehat{m}(n)f_n$. Então a dimensão de $N(T_m)$ é infinita. Se $n = 0$ então $f_0 = 1$ está em $N(I - T_m)$. Suponha que $(I - T_m)h = 0$, para algum $h \neq 0$. Como $\widehat{\delta_0}(n) - \widehat{m}(n) = 0$ só se $n = 0$, temos que $\widehat{h}(0) = \lambda$ com $\lambda \neq 0$ e $\widehat{h}(n) = 0$ para $n \neq 0$. Então, $h = \lambda f_0$ (Teorema 1.5). Então a dimensão de $N(I - T_m)$ é um.

Em contraste com o exemplo anterior temos que os operadores de convolução em $\mathbb{R}$ possuem núcleo de dimensão infinita sempre que esse seja não trivial. Vamos demonstrar isso no seguinte:

Exemplo 2.2 Sejam $G = \mathbb{R}$ e $\mu \in M(\mathbb{R})$. Suponha $f \in L_1(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ tal que $T_\mu f = 0$, então existe $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - h_n\|_1 < \frac{1}{2^n}$$

como cada h_n tem suporte compacto, podemos escolher $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\text{supp } T_{r_j} h_j \cap \text{supp } T_{r_k} h_k = \emptyset, \quad \text{onde } (T_{r_n} h_n)(x) = h_n(x + r_n) \quad x \in \mathbb{R},$$

portanto

$$\|T_{r_n} f - T_{r_n} h_n\|_1 = \|f - h_n\|_1 < \frac{1}{2^n},$$

então $\{T_{r_n} f\}_{n \in \mathbb{N}} \subset N(T_\mu)$ é uma sequência quasi-disjunta equivalente à base canônica de ℓ_1 .

Observação 2.1 No caso de $\mathbb{R}$ sempre podemos encontrar operadores de convolução cujo núcleo seja não trivial. Seja $f \in L_1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in C_c(\mathbb{R})$ ([28, VI. Teorema 1.12]). Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{supp}(\widehat{f}) \subset [-n, n]$. Defina $g_\xi \in L_1(\mathbb{R})$

por $g_\xi(x) = e^{i\xi x} f(x)$ onde $\xi \in \mathbb{R}$. Então, para cada $\gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} e^{i\xi x} f(x) dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\gamma-\xi)x} f(x) d\mu(x) \\ &= \widehat{f}(\gamma - \xi).\end{aligned}$$

Tomando $\xi = -3n$ temos $\text{supp } \widehat{f} \cap \text{supp } \widehat{g}_\xi = \emptyset$. Então $\widehat{f * g}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma) \widehat{g}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, portanto $f * g = 0$. Como $L_1(\mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R})$, então para cada $f \in L_1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in C_c(\mathbb{R})$ temos $N(T_f) \neq \{0\}$.

Pela sua relevância em relação com os resultados obtidos nesse e no próximo capítulo vamos demonstrar o seguinte resultado ([1, Teorema 5.97]).

Teorema 2.4 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Para o operador de convolução $T_\mu : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) T_μ é de semi-Fredholm à direita;
- (ii) T_μ é de semi-Fredholm à esquerda;
- (iii) T_μ é de Fredholm;
- (vi) T_μ é de Fredholm de índice zero.

Demonstração: Se T_μ tem imagem fechada, então, pelo Corolário 2.1, $L_1(G) = R(T_\mu) \oplus N(T_\mu)$. Então T_μ é de semi-Fredholm à direita se, e somente se, é de semi-Fredholm à esquerda. Com o mesmo argumento também obtemos que todo operador de Fredholm T_μ deve ser de Fredholm de índice zero. $\square$

2.2 O espectro de um operador de convolução sobre $L_1(G)$

O espectro de um operador de convolução T_μ possui características particulares. Em particular se o grupo G é compacto o espectro residual de T_μ é o conjunto vazio. Além disso, para o caso compacto, o espectro pontual de T_μ coincide com a imagem da transformada de Fourier-Stieltjes de μ , definida na seção 1.2. Em quanto que no caso não compacto só temos que o espectro pontual está contido em $\widehat{\mu}(\Gamma)$ e exemplos de operadores de convolução cujo espectro pontual é vazio. Também, nesse caso, existem operadores de convolução injetivos que não tem imagem densa em $L_1(G)$. Nesta seção vamos demonstrar as afirmações anteriores que além de ser interessantes são necessárias para as seções posteriores.

Vamos começar com o seguinte resultado (ver [1]):

Proposição 2.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Então $\sigma_p(T_\mu) \subset \widehat{\mu}(\Gamma)$. Se o grupo G é compacto, temos $\widehat{\mu}(\Gamma) = \sigma_p(T_\mu)$.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \sigma_p(T_\mu)$, então existe $f \in L_1(G)$, $f \neq 0$, tal que $(\lambda I - T_\mu)(f) = 0$ e como $f \neq 0$ existe $\eta \in \Gamma$ tal que $\widehat{f}(\eta) \neq 0$, mas $(\lambda I - \widehat{T_\mu})(f)(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, em particular

$$0 = (\lambda I - \widehat{T_\mu})(f)(\eta) = \lambda \widehat{f}(\eta) - \widehat{\mu}(\eta) \widehat{f}(\eta),$$

portanto $\lambda = \widehat{\mu}(\eta)$.

Se G é compacto $\Gamma \subset L_1(G)$. Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $x \in G$, então

$$\begin{aligned} \mu * \gamma(x) &= \int_G \gamma(x-y) d\mu(y) \\ &= \int_G \gamma(x) \gamma(-y) d\mu(y) \\ &= \gamma(x) \int_G \gamma(-y) d\mu(y) \\ &= \widehat{\mu}(\gamma) \gamma(x). \end{aligned}$$

Logo

$$\mu * \gamma = \widehat{\mu}(\gamma) \gamma. \quad (2.1)$$

Então $\widehat{\mu}(\gamma)$ é um valor próprio de T_μ para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto $\mu(\Gamma) \subset \sigma_p(T_\mu)$ e, pela primeira parte da demonstração, $\widehat{\mu}(\Gamma) = \sigma_p(T_\mu)$. $\square$

Proposição 2.2 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Se $\widehat{\mu}(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $N(T_\mu) = \{0\}$. Além disso, se T_μ tem imagem densa. Então $N(T_\mu) = \{0\}$.*

Demonstração: Suponhamos que existe $f \neq 0$ tal que $T_\mu f = 0$, então

$$\widehat{\mu * f}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma) \widehat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

como $f \neq 0$ existe $\gamma_0 \in \Gamma$, tal que $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$, mas $\widehat{\mu}(\gamma_0) \widehat{f}(\gamma_0) = 0$, logo $\widehat{\mu}(\gamma_0) = 0$.

Por outro lado, como T_μ tem imagem densa, então T_μ^* é injetivo. Logo pela Proposição 2.1, $0 \notin \widehat{\mu}(\Gamma)$, portanto T_μ é injetivo. $\square$

Corolário 2.2 *Seja G um grupo abeliano compacto e $\mu \in M(G)$. O operador T_μ é injetivo se, e somente se, $\widehat{\mu}(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Além disso, T_μ tem imagem*

densa se, e somente se, é injetivo.

Demonstração: Suponhamos que para algum $\gamma_0 \in \Gamma$, $\widehat{\mu}(\gamma_0) = 0$, então pela Proposição 2.1 $0 \in \sigma_p(T_\mu)$ logo T_μ não é injetivo. A outra implicação segue da Proposição 2.2.

Por outro lado, se $N(T_\mu) = \{0\}$, então $\widehat{\mu}(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então pela equação (2.1)

$$T_\mu\left(\frac{1}{\widehat{\mu}(\gamma)}\gamma\right) = \gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Como pelo Teorema 1.7 os polinômios trigonométricos sobre G são densos em $L_1(G)$, temos que T_μ tem imagem densa. A outra implicação segue da Proposição 2.2. $\square$

Observação 2.2 Note que se G é compacto, como para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - T_\mu$ é um operador de convolução, pelo Corolário 2.2 temos que $\sigma_r(T_\mu) = \emptyset$.

Vamos mostrar com um exemplo que o resultado do Corolário 2.2 não é verdade em geral para um grupo não compacto.

Exemplo 2.3 Seja $G = \mathbb{R}$, então $\Gamma = \mathbb{R}$. Seja $T_r : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$, $T_r f(x) = f(x - r)$ o operador de translação, onde r é um número real fixo. Se $r = 0$, então T_0 é o operador identidade e $\sigma(T_0) = \sigma_p(T_0) = \{1\}$. Se $r \neq 0$, então $\sigma_p(T_r) = \emptyset$. De fato, como m é invariante por translações, o operador T_r é uma isometria bijetora, então $\sigma(T_r) \subseteq \mathbb{T}$. Se existem $\lambda \in \mathbb{T}$ e $f \in L_1(\mathbb{R})$ tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x - r) = \lambda f(x)$, então

$$|f(x - r)| = |f(x)|.$$

Logo a função f tem de ser periódica e a única função integrável periódica sobre $\mathbb{R}$ é 0.

Por outro lado, dado que para qualquer operador limitado T tem-se $\sigma_p(T^*) \subseteq \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$, temos $\sigma_p(T_r^*) \subseteq \sigma_r(T_r)$. Então, pela Proposição 2.1, $\widehat{\delta_r}(\widehat{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma_r(T_r)$. Então, se $\mu := e^{i\xi r} \delta_0 - \delta_r$ onde $\xi \in \mathbb{R}$, temos que T_μ é injetivo mas não tem imagem densa em $L_1(\mathbb{R})$, pois $e^{i\xi r} = \widehat{\delta_r}(\xi)$.

Para fechar a seção vamos enunciar um resultado sobre o espectro de medidas discretas que relaciona o espectro do operador de convolução gerado pela medida e o fecho da imagem da transformada de Fourier-Stieltjes da medida.

Teorema 2.5 Seja G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$ uma

medida discreta. Então o espectro do operador de convolução T_μ coincide com o fecho do conjunto $\widehat{\mu}(\Gamma)$.

Demonstração: Ver [31, Teorema 4.1.11]. $\square$

2.3 Operadores de convolução tauberianos para G discreto

Vamos estabelecer nesta seção nosso resultado principal sobre os operadores de convolução tauberianos de $L_1(G)$ para um grupo G discreto.

Vamos precisar lembrar da seguinte propriedade dos espaços $\ell_1(G)$.

Proposição 2.3 *Seja Y um subespaço de dimensão infinita de $\ell_1(G)$. Então Y não é reflexivo.*

Demonstração: Ver [4, Proposição 2.2.2]. $\square$

Agora, estamos prontos para estabelecer nosso primeiro resultado sobre os operadores de convolução tauberianos.

Teorema 2.6 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Se G é discreto, então todo operador de convolução é tauberiano se, e somente se, é semi-Fredholm à direita.*

Demonstração: Seja G um grupo discreto, abeliano e localmente compacto, pelo Teorema 1.8 e o Lema 1.1, temos que cada medida $\mu \in M(G)$ pode-se escrever como $\mu = m_f + \mu_d + \mu_{sc}$ onde $f \in L_1(G)$, μ_d é uma medida discreta e μ_{sc} é uma medida m -singular e contínua. Vamos denotar por $M_d(G)$ o conjunto de todas as medidas discretas sobre G . Então $M_d(G)$ pode-se identificar com $\ell_1(G)$, onde

$$\ell_1(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{x \in G} |f(x)| < \infty \right\}.$$

Então a medida de Haar m associada a G é, salvo uma constante positiva, a medida de contagem sobre G . Então $M(G) = M_d(G)$, $L_1(G) = \ell_1(G)$ e o produto de convolução é dado por

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(x - y)g(y) \quad (f, g \in \ell_1(G)).$$

Logo, pelo Teorema 2.1, os multiplicadores sobre $L_1(G)$ coincidem com $L_1(G)$, isto é, se T é um multiplicador de $L_1(G)$, existe uma função $f \in L_1(G)$ tal que

$T(g) = f * g$ para cada $g \in L_1(G)$. Então, se o grupo G é finito os operadores de convolução sobre $L_1(G)$, pelo Teorema 2.2, são fracamente compactos, pois nesse caso G é compacto, logo $L_1(G)$ não possui operadores de convolução tauberianos que não sejam múltiplos da identidade (Proposição 1.1).

Agora, se o grupo G é infinito, pela Proposição 2.3, os operadores de convolução tauberianos de $L_1(G)$ são de semi-Fredholm à direita, pois pela Proposição 1.4 seu núcleo é reflexivo. Então, pelo Teorema 2.4, os operadores de convolução tauberianos de $L_1(G)$ são de Fredholm de índice zero. $\square$

2.4 Operadores de convolução tauberianos para G não compacto

Nesta seção vamos precisar que G seja um grupo não compacto. Com essa hipótese, nós demonstramos a equivalência entre ser tauberiano e ser invertível para os operadores de convolução agindo em $L_1(G)$, obtendo uma resposta afirmativa para nossa pergunta central sobre se um operador de convolução tauberiano é sempre de Fredholm.

A prova do nosso resultado precisa do seguinte lema. Vamos fornecer uma demonstração para ter melhor clareza.

Lema 2.1 *Seja $G = (G, +, 0)$ um grupo abeliano localmente compacto não compacto. Se U é uma vizinhança compacta de 0. Então existe uma sequência $\{x_n\} \subset G$ tal que os conjuntos $U_n = x_n + U$ formam uma sequência disjunta de translações de U .*

Demonstração: Note que para $x, y \in G$, $(x + U) \cap (y + U) = \emptyset$ se, e somente se, $x - y \notin U - U$. Além disso, como U é compacto e as aplicações $(x, y) \rightarrow x + y$ de $G \times G$ em G e $x \rightarrow -x$ de G em G são ambas contínuas, temos, pelo Teorema de Tychonoff, que $V = U - U$ é compacto. Então podemos escolher $x_0 \in G \setminus V$ e definir $V_0 = x_0 + V$, como V_0 é compacto podemos escolher $x_1 \in G \setminus V_0$ e definir $V_1 = x_1 + V$, então $V_0 \cup V_1$ é compacto, pois V_1 é compacto, logo podemos escolher $x_2 \in G \setminus (V_0 \cup V_1)$ e definir $V_2 = x_2 + V$. Continuando dessa forma obtemos uma sequência $\{x_n\} \subset G$ tal que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=0}^n V_i$, onde $V_i = x_i + V$. Então, a sequência de conjuntos $\{U_n\}$, $U_n = x_n + U$ é disjunta, pois se $z \in U_i \cap U_m$ com $i \neq m$, sem perda de generalidade podemos supor $i > m$, então $z = x_i + u$ e $z = x_m + \hat{u}$, para alguns $u, \hat{u} \in U$. Então $x_i \in x_m + V$ que contradiz a construção da sequência $\{x_n\}$. $\square$

O seguinte teorema dá uma resposta afirmativa a nossa pergunta sobre se todo operador de convolução sobre $L_1(G)$ é também de Fredholm à direita, sempre que G não seja compacto.

Teorema 2.7 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto que não é compacto. Se $T_\mu : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ é tauberiano, então T_μ é invertível.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que T_μ é limitado inferiormente. De fato, se T_μ não é limitado inferiormente, então dado $\epsilon > 0$ existe $f \in L_1(G)$, $\|f\| = 1$ tal que $\|T_\mu f\| < \epsilon/2$. Seja $g \in C_c(G)$ tal que $\|f - g\| < \epsilon/2$, então $1 - \epsilon/2 < \|g\| < 1 + \epsilon/2$ e supondo, sem perda de generalidade, que $\|T_\mu\| = 1$ temos

$$\|T_\mu g\| \leq \|T_\mu(g - f)\| + \|T_\mu f\| < \epsilon.$$

Além disso, pelo Lema 2.1, podemos escolher $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ e definir $h_n = T_{r_n} g$ tal que $\text{supp } h_i \cap \text{supp } h_j = \emptyset$. Como a medida de Haar é invariante por translações temos que para todo n $\|h_n\| = \|g\|$ e

$$\|T_\mu h_n\| = \|T_{r_n}(T_\mu g)\| = \|T_\mu g\| < \epsilon$$

então $\liminf_n \|T_\mu h_n\| \leq \epsilon$. Isso contradiz que T_μ seja tauberiano (Teorema 1.15). Então T_μ é limitado inferiormente. Em particular T_μ tem imagem fechada, portanto $L_1(G) = R(T_\mu) \oplus N(T_\mu)$ (Corolário 2.1). Mas $N(T_\mu) = \{0\}$, então T_μ é invertível. $\square$

2.5 Operadores de convolução tauberianos para G compacto

Até agora temos obtido respostas afirmativas à equivalência entre um operador T_μ ser tauberiano e ser de Fredholm nos casos em que o grupo G é discreto ou não compacto. O objetivo nesta seção é estabelecer que os resultados obtidos nas seções anteriores não podem ser estendidos ao caso em que o grupo G é infinito e compacto. Vamos a estabelecer, usando os resultados da seção 2.2, que nem todo operador tauberiano é invertível se G é compacto. Mas nosso principal resultado estabelece que para medidas discretas $\mu \in M(G)$ é possível estender o resultado obtido no Teorema 2.7 para T_μ agindo em $L_1(G)$ onde G pode ser compacto. vamos obter que qualquer $\mu \in M(G)$ cuja parte m -singular e contínua seja zero satisfaz que T_μ tauberiano é o mesmo que T_μ de Fredholm.

Uma pergunta natural é se o resultado do Teorema 2.7 vale para um grupo compacto G . O seguinte exemplo ilustra que isso não acontece.

Exemplo 2.4 *Seja G um grupo abeliano compacto, então seu grupo dual Γ está contido em $L_1(G)$. Então, para cada $\gamma \in \Gamma$, T_γ é compacto (Teorema 2.2). Como o operador identidade $I = T_{\delta_0}$ é tauberiano, então $I - T_\gamma$ é tauberiano (Proposição 1.1), mas $\gamma \in N(I - T_\gamma)$ pois γ é idempotente ($\gamma * \gamma = \gamma$).*

Porém, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4 *Seja G um grupo abeliano compacto. Então cada operador de convolução em $L_1(G)$ tauberiano com imagem fechada é de Fredholm.*

Demonstração: Seja T_μ tauberiano, então $N(T_\mu) = N(T_\mu^{**})$ (Proposição 1.5). Então $N(T_\mu)$ é reflexivo. Além disso, pelo Corolário 2.1, $L_1(G) = R(T_\mu) \oplus N(T_\mu)$. Como cada subespaço reflexivo complementado em $L_1(G)$ tem dimensão finita, temos que T_μ é de Fredholm. $\square$

Contudo para grupos G compactos e medidas $\mu \in M(G)$ arbitrárias que T_μ seja tauberiano não é equivalente a ser invertível. Nós achamos que para medidas discretas sobre grupos compactos o resultado é válido. O resto desta seção vai ser dedicado à demonstração desse resultado. Vamos começar por estabelecer a seguinte:

Observação 2.3 *Seja G um grupo abeliano compacto e $L_1(G) = L_1(G, m)$, onde m é a medida de Haar normalizada de G . Considerar o operador de translação $T_r : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$, com $r \in G$, $T_r(f)(x) = f(x - r)$ para cada $f \in L_1(G)$. Note que $T_r^i = T_{ir}$ para $i \in \mathbb{N}$ e para $s \in G$ temos $T_r T_s = T_{r+s}$. Além disso, como a medida de Haar é invariante por translações, T_r é uma isometria bijetiva, pois $T_r T_{-r} = I$. Além disso, T_r coincide com o operador de convolução gerado pela medida unitária δ_r concentrada em $\{r\}$. De fato, para cada $f \in L_1(G)$*

$$(T_{\delta_r} f)(x) = \int_G f(x - y) d\delta_r(y) = f(x - r) = (T_r f)(x).$$

Então, para Γ o grupo dual de G temos $\sigma_p(T_r) = \widehat{\delta_r}(\Gamma)$ (Proposição 2.1). Além disso, para $\gamma \in \Gamma$

$$\widehat{\delta_r}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) d\delta_r(x) = \gamma(-r). \quad (2.2)$$

Então $\sigma_p(T_r) = \{\gamma(-r) : \gamma \in \Gamma\}$. Então, se r tem ordem finita k em G , $\sigma_p(T_r)$ tem k elementos, pois $1 = \gamma(0) = \gamma(kr) = (\gamma(r))^k$. Nesse caso os elementos de $\sigma_p(T_r)$ são as raízes k -ésimas da unidade. Por outro lado, se r não tem ordem finita em G , então $\sigma_p(T_r)$ tem infinitos elementos. Além disso, pelo Teorema 2.5, o espectro pontual de T_r é denso em $\sigma(T_r)$.

Lema 2.2 *Seja G um grupo abeliano compacto infinito. Dados $N \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_n$ elementos distintos de G , existe uma vizinhança aberta U de 0 tal que $m(U) < \frac{1}{N}$ e $\{U_i\}_{i=1}^n$, onde $U_i = x_i + U$, são disjuntos.*

Demonstração: Sejam $\{x_i\}_{i=1}^n \subset G$ onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Então, como G é Hausdorff, para cada x_i existe uma vizinhança aberta U_{x_i} tal que $U_{x_i} \cap U_{x_j} = \emptyset$

para $i \neq j$. Portanto

$$U := \bigcap_{i=1}^n (U_{x_i} - x_i)$$

é uma vizinhança aberta de zero. Como $U + x_i \subset U_{x_i}$ temos $(U + x_i) \cap (U + x_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Como a medida de Haar normalizada m de G é invariante por translações, temos

$$n m(U) = \sum_{i=1}^n m(U + x_i) \leq m(G) = 1. \quad (2.3)$$

Agora, seja $N \in \mathbb{N}$. Se $N < n$, então $Nm(U) < nm(U) < 1$. Se $N > n$, agregando $N - n$ elementos distintos $x_{n+1}, \dots, x_N$ ao conjunto $\{x_i\}_{i=1}^n$, tal que $x_i \neq x_j$ para $i = 1, \dots, n$ y $j = n+1, \dots, N$, obtemos o conjunto de elementos distintos $\{x_i\}_{i=1}^N$. Então, da mesma forma que para k , podemos encontrar uma vizinhança aberta de zero U tal que $m(U) < \frac{1}{N}$ e $(x_i + U) \cap (x_j + U) = \emptyset$ para $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$, em particular para $i, j = 1, \dots, k$. $\square$

Proposição 2.5 *Seja G um grupo abeliano compacto com grupo dual Γ , e seja $\lambda \in \sigma_p(T_r)$ para algum $r \in G$. Então $T_r - \lambda I$ não é tauberiano.*

Demonstração: Como $\lambda \in \sigma_p(T_r)$ temos, para algum $\gamma \in \Gamma$, $\lambda = \gamma(-r)$. Para provar o resultado nós vamos considerar dois casos:

Caso 1.

Suponha que r tem ordem finita k em G . Defina

$$f_n = \frac{1}{k m(U_n)} \left(\sum_{j=1}^k \lambda^{(k+1)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right)$$

onde U_n é a vizinhança de zero do Lema 2.2 tomando $N = n$ e o conjunto de elementos distintos $\{jr\}_{j=1}^k$. Então, como $T_{jr} \chi_{U_n} = \chi_{U_n + jr}$, temos

$$\|f_n\| = \frac{1}{k m(U_n)} \left(\sum_{j=1}^k \|\chi_{U_n + jr}\| \right) = 1$$

e como $m(U_n) < \frac{1}{n}$, temos $\lim_n m(D(f_n)) = 0$. Além disso

$$\begin{aligned}
 (T_r - \lambda I)(f_n) &= \frac{1}{k m(U_n)} \left(\sum_{j=1}^k \lambda^{(k+1)-j} T_{(j+1)r} \chi_{U_n} - \sum_{j=1}^k \lambda^{(k+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right) \\
 &= \frac{1}{k m(U_n)} \left(\sum_{j=2}^{k+1} \lambda^{(k+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} - \sum_{j=1}^k \lambda^{(k+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right) \\
 &= \frac{1}{k m(U_n)} (\lambda T_{(k+1)r} \chi_{U_n} - \lambda^{k+1} T_r \chi_{U_n}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

pois $kr = 0$ e $1 = \gamma(0) = \gamma(-kr) = (\gamma(-r))^k = \lambda^k$. Portanto, $(f_n) \subset N(T_r - \lambda I)$ e pelo Teorema 1.15 $T_r - \lambda I$ não é tauberiano.

Caso 2.

Suponha que r não tem ordem finita. Defina

$$f_n = \frac{1}{n m(U_n)} \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{(n+1)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right)$$

onde U_n é a vizinhança do Lema 2.2 tomando $N = 2^n$ e o conjunto de elementos distintos $\{jr\}_{j=1}^n$. Então, $\|f_n\|_1 = 1$ y $m(D(f_n)) \rightarrow 0$. Além disso

$$\begin{aligned}
 (T_r - \lambda I)(f_n) &= \frac{1}{n m(U_n)} \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{(n+1)-j} T_{(j+1)r} \chi_{U_n} - \sum_{j=1}^n \lambda^{(n+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right) \\
 &= \frac{1}{n m(U_n)} \left(\sum_{j=2}^{n+1} \lambda^{(n+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} - \sum_{j=1}^n \lambda^{(n+2)-j} T_{jr} \chi_{U_n} \right) \\
 &= \frac{1}{n m(U_n)} (\lambda T_{(n+1)r} \chi_{U_n} - \lambda^{n+1} T_r \chi_{U_n})
 \end{aligned}$$

portanto

$$\|(T_r - \lambda I)f_n\|_1 \leq \frac{2}{n}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_r - \lambda I)f_n\|_1 = 0.$$

Então, pelo Teorema 1.15, $T_r - \lambda I$ não é tauberiano. $\square$

Teorema 2.8 *Seja $\mu = \sum_{l=1}^k \alpha_l \delta_{r_l}$, então $T_\mu = \sum_{l=1}^k \alpha_l T_{r_l}$. Se $\lambda \in \sigma(T_\mu)$, então $T_\mu - \lambda I$ não é tauberiano.*

Demonstração: Suponha primeiro $\lambda \in \sigma_p(T_\mu) = \widehat{\mu}(\Gamma)$, então $\lambda = \widehat{\mu}(\gamma)$ para algum $\gamma \in \Gamma$ e pela fórmula (2.2) $\lambda = \sum_{l=1}^k \alpha_l \gamma(-r_l)$. Portanto

$$T_\mu - \lambda I = \sum_{l=1}^k \alpha_l (T_{r_l} - \gamma(-r_l)I). \quad (2.4)$$

Defina

$$f_n = \frac{1}{m(U_n)n^k} \left(\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \gamma \left(- \sum_{l=1}^k (n+1-j_l)r_l \right) T_{\sum_{l=1}^k j_l r_l} \chi_{U_n} \right)$$

Pode acontecer que alguns dos pontos $\sum_{l=1}^k j_l r_l$ sejam iguais. Suponhamos

$$\sum_{l=1}^k j_l r_l = \sum_{l=1}^k \widehat{j}_l r_l,$$

então

$$\sum_{l=1}^k (n+1-j_l)r_l = \sum_{l=1}^k (n+1-\widehat{j}_l)r_l,$$

então

$$\gamma \left(- \sum_{l=1}^k (n+1-j_l)r_l \right) T_{\sum_{l=1}^k j_l r_l} \chi_{U_n} = \gamma \left(- \sum_{l=1}^k (n+1-\widehat{j}_l)r_l \right) T_{\sum_{l=1}^k \widehat{j}_l r_l} \chi_{U_n}.$$

Logo U_n será a vizinhança de zero do Lema 2.2 tomando $N = 2^n$ e todos os pontos do conjunto $\left\{ \sum_{l=1}^k j_l r_l \right\}_{l=1}^n$ que sejam distintos. Portanto, como no caso de pontos iguais as funções associadas são iguais, temos $\|f_n\| = 1$ e $\lim_n D(f_n) = 0$.

Vamos demonstrar que para cada $h \in \{1, \dots, k\}$, $\|(T_{r_h} - \lambda_h)f_n\| \leq \frac{2}{n}$:
Reescrevendo f_n como segue

$$f_n = \frac{1}{n^k} M_n \left(\sum_{j_1=1}^n \gamma(-(n+1-j_1)r_1) T_{j_1 r_1} \right) \chi_{U_n},$$

onde

$$M_n = \frac{1}{m(U_n)} \sum_{j_2, \dots, j_k=1}^n \gamma \left(- \sum_{l=2}^k (n+1-j_l)r_l \right),$$

temos

$$\begin{aligned}
 (T_{r_1} - \lambda_1 I)f_n &= \frac{1}{n^k} M_n \left(\sum_{j_1=1}^n \gamma(-(n+1-j_1)r_1)T_{(j_1+1)r_1} - \sum_{j_1=1}^n \gamma(-(n+2-j_1)r_1)T_{j_1 r_1} \right) \chi_{U_n} \\
 &= \frac{1}{n^k} M_n \left(\sum_{j_1=2}^{n+1} \gamma((n+2-j_1)r_1)T_{j_1 r_1} - \sum_{j_1=1}^n \gamma(-(n+2-j_1)r_1)T_{j_1 r_1} \right) \chi_{U_n} \\
 &= \frac{1}{n^k} M_n (\gamma(-r_1)T_{(n+1)r_1} - \gamma(-(n+1)r_1)T_{j_1 r_1}) \chi_{U_n}.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\|(T_{r_1} - \lambda_1 I)f_n\| \leq \frac{1}{n^k m(U_n)} \|\chi_{U_n}\| \|M_n\| \|\gamma(-r_1)T_{(n+1)r_1} - \gamma(-(n+1)r_1)T_{r_1}\| \leq \frac{2}{n}.$$

Então, fazendo uma reordenação dos $\{r_l\}_{l=1}^k$, temos que para cada $h \in \{1, \dots, k\}$

$$\|(T_{r_h} - \lambda_h I)f_n\| \leq \frac{2}{n}. \quad (2.5)$$

Portanto, das fórmulas (2.4) e (2.5), temos

$$\|(T_\mu - \lambda I)f_n\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_i (T_{r_i} - \lambda_i I))f_n \right\|_1 \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^k |\alpha_i|.$$

Então $T_\mu - \lambda I$ não é tauberiano.

Suponhamos agora $\lambda \in \sigma(T_\mu)$ e $T_\mu - \lambda I$ tauberiano. Como o conjunto dos operadores tauberianos $\mathcal{T}(L_1(G))$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{B}(L_1(G))$ (Proposição 1.6), então existe $\epsilon > 0$ tal que se $S \in \mathcal{B}(L_1(G))$ e $\|(T_\mu - \lambda I) - S\| < \epsilon$ temos $S \in \mathcal{T}(L_1(G))$. Como, pelo Teorema 2.5, $\sigma(T_\mu) = \widehat{\mu}(\Gamma)$ e $\widehat{\mu}(\Gamma) = \sigma_p(T_\mu)$, então existe $\beta \in \sigma_p(T_\mu)$ tal que $|\beta - \lambda| < \epsilon$, então

$$\|(T_\mu - \lambda I) - (T_\mu - \beta I)\| = \|(\beta - \lambda)I\| \leq |\beta - \lambda| < \epsilon.$$

logo $T_\mu - \beta I$ deve ser tauberiano. Isso contradiz a primeira parte da prova. Portanto, para $\lambda \in \sigma(T_\mu)$ temos que $T_\mu - \lambda I$ não é tauberiano. $\square$

Agora, vamos considerar o caso de uma medida discreta arbitrária sobre um grupo abeliano compacto G .

Proposição 2.6 *Seja G um grupo abeliano compacto com grupo dual Γ , e seja $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \delta_{x_i}$ onde (x_i) é uma sequência de pontos distintos em G e $(\beta_i) \subset \mathbb{C}$*

satisfazendo $\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i| < \infty$. Então $T_\mu - \lambda I$ não é tauberiano quando $\lambda \in \sigma(T_\mu)$.

Demonstração: Como $\lambda I = \lambda T_0$, é suficiente provar que T_μ não é tauberiano quando $0 \in \overline{\widehat{\mu}(\Gamma)}$.

Suponhamos que $0 \in \overline{\widehat{\mu}(\Gamma)}$ e T_μ é tauberiano. Como o conjunto dos operadores tauberianos sobre $L_1(G)$ é aberto, existe $r > 0$ tal que qualquer operador $S \in \mathcal{B}(L_1(G))$ é tauberiano se $\|T_\mu - S\| < r$. Nós escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{n_0} |\beta_i| < r/3$.

Denotando por $\mu_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i \delta_{x_i}$, temos $\|T_\mu - T_{\mu_{n_0}}\| < r/3$. Como $0 \in \overline{\widehat{\mu}(\Gamma)}$, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $|\widehat{\mu}(\gamma_0)| < r/3$. Porém $|\widehat{\delta_{x_i}}(\gamma_0)| = |\gamma_0(x_i)| = 1$ implica

$$|\widehat{\mu_{n_0}}(\gamma_0)| = \left| \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i \widehat{\delta_{x_i}}(\gamma_0) \right| < \frac{2r}{3}.$$

Denotando por $\widehat{\delta_{x_i}}(\gamma_0)^*$ o conjugado complexo de $\widehat{\delta_{x_i}}(\gamma_0)$, definimos $\alpha_1 = \beta_1 - \widehat{\mu_{n_0}}(\gamma_0) \widehat{\delta_{x_1}}(\gamma_0)^*$ e $\alpha_i = \beta_i$ para $i > 1$. Então a medida $\nu = \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i \delta_{x_i}$ satisfaz

$$\widehat{\nu}(\gamma_0) = \widehat{\mu_{n_0}}(\gamma_0) - \widehat{\mu_{n_0}}(\gamma_0) \widehat{\delta_{x_1}}(\gamma_0)^* \widehat{\delta_{x_1}}(\gamma_0) = 0.$$

Porém

$$\|T_\mu - T_\nu\| = \|\mu - \nu\| \leq \|\mu - \mu_{n_0}\| + \|\mu_{n_0} - \nu\| < \frac{r}{3} + \frac{2r}{3} = r.$$

Então $0 \in \sigma(T_\nu)$ e T_ν é tauberiano. Isso não pode acontecer devido ao Teorema 2.8. $\square$

Agora podemos estabelecer e provar nosso resultado para o caso do grupo G compacto.

Teorema 2.9 *Seja G um grupo abeliano compacto. Sejam $\mu \in M(G)$ uma medida discreta sobre G e $f \in L_1(G)$. Então*

- (1) T_μ é tauberiano se, e somente se, é invertível;
- (2) $T_{\mu+m_f}$ é tauberiano se, e somente se, é de Fredholm.

Demonstração: (1) Pelo Teorema 2.8 e pela Proposição 2.6 temos que se T_μ é tauberiano então deve ser invertível.

(2) Se $\lambda = \mu + m_f$ então $T_\lambda = T_\mu + T_{m_f}$. Então como T_{m_f} é compacto (Teorema 2.2), se T_λ é tauberiano, então T_μ é tauberiano pela Proposição 1.1. Logo, pela Proposição 2.6, T_μ é invertível. Como a soma de um operador invertível e um operador compacto é um operador de Fredholm (Teorema 1.11), temos que $T_\mu + T_{m_f}$ é de Fredholm. $\square$

2.6 Medidas tauberianas

Finalmente, vamos dedicar esta seção a dar resposta a uma questão estabelecida por M. González em [19]. Vamos estabelecer o resultado que deu origem a essa questão: Para T_μ um operador tauberiano e $\nu \in M(G)$, se $\mu * \nu \in L_1(G)$, então $\nu \in L_1(G)$. Pois se G não é compacto, T_μ é invertível (Teorema 2.7). Logo existe $\eta \in M(G)$ tal que $\mu * \eta = \delta_0$. Como $L_1(G)$ é um ideal em $M(G)$, então $\eta * (\mu * \nu) \in L_1(G)$, então $\nu \in L_1(G)$.

Agora, se G é compacto e $\mu * \nu \in L_1(G)$, pelo Teorema 2.2, temos que $T_{\mu * \nu} = T_\mu T_\nu$ é compacto. Então $T_\mu T_\nu$ é fracamente compacto. Então T_ν deve ser fracamente compacto, então $\nu \in L_1(G)$ (Teorema 1.14).

Definição 2.4 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Uma medida $\mu \in M(G)$ é chamada de tauberiana se $\nu \in M(G)$, $\mu * \nu \in L_1(G)$ implica $\nu \in L_1(G)$.*

Então que uma medida seja tauberiana é condição necessária para que o operador de convolução associado seja tauberiano. É natural perguntar, como foi feito por M. González em [19], se tal condição é também suficiente.

O primeiro que vamos destacar é que existem medidas que não são tauberianas, para estabelecer isso precisamos dos seguintes resultados.

Teorema 2.10 *Seja G um grupo abeliano compacto. Seja $\mu \neq 0$ uma medida contínua sobre G . Então existe uma medida real e m -singular ν tal que a convolução $\mu * \nu$ tem uma série de Fourier absolutamente convergente não trivial.*

Demonstração: Ver [14, Teorema 1]. □

Existe uma relação entre ser uma medida com série de Fourier absolutamente convergente e ser uma medida em $L_1(G)$.

Teorema 2.11 *Seja G um grupo abeliano compacto. Seja $\chi \in M(G)$ tal que $\hat{\chi} \in \ell_1(\Gamma)$, então $\chi \in L_1(G)$.*

Demonstração: Ver [28]. □

Dos dois resultados acima temos como consequência imediata o seguinte:

Corolário 2.3 *Sejam G um grupo abeliano compacto e $\mu \in M(G)$. Se μ é uma medida contínua, então μ não é tauberiana. Em particular, se T_μ é tauberiano, μ não é uma medida contínua.*

Demonstração: Seja μ uma medida contínua, então, pelo Teorema 2.10, existe

uma medida m -singular $\nu \neq 0$ tal que, pelo Teorema 2.11, $\mu * \nu \in L_1(G)$. Então, como $\nu \notin L_1(G)$, temos que μ não é tauberiana. Por outro lado, que a medida μ seja tauberiana é uma condição necessária para que o operador T_μ seja tauberiano, temos que nenhum operador de convolução tauberiano é gerado por uma medida contínua. $\square$

Porém, nós achamos uma condição sobre os coeficientes de Fourier de uma medida discreta sobre um grupo compacto G que é suficiente para a medida ser tauberiana. Antes de estabelecer o resultado precisamos de algumas preliminares.

Definição 2.5 *Sejam $\mu \in M(G)$ e $x \in G$, definimos a medida $\mu_x \in M(G)$ como*

$$\mu_x(E) = \mu(E - x) \quad (E \in B(G)).$$

Proposição 2.7 *Seja $\mu \in M(G)$ uma medida discreta,*

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{x_i}, \quad x_i \in G, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty.$$

Se $\eta \in M(G)$ é uma medida m -singular, então $\mu * \eta$ é uma medida m -singular.

Demonstração: Vamos supor que a medida $|\eta|$ está concentrada no conjunto S , então, por ser m invariante por translações e $|\eta|$ m -singular respeito a m , temos

$$m(S) = 0, \quad m(S - x) = 0 \quad x \in G.$$

Como

$$\mu * |\eta| = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n |\eta|_{x_n}.$$

Denotando por $A(\vartheta)$ o conjunto onde uma medida $\vartheta \in M(G)$ está concentrada. Temos

$$\begin{aligned} A(\mu * |\eta|) &= A\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n |\eta|_{x_n}\right) \\ &\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(|\eta|_{x_n}) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A(|\eta|) - x_n) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S - x_n). \end{aligned}$$

Então

$$m(A(\mu * |\eta|)) \leq \sum_{x_n} m(S - x_n) = 0$$

então $\mu * \eta$ é m -singular. □

Agora estamos prontos para demonstrar nosso resultado sobre medidas discretas e tauberianas sobre um grupo compacto G .

Teorema 2.12 *Seja $\mu \in M(G)$ uma medida discreta tal que $\widehat{\mu}(\gamma) \neq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Então μ é uma medida tauberiana.*

Demonstração: Seja $\nu \in M(G)$ tal que $\mu * \nu \in L_1(G)$, como $\nu = m_f + w$, onde $f \in L_1(G)$ e w é m -singular (Teorema 1.8). Então

$$\mu * \nu = \mu * m_f + \mu * w$$

logo $\mu * w \in L_1(G)$. Mas, pela Proposição 2.7, $\mu * w$ é m -singular. Como a única medida m -singular e absolutamente m -continua é a medida nula, temos $\mu * w = 0$. Portanto, para cada $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\widehat{\mu}(\gamma)\widehat{w}(\gamma) = \widehat{(\mu * w)}(\gamma) = 0.$$

Então $\widehat{w}(\gamma) = 0$ para cada $\gamma \in \Gamma$, então $w = 0$ (Teorema 1.5). Portanto $\nu = m_f$ e μ é tauberiana. □

Como consequência do Teorema acima temos que nem toda medida tauberiana gera um operador de convolução tauberiano, fornecendo resposta negativa à questão do M. González em [19].

Exemplo 2.5 *Seja $G = \mathbb{T}$, então $\Gamma = \mathbb{Z}$. Se $r \in [0, 2\pi)$ e r não múltiplo racional de π , temos que $\sigma(T_{\delta_r}) = \mathbb{T}$ e $\widehat{\mu}(\mathbb{Z}) = \sigma_p(T_{\delta_r})$ (Proposição 2.1). Se $\lambda \in (\mathbb{T} \setminus \widehat{\mu}(\mathbb{Z}))$, definimos $\mu := \lambda\delta_0 - \delta_r$, então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos*

$$\widehat{\mu}(n) = \lambda - e^{-inr},$$

logo $\widehat{\mu}(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então, pelo Teorema 2.12, μ é uma medida tauberiana. Mas $\lambda \in \sigma(T_{\delta_r})$, então $\lambda I - T_{\delta_r}$ não é tauberiano (Teorema 2.9). Portanto $T_\mu = T_{\lambda\delta_0 - \delta_r} = \lambda I - T_{\delta_r}$ não é tauberiano.

OPERADORES DE CONVOLUÇÃO COTAUBERIANOS SOBRE $L_1(G)$

Neste capítulo vamos centrar nosso estudo nos operadores de convolução T_μ sobre $L_1(G)$ que são cotauberianos, ou seja, que o operador adjunto T_μ^* é tauberiano. Em contraste com o Capítulo 1, onde foram usadas caracterizações particulares dos operadores tauberianos sobre $L_1(G)$ por meio das sequências disjuntas, agora vamos usar as propriedades que T_μ possui como um multiplicador de $L_1(G)$, junto com o fato de ser $L_1(G)$ uma álgebra de Banach. Em primeiro lugar, na seção 3.1, apresentamos uma propriedade muito interessante que tem o adjunto de um operador de convolução, mais especificamente é possível dar de forma explícita T_μ^* . Na seção 3.2 são definidos dois produtos, chamados de primeiro e segundo produtos de Arens, sobre $L_1(G)^{**}$. Tais produtos tornam $L_1(G)^{**}$ uma álgebra de Banach. Usando a comutatividade de $L_1(G)$, vamos ver que o primeiro e segundo produtos de Arens de dois elementos são os mesmos se os elementos são comutativos com algum dos dois produtos. Mais ainda, quando esses produtos não coincidem, o maior subconjunto onde tem-se a igualdade dos produtos, chamado de centro topológico de $L_1(G)^{**}$, coincide com $L_1(G)$. Escolhendo o primeiro produto de Arens, vamos provar que $L_1(G)^{**}$ é uma álgebra de Banach sem ordem com identidades direitas para esse produto. No caso em que G é um grupo compacto $L_1(G)^{co}$ torna-se também uma álgebra sem ordem com identidades direitas. Finalmente, o operador T_μ^{**} é um multiplicador de $L_1(G)$ e, para G compacto, o operador resíduo T_μ^{co} é um multiplicador de $L_1(G)^{co}$. Na última parte deste capítulo, na seção 3.3, vamos provar que todo operador de convolução T_μ cotauberiano é também tauberiano. Além disso, nós provamos que o operador de convolução M_μ de $M(G)$ é tauberiano se, e somente se, T_μ é tauberiano. Também, usando os resultados da seção 3.1, vamos estabelecer resultados sobre os operadores de convolução S_μ de $C_0(G)$ e L_μ de $L_\infty(G)$. Mais especificamente, L_μ ser tauberiano é equivalente a L_μ ser invertível. Em contraste, temos que S_μ é um operador cotauberiano só se for invertível. Por outro lado, vamos usar a existência de um mergulho isométrico de $M(G)$ em $L_1(G)^{**}$ e as propriedades como multiplicadores que possuem T_μ e T_μ^{co} , no caso em que G é compacto, para demonstrar que todo operador de convolução cotauberiano é de Fredholm de índice zero. Para finalizar a seção, usando alguns

resultados do capítulo, vamos estabelecer uma condição sobre as medidas tauberianas, introduzidas na seção 2.6, para que o operador de convolução gerado por tais medidas seja tauberiano.

3.1 O adjunto de um operador de convolução

O adjunto de um operador de convolução T_μ em $L_1(G)$ apresenta a peculiaridade de coincidir com um operador de convolução sobre $L_\infty(G)$; tal operador é gerado pela medida $\tilde{\mu}$, onde $\tilde{\mu}(E) = \mu(-E)$. Nesta seção vamos a fazer uma prova disso e vamos mostrar uma relação análoga a essa quando vemos $M(G)$ como o espaço dual de $C_0(G)$.

Definição 3.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Definimos o operador de convolução $L_\mu : L_\infty(G) \rightarrow L_\infty(G)$ por*

$$L_\mu \psi = \mu * \psi.$$

Analogamente, definimos o operador de convolução $S_\mu : C_0(G) \rightarrow C_0(G)$ por

$$S_\mu \phi = \mu * \phi.$$

Proposição 3.1 *Seja $\mu \in M(G)$. Então $T_\mu^* = L_{\tilde{\mu}}$. Além disso, $S_\mu^* = M_{\tilde{\mu}}$.*

Demonstração: Sejam $f \in L_1(G)$ e $g \in L_\infty(G)$. Então

$$\langle g, \mu * f \rangle = \langle \tilde{\mu} * g, f \rangle. \quad (3.1)$$

De fato

$$\begin{aligned}
\langle g, \mu * f \rangle &= \int_G g(x)(\mu * f)(x) dm(x) \\
&= \int_G g(x) \left(\int_G f(x-y) d\mu(y) \right) dm(x) \\
&= \int_G g(x) \left(\int_G f(z) d\mu(x-z) \right) dm(x) \quad (z = x-y) \\
&= \int_G \left(\int_G g(x) d\mu(x-z) \right) f(z) dm(z) \\
&= \int_G \left(\int_G g(z-w) d\mu(-w) \right) f(z) dm(z) \quad (-w = x-z) \\
&= \int_G f(z)(\tilde{\mu} * g)(z) dm(z) \\
&= \langle \tilde{\mu} * g, f \rangle.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu^* g, f \rangle &= \langle g, T_\mu f \rangle \\
&= \langle g, \mu * f \rangle \\
&= \langle \tilde{\mu} * g, f \rangle \\
&= \langle L_{\tilde{\mu}} g, f \rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $(C_0(G))^* = M(G)$, sejam $f \in C(G)$ e $\nu \in M(G)$. Então

$$\langle \nu, \mu * f \rangle = \langle \tilde{\mu} * \nu, f \rangle. \quad (3.2)$$

De fato

$$\begin{aligned}
\langle \nu, \mu * f \rangle &= \int_G (\mu * f)(x) d\nu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G f(x-y) d\mu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \int_G \left(\int_G f(x+z) d\mu(-z) \right) d\nu(x) \quad (z = -y) \\
&= \int_G \left(\int_G f(x+z) d\tilde{\mu}(z) \right) d\nu(x) \\
&= \int_G f d(\tilde{\mu} * \nu) \\
&= \langle \tilde{\mu} * \nu, f \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \langle S_\mu^* \nu, f \rangle &= \langle \nu, S_\mu f \rangle \\
 &= \langle \nu, \mu * f \rangle \\
 &= \langle \tilde{\mu} * \nu, f \rangle \\
 &= \langle M_{\tilde{\mu}} \nu, f \rangle.
 \end{aligned}$$

□

3.2 $L_1(G)^{**}$ como uma álgebra de Banach

Sobre o segundo dual A^{**} de uma álgebra de Banach A é possível definir dois produtos que são uma extensão do produto de A e tornam A^{**} uma álgebra de Banach. Tais produtos foram definidos por R. Arens em [6] e [7], e são chamados de primeiro e segundo produtos de Arens. Porém, em geral, tais produtos não coincidem. Nesta seção vamos definir ambos produtos sobre $L_1(G)^{**}$ e estabeleceremos que os multiplicadores de $L_1(G)^{**}$ com qualquer dos dois produtos são os mesmos. Portanto só vamos trabalhar com o primeiro produto de Arens de $L_1(G)^{**}$. Uma propriedade bem conhecida de $L_1(G)$ é que possui identidades aproximadas limitadas. Fazendo uso disso vamos mostrar que a álgebra $L_1(G)^{**}$ tem uma identidade á direita e é uma álgebra de Banach sem ordem. Ainda mais, isso também acontece com $L_1(G)^{co}$ se o grupo G é compacto. Para terminar esta seção vamos demonstrar que o operador T_μ^{**} é um multiplicador de $L_1(G)^{**}$, donde o operador T_μ^{co} vai ser um multiplicador de $L_1(G)^{co}$ para G compacto.

Definição 3.2 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto, $m, n \in L_\infty(G)^*$, $f \in L_\infty(G)$, e $\phi, \psi \in L_1(G)$. Definimos o primeiro produto de Arens de m e n , $m \cdot n$ em três passos como veremos a seguir*

$$\begin{aligned}
 f \cdot \phi \in L_\infty(G) : \quad & \langle f \cdot \phi, \psi \rangle = \langle f, \phi * \psi \rangle \\
 n \cdot f \in L_\infty(G) : \quad & \langle n \cdot f, \phi \rangle = \langle n, f \cdot \phi \rangle \\
 m \cdot n \in L_\infty(G)^* : \quad & \langle m \cdot n, f \rangle = \langle m, n \cdot f \rangle.
 \end{aligned}$$

Definimos o segundo produto de Arens de m e n , $m \circ n$ como segue

$$\begin{aligned}
 \phi \circ f \in L_\infty(G) : \quad & \langle \phi \circ f, \psi \rangle = \langle f, \psi * \phi \rangle \\
 f \circ m \in L_\infty(G) : \quad & \langle f \circ m, \phi \rangle = \langle m, \phi \circ f \rangle \\
 m \circ n \in L_\infty(G)^* : \quad & \langle m \circ n, f \rangle = \langle n, f \circ m \rangle.
 \end{aligned}$$

Lema 3.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto, $f \in L_\infty(G)$ e $\phi \in$*

$L_1(G)$. Então $f \cdot \phi$ é limitada e uniformemente contínua.

Demonstração: Seja $h \in L_1(G)$ ou $h \in L_\infty(G)$. Então, fazendo uso da definição de convolução, temos $m_\phi * h = \phi * h$. Além disso, $m_{\tilde{\phi}} = \widetilde{m_\phi}$, pois $m(E) = m(-E)$ para cada $E \in B(G)$. Então, para $\psi \in L_1(G)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle f \cdot \phi, \psi \rangle &= \langle f, \phi * \psi \rangle \\ &= \langle f, m_\phi * \psi \rangle \\ &= \langle \widetilde{m_\phi} * f, \psi \rangle \\ &= \langle m_{\tilde{\phi}} * f, \psi \rangle \\ &= \langle \tilde{\phi} * f, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 1.9, $f \cdot \phi$ é limitada e uniformemente contínua. $\square$

Observação 3.1 Seja G um grupo abeliano localmente compacto, se $f \in L_\infty(G)$ e $\phi, \psi \in L_1(G)$, temos

$$\begin{aligned} \langle f \cdot \phi, \psi \rangle &= \langle f, \phi * \psi \rangle \\ &= \langle f, \psi * \phi \rangle \\ &= \langle \phi \circ f, \psi \rangle, \end{aligned}$$

logo

$$f \cdot \phi = \phi \circ f.$$

Para $n \in L_1(G)^{**}$, temos

$$\begin{aligned} \langle n \cdot f, \phi \rangle &= \langle n, f \cdot \phi \rangle \\ &= \langle n, \phi \circ f \rangle \\ &= \langle f \circ n, \phi \rangle, \end{aligned}$$

então

$$n \cdot f = f \circ n.$$

Finalmente, para cada $m \in L_1(G)^{**}$, temos

$$\begin{aligned} \langle m \cdot n, f \rangle &= \langle m, n \cdot f \rangle \\ &= \langle m, f \circ n \rangle \\ &= \langle n \circ m, f \rangle, \end{aligned}$$

logo

$$m \cdot n = n \circ m. \tag{3.3}$$

Teorema 3.1 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $i : L_1(G) \rightarrow L_1(G)^{**}$ o mergulho canônico. Então $i(L_1(G))$ é um ideal bilateral fechado da álgebra $L_1(G)^{**}$ se, e somente se, G é compacto.*

Demonstração: Ver [36, Proposição 4.2]. □

Observação 3.2 Como consequência do teorema anterior temos que, para um grupo compacto G , $L_1(G)^\circ$ é uma álgebra de Banach, com o produto definido da seguinte maneira

$$(n + L_1(G)) \cdot (n + L_1(G)) = (m \cdot n) + L_1(G) \quad (m, n \in L_1(G)^{**}).$$

Como a álgebra de Banach $M(G)$ é uma álgebra de Banach com identidade δ_0 , trivialmente temos que $M(G)$ é uma álgebra de Banach sem ordem. Por outro lado, a álgebra $L_1(G)$ possui uma identidade só se G é um grupo discreto. Porém $L_1(G)$ é uma álgebra de Banach sem ordem.

Lema 3.2 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então $L_1(G)$ é uma álgebra de Banach sem ordem.*

Demonstração: Suponhamos que existe $f \in L_1(G)$ tal que $f * g = 0$ para cada $g \in L_1(G)$. Então $\widehat{f * g}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, isto é, $\widehat{f}(\gamma)\widehat{g}(\gamma) = 0$ (Teorema 1.4). Em particular $\widehat{f}(\gamma)\widehat{f}(\gamma) = 0$, então $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto, pelo Teorema 1.5, $f = 0$. Consequentemente $L_1(G)$ é uma álgebra de Banach sem ordem. □

Note que, do lema acima, que uma álgebra de Banach tenha uma identidade não é uma condição necessária para que ela seja sem ordem. A álgebra $L_1(G)$ contém identidades aproximadas, como estabelece o próximo teorema, e essa propriedade é importante no desenvolvimento das próximas seções.

Teorema 3.2 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então $L_1(G)$ contém identidades aproximadas limitadas por um.*

Demonstração: Ver [33, Teorema 1.1.8]. □

A proposição seguinte garante a existência de identidades à direita de $L_1(G)^{**}$ com o primeiro produto de Arens ([24, Proposição 2.1]). Essas identidades são também identidades à esquerda de $L_1(G)^{**}$ com o segundo produto de Arens.

Proposição 3.2 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então $L_1(G)^{**}$ tem uma identidade à direita de norma um para o primeiro produto de Arens. Em particular, $L_1(G)^{**}$ é uma álgebra de Banach sem ordem.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.2, existe uma rede $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ em $L_1(G)$ que é uma identidade aproximada limitada por um. Então, pelo Teorema de Banach-Alaoglu, $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ tem uma sub-rede $(e_\gamma)_{\gamma \in J}$ tal que $(i(e_\gamma))_{\gamma \in J}$ converge na w^* topologia de $L_1(G)^{**}$, onde i é a inclusão canônica de $L_1(G)$ em $L_1(G)^{**}$. Ainda mais, seja $E := w^* - \lim_\gamma (i(e_\gamma))$. Se $f \in L_\infty(G)$ e $\psi \in L_1(G)$ temos

$$\begin{aligned} \langle E \cdot f, \psi \rangle &= \langle E, f \cdot \psi \rangle \\ &= \lim_\gamma \langle i(e_\gamma), f \cdot \psi \rangle \\ &= \lim_\gamma \langle f \cdot \psi, e_\gamma \rangle \\ &= \lim_\gamma \langle f, \psi * e_\gamma \rangle \\ &= \langle f, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Então $E \cdot f = f$ para cada $f \in L_\infty(G)$. Agora, sejam $m \in L_1(G)^{**}$ e $f \in L_\infty(G)$. Portanto

$$\langle m \cdot E, f \rangle = \langle m, E \cdot f \rangle = \langle m, f \rangle.$$

Logo $m \cdot E = m$ para todo $m \in L_1(G)^{**}$. Então E é uma identidade direita de norma um para $L_1(G)^{**}$. Por outro lado, seja $m \in L_1(G)^{**}$ tal que $m \cdot n = 0$ para todo n , então $m = m \cdot E = 0$. Portanto $L_1(G)^{**}$ é uma álgebra de Banach sem ordem. $\square$

Como consequência do Teorema anterior temos o seguinte:

Corolário 3.1 *Seja G um grupo abeliano compacto. Então a álgebra de Banach $L_1(G)^{co}$ contém também uma identidade direita de norma um. Em particular, $L_1(G)^{co}$ é uma álgebra de Banach sem ordem.*

Demonstração: Se o grupo G é compacto, $L_1(G)^{co}$ é uma álgebra de Banach. Então $E + L_1(G)$ é uma identidade direita para $L_1(G)^{co}$. De fato, seja $m + L_1(G) \in L_1(G)^{co}$. Portanto

$$(m + L_1(G)) \cdot (E + L_1(G)) = (m \cdot E) + L_1(G) = m + L_1(G).$$

Logo, se $m + L_1(G) \cdot L_1(G)^{co} = \{0\}$, $m = 0$. $\square$

Definição 3.3 *O centro topológico de $L_1(G)^{**}$ é o conjunto*

$$Z = \{m \in L_1(G)^{**} : m \cdot n = m \circ n \quad \forall n \in L_1(G)^{**}\}.$$

O centro algébrico ou centro de $L_1(G)^{**}$ é o conjunto

$$C = \{m \in L_1(G)^{**} : m \cdot n = n \cdot m \quad \forall n \in L_1(G)^{**}\}.$$

Então, de (3.3) temos que, para um grupo abeliano localmente compacto, o centro topológico e o centro de $L_1(G)^{**}$ coincidem. Note que $L_1(G) \subset C$. De fato, sejam $\phi, \psi \in L_1$ e $f \in L_\infty(G)$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle i(\phi) \cdot f, \psi \rangle &= \langle i(\psi), f \cdot \psi \rangle \\ &= \langle f \cdot \psi, \phi \rangle \\ &= \langle f, \psi * \phi \rangle \\ &= \langle f, \phi * \psi \rangle \\ &= \langle f \cdot \phi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Então, se $\phi \in L_1(G)$ e $f \in L_\infty(G)$, temos

$$i(\phi) \cdot f = f \cdot \phi. \quad (3.4)$$

Agora, seja $n \in L_1(G)^{**}$. Então

$$\begin{aligned} \langle n \cdot i(\phi), f \rangle &= \langle n, i(\phi) \cdot f \rangle \\ &= \langle n, f \cdot \phi \rangle \\ &= \langle n \cdot f, \phi \rangle \\ &= \langle i(\phi), n \cdot f \rangle \\ &= \langle i(\phi) \cdot n, f \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $n \in L_1(G)^{**}$, $n \cdot i(\phi) = i(\phi) \cdot n$. Logo $L_1(G) \subseteq C$. A seguinte proposição estabelece a igualdade.

Proposição 3.3 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então $L_1(G)$ é o centro de $L_1(G)^{**}$.*

Demonstração: Ver [30, Corolário 3]. □

Observação 3.3 Note que se E e F são identidades direitas em $L_1(G)^{**}$ com $F \neq E$, então $E \cdot F = E$ e $F \cdot E = F$. Logo $L_1(G^{**})$ não é uma álgebra comutativa. Portanto, se o grupo G é compacto e $E - F \in L_1(G)$, pela Proposição 3.3, $E \cdot (E - F) = (E - F) \cdot E \cdot E$, então $F = E$. Logo $L_1(G)^{\text{co}}$ não é comutativa.

Proposição 3.4 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto e $\mu \in M(G)$. Então o segundo conjugado $T_\mu^{**} : L_1(G)^{**} \rightarrow L_1(G)^{**}$ é um multiplicador de $L_1(G)^{**}$.*

Demonstração: Sejam $f \in L^\infty(G)$ y $\phi, \psi \in L^1(G)$, então

$$\langle T_\mu^*(f \cdot \phi), \psi \rangle = \langle f \cdot \phi, T_\mu \psi \rangle$$

como T_μ é um multiplicador de $L_1(G)$, temos

$$\begin{aligned}\langle f \cdot \phi, T_\mu \psi \rangle &= \langle f, \phi * (T_\mu \psi) \rangle \\ &= \langle f, (T_\mu \phi) * \psi \rangle \\ &= \langle f, T_\mu(\phi * \psi) \rangle \\ &= \langle T_\mu^* f, \phi * \psi \rangle \\ &= \langle T_\mu^* f \cdot \phi, \psi \rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle f \cdot \phi, T_\mu \psi \rangle &= \langle f, \phi * (T_\mu \psi) \rangle \\ &= \langle f, (T_\mu \phi) * \psi \rangle \\ &= \langle f \cdot T_\mu \phi, \psi \rangle,\end{aligned}$$

então

$$T_\mu^*(f \cdot \phi) = (T_\mu^* f) \cdot \phi = f \cdot T_\mu \phi. \quad (3.5)$$

Seja $m \in L_1(G)^{**}$. Então

$$\begin{aligned}\langle T_\mu^{**} m \cdot f, \phi \rangle &= \langle T_\mu^{**} m, f \cdot \phi \rangle \\ &= \langle m, T_\mu^*(f \cdot \phi) \rangle \\ &= \langle m, (T_\mu^* f) \cdot \phi \rangle \\ &= \langle m, f \cdot T_\mu \phi \rangle \\ &= \langle m \cdot f, T_\mu \phi \rangle \\ &= \langle T_\mu^*(m \cdot f), \phi \rangle,\end{aligned}$$

logo

$$T_\mu^{**} m \cdot f = T_\mu^*(m \cdot f). \quad (3.6)$$

Finalmente, seja $n \in L_1(G)^{**}$. Então

$$\begin{aligned}\langle n \cdot T_\mu^{**} m, f \rangle &= \langle n, T_\mu^{**} m \cdot f \rangle \\ &= \langle n, T_\mu^*(m \cdot f) \rangle \\ &= \langle T_\mu^{**} n, m \cdot f \rangle \\ &= \langle T_\mu^{**} n \cdot m, f \rangle,\end{aligned}$$

portanto

$$n \cdot T_\mu^{**} m = T_\mu^{**} n \cdot m \quad \forall n, m \in L_1(G)^{**}.$$

□

Corolário 3.2 *Seja G um grupo abeliano compacto. Então T_μ^{co} é um multiplicador de $L_1(G)^{co}$.*

Demonstração: Como G é compacto, $L_1(G)^{co}$ é uma álgebra de Banach. Sejam $n + L_1(G)$ e $m + L_1(G)$ em $L_1(G)^{co}$. Então

$$\begin{aligned} n + L_1(G) \cdot T_\mu^{co}(m + L_1(G)) &= (n + L_1(G)) \cdot (T_\mu^{**}m + L_1(G)) \\ &= n \cdot T_\mu^{**}m + L_1(G) \\ &= T_\mu^{**}n \cdot m + L_1(G) \\ &= (T_\mu^{**}n + L_1(G)) \cdot (m + L_1(G)) \\ &= T_\mu^{co}(n + L_1(G)) \cdot (m + L_1(G)) \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é consequência do fato de ser T_μ um multiplicador de $L_1(G)$ e do Teorema acima. Então T_μ^{co} é um multiplicador de $L_1(G)^{co}$. □

3.3 Operadores de convolução cotauberianos

Usando os resultados das seções anteriores vamos provar nossos principais resultados sobre operadores cotauberianos de convolução. Vamos começar com o fato de que para um operador de convolução sobre $L_1(G)$ é suficiente ser cotauberiano para ser tauberiano. Vamos estabelecer a equivalência entre um operador ser de convolução em $L_1(G)$ e que sua extensão para $M(G)$ seja também tauberiano. Também, usando os resultados da seção 3.1 sobre o adjunto do operador T_μ , temos que os operadores de convolução L_μ e M_μ são tauberianos se, e somente se, são invertíveis sempre que G seja não compacto. Além disso, nosso resultado central garante que qualquer operador T_μ cotauberiano é também de Fredholm de índice zero. Finalmente, ainda que na seção 2.6 nós provamos que nem toda medida tauberiana gera um operador tauberiano, na última parte desta seção vamos estabelecer uma condição sobre as medidas tauberianas para que o operador de convolução gerado por elas seja tauberiano.

Teorema 3.3 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Suponha que o operador de convolução T_μ é cotauberiano. Então T_μ é tauberiano.*

Demonstração: Como T_μ é cotauberiano, pela Proposição 1.7, $R(T_\mu^{**}) + L_1(G)$ é denso em $L_1(G)^{**}$. Seja $m \in N(T_\mu^{**})$. Então, para cada $k \in L_1(G)^{**}$, temos que

$$m \cdot T_\mu^{**}k = T_\mu^{**}m \cdot k = 0 \quad \text{e} \quad T_\mu^{**}k \cdot m = k \cdot T_\mu^{**}m = 0$$

pois T_μ^{**} é um multiplicador de $L_1(G)^{**}$. Então $m \cdot T_\mu^{**}k = T_\mu^{**}k \cdot m$. Seja $s \in L_1(G)^{**}$, como $s = \lim_n (T_\mu^{**}w_n + i(f_n))$, onde $(w_n) \subset L_1(G)^{**}$, $(f_n) \subset L_1(G)$ e i é o mergulho canônico de $L_1(G)$ em $L_1(G)^{**}$. Então

$$\begin{aligned} m \cdot s &= \lim_n (m \cdot (T_\mu^{**}w_n + i(f_n))) \\ &= \lim_n (m \cdot T_\mu^{**}w_n + m \cdot i(f_n)) \\ &= \lim_n (T_\mu^{**}w_n \cdot m + i(f_n) \cdot m) \\ &= \lim_n ((T_\mu^{**}w_n + i(f_n)) \cdot m) \\ &= s \cdot m. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 3.3, $m \in L_1(G)$, portanto $N(T_\mu^{**}) = N(T_\mu)$. Então, pela Proposição 1.5, T_μ é tauberiano. $\square$

Corolário 3.3 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto que não é compacto. Então um operador de convolução sobre $L_1(G)$ é cotauberiano se, e somente se, é invertível.*

Demonstração: Como G não é compacto, cada operador de convolução sobre $L_1(G)$ é invertível (Teorema 2.7). O resultado segue do Teorema 3.3. $\square$

Definição 3.4 *Seja E uma identidade direita de $L_1(G)^{**}$ com $\|E\| = 1$. Para $\mu \in M(G)$, definimos a aplicação $\Gamma_E : M(G) \rightarrow L_1(G)^{**}$ por $\Gamma_E(\mu) = T_\mu^{**}E$.*

Proposição 3.5 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Então Γ_E é um mergulho isométrico da álgebra $M(G)$ em $L_1(G)^{**}$ que estende o mergulho canônico de $L_1(G)$ em $M(G)$. Além disso, $\Gamma_E(\mu) = \mu$ se $\mu \in L_1(G)$.*

Demonstração: Ver [24, Proposição 2.3]. $\square$

Teorema 3.4 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. O operador T_μ é tauberiano se, e somente se, M_μ é tauberiano.*

Demonstração: Se M_μ é tauberiano, a restrição de M_μ a $L_1(G)$ coincide com T_μ . Então, pela Observação 1.3, T_μ é tauberiano.

Por outro lado, seja E uma identidade direita em $L_1(G)^{**}$. Então o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} L_1^{**}(G) & \xrightarrow{T_\mu^{**}} & L_1^{**}(G) \\ \Gamma_E \uparrow & & \uparrow \Gamma_E \\ M(G) & \xrightarrow{M_\mu} & M(G) \end{array}$$

De fato, sejam $\nu \in M(G)$ e $h \in L_\infty(G)$. Então

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma_E M_\mu \nu, h \rangle &= \langle \Gamma_E (\mu * \nu), h \rangle \\
 &= \langle T_{\mu * \nu}^{**} E, h \rangle \\
 &= \langle E, T_{\mu * \nu}^* h \rangle \\
 &= \langle E, (T_\mu T_\nu)^* h \rangle \\
 &= \langle E, T_\nu^* T_\mu^* h \rangle \\
 &= \langle T_\nu^{**} E, T_\mu^* h \rangle \\
 &= \langle \Gamma_E(\nu), T_\mu^* h \rangle \\
 &= \langle T_\mu^{**} \Gamma_E(\nu), h \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$T_\mu^{**} \Gamma_E = \Gamma_E M_\mu. \quad (3.7)$$

Então se T_μ^{**} é tauberiano, pelo primeiro item da Proposição 1.1, $T_\mu^{**} \Gamma_E$ é tauberiano, portanto $\Gamma_E M_\mu$ é tauberiano. Disso e do segundo item da Proposição 1.1 temos que M_μ é tauberiano. $\square$

Do Teorema anterior é possível obter mais informação sobre a relação que têm os operadores M_μ e T_μ .

Corolário 3.4 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Suponha que o operador T_μ é cotauberiano. Então o operador M_μ é tauberiano.*

Demonstração: Se T_μ é cotauberiano, então T_μ é tauberiano (Teorema 3.3). Portanto, pelo Teorema 3.4, M_μ é tauberiano. $\square$

Essa relação que possuem T_μ e M_μ pode nos ajudar a encontrar mais propriedades de M_μ . Antes de fazer isso, vamos precisar da seguinte:

Observação 3.4 Note que se $\mu, \tilde{\mu} \in M(G)$ e $f, \tilde{f} \in L_1(G)$, onde $\tilde{\mu}(E) = \mu(-E)$ e $\tilde{f}(x) = f(-x)$, então $\mu * \tilde{f} = \tilde{\mu} * f$, pois para $x \in G$

$$(\tilde{\mu} * f)(x) = \int_G f(x - y) d\tilde{\mu}(y) = \int_G f(y - x) d\mu(y) = \int_G \tilde{f}(x - y) d\mu(y) = (\mu * \tilde{f})(x).$$

Além disso, se $(f_n) \subset L_1(\mathbb{T})$, $\|f_n\| = 1$ e disjunta, então $(\tilde{f}_n)$ também é nor-

malizada e disjunta, pois $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ e $D(\tilde{f}) = (-D(f))$. Então

$$\|T_{\tilde{\mu}}f_n\| = \|\tilde{\mu} * f_n\| = \|\mu * \tilde{f}_n\| = \|T_{\mu}\tilde{f}_n\|$$

e

$$\|T_{\mu}f_n\| = \|T_{\tilde{\mu}}\tilde{f}_n\|.$$

Portanto, T_{μ} é tauberiano se, e somente se, $T_{\tilde{\mu}}$ é tauberiano. Do mesmo modo obtemos que M_{μ} é tauberiano se $M_{\tilde{\mu}}$ é tauberiano.

Com a observação anterior em mente podemos demonstrar certas propriedades que têm os operadores de convolução S_{μ} , L_{μ} e M_{μ} :

Proposição 3.6 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto, não compacto. Se $\mu \in M(G)$, então*

- (i) $L_{\mu} : L_{\infty}(G) \rightarrow L_{\infty}(G)$ é tauberiano se, e somente se, L_{μ} é cotauberiano, que é equivalente a L_{μ} ser invertível;
- (ii) M_{μ} é tauberiano se, e somente se, M_{μ} é invertível;
- (iii) $S_{\mu} : C_0(G) \rightarrow C_0(G)$ é cotauberiano se, e somente se, é invertível.

Demonstração: (i) Pela Proposição 3.1 temos que $T_{\mu}^* = L_{\mu}$. Se L_{μ} é tauberiano, então $T_{\tilde{\mu}}$ é invertível (Corolário 3.3). Mas $T_{\tilde{\mu}}$ é tauberiano se, e somente se, $L_{\tilde{\mu}}^*$ é tauberiano (Teorema 1.16). Então, se L_{μ} é cotauberiano, pelo Teorema 2.7, L_{μ} é invertível.

(ii) Seja M_{μ} tauberiano. Então, pelo Teorema 3.4, T_{μ} é tauberiano. Então T_{μ} é invertível (Teorema 2.7). Isso, junto com o Teorema 1.2 e o Teorema 2.1, temos que M_{μ} é invertível.

(iii) Como $S_{\mu}^* = M_{\tilde{\mu}}$ (Proposição 3.1), se S_{μ} é cotauberiano, pelo item (ii), temos que S_{μ} é invertível. $\square$

No que segue vamos nos concentrar na demonstração do principal resultado deste capítulo. Para fazer isso vamos precisar da seguinte:

Proposição 3.7 *Sejam G um grupo abeliano localmente compacto, $m \in L_1(G)^{**}$ e E uma identidade direita de $L_1(G)^{**}$ com $\|E\|=1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $m = \Gamma_E(\mu)$, para algum $\mu \in M(G)$;
- (b) Como um funcional, m é uma extensão de $\mu \in C_0(G)^*$ com $\|m\| = \|\mu\|$ e $E \cdot m = m$.

Demonstração: Ver [24, Proposição 2.5]. $\square$

Observação 3.5 Notemos que para $\eta \in M(G)$, $m \in L_1(G)^{**}$ e E uma identidade direita de $L_1(G)^{**}$, temos

$$T_\eta^{**}m = (T_\eta^{**}m) \cdot E = m \cdot T_\eta^{**}E = m \cdot \Gamma_E(\eta). \quad (3.8)$$

Em particular

$$E \cdot \Gamma_E(\eta) = \Gamma_E(\eta). \quad (3.9)$$

Teorema 3.5 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. O operador T_μ é cotauberiano se, e somente se, T_μ é de Fredholm de índice zero.*

Demonstração: Se o grupo G não é compacto, então se T_μ é cotauberiano pelo Corolário 3.3 T_μ é invertível, pelo tanto é Fredholm.

Por outro lado, se o grupo G é compacto $L_1(G)^{co}$ é um álgebra de Banach. Seja T_μ cotauberiano, pelo Teorema 1.7, o operador resíduo T_μ^{co} tem imagem densa. Além disso, pelo Teorema 3.3, T_μ é tauberiano e, pelo Teorema 1.16, T_μ^{co} é injetivo com imagem fechada. Logo T_μ^{co} é invertível. Por ser T_μ^{co} um multiplicador da álgebra de Banach sem ordem $L_1(G)^{co}$, temos que, pelo Teorema 1.2, seu inverso $S = (T_\mu^{co})^{-1}$ é também um multiplicador de $L_1(G)^{co}$. Seja E uma identidade direita de $L_1(G)^{**}$, tal que $E = w^* - \lim_\gamma (i(e_\gamma))$, onde $(e_\gamma)\gamma \in I$ é uma sub-rede de alguma identidade aproximada limitada por um de $L_1(G)$. Então $E + L_1(G)$ é identidade direita de $L_1(G)^{co}$ e

$$T_\mu^{co}(E + L_1(G)) = T_\mu^{**}E + L_1(G) = \Gamma_E(\mu) + L_1(G).$$

Seja $\beta + L_1(G) := S(E + L_1(G))$. Então

$$\begin{aligned} (\beta + L_1(G)) \cdot (\Gamma_E(\mu) + L_1(G)) &= S(E + L_1(G)) \cdot T_\mu^{co}(E + L_1(G)) \\ &= T_\mu^{co}(S(E + L_1(G))) \cdot (E + L_1(G)) \\ &= E + L_1(G). \end{aligned}$$

Então $(\beta \cdot \Gamma_E(\mu) - E) \in L_1(G)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} (E + L_1(G)) \cdot (\beta + L_1(G)) &= (E + L_1(G)) \cdot S(E + L_1(G)) \\ &= S(E + L_1(G)) \cdot (E + L_1(G)) \\ &= \beta + L_1(G). \end{aligned}$$

Portanto $(E \cdot \beta - \beta) \in L_1(G)$. Lembrando que $L_1(G)$ é o centro de $L_1(G)^{**}$. Para cada $n \in L_1(G)^{**}$, temos

$$(E \cdot \beta - \beta) \cdot n = n \cdot (E \cdot \beta - \beta) = n \cdot \beta - n \cdot \beta = 0.$$

Logo $E \cdot \beta - \beta = 0$, pois $l(L_1(G)^{**}) = \{0\}$. Então $E \cdot \beta = \beta$. Seja $\nu \in M(G)$

a restrição de β a $C(G)$, pela Proposição 3.7 temos que $\beta - \Gamma_E(\nu)$ é zero sobre $C(G)$. Além disso, pela fórmula (3.9), obtemos

$$E \cdot (\beta - \Gamma_E(\nu)) = \beta - \Gamma_E(\nu).$$

Portanto, para $f \in L_\infty(G)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \beta - \Gamma_E(\nu), f \rangle &= \langle E \cdot (\beta - \Gamma_E(\nu)), f \rangle \\ &= \langle E, (\beta - \Gamma_E(\nu)) \cdot f \rangle \\ &= \lim_{\gamma} \langle i(e_\gamma), (\beta - \Gamma_E(\nu)) \cdot f \rangle \\ &= \lim_{\gamma} \langle (\beta - \Gamma_E(\nu)) \cdot f, e_\gamma \rangle \\ &= \lim_{\gamma} \langle (\beta - \Gamma_E(\nu)), f \cdot e_\gamma \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois, pelo Lema 3.1, $f \cdot e_\gamma \in C(G)$. Logo $\beta = \Gamma_E(\nu)$. Lembrando que δ_0 , a medida concentrada em zero, é a identidade de $M(G)$. Claramente $I = T_{\delta_0}$, onde I é o operador identidade sobre $L_1(G)$, então $T_{\delta_0}^{**}$ é a identidade sobre $L_1(G)^{**}$. Portanto $E = \Gamma_E(\delta_0)$. Então

$$\begin{aligned} \Gamma_E(\nu * \mu - \delta_0) &= \Gamma_E(\nu) \cdot \Gamma_E(\mu) - \Gamma_E(\delta_0) \\ &= \beta \cdot \Gamma_E(\mu) - E \in L_1(G). \end{aligned}$$

Então $\mu * \nu - \delta_0 \in L_1(G)$ e, pelo Teorema 2.2, o operador de convolução

$$T_{\mu * \nu - \delta_0} = T_\mu T_\nu - I = T_\nu T_\mu - I$$

é um operador compacto. Então $T_\mu T_\nu$ é de Fredholm e, pelo Teorema 1.11, T_μ é de semi-Fredholm à direita. Logo, pelo Teorema 2.4, T_μ é de Fredholm de índice zero. $\square$

Corolário 3.5 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto. Se o operador T_μ é cotauberiano, então o operador M_μ é de Fredholm.*

Demonstração: Seja T_μ cotauberiano, então T_μ é de Fredholm (Teorema 3.5). Assim T_μ^{**} é de Fredholm e $T_\mu^{**}\Gamma_E$ é de semi-Fredholm à direita. Logo, do Teorema 1.11 e da equação 3.7, M_μ é de semi-Fredholm à direita. Como, pelo Teorema 2.3, $\mu = \lambda * \nu$ onde $\lambda * \lambda = \lambda$ e ν é invertível. Temos que $M(G) = R(M_\mu) \oplus N(M_\mu)$, logo M_μ é de Fredholm. $\square$

É importante destacar que os resultados obtidos até agora neste capítulo sobre os operadores de convolução cotauberianos oferecem uma nova caracterização dos

operadores de Fredholm sobre $L_1(G)$.

Finalmente, para fechar o capítulo vamos demonstrar um resultado que vai complementar o exposto na seção 2.6, onde demonstramos que o fato de que uma medida seja tauberiana não é equivalente a que o operador de convolução que gera seja tauberiano. Porém, nós obtivemos uma condição adicional sobre uma medida tauberiana que faz com que o operador de convolução seja tauberiano.

Teorema 3.6 *Sejam G um grupo abeliano compacto e $\mu \in M(G)$. O operador T_μ é tauberiano se, e somente se, μ é tauberiana e $N(T_\mu^{**}) \cap C(G)^\perp = \{0\}$.*

Demonstração: Se T_μ é tauberiano, então μ é uma medida tauberiana. Além disso, $N(T_\mu^{**}) \subset L_1(G)$, mas $L_1(G) \cap C(G)^\perp = \{0\}$.

Por outro lado, suponhamos que μ é uma medida tauberiana e $N(T_\mu^{**}) \cap C(G)^\perp = \{0\}$. Seja E uma identidade à direita de $L_1(G)^{**}$ tal que $E = w^* - \lim_\alpha i(f_\alpha)$, onde (f_α) é uma identidade aproximada limitada por 1 em $L_1(G)$ e i é a inclusão natural de $L_1(G)$ em seu segundo dual. Sejam $m \in L_1(G)^{**}$, η a restrição de m a $C(G)$ e $h \in L^\infty(G)$, então

$$\begin{aligned} \langle E \cdot m, h \rangle &= \langle E, m \cdot h \rangle \\ &= \lim_\alpha \langle i(f_\alpha), m \cdot h \rangle \\ &= \lim_\alpha \langle m \cdot h, f_\alpha \rangle \\ &= \lim_\alpha \langle m, h \cdot f_\alpha \rangle \\ &= \lim_\alpha \langle \eta, h \cdot f_\alpha \rangle \\ &= \lim_\alpha \langle \Gamma_E(\eta), h \cdot f_\alpha \rangle \\ &= \langle \Gamma_E(\eta), h \rangle \end{aligned}$$

Pois $h \cdot f_\alpha \in C(G)$ e $\langle \Gamma_E(\eta), \psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle$ para todo $\psi \in C(G)$. Portanto

$$E \cdot m = \Gamma_E(\eta). \quad (3.10)$$

Seja $n \in L_1(G)^{**}$ tal que $T_\mu^{**}(n) \in L_1(G)$. Então, como $L_1(G)$ é o centro de $L_1(G)^{**}$, temos

$$T_\mu^{**}(E \cdot n) = E \cdot T_\mu^{**}(n) = T_\mu^{**}(n) \cdot E = T_\mu^{**}(n)$$

así, $T_\mu^{**}(E \cdot n - n) = 0$. Pero $E \cdot n - n \in C(G)^\perp$, de aqui $E \cdot n - n = 0$. Então e da fórmula (3.10) temos

$$n = \Gamma_E(\nu) \quad (3.11)$$

onde ν é a restrição de n a $C(G)$. Também

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{**}(E \cdot n) &= E \cdot n \cdot \Gamma_E(\mu) \\ &= \Gamma_E(\nu) \cdot \Gamma_E(\mu) \\ &= \Gamma_E(\nu * \mu). \end{aligned}$$

Como $T_{\mu}^{**}(E \cdot n) \in L_1(G)$, então $\Gamma_E(\nu * \mu) \in L_1(G)$. Logo $\nu * \mu \in L_1(G)$. Então $\nu \in L_1(G)$, por ser μ tauberiana. Portanto, $\Gamma_E(\nu) = \nu$, pois Γ_E é a identidade em $L_1(G)$. Então, pela fórmula (3.11), $n \in L_1(G)$. $\square$

MULTIPLICADORES TAUBERIANOS EM ÁLGEBRAS DE BANACH

Neste capítulo vamos obter alguns resultados sobre multiplicadores em álgebras de Banach sem ordem que foram obtidos no Capítulo 3 para a álgebra $L_1(G)$. Em particular, na seção 4.1 vamos dar uma condição adicional para que todo multiplicador M_μ de $M(G)$ cotauberiano seja também tauberiano. Na seção 4.2 consideraremos as C^* -álgebras e seus multiplicadores. Finalmente, na seção 4.3 vamos demonstrar que os multiplicadores tauberianos de $C_0(G)$ coincidem com os multiplicadores de Fredholm de índice zero.

4.1 Multiplicadores tauberianos em álgebras de Banach sem ordem

Lema 4.1 *Sejam A uma álgebra de Banach sem ordem e $T : A \rightarrow A$ um multiplicador de A . Então $l(R(T)) = N(T)$ ou $r(R(T)) = N(T)$, segundo $l(A) = \{0\}$ ou $r(A) = \{0\}$.*

Demonstração: Vamos supor $l(A) = \{0\}$. Seja $m \in l(R(T))$, então para cada $n \in A$ temos

$$0 = m(Tn) = (Tm)n,$$

por ser T um multiplicador. Então $Tm \in l(A)$ e $Tm = 0$, portanto $m \in N(T)$. Agora, seja $w \in N(T)$. Então para cada $n \in A$, temos

$$0 = (Tw)n = w(Tn).$$

Portanto $w \in l(R(T))$ e $N(T) = l(R(T))$. De forma análoga, se $r(A) = \{0\}$, obtemos $N(T) = r(R(T))$. $\square$

Até agora não encontramos alguma relação entre ser tauberiano e ser cotauberiano para M_μ . Porém, usando o Lema 4.1, e uma hipótese de injetividade, obtivemos um resultado nessa direção. Mas precisamos da seguinte:

Observação 4.1 A Proposição 1.5 do capítulo 1 estabelece que para um operador

$T \in \mathcal{B}(L_1(\mu), Y)$ ser tauberiano é equivalente a $N(T) = N(T^{**})$. Essa propriedade é satisfeita por uma classe de espaços chamados de L_1 -espaços (ver [21, Teorema 2]). Dentre esses espaços encontramos $M(G)$.

Proposição 4.1 *Seja G um grupo abeliano localmente compacto e seja $\mu \in M(G)$. Se M_μ^* é injetivo e tauberiano. Então M_μ é tauberiano.*

Demonstração: Como M_μ^* é tauberiano, temos que $N(M_\mu^{***}) = N(M_\mu^*)$. Então, por ser M_μ^* injetivo, M_μ^{***} é injetivo. Então $R(M_\mu^{**})$ é denso em $M(G)^{**}$. Como $M(G)$ possui uma identidade, $M(G)^{**}$ é uma álgebra de Banach com uma identidade, então $M(G)^{**}$ é sem ordem. Logo, pelo Lema 4.1, M_μ^{**} é injetivo. Portanto, M_μ é tauberiano (Observação 4.1). $\square$

Como uma extensão dos resultados obtidos nos capítulos anteriores temos o seguinte:

Teorema 4.1 *Sejam A uma álgebra de Banach sem ordem e $T : A \rightarrow A$ um multiplicador de A . Se $R(T)$ é denso em A , então $N(T) = \{0\}$.*

Demonstração: Note que, em geral, para qualquer álgebra de Banach A , se $E \subseteq A$ temos $l(E) = l(\overline{E})$ e $r(E) = r(\overline{E})$. De fato, vamos supor $n \in l(E)$ e $m \in \overline{E}$. Então existe $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_i \rightarrow m$, e portanto

$$\|n \cdot m\| = \|n \cdot m - n \cdot x_i\| = \|n(m - x_i)\| \leq \|n\| \|m - x_i\| \rightarrow 0.$$

Consequentemente $n \cdot m = 0$, $n \in l(\overline{E})$ e $l(E) \subseteq l(\overline{E})$. Por outro lado, como $E \subseteq \overline{E}$, temos $l(\overline{E}) \subseteq l(E)$. Logo $l(\overline{E}) = l(E)$. Então pelo Lema 4.1, se $l(A) = \{0\}$ e T é multiplicador de A tal que $\overline{R(T)} = A$, fazendo $E = R(T)$, temos

$$N(T) = l(R(T)) = l(\overline{R(T)}) = l(A) = \{0\}.$$

Analogamente, obtemos o resultado para $r(A) = \{0\}$. $\square$

A definição dos produtos de Arens fornecida no Capítulo 3 sobre o segundo adjunto de $L_1(G)$ é só um caso particular de tornar A^{**} uma álgebra de Banach. Para mais clareza vamos dar a definição formal desses produtos no segundo dual de uma álgebra de Banach A .

Definição 4.1 *Sejam A uma álgebra de Banach, $f \in A^*$ e $x, y \in A$. Definimos o primeiro produto de Arens dos elementos $M, N \in A^{**}$, denotado por $M \cdot N$, que torna A^{**} uma álgebra de Banach, como segue*

$$f \cdot x \in A^* : \quad \langle f \cdot x, y \rangle = \langle f, xy \rangle$$

$$\begin{aligned} N \cdot f \in A^* : \quad & \langle N \cdot f, x \rangle = \langle N, f \cdot x \rangle \\ M \cdot N \in A^{**} : \quad & \langle M \cdot N, f \rangle = \langle M, N \cdot f \rangle. \end{aligned}$$

O espaço de Banach A^{**} pode se tornar também uma álgebra de Banach definindo o segundo produto de Arens de M e N denotado $M \circ N$, como segue

$$\begin{aligned} x \circ f \in A^* : \quad & \langle x \circ f, y \rangle = \langle f, yx \rangle \\ f \circ M \in A^* : \quad & \langle f \circ M, x \rangle = \langle M, x \circ f \rangle \\ M \circ N \in A^{**} : \quad & \langle M \circ N, f \rangle = \langle N, f \circ M \rangle. \end{aligned}$$

Uma álgebra de Banach A é chamada de Arens regular se $M \cdot N = M \circ N$. O centro de uma álgebra de Banach denotado por $Z(A)$ é definido como

$$Z(A) := \{x \in A : xy = yx, \text{ para todo } y \in A\}.$$

Em todo o que segue $i(A)$ representa a imagem da injeção canônica $i : A \rightarrow A^{**}$.

Teorema 4.2 *Seja A uma álgebra de Banach tal que $i(A)$ é um ideal de A^{**} e a álgebra A^{co} é uma álgebra de Banach sem ordem. Se um multiplicador $T : A \rightarrow A$ é cotauberiano, então T é tauberiano.*

Demonstração: Como A^{co} é uma álgebra de Banach sem ordem, T^{co} é um multiplicador de A^{co} . Se o multiplicador T é cotauberiano, então T^{co} tem imagem densa (Teorema 1.7). Logo, pelo Teorema 4.1, T^{co} é injetivo. Portanto T é tauberiano (Proposição 1.3). $\square$

Corolário 4.1 *Seja A uma álgebra de Banach com uma identidade aproximada e tal que $i(A)$ é um ideal de A^{**} . Se um multiplicador $T : A \rightarrow A$ é cotauberiano. Então T é tauberiano.*

Demonstração: Como A tem uma identidade aproximada, temos que A^{**} contém uma identidade à direita para o primeiro produto de Arens. Então, por ser $i(A)$ um ideal em A^{**} , A^{co} é uma álgebra de Banach com uma identidade à direita. Então A^{co} é uma álgebra de Banach sem ordem. Portanto, pelo Teorema 4.2, todo multiplicador cotauberiano T de A é tauberiano. $\square$

4.2 Multiplicadores em C^* -álgebras

Vamos começar lembrando a definição de uma C^* -álgebra.

Definição 4.2 *Seja A uma álgebra de Banach. Uma involução em A é uma função, $*$: $A \rightarrow A$, satisfazendo para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:*

- (i) $(a + b)^* = a^* + b^*$,
- (ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$,
- (iii) $(ab)^* = b^* a^*$,
- (iv) $(a^*)^* = a$
- (v) $\|a\| = \|a^*\|$.

Uma C^* -álgebra é uma álgebra de Banach com involução se vale

- (vi) $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Observação 4.2 Note que uma C^* -álgebra A é sempre uma álgebra de Banach sem ordem. Pois se para algum $a \in A$ temos $ab = 0$ para cada $b \in A$, então $aa^* = 0$. Logo, pela propriedade (vi) da definição, $\|a\|^2 = 0$, logo $a = 0$.

Agora vamos estabelecer um resultado bem conhecido sobre as C^* -álgebras que precisamos.

Teorema 4.3 *Seja A uma C^* -álgebra. Então A possui uma identidade aproximada.*

Demonstração: Ver [9, Teorema 1.8.2]. □

Então, pelo Teorema 4.3 e a observação 4.2, temos o seguinte:

Corolário 4.2 *Seja A uma C^* -álgebra tal que $i(A)$ é um ideal em A^{**} . Se um multiplicador T de A é cotauberiano, então T é tauberiano.*

Demonstração: É uma consequência direta do Corolário 4.1. □

Uma pergunta natural é se os multiplicadores de uma C^* -álgebra têm alguma caracterização específica. Para dar uma resposta a essa pergunta vamos precisar do seguinte:

Lema 4.2 *Seja A uma álgebra de Banach. Se $x \in A$ e $f \in A^*$. Então*

$$i(x) \cdot f = x \circ f \tag{4.1}$$

$$f \circ i(x) = f \cdot x. \tag{4.2}$$

Demonstração: Seja $y \in A$, então

$$\begin{aligned} \langle i(x) \cdot f, y \rangle &= \langle i(x), f \cdot y \rangle \\ &= \langle f \cdot y, x \rangle \\ &= \langle f, yx \rangle \\ &= \langle x \circ f, y \rangle. \end{aligned}$$

Então, para cada $y \in A$, temos

$$\begin{aligned}
 \langle f \circ i(x), y \rangle &= \langle i(x), y \circ f \rangle \\
 &= \langle i(x), i(y) \cdot f \rangle \\
 &= \langle i(xy), f \rangle \\
 &= \langle f, xy \rangle \\
 &= \langle f \cdot x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Agora, vamos estabelecer como são os multiplicadores de uma C^* -álgebra.

Teorema 4.4 *Seja A uma C^* -álgebra tal que $i(A)$ é um ideal em A^{**} . Então $M(A)$ é isomorfo ao centro de A^{**} , $Z(A^{**})$. Em particular, se A é comutativa, $M(A)$ é isomorfo a A^{**} .*

Demonstração: Seja T um multiplicador de A . Como A tem identidades aproximadas, por ser uma C^* -álgebra, temos que existe $E \in A^{**}$ tal que

$$E \cdot M = M, \quad e \quad M \circ E = M.$$

Porém, A é Arens regular, por ser C^* -álgebra. Então A^{**} tem identidade. Seja $f \in A^*$, então $fT \in A^*$, onde $(fT)(x) = f(T(x))$. Seja (e_α) uma identidade aproximada em A . Então, pelo Teorema de Alaoglu, $(i(Te_\alpha))$ tem um w^* -ponto de acumulação em A^{**} . Tomando $\Gamma_T := w^* - \lim_\gamma i(Te_\gamma)$, para cada $x \in A$ e $f \in A^*$, pela equação (4.1) temos

$$\begin{aligned}
 \langle \Gamma_T \cdot i(x), f \rangle &= \langle \Gamma_T, i(x) \cdot f \rangle \\
 &= \langle \Gamma_T, x \circ f \rangle \\
 &= \lim_\gamma \langle i(Te_\gamma), x \circ f \rangle \\
 &= \lim_\gamma \langle x \circ f, Te_\gamma \rangle \\
 &= \lim_\gamma \langle f, xT(e_\gamma) \rangle \\
 &= \lim_\gamma \langle f, T(xe_\gamma) \rangle \\
 &= \langle f, Tx \rangle \\
 &= \langle i(Tx), f \rangle.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação (4.2), temos

$$\begin{aligned}
 \langle i(x) \circ \Gamma_T, f \rangle &= \langle \Gamma_T, f \circ i(x) \rangle \\
 &= \langle \Gamma_T, f \cdot x \rangle \\
 &= \lim_{\gamma} \langle i(Te_{\gamma}), f \cdot x \rangle \\
 &= \lim_{\gamma} \langle f \cdot x, Te_{\gamma} \rangle \\
 &= \lim_{\gamma} \langle f, xT(e_{\gamma}) \rangle \\
 &= \lim_{\gamma} \langle f, T(xe_{\gamma}) \rangle \\
 &= \langle f, Tx \rangle \\
 &= \langle i(Tx), f \rangle.
 \end{aligned}$$

Então

$$\Gamma_T \cdot i(x) = i(Tx) = i(x) \circ \Gamma_T. \quad (4.3)$$

Logo, como A é Arens regular, temos que $\Gamma_T \cdot i(x) = i(x) \cdot \Gamma_T$ para cada $x \in A$. Portanto, por ser A w^* -denso em A^{**} , temos que $\Gamma_T \in Z(A^{**})$.

Suponhamos que $(i(Te_{\alpha}))$ tem algum outro w^* -ponto de acumulação Φ_T . Então, da equação (4.3), temos

$$(\Gamma_T - \Phi_T) \cdot i(x) = i(Tx) - i(Tx) = 0.$$

Como A é w^* denso em A^{**} e A^{**} tem uma identidade, temos que $\Gamma_T = \Phi_T$.

Finalmente, a aplicação $T \rightarrow \Gamma_T$ é um isomorfismo sobre de $M(A)$ em $Z(A^{**})$.

- A aplicação é multiplicativa. Se T_1, T_2 são multiplicadores de $M(A)$, então, para cada $x \in A$, da equação (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{T_1} \cdot \Gamma_{T_2}) \cdot i(x) &= \Gamma_{T_1} \cdot (\Gamma_{T_2} \cdot i(x)) \\
 &= \Gamma_{T_1} \cdot (i(T_2x)) \\
 &= i(T_1(T_2x)) \\
 &= \Gamma_{T_1T_2} \cdot i(x).
 \end{aligned}$$

Então, por ser A w^* -denso em A^{**} , temos

$$(\Gamma_{T_1} \cdot \Gamma_{T_2} - \Gamma_{T_1T_2}) \cdot A^{**} = 0.$$

Logo $\Gamma_{T_1} \cdot \Gamma_{T_2} = \Gamma_{T_1T_2}$, pois A^{**} tem identidade.

- Se $\Gamma_T = 0$, onde $T \in \mathcal{M}(A)$. Pela equação (4.3), $\Gamma_T \cdot i(x) = i(Tx) = 0$, então $T \equiv 0$.

- Seja $N \in Z(A^{**})$, defina $T(x) := N \cdot i(x)$. Então, $T : A \rightarrow A$ porque $i(A)$ é um ideal de A^{**} . Além disso, para cada $x, y \in A$

$$\begin{aligned} x(Ty) = x(N \cdot i(y)) &= i(x) \cdot (N \cdot i(y)) \\ &= (i(x) \cdot N) \cdot i(y) \\ &= (N \cdot i(x))y \\ &= (Tx)y. \end{aligned}$$

Então $T \in \mathcal{M}(A)$.

Se A é comutativa, então A^{**} é comutativa por ser Arens regular. $\square$

Para finalizar esta seção, usando o resultado anterior, vamos dar os multiplicadores da álgebra de Banach dos operadores compactos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Esse é um exemplo de uma C^* -álgebra que é um ideal em seu segundo adjunto.

Exemplo 4.1 *Em geral, para um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, temos que o espaço dos operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ é um ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e uma C^* -álgebra com a composição como produto e o adjunto como involução. Então os multiplicadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ são os elementos do centro de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{**}$. Mas $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{**}$ coincide com $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ só tem multiplicadores triviais, pois o centro de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ consiste de operadores da forma λI onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e I é a identidade.*

4.3 Multiplicadores tauberianos em $C_0(L)$

Seja L um espaço de Hausdorff localmente compacto. Nesta seção vamos demonstrar que os multiplicadores da álgebra de Banach $C_0(L)$, das funções contínuas que se anulam no infinito com o produto pontual de funções, coincidem com os operadores de multiplicação gerados por uma função contínua e limitada sobre L . O resultado principal da seção é a equivalência entre ser tauberiano e ser de Fredholm de índice zero para os multiplicadores de $C_0(L)$.

Lema 4.3 *Sejam L um espaço de Hausdorff localmente compacto. Então o espaço dos multiplicadores de $C_0(L)$ pode-se identificar com $C_b(L)$, o espaço das funções contínuas e limitadas sobre L .*

Demonstração: Seja $g \in C_b(L)$, se definimos $T_g : C_0(L) \rightarrow C_0(L)$ por $T_g(\psi)(x) = g(x)\psi(x)$. Obtemos um multiplicador de $C_0(L)$.

Agora, seja T um multiplicador de $C_0(L)$. Então para cada $\psi, \varphi \in C_0(L)$ temos

$$(T\psi) \cdot \varphi = \psi \cdot (T\varphi). \quad (4.4)$$

Para cada $x \in L$ podemos escolher $\phi \in C_0(L)$ tal que $\phi(x) \neq 0$ e definir

$$g(x) = \frac{(T\phi)(x)}{\phi(x)}.$$

Da equação (4.4) temos que a definição de g é independente da escolha de ϕ . Então $T\phi = g \cdot \phi$ para cada $\phi \in C_0(L)$.

Note que se existe outro $h \in C_b(L)$ tal que $T\phi = h \cdot \phi$, então $(g - h) \cdot \phi = 0$ para cada $\phi \in C_0(L)$, logo $g = h$. $\square$

Com a relação que existe entre os multiplicadores de $C_0(L)$ e o operador de multiplicação por uma função contínua e limitada ψ , vamos dar as características que deve ter ψ para que o multiplicador associado seja tauberiano no caso em que $L = [0, 1]$.

Proposição 4.2 *Seja $\psi \in C[0, 1]$. Suponha que o operador de multiplicação T_ψ é tauberiano. Então ψ não se anula em nenhum ponto. Em particular, um multiplicador tauberiano sobre $C[0, 1]$ é sempre invertível.*

Demonstração: Suponhamos que ψ se anula em algum ponto $t_0 \in [0, 1]$. Tomando a sequência de intervalos abertos centrados em t_0 , $A_n := (t_0 - \frac{d}{2^n}, t_0 + \frac{d}{2^n})$ onde $d := \min\{t_0, 1 - t_0\}$. Seja $B_n := A_n \setminus \bar{A}_{n+1}$. Podemos escolher intervalos fechados C_n tais que $C_n \subset B_n$. Então, pelo Lema de Urysohn existem funções contínuas f_n , $0 \leq f_n \leq 1$, tais que $f_n = 1$ sobre C_n e $f_n = 0$ fora de B_n . Para cada f_n temos

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, 1]} |\psi(t)f_n(t)| &= \max_{t \in \bar{A}_n} |\psi(t)f_n(t)| \\ &\leq \max_{t \in \bar{A}_n} |\psi(t)| \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\psi f_n\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in \bar{A}_n} |\psi(t)| = |\psi(t_0)| = 0.$$

Como $(f_n)_n$ é normalizada e disjuntamente suportada, então é equivalente à base canônica de c_0 . Então a sequência $(g_n)_n$ definida por

$$g_n(t) := \sum_{k=1}^n f_k(t) \quad (t \in [0, 1])$$

não contém subsequências fracamente convergentes. Além disso, por ser disjuntos os suportes das f_n temos $\|g_n\|_\infty = 1$. Note que $(T_\psi g_n)_n$ é de Cauchy, pois para $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$

$$\begin{aligned} \|\psi(g_n - g_m)\|_\infty &= \max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=m+1}^n \psi(t) f_k(t) \right| \\ &\leq \max_{t \in \bar{A}_{m+1}} |\psi(t)|. \end{aligned}$$

Portanto, $(g_n)_n$ é uma sequência limitada sem subsequências fracamente convergentes tal que $(T_\psi g_n)_n$ converge em $C[0, 1]$. Logo T_ψ não pode ser tauberiano (Teorema 1.12). $\square$

Agora vamos demonstrar nosso resultado principal sobre os multiplicadores de $C_0(L)$.

Teorema 4.5 *Seja ψ uma função contínua e limitada sobre um espaço de Hausdorff localmente compacto L . Se o operador de multiplicação T_ψ sobre $C_0(L)$ é tauberiano. Então T_ψ é de Fredholm de índice zero.*

Demonstração: Suponhamos que ψ se anula em algum ponto $t_0 \in L$. Então t_0 deve ser um ponto isolado em L . De fato, se t_0 não é isolado podemos escolher vizinhanças abertas A_n de t_0 , tais que $|\psi(t)| < \frac{1}{n}$ para cada $t \in A_n$. Note que cada A_n contém infinitos pontos devido à escolha de t_0 e que a sequência $(A_n)_n$ é monótona decrescente. Passando a uma subsequência se necessário, podemos escolher conjuntos não vazios $B_n := A_n \setminus \overline{A_{n+1}}$. Então pelo Lema de Urysohn existem funções $f_n \in C_0(L)$, $0 \leq f_n \leq 1$, tais que $\|f_n\|_\infty = 1$ e $f_n = 0$ fora de B_n . Além disso, para cada f_n

$$\begin{aligned} \sup_{t \in L} |\psi(t) f_n(t)| &= \sup_{t \in A_n} |\psi(t) f_n(t)| \\ &\leq \sup_{t \in A_n} |\psi(t)| \end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\psi f_n\|_\infty \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in A_n} |\psi(t)| = |\psi(t_0)| = 0.$$

Como $(f_n)_n$ é normalizada e disjuntamente suportada, então é equivalente à base canônica de c_0 . Então, pela Proposição 1.4, como T_ψ é tauberiano, T_ψ restrito a $\overline{[f_n]}$ é de semi-Fredholm á direita, onde $[f_n]$ é o subespaço gerado por $(f_n)_n$. Então $(f_n)_n$ deve ter alguma subsequência convergente, mas isso é um absurdo. Portanto t_0 deve ser um ponto isolado.

Suponhamos que o conjunto onde se anula ψ é infinito. Então podemos escolher um subconjunto $\{t_n\}$ de pontos isolados de L tal que $\psi(t_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como L é Hausdorff, pelo Lema de Urysohn podemos definir $f_n \in C_0(L)$, tal que $f_n(t_n) = 1$ e $f_n(t) = 0$ para $t \neq t_n$. Portanto $(f_n)_n$ é uma sequência normalizada e disjuntamente suportada, logo é equivalente à base de c_0 . Além disso, $(f_n)_n \subset N(T_\psi)$ que é reflexivo por ser T_ψ tauberiano. Portanto, o conjunto dos pontos onde ψ se anula deve ser finito. Então $N(T_\psi)$ tem dimensão finita.

Finalmente, suponhamos que $\inf \{|\psi(t)| : \psi(t) \neq 0\} = 0$. Então, como ψ é contínua, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um aberto $\mathcal{O}_n$ tal que $0 < |\psi(t)| < \frac{1}{n}$ para cada $t \in \mathcal{O}_n$. Então, passando a uma subsequência $(\mathcal{O}_{n_k})_k$ se necessário tal que $\mathcal{O}_{n_k} \setminus \overline{\mathcal{O}_{n_{k+1}}} \neq \emptyset$. Pelo Lema de Urysohn, podemos encontrar funções $f_{n_k} \in C_0(L)$ tais que $\|f_{n_k}\|_\infty = 1$ e $f_{n_k}(t) = 0$ para $t \notin \mathcal{O}_{n_k} \setminus \overline{\mathcal{O}_{n_{k+1}}}$. Obtendo uma sequência normalizada e disjuntamente suportada tal que $(T_\psi f_{n_k})_k$ converge a zero. Pois, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \max_L |\psi(t)f_{n_k}(t)| &= \sup_{\mathcal{O}_{n_k} \setminus \overline{\mathcal{O}_{n_{k+1}}}} |\psi(t)f_{n_k}(t)| \\ &\leq \sup_{\mathcal{O}_{n_k}} |\psi(t)| < \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.4, isso contradiz que T_ψ é tauberiano. Logo $\inf \{|\psi(t)| : \psi(t) \neq 0\} > 0$.

Seja $\{t_i\}_{i=1}^n$ os pontos onde ψ se anula. Pelo Lema de Urysohn podemos escolher funções $f_i \in C_0(L)$ tais que $f_i(t_i) = 1$ e $f_i(t) = 0$ para $t \neq t_i$. Definimos o operador de imagem finita K , $K(g) := \sum_{i=1}^n g f_i$, $g \in C_0(L)$, logo $K(g) = \sum_{i=1}^n g(t_i) f_i$. O operador $T_\psi + K$ é invertível, portanto T_ψ é de Fredholm de índice zero. $\square$

Como uma consequência da demonstração do Teorema anterior temos o seguinte:

Corolário 4.3 *Seja ψ uma função contínua e limitada sobre um espaço de Hausdorff localmente compacto L . Se L não tem pontos isolados. Então todo operador de multiplicação T_ψ tauberiano é invertível.*

TRABALHOS FUTUROS

Para concluir, vamos expor neste capítulo alguns problemas que consideramos interessantes como uma continuação do trabalho e dos resultados obtidos nesta tese.

- Todo nosso trabalho foi desenvolvido sobre grupos abelianos localmente compactos. Portanto um caminho natural para continuar trabalhando é pensar na extensão de nossos resultados para grupos não abelianos. Devido à não comutatividade vamos ter que trabalhar com medidas de Haar à esquerda, $\mu(x + E) = \mu(E)$, e direitas, $\mu(E + x) = \mu(E)$ sobre G segundo seja invariante pelas translações a esquerda ou direita respectivamente. Mas é possível trabalhar só com medidas de Haar à esquerda que vai existir e será única salvo por uma constante positiva ([16, Teorema 10.5]). Para uma medida esquerda de Haar μ tem-se que a medida $\mu_x(E) = \mu(E + x)$ é de novo uma medida de Haar esquerda. Então existe um número positivo $\Delta(x)$ tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$. A função assim definida, $\Delta : G \rightarrow (0, \infty)$, é chamada *função modular* de G . Então uma medida de Haar esquerda sobre G é também uma medida de Haar direita quando $\Delta = 1$, em tal caso o grupo G é chamado de *unimodular*. Como os grupos abelianos são um caso particular dos grupos unimodulares, um primeiro passo para tentar fazer nossa extensão é começar com os grupos unimodulares, por exemplo no caso G compacto ([16, Proposição 10.16]). Além disso, vamos ter multiplicadores à direita, se $T(xy) = xTy$, e multiplicadores à esquerda, se $T(xy) = (Tx)y$ e o termo de multiplicador será para aqueles operadores que são tanto multiplicador à esquerda quanto multiplicador à direita.
- Seguindo as idéias do item anterior, temos que os grupos compactos possuem características interessantes, como o fato de ser unimodulares, o que faz que nosso interesse neles não desapareça. Pois ficou em aberto, no Capítulo 3, o problema de demonstrar que ser tauberiano e ser de Fredholm é equivalente para um operador de convolução T_μ com μ uma medida arbitrária sobre um grupo abeliano localmente compacto. Ou em caso negativo, isto é, que só seja certo para as medidas discretas, encontrar um contra-exemplo.

-
- Dada a conhecida importância que tem as C^* -álgebras e como base nos resultados sobre seus multiplicadores expostos neste capítulo segue em aberto encontrar exemplos de C^* -álgebras que sejam um ideal no seu segundo dual e seu centro seja não trivial. Sobre esses exemplos seria interessante estudar os multiplicadores tauberianos e cotauberianos nessas álgebras de Banach.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Aiena. *Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers*. Kluwer Academic Press, 2004.
- [2] P. Aiena. *Semi-Fredholm operators, perturbation theory and localized SVEP*. Notas de la XX escuela venezolana de matemáticas. Ediciones IVIC, 2007.
- [3] C. A. Akemann. *Some mapping properties of the group algebras of a compact group*. Pacific J. Math. 22 (1967), 1–8.
- [4] F. Albiac, N. Kalton. *Topics in Banach space theory*. Springer, 2006.
- [5] T. Álvarez, M. González. *Some examples of tauberian operators*. Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 1023–1027.
- [6] R. Arens, *Operations induced in function classes*. Monatsh. Math. , 55 (1951) pp. 1–19.
- [7] R. Arens. *The Adjoint of a Bilinear Operation*. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 839–848.
- [8] S. A. Argyros, V. Felouzis. *Interpolating hereditarily indecomposable Banach spaces*. J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 243–294.
- [9] W. Arveson. *An invitation to C^* -algebras*. Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1976.
- [10] E. Behrends. *On the principle of local reflexivity*. Studia Math. 100 (1991), 109–128.
- [11] H. Choda, M. Nakamura. *Multipliers of Banach algebras*. Proc. Japan Acad. 38 (1962), 93–94.
- [12] C-H. Chu. *Matrix convolution operators on groups*. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 2008.
- [13] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pełczyński. *Factoring weakly compact operators*. J. Funct. Anal. 17 (1974), 311–327.

- [14] R. Doss. *Convolution of singular measures*. Studia Mathematica. 45 (1973), 111–117.
- [15] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase, R. Nagel *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2015.
- [16] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley & Sons, 1984.
- [17] D.J.H. Garling and A. Wilansky, *On a summability theorem of Berg, Crawford and Whitley*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 71 (1972), 495–497.
- [18] Glicksberg. *When $\mu * L_1(G)$ is closed?*. Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971) 419–425.
- [19] M. González. *Tauberian operators. Properties, applications and open problems*. In “Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation”, pp. 231–242. Oper. Theory Adv. Appl., 236, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
- [20] M. González. *Dual results of factorization for operators*. Ann. Acad. Sci. Fennicae Math. 18 (1993), 3–11.
- [21] M. González and A. Martínez-Abejón. *Tauberian operators on $L_1(\mu)$ spaces*. Studia Math. 125 (1997), 289–303.
- [22] M. González and A. Martínez-Abejón. *Tauberian operators*. Operator Theory: Advances and applications 194. Birkhäuser-Verlag, 2010.
- [23] M. González and V. M. Onieva. *Characterizations of tauberian operators and other semigroups of operators*. Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), 399–405.
- [24] F. Ghahramani, A.T. Lau and V. Losert. *Isometric isomorphisms between Banach algebras related to locally compact groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), 273–283.
- [25] B. Host and F. Parreau. *Sur un problème de I. Glicksberg: Les idéaux fermés de type fini de $M(G)$* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978), 143–164.
- [26] W. B. Johnson, A. B. Nasser, G. Schechtman and T. Tkocz. *Injective Tauberian operators on L_1 and operators with dense range on ℓ_∞* . Canad. Math. Bull. 58 (2015), 276–280.
- [27] N. Kalton and A. Wilansky. *Tauberian operators on Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 251–255.

- [28] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [29] R. Larsen. *An introduction to the theory of multipliers*. Springer-Verlag, 1971.
- [30] A.T. Lau and V. Losert. *On the second conjugate algebra of $L_1(G)$ of a locally compact group*. J. London Math. Soc. 37 (1988), 464–470.
- [31] K. B. Laursen and M. M. Neumann. *An introduction to local spectral theory*. Oxford University Press, 2000.
- [32] R.E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer New York, 1998.
- [33] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Wiley & Sons, 1962.
- [34] W. Schachermayer. *For a Banach space isomorphic to its square the Radon-Nikodým property and the Krein-Milman property are equivalent*. Studia Math. 81 (1985), 329–339.
- [35] K. W. Yang. *The generalized Fredholm operators*. Trans. Amer. Math. Soc. 216 (1976), 313–326.
- [36] S. Watanabe. *A Banach algebra which is an ideal in the second dual space*. Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A 11 (1974), 95–101.
- [37] M. Zafran. *On the spectra of multipliers*. Pacific J. Math. 47 (1973), 609–626.