**Existência implicada de órbitas periódicas
para fluxos de Reeb em $S^1 \times S^2$**

Diego Alfonso Sandoval Salazar

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq e CAPES

São Paulo, fevereiro de 2017

Existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb em $S^1 \times S^2$

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/06/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP
- Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz - UFRJ
- Prof. Dr. Leonardo de Magalhães Macarini - UFRJ
- Prof. Dr. Joachim Weber - UNICAMP

AGRADECIMENTOS

Ao professor Pedro Antonio Santoro Salomão pela orientação, sua disponibilidade, compreensão e paciência, nos momentos mais importantes desse trabalho. Também, ele é um bom pesquisador e fomentou meu interesse na área e possíveis problemas de pesquisa no futuro.

Aos meus pais, Benedicta e Rafael, e minha irmã, Ana, pelo apoio, incentivo, compreensão e, sobretudo, o esforço durante estes anos que estive longe deles. A minha namorada pelo apoio recebido ao final deste processo e por oferecer-me o motivo mais bonito da vida, o qual gero a energia que precisava para terminar meus estudos e começar novos caminhos. A todos os amigos do IME-USP pela colaboração, conselhos e amizade. Principalmente, Márcia Pires por ter-me ajudado no aprendizado do português brasileiro e correções na escrita deste texto; e pelas demais pessoas com as quais trabalhei, estudei e compartilhei momentos agradáveis no IME.

A CNPq e CAPES pelo apoio financeiro. Este suporte foi fundamental para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

RESUMO

SANDOVAL SALAZAR, D. A. **Existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb em $S^1 \times S^2$** . 2017. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Consideramos o fluxo de Reeb associado a uma forma de contato em $S^1 \times S^2$ que induz a estrutura de contato *tight*. Assumimos que o fluxo admite um par de órbitas periódicas L_0 e L_1 cujo link $L = L_0 \cup L_1$ é transversalmente isotópico a $(S^1 \times \{n\}) \sqcup (S^1 \times \{s\})$, em que $n = (0, 0, 1)$ e $s = (0, 0, -1)$ são os pólos norte e sul de S^2 , respectivamente. O objetivo deste projeto é provar que, nestas condições, existem infinitas órbitas periódicas no complementar desse link cujas classes de homotopia no complementar do link são prescritas de acordo com os números de rotação de L_0 e L_1 . Este resultado se baseia no recente trabalho de Hryniewicz-Momin-Salomão [HMSa15] onde é provada uma versão deste teorema para fluxos de Reeb na 3-esfera *tight* e em $SO(3)$ universalmente *tight*.

Palavras-chave: Variedades de contato, topologia de contato, dinâmica de Reeb, curvas pseudo-holomorfas em simplectizações, teoria de campos simpléticos.

ABSTRACT

SANDOVAL SALAZAR, D. A. **Implied existence of closed orbits for the Reeb flows in $S^1 \times S^2$.** 2017. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

We consider the Reeb flow associated to a contact form on $S^1 \times S^2$ which induces a tight contact structure. We assume that the flow admits a pair of closed orbits L_0 and L_1 whose link $L = L_0 \cup L_1$ is transversely isotopic to $(S^1 \times \{n\}) \sqcup (S^1 \times \{s\})$, where $n = (0, 0, 1)$ and $s = (0, 0, -1)$ are the north and south poles of S^2 , respectively. The main goal of this thesis is to prove that, under these conditions, there exist infinitely many closed orbits in the complement of this link whose homotopy classes in the complement of this link are prescribed according to the rotation numbers of L_0 and L_1 . This result is based on a recent work by Hryniewicz-Momin-Salomão [HMSa15] where it is proved a version of this theorem for Reeb flows on the tight 3-sphere and the universally tight $SO(3)$.

Keywords: Contact manifolds, Contact Topology, Reeb's dynamics, pseudo-holomorphic curves in symplectizations, Symplectic Fields Theory.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Variedades simpléticas e de contato	5
1.1 Variedades simpléticas	5
1.2 Variedades de contato	6
1.2.1 Simplectização de variedades de contato	8
1.2.2 Variedades de contato em dimensão 3	8
1.2.3 O caso de $S^1 \times S^2$	9
O campo de Reeb em $S^1 \times S^2$	12
Classes de estruturas de contato em $S^1 \times S^2$	13
1.3 Dinâmica simplética	17
1.3.1 Matrizes simpléticas e Índice de Maslov	18
1.3.2 Índice de Conley-Zehnder	19
Descrição geométrica	20
Descrição Analítica	21
1.3.3 Números de rotação	22
1.3.4 Índices dinâmicos para órbitas de Reeb fechadas não-degeneradas	23
Números de Enrolamento	24
1.3.5 Números de rotação no link principal para formas de contato em $S^1 \times S^2$. . .	24
2 Teoria de Campos Simpléticos	27
2.1 Estruturas complexas e cobordismos	27
2.1.1 Fins cilíndricos e cobordismos	30
2.1.2 Estruturas quase-complexas splitting	30
2.1.3 Estruturas quase-complexas restritas ao link principal em $S^1 \times S^2$	31
2.2 Curvas pseudo-holomorfas	31
2.2.1 Curvas de energia-finita na simplectização de M	33
2.2.2 Curvas de energia-finita em cobordismos	34
2.2.3 Curvas de energia-finita em splitting	34
2.2.4 Regularidade	35
2.3 Operador assintótico generalizado e comportamento assintótico	37
2.4 Homologia de contato	41
2.4.1 Aplicações de Cadeia	42

3	O Resultado	45
3.1	Toros invariantes	46
3.1.1	Links em $S^1 \times S^2$	47
3.1.2	O complementar do link principal	48
3.2	Modelo perturbado	49
3.2.1	Curvas pseudo-holomorfas do modelo perturbado	59
3.2.2	Homologia do modelo perturbado	68
3.3	Lema de existência implicada	72
3.4	Demonstração	80
3.4.1	Caso não-degenerado	80
3.4.2	Caso degenerado	81
	Referências Bibliográficas	83

INTRODUÇÃO

Dizemos que uma 1-forma λ definida numa variedade orientada, compacta e conexa M , de dimensão $2n+1$, é uma *forma de contato* se $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ define uma forma de volume em M . A forma de contato λ tem associada uma distribuição de hiperplanos tangentes $\xi = \ker \lambda \subset TM$, chamada de *estrutura de contato*, e um campo de vetores $R_\lambda \subset \ker d\lambda \cap \{\lambda = 1\}$, chamado de *campo de Reeb*.

O par $(M, \xi = \ker \lambda)$ é chamado de variedade de contato. Dizemos que a estrutura de contato ξ é *overtwisted* se existir um disco mergulhado $D \hookrightarrow M$ tal que $T_p D = \xi_p$ para todo $p \in \partial D$. Caso um tal disco não exista, dizemos que ξ é *tight*. Um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ é chamado de contactomorfismo se $\psi_* \xi = \xi$. Sabe-se que S^3 admite apenas uma estrutura de contato *tight*, a menos de difeomorfismos. O mesmo ocorre com $S^1 \times S^2$. Resultados sobre a classificação de estruturas de contato são encontrados em [Ben83, Lut77, Eli89, Hon00a, Hon00b, GLS06, Gir00].

O fluxo $\phi_s, s \in \mathbb{R}$, em M , determinado pelo campo de Reeb R_λ , é chamado de fluxo de Reeb associado a λ . Este preserva a forma de contato λ e, portanto, o fluxo linearizado $d\phi_s$ preserva a estrutura de contato ξ . Considere uma trajetória fechada $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ do fluxo de Reeb de λ , ou seja, $x(t) = \phi_t(x(0))$ e $x(t+T) = x(t)$ para algum $T > 0$. Chamamos o par (x, T) de *órbita periódica* de R_λ .

Em 1985, Gromov [Gro85] introduziu o conceito de curvas pseudo-holomorfas, que se tornaram uma importante ferramenta para o estudo de topologia das variedades de contato e simpléticas. A utilização de curvas pseudo-holomorfas para o estudo dos fluxos de Reeb foi iniciada por H. Hofer [Hof93], onde é introduzida a noção de curva pseudo-holomorfa de energia finita na simplctização de uma variedade de contato, para provar casos de conjectura de Weinstein em dimensão 3. Em trabalhos posteriores, Hofer, Wysocki e Zehnder [HWZ95, HWZ96b, HWZ98], desenvolveram os fundamentos da teoria de curvas pseudo-holomorfas em simplctizações.

Momin mostrou em [Mom11] que certos links transversais de uma variedade de contato $L \subset (M, \xi = \ker \lambda)$ têm a seguinte propriedade: se uma forma de contato λ' em M satisfazendo $\ker \lambda' = \xi$ possuir L como um conjunto finito de órbitas periódicas, então o fluxo de Reeb de λ' deve admitir órbitas periódicas em certas classes de homotopia de curvas fechadas no complementar de L . Isso motivou o conceito de *existência implicada de órbitas periódicas*. Usamos este conceito para nos referir ao problema de inferir a existência de órbitas periódicas a partir da existência de outras órbitas periódicas que possuam certas propriedades dinâmicas e topológicas particulares.

O objetivo desta tese é apresentar um resultado de existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb em $S^1 \times S^2$ munido de uma forma de contato que induz a estrutura de contato

tight. Seguimos as ferramentas desenvolvidas por Hryniewicz, Momin e Salomão em [HMSa15] e obtemos um teorema análogo ao obtido em [HMSa15] para fluxos de Reeb em S^3 e $SO(3)$. Mais precisamente, utilizamos *homologia de contato cilíndrica* no complementar de um certo link $L = L_0 \cup L_1 \subset S^1 \times S^2$, em que $L_0 = S^1 \times \{n\}$ e $L_1 = S^1 \times \{s\}$, $n = (0, 0, 1) \in S^2$ e $s = (0, 0, -1) \in S^2$. Mostramos que se uma forma de contato *tight* em $S^1 \times S^2$ admite L como um par de órbitas periódicas, então existem infinitas órbitas periódicas. Mais ainda, as classes de homotopia no complementar de L que necessariamente admitem órbitas periódicas são determinadas pelos números de rotação das componentes de L .

Na seção 1.2.3 estudamos estruturas de contato em $S^1 \times S^2$. Considere as coordenadas (t, φ, θ) em $S^1 \times S^2$, onde t representa a coordenada em $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $(\varphi, \theta) \subseteq [0, \pi] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ as coordenadas esféricas em $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Consideramos a estrutura de contato em $S^1 \times S^2$ dada pelo núcleo da forma de contato padrão

$$\lambda = \cos \varphi dt + \frac{\sin^2 \varphi}{2} d\theta.$$

É possível mostrar, utilizando preenchimentos simpléticos, que $\xi = \ker \lambda$ é *tight*. Mais ainda, ξ é a única estrutura de contato *tight* em $S^1 \times S^2$, a menos de difeomorfismos.

Denotando $n := (0, 0, 1)$ e polo sul $s = (0, 0, -1)$ de S^2 , considere o *link* $L = P_n \cup P_s$ transversal a $(S^1 \times S^2, \xi = \ker \lambda)$, em que

$$P_n := S^1 \times \{p_n\} \quad e \quad P_s := S^1 \times \{p_s\}.$$

Chamamos $L = P_n \cup P_s$ de *link principal*. A classe de homotopia $[\gamma] \in \pi_1(S^1 \times S^2 \setminus L)$ de uma curva fechada $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \times S^2 \setminus L$ é dada por um par de inteiros (p, q) , em que

$$p = \text{wind}_0(\gamma) \quad q = \text{wind}_1(\gamma).$$

Aqui, os números $\text{wind}_0(\gamma)$ e $\text{wind}_1(\gamma)$ correspondem aos graus de duas aplicações de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ em S^1 . A primeira aplicação é a projeção de γ no primeiro fator S^1 e a outra aplicação é a projeção no segundo fator $S^2 \setminus \{p_n, p_s\} \simeq S^1$.

Dizemos que o par de inteiros $(p, q) \neq (0, 0)$ é *relativamente primo* se não existe um inteiro $k \geq 2$ tal que $(p/k, q/k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definimos a seguinte ordem em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\}$: dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \leq 0\}$, dizemos que

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2,$$

onde $e^{i\theta_j} = x_j + iy_j$ e $\theta_j \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Nosso principal resultado de existência implicada de órbitas periódicas para fluxos de Reeb *tight* em $S^1 \times S^2$ é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja λ' uma forma de contato em $S^1 \times S^2$ que satisfaz $\ker \lambda' = \ker \lambda = \xi$. Assuma que o fluxo de Reeb de λ' admita o link principal $L = P_n \cup P_s$ como um par de órbitas periódicas. Denote por ρ_n e ρ_s os números de rotação de P_n e P_s , respectivamente, computados com respeito a uma trivialização global de ξ . Então, para cada par de inteiros $(0, 0) \neq (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relativamente*

primo satisfazendo

$$(1, \rho_n) < (p, q) < (-1, \rho_s),$$

existe uma órbita periódica $\gamma_{p,q} \subset S^1 \times S^2 \setminus L$ do fluxo de Reeb de λ' , que satisfaz

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p \text{ e } \text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q.$$

A organização do trabalho é feita em três capítulos. No primeiro capítulo [1](#), introduzimos noções básicas de geometria simplética, de contato, e de dinâmica de Reeb. Na seção [1.2.3](#) apresentamos modelos de 1-formas de contato em $S^1 \times S^2$.

No Capítulo 2, introduzimos noções básicas de curvas pseudo-holomorfas em simpletizações.

O resultado principal deste trabalho é o teorema [1](#) e sua demonstração é deixado para o Capítulo [3](#).

CAPÍTULO 1

VARIEDADES SIMPLÉTICAS E DE CONTATO

Neste capítulo definimos variedades simpléticas e de contato, e apresentamos resultados e conceitos ligados a estas variedades. A subseção das formas de contato em $S^1 \times S^2$ será de grande importância para os resultados que apresentaremos nesta tese, onde a família formas de contato serão construída por médio de uma curva com certas propriedades. Também, introduzimos alguns índices da dinâmica simplética os quais revelam informações sobre o comportamento do fluxo de Reeb, eles serão usados nos próximos capítulos. As principais deste capítulo são [HSa13], [Gei08] e [MS98].

1.1 Variedades simpléticas

Seja M uma variedade diferenciável.

Definição 1.1.1. *Uma forma simplética em M é uma 2-forma diferenciável $\omega \in \Omega^2(M)$ satisfazendo:*

- ω é fechada, ou seja, $d\omega = 0$.
- ω é não-degenerada, ou seja, para todo $x \in M$ temos

$$\omega|_x(u, v) = 0 \quad \forall v \in T_x M \Rightarrow u = 0.$$

Uma **variedade simplética** é um par (M, ω) formado por uma variedade M e uma forma simplética ω em M .

Sabemos que uma variedade simplética (M, ω) têm dimensão par. Se M é uma $2n$ -variedade então a $2n$ -forma ω^n é uma forma de volume, e portanto M é orientável.

Exemplo 1.1.2. 1. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, onde

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

é a forma simplética canônica nas coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

2. O fibrado cotangente $\pi: T^*M \rightarrow M$ de uma n -variedade M qualquer, munida da forma simplética canônica

$$\omega_{can} := -d\alpha_{aut} = \sum_{i=1}^n \widetilde{dx}_i \wedge d\xi_i,$$

onde $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ são as coordenadas naturais de T^*M e $\widetilde{dx}_i := \pi^* dx_i \in \Omega^1(T^*M)$, definidas pelas coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ em M e a base dual $\{dx_1|_x, \dots, dx_n|_x\}$ de T_x^*M . Aqui $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i|_x \in T_x^*M$ e se define a 1-forma tautológica como $\alpha_{aut} := \sum_{i=1}^n \xi_i \widetilde{dx}_i$.

Definição 1.1.3. Uma **aplicação simplética** $\varphi: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ entre variedades simpléticas é uma aplicação diferenciável satisfazendo $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$. Se φ é um difeomorfismo então dizemos que φ é um **simplectomorfismo**.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Darboux). Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$. Consideramos a variedade simplética $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e $p \in M$. Então existem vizinhanças abertas $U \subset M$ de p , $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e um simplectomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ tal que $\varphi(0) = p$ e $\varphi^* \omega_0 = \omega$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [HSa13, Teorema 4.2.5] ou [MS98, Teorema 3.15]

Denotamos por $S(p)$ o **grupo das transformações lineares simpléticas de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$** . Usamos este conjunto na subseção das matrizes simpléticas, dado que cada elemento deste grupo pode ser representado por uma matriz A de ordem $2n$. Chamamos A de **matriz simplética**. Assim, podemos assumir $Sp(n)$ como o conjunto de matrizes simpléticas.

1.2 Variedades de contato

Seja M uma variedade de dimensão $2n-1$.

Definição 1.2.1. Dizemos que a 1-forma λ em M é de **contato** se

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1} \text{ nunca se anula.}$$

Equivalentemente, λ é dita de contato se $d\lambda|_x$ é não-degenerada em $\ker \lambda|_x$, para todo $x \in M$.

Observe-se que $\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}$ define uma forma de volume em M . Portanto, M é orientável.

Ligada à forma de contato λ temos

Definição 1.2.2. Uma **estrutura de contato** na variedade M é uma distribuição $\xi \subset TM$ de codimensão 1 definida localmente por uma forma de contato. Neste caso,

$$\xi = \ker \lambda.$$

Chamamos o par (M, ξ) de **variedade de contato**.

Observe que $f\lambda$ é uma forma de contato em M se $f: M \rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus 0$ é uma função suave não-nula. Além disso, a estrutura de contato de $f\lambda$ coincide com ξ , ou seja, $\ker f\lambda = \xi = \ker \lambda$. Também, temos $(f\lambda) \wedge [d(f\lambda)]^{n-1} = f^n \lambda \wedge d\lambda^{n-1}$.

Definição 1.2.3. O campo de Reeb R_λ em M associado à forma de contato λ está determinado por

$$\begin{aligned} d\lambda(R_\lambda, v) &= 0 \quad \forall v \in \xi, \\ \lambda(R_\lambda) &= 1. \end{aligned}$$

Dizemos que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma *órbita de Reeb* se $\dot{\gamma} = R_\lambda \circ \gamma$. Estas órbitas definem o chamado *fluxo de Reeb*, denotado por $\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$. Chamamos o par $P = (\gamma, T)$ de *órbita de Reeb fechada* se $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma órbita de Reeb periódica com período $T > 0$. Também, chamamos de **espectro de ação de λ** o conjunto dos períodos das órbitas periódicas do fluxo de Reeb associadas a λ . Este conjunto será denotado por $\sigma(\lambda)$.

Exemplo 1.2.4. Seja $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Então a 1-forma $\lambda_0 = dz + \frac{xdy - ydx}{2}$ define uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$. De fato, $\lambda_0 \wedge d\lambda_0 = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0$.

Exemplo 1.2.5. $(\mathbb{R} \times T^*M, \xi_{std})$. Consideramos α_{aut} a 1-forma tautológica de T^*M e a coordenada z de $\mathbb{R}$. Definimos a 1-forma em $\mathbb{R} \times T^*M$ dada por

$$\alpha_{std} := dz - \alpha_{aut},$$

e a estrutura de contato standard $\xi_{std} := \ker \alpha_{std}$ de $\mathbb{R} \times T^*M$.

Note que ∂_z é transversal a ξ_{std} e que α_{std} define uma forma de contato pois $d\alpha_{std} = -d\alpha_{aut} = \omega_{can}$ é não-degenerada em ξ_{std} .

A seguir definimos um tipo especial de forma de contato estudada por Hofer, Wysocki e Zehnder [HWZ95] e Bourgeois [Bou02].

Definição 1.2.6. Uma forma de contato λ em uma variedade M é dita **Morse-Bott não-degenerada** se

1. O espectro de ação $\sigma(\lambda)$ é discreto,
2. para cada $T \in \sigma(\lambda)$, o conjunto formado pelas órbitas periódicas de período T ,

$$N_T := \{p \in M : \phi_T(p) = p\},$$

é uma subvariedade suave mergulhada de M , tal que

- o posto de $i^*d\lambda$ é localmente constante ao longo de N_T , onde $i: N_T \rightarrow M$ é a inclusão.
- $\ker(d\phi_T(p) - I) = T_p N_T$, para todo $p \in N_T$.

O seguinte resultado é a versão do teorema de Darboux para formas de contato

Teorema 1.2.7 (Teorema de Darboux para formas de contato). *Seja λ uma forma de contato definida numa variedade sem bordo M de dimensão $2n+1$. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ tal que $p = (0, \dots, 0)$ e*

$$\lambda|_U = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i.$$

Para a demonstração ver [Gei08, Teorema 2.5.1] ou [HSa13, Teorema 4.4.19].

Exemplo 1.2.8. Seja $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Então a 1-forma $\lambda = dz + xdy$ define uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$. Com efeito, $\lambda \wedge d\lambda = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0$.

Definição 1.2.9. Sejam (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) duas variedades de contato com mesma dimensão. Dizemos que um difeomorfismo $h: M_1 \rightarrow M_2$ é um **contactomorfismo** se $h_*\xi_1 = \xi_2$, ou seja, se h preserva a estrutura de contato.

No caso em que $\xi_1 = \ker \lambda_1$ e $\xi_2 = \ker \lambda_2$ para formas de contato λ_1 e λ_2 em M_1 e M_2 , respectivamente, dizemos que o difeomorfismo $h: M_1 \rightarrow M_2$ é um **contactomorfismo forte** se $h^*\lambda_2 = \lambda_1$, ou seja, além de preservar a estrutura de contato, também h preserva a forma de contato.

Exemplo 1.2.10. Existe um contactomorfismo forte entre as variedades de contato dos exemplos 1.2.4 e 1.2.8 dado por

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto h(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{xy}{2}\right),$$

ou seja, $h^*(dz + xdy) = dz + \frac{xdy - ydx}{2}$.

O seguinte teorema é o teorema 2.2.2 de [Gei08] ou teorema 4.4.22 de [HSa13].

Teorema 1.2.11 (Teorema de estabilidade de Gray). Sejam M uma variedade fechada (compacta e sem bordo) e λ_t , $t \in [0, 1]$, uma família suave de formas de contato em M . Assim, $\xi_t := \ker \lambda_t$ define uma família de estruturas de contato, $t \in [0, 1]$. Então existe uma isotopia $\rho_t: M \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\rho_{t*}(\xi_0) = \xi_t$, para todo $t \in [0, 1]$.

1.2.1 Simplectização de variedades de contato

Seja λ uma forma de contato definida numa variedade M de dimensão $2n - 1$ e considere $\mathbb{R} \times M$ munida da estrutura de variedade produto. Seja $\phi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ uma função suave satisfazendo $\phi'(a) > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Podemos definir uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R} \times M$ dada por

$$\lambda_\phi(a, p)(h, k) := \phi(a)\lambda_p(k),$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$ e $(h, k) \in T_{(a, p)}(\mathbb{R} \times M)$. Segue-se que $d\lambda_\phi$ é não-degenerada e fechada, ou seja, $d\lambda_\phi$ é uma forma simplética em $\mathbb{R} \times M$. Dizemos que $(\mathbb{R} \times M, d\lambda_\phi)$ é a simplectização da variedade de contato M .

Mas, nesta tese chamamos a $(\mathbb{R} \times M, d(e^a\lambda))$ de **simplectização da variedade de contato** $(M, \xi = \ker \lambda)$.

A seguir, vamos estudar as variedades de contato em dimensão 3.

1.2.2 Variedades de contato em dimensão 3

Lembramos nesta seção o trabalho de Eliashberg [Eli92]. Consideramos uma 1-forma de contato λ em uma 3-variedade e definimos a estrutura de contato co-orientada dada por $\xi = \ker \lambda$.

Dado que $\lambda \wedge d\lambda$ é não-nulo. Então, para todo $p \in M$ temos que o espaço vetorial $T_p M$ é orientável. Dizemos que uma base $\{v_1, v_2, v_3\} \subset T_p M$ é *orientada positiva* se e somente se $\lambda \wedge d\lambda(v_1, v_2, v_3) >$

0. Caso contrário, a base tem *orientação negativa*. Note que a orientação de $T_p M$ independe da escolha de λ . Portanto, temos definida uma orientação global sobre M . Se M for orientada, dizemos que ξ é positiva se ela induz a mesma orientação de M .

Definição 1.2.12. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato. Um disco overtwisted em (M, ξ) é um disco mergulhado $D \subset M$ tal que $T_p \partial D \subset \xi_p$ e $T_p D \neq \xi_p$ para todo $p \in \partial D$. Uma definição alternativa e equivalente para disco overtwisted é um disco mergulhado $D \subset M$ tal que $T_p D = \xi_p$ para todo $p \in \partial D$.*

Dizemos que a estrutura de contato ξ é overtwisted se (M, ξ) admite um disco overtwisted. Caso contrário, dizemos que ξ é tight.

Em [Eli92] foi definido o seguinte tipo de variedade de contato.

Definição 1.2.13. *Uma 3-variedade de contato (M, ξ) é dita **simplecticamente preenchível** se existe uma variedade simplética (W, ω) tal que*

- $\partial W = M$.
- $\omega|_\xi$ é não-degenerada,
- A orientação de M definida pela estrutura de contato ξ coincide com sua orientação vista como a fronteira da variedade simplética (W, ω) .

Observação 1.2.14. *Um profundo teorema de Eliashberg e Gromov (ver [Eli90, Gro85]) diz que se uma 3-variedade de contato (M, ξ) é simplecticamente preenchível, então a estrutura de contato ξ é tight.*

Exemplo 1.2.15. *Consideramos $S^3 = \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 = 1\}$, onde (x_0, y_0, x_1, y_1) são as coordenadas em $\mathbb{R}^4$. Definimos a 1-forma*

$$\lambda = \frac{1}{2} [x_0 dy_0 - y_0 dx_0 + x_1 dy_1 - y_1 dx_1].$$

Assim, sua restrição a S^3 induz uma estrutura de contato tight dada por

$$\xi = \ker \lambda|_{S^3}.$$

O seguinte exemplo será estudado neste trabalho. Portanto, é importante tê-lo em mente durante as seções seguintes.

1.2.3 O caso de $S^1 \times S^2$

Considere em $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ as coordenadas esféricas $(\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, onde

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \cos \varphi. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Considere também a coordenada $t \in S^1 \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Desta forma, temos coordenadas suaves

$$(t, \varphi, \theta) \in S^1 \times S^2 \text{ se } \varphi \neq 0, \pi,$$

e coordenadas suaves

$$(t, x, y) \in S^1 \times S^2 \text{ perto de } (S^1 \times \{0, 0, 1\}) \cup (S^1 \times \{0, 0, -1\}).$$

Podemos definir formas de contato em $S^1 \times S^2$ da seguinte forma: Sejam $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves tais que $(f^2 + g^2)(\eta) \neq 0$, para todo $\eta \in [-1, 1]$. Considere a curva suave

$$[-1, 1] \ni \eta \mapsto (f(\eta), g(\eta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

onde

$$(i) \quad g(-1) = g(1) = 0 \text{ e } f(-1) > 0;$$

$$(ii) \quad (fg' - f'g)(\eta) > 0, \forall \eta.$$

A condição (i) implica que existem funções suaves $h_-(\eta), h_+(\eta)$ tais que

$$\begin{aligned} g(\eta) &= (1 + \eta)h_-(\eta), \forall \eta \text{ perto de } -1, \\ g(\eta) &= (1 - \eta)h_+(\eta), \forall \eta \text{ perto de } 1. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Defina $\lambda := \lambda_{f,g}$ por

$$\lambda := f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta. \tag{1.2.3}$$

Proposição 1.2.16. *A 1-forma λ é uma 1-forma suave em $S^1 \times S^2$.*

Demonstração. Como f e g são suaves, é imediato que λ é suave em $S^1 \times \{\varphi \neq 0, \pi\}$. Usando (1.2.2) e a terceira identidade abaixo

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta, \\ dy &= \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta, \\ d\theta &= \frac{1}{(1-z)(1+z)}[xdy - ydx], \end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= f(-z)dt + g(-z)d\theta \\ &= f(-z)dt + \frac{h_+(-z)}{1+z}[xdy - ydx] \text{ para } z \text{ perto de } 1, \\ &= f(-z)dt + \frac{h_-(-z)}{1-z}[xdy - ydx] \text{ para } z \text{ perto de } -1, \end{aligned}$$

onde $z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ é função suave para (x, y) perto de $(0, 0)$. Concluimos que λ , definida em (1.2.3), induz uma 1-forma suave em $S^1 \times S^2$. $\square$

Proposição 1.2.17. *A 1-forma λ é uma forma de contato em $S^1 \times S^2$, i.e., $\lambda \wedge d\lambda$ nunca se anula e, portanto, induz uma forma de volume em $S^1 \times S^2$.*

Demonstração. Usando que

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta, \\ \cos \varphi d\varphi \wedge dt &= \cos \theta dx \wedge dt + \sin \theta dy \wedge dt, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} d\lambda &= f'(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge dt + g'(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta \\ &= \frac{1}{z} [f'(-z)xdx \wedge dt + f'(-z)ydy \wedge dt + g'(-z)dx \wedge dy]. \end{aligned}$$

Assim, pela condição $fg' - gf' > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \wedge d\lambda &= \sin \varphi (fg' - gf') (-\cos \varphi) dt \wedge d\varphi \wedge d\theta \neq 0, \text{ para } \varphi \neq 0, \pi, \\ &= \frac{(fg' - gf')(-z)}{z} dt \wedge dx \wedge dy \neq 0, \text{ para } z \neq 0, \end{aligned}$$

onde $z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Concluimos que λ é uma forma de contato em $S^1 \times S^2$. □

Em [Tau02], C. Taubes considera a forma de contato $\lambda = \lambda_{f,g}$ em $S^1 \times S^2$ induzida pelas funções f, g dadas por

$$f(\eta) = 3\eta^2 - 1 \text{ e } g(\eta) = -\sqrt{6}\eta(1 - \eta^2), \forall \eta \in [-1, 1].$$

Figura 1.2.1: Traço da curva $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$, $\eta \in [-1, 1]$, utilizada por C. Taubes em [Tau02]. Veremos mais adiante que $\lambda_{f,g}$ é overtwisted.

Exemplo 1.2.18. $\lambda_0 := \lambda_{f,g}$, onde

$$f(\eta) = -\eta \quad g(\eta) = \frac{1 - \eta^2}{2}.$$

Figura 1.2.2: Exemplo com estrutura de contato tight.

Outros exemplos de formas de contato $\lambda_{f,g}$

Exemplo 1.2.19.

$$f(\eta) = 2\eta^2 - 1 \quad g(\eta) = -2\eta(1 - \eta^2).$$

Figura 1.2.3: $\lambda_{f,g} = f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta$.

Exemplo 1.2.20.

$$f(\eta) = -1 + 6\eta^2 - 4\eta^4 \quad g(\eta) = -4\eta(1 - \eta^2).$$

Figura 1.2.4: $\lambda_{f,g} = f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta$.

O campo de Reeb em $S^1 \times S^2$

O campo de Reeb R em $S^1 \times S^2$ associado a λ está unicamente determinado por

$$R \subset \ker d\lambda \cap \{\lambda = 1\}.$$

Utilizando a expressão para $d\lambda$ acima, obtemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{(fg' - gf')(-\cos \varphi)} [-f'(-\cos \varphi)\partial_\theta + g'(-\cos \varphi)\partial_t] \text{ para } \varphi \neq 0, \pi, \\ &= \frac{1}{(fg' - gf')(-z)} [-f'(-z)x\partial_y + f'(-z)y\partial_x + g'(-z)\partial_t] \text{ para } z \neq 0, \end{aligned}$$

onde $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Decorre que

$$R \cdot \varphi \equiv 0,$$

portanto, φ é preservado pelo fluxo de Reeb associado a R . Note também que

$$R|_{P_n} \equiv f(-1)^{-1}\partial_t,$$

$$R|_{P_s} \equiv f(1)^{-1}\partial_t,$$

onde

$$P_n := S^1 \times \{(0, 0, 1)\},$$

$$P_s := S^1 \times \{(0, 0, -1)\}.$$

Segue que P_n e P_s são órbitas periódicas do fluxo de Reeb com períodos primos

$$T_n = 2\pi f(-1) \text{ e } T_s = 2\pi |f(1)|,$$

respectivamente.

Classes de estruturas de contato em $S^1 \times S^2$

Podemos associar um inteiro positivo à curva $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \eta \in [-1, 1]$, da seguinte forma: considere $\zeta(\eta)$ um argumento contínuo de $f(\eta) + ig(\eta)$, ou seja,

$$f(\eta) + ig(\eta) \in \mathbb{R}^+ e^{i\zeta(\eta)}, \forall \eta.$$

A condição (i) acima, satisfeita por f e g , implica que $(\zeta(1) - \zeta(-1))/\pi$ é um inteiro positivo. Definimos

$$\text{wind}(f, g) = \frac{\zeta(1) - \zeta(-1)}{\pi} \in \mathbb{N}^+.$$

Pela condição (ii), se $\text{wind}(f, g)$ é ímpar, então $f(1), g'(1) < 0$ e, se $\text{wind}(f, g)$ é par, então $f(1), g'(1) > 0$.

Proposição 1.2.21. *Sejam $\lambda_i = \lambda_{f_i, g_i}, i = 1, 2$, duas formas de contato em $S^1 \times S^2$, como definidas acima, tais que $\text{wind}(f_1, g_1) = \text{wind}(f_2, g_2)$. Então existe um contactomorfismo $h : (S^1 \times S^2, \xi_1 = \ker \lambda_1) \rightarrow (S^1 \times S^2, \xi_2 = \ker \lambda_2)$, ou seja, existe uma função suave $f : S^1 \times S^2 \rightarrow (0, +\infty)$ tal que $h^* \lambda_2 = f \lambda_1$.*^{1.2.1}

Demonstração. Seja $\zeta_i(\eta)$ o argumento contínuo de $f_i(\eta) + ig_i(\eta)$ satisfazendo $\zeta_i(-1) = 0$, ou seja, ζ_i é contínua e satisfaz

$$f_i(\eta) + ig_i(\eta) \in \mathbb{R}^+ e^{i\zeta_i(\eta)}, \forall \eta \in [-1, 1] \text{ e } \zeta_i(-1) = 0.$$

As hipóteses (i) e (ii) para o par (f_i, g_i) implicam que $\zeta_i : [-1, 1] \rightarrow [0, l\pi]$ é um difeomorfismo que preserva orientação, onde $l = \text{wind}(f_i, g_i)$. Desta forma,

$$\Psi := \zeta_2^{-1} \circ \zeta_1 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

é um difeomorfismo que preserva orientação.

Seja $h : S^1 \times S^2 \rightarrow S^1 \times S^2$ o difeomorfismo que em coordenadas (t, θ, φ) é dado por

$$h(t, \varphi, \theta) = (t, \arccos(-\Psi(-\cos \varphi)), \theta).$$

Note que a expressão acima define um difeomorfismo de $S^1 \times S^2$.

Sejam $\bar{f}_1(\eta) := f_2(\Psi(\eta))$ e $\bar{g}_1(\eta) := g_2(\Psi(\eta))$. Então

$$\bar{\lambda}_1 := h^* \lambda_2 = \bar{f}_1(-\cos \varphi) dt + \bar{g}_1(-\cos \varphi) d\theta.$$

^{1.2.1} Ainda mais, $f \in \mathcal{F}$ (Ver (3.1.2)).

Seja $\bar{\zeta}_1(\eta), \eta \in [-1, 1]$, o argumento contínuo de $\bar{f}_1(\eta) + i\bar{g}_1(\eta)$ satisfazendo $\bar{\zeta}_1(-1) = 0$. A observação crucial é que

$$\bar{\zeta}_1 = \zeta_1 \Rightarrow (f_1, g_1) \in \mathbb{R}^+(\bar{f}_1, \bar{g}_1). \quad (1.2.4)$$

Isso implica, em particular, que a estrutura de contato $\bar{\xi}_1 := \ker \bar{\lambda}_1$ coincide com $\xi_1 = \ker \lambda_1$. Portanto, a aplicação identidade em $S^1 \times S^2$ é um contactomorfismo entre $\bar{\xi}_1 = \xi_1$. Concluimos que o difeomorfismo h satisfaz

$$h_*\xi_1 = \xi_2,$$

e, portanto, é o contactomorfismo procurado. $\square$

Proposição 1.2.22. *Se $\text{wind}(f, g) = 1$, então a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_{f,g}$ em $S^1 \times S^2$ é tight. Se $\text{wind}(f, g) > 1$, então a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_{f,g}$ é overtwisted.*

A seguir demonstramos da Proposição 1.2.22: Vamos mostrar primeiramente que ξ é overtwisted se $\text{wind}(f, g) > 1$. Neste caso, encontramos $\eta_0 \in (-1, 1)$ tal que $g(\eta_0) = 0$. Seja $\varphi_0 \in (0, \pi)$ tal que $-\cos \varphi_0 = \eta_0$. Fixe $t_0 \in S^1$. Seja $D \subset S^1 \times S^2$ o disco mergulhado dado por

$$D := \{t_0\} \times \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \varphi_0\}.$$

Note que a forma de contato $\lambda = \lambda_{f,g}$ no bordo de D é dada por

$$\lambda|_{\partial D} = \lambda|_{\{\varphi=\varphi_0\}} = f(\eta_0)dt,$$

e, portanto, $\xi_p = T_p S^2$ para todo $p \in \partial D$. Como $D \subset \{t_0\} \times S^2$, temos que $T_p D = T_p S^2$ para todo $p \in D$. Em particular, $T_p D = \xi_p$ para todo $p \in \partial D$. Concluimos que D é um disco overtwisted para $(S^1 \times S^2, \ker \lambda_{f,g})$ e, portanto, $\xi = \ker \lambda_{f,g}$ é overtwisted.

Figura 1.2.5: Disco overtwisted.

Vamos considerar agora o caso $\text{wind}(f, g) = 1$. Considere a 1-forma em $S^1 \times \mathbb{R}^3$ dada por

$$\lambda = zdt + \frac{xdy - ydx}{2}, \quad (1.2.5)$$

em que (t, x, y, z) são coordenadas em $S^1 \times \mathbb{R}^3$. Sua derivada exterior é dada por

$$d\lambda = dz \wedge dt + dx \wedge dy. \quad (1.2.6)$$

Considere a inclusão $\mathfrak{t} = (\text{Id}, i) : S^1 \times S^2 \hookrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^3$, em que $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão de S^2 em $\mathbb{R}^3$.

Temos assim uma 1-forma em $S^1 \times S^2$ dada pelo pull-back

$$\lambda_0 := \iota^* \lambda.$$

Em coordenadas (t, φ, θ) , λ_0 toma a forma

$$\lambda_0 = \cos \varphi dt + \frac{\sin^2 \varphi}{2} d\theta, \quad (1.2.7)$$

cuja derivada exterior é dada por

$$d\lambda_0 = -\sin \varphi d\varphi \wedge dt + \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta. \quad (1.2.8)$$

Observe que $\lambda_0 = \lambda_{f_0, g_0}$ com $f_0(\eta) = -\eta$ e $g_0(\eta) = \frac{1-\eta^2}{2}$, em que o par (f_0, g_0) satisfaz as condições (i) e (ii) na definição de formas de contato em $S^1 \times S^2$ do tipo $\lambda_{f,g}$.

Denotamos por

$$\xi_0 = \ker \lambda_0$$

a estrutura de contato em $S^1 \times S^2$ associada a λ_0 .

Sabemos que

$$\begin{aligned} \lambda_0 \wedge d\lambda_0 &= \frac{\sin \varphi (1 + \cos^2 \varphi)}{2} dt \wedge d\varphi \wedge d\theta, \text{ em coordenadas } (t, \varphi, \theta), \\ &= \frac{1+z^2}{2z} dt \wedge dx \wedge dy, \text{ em coordenadas } (t, x, y, z = \pm \sqrt{1-x^2-y^2}). \end{aligned}$$

Proposição 1.2.23. A variedade de contato $(S^1 \times S^2, \xi_0 = \ker \lambda_0)$, onde λ_0 é dada por (1.2.7), é simplesmente preenchível.

Demonstração. Considere a 4-variedade simplética $(S^1 \times B(1), d\lambda)$, onde $B(1)$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^3$ centrada no origem e λ é dada em (1.2.5). Observe por (1.2.6) que $(S^1 \times B(1), d\lambda)$ é variedade simplética e $S^1 \times S^2$ é a fronteira de $S^1 \times B(1)$. Já verificamos que $d\lambda|_{\xi_0} = d\lambda_0$ é não-degenerada.

O campo $v = z\partial_z + \frac{x}{2}\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y$ é um campo de Liouville para $d\lambda$, é transversal a $S^1 \times S^2$ apontando para o exterior e

$$\iota^*(i_v d\lambda) = \lambda_0,$$

em que $\iota : S^1 \times S^2 \hookrightarrow S^1 \times \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Segue que

$$\iota^*(i_v(d\lambda \wedge d\lambda)) = \iota^*(2\lambda \wedge d\lambda) = 2\lambda_0 \wedge d\lambda_0,$$

de onde concluímos que a orientação de $S^1 \times S^2$ induzida por $\xi_0 = \ker \lambda_0$ coincide com a orientação de $S^1 \times S^2$ induzida como bordo de $(S^1 \times B(1), d\lambda)$. Segue que $(S^1 \times S^2, \xi_0)$ é simplesmente preenchível. $\square$

E segue da observação 1.2.14 que

Proposição 1.2.24. A estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$ em $S^1 \times S^2$, onde λ_0 é dada por (1.2.7), é tight.

Demonstração caso $\text{wind}(f, g) = 1$. Considere $\lambda := \lambda_{f,g}$, para um par de funções (f, g) satisfazendo (i), (ii) e $\text{wind}(f, g) = 1$. Segue da proposição 1.2.21 que λ e λ_0 são contactomorfas, ou seja, existe

um contactomorfismo $\phi : (S^1 \times S^2, \xi_0) \rightarrow (S^1 \times S^2, \xi)$ tal que $\phi_*\xi_0 = \xi$. Segue que a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é *tight*. $\square$

O seguinte resultado nos diz que existe uma única estrutura de contato tight em $S^1 \times S^2$.

Teorema 1.2.25. [Gei08, Teorema 4.10.1] *A 3-variedade $S^1 \times S^2$ admite uma única estrutura de contato tipo tight a menos de isotopias.*

Observação 1.2.26. *Sem perda de generalidade, podemos assumir que qualquer forma de contato λ em $S^1 \times S^2$ cuja estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é tight, é da forma $h\lambda_0$, para alguma função suave $h : S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De fato, pelo teorema acima temos que ξ é isotópico a $\xi_0 = \ker \lambda_0$, ou seja, existe uma família suave de formas de contato λ_s , $s \in [0, 1]$, tal que $\lambda_1 = \lambda$. Pelo teorema da estabilidade de Gray, existe uma isotopia $\{\phi_s\}$ tal que $\phi_0 = Id$ e $\phi_{s*}\xi_0 = \xi_s$, em que $\xi_s = \ker \lambda_s$, para todo $s \in [0, 1]$. Em particular,*

$$\phi_1^*\lambda = h\lambda_0,$$

para alguma função suave $h \neq 0$.

Ainda, podemos assumir $h > 0$. De fato, se for $h < 0$, consideramos $\Phi = \phi_1 \circ T$ e $\bar{h} = -h \circ T > 0$, em que $T(t, \varphi, \theta) = (-t, \varphi, -\theta)$ é um difeomorfismo linear de $S^1 \times S^2$. Note que $T^*\lambda_0 = -\lambda_0$. Logo

$$\begin{aligned} \Phi^*\lambda &= (T^* \circ \phi_1^*)\lambda \\ &= T^*(h\lambda_0) \\ &= (h \circ T)T^*\lambda_0 \\ &= -(h \circ T)\lambda_0 \\ &= \bar{h}\lambda_0. \end{aligned}$$

Proposição 1.2.27. *A estrutura de contato ξ_0 em $S^1 \times S^2$ é trivial.*

Demonstração. Usando (1.2.5) e (1.2.6), vemos que o referencial $\{v_1, v_2\} \subset T(S^1 \times \mathbb{R}^3)$, definido em coordenadas (t, x, y, z) por

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} \left(\frac{y}{2}, z, 0, -x \right) \\ v_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}} \left(-\frac{x}{2}, 0, z, -y \right), \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

satisfaz

$$\text{span}\{v_1, v_2\} = \ker \lambda_0 \subset T(S^1 \times S^2)$$

e

$$d\lambda_0(v_1, v_2) = 1.$$

Portanto, $\{v_1, v_2\}$ induz uma trivialização simplética de ξ_0 . $\square$

A trivialização simplética dada na demonstração da proposição acima tem a seguinte expressão em coordenadas (t, φ, θ) , com $\varphi \in (0, \pi)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos^2 \varphi}} \left(\frac{\sin \theta \sin \varphi}{2}, \cos \theta, -\frac{\sin \theta \cos \varphi}{\sin \varphi} \right), \\ v_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos^2 \varphi}} \left(-\frac{\cos \theta \sin \varphi}{2}, \sin \theta, \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin \varphi} \right). \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

1.3 Dinâmica simplética

Os trabalhos de Hofer, Wysocki e Zehnder motivaram o uso do termo Dinâmica Simplética para se referir ao uso de ferramentas modernas de topologia simplética, como a teoria de curvas pseudo-holomorfas em simpletizações, para estudar propriedades globais de sistemas Hamiltonianos, em particular de fluxos de Reeb.

Nesta seção vamos definir alguns conceitos topológicos e de dinâmica relacionados ao comportamento local das órbitas λ -Reeb fechadas, para alguma 1-forma de contato λ em M . Para isso, vamos entender por *órbita de Reeb fechada* as classes de equivalência de pares $P = (\gamma, T)$, onde $T > 0$ e γ é uma trajetória T -periódica do campo de Reeb R_λ , dadas pela seguinte relação de equivalência: sejam $P = (\gamma, T)$, $\bar{P} = (\bar{\gamma}, \bar{T})$ duas órbitas fechadas de campo de λ -Reeb, dizemos que $P \sim \bar{P}$ se e somente se $T = \bar{T}$ e $\{\gamma(Tt) : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\} = \{\bar{\gamma}(\bar{T}t) : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$. Denotamos $\mathcal{P}(\lambda)$ o conjunto das classes de equivalência de órbitas fechadas de Reeb da forma de contato λ . Seja $\gamma_t(t) := \gamma(Tt)$, para $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Podemos pensar $\mathcal{P}(\lambda) := C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1, M)/S^1$, onde $C^\infty(S^1, M) := \{\gamma : S^1 \rightarrow M : \gamma \text{ é de classe } C^\infty\}$. Em efeito, dado $P = (\gamma, T)$ podemos associar sua classe com a classe $[\gamma_T] \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1, M)/S^1$, onde e o conjunto quociente $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1, M)/S^1$ é induzido pela ação translação $\psi : S^1 \times C^\infty(S^1, M) \rightarrow C^\infty(S^1, M)$ dada por $\psi(t, \gamma(s)) := \gamma(s + c)$.

Por simplicidade, escrevemos $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Distinguimos alguns tipos de órbitas de Reeb fechadas, por exemplo, aquelas órbitas $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ que têm período T mínimo, chamadas de *primas*. Dizemos que uma órbita fechada $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é contrátil se existe um disco contínuo $v : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \rightarrow M$ tal que $v(e^{2\pi i t}) = \gamma_t(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Denotamos por $\mathcal{P}^c(\lambda)$ o conjunto das órbitas λ -Reeb fechadas contráteis.

Por outro lado, notemos que o fluxo de Reeb $\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ preserva a estrutura de contato $\xi := \ker \lambda$, pois

$$\mathcal{L}_{R_\lambda} \lambda = i_{R_\lambda} d\lambda + d(i_{R_\lambda} \lambda) = 0,$$

onde R_λ é o campo de Reeb associado à forma de contato λ . Assim, o fluxo $\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ também preserva a decomposição $TM = \mathbb{R}R_\lambda \oplus \xi$ e se segue que

$$\phi_{s,*}(\xi_p) = \xi_{\phi_s(p)} \quad e \quad \phi_{s,*}(R_\lambda(p)) = R_\lambda(\phi_s(p)),$$

para todo $p \in M$. Denotamos por $d\phi_s : \xi_{\gamma(0)} \rightarrow \xi_{\gamma(s)}$ a aplicação linear $d\lambda$ -simplética induzida pelo fluxo.

Definição 1.3.1. *Seja λ uma forma de contato sobre a variedade M com estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Considere o fluxo ϕ_s do campo de Reeb R_λ associado à forma de contato λ . Dizemos que uma trajetória γ de R_λ com período T é **não-degenerada** se 1 não é um valor espectral de $d\phi_T : \xi_{\gamma(0)} \rightarrow \xi_{\gamma(0)}$. Dizemos que λ é **não-degenerada** se toda órbita λ -Reeb fechada é não-degenerada.*

1.3.1 Matrizes simpléticas e Índice de Maslov

Lembremos a variedade simplética definida no exemplo 1.1.2, para algum $n \geq 1$. Ou seja, $\mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

onde $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^{2n}$.

Note que a forma simplética pode ser expressa por

$$\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle J_0 \cdot, \cdot \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Euclidiano canônico de $\mathbb{R}^{2n}$ e $J_0 \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ é a matriz dada em blocos $n \times n$ por

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Por outro lado, considerando a matriz A que representa uma transformação linear de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Sabemos que ela satisfaz $\omega_0(A \cdot, A \cdot) = \omega_0(\cdot, \cdot)$.

Definição 1.3.2. Definimos o conjunto das matrizes reais simpléticas de ordem $2n$ por

$$Sp(n) = \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J_0 A = J_0\}.$$

Aqui, A^T denota a transposta de A .

Observe que $A^T \in Sp(n)$ se $A \in Sp(n)$. Também, note que o produto de matrizes simpléticas é uma matriz simplética. Além disso, se $A \in Sp(n)$ é simétrica e definida positiva então $A^r \in Sp(n)$, para todo número real $r \neq 0$ (veja lema 4.1.13 de [HSa13]).

Seja $A \in Sp(n)$ então $U_A = (AA^T)^{-1/2}A \in U(n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid AJ_0 = J_0A \text{ e } A^T = A^{-1}\} = Sp(n) \cap O(n)$. De fato, pelas observações acima temos que $U_A \in Sp(n)$ e por

$$\left((AA^T)^{-1/2}A\right)^T (AA^T)^{-1/2}A = A^T (AA^T)^{-1}A = A^T (A^T)^{-1}A^{-1}A = I.$$

Definimos aplicação $\zeta : Sp(n) \rightarrow S^1$ dada por $\zeta(A) = \det(U_A)$, onde $\det$ denota o determinante complexo de uma matriz em $U(n)$. Então, dado um loop $\Phi : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (Sp(n), I)$ que começa e termina na identidade, definimos o isomorfismo

$$\mu^n(t \mapsto \Phi(t)) := \text{grau de } (t \mapsto \zeta(\Phi(t))).$$

Aqui, devemos interpretar aplicação $t \mapsto \zeta(\Phi(t)) : ([0, 1], \{0, 1\}) \mapsto (S^1, \{1\})$ como uma aplicação de $S^1 \rightarrow S^1$. Ou seja, consideramos a função suave $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\zeta(\Phi(t)) = e^{2\pi i \theta(t)}$, então

$$\mu^n(\Phi) = \theta(1) - \theta(0).$$

O seguinte teorema diz que aplicação μ^n é unicamente determinada. Portanto, chamamos ela de **índice de Maslov**.

Teorema 1.3.3 (Índice de Maslov). *Seja $n \geq 1$. Existe um único índice de Maslov $\mu^n : \pi_1(Sp(n)) \rightarrow \mathbb{Z}$, satisfazendo as seguintes condições:*

- **Homotopia:** *Dois loops $\Phi_0, \Phi_1 : S^1 \rightarrow Sp(n)$ são homotópicos se e somente se $\mu^n(\Phi_0) = \mu^n(\Phi_1)$. Ou seja, μ^n define um isomorfismo entre os grupos $\pi_1(Sp(n))$ e $\mathbb{Z}$.*
- **Soma:** *Sejam $\Phi_0 : S^1 \rightarrow Sp(k)$ e $\Phi_1 : S^1 \rightarrow Sp(m)$ tal que $n = k + m$. Considerando $Sp(k)$ e $Sp(m)$ como subgrupos de $Sp(n)$ então vale*

$$\mu^n(\Phi_0(t) \oplus \Phi_1(t)) = \mu^k(\Phi_0(t)) + \mu^m(\Phi_1(t)),$$

onde identificamos $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2(k+m)}$ munido de sua forma simplética canônica com a soma direita de $\mathbb{R}^{2k} \oplus \mathbb{R}^{2m}$ e a matriz em blocos

$$\Phi_0(t) \oplus \Phi_1(t) = \begin{bmatrix} \Phi_0(t) & 0 \\ 0 & \Phi_1(t) \end{bmatrix}.$$

- **Produto:** *Para todo par de loops $\Phi_0, \Phi_1 : S^1 \rightarrow Sp(n)$*

$$\mu^n(\Phi_0(t)\Phi_1(t)) = \mu^n(\Phi_0) + \mu^n(\Phi_1).$$

- **Normalização:** *Seja $\Phi : S^1 \rightarrow U(1) \subset Sp(1)$ dada por $\Phi(t) = e^{2\pi it} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$. Então $\mu^n(\Phi) = 1$.*

Demonstração. Veja o Teorema 2.29 de [MS98]. □

1.3.2 Índice de Conley-Zehnder

O índice de Conley-Zehnder é um invariante da dinâmica linearizada ao longo de uma órbita periódica não-degenerada, o qual será definido por meio de caminhos de matrizes simpléticas. Seguimos a exposição dada em [HSa13].

Definição 1.3.4. *O ciclo de Maslov é o conjunto*

$$\Lambda(n) = \{\Psi \in Sp(n) : \det(\Psi - I) = 0\}$$

e seu complementar em $Sp(n)$ será denotado por

$$Sp^*(n) = \{\Psi \in Sp(n) : \det(\Psi - I) \neq 0\}.$$

Pelo lema 3.2 de [SZ92], $Sp^*(n) = Sp^+(n) \cup Sp^-(n)$, onde

$$Sp^+(n) = \{A \in Sp(n) : \det(\Psi - I) > 0\},$$

$$Sp^-(n) = \{A \in Sp(n) : \det(\Psi - I) < 0\}.$$

Além disso, toda curva fechada em $Sp^*(n)$ é contrátil em $Sp(n)$.

Seja

$$\Sigma^*(n) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow Sp(n) : \varphi(0) = I \quad \text{e} \quad \varphi(1) \in Sp^*(n)\},$$

o conjunto dos caminhos contínuos de matrizes simpléticas que começam na identidade e terminam em $Sp^*(n)$.

Teorema 1.3.5 (Teorema 3.1, [HWZ95]). *Existe uma única aplicação $\mu_{cz} : \Sigma^*(n) \rightarrow \mathbb{Z}$ sobrejetora caracterizada pelas seguintes propriedades:*

- **Homotopia:** Se $s \mapsto \varphi_s \in \Sigma^*(n)$ é uma família contínua, então $s \mapsto \mu_{cz}(\varphi_s)$ é constante.
- **Índice de Maslov:** Seja $\psi : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (Sp(1), I)$ uma curva contínua fechada e $\varphi \in \Sigma^*(n)$. Então $\mu_{cz} = \mu_{cz}(\varphi) + 2k$, onde k é o índice de Maslov de ψ .
- **Invertibilidade:** Se $\varphi \in \Sigma^*(n)$ e $\varphi^{-1}(t) := \varphi(t)^{-1}$, então $\mu_{cz}(\varphi^{-1}(t)) = -\mu_{cz}(\varphi(t))$, para todo $t \in [0, 1]$.
- **Normalização:** Se $\varphi_0(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \in \Sigma^*(2)$, então $\mu_{cz}(\varphi_0) = 1$.

O inteiro μ_{cz} é chamado **índice de Conley-Zehnder**.

Descrição geométrica

Em [HMSa15], encontramos uma versão geométrica do índice de Conley-Zehnder no caso $n = 1$. Considere a curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow Sp(1)$ solução do sistema $\dot{\varphi} = iS\varphi$ com condição inicial $\varphi(0) = I_{2 \times 2}$. Aqui S se torna um caminho de matrizes simétricas. Então para $z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existe uma função suave $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s)z \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(s)}$. Como $\theta(s)$ é única a menos da adição de um número em $2\pi\mathbb{Z}$, definimos $\Delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Delta(z) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}$$

e o intervalo de rotação

$$I_\varphi = \Delta(\mathbb{C} \setminus \{0\}). \quad (1.3.2)$$

O intervalo I_φ tem comprimento estritamente menor que $1/2$. Portanto, se define

$$\mu_{cz}(\varphi) = \begin{cases} 2k & \text{se } k \in I_\varphi \\ 2k+1 & \text{se } I_\varphi \subset (k, k+1). \end{cases}$$

Por outro lado, lembremos que os valores próprios α, β de uma matriz simplética em $Sp(1)$ estão relacionados, ou seja, $\beta = \bar{\alpha}$ se $\alpha \in \mathbb{C}$, ou, $\beta = 1/\alpha$ se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Segue-se

Definição 1.3.6. *Seja a curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow Sp(1)$ como acima. Dizemos que $\varphi(1)$ é **elíptico** se seus valores próprios são complexos. No outro caso, se seus valores próprios são reais dizemos que $\varphi(1)$ é **hiperbólico**.*

*Se $\varphi(1)$ é hiperbólico e $\sigma(\varphi(1)) \subset (0, +\infty)$, dizemos que $\varphi(1)$ é **hiperbólico positivo**. Analogamente, se $\varphi(1)$ é hiperbólico e $\sigma(\varphi(1)) \subset (-\infty, 0)$, dizemos que $\varphi(1)$ é **hiperbólico negativo**.*

Além disso, o seguinte lema nos mostra o comportamento das iterações da curva de matrizes em $Sp(1)$.

Lema 1.3.7 (lema 2.2, [HMSa15]). *Suponhamos que $\varphi(1)$ não tem raízes da unidade no espectro. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- Se $\varphi(1)$ é elíptico então existe $\alpha \notin \mathbb{Q}$ tal que $I(\varphi^k) \subset ([k\alpha], \lfloor k\alpha \rfloor + 1)$ e $\mu_{cz}(\varphi^k) = 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1, \forall k \geq 1$.
- Se $\varphi(1)$ é hiperbólico positivo então existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $l \in I(\varphi)$ e $\mu_{cz}(\varphi^k) = 2kl, \forall k \geq 1$.
- Se $\varphi(1)$ é hiperbólico negativo então existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $l + 1/2 \in I(\varphi)$ e $\mu_{cz}(\varphi^k) = k(2l + 1), \forall k \geq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} k \in 2\mathbb{Z} + 1 &\Rightarrow I(\varphi^k) \subset ([k(l + 1/2)], \lfloor k(l + 1/2) \rfloor + 1) \\ k \in 2\mathbb{Z} &\Rightarrow k(l + 1/2) \in I(\varphi^k). \end{aligned}$$

Observação 1.3.8. *Note-se que o índice de Conley-Zehnder de φ é ímpar se $\varphi(1)$ é elíptico ou hiperbólico negativo. E se $\varphi(1)$ é hiperbólico positivo então $\mu_{cz}(\varphi)$ é par.*

Descrição Analítica

Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow Sp(1)$ uma curva suave tal que $\varphi(0) = I_{2 \times 2}$. Lembremos que o operador assintótico $\mathcal{A}_\varphi$ pode ser escrito da forma $\mathcal{A}_\varphi = -i\partial_t - S$, onde $S = -i\dot{\varphi}\varphi^{-1}$ é uma curva de matrizes simétricas e

$$i \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É conhecido que o operador $\mathcal{A}_\varphi$ é auto-adjunto não-limitado em $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ com domínio $W^{1,2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$. Seu espectro é discreto e consiste de valores próprios reais acumulando-se só em $\pm\infty$, veja lema 3.8 de [HWZ95]. Assim, dado um vetor próprio v não-nulo de $\mathcal{A}_\varphi$ associado ao valor próprio v , escrevemos $v(s) = r(s)e^{i\theta(s)}$. Definimos o **número de enrolamento**

$$\text{wind}(v) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}. \quad (1.3.3)$$

Esta definição não depende do vetor próprio do valor próprio v , veja o lema 3.4 de [HWZ95]. Além disso, pelo lema 3.6 e 3.7 de [HWZ95] sabemos que para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem exatamente dois valores próprios contando multiplicidades com número de enrolamento k , e se $v_0 \leq v_1$ então $\text{wind}(v_0) \leq \text{wind}(v_1)$. Segue-se do lema 3.5 de [HWZ95] que se dois valores próprios diferentes com mesmo número de enrolamento, então os vetores próprios são linearmente independentes. Portanto, a multiplicidade algébrica e geométrica dos valores próprios são 1 ou 2.

Sejam $v^- = \max\{v \in \sigma(\mathcal{A}_\varphi) : v < 0\}$ e $v^+ = \min\{v \in \sigma(\mathcal{A}_\varphi) : v \geq 0\}$ e denotamos

$$\text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi) = \text{wind}(v^-) \quad e \quad \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi) = \text{wind}(v^+).$$

Os valores v^+ e v^- são chamados valores próprios extremais.

Definimos o **índice de Conley-Zehnder** por

$$\mu_{cz}(\varphi) = 2\text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi) + p(\mathcal{A}_\varphi),$$

onde

$$p(\mathcal{A}_\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi) = \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi) \\ 1 & \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi) > \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi). \end{cases}$$

O seguinte lema mostra a relação entre o intervalo de rotação $I(\varphi)$ e os número de enrolamento extremas.

Lema 1.3.9. *Seja o intervalo de rotação $I(\varphi)$ dado por (1.3.2) então $\text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi) \leq \max I(\varphi)$ e $\text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi) \geq \min I(\varphi)$. A desigualdade é estrita se $\varphi \in \Sigma^*(1)$. Além disso, se $\varphi(1)$ é hiperbólico positivo então $\text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi) = \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi)$.*

Se segue disto e da definição do número de Conley-Zehnder

Corolário 1.3.10. *Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow Sp(1)$ curva suave tal que $\varphi(0) = I$ e $\varphi(1)$ não tem raízes da unidade. Suponhamos que $\varphi^k(s) = \varphi(ks)$ é uma extensão continua de $\varphi(s)$ e considere seu operador auto-adjunto $\mathcal{A}_\varphi$.*

Se $\varphi(1)$ é elíptico então

$$\text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi^k) = \lfloor k\alpha \rfloor + 1 \quad e \quad \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi^k) = \lfloor k\alpha \rfloor \quad \forall k \geq 1,$$

onde $\alpha \notin \mathbb{Q}$ é determinado por $\mu_{cz}(\varphi^k) = 2\lfloor k\alpha \rfloor + 1, \forall k$.

Se $\varphi(1)$ é hiperbólico positivo, assuma que $l \in \mathbb{Z}$ satisfaz $\mu_{cz}(\varphi^k) = 2kl$, para todo $k \geq 1$. Então

$$\text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi^k) = \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi^k) = kl, \quad \forall k \geq 1.$$

Se $\varphi(1)$ é hiperbólico negativo, assuma que $l \in \mathbb{Z}$ satisfaz $\mu_{cz} = k(l + 1/2)$, para todo $k \geq 1$. Então

$$k \geq 1 \text{ é par} \Rightarrow \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi^k) = \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi^k) = k(l + 1/2).$$

$$k \text{ é ímpar} \Rightarrow \begin{cases} \text{wind}^+(\mathcal{A}_\varphi^k) &= \lfloor k(l + 1/2) \rfloor + 1, \\ \text{wind}^-(\mathcal{A}_\varphi^k) &= \lfloor k(l + 1/2) \rfloor. \end{cases}$$

1.3.3 Números de rotação

Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Sp(1)$, $\varphi(0) = I$, solução periódica de período 1 do sistema Hamiltoniano $\dot{\varphi} = iS\varphi$, ou seja, $S(t)$ é um caminho de matrizes simpléticas. Isto é equivalente a $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo t .

Consideremos à única função argumento $\theta(t, s) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi(t)e^{2\pi s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t, s)}$ e $\theta(0, s) = 2\pi s$. Então $\theta(t, s+1) = \theta(t, s) + 2\pi$. Definimos $f(s) := \theta(1, s)/2\pi$. f satisfaz $f(s+1) = f(s) + 1$ e induz um difeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ preservando orientação. Além disto, f pode ser escrita da forma $f(s) = s + \Delta(s)$, onde $\Delta(s)$ é uma função suave de período 1, e se define o **intervalo de rotação** como $I(\varphi|_{[0,1]}) = \Delta([0, 1])$ e o **número de rotação** por

$$\rho(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k}.$$

está bem definido e independe de $s \in [0, 1]$.

Considere os iterados do caminho $\varphi^k(s) = \varphi(kt)$, $t \in [0, 1]$ e a variação angular $s \mapsto \Delta^k(s)$. Como S tem período 1, devemos ter

$$\Delta^k(s) = \Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s)).$$

Segue-se que $\Delta^k(s)/k \rightarrow \rho$ quando $k \rightarrow +\infty$. A definição anterior de número de rotação é dada para caminhos de matrizes simpléticas.

Note que as definições anteriores de índices dinâmicos forem feitos para curvas de matrizes simpléticas em $\Sigma^*(1)$. Isso também pode ser feito para órbitas de Reeb fechadas não-degeneradas, como será feito a seguir.

1.3.4 Índices dinâmicos para órbitas de Reeb fechadas não-degeneradas

Agora, vamos definir o *número de rotação transversal* $\rho(P)$ associado a órbita de Reeb $P = (\gamma, T)$. Entendemos ele como a razão com a qual o fluxo linearizado gira ao redor de P , calculada com respeito às coordenadas da estrutura de contato induzida por um referencial global positivo. Nesta seção, também será definido o Índice de Conley-Zehnder de uma órbita P não-degenerada.

Denotamos por $\gamma_T(t) = \gamma(Tt)$ a reparametrização da trajetória que define a órbita P não-degenerada do fluxo de Reeb de λ , onde λ é uma 1-forma de contato numa 3-variedade M com estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Considere a aplicação $d\phi_{Tt}|_{\xi_{\gamma(0)}} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma_T(t)}M$ determinada pelo fluxo linearizado sobre a órbita fechada P . Como o fluxo de Reeb ϕ_t preserva a forma λ , segue-se que $d\phi_{Tt}|_{\xi_{\gamma(0)}} : \xi_{\gamma(0)} \rightarrow \xi_{\gamma_T(t)}$ é uma transformação linear $d\lambda$ -simplética. Consideramos $\Phi : (\gamma_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ uma trivialização de ξ ao longo de P . Podemos definir $w_1(t) + iw_2(t) = \Phi(d\phi_t|_{\gamma(0)} \cdot w)$, para $0 \neq w \in \xi_0|_{\gamma(0)}$, uma solução do fluxo linearizado ao longo de P com respeito à trivialização Φ . Considere o argumento contínuo $\theta(t)$ de $w_1(t) + iw_2(t)$. Se define o *número de rotação transversal* a P dada por

$$\rho(P) := T \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta(s)}{s}.$$

Este número real está bem definido e é possível mostrar que não depende de w .

Outra maneira equivalente de definir este número de rotação transversal é usando o fluxo linearizado $d\phi_{Tt} : \xi_{\gamma_0} \rightarrow \xi_{\gamma_T(t)}$ e a trivialização de ξ para definir o caminho de matrizes simpléticas

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Sp(1), \quad \varphi(t) = \Phi_t \circ d\phi_{Tt} \circ \Phi_0^{-1}.$$

φ satisfaz $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo t , ou seja, φ é solução do sistema hamiltoniano de período 1 definido ao começo da seção. Portanto, definimos o número de rotação transversal de P por

$$\rho(P) = \rho(\varphi).$$

O índice de Conley-Zehnder é um invariante da dinâmica linearizada ao longo de uma órbita periódica não-degenerada de um sistema Hamiltoniano. Define-se o *índice de Conley-Zehnder* da órbita P por

$$\mu_{cz}(P) = \mu_{cz}(\varphi).$$

Vale ainda

$$\rho(P) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{cz}(P^k)}{2k}.$$

Aqui, $\mu_{cz}(P^k)$ é o índice de Conley-Zehnder da k -ésima iteração da órbita P .

Números de Enrolamento

Na subseção da descrição analítica do índice de Conley-Zehnder foi definido o **número de enrolamento** ou **Winding number** de uma valor próprio associado ao operador assintótico de uma curva de matrizes simpléticas, veja equação (1.3.3). Também, na seção 2.3 é definido o operador assintótico e o número de enrolamento para um valor próprio do operador assintótico associado a uma órbita de Reeb numa classe de homotopia β , veja equação (2.3.1). Mas, nesta última definição é dada para 3-variedades de contato munida de uma estrutura quase-complexa. Para esse valor próprio temos associada uma seção não-nula no fibrado vetorial definido pela estrutura de contato em um ponto da variedade. Portanto, nesta seção definimos o **número de enrolamento para um 2-fibrado vetorial orientado E sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$** , o qual será usado para calcular o número de voltas que faz uma seção ao redor do ponto fixo na variedade, tendo ela relação com o número de enrolamento de uma órbita de Reeb.

Quando E está munido de uma estrutura simplética ou complexa, podemos usar a orientação para calcular o número de enrolamento. Neste caso, podemos considerar duas seções não-nulas de E , invés de uma trivialização para ela. Assim, o **número de enrolamento** $\text{wind}(W, Z) \in \mathbb{Z}$, para duas seções contínuas não-nulas Z, W de E é definido como segue: Seja Z' outra seção contínua não-nula tal que $\{Z(t), Z'(t)\}$ é uma base orientada para E_t , para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Então escrevemos $W(t) = a(t)Z(t) + b(t)Z'(t)$, para as únicas funções contínuas $a, b : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos

$$\text{wind}(W, Z) = \theta(1) - \theta(0) \in \mathbb{Z},$$

onde $\theta \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ satisfazendo $a + ib \in \mathbb{R}^+ e^{2\pi i \theta}$.

Sabemos pela teoria de grau topológico que $\text{wind}(Z, W)$ depende só da classe de homotopia das seções não-nulas de Z e W .

1.3.5 Números de rotação no link principal para formas de contato em $S^1 \times S^2$

Consideremos $\lambda := \lambda_{f,g}$, para um par de funções (f, g) satisfazendo (i) e (ii), como foi definida na seção 1.2.3. Lembremos que $P_n := S^1 \times \{(0, 0, 1)\}$ e $P_s := S^1 \times \{(0, 0, -1)\}$ são órbitas λ -Reeb fechadas em $S^1 \times S^2$. Nesta subseção, pretendemos calcular o número de rotação no link principal $L = P_n \cup P_s$, mas antes de isso, precisamos definir os referenciais no link L .

Consideremos a distribuição de planos $\xi \subset T(S^1 \times S^2)$ que definem a estrutura de contato para a forma de contato $\lambda := \lambda_{f,g}$, ou seja,

$$\xi = \ker \lambda.$$

Observe que

$$\xi|_{P_n} = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}|_{P_n},$$

$$\xi|_{P_s} = \text{span}\{\partial_x, \partial_y\}|_{P_s},$$

e que

$$d\lambda|_{P_n}(\partial_x, \partial_y) = g'(-1) > 0 \text{ e } d\lambda|_{P_s}(\partial_x, \partial_y) = -g'(1).$$

Desta forma, podemos considerar o referencial simplético

$$\left\{ \hat{\partial}_x := \frac{1}{\sqrt{g'(-1)}} \partial_x, \hat{\partial}_y := \frac{1}{\sqrt{g'(-1)}} \partial_y \right\}$$

de ξ ao longo de P_n , e o referencial simplético

$$\left\{ \hat{\partial}_x := \frac{1}{\sqrt{g'(1)}} \partial_y, \hat{\partial}_y := \frac{1}{\sqrt{g'(1)}} \partial_x \right\}$$

de ξ ao longo de P_s , se $g'(1) > 0$; ou

$$\left\{ \hat{\partial}_x := \frac{1}{\sqrt{-g'(1)}} \partial_x, \hat{\partial}_y := \frac{1}{\sqrt{-g'(1)}} \partial_y \right\},$$

se $g'(1) < 0$. Note que o sinal de $g'(1)$ é igual ao sinal de $f(1)$.

Com relação a estes referenciais de ξ ao longo de P_n e P_s , vamos calcular os números de rotação de P_n e P_s , respectivamente, ambos vistos como órbitas periódicas do fluxo de Reeb.

Agora, vamos em primeiro lugar, calcular o número de rotação de P_n . Considere em coordenadas (t, x, y) a trajetória periódica do fluxo de Reeb dada por

$$x_n(t) = \left(\frac{1}{f(-1)} t, 0, 0 \right), t \in \mathbb{R},$$

cujos período é $2\pi f(-1)$ e cuja imagem é P_n . Uma solução $\xi(t) = a(t)\hat{\partial}_x + b(t)\hat{\partial}_y$ do fluxo linearizado restrito a estrutura de contato e ao longo de x_n satisfaz $\dot{\xi}(t) = DR(x_n(t))\xi(t)$ e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(-1)}{f(-1)g'(-1)} \\ -\frac{f'(-1)}{f(-1)g'(-1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $a(t) + ib(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\zeta(t)}$ para algum argumento contínuo $\zeta(t)$, obtemos

$$\dot{\zeta}(t) = -\frac{f'(-1)}{f(-1)g'(-1)} \Rightarrow \zeta(t) = -\frac{f'(-1)}{f(-1)g'(-1)} t + \zeta(0), \forall t.$$

Portanto, o número de rotação de P_n é dado por

$$\rho(P_n) = 2\pi f(-1) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(t)}{2\pi t} = -\frac{f'(-1)}{g'(-1)}.$$

Da mesma forma, calculamos o número de rotação de P_s . Considere em coordenadas (t, x, y) a trajetória periódica do fluxo de Reeb dada por

$$x_s(t) = \left(\frac{1}{f(1)} t, 0, 0 \right), t \in \mathbb{R},$$

cujos período é $2\pi|f(1)|$ e cuja imagem é P_s . Primeiro, vamos assumir que $f(1) > 0$. Uma solução $\xi(t) = a(t)\hat{\partial}_x + b(t)\hat{\partial}_y$ do fluxo linearizado restrito a estrutura de contato e ao longo de x_s satisfaz

$\dot{\xi}(t) = DR(x_s(t))\xi(t)$ e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} \\ -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $a(t) + ib(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\zeta(t)}$ para algum argumento contínuo $\zeta(t)$, obtemos

$$\dot{\zeta}(t) = -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} \Rightarrow \zeta(t) = -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)}t + \zeta(0), \forall t.$$

Portanto, o número de rotação de P_s é dado por

$$\rho(P_s) = 2\pi f(1) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(t)}{2\pi t} = -\frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

Considere agora o caso $f(1) < 0$. Uma solução $\xi(t) = a(t)\hat{\partial}_x + b(t)\hat{\partial}_y$ do fluxo linearizado restrito a estrutura de contato e ao longo de x_s satisfaz $\dot{\xi}(t) = DR(x_s(t))\xi(t)$ e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} \\ -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $a(t) + ib(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\zeta(t)}$ para algum argumento contínuo $\zeta(t)$, obtemos

$$\dot{\zeta}(t) = -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)} \Rightarrow \zeta(t) = -\frac{f'(1)}{f(1)g'(1)}t + \zeta(0), \forall t.$$

Portanto, o número de rotação de P_s é dado por

$$\rho(P_s) = -2\pi f(1) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\zeta(t)}{2\pi t} = \frac{f'(1)}{g'(1)}.$$

CAPÍTULO 2

TEORIA DE CAMPOS SIMPLÉTICOS

Neste capítulo pretendemos definir estruturas complexas em uma variedade simplética, o que permitirá definir estruturas complexas associadas à simpletização de uma variedade de contato. Além disso, definiremos curvas pseudo-holomorfas e estudamos seu comportamento dinâmico e compacidade.

2.1 Estruturas complexas e cobordismos

Definição 2.1.1. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Uma **estrutura complexa** é um automorfismo J do fibrado tangente TM de M que satisfaz $J^2 = -I$. Dizemos que J é ω -compatível se*

$$\begin{aligned}\omega(u, Ju) &> 0 \quad \text{para todo } u \neq 0, \text{ e} \\ \omega(Ju, Jv) &= \omega(u, v) \quad \forall x \in M \text{ e } u, v \in T_x M.\end{aligned}$$

Note que se J é uma estrutura complexa ω -compatível, então

$$g_J(u, v) := \omega(u, J(v)), \quad \text{para } u, v \in T_x M, x \in M,$$

é um produto interno definido positivo em TM .

Observação 2.1.2. *Na literatura, é comum chamar a estrutura complexa J de **estrutura quase-complexa** quando ela está definida no fibrado tangente de uma variedade M de dimensão par. Neste caso, dizemos (M, J) de **variedade quase-complexa**.*

Exemplo 2.1.3. *Lembrando o exemplo 1.1.2, sabemos que para $n \geq 1$, $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ define uma variedade simplética e sua estrutura complexa é dada por (1.3.1), ou seja,*

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{bmatrix}.$$

Onde $\mathbb{I}$ denota a matriz identidade em $\mathbb{R}^n$. Ela define uma estrutura complexa ω_0 -compatível.

Agora, estendemos este conceito para o fibrado vetorial definido por uma 3-variedade de contato $(M, \xi := \ker \lambda)$ fechada e co-orientada com forma de contato λ em M . Consideramos o fibrado vetorial simplético^{2.1.1} $\xi \rightarrow M$ com respeito à forma bilinear $d\lambda$. Dizemos que uma estrutura complexa J é $d\lambda$ -compatível em ξ se $J|_{\xi_x}$ é uma estrutura complexa $d\lambda|_x$ -compatível, para todo $x \in M$. Denotamos $\mathcal{J}(\xi)$ o conjunto das estruturas complexas $d\lambda$ -compatíveis em ξ , munida da topologia C^∞ .

Observação 2.1.4. Pela proposição 2.4.5 de [G08] sabemos que $\mathcal{J}(\xi)$ é não-vazio e contrátil.

Exemplo 2.1.5. Consideremos $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz + xdy))$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são coordenadas retangulares, como no exemplo 1.2.8. Considere os campos $v_1 = \partial_x$, $v_2 = \partial_y - x\partial_z$. Então $\xi = \text{span}\{v_1, v_2\}$ e definimos a estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\xi)$ dada por

$$J(v_1) = v_2 \quad e \quad J(v_2) = -v_1.$$

Exemplo 2.1.6. Consideramos a variedade de contato $(S^1 \times S^2, \xi_0 := \ker \lambda_0)$ dada pelo exemplo 1.2.18, onde

$$\lambda_0 = \cos \varphi dt + \frac{\sin^2 \varphi}{2} d\theta,$$

em coordenadas (t, φ, θ) . Consideramos a trivialização $\{v_1, v_2\}$ de ξ_0 dada por (1.2.10). Definimos a estrutura complexa $J_0 \in \mathcal{J}(\xi_0)$ dada por

$$J_0(v_1) = v_2 \quad e \quad J_0(v_2) = -v_1.$$

Ou seja, $J_0 : \xi_0 \rightarrow \xi_0$ está representada por

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sin \varphi}{2} & 0 \\ 2 \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \sin \varphi \\ 0 & \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Lembramos que a **simpletização** da variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ é a variedade simplética $(\mathbb{R} \times M, d(e^a \lambda))$, onde a denota a coordenada de $\mathbb{R}$. Além disso, cada $J \in \mathcal{J}(\xi)$ induz uma **estrutura quase-complexa** $\tilde{J}$ na simpletização de M , do seguinte jeito:

$$\tilde{J} \cdot \partial_a = R_\lambda, \quad \tilde{J}|_\xi = J,$$

onde a é a coordenada de $\mathbb{R}$, R_λ é o campo de Reeb e ξ é a estrutura de contato vista como um sub-fibrado $\mathbb{R}$ -invariante de $T(\mathbb{R} \times M)$. Equivalente, a estrutura quase-complexa $\tilde{J} : T(\mathbb{R} \times M) \rightarrow T(\mathbb{R} \times M)$ pode ser definida por

$$\tilde{J}(a, x)(h, k) = (-\lambda_x(k), J_x[k - \lambda_x(k)R_\lambda(x)] + hR_\lambda(x)),$$

onde $(a, x) \in \mathbb{R} \times M$, $(h, k) \in T(\mathbb{R} \times M)$ e R_λ é o campo de Reeb associado a λ .

Observação 2.1.7. $\tilde{J}$ é $d(e^a \lambda)$ -compatível. De fato, para $(a, x) \in \mathbb{R} \times M$ e $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in T_{(a, x)}(\mathbb{R} \times$

^{2.1.1} ξ define um fibrado vetorial simplético, se cada fibra $\xi_x \subset T_x M$, a forma bilinear alternada $d\lambda|_x$ é não-degenerada.

M), temos

$$\begin{aligned}
d(e^a \lambda)|_{(a,x)} (\tilde{J}_{(a,x)}(h_1, k_1), \tilde{J}_{(a,x)}(h_2, k_2)) &= e^a (da \wedge \lambda + d\lambda) (\tilde{J}_{(a,x)}(h_1, k_1), \tilde{J}_{(a,x)}(h_2, k_2)) \\
&= e^a (h_1 \lambda(k_2) - h_2 \lambda(k_1)) \\
&\quad + e^a d\lambda (J_x(k_1 - \lambda_x(k_1)R_\lambda(x)), J_x(k_2 - \lambda_x(k_2)R_\lambda(x))) \\
&= e^a (da \wedge \lambda) ((h_1, k_1), (h_2, k_2)) \\
&\quad + e^a d\lambda (k_1 - \lambda_x(k_1)R_\lambda(x), k_2 - \lambda_x(k_2)R_\lambda(x)) \\
&= e^a [da \wedge \lambda ((h_1, k_1), (h_2, k_2)) + d\lambda(k_1, k_2)] \\
&= d(e^a \lambda)|_{(a,x)} ((h_1, k_1), (h_2, k_2)),
\end{aligned}$$

e para $0 \neq (h, k) \in T_{(a,x)}(\mathbb{R} \times M)$, temos

$$\begin{aligned}
d(e^a \lambda)|_{(a,x)} ((h, k), \tilde{J}_{(a,x)}(h, k)) &= e^a (da \wedge \lambda + d\lambda) ((h, k), (-\lambda_x(k), J_x[k - \lambda_x(k)R_\lambda(x)] + hR_\lambda(x))) \\
&= e^a [h^2 + \lambda^2(k) + d\lambda(k - \lambda_x(k)R_\lambda(x), J_x(k - \lambda_x(k)R_\lambda(x)))] > 0.
\end{aligned}$$

Denotamos por $\mathcal{J}(\lambda)$ o conjunto das estruturas quase-complexas $\tilde{J}$. Pela proposição 2.4.8 de [Gei08] temos que $\mathcal{J}(\lambda)$ é não-vazio e contrátil. Além disso, dada a variedade quase-complexa $(\mathbb{R} \times S^1 \times S^2, \tilde{J})$, onde $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$ é induzida por algum $J \in \mathcal{J}(\xi)$, é definida a seguinte métrica Riemanniana g em $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$;

$$g(\cdot, \cdot) := da \otimes da(\cdot, \cdot) + \lambda \otimes \lambda(\cdot, \cdot) + d\lambda(\cdot, \tilde{J}\cdot).$$

Exemplo 2.1.8. Consideramos a estrutura complexa $J_0 \in \mathcal{J}(\xi_0)$ dada por (2.1.1) para a variedade de contato em $(S^1 \times S^2, \xi_0)$, como no exemplo acima. A estrutura quase-complexa $\tilde{J}_0$ na simplificação $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ induzida por J_0 , nas coordenadas (a, t, φ, θ) , é dada por

$$\tilde{J}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \varphi & 0 & -\frac{\sin^2 \varphi}{2} \\ \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} & 0 & -\frac{\sin \varphi}{2} & 0 \\ 0 & 2 \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \sin \varphi \\ \frac{2}{1 + \cos^2 \varphi} & 0 & \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Lembremos que o campo de Reeb R_{λ_0} é dado por

$$R_{\lambda_0} = \frac{2}{1 + \cos^2 \varphi} (\cos \varphi \partial_t + \partial_\theta).$$

Por outro lado, lembramos que o fibrado co-tangente define uma variedade simplética munido da forma canônica $\omega_{can} := d\alpha_{taut}$, onde α_{taut} é a forma tautológica. Além disso, dada a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ temos $(TM/\xi)^* \simeq \xi^\perp$, onde $\xi^\perp$ é o aniquilador de ξ em T^*M . Seja $W_\xi \subset \xi^\perp \setminus 0$ o conjunto dos co-vetores positivos e consideremos o fibrado dado por $\pi : W_\xi \rightarrow (M, \xi)$. Então, podemos ordenar as fibras do fibrado anterior da seguinte maneira: Sejam $\theta_0, \theta_1 \in \pi^{-1}(x)$, Dizemos que

$$\theta_0 \preceq \theta_1 \text{ quando } \theta_1/\theta_0 \geq 1.$$

Em particular, dados duas formas de contato positivas λ_- e λ_+ para ξ , dizemos que

$$\lambda_- \preceq \lambda_+ \text{ se e somente se } \lambda_-|_x \prec \lambda_+|_x \text{ pontualmente, para todo } x \in M.$$

Observação 2.1.9. No caso em que $M = S^1 \times S^2$ e ξ define uma estrutura de contato tipo tight, temos pela observação 1.2.26 que $\lambda_+ = f_+ \lambda_0$ e $\lambda_- = f_- \lambda_0$, onde $f_+, f_- \in \mathcal{F}$ são funções positivas em $S^1 \times S^2$ e λ_0 esta dada por (1.2.7). Portanto, podemos dizer que

$$\lambda_- \preceq \lambda_+ \text{ se e somente se } f_- \leq f_+ \text{ pontualmente.}$$

2.1.1 Fins cilíndricos e cobordismos

Definição 2.1.10. O conjunto

$$\overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times M : \lambda_-|_x \leq r \leq \lambda_+|_x\}$$

é chamado **cobordismo simplético** entre (M, λ_-) e (M, λ_+) na simpletização de M .

Observação 2.1.11.

$$\mathbb{R} \times M = W^-(\lambda_-) \bigcup_{\substack{\partial^+ W^-(\lambda_-) \\ = \partial^- \overline{W}(\lambda_-, \lambda_+)}} \overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \bigcup_{\substack{\partial^+ \overline{W}(\lambda_-, \lambda_+) \\ = \partial^- W^+(\lambda_+)}} W^+(\lambda_+)$$

onde

$$W^-(\lambda_-) = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times M : r \leq \lambda_-|_x\}$$

$$W^+(\lambda_+) = \{(r, x) \in \mathbb{R} \times M : \lambda_+|_x \leq r\}.$$

A seguir vamos a definir estruturas quase-complexas na simpletização de M , as quais definem cobordismos simpléticos.

Definição 2.1.12. Sejam λ_- e λ_+ formas de contato em M . Dizemos que $\hat{J}$ é uma **estruturas quase-complexas com fins cilíndricos** se satisfaz

- $\hat{J}$ coincide com $\tilde{J}_+ \in \mathcal{J}(\lambda_+)$ numa vizinhança de $W^+(\lambda_+)$,
- $\hat{J}$ coincide com $\tilde{J}_- \in \mathcal{J}(\lambda_-)$ numa vizinhança de $W^-(\lambda_-)$,
- $\hat{J}$ é $d(e^a \alpha_{\text{aut}})$ -compatível.

Dizemos que $\mathbb{R} \times M$ **têm fins cilíndricos** $W^+(\lambda_+)$ e $W^-(\lambda_-)$.

Denotamos o conjunto $\mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$ das *estruturas quase-complexas com fins cilíndricos*. Este conjunto $\mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$ é não-vazio e contrátil.

2.1.2 Estruturas quase-complexas splitting

Considere λ_- , λ_+ formas de contato positivas de ξ tais que $\lambda_- \prec \lambda \prec \lambda_+$. Sejam $\tilde{J}_- \in \mathcal{J}(\lambda_-)$, $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}_+ \in \mathcal{J}(\lambda_+)$ estruturas quase-complexas na simpletização $\mathbb{R} \times M$. Consideramos as estruturas quase-complexas com fins cilindros $\hat{J}_1 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J})$ e $\hat{J}_2 \in \mathcal{J}(\tilde{J}, \tilde{J}_+)$.

Também consideramos a $\mathbb{R}$ -ação dada por $g_c(\theta) = e^c \theta$ em T^*M .

Definição 2.1.13. *Definimos a família de estruturas quase-complexas splitting, para $R \geq 0$, dada por*

$$\bar{J}_R = \begin{cases} (g_{-R})^* \hat{J}_2 & \text{em } W^+(\lambda) \\ (g_R)^* \hat{J}_1 & \text{em } W^-(\lambda) \end{cases}$$

Ela é suave pois que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ é $\mathbb{R}$ -invariante. Note que $\bar{J}_R$ depende de $\hat{J}_1$ e $\hat{J}_2$. Denotamos $\bar{J}_R = \hat{J}_1 \circ_R \hat{J}_2$.

Observação 2.1.14. *$\bar{J}_R$ induz uma estrutura quase complexa $J' \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$. Com efeito, note que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que $\hat{J}_1 \circ_R \hat{J}_2 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$, para $0 < R \leq \varepsilon_0$.*

Para $R > 0$, consideramos a função $\phi_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave satisfazendo $\phi_R(a) = a + R$ se $a \leq -(R + \varepsilon_0)$, $\phi_R(a) = a - R$ se $a \geq R + \varepsilon_0$ e $\phi' > 0$. Além disso, consideramos que a família $\{\phi_R\}$ satisfaz $\sup_{R,a} |\phi'_R(a)| \leq 1$ e

$$\inf\{\phi'_R(a) \mid a \in (-\infty, -R] \cup [R, +\infty) \text{ e } R > 0\} \geq \frac{1}{2}.$$

Definimos $\Phi_R(a, x) = (\phi_R(a), x) : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Portanto, $J'_R := \Phi_R(\bar{J}_1, \bar{J}_2) \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$, para R suficientemente grande.

2.1.3 Estruturas quase-complexas restritas ao link principal em $S^1 \times S^2$.

Consideramos a 1-forma de contato $\lambda := \lambda_{f,g}$ em $S^1 \times S^2$, definida na seção 1.2.3, para um par de funções (f, g) satisfazendo (i), (ii). Consideramos as formas $\lambda_{\pm} = f_{\pm} \lambda$, onde $f_{\pm} \in \mathcal{F}$ (ver 3.1.2). Lembremos que para as formas de contato anteriores, as componentes do link principal $L = P_n \cup P_s$ são órbitas periódicas formando um link principal (ver seção 3.1.1) onde

$$P_n := S^1 \times \{(0, 0, 1)\} \quad \text{e} \quad P_s := S^1 \times \{(0, 0, -1)\}.$$

Note-se que $\lambda_{\pm} \in W_{\xi}$, pois que $\xi = \ker \lambda = \ker \lambda_{\pm}$. Onde W_{ξ} é o conjunto das formas de contato positivas em $S^1 \times S^2$ que definem a estrutura de contato ξ .

Definição 2.1.15. *Definimos o subconjunto $\mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L) \subset \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$ das estruturas quase-complexas tais que $\mathbb{R} \times L$ define uma subvariedade complexa.*

O conjunto acima é um espaço contrátil munido da topologia C^{∞} e é não-vazio. Além disso, se assumirmos $f \in \mathcal{F}$ tal que $f_- < f < f_+$ pontualmente e estruturas quase-complexa $\tilde{J} \in \mathcal{J}(f\lambda)$, $\hat{J}_1 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J})$, $\hat{J} \in \mathcal{J}(\tilde{J}, \tilde{J}_+)$ então $\mathbb{R} \times L$ é uma subvariedade complexa com respeito a $\bar{J}_R = \hat{J}_1 \circ_R \hat{J}_2$.

2.2 Curvas pseudo-holomorfas

Em [Gro85], Gromov introduziu o conceito de curva pseudo-holomorfa em variedades simpléticas, sendo usada aquela teoria no estudo da dinâmica de campos de Reeb de uma 3-variedade de contato. Ainda mais, Hofer mostra a ligação entre curvas pseudo-holomorfas em simplificações de variedades de contato com energia finita e a existência de órbitas fechadas do fluxo de Reeb como pode ser visto nos artigos [HWZ95, HWZ95, HWZ99, HWZ96a], onde encontramos as propriedades das curvas pseudo-holomorfas definidas por Hofer. Estas curvas são usadas em [Hof93, HMSa15, HWZ98] para mostrar resultados de existência implicada de órbitas fechadas.

Nesta seção definimos os conceitos de curvas pseudo-holomorfas e de energia. Além disso, definimos energia para curvas holomorfas dependendo do tipo de estrutura quase-complexa definida na seção anterior. Começamos com a definição de curva pseudo-holomorfa em variedades quase-complexa

Definição 2.2.1. [MS04] *Seja (M, J) uma variedade quase-complexa e (Σ, i) uma superfície de Riemann. Uma aplicação suave $\mu : \Sigma \rightarrow M$ é chamada **curva J -holomorfa** se a diferencial $d\mu$ é aplicação linear complexa com respeito a i e J , ou seja, satisfaz*

$$J \circ d\mu = d\mu \circ i.$$

A equação anterior é equivalente a $\bar{\partial}_J(\mu) = 0$, onde

$$\bar{\partial}_J(\mu) := \frac{1}{2}(d\mu + J \circ d\mu \circ i) \in \Omega^{0,1}(\Sigma, \mu^*TM).$$

Definição 2.2.2. [MS04] *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $(\Sigma, i, d\text{vol}_\Sigma)$ uma superfície de Riemann compacta. Se define a **energia da curva** $\mu : \Sigma \rightarrow M$ como a norma em L^2 da 1-forma $d\mu \in \Omega^1(\Sigma, \mu^*TM)$, ou seja,*

$$E(\mu) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |d\mu|_J^2 d\text{vol}_\Sigma,$$

onde a norma do operador linear $L := d\mu(z) : T_z\Sigma \rightarrow T_{\mu(z)}M$ é definida por

$$|L|_J := |\varsigma|^{-1} \sqrt{|L(\varsigma)|_J^2 + |L(i\varsigma)|_J^2}$$

para $0 \neq \varsigma \in T_z\Sigma$. Lembremos que temos definida uma métrica dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \omega(\cdot, J\cdot).$$

Agora, no caso de curvas J -holomorfas em variedades simpléticas, a energia é um invariante topológico que depende só da classe de homologia da curva modulo sua fronteira. Então a energia está definida no seguinte lema.

Lema 2.2.3 (Lema 2.2.1 de [MS04]). *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $(\Sigma, i, d\text{vol}_\Sigma)$ uma superfície de Riemann compacta e J uma estrutura complexa ω -compatível. Considere a curva J -holomorfa $\mu : \Sigma \rightarrow M$, então a **energia de μ** satisfaz a identidade da energia*

$$E(\mu) = \int_{\Sigma} \mu^* \omega.$$

Além disso, cada aplicação suave $\mu : \Sigma \rightarrow M$ satisfaz

$$E(\mu) = \int_{\Sigma} |\bar{\partial}_J(\mu)|_J^2 d\text{vol}_\Sigma + \int_{\Sigma} \mu^* \omega.$$

Portanto, o lema anterior permite estender a definição de energia da curva holomorfa dependendo do tipo de estrutura quase-complexa definida na seção anterior, para uma variedade de contato (M, ξ) de dimensão 3.

2.2.1 Curvas de energia-finita na simpletização de M

Fixemos $\lambda \in W_\xi$ uma forma de contato suave positiva definida em M . Consideramos o conjunto $\Lambda = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid \phi' \geq 0\}$. Para cada $\phi \in \Lambda$ definimos a 1-forma em $\mathbb{R} \times M$ dada por $\lambda_\phi = \phi \cdot \lambda$.

Definição 2.2.4 ([Hof93]). *Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann, $\Gamma \subset \Sigma$ finito e $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$. Uma curva $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{\mu}$ de energia-finita na simpletização $\mathbb{R} \times M$ é uma curva pseudo-holomorfa*

$$\tilde{\mu} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, \tilde{J}),$$

satisfazendo

$$0 < E(\tilde{\mu}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tilde{\mu}^* d\lambda_\phi < \infty.$$

O valor de $E(\tilde{\mu})$ é chamada **Energia de Hofer** e os elementos de Γ são chamados de **furos** de $\tilde{\mu}$.

Observação 2.2.5. *O integrando da definição anterior é não-negativo e $\tilde{\mu}(s, t) = (a(s, t), u(s, t))$ é constante se $E(\tilde{\mu}) = 0$. De fato,*

$$\tilde{\mu}^* d\lambda_\phi(\partial_s, \partial_t) = \phi'(a) ((\partial_s a)^2 + (\partial_t a)^2) + \phi(a) d\lambda(\pi(\partial_s u), \pi(\partial_t u)) \geq 0.$$

Aqui, $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo da direção do campo de Reeb R_λ , ou seja, dado $p \in M$ define-se

$$\pi_p(k) = k - \lambda_p(k) R_\lambda(p).$$

Observação 2.2.6 (Coordenadas cilíndricas). *Como foi feito em [HWZ95, HMSa15], consideramos $z \in \Gamma$ e a carta holomorfa $\psi : (U, z) \rightarrow (\psi(U), 0)$, onde U é uma vizinhança de z . Identificamos $[s_0, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com a vizinhança furada de z por meio de $(s, t) \simeq \psi^{-1}(e^{-2\pi(s+it)})$, para $s_0 \gg 1$. Chamamos (s, t) de **coordenadas cilíndrica positiva** centrada em z .*

De maneira semelhante, definimos **coordenadas cilíndrica negativas**, $(s, t) \in (-\infty, -s_0] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ por meio de $(s, t) \simeq \psi^{-1}(e^{2\pi(s+it)})$, para $s < -s_0$.

Em qualquer caso, podemos escrever $\tilde{\mu}(s, t) = \tilde{\mu} \circ \psi^{-1}(e^{-2\pi(s+it)})$ ou $\tilde{\mu}(s, t) = \tilde{\mu} \circ \psi^{-1}(e^{2\pi(s+it)})$. Portanto, consideramos (s, t) as coordenadas cilíndricas centradas em $z \in \Gamma$ e escrevemos $\tilde{\mu}(r, s) = (a(r, s), u(r, s))$. Em [HWZ95], se mostra que se $E(\tilde{\mu}) < \infty$ então

$$m = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\{s\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}} u^* \lambda \quad (2.2.1)$$

existe. Aquele número é chamado de **masa de $\tilde{\mu}$ em z** , e não depende da escolha das coordenadas. Segue-se

Definição 2.2.7. *Dizemos que o furo $z \in \Gamma$ é **positivo** se $m > 0$. Se $m < 0$, dizemos que o furo z é **negativo**. Se $m = 0$, z é dito um furo **removível**.*

Além disso, dependendo do tipo do furo, ele induz o seguinte comportamento da aplicação a de $\tilde{\mu}$.

Proposição 2.2.8. *Sejam $\tilde{\mu} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma curva pseudo-holomorfa de energia finita e $z_0 \in \Gamma$, como foi definida anteriormente. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = +\infty$ então z_0 é um furo positivo.

- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = -\infty$ então z_0 é um furo negativo.
- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = k \in \mathbb{R}$ então z_0 é um furo removível.

2.2.2 Curvas de energia-finita em cobordismos

Sejam $\lambda_- \preceq \lambda_+ \in W_\xi$. Consideramos o conjunto $\Lambda = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid \phi' \geq 0\}$ e a estrutura quase-complexa com fins cilíndrico $\hat{J} \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$, para alguns $\tilde{J}_- \in \mathcal{J}(\lambda_-)$ e $\tilde{J}_+ \in \mathcal{J}(\lambda_+)$. Definimos as 1-formas em $\mathbb{R} \times M$, $\lambda_{\pm, \phi} = \phi \cdot \lambda_{\pm}$, para cada $\phi \in \Lambda$.

Definição 2.2.9 ([BEH⁺03]). *Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann e $\Gamma \subset \Sigma$ finito. Uma $\hat{J}$ -curva $\hat{\mu}$ de energia-finita no cobordismo é uma curva pseudo-holomorfa*

$$\hat{\mu} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, \hat{J}),$$

satisfazendo

$$0 < E_-(\hat{\mu}) + E_+(\hat{\mu}) + E_0(\hat{\mu}) < \infty.$$

Onde

$$\begin{aligned} E_+(\hat{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\hat{\mu}^{-1}(W^+(\lambda_+))} \hat{\mu}^* d\lambda_{+, \phi}, \\ E_-(\hat{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\hat{\mu}^{-1}(W^-(\lambda_-))} \hat{\mu}^* d\lambda_{-, \phi}, \\ E_0(\hat{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\hat{\mu}^{-1}(\bar{W}(\lambda_-, \lambda_+))} \hat{\mu}^* \omega_{can}. \end{aligned}$$

O furo $z \in \Gamma$ é chamado **positivo** se

- existe uma vizinhança U de z em Σ tal que $\hat{\mu}(U \setminus \{z\}) \subset W^+(\lambda_+)$,
- dado $\hat{\mu} = (a, u)$ sobre $U \setminus \{z\}$ temos que $a(\zeta) \rightarrow +\infty$ quando $\zeta \rightarrow z$.

Analogamente, o furo $z \in \Gamma$ é **negativo** se

- existe uma vizinhança U de z em Σ tal que $\hat{\mu}(U \setminus \{z\}) \subset W^-(\lambda_-)$,
- dado $\hat{\mu} = (a, u)$ sobre $U \setminus \{z\}$ temos que $a(\zeta) \rightarrow -\infty$ quando $\zeta \rightarrow z$.

E z é **removível** se $\hat{\mu}$ pode ser estendida a $(\Sigma \setminus \Gamma) \cup \{z\}$.

2.2.3 Curvas de energia-finita em splitting

Sejam $\lambda_- \prec \lambda \prec \lambda_+ \in W_\xi$, como foi definido na seção 2.1.2. Escolhemos $\tilde{J}_- \in \mathcal{J}(\lambda_-)$, $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$, $\tilde{J}_+ \in \mathcal{J}(\lambda_+)$, $\hat{J}_1 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J})$ e $\hat{J}_2 \in \mathcal{J}(\tilde{J}, \tilde{J}_+)$. Então para $R > 0$, consideramos a estrutura quase-complexa splitting $\bar{J}_R = \hat{J}_1 \circ_R \hat{J}_2$ definida por

- $\bar{J}_R = \tilde{J}_+$ em $g_R(W^+(\lambda_+)) = W^+(e^R \lambda_+)$,
- $\bar{J}_R = \tilde{J}$ em $\bar{W}(e^{-R} \lambda, e^R \lambda)$,
- $\bar{J}_R = \tilde{J}_-$ em $g_{-R}(W^-(\lambda_-)) = W^-(e^{-R} \lambda_-)$.

Definição 2.2.10 ([BEH⁺03]). *Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann e $\Gamma \subset \Sigma$ finito. Uma $\bar{J}_R$ —curva $\bar{\mu}$ de energia-finita no splitting é uma curva pseudo-holomorfa*

$$\bar{\mu} : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, \bar{J}_R),$$

satisfazendo

$$0 < E_{\lambda_-}(\bar{\mu}) + E_{\lambda_+}(\bar{\mu}) + E_{\lambda}(\bar{\mu}) + E_{(\lambda, \lambda_+)}(\bar{\mu}) + E_{(\lambda_-, \lambda)}(\bar{\mu}) < \infty.$$

Onde

$$\begin{aligned} E_{\lambda_+}(\bar{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\bar{\mu}^{-1}(W^+(e^R \lambda_+))} \bar{\mu}^* d\lambda_{+, \phi}, \\ E_{\lambda}(\bar{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\bar{\mu}^{-1}(\bar{W}(e^{-R} \lambda, e^R \lambda))} \bar{\mu}^* d\lambda_{\phi}, \\ E_{\lambda_-}(\bar{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\bar{\mu}^{-1}(W^-(e^{-R} \lambda_-))} \bar{\mu}^* d\lambda_{-, \phi}, \\ E_{(\lambda, \lambda_+)}(\bar{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\bar{\mu}^{-1}(\bar{W}(e^R \lambda, e^R \lambda_+))} \bar{\mu}^*(e^{-R} \omega_{can}), \\ E_{(\lambda_-, \lambda)}(\bar{\mu}) &= \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\bar{\mu}^{-1}(\bar{W}(e^{-R} \lambda_-, e^{-R} \lambda))} \bar{\mu}^*(e^R \omega_{can}) \end{aligned}$$

Observe-se que cada integrando é não-negativo. Em [BEH⁺03], pode ver que os furos são divididos em positivos, negativos e removíveis.

2.2.4 Regularidade

Seja λ uma forma de contato em uma 3— variedade M com estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Dado $T > 0$, denotamos por $\mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ o conjunto das órbitas em $\mathcal{P}^{\leq T}(\lambda)$ que representam a classe de homotopia β . Considere $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura quase-complexa na simpletização de $S^1 \times S^2$ obtida de alguma estrutura complexa $d\lambda$ —compatível, ou seja, $J \in \mathcal{J}(\xi)$.

Definição 2.2.11. *Sejam $P, P' \in \mathcal{P}(\lambda)$. Duas curvas $\tilde{J}$ —holomorfa $\tilde{u} = (a, u)$ e $\tilde{v} = (b, v)$ de energia finita na simpletização de M e assintótico a P em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e assintótico a P' em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se dizem **equivalentes** se existem constantes $c, \Delta r$ e Δs tais que*

$$b(r, s) = a(r + \Delta r, s + \Delta s) + c \quad e \quad v(r, s) = u(r + \Delta r, s + \Delta s).$$

Denotamos por $\mathcal{M}_{\tilde{J}}(P, P')$ o conjunto das classes de equivalência de curvas $\tilde{J}$ —holomorfas com limites assintóticos as órbitas P e P' , nos furos positivos e negativo, respectivamente.

Considere a relação de equivalência dada na definição 2.2.11 e o espaço $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ das classes de equivalência das curvas $\tilde{J}$ —holomorfas de energia finita $\tilde{\mu} = (a, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$, onde $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ é assintótico em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ é assintótico em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ não intersecta L . Note-se que os elementos de $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ são classes e não curvas.

Como $\beta = (p, q)$ é um par de inteiros relativamente primos, então cada órbita em $\mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ é simplesmente coberto. Então por resultado em [HWZ96b] implica que as curvas que representam os elementos de $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ devem ser *injetiva em alguma parte*. Considere $\mathcal{J}_{reg}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ o conjunto das estruturas quase-complexas tais que todos os representantes de $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ sejam

regulares para todo $P, P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$, ou seja, o operador de Cauchy-Riemann linearizado de um representante é um operador de Fredholm sobrejetor, ver [Wen10]. Em [Dra04], mostram que $\mathcal{J}_{reg}(\lambda)$ é um conjunto residual de $\mathcal{J}(\lambda)$. Consequentemente, os espaços $\mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}(P, P')$, para todo $P, P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$, tem estrutura de variedade de dimensão $Ind(\tilde{\mu}) = \mu_{cz}(P) - \mu_{cz}(P')$ se $\tilde{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda)$. Note-se que o anterior tem sentido se $Ind(\tilde{\mu}) \geq 0$. Se $Ind(\tilde{\mu}) = 0$ e $\mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}(P, P') \neq \emptyset$ então $P = P'$ e $\tilde{\mu}$ é um cilindro trivial.

Agora, de maneira semelhante se define o subconjunto as estruturas regulares em $J(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$. Consideramos $T > 0$, $\lambda_{\pm}$ e $\tilde{J}_{\pm} \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda_{\pm})$ como foi definida na secção 2.1.3. Consideramos $\hat{J} \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$ e $\mathcal{P}' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$, definimos o espaço $\mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}$ das classes de equivalência das curvas $\hat{J}$ -holomorfas de energia finita com imagem $\mathbb{R} \times (M \setminus L)$, os quais são assintóticos a P não furo positivo e P' não furo negativo, modulo reparametrizações.

Definimos $\mathcal{J}_{reg}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L) \subset \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$ o conjunto estruturas quase-complexas com fins $\hat{J} \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+)$ tal que cada elemento de $\mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}(P, P')$ é regular no sentido da teoria de Fredholm, para todo $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$ e $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$. Este conjunto depende de T e de β . Mas, o conjunto $\mathcal{J}_{reg}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$ contém subconjuntos residuais de $\mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$. Aqui é importante que P, P' sejam simplesmente cobertos, como no caso que $\beta = (p, q)$ sejam relativamente primos. Neste caso, temos que $\mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}$ é uma variedade de dimensão $\mu_{cz}(P) - \mu_{cz}(P')$. Lembre-se que cada representante é injectivo em alguma parte. A regularidade das classes de equivalência sera usada no capítulo de homologia para que as aplicações homológicas sejam definidas.

A seguir mostramos uma condição necessária para dizer quando uma curva pseudo-holomorfa é regular. Este resultado é o teorema 1 de [Wen10].

Teorema 2.2.12. *Seja $\dim M = 4$. Considere $\mu : (\Sigma \setminus \Gamma, j) \rightarrow (M, J) \in \mathcal{M}_f^{\leq T, \beta}(P, P')$ uma curva J -holomorfa não-constante com limites assintóticos as órbitas Morse-Bott não-degeneradas P e P' . Se*

$$Ind(\mu) > c_N(\mu) + Z(d\mu), \quad (2.2.2)$$

então μ é regular.

Aqui $c_N(\mu)$ é o primeiro número de Chern do fibrado normal definido por μ e $Z(d\mu)$ é o conjunto dos zeros de $d\mu$

Substituindo o valor do primeiro número de Chern em (2.2.2) obtemos as seguintes equivalências:

$$Ind(\mu) > -2 + 2g + \#\Gamma_0(\mu) + \#\pi_0(\partial\Sigma) + 2Z(d\mu),$$

ou,

$$Ind(\mu) > -\chi(\Sigma) + c_1(\mu^*TM) + Z(d\mu).$$

Onde g é o gênero de Σ , Γ_0 é o subconjunto dos furos para os quais o índice de Conley-Zehnder da sua órbita assintótica é par, χ é a característica de Euler e c_1 é o primeiro número de Chern ajustado.

2.3 Operador assintótico generalizado e comportamento assintótico

Nesta seção usamos como referência a seção 2.2.8 de [HMSa15] para definir o operador assintótico generalizado para uma órbita de Reeb periódica, possivelmente degenerada. Com o propósito de descrever seu comportamento dinâmico, ou seja, estudamos as propriedades das curvas pseudo-holomorfas de energia finita perto dos furos não-removíveis, os quais tem relação com a existência de órbitas fechadas.

Definição 2.3.1. *Sejam λ uma 1-forma de contato em uma 3-variedade M e uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\xi)$. Para cada órbita periódica $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ associamos um operador diferencial $\mathcal{A}_P : W^{1,2}(\gamma_T^* \xi) \subset L^2(\gamma_T^* \xi) \rightarrow L^2(\gamma_T^* \xi)$ agindo sobre o espaço das seções suaves de ξ ao longo de $\gamma_T(t) := \gamma(Tt)$, dado por*

$$\mathcal{A}_P h(s) = -J(\nabla_s h - T \nabla_h R_\lambda),$$

onde ∇ é uma conexão livre de torsão. Chamamos $\mathcal{A}_P$ o **operador assintótico generalizado** de P . Aqui ∇_s denota a derivada co-variante ao longo da curva γ_T .

Observa-se que o operador assintótico $\mathcal{A}_P$ é um operador auto-adjunto, o qual induz o produto interior sobre as seções de $\gamma_T^* \xi$ dada por

$$\langle h, k \rangle_J = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} d\lambda_{\gamma(s)}(h(s), J(\gamma(s))k(s)) ds.$$

Além disso, γ é não-degenerada se e somente se o kernel de $\mathcal{A}_P$ é não-trivial.

Nesta parte da seção mostraremos os índices dinâmicos associados ao operador assintótico. Sejam λ uma 1-forma de contato de uma 3-variedade M e $J \in \mathcal{J}(\xi = \ker \lambda)$ e Considere $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$, como na definição acima. Denotamos por $\gamma_T(t) = \gamma(Tt)$.

Fixamos a classe de homotopia β de $(\gamma_T)^* \xi$ com respeito a uma $d\lambda$ -trivialização simplética e escolha Ψ na classe de β . Então o operador $\mathcal{A}_P$ é representado como $-J(t)\partial_t - S(t)$, onde $J(t)$ é a representação de $(\gamma_T)^* J$ e $S(t)$ é um caminho suave 1-periódica de matrizes 2×2 . Se Ψ é $(d\lambda, J)$ -unitária então $J(t) \equiv i$ e $S(t)$ é simétrica para todo t .

Se η é uma seção não-nula e satisfaz $\mathcal{A}_P \cdot \eta = \nu \eta$, para algum valor próprio ν de $\mathcal{A}_P$, então $\nu(t) = \Psi \cdot \eta(t) \in \mathbb{R}^2$ é não nula e satisfaz $-i\dot{\nu} - S\nu = \nu\nu$. Escrevemos a seção não-nula $\nu(t)$ como $\nu(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ e definimos o **número de enrolamento** por

$$\text{wind}(\nu, P, \beta) = \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi}. \quad (2.3.1)$$

Na seção 3 de [HWZ95], mostram que a definição não depende da seção própria de um dado valor próprio. Além disso, para cada $k \in \mathbb{Z}$ existem exatamente dois valores próprios com número de enrolamento k e, satisfaz a seguinte propriedade de Monotonicidade: dados $\nu_0, \nu_1 \in \sigma(A_\gamma)$

$$\nu_0 \leq \nu_1 \Rightarrow \text{wind}(\nu_0, P, \beta) \leq \text{wind}(\nu_1, P, \beta).$$

Ainda mais, se β' é outra classe de homotopia de uma $d\lambda$ -trivialização simplética e Ψ' está na classe de β' então

$$\text{wind}(\nu, P, \beta') = \text{wind}(\nu, P, \beta) + \mu(\Psi' \circ (\Psi)^{-1}), \quad \forall \nu \in \sigma(\mathcal{A}_P)$$

onde $\mu(\Psi'_t \circ (\Psi)^{-1})$ é o número de Maslov do loop $\Psi'_t \circ (\Psi)^{-1}$,

Sejam $v^- = \max\{v \in \sigma(A_\gamma) : v < 0\}$ e $v^+ = \min\{v \in \sigma(A_\gamma) : v \geq 0\}$ os valores extremais e seus números de enrolamento

$$\text{wind}^-(P, \beta) = \text{wind}(v^-, P, \beta) \quad e \quad \text{wind}^+(P, \beta) = \text{wind}(v^+, P, \beta).$$

Se define o índice de Conley-Zehnder $\mu_{\text{CZ}}(P, \beta)$ de uma órbita p em termos do espectro do operador assintótico $\mathcal{A}_P$. Como segue,

Definição 2.3.2. *O índice de Conley-Zehnder $\mu_{\text{CZ}}(P, \beta)$ de uma órbita P é dada por*

$$\mu_{\text{CZ}}(P, \beta) = 2\text{wind}^-(P, \beta) + p(P, \beta),$$

onde a paridade é

$$p(P, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{wind}^+(P, \beta) = \text{wind}^-(P, \beta) \\ 1 & \text{wind}^+(P, \beta) > \text{wind}^-(P, \beta). \end{cases}$$

Além disso, o seguinte lema mostra como podemos calcular aqueles números de enrolamento para uma órbita λ -Reeb, p . Lembremos que a curva têm associado um referencial $d\lambda$ -simplético.

Lema 2.3.3. *Seja $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Suponha $P^k = (\gamma^k(s), kT)$ não-degenerada, para todo $k \geq 1$ e fixamos a classe de homotopia β com respeito à trivialização $d\lambda$ -simplética de $(\gamma_T)^*\xi$. Então*

- P é elíptico se e somente se $\rho(P, \beta) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Neste caso

$$\text{wind}^+(P^k, \beta^k) = \lfloor k\alpha \rfloor + 1 \quad e \quad \text{wind}^-(P^k, \beta^k) = \lfloor k\alpha \rfloor \quad \forall k \geq 1.$$

- P é hiperbólico com multiplicadores de Floquet positivo se e somente se $\rho(P, \beta) = l \in \mathbb{Z}$. Neste caso

$$\text{wind}^+(P^k, \beta^k) = kl = \text{wind}^-(P^k, \beta^k) \quad \forall k \geq 1.$$

- P é hiperbólico com multiplicadores de Floquet negativo se e somente se $\rho(P, \beta) = l + 1/2$, para algum $l \in \mathbb{Z}$. Neste caso

$$\begin{aligned} k \text{ é par} &\Rightarrow \text{wind}^+(P^k, \beta^k) = k(l + 1/2) = \text{wind}^-(P^k, \beta^k), \\ k \text{ é ímpar} &\Rightarrow \begin{cases} \text{wind}^+(P^k, \beta^k) &= \lfloor k(l + 1/2) \rfloor + 1, \\ \text{wind}^-(P^k, \beta^k) &= \lfloor k(l + 1/2) \rfloor. \end{cases} \end{aligned}$$

Denotamos β^k a classe de homotopia induzida por β para a trivialização de $\gamma_{kT}^*\xi$.

A seguinte proposição é a versão do lema 4.31 de [Sie11], dado para curvas bi-holomorfas. O qual permitira definir o operador assintótico de uma curva pseudo-holomorfa. Sejam $P = (x(t), T_1)$ e $P' = (y(t), T_2) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Denotamos por $x_+(t) = x(T_1 t)$ e $y_- = y(T_2 t)$.

Proposição 2.3.4. *Seja $\tilde{\mu} = (a, u) \in \mathcal{M}_f(P, P')$ como na definição 2.2.11, para λ uma forma de contato numa 3-variedade M e uma estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Então existe $R \in \mathbb{R}^+$ suficien-*

temente grande e um difeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que

$$\tilde{\mu}(\psi(r, s)) = \begin{cases} \left(T_1 r, \exp_{x_+(s)} \{ e^{\mu_+ r} [\mathbf{v}_+(s) + w_+(r, s)] \} \right) & \text{para } r \geq R, \\ \left(T_2 r, \exp_{y_-(s)} \{ e^{\mu_- r} [\mathbf{v}_-(s) + w_-(r, s)] \} \right) & \text{para } r \leq -R, \end{cases}$$

onde $\mathbf{v}_+ : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow (x_+(t))^* \xi$ e $\mathbf{v}_- : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow (y_-(t))^* \xi$ são seções próprias do operador assintóticos $\mathcal{A}_P$ e $\mathcal{A}_{P'}$ associados aos valores próprios $\mu_{\pm}$ com $\mu_+ < 0$ e $\mu_- > 0$, respectivamente. Além disso, $\lim_{r \rightarrow +\infty} w_+(r, s) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow -\infty} w_-(r, s) = 0$.

Aqui $\exp$ denota a aplicação exponencial da métrica Riemanniana sobre M dada por

$$g(\cdot, \cdot) = \lambda \otimes \lambda + d\lambda(\cdot, J).$$

Demonstração. Como $\tilde{\mu}$ é assintótico a P em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pelo o lema 4.31 de [Sie11] existe $\mu_1 < 0$ valor próprio de $\mathcal{A}_P$ com seção própria $\mathbf{v}_1$, um mergulho $\psi_1 : [R_1, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tal que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_1(r, s) = \{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e

$$\tilde{\mu} \circ \psi_1(r, s) = \left(T_1 r, \exp_{x_+(s)} \{ e^{\mu_1 r} [\mathbf{v}_1(s) + w_1(r, s)] \} \right),$$

onde $w_1(r, s) \rightarrow 0$ uniformemente em s quando $r \rightarrow +\infty$.

Considere os difeomorfismos

$$\begin{aligned} \Psi_0 : \mathbb{R} \times M &\rightarrow \mathbb{R} \times M & e & & \psi_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ (r, x) &\rightarrow (-r, x) & & & (r, s) &\rightarrow (-r, s) \end{aligned}$$

Então de maneira semelhante, podemos usar [Sie11, Lema 4.31] para $\hat{\mu}(r, s) := \Psi_0 \circ \tilde{\mu} \circ \psi_0(r, s) = (-a(-r, s), u(-r, s))$, o qual é assintótico a P' em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ quando $r \rightarrow +\infty$, se segue que existe $\mu_2 < 0$ valor próprio de $-\mathcal{A}_{P'}$ com seção própria $\mathbf{v}_2$, um mergulho $\psi_2 : [R_2, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, que satisfaz $\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_2(r, s) = \{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que

$$\hat{\mu} \circ \psi_2(r, s) = \left(T_2 r, \exp_{y_-(s)} \{ e^{\mu_2 r} [\mathbf{v}_2(s) + w_2(r, s)] \} \right),$$

onde $w_2(r, s) \rightarrow 0$ uniformemente em s quando $r \rightarrow +\infty$.

Logo,

$$\tilde{\mu} \circ \psi_0 \circ \psi_2(r, s) = \left(-T_2 r, \exp_{y_-(s)} \{ e^{\mu_2 r} [\mathbf{v}_2(s) + w_2(r, s)] \} \right),$$

Em particular, definimos para $R \gg \max\{|R_1|, |R_2|\} \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande o difeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que satisfaz

$$\psi(r, s) = \begin{cases} \psi_1(r, s) & \text{se } r \geq R, \\ \psi_0 \circ \psi_2(-r, s) & \text{se } r \leq -R, \end{cases}$$

Observa-se $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \psi(r, s) = \pm\infty$.

Daqui se depreende que

$$\tilde{\mu} \circ \psi(r, s) = \begin{cases} \left(T_1 r, \exp_{x_+(s)} \{ e^{\mu_1 r} [\mathbf{v}_1(s) + w_1(r, s)] \} \right) & \text{para } r \geq R, \\ \left(T_2 r, \exp_{y_-(s)} \{ e^{-\mu_2 r} [\mathbf{v}_2(s) + w_2(-r, s)] \} \right) & \text{para } r \leq -R, \end{cases}$$

satisfazendo às condições da proposição. $\square$

Definição 2.3.5. Definimos (U_+, U_-, ψ) o **representante assintótico de $\tilde{\mu}$** , onde

$$\begin{aligned} U_+(r, s) &= e^{\mu_+ r} (\mathbf{v}_+(s) + w_+(r, s)) & \text{para } r \gg 0, \\ U_-(r, s) &= e^{\mu_- r} (\mathbf{v}_-(s) + w_-(r, s)) & \text{para } r \ll 0, \end{aligned}$$

onde $\mu_{\pm}$, $\mathbf{v}_{\pm}$ e $w_{\pm}$ são como na proposição anterior.

Agora, dada qualquer forma de contato não-degenerada λ , anunciaremos algumas definições e resultados do comportamento das curvas pseudo-holomorfas estudada em [HWZ96b].

Definição 2.3.6. Um tubo de Martinet para uma órbita $P \in \mathcal{P}(\lambda)$ com período mínimo T é o par (U, Φ) onde U é uma vizinhança aberta de P em $S^1 \times S^2$ e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ é um difeomorfismo ($B \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma bola aberta centrada no origem) satisfazendo

- $\Phi^*(f(d\theta + xdy)) = \lambda$, onde (θ, x, y) são as coordenadas de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ e uma função positiva suave $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo $f|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times 0} \equiv T$ e $df|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times 0} \equiv 0$.
- $\Phi(P(Tt)) = (t, 0, 0)$.

Observação 2.3.7. A existência de tais tubos de Martinet se segue de um argumento semelhante à demonstração do lema anterior ou ver o lema 2.3 de [HWZ96b]. Se P e T são como na definição acima e $\eta(t) \in \xi_{P(t)}$ um vetor não-nulo, com $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Então existe um tubo de Martinet (U, Φ) para P tal que $d\Phi_{P(t)} \cdot \eta(t) = \partial_x$, para cada $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

Agora, pretendemos enunciar o teorema do comportamento assintótico. Seja uma superfície de Riemann fechada e conexa (Σ, j) , um subconjunto finito $\Gamma \subset \Sigma$ e $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$. Suponha $\tilde{\mu} : (\Sigma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M)$ é uma curva pseudo-holomorfa de energia finita não-constante com um furo $z \in \Gamma$. Consideramos (r, s) as coordenadas holomorfas cilíndricas positivas se z é um furo positivo ou coordenadas holomorfas cilíndricas negativas se z é furo negativo, como forem definidas na observação 2.2.6. O seguinte teorema foi dado por Hofer, Wysocki e Zehnder.

Teorema 2.3.8 (Teorema de comportamento assintótico de curvas pseudo-holomorfas). *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma 3-variedade de contato fechada co-orientada, onde λ é uma forma de contato em M não-degenerada. Considere uma curva pseudo-holomorfa $\tilde{\mu}(r, s) = (a(r, s), u(r, s)) \in \mathbb{R} \times M$ tal que (r, s) são as coordenadas holomorfas cilíndricas no furo z , respectivamente. Então existe uma órbita $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e constantes $b, a_0, s_0 \in \mathbb{R}$ com $b > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} u(r, s) &\xrightarrow[|r| \rightarrow \infty]{C^\infty} x(T(s + s_0)), \\ \lim_{|r| \rightarrow \infty} e^{b|r|} \left(\sup_s |D^k[a(r, s) - Tr - a_0]| \right) &= 0 \quad \forall k, \end{aligned}$$

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} e^{b|r|} \left(\sup_s |D^k[\theta(r, s) - m(s + s_0)]| \right) = 0, \quad \forall k$$

onde m é a multiplicidade de P . (U, Φ) é um tubo de Martinet para x de maneira que para algum $r_0 \in \mathbb{R}$ temos $u(r, s) \in U$ quando $|r| \geq |r_0|$ e $\Phi \circ u(r, s) = (\theta(r, s), z(r, s)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Além disso,

- $u^* d\lambda = 0$, ou
- existe uma seção própria $\eta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow (x(Ts))^* \xi$ do operador assintótico autoadjunto A_P correspondente ao valor próprio κ e funções $\gamma(r) \in \mathbb{R}$, $R(r, s) \in \mathbb{R}^2$ definidas para $|r| \gg 1$ tal que $\kappa > 0$ se z é negativo, $\kappa < 0$ se z é positivo e

$$z(r, s) = e^{\int_{r_0}^r \gamma(t) dt} [e(s) + R(r, s)],$$

onde $0 \neq e(s) \in \mathbb{R}^2$ representa as coordenadas induzidas por Φ da seção própria $\eta(s)$. Ainda mais, $e(s)$ e $R(r, s)$ satisfazem

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} |\gamma(r) - \kappa| = 0$$

e

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \sup_s |D^k R(r, s)| = 0 \quad \forall k.$$

Observação 2.3.9. Pela exatidão das 2-formas que aparecem nos integrando das integrais da energia das curvas pseudo-holomorfas em cobordismos o desdobramento do cobordismo, obtemos

Se $\lambda_- \prec \lambda \prec \lambda_+$ são formas de contato positivas para ξ então existe $C > 0$ tal que o seguinte é certo:

Para cada $\hat{J}_+ \in \mathcal{J}(\lambda_+)$, $\hat{J} \in \mathcal{J}(\lambda)$, $\hat{J}_- \in \mathcal{J}(\lambda_-)$, $\bar{J}_1 \in \mathcal{J}(\hat{J}_-, \hat{J})$, $\bar{J}_2 \in \mathcal{J}(\hat{J}_-, \hat{J}_+)$, $R > 0$ e uma aplicação $(\bar{J}_1 \circ_R \bar{J}_2)$ -holomorfa $\tilde{\mu}$ de energia finita nós obtemos

$$E(\tilde{\mu}) \leq C \mathcal{A}_+(\tilde{\mu})$$

onde $\mathcal{A}_+(\tilde{\mu})$ denota a soma das λ_+ -ações das órbitas λ_+ -Reeb fechadas as quais são limites assintóticos de $\tilde{\mu}$ nos furos positivos. Uma análoga afirmação é certa para aplicações $\bar{J}_1$ -holomorfas de energia finita.

2.4 Homologia de contato

Dado $T > 0$, lembremos que denotamos por $\mathcal{P}^{\leq T}(\lambda)$ o conjunto de órbitas λ -Reeb fechadas de período menor o igual que T e por $\mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ o conjunto das órbitas em $\mathcal{P}^{\leq T}(\lambda)$ que representam a classe de homotopia $\beta = (p, q)$. Suponhamos que

- Cada órbita em $\mathcal{P}^{\leq T}(\lambda)$ é não-degenerada.
- Não existem órbitas em $\mathcal{P}^{\leq T}(\lambda) \setminus L$ que sejam contráteis em $S^1 \times S^2 \setminus L$.
- As componentes de L são elípticas, ou seja, P_n e P_s são da forma $e^{2\pi\alpha i}$ com $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Definição 2.4.1. Definimos um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$ -graduado por

$$C^{\leq T, \beta}(\lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k^{\leq T, \beta}(\lambda),$$

onde

$$C_k^{\leq T, \beta}(\lambda) = \bigoplus_{\substack{P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda) \\ \mu_{CZ}(P)=k}} \mathbb{Z}_2 q_P$$

é o espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$ gerado pelas órbitas de $\mathcal{P}^{\leq T, (p, q)}(\lambda)$ com índice de Conley-Zehnder igual a k .

Em [HMSa15] foram definidos os seguintes resultados e aplicações entre esses espaços vetoriais.

Teorema 2.4.2. *Se $\tilde{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda)$ e $P, P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P) - \mu_{CZ}(P') = 1$, então o espaço $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, (p, q)}(P, P')/\mathbb{R}$ é finito.*

O teorema acima permite definir a seguinte aplicação.

Definição 2.4.3 (Aplicação de grau -1). *Para $\hat{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda)$, se define a aplicação de grau -1*

$$\begin{aligned} \partial_k(\lambda, J) : C_k^{\leq T, \beta}(\lambda) &\rightarrow C_{k-1}^{\leq T, \beta}(\lambda) \\ q_P &\mapsto \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda) \\ \mu_{CZ}(P')=k-1}} \#_2 \left(\mathcal{M}_{\hat{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')/\mathbb{R} \right) q_{P'} \end{aligned}$$

Teorema 2.4.4. *Se $\hat{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda)$ então $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Definição 2.4.5 (Homologia). *Chamamos ao par*

$$\left(C^{\leq T, \beta}(\lambda), \partial(\lambda, J) \right)$$

de complexo de cadeia e definimos homologia por

$$HC_k^{\leq T, \beta}(\lambda, J) = \frac{\text{Ker } \partial_{k-1}}{\text{Im } \partial_k}.$$

2.4.1 Aplicações de Cadeia

Dados $\lambda_{\pm} = f_{\pm} \lambda_0$ satisfazendo (a), (b) e (c). Consideramos seus respectivos complexos de cadeias, ou seja, $(C^{\leq T, \beta}(\lambda_+), \partial(\lambda_+, J_+))$ e $(C^{\leq T, \beta}(\lambda_-), \partial(\lambda_-, J_-))$. Se $f_+ > f_-$ pontualmente e $\rho_i(f_{\pm}) \notin \mathbb{Q}$, para $i = 0, 1$; podemos definir uma aplicação entre estes complexos de cadeias da seguinte maneira:

Definição 2.4.6 (Aplicação de cadeia). *Escolhemos $\tilde{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\hat{J}_-, \hat{J}_+ : L)$, $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$ e $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$. Definimos aplicação de grau 0*

$$\begin{aligned} \Phi_k(\tilde{J}) : C_k^{\leq T, \beta}(\lambda_+) &\rightarrow C_k^{\leq T, \beta}(\lambda_-) \\ q_P &\mapsto \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-) \\ \mu_{CZ}(P')=k}} \#_2 \left(\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P') \right) q_{P'} \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida devido ao seguinte resultado

Teorema 2.4.7. *Se $\tilde{J} \in \mathcal{J}_{reg}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$ e $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$, $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P) = \mu_{CZ}(P')$. Então o espaço $\mathcal{M}_{\tilde{J}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ é finito.*

Essa aplicação satisfaz

$$\begin{array}{ccc} C_k^{\leq T, \beta}(\lambda_+) & \xrightarrow{\partial_k(\lambda_+, J_+)} & C_{k-1}^{\leq T, \beta}(\lambda_+) \\ \downarrow \Phi_k(\tilde{J}) & \circlearrowleft & \downarrow \Phi_{k-1}(\tilde{J}) \\ C_k^{\leq T, \beta}(\lambda_-) & \xrightarrow{\partial_k(\lambda_-, J_-)} & C_{k-1}^{\leq T, \beta}(\lambda_-) \end{array}$$

Sejam $\hat{J}_0, \hat{J}_1 \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$ de maneira que esteja definidas as aplicações de cadeias $\Phi_k(\hat{J}_0)$ e $\Phi_k(\hat{J}_1)$. Consideramos o espaço $\tilde{\mathcal{J}}(\hat{J}_0, \hat{J}_1 : L)$ das homotopias suaves de $\hat{J}_0$ a $\hat{J}_1$, ou seja,

$$t \in [0, 1] \mapsto \hat{J}_t \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L),$$

e o conjunto

$$\mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P') = \left\{ (t, [\tilde{u}]) : t \in [0, 1] \text{ e } [\tilde{u}] \in \mathcal{M}_{\hat{J}_t}^{\leq T, \beta}(P, P') \right\}.$$

Onde P, P' são dados no teorema anterior.

Em [MS04], se mostra que o conjunto residual

$$\tilde{\mathcal{J}}_{\text{reg}}(\hat{J}_0, \hat{J}_1 : L) \subset \tilde{\mathcal{J}}(\hat{J}_0, \hat{J}_1 : L)$$

tal que se $\{\hat{J}_t\} \in \tilde{\mathcal{J}}_{\text{reg}}(\hat{J}_0, \hat{J}_1 : L)$ então $\mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ é uma variedade de dimensão $\mu_{\text{CZ}}(P) - \mu_{\text{CZ}}(P') + 1$.

Precisamos que para cada t , todos os cilindros de $\mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ sejam injetivos em alguma parte, ou seja, isso é certo desde que $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$ e $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$ são simplesmente cobertos. Além disso, a imagem de cada cilindro não intersesta $\mathbb{R} \times L$.

Teorema 2.4.8. *Suponhamos que para todo $P \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_+)$, $P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-)$ que satisfaz $\mu_{\text{CZ}}(P) = \mu_{\text{CZ}}(P') + 1$. Então o espaço $\mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ é finito.*

Além disso, se $(t, [\tilde{u}]) \in \mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P')$ então $t \neq 0, 1$

Definição 2.4.9 (Aplicação grau +1). *Se $\{\hat{J}_t\} \in \tilde{\mathcal{J}}_{\text{reg}}(\hat{J}_0, \hat{J}_1 : L)$, definimos a aplicação grau +1*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k(\{\hat{J}_t\}) : C_k^{\leq T, \beta}(\lambda_+) &\rightarrow C_{k+1}^{\leq T, \beta}(\lambda_-) \\ q_P &\mapsto \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{\leq T, \beta}(\lambda_-) \\ \mu_{\text{CZ}}(P') = \mu_{\text{CZ}}(P) + 1 = k+1}} \#_2 \left(\mathcal{M}_{\{\hat{J}_t\}}^{\leq T, \beta}(P, P') \right) q_{P'} \end{aligned}$$

Teorema 2.4.10.

$$\Phi_k(\hat{J}_1) - \Phi_k(\hat{J}_0) = \mathcal{T}_{k-1}(\{\hat{J}_t\}) \circ \partial_k(\lambda_+, J_+) - \partial_k(\lambda_-, J_-) \circ \mathcal{T}_{k-1}(\{\hat{J}_t\})$$

Demonstração. Para a demonstração dos teoremas acima veja os apêndices de [HMSa15].

□

CAPÍTULO 3

O RESULTADO

Fixamos a 1-forma de contato λ_0 dada pela equação 1.2.7 induzindo uma estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$ tipo *tight*. Lembremos que o link $L = P_n \cup P_s$ está formado pelas órbitas periódicas do fluxo de Reeb de λ_0 dadas por

$$P_n := S^1 \times \{(0, 0, 1)\} \quad P_s := S^1 \times \{(0, 0, -1)\}.$$

Neste capítulo estamos interessados em demonstrar o teorema 1 enunciado na introdução, esse resultado é dado para formas de contato em $S^1 \times S^2$ munida de uma estrutura de contato *tight*. Ou seja, queremos provar o teorema enunciado a seguir

Teorema 2. *Seja $\lambda = f\lambda_0$ a 1-forma de contato em $S^1 \times S^2$ definindo a estrutura de contato $\ker \lambda = \xi_0$, para alguma função suave $f: S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não-nula. Assuma que o fluxo de Reeb associado a λ admita um par de órbitas periódicas P_0 e P_1 transversalmente isotópico ao link L . Sejam ρ_n e ρ_s os números de rotação transversais de P_n e P_s respectivamente. Então, para cada par de inteiros $(0, 0) \neq (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relativamente primo satisfazendo*

$$(1, \rho_n) < (p, q) < (-1, \rho_s), \tag{3.0.1}$$

existe uma órbita periódica $\gamma_{p,q} \subset S^1 \times S^2 \setminus (P_n \cup P_s)$ do fluxo de Reeb de λ que satisfaz

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p \text{ e } \text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q.$$

Lembremos que a ordem definido acima está dado pelo argumento do ponto em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e os números wind_0 e wind_1 representa os números de rotação nas curvas projeções em S^1 e $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ respectivamente.

A seguir, vamos definir os conceitos que estão enunciados no teorema acima e desenvolver as ferramentas necessárias para a demonstração do mesmo. Nas primeiras seções estudamos as propriedades das formas de contato $\lambda_{f,g}$ definidas em 1.2.3, onde o par (f, g) satisfaz (i) e (ii).

3.1 Toros invariantes

Seja $\lambda_{f,g}$ uma forma de contato em $S^1 \times S^2$, onde o par (f,g) satisfaz as hipóteses (i) e (ii). Fixe $\eta \in (-1, 1)$. Denotamos por T_η o toro bi-dimensional

$$T_\eta := S^1 \times \{(\theta, \varphi) : \cos \varphi = -\eta\} \subset S^1 \times S^2.$$

Dizemos que o toro T_η é **racional** caso exista um par de inteiros $(p, q) \neq (0, 0)$ tal que

$$qg'(\eta) + pf'(\eta) = 0. \quad (3.1.1)$$

Caso o par de inteiros não exista, dizemos então que T_η é **irracional**.

No caso em que T_η é racional, note que o vetor (p, q) é normal á curva $\gamma(\eta) = (f(\eta), g(\eta))$ para algum $\eta \in [-1, 1]$. Além disso, como será feito mais na frente, aquele par de inteiros (p, q) representará a classe de homotopia das órbitas contidas no toro T_η que estão no complementar de um certo link. Portanto, chamaremos a esse toro T_η de **Toro invariante**.

Definição 3.1.1. Dizemos que o par de inteiros $(0, 0) \neq (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é **relativamente primo** se não existe um inteiro $k \geq 2$ tal que $(\frac{n}{k}, \frac{m}{k}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Vamos sempre assumir que o par (p, q) que aparece na equação (3.1.1) é relativamente primo, salvo menção em contrário.

O resultado desta seção é enunciado a seguir

Proposição 3.1.2. Se T_η é racional então toda órbita do fluxo de Reeb em T_η é fechada. Se T_η é irracional então toda órbita do fluxo de Reeb em T_η é densa em T_η .

Demonstração. Em coordenadas (t, θ, φ) , uma trajetória de Reeb satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{g'(-\cos \varphi)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi)}, \\ \dot{\theta} &= -\frac{f'(-\cos \varphi)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi)}, \\ \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, com condições iniciais $(t_0, \theta_0, \varphi_0)$ em $s = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} t(s) &= t_0 + \frac{g'(-\cos \varphi_0)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi_0)} s, \\ \theta(s) &= \theta_0 - \frac{f'(-\cos \varphi_0)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi_0)} s, \\ \varphi(s) &= \varphi_0, \end{aligned}$$

onde $t(s)$ e $\theta(s)$ são vistos como funções no recobrimento $\mathbb{R}$.

Suponhamos que T_η seja racional para algum $\eta = -\cos \varphi_0 = \eta$, ou seja, existe um par de inteiros $(p, q) \neq (0, 0)$ tal que $qg'(\eta) + pf'(\eta) = 0$. Consideramos

$$\bar{s} = 2\pi |pf(\eta) + qg(\eta)|,$$

segue-se

$$t(\bar{s}) = t_0 \pm 2\pi p,$$

$$\theta(\bar{s}) = \theta_0 \pm 2\pi q,$$

$$\varphi(\bar{s}) = \varphi_0.$$

Concluimos que a órbita em T_η é periódica em $S^1 \times S^2$.

Se T_η é irracional temos que $qg'(\eta) + pf'(\eta) \neq 0$ para todo par de inteiros $(p, q) \neq (0, 0)$. Em particular, $g'(\eta), f'(\eta) \neq 0$ e $f'(\eta)/g'(\eta)$ é irracional. Denote $\Delta(\eta) = (fg' - f'g)(\eta)$. Omitindo η na notação, temos que se $t(s_p) = t_0 + 2\pi p$, para $p \in \mathbb{Z}$, então $s_p = 2\pi p \Delta / g'$. Como $\theta(s_p) = \theta_0 - 2\pi p f' / g' \neq \theta_0 + 2\pi q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$, concluimos que a órbita de Reeb em T_η não é periódica.

Para mostrarmos que a órbita é densa em T_η , fixe $t' \in \mathbb{R}$. Se $t(s'_p) = t' + 2\pi p$, para $p \in \mathbb{Z}$, então $s'_p = (t' - t_0 + 2\pi p) \Delta / g'$. Calculando $\theta(s'_p) = \theta_0 - (t' - t_0 + 2\pi p) f' / g'$, vemos que o conjunto $\{\theta(s'_p) \bmod 2\pi, p \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R} / (2\pi\mathbb{Z})$, pois f' / g' é irracional. Portanto, toda órbita de Reeb em T_η é densa em T_η . $\square$

Observação 3.1.3. *Observa-se que cada órbita no toro racional T_η tem o mesmo período. Em efeito, sejam duas órbitas periódicas $P_1 = (\gamma_1, T_1)$ e $P_2 = (\gamma_2, T_2)$ contidas no toro T_η e considere subvariedade $E \subset T_\eta$ limitada por $\gamma_1 - \gamma_2$. Pelo o teorema de Stokes temos*

$$T_1 - T_2 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \lambda_{f,g} = \int_E d\lambda_{f,g} = 0.$$

3.1.1 Links em $S^1 \times S^2$

Lembramos que $P_n = S^1 \times \{(0, 0, 1)\}$ e $P_s = S^1 \times \{(0, 0, -1)\}$ define um par de órbitas periódicas do fluxo de Reeb de $\lambda_{f,g}$ induzindo a estrutura de contato $\xi := \ker \lambda_{f,g}$. Chamamos o link $L := P_n \cup P_s$ de **link principal**.

Definição 3.1.4. *Dizemos que o link $L' \subset S^1 \times S^2$ é transversalmente isotópico ao link principal L se existe uma isotopia suave $j_t : S^1 \cup S^1 \rightarrow S^1 \times S^2, t \in [0, 1]$, de mergulhos suaves transversais à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda_{f,g}$, tal que $j_0(S^1 \cup S^1) = L'$ e $j_1(S^1 \cup S^1) = L$.*

O seguinte teorema será usado para mostrar que dada λ uma forma de contato qualquer em $S^1 \times S^2$ admitindo um link L' formado por um par de órbitas periódicas transversalmente isotópico a L , podemos sempre assumir que estas órbitas são as componentes de L .

Teorema 3.1.5. *[Gei08, Teorema 2.6.12] Seja $j_t : (M', \xi') \rightarrow (M, \xi), t \in [0, 1]$, uma isotopia de mergulhos de contato de uma variedade de contato fechada (M', ξ') na variedade de contato (M, ξ) . Então existe uma isotopia de contato $\{\psi_t\}$ de (M, ξ) com suporte compacto tal que $\psi_t \circ j_0 = j_t$.*

Podemos olhar $S^1 \cup S^1$ como uma variedade de contato, cuja estrutura de contato ξ' é dada trivialmente pelo núcleo da 1-forma usual $d\theta$ em cada fator. Desta forma, a isotopia suave j_t de mergulhos transversais de $S^1 \cup S^1$ em $S^1 \times S^2$, como na definição 3.1.4, é também uma isotopia de contato, pois satisfaz

$$j_{t*} \xi' = \xi|_{j_t} \cap Tj_t.$$

Portanto, obtemos pelo Teorema 3.1.5 uma isotopia de contato ψ_t de $S^1 \times S^2$ tal que $\psi_t \circ j_0 = j_t$. Ou seja, ψ_t é um contactomorfismo de $(S^1 \times S^2, \xi)$ que leva L' em $j_t(L')$. Em particular, o contactomorfismo ψ_1 satisfaz $\psi_{1*}\xi' = \xi$ e $\psi_1(L') = L$.

Seja λ uma forma de contato em $S^1 \times S^2$, admitindo um link L' formado por um par de órbitas periódicas transversalmente isotópico a L . Sabemos que o contactomorfismo ψ_1 construído acima satisfaz $\psi_1(L') = L$. Definindo $\lambda' = (\psi_1^{-1})^*\lambda$, temos então que $\ker \lambda' = \ker \lambda$ e L é formado por um par de órbitas periódicas do fluxo de Reeb de λ' . Portanto, podemos sempre assumir, sem perda de generalidade, que $L' = L$.

Agora, assumimos $\lambda' = f\lambda_1$, onde $\lambda_1 := \lambda_{f,g}$ e f é uma função não-nula em $S^1 \times S^2$. Então, vamos procurar condições sobre f de maneira que L seja o link principal da forma de contato λ' . Ou seja, o campo de Reeb R_{λ_1} associado à λ_1 em L deve ser um múltiplo positivo do campo de Reeb $R_{\lambda'}$ associado a λ' em L . Isto é,

$$\begin{aligned} \lambda'|_L(R_{\lambda_1}|_L) &= f|_L \neq 0, \\ 0 &= i_{R_{\lambda_1}} d\lambda'(\cdot)|_L = (df \wedge \lambda_1)|_L(R_{\lambda_1}, \cdot) + fd\lambda_1|_L(R_{\lambda_1}, \cdot) \\ &= df|_L(R_{\lambda_1})\lambda_1|_L(\cdot) - df|_L(\cdot)\lambda_1|_L(R_{\lambda_1}). \end{aligned}$$

Segue que

$$df|_L \cdot v = 0, \text{ para } v \in \xi|_L.$$

Portanto, as componentes do link principal L são órbitas periódicas do fluxo de Reeb de λ' . Além disso, seguindo o argumento feito na observação 1.2.26, podemos supor que f é positiva.

Definimos o conjunto

$$\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(S^1 \times S^2, (0, +\infty)) : df|_L(v) = 0 \quad \forall v \in \xi|_L\}. \quad (3.1.2)$$

Observação 3.1.6. Note que f deve ser constante ao longo das componentes do link principal L e o conjunto $\mathcal{F}$ consiste de funções $f : S^1 \times S^2 \rightarrow (0, +\infty)$ tais que o campo de Reeb associado a forma $f\lambda$ é tangente a L . Além disso, $R_{f\lambda}|_L = \frac{R}{f}|_L$.

Observação 3.1.7. No caso $\text{wind}(f, g) = 1$, temos que $\lambda_{f,g}$ admite uma estrutura de contato tight. Segue também dos teoremas 1.2.21 e 1.2.25 que qualquer outra forma de contato com estrutura de contato tight admitindo um link L' transversalmente isotópico a L é da forma $f\lambda_0$, onde $f \in \mathcal{F}$ e λ_0 é definida em (1.2.7).

Sem perda de generalidade, chamamos também de link principal um link que seja transversalmente isotópico ao link $L = P_n \cup P_S$.

3.1.2 O complementar do link principal

Seja $L' \subset S^1 \times S^2$ um link principal em $(S^1 \times S^2, \xi = \ker \lambda_{f,g})$. Como vimos na subseção anterior, podemos assumir que $L' = L$. O complementar de L em $S^1 \times S^2$ é parametrizado por $(t, \theta, \varphi) \in S^1 \times S^1 \times (0, \pi)$. Ou seja

$$C := (S^1 \times S^2) \setminus L \simeq T^2 \times (0, \pi).$$

Temos então

$$\pi_1(C) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

onde o gerador de cada fator é representado pelas curvas $t \mapsto (t, 0, \pi/2)$ e $t \mapsto (0, t, \pi/2)$, $t \in [0, 2\pi]$, respectivamente.

Com respeito a esta base, cada classe de homotopia será representada por um par de inteiros (p, q) .

Proposição 3.1.8. *Seja T_η um toro racional e seja (p, q) o par de inteiros relativamente primos tal que $(g'(\eta), -f'(\eta)) = c(p, q)$ para algum $c > 0$. Considere uma órbita periódica γ fechada prima, dada conforme a Proposição 3.1.2. Então a classe de homotopia de γ é dada por $[\gamma] = (p, q)$.*

Demonstração. Na demonstração da Proposição 3.1.2, temos que a curva γ no ponto base $(t_0, \theta_0, \varphi_0)$ é dada por

$$\begin{aligned} t(s) &= t_0 + \frac{g'(-\cos \varphi_0)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi_0)} s, \\ \theta(s) &= \theta_0 - \frac{f'(-\cos \varphi_0)}{(fg' - f'g)(-\cos \varphi_0)} s, \\ \varphi(s) &= \varphi_0, \end{aligned}$$

onde $t(s)$ e $\theta(s)$ são vistos como funções no recobrimento $\mathbb{R}$, e $\eta = -\cos \varphi_0$.

O período primo de γ é dado por $T_{min} = 2\pi|pf(\eta) + qg(\eta)|$, pois o par (p, q) é relativamente primo. Além disso, como $qg'(\eta) + pf'(\eta) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} t(T_{min}) &= t_0 \pm 2\pi p, \\ \theta(T_{min}) &= \theta_0 \pm 2\pi q, \\ \varphi(T_{min}) &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Logo, a classe de homotopia de γ no complementar do link $L \subset S^1 \times S^2$ é (p, q) . □

3.2 Modelo perturbado

Seja $\lambda = \lambda_{f,g} = f(-\cos \varphi)dt + g(-\cos \varphi)d\theta$ uma forma de contato em $S^1 \times S^2$ onde o par (f, g) satisfaz as condições (i) e (ii) da seção 1.2.3.

Consideremos $\xi = \ker \lambda$ a estrutura de contato associada a λ no complementar do link principal $L = P_n \cup P_s$, onde $P_n = S^1 \times \{(0, 0, 1)\}$ e $P_s = S^1 \times \{(0, 0, -1)\}$. Denotamos por ρ_0 e ρ_1 os números de rotação das componentes do link principal L , respectivamente.

Assumimos, além das condições (i) e (ii), a seguinte condição sobre o par (f, g)

$$(iii) \quad (f'g'' - g'f'')(\eta) > 0, \forall \eta \in [-1, 1].$$

Geometricamente, a condição (iii) equivale à concavidade do traço da curva $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Isso implica que o vetor normal a essa curva percorre suavemente em sentido anti-horário quando η varia no intervalo $[-1, 1]$, se pensarmos todos eles centrados no origem.

Nesta seção, pretendemos mostrar que a homologia de contato de um modelo perturbado da forma λ é não-trivial. Nesta primeira parte, pretendemos construir a perturbação da forma λ

de maneira que o fluxo de Reeb seja preservado. Esta construção foi motivada pelo trabalho de Bourgeois em [Bou02], onde se perturbam formas de contato Morse-Bott não-degeneradas (ver definição 1.2.6). A seguir, mostraremos uma condição para as quais as formas de contato em $S^1 \times S^2$ definidas por 1.2.3 sejam Morse-Bott e perturbamos esse tipo de formas de contato em $S^1 \times S^2$. Essas formas perturbadas chamaremos de *modelo perturbado*. Na seguinte seção mostraremos a existência de curvas pseudo-holomorfas para o modelo perturbado construído nesta seção, para isso precisamos usar a teoria de interseções de curvas pseudo-holomorfas desenvolvida por Siefring [Sie11]. Por último, mostraremos a homologia do modelo perturbado associado a uma forma de contato com estrutura de contato tipo *tight* é não-trivial e define uma aplicação de grau 0 entre complexos de cadeia não-nula.

A seguinte proposição mostra que o modelo dado em 1.2.3 é Morse-Bott se os números de rotação no link principal L são irracionais.

Proposição 3.2.1. *Se (f, g) satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) e $\rho_0, \rho_1 \notin \mathbb{Q}$, então a forma de contato $\lambda = \lambda_{f, g}$ é uma forma de contato Morse-Bott não-degenerada em $S^1 \times S^2$.*

Demonstração. Lembremos que as órbitas periódicas fechadas de λ pertencem aos toros invariantes racionais T_η ou são as iteradas das componentes do link principal $L = P_n \cup P_s$; onde $\eta = -\cos \varphi$, para algum $\varphi \in (0, \pi)$. Lembre-se que $(g'(-\cos \varphi), -f'(-\cos \varphi))$ é um múltiplo positivo de um par $(p_\varphi, q_\varphi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relativamente primo. O período de uma tal órbita periódica é $2\pi|p_\varphi f(-\cos \varphi) + q_\varphi g(-\cos \varphi)|$. Os períodos das órbitas periódicas do link principal L são dados por $2\pi f(-1)$ e $2\pi|f(1)|$. Portanto, o espectro de ação de λ é dado por

$$\sigma(\lambda) = \{2\pi k f(-1), 2\pi k |f(1)|, 2\pi k |p_\varphi f(-\cos \varphi) + q_\varphi g(-\cos \varphi)| \mid k = 1, 2, \dots\}.$$

Fixemos $M > 0$ e vamos mostrar que o conjunto

$$Y_M := \{\varphi \in [0, \pi] : \tau_\varphi \leq M\}$$

é finito, onde

$$0 < \tau_\varphi := \begin{cases} 2\pi|p_\varphi f(-\cos \varphi) + q_\varphi g(-\cos \varphi)| & \text{Se } \varphi \in (0, \pi), \\ 2\pi f(-1) & \text{Se } \varphi = 0, \\ 2\pi|f(1)| & \text{Se } \varphi = \pi, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

é o período primo das órbitas periódicas no toro racional T_η ou é o período das componentes do link principal L .

Argumentando indiretamente, se Y_M é infinito, então existe $\hat{\varphi} \in [0, \pi]$ acumulado por pontos de Y_M . Considere uma sequência $\varphi_j \in Y_M, j \in \mathbb{N}$, de elementos distintos de Y_M , tal que $\varphi_j \rightarrow \hat{\varphi}$ quando $j \rightarrow +\infty$. Temos

$$\tau_j := \tau_{\varphi_j} \leq M \quad (3.2.2)$$

por definição e podemos assumir sem perda de generalidade que $\tau_j \rightarrow \hat{\tau}$ para algum $\hat{\tau} \in (0, M]$. Como os números de rotação das componentes do link $L = P_n \cup P_s$ são irracionais, temos que ambas as órbitas periódicas P_n e P_s são não-degeneradas e, em particular, não podem ser acumuladas por órbitas periódicas com períodos uniformemente limitados. Segue destes fatos que $\hat{\varphi} \in (0, \pi)$. Como os períodos τ_j são uniformemente limitados, temos que o toro $T_{\hat{\varphi}}$ é formado por órbitas periódicas e,

portanto, é racional. Denotemos $(p_j, q_j) = (p_{\varphi_j}, q_{\varphi_j})$ e $(\hat{p}, \hat{q}) = (p_{\hat{\varphi}}, q_{\hat{\varphi}})$ os respectivos pares de inteiros relativamente primos. A condição (iii) sobre a concavidade da curva $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$ em $\mathbb{R}^2$ implica que os pares (p_j, q_j) são dois a dois distintos para todo j suficientemente grande. Logo $|p_j| + |q_j| \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$. Por outro lado, existem $c_j, \hat{c} > 0$ tais que $(g'(-\cos \varphi_j), -f'(-\cos \varphi_j)) = c_j(p_j, q_j)$ e $(g'(\cos \hat{\varphi}), -f'(\cos \hat{\varphi})) = \hat{c}(\hat{p}, \hat{q})$. Como

$$(g'(\cos \varphi_j), -f'(-\cos \varphi_j)) \rightarrow (g'(-\cos \hat{\varphi}), -f'(-\cos \hat{\varphi})) \text{ quando } j \rightarrow +\infty,$$

concluimos que $c_j \rightarrow 0^+$ quando $j \rightarrow +\infty$. Portanto

$$c_j \tau_j = 2\pi c_j |p_j f(-\cos \varphi_j) + c_j q_j g(-\cos \varphi_j)| \rightarrow 2\pi \hat{c} |\hat{p} f(-\cos \hat{\varphi}) + \hat{q} g(-\cos \hat{\varphi})| = \hat{c} \tau_{\hat{\varphi}} > 0,$$

e isso implica que $\tau_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$, uma contradição com (3.2.2).

Em particular, isso implica que $\sigma(\lambda)$ é discreto.

Figura 3.2.1: Caracterização dos toros invariantes no traço da curva $\eta \mapsto (f(\eta), g(\eta))$, $\eta \in [-1, 1]$.

Agora, para cada $T \in \sigma(\lambda)$ temos que Υ_T é finito, ou seja, existe uma família finita $\{\varphi_j\}_{j \in I} \subset [0, \pi]$ tal que os períodos primos $\tau_{\varphi_j} \leq T$. Consideramos o subconjunto Ξ de Υ_T dos $\{\varphi_j\}_{j \in I}$ tais que $T = k\tau_{\varphi_j}$, para algum $k = 1, 2, \dots$

Lembremos que $N_T := \{p \in S^1 \times S^2 : \phi_T(p) = p\}$, onde ϕ_s representa o fluxo de Reeb. Ou seja, N_T está composta de uma coleção finita de toros invariantes racionais T_{n_j} , onde $n_j = -\cos \varphi_j$ e $\varphi_j \in \Xi \setminus \{0, \pi\}$ e possivelmente juntamente com alguma das componentes do link principal $L = P_n \cup P_s$. Portanto, N_T é uma subvariedade mergulhada de $S^1 \times S^2$.

Além disso, o fluxo de Reeb induz uma ação sobre círculo $\mathbb{R}/\tau_j\mathbb{Z}$ em T_{n_j} , o qual define um isomorfismo com S^1 . Portanto, $S_T := N_T/(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ define uma coleção finita de círculos e provavelmente juntamente com dois pontos isolados.

Para mostrar as propriedades que satisfaz o conjunto N_T na definição 1.2.6, só precisamos mostrar elas para cada toro invariante $T_{\hat{\eta}}$, com $\hat{\eta} = -\cos \hat{\varphi}$ e $\hat{\varphi} \in \Xi$. Consideramos as coordenadas (t, θ) em $T_{\hat{\eta}}$.

Provemos que o posto de $i^* d\lambda$ é localmente constante, onde $i: N_T \rightarrow S^1 \times S^2$: lembremos

$$\begin{aligned}
d\lambda &= f'(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge dt + g'(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta && \text{para } \varphi \neq 0, \pi, \\
&= \frac{1}{z} [f'(-z)xdx \wedge dt + f'(-z)ydy \wedge dt + g'(-z)dx \wedge dy] && \text{para } z \neq 0,
\end{aligned}$$

Segue, para $p \in N_T$ obtemos

$$i^*d\lambda|_p(u, v) = 0,$$

para $u, v \in T_p(N_T)$.

Portanto, o posto $i^*d\lambda$ é localmente constante em N_T .

Para a segunda condição sobre N_T , lembremos que o campo de Reeb esta dado por

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{(fg' - gf')(-\cos \varphi)} [-f'(-\cos \varphi)\partial_\theta + g'(-\cos \varphi)\partial_t] && \text{para } \varphi \neq 0, \pi, \\
&= \frac{1}{(fg' - gf')(-z)} [-f'(-z)x\partial_y + f'(-z)y\partial_x + g'(-z)\partial_t] && \text{para } z \neq 0,
\end{aligned}$$

onde $z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Se $P_n \in N_T$ ou $P_s \in N_T$, temos que o fluxo linearizado está representado por

$$d\phi_r|_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} \\ 0 & -\frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Aqui, se $z = 1$ estamos considerando a órbita P_n e $z = -1$ para a órbita P_s .

Seja $V = A\partial_t + B\partial_x + C\partial_y \in T_L(S^1 \times S^2)$ então $d\phi_r|_L \cdot V = A(r)\partial_t + B(r)\partial_x + C(r)\partial_y$, onde

$$\begin{aligned}
\dot{A}(s) &= 0, \\
\dot{B}(s) &= \frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} C, \\
\dot{C}(s) &= -\frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} B.
\end{aligned}$$

Como $d\phi_0|_L \cdot V = A(0)\partial_t + B(0)\partial_x + C(0)\partial_y = V$, então

$$d\phi_r|_L \cdot V = A\partial_t + \left(\frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} Cr + B \right) \partial_x + \left(-\frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} Br + C \right) \partial_y.$$

Observa-se que $\frac{f'(-z)}{f(-z)g'(-z)} \neq 0$. Caso contrário, implicaria que $\rho_0 = 0$ ou $\rho_1 = 0$, respectivamente. Isso contradiz nossa hipótese.

Se $B \neq 0$ ou $C \neq 0$ temos que $d\phi_T \cdot V \neq V$. Mas, no caso em que $B = 0 = C$, temos que $d\phi_T \cdot V = V$. Ou seja, $\ker(d\phi_T|_L - I) = T(L)$.

Agora, consideramos o caso $T_{\hat{\eta}} \in N_T \setminus L$. Segue que o fluxo linearizado é representado por

$$d\phi_s(t, \varphi, \theta) = \sin \varphi \frac{(f'g'' - f''g')(-\cos \varphi)}{(fg' - f'g)^2(-\cos \varphi)} \begin{bmatrix} 0 & -g(-\cos \varphi) & 0 \\ 0 & f(-\cos \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $V = A\partial_t + B\partial_\varphi + C\partial_\theta \in T_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)}(S^1 \times S^2)$ então $d\phi_s|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} \cdot V = A(r)\partial_t + B(r)\partial_\varphi + C(r)\partial_\theta$, onde

$$\dot{A}(s) = -Kg(-\cos \hat{\varphi})B.$$

$$\dot{B}(s) = Kf(-\cos \hat{\varphi})B.$$

$$\dot{C}(s) = 0.$$

E $K = \sin \hat{\varphi} \frac{(f'g'' - f''g')(-\cos \hat{\varphi})}{(fg' - f'g)^2(-\cos \varphi)} > 00$, devido a (iii) e $\hat{\varphi} \in (0, \pi)$.

Como $d\phi_0|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} \cdot V = A(0)\partial_t + B(0)\partial_\varphi + C(0)\partial_\theta = V$, então

$$d\phi_s|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} \cdot V = [-g(-\cos \hat{\varphi})KBs + A]\partial_t + B[Kf(-\cos \hat{\varphi})s + 1]\partial_\varphi + C\partial_\theta.$$

Se $B \neq 0$, então $d\phi_T|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} \cdot V \neq V$, devido a construção da 1-forma $\lambda_{f,g}$, o par (f, g) nunca se anula. Portanto, os campos $d\phi_T|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} \cdot V$ e V diferem na componente ∂_t ou ∂_φ .

Se $B = 0$, ou seja, $V \in T_{(t_0, \theta_0, \hat{\varphi})}T_{\hat{\eta}}$. Então

$$d\phi_T|_{(t_0, \theta_0, \hat{\varphi})} \cdot V = A\partial_t + B\partial_\varphi + C\partial_\theta = V.$$

Isso implica que $\ker(d\phi_T|_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)} - I) = T_{(t_0, \hat{\varphi}, \theta_0)}T_{\hat{\eta}}$.

Fazendo o anterior para todo toro $T_\eta \in \mathbb{N}_T$, obtemos que $\ker(d\phi_T - I) = T_p(N_T)$, para todo $p \in N_T$. Conclui-se a demonstração. $\square$

Observação 3.2.2. *Notamos algumas observações sobre os conjuntos definidos na demonstração acima. Seja $T, T_1 > 0$ e $k \geq 1$ inteiro. Temos*

- $Y_T \subseteq Y_{T_1}$ se $T \leq T_1$ e
- $\#N_T \leq \#Y_T$.
- Se $T \leq T_1$, temos $N_T \subset N_{T_1}$ se e somente se T divide a T_1 .
- $T_\varphi \subseteq N_{\tau_\varphi}$.
- $N_T \subseteq N_{kT}$ e $S_T \subseteq S_{kT}$.
- $N_{kT} = N_T$ se o conjunto $\{\tau_\varphi : \varphi \in Y_{kT} \setminus Y_T\}$ não contém divisores de kT .

Consideramos $\lambda = \lambda_{f,g}$ uma forma Morse-Bott. Dado qualquer $S > 0$ temos que $Y_S = \{\varphi \in [0, \pi] : 0 < \tau_\varphi \leq S\}$ é finito, onde τ_φ é o período primo de uma órbita λ -Reeb, dado por (3.2.1). Além disso, se $S \in \sigma(\lambda)$, existe o conjunto $\Xi_S \subseteq Y_S$ tal que $N_S = \{T_\eta : \eta = -\cos \varphi, \varphi \in \Xi_S\}$.

Ainda mais, como $d\varphi$ é invariante pelo o fluxo de Reeb associado a λ temos todos os toros invariantes T_η satisfazem as condições da definição 1.2.6, ou seja, o posto de $i^*d\lambda$ é localmente constante em T_η e $\ker(d\phi_S - I) = T(T_\eta)$, para todo $p \in T_\eta$.

A seguir, pretendemos perturbar a 1-forma λ nas vizinhanças $\tilde{\partial}_\varphi$ dos toros racionais invariantes T_η , as quais contêm órbitas de λ -Reeb com períodos menores o iguais a $S > 0$. Ou seja, $\eta = -\cos \hat{\varphi}$,

para algum $\hat{\phi} \in Y_S$. De maneira que o fluxo de Reeb em T_η seja preservado. Para tal objetivo, definimos as coordenadas (ϑ, ζ) dadas por

$$\begin{aligned}\vartheta &= f'(-\cos \hat{\phi})t + g'(-\cos \hat{\phi})\theta, \\ \zeta &= f(-\cos \hat{\phi})t + g(-\cos \hat{\phi})\theta,\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

onde a coordenada ζ é periódica de período τ_ϕ e ∂_ζ representa o fluxo de Reeb, e, ϑ é uma variável periódica transversal ao fluxo. Denotaremos por $\mathcal{T}_\phi$ o período de ϑ . Em efeito,

$$\begin{aligned}d\vartheta &= f'(-\cos \hat{\phi})dt + g'(-\cos \hat{\phi})d\theta, \\ d\zeta &= f(-\cos \hat{\phi})dt + g(-\cos \hat{\phi})d\theta.\end{aligned}$$

Se segue

$$\begin{aligned}dt &= \frac{-g(-\cos \hat{\phi})d\vartheta + g'(-\cos \hat{\phi})d\zeta}{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi})}, \\ d\theta &= \frac{f(-\cos \hat{\phi})d\vartheta - f'(-\cos \hat{\phi})d\zeta}{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi})}.\end{aligned}$$

Decorre que a forma λ numa vizinhança de T_η torna-se

$$\lambda_\phi := \lambda|_{T_\eta} = \Delta_1(-\cos \varphi)d\vartheta + \Delta_2(-\cos \varphi)d\zeta,$$

onde

$$\Delta_1(\eta) = \frac{f(\hat{\eta})g(\eta) - g(\hat{\eta})f(\eta)}{(fg' - f'g)(\hat{\eta})} \quad \text{e} \quad \Delta_2(\eta) = \frac{g'(\hat{\eta})f(\eta) - f'(\hat{\eta})g(\eta)}{(fg' - f'g)(\hat{\eta})}.$$

Observa-se

$$\begin{pmatrix} \Delta'_1(-\cos \hat{\phi}) & \Delta'_2(-\cos \hat{\phi}) \\ \Delta_1(-\cos \hat{\phi}) & \Delta_2(-\cos \hat{\phi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$d\lambda_\phi(\vartheta, \zeta, \varphi) = \Delta'_1(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge d\vartheta + \Delta'_2(-\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \wedge d\zeta.$$

e

$$\begin{aligned}\lambda_\phi \wedge d\lambda_\phi(\vartheta, \zeta, \varphi) &= (\Delta'_1\Delta_2 - \Delta_1\Delta'_2)(-\cos \varphi) \sin \varphi d\vartheta \wedge d\zeta \wedge d\varphi \\ &= \frac{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi}) \sin \varphi}{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi})} d\vartheta \wedge d\zeta \wedge d\varphi > 0\end{aligned}$$

Assim, o campo de Reeb associado a λ_ϕ é

$$\begin{aligned}R_{\lambda_\phi}(\vartheta, \zeta, \varphi) &= \frac{[-\Delta'_2(-\cos \varphi)\partial_\vartheta + \Delta'_1(-\cos \varphi)\partial_\zeta]}{(\Delta'_1\Delta_2 - \Delta_1\Delta'_2)(-\cos \varphi)} \\ &= \frac{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi})}{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\phi})} [-\Delta'_2(-\cos \varphi)\partial_\vartheta + \Delta'_1(-\cos \varphi)\partial_\zeta].\end{aligned}$$

Nota-se que $R_{\lambda_\phi}|_{T_\eta} = \partial_\zeta$. Portanto, a variável ∂_ζ representa o fluxo λ_ϕ -Reeb em T_η . Segue que a variável ϑ é periódica e transversal ao fluxo de λ_ϕ -Reeb em T_η .

Figura 3.2.2: Toro invariante racional T_η .

Consideramos a função de Morse $\tilde{g}_\phi(\vartheta)|_{T_\eta} = \cos\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_\phi}\right)$ definida em ϑ . Estendemos $\tilde{g}_\phi$ numa vizinhança do toro tal o fluxo de Reeb seja invariante, com o propósito de estudar o comportamento das órbitas λ_ϕ -Reeb perto do toro invariante T_η . Define-se

$$\bar{g}_\phi(\vartheta, \varphi) = \mathcal{G}(\varphi)\tilde{g}_\phi(\vartheta),$$

na vizinhança $\bar{\mathcal{O}}_\phi = \mathbb{R}/\mathcal{T}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\tau_\phi\mathbb{Z} \times I_\phi$ do toro T_η , onde $\tau_\phi := 2\pi(p_\phi f(\cos \hat{\phi}) + q_\phi g(-\cos \hat{\phi}))$ é o período primo de uma órbita λ_ϕ -Reeb em T_η e I_ϕ é um intervalo fechado centrado em $\hat{\phi}$ de comprimento muito pequeno tal que não contém 0 nem π . E $\mathcal{G} : I_\phi \rightarrow [0, 1]$ é uma função suave com suporte compacto tal que $\mathcal{G} \equiv 1$ perto de $\hat{\phi}$.

Seja $A = \mathbb{R}/\mathcal{T}_\phi\mathbb{Z} \times I$. Segundo [BEH⁺03], definimos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a 1-forma

$$\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}} = f_{\varepsilon, \hat{\phi}} \lambda \quad f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) := 1 + \varepsilon \bar{g}_\phi(\vartheta, \varphi).$$

Segue,

$$\begin{aligned} d\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}} &= [\partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_1(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) \Delta'_1(-\cos \varphi)] d\varphi \wedge d\vartheta \\ &\quad + [\partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) \Delta'_2(-\cos \varphi)] d\varphi \wedge d\zeta \\ &\quad + \partial_\vartheta(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) d\vartheta \wedge d\zeta \\ &= f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) d\lambda + \partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) [d\varphi \wedge d\theta + d\varphi \wedge d\zeta] \\ &\quad + \partial_\vartheta(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) d\vartheta \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

Logo, o campo de Reeb associado a $\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon, \hat{\phi}} &= -\frac{\partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) \Delta'_2(-\cos \varphi)}{\sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\vartheta, \varphi) \Delta(-\cos \varphi)} \partial_\vartheta \\ &\quad + \frac{\partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_1(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi) \Delta'_1(-\cos \varphi)}{\sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\vartheta, \varphi) \Delta(-\cos \varphi)} \partial_\zeta \\ &\quad + \frac{\partial_\vartheta(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi)}{\sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\vartheta, \varphi) \Delta(-\cos \varphi)} \partial_\varphi \\ &= \frac{R_\lambda}{f_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\vartheta, \varphi)} + \frac{\partial_\varphi(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) [\Delta_1(-\cos \varphi) \partial_\zeta - \Delta_2(-\cos \varphi) \partial_\vartheta] + \partial_\vartheta(f_{\varepsilon, \hat{\phi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) \partial_\varphi}{\sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\vartheta, \varphi) \Delta(-\cos \varphi)}, \end{aligned}$$

onde $\Delta := \Delta'_1 \Delta_2 - \Delta_1 \Delta'_2$.

Observa-se que $R_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ não depende de ζ , logo podemos considerar em A , o campo

$$\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} = -[\partial_{\varphi}(f_{\varepsilon, \hat{\varphi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\vartheta, \varphi) \Delta_2'(-\cos \varphi)] \partial_{\vartheta} + \partial_{\vartheta}(f_{\varepsilon, \hat{\varphi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) \partial_{\varphi}.$$

Então, toda órbita periódica de $R_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ projeta-se sobre A em singularidades ou órbitas periódicas do campo $\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$. Assim procuramos os pontos tais que

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi}(f_{\varepsilon, \hat{\varphi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) + \sin \varphi f_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\vartheta, \varphi) \Delta_2'(-\cos \varphi) &= 0, \\ \partial_{\theta}(f_{\varepsilon, \hat{\varphi}})(\vartheta, \varphi) \Delta_2(-\cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathcal{G}'(\varphi) \cos\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\varphi}}\right) \Delta_2(-\cos \varphi) + \sin \varphi \left(1 + \varepsilon \mathcal{G}(\varphi) \cos\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\varphi}}\right)\right) \Delta_2'(-\cos \varphi) &= 0, \\ -\frac{2\pi\varepsilon}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}} \mathcal{G}(\varphi) \sin\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\varphi}}\right) \Delta_2(-\cos \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Segue que as singularidades são dadas pelos pontos críticos de $f_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ que se acham em $A \cap T_{\eta}$, ou seja, $(0, \hat{\varphi})$ e $\left(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}{2}, \hat{\varphi}\right)$ são as singularidades do campo $\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ em A .

Observa-se que uma destas singularidades é hiébólica e a outra é elíptica. Em efeito, consideramos um intervalo $\mathcal{O}_{\hat{\varphi}}$ muito pequeno centrado em $\hat{\varphi}$ contido em $I_{\hat{\varphi}}$ tal que $\mathcal{G}|_{\mathcal{O}_{\hat{\varphi}}} = 1$, portanto o fluxo linearizado de $\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ na vizinhança $\mathcal{O}_{\hat{\varphi}}$ está representado por

$$D\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi\varepsilon \sin \varphi}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}} \sin\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right) \Delta_2'(-\cos \varphi) & -\varepsilon \left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right) \Delta_2(-\cos \varphi) \\ -f_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\vartheta) [\cos \varphi \Delta_2' + \sin^2 \varphi \Delta_2''](-\cos \varphi) & -\frac{2\pi\varepsilon \sin \varphi}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}} \sin\left(\frac{2\pi\vartheta}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right) \Delta_2'(-\cos \varphi) \end{bmatrix}.$$

Se segue,

$$D\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}|_{(0, \hat{\varphi})} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right)^2 \\ -(1 + \varepsilon) \sin^2(\hat{\varphi}) \Delta_2''(-\cos(\hat{\varphi})) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}|_{\left(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}{2}, \hat{\varphi}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \left(\frac{2\pi}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right)^2 \\ -(1 - \varepsilon) \sin^2(\hat{\varphi}) \Delta_2''(-\cos(\hat{\varphi})) & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, os polinômios característicos estão dados por

$$(D\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} - rI)|_{(0, \hat{\varphi})} = r^2 - \varepsilon(1 + \varepsilon) \left(\frac{2\pi \sin(\hat{\varphi})}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right)^2 \Delta_2''(-\cos(\hat{\varphi})) \quad (3.2.4)$$

e

$$(D\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} - rI)|_{\left(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}{2}, \hat{\varphi}\right)} = r^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon) \left(\frac{2\pi \sin(\hat{\varphi})}{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}\right)^2 \Delta_2''(-\cos(\hat{\varphi})). \quad (3.2.5)$$

Como $\Delta_2''(-\cos \hat{\varphi}) = -\frac{(f'g'' - f''g')(-\cos \hat{\varphi})}{(fg' - f'g)(-\cos \hat{\varphi})} < 0$, então $(0, \hat{\varphi})$ é uma singularidade elíptica e $\left(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}{2}, \hat{\varphi}\right)$ é uma singularidade hiébólica.

A seguinte proposição nos mostra que as singularidades anteriores do campo $\hat{R}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ em A induzem as únicas órbitas periódicas de $R_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ em $\tilde{\mathcal{D}}$ com período limitado, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, estas órbitas representam órbitas λ -Reeb no toro racional invariante T_η . Assim, estas órbitas estão na classe de homotopia (p_ϕ, q_ϕ) , onde (p_ϕ, q_ϕ) é um par de inteiros relativamente primos. Lembramos que o período das órbitas λ -Reeb no toro T_η têm período primo τ_ϕ .

Proposição 3.2.3. *Seja $S > \tau_\phi$. Então, existe $\varepsilon_j > 0$ suficientemente pequeno, tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_j$ temos que as únicas órbitas $\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -Reeb em $\tilde{\mathcal{D}}_\phi$ com período menor ou igual a S são $(\vartheta_{\max}, \tau_\phi(1 + \varepsilon))$ e $(\vartheta_{\min}, \tau_\phi(1 - \varepsilon))$, onde*

$$\vartheta_{\max}(s) \simeq \left(0, \frac{s}{1 + \varepsilon}, \hat{\phi}\right) \quad e \quad \vartheta_{\min}(s) \simeq \left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \frac{s}{1 - \varepsilon}, \hat{\phi}\right).$$

Demonstração. Suponha-se que $\vartheta_{\max}$ e $\vartheta_{\min}$ não são as únicas órbitas $\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -Reeb, com ε suficientemente pequeno. Então, existe uma família $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de órbitas λ_{ε_i} -Reeb em $\tilde{\mathcal{D}} \setminus \{\vartheta_{\max}, \vartheta_{\min}\}$, com períodos menores ou iguais a S e tal que $\varepsilon_i \rightarrow 0^+$. Segue-se da compacidade de $\tilde{\mathcal{D}}$ a existência de uma subsequência $\{\gamma_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a uma órbita γ de $R_{\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}}$. Como cada f_{ε_j} é invariante pelo fluxo R_{ε_j} em T_η então γ se identifica com o ponto da forma $(\hat{\vartheta}, \hat{\phi}) \in A$. Além disso, note-se que as projeções $\hat{\gamma}_j$ associadas às órbitas γ_j sobre o anel A são órbitas periódicas do campo $\hat{R}_{\varepsilon_j}$. Assim, $\hat{\gamma}_j \rightarrow (\hat{\vartheta}, \hat{\phi})$ em A .

É claro que $\hat{\vartheta} \in \{0, \mathcal{I}_\phi/2\}$. Pois, sendo $R_{\varepsilon_j}^\phi(\hat{\vartheta}, \hat{\phi}) = -\frac{2\pi\varepsilon_j}{\mathcal{I}_\phi} \sin\left(\frac{2\pi\hat{\vartheta}}{\mathcal{I}_\phi}\right) \neq 0$ para $\hat{\vartheta} \neq 0, \frac{\mathcal{I}_\phi}{2}$. Então, a componente ∂_ϕ do campo R_{ε_j} não é nula numa vizinhança pequena de $(T_\eta \cap A) \setminus \left\{(0, \hat{\phi}), \left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right)\right\}$. Portanto, $\hat{\gamma}_j$ acumula-se em $(0, \hat{\phi})$ ou $\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right)$.

No caso que a sequência $\hat{\gamma}_j$ converge para $\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right)$: como cada $\hat{\gamma}_j$ limita uma região $\mathcal{D}_j$ de A , as quais não contêm singularidades de $\hat{R}_{\varepsilon_j}$, ou, contém $\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right)$ como a única singularidade. Então, pelo teorema de Poincaré-Hopf temos que $\chi(\mathcal{D}_j) = \text{Ind}\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right) = -1$ se $\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right) \in \mathcal{D}_j$ ou $\chi(\mathcal{D}_j) = 0$ se $\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right) \notin \mathcal{D}_j$. Em qualquer caso, isso contradiz o fato $\chi(\mathcal{D}_j) = 1$.

No outro caso, se a sequência $\hat{\gamma}_j$ converge a $(0, \hat{\phi})$: Como os valores próprios de $D\hat{R}_{\varepsilon_j}|_{\left(\frac{\mathcal{I}_\phi}{2}, \hat{\phi}\right)}$ são complexos puros e proporcionais a $\sqrt{\varepsilon_j(1 + \varepsilon_j)}$, temos que $(0, \hat{\phi})$ é um centro elíptico e seu período depende de este valor. Mas, como $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_j(1 + \varepsilon_j)}} \rightarrow +\infty$ quando $\varepsilon_j \rightarrow 0^+$, então órbitas muito próximas a $(0, \hat{\phi})$ devem ter períodos muito grandes. O que contradiz o fato que γ_j têm períodos limitados por S . $\square$

O resultado anteriormente for feito para um toro invariante, mas segue sendo válido para qualquer toro racional invariante que possui uma órbita periódica de período menor ou igual a S . Em Resumo, dado $S > 0$ temos que $\Upsilon_S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \subset [0, \pi]$. Ele induz o conjunto $\{T_{\eta_j} : \eta_j = -\cos \varphi_j, \varphi_j \in \Upsilon_S \cap (0, \pi)\}$ dos toros invariantes racionais munido possivelmente com P_n e P_s . No caso que alguma das componentes do link principal L esteja neste conjunto, temos que $0 \in \Upsilon_S$ ou $\pi \in \Upsilon_S$. Assim, para cada toro invariante $T_j := T_{\eta_j}$, é definida uma função $\bar{g}_{\varphi_j}$ invariante pelo fluxo de Reeb associado a λ_ϕ definida numa vizinhança $\tilde{\mathcal{D}}_j := \tilde{\mathcal{D}}_{\phi_j}$ no complementar do link L . Além disso, existe um ε_j suficientemente pequeno tal que a 1-forma $\lambda_{\varepsilon_j, j} := (1 + \varepsilon_j \bar{g}_{\varphi_j})\lambda$ possui só duas órbitas $\lambda_{\varepsilon_j, j}$ -Reeb não-degeneradas, uma delas hiperbólica e outra elíptica, com períodos muito próximos

Figura 3.2.3: $A = \mathbb{R}/\mathcal{T}_{\hat{\phi}}\mathbb{Z} \times I_{\hat{\phi}}$.

de τ_{φ_j} (período primo de qualquer órbita em T_{η}). Mas, essas órbitas estão contidas no toro T_j . Portanto, elas podem ser vistas como órbitas λ –Reeb, fazendo uma reparametrização delas.

Definimos a função em $S^1 \times S^2$ dada por

$$g_s(p) = \begin{cases} \bar{g}_{\varphi_j}(p) & p \in \cup_{j=1}^m \bar{\partial}_j \setminus \{P_n, P_s\}, \\ 0 & \text{Outro caso.} \end{cases}$$

Consideremos $0 < \varepsilon \leq \min\{\varepsilon_j : j = 1, \dots, m\}$.

Definimos a **forma perturbada**

$$\lambda_{\varepsilon} = f_{\varepsilon}\lambda, \quad \text{onde} \quad f_{\varepsilon} = 1 + \varepsilon g_s. \quad (3.2.6)$$

Equivalentemente,

$$\lambda_{\varepsilon} = \begin{cases} \lambda_{\varepsilon,j} & \varphi_j \in \Upsilon_M \setminus \{0, \pi\}, \\ \lambda & \text{Outro caso.} \end{cases}$$

Denotamos por $\mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda)$ o conjunto das órbitas periódicas λ –Reeb na classe de homotopia β com período menor ou igual a S .

Proposição 3.2.4. *Consideramos a 1–forma de contato λ_{ε} definida para algum $S > \tau_{\eta}$.*

- (a) λ_{ε} não admite órbitas periódicas com período menor ou igual a S em $S^1 \times S^2 \setminus L$, que sejam contráteis em $S^1 \times S^2 \setminus L$.
- (b) Existem apenas duas órbitas periódicas $P_+, P_- \in \mathcal{P}^{\leq S, (p,q)}(\lambda_{\varepsilon})$, próximas a T_{η} cuja diferença entre os seus índices de Conley-Zehnder é igual a 1.
- (c) As órbitas em $\mathcal{P}(\lambda_{\varepsilon})$ de período menor ou igual a S são não-degeneradas, ou seja, a forma de contato λ_{ε} é não-degenerada com ação limitada por S ,
- (d) As órbitas de $\mathcal{P}^{\leq S, (p,q)}(\lambda_{\varepsilon})$ são não-degeneradas e seus períodos estão muito próximos de τ_{η} .

Demonstração. (a) Lembremos que as órbitas em $S^1 \times S^2 \setminus L$ são da forma $pS^1 \times qS^1 \times \{\varphi_j\} \subseteq S^1 \times S^2$, para um par de inteiros (p, q) relativamente primos. As quais não são contráteis em $S^1 \times S^2 \setminus L$.

Segue da proposição 3.2.3 a condição (d). Também, sabemos que em cada toro T_{η_j} temos duas órbitas associadas aos dois pontos críticos de $\bar{g}_{\varphi_j}$ contidos em T_j se considerados todos os toros racionais invariantes que possuem uma órbita que representa a classe de homotopia β , então o conjunto $\mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda_\varepsilon)$ está formado pela união daquelas duas órbitas em cada toro invariante T_j^β . Isso implica (b). Além disso, cada ponto crítico de f_ε é hiperbólico ou elíptico, portanto implica (c), ou seja, a forma de contato λ_ε é não-degenerada com ação limitada por S .

Agora, consideremos o toro T_η com suas órbitas $\vartheta_{\max}$ e $\vartheta_{\min}$, dada pela proposição 3.2.3. Observe-se as matrizes que representam o fluxo linearizado destas órbita, estão dadas em (3.2.4) e (3.2.5), respectivamente.

Usando os fatos $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $\Delta_2''(-\cos(\hat{\varphi})) < 0$, obtemos que o intervalo de rotação $I_{\vartheta_{\max}}$ está contido em $(0, 1)$ e o intervalo de rotação $I_{\vartheta_{\min}}$ contém ao 0. Se segue, $\mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\max}) = 2(0) + 1 = 1$ e $\mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\min}) = 0$. Portanto,

$$\mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\max}) - \mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\min}) = 1.$$

□

Figura 3.2.4: Intervalos de rotação $I_{\vartheta_{\max}}$ e $I_{\vartheta_{\min}}$.

3.2.1 Curvas pseudo-holomorfas do modelo perturbado

Consideramos a 1-forma de contato $\lambda_\varepsilon = f_\varepsilon \lambda$ definida nas vizinhanças $\mathcal{O}_{\hat{\varphi}} \subset \bar{\mathcal{O}}_{\hat{\varphi}}$ dos toros invariantes T_η , onde $\eta = -\cos \hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} \in \Upsilon_S$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno como foi anteriormente escolhido. Ou seja, $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi\vartheta}{\tau_\varphi}\right)$ e

$$\lambda_{\varepsilon, \hat{\varphi}} := \lambda_\varepsilon|_{T_\eta} = f_\varepsilon|_{T_\eta} [\Delta_1(-\cos \varphi) d\vartheta + \Delta_2(-\cos \varphi) d\zeta].$$

Além disso, denotamos $\vartheta_+(s) := \vartheta_{\max}(\tau_\varphi(1 + \varepsilon)s)$ e $\vartheta_-(s) := \vartheta_{\min}(\tau_\varphi(1 - \varepsilon)s)$, onde $\vartheta_{\max}$ e $\vartheta_{\min}$ são dados pela proposição 3.2.3 e $\tau_\varphi := 2\pi(p_{\hat{\varphi}}f(\eta) + q_{\hat{\varphi}}g(\eta))$ o período primo das curvas no toro T_η .

Note-se que a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda = \ker \lambda_\varepsilon$. Consideramos a estrutura de contato $\xi_{\hat{\varphi}} = \xi|_{\mathcal{O}_{\hat{\varphi}}}$. Definimos o referencial $d\lambda_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -simpático de para $\xi_{\hat{\varphi}}$ em T_η dado por

$$\left\{ e_\varepsilon^1 := \partial_\varphi, e_\varepsilon^2 := \frac{\Delta_2(-\cos \varphi) \partial_\vartheta - \Delta_1(-\cos \varphi) \partial_\zeta}{\sin \varphi f_\varepsilon(\vartheta) \Delta(-\cos \varphi)} \right\} \quad (3.2.7)$$

Nesta seção pretendemos mostrar a existência de duas curvas pseudo-holomorfas assintóticas a ϑ_+ e ϑ_- , respectivamente. Elas definirão as únicas duas classes de equivalência de curvas pseudo-holomorfas em T_η , munida de translações e rotações em $\mathcal{O}_\varphi$. Isso é, dado duas curvas $\tilde{u} = (a, u)$ e $\tilde{v} = (b, v)$ se dizem *equivalentes* se existem constantes c , Δr e Δs tais que

$$b(r, s) = a(r + \Delta r, s + \Delta s) + c \quad e \quad v(r, s) = u(r + \Delta r, s + \Delta s).$$

Denotamos por $\mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ o conjunto das classes de equivalência para curvas J_ε -holomorfas em $\mathcal{O}_{\hat{\varphi}}$ e $\mathcal{M}_\varepsilon$ o conjunto das todas as classes de equivalência de curvas pseudoholomorfas associadas a λ_ε .

Ou seja, nesta seção se mostrará a seguinte proposição

Proposição 3.2.5. $\mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ só tem dois elementos, ou seja, $\mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} = \{[\tilde{\mu}_1], [\tilde{\mu}_2]\}$.

Escolhemos uma estrutura complexa $d\lambda_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -compatível $J_{\varepsilon, \hat{\varphi}} \in \mathcal{J}(\xi_{\hat{\varphi}})$ tal que $J_{\varepsilon, \hat{\varphi}} \cdot e_\varepsilon^1 = e_\varepsilon^2$. Usando

$$\begin{aligned} \partial_{\vartheta} &= f_\varepsilon \Delta_1 R_{\varepsilon, \hat{\varphi}} - \frac{f'_\varepsilon \Delta_1 \Delta_2}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} e_\varepsilon^1 + \sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_1 e_\varepsilon^2, \\ \partial_\zeta &= f_\varepsilon \Delta_2 R_{\varepsilon, \hat{\varphi}} - \frac{f'_\varepsilon \Delta_2^2}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} e_\varepsilon^1 + \sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_2 e_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Obtemos que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ associada a $J_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ na simplectização de $S^1 \times S^2$, satisfaz

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\partial_{\vartheta}) &= -f_\varepsilon \Delta_1 \partial_a - \sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_1 e_\varepsilon^1 - \frac{f'_\varepsilon \Delta_1 \Delta_2}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} e_\varepsilon^2, \\ \tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\partial_\zeta) &= -f_\varepsilon \Delta_2 \partial_a - \sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_2 e_\varepsilon^1 - \frac{f'_\varepsilon \Delta_2^2}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} e_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Logo, a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ nas coordenadas $(a, \vartheta, \zeta, \varphi)$ é dada por

$$\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} = \begin{pmatrix} 0 & -f_\varepsilon \Delta_1 & -f_\varepsilon \Delta_2 & 0 \\ -\frac{\Delta'_2}{f_\varepsilon \Delta} & -\frac{f'_\varepsilon \Delta_1 \Delta_2^2}{(\sin \varphi f_\varepsilon \Delta)^2} & -\frac{f'_\varepsilon \Delta_2^3}{(\sin \varphi f_\varepsilon \Delta)^2} & \frac{\Delta_2}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} \\ \frac{\Delta'_1}{f_\varepsilon \Delta} & \frac{f'_\varepsilon \Delta_1^2 \Delta_2}{(\sin \varphi f_\varepsilon \Delta)^2} & \frac{f'_\varepsilon \Delta_1 \Delta_2^2}{(\sin \varphi f_\varepsilon \Delta)^2} & -\frac{\Delta_1}{\sin \varphi f_\varepsilon \Delta} \\ -\left(\frac{1}{f_\varepsilon}\right)' \frac{\Delta_2}{\sin \varphi \Delta} & -\sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_1 & -\sin \varphi f_\varepsilon \Delta'_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observa-se que as componentes da matriz acima são funções de ϑ e φ . Avaliando em $(a, \vartheta, \zeta, \hat{\varphi})$, ou seja, aplicação f_ε em ϑ e as aplicações $\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_1$ e Δ'_2 em $-\cos(\hat{\varphi})$, obtemos

$$\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(a, \vartheta, \zeta, \hat{\varphi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_\varepsilon(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\frac{1}{f_\varepsilon})'(\vartheta)}{\sin^2(\hat{\varphi})} & \frac{1}{\sin(\hat{\varphi})f_\varepsilon(\vartheta)} \\ \frac{1}{f_\varepsilon(\vartheta)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(\frac{1}{f_\varepsilon})'(\vartheta)}{\sin(\hat{\varphi})} & -\sin(\hat{\varphi})f_\varepsilon(\vartheta) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, queremos construir uma curva $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -holomorfa definida no toro invariante T_η . Lembremos que cada órbita λ -Reeb no toro T_η têm período $\tau_\eta := 2\pi|pf(\hat{\eta}) + qg(\hat{\eta})|$ e o fluxo de Reeb em T_η é ∂_ζ . Assim, na vizinhança $\tilde{\mathcal{O}}_\varphi$ definimos aplicação suave $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ nas

coordenadas $(a, \vartheta, \zeta, \varphi)$, têm a seguinte expressão

$$\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) = (a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s), \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s), \tau_{\hat{\varphi}} s, \hat{\varphi}).$$

Mas, ela deve ser uma curva $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -holomorfa, ou seja, ela satisfaz $\bar{\partial}_{\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}}(\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}) = 0$. Como se mostra,

$$\begin{aligned} 0 = \partial_r \tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} + \tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}) \cdot \partial_s \tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} &= \begin{pmatrix} \partial_r a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \\ \partial_r \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}) \cdot \begin{pmatrix} \partial_s a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \\ \partial_s \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \\ \tau_{\hat{\varphi}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_r a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) - \tau_{\hat{\varphi}} f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}) \\ \partial_r \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) + \frac{\tau_{\hat{\varphi}} \left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)'(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}})}{\sin^2(\hat{\varphi})} \\ \frac{1}{f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}})} \partial_s a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \\ -\frac{\left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)'(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}})}{\sin(\hat{\varphi})} \partial_s a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) - \sin(\hat{\varphi}) f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}) \partial_s \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se segue,

$$\begin{aligned} \partial_r a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) &= \tau_{\hat{\varphi}} f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}), \\ \partial_r \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) &= -\frac{\tau_{\hat{\varphi}} \left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)'(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}})}{\sin^2(\hat{\varphi})}, \\ \partial_s a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) &= 0, \\ \partial_s \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, consideramos a curva $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -holomorfa definida em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r, s) = (a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r), \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r), \tau_{\hat{\varphi}} s, \hat{\varphi}),$$

onde $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r)$ é uma solução de

$$\dot{\vartheta}_{\varepsilon, \hat{\varphi}} = -\frac{\tau_{\hat{\varphi}}}{\sin^2(\hat{\varphi})} \left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)' \circ \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}, \quad \vartheta_{\varepsilon}(0) = \frac{\mathcal{T}_{\hat{\varphi}}}{4}; \quad (3.2.8)$$

e

$$a_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(r) = \tau_{\hat{\varphi}} \int_0^r f_{\varepsilon} \circ \vartheta_{\varepsilon, \hat{\varphi}}(s) ds.$$

Proposição 3.2.6. *A curva $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ -holomorfa $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ definida acima satisfaz*

(i) $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ tem energia finita,

(ii) Assintocidade:

- $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ é assintótico a ϑ_+ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
- $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\varphi}}$ é assintótico a ϑ_- em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Demonstração. (i) *Energia:* lembramos que na simplectização, a energia da curva $\tilde{\mu}$ é dada por

$$E(\tilde{\mu}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\Sigma - \Gamma} \tilde{\mu}^* d\lambda_\phi,$$

onde $\Lambda = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \mid \phi' \geq 0\}$ e $\lambda_\phi = \phi \cdot \lambda$ é uma 1-forma sobre $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$. Seja $\phi \in \Lambda$ e $\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}} = \phi \cdot \lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}$, como foram definidas acima. Então

$$\begin{aligned} \int \tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}^* d\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}} &= \int d\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}(\partial_r \tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}, \partial_s \tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}) \\ &= \int \tau_{\hat{\phi}} f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}) \phi'(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) a'_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t) + \tau_{\hat{\phi}} f'_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}) \vartheta'_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t) \phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) dt \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d \phi'(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) [a'_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)]^2 + \phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) a''_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t) dt \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) a'_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t) \Big|_c^d \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \tau_{\hat{\phi}} \phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(t)) \Big|_c^d \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \lim_{d \rightarrow \infty} \tau_{\hat{\phi}} [\phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(d)) f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(d)) - \phi(a_{\varepsilon, \hat{\phi}}(c)) f_{\varepsilon}(\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(c))] \\ &\leq \tau_{\hat{\phi}}(1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Portanto, $E(\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}) < \infty$.

(ii) *Assintocidade:* observa-se que $\dot{\vartheta}_{\varepsilon, \hat{\phi}} = -\frac{\tau_{\hat{\phi}}}{\sin^2(\hat{\phi})} \left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)'$ é nulo nos pontos críticos de $\frac{1}{f_{\varepsilon}}$. Além disso, $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ é estritamente decrescente no intervalo $(0, \frac{\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{2})$ e estritamente crescente no intervalo $(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{2}, \mathcal{T}_{\hat{\phi}})$. Assim, pela condição inicial $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(0) = \frac{\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{4}$ temos que $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ e $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(r) \rightarrow \frac{\mathcal{T}}{2}$ quando $r \rightarrow -\infty$. Portanto, $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}(r, s)$ é assintótico a ϑ_+ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}(r, s)$ é assintótico a ϑ_- em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\square$

É claro que, se mudamos a condição inicial $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}(0)$ em $(\frac{\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{2}, \mathcal{T}_{\hat{\phi}})$, ou seja, consideramos o seguinte problema de Cauchy

$$\dot{\vartheta}_{\varepsilon} = -\frac{\tau_{\hat{\phi}}}{\sin^2(\hat{\phi})} \left(\frac{1}{f_{\varepsilon}}\right)' \circ \vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}, \quad \vartheta_{\varepsilon}(0) = \frac{3\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{4}, \quad (3.2.9)$$

teríamos outra curva $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -holomorfa que satisfazendo a proposição acima.

Além disso, temos por construção que $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1(\mathbb{R}) = (0, \mathcal{T}_{\hat{\phi}})$ e $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\mathbb{R}) = (\frac{\mathcal{T}_{\hat{\phi}}}{2}, \mathcal{T}_{\hat{\phi}})$, onde $\vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}}^j$ são soluções dos problemas de Cauchy (3.2.8) e (3.2.9), respectivamente. Também, Denotamos as duas curvas $\tilde{J}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -holomorfas por $\tilde{\mu}_1 = (a_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1, u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1)$ e $\tilde{\mu}_2 = (a_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2, u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2)$. Por conseguinte, para $j = 1, 2$ temos

- $\tilde{\mu}_j$ e $u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^j$ são mergulhos,
- $u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^j(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset T_{\eta}$,
- $u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^j(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^j(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \emptyset$,
- $u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap u_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \emptyset$.

Para mostrar a unicidade das curvas J -holomorfas construídas acima, vamos precisar da teoria de interseção de Siefring dada em [Sie11].

Sejam (U_{1+}, U_{1-}, ψ_1) e (U_{2+}, U_{2-}, ψ_2) os representantes assintóticos das curvas $\tilde{\mu}_1 = (a_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1, \mu_{\varepsilon, \hat{\phi}}^1)$ e $\tilde{\mu}_2 = (a_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2, \mu_{\varepsilon, \hat{\phi}}^2)$, respectivamente; com seções próprias $v_+^1, v_-^1, v_+^2, v_-^2$ não-nulas. Denotarmos $\hat{\mu}_1 := \tilde{\mu}_1 \circ \psi_1 = (\hat{a}_1, \hat{\mu}_1)$ e $\hat{\mu}_2 := \tilde{\mu}_2 \circ \psi_2 = (\hat{a}_2, \hat{\mu}_2)$. (ver definição 2.3.5) Consideramos a trivialização $d\lambda_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -simplética dada por 3.2.7 e denotarmos $\beta = (p, q)$ a classe de homotopia associada as curvas no toro racional invariante $T_{\hat{\eta}}$.

Afirmção 1. *Seja $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$. Considere o representante assintótico (U_+, U_-, ψ) de $\tilde{\mu}$ com seções próprias v_+ e v_- , respectivamente. Então*

$$\text{wind}(v_+, \beta) = \text{wind}(v_-, \beta) = 0.$$

Demonstração. Usando a definição de índice de Conley-Zehnder para $\mu_{cz}(\vartheta_{\max}) = 1$ e $\mu_{cz}(\vartheta_{\min}) = 0$, obtemos

$$1 = 2\text{wind}^-(\vartheta_{\max}, \beta) + p_+,$$

$$0 = 2\text{wind}^-(\vartheta_{\min}, \beta) + p_-,$$

onde $p_+ = \text{wind}^+(\vartheta_{\max}, \beta) - \text{wind}^-(\vartheta_{\max}, \beta)$ e $p_- = \text{wind}^+(\vartheta_{\min}, \beta) - \text{wind}^-(\vartheta_{\min}, \beta)$.

Como $p_+, p_- \in \{0, 1\}$, se segue

$$\text{wind}^+(\vartheta_{\min}, \beta) = \text{wind}^-(\vartheta_{\min}, \beta) = \text{wind}^-(\vartheta_{\max}, \beta) = 0,$$

$$\text{wind}^+(\vartheta_{\max}, \beta) = 1.$$

Figura 3.2.5: Monotonicidade dos números de enrolamento dos operadores assintóticos $\mathcal{A}_{\vartheta_{\max}}$ e $\mathcal{A}_{\vartheta_{\min}}$

Por outro lado, pela proposição 5.6 de [HWZ95] obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{wind}_{\pi}(\tilde{\mu}) \\ &:= \text{wind}_{\infty}(\tilde{\mu}) - \chi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) + \#\Gamma \\ &= \text{wind}_{\infty}(\tilde{\mu}) \\ &:= \text{wind}(v_+, \beta) - \text{wind}(v_-, \beta). \end{aligned}$$

Usando a monotonicidade dos números de enrolamento para os operadores assintóticos, se segue

$$0 = \text{wind}^+(\vartheta_{\min}, \beta) \leq \text{wind}(v_-, \beta) \leq \text{wind}(v_+, \beta) \leq \text{wind}^-(\vartheta_{\max}, \beta) = 0.$$

O seja,

$$\text{wind}(v_+, \beta) = \text{wind}(v_-, \beta) = 0.$$

□

Afirmção 2. *Seja $\tilde{\mu} = (a, u) \in \mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$. Então*

$$u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{v}_{\max} = u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{v}_{\min} = \emptyset.$$

Demonstração. Se $\tilde{\mu} \in \{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\}$. Se segue à afirmação, devido à construção feita anterior.

Em outro caso, a afirmação segue-se do seguinte argumento de invariância homotópica para o número de inteseções: *o número das respectivas interseções algébricas de duas curvas pseudo-holomorfas $\mu_0 = (a_0, u_0)$ e $\mu_1 = (a_1, u_1)$ com $\mathfrak{v}_{\max}$ e $\mathfrak{v}_{\min}$ coincidem sempre e quando exista uma homotopia relativa entre u_0 e u_1 com relação a $\mathfrak{v}_{\max}$ e $\mathfrak{v}_{\min}$ em $\tilde{\mathfrak{D}}_{\hat{\phi}}$ tal que nenhuma inteseção seja criada ou destruída perto dos fins do domínio.*

Seja (U_+, U_-, ψ) o representante assintótico de $\tilde{\mu}$ com seções próprias v_+ e v_- não nulas. Denotarmos $\hat{\mu} := \tilde{\mu} \circ \psi = (\hat{a}, \hat{u})$. Observa-se que $\hat{\mu}$ só pode ser homotópica a uma das curvas $\hat{\mu}_1$ ou $\hat{\mu}_2$ em $\tilde{\mathfrak{D}}$. Se não fosse assim, temos que $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ seriam homotópicas em $\tilde{\mathfrak{D}}_{\hat{\phi}}$, o qual é contraditório.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\hat{\mu}$ não seja homotópica a $\hat{\mu}_2$, logo, neste caso que assumirmos $\hat{\mu}$ seja homotópica a $\hat{\mu}_1$. Ou seja, vamos a construir uma homotopia relativa perto de $\mathfrak{v}_{\max}$ e outra perto de $\mathfrak{v}_{\min}$.

Lembrarmos da afirmação 1 que

$$\begin{aligned} \text{wind}(v_+, \beta) &= \text{wind}(v_-, \beta) = 0, \\ \text{wind}(v_+^1, \beta) &= \text{wind}(v_-^1, \beta) = 0. \end{aligned}$$

Para cada sinal, estudamos os valores próprios das seções próprias $v_{\pm}$ e $v_{\pm}^1$ associadas aos mesmos operadores assintóticos $\mathcal{A}_{\mathfrak{v}_{\max}}$ e $\mathcal{A}_{\mathfrak{v}_{\min}}$, respectivamente; encontramos que eles podem ser diferentes ou iguais. Se eles fossem diferentes, pelo lema 3.5 de [HWZ95] as seções próprias são linearmente independentes e para cada $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ temos $\text{span}\{v_{\pm}(s), v_{\pm}^1(s)\} = \mathbb{R}^2$. Se eles fossem iguais, segue sendo certa a igualdade entre seus números de enrolamento e o espaço próprio associado a esse valor próprio tem dimensão 1 e é gerado pelas seções próprias $v_{\pm}$ ou $v_{\pm}^1$. Portanto, para todo $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, temos as seguintes possibilidades:

- (i) $v_+(s), v_+^1(s)$ são linearmente independentes, ou, $v_-(s), v_-^1(s)$ são linearmente independentes.
- (ii) $v_+(s) = cv_+^1(s)$ ou $v_-(s) = cv_-^1(s)$, para alguma constante $c > 0$.
- (iii) $v_+(s) = cv_+^1(s)$ ou $v_-(s) = cv_-^1(s)$, para alguma constante $c < 0$.

Caso (i) e (ii): como $\lim_{r \rightarrow +\infty} w_{\pm}(\pm r, s) = 0$, então para $R \gg 1$ suficientemente grande temos $v_{\pm}(s) + w_{\pm}(\pm r, s)$ e $v_{\pm}^1(s) + w_{\pm}^1(\pm r, s)$ são linearmente independentes para $r > R$, no caso (i). Ainda mais, no caso (ii), temos que elas podem ser linearmente independentes ou múltiplos positivos. Além disso, também temos que elas são não-nulas, devido que as seções próprias $v_{\pm}, v_{\pm}^1$ são diferentes da seção nula. Portanto, para $t \in [0, 1]$ e para $r > R$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\neq (1-m)e^{\mu_{\pm} r} (v_{\pm}(s) + w_{\pm}(r, s)) + me^{\mu_{\pm}^1 r} (v_{\pm}^1(s) + w_{\pm}^1(r, s)) \\ &= (1-m)U_{\pm}(\pm r, s) + mU_{\pm}^1(\pm r, s). \end{aligned}$$

Para definir as homotopias $H_0^{\pm} : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \times S^2$ perto de $\mathfrak{v}_{\max}$ e $\mathfrak{v}_{\min}$, respectivamente.

Escolhemos $\delta_R : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ suave tal que

$$\delta_R(m, r) = \begin{cases} m & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r \leq R-1. \end{cases}$$

Assim, as homotopias estão dadas por

$$H_0^+(m, r, s) = \begin{cases} \exp_{\vartheta_+(s)} \{ (1 - \delta_R(m, r)) U_+(r, s) + \delta_R(m, r) U_+^1(r, s) \} & \text{se } r \geq R-1 \\ \hat{u}(r, s) & \text{se } r < R-1, \end{cases}$$

$$H_0^-(m, r, s) = \begin{cases} \hat{u}(r, s) & \text{se } r > -R+1 \\ \exp_{\vartheta_-(s)} \{ (1 - \delta_R(m, -r)) U_-(r, s) + \delta_R(m, -r) U_-^1(r, s) \} & \text{se } r \leq -R+1. \end{cases}$$

Além disso, como a aplicação exponencial ao longo de $\vartheta_{\pm}$ é um difeomorfismo perto de $\vartheta_{\max}$ e de $\vartheta_{\min}$, respectivamente. Então

$$H_0^+([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \emptyset,$$

e

$$H_0^-([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \emptyset.$$

Por outro lado, como a homotopia H_0^+ está definida perto de $\vartheta_{\max}$ então $\hat{u}$ não cria nem destrói interseções com $\vartheta_{\min}$. Igualmente, para H_0^- temos que $\hat{u}$ não cria nem destrói interseções com $\vartheta_{\max}$. Segue,

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \hat{u}_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \emptyset,$$

e

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \hat{u}_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \emptyset.$$

Caso (iii): lembramos que em $T_{\hat{\eta}}$ foi definida as coordenadas $(\vartheta, \zeta, \varphi)$ e que a estrutura de contato $\xi_{\hat{\varphi}}$ é gerada por ∂_{ϑ} e ∂_{φ} . Denotarmos $Rot(\theta)$ a rotação de um ângulo θ do subespaço tangente gerado por ∂_{ϑ} e ∂_{φ} .

Sejam $\varepsilon > 0$ pequeno e $R \gg 1$ suficientemente grande, definimos

$$H_1^+(m, r, s) = \begin{cases} \exp_{\vartheta_+(s)} Rot(\varepsilon \delta_R(m, r)) U_+(r, s) & \text{se } r \geq R-1, \\ \hat{u}(r, s) & \text{se } r \leq R-1, \end{cases}$$

no caso $v_+(s) = c v_+^1(s)$, com $c < 0$; ou

$$H_1^-(m, r, s) = \begin{cases} \hat{u}(r, s) & \text{se } -R+1 < r, \\ \exp_{\vartheta_-(s)} Rot(\varepsilon \delta_R(m, -r)) U_-(r, s) & \text{se } r \leq -R+1, \end{cases}$$

no caso $v_-(s) = c v_-^1(s)$, com $c < 0$. Então, elas definem homotopias entre $\hat{u}$ e $\hat{u}_{\varepsilon}^{\pm} := H_1^{\pm}(1, r, s)$, respectivamente. A primeira definida perto de $\vartheta_{\max}$ e a outra definida perto de $\vartheta_{\min}$.

Sejam $(U_+^{\varepsilon,+} := \text{Rot}(\varepsilon \delta_R(m, r))U_+, U_-^{\varepsilon,+} := U_-, \psi^+)$ o representante assintótico de $\hat{\mu}_\varepsilon^+ = (\hat{a}_\varepsilon^+, \hat{u}_\varepsilon^+)$ e $(U_+^{\varepsilon,-} := U_+, U_-^{\varepsilon,-} := \text{Rot}(\varepsilon \delta_R(m, -r))U_-, \psi^-)$ o representante assintótico de $\hat{\mu}_\varepsilon^- = (\hat{a}_\varepsilon^-, \hat{u}_\varepsilon^-)$. Logo, nos podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm = \hat{u}_\varepsilon^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm,$$

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm = \hat{u}_\varepsilon^-(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm.$$

Como $U_\pm(r, s)$ e $U_\pm^{\varepsilon,\pm}(r, s)$ são linearmente independentes então $v_\pm^1$ e $v_\pm^\varepsilon$ são linearmente independentes, para cada sinal. Assim, procedemos como no caso (i) para construir homotopias entre $\hat{u}_1$ e $\hat{u}_\varepsilon^\pm$, uma definida perto de $\vartheta_{\max}$ e à outra perto de $\vartheta_{\min}$; ou seja, existem

$$H_2^+(m, r, s) = \begin{cases} \exp_{\vartheta_+(s)} \{ (1 - \delta_R(m, r))U_+^\varepsilon(r, s) + \delta_R(m, r)U_+^1(r, s) \} & \text{se } r \geq R - 1 \\ \hat{u}_\varepsilon(r, s) = \hat{u}(r, s) & \text{se } r < R - 1. \end{cases}$$

$$H_2^-(m, r, s) = \begin{cases} \hat{u}_\varepsilon(r, s) = \hat{u}(r, s) & \text{se } r > -R + 1 \\ \exp_{\vartheta_-(s)} \{ (1 - \delta_R(m, -r))U_-^\varepsilon(r, s) + \delta_R(m, -r)U_-^1(r, s) \} & \text{se } r \leq -R + 1. \end{cases}$$

tal que

$$H_2^+([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \emptyset,$$

$$H_2^-([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \emptyset,$$

e

$$\hat{u}_\varepsilon([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm = \hat{u}_1([0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_\pm = \emptyset.$$

Portanto, nossas homotopias entre $\hat{u}$ e $\hat{u}_1$ são dadas por

$$H_0^\pm(m, r, s) = \begin{cases} H_1^\pm(2m) & \text{se } 0 \leq m \leq \frac{1}{2} \\ H_2^\pm(2m - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq m \leq 1, \end{cases}$$

as quais satisfazem

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \hat{u}_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \emptyset,$$

$$\hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \hat{u}_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \emptyset.$$

Agora, para concluir que o número de interseções algébricas de $\hat{u}$ e $\hat{u}_1$ com $\vartheta_{\max}$ e $\vartheta_{\min}$ coincidem, só resta definir a homotopia H_0 em $\{|s| \leq R\}$. Já que considerando as homotopias anteriores perto de $\vartheta_{\max}$ e $\vartheta_{\min}$, $\hat{u}$ se deformaram na aplicação $\bar{u}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \times S^2$ tal que

$$\bar{u} = \hat{u}_1 \quad \text{para } |r| \geq R \gg 1,$$

$$\bar{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max} = \hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\max},$$

$$\bar{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min} = \hat{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \vartheta_{\min}.$$

Como $\hat{u}$ não é homotópica a $\hat{u}_2$, então existe $p \in \hat{u}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{u}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \hat{u}_1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})\}$.

Considere um difeomorfismo $\Psi: (S^1 \times S^2) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos a homotopia $H_0: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \times S^2$ entre $\bar{u}$ e $\hat{u}_1$ dado por

$$H_0(m, r, s) = \Psi^{-1}((1-m)\Psi \circ \bar{u}(r, s) + m\Psi \circ \hat{u}_1(r, s)).$$

Assim, concluí-se que $\hat{u}$ não faz interseção com ϑ_{max} nem ϑ_{min} . $\square$

Em [Sie11], foi definido o número de interseção generalizada $[\tilde{u}] * [\tilde{v}] \in \mathbb{Z}$ de duas curvas pseudo-holomorfas $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$. A seguinte afirmação usa alguns fatos nesse artigo.

Afirmção 3. *Sejam $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Então $[\tilde{u}] * [\tilde{v}] = 0$.*

Demonstração. A condição (c) do item (3) do corolário 5.9 de [Sie11] é satisfeita, pois pela afirmação 1 temos que $d_0^+ := \text{wind}^-(\vartheta_{max}, \beta) - \text{wind}(v_+, \beta) = 0$ e $d_0^- := \text{wind}^+(\vartheta_{min}, \beta) - \text{wind}(v_-, \beta) = 0$. Por outro lado, pela afirmação 2 temos que se satisfaz (a) e (b) do item (3) de [Sie11]. Por tanto, isso implica que a condição (1) de [Sie11], ou seja, a afirmação é verdadeira. $\square$

Demonstração da proposição 3.2.5.

Agora, vamos demonstrar que $\mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ tem apenas duas curvas pseudo-holomorfas. Assumirmos a existência de uma terceira curva $\tilde{\mu}_3$ em $\mathcal{M}_{\varepsilon, \hat{\phi}}$.

Consideramos (U_+^i, U_-^i, ψ_i) os representantes assintóticos de $\tilde{\mu}_i$ para $i = 1, 2, 3$; com seções próprias $v_\pm^i$. Pela afirmação 1 obtemos

$$\text{wind}(v_\pm^i, \beta) = \text{wind}(v_\pm^j, \beta) = 0 \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Pelo demonstração da afirmação 3.2.4 temos que $\text{wind}^-(\vartheta_{min}) = \text{wind}^+(\vartheta_{min}) = 0$. Portanto, o espaço próprio do maior valor próprio negativo do operador assintótico tem dimensão 1 e é o único com número de enrolamento nulo. Assim, devemos ter $v_+^i(s) = c_{ij}v_+^j(s)$ para todo s e $c_{i,j}$ não-nulos. Segue-se que existe $i_0 \neq j_0 \in \{1, 2, 3\}$ tal que $c_{i_0, j_0} > 0$.

Pelo o teorema 2.5 de [Sie11] obtemos que $[\tilde{\mu}_{i_0}] * [\tilde{\mu}_{j_0}] > 0$, o qual contradiz afirmação anterior. Isso mostra a unicidade das duas curvas pseudo-holomorfas. Isto conclui a demonstração da proposição 3.2.5.

Agora, fazendo o anterior para cada toro invariante T_η obtemos que existem só duas classes de equivalência na vizinhanças dos toros, mas além disso, mostraremos que elas são regulares.

Proposição 3.2.7. *O conjunto $\mathcal{M}_\varepsilon$ das classes de equivalência de curvas $\tilde{J}_\varepsilon$ -holomorfas $\tilde{\mu} := (a, u): \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ que são invariantes por traslações e rotações, é formado por elementos regulares.*

Segue que $\tilde{J}_\varepsilon$ é uma estrutura pseudo-holomorfa regular com respeito a classe de homotopia β induzida por J_ε . Além disso, em cada vizinhança dos toros onde o modelo perturbado esta definido se satisfaz a proposição 3.2.4.

Demonstração. A regularidade das curvas $J_{\varepsilon, \hat{\phi}}$ -holomorfas definidas se segue do fato de Wend.^{3.2.1} temos que $\tilde{\mu} \in \{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\}$ é regular devido que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} 1 = \text{Ind}(\mu) &> -\chi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}^1) + \#\Gamma_{\text{par}} + 2Z(d\tilde{\mu}_{\varepsilon}) \\ &= -2 + 1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Lembremos que o índice de Fredholm associado a curva $\tilde{\mu}_{\varepsilon}$ é dada por $\text{Ind}(\tilde{\mu}) = \mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\text{max}}) - \mu_{\text{CZ}}(\vartheta_{\text{min}}) = 1$. $\square$

Observação 3.2.8. *Observa-se que*

$$d\tilde{\mu}_{\varepsilon, \hat{\phi}}(z) \cdot v = \tau_{\hat{\phi}} \begin{bmatrix} f_{\varepsilon} \circ \vartheta_{\varepsilon, \hat{\phi}} & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\vartheta}_{\varepsilon, \hat{\phi}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_z \cdot v \neq 0$$

para todo $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $0 \neq v \in T_z(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Note também que a proposição 3.2.5 é certa só na vizinhança do toro invariante T_{η} . Mas, o conjunto $\mathcal{M}_{\hat{f}_{\varepsilon}}^{\leq S, \beta}(P, P') \subset \mathcal{M}_{\varepsilon}$ tal que $\tilde{\mu} := (a, u) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ tem energia finita, $\tilde{\mu}$ é assintótico a P em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e assintótico a P' em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap L = \emptyset$, para um par de órbitas fixas $P, P' \in \mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda_{\varepsilon})$, satisfaz a proposição 3.2.5 se existe um único toro racional invariante representando a classe de homotopia β .

3.2.2 Homologia do modelo perturbado

Nesta parte, consideramos $\lambda := \lambda_{f, g}$ uma forma de contato Morse-Bott, onde o par (f, g) satisfaz (i), (ii), (iii) e $\text{wind}(f, g) = 1$. Ou seja, a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é tipo *tight*. Sabemos que dado qualquer (p, q) de inteiros relativamente primos satisfazendo (3.0.1), existe um único toro invariante T_{η} tal que cada órbita contida em T_{η} tem classe de homotopia $\beta = (p, q)$, com $\eta \in (-1, 1)$. Lembre-se que o período primo destas órbitas é $\tau_{\eta} := 2\pi|pf(\eta) + qg(\eta)|$.

Seja $S > \tau_{\eta}$. Consideramos o modelo perturbado de λ , ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que λ_{ε} é definida em (3.2.6). Sabemos pela seção anterior (ver proposição 3.2.7), que existe $\tilde{J}_{\varepsilon}$ uma estrutura pseudo-holomorfa regular com respeito à classe de homotopia β induzida por $J_{\varepsilon} \in \mathcal{J}(\xi = \ker \lambda)$, de maneira que cada curva $\tilde{J}_{\varepsilon}$ -holomorfas em $T_{\hat{\eta}}$ seja assintótica às orbitas ϑ_+ e ϑ_- no furo positivo e negativo, respectivamente. Ainda mais, pela proposição 3.2.4, temos que o conjunto $\mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda_{\varepsilon})$ está em correspondência com os pontos críticos de f_{ε} , os quais definem as duas únicas órbitas ϑ_{max} e ϑ_{min} com período menor o igual a S em T_{η} . Se segue, $HC_k^{\leq S, \beta}(\lambda_{\varepsilon}, j_{\varepsilon}) \simeq H_k(S^1, \mathbb{Z}_2)$. Portanto,

Proposição 3.2.9.

$$HC_k^{\leq S, \beta}(\lambda_{\varepsilon}, J_{\varepsilon}) = HC_k^{\leq \tau_{\eta}, \beta}(\lambda_{\varepsilon}, j_{\varepsilon}) \simeq H_k(S^1, \mathbb{Z}_2) \neq 0.$$

^{3.2.1}Seja W uma variedade de $\dim W = 4$, (Σ, i, Γ, μ) é uma curva pseudo-holomorfa não-constante com somente órbitas assintóticas Morse-Bott. Se

$$\text{Ind}(\mu) > -\chi(\Sigma) + \#\Gamma_{\text{par}} + 2Z(d\mu)$$

então μ é regular, onde Γ_{par} é um subconjunto dos furos tais que o índice de Conley-Zehnder é par e $Z(d\mu)$ é a soma das ordens dos pontos críticos de μ (Ver teorema 2.2.2).

Figura 3.2.6: Curvas $\tilde{J}_\varepsilon$ -holomorfas em T_η .

Lembrando que a homologia de contato (ver seção 2.4) está bem definida pela proposição 3.2.4, ou seja, se satisfaz as seguintes condições

- Cada órbita em $\mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda_\varepsilon)$ é não-degenerada.
- Não existem órbitas em $\mathcal{P}^{\leq S, \beta}(\lambda_\varepsilon) \setminus L$, as quais sejam contráteis em $S^1 \times S^2 \setminus L$.
- As componentes de L são elípticas.

Dado $0 < c < 1$, note que λ e $c\lambda$ tem o mesmo número de rotação no link principal L . Isso implica que $c\lambda$ é uma forma de contato Morse-Bott. Além disso, $c\lambda$ define os mesmos toros invariantes racionais, em particular o mesmo toro que tem órbitas de Reeb que representam a classe de homotopia $\beta = (p, q)$, mas os períodos primos das órbitas estão multiplicados por c . Isto é, dado $\gamma(s)$ uma órbita λ -Reeb no toro T_η de período primo τ_η , temos que $\gamma(s/c)$ é uma órbita $c\lambda$ -Reeb em T_η com período $c\tau_\eta$. Assim, reparametrizando as órbitas de Reeb associadas a λ , obtemos que o modelo perturbado para $c\lambda$ é $c\lambda_\varepsilon$.

Agora, vamos mostrar uma aplicação de grau 0 não-trivial, que leva complexos de cadeia de λ_ε em complexos de cadeia de $c\lambda_\varepsilon$. Assumirmos $S = \tau_\eta/c > \tau_\eta$

Ainda mais, como a estrutura pseudo-holomorfa $\tilde{J}_\varepsilon$ induzida pela estrutura complexa J_ε associada a λ_ε é regular, temos que $\tilde{J}_\varepsilon^- := \Psi^*(\tilde{J}_\varepsilon) \in \mathcal{J}(c\lambda_\varepsilon)$ define uma estrutura pseudo-holomorfa regular induzida por J_ε associada a $c\lambda_\varepsilon$, onde Ψ é o difeomorfismo em $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ dado por

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times S^1 \times S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2 \\ (r, z) &\mapsto (\alpha(r), z). \end{aligned}$$

Aqui $\alpha(r) = \frac{r}{c}$. Portanto, podemos definir o seguinte isomorfismo entre níveis de homologia,

$$\begin{aligned} j_k : C_k^{\leq \tau_\eta/c, \beta}(\lambda_\varepsilon) &\simeq C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon) \\ q_P &\simeq q_{P \circ \alpha}. \end{aligned}$$

Note-se que o isomorfismo j_k satisfaz $j_{k-1} \circ \partial_k(\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon) = \partial_k(c\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon) \circ j_k$, onde $\partial(\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon)$ e $\partial_k(c\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon)$ são as aplicações de grau -1 . Além disso, elas contam os mesmos cilindros.

Consideramos à aplicação inclusão

$$i_k : C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon) \hookrightarrow C_k^{\leq \tau_\eta/c, \beta}(\lambda_\varepsilon).$$

Por outro lado, sabemos que dado qualquer $\bar{J} \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\bar{J}_\varepsilon^-, \bar{J}_\varepsilon : L)$ respeito à classe de homotopia β e ação $\leq \tau_\eta/c$, podemos definir uma aplicação de grau 0

$$\Phi_k(\bar{J}) : C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon) \rightarrow C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon).$$

A seguinte lema nós mostra que à aplicação $j_k \circ i_k : C_k^{\leq cS, (p, q)}(\lambda) \rightarrow C_k^{\leq cS, (p, q)}(c\lambda)$ define uma aplicação de grau 0.

Lema 3.2.10. *Existe $\tilde{J}_\varepsilon \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\tilde{J}_\varepsilon^-, \tilde{J}_\varepsilon : L)$ respeito à classe de homotopia β e ação menor o igual a τ_η/c , tal que*

$$j_k \circ i_k = \Phi_k(\tilde{J}).$$

Demonstração. Consideramos uma função suave $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' \leq 0$ e

$$g(a) = \begin{cases} 1/c & \text{se } (-\infty, -1] \\ 1 & \text{se } [0, +\infty). \end{cases}$$

Seja a estrutura quase-complexa $d(e^a \lambda_\varepsilon)$ -compatível $\bar{J}$ em $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ definida por

$$\bar{J} \cdot \partial_a = g R_{\lambda_\varepsilon}, \quad \bar{J} \cdot R_{\lambda_\varepsilon} = -\frac{1}{g} \partial_a \quad e \quad \bar{J}|_{\xi_0} = J_\varepsilon.$$

Observe-se que $\bar{J} \in \mathcal{J}(\bar{J}_\varepsilon^-, \bar{J}_\varepsilon : L)$, devido que $\bar{J} = \bar{J}_\varepsilon^- \in \mathcal{J}(c\lambda_\varepsilon)$ em $(-\infty, -1] \times S^1 \times S^2$ e $\bar{J} = \bar{J}_\varepsilon \in \mathcal{J}(\lambda_\varepsilon)$ em $[0, +\infty) \times S^1 \times S^2$. Lembre-se que o campo de Reeb de $c\lambda_\varepsilon$ é $R_{\lambda_\varepsilon}/c$.

Consideramos o difeomorfismo

$$G : \mathbb{R} \times S^1 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2 \\ (a, z) \mapsto (F(a), z),$$

onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo, o qual é positivo em $[0, \infty)$. Segue,

$$\begin{aligned} G^*(\bar{J})|_{(a, z)} \cdot \partial_a &= \bar{J}|_{(F(a), z)} \cdot (dG|_{(a, z)} \cdot \partial_a) \\ &= F'(a) \bar{J}|_{(F(a), z)} \cdot \partial_a \\ &= F'(a) g(F(a)) \cdot R_{\lambda_\varepsilon}|_z. \end{aligned}$$

Logo, se F é uma solução do problema de Cauchy

$$F'(a) = \frac{1}{g(F(a))}, \quad F(0) = 0,$$

então $G^*\bar{J} = \tilde{J}_\varepsilon$.

De maneira semelhante, temos $G^*\bar{J}|_{\xi_0} = J_\varepsilon$. Portanto, $\bar{J} \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\bar{J}_\varepsilon^-, \bar{J}_\varepsilon : L)$, devido que $\bar{J}_\varepsilon \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda_\varepsilon)$, na classe de homotopia β e ação limitada por τ_η/c .

Assim, para $P \in \mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon)$ está definida

$$\Phi_k(\bar{J}) : C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon) \rightarrow C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon)$$

$$q_P \mapsto \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon) \\ \mu_{\text{CZ}}(P') = \mu_{\text{CZ}}(P) = k}} \#_2 \left(\mathcal{M}_{\bar{J}}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P') \right) q_{P'}.$$

Por outro lado, como $G^*\bar{J} = \bar{J}_\varepsilon$ temos que para qualquer curva $\bar{J}$ -holomorfa em $\mathcal{M}_{\bar{J}}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P')$ é da forma $G \circ \tilde{\mu}$, para alguma curva $\bar{J}_\varepsilon$ -holomorfa $\tilde{\mu}$ em $\mathcal{M}_{\bar{J}_\varepsilon}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P')$. Como $P' \in \mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon)$ então G induz uma correspondência injetora entre

$$\mathcal{M}_{\bar{J}}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P') \quad e \quad \mathcal{M}_{\bar{J}_\varepsilon}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P')$$

onde $j_k \circ i_k(q_{P'}) = q_P$.

Lembremos que $\mathcal{M}_{\bar{J}_\varepsilon}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P')$ é vazio se $P \neq P'$ e quando $P = P'$ temos $\mathcal{M}_{\bar{J}_\varepsilon}^{\leq \tau_\eta, \beta}(P, P')$ consta de um cilindro trivial. Se segue,

$$\Phi_k(\bar{J})(q_P) = q_P = j_k \circ i_k(q_P).$$

□

Lema 3.2.11. *Dado qualquer $\bar{J} \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\bar{J}_\varepsilon^-, \bar{J}_\varepsilon : L)$, as aplicações $\Phi_k(\bar{J})$ e $j_k \circ i_k$ são cadeias homotópicas.*

Demonstração. Segue do teorema 2.4.10 aplicado ao anterior lema. □

Observação 3.2.12. $j_k \circ i_k : HC_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon) \rightarrow HC_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon, J_\varepsilon)$ é não-nula, pois a homologia de contato é não-trivial.

Agora, consideremos $f\lambda_0$, com $f \in \mathcal{F}$, dada no enunciado do resultado 2. Assumirmos que $\lambda_{f,g}$ define uma forma de contato em $S^1 \times S^2$ com estrutura de contato tipo *tight*. Ou seja, que o modelo perturbado também induz uma estrutura *tight*. Pela observação 1.2.26, temos que $\lambda_\varepsilon \simeq f_+\lambda_0$, onde λ_0 é dada em (1.2.7). Denotarmos as estruturas $\bar{J}_\varepsilon^-$ por $\bar{J}_-$ e $\bar{J}_\varepsilon$ por $\bar{J}_+$, as quais são induzidas pela estrutura complexa $J_\varepsilon \in \mathcal{J}(\xi)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $cf_+ < f1 < f_+$.

Sejam $R > 0$ e $\tilde{J}_0 \in \mathcal{J}(\lambda_0)$ a estrutura quase-complexa associada a $J_\varepsilon \in \mathcal{J}(\xi_0)$. Definimos as estruturas quase-complexas $\tilde{J}_R = \tilde{J}_1 \circ_R \tilde{J}_2$, onde $\tilde{J}_1 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_0, \tilde{J}_+ : L)$, $\tilde{J}_2 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_0 : L)$. Lembremos que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_R$ é bi-holomorfa para alguma $\bar{J}_R \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$.

Lema 3.2.13. *Existe uma curva $\bar{J}_R$ -holomorfa $\mu = (a, u)$ de energia finita assintótica as órbitas em $\mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(f_+\lambda_0)$ e $\mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(cf_+\lambda_0)$ nos furos positivos e negativos, respectivamente; tal que u não intersecta o link principal L .*

Demonstração. Se não houver nenhuma curva $\mu = (a, u)$ tal que $u \cap L \neq \emptyset$, concluímos que $\bar{J}_R \in$

$\mathcal{J}_{reg}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$, portanto a aplicação $\Phi_k(\tilde{J}_R)$ está bem definida e é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \Phi_k(\tilde{J}_R) : C_k^{\leq T, (p, q)}(f_+ \lambda_0) &\rightarrow C_k^{\leq T, (p, q)}(cf_+ \lambda_0) \\ q_P &\mapsto \sum_{\substack{P' \in \mathcal{P}^{\leq T, (p, q)}(cf_+ \lambda_0) \\ \mu_{CZ}(P') = \mu_{CZ}(P) = k+1}} \#_2 \left(\mathcal{M}_{\tilde{J}_R}^{\leq T, (p, q)}(P, P') \right) q_{P'}. \end{aligned}$$

Segue, da proposição 3.2.5 que $\Phi_k(\tilde{J}_R)$ é nula. Pelo lema 3.2.11 temos que $\Phi_k(\tilde{J}_R)$ é uma cadeia homotópica a $j_k \circ \mathbf{u}_k$; o qual implica $j_k \circ \mathbf{u}_k(\tilde{J}_\varepsilon)$ é nula. Isto contradiz o fato que $j_k \circ \mathbf{u}_k(\tilde{J}_\varepsilon)$ é não-trivial.

Por outro lado, a energia desta curva é uniformemente limitada devido a observação 2.3.9. $\square$

3.3 Lema de existência implicada

Nesta seção, provaremos a existência de órbitas periódicas associadas à 1-forma de contato *tight* em $S^1 \times S^2$ dada por (1.2.7), ou seja,

$$\lambda_0 = \cos \varphi dt + \frac{\sin^2 \varphi}{2} d\theta.$$

O resultado principal desta parte é o lema 3.3.6.

Sejam $P_n = S^1 \times \{(0, 0, 1)\}$ e $P_s = S^1 \times \{(0, 0, -1)\}$ as órbitas λ_0 -Reeb com período 2π , que são componentes do link principal L . Além disso, consideramos a trivialização global da estrutura de contato *tight* $\xi_0 := \ker \lambda_0$ dada em (1.2.10)

Lembramos que $\pi_1(S^1 \times S^2 \setminus \{L\}) \simeq \pi_1(T^2 \times (0, \pi)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Portanto, a classe de homotopia de uma curva γ é dada por

$$[\gamma] = (\text{wind}_0(\gamma), \text{wind}_1(\gamma)),$$

onde os números $\text{wind}_0(\gamma)$ e $\text{wind}_1(\gamma)$ correspondem aos graus de duas curvas vistas como aplicações de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ em S^1 , respectivamente. A primeira aplicação é a projeção de γ no primeiro fator S^1 e a outra aplicação é a projeção no segundo fator $S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \simeq S^1$, com respeito a trivialização dada por 1.2.10.

Consideramos a forma de contato não-degenerada $\lambda = f\lambda_0$ em $S^1 \times S^2$, com $f \in \mathcal{F}$, como no enunciado do teorema 2. Então, P_n e P_s são órbitas periódicas λ -Reeb, ou seja, $P_n = (\gamma_0, T_0)$ e $P_s = (\gamma_1, T_1)$. Assim, para $k \geq 1$ e $i \in \{0, 1\}$, consideramos um valor próprio $\mathbf{v}$ não-nulo do operador assintótico $\mathcal{A}_{\gamma_i^k}$ associado à forma de contato λ , uma estrutura quase-complexa $J_0 \in \mathcal{J}(\xi_0)$ e as curvas $\gamma_i^k(s) = \gamma_i(kT_i s)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbf{v}(s) \in \xi_0|_{\gamma_i^k(s)}$ uma seção própria não-nula de $\mathbf{v}$ definimos

$$s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbf{v}_\varepsilon(s) := \exp_{\gamma_i^k(s)}(\varepsilon \mathbf{v}(s)).$$

Lema 3.3.1. *Suponha $p = \text{wind}_0(\mathbf{v}_\varepsilon)$ e $q = \text{wind}_1(\mathbf{v}_\varepsilon)$. Temos*

- Se $i = 0$ então $p = k > 0$ e

$$\begin{aligned} v > 0 &\Rightarrow \frac{q}{p} \geq \rho_0(f) \\ v < 0 &\Rightarrow \frac{q}{p} \leq \rho_0(f). \end{aligned}$$

- Se $i = 1$ então $p = -k < 0$ e

$$\begin{aligned} v > 0 &\Rightarrow -\frac{q}{p} \leq \rho_1(f) \\ v < 0 &\Rightarrow -\frac{q}{p} \geq \rho_1(f). \end{aligned}$$

Demonstração. Lembra-se que o campo λ -Reeb em P_n é ∂_t e que o campo λ -Reeb em P_s é $-\partial_t$. Segue, $p = \text{wind}_0(v_\varepsilon) = k > 0$ se aplicação exponencial fosse avaliada ao longo de γ_0^k e $p = \text{wind}_0(v_\varepsilon) = -k < 0$ se aplicação exponencial fosse avaliada ao longo de γ_1^k .

Se $p = k > 0$: usando a monotonicidade dos número de enrolamento obtemos

$$\begin{aligned} v > 0 &\Rightarrow q = \text{wind}_1(v_\varepsilon) = \text{wind}(v, \gamma_0^p) \geq \text{wind}^+(P_n^p), \\ v < 0 &\Rightarrow q = \text{wind}_1(v_\varepsilon) = \text{wind}(v, \gamma_0^p) \leq \text{wind}^-(P_n^p). \end{aligned}$$

Usando o lema 2.3.3 obtemos temos

- P_n é elíptico: $\rho_0(f) \notin \mathbb{Q}$ e

$$\text{wind}^+(P_n^p) = \lfloor p\rho_0(f) \rfloor + 1 \geq p\rho_0(f),$$

$$\text{wind}^-(P_n^p) = \lfloor p\rho_0(f) \rfloor \leq p\rho_0(f).$$

- P_n é hiperbólico com multiplicadores de Floquet positivos: $\rho_0(f) \in \mathbb{Z}$ e

$$\text{wind}^+(P_n^p) = \text{wind}^-(P_n^p) = p\rho_0(f).$$

- P_n é hiperbólico com multiplicadores de Floquet negativos: $\rho_0(f) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} p \text{ é par} &\Rightarrow \text{wind}^+(P_n^p) = \text{wind}^-(P_n^p) = p\rho_0(f), \\ p \text{ é ímpar} &\Rightarrow \begin{cases} \text{wind}^+(P_n^p) &= \lfloor p\rho_0(f) \rfloor + 1 \geq p\rho_0(f), \\ \text{wind}^-(P_n^p) &= \lfloor p\rho_0(f) \rfloor \leq p\rho_0(f). \end{cases} \end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos

$$v > 0 \Rightarrow \frac{q}{p} \geq \rho_0(f)$$

e

$$v < 0 \Rightarrow \frac{q}{p} \leq \rho_0(f).$$

No caso $i = 1$, fazendo de maneira semelhante para $p = -k < 0$ obtemos

$$v > 0 \Rightarrow -q = -\text{wind}_1(v_\varepsilon) = \text{wind}(v, \gamma_1^p) \geq \text{wind}^+(P_s^p) \geq p\rho_1(f),$$

$$v < 0 \Rightarrow -q = -\text{wind}_1(v_\varepsilon) = \text{wind}(v, \gamma_1^p) \leq \text{wind}^-(P_s^p) \leq p\rho_1(f).$$

□

Figura 3.3.1: Órbitas periódicas de λ_0 -Reeb em $S^1 \times S^2$.

Aqui, $\rho_0(f) = \rho(P_n, \lambda)$ e $\rho_1(f) = \rho(P_s, \lambda)$ são os respectivos números de rotação de P_n e P_s com respeito à 1-forma de contato $\lambda = f\lambda_0$.

Observação 3.3.2. Note que $\lambda_0 = f_0(-\cos \varphi)dt + g_0(-\cos \varphi)$, para um par (f_0, g_0) satisfazendo (i), (ii), (iii) e $\text{wind}(f_0, g_0) = 1$. Assim, pelo teorema de Rolle aplicado a g_0 temos que existe pelo menos um $\eta_0 \in (-1, 1)$ tal que $g'(\eta_0) = 0$. Mas, como o par (f_0, g_0) satisfaz (i) e $\text{wind}(f_0, g_0) = 1$ então η_0 é único e $f'_0(\eta_0) < 0$. Portanto, temos que o toro racional invariante T_{η_0} tem uma órbita periódica $\gamma_{0,1}$ na única classe de homotopia $(0, 1)$, ou seja, $\text{wind}_0(\gamma_{0,1}) = 0$ e $\text{wind}_1(\gamma_{0,1}) = 1$.

Os teoremas de compacidade na teoria de campos simpléticos dada em [BEH⁺03] nós dizem que o espaço das classes de equivalência das curvas pseudo-holomorfas com energia e gênero limitado é compactificado, por meio das chamadas construções holomorfas (*holomorphic buildings*).

Sejam $\lambda_- = f_- \lambda_0$, $\lambda = f \lambda_0$ e $\lambda_+ = f_+ \lambda_0$ 1-formas de contato, onde $f_-, f, f_+ \in \mathcal{F}$ são funções tais que $f_- < f < f_+$ pontualmente, como foi definido no lema ao final da seção anterior 3.2.13. Além disso, escolhamos $R_n > 0$ tal que $R_n \rightarrow +\infty$. e a sequência de estruturas quase-complexas splitting $\bar{J}_{R_n} = J_1 \circ_{R_n} J_2$, onde $J_1 \in \mathcal{J}(\bar{J}_-, \bar{J}_0 : L)$ e $J_2 \in \mathcal{J}(\bar{J}_0, \bar{J}_+ : L)$ para alguns estruturas quase-complexas $\bar{J}_\pm \in \mathcal{J}(\lambda_\pm)$ e $\bar{J}_0 \in \mathcal{J}(\lambda)$.

Pelo lema 3.2.13 podemos definir a sequência $\tilde{\mu}_n = (a_n, u_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$ de curvas $\bar{J}_{R_n}$ -holomorfas as quais são assintóticas a $P_+ \in \mathcal{P}(\lambda_+)$ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e assintóticas a $P_- \in \mathcal{P}(\lambda_-)$

em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, para todo n . Também temos que $\tilde{\mu}_n$ tem energia uniformemente limitada e

$$u_n(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap L = \emptyset \quad \forall n. \quad (3.3.1)$$

Usando a compacidade SFT, existe uma subsequência $\tilde{\mu}_{n_j}$, uma família $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ correspondentes a uma família $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m\}$ de aplicações suaves

$$\tilde{v}_k = (\tilde{b}_k, \tilde{w}_k) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \times S^1 \times S^2$$

e números $1 \leq k_1 < k_2 \leq m$ satisfazendo:

1. $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{k_1-1}$ são $\tilde{J}_-$ -holomorfas,
2. $\tilde{v}_{k_1}$ é J_1 -holomorfa e $\tilde{v}_{k_2}$ é J_2 -holomorfa,
3. $\tilde{v}_{k_1+1}, \dots, \tilde{v}_{k_2-1}$ são $\tilde{J}$ -holomorfas,
4. $\tilde{v}_{k_2+1}, \dots, \tilde{v}_m$ são $\tilde{J}_+$ -holomorfas,
5. $0 < E(\tilde{v}_k) < \infty$ para cada $k = 1, \dots, m$,
6. Cada curva $\tilde{v}_j$ tem um furo positivo em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e um furo negativo em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
7. Existem órbitas de Reeb $P_1, \dots, P_{k_1-1} \in \mathcal{P}(\lambda_-)$, $P_{k_1}, \dots, P_{k_2-1} \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $P_{k_2+1}, \dots, P_m \in \mathcal{P}(\lambda_+)$ tal que P_k é o limite assintótico de $\tilde{v}_k$ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e também é o limite assintótico de $\tilde{v}_{k+1}$ em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, para $1 \leq k \leq m-1$. $\tilde{v}_1$ é assintótico a P_- em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{v}_m$ é assintótico a P_+ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,
8. Para cada $k = 1, \dots, m$, existem sequências $\{r_j^k\}$ e $\{c_j^k\}$ de números reais tais que as aplicações

$$(r, s) \mapsto g_{c_j^k} \circ \tilde{\mu}_{n_j}(r + r_j^k, s)$$

convergem a $\tilde{v}_k$ em $C_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, quando $j \rightarrow +\infty$. Onde $g_c(r, s) = (r + c, s)$ é uma $\mathbb{R}$ -ação em $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$.

Agora, Procuramos uma condição tal que as órbitas P_i assintóticas aos $\tilde{v}_k$ interseja o link principal L . Ou seja, suponhamos que existe algum $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tal que $P_i \cap L \neq \emptyset$. Seja

$$i_0 = \min\{i \in \{1, \dots, m-1\} : P_i \subseteq L\}.$$

Logo, para todo $1 \leq i \leq i_0$ temos

$$\tilde{w}_i(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \Gamma_i) \not\subseteq \mathcal{L}.$$

Seja $D_i = \{(z, x) \in [(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_i] \times L : \tau \circ \tilde{v}_i(z) = x\}$, para $1 \leq i \leq i_0$.

Note-se que D_i é discreto. Em efeito, se D_i tem um ponto de acumulação em $[(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_i] \times L$ então $\tilde{w}_i((\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \Gamma_i) \subset L$, pelo principio de similitude de Carleman. Portanto, $P_{i-1} \subseteq L$, contradizendo a definição de i_0 .

Além disso, $D_i = \emptyset$. De fato, se $D_i \neq \emptyset$ então as interseções da curva pseudo-holomorfa $\tilde{v}_i$ com $\mathbb{R} \times L$ são isoladas. Portanto, pela estabilidade e positividade das interseções temos que a imagem de $\tilde{\mu}_{n_j}$ intersesta $\mathbb{R} \times S^1 \times S^2$, para j suficientemente grande, o que contradiz a condição 3.3.1. Se segue, para $1 \leq i \leq i_0$ que $\tilde{w}_i(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \Gamma_i) \cap L = \emptyset$.

Assim, $P_{i_0} \subset P_n$ ou $P_{i_0} \subset P_s$. Suponhamos que $P_{i_0} \subset P_n$ (no outro caso é similar), ou seja, $P_{i_0} = P_n^p$ para algum $p \geq 1$. Note-se que P_{i_0} é homotópico a P_- em $(S^1 \times S^2) \setminus P_s$. Então, $\text{wind}_0(P_-) = \text{wind}_0(P_{i_0}) = p > 0$. Denotarmos por $q := \text{wind}_1(P_-)$

Seja

$$i_1 = \max\{i \in \{1, \dots, m-1\} : P_i = P_n^p\} \geq i_0.$$

Então, $\tilde{v}_{i_0}$ é assintótico a P_n^p em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{v}_{i_1+1}$ é assintótico a P_n^p em $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Observa-se que $\tilde{w}_{i_1+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \not\subset L$. Em efeito, se $\tilde{w}_{i_1+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset L$ então $\tilde{v}_{i_1+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{R} \times P_n$. Assim, $\tilde{v}_{i_1+1}$ é assintótico a $P_{i_1+1} = P_n^l$ em $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, para algum $l \neq p$ (se $p = l$ contradiz a definição de i_1). Assim, para j suficientemente grande, conclui que se $r \gg 1$ temos $t \mapsto \tilde{u}_{n_j}(r + r_j^{i_1+1}, s)$ está muito próximo de P_n^l , e, se $r \ll -1$ temos $t \mapsto \tilde{u}_{n_j}(r + r_j^{i_1+1}, s)$ está muito próximo de P_n^p . Mas, as imagens das curvas $\tau \circ \tilde{v}_{n_j}$ estão contidas em $S^1 \times S^2 \setminus L \subset S^1 \times S^2 \setminus P_s$, se segue P_n^l é homotópica a P_n^p em $S^1 \times S^2 \setminus P_s$. Se concluí, $l = p$. O que é contraditório.

Seja

$$\alpha_0 = \begin{cases} \lambda_- & i_0 < k_1 \\ \lambda & k_1 \leq i_0 < k_2 \\ \lambda_+ & k_2 \leq i_0 \end{cases} \quad \alpha_1 = \begin{cases} \lambda_- & i_1 < k_1 \\ \lambda & k_1 \leq i_1 < k_2 \\ \lambda_+ & k_2 \leq i_1 \end{cases}.$$

Denotarmos os campos de Reeb R_{α_0} e R_{α_1} associados as formas de contato α_0 e α_1 , respectivamente; lembramos que eles são pontualmente múltiplos positivos do campo de Reeb R_0 de λ_0 em P_n . Além disso, P_n é uma órbita periódica de R_{α_0} e de R_{α_1} , ou seja, $P_n = x_{\alpha_i}$ para $i = 0, 1$. Denotarmos seus períodos minimais T_{α_0} se é vista como órbita α_0 -Reeb e T_{α_1} se é vista como órbita α_1 -Reeb. Também denotarmos por $\gamma_0(s) = x_{\alpha_0}(T_{\alpha_0}s)$ e $\gamma_1(s) = x_{\alpha_1}(T_{\alpha_1}s)$.

Consideramos (U_0, Φ_0) e (U_1, Φ_1) os tubos de Martinet para a órbita P_n associada as formas de contato α_0 e α_1 , respectivamente; ou seja, para $j = 0, 1$ temos uma vizinhança tubular U_j de P_n e um difeomorfismo $\Phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_j^*(F_j(d\theta + xdy)) &= \alpha_j, \\ \Phi_j(\gamma_j(s)) &= (s, 0, 0), \end{aligned}$$

onde $F_j : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função suave que satisfaz

$$\begin{aligned} F_j|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (0,0)} &= T_{\alpha_j}, \\ dF_j|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (0,0)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Além disso, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma bola centrada no origem e (θ, x, y) são as coordenadas usuais de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, como $\tilde{v}_{i_0}$ é assintótico a P_n^p no furo positivo $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\tilde{v}_{i_1+1}$ é assintótico a

P_n^p no furo negativo $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, então existe $r_0 \gg 1$ tal que

$$\tilde{w}_{i_0}(r, s) \in U_0,$$

e

$$\tilde{w}_{i_1+1}(-r, s) \in U_1 \quad \text{para } r \geq r_0.$$

Assim,

$$\Phi_0 \circ \tilde{w}_{i_0}(r, s) = (\theta_0(r, s), x_0(r, s), y_0(r, s)),$$

$$\Phi_1 \circ \tilde{w}_{i_1+1}(-r, s) = (\theta_1(-r, s), x_1(-r, s), y_1(-r, s)),$$

estão definidas para $r \geq r_0$.

Assim, pelo teorema de comportamento assintótico 2.3.8 temos que as funções $\theta_0(r, s)$ e $\theta_1(-r, s)$ convergem uniformemente em s quando $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \theta_0(r, s) &\rightarrow ps + s_0 \\ \theta_1(-r, s) &\rightarrow ps + s_1, \end{aligned}$$

para alguns s_0 e s_1 .

Sejam $\mathcal{A}_n^0$ o operador assintótico associado a P_n^p visto como uma órbita α_0 -Reeb e $\mathcal{A}_n^1$ o operador assintótico associado a P_n^p vista como uma órbita α_1 -Reeb. Pelo comportamento dos operadores assintóticos temos que existem valores próprios $\kappa_n^0 \in \sigma(\mathcal{A}_n^0) \cap (-\infty, 0)$ e $\kappa_n^1 \in \sigma(\mathcal{A}_n^1) \cap (0, \infty)$ com seções próprias

$$s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto v_0(s) \in \xi_0|_{\gamma_0(ps+s_0)},$$

e

$$s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto v_1(s) \in \xi_1|_{\gamma_1(ps+s_1)},$$

nos espaços próprios de κ_n^0 e de κ_n^1 , respectivamente. Além disso, para $r \geq r_0$ tem-se

$$\begin{aligned} (x_0(r, s), y_0(r, s)) &= e^{\int_{r_0}^r \zeta_0(t) dt} [w_0(s) + R_0(r, s)], \\ (x_1(-r, s), y_1(-r, s)) &= e^{\int_{r_0}^{-r} \zeta_1(t) dt} [w_1(s) + R_1(-r, s)], \end{aligned}$$

onde $w_j(s) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é a representação de $v_j(s)$ induzido por Φ_j respeito ao referencial simplético em P_n dado por 1.2.10, para $j \in \{0, 1\}$. Além disso, $\zeta_j((-1)^j r) \rightarrow \kappa_n^j$ e $|R_j((-1)^j r, s)| \rightarrow 0$, quando $r \rightarrow \infty$.

Se segue,

$$\tilde{w}_{i_0}(r, s) = \Phi_0^{-1}(\theta_0(r, s), x_0(r, s), y_0(r, s)) \longrightarrow \gamma_0(ps + s_0)$$

e

$$\tilde{w}_{i_1+1}(-r, s) = \Phi_1^{-1}(\theta_1(-r, s), x_1(-r, s), y_1(-r, s)) \longrightarrow \gamma_1(ps + s_1)$$

uniformemente em s quando $r \rightarrow +\infty$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $r_1 \gg 1$ tal que as curvas

$$s \mapsto \tilde{w}_{i_0}(r_1, s) \quad e \quad v_0^\varepsilon(s) = \exp_{\mathcal{H}(ps+s_0)}(\varepsilon v_0(s))$$

sejam homotópicas em $U_0 \setminus P_n \subset (S^1 \times S^2) \setminus L$, e

$$s \mapsto \tilde{w}_{i_1+1}(-r_1, s) \quad e \quad \eta_1^\varepsilon(s) = \exp_{\mathcal{H}(ps+s_1)}(\varepsilon v_1(s))$$

sejam homotópicas em $U_1 \setminus P_n \subset (S^1 \times S^2) \setminus L$.

Devido que v_0^ε e v_1^ε são curvas muito próximas a P_n^p temos que $\text{wind}_0(v_0^\varepsilon) = p = \text{wind}_0(v_1^\varepsilon)$, com $p > 0$. Além disso,

$$\text{wind}_1(v_0^\varepsilon) = \text{wind}_1(\tilde{w}_{i_0}(r_1, s)) = \text{wind}_1(P_-) = q$$

e

$$\text{wind}_1(v_1^\varepsilon) = \text{wind}_1(\tilde{w}_{i_1+1}(-r_1, s)) = \text{wind}_1(P_-) = q.$$

Segue-se do lema 3.3.1, para o caso $i = 0$

$$\begin{aligned} i_0 < k_1 \quad \text{ou} \quad k_2 \leq i_0 &\longrightarrow q \leq p\rho_0(f_\pm), \\ k_1 \leq i_0 < k_2 &\longrightarrow q \leq p\rho_0(f), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i_1 < k_1 \quad \text{ou} \quad k_2 \leq i_1 &\longrightarrow q \geq p\rho_0(f_\pm), \\ k_1 \leq i_1 < k_2 &\longrightarrow q \geq p\rho_0(f). \end{aligned}$$

Ou seja, temos que

$$q \leq p\rho_0(h) \quad \text{ou} \quad q \leq p\rho_0(f_\pm)$$

e

$$q \geq p\rho_0(h) \quad \text{ou} \quad q \geq p\rho_0(f_\pm).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq p\rho_0(f) - q &\quad e \quad 0 \geq p\rho_0(f) - q, & \text{ou} \\ 0 \leq p\rho_0(f) - q &\quad e \quad 0 \geq p\rho_0(f_\pm) - q, & \text{ou} \\ 0 \leq p\rho_0(f_\pm) - q &\quad e \quad 0 \geq p\rho_0(f) - q, & \text{ou} \\ 0 \leq p\rho_0(f_\pm) - q &\quad e \quad 0 \geq p\rho_0(f_\pm) - q. \end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos $(p\rho_0(f) - q)(p\rho_0(f_\pm) - q) \leq 0$, para $p > 0$.

De maneira similar para o caso $P_{i_0} \subset P_s$, temos $p < 0$ e $(p\rho_1(f) + q)(p\rho_1(f_\pm) + q) \leq 0$.

Observação 3.3.3. *Pela condição (8) existe uma sequência $r_j \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\tilde{u}_{n_j}(r_j, s) \rightarrow \tilde{w}_{i_0}(r_1, s),$$

quando $j \rightarrow +\infty$. Então, para j suficientemente grande temos

$$\text{wind}_0(s \mapsto \tilde{u}_{n_j}(r_j, s)) = p$$

e

$$\text{wind}_1(s \mapsto \tilde{u}_{n_j}(r_j, s)) = q.$$

A seguinte proposição resume o anterior.

Proposição 3.3.4. *Sejam $p = \text{wind}_0(P_i)$ e $q = \text{wind}_1(P_i)$. Suponha $P_i \cap L \neq \emptyset$, para algum $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Então,*

$$\text{Se } P_i \subset P_n \implies p > 0 \quad e \quad (p\rho_0(f) - q)(p\rho_0(f_\pm) - q) \leq 0,$$

ou

$$\text{Se } P_i \subset P_s \implies p < 0 \quad e \quad (p\rho_1(f) + q)(p\rho_1(f_\pm) + q) \leq 0.$$

Aqui, denotamos os números de rotação nas respectivas componentes do link principal $L = P_n \cup P_s$ associada à forma de contato $h\lambda_0$ por $\rho_0(h) := \rho(P_n, h\lambda_0)$ e $\rho_1(h) := \rho(P_s, h\lambda_0)$.

Observação 3.3.5. *Dado que o par (p, q) de inteiros relativamente primos satisfazem (3.0.1) isso implica*

$$(1, \rho_0(f_\pm)) < (p, q) < (-1, \rho_1(f_\pm)).$$

Equivalentemente,

$$\rho_0(f) > \rho_0(f_\pm) \quad \rho_1(f) > \rho_1(f_\pm).$$

Como consequência da proposição anterior temos o seguinte lema de existência implicada de órbitas.^{3.3.1}

Lema 3.3.6 (Lema de existência implicada). *Sejam $\lambda_\pm := f_\pm \lambda_0$, $\lambda := f \lambda_0$ formas de contato não-degeneradas de $S^1 \times S^2$. Considere as sequências R_n e $\tilde{\mu}_n$ satisfazendo a equação (3.3.1) onde $\tilde{\mu}_n = (\tilde{a}_n, \tilde{u}_n)$ são curvas J_{R_n} -holomorfas de energia uniformemente limitada e assintóticas às órbitas $P_+ \in \mathcal{P}(\lambda_+)$ e $P_- \in \mathcal{P}(\lambda_-)$ em $S^1 \times S^2 \setminus L$ nos furos $\{+\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\{-\infty\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, respectivamente. Suponhamos (p, q) um par de inteiros relativamente primos dados por*

$$p = \text{wind}_0(s \mapsto \tilde{u}_n(r, s)) \quad e \quad q = \text{wind}_1(s \mapsto \tilde{u}_n(r, s)),$$

para todo r e n . Se o par (p, q) satisfaz (3.0.1) então existe $\gamma \in \mathcal{P}(\lambda)$ em $(S^1 \times S^2) \setminus L$ tal que

$$\text{wind}_0(\gamma) = p \quad e \quad \text{wind}_1(\gamma) = q.$$

Demonstração. Pela proposição acima temos que cada P_i está em $S^1 \times S^2 \setminus L$, para $i \in \{1, \dots, m-1\}$, devido que . Assim, cada P_i é homotópico a P_- no complementar de L . Portanto, $\gamma = P_{k_1} \in \mathcal{P}(\lambda)$ é uma órbita tal que $\text{wind}_0(\gamma) = \text{wind}_0(P_-) = p$ e $\text{wind}_1(\gamma) = \text{wind}_1(P_-) = q$. $\square$

^{3.3.1}Se entende por existência implicada de órbitas, como aquela maneira que nós podemos deduzir a existência de outras órbitas fechadas de um campo de Reeb a partir de conhecer um certo conjunto de órbitas de Reeb fechadas.

Note-se que o lema anterior é o teorema principal 2 para o caso que $f\lambda_0$ é não-degenerada. Segue-se também do lema anterior que existe uma órbita periódica na classe de homotopia $(0, 1)$, a qual também está contida no único toro invariante T_{η_0} tal que $g'_0(\eta_0) = 0$ e $f'_0(\eta_0) < 0$.

3.4 Demonstração

Nesta seção vamos a demonstrar o teorema 2, onde fixamos λ_0 a única 1-forma de contato tipo *tight* em $S^1 \times S^2$ dada em 1.2.5 ou 1.2.7. Como foi dito nosso resultado de existência implicada de órbitas e reeb é dado para formas de contato que induz a estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$ tipo *tight*.

3.4.1 Caso não-degenerado

Pela observação 3.1.7, podemos supor que $\lambda = f\lambda_0$ é não-degenerada, onde $f \in \mathcal{F}$ e $L = P_n \cup P_s$ é o link principal. Observe que o lema 3.3.6 é a versão do resultado neste caso. Portanto, vamos usar o que foi feito durante este capítulo para provar o teorema 2 não caso não degenerado.

Dado $f\lambda_0$ como no enunciado do teorema 2. Escolhemos o modelo $\lambda_1 = \lambda_{f_1, g_1}$ uma forma de contato Morse-Bott tal que $\rho_n - \rho(P_n, \lambda_1) > 0$ e $\rho_s - \rho(P_s, \lambda_1) > 0$ sejam suficientemente pequenos. Aqui, $\rho(P_n, \lambda_1), \rho(P_s, \lambda_1) \notin \mathbb{Q}$ e o par de funções (f_1, g_1) satisfazem (i), (ii) e (iii).

Consideramos a classe de homotopia $\beta = (p, q)$, onde o par (p, q) de inteiros é relativamente primos, satisfazendo (3.0.1). Portanto, pela condição (iii) temos que existe um único toro racional invariante T_η , $\eta \in (-1, 1)$, tal que órbitas periódica contida em T_η representa a classe de homotopia β . Neste toro, a órbita tem período primo $\tau_\eta : - = 2\pi|pf_1(\eta) + qg_1(\eta)|$. Se segue

$$(1, \rho(P_n, \lambda_1)) < (p, q) < (-1, \rho(P_s, \lambda_1)).$$

Depois, escolhemos $S > \tau_\eta$ e consideramos o modelo perturbado de λ_1 , ou seja, definimos a forma de contato $\lambda_\varepsilon = f_\varepsilon \lambda_1$, onde $f_\varepsilon = 1 + \varepsilon g_s$ dado por (3.2.6), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Lembramos, que f_ε denota a extensão de aplicações definidas em vizinhanças dos toros invariantes de λ_1 com órbitas de ação limitada por uma constante $S > 0$, como foi feito na seção de modelo perturbado.

Além disso, na demonstração da proposição 3.2.5 consideramos a estrutura quase-complexa regular $\tilde{J}_\varepsilon \in \mathcal{J}_{reg}(\lambda_\varepsilon)$ obtida de alguma $J_\varepsilon \in \mathcal{J}(\xi_1)$ estrutura complexa $d\lambda_\varepsilon$ -compatível sobre $\xi_1 = \ker \lambda_1$. Ainda mais, pela proposição 3.2.4 temos que ela homologia de contato para o modelo perturbado está definida e é não trivial. A qual é isomorfa à homologia de S^1 sob o $\mathbb{Z}_2$, (ver proposição 2.4).

Até este ponto, não temos mexido sobre a forma $f\lambda_0$. A partir de agora encaixamos ela entre o modelo perturbado λ_ε e $c\lambda_\varepsilon$, para algum $0 < c < 1$. Ou seja, assumimos $c\lambda_\varepsilon < f\lambda_0 < \lambda_\varepsilon$. Pela observação 3.1.7 temos um sandwich para f , isto é, existe uma função $f_+ \in \mathcal{F}$ tal que $cf_+ < f < f_+$, definindo um cobordismo. Estudando a homologia de contato para as formas $c\lambda_\varepsilon$ e λ_ε , se define uma aplicação de grau 0 não-nula entre complexos de cadeia $(C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(\lambda_\varepsilon), \partial_k(cf_+\lambda_0, J_+))$ e $(C_k^{\leq \tau_\eta, \beta}(c\lambda_\varepsilon), \partial_k(cf_+\lambda_0, J_-))$, para algumas estruturas quase-complexas $\tilde{J}_- \in \mathcal{J}(cf_+\lambda_0)$ e $\tilde{J}_+ \in \mathcal{J}(f_+\lambda_0)$. Lembremos que os complexos de cadeia são gerados pela mesma órbita e seus aplicações de grau -1 contam as mesmas curvas pseudo-holomorfas.

Seja $\tilde{J}_0 \in \mathcal{J}(\lambda_0)$. Consideramos a sequência $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $R_n \rightarrow 0+$ a estrutura quase-complexa associada a $J_\varepsilon \in \mathcal{J}(\xi_0)$. Definimos as estruturas quase-complexas $\tilde{J}_R = \tilde{J}_1 \circ_R \tilde{J}_2$, onde $\tilde{J}_1 \in \mathcal{J}(\tilde{J}, \tilde{J}_+ :$

L), $\tilde{J}_2 \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$. Lembramos que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_R$ é bi-holomorfa para alguma $\tilde{J}_R \in \mathcal{J}(\tilde{J}_-, \tilde{J}_+ : L)$.

Usando o lema 3.2.13, obtemos uma sequência de curvas $\tilde{J}_{R_n}$ -holomorfa de energia finita assintótico a órbitas em $\mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(f_+ \lambda_0)$ e $\mathcal{P}^{\leq \tau_\eta, \beta}(cf_+ \lambda_0)$ nos furos positivos e negativos, respectivamente, os quais não intersesta L . Para finalizar, usamos a compacidade SFT para deduzir o teorema de existência implicada 3.3.6. Ou seja, encontramos uma órbita λ -Reeb $\gamma_{p,q}$ tal que $\text{wind}_0(\gamma_{p,q}) = p$ e $\text{wind}_1(\gamma_{p,q}) = q$. Segue-se o teorema 2 no caso não-degenerada.

3.4.2 Caso degenerado

Agora, vamos a demonstrar o teorema 2 no caso degenerado. Para isso, usamos o seguinte teorema de densidade.

Teorema 3.4.1. [HWZ98, Proposição 6.1] *Seja M uma 3-variedade fechada munida de uma forma de contato λ . Então o conjunto $\mathcal{O}_\lambda$ das funções suaves $f : M \rightarrow (0, \infty)$ tal que a forma de contato $f\lambda$ seja não-degenerada é denso em $C^\infty(M, (0, \infty))$ na C^∞ -topologia usual.*

Usando o teorema acima, se deduz o seguinte corolário.

Corolário 3.4.2. *Seja $\lambda = h\lambda_0$ com $h \in \mathcal{F}$. Então existe uma sequência $h_j \in \mathcal{O}_{\lambda_0} \cap \mathcal{F}$ tal que $h_j \rightarrow h$ em $C^\infty(S^1 \times S^2, (0, \infty))$. Além disso, para $i = 0, 1$ temos $\rho_i(h_j) \rightarrow \rho_i(h)$ quando $j \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Usando a densidade de $\mathcal{O}_{\lambda_0}$ (ver proposição 3.4.1) existe $g_1 \in \mathcal{O}_{\lambda_0}$ muito próxima de h , tal que $g_1\lambda_0$ é uma forma de contato não-degenerada, mas g_1 não precisa pertencer a $\mathcal{F}$. Para solucionar isso, seguimos a estratégia vista na seção link em $S^1 \times S^2$. Como se segue: note-se que o link principal $L = P_n \cup P_s$ pode ser obtido perturbando órbitas $g_1\lambda_0$ -Reeb $L' = P'_n \cup P'_s$ de maneira que P_n está próximo de P'_n e P_s está próximo de P'_s . Portanto, existe uma isotopia contato suave entre $(S^1 \times S^2, \xi_0 = \ker g_1\lambda_0)$ e $(S^1 \times S^2, \xi_0 = \ker \lambda_0)$, devido que o link principal é não-degenerado ou pela unicidade da estrutura de contato *tight* em $S^1 \times S^2$ (ver 1.2.25). Usando o teorema 3.1.5 obtemos um contactomorfismo Φ tal que $\Phi(L') = L$. Consideramos a forma de contato $\lambda'_1 = (\Phi^{-1})^*(g_1\lambda_0)$ a qual tem como link principal L . Se segue que $\lambda'_1 = f_1\lambda_0$ onde $f_1 \in \mathcal{F}$ e $f_1\lambda_0$ é não-degenerada, ou seja, $f_1 \in \mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{F}$. Além disso, como f_1 e h são muito próximos então $\rho_i(f_1)$ está muito próximo $\rho_i(h)$, para $i = 0, 1$. Continuando com esse processo, se constrói uma sequência $\{f_k\} \subset \mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{F}$ que converge a h tal que $\rho_i(f_k) \rightarrow \rho_i(h)$, para $i = 0, 1$. □

Escolhemos uma sequência $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ como no corolário 3.4.2. Dado o par de inteiros $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ relativamente primos satisfazendo

$$(1, \rho_0(f)) < (p, q) < (-1, \rho_1(f)),$$

existe j_0 suficientemente grande tal que para $j \geq j_0$ temos

$$(1, \rho_0(f_j)) < (p, q) < (-1, \rho_1(f_j)),$$

devido que $\rho_i(f_j) \rightarrow \rho_i(f)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Usando o teorema 2 acima, demonstrado para o caso não-degenerado, temos para $j \geq j_0$ que existem órbita $\gamma_{p,q}^j$ $f_j\lambda_0$ –Reeb tais que

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}^j) = p \quad \text{wind}_1(\gamma_{p,q}^j) = q, \quad \forall j \geq j_0.$$

Como $S^1 \times S^2$ é compacto, existe uma subsequência de $\{\gamma_{p,q}^j\}_{j \geq j_0}$ tal que converge a $\gamma_{p,q}$ em $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, S^1 \times S^2)$, onde $\gamma_{p,q}$ é uma órbita de $f\lambda_0$ –Reeb tal que

$$\text{wind}_0(\gamma_{p,q}^j) = p \quad \text{wind}_1(\gamma_{p,q}^j) = q.$$

Em efeito, as aplicações wind_0 e wind_1 são funções contínuas no espaço discreto $\mathbb{Z}$, ou seja elas são constantes para a subsequencia de órbitas dadas anteriormente. Ainda mais, isso implica que a imagem de $\gamma_{p,q}$ não está contida em L , devido que (p, q) satisfaz

$$(1, \rho_0(f)) < (p, q) < (-1, \rho_1(f)).$$

Isso conclui a demonstração do teorema principal 2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [BEH⁺03] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geom. Topol.*, 7:799–888, 2003. [34](#), [35](#), [55](#), [74](#)
- [Ben83] D. Bennequin. *Entrelacements et equations de Pfaff*, volume 107-108 of *Astérisque*. Astérisque, 1983. [1](#)
- [Bou02] F. Bourgeois. *A Morse-Bott approach to contact homology*. Tese de Doutorado, Stanford University, 2002. Thesis (Ph.D.)–Stanford University. [7](#), [50](#)
- [Dra04] D. L. Dragnev. Fredholm theory and transversality for noncompact pseudoholomorphic maps in symplectizations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57(6):726–763, 2004. [36](#)
- [Eli89] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 98(3):623–637, 1989. [1](#)
- [Eli90] Y. Eliashberg. Filling by holomorphic discs and its applications. Em *Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, volume 151 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, páginas 45–67. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990. [9](#)
- [Eli92] Y. Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42(1-2):165–192, 1992. [8](#), [9](#)
- [Gei08] H. Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. [5](#), [8](#), [16](#), [28](#), [29](#), [47](#)
- [Gir00] E. Giroux. Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces. *Invent. Math.*, 141(3):615–689, 2000. [1](#)
- [GLS06] P. Ghiggini, P. Lisca e A. I. Stipsicz. Classification of tight contact structures on small seifert 3-manifolds with $e_0 \geq 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(3):909–916, 2006. [1](#)
- [Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2):307–347, 1985. [1](#), [9](#), [31](#)
- [HMSa15] U. Hryniewicz, Al. Momin e P. A. S. Salomão. A Poincaré-Birkhoff theorem for tight Reeb flows on S^3 . *Invent. Math.*, 199(2):333–422, 2015. [v](#), [vii](#), [2](#), [20](#), [21](#), [31](#), [33](#), [37](#), [42](#), [43](#)
- [Hof93] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Invent. Math.*, 114(3):515–563, 1993. [1](#), [31](#), [33](#)

- [Hon00a] K. Honda. On the classification of tight contact structures I. *Geom. Topol.*, 4:309–368, 2000. [1](#)
- [Hon00b] K. Honda. On the classification of tight contact structures II. *J. Differential Geom.*, 55(1):83–143, 2000. [1](#)
- [HSa13] U. L. Hryniewicz e P. A. S. Salomão. *Introdução à geometria Finsler*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2013. 29Spo Colóquio Brasileiro de Matemática. [29th Brazilian Mathematics Colloquium]. [5](#), [6](#), [8](#), [18](#), [19](#)
- [HWZ95] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations II: Embedding controls and algebraic invariants. *Geom. Funct. Anal.*, 5(2):270–328, 1995. [1](#), [7](#), [20](#), [21](#), [31](#), [33](#), [37](#), [63](#), [64](#)
- [HWZ96a] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisation IV: Asymptotics with degeneracies*, volume 8 of *Publ. Newton Inst.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996. [31](#)
- [HWZ96b] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations I: Asymptotics. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 13(3):337–379, 1996. [1](#), [35](#), [40](#)
- [HWZ98] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 148(1):197–289, 1998. [1](#), [31](#), [81](#)
- [HWZ99] H. Hofer, K. Wysocki e E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations III: Fredholm theory. Em *Topics in nonlinear analysis*, volume 35 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, páginas 381–475. Birkhäuser, Basel, 1999. [31](#)
- [Lut77] R. Lutz. Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 27(3):ix, 1–15, 1977. [1](#)
- [Mom11] Al. Momin. Contact homology of orbit complements and implied existence. *J. Mod. Dyn.*, 5(3):409–472, 2011. [1](#)
- [MS98] D. McDuff e D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edição, 1998. [5](#), [6](#), [19](#)
- [MS04] D. McDuff e D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. [32](#), [43](#)
- [Sie11] R. Siefring. Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves. *Geom. Topol.*, 15(4):2351–2457, 2011. [38](#), [39](#), [50](#), [62](#), [67](#)
- [SZ92] D. Salamon e E. Zehnder. Morse theory for periodic solutions of hamiltonian systems and the maslov index. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(10):1303–1360, 1992. [19](#)
- [Tau02] C. H. Taubes. A compendium of pseudoholomorphic beasts in $\mathbb{R} \times (S^1 \times S^2)$. *Geom. Topol.*, 6:657–814, 2002. [11](#)
- [Wen10] C. Wendl. Automatic transversality and orbifolds of punctured holomorphic curves in dimension four. *Comment. Math. Helv.*, 85(2):347–407, 2010. [36](#)