Subvariedades Lagrangeanas Mínimas e Autossimilares no Espaço Paracomplexo

Maikel Antonio Samuays

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Ciências

Programa: Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e da FAPESP, processo nº 2012/02724-3.

São Paulo, julho de 2015

Subvariedades Lagrangeanas Mínimas e Autossimilares no Espaço Paracomplexo

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 23/07/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^{a}. Dr^{a}. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito - UFABC
- Prof. Dr. Henri Nicolas Guillaume Anciaux - ULB (Bélgica)
- Prof^{a}. Dr^{a}. Fernanda Ester Camillo Camargo - UFCE
- Prof. Dr. Luiz Amancio Machado de Souza Junior - UNIRIO

Aos meus pais
Vera e Marco
Samuays.

Agradecimentos

Sinceramente, depois de tanto aprendizado, tantas emoções, tantas superações, tantas conquistas... é difícil traduzir em palavras toda gratidão aos anjos que passaram pela minha vida durante essa longa caminhada, que vai desde a preparação para o vestibular, até o final deste doutorado em Matemática.

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus queridos amigos, professores Henri e Rosa. O professor Henri foi quem propôs a temática desta tese e quem, de fato, me orientou nos 3 primeiros anos do doutorado. Sua paciência, seu rigor e sua destreza com Matemática foram fundamentais no desenvolvimento desta tese. Mesmo após não tendo obrigações formais em me orientar, continuou ajudando e supervisionando o trabalho que, nestes últimos meses, continuei a desenvolver com a minha atual orientadora Rosa. Professor Henri, nunca esquecerei o momento em que sai da porta de desembarque, no aeroporto de Bruxelas, e pude contar com a sua ajuda. Mais uma vez, muito obrigado! Professora Rosa, agradeço a toda dedicação e todo o aprendizado que tive com você, que considero, mesmo sem pedir permissão, a minha mãe paulistana. Digo mãe porque, fora o carinho, paciência e estusiasmo, me acolheu e se responsabilizou por esse trabalho. Aliás, agradeço por sua dedicação não apenas durante o desenvolvimento da tese, mas também durante todo o período do doutorado. Rosa, seu nome dado por uma flor, reflete a pessoa maravilhosa que é!

Falando em grandes mestres, não posso esquecer de uma pessoa fundamental para a minha carreira acadêmica: meu amigo Alexandre Kirilov. Rapaz, aquela conversa que tivemos na feira de profissões, abriu as portas para o sonho de me tornar um pesquisador em Matemática! Obrigado por toda a sua motivação, interesse em me ajudar e seu rigor matemático. Jamais esquecerei suas palavras, seus conselhos e todo o aprendizado que tive com o professor. Estendo os agradecimentos aos demais professores do Departamento de Matemática da UFPR e do IME-USP, que contribuiram para a minha formação em Matemática.

Agradeço aos meus nobres pais, Vera e Marcos, por todo o apoio, carinho e paciência. Mãe Vera, impossível esquecer do dia em que fomos no centro de Curitiba para receber o resultado do vestibular. Desde então, sempre tive seu apoio e suporte. Todas as vitórias que obtive, dedico a você!

Bazinha, minha querida irmã Mariza, sua garra e ajuda foram de vital importância para mim. Quando penso na sua bela família, formada também pelo Juliano, pela Isabelle e, mais recentemente, pelo Léo, me dá forças e me resgata a vontade de lutar, principalmente nos momentos mais difíceis. Vocês são demais!

Agradeço também aos meus grandes amigos: Tanise, Ana Paula, Glauce, Eliane, Adílson, Marcelo, German, Oscar, Rose, Ariadne, Bruno, Anouch, Cristian, Gislaine, Tonton, Daniel. Considero vocês muito mais que especiais e fundamentais para eu chegar até aqui! Saibam que guardo vocês dentro do meu coração! Em particular, agradeço ao Marcelo pelas inúmeras vezes em que me ajudou

com o programa Tex, que insistia em dar problemas. Além disso, obrigado Bruno e Tonton, pela ajuda com o software Maple.

À cantora musa das minhas equações, Ana Carolina. Suas composições e sua incomparável voz me acompanharam desde o momento em que eu estudava para passar na prova do mestrado em Matemática da UFPR quando, na ocasião, estudava com minha querida amiga Paulinha. Maria de Lourdes, obrigado por todas as conversas, ensinamentos e apoio psicológico. E voltando a falar em Ana, obrigado professora Ana Sílvia Ferreira. Sua sensibilidade e dedicação comigo, durante a difícil época da proficiência em língua inglesa, permitiram que eu continuasse no curso.

Para fechar com chave de ouro, agradeço ao meu grande amigo Vinícius, também chamado de Tio Vini. Impossível descrever aqui o quanto te agradeço e o quanto te admiro. Sua sensibilidade, seu conhecimento, sua dedicação e carinho foram vitais para minha permanência neste doutorado em solo USPiano. Tio Vini, você é o cara! Muito obrigado por tudo!

Agradeço ao apoio financeiro inicial da CAPES e, posteriormente, da FAPESP, permitindo que eu me dedicasse integralmente a essa tese. Além da bolsa, seus recursos permitiram eu ter contato com pesquisadores nacionais e internacionais, em terras brasileiras e belgas.

Enfim, agradeço a todos que, de alguma forma, colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho!

Resumo

SAMUAYS, M. A. **Subvariedades Lagrangeanas Mínimas e Autossimilares no Espaço Paracomplexo**. 2015. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Neste trabalho estudamos as subvariedades lagrangeanas mínimas e autossimilares do espaço paracomplexo $\mathbb{D}^n$. Começamos definindo o conceito de variedade para-Kähler e, como exemplo, descrevemos o espaço projetivo paracomplexo. Em seguida, estudamos as subvariedades paracomplexas e lagrangeanas. Após mostrarmos que toda subvariedade paracomplexa não-degenerada é mínima, dedicamos a atenção ao estudo das subvariedades lagrangeanas, restringindo-nos ao ambiente $\mathbb{D}^n$. Em particular, estudamos as lagrangeanas que são invariantes sob a ação canônica do grupo $SO(n)$, e as superfícies de Castro-Chen. Em ambos os casos, analisamos a minimalidade e a autossimilaridade das mesmas.

Palavras-chave: espaço paracomplexo, subvariedades lagrangeanas, subvariedades autossimilares.

Abstract

SAMUAYS, M. A. **Minimal and Self-similar Lagrangian Submanifolds in the Para-complex Space**. 2015. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this work, we study minimal and self-similar Lagrangian submanifolds in the para-complex space $\mathbb{D}^n$. Firstly, we define the concept of para-Kähler manifold and, to exemplify, we describe the para-complex projective space. Then, we study para-complex submanifolds and Lagrangian submanifolds. After proving that every non-degenerate para-complex submanifold is minimal, we pay attention to Lagrangian submanifolds, restricting us to the case of $\mathbb{D}^n$. In particular, we study Lagrangian submanifolds which are invariant by the canonical $SO(n)$-action of $\mathbb{D}^n$, and Castro-Chen's surfaces. In both cases, we analyse the minimality and self-similarity.

Keywords: para-complex space, Lagrangian submanifolds, self-similar submanifolds.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 O conjunto dos números paracomplexos 5

1.2 O espaço paracomplexo 7

1.3 Geometria pseudo-riemanniana 10

1.3.1 Estruturas intrínsecas e extrínsecas às subvariedades 12

1.3.2 Subvariedades unidimensionais: Curvas 14

1.3.3 Superfícies pseudo-riemannianas 16

1.4 Variedades para-Kähler 17

1.5 Espaço projetivo paracomplexo 29

2 Subvariedades paracomplexas e lagrangeanas no espaço paracomplexo **43**

2.1 Subvariedades paracomplexas 43

2.2 Subvariedades lagrangeanas 47

2.2.1 Definição de ângulo lagrangeano 49

2.2.2 Subvariedades lagrangeanas $SO(n)$-equivariantes 53

3 Subvariedades lagrangeanas mínimas **57**

3.1 Caracterização das superfícies lagrangeanas mínimas indefinidas 57

3.2 Gráficos lagrangeanos mínimos 59

3.3 Subvariedades lagrangeanas mínimas $SO(n)$-equivariantes 61

3.4 Fibrados normais 63

4 Subvariedades lagrangeanas autossimilares **71**

4.1 O fluxo da curvatura média e a equação autossimilar 71

4.2 Subvariedades lagrangeanas autossimilares equivariantes 72

4.2.1 Análise da equação (4.3) 77

4.3 Superfícies de Castro-Chen 86

Referências Bibliográficas **111**

Introdução

Introduzidas por Libermann em 1952 (ver [18]), as *estruturas quase-paracomplexas* são definidas com base na definição de *estruturas quase-complexas*, com algumas particularidades: dada uma variedade diferenciável M, considere um operador J sobre o fibrado tangente tal que $J^2 = \epsilon \mathrm{Id}$, com $\epsilon = \pm 1$. Se $\epsilon = -1$, o operador J é chamado de *estrutura quase-complexa*. No entanto, se $\epsilon = 1$, o operador J é conhecido na literatura como sendo uma *estrutura quase-produto*. Além disso, se os autovalores ± 1 de J possuem a mesma multiplicidade, tal J recebe o nome de *estrutura quase-paracomplexa*. A inclusão desta exigência sobre os autovalores do operador J é para garantir que uma variedade munida de tal estrutura sempre tenha dimensão par, como o que ocorre com as *variedades quase-complexas*. Neste último caso, essa informação é uma consequência imediata da definição de J tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Um dos principais atrativos para o estudo da geometria paracomplexa, é que este é um ramo mais recente da Geometria Diferencial, com muitos resultados interessantes a serem provados, como é relatado em [11]. Além disso, a geometria paracomplexa vem ganhando espaço pelas aplicações nas mais diversas áreas, como na mecânica [21], na chronogeometria [20], na geometria elíptica [12] e nas formas espaciais pseudo-riemannianas [13].

Como estudamos geometria paracomplexa motivados pela geometria complexa, num primeiro instante somos levados a acreditar que ambas as geometrias possuem mais analogias do que diferenças. No entanto, conforme fomos aprimorando o estudo da geometria paracomplexa, logo percebemos que existem mais diferenças do que havíamos suspeitado no início.

Outro fato curioso à respeito da geometria paracomplexa é a denominação desta área de estudo. Talvez por se tratar de um tópico recente, e em crescente expansão, são muitas as denominações para o que chamamos, neste trabalho, de números paracomplexos. É comum nos referirmos à estes números como sendo números duplos, números perplexos e até mesmo números lorentzianos.

Como dissemos anteriormente, Libermann ([18]), em 1952, foi o primeiro a definir formalmente os conceitos que aqui utilizamos, tais como estruturas paracomplexas, variedades paracomplexas e variedades para-Kähler (ver também [17]). Pela quantidade de definições e teoremas, os trabalhos de Libermann constituem a principal referência sobre a geometria paracomplexa. No entanto, antes mesmo do ano de 1952, já existiam alguns indícios de trabalhos envolvendo os números paracomplexos. Em 1845, *J. T. Graves*, em seu trabalho [14], introduziu uma generalização dos números complexos, onde considerou expressões do tipo $xi + yj$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e os símbolos i e j satisfaziam certas condições. Sua construção incluiu os números complexos (quando $i = 1$ e $j^2 = -1$) e também os números paracomplexos (se $i = 1$ e $j^2 = 1$). Graves considerou tais números para resolver algumas questões à respeito da teoria de números, porém ele não deu qualquer outra aplicação específica para os números paracomplexos. Após Graves, podemos encontrar alguns trabalhos onde os autores se depararam com expressões do tipo $j^2 = 1$, tais como *W. K. Clifford*, por volta de 1873, *A. P. Kotelnikov*, em 1895, e *E. Study*, em 1903. Em 1938, *Octav Mayer* introduziu o conceito de *geometria biaxial hiperbólica*, onde considerou o grupo das colineações que preservam duas linhas invariantes fixadas, atuando sobre o 3-espaço projetivo real $P_3(\mathbb{R})$. Tais linhas invariantes têm origem em dois planos suplementares no $\mathbb{R}^4$. Se considerarmos tais planos como sendo o autoespaço relacionado aos autovalores de uma estrutura quase-produto, obtemos uma estrutura paracomplexa sobre $\mathbb{R}^4$.

Com o objetivo de estender os aspectos algébricos do trabalho de Mayer, *B. A. Rozenfeld* definiu explicitamente a geometria paracomplexa nos seus trabalhos [22] e [23]. Aliás, o livro [23] é um verdadeiro tratado sobre geometria paracomplexa, segundo [11]. Em [25], foi realizado um

estudo comparativo entre estruturas Kähler e para-Kähler, utilizando-se os números complexos e paracomplexos.

Dada uma variedade quase-paracomplexa (M, J), podemos definir, a partir dos autovalores de J, as distribuições $\ker(J \pm \mathrm{Id})$, sendo Id a aplicação identidade no fibrado tangente. Uma pergunta natural que surge é quando tais distribuições são distribuições integráveis. Quando isso de fato ocorrer, a estrutura quase-paracomplexa passa a ser chamada de *estrutura paracomplexa*. Relacionado a este conceito, temos a definição de *variedade para-Kähler*, que é uma variedade munida, em particular, de uma estrutura paracomplexa. Em [2], os autores descrevem os tensores curvatura e de Ricci de uma variedade para-Kähler e estudam as *estruturas paracomplexas generalizadas*, que foram introduzidas por [27] e também trabalhadas no artigo [24].

A seguir, daremos uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo deste trabalho. Destacaremos alguns resultados obtidos, mencionando motivações e trabalhos relacionados.

No Capítulo 1 começamos com a definição dos números paracomplexos e do *espaço paracomplexo* $\mathbb{D}^n$, que é a principal variedade ambiente deste trabalho. Definimos a métrica pseudo-riemanniana que será considerada neste espaço com base na 2-forma a valores paracomplexos chamada *forma pseudo-hermitiana*, dada por

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_* := \sum_{j=1}^{n} dz_j d\bar{z}_j,$$

onde $z_1, \cdots, z_n$ são as coordenadas em $\mathbb{D}^n$. Descrevemos também alguns tópicos de geometria pseudo-riemanniana e fatos da teoria básica sobre subvariedades pseudo-riemannianas. Definidos os conceitos de estrutura quase-paracomplexa e estrutura paracomplexa, relacionamos esses dois conceitos através de um tensor que denominamos *tensor para-Nijenhuis*. Tal propriedade foi inspirada no clássico *Teorema de Newlander-Nirenberg*, provado em [19], e sua demonstração é mais simples que a demonstração do caso clássico. Em seguida, trabalhando com a definição de variedade para-Kähler, obtemos um resultado que estabelece condições necessárias e suficientes para que uma variedade seja para-Kähler. Nosso resultado estende para o ambiente para-Kähler um teorema (ver Teorema 17, em [5]) que estabelece condições para que uma variedade seja pseudo-Kähler. Para exemplificar, consideramos a principal variedade ambiente desta tese, o espaço $\mathbb{D}^n$, e o *espaço projetivo paracomplexo*, que denotamos por $\mathbb{DP}^n$. Baseados no estudo do *espaço projetivo complexo* (consultar, por exemplo, [5]), percebemos que a contrução do $\mathbb{DP}^n$ é um pouco mais sutil que a do caso complexo, pois não estamos trabalhando com um corpo, uma vez que $\mathbb{D}$ é um anel comutativo com unidade.

No Capítulo 2 estudamos dois tipos especiais de subvariedades imersas numa variedade para-Kähler, a saber, as subvariedades *paracomplexas* e as subvariedades *lagrangeanas*. Tais subvariedades se comportam de forma complementar em relação à estrutura quase-paracomplexa do ambiente para-Kähler. Inspirados pela analogia com as subvariedades complexas, que sempre possuem dimensão par (ver [5] ou [26]), é necessário colocar uma condição adicional na definição de subvariedade paracomplexa para manter a paridade de sua dimensão. Uma consequência de tal definição é que toda subvariedade paracomplexa não-degenerada de uma variedade para-Kähler é mínima. Em relação às *subvariedades lagrangeanas*, nota-se que a análise da minimalidade de tais subvariedades é bem mais delicada. Em [5], é introduzido o conceito de *ângulo lagrangeano* de uma imersão no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ e é obtida uma condição necessária e suficiente para a minimalidade de subvariedades imersas no ambiente complexo. Adaptamos esse resultado para o ambiente paracomplexo $\mathbb{D}^n$, levando-se em consideração as peculiaridades desse ambiente, e encontramos a seguinte relação entre o vetor curvatura média $\vec{H}$ de uma subvariedade lagrangeana não-degenerada e seu ângulo lagrangeano β:

$$n\vec{H} + J\nabla\beta = 0, \tag{1}$$

onde ∇ é o operador gradiente com respeito à métrica induzida e J é a estrutura paracomplexa da variedade ambiente. Define-se ângulo lagrangeano como sendo o *argumento* de um determinado

número paracomplexo, que depende da *forma volume para-holomorfa* $\Omega := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, onde $z_1, \cdots, z_n$ denotam as coordenadas de $\mathbb{D}^n$. Ressaltamos que, diferentemente dos números complexos, não podemos falar em argumento de qualquer número paracomplexo. Além disso, como estudamos subvariedades lagrangeanas imersas em $\mathbb{D}^n$, uma extensão interessante é estudar subvariedades lagrangeanas imersas numa variedade para-Kähler qualquer. No entanto, para esse estudo, temos em mente que nem toda variedade admite tal forma volume para-holomorfa. Fazemos esse estudo em analogia ao que ocorre com as variedades que admitem uma forma volume holomorfa. Em [6] o autor faz essa discussão, e menciona, ainda, que o trabalho de Harvey-Lawson ([15]) foi pioneiro na relação entre forma volume holomorfa Ω e calibração de subvariedades. As variedades que admitem tal n-forma, são conhecidas na literatura como *variedades Calabi-Yau*. Outra constatação importante envolvendo a forma volume para-holomorfa Ω é que obtemos uma relação entre a não-degeneracidade de subvariedades em $\mathbb{D}^n$ e o produto entre Ω e seu conjugado paracomplexo. Frisamos que tal relação é fundamental nessa tese, uma vez que estamos interessados em estudar subvariedades não-degeneradas. Finalizamos o Capítulo 2 com uma caracterização das subvariedades lagrangeanas de $\mathbb{D}^n$ que são *equivariantes* pela ação do grupo de rotações $SO(n)$, em analogia ao que se conhece no caso clássico (ver [4] e [5]). Tal caracterização, juntamente com a equação (1), permite estudar a *minimalidade* de subvariedades lagrangeanas $SO(n)$-equivariantes.

O objetivo do Capítulo 3 é o estudo da minimalidade de diversas subvariedades lagrangeanas: as subvariedades lagrangeanas $SO(n)$-equivariantes, os *gráficos lagrangeanos* e a minimalidade dos fibrados normais. Neste último, obtemos uma estreita relação entre fibrados normais mínimos e o conceito de *subvariedades austeras*, em analogia ao que se conhece no caso clássico, como feito em [15]. Em relação aos gráficos lagrangeanos mínimos, obtivemos um resultado do tipo *Bernstein*. No caso clássico, o *Teorema de Bernstein* afirma que todo gráfico lagrangeano mínimo *completo* é um plano (ver [10]). Destacamos que no caso de superfícies lagrangeanas mínimas de $\mathbb{C}^2$, o fato de ser lagrangeana implica que a métrica induzida é indefinida. Isso permite descrever tais superfícies como o produto de curvas contidas em um certo tipo de plano de $\mathbb{C}^2$ (ver [4]). Adaptamos esse resultado para superfícies imersas no espaço paracomplexo $\mathbb{D}^2$, e neste caso a condição sobre a métrica induzida ser indefinida foi incluída como uma hipótese do resultado.

O Capítulo 4 é destinado ao estudo das *subvariedades autossimilares*. Tais subvariedades surgem como soluções especiais do *fluxo da curvatura média* que preservam a forma da subvariedade em evolução (sob a ação do fluxo), por exemplo, quando a evolução é uma *homotetia*. Tais subvariedades autossimilares X, com vetor curvatura média $\vec{H}$, satisfaz a seguinte equação elíptica não-linear:

$$\vec{H} + \lambda X^{\perp} = 0,$$

onde $X^{\perp}$ denota a projeção do vetor posição X no espaço normal à subvariedade e $\lambda \in \mathbb{R}$. Notamos que se $\lambda = 0$, recaímos no caso de subvariedades mínimas consideradas no Capítulo 3. Se a constante λ for estritamente positiva, a subvariedade X encolhe, em tempo finito, até se transformar em um único ponto. Caso contrário, a subvariedade vai sendo expandida, preservando sua forma inicial. Em [7], são estudadas condições para que superfícies do espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ sejam autossimilares. Neste mesmo artigo, são estudadas algumas propriedades satisfeitas por superfícies autossimilares que são cíclicas e regradas. Em [3], o autor estuda a autossimilaridade de imersões que são o produto de uma imersão legendreana com uma curva planar complexa. A relação encontrada envolve, essencialmente, os dados da curva considerada. Como as subvariedades $SO(n)$-equivariantes do $\mathbb{D}^n$ são parametrizadas, localmente, por um produto envolvendo uma curva plana paracomplexa (ver caracterização de tais subvariedades), seguimos a mesma linha de raciocínio, e encontramos uma interessante expressão envolvendo a curvatura da curva paracomplexa em questão. Utilizando coordenadas polares, baseados no artigo [3], fizemos uma análise desta expressão, com o intuito de controlar as curvas para garantir a autossimilaridade das subvariedades $SO(n)$-equivariantes. Finalizamos a tese com o estudo do que chamamos de *superfícies de Castro-Chen*. Tais superfícies são definidas como o produto de *curvas legendreanas*, as quais estão imersas em determinadas subvariedades 3-dimensionais. Adaptamos tais subvariedades onde as curvas legendreanas são consideradas e baseados no artigo [9], encontramos uma interessante relação entre o ângulo lagrangeano da super-

fície de Castro-Chen e os *ângulos legendreanos* das curvas consideradas. Tal relação permite estudar a minimalidade de tais superfícies através de condições sobre as curvas legendreanas consideradas na definição das superfícies de Castro-Chen. Utilizando as ideias dos artigos [9] e [8], que fazem uso das *projeções de Hopf*, obtemos informações sobre as curvas que descrevem a minimalidade das superfícies de Castro-Chen em espaços de menor dimensão. Assim como as principais imersões consideradas na tese, encontramos condições necessárias e suficientes para as superfícies de Castro-Chen serem autossimilares. No final do Capítulo 4 construímos uma família de superfícies de Castro-Chen autossimilares do espaço paracomplexo $\mathbb{D}^2$. Esses exemplos foram inspirados pelos exemplos encontrados da tese de doutorado [16], onde foram consideradas as mesmas superfícies no ambiente complexo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados e algumas definições da teoria clássica de geometria pseudo-riemanniana, com o intuito de permitir um melhor entendimento desta tese. Omitimos algumas demonstrações para deixar a leitura mais fluente e por se tratarem de resultados bem conhecidos na literatura.

1.1 O conjunto dos números paracomplexos

O conjunto dos números *paracomplexos* (chamados também de *perplexos*, *números duplos* ou *números lorentzianos*) é o conjunto

$$\mathbb{D} := \{(x, y) \ ; \ x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

munido de uma soma e um produto dados por

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{e} \quad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' + yy', xy' + yx'),$$

respectivamente. Assim, dado qualquer par ordenado (x, y), podemos escrever

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) := x + \tau y,$$

onde identificamos $x := (x, 0)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e denotamos $\tau := (0, 1)$. A representação acima se chama *forma algébrica* de um número paracomplexo z e o símbolo τ, chamado de *unidade imaginária paracomplexa*, satisfaz

$$\tau^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (1, 0) := 1.$$

Dado $z = x + \tau y \in \mathbb{D}$, denotamos por $\bar{z} = x - \tau y$ o *conjugado* de z, e definimos a *parte real* e a *parte imaginária* de z por $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$, respectivamente.

Definição 1.1.1. *Definimos o seguinte* pseudo-produto interno *em* $\mathbb{D}$*:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* := dx^2 - dy^2.$$

Pela definição acima, considerando os números paracomplexos $z = x + \tau y$ e $z' = x' + \tau y'$, temos $\langle z, z' \rangle_* = xx' - yy'$. No caso particular em que $z' = z$, utilizaremos a seguinte notação:

$$|z|_*^2 := \langle z, z \rangle_* = x^2 - y^2 = z \cdot \bar{z}.$$

É fácil verificar que o conjunto dos números paracomplexos, com as operações de soma e produto acima definidos, é um anel comutativo com unidade, diferentemente do que ocorre com o conjunto dos números complexos, o qual é um corpo. Isto porque temos a seguinte propriedade:

$$z = x + \tau y \in \mathbb{D} \ \text{ admite um inverso} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \neq |y|.$$

De fato, dado $z = x + \tau y$, como $\bar{z} = x - \tau y$, basta notar que

$$|z|_*^2 = \langle z, z\rangle_* = z \cdot \bar{z} = (x + \tau y) \cdot (x - \tau y) = x^2 - \tau^2 y^2 = x^2 - y^2.$$

Como $\langle z, z\rangle_* = x^2 - y^2$ pode assumir qualquer número real, vamos destacar o seguinte conjunto, que chamaremos de *cone de luz* do plano paracomplexo:

$$\mathscr{C} := \{z \in \mathbb{D} \ ; \ \langle z, z\rangle_* = 0\}.$$

Se $z \in \mathscr{C}$, podemos escrever $z = x + \tau y = x(1 \pm \tau)$. Para os demais casos, isto é, $z \cdot \bar{z} \neq 0$, veremos que é possível obter uma *representação polar* de tais números paracomplexos, assim como fazemos com os números complexos. Para isso, considere o conjunto

$$\mathscr{U} = \{z \in \mathbb{D} \ ; \ |z \cdot \bar{z}| = c, \ c > 0\} = H_1 \cup H_{-1} \cup H_\tau \cup H_{-\tau},$$

sendo

$$H_1 := \{z \in \mathscr{U} \ ; \ x > 0 \text{ e } x > |y|\}, \quad H_{-1} := \{z \in \mathscr{U} \ ; \ x < 0 \text{ e } -x > |y|\},$$

$$H_\tau := \{z \in \mathscr{U} \ ; \ y > 0 \text{ e } y > |x|\} \quad \text{e} \quad H_{-\tau} := \{z \in \mathscr{U} \ ; \ y < 0 \text{ e } -y > |x|\}.$$

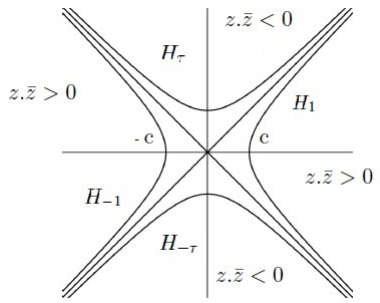

Figura 1.1: *Caso* $z.\bar{z} \neq 0$.

Observação 1.1.1. *Podemos mostrar que*

$$H_\tau = \tau H_1, \quad H_{-1} = -H_1 \quad \text{e} \quad H_{-\tau} = -H_\tau.$$

Considere $z = x + \tau y \in \mathscr{U}$. Se $z \cdot \bar{z} = c > 0$, então

$$x^2 - y^2 = c \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1.$$

Logo, podemos escrever $z = x + \tau y = \sqrt{c}\,(\cosh\theta + \tau \sinh\theta)$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Analogamente, se $z \cdot \bar{z} = -c < 0$, então

$$y^2 - x^2 = c \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1,$$

e assim, $z = x + \tau y = \sqrt{c}\,(\sinh\theta + \tau \cosh\theta)$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Em qualquer um dos casos, escrevendo

$$e^{\tau\theta} := \cosh\theta + \tau \sinh\theta,$$

podemos representar o número paracomplexo $z \in \mathscr{U}$ na *forma polar*

$$z = \pm\sqrt{|z \cdot \bar{z}|}\,\tau^\alpha e^{\tau\theta}, \quad \text{com} \ \ \alpha \in \{0, 1\}.$$

Observação 1.1.2. *Denotamos os expoentes $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ para diferenciar os casos em que o número paracomplexo z satisfaz $z \cdot \bar{z} > 0$ ou $z \cdot \bar{z} < 0$, respectivamente. Além disso, o sinal $\pm$ depende de a que folha da hipérbole o número z pertence.*

Definição 1.1.2. *Seja $z \in \mathbb{D}$ tal que $z \cdot \bar{z} \neq 0$. Então existem $\theta \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$ e $\alpha \in \{0, 1\}$ tais que*

$$z = r\tau^{\alpha} e^{\tau\theta},$$

sendo r chamado de módulo (*ou* raio) *de z e θ é chamado de* ângulo (*ou* argumento) *do número z. A representação acima é denominada* forma polar *do número paracomplexo z.*

Exemplo 1.1.1. *Considere $z = 1 + 2\tau \in \mathbb{D}$. Como $\langle z, z\rangle_* = -3$, $\exists\ \theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cosh\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ e $\sinh\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Logo, $\tanh\theta = \dfrac{1}{2}$ e então, $\theta = \tanh^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \ln(\sqrt{3})$. Logo, a forma polar do número paracomplexo $z = 1 + 2\tau$ é dada por*

$$z = \sqrt{3}\tau\left[\cosh\left(\ln(\sqrt{3})\right) + \tau\sinh\left(\ln(\sqrt{3})\right)\right] = \sqrt{3}\tau e^{\tau\ln(\sqrt{3})}.$$

Proposição 1.1.1. *Sejam $z, z' \in \mathbb{D}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. As seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\langle z, z'\rangle_*^2 = |z|_*^2|z'|_*^2 + \det^2(z, z')$;

(ii) Se $|z|_*^2, |z'|_*^2 \neq 0$, *então* $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')$;

(iii) $(\cosh\theta + \tau\sinh\theta)^n = \cosh(n\theta) + \tau\sinh(n\theta)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;

(iv) Se θ é o argumento de $z \notin \mathscr{C}$, então $\theta = 0$ se, e somente se, $\mathrm{Re}(z) = 0$ *ou* $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Demonstração. As identidades *(i)*, *(iii)* e *(iv)* são facilmente verificadas. Em relação ao item *(ii)*, podemos escrever $z = r\tau^{\alpha}e^{\tau\theta}$ e $z' = r'\tau^{\alpha'}e^{\tau\theta'}$. Como

$$\begin{aligned} e^{\tau\theta}e^{\tau\theta'} &= \left(\cosh\theta\cosh\theta' + \sinh\theta\sinh\theta'\right) + \tau\left(\cosh\theta\sinh\theta' + \sinh\theta\cosh\theta'\right) \\ &= \cosh\left(\theta + \theta'\right) + \tau\sinh\left(\theta + \theta'\right), \end{aligned}$$

obtemos

$$z \cdot z' = rr'\tau^{(\alpha+\alpha')}e^{\tau(\theta+\theta')},$$

donde seguirá o resultado, pela definição de argumento de um número paracomplexo. □

1.2 O espaço paracomplexo

Considere o espaço $\mathbb{D}^n$ com coordenadas $\{z_j = x_j + \tau y_j,\ 1 \leq j \leq n\}$, munido da *forma pseudo-hermitiana*

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_* := \sum_{j=1}^{n} dz_j d\bar{z}_j,$$

e da aplicação $J : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ dada por

$$J(z_1, \cdots, z_n) := (\tau z_1, \cdots, \tau z_n),$$

que é a *estrutura paracomplexa canônica* do $\mathbb{D}^n$.

Observação 1.2.1. *Em notação real, podemos escrever*

$$J(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) = (y_1, x_1, \cdots, y_n, x_n).$$

Além disso, temos que $\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \oplus \tau\mathbb{R}^n$ *e a aplicação* J *é um* endomorfismo *satisfazendo* $J^2 = \mathrm{Id}$, *onde* Id *é a aplicação identidade.*

Finalmente, notemos o seguinte: como

$$\begin{aligned} dz_j d\bar{z}_j &= d(x_j + \tau y_j)d(x_j - \tau y_j) \\ &= (dx_j + \tau dy_j)(dx_j - \tau dy_j) \\ &= dx_j dx_j - \tau dx_j dy_j + \tau dy_j dx_j - \tau^2 dy_j dy_j \\ &= dx_j^2 - dy_j^2 - \tau(dx_j \wedge dy_j), \end{aligned}$$

então podemos escrever

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_* = \langle \cdot, \cdot \rangle_* - \tau\, \omega,$$

onde

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* := \mathrm{Re}\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_* = \sum_{j=1}^{n} \left(dx_j^2 - dy_j^2\right)$$

e

$$\omega := -\mathrm{Im}\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_* = \sum_{j=1}^{n} (dx_j \wedge dy_j)\,.$$

Logo, a 2-forma $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_*$ se decompõe em uma métrica pseudo-riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ de assinatura (n, n) em $\mathbb{R}^{2n}$ e em uma 2-forma simplética ω. Para provar que ω é, de fato, simplética, basta notar que ela é alternada, justamente por depender do produto exterior, o qual é alternado, e que $d\omega = 0$, pois

$$d\omega = d\left(\sum_{j=1}^{n} 1.(dx_j \wedge dy_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} d(1) \wedge dx_j \wedge dy_j = 0.$$

Observação 1.2.2. *É importante ressaltar que, como a 2-forma simplética* ω *é a mesma tanto no caso complexo* $\mathbb{C}^n$ *quanto no caso paracomplexo* $\mathbb{D}^n$, *utilizaremos a notação do caso complexo.*

Observação 1.2.3. *As definições de assinatura e métrica pseudo-riemanniana serão dadas na próxima seção, onde trataremos destas e de outras definições da geometria pseudo-riemanniana.*

Proposição 1.2.1. *As estruturas* J, ω *e* $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ *satisfazem as seguintes relações:*

(i) $\langle J\cdot, J\cdot \rangle_* = -\langle \cdot, \cdot \rangle_*$;

(ii) $\omega = -\langle J\cdot, \cdot \rangle_*$;

(iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_* = -\omega(J\cdot, \cdot)$;

(iv) $\omega(J\cdot, J\cdot) = -\omega(\cdot, \cdot)$;

(v) $\langle \lambda z, \lambda z' \rangle_* = \lambda\bar{\lambda}\langle z, z' \rangle_*$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{D}$ *e* $\forall\ z, z' \in \mathbb{D}^n$.

Demonstração. Mostremos apenas as duas primeiras relações. Para isso, sejam $z, z' \in \mathbb{D}^n$, digamos $z = (z_1, \cdots, z_n)$ e $z' = (z'_1, \cdots, z'_n)$, onde $z_j = x_j + \tau y_j$ e $z'_j = x'_j + \tau y'_j$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle z, z' \rangle_* &= \sum_{j=1}^{n} (dx_j^2 - dy_j^2)(z, z') \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[dx_j(z)dx_j(z') - dy_j(z)dy_j(z')\right]. \end{aligned}$$

E assim, obtemos

$$\langle z, z' \rangle_* = \sum_{j=1}^{n} (x_j x'_j - y_j y'_j).$$

Por outro lado, como $dx_i(Jz) = \mathrm{Re}(dz_i(Jz)) = \mathrm{Re}(\tau z_i) = y_i$, temos

$$\begin{aligned} \langle Jz, Jz' \rangle_* &= \sum_{j=1}^{n} \left[dx_j(Jz) dx_j(Jz') - dy_j(Jz) dy_j(Jz') \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (y_j y'_j - x_j x'_j). \end{aligned}$$

Portanto, $\langle Jz, Jz' \rangle_* = -\langle z, z' \rangle_*$, $\forall\ z, z' \in \mathbb{D}^n$, o que prova a primeira relação. Quanto à (ii), basta notar que

$$\begin{aligned} \langle Jz, z' \rangle_* &= \sum_{j=1}^{n} \left[dx_j(Jz) dx_j(z') - dy_j(Jz) dy_j(z') \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (y_j x'_j - x_j y'_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (x_j y'_j - y_j x'_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (dx_j \wedge dy_j)(z, z') \\ &= -\omega(z, z'), \quad \forall\ z, z' \in \mathbb{D}^n. \end{aligned}$$

□

A seguir, daremos a definição de *função para-holomorfa*. Denotando por $z = x + \tau y$ a coordenada cartesiana de $\mathbb{D}$, os *operadores para-Cauchy-Riemann* ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$ são definidos através das seguintes equações:

$$\begin{cases} dz(\partial_z) = 1 \\ d\bar{z}(\partial_z) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} dz(\partial_{\bar{z}}) = 0 \\ d\bar{z}(\partial_{\bar{z}}) = 1. \end{cases}$$

Levando-se em conta que

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \quad \text{e} \quad z - \bar{z} = 2\tau \mathrm{Im}(z),$$

obtemos que

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + \tau \partial_y) \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x - \tau \partial_y).$$

Definição 1.2.1. *Seja $\mathscr{U}$ um subconjunto aberto em $\mathbb{D}$. Dizemos que uma função $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, $f(z) = f(x + \tau y) = u(x, y) + \tau v(x, y)$, é* para-holomorfa *se $\partial_{\bar{z}} f = 0$, ou seja,*

$$\partial_x(u + \tau v) - \tau \partial_y(u + \tau v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (u_x - v_y) + \tau(v_x - u_y) = 0.$$

Equivalentemente, dizer que uma função $f = u + \tau v$ é para-holomorfa *significa dizer que ela satisfaz as* equações para-Cauchy-Riemann, *dadas por*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = v_x. \end{cases}$$

Definição 1.2.2. *Considere $\mathscr{U}$ um subconjunto aberto em $\mathbb{D}^n$. Dizemos que $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}$, $f(z) = f(z_1, \cdots, z_n) = u(z) + \tau v(z)$, é* para-holomorfa *se, e somente se, satisfaz*

$$\begin{cases} u_{x_j} = v_{y_j} \\ u_{y_j} = v_{x_j} \end{cases}, \quad \forall\, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

No caso geral, dizemos que uma função $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^m$ é para-holomorfa *se cada uma de suas funções componentes o forem.*

1.3 Geometria pseudo-riemanniana

Uma estrutura *pseudo-riemanniana* sobre uma variedade diferenciável M é uma forma bilinear simétrica suave g, chamada de *métrica*, a qual é não-degenerada no seguinte sentido: dado $X \in T_xM$, com $x \in M$,

$$\text{se } g(X, Y) = 0, \;\; \forall\, Y \in T_xM \implies X = 0.$$

Tal condição é equivalente a dizer que

$$\det\left(g(X_i, X_j)\right)_{1 \le i,j \le n} \neq 0,$$

qualquer que seja a base $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de T_xM.

Observação 1.3.1. *Entende-se por suavidade da métrica g à condição de que a função a valores reais $x \in M \longmapsto g_x(X_x, Y_x) \in \mathbb{R}$ deve ser suave para quaisquer campos de vetores suaves X e Y definidos localmente sobre M.*

Definição 1.3.1. *Dado um vetor tangente $X \neq 0$ sobre M, este será chamado de*

- vetor positivo (*ou* tipo espaço) *se* $g(X, X) > 0$;
- vetor negativo (*ou* tipo tempo) *se* $g(X, X) < 0$;
- vetor nulo (*ou* tipo luz) *se* $g(X, X) = 0$.

Um dos mais conhecidos resultados da álgebra linear, chamado de *Teorema de Sylvester*, garante que, em qualquer ponto $x \in M$, existe uma base *ortonormal* $(e_1, \cdots, e_n)$ de T_xM no seguinte sentido:

$$g(e_i, e_j) = 0 \;\text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad g(e_i, e_i) := \epsilon_i = \pm 1.$$

Referir-nos-emos aos vetores e_i, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, como sendo vetores *unitários*. Além disso, o número p de vetores da base que são negativos (e, portanto, o número $n - p$ que são positivos) não depende da base, nem do ponto x em questão. Ao par $(p, n-p)$ chamamos de *assinatura* da métrica g. Se $p = 0$ ou $p = n$, então a métrica é dita *definida*. Caso contrário, ou seja, se $p \neq 0$ e $p \neq n$, então a métrica é dita *indefinida*.

Observação 1.3.2. *No caso de métricas indefinidas, não é difícil notar a existência de vetores nulos. De fato, sendo $(e_1, \cdots, e_n)$ uma base ortonormal de T_xM, supondo que e_i e e_j são vetores negativo e positivo, respectivamente, o vetor $e_i + e_j$ é um vetor nulo, pela bilinearidade da métrica em questão.*

Definição 1.3.2. *Chamamos de* variedade pseudo-riemanniana *o par (M, g), onde M é uma variedade diferenciável munida de uma métrica pseudo-riemanniana g.*

Dada uma variedade diferenciável M, indicaremos o conjunto dos campos de vetores suaves em M por $\mathfrak{X}(M)$ e o anel das funções reais suaves definidas em M por $\mathscr{C}^\infty(M)$.

Definição 1.3.3. *Uma* conexão afim (*ou* derivada covariante) *sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & D(X,Y) := D_XY \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(*i*) $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$;

(*ii*) $D_X(Y+Z) = D_XY + D_XZ$;

(*iii*) $D_XfY = fD_XY + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada no livro [5], afirma que dentre todas as possíveis conexões afins numa dada variedade pseudo-riemanniana, existe uma única conexão, chamada de *conexão de Levi-Civita*, que satisfaz importantes propriedades em conjunto com a estrutura pseudo-riemanniana da variedade em questão.

Teorema 1.3.1. *Dada uma variedade pseudo-riemanniana (M, g), existe uma única conexão afim D em M satisfazendo as seguintes condições:*

(*i*) D *é* simétrica, *ou seja, satisfaz*

$$D_XY - D_YX = [X,Y], \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

(*ii*) D *é* compatível *com a métrica pseudo-riemanniana g, ou seja,*

$$Xg(Y,Z) = g\left(D_XY, Z\right) + g\left(Y, D_XZ\right), \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

O lema a seguir, também demonstrado no livro [5], nos garante que qualquer que seja o ponto $p \in M$, sempre existem uma vizinhança em torno deste ponto e n campos de vetores $\{E_1, \cdots, E_n\}$ ortonormais em cada ponto desta vizinhança, tais que $D_{E_i}E_j(p) = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Tal família $\{E_i\}$ de campos de vetores é chamada de *referencial geodésico* local em p.

Lema 1.3.1. *Sejam (M, g) uma variedade pseudo-riemanniana, com conexão de Levi-Civita D. Dados $p \in M$ e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormal de T_pM, existem coordenadas locais $(x_1, \cdots, x_n)$ numa vizinhança de p tais que* $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := \partial_{x_i}(p) = e_i$ *e* $D_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j}(p) = 0$, $\forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Definição 1.3.4. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão arbitrária D. O* tensor curvatura *R de D é definido por*

$$R(X,Y)Z = D_{[X,Y]}Z - D_XD_YZ + D_YD_XZ.$$

No próximo resultado, cuja demonstração é análoga ao caso riemanniano, utilizaremos a seguinte notação: $R(X,Y,Z,T) := g(R(X,Y)Z,T)$.

Proposição 1.3.1. *O tensor curvatura R de uma variedade pseudo-riemanniana com conexão de Levi-Civita D satisfaz as seguintes identidades:*

(*a*) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;

(*b*) $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T)$;

(*c*) $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$;

(*d*) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$.

Definição 1.3.5. *Considere* $\{e_i\}$ *um referencial ortonormal em* (M, g)*, com* $g(e_i, e_i) = \epsilon_i = \pm 1$.

(*i*) *A* curvatura de Ricci *de* g *é dada por*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \; g(R(X, e_i,)Y, e_i).$$

(*ii*) *A* curvatura escalar (*ou* média) *de* M *é o traço da sua curvatura de Ricci, ou seja,*

$$K = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \mathrm{Ric}(e_i, e_i).$$

(*iii*) M *é uma* variedade de Einstein *se existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)$*, para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

1.3.1 Estruturas intrínsecas e extrínsecas às subvariedades

Definição 1.3.6. *Seja* S *uma subvariedade imersa de uma variedade pseudo-riemanniana* (M, g)*, ou seja,* S *é a imagem de uma certa variedade diferenciável* $\widetilde{S}$ *por uma imersão* f*. A restrição de* g *à* S*, denotada por* $g|_S$*, é chamada de* métrica induzida *em* S (*ou* primeira forma fundamental *de* S).

Definição 1.3.7. *Dizemos que uma subvariedade* S *é* não-degenerada *se a métrica induzida em* S *for não-degenerada. Se a métrica induzida* $g|_S$ *for definida* (*ou indefinida*)*, então* S *será denominada de* subvariedade definida (*ou* indefinida).

Definimos o *espaço normal* à subvariedade S em x por

$$N_x S := T_x^{\perp} S := (T_x S)^{\perp} = \{X \in T_x M \; ; \; g(X, Y) = 0, \; \forall \, Y \in T_x S\}.$$

Suponha que S seja uma subvariedade não-degenerada de (M, g). Nesse caso, a não-degeneracidade da métrica induzida em S garante-nos a decomposição de $T_x M$ como uma soma direta, a saber,

$$T_x M = T_x S \oplus N_x S.$$

Assim, dado $X \in T_x M$, podemos escrever $X = X^{\top} + X^{\perp}$ e chamaremos cada uma das parcelas $X^{\top}$ e $X^{\perp}$ de *componentes tangente e normal*, respectivamente. Agora, denote por D a conexão de Levi-Civita em M. Dados X e Y vetores tangentes à S, a parte tangente de $D_X Y$ é, ela própria, uma conexão em S, a qual coincide com a conexão de Levi-Civita da métrica induzida g sobre S. Denotando tal conexão por ∇, temos pela *fórmula de Gauss*, que

$$D_X Y = (D_X Y)^{\top} + (D_X Y)^{\perp} := \nabla_X Y + h(X, Y).$$

Proposição 1.3.2. *O operador* h*, chamado de* segunda forma fundamental *de* S*, é simétrico e tensorial, ou seja,* $h\,(X(x), Y(x))$ *depende somente do valor de* X *e* Y *em* $x \in S$.

Demonstração. Consultar, por exemplo, o livro [5]. □

Da mesma forma, podemos derivar um campo vetorial normal ξ sobre S na direção de um campo vetorial tangente X e, então, quebrar o resultado em partes tangente e normal. Assim, pela *fórmula de Weingarten*, temos

$$D_X \xi = (D_X \xi)^{\top} + (D_X \xi)^{\perp} := -A_{\xi} X + \nabla_X^{\perp} \xi.$$

O endomorfismo linear $A_{\xi} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é chamado de *operador forma* ou *operador de Weingarten*. Além disso, a parte normal $\nabla^{\perp}$ da igualdade acima é, ela própria, uma conexão afim compatível com a métrica, chamada de *conexão normal* de S. As demonstrações desta afirmação e da proposição seguinte são resultados conhecidos. Para mais detalhes, veja [5].

Proposição 1.3.3. *O operador de Weingarten, além de ser tensorial, é também auto-adjunto com respeito à métrica induzida em S, isto é, satisfaz*

$$g\left(A_\xi X, Y\right) = g\left(X, A_\xi Y\right),$$

para todos $X, Y \in T_xS$. Além disso, a seguinte igualdade é satisfeita

$$g\left(A_\xi X, Y\right) = g\left(h(X,Y), \xi\right),$$

para todos $X, Y \in T_xS$ e para todo $\xi \in N_xS$.

Definição 1.3.8. *Seja S uma* hipersuperfície *de uma variedade pseudo-riemanniana (M, g), ou seja, S é uma subvariedade não-degenerada de (M, g) tal que* $\operatorname{codim}(S) := \dim(M) - \dim(S) = 1$. *Dizemos que:*

(i) $x \in S$ é umbílico *se o operador forma for um múltiplo da identidade;*

(ii) S é totalmente umbílica *se todos os seus pontos são umbílicos.*

Observação 1.3.3. *Se o operador forma A_ξ é um múltiplo da identidade, digamos $A_\xi = k\mathrm{Id}$, podemos escrever*

$$h(X,Y) = \frac{kg(X,Y)}{g(\xi,\xi)}\xi,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Tal constante k é denominada de curvatura principal *de S.*

Definição 1.3.9. *Seja S uma subvariedade não-degenerada n-dimensional de uma variedade pseudo-riemanniana (M, g). Definimos o* vetor curvatura média *da subvariedade S como sendo o traço da segunda forma fundamental h dividido pela dimensão n de S, ou seja,*

$$\vec{H} := \frac{1}{n}\operatorname{tr}(h) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}h(X_i, X_j),$$

onde $\{X_1, \cdots, X_n\}$ é uma base de T_xS e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, sendo $g_{ij} = g(X_i, X_j)$.

Definição 1.3.10. *Dada uma subvariedade com bordo S, imagem de uma imersão $f : \widetilde{S} \longrightarrow M$, dizemos que uma* variação *de S é uma aplicação suave*

$$F : \widetilde{S} \times (-t_0, t_0) \longrightarrow M \ ; \ F(x,0) = f(x), \quad com \quad t_0 > 0,$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\partial S_t = \partial S$, onde $S_t := F(\widetilde{S} \times \{t\})$, para todo t;

(ii) $\exists\, U \subset \widetilde{S}$ relativamente compacto tal que $U \cap \partial\widetilde{S} = \emptyset$ e $F(x,t) = f(x)$, para todo $x \in \widetilde{S} \setminus U$.

Assim, para cada t fixado, $f_t : \widetilde{S} \longrightarrow M$ tal que $f_t(x) = F(x,t)$ é uma imersão e, portanto, $f_t(\widetilde{S}) := S_t$ é uma subvariedade imersa. Desta forma, podemos nos referir à variação de uma subvariedade como sendo uma curva de subvariedades. *Além disso, o vetor $X := \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,0)$ é chamado de* vetor velocidade *da variação.*

Definição 1.3.11. *Uma subvariedade não-degenerada S de uma variedade pseudo-riemanniana (M, g) é dita* mínima *se o seu volume for crítico com respeito à qualquer variação da subvariedade inicial S, isto é,*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(S_t)\Big|_{t=0} = 0.$$

O resultado a seguir é conhecido como a *fórmula da primeira variação* do funcional volume.

Teorema 1.3.2. *Seja S uma subvariedade não-degenerada de uma variedade pseudo-riemanniana (M^n, g). Então, temos*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(S_t)\Big|_{t=0} = -\int_S g(n\vec{H}, X)\, dV,$$

sendo S_t e X como na Definição 1.3.10, e dV a n-forma volume do ambiente M.

Através da fórmula da primeira variação, obtemos a seguinte condição necessária e suficiente para que uma subvariedade seja mínima. Para mais detalhes, consultar [5].

Corolário 1.3.1. *Uma subvariedade S é mínima se, e somente se, o seu vetor curvatura média $\vec{H}$ é identicamente nulo.*

1.3.2 Subvariedades unidimensionais: Curvas

Sejam (M, g) uma variedade pseudo-riemanniana e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma curva parametrizada *regular*, isto é, uma curva cujo vetor velocidade $d\gamma\left(\dfrac{d}{dt}\right) = \gamma'(t)$ não se anula. Se, além disso, o vetor velocidade $\gamma'(t)$ for um vetor nulo para todo t, diremos que γ é uma *curva nula*.

Definição 1.3.12. *Dizemos que γ é uma* geodésica *com respeito à conexão D (não necessariamente a conexão de Levi-Civita) se*

$$D_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0, \quad \forall\, t \in I.$$

Definição 1.3.13. *Dizemos que uma curva γ é* parametrizada pelo comprimento de arco *s se o seu vetor velocidade satisfaz*

$$\left|g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right)\right| = 1, \ \forall\, s.$$

Lema 1.3.2. *Qualquer curva regular cujo vetor velocidade seja não-nulo pode ser parametrizada pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \longrightarrow M$ uma curva regular tal que

$$g\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right) \neq 0, \quad \forall\, t \in I.$$

Dado um $t_0 \in I$ fixado, considere a seguinte aplicação

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \sqrt{|g\left(\gamma'(r), \gamma'(r)\right)|}\, dr, \quad \text{com} \quad t \in I.$$

Como $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{|g\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right)|} > 0$, segue que s é uma função crescente e, portanto, possui uma inversa diferenciável $t = t(s) : s(I) \longrightarrow I$. Assim, defina

$$\beta := \gamma \circ t : J \longrightarrow M, \quad \text{onde} \quad J := s(I).$$

Portanto, $\beta(J) = \gamma(t(J)) = \gamma(I)$. Além disso, como $\beta'(s) = (\gamma \circ t)'(s) = \gamma'(t)\dfrac{dt}{ds}$, segue que

$$g\left(\beta'(s), \beta'(s)\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right) = \frac{1}{|g\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right)|} g\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right),$$

e, portanto, $|g\left(\beta'(s), \beta'(s)\right)| = 1$. □

A seguir, definiremos o conceito de curvatura de curvas imersas em variedades pseudo - riemannianas. Antes, porém, é necessário ressaltar que a definição de tal conceito depende da dimensão da variedade na qual a curva está imersa. De fato, se a curva está imersa em uma superfície, como o espaço normal à curva γ é 1-dimensional, existem exatamente dois vetores normais unitários à

curva. Desta forma, dependendo do vetor normal a ser considerado, temos que a função curvatura pode assumir valores positivos e negativos. Já em dimensão mais alta, como existe uma maior liberdade de escolha do vetor normal a ser considerado, tal escolha é feita de forma que a função curvatura seja sempre positiva, assim como ocorre no caso de curvas imersas em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.3.14. *Seja $\gamma : I \longrightarrow (M^2, g)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco numa superfície M. Dado um campo vetorial normal unitário ν, definimos a* curvatura com sinal *de γ com respeito à ν como sendo a função K_γ satisfazendo a identidade*

$$A_\nu \gamma' = K_\gamma \gamma'.$$

Equivalentemente, temos

$$K_\gamma = \frac{g\left(A_\nu \gamma', \gamma'\right)}{g\left(\gamma', \gamma'\right)}.$$

Observação 1.3.4. *Suponha, agora, $\gamma : I \longrightarrow (M^n, g)$ parametrizada pelo comprimento de arco, com $n \geq 3$. Em adição, suponha que a conexão D seja a conexão de Levi-Civita de g. Como*

$$\gamma' g\left(\gamma', \gamma'\right) = 0,$$

utilizando a compatibilidade da conexão com a métrica, segue que

$$g\left(D_{\gamma'}\gamma', \gamma'\right) = 0. \tag{1.1}$$

Por simplicidade, denotaremos $\gamma'' := D_{\gamma'}\gamma'$. Supondo que γ'' seja um campo vetorial não-nulo, a equação (1.1) garante que γ'' é normal à curva γ. Portanto, existem uma função positiva K_γ e um campo de vetores normal unitário ν tal que $\gamma'' = K_\gamma \nu$. Tal função K_γ é chamada de curvatura *da curva γ. Sendo ν unitário, segue que*

$$K_\gamma = \sqrt{|g\left(\gamma'', \gamma''\right)|}.$$

Observe também que, se γ for uma geodésica, ou seja, $\gamma'' = 0$, tais curvas são caracterizadas por terem curvatura nula.

Observação 1.3.5. *Suponha que $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{D}$ seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano paracomplexo. Se denotarmos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, como $(x'(t))^2 - (y'(t))^2 = \epsilon = \pm 1$, então existe $\theta = \theta(t)$ tal que*

$$\begin{cases} x'(t) = \cosh\theta(t) \\ y'(t) = \sinh\theta(t) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x'(t) = \sinh\theta(t) \\ y'(t) = \cosh\theta(t). \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\gamma''(t) = (x''(t), y''(t)) = \begin{cases} \theta'(t)(\sinh\theta(t), \cosh\theta(t)), & \epsilon = 1 \\ \theta'(t)(\cosh\theta(t), \sinh\theta(t)), & \epsilon = -1. \end{cases}$$

Denotando os campos normais unitários à curva γ por $\nu_+ := (y', x') = J\gamma'$ e $\nu_- := -J\gamma'$, obtemos

$$\gamma''(t) = \theta'(t)\nu_+(t) \quad ou \quad \gamma''(t) = -\theta'(t)\nu_-(t).$$

Aplicando a Proposição 1.3.3, a curvatura K_γ será dada por

$$K_\gamma = \frac{\left\langle A_{\nu_\pm}\gamma', \gamma'\right\rangle_*}{\langle \gamma', \gamma'\rangle_*} = \frac{\langle \gamma'', \nu_\pm\rangle_*}{\langle \gamma', \gamma'\rangle_*}. \tag{1.2}$$

Logo, em relação ao campo normal ν_+, segue da equação (1.2) que $K_\gamma = -\theta'$. Analogamente, com respeito ao campo ν_-, obtemos $K_\gamma = \theta'$.

1.3.3 Superfícies pseudo-riemannianas

Teorema 1.3.3. *Seja (M, g) uma superfície pseudo-riemanniana. Então, localmente, existem coordenadas (s, t)* isotérmicas (*ou* conformes)*, isto é, tais que*

$$g_{11} = \epsilon g_{22} \quad e \quad g_{12} = 0,$$

onde $\epsilon = 1$ se a métrica g for definida e $\epsilon = -1$ se g for indefinida. Tais coordenadas provêm de uma parametrização que denominaremos de parametrização isotérmica (*ou* conforme)*.*

Demonstração. Consultar [5, Teorema 6]. □

Lema 1.3.3. *Seja $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_p\right)$ uma imersão com coordenadas isotérmicas (s, t), onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ é a métrica pseudo-riemanniana em $\mathbb{R}^n$, definida por*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_p := -\sum_{i=1}^{p} dx_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n} dx_i^2.$$

Então, denotando a imagem de tal imersão por S, tem-se que

$$f_{ss} + \epsilon f_{tt} \in \left(T_{f(s,t)}S\right)^{\perp},$$

onde $\epsilon = 1$ se a métrica g for definida e $\epsilon = -1$ se g for indefinida.

Demonstração. Como as coordenadas (s, t) são isotérmicas, temos que

$$\langle f_s, f_s\rangle_p = \epsilon\langle f_t, f_t\rangle_p \quad \text{e} \quad \langle f_s, f_t\rangle_p = 0.$$

Diferenciando ambas as igualdades em relação a s, obtemos

$$\langle f_{ss}, f_s\rangle_p = \epsilon\langle f_{st}, f_t\rangle_p \tag{1.3}$$

e

$$\langle f_{ss}, f_t\rangle_p = -\langle f_s, f_{st}\rangle_p. \tag{1.4}$$

Analogamente, diferenciando em relação a t, obtemos

$$\langle f_{st}, f_s\rangle_p = \epsilon\langle f_{tt}, f_t\rangle_p \tag{1.5}$$

e

$$\langle f_{st}, f_t\rangle_p = -\langle f_s, f_{tt}\rangle_p. \tag{1.6}$$

Assim de (1.3) e (1.6), temos

$$\langle f_{ss} + \epsilon f_{tt}, f_s\rangle_p = 0,$$

e de (1.4) e (1.5), temos

$$\langle f_{ss} + \epsilon f_{tt}, f_t\rangle_p = 0,$$

donde segue que $f_{ss} + \epsilon f_{tt} \perp T_{f(s,t)}S$. □

Teorema 1.3.4. *Seja S uma superfície pseudo-riemanniana mínima indefinida de $\left(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_p\right)$. Então, S é localmente parametrizada por uma imersão da forma*

$$f(u, v) = \gamma_1(u) + \gamma_2(v),$$

onde γ_1, γ_2 são duas curvas nulas do $\mathbb{R}^n$ tais que $\langle\gamma_1'(u), \gamma_2'(v)\rangle_p \neq 0$, para todos u, v.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.3, sabemos que S admite coordenadas isotérmicas locais (s,t), isto é, $\langle \partial_s, \partial_s \rangle_p = \epsilon \langle \partial_t, \partial_t \rangle_p$ e $\langle \partial_s, \partial_t \rangle_p = 0$. Note que $\epsilon = -1$, pois por hipótese, assumimos que S é indefinida. Agora, introduza as seguintes coordenadas (u,v), dadas por

$$\begin{cases} u = s + t \\ v = s - t \end{cases} \iff \begin{cases} s = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Tais coordenadas satisfazem

$$|\partial_u|_p^2 = \langle \partial_s + \partial_t, \partial_s + \partial_t \rangle_p = \langle \partial_s, \partial_s \rangle_p + \langle \partial_t, \partial_t \rangle_p = 0$$

e

$$|\partial_v|_p^2 = \langle \partial_v, \partial_v \rangle_p = \langle \partial_s, \partial_s \rangle_p + \langle \partial_t, \partial_t \rangle_p = 0.$$

Portanto,

$$|\partial_u|_p^2 = |\partial_v|_p^2 = 0. \tag{1.7}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \partial_u, \partial_v \rangle_p &= \langle \partial_s + \partial_t, \partial_s - \partial_t \rangle_p = \langle \partial_s, \partial_s \rangle_p - \langle \partial_t, \partial_t \rangle_p \\ &= -2\langle \partial_t, \partial_t \rangle_p \\ &= 2|\partial_s|_p^2. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\partial_{ss} = \partial_s \left(\frac{\partial_u + \partial_v}{2} \right) = \frac{1}{4}(\partial_{uu} + 2\partial_{uv} + \partial_{vv}) \quad \text{e} \quad \partial_{tt} = \frac{1}{4}(\partial_{uu} - 2\partial_{uv} + \partial_{vv}).$$

Por hipótese, S é mínima. Como as coordenadas são isotérmicas, temos que

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \frac{(f_{ss} - f_{tt})^{\perp}}{|f_s|_p^2} = 0.$$

Como $\partial_{ss} - \partial_{tt} = \partial_{uv}$ e $f = f(s,t)$ é uma parametrização local de S, em coordenadas isotérmicas, temos que f deve satisfazer a equação diferencial parcial $f_{uv} = 0$. Portanto, a solução geral para esta equação diferencial parcial é dada por $f(u,v) = \gamma_1(u) + \gamma_2(v)$, onde γ_1, γ_2 são funções a valores no $\mathbb{R}^n$ (portanto, são curvas). Além disso, note que (1.7) implica que

$$|\gamma_1'(u)|_p^2 = 0 = |\gamma_2'(u)|_p^2,$$

ou seja, γ_1 e γ_2 são curvas nulas. Como a métrica nessas novas coordenadas também é não-degenerada, temos que

$$\left\langle \gamma_1'(u), \gamma_2'(v) \right\rangle_p \neq 0, \ \forall\, u, v.$$

□

1.4 Variedades para-Kähler

Antes de introduzirmos o conceito de variedade para-Kähler, faz-se necessário algumas definições e observações prévias.

Definição 1.4.1. *Uma* estrutura quase-paracomplexa *sobre M é um tensor J do tipo $(1,1)$ tal que, para todo $p \in M$, J_p é um endomorfismo de T_pM satisfazendo $J_p^2 = \mathrm{Id}$, e os autovalores de J têm a mesma multiplicidade, ou seja,* $\dim\ker(J + \mathrm{Id}) = \dim\ker(J - \mathrm{Id})$. *Além disso, uma* variedade quase-paracomplexa (M,J) *é uma variedade diferenciável M munida de uma estrutura*

quase-paracomplexa J.

Proposição 1.4.1. *A dimensão de qualquer variedade quase-paracomplexa é sempre par.*

Demonstração. Sejam (M, J) uma variedade quase-paracomplexa e $p \in M$. Como os autovalores do operador J são iguais a 1 e -1, podemos considerar as seguintes distribuições $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ sobre M:

$$\mathscr{D}^+(p) := \{V \in T_pM \ ; \ JV = V\} \quad \text{e} \quad \mathscr{D}^-(p) := \{V \in T_pM \ ; \ JV = -V\}.$$

Assim, dado $V \in T_pM$, podemos escrevê-lo na forma $V = V_1 + V_2$, com

$$V_1 = \frac{V + JV}{2} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{V - JV}{2}.$$

Note que $V_1 \in \mathscr{D}^+(p)$ e $V_2 \in \mathscr{D}^-(p)$. Assim, podemos decompor cada espaço tangente da seguinte forma:

$$T_pM = \mathscr{D}^+(p) \oplus \mathscr{D}^-(p).$$

Finalmente, como J satisfaz $\dim\ker(J+\mathrm{Id}) = \dim\ker(J-\mathrm{Id})$, e observando que $\mathscr{D}^+(p) = \ker(J-\mathrm{Id})$ e $\mathscr{D}^-(p) = \ker(J+\mathrm{Id})$, segue que a dimensão de T_pM é par, como queríamos. □

Observação 1.4.1. *Em analogia ao que ocorre com* variedades quase-complexas*, onde a* estrutura quase-complexa *é apenas um tensor J satisfazendo $J^2 = -\mathrm{Id}$, a dimensão de uma variedade quase-paracomplexa também é par. No entanto, em nosso caso, precisamos acrescentar uma condição na definição de estrutura quase-paracomplexa de forma a torná-la par, a saber,*

$$\dim\ker(J + \mathrm{Id}) = \dim\ker(J - \mathrm{Id}).$$

Definição 1.4.2. *Uma* variedade paracomplexa *M^n, de dimensão paracomplexa n, é uma variedade topológica munida de um* atlas para-holomorfo *$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, ou seja, uma família de abertos U_α com $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ e homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{D}^n$, os quais serão denominados de* cartas para-holomorfas*, tais que as funções de transição (mudança de cartas)*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U) \subset \mathbb{D}^n \longrightarrow \varphi_\beta(U) \subset \mathbb{D}^n, \quad U = U_\alpha \cap U_\beta,$$

sejam funções para-holomorfas, para todos $\alpha, \beta \in I$.

Exemplo 1.4.1. *O espaço paracomplexo $\mathbb{D}^n$ é uma variedade paracomplexa de dimensão paracomplexa n. De fato, considerando o atlas trivial, formado pela aplicação identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$, temos que a função de transição é a própria aplicação identidade. Como a i-ésima componente da aplicação identidade é a função $z_i = x_i + \tau y_i$, onde $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{D}^n$, segue trivialmente que a aplicação identidade satisfaz as equações para-Cauchy-Riemann, uma vez que*

$$(x_i)_{x_j} = \delta_{ij} = (y_i)_{y_j} \quad e \quad (x_i)_{y_j} = 0 = (y_i)_{x_j},$$

para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Definição 1.4.3. *Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ entre variedades paracomplexas M e N é* para-holomorfa *se, para toda carta (U, φ) de M e toda carta (V, ψ) de N com $f(U) \subset V$, a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(f(U))$ é para-holomorfa.*

Definição 1.4.4. *Dizemos que uma estrutura quase-paracomplexa J sobre M^{2n} é uma* estrutura paracomplexa *se ela provém de um atlas para-holomorfo, isto é, J pode ser definida, localmente, por*

$$d\varphi_U \circ J = \widetilde{J} \circ d\varphi_U,$$

onde φ_U é uma carta para-holomorfa local e $\widetilde{J} : \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ é a estrutura paracomplexa canônica de $\mathbb{D}^n$, definida na seção 1.2. Desta forma, dado $p \in U \subset M$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d\varphi_p"] \arrow[d, "J"'] & \mathbb{D}^n \arrow[d, "\widetilde{J}"] \\ T_pM \arrow[r, "d\varphi_p"'] & \mathbb{D}^n. \end{tikzcd}$$

Definição 1.4.5. *Uma* variedade para-Kähler (M, J, g, ω) *é uma variedade diferenciável M munida das seguintes três estruturas, as quais satisfazem um conjunto de condições algébricas e analíticas:*

(i) Uma estrutura quase-paracomplexa J sobre M;

(ii) Uma métrica pseudo-riemanniana g;

(iii) Uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ não-degenerada e fechada.

As condições requeridas são as seguintes: J deve ser, na verdade, uma estrutura paracomplexa, e valem as relações

$$\omega = -g(J\cdot, \cdot) \quad e \quad g(J\cdot, J\cdot) = -g(\cdot, \cdot).$$

Observação 1.4.2. *Pela definição acima, notamos que toda variedade para-Kähler é, em particular, uma variedade pseudo-riemanniana, uma variedade paracomplexa e uma variedade simplética. Essa última, segue do fato de (T_xM, ω_x) ser um espaço vetorial simplético, $\forall\, x \in M$, e a forma bilinear ser* fechada, *isto é, $d\omega \equiv 0$.*

A tarefa de verificar se uma estrutura quase-paracomplexa J é, de fato, uma estrutura paracomplexa, isto é, se o tensor J provém de um atlas para-holomorfo, pode ser um tanto quanto árdua. Felizmente, encontramos uma propriedade envolvendo o operador colchete de campos vetoriais que facilita essa verificação, em paralelo com o que ocorre no caso complexo. Antes, porém, faz-se necessário algumas considerações preliminares.

Definição 1.4.6. *Seja (M, J) uma variedade quase-paracomplexa. O* tensor para-Nijenhuis *é o campo tensorial $N_*^J : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$N_*^J(X, Y) := [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] + [JX, JY].$$

Lema 1.4.1. *Sejam X_1 e X_2 campos de vetores sobre M e considere as decomposições $X_1 = U_1 + V_1$ e $X_2 = U_2 + V_2$ em termos de $TM = \mathscr{D}^+ \oplus \mathscr{D}^-$. Então, temos que*

$$N_*^J(X_1, X_2) = 2\left\{([U_1, U_2] - J[U_1, U_2]) + ([V_1, V_2] + J[V_1, V_2])\right\}.$$

Demonstração. Pela bilinearidade do colchete de Lie, temos

$$\begin{aligned} N_*^J(X_1, X_2) &= N_*^J(U_1 + V_1, U_2 + V_2) \\ &= N_*^J(U_1, U_2) + N_*^J(U_1, V_2) + N_*^J(V_1, U_2) + N_*^J(V_1, V_2) \\ &= [U_1, U_2] - J[JU_1, U_2] - J[U_1, JU_2] + [JU_1, JU_2] + [U_1, V_2] - J[JU_1, V_2] \\ &\quad -J[U_1, JV_2] + [JU_1, JV_2] + [V_1, U_2] - J[JV_1, U_2] - J[V_1, JU_2] \\ &\quad +[JV_1, JU_2] + [V_1, V_2] - J[JV_1, V_2] - J[V_1, JV_2] + [JV_1, JV_2] \\ &= [U_1, U_2] - J[U_1, U_2] - J[U_1, U_2] + [U_1, U_2] + [U_1, V_2] - J[U_1, V_2] \\ &\quad +J[U_1, V_2] - [U_1, V_2] + [V_1, U_2] + J[V_1, U_2] - J[V_1, U_2] \\ &\quad -[V_1, U_2] + [V_1, V_2] + J[V_1, V_2] + J[V_1, V_2] + [V_1, V_2] \\ &= 2([U_1, U_2] - J[U_1, U_2]) + 2([V_1, V_2] + J[V_1, V_2]). \end{aligned}$$

□

Observação 1.4.3. *Note que a única maneira de $N_*^J(X_1, X_2)$ ser igual a zero é quando tivermos*

$$U := [U_1, U_2] - J[U_1, U_2] = 0 \quad e \quad V := [V_1, V_2] + J[V_1, V_2] = 0.$$

De fato, se ocorrer de $U = -V$, com $U \neq 0$, chegaremos a uma contradição, uma vez que $JU = -U$ (e portanto, $U \in \mathscr{D}^-$) e $J(-V) = -V$ (e portanto, $-V \in \mathscr{D}^+$).

Proposição 1.4.2. *$N_*^J \equiv 0$ se, e somente se, $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ são involutivas.*

Demonstração. Assuma, primeiramente, que o tensor N_*^J se anula e considere $U_1, U_2 \in \mathscr{D}^+$ e $V_1, V_2 \in \mathscr{D}^-$ quaisquer. Tomando $X_1 := U_1 + V_1$ e $X_2 := U_2 + V_2$, segue pelo Lema 1.4.1 que

$$N_*^J(X_1, X_2) = 2\left\{([U_1, U_2] - J[U_1, U_2]) + ([V_1, V_2] + J[V_1, V_2])\right\} = 0.$$

Pela observação anterior, o anulamento do tensor para-Nijenhuis implica em $J[U_1, U_2] = [U_1, U_2]$ e $J[V_1, V_2] = -[V_1, V_2]$, isto é, $[U_1, U_2] \in \mathscr{D}^+$ e $[V_1, V_2] \in \mathscr{D}^-$. Logo, as distribuições $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ são involutivas. Reciprocamente, sejam X e Y campos de vetores sobre M. Escrevendo $X = U_1 + V_1$ e $Y = U_2 + V_2$ e aplicando o lema anterior, temos que a hipótese de $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ serem distribuições involutivas implica no anulamento do tensor $N_*^J(X, Y) = 0$, como queríamos. □

Observação 1.4.4. *Sabemos, da teoria de variedades, que distribuições integráveis implicam em distribuições involutivas. Além do mais, a recíproca também é verdadeira, pela versão local do* Teorema de Frobenius. *Desta forma, estamos aptos a provar que o fato de $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ serem integráveis é equivalente a dizer que J é uma estrutura paracomplexa sobre M. E, portanto, garantimos a veracidade do resultado seguinte:*

Teorema 1.4.1. *Seja (M, J) uma variedade quase-paracomplexa. Então, J é uma estrutura paracomplexa sobre M se, e somente se, o tensor para-Nijenhuis N_*^J for identicamente nulo.*

Demonstração. Suponha primeiramente que N_*^J se anule. Assim, sendo $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ distribuições integráveis, numa vizinhança de qualquer ponto de M, podemos encontrar coordenadas locais $(\mathscr{U}, \varphi_{\mathscr{U}} = (u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n))$ sobre M de forma que os vetores $\{\partial_{u_1}, \cdots, \partial_{u_n}\}$ e $\{\partial_{v_1}, \cdots, \partial_{v_n}\}$ sejam geradores de $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$. Ou seja, as subvariedades integrais de $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$ são

$$\{v_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\} \quad \text{e} \quad \{u_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\},$$

respectivamente. Definindo

$$x_i := \frac{u_i + v_i}{2} \quad \text{e} \quad y_i := \frac{v_i - u_i}{2},$$

tem-se que $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ é um novo sistema de coordenadas para M. Assim, seja $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ um outro sistema de coordenadas para M, construído da mesma forma que o anterior, isto é,

$$\bar{x}_i := \frac{\bar{u}_i + \bar{v}_i}{2} \quad \text{e} \quad \bar{y}_i := \frac{\bar{v}_i - \bar{u}_i}{2},$$

onde $\{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n\}$ e $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ são as coordenadas associadas a $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$. Como

$$\{v_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\} = \{\bar{v}_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\}$$

e

$$\{u_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\} = \{\bar{u}_i = \text{constante},\ 1 \leq i \leq n\},$$

uma vez que definem as mesmas subvariedades integrais para $\mathscr{D}^+$ e $\mathscr{D}^-$, respectivamente, então temos que

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial u_j} = 0 = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial v_j} \quad \forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{1.8}$$

Aplicando (1.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}+\frac{\partial}{\partial v_i}\right)(\bar{x}_j)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}+\frac{\partial}{\partial v_i}\right)\left(\frac{\bar{u}_j+\bar{v}_j}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial v_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{y}_j}{\partial y_i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}-\frac{\partial}{\partial u_i}\right)(\bar{y}_j)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}-\frac{\partial}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\bar{v}_j-\bar{u}_j}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}=\frac{\partial \bar{y}_j}{\partial y_i},\quad \forall\ i,j\in\{1,\cdots,n\}.$$

Analogamente, utilizando (1.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial y_i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}-\frac{\partial}{\partial u_i}\right)(\bar{x}_j)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_i}-\frac{\partial}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\bar{u}_j+\bar{v}_j}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial v_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}-\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial u_i}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{y}_j}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}+\frac{\partial}{\partial v_i}\right)(\bar{y}_j)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial u_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial v_i}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial v_i}-\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial y_i}=\frac{\partial \bar{y}_j}{\partial x_i},\quad \forall\ i,j\in\{1,\cdots,n\}.$$

Portanto, as funções de transição $\bar{x}_j=\bar{x}_j(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ e $\bar{y}_j=\bar{y}_j(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$

satisfazem as equações para-Cauchy-Riemann

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \bar{y}_j}{\partial y_i} \\ \\ \dfrac{\partial \bar{x}_j}{\partial y_i} = \dfrac{\partial \bar{y}_j}{\partial x_i} \end{array}\right. , \quad \forall\, i,j \in \{1,\cdots,n\}\,. \tag{1.9}$$

Para mostrar que J é, de fato, uma estrutura paracomplexa, resta mostrar que J pode ser definida, localmente, por $d\varphi_{\mathscr{U}} \circ J = \widetilde{J} \circ d\varphi_{\mathscr{U}}$, sendo $\varphi_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \subset M \longrightarrow \mathbb{D}^n$ uma carta do tal atlas construído, e $\widetilde{J}$ a estrutura paracomplexa canônica do $\mathbb{D}^n$. Usando tal carta, defina

$$J := d\varphi_{\mathscr{U}}^{-1} \circ \widetilde{J} \circ d\varphi_{\mathscr{U}}\,.$$

Obviamente, $J^2 = \mathrm{Id}$, pois $J^2 = d\varphi_{\mathscr{U}}^{-1} \circ \widetilde{J}^2 \circ d\varphi_{\mathscr{U}} = \mathrm{Id}$. Mostremos que J está bem definida: para isso, tome $\varphi_{\mathscr{U}'} : \mathscr{U}' \subset M \longrightarrow \mathbb{D}^n$ outra carta do atlas. Precisamos mostrar que

$$d\varphi_{\mathscr{U}'}^{-1} \circ \widetilde{J} \circ d\varphi_{\mathscr{U}'} = d\varphi_{\mathscr{U}}^{-1} \circ \widetilde{J} \circ d\varphi_{\mathscr{U}}\,,$$

ou equivalentemente,

$$\widetilde{J} \circ df = df \circ \widetilde{J}, \quad \text{com} \quad f = \varphi_{\mathscr{U}'} \circ \varphi_{\mathscr{U}}^{-1}.$$

Portanto,

$$df = d\varphi_{\mathscr{U}'} \circ d\varphi_{\mathscr{U}}^{-1}.$$

No entanto, como

$$df \quad = \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_n} \\ & & & \vdots & & \\ \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_1}{\partial y_n} \\ & & & \vdots & & \\ \dfrac{\partial \bar{y}_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \bar{y}_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

então podemos escrever

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{y}_k}$$

e

$$df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}_k}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial \bar{y}_k}.$$

Agora, pela definição do operador $\widetilde{J}$ em $\mathbb{D}^n$, temos

$$\widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_k}, \quad \widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k}, \quad \widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad \widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.10}$$

Aplicando (1.10), juntamente com as equações para-Cauchy-Riemann, dadas por (1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{J}\circ df\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \widetilde{J}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\bar{y}_k}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_k}{\partial x_i}\widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_k}{\partial x_i}\widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{y}_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\bar{y}_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{y}_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{y}_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\bar{x}_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{x}_k}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{y}_k}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial\bar{y}_k}\\
&= df\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\\
&= df\left(\widetilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\\
&= \left(df\circ\widetilde{J}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$\left(\widetilde{J}\circ df\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=\left(df\circ\widetilde{J}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

Portanto, $\widetilde{J}\circ df = df\circ\widetilde{J}$. Assim, completamos a construção de um atlas para-holomorfo sobre M, o qual define a estrutura quase-paracomplexa J, localmente, donde segue que J é uma estrutura paracomplexa.

Reciprocamente, se J é uma estrutura paracomplexa, então J pode ser escrita localmente por $J = d\varphi^{-1}\circ\widetilde{J}\circ d\varphi$, sendo φ uma carta para-holomorfa sobre M. Considerando tal φ com coordenadas $(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$, é fácil ver que J satisfaz

$$J(\partial_{x_i})=\partial_{y_i}\quad\text{e}\quad J(\partial_{y_i})=\partial_{x_i}.$$

Com base nesse sistema de coordenadas, considere as seguintes folheações:

$$\mathscr{F}^{\pm}:=\left\{F_c^{\pm}=\{x_i\pm y_i=c_i\ ;\ c=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n\}\right\}.$$

Assim, como

$$J(\partial_{x_i}+\partial_{y_i})=\partial_{x_i}+\partial_{y_i}\quad\text{e}\quad J(\partial_{x_i}-\partial_{y_i})=\partial_{y_i}-\partial_{x_i}=-(\partial_{x_i}-\partial_{y_i}),$$

temos que

$$TF_c^{\pm}=\mathscr{D}^{\pm},$$

onde $TF_c^{\pm}$ denota o espaço tangente às subvariedades $F_c^{\pm}$, que são chamadas de *folhas* da folheação $\mathscr{F}^{\pm}$. Assim, pela definição de integrabilidade, as distribuições $\mathscr{D}^{\pm}$ são integráveis. Logo, pelo Teorema de Frobenius, segue que $\mathscr{D}^{\pm}$ são involutivas. Finalmente, pela Proposição 1.4.2, segue o anulamento do tensor para-Nijenhuis, como queríamos. □

Observação 1.4.5. *Em relação ao caso complexo, a análise de quando uma estrutura quase-complexa J tal que $J^2=-\mathrm{Id}$ é uma estrutura complexa, exige uma complexificação de cada espaço*

tangente. Isso porque os autovalores de J são os números imaginários puros $\pm i$, com $i^2 = -1$.

A seguir, também relacionado ao anulamento do tensor para-Nijenhuis, daremos condições necessárias e suficientes para que uma variedade quase-paracomplexa seja uma variedade para-Kähler. Para isso, vamos supor que a métrica pseudo-riemanniana g seja *anti-hermitiana* com respeito à J, isto é, satisfaça $g(J\cdot, J\cdot) = -g(\cdot,\cdot)$.

Lema 1.4.2. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o operador*

$$\begin{aligned} \nabla_X J : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Y &\longmapsto (\nabla_X J)Y := \nabla_X JY - J(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $g((\nabla_X J)Y, Z) + g(Y, (\nabla_X J)Z) = 0$;

(ii) $J(\nabla_X J)Y = -(\nabla_X J)JY$.

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $X, Y \in T_xM$ arbitrários. Podemos estender X e Y numa vizinhança de x, denotando-os ainda por X e Y, e utilizar o Lema 1.3.1 de forma a garantir que $\nabla_X Y(x) = 0$. Agora, note que, para todo Y, temos

$$g(Y, JY) = g(J^2Y, JY) = -g(JY, Y) = -g(Y, JY).$$

Portanto, $g(Y, JY) = 0$ para todo Y. Diferenciando esta igualdade na direção X, obtemos

$$0 = Xg(Y, JY) = g(\nabla_X Y, JY) + g\left((\nabla_X J)Y, Y\right) + g(J(\nabla_X Y), Y).$$

Logo, $g\left((\nabla_X J)Y, Y\right) = 0$, $\forall\, Y$. Em particular,

$$g(Y + Z, (\nabla_X J)(Y + Z)) = 0.$$

Assim, a primeira igualdade segue pela bilinearidade da métrica g. Para provarmos a segunda igualdade, note que, por um lado

$$J\left((\nabla_X J)Y\right) = J\left(\nabla_X JY - J(\nabla_X Y)\right) = J\left(\nabla_X JY\right) - \nabla_X Y.$$

Mas, por outro lado,

$$(\nabla_X J)JY = \nabla_X J^2 Y - J\left(\nabla_X JY\right) = \nabla_X Y - J\left(\nabla_X JY\right).$$

Finalmente,

$$J(\nabla_X J)Y + (\nabla_X J)JY = 0.$$

□

Lema 1.4.3. *O tensor para-Nijenhuis N_*^J se anula se, e somente se,*

$$(\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Primeiramente, suponha que $(\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por definição de $\nabla_{(\cdot)} J$, temos

$$(\nabla_{JX} J)Y = \nabla_{JX} JY - J(\nabla_{JX} Y) \tag{1.11}$$

e

$$(\nabla_{JY} J)X = \nabla_{JY} JX - J(\nabla_{JY} X). \tag{1.12}$$

Da mesma forma, pela definição de $\nabla_{(\cdot)}J$, juntamente com o fato de que $J^2 = \mathrm{Id}$, temos

$$\nabla_X Y = J(\nabla_X JY) - J\left((\nabla_X J)Y\right) \tag{1.13}$$

e

$$\nabla_Y X = J(\nabla_Y JX) - J\left((\nabla_Y J)X\right). \tag{1.14}$$

Daí, utilizando (1.13) e (1.14) na segunda igualdade, e (1.11) e (1.12) na terceira igualdade, segue que

$$\begin{aligned}
& [X,Y] + [JX,JY] = \nabla_X Y - \nabla_Y X + \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX = \\
= \;& J(\nabla_X JY) - J((\nabla_X J)Y) - J(\nabla_Y JX) + J((\nabla_Y J)X) + \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX \\
= \;& J(\nabla_X JY) - J((\nabla_X J)Y) - J(\nabla_Y JX) + J((\nabla_Y J)X) + (\nabla_{JX} J)Y \\
& + J(\nabla_{JX} Y) - J(\nabla_{JY} X) - (\nabla_{JY} J)X \\
= \;& J\left(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X\right) + J\left(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX\right) - J((\nabla_X J)Y) + J((\nabla_Y J)X) \\
& + (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X \\
= \;& J[X,JY] + J[JX,Y] - J((\nabla_X J)Y) + J((\nabla_Y J)X) + (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$J[X,JY] + J[JX,Y] - [X,Y] - [JX,JY] = (\nabla_{JY} J)X - J((\nabla_Y J)X) - \left[(\nabla_{JX} J)Y - J((\nabla_X J)Y)\right].$$

Como, por hipótese, vale $(\nabla_{JX} J)Y = J((\nabla_X J)Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$[X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y] + [JX,JY] = 0,$$

donde segue o resultado. Para provarmos a recíproca, defina a forma trilinear

$$T_1(X,Y,Z) := g((\nabla_{JX} J)Y, Z) - g(J(\nabla_X J)Y, Z).$$

Como $N_*^J \equiv 0$, então, $\forall\ Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos $g(-[X,Y] - [JX,JY] + J[X,JY] + J[JX,Y], Z) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
& g\left(-\nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_{JX} JY + \nabla_{JY} JX, Z\right) + \\
& g\left(J(\nabla_X JY) - J(\nabla_{JY} X) + J(\nabla_{JX} Y) - J(\nabla_Y JX), Z\right) = 0.
\end{aligned}$$

Aplicando as identidades (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; g(J((\nabla_X J)Y) - J((\nabla_Y J)X) + (\nabla_{JY} J)X - (\nabla_{JX} J)Y, Z) \\
&=\; g(J((\nabla_X J)Y) - (\nabla_{JX} J)Y, Z) + g(-J((\nabla_Y J)X) + (\nabla_{JY} J)X, Z) \\
&=\; -T_1(X,Y,Z) + T_1(Y,X,Z).
\end{aligned}$$

Logo,

$$T_1(X,Y,Z) = T_1(Y,X,Z), \quad \forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.15}$$

Agora, utilizando o Lema 1.4.2, temos

$$\begin{aligned}
T_1(X,Y,Z) + T_1(X,Z,Y) \;&=\; g((\nabla_{JX} J)Y, Z) - g(J(\nabla_X J)Y, Z) + \\
& \quad g((\nabla_{JX} J)Z, Y) - g(J(\nabla_X J)Z, Y) \\
&=\; -g(Y, (\nabla_{JX} J)Z) + g((\nabla_X J)JY, Z) + \\
& \quad g((\nabla_{JX} J)Z, Y) + g((\nabla_X J)JZ, Y) \\
&=\; g((\nabla_X J)JY, Z) + g\big((\nabla_X J)JZ, J^2 Y\big) \\
&=\; g((\nabla_X J)JY, Z) - g(J(\nabla_X J)Z, J(J(Y))).
\end{aligned}$$

Além disso, segue do fato de que a métrica g é anti-hermitiana, que

$$\begin{aligned} T_1(X,Y,Z)+T_1(X,Z,Y) &= g((\nabla_X J)JY,Z)+g((\nabla_X J)Z,JY) \\ &= g((\nabla_X J)JY,Z)-g(Z,(\nabla_X J)JY) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T_1(X,Y,Z)=-T_1(X,Z,Y). \tag{1.16}$$

Assim, aplicando (1.15) e (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} T_1(X,Y,Z) &= T_1(Y,X,Z)=-T_1(Y,Z,X)=-T_1(Z,Y,X) \\ &= -(-T_1(Z,X,Y))=T_1(X,Z,Y) \\ &= -T_1(X,Y,Z), \end{aligned}$$

o que implica que $T_1(X,Y,Z)=0$, donde segue o resultado. □

Teorema 1.4.2. *Seja M uma variedade munida de uma estrutura quase-paracomplexa J e uma métrica pseudo-riemanniana g, a qual também deve ser anti-hermitiana com respeito à J. Defina $\omega := -g(J\cdot,\cdot)$. Então, a quádrupla (M,J,g,ω) é uma variedade para-Kähler se, e somente se,*

$$\nabla_X J=0, \quad \forall\ X\in\mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.

Demonstração. Assuma, primeiramente, que J seja *paralela* com respeito à conexão de Levi-Civita ∇ de g, ou seja, $\nabla_X J=0$ para todo $X\in\mathfrak{X}(M)$. Em particular, temos que $\nabla_{JX}J=0$. Portanto,

$$(\nabla_{JX}J)Y=0=J(\nabla_X J)Y, \quad \forall\ X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Logo, pelo Lema 1.4.3, temos que $N_*^J\equiv 0$, e então, pelo Teorema 1.4.1, obtemos que J é paracomplexa. Como a não-degeneracidade da 2-forma ω segue imediatamente da não-degeneracidade de g, falta apenas garantirmos que ω é alternada e fechada. No entanto, a primeira segue do fato de g ser anti-hermitiana com respeito à J. Com efeito, dado $X\in\mathfrak{X}(M)$, temos

$$\omega(X,X)=-g(JX,X)=-g(JX,J^2X)=g(X,JX)=g(JX,X).$$

Portanto, $\omega(X,X)=0$. Para provar que ω é fechada, note primeiramente que, sendo ∇ compatível com a métrica g, obtemos

$$\begin{aligned} X\omega(Y,Z) &= Xg(Y,JZ)=g(\nabla_X Y,JZ)+g(Y,\nabla_X JZ) \\ &= g(\nabla_X Y,JZ)+g(Y,J\nabla_X Z)=\omega(\nabla_X Y,Z)+\omega(Y,\nabla_X Z). \end{aligned}$$

Agora, utilizando tal identidade juntamente com a fórmula intrínseca para a diferencial exterior, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= X\omega(Y,Z)-Y\omega(X,Z)+Z\omega(X,Y)-\omega([X,Y],Z) \\ &\quad +\omega([X,Z],Y)-\omega([Y,Z],X) \\ &= \omega(\nabla_X Y-\nabla_Y X,Z)+\omega(Y,\nabla_X Z)+\omega(\nabla_Z X,Y) \\ &\quad +\omega(X,\nabla_Z Y-\nabla_Y Z)-\omega([X,Y],Z)+\omega([X,Z],Y) \\ &\quad -\omega([Y,Z],X) \\ &= \omega([Z,X],Y)-\omega([Z,Y],X)+\omega([X,Z],Y)-\omega([Y,Z],X) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde segue que ω é fechada. Agora, para provar a recíproca, suponha que (M, g, J, ω) seja uma variedade para-Kähler, e defina

$$T_2(X, Y, Z) := g((\nabla_X J)Y, Z).$$

Note que

$$T_2(X, Y, JZ) = g(J^2((\nabla_X J)Y), JZ) = -g(J((\nabla_X J)Y), Z) = g(((\nabla_X J)JY), Z)$$

e

$$T_2(JX, Y, Z) + T_2(X, Y, JZ) = g(J((\nabla_X J)Y), Z) + g(J^2((\nabla_X J)Y), JZ) = 0.$$

Desta forma, obtemos que

$$T_2(X, Y, JZ) = T_2(X, JY, Z) \quad \text{e} \quad T_2(JX, Y, Z) = -T_2(X, Y, JZ). \tag{1.17}$$

Para concluirmos, podemos supor, pelo Lema 1.3.1, que as derivadas dos campos X, Y e Z se anulem mutuamente. Assim, como ω é fechada, temos que

$$\begin{aligned}
0 = d\omega(X, Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) + \\
&\quad \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \\
&= X\left[-g(JY, Z)\right] - Y[-g(JX, Z)] + Z[-g(JX, Y)] \\
&= -[g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z)] + g(\nabla_Y JX, Z) + \\
&\quad g(JX, \nabla_Y Z) - [g(\nabla_Z JX, Y) + g(JX, \nabla_Z Y)] \\
&= -g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_Y JX, Z) - g(\nabla_Z JX, Y) \\
&= -g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)X, Z) - g((\nabla_Z J)X, Y) \\
&= -T_2(X, Y, Z) + T_2(Y, X, Z) - T_2(Z, X, Y).
\end{aligned}$$

Logo, aplicando a fórmula acima às triplas (X, Y, JZ) e (X, JY, Z), obtemos

$$-T_2(X, Y, JZ) + T_2(Y, X, JZ) - T_2(JZ, X, Y) = 0$$

e

$$-T_2(X, JY, Z) + T_2(JY, X, Z) - T_2(Z, X, JY) = 0.$$

Somando estas duas expressões, e utilizando as igualdades em (1.17), obtemos que

$$-2\ T_2(X, Y, JZ) = 0,$$

donde segue o resultado. □

Corolário 1.4.1. *A quádrupla $(\mathbb{D}^n, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_*, \omega)$ é uma variedade para-Kähler.*

Demonstração. No início da seção 1.2, provamos que tal J é um endomorfismo de $\mathbb{D}^n$ satisfazendo $J^2 = \mathrm{Id}$, dado por $J(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) = (y_1, x_1, \cdots, y_n, x_n)$. Além disso, podemos notar que $\dim\ker(J - \mathrm{Id}) = \dim\ker(J + \mathrm{Id}) = n$, uma vez que

$$\ker(J - \mathrm{Id}) = \mathrm{Span}\left\{(1, 1, 0, 0, \cdots, 0, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 0, 0, 1, 1)\right\}$$

e

$$\ker(J + \mathrm{Id}) = \mathrm{Span}\left\{(1, -1, 0, 0, \cdots, 0, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 0, 0, 1, -1)\right\}.$$

Portanto, J é, de fato, uma estrutura quase-paracomplexa. Além do mais, também no início da seção 1.2, mostramos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ é uma métrica pseudo-riemanniana anti-hermitiana com respeito à J, além de provarmos que ω é uma 2-forma simplética satisfazendo $\omega = -\langle J\cdot,\cdot\rangle_*$. Desta forma, todas as hipóteses do Teorema 1.4.2 são satisfeitas. Assim, para finalizarmos a demonstração deste

resultado, basta verificarmos que $D_X J = 0$, $\forall\ X \in \mathbb{D}^n$, sendo D a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{D}^n$, e aplicar o Teorema 1.4.2. Assim, como

$$D_X(JY) = D_X(\tau Y) = \tau D_X Y + X(\tau)Y = \tau D_X Y,$$

temos

$$(D_X J)(Y) = D_X(JY) - J(D_X Y) = \tau D_X Y - \tau D_X Y = 0,$$

donde segue que $D_X J = 0$ para todo $X \in \mathbb{D}^n$. □

Proposição 1.4.3. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade para-Kähler. O tensor curvatura R de g satisfaz as seguintes propriedades:*

(*a*) $R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y)$;

(*b*) $R(JX, JY) = -R(X,Y)$;

(*c*) $\mathrm{Ric}(JX, JY) = -\mathrm{Ric}(X,Y)$,

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de g. Como $\nabla_X J = 0$, então

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_{[X,Y]}JZ - \nabla_X\nabla_Y JZ + \nabla_Y\nabla_X JZ \\ &= J\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X(J\nabla_Y Z) + \nabla_Y(J\nabla_X Z) \\ &= J\nabla_{[X,Y]}Z - J\nabla_X\nabla_Y Z + J\nabla_Y\nabla_X Z \\ &= JR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

donde segue a primeira igualdade. Agora, aplicando o item (*d*) da Proposição 1.3.1, juntamente com o item (*a*) anterior, obtemos

$$\begin{aligned} g(R(JZ,JW)X,Y) &= g(R(X,Y)JZ, JW) = g(JR(X,Y)Z, JW) \\ &= -g(R(X,Y)Z, W) \\ &= -g(R(Z,W)X, Y). \end{aligned}$$

Assim, $R(JZ,JW)X + R(Z,W)X = 0$, $\forall\ X \in \mathfrak{X}(M)$, o que prova que $R(JZ,JW) = -R(Z,W)$. Finalmente, sendo $\{e_i\}$ um referencial ortonormal de M, com $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$, temos por definição que

$$\mathrm{Ric}(JX, JY) = \sum_i \epsilon_i\ g(R(e_i, JX)JY, e_i).$$

No entanto, aplicando o item (*a*) da Proposição 1.3.1 e levando em consideração que g é anti-hermitiana, juntamente com os itens (*a*) e (*b*) desta proposição, obtemos

$$\begin{aligned} g(R(e_i,JX)JY, e_i) &= -g(R(JX,JY)e_i, e_i) - g(R(JY,e_i)JX, e_i) \\ &= -g(-R(X,Y)e_i, e_i) - g(R(JY, J^2 e_i)JX, e_i) \\ &= g(R(X,Y)e_i, e_i) + g(R(Y, Je_i)JX, e_i) \\ &= g(R(X,Y)e_i, e_i) + g(JR(Y, Je_i)X, e_i) \\ &= g(R(X,Y)e_i, e_i) - g(R(Y, Je_i)X, Je_i) \\ &= -g(R(Y,e_i)X, e_i) - g(R(e_i,X)Y, e_i) - g(R(Y, Je_i)X, Je_i) \\ &:= -R(Y, e_i, X, e_i) - R(e_i, X, Y, e_i) - R(Y, Je_i, X, Je_i) \\ &= -R(X, e_i, Y, e_i) - R(e_i, X, Y, e_i) - R(X, Je_i, Y, Je_i) \\ &= R(e_i, X, Y, e_i) - R(e_i, X, Y, e_i) + R(Je_i, X, Y, Je_i) \\ &= g(R(Je_i, X)Y, Je_i). \end{aligned}$$

Sendo $\{Je_i\}$ também um referencial ortonormal para M, como $g(Je_i, Je_i) = -\epsilon_i$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(JX, JY) &= \sum_i \epsilon_i \; g(R(e_i, JX)JY, e_i) \\
&= \sum_i \epsilon_i \; g(R(Je_i, X)Y, Je_i) \\
&= -\sum_i (-\epsilon_i) \; g(R(Je_i, X)Y, Je_i) \\
&= -\mathrm{Ric}(X, Y).
\end{aligned}$$

□

1.5 Espaço projetivo paracomplexo

Considere o conjunto

$$\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} := \left\{ z \in \mathbb{D}^{n+1} \; ; \; \langle z, z \rangle_* \neq 0 \right\}$$

e defina a seguinte relação de equivalência:

$$z \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \; \lambda \in \mathbb{D}, \text{ com } \lambda\overline{\lambda} \neq 0, \text{ tal que } w = \lambda z.$$

A notação acima foi utilizada para ressaltar que estamos trabalhando no complementar do *cone de luz* no espaço $\mathbb{D}^{n+1}$. Além disso, o fato dos escalares λ serem considerados tais que $\lambda\overline{\lambda} \neq 0$ garante que a relação definida acima seja uma relação de equivalência.

Definição 1.5.1. *O* espaço projetivo paracomplexo *de dimensão paracomplexa n, denotado por $\mathbb{DP}^n$, é o quociente*

$$\mathbb{DP}^n := \frac{\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}}{\sim},$$

ou seja, o conjunto das classes de equivalência $[z] = \left\{ \lambda z \; ; \; \lambda \in \mathbb{D}, \; \lambda\overline{\lambda} \neq 0 \right\}$ determinadas por $\sim$.

Observação 1.5.1. *Suponha que $\lambda\overline{\lambda} > 0$. Assim, existem $r \in \mathbb{R}^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = re^{\tau\beta}$. Como*

$$\lambda z = re^{\tau\beta} z = (r \cosh \beta) z + (r \sinh \beta) Jz \in \mathrm{Span}\left\{ z, Jz \right\},$$

podemos pensar em $\mathbb{DP}^n$ como sendo o conjunto dos planos paracomplexos com métrica induzida não-degenerada, uma vez que $\langle \lambda z, \lambda z \rangle_* = \lambda\overline{\lambda} \langle z, z \rangle_* \neq 0$.

Vamos considerar em $\mathbb{DP}^n$ a topologia quociente dada pela projeção

$$\begin{array}{rccc}
\varphi : & \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbb{DP}^n \\
& z & \longmapsto & [z].
\end{array}$$

Com essa topologia, a aplicação φ é aberta. De fato, dado um aberto $V \subset \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$, como

$$\varphi^{-1}(\varphi(V)) = \left\{ \lambda z \; ; \; z \in V \text{ e } \lambda\overline{\lambda} \neq 0 \right\}$$

é um aberto de $\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$, segue que $\varphi(V)$ é um aberto do $\mathbb{DP}^n$. Desta forma, $\mathbb{DP}^n$ tem base enumerável, pois a imagem de uma base de abertos de $\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$ será uma base de abertos de $\mathbb{DP}^n$. Além disso, dadas duas classes distintas $[z], [w] \in \mathbb{DP}^n$, como os conjuntos $\left\{ \lambda z \; ; \; \lambda\overline{\lambda} \neq 0 \right\}$ e $\{ \mu z \; ; \; \mu\overline{\mu} \neq 0 \}$ são fechados e disjuntos, podemos separá-los em abertos disjuntos V e W. E assim, como as projeções $\varphi(V)$ e $\varphi(W)$ são abertos disjuntos separando $[z]$ e $[w]$, segue que $\mathbb{DP}^n$ é Hausdorff. Consequentemente, $\mathbb{DP}^n$ é uma variedade topológica. Finalmente, considere os abertos

$$U_i := \left\{ z \in \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} \; ; \; z_i . \overline{z_i} \neq 0 \right\},$$

os quais satisfazem

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \varphi(U_i) = \mathbb{DP}^n.$$

Dado $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$, defina as seguintes cartas em $\mathbb{DP}^n$:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & \varphi(U_i) & \longrightarrow & \mathbb{D}^n_\star := \{w \in \mathbb{D}^n \ ; \ \langle w, w\rangle_* \neq -1\} \\ & [z] & \longmapsto & \varphi_i([(z_1, \cdots, z_{n+1})]) = \left(\dfrac{z_1}{z_i}, \cdots, \dfrac{z_{i-1}}{z_i}, \dfrac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \dfrac{z_{n+1}}{z_i}\right). \end{array}$$

A verificação de que cada φ_i é uma aplicação bijetora é clara: se $\varphi_i([z]) = \varphi_i([z'])$, então

$$\frac{z_k}{z_i} = \frac{z'_k}{z'_i}, \quad \forall\, k \neq i.$$

Logo, $z = \dfrac{z_i}{z'_i} z'$, donde segue que $[z] = [z']$. Além disso, dado $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{D}^n_\star$, tomando $z_0 = (w_1, \cdots, w_{i-1}, 1, w_i, w_{i+1}, \cdots, w_n)$, obtemos $\varphi_i([z_0]) = w$, uma vez que $|w_1|^2_* + \cdots + |w_n|^2_* \neq -1$, e então $\langle z_0, z_0\rangle_* \neq 0$. Desta forma, as funções φ_i são homeomorfismos, cujas inversas são dadas por

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i^{-1} : & \mathbb{D}^n_\star & \longrightarrow & \varphi(U_i) \\ & (w_1, \cdots, w_n) & \longmapsto & [(w_1, \cdots, w_{i-1}, 1, w_i, \cdots, w_n)]. \end{array}$$

Finalmente, provemos que as aplicações consideradas são cartas para-holomorfas: de fato, dados $i \neq j$, digamos $i < j$, temos que a mudança de coordenadas é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(w_1, \cdots, w_n) &= \varphi_j([w_1, \cdots, w_{i-1}, 1, w_i, \cdots, w_j, \cdots, w_n]) \\ &= \left(\frac{w_1}{w_{j-1}}, \cdots, \frac{w_{i-1}}{w_{j-1}}, \frac{1}{w_{j-1}}, \frac{w_i}{w_{j-1}}, \cdots, \frac{w_{j-2}}{w_{j-1}}, \frac{w_j}{w_{j-1}}, \cdots, \frac{w_n}{w_{j-1}}\right). \end{aligned}$$

Escreva $w_k = x_k + \tau y_k$ e denote a k-ésima função componente da aplicação $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ por $u_k + \tau v_k$, onde $k \in \{1, \cdots, n\}$. Se $k \neq i$, então podemos verificar que

$$u_k = \frac{x_k x_{j-1} - y_k y_{j-1}}{x_{j-1}^2 - y_{j-1}^2} \quad \text{e} \quad v_k = \frac{y_k x_{j-1} - x_k y_{j-1}}{x_{j-1}^2 - y_{j-1}^2}.$$

Se $k = i$, então

$$u_i = \frac{x_{j-1}}{x_{j-1}^2 - y_{j-1}^2} \quad \text{e} \quad v_i = -\frac{y_{j-1}}{x_{j-1}^2 - y_{j-1}^2}.$$

Um cálculo direto mostra que todas as funções componentes satisfazem as equações para-Cauchy-Riemann. Desta forma, está demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 1.5.1. *O espaço projetivo paracomplexo $\mathbb{DP}^n$ é uma variedade paracomplexa de dimensão paracomplexa n.*

Lema 1.5.1. *A projeção $\varphi : \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{DP}^n$ dada por $\varphi(z) = [z]$ é para-holomorfa.*

Demonstração. De fato, dado $(\varphi(U_i), \varphi_i)$ carta de $\mathbb{DP}^n$, considere $z = (z_1, \cdots, z_{n+1}) \in U_i$. Então

$$\varphi_i(\varphi(z)) = \varphi_i([z]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \cdots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \cdots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right).$$

Escrevendo $z_l = x_l + \tau y_l$, para todo $l \in \{1, \cdots, n+1\}$, temos que a k-ésima função componente da aplicação $\varphi_i \circ \varphi$, digamos $f_k = u_k + \tau v_k$, é dada por

$$f_k(z) = u_k(z) + \tau v_k(z) = \left(\frac{x_k x_i - y_k y_i}{x_i^2 - y_i^2}\right) + \tau \left(\frac{y_k x_i - x_k y_i}{x_i^2 - y_i^2}\right).$$

Assim, para todo $k \neq i$, temos

$$(u_k)_{x_k} = (v_k)_{y_k} = \frac{x_i}{x_i^2 - y_i^2} \quad \text{e} \quad (u_k)_{y_k} = (v_k)_{x_k} = -\frac{y_i}{x_i^2 - y_i^2}.$$

Além disso, temos

$$(u_k)_{x_i} = (v_k)_{y_i} = \frac{2x_i y_i y_k - x_k\left(x_i^2 + y_i^2\right)}{\left(x_i^2 - y_i^2\right)^2} \quad \text{e} \quad (u_k)_{x_i} = (v_k)_{y_i} = \frac{2x_k x_i y_i - y_k\left(x_i^2 + y_i^2\right)}{\left(x_i^2 - y_i^2\right)^2}.$$

Portanto, como as equações para-Cauchy-Riemann são satisfeitas, segue que a aplicação φ é para-holomorfa. □

Fazendo a identificação $\mathbb{D}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, nota-se facilmente que toda função para-holomorfa é uma função diferenciável. Em particular, a função φ é diferenciável. Sendo $\mathbb{Q}$ uma subvariedade imersa do $\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$, segue que a restrição a seguir é diferenciável

$$\begin{array}{rccc} \pi := \varphi|_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{DP}^n \\ & z & \longmapsto & [z], \end{array}$$

onde

$$\mathbb{Q} := \left\{ z \in \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} \ ; \ \langle z, z \rangle_* = 1 \right\}.$$

Observação 1.5.2. *Até o final deste capítulo, toda vez que nos referirmos à aplicação projeção, estará subentendido que tal aplicação se trata de π definida acima.*

Proposição 1.5.1. *Dados $z, z' \in \mathbb{Q}$, temos que $\pi(z) = \pi(z')$ se, e somente se, $z' = \pm e^{\tau\theta} z$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $\pi(z) = \pi(z')$, então $\exists\, \lambda \in \mathbb{D}^*$ tal que $z' = \lambda z$. No entanto, como $z, z' \in \mathbb{Q}$, temos

$$1 = \left\langle z', z' \right\rangle_* = \langle \lambda z, \lambda z \rangle_* = \lambda\overline{\lambda}\langle z, z \rangle_* = \lambda\overline{\lambda},$$

donde segue que o número paracomplexo λ satisfaz $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Logo, em coordenadas polares, podemos escrever $\lambda = \pm e^{\tau\theta}$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$. □

Observação 1.5.3. *Dado $z \in \mathbb{Q}$, a aplicação $z \longmapsto Jz$ define um campo de vetores sobre $\mathbb{Q}$, denominado de* campo de Reeb. *De fato, como*

$$T_z\mathbb{Q} = \left\{ w \in \mathbb{D}^{n+1} \ ; \ \langle w, z \rangle_* = 0 \right\},$$

tem-se que $Jz \in T_z\mathbb{Q}$, uma vez que

$$\langle Jz, z \rangle_* = \langle Jz, J(Jz) \rangle_* = -\langle z, Jz \rangle_* = -\langle Jz, z \rangle_*.$$

Lema 1.5.2. *A aplicação $d\pi_z : T_z\mathbb{Q} \longrightarrow T_{\pi(z)}\mathbb{DP}^n$ é sobrejetiva. Além disso, o núcleo de $d\pi_z$ é o conjunto formado por todos os múltiplos do vetor Jz, ou seja,* $\ker(d\pi_z) = [Jz]$.

Demonstração. Com efeito, considere a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{Q}$, dada por $\alpha(t) = e^{\tau t} z$. Note que $\alpha(t) \in \mathbb{Q}$, para todo t e $\alpha(0) = z$. Além disso,

$$\alpha'(t) = \tau e^{\tau t} z \quad \Longrightarrow \quad \alpha'(0) = \tau z = Jz.$$

Porém, como $(\pi \circ \alpha)(t) = \pi\left(e^{\tau t} z\right) = \pi(z)$, segue $d\pi_z(Jz) = (\pi \circ \alpha)'(0) = 0$. Logo, $[Jz] \subset \ker(d\pi_z)$. Provemos agora que $\ker(d\pi_z) \subset [Jz]$: para isso, tome $v \in \ker(d\pi_z)$ unitário, digamos $\langle v, v \rangle_* = 1$, e considere a curva $\gamma(t) = z\cos t + v \sin t$. Note que

$$\gamma(0) = z \quad \text{e} \quad \gamma'(0) = v.$$

Além disso, γ é uma curva em $\mathbb{Q}$, uma vez que

$$\begin{aligned}\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle_* &= \langle z\cos t + v\sin t, z\cos t + v\sin t\rangle_* \\ &= \cos^2 t\langle z,z\rangle_* + 2\cos t\sin t\langle z,v\rangle_* + \sin^2 t\langle v,v\rangle_* \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t = 1.\end{aligned}$$

Na terceira igualdade acima usamos o fato de $\langle z,v\rangle_* = 0$. Além disso, se tivéssemos considerado v do tipo tempo, ou seja, $\langle v,v\rangle_* = -1$, bastaria tomarmos a curva $\widetilde{\gamma}(t) = z\cosh t + v\sinh t$. Assim, escrevendo z e v em coordenadas paracomplexas, tem-se

$$\begin{aligned}\pi(\gamma(t)) &= \pi(z\cos t + v\sin t) \\ &= \pi\left(\cos t(z_1,\cdots,z_{n+1}) + \sin t(v_1,\cdots,v_{n+1})\right) \\ &= \pi\left(z_1\cos t + v_1\sin t,\cdots,z_{n+1}\cos t + v_{n+1}\sin t\right).\end{aligned}$$

Logo, considerando que $\pi(z)$ pertence à alguma carta (U_i, f_i) de $\mathbb{DP}^n$, para algum $i \in \{1,\cdots,n+1\}$, segue que

$$\begin{aligned}f_i\left(\pi(\gamma(t))\right) &= f_i\left(\pi\left(z_1\cos t + v_1\sin t,\cdots,z_{n+1}\cos t + v_{n+1}\sin t\right)\right) \\ &= f_i\left[(z_1\cos t + v_1\sin t,\cdots,z_{n+1}\cos t + v_{n+1}\sin t)\right] \\ &= \left(\frac{z_1\cos t + v_1\sin t}{z_i\cos t + v_i\sin t},\cdots,\frac{z_{n+1}\cos t + v_{n+1}\sin t}{z_i\cos t + v_i\sin t}\right).\end{aligned}$$

Derivando a expressão acima e avaliando em $t = 0$, obtemos

$$(f_i\circ\pi\circ\gamma)'(0) = \left(\frac{v_1z_i - z_1v_i}{v_i^2},\cdots,\frac{v_{i-1}z_i - z_{i-1}v_i}{v_i^2},\frac{v_{i+1}z_i - z_{i+1}v_i}{v_i^2},\cdots,\frac{v_{n+1}z_i - z_{n+1}v_i}{v_i^2}\right).$$

No entanto, como $v \in \ker(d\pi_z)$, segue que $0 = d\pi_z(v) = d\pi_z(\gamma'(0)) = (\pi\circ\gamma)'(0)$. Assim, o vetor acima é nulo, ou seja, $v_kz_i - z_kv_i = 0$, para todo $k \in \{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n+1\}$. Logo,

$$\begin{aligned}v = (v_1,\cdots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\cdots,v_{n+1}) &= \left(\frac{z_1}{z_i}v_i,\cdots,\frac{z_{i-1}}{z_i}v_i,v_i,\frac{z_{i+1}}{z_i}v_i,\cdots,\frac{z_{n+1}}{z_i}v_i\right) \\ &= \frac{v_i}{z_i}\left(z_1,\cdots,z_{i-1},z_i,z_{i+1},\cdots,z_{n+1}\right) \\ &= \frac{v_i}{z_i}z.\end{aligned}$$

Escrevendo $\dfrac{v_i}{z_i} := a + \tau b$ e levando em consideração que v é perpendicular a z, tem-se que

$$0 = \langle z, az + \tau bz\rangle_* = a\langle z,z\rangle_* + b\langle z,Jz\rangle_*,$$

e portanto, $a = 0$. Logo, $v = \tau bz = bJz$, como queríamos. Finalmente, como $\ker(d\pi_z) = [Jz]$, segue que $d\pi_z$ tem nulidade 1. Além disso, $\dim(T_z\mathbb{Q}) = 2n+1$. Assim, pelo *Teorema do núcleo e da imagem*, segue a sobrejetividade da diferencial $d\pi_z$. □

Doravante, consideraremos a decomposição

$$T_z\mathbb{Q} = (Jz)^\perp \oplus [Jz],$$

onde $(Jz)^\perp$ é a *distribuição do hiperplano* dada por:

$$(Jz)^\perp = d\pi^{-1}\left(T_{\pi(z)}\mathbb{DP}^n\right).$$

Além disso, dado um vetor $X = X^h + X^v \in T_z\mathbb{Q}$, referir-nos-emos às componentes X^h e X^v como

componentes horizontal e vertical de X, respectivamente.

Teorema 1.5.2. *Dado um campo de vetores X sobre $\mathbb{DP}^n$, existe um único campo $\widetilde{X}$ sobre $\mathbb{Q}$, chamado de* levantamento horizontal *de X tal que*

$$d\pi(\widetilde{X})(z) = X(\pi(z)) \quad e \quad \widetilde{X}(z) \in (Jz)^{\perp}, \ \forall\, z \in \mathbb{Q}.$$

Demonstração. Para comprovar a existência, basta utilizar o fato de que a aplicação π é uma submersão, garantida pelo Lema 1.5.2. Desta forma, obtemos um campo $\widetilde{X}$ sobre $\mathbb{Q}$, onde, em cada ponto $z \in \mathbb{Q}$, podemos considerar apenas a parte horizontal do vetor $\widetilde{X}(z)$, uma vez que sua componente vertical é levada, pela diferencial, ao vetor nulo. Para provar a unicidade, suponha que exista um outro campo $\widetilde{Y}$ sobre $\mathbb{Q}$ satisfazendo as mesmas condições que o campo $\widetilde{X}$. Se $\widetilde{X} \neq \widetilde{Y}$, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $\widetilde{X}(p) \neq \widetilde{Y}(p)$. Assim, denotando $v := \widetilde{X}(p) - \widetilde{Y}(p)$, que é um vetor horizontal não-nulo, obtemos que $d\pi(v) = 0$, donde segue o absurdo. □

Definição 1.5.2. *Considere as seguintes estruturas sobre o espaço $\mathbb{DP}^n$:*

$$\mathbb{J}X := d\pi\left(J\widetilde{X}\right), \quad \mathbb{G}(X,Y) := \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \right\rangle_* \quad e \quad \varpi(X,Y) := -\mathbb{G}(\mathbb{J}X, Y),$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$.

Observação 1.5.4. *Note que definimos a estrutura $\mathbb{J}$ acima fazendo uso da estrutura paracomplexa canônica do espaço $\mathbb{D}^{n+1}$, restrita ao conjunto $\mathbb{Q}$. Assim, como o vetor tangente $\widetilde{X}$ é um vetor horizontal, temos que $J\widetilde{X}$ também é um vetor tangente à subvariedade $\mathbb{Q}$. De fato, basta notar que*

$$\left\langle J\widetilde{X}, z \right\rangle_* = -\left\langle J^2\widetilde{X}, Jz \right\rangle_* = -\left\langle \widetilde{X}, Jz \right\rangle_* = 0.$$

Proposição 1.5.2. *As estruturas definidas anteriormente satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $\mathbb{J}$ é uma estrutura quase-paracomplexa sobre $\mathbb{DP}^n$;

(ii) $\mathbb{G}$ é uma métrica pseudo-riemanniana anti-hermitiana com respeito a $\mathbb{J}$;

(iii) ϖ é uma 2-forma alternada e satisfaz $\varpi(X,Y) = \omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}), \ \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$.

Demonstração. Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$, note que $\widetilde{d\pi(J\widetilde{X})} = J\widetilde{X}$, sendo $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal de X, garantido pelo Teorema 1.5.2. Assim, como $J^2 = \mathrm{Id}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}^2(X) &= \mathbb{J}(\mathbb{J}(X)) = \mathbb{J}(d\pi(J\widetilde{X})) \\
&= d\pi\left(J(\widetilde{d\pi(J\widetilde{X})})\right) \\
&= d\pi(J(J\widetilde{X})) \\
&= d\pi(\widetilde{X}) \\
&= X,
\end{aligned}$$

donde segue que o endomorfismo $\mathbb{J}$ satisfaz $\mathbb{J}^2 = \mathrm{Id}$. Provemos que $\dim \mathrm{Ker}(\mathbb{J} - \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbb{J} + \mathrm{Id})$. Primeiramente, note que os autovetores de $J|_{\mathbb{Q}}$ são os autovalores de J normalizados. Portanto, eles têm a mesma multiplicidade quando restritos à $\mathbb{Q}$. Por outro lado, seja v um autovetor de $J|_{\mathbb{Q}}$. Então v deve ser, necessariamente, horizontal. De fato, se v fosse vertical, digamos $v = \mu Jz$, então o autovalor λ associado a ele seria nulo, uma vez que

$$\lambda = \langle \lambda v, v \rangle_* = \langle Jv, v \rangle_* = \bar{\mu}\langle Jv, Jz \rangle_* = -\bar{\mu}\langle v, z \rangle_* = 0.$$

Agora, dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$, note que

$$(\mathbb{J} \pm \mathrm{Id})(X) = \mathbb{J}(X) \pm X = d\pi\left(J\widetilde{X}\right) \pm d\pi\left(\widetilde{X}\right) = d\pi\left((J \pm \mathrm{Id})\widetilde{X}\right),$$

sendo $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal de X. Desta forma, temos que $X \in \mathrm{Ker}(\mathbb{J} \pm \mathrm{Id})$ se, e somente se, $(J \pm \mathrm{Id})(\widetilde{X}) \in \ker(d\pi_z)$. Logo, pelo Lema 1.5.2, temos que $J\widetilde{X} \pm \widetilde{X} = \eta J z$, para algum η. Porém, como $\langle Jz, Jz\rangle_* = -1$, obtemos

$$-\eta = \eta\langle Jz, Jz\rangle_* = \left\langle J\widetilde{X}, Jz\right\rangle_* \pm \left\langle \widetilde{X}, Jz\right\rangle_* = \left\langle J\widetilde{X}, Jz\right\rangle_* = -\left\langle \widetilde{X}, z\right\rangle_* = 0.$$

Assim, como

$$X \in \mathrm{Ker}(\mathbb{J} \pm \mathrm{Id}) \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{X} \in \mathrm{Ker}(J \pm \mathrm{Id}),$$

então todo autovetor de $\mathbb{J}$ estará associado ao mesmo autovalor do levantamento horizontal correspondente, o que prova o item (i). A prova de que $\mathbb{G}$ é uma métrica pseudo-riemanniana segue imediatamente do fato de $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ ser pseudo-riemanniana. Além disso, para provar que $\mathbb{G}$ é anti-hermitiana com respeito a $\mathbb{J}$, basta notar que

$$\mathbb{G}(\mathbb{J}X, \mathbb{J}Y) = \left\langle \widetilde{d\pi(J\widetilde{X})}, \widetilde{d\pi(J\widetilde{Y})}\right\rangle_* = \left\langle J\widetilde{X}, J\widetilde{Y}\right\rangle_* = -\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* = -\mathbb{G}(X, Y).$$

Em relação ao item (iii), temos

$$\begin{aligned}
\varpi(X, Y) &= -\mathbb{G}(\mathbb{J}X, Y) = -\mathbb{G}(d\pi(J\widetilde{X}), Y) \\
&= -\left\langle \widetilde{d\pi(J\widetilde{X})}, \widetilde{Y}\right\rangle_* \\
&= -\left\langle J\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* \\
&= \omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y}).
\end{aligned}$$

□

Observação 1.5.5. *A seguir, denotaremos por D a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{D}^{n+1}$, por ∇^* a conexão de Levi-Civita da métrica induzida em $\mathbb{Q}$, e por $\nabla^{\mathbb{G}}$ a conexão de Levi-Civita referente à métrica $\mathbb{G}$. Além disso, denotaremos por R^D, R^* e $R^{\mathbb{G}}$ os seus respectivos tensores curvatura.*

Lema 1.5.3. *A subvariedade*

$$\mathbb{Q} = \left\{z \in \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C} \ ; \ \langle z, z\rangle_* = 1\right\}$$

é totalmente umbílica em $\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$.

Demonstração. Sejam X um campo de vetores sobre $\mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{Q}$. Considere α uma curva regular em $\mathbb{Q}$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X$. Como

$$\langle \alpha(s), \alpha(s)\rangle_* = 1, \ \ \forall\, s \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \alpha'(s), \alpha(s)\right\rangle_* = 0, \ \ \forall\, s.$$

Em particular, $\langle X, x\rangle_* = 0$, donde segue que o espaço tangente à $\mathbb{Q}$ em x é igual a $x^\perp$. Assim, podemos considerar o campo vetorial normal unitário N em $\mathbb{Q}$, definido por

$$N(x) = -x.$$

Como

$$D_X N = D_X(-x) = -D_X x = -X, \tag{1.18}$$

então $D_X N$ só possui componente tangente. Logo,

$$-A_N X = D_X N = -X.$$

Assim, sendo o operador de Weingarten A_N a aplicação identidade, segue o resultado. □

Proposição 1.5.3. *O tensor curvatura R^* da métrica induzida sobre $\mathbb{Q}$ é dado pela seguinte fórmula:*

$$R^*(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle_* Y - \langle Y,Z\rangle_* X, \tag{1.19}$$

quaisquer que sejam os campos de vetores X, Y e Z sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Sejam X, Y e Z campos de vetores sobre $\mathbb{Q}$. Estendendo-os a campos de vetores em $\mathbb{D}^{n+1}$, temos, pela fórmula de Gauss

$$D_X Y = (D_X Y)^\top + (D_X Y)^\perp = \nabla^*_X Y + h(X,Y). \tag{1.20}$$

Como $h(X,Y)$ é um campo vetorial normal a $\mathbb{Q}$, temos que

$$h(X,Y) = \langle h(X,Y), N\rangle_* N,$$

onde N é o vetor normal unitário considerado no Lema 1.5.3. Portanto, substituindo a igualdade anterior em (1.20), e levando em consideração que a subvariedade $\mathbb{Q}$ é umbílica, segue que

$$\begin{aligned} D_X Y &= \nabla^*_X Y + \langle h(X,Y), N\rangle_* N \\ &= \nabla^*_X Y + \langle A_N(X), Y\rangle_* N \\ &= \nabla^*_X Y + \langle \mathrm{Id}(X), Y\rangle_* N, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$D_X Y = \nabla^*_X Y + \langle X,Y\rangle_* N. \tag{1.21}$$

Utilizando a igualdade (1.21) em cada termo do tensor curvatura, juntamente com a igualdade (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} R^D(X,Y)Z &= D_Y D_X Z - D_X D_Y Z + D_{[X,Y]} Z \\ &= D_Y\left(\nabla^*_X Z + \langle X,Z\rangle_* N\right) - D_X\left(\nabla^*_Y Z + \langle Y,Z\rangle_* N\right) + \\ &\quad \nabla^*_{[X,Y]} Z + \langle [X,Y], Z\rangle_* N \\ &= D_Y\left(\nabla^*_X Z\right) + D_Y\left(\langle X,Z\rangle_* N\right) - D_X\left(\nabla^*_Y Z\right) - D_X\left(\langle Y,Z\rangle_* N\right) + \\ &\quad \nabla^*_{[X,Y]} Z + \langle [X,Y], Z\rangle_* N \\ &= \nabla^*_Y\left(\nabla^*_X Z\right) + \langle Y, \nabla^*_X Z\rangle_* N - \nabla^*_X\left(\nabla^*_Y Z\right) - \langle X, \nabla^*_Y Z\rangle_* N + \\ &\quad \nabla^*_{[X,Y]} Z + \langle [X,Y], Z\rangle_* N + D_Y\left(\langle X,Z\rangle_* N\right) - D_X\left(\langle Y,Z\rangle_* N\right) \\ &= \nabla^*_Y \nabla^*_X Z - \nabla^*_X \nabla^*_Y Z + \nabla^*_{[X,Y]} Z + \langle Y, \nabla^*_X Z\rangle_* N + \\ &\quad \langle [X,Y], Z\rangle_* N - \langle X, \nabla^*_Y Z\rangle_* N + \langle X,Z\rangle_* D_Y N + \\ &\quad Y\left(\langle X,Z\rangle_*\right) N - \langle Y,Z\rangle_* D_X N - X\left(\langle Y,Z\rangle_*\right) N \\ &= R^*(X,Y)Z + \langle Y, \nabla^*_X Z\rangle_* N + \langle [X,Y], Z\rangle_* N - \langle X, \nabla^*_Y Z\rangle_* N + \\ &\quad Y\left(\langle X,Z\rangle_*\right) N - X\left(\langle Y,Z\rangle_*\right) N + \langle X,Z\rangle_* D_Y N - \langle Y,Z\rangle_* D_X N \\ &= R^*(X,Y)Z + \langle Y, \nabla^*_X Z\rangle_* N + \langle [X,Y], Z\rangle_* N - \langle X, \nabla^*_Y Z\rangle_* N + \\ &\quad Y\left(\langle X,Z\rangle_*\right) N - X\left(\langle Y,Z\rangle_*\right) N - \langle X,Z\rangle_* Y + \langle Y,Z\rangle_* X. \end{aligned}$$

No entanto, como estamos considerando a conexão usual D do $\mathbb{D}^{n+1}$, a qual é *flat*, ou seja, $R^D \equiv 0$, as partes tangente e normal da igualdade acima se anulam. Portanto, temos que

$$R^*(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle_* Y - \langle Y,Z\rangle_* X.$$

□

Corolário 1.5.1. *A subvariedade $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$ é uma variedade de Einstein.*

Demonstração. Sendo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}^{n+1} \setminus \mathscr{C}$ uma hipersuperfície, seja $\{e_1, \cdots, e_{2n+1}\}$ um referencial ortonormal sobre $\mathbb{Q}$, com $\epsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle_* = \pm 1$. Aplicando a Proposição 1.5.3, temos que a curvatura de

Ricci é dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^*(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \langle R^*(e_i,X)Y, e_i\rangle_* \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \langle \langle e_i, Y\rangle_* X - \langle X, Y\rangle_* e_i, e_i\rangle_* \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \left[\langle e_i, Y\rangle_* \langle X, e_i\rangle_* - \langle X, Y\rangle_* \langle e_i, e_i\rangle_*\right] \\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \langle e_i, Y\rangle_* \langle X, e_i\rangle_* - \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \langle X, Y\rangle_* \langle e_i, e_i\rangle_* \\
&= \left\langle X, \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i \langle e_i, Y\rangle_* e_i \right\rangle_* - \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i^2 \langle X, Y\rangle_* \\
&= \langle X, Y\rangle_* - (2n+1)\langle X, Y\rangle_* \\
&= -2n\langle X, Y\rangle_*.
\end{aligned}$$

Tomando $\lambda = -2n$, temos que

$$\mathrm{Ric}^*(X,Y) = \lambda \langle X, Y\rangle_*$$

para todos X e Y, donde segue que $\mathbb{Q}$ é uma variedade de Einstein. □

Lema 1.5.4. *A projeção $\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{DP}^n$ e a estrutura J satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $[X,Y] \circ \pi = d\pi\left([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\right)$;

(ii) $D_{\widetilde{X}} Jz = J\widetilde{X}$.

Demonstração. Dado X campo de vetores em $\mathbb{DP}^n$, temos que

$$X\mathbb{G}(Y,Y) = \mathbb{G}\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Y, Y\right) + \mathbb{G}\left(Y, \nabla^{\mathbb{G}}_X Y\right) = 2\mathbb{G}\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Y, Y\right) = 2\left\langle \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y}, \widetilde{Y}\right\rangle_*,$$

para todo campo de vetores Y em $\mathbb{DP}^n$. Por outro lado, temos

$$X\mathbb{G}(Y,Y) = X\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\right\rangle_* = \left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\right\rangle_* + \left\langle \widetilde{Y}, \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right\rangle_* = 2\left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\right\rangle_*.$$

Desta forma, $\left\langle \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y} - \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\right\rangle_* = 0$. Logo, o campo vetorial $\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y} - \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ é vertical e, assim,

$$0 = d\pi\left(\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y} - \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right) = d\pi\left(\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y}\right) - d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right) = \nabla^{\mathbb{G}}_X Y - d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right).$$

Portanto, obtemos

$$d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right) = \nabla^{\mathbb{G}}_X Y,$$

donde segue a primeira igualdade, pois

$$[X,Y] \circ \pi = \nabla^{\mathbb{G}}_X Y - \nabla^{\mathbb{G}}_Y X = d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla^*_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}\right) = d\pi\left([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\right).$$

Agora, estendendo localmente o campo $\widetilde{X}$ a um campo em $\mathbb{D}^{n+1}$, cuja extensão continuaremos denotando por $\widetilde{X}$, temos que

$$D_{\widetilde{X}} Jz = D_{\widetilde{X}}(\tau z) = \tau D_{\widetilde{X}} z = J\left(D_{\widetilde{X}} z\right). \tag{1.22}$$

Assim, tomando uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ tal que $\alpha(0) = z$ e $\alpha'(0) = \widetilde{X}$, por exemplo $\alpha(t) = z\cosh t + \widetilde{X}\sinh t$, temos por definição que $D_{\widetilde{X}} z = \widetilde{X}$. Logo, de (1.22), segue que

$$D_{\widetilde{X}} Jz = J\widetilde{X}.$$

□

Observação 1.5.6. *Note que a primeira igualdade do Lema 1.5.4 nos garante que a componente horizontal de $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ é o campo horizontal básico correspondente ao campo $[X, Y]$. No entanto, sendo $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ horizontais, não podemos afirmar que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ é horizontal.*

Proposição 1.5.4. *Sejam X e Y campos de vetores sobre $\mathbb{DP}^n$. Então, vale a seguinte relação:*

$$\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y} + \varpi(Y, X) Jz. \tag{1.23}$$

Demonstração. Pela *fórmula de Koszul*, obtemos

$$\begin{aligned}
2\,\mathbb{G}\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Y, Z\right) &= X\mathbb{G}(Y,Z) + Y\mathbb{G}(X,Z) - Z\mathbb{G}(X,Y) + \\
&\quad \mathbb{G}([X,Y],Z) - \mathbb{G}([X,Z],Y) - \mathbb{G}([Y,Z],X) \\
&= \widetilde{X}\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\rangle_* + \widetilde{Y}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\right\rangle_* - \widetilde{Z}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* + \\
&\quad \mathbb{G}\left(d\pi[\widetilde{X}, \widetilde{Y}], Z\right) - \mathbb{G}\left(d\pi[\widetilde{X}, \widetilde{Z}], Y\right) - \mathbb{G}\left(d\pi[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}], X\right) \\
&= \widetilde{X}\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\rangle_* + \widetilde{Y}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\right\rangle_* - \widetilde{Z}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* + \\
&\quad \left\langle \widetilde{d\pi[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]}, \widetilde{Z}\right\rangle_* - \left\langle \widetilde{d\pi[\widetilde{X}, \widetilde{Z}]}, \widetilde{Y}\right\rangle_* - \left\langle \widetilde{d\pi[\widetilde{Y}, \widetilde{Z}]}, \widetilde{X}\right\rangle_* \\
&= \widetilde{X}\left\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\rangle_* + \widetilde{Y}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\right\rangle_* - \widetilde{Z}\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* + \\
&\quad \left\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \widetilde{Z}\right\rangle_* - \left\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Z}], \widetilde{Y}\right\rangle_* - \left\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}], \widetilde{X}\right\rangle_* \\
&= 2\left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\right\rangle_* \\
&= 2\left\langle \widetilde{d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)}, \widetilde{Z}\right\rangle_* \\
&= 2\,\mathbb{G}\left(d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right), Z\right),
\end{aligned}$$

donde segue

$$\nabla^{\mathbb{G}}_X Y = d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right). \tag{1.24}$$

Agora, como $\widetilde{Y}(z) \in (Jz)^\perp$, para todo $z \in \mathbb{Q}$, temos que $\left\langle \widetilde{Y}, Jz\right\rangle_* = 0$. Daí, derivando tal igualdade na direção $\widetilde{X}$, estendido ao espaço $\mathbb{D}^{n+1}$, ou seja, utilizando a conexão D, obtemos

$$\left\langle D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, Jz\right\rangle_* = -\left\langle \widetilde{Y}, D_{\widetilde{X}} Jz\right\rangle = -\left\langle J(J\widetilde{Y}), J\widetilde{X}\right\rangle = \left\langle J\widetilde{Y}, \widetilde{X}\right\rangle_* = -\varpi(Y, X).$$

Por outro lado, sendo $\mathbb{Q}$ totalmente umbílica, temos por (1.21) que

$$\begin{aligned}
\left\langle D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, Jz\right\rangle_* &= \left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} + \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* N, Jz\right\rangle_* \\
&= \left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, Jz\right\rangle_* + \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* \langle N, Jz\rangle_* \\
&= \left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, Jz\right\rangle_*,
\end{aligned}$$

pois $N(z) = -z$ é o vetor normal à $\mathbb{Q}$ em z, e $Jz \in T_z\mathbb{Q}$. Assim, $\left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, Jz \right\rangle_* = -\varpi(Y,X)$. Portanto, como $|Jz|^2_* = -1$, obtemos

$$\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)^v = \varpi(Y,X)Jz. \tag{1.25}$$

Finalmente por (1.24) e (1.25), segue que

$$\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y} + \varpi(Y,X)Jz.$$

□

Teorema 1.5.3. *A quádrupla* $(\mathbb{DP}^n, \mathbb{J}, \mathbb{G}, \varpi)$ *é uma variedade para-Kähler.*

Demonstração. Note que definimos $\varpi = -\mathbb{G}(\mathbb{J}\cdot,\cdot)$ e já verificamos, na Proposição 1.5.2, que $\mathbb{G}$ é uma métrica pseudo-riemanniana anti-hermitiana e $\mathbb{J}$ é uma estrutura quase-paracomplexa. Assim, pelo Teorema 1.4.2, o resultado seguirá se provarmos que $\mathbb{J}$ é paralela com respeito à conexão de Levi-Civita $\nabla^{\mathbb{G}}$, ou seja, que $\nabla^{\mathbb{G}}_X\mathbb{J} = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$. Assim, dados X e Y campos de vetores sobre $\mathbb{DP}^n$, temos, pela Proposição 1.5.4,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathbb{G}}_X \mathbb{J}Y &= \nabla^{\mathbb{G}}_X \left(d\pi(J\widetilde{Y})\right) \\
&= d\pi\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X \widetilde{\left(d\pi(J\widetilde{Y})\right)}\right) \\
&= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} \widetilde{\left(d\pi(J\widetilde{Y})\right)} - \varpi\left(d\pi(J\widetilde{Y}), X\right) Jz\right) \\
&= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} J\widetilde{Y}\right).
\end{aligned}$$

No entanto, utilizando que a estrutura J é paralela com respeito à conexão D e que $\mathbb{Q}$ é totalmente umbílica, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathbb{G}}_X \mathbb{J}Y &= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}} J\widetilde{Y}\right) \\
&= d\pi\left(\left[D_{\widetilde{X}} J\widetilde{Y}\right]^{\top}\right) \\
&= d\pi\left(\left[J\left(D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right)\right]^{\top}\right) \\
&= d\pi\left(\left[J\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* z\right)\right]^{\top}\right) \\
&= d\pi\left(\left[J\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right]^{\top} - \left\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\right\rangle_* (Jz)^{\top}\right) \\
&= d\pi\left(J\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) \\
&= d\pi\left(J\left(\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Y}\right)\right) + \varpi(Y,X)d\pi(J(Jz)) \\
&= \mathbb{J}\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Y\right) + \varpi(Y,X)d\pi(J(Jz)).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $d\pi_z(J(Jz)) = 0$. De fato, sabemos que

$$T_z\mathbb{Q} = \left\{w \in \mathbb{D}^{n+1} \ ; \ \langle w, z\rangle_* = 0\right\}.$$

No entanto, sendo J um endomorfismo de $T_z\mathbb{Q}$ e $Jz \in T_z\mathbb{Q}$, então $J(Jz) \in T_z\mathbb{Q}$. Se $J(Jz) \neq 0$, então visto z como vetor do $\mathbb{D}^{n+1}$, temos naturalmente que $0 = \langle J(Jz), z\rangle_* = \langle z, z\rangle_* = 1$, o que é

um absurdo. Logo, $J(Jz) = 0$ e, portanto, $d\pi_z(J(Jz)) = 0$. Assim, obtemos

$$\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X \mathbb{J}\right) Y = \nabla^{\mathbb{G}}_X \mathbb{J} Y - \mathbb{J}\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Y\right) = \varpi(Y, X) d\pi_z(J(Jz)) = 0,$$

como queríamos. □

A seguir, vamos estudar o tensor curvatura $R^{\mathbb{G}}$ da conexão de Levi-Civita $\nabla^{\mathbb{G}}$ da métrica $\mathbb{G}$. Para isso, precisamos do lema seguinte.

Lema 1.5.5. *Dado um campo de vetores $\widetilde{X}$ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\widetilde{X}, \xi] = 0$, onde $\xi(z) = Jz$, $\forall\, z \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Primeiramente, como $N(z) = -z \in N_z\mathbb{Q}$ e $\xi(z) = Jz$, então $\xi = -JN$. Agora, note que, dado $\widetilde{X}$ campo de vetores sobre $\mathbb{Q}$, tem-se que

$$\left\langle [\widetilde{X}, \xi], \xi \right\rangle_* = \left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \xi, \xi \right\rangle_* - \left\langle \nabla^*_\xi \widetilde{X}, \xi \right\rangle_*.$$

Também temos que $0 = \widetilde{X}\langle \xi, \xi \rangle_* = 2\left\langle \nabla^*_{\widetilde{X}} \xi, \xi \right\rangle_*$ e $0 = \xi\left\langle \widetilde{X}, \xi \right\rangle_* = \left\langle \nabla^*_\xi \widetilde{X}, \xi \right\rangle_* + \left\langle \widetilde{X}, \nabla^*_\xi \xi \right\rangle_*$. Além disso, utilizando a fórmula de Gauss e o fato de $\mathbb{Q}$ ser totalmente umbílica, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle [\widetilde{X}, \xi], \xi \right\rangle_* &= -\left\langle \nabla^*_\xi \widetilde{X}, \xi \right\rangle_* = \left\langle \widetilde{X}, \nabla^*_\xi \xi \right\rangle_* \\
&= \left\langle \widetilde{X}, D_\xi \xi - h(\xi, \xi) \right\rangle_* \\
&= \left\langle \widetilde{X}, D_\xi(-JN) \right\rangle_* \\
&= -\left\langle \widetilde{X}, J D_\xi N \right\rangle_* \\
&= -\left\langle \widetilde{X}, J(-\xi) \right\rangle_* \\
&= \left\langle \widetilde{X}, J\xi \right\rangle_* \\
&= \left\langle \widetilde{X}, z \right\rangle_* \\
&= -\left\langle \widetilde{X}, N \right\rangle_* \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\left\langle [\widetilde{X}, \xi], \xi \right\rangle_* = 0. \tag{1.26}$$

Agora, considere uma função arbitrária f sobre $\mathbb{DP}^n$ e tome a curva $\alpha(t) = e^{\tau t} z$. Tal curva passa por z em $\mathbb{Q}$ e possui vetor velocidade $\alpha'(0) = \tau z = \xi$. Note que

$$\xi\,(f \circ \pi) = \frac{d}{dt}(f \circ \pi)(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\pi(\alpha(t)))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\pi(z))\Big|_{t=0} = 0.$$

Portanto,

$$\xi(f \circ \pi) = 0, \quad \forall\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{DP}^n). \tag{1.27}$$

Sendo $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal de X, obtemos

$$\widetilde{X}(f \circ \pi)(z) = d\pi_z(\widetilde{X})(f) = X_{\pi(z)}(f) = X(f)(\pi(z)) = (X(f) \circ \pi)(z),$$

e assim $\widetilde{X}(f \circ \pi) = X(f) \circ \pi$. Como (1.27) vale para qualquer função, em particular, vale para $X(f)$. Logo,

$$\xi\left(\widetilde{X}(f \circ \pi)\right) = \xi\,(X(f) \circ \pi) = 0.$$

Portanto, pela definição de colchete de Lie, temos que

$$d\pi_z\left([\widetilde{X},\xi]\right)(f) = [\widetilde{X},\xi]_z(f\circ\pi) = \widetilde{X}_z(\xi(f\circ\pi)) - \xi_z(\widetilde{X}(f\circ\pi)) = 0,$$

e assim, $[\widetilde{X},\xi]$ é vertical. Logo, juntamente com a igualdade (1.26), obtemos que

$$[\widetilde{X},\xi] = 0.$$

□

Teorema 1.5.4. *O tensor curvatura $R^{\mathbb{G}}$ da conexão de Levi-Civita $\nabla^{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{G}$ satisfaz*

$$R^{\mathbb{G}}(X,Y) = X\wedge Y - \mathbb{J}X\wedge\mathbb{J}Y + 2\,\mathbb{G}(X,\mathbb{J}Y)\mathbb{J},$$

sendo $(X\wedge Y)\,Z := \mathbb{G}(X,Z)Y - \mathbb{G}(Y,Z)X$.

Demonstração. Sejam $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(\mathbb{DP}^n)$. Pela definição de tensor curvatura, temos

$$R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z = \nabla^{\mathbb{G}}_{[X,Y]}Z - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z + \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z.$$

Porém, pela Proposição 1.5.4, temos que $\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} = \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Z} + \omega(\widetilde{Z},\widetilde{X})Jz$. Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla^*_{\widetilde{Y}}\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\right) &= \nabla^*_{\widetilde{Y}}\left(\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_X Z}\right) + \nabla^*_{\widetilde{Y}}\left(\omega(\widetilde{Z},\widetilde{X})Jz\right)\\
&= \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_Y\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Z\right)} + \varpi\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Z, Y\right)Jz + \omega(\widetilde{Z},\widetilde{X})\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz + \widetilde{Y}[\omega(\widetilde{Z},\widetilde{X})]Jz\\
&= \widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_Y\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Z\right)} + \varpi(Z,X)\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz + \left[\varpi\left(\nabla^{\mathbb{G}}_X Z, Y\right) + \widetilde{Y}[\omega(\widetilde{Z},\widetilde{X})]\right]Jz,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\right) = \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right). \tag{1.28}$$

Analogamente, obtemos

$$d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\nabla^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}\right) = \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z + \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right). \tag{1.29}$$

Agora, pela definição de tensor curvatura R^* em relação à conexão ∇^* e pelas igualdades (1.28) e (1.29), temos

$$\begin{aligned}
d\pi\left(R^*(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}\right) &= d\pi\left(\nabla^*_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z}\right) - d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\nabla^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z}\right) + d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\right)\\
&= d\pi\left(\nabla^*_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) +\\
&\quad \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right)\\
&= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{[X,Y]}-\left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_*\xi}\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) +\\
&\quad \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right)\\
&= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{[X,Y]}}\widetilde{Z}\right) - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_{\xi}\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z -\\
&\quad \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) + \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
d\pi\left(R^*(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}\right) &= d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{[X,Y]}}\widetilde{Z}\right) - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_\xi\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z + \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \\
&\quad \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right) - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) \\
&= d\pi\left(\widetilde{\nabla^{\mathbb{G}}_{[X,Y]}Z}\right) - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_\xi\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z + \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \\
&\quad \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right) - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) \\
&= \nabla^{\mathbb{G}}_{[X,Y]}Z - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_\xi\widetilde{Z}\right) - \nabla^{\mathbb{G}}_X\nabla^{\mathbb{G}}_Y Z + \nabla^{\mathbb{G}}_Y\nabla^{\mathbb{G}}_X Z + \\
&\quad \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right) - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) \\
&= R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_\xi\widetilde{Z}\right) + \\
&\quad \varpi(Z,X)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Y}}Jz\right) - \varpi(Z,Y)d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right).
\end{aligned}
$$

No entanto, recorrendo-se ao fato de que $\mathbb{Q}$ é totalmente umbílica em $\mathbb{D}^{n+1}\setminus\mathscr{C}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}Jz\right) &= d\pi\left(\left[D_{\widetilde{X}}Jz\right]^\top\right) \\
&= d\pi\left(\left[J\widetilde{X}\right]^\top\right) \\
&= d\pi\left(J\widetilde{X}\right) \\
&= \mathbb{J}X.
\end{aligned}
$$

Além disso, utilizando o Lema 1.5.5, ou seja, aplicando $\nabla^*_\xi\widetilde{Z} = \nabla^*_{\widetilde{Z}}\xi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
d\pi\left(R^*(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}\right) &= R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{Z}}\xi\right) + \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y - \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X \\
&= R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z - \left\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}],\xi\right\rangle_* \mathbb{J}Z + \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y - \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X \\
&= R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z - \left[\left\langle\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\xi\right\rangle_* - \left\langle\nabla^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{X},\xi\right\rangle_*\right]\mathbb{J}Z + \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y - \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X.
\end{aligned}
$$

No entanto, como $\widetilde{X}\left\langle\widetilde{Y},\xi\right\rangle_* = 0$, segue que

$$
\left\langle\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\xi\right\rangle_* = -\left\langle\widetilde{Y},\nabla^*_{\widetilde{X}}\xi\right\rangle_* = -\left\langle\widetilde{Y},D_{\widetilde{X}}\xi\right\rangle_* = -\left\langle\widetilde{Y},J\widetilde{X}\right\rangle_*,
$$

e, analogamente, o fato de que $\widetilde{Y}\left\langle\widetilde{X},\xi\right\rangle_* = 0$, implica em

$$
\left\langle\nabla^*_{\widetilde{Y}}\widetilde{X},\xi\right\rangle_* = -\left\langle\widetilde{X},J\widetilde{Y}\right\rangle_*.
$$

E assim, temos

$$
d\pi\left(R^*(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}\right) = R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z - \left[-\left\langle\widetilde{Y},J\widetilde{X}\right\rangle_* + \left\langle\widetilde{X},J\widetilde{Y}\right\rangle_*\right]\mathbb{J}Z + \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y - \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X.
$$

Finalmente, utilizando a Proposição 1.5.3, obtemos

$$\begin{aligned}
R^{\mathbb{G}}(X,Y)Z &= d\pi\left(\left\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\right\rangle_* \widetilde{Y} - \left\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\right\rangle_* \widetilde{X}\right) + 2\left\langle \widetilde{X}, J\widetilde{Y}\right\rangle_* \mathbb{J}Z - \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y + \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X \\
&= \left\langle \widetilde{X},\widetilde{Z}\right\rangle_* d\pi(\widetilde{Y}) - \left\langle \widetilde{Y},\widetilde{Z}\right\rangle_* d\pi(\widetilde{X}) + 2\left\langle \widetilde{X}, J\widetilde{Y}\right\rangle_* \mathbb{J}Z - \varpi(Z,X)\mathbb{J}Y + \varpi(Z,Y)\mathbb{J}X \\
&= \mathbb{G}(X,Z)Y - \mathbb{G}(Y,Z)X + 2\left\langle \widetilde{X}, \widetilde{d\pi(J\widetilde{Y})}\right\rangle_* \mathbb{J}Z - \mathbb{G}(Z,\mathbb{J}X)\mathbb{J}Y + \mathbb{G}(Z,\mathbb{J}Y)\mathbb{J}X \\
&= \mathbb{G}(X,Z)Y - \mathbb{G}(Y,Z)X + 2\mathbb{G}(X,\mathbb{J}Y)\mathbb{J}Z - \mathbb{G}(Z,\mathbb{J}X)\mathbb{J}Y + \mathbb{G}(Z,\mathbb{J}Y)\mathbb{J}X \\
&= (X\wedge Y)Z - (\mathbb{J}X\wedge \mathbb{J}Y)Z + 2\,\mathbb{G}(X,\mathbb{J}Y)\mathbb{J}Z.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R^{\mathbb{G}}(X,Y) = X\wedge Y - \mathbb{J}X\wedge\mathbb{J}Y + 2\,\mathbb{G}(X,\mathbb{J}Y)\mathbb{J}.$$

□

Capítulo 2

Subvariedades paracomplexas e lagrangeanas no espaço paracomplexo

Neste capítulo, estudamos dois tipos de subvariedades: as *paracomplexas* e as *lagrangeanas*. Tais subvariedades se comportam de formas complementares, no que diz respeito à estrutura quase-paracomplexa do ambiente.

2.1 Subvariedades paracomplexas

Definição 2.1.1. *Seja (M, J) uma variedade quase-paracomplexa. Dizemos que um subespaço P de T_xM, para $x \in M$, é* paracomplexo *se P for* estável *em relação à estrutura J, ou seja, $J(P) \subset P$, e $J|_P$ for uma estrutura quase-paracomplexa. Uma subvariedade S de M é dita* paracomplexa *se todos os seus subespaços tangentes são paracomplexos.*

Proposição 2.1.1. *Se S é uma subvariedade paracomplexa de uma variedade quase-paracomplexa (M^{2n}, J), então valem as seguintes propriedades:*

(*a*) $J(T_xS) = T_xS$, *para todo* $x \in S$;

(*b*) $\dim_{\mathbb{R}} S = 2k$, *para algum* $1 \leq k \leq n$.

Demonstração. Por definição, temos que $J(T_xS) \subset T_xS$. No entanto, sendo J um endomorfismo satisfazendo $J^2 = \mathrm{Id}$, temos que

$$T_xS = J(J(T_xS)) \subset J(T_xS),$$

e, portanto, $J(T_xS) = T_xS$. Além disso, como $T_xS = \mathrm{Ker}\,(J + \mathrm{Id})|_{T_xS} \oplus \mathrm{Ker}\,(J - \mathrm{Id})|_{T_xS}$ e os autovalores de $J|_{T_xS}$ têm a mesma multiplicidade, segue trivialmente que a dimensão real de S é par. □

Corolário 2.1.1. *Seja S uma subvariedade paracomplexa não-degenerada de uma variedade quase-paracomplexa (M^{2n}, J). Então, o subespaço normal N_xS é um subespaço paracomplexo de T_xM, para todo $x \in S$.*

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 2.1.1, temos que

$$J(T_xS) = T_xS \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{R}} S = 2k,$$

para algum $1 \leq k \leq n$. Utilizando essas informações, juntamente com a hipótese de S ser uma subvariedade não-degenerada, obtemos

$$T_xS \oplus N_xS = T_xM = J(T_xM) = J(T_xS) \oplus J(N_xS) = T_xS \oplus J(N_xS),$$

donde segue que $J(N_xS) = N_xS$. Finalmente, como $\dim(N_xS) = 2(n-k)$ e

$$(\mathrm{Ker}\,(J - \mathrm{Id}) \cap N_xS) \oplus (\mathrm{Ker}\,(J + \mathrm{Id}) \cap N_xS) \subset N_xS,$$

segue, por argumentos da álgebra linear, que $(\mathrm{Ker}\,(J - \mathrm{Id}) \cap N_xS) \oplus (\mathrm{Ker}\,(J + \mathrm{Id}) \cap N_xS) = N_xS$. □

Observação 2.1.1. *Como T_xS é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e S está munido de tal estrutura J, podemos equipar T_xS com uma estrutura de $\mathbb{D}$-módulo. Para isso, basta definir a multiplicação por escalar*

$$(x + \tau y)v := xv + yJv, \quad \forall\ v \in T_xS.$$

Proposição 2.1.2. *Se $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^m$ é uma imersão para-holomorfa, então $S = f(\mathscr{U})$ é uma subvariedade paracomplexa. Reciprocamente, se S é uma subvariedade paracomplexa de $\mathbb{D}^m$, então S é, localmente, imagem de uma carta para-holomorfa.*

Demonstração. Denote

$$f(z) = f(z_1, \cdots, z_n) = \left(f^1(z), \cdots, f^m(z)\right) = \left(u^1 + \tau v^1, \cdots, u^m + \tau v^m\right),$$

com $z_i = x_i + \tau y_i \in \mathbb{D}$. Dado $p \in S$, sabemos que $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}, \dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\right\}$ forma uma base para T_pS, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial x_i}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial y_i}\right).$$

Assim, suponha para todo $k \in \{1, \cdots, m\}$ que

$$\begin{cases} \left(u^k\right)_{x_j} = \left(v^k\right)_{y_j} \\ \left(u^k\right)_{y_j} = \left(v^k\right)_{x_j} \end{cases}, \ \forall\ j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Aplicando as equações para-Cauchy-Riemann dadas acima, obtemos

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) &= J\left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial x_i}\right) = J\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial v^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial u^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial v^m}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial u^m}{\partial x_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial y_i} + \tau\frac{\partial v^1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial y_i} + \tau\frac{\partial v^m}{\partial y_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial y_i}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_i} \in\ T_pS. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) &= J\left(\frac{\partial f^1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial y_i}\right) = J\left(\frac{\partial u^1}{\partial y_i} + \tau\frac{\partial v^1}{\partial y_i}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial y_i} + \tau\frac{\partial v^m}{\partial y_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial v^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial x_i} + \tau\frac{\partial v^m}{\partial x_i}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f^m}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \in\ T_pS. \end{aligned}$$

Logo, $J(T_pS) \subset T_pS$, como queríamos. Além disso, temos que

$$J^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad J^2\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e portanto, $J^2 = \mathrm{Id}$. Resta provar ainda que os subespaços referentes aos autovalores 1 e -1, restritos à S, têm a mesma dimensão. Para verificar essa informação, denotemos

$$V_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad W_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e $T_pS^{\pm} = \{v \in T_pS \ ; \ Jv = \pm v\}$. Podemos verificar que

$$\mathrm{Span}\,\{V_1, \cdots, V_n\} = T_pS^+ \quad \text{e} \quad \mathrm{Span}\,\{W_1, \cdots, W_n\} = T_pS^-.$$

Finalmente, como $T_pS = T_pS^+ \oplus T_pS^-$ e $\dim T_pS = 2n$, uma vez que f é uma imersão, segue que $\dim T_pS^+ = \dim T_pS^- = n$, como queríamos.

Reciprocamente, suponha que S seja uma subvariedade paracomplexa de $\mathbb{D}^m$. Em particular, sendo $J|_S$ uma estrutura quase-paracomplexa, temos que $(S, J|_S)$ é uma variedade quase-paracomplexa. Além disso, como $J(T_pS) = T_pS$, para todo $p \in S$, dados $X, Y \in T_pS$, temos que $JX, JY \in T_pS$. Logo, $[JX, JY] \in T_pS$, pela definição de colchete de Lie e assim, o tensor para-Nijenhuis

$$N_*^J(X,Y) = [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y] + [JX,JY], \quad \forall\ X, Y \in T_pS,$$

está bem definido sobre S. Finalmente, como S está imersa na variedade para-Kähler $\mathbb{D}^m$, temos que N_*^J se anula identicamente sobre S. Logo, pelo Teorema 1.4.1, segue que $J|_S$ é uma estrutura paracomplexa sobre S. Assim, por definição, $J|_S$ pode ser localmente definida através de um atlas de cartas para-holomorfas. Portanto, dado $p \in S$, existe uma vizinhança aberta $\mathscr{U}$ de p em S e $\varphi^{-1} : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{W} \subset \mathbb{D}^n$ uma carta para-holomorfa. E assim, $\varphi(\mathscr{W}) \subset S$, como queríamos. □

Teorema 2.1.1. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade para-Kähler. Então, qualquer subvariedade paracomplexa não-degenerada de M é mínima.*

Demonstração. Seja S uma subvariedade paracomplexa não-degenerada de M e denote por D a conexão de Levi-Civita em M e por ∇ a conexão induzida em S. Dados X, Y tangentes a S, como

$$J(D_XY) = J(\nabla_XY + h(X,Y)) = \nabla_XY + J(h(X,Y)),$$

obtemos

$$(J(D_XY))^{\perp} = J\left((D_XY)^{\perp}\right). \tag{2.1}$$

Além disso, pelo Teorema 1.4.2, temos que a estrutura J é paralela com respeito à conexão D. Logo, $0 = (D_XJ)Y = D_XJY - J(D_XY)$, donde segue que

$$D_XJY = J(D_XY). \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1), obtemos

$$h(X, JY) = J(h(X,Y)). \tag{2.3}$$

Como a dimensão de S é par, pela Proposição 2.1.1, seja $\{e_1, \cdots, e_{2k}\}$ um referencial ortonormal sobre S, tal que $e_{2i} = J(e_{2i-1})$, $\forall\ 1 \leq i \leq k$. A observação após o fim desta demonstração comprovará que sempre é possível obter tal base por uma modificação do clássico *processo de*

ortogonalização de Gram-Schmidt. Assim, pela definição do vetor curvatura média, temos

$$2k\vec{H} = \sum_{i=1}^{2k} \epsilon_i h(e_i, e_i) = \left[\sum_{i=1}^{k} \epsilon_{2i-1} h(e_{2i-1}, e_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{k} \epsilon_{2i} h(e_{2i}, e_{2i}) \right].$$

No entanto, como g é anti-hermitiana, temos

$$\epsilon_{2i} = g(e_{2i}, e_{2i}) = g(J(e_{2i-1}), J(e_{2i-1})) = -g(e_{2i-1}, e_{2i-1}) = -\epsilon_{2i-1}.$$

Logo, aplicando (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} 2k\vec{H} &= \sum_{i=1}^{k} \epsilon_{2i-1} \left[h(e_{2i-1}, e_{2i-1}) - h(e_{2i}, e_{2i}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} \epsilon_{2i-1} \left[h(e_{2i-1}, e_{2i-1}) - h(Je_{2i-1}, Je_{2i-1}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k} \epsilon_{2i-1} \left[h(e_{2i-1}, e_{2i-1}) - J^2 h(e_{2i-1}, e_{2i-1}) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

Observação 2.1.2. *Para facilitar a visualização das contas, denote* $\langle \cdot, \cdot \rangle = |\cdot|^2 := g|_S$. *Assim, dada* $\{v_1, \cdots, v_{2k}\}$ *base de* T_pS, *defina*

$$e_1 := v_1 \quad e \quad e_2 := J(v_1).$$

Portanto, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. *Em seguida, coloque*

$$e_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, e_1 \rangle}{|e_1|^2} e_1 - \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{|e_2|^2} e_2 \quad e \quad e_4 := J(e_3).$$

Portanto, $\langle e_4, e_2 \rangle = \langle J(e_3), J(v_1) \rangle = -\langle e_3, v_1 \rangle = -\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ *e* $\langle e_4, e_3 \rangle = \langle J(e_3), e_3 \rangle = 0$. *Além disso, temos que*

$$\begin{aligned} \langle e_4, e_1 \rangle &= \langle J(e_3), e_1 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle - \frac{\langle v_3, e_1 \rangle}{|e_1|^2} \langle J(e_1), e_1 \rangle - \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{|e_2|^2} \langle J(e_2), e_1 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle - \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} \langle J(e_2), e_1 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle - \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{\langle J(e_1), J(e_1) \rangle} \langle J^2(v_1), v_1 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle + \frac{\langle v_3, e_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle + \langle v_3, e_2 \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle + \langle J^2(v_3), J(e_1) \rangle \\ &= \langle J(v_3), e_1 \rangle - \langle J(v_3), e_1 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, tomando recursivamente

$$e_{2i-1} := v_{2i-1} - \sum_{j=1}^{2i-2} \frac{\langle v_{2i-1}, e_j \rangle}{|e_j|^2} e_j \quad e \quad e_{2i} := J e_{2i-1}, \quad \forall\, 1 \leq i \leq k,$$

obtemos que $\{e_1, \cdots, e_{2k}\}$ *forma uma base ortogonal de* T_pS. *Portanto,* $\left\{ \frac{e_1}{|e_1|}, \cdots, \frac{e_{2k}}{|e_{2k}|} \right\}$ *é uma base ortonormal para* T_pS, *como almejávamos.*

2.2 Subvariedades lagrangeanas

A seguir, veremos que as *subvariedades lagrangeanas* são a extensão para variedades da noção de subespaços lagrangeanos de espaços vetoriais simpléticos.

Definição 2.2.1. *Seja* (E, ω) *um* espaço vetorial simplético, *ou seja, um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simplética. Dado um subespaço* $F \subset E$, *chamamos de* complemento ortogonal simplético *de* F *ao conjunto*

$$F^\omega := \left\{ v \in E \ ; \ \omega(v, v') = 0, \ \forall\, v' \in F \right\}.$$

O subespaço F *é chamado de*

(*i*) simplético *se* $F \cap F^\omega = \{0\}$;

(*ii*) isotrópico *se* $F \subseteq F^\omega$, *isto é,* $\omega(v, v') = 0, \ \forall\, v, v' \in F$;

(*iii*) lagrangeano *se* $F = F^\omega$.

Note que um subespaço F é lagrangeano se, e somente se, F é isotrópico e maximal (no sentido de que F não está propriamente contido em nenhum outro subespaço isotrópico). Além disso, F é simplético se, e somente se a restrição de ω à F é não-degenerada, de modo que $(F, \omega|_F)$ é um espaço vetorial simplético.

Exemplo 2.2.1. *Seja* $w \in E$ *um vetor não-nulo e considere* $F = \mathrm{Span}(w)$. *Dados* $u, v \in F$, *digamos* $u = c_1 w$ *e* $v = c_2 w$, *temos*

$$\omega(u, v) = c_1 c_2 \ \omega(w, w) = 0.$$

Assim, $F \subseteq F^\omega$, *portanto* F *é isotrópico. Além disso, segue que* ω *é* degenerada *em* F *e assim,* F *não é um subespaço simplético.*

Em geral, os subespaços F e F^ω não são necessariamente complementares, ou seja, $E \neq F \oplus F^\omega$. No entanto, há uma relação entre as suas dimensões, como pode ser vista pela proposição seguinte.

Proposição 2.2.1. *Dado um subespaço* F *de um espaço vetorial simplético* (E, ω), *tem-se que*

$$\dim F^\omega = \dim E - \dim F \quad e \quad (F^\omega)^\omega = F.$$

Demonstração. Com base na forma ω, podemos definir a seguinte aplicação linear

$$\begin{array}{rccl} \omega^* : & E & \longrightarrow & E^* \\ & u & \longmapsto & \omega^*(u)(v) = \omega(u, v). \end{array}$$

Note que o fato de ω ser não-degenerada é equivalente ao fato de $\mathrm{Ker}(\omega^*) = \{0\}$. Logo, a aplicação

ω^* é um isomorfismo. Por outro lado, note que a imagem de F^ω por ω^* satisfaz

$$\begin{aligned}
\omega^*(F^\omega) &= \{f \in E^* \ ; \ f = \omega^*(u), \text{ para algum } u \in F^\omega\} \\
&= \{f \in E^* \ ; \ f(v) = \omega(u,v), \text{ para algum } u \in F^\omega \text{ e } \forall\, v \in F\} \\
&= \{f \in E^* \ ; \ f(v) = 0, \ \forall\, v \in F\} \\
&:= F^0,
\end{aligned}$$

sendo F^0 o *anulador* do subespaço F. Sabemos da álgebra linear que $\dim E = \dim F + \dim F^0$, e assim,

$$\dim \omega^*(F^\omega) = \dim F^0 = \dim E - \dim F.$$

Finalmente, sendo ω^* um isomorfismo, podemos identificar $\omega^*(F^\omega)$ com F^ω, donde segue que

$$\dim F^\omega = \dim E - \dim F.$$

Para provar a segunda igualdade note que, sendo F e F^ω subespaços de E, temos, do que foi feito anteriormente, que

$$\dim E = \dim F + \dim F^\omega \quad \text{e} \quad \dim E = \dim F^\omega + \dim (F^\omega)^\omega .$$

Logo, $\dim F = \dim (F^\omega)^\omega$. Além disso, $F \subset (F^\omega)^\omega$, pois se existir $u \in F$, com $u \notin (F^\omega)^\omega$, existiria $u' \in F^\omega$ tal que $\omega(u', u) \neq 0$. No entanto, como tal $u' \in F^\omega$, temos que $\omega(u', v) = 0$, $\forall\, v \in F$. Em particular, tomando $v = u \in F$, obtemos $\omega(u', u) = 0$, donde segue o resultado. □

Definição 2.2.2. *Dada (M, ω) uma variedade simplética, uma subvariedade $\mathscr{L}$ de M é dita* lagrangeana *se, $\forall\, x \in \mathscr{L}$, o espaço tangente $T_x\mathscr{L}$ é um subespaço lagrangeano de T_xM.*

Proposição 2.2.2. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana de uma variedade simplética (M, ω). Então,*

$$\dim \mathscr{L} = \frac{1}{2} \dim M \quad e \quad \omega|_{\mathscr{L}} \equiv 0.$$

Demonstração. Como $\mathscr{L}$ é lagrangeana, então $T_x\mathscr{L} = (T_x\mathscr{L})^\omega$, e portanto, $\dim T_x\mathscr{L} = \dim (T_x\mathscr{L})^\omega$. Assim, pela Proposição 2.2.1, temos que

$$\dim T_xM = \dim T_x\mathscr{L} + \dim (T_x\mathscr{L})^\omega,$$

donde segue a primeira afirmação. A segunda condição, isto é, que ω se anula sobre $\mathscr{L}$, segue do fato de $T_x\mathscr{L}$ ser, em particular, um subespaço isotrópico. □

Observação 2.2.1. *Pela proposição acima, sempre que existir uma subvariedade lagrangeana imersa numa variedade simplética, esta última deve ter dimensão par.*

Exemplo 2.2.2. *Toda curva regular numa superfície simplética é uma subvariedade lagrangeana.*

Teorema 2.2.1. *Se $\mathscr{L}$ é uma subvariedade lagrangeana não-degenerada de (M, ω), então*

$$J\,(T_x\mathscr{L}) = T_x^\perp \mathscr{L}, \quad \forall\, x \in \mathscr{L}.$$

Assim, a estrutura J de M define um isomorfismo de fibrados entre o fibrado tangente $T\mathscr{L}$ e o fibrado normal $N\mathscr{L}$.

Demonstração. Considere $X \in T_x\mathscr{L}$. Sendo $\mathscr{L}$ lagrangeana, então $\omega(X, Y) = 0$, $\forall\, Y \in T_x\mathscr{L}$. Logo,

$$g(JX, Y) = -\omega(X, Y) = 0, \quad \forall\, Y \in T_x\mathscr{L}.$$

Como $JX \in J(T_x\mathscr{L})$, a igualdade acima fornece-nos a inclusão $J(T_x\mathscr{L}) \subset T_x^\perp\mathscr{L}$. Agora, sendo $\mathscr{L}$ não-degenerada, temos que

$$T_xM = T_x\mathscr{L} \oplus T_x^\perp\mathscr{L}.$$

Como, em adição, $\dim(\mathscr{L}) = \frac{1}{2}\dim M$, segue que $\dim(T_x^{\perp}\mathscr{L}) = \frac{1}{2}\dim M$. Assim, como $T_x\mathscr{L}$ e $T_x^{\perp}\mathscr{L}$ têm a mesma dimensão, segue a igualdade $J(T_x\mathscr{L}) = T_x^{\perp}\mathscr{L}$. □

Proposição 2.2.3. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana não-degenerada de uma variedade para-Kähler (M, J, g, ω). Então, a aplicação tensorial*

$$T(X, Y, Z) := g(h(X, Y), JZ)$$

é trissimétrica, isto é, a seguinte igualdade vale

$$T(X, Y, Z) = T(Y, X, Z) = T(X, Z, Y), \quad \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathscr{L}).$$

Demonstração. Seja $x \in \mathscr{L}$. Pela Proposição 1.3.2, temos que a segunda forma fundamental h é simétrica, ou seja, $h(X, Y) = h(Y, X)$, $\forall\ X, Y \in T_x\mathscr{L}$. Desta forma, segue que

$$T(X, Y, Z) = g(h(X, Y), JZ) = g(h(Y, X), JZ) = T(Y, X, Z).$$

Por outro lado, como $g(JY, Z) = -\omega(Y, Z) = 0$, diferenciando tal igualdade em relação a X, obtemos

$$\begin{aligned}
0 = Xg(JY, Z) &= g(D_X JY, Z) + g(JY, D_X Z) \\
&= g(J(D_X Y), Z) + g(JY, D_X Z) \\
&= g(J(D_X Y), Z) + g(JY, h(X, Z)) \\
&= g(J(D_X Y), J(JZ)) + T(X, Z, Y) \\
&= -g(D_X Y, JZ) + T(X, Z, Y) \\
&= -T(X, Y, Z) + T(X, Z, Y).
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Definição de ângulo lagrangeano

Considere o espaço $\mathbb{D}^n$ com coordenadas $\{z_j = x_j + \tau y_j,\ 1 \leq j \leq n\}$. Chamamos de *forma volume para-holomorfa* de $\mathbb{D}^n$ a n-forma a valores paracomplexos

$$\Omega := dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Pela definição de produto exterior, dados $X_1, \cdots, X_n$ vetores de $\mathbb{D}^n$, então $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$ é o determinante paracomplexo da matriz $n \times n$ cujas colunas são as coordenadas paracomplexas dos vetores $X_1, \cdots, X_n$.

Lema 2.2.1. *Dada $\mathscr{L}$ subvariedade lagrangeana do espaço $(\mathbb{D}^n, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_*)$, considere $\{X_1, \cdots, X_n\}$ base de $T_p\mathscr{L}$. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) $\mathscr{L}$ é não-degenerada em p se, e somente se, o número paracomplexo $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$ satisfaz

$$\Omega(X_1, \cdots, X_n) \cdot \overline{\Omega(X_1, \cdots, X_n)} \neq 0.$$

(b) Se $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ é uma outra base de $T_p\mathscr{L}$, então os números paracomplexos $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$ e $\Omega(Y_1, \cdots, Y_n)$ possuem o mesmo argumento.

Demonstração. Para provar o item (a), considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ referencial ortonormal local de $\mathscr{L}$. Assim, sendo $\{X_1, \cdots, X_n\}$ uma base de $T_p\mathscr{L}$, podemos escrever

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} e_k, \quad \lambda_{kj} = \epsilon_k \langle\langle X_j, e_k \rangle\rangle_*.$$

Denotando $M = (\lambda_{ij})$, obtemos

$$\Omega(X_1, \cdots, X_n) = \det M = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ & \vdots & \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \langle X_i, X_j \rangle_* &= \langle\langle X_i, X_j \rangle\rangle_* = \left\langle \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lj} e_l \right\rangle \right\rangle_* \\ &= \sum_{k,l} \lambda_{ki} \overline{\lambda_{lj}} \langle\langle e_k, e_l \rangle\rangle_* \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ki} \overline{\lambda_{kj}} \epsilon_k. \end{aligned}$$

Por outro lado, indicando por $M^\top$ a transposta da matriz M, temos

$$\begin{aligned} M^\top \cdot \mathrm{Id} \cdot \overline{M} &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{n1} \\ & \vdots & \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \epsilon_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{\lambda_{11}} & \cdots & \overline{\lambda_{1n}} \\ & \vdots & \\ \overline{\lambda_{n1}} & \cdots & \overline{\lambda_{nn}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_k \epsilon_k \lambda_{k1} \overline{\lambda_{k1}} & \cdots & \sum_k \epsilon_k \lambda_{k1} \overline{\lambda_{kn}} \\ & \ddots & \\ \sum_k \epsilon_k \lambda_{kn} \overline{\lambda_{k1}} & \cdots & \sum_k \epsilon_k \lambda_{kn} \overline{\lambda_{kn}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\left(M^\top \cdot \mathrm{Id} \cdot \overline{M}\right)_{ij} = \sum_k \epsilon_k \lambda_{ki} \overline{\lambda_{kj}} = \langle X_i, X_j \rangle_*.$$

Como

$$\begin{aligned} \det\left(\langle X_i, X_j \rangle_*\right) &= \det\left(M^\top \cdot \mathrm{Id} \cdot \overline{M}\right) \\ &= \det\left(M^\top\right) \det(\mathrm{Id}) \det(\overline{M}) \\ &= (\pm 1) \det(M) \overline{\det(M)} \\ &= (\pm 1) \langle \det M, \det M \rangle_*, \end{aligned}$$

então

$$\det\left(\langle X_i, X_j \rangle_*\right) = \pm \langle \Omega(X_1, \cdots, X_n), \Omega(X_1, \cdots, X_n) \rangle_*. \tag{2.4}$$

Logo, a métrica é não-degenerada em p se, e somente se, tivermos

$$0 \neq \det\left(\langle X_i, X_j \rangle_*\right) = \pm \langle \Omega(X_1, \cdots, X_n), \Omega(X_1, \cdots, X_n) \rangle_*,$$

donde segue que $\langle \Omega(X_1, \cdots, X_n), \Omega(X_1, \cdots, X_n) \rangle_* \neq 0$. Finalmente, para provar o item (b), seja $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ uma outra base de $T_p\mathscr{L}$. Como $X_1, \cdots, X_n$ são vetores de $\mathbb{D}^n$, denote $X_j = \left(z_j^1, \cdots, z_j^n\right)$, com $z_j^l = x_j^l + \tau y_j^l$, para $l \in \{1, \cdots, n\}$. Assim, podemos escrever

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k = \left(w_i^1, \cdots, w_i^n\right), \quad \text{onde} \quad w_i^l = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k^l.$$

Note que

$$\begin{aligned}
[Y_1 \cdots Y_n] &= \begin{bmatrix} w_1^1 & \cdots & w_n^1 \\ & \vdots & \\ w_1^n & \cdots & w_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k} z_k^1 & \cdots & \sum_k a_{1k} z_k^n \\ & \vdots & \\ \sum_k a_{nk} z_k^1 & \cdots & \sum_k a_{nk} z_k^n \end{bmatrix}^\top \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1^1 & \cdots & z_1^n \\ & \vdots & \\ z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, denotando a transposta da matriz $\left(z_i^j\right)_{i,j}$ por $\left(z_j^i\right)_{i,j}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega(Y_1, \cdots, Y_n) &= \det\,[Y_1 \cdots Y_n] \\
&= \det\,(a_{ij}) \cdot \det\,(z_i^j) \\
&= \det\,(a_{ij}) \cdot \det\,\left(z_j^i\right) \\
&= \det\,(a_{ij}) \cdot \det\,[X_1 \cdots X_n] \\
&= \det\,(a_{ij}) \cdot \Omega(X_1, \cdots, X_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$ e $\Omega(Y_1, \cdots, Y_n)$ possuem o mesmo argumento. □

Definição 2.2.3. *O* ângulo lagrangeano β *de um subespaço linear, lagrangeano e não-degenerado, gerado por n vetores $(X_1, \cdots, X_n)$, é definido como sendo o argumento do número paracomplexo $\Omega(X_1, \cdots, X_n)$. O* ângulo lagrangeano $\beta(x)$ *de uma subvariedade lagrangeana não-degenerada $\mathscr{L}$, no ponto $x \in \mathscr{L}$, é o ângulo lagrangeano do subespaço vetorial $T_x\mathscr{L}$.*

Pelo Lema 2.2.1, a definição acima independe da base considerada. Além disso, ao contrário do que ocorre com o caso complexo, não precisamos falar em orientação aqui, uma vez que um número paracomplexo z, assim como o seu oposto $-z$, têm o mesmo argumento.

Observação 2.2.2. *Podemos ver também que tal definição envolve apenas a forma Ω, sendo, portanto, independente da métrica e da forma simplética escolhida. Além disso, destacamos que Ω foi construída como uma estrutura adicional do espaço $\mathbb{D}^n$ e chamamos a atenção de que Ω não pode ser definida em qualquer variedade para-Kähler. As variedades para-Kähler admitindo tal forma são chamadas de* variedades para-Calabi-Yau.

Teorema 2.2.2. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana não-degenerada de $(\mathbb{D}^n, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*)$, com ângulo lagrangeano β e vetor curvatura média $\vec{H}$. Então, a seguinte relação é satisfeita*

$$n\vec{H} = -J\nabla\beta,$$

onde ∇ denota o operador gradiente com respeito à métrica induzida em $\mathscr{L}$.

Demonstração. Seja $(e_1, \cdots, e_n)$ um referencial ortonormal local de $\mathscr{L}$. Como a forma ω se anula em $\mathscr{L}$, temos que

$$\langle\langle e_j, e_k\rangle\rangle_* = \langle e_j, e_k\rangle_* - \tau\omega(e_j, e_k) = \langle e_j, e_k\rangle_*.$$

Portanto, o referencial considerado é também um referencial hermitiano. Logo, dado $X \in \mathbb{D}^n$, podemos escrever

$$X = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle X, e_j\rangle_* e_j = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle\langle X, e_j\rangle\rangle_* e_j.$$

A ideia aqui é provar que vale

$$\left\langle n\vec{H} + J\nabla\beta, Je_i \right\rangle_* = 0, \quad \forall\, 1 \le i \le n,$$

donde seguirá o resultado. Assim, pela igualdade (2.4) da demonstração do Lema 2.2.1, temos que

$$\pm\langle\Omega(e_1,\cdots,e_n),\Omega(e_1,\cdots,e_n)\rangle_* = \det\left(\langle e_i,e_j\rangle_*\right).$$

Logo,

$$\Omega(e_1,\cdots,e_n).\overline{\Omega(e_1,\cdots,e_n)} = \pm 1,$$

e então, podemos escrever

$$\Omega(e_1,\cdots,e_n) = \pm\,\tau^{\alpha}e^{\tau\beta},$$

sendo $\alpha\in\{0,1\}$. Derivando esta igualdade em relação à e_i, obtemos por um lado que

$$e_i\left(\pm\,\tau^{\alpha}e^{\tau\beta}\right) = d\left(\pm\,\tau^{\alpha}e^{\tau\beta}\right)(e_i) = \pm\,\tau^{\alpha}\tau e^{\tau\beta}d\beta(e_i).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
e_i\left(\Omega(e_1,\cdots,e_n)\right) &= e_i\left(\det[e_1\cdots e_n]\right) = \sum_{k=1}^{n}\det\left[e_1\cdots D_{e_i}e_k\cdots e_n\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Omega\left(e_1,\cdots,\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\langle\langle e_j,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_* e_j,\cdots,e_n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Omega\left(e_1,\cdots,\epsilon_k\langle\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_* e_k,\cdots,e_n\right)\\
&= \pm\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\langle\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_*\tau^{\alpha}e^{\tau\beta}.
\end{aligned}$$

Portanto, juntando as duas igualdades anteriores obtemos que

$$\pm\,\tau^{(\alpha+1)}e^{\tau\beta}d\beta(e_i) = e_i\left(\Omega(e_1,\cdots,e_n)\right) = \pm\tau^{\alpha}e^{\tau\beta}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\langle\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_*.$$

Logo,

$$\tau d\beta(e_i) = \sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\langle\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_*. \tag{2.5}$$

Porém, diferenciando a igualdade $\langle e_k,e_k\rangle_* = \epsilon_k = \pm 1$ em relação à e_i, temos

$$\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle_* = 0.$$

No entanto, como vale $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_* = \langle\cdot,\cdot\rangle_* - \tau\omega = \langle\cdot,\cdot\rangle_* + \tau\langle J\cdot,\cdot\rangle_*$, temos que

$$\langle\langle e_k,D_{e_i}e_k\rangle\rangle_* = \tau\langle Je_k,D_{e_i}e_k\rangle_*.$$

Logo, substituindo a igualdade acima em (2.5), obtemos

$$d\beta(e_i) = \sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\langle Je_k,D_{e_i}e_k\rangle_*.$$

Agora, pela Proposição 2.2.3, segue que

$$\langle Je_k,D_{e_i}e_k\rangle_* = \langle Je_k,h(e_i,e_k)\rangle_* = \langle h(e_k,e_k),Je_i\rangle_*.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\beta(e_i) &= \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle Je_k, D_{e_i} e_k \rangle_* = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \langle h(e_k, e_k), Je_i \rangle_* \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k h(e_k, e_k), Je_i \right\rangle_* \\ &= \left\langle n\vec{H}, Je_i \right\rangle_*. \end{aligned}$$

Pela definição de operador gradiente, obtemos

$$\left\langle n\vec{H}, Je_i \right\rangle_* = d\beta(e_i) = \langle \nabla\beta, e_i \rangle_* = -\langle J\nabla\beta, Je_i \rangle_*,$$

donde segue o resultado. □

Corolário 2.2.1. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana, conexa e não-degenerada de $\mathbb{D}^n$. Então $\mathscr{L}$ é mínima se, e somente se, $\mathscr{L}$ tem ângulo lagrangeano constante.*

Demonstração. Como o ângulo lagrangeano β de uma subvariedade lagrangeana não-degenerada $\mathscr{L}$ é uma aplicação da forma $\beta : \mathscr{L} \longrightarrow \mathbb{R}$, a hipótese de $\mathscr{L}$ ser conexa garante-nos que β é constante se, e somente se, $\nabla\beta = 0$. □

Observação 2.2.3. *Ao estudarmos minimalidade de subvariedades, poderemos nos restringir, sem perda de generalidade, às subvariedades com ângulo lagrangeano nulo. De fato, seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana com ângulo lagrangeano constante β_0. Dada uma constante $\theta \in \mathbb{R}$, denotando por R_θ a aplicação rotação em $\mathbb{D}^n$, cuja matriz paracomplexa é dada por $e^{\tau\theta}\mathrm{Id}$, considere a subvariedade $\widetilde{\mathscr{L}} = R_\theta \mathscr{L}$, com ângulo lagrangeano $\widetilde{\beta}$. Dado $\{X_1, \cdots, X_n\}$ um referencial tangente à $\mathscr{L}$, então $\left\{e^{\tau\theta}X_1, \cdots, e^{\tau\theta}X_n\right\}$ é um referencial tangente à $\widetilde{\mathscr{L}}$. Assim, pelo Teorema 1.1.1, temos que*

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta} &= \arg\Omega\left(e^{\tau\theta}X_1, \cdots, e^{\tau\theta}X_n\right) = \arg\left(e^{\tau n\theta}\Omega(X_1, \cdots, X_n)\right) \\ &= \arg\left(e^{\tau n\theta}\right) + \arg\Omega(X_1, \cdots, X_n) \\ &= n\theta + \beta_0. \end{aligned}$$

Logo, tomando $\theta = -\dfrac{1}{n}\beta_0$, segue que $\widetilde{\beta} = 0$.

2.2.2 Subvariedades lagrangeanas $SO(n)$-equivariantes

Denotemos o grupo das rotações (isometrias que preservam orientação) do $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ por

$$SO(n) := \{M \in Gl(n;\mathbb{R}) \ ; \ \langle Mx, My\rangle = \langle x, y\rangle, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e } \det M > 0\},$$

sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$. Tal grupo atua naturalmente sobre o espaço $(\mathbb{D}^n, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*)$ da seguinte maneira: dado $z = x + \tau y \in \mathbb{D}^n$ e $M \in SO(n)$, basta definir

$$Mz = M(x + \tau y) := Mx + \tau My.$$

Como $x, y \in \mathbb{R}^n$, note que $\langle\langle x, y\rangle\rangle_* = \langle x, y\rangle$. E assim,

$$\langle\langle Mx, My\rangle\rangle_* = \langle Mx, My\rangle = \langle x, y\rangle = \langle\langle x, y\rangle\rangle_*.$$

Logo, $SO(n)$ pode ser identificado com um subgrupo do grupo

$$U^*(n) := \left\{M \in Gl(n;\mathbb{D}) \ ; \ \left\langle\left\langle Mz, Mz'\right\rangle\right\rangle_* = \left\langle\left\langle z, z'\right\rangle\right\rangle_* \ \forall\, z, z' \in \mathbb{D}^n\right\},$$

uma vez que dados $z = x + \tau y, z' = x' + \tau y' \in \mathbb{D}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle Mz, Mz'\rangle\rangle_* &= \langle\langle Mx + \tau My, Mx' + \tau My'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle Mx, Mx'\rangle\rangle_* + \langle\langle Mx, \tau My'\rangle\rangle_* + \langle\langle \tau My, Mx'\rangle\rangle_* \\
&\quad + \langle\langle \tau My, \tau My'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle Mx, Mx'\rangle\rangle_* - \tau\langle\langle Mx, My'\rangle\rangle_* + \tau\langle\langle My, Mx'\rangle\rangle_* \\
&\quad + \tau\bar{\tau}\langle\langle My, My'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle x, x'\rangle\rangle_* - \tau\langle\langle x, y'\rangle\rangle_* + \tau\langle\langle y, x'\rangle\rangle_* - \langle\langle y, y'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle x, x'\rangle\rangle_* + \langle\langle x, \tau y'\rangle\rangle_* + \langle\langle \tau y, x'\rangle\rangle_* + \langle\langle \tau y, \tau y'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle x + \tau y, x' + \tau y'\rangle\rangle_* \\
&= \langle\langle z, z'\rangle\rangle_*.
\end{aligned}$$

Definição 2.2.4. *Dizemos que $\mathscr{L}$ é uma subvariedade $SO(n)$-*equivariante *de $\mathbb{D}^n$ se $A\mathscr{L} \subset \mathscr{L}$, para toda $A \in SO(n)$. Aqui, dado $z \in \mathscr{L}$, $z = x + \tau y$, com $x, y \in \mathbb{R}^n$, definimos*

$$Az = A(x + \tau y) := Ax + \tau Ay.$$

A seguir, daremos uma caracterização das subvariedades lagrangeanas $SO(n)$-equivariantes.

Teorema 2.2.3. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana $SO(n)$-equivariante de $\mathbb{D}^n$, com $n \geq 3$. Então $\mathscr{L}$ é, localmente, a imagem de uma imersão da forma*

$$\phi : I \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}^n \quad \textit{tal que} \quad \phi(s, x) = \gamma(s)x,$$

onde $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{D}^*$ é uma curva plana e $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, x\rangle = 1\}$. Além disso, a métrica induzida em $\mathscr{L}$ é não-degenerada em $\phi(s, x)$ se, e somente se, o número paracomplexo $\gamma'\gamma^{n-1}$ satisfaz $\langle\gamma'\gamma^{n-1}, \gamma'\gamma^{n-1}\rangle_* \neq 0$. Nesse caso, o ângulo lagrangeano de $\mathscr{L}$ é dado por

$$\beta = \arg(\gamma'\gamma^{n-1}).$$

Demonstração. Como $n \geq 3$, podemos considerar três diferentes índices $j,\ k,\ l$ e definir as seguintes matrizes M_{jl} e M_{kl}:

$$M_{jl}(e_j) = e_l, \quad M_{jl}(e_l) = e_j, \quad M_{jl}(e_m) = 0, \quad \forall\ m \neq j, l$$

e

$$M_{kl}(e_k) = e_l, \quad M_{kl}(e_l) = e_k, \quad M_{kl}(e_m) = 0, \quad \forall\ m \neq k, l.$$

Aqui, $\{e_i\}$ denota um referencial ortonormal do $\mathbb{R}^n$. É imediato notar que tais matrizes são auto-adjuntas: por exemplo, temos que

$$\langle M_{jl}(e_j), e_l\rangle = \langle e_l, e_l\rangle = \langle e_j, e_j\rangle = \langle e_j, M_{jl}(e_l)\rangle.$$

Além disso, dado $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathscr{L}$, temos que as curvas

$$s \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(s) = e^{M_{jl}s}z \\ \gamma_2(s) = e^{M_{kl}s}z \end{cases}$$

pertencem à $\mathscr{L}$, uma vez que as matrizes $e^{M_{jl}s},\ e^{M_{kl}s} \in SO(n)$. Note que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z$ e

$$\gamma_1'(0) = M_{jl}z \quad \text{e} \quad \gamma_2'(0) = M_{kl}z.$$

Portanto, $M_{jl}z$ e $M_{kl}z$ são vetores tangentes à subvariedade $\mathscr{L}$. Além disso, sendo $\mathscr{L}$ lagrangeana,

temos que

$$0 = \omega\left(M_{jl}z, M_{kl}z\right) = -\mathrm{Im}\langle\langle M_{jl}z, M_{kl}z\rangle\rangle_*.$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\langle\langle M_{jl}z, M_{kl}z\rangle\rangle_* &= \langle\langle z_je_l + z_le_j, z_ke_l + z_le_k\rangle\rangle_* \\
&= z_jz_k\langle\langle e_l, e_l\rangle\rangle_* + z_jz_l\langle\langle e_l, e_k\rangle\rangle_* + z_kz_l\langle\langle e_j, e_l\rangle\rangle_* + z_l^2\langle\langle e_j, e_k\rangle\rangle_* \\
&= z_jz_k\langle\langle e_l, e_l\rangle\rangle_* \\
&= z_jz_k.
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Im}(zw) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{Im}\langle\langle M_{jl}z, M_{kl}z\rangle\rangle_* \\
&= -\mathrm{Im}\left(z_jz_k\right) \\
&= -\left(\mathrm{Re}(z_j)\mathrm{Im}(z_k) + \mathrm{Im}(z_j)\mathrm{Re}(z_k)\right), \quad \forall\, j, k.
\end{aligned}$$

Assim, como tal igualdade vale para todo índice j e k, segue que $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ são colineares. De fato, fixado um índice k, temos que

$$\mathrm{Re}(z_j) = -\frac{\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\mathrm{Im}(z_j) = \lambda_k\mathrm{Im}(z_j), \quad \forall\, j,$$

onde denotamos

$$\lambda_k = -\frac{\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}.$$

Agora, como

$$z = \mathrm{Re}(z) + \tau\mathrm{Im}(z) = (\lambda_k + \tau)\,\mathrm{Im}(z),$$

e $\lambda_k + \tau \in \mathbb{D}$, temos duas possibilidades a analisar. Se $\lambda_k + \tau \in \mathbb{D}$ for um vetor do tipo luz, então $\lambda_k = \pm 1$. Neste caso, podemos escrever

$$z = (\lambda_k + \tau)\,\mathrm{Im}(z) = (\tau \pm 1)\mathrm{Im}(z) := \gamma_1 x, \quad \text{com} \quad x = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\mathrm{Im}(z)|}.$$

Caso contrário, existe $\varphi \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^*$ tal que $(\lambda_k + \tau) = r\tau^\alpha e^{\tau\varphi}$, com $\alpha \in \{0, 1\}$. Assim, podemos escrever

$$z = (\lambda_k + \tau)\,\mathrm{Im}(z) = r\tau^\alpha e^{\tau\varphi}\mathrm{Im}(z) := \gamma_2 x, \quad \text{com} \quad x = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\mathrm{Im}(z)|}.$$

Em ambos os casos, z é um produto de um paracomplexo γ por um vetor $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Pela hipótese de equivariância, variando z em $\mathscr{L}$, temos que $\gamma\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathscr{L}$. Finalmente, como $\mathscr{L}$ é n-dimensional, então $\mathscr{L}$ deve ser localmente folheada pela família a 1-parâmetro de quádricas $\gamma(s)\mathbb{S}^{n-1}$.

Finalmente, como $\mathscr{L}$ é localmente parametrizada por uma imersão da forma $\phi(s, x) = \gamma(s)x$, sejam $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_x\mathbb{S}^{n-1}$. Como

$$T_{(s,x)}\left(I \times \mathbb{S}^{n-1}\right) = \mathbb{R} \times T_x\mathbb{S}^{n-1}$$

fazendo a identificação $e_i \cong (0, e_i)$ e $1 \cong (1, 0)$, $\forall\, i \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos que $\{E_0, E_1 \cdots, E_{n-1}\}$ forma uma base de $T_{\phi(s,x)}\mathscr{L}$, onde

$$E_0 := d\phi_{(s,x)}(1, 0) = \gamma'(s)x \quad \text{e} \quad E_i := d\phi_{(s,x)}(0, e_i) = \gamma(s)e_i.$$

Portanto, como

$$\begin{aligned}\Omega(E_0, E_1, \cdots, E_{n-1}) &= \Omega(\gamma'(s)x, \gamma(s)e_1, \cdots, \gamma(s)e_{n-1}) \\ &= \gamma'\gamma^{n-1}\Omega(x, e_1, \cdots, e_{n-1}) \\ &= \gamma'\gamma^{n-1},\end{aligned}$$

temos, pelo Lema 2.2.1, que a métrica induzida em $\mathscr{L}$ é não-degenerada em $\phi(s,x)$ se, e somente se, o número paracomplexo $\gamma'(s)\gamma^{n-1}(s)$ satisfaz $\left\langle \gamma'(s)\gamma^{n-1}(s), \gamma'(s)\gamma^{n-1}(s)\right\rangle_* \neq 0$. Nesse caso, o ângulo lagrangeano de $\mathscr{L}$ em $\phi(s,x)$ é dado por

$$\beta(\phi(s,x)) = \arg\left(\gamma'(s)\gamma^{n-1}(s)\right).$$

□

Diferentemente do caso clássico, o Teorema 2.2.3 não vale para o caso $n = 2$, como mostra o próximo exemplo:

Exemplo 2.2.3. *Seja $\lambda > 0$ e considere a imersão dada por*

$$f(s,t) = e^{M_1 t}\left(e^{\tau s}, \lambda\tau e^{\tau s}\right), \quad \textit{onde} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como podemos mostrar que

$$SO(2) = \left\{e^{M_1 t}\ ;\ t \in \mathbb{R}\right\},$$

a imersão f acima é $SO(2)$-equivariante. Um breve cálculo mostra que tal imersão também é lagrangeana e que a métrica induzida é não-degenerada se, e somente se, $\lambda \neq 1$. No entanto, não é possível escrever f como no enunciado do Teorema 2.2.3, pois

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\tau s} \\ \lambda\tau e^{\tau s} \end{pmatrix} = e^{\tau s}\begin{pmatrix} \cos t - \lambda\tau\sin t \\ \sin t + \lambda\tau\cos t \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

Subvariedades lagrangeanas mínimas

No capítulo anterior, dentre outras coisas, chegamos à conclusão que qualquer subvariedade paracomplexa de uma variedade para-Kähler é mínima, desde que esta seja não-degenerada. Em relação às subvariedades lagrangeanas, mesmo restringindo-se ao estudo de tais subvariedades no espaço paracomplexo $\mathbb{D}^n$, vimos que a análise da minimalidade requer a definição de um novo conceito, a saber, o *ângulo lagrangeano* de uma subvariedade lagrangeana. Por se tratar de um caso mais delicado, dedicaremos este capítulo inteiro ao estudo das subvariedades lagrangeanas mínimas do $\mathbb{D}^n$.

3.1 Caracterização das superfícies lagrangeanas mínimas indefinidas

Nesta seção, caracterizaremos as superfícies lagrangeanas mínimas indefinidas do espaço paracomplexo $\mathbb{D}^2$. Iniciamos com a definição seguinte.

Definição 3.1.1. *Seja P um plano em $\left(\mathbb{D}^2, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*\right)$. Dizemos que P é um plano* totalmente nulo *se $\langle\cdot,\cdot\rangle_*|_P = 0$.*

Lema 3.1.1. *Um plano P em $\left(\mathbb{D}^2, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*\right)$ é totalmente nulo se, e somente se, $JP = P^\omega$, sendo P^ω o complemento ortogonal simplético de P.*

Demonstração. Primeiramente, note que $JP \subset P^\omega$. De fato, dado $X \in P$, temos que

$$\omega(JX, Y) = -\langle J(JX), Y\rangle_* = -\langle X, Y\rangle_* = 0, \quad \forall\, Y \in P.$$

Logo, $JX \in P^\omega$. Além disso, como ω é uma forma não-degenerada e a dimensão real de JP é dois, segue que a dimensão real de P^ω é igual a dois, donde segue que $JP = P^\omega$. Reciprocamente, para qualquer $X \in P$, temos

$$|X|_*^2 := \langle X, X\rangle_* = \left\langle J^2X, X\right\rangle_* = -\omega(JX, X) = 0.$$

Assim, usando a *fórmula de polarização paracomplexa*, que é dada por

$$|X+Y|_*^2 = |X|_*^2 + |Y|_*^2 + 2\langle X, Y\rangle_*,$$

para todos $X, Y \in P$, segue o resultado. □

Observação 3.1.1. *A fórmula de polarização paracomplexa pode ser demonstrada diretamente pela definição da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ em questão.*

Corolário 3.1.1. *Suponha que P satisfaça duas das 3 propriedades seguintes: é totalmente nulo, é lagrangeano e é estável em relação à estrutura J. Então, a terceira propriedade também é satisfeita.*

Demonstração. Basta utilizar o Lema 3.1.1. □

Teorema 3.1.1. *Seja $\mathscr{L}$ uma superfície lagrangeana mínima de $\left(\mathbb{D}^2, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*\right)$. Se $\mathscr{L}$ é indefinida, então $\mathscr{L} = \gamma_1 \times J\gamma_2 \subset P \oplus JP$, onde γ_1 e γ_2 são duas curvas contidas num plano totalmente nulo não-lagrangeano P.*

Demonstração. Pela definição de $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$, sabemos que a assinatura da variedade $(\mathbb{D}^2, J, \langle\cdot,\cdot\rangle_*, \omega)$ é $(2,2)$ e, além disso, sendo $\mathscr{L}$ lagrangeana, suas possíveis assinaturas são $(2,0)$, $(1,1)$ e $(0,2)$. Porém, por hipótese, sendo $\mathscr{L}$ indefinida, segue que sua assinatura é $(1,1)$. Assim, pelo Teorema 1.3.4, podemos afirmar que $\mathscr{L}$ é localmente parametrizada por uma imersão da forma

$$f(u,v) = \gamma_1(u) + \widetilde{\gamma}_2(v),$$

onde $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ e $\widetilde{\gamma}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ são duas curvas nulas do $\mathbb{D}^2$ tais que

$$\left\langle \gamma_1'(u), \widetilde{\gamma}_2'(v) \right\rangle_* \neq 0, \quad \forall\ (u,v) \in I_1 \times I_2.$$

Além disso, como $\mathscr{L}$ é lagrangeana e $f_u = \gamma_1'(u)$, $f_v = \widetilde{\gamma}_2'(v)$ formam uma base de $T_{f(u,v)}\mathscr{L}$, para todos u e v, temos que

$$\omega\left(\gamma_1'(u), \widetilde{\gamma}_2'(v)\right) = 0, \quad \forall (u,v) \in I_1 \times I_2. \tag{3.1}$$

Assim, defina os seguintes conjuntos

$$P_1 := \operatorname{Span}\left\{\gamma_1'(u)\ ;\ u \in I_1\right\} \quad \text{e} \quad P_2 := \operatorname{Span}\left\{\widetilde{\gamma}_2'(v)\ ;\ v \in I_2\right\}.$$

Note que, embora as curvas consideradas sejam nulas, elas são regulares, isto é, $\gamma_1', \widetilde{\gamma}_2' \neq 0$. Logo, podemos afirmar que $\dim P_1, \dim P_2 \geq 1$. Se ocorrer $\dim P_1 = \dim P_2 = 1$, teremos, necessariamente, que γ_1 e $\widetilde{\gamma}_2$ serão segmentos de reta, donde implicará que $\mathscr{L}$ é planar e, portanto, seguirá o resultado. De fato, basta considerar

$$P := \operatorname{Span}\left\{\gamma_1', \gamma_2'\right\}, \quad \text{com} \quad \gamma_2 := J\widetilde{\gamma}_2,$$

e notar que

$$\left\langle \gamma_1', \gamma_2' \right\rangle_* = \left\langle \gamma_1', J\widetilde{\gamma}_2' \right\rangle_* = \omega\left(\gamma_1', \widetilde{\gamma}_2'\right) = 0 \quad \text{e} \quad \omega\left(\gamma_1', \gamma_2'\right) = \left\langle \gamma_1', J\gamma_2' \right\rangle_* = \left\langle \gamma_1', \widetilde{\gamma}_2' \right\rangle_* \neq 0.$$

Logo, o plano P é totalmente nulo e não-lagrangeano. Desta forma, sem perda de generalidade, podemos assumir $\dim P_1 \neq 1$. Além disso, como vale (3.1), segue que $P_1 \subset P_2^\omega$. Logo, pela não-degeneracidade de ω, obtemos

$$\dim P_1 \leq \dim P_2^\omega = \dim \mathbb{D}^2 - \dim P_2 \leq 4 - 1 = 3,$$

donde segue que $1 < \dim P_1 \leq 3$.

Afirmamos que $\dim P_1 = 2$. Para provar isto, suponha por absurdo, que $\dim P_1 = 3$. Analogamente ao exposto acima, notamos que a igualdade (3.1) implica que $P_2 \subset P_1^\omega$. Logo,

$$\dim P_2 \leq \dim P_1^\omega = 4 - \dim P_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dim P_2 = 1.$$

Assim, pela definição de P_2, segue que $\widetilde{\gamma}_2$ é um segmento de reta, digamos $\widetilde{\gamma}_2(v) = e_0 v + e_1$, com $e_0, e_1 \in \mathbb{D}^2$. Porém, sendo $\widetilde{\gamma}_2$ uma curva nula, temos que

$$0 = \left\langle \widetilde{\gamma}_2'(v), \widetilde{\gamma}_2'(v) \right\rangle_* = \langle e_0, e_0 \rangle_*,$$

ou seja, e_0 é um vetor nulo de $\mathbb{D}^2$. Ressaltamos que $e_0 \notin \operatorname{Ker}(J \pm I)$. De fato, se ocorrer de $Je_0 = \pm e_0$,

teremos que $\{e_0\}^\omega = \{e_0\}^\perp$. Assim, como para todo $u \in I_1$ vale

$$0 = \omega\left(\gamma_1'(u), \widetilde{\gamma}_2'(v)\right) = \omega\left(\gamma_1'(u), e_0\right),$$

teríamos que $\gamma_1' \in \{e_0\}^\omega = \{e_0\}^\perp$. Logo,

$$0 = \left\langle \gamma_1', e_0 \right\rangle_* = \left\langle \gamma_1', \widetilde{\gamma}_2' \right\rangle_* \neq 0,$$

o que é um absurdo. Assim, sendo $e_0 \notin \mathrm{Ker}(J \pm I)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $e_0 = (1,0,0,1)$. Considere $\gamma_1' = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ e denote $\mathscr{C} := \left\{z \in \mathbb{D}^2 \ ; \ \langle z, z\rangle_* = 0\right\}$, ou seja, o *cone de luz* do $\mathbb{D}^2$. Como

$$\gamma_1'(u) \in \mathscr{C} \cap \{e_0\}^\omega,$$

temos que $0 = \omega(e_0, \gamma_1') = \langle e_0, J\gamma_1'\rangle_* = y_1 - x_2$ e $0 = \langle \gamma_1', \gamma_1'\rangle_* = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2$. Logo, $\gamma_1' = (x_1, y_1, y_1, \pm x_1)$ e, portanto,

$$\gamma_1' \in \pi_1 \cup \pi_2 := \mathrm{Span}\left\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\right\} \cup \mathrm{Span}\left\{(1,0,0,-1),(0,1,1,0)\right\}.$$

Agora, como $\pi_1 \subset \{e_0\}^\perp$ e $0 \neq \langle \gamma_1', \widetilde{\gamma}_2'\rangle_* = \langle \gamma_1', e_0\rangle_*$, segue que $\gamma_1' \in \pi_2$. Logo, $\dim P_1 \leq 2$, donde obtemos uma contradição. Logo, temos que $\dim P_1 = 2$. Assim, denote

$$P := P_1 \quad \text{e} \quad \gamma_2 := J\widetilde{\gamma}_2.$$

Como $\gamma_1'(u) \in P_1$, $\forall\ u$ e γ_1 é uma curva nula, segue que P é um plano totalmente nulo em $\mathbb{D}^2$. Além disso, pela igualdade (3.1) e pelo fato de que $\widetilde{\gamma}_2'(v) \notin P_1$ (uma vez que γ_1' e $\widetilde{\gamma}_2'$ são linearmente independentes), tem-se que ${P_1}^\omega \neq P_1$. Portanto, o plano P não é lagrangeano (e, portanto, não é estável em relação à J). Finalmente, como

$$f(u,v) = \gamma_1(u) + \widetilde{\gamma}_2(v) = \gamma_1(u) + J^2\widetilde{\gamma}_2(v) = \gamma_1(u) + J\gamma_2(v)$$

e $\gamma_1, \gamma_2 \subset P$, segue o resultado. □

Observação 3.1.2. *Há um resultado análogo ao Teorema 3.1.1 no caso complexo, onde a hipótese a respeito da subvariedade $\mathscr{L}$ ser indefinida segue imediatamente do fato de se trabalhar com subvariedades lagrangeanas de uma variedade pseudo-Kähler: se M for uma variedade pseudo-Kähler de assinatura $(2p, 2n-2p)$ então a assinatura da métrica induzida numa subvariedade lagrangeana $\mathscr{L}$ de M é, necessariamente, $(p, n-p)$. Uma referência para tal resultado é o livro [5].*

3.2 Gráficos lagrangeanos mínimos

Definição 3.2.1. *Seja $u : \mathscr{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, definida num aberto $\mathscr{U}$ do $\mathbb{R}^n$ munido da métrica riemanniana canônica, e considere a seguinte imersão*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\mathbb{D}^n, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*) \\ & x & \longmapsto & x + \tau\nabla u(x), \end{array}$$

onde ∇u é o gradiente da função u com respeito à métrica canônica do $\mathbb{R}^n$. A imagem $\mathscr{L} := f(\mathscr{U})$ da imersão f é chamada de gráfico lagrangeano da função u.

Teorema 3.2.1. *Um gráfico lagrangeano $\mathscr{L}$ é uma subvariedade lagrangeana. Além disso, a métrica induzida em $\mathscr{L}$ é não-degenerada se, e somente se, $\left\langle \det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j})), \det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j}))\right\rangle_* \neq 0$. Neste caso, a sua função ângulo lagrangeano é dada por*

$$\beta = \arg\det\left(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j})_{1\leq j,k\leq n}\right).$$

Demonstração. Escrevendo

$$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \tau u_{x_1}, \cdots, x_n + \tau u_{x_n}),$$

temos, para $1 \leq j, k \leq n$:

$$f_{x_k} = (\tau u_{x_k x_1}, \cdots, 1 + \tau u_{x_k x_k}, \cdots, \tau u_{x_k x_n})$$

e

$$Jf_{x_j} = \tau f_{x_j} = (u_{x_j x_1}, \cdots, \tau + u_{x_j x_j}, \cdots, u_{x_j x_n}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\omega(f_{x_j}, f_{x_k}) &= \left\langle Jf_{x_j}, f_{x_k} \right\rangle_* \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[dx_i(Jf_{x_j}) dx_i(f_{x_k}) - dy_i(Jf_{x_j}) dy_i(f_{x_k}) \right] \\ &= u_{x_j x_k} - u_{x_k x_j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a subvariedade $\mathscr{L}$ é lagrangeana. Note que

$$(f_{x_j})_{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 + \tau u_{x_1 x_1} & \tau u_{x_2 x_1} & \cdots & \tau u_{x_n x_1} \\ \tau u_{x_1 x_2} & 1 + \tau u_{x_2 x_2} & \cdots & \tau u_{x_n x_2} \\ & \vdots & & \\ \tau u_{x_1 x_n} & \tau u_{x_2 x_n} & \cdots & 1 + \tau u_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j}).$$

Assim, pelo Lema 2.2.1, a métrica induzida em $\mathscr{L}$ é não-degenerada em x se, e somente se, o número paracomplexo $\det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j}))$ satisfaz

$$\left\langle \det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j})), \det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j})) \right\rangle_* \neq 0.$$

Neste caso, o ângulo lagrangeano de $\mathscr{L}$ é dado por

$$\beta(x) = \arg\left(\det(f_{x_j})\right) = \arg\left(\det(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j}))\right).$$

□

A seguir, analisaremos o caso particular em que $n = 2$. Neste caso, o Teorema 3.2.1, juntamente com o Teorema 2.2.2, mostrarão que a busca por uma superfície lagrangeana mínima, parametrizada pelo gráfico lagrangeano de uma certa função u, recai sobre duas importantes equações diferenciais parciais envolvendo a função u.

Corolário 3.2.1. *Seja a mesma subvariedade não-degenerada $\mathscr{L} = f(\mathscr{U})$ do teorema anterior, sendo $\mathscr{U}$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$.*

(*a*) *Se a métrica induzida em $\mathscr{L}$ for definida, então o ângulo lagrangeano β de $\mathscr{L}$ é nulo se, e somente se, a função u satisfaz a* equação de Laplace

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0.$$

(*b*) *Se a métrica induzida em $\mathscr{L}$ for indefinida, então o ângulo lagrangeano β de $\mathscr{L}$ é nulo se, e somente se, a função u satisfaz a* equação de Monge-Ampère invertida

$$\mathrm{Hess}(u) = u_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2} - u_{x_1 x_2}^2 = -1.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\det\ \big(\mathrm{Id} + \tau(u_{x_k x_j})\big) &= \det \begin{bmatrix} 1+\tau u_{x_1x_1} & \tau u_{x_2x_1} \\ \tau u_{x_1x_2} & 1+\tau u_{x_2x_2} \end{bmatrix} \\
&= (1+\tau u_{x_1x_1})\,(1+\tau u_{x_2x_2}) - \tau^2 u_{x_1x_2}^2 \\
&= \big(1 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2\big) + \tau\,(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) \\
&= 1 + \mathrm{Hess}(u) + \tau\Delta u.
\end{aligned}$$

Como a métrica induzida é não-degenerada, então

$$(\Delta u)^2 \neq (1 + \mathrm{Hess}(u))^2.$$

Se $|\Delta u| < |1 + \mathrm{Hess}(u)|$, ou seja, se a métrica induzida for definida, temos que

$$\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta u = 0.$$

Por outro lado, se $|\Delta u| > |1 + \mathrm{Hess}(u)|$, ou seja, se a métrica induzida for indefinida, então

$$\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hess}(u) = -1.$$

□

Definição 3.2.2. *Dizemos que um gráfico lagrangeano $\mathscr{L}$ é completo quando o domínio da parametrização de $\mathscr{L}$ for todo o conjunto $\mathbb{R}^n$.*

Com base no Corolário 3.2.1, obtemos um resultado do tipo *Bernstein*. O clássico *Teorema de Bernstein* afirma que se uma superfície mínima é um gráfico completo, então ela é um plano. Para maiores informações sobre o referido teorema, consultar, por exemplo, [10].

Corolário 3.2.2. *Seja $\mathscr{L}$ um gráfico lagrangeano completo bidimensional do espaço paracomplexo $\mathbb{D}^2$, ou seja, $\mathscr{L} = f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{D}^2$, onde $f(x,y) = (x + \tau u_x, y + \tau u_y)$. Suponha ainda que a métrica induzida em $\mathscr{L}$ seja definida.*

(a) Se u for um plano, então $\mathscr{L}$ é mínima.

(b) Se o ângulo lagrangeano β de $\mathscr{L}$ é nulo e a função u é limitada, então $\mathscr{L}$ é um plano.

Demonstração. Primeiramente, se u for um plano, segue imediatamente que $\Delta u = 0$. Pelo primeiro item do Corolário 3.2.1, segue que $\beta = 0$ e, assim, a subvariedade $\mathscr{L}$ é mínima. Para provar o item (b), note que, se consideramos $\beta = 0$, temos novamente pelo primeiro item do Corolário 3.2.1 que a função $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\Delta u = 0$. Agora, como a função u é limitada, por hipótese, segue pelo *Teorema de Liouville* (ver, por exemplo, [1]), que a função u é constante. Logo, o gradiente de u é nulo, o que implica em $f(x,y) = (x, 0, y, 0)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde segue o resultado. □

3.3 Subvariedades lagrangeanas mínimas $SO(n)$-equivariantes

Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana $SO(n)$-equivariante do $\mathbb{D}^n$, com $n \geq 3$. Na seção 2.2.2, vimos que $\mathscr{L}$ é, localmente, a imagem de uma imersão da forma

$$\phi : I \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D}^n \quad \text{tal que} \quad \phi(s,x) = \gamma(s)x,$$

onde γ é uma curva em $\mathbb{D}^*$. No caso de $\mathscr{L}$ ser não-degenerada, sabemos ainda que seu ângulo lagrangeano é dado por $\beta = \arg(\gamma'\gamma^{n-1})$. Com base nestes resultados e com o intuito de obter informações a respeito da minimalidade de tais subvariedades, obtivemos o resultado seguinte:

Corolário 3.3.1. *Seja $\mathscr{L}$ uma subvariedade lagrangeana, não-degenerada e $SO(n)$-equivariante de $(\mathbb{D}^n, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*)$, sendo $n \geq 3$. Se $\mathscr{L}$ tem ângulo lagrangeano nulo, então $\mathscr{L}$ é um subconjunto aberto de uma das seguintes subvariedades:*

$$\mathscr{P}^n_{c_1} := \left\{\gamma \cdot x \in \mathbb{D}^n \ ; \ x \in \mathbb{S}^{n-1}, \ \gamma \in \mathbb{D} \ \ e \ \ \mathrm{Im}\,(\gamma^n) = c_1\right\}$$

ou

$$\mathscr{R}^n_{c_2} := \left\{\gamma \cdot x \in \mathbb{D}^n \ ; \ x \in \mathbb{S}^{n-1}, \ \gamma \in \mathbb{D} \ \ e \ \ \mathrm{Re}\,(\gamma^n) = c_2\right\},$$

para alguma constante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.3, sabemos que a subvariedade $\mathscr{L}$ é parametrizada localmente por $\phi(s,x) = \gamma(s)x$, onde $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{D}^*$, sendo o ângulo lagrangeano da imersão ϕ dado por

$$\beta = \arg\,(\gamma'\gamma^{n-1}).$$

Assim, como o número paracomplexo $\gamma'\gamma^{n-1}$ satisfaz $\left\langle\gamma'\gamma^{n-1}, \gamma'\gamma^{n-1}\right\rangle_* \neq 0$, temos que

$$\beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\gamma'\gamma^{n-1}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Re}\left(\gamma'\gamma^{n-1}\right) = 0.$$

Logo, integrando as igualdades acima, obtemos

$$0 = \int_I \mathrm{Im}\left(\gamma'\gamma^{n-1}\right) = \mathrm{Im}\int_I \left(\gamma'\gamma^{n-1}\right) \quad \text{e} \quad 0 = \int_I \mathrm{Re}\left(\gamma'\gamma^{n-1}\right) = \mathrm{Re}\int_I \left(\gamma'\gamma^{n-1}\right).$$

Portanto, dizer que $\mathscr{L}$ têm ângulo lagrangeano nulo, implica em $\mathrm{Im}\,(\gamma^n) = c_1$ ou $\mathrm{Re}\,(\gamma^n) = c_2$, sendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Observação 3.3.1. *Ressaltamos que a curva γ não pode intersectar o cone de luz $\mathscr{C}$ do plano paracomplexo. Com efeito, se $\exists\ s_0 \in I \ ; \ \gamma(s_0)\overline{\gamma(s_0)} = 0$, teríamos*

$$\begin{aligned}
\gamma'(s_0)\gamma^{n-1}(s_0)\overline{\gamma'(s_0)\gamma^{n-1}(s_0)} &= \gamma'(s_0)\gamma^{n-2}(s_0)\gamma(s_0)\overline{\gamma'(s_0)\gamma^{n-2}(s_0)\gamma(s_0)} \\
&= \gamma(s_0)\overline{\gamma(s_0)}\left(\gamma'(s_0)\gamma^{n-2}(s_0)\overline{\gamma'(s_0)\gamma^{n-2}(s_0)}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois estamos considerando $\mathscr{L}$ não-degenerada em $\phi(s_0, x)$. Assim, podemos escrever $\gamma = r\tau^\alpha e^{\tau\theta}$, com $\alpha \in \{0,1\}$. Além disso, se $\theta \neq 0$, colocando $\mathrm{Re}\,(\gamma^n) = c$ ou $\mathrm{Im}\,(\gamma^n) = c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, então o módulo r da curva γ satisfaz

$$r = \left(\frac{c}{\cosh n\theta}\right)^{1/n} \quad \textit{ou} \quad r = \left(\frac{c}{\sinh n\theta}\right)^{1/n}.$$

Corolário 3.3.2. *Suponha que $\mathscr{L} = \phi\left(I \times \mathbb{S}^{n-1}\right)$ seja conexa, onde $\phi(s,x) = \gamma(s)x$ e $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{D}^*$. Se $\gamma \subset H_1$, sendo H_1 definido na seção 1.1, então $\mathscr{L}$ é mínima, com ângulo lagrangeano $\beta_0 \in \mathbb{R}$, se e somente se, vale a seguinte relação entre o raio r e o argumento θ de γ:*

$$\left[\varepsilon\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\beta_0 - n\theta},$$

onde $\varepsilon = 1$ se $\left\langle\gamma'\gamma^{n-1}, \gamma'\gamma^{n-1}\right\rangle_* > 0$, ou $\varepsilon = -1$ se $\left\langle\gamma'\gamma^{n-1}, \gamma'\gamma^{n-1}\right\rangle_* < 0$.

Demonstração. Como $\gamma \subset H_1$, podemos escrever $\gamma(s) = r(s)e^{\tau\theta(s)}$. Pelo item (iii) da Proposição 1.1.1, obtemos

$$\gamma^{n-1} = \left(re^{\tau\theta}\right)^{n-1} = r^{n-1}e^{\tau(n-1)\theta},$$

e então

$$\begin{aligned}
\gamma'\gamma^{n-1} &= \left(r' + \tau r\theta'\right) e^{\tau\theta} r^{n-1} e^{\tau(n-1)\theta} \\
&= \left(r' + \tau r\theta'\right) r^{n-1} e^{\tau n\theta} \\
&= \left(r' + \tau r\theta'\right) r^{n-1} \left(\cosh n\theta + \tau \sinh n\theta\right) \\
&= \left(r' r^{n-1} \cosh n\theta + r^n \theta' \sinh n\theta\right) + \tau \left(r' r^{n-1} \sinh n\theta + r^n \theta' \cosh n\theta\right).
\end{aligned}$$

Para facilitar o entendimento das contas envolvidas, vamos denotar $z := \gamma'\gamma^{n-1} := a + \tau b$. Se $z\bar{z} > 0$, então o ângulo lagrangeano β_0 de z é dado por

$$\beta_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(r' r^{n-1} + r^n\theta'\right)\left(\cosh n\theta + \sinh n\theta\right)}{\left(r' r^{n-1} - r^n\theta'\right)\left(\cosh n\theta - \sinh n\theta\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(r' r^{n-1} + r^n\theta'\right) e^{n\theta}}{\left(r' r^{n-1} - r^n\theta'\right) e^{-n\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right) e^{2n\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right) + \frac{1}{2}\ln e^{2n\theta},
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\beta_0 = \ln\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right)^{\frac{1}{2}} + n\theta.$$

Analogamente, se $z\bar{z} < 0$, então o ângulo lagrangeano β_0 de z é dado por

$$\beta_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right).$$

Assim, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\left(r' r^{n-1} + r^n\theta'\right) e^{n\theta}}{\left(r^n\theta' - r' r^{n-1}\right) e^{-n\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{r' + r\theta'}{r\theta' - r'}\right) e^{2n\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(-\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln e^{2n\theta},
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\beta_0 = \ln\left(-\left(\frac{r' + r\theta'}{r' - r\theta'}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + n\theta.$$

□

3.4 Fibrados normais

Seja S uma subvariedade p-dimensional do $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$. Dado $x_0 \in S$, sejam $\{e_1, \cdots, e_p\}$ e $\{v_1, \cdots, v_q\}$, com $p + q = n$, campos de vetores formando

uma base ortonormal de T_xS e N_xS, respectivamente, numa vizinhança de x_0. Denotando o *fibrado normal* de S por

$$NS = \dot{\bigcup_{x\in S}} N_xS = \{(x, v_x)\ ;\ x \in S \text{ e } v_x \in N_xS\},$$

considere a seguinte imersão, dada por

$$\begin{array}{rcl} \psi : NS & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \oplus \tau\mathbb{R}^n = \mathbb{D}^n \\ (x, v_x) & \longmapsto & (x, v_x), \end{array}$$

onde consideramos v_x, no segundo fator, como um vetor com base na origem do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.4.1. *A subvariedade $\mathscr{L} := \psi(NS)$ é uma subvariedade lagrangeana de $\mathbb{D}^n$.*

Demonstração. Vamos introduzir coordenadas locais sobre a variedade NS da seguinte maneira: pelo Lema 1.3.1, existem coordenadas locais normais em $x_0 \in S$, isto é, $\exists\ \varphi : 0 \in \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow S$, $\varphi(s) = \varphi(s_1, \cdots, s_p)$, tal que $\varphi(0) = x_0$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_i}(0) = e_i$, para todo $i \in \{1, \cdots, p\}$. Além disso, sejam $t = (t_1, \cdots, t_q) \in \mathbb{R}^q$ coordenadas lineares na fibra N_xS com respeito à base $\{v_i\}$. Assim, considere

$$\widetilde{\psi}(s, t) = \widetilde{\psi}(s_1, \cdots, s_p, t_1, \cdots, t_q) = \left(\varphi(s), \sum_{i=1}^{q} t_i v_i(\varphi(s))\right).$$

Logo,

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t_j}(s, t) = \left(0, \frac{\partial}{\partial t_j}\left[\sum_{i=1}^{q} t_i v_i(\varphi(s))\right]\right) = (0, v_j(\varphi(s)))$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial s_j}(s, t) &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}(s), \frac{\partial}{\partial s_j}\left[\sum_{i=1}^{q} t_i v_i(\varphi(s))\right]\right) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}(s), \sum_{i=1}^{q} t_i \frac{\partial v_i}{\partial s_j}(\varphi(s))\right). \end{aligned}$$

No ponto $(x_0, v_0) \in NS$, onde $v_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} t_0^i v_i(x_0)$, temos que

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t_j}(0, t_0) = (0, v_j) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial s_j}(0, t_0) = \left(e_j, \sum_{i=1}^{q} t_0^i \frac{\partial v_i}{\partial s_j}\right),$$

onde os campos de vetores acima são calculados no ponto $x_0 \in S$ e consideramos $t_0 = \left(t_0^1, \cdots, t_0^q\right)$. Por conveniência, escolheremos os campos de vetores $\{v_i\}$ de forma que $(Dv_i)^{\perp}_{x_0} = 0$, isto é, a projeção da derivada de v_i no espaço normal é nula, sendo D a derivada usual do $\mathbb{R}^n$. Assim, para todo x numa vizinhança de x_0, temos

$$\frac{\partial v_i}{\partial s_j}(\varphi(s)) = D_{\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}} v_i(x) = \left(D_{\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}} v_i\right)^{\top} + \left(D_{\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}} v_i\right)^{\perp} = -A_{v_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}\right) + \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial s_j}} v_i.$$

No entanto, em $x_0 \in S$, obtemos

$$\frac{\partial v_i}{\partial s_j}(x_0) = -A_{v_i}(e_j),$$

onde v_i denotará o vetor normal à S, bem como sua extensão local em $\mathbb{R}^n$. Pelas contas anteriores, sabemos que os vetores $\{E_1, \cdots, E_p, N_1, \cdots, N_q\}$ formam uma base para o espaço $T_{\psi(x_0,v_0)}\mathscr{L}$, onde

denotamos $N_i = (0, v_i)$ e

$$E_j = \left(e_j, -\sum_{i=1}^{q} t_0^i A_{v_i}(e_j)\right) = \left(e_j, -A_{\sum t_0^i v_i}(e_j)\right) = (e_j, -A_{v_0}(e_j)).$$

Como $p+q=n$, isto é, a subvariedade $\mathscr{L}$ tem dimensão n, para provar que ela é lagrangeana, resta provar que a 2-forma ω se anula nos elementos da base de $T_{\psi(x_0,v_0)}\mathscr{L}$. Assim, como o operador de Weingarten é auto-adjunto, temos que

$$\begin{aligned}
-\omega(E_j, E_k) &= \langle JE_j, E_k\rangle_* = \langle J(e_j, -A_{v_0}(e_j)), (e_k, -A_{v_0}(e_k))\rangle_* \\
&= \langle(-A_{v_0}(e_j), e_j), (e_k, -A_{v_0}(e_k))\rangle_* \\
&= \langle -A_{v_0}(e_j), e_k\rangle - \langle e_j, -A_{v_0}(e_k)\rangle \\
&= -\langle A_{v_0}(e_j), e_k\rangle + \langle e_j, A_{v_0}(e_k)\rangle \\
&= -\langle e_j, A_{v_0}(e_k)\rangle + \langle e_j, A_{v_0}(e_k)\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a métrica usual do $\mathbb{R}^n$. Além disso, como

$$-\omega(N_j, N_k) = \langle JN_j, N_k\rangle_* = \langle J(0, v_j), (0, v_k)\rangle_* = \langle(v_j, 0), (0, v_k)\rangle_* = 0$$

e

$$\begin{aligned}
-\omega(N_j, E_k) = \langle JN_j, E_k\rangle_* &= \langle J(0, v_j), (e_k, -A_{v_0}(e_k))\rangle_* \\
&= \langle(v_j, 0), (e_k, -A_{v_0}(e_k))\rangle_* \\
&= \langle v_j, e_k\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

segue o resultado. □

Proposição 3.4.1. *A subvariedade $\mathscr{L}$ é não-degenerada no ponto $\psi(x_0, v_0)$ se, e somente se, os autovalores λ_i de A_{v_0} são diferentes de 1 e -1. Além disso, $\mathscr{L}$ é não-degenerada para pontos $\psi(x_0, v_\mu)$ com $\|v_\mu\|$ suficientemente pequena.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathscr{L}$ e suponha que os vetores $e_1, \cdots, e_p$ diagonalizam a aplicação auto-adjunta A_{v_0}, isto é, existem escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tais que $A_{v_0}(e_k) = \lambda_k e_k$. Desta forma, podemos considerar uma base para $T_{\psi(x_0,v_0)}\mathscr{L}$ dada pelos vetores

$$E_i = (e_i, -\lambda_i e_i) \quad \text{e} \quad N_j = (0, v_j),$$

onde os campos e_i e v_j são calculados em x_0. Assim, como

$$\begin{aligned}
\langle E_i, E_l\rangle_* &= \langle(e_i, -\lambda_i e_i), (e_l, -\lambda_l e_l)\rangle_* \\
&= \langle e_i, e_l\rangle - \langle -\lambda_i e_i, -\lambda_l e_l\rangle \\
&= \langle e_i, e_l\rangle - \lambda_i\lambda_l\langle e_i, e_l\rangle \\
&= (1 - \lambda_i\lambda_l)\langle e_i, e_l\rangle \\
&= (1 - \lambda_i\lambda_l)\delta_{il},
\end{aligned}$$

além disso,

$$\langle N_j, N_k\rangle_* = \langle(0, v_j), (0, v_k)\rangle_* = -\langle v_j, v_k\rangle = -\delta_{jk}$$

e

$$\begin{aligned}\langle E_i, N_j\rangle_* &= \langle (e_i, -\lambda_i e_i), (0, v_j)\rangle_* \\ &= \langle e_i, 0\rangle - \langle -\lambda_i e_i, v_j\rangle \\ &= \lambda_i \langle e_i, v_j\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

temos que o determinante da primeira forma fundamental $g := \langle \cdot, \cdot\rangle_*|_{\mathscr{L}}$ no ponto $\psi(x_0, v_0)$ é dado por

$$\det(g) = (-1)^q \prod_{i=1}^{p} (1 - \lambda_i^2).$$

Como $\det(g) = 0$ se, e somente se, $\lambda_i = \pm 1$ para algum i, provamos a primeira parte do resultado. Assim, fixado $(x_0, v_0) \in NS$, obtivemos um critério para analisar a degeneracidade da subvariedade $\mathscr{L}$ no ponto $\psi(x_0, v_0)$. Agora, com base nesse critério pontual, queremos analisar a degeneracidade da subvariedade $\mathscr{L}$ no ponto $x_0 \in S$, sob pequena perturbação do vetor normal v_0, ou seja, consideraremos os vetores normais em x_0 dados por $v_\mu = \mu v_0$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Assim, suponha que $\|v_0\| = 1$. Calculemos o determinante da primeira forma fundamental no ponto (x_0, v_μ), com μ variando. Como denotamos por λ_i os autovalores correspondentes aos autovetores e_i, então $\mu\lambda_1, \cdots, \mu\lambda_p$ são os autovalores de $A_{v_\mu} = \mu A_{v_0}$. Logo, podemos considerar uma base para $T_{\psi(x_0, v_\mu)}\mathscr{L}$ dada pelos vetores

$$N_i = (0, v_i)$$

e

$$E_j = \left(e_j, -\sum_{i=1}^{q} \mu t_0^i A_{v_i}(e_j)\right) = \left(e_j, -A_{\sum \mu t_0^i v_i}(e_j)\right) = \left(e_j, -A_{v_\mu}(e_j)\right) = (e_j, -\mu\lambda_j e_j).$$

Assim,

$$\langle N_j, N_k\rangle_* = -\delta_{jk}, \quad \langle E_i, N_j\rangle_* = \mu\lambda_i \langle e_i, v_j\rangle = 0$$

e

$$\langle E_i, E_l\rangle_* = \langle e_i, e_l\rangle - \mu^2 \lambda_i \lambda_l \langle e_i, e_l\rangle = \left(1 - \mu^2 \lambda_i \lambda_l\right) \delta_{il}.$$

Portanto, no ponto $\psi(x_0, v_\mu)$, tem-se

$$\det(g)_{\psi(x_0, v_\mu)} = (-1)^q \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \mu^2 \lambda_i^2\right).$$

Como o conjunto dos autovalores de A_{v_0} tem uma quantidade finita de elementos, segue que

$$\lim_{\mu \to 0} \det(g)_{\psi(x_0, v_\mu)} = (-1)^q.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\det(g)_{\psi(x_0, v_\mu)} \neq 0$, para todo μ tal que $0 < |\mu| < \delta$. Portanto, $\mathscr{L}$ é não-degenerada para pontos $\psi(x_0, v_\mu)$ com $\|v_\mu\|$ suficientemente pequena, pois

$$\|v_\mu\| = \|\mu v_0\| = |\mu|.$$

□

No que segue, estamos interessados em estudar a minimalidade da subvariedade $\mathscr{L}$ de $\mathbb{D}^n$. Antes, porém, faz-se necessário apresentar algumas observações e definições preliminares. Como veremos, para estes tipos de subvariedades, o conceito de minimalidade está relacionado ao conceito de *austeridade*.

Definição 3.4.1. *Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ números reais e $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ um vetor. A k-ésima* função simétrica elementar*, ou* invariante de ordem k associada à λ*, é definida por*

$$\sigma_k(\lambda) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

para $1 \leq k \leq n$. Utilizaremos a convenção: $\sigma_0(\lambda) = 1$.

O próximo resultado afirma que, se as entradas do vetor λ são os autovalores de uma matriz real $A_{n\times n}$, então as funções simétricas elementares são, a menos de sinal, iguais aos coeficientes do polinômio característico $p_A(t)$ da referida matriz.

Lema 3.4.1. *Se A é uma matriz real $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, então para todo $1 \leq k \leq n$, temos que*

$$\sigma_k(\lambda) = (-1)^k c_k,$$

onde c_k são os coeficientes do polinômio característico da matriz A.

Demonstração. O polinônio característico de A é dado por

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(A - t\mathrm{Id}) &= (-1)^n \det(t\mathrm{Id} - A) \\ &= (-1)^n \left[t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n\right]. \end{aligned}$$

Nota-se que $c_1 = -\mathrm{tr}(A)$ e $c_n = (-1)^n \det(A)$. Como

$$\begin{aligned} p_A(t) &= (-1)^n \left[t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n\right] \\ &= (-1)^n t^n + (-1)^n c_1 t^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_{n-1} t + (-1)^n c_n \\ &= a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n, \end{aligned}$$

onde escrevemos $a_0 = (-1)^n$ e $a_i = (-1)^n c_i$, então o *teorema de decomposição de polinômios* nos permite escrever

$$p_A(t) = a_0(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n),$$

uma vez que os autovalores λ_i de A são os zeros de $p_A(t)$. Assim, pelas *relações de Girard*, temos

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \dfrac{a_2}{a_0} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \cdots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \quad \vdots \\ \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Portanto, segue que $\sigma_k(\lambda) = (-1)^k c_k$. □

Corolário 3.4.1. *Suponha que a subvariedade $\mathscr{L} = \psi(NS)$ seja não-degenerada. Então o ângulo lagrangeano β de $\mathscr{L}$ é nulo se, e somente se, os coeficientes c_i do polinômio característico da matriz A_ξ, $\xi \in N_x S$, onde $x \in S$, satisfazem*

$$\sum_{i \text{ par}} c_i = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{j \text{ ímpar}} c_j = 0.$$

Demonstração. Sabemos que $\{E_1, \cdots, E_p, N_1, \cdots, N_q\}$ formam uma base para a subvariedade $\mathscr{L}$ no ponto $\psi(x_0, v_0)$, onde

$$E_i = (e_i, -\lambda_i e_i) = (1 - \tau\lambda_i)e_i \quad \text{e} \quad N_j = (0, v_j) = 0 + \tau v_j.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Omega(E_i, N_j) &= (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)(E_1, \cdots, E_p, N_1, \cdots, N_q) \\
&= \begin{vmatrix}
(1-\tau\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & (1-\tau\lambda_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & (1-\tau\lambda_p) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \tau & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \tau & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau
\end{vmatrix} \\
&= \tau^q \prod_{k=1}^{p} (1-\tau\lambda_k) \\
&= \tau^q \left[\sigma_0(\lambda) + \sigma_2(\lambda) + \cdots + \widehat{\sigma_{p-1}(\lambda)} + \widehat{\widehat{\sigma_p(\lambda)}} \right] \\
&\quad -(\tau)^q \tau \left[\sigma_1(\lambda) + \sigma_3(\lambda) + \cdots + \widehat{\widehat{\sigma_{p-1}(\lambda)}} + \widehat{\sigma_p(\lambda)} \right],
\end{aligned}
$$

onde o símbolo $\widehat{\sigma_j(\lambda)}$, com $j \in \{p-1, p\}$, indica a ausência do respectivo termo no caso em que p é par, e $\widehat{\widehat{\sigma_j(\lambda)}}$, com $j \in \{p-1, p\}$, indica a ausência do respectivo termo no caso em que p é ímpar. Portanto,

$$
\Omega(E_i, N_j) = \tau^q \prod_{k=1}^{p} (1-\tau\lambda_k) = \tau^q \left[\sum_{i \text{ par}} \sigma_i(\lambda) - \tau \sum_{j \text{ ímpar}} \sigma_j(\lambda) \right]. \tag{3.2}
$$

Assim, como o ângulo lagrangeano β é nulo se, e somente se,

$$
\operatorname{Re}(\Omega(E_i, N_j)) = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im}(\Omega(E_i, N_j)) = 0,
$$

então segue o resultado pelo Lema 3.4.1. □

Observação 3.4.1. *Considere $p(t)$ um polinômio com coeficiente complexo de grau $n \geq 1$, com raízes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Podemos escrever:*

$$
\begin{aligned}
p(t) &= a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n \\
&= a_0 (t-\alpha_1) \cdots (t-\alpha_n) \\
&= a_0 \left(t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} t + (-1)^n \sigma_n \right),
\end{aligned}
$$

onde σ_k são as k-ésimas funções simétricas elementares de $p(t)$, dadas por

$$
\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}.
$$

Lema 3.4.2. *Seja $p(t)$ um polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$. As funções simétricas elementares ímpares $\sigma_1, \sigma_3, \cdots, \sigma_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}$ de $p(t)$ são todas iguais a zero se, e somente se, $p(t)$ possui raízes nulas ou da forma $\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_l$, com $l \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.*

Demonstração. Suponhamos que todas as funções simétricas elementares de $p(t)$ sejam iguais a zero e que n seja ímpar, isto é:

$$
\sigma_1 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_n = 0.
$$

As raízes de $p(t)$ são as soluções da equação

$$t^n + \sigma_2 t^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1} t = 0.$$

Se $\sigma_{2i} = 0$, $i = 1, \cdots, \dfrac{n-1}{2}$, então $p(t) = a_0 t^n$ e todas as raízes são nulas. Do contrário, seja $2l$ o maior índice tal que $\sigma_{2l} \neq 0$. Temos

$$t^n + \sigma_2 t^{n-2} + \cdots + \sigma_{2l} t^{n-2l} = 0.$$

Logo, 0 é raíz de multiplicidade $n - 2l$ e as outras raízes de $p(t)$ são soluções da equação

$$t^{2l} + \sigma_2 t^{2l-2} + \cdots + \sigma_{2l} = 0. \tag{3.3}$$

Fazendo $u = t^2$ em (3.3) obtemos

$$u^l + \sigma_2 u^{l-1} + \cdots + \sigma_{2l} = 0. \tag{3.4}$$

As raízes complexas da equação (3.4) são diferentes de zero, portanto podemos escrevê-las como $\beta_k = |\beta_k| e^{\theta_k i}$, onde $e^{\theta_k i} = \cos\theta_k + i \sin\theta_k$, com $i^2 = -1$, $0 \leq \theta_k < 2\pi$ e $k = 1, \cdots, l$. De $t^2 = u$ resulta que as raízes de (3.3) são $\pm\alpha_k$, onde $\alpha_k = \sqrt{|\beta_k|} e^{\frac{\theta_k}{2} i}$, $k = 1, \cdots, l$. O caso n par é tratado de modo análogo.

Suponhamos agora que as raízes do polinômio $p(t)$ sejam nulas ou da forma $\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_l$. Sem perda de generalidade, podemos supor $p(t)$ mônico. Como $p(t)$ tem grau n, zero é raíz de multiplicidade $n - 2l$. Considere o polinômio

$$q(t) = t^{n-2l} \prod_{i=1}^{l} \left(t^2 - \alpha_i^2\right).$$

Observe que $q(t)$ e $p(t)$ são mônicos e possuem as mesmas raízes. Logo $q(t) = p(t)$ e podemos escrever

$$\begin{aligned} p(t) &= t^{n-2l} \left(t^{2l} - \sigma_1' t^{2l-2} + \sigma_2' t^{2l-4} + \cdots + (-1)^{l-1} \sigma_{l-1}' t^2 + (-1)^l \sigma_l'\right) \\ &= t^n - \sigma_1' t^{n-2} + \cdots + (-1)^{l-1} \sigma_{l-1}' t^{n-2l+2} + (-1)^l \sigma_l' t^{n-2l}, \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\sigma_k' = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq l} \alpha_{i_1}^2 \cdots \alpha_{i_k}^2.$$

Segue que

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3 = \cdots = \sigma_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} = 0 \\ \sigma_{2i} = (-1)^i \sigma_i', \quad i = 1, \cdots, l \\ \sigma_{2l+2} = \cdots = \sigma_{2\left[\frac{n}{2}\right]} = 0, \end{cases}$$

o que completa a prova. □

Observação 3.4.2. *A demonstração acima foi sugerida pelo professor Luiz Amancio Machado de Souza Junior, integrante da banca julgadora da defesa desta tese de doutorado. Nota-se também que, se $p(t)$ não for mônico na demonstração acima, isto é, $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} t^{n-i}$, $a_n \neq 1$, basta considerar $q(t) = t^n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{a_n} t^{n-i}$ que é mônico e possui as mesmas raízes que $p(t)$.*

Definição 3.4.2. *Uma subvariedade S^n de uma variedade pseudo-riemanniana (M, g) é* austera *se, para todo $\xi \in N_xS$, os invariantes de ordem ímpar de A_ξ são nulos. Isto é,*

$$\sigma_{2k-1}(A_\xi) := \sigma_{2k-1}(\lambda_\xi) = 0, \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

sendo $\lambda_\xi = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ os autovalores de A_ξ.

Corolário 3.4.2. *Uma subvariedade S^n de uma variedade pseudo-riemanniana (M, g) é austera se, e somente se, os autovalores de A_ξ são da forma*

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \cdots, \alpha_l, -\alpha_l, 0, \cdots, 0, 0),$$

para todo $\xi \in N_xS$ e para algum $0 \leq l \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

Demonstração. Dado $\xi \in N_xS$, considere $\lambda_\xi = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ os autovalores de A_ξ. Por definição, a austeridade de S é equivalente ao fato de que as k-ésimas funções simétricas elementares ímpares de A_ξ são nulas, isto é,

$$\sigma_1(\lambda_\xi) = 0, \quad \sigma_3(\lambda_\xi) = 0, \quad \cdots \quad, \sigma_{2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1}(\lambda_\xi) = 0.$$

Pelo Lema 3.4.2, isto é equivalente a afirmar que as raízes do polinômio característico p_{A_ξ} e, portanto, os autovalores de A_ξ, são nulos ou da forma $\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_l$, com $l \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. □

Observação 3.4.3. *Suponha que S seja uma superfície do $\mathbb{R}^3$. Como a matriz que representa o operador A_ξ é uma matriz 2×2, o polinômio característico de A_ξ pode ser expresso por*

$$p_{A_\xi}(t) = t^2 - \mathrm{tr}(A_\xi)t + \det(A_\xi) = t^2 + c_1 t + c_2.$$

Assim, S é austera se, e somente se, $c_1 = -\mathrm{tr}(A_\xi) = 0$. Portanto, denotando por λ_1 e λ_2 os autovalores associados à aplicação auto-adjunta A_ξ, temos que $\mathrm{tr}(A_\xi) = \lambda_1 + \lambda_2$. Logo, S é austera se, e somente se, S é mínima. Portanto, no caso de superfícies, austeridade é equivalente ao conceito de minimalidade.

Teorema 3.4.2. *Suponha que $\mathscr{L} = \psi(NS)$ seja uma subvariedade não-degenerada. Se S for austera, então $\mathscr{L}$ é mínima.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.4.2, temos que S ser austera é equivalente ao fato dos autovalores λ_i do operador A_ξ, $\xi \in N_xS$, satisfazerem

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) = (\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \cdots, \alpha_l, -\alpha_l, 0, \cdots, 0, 0),$$

para algum $0 \leq l \leq \left[\frac{p}{2}\right]$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p}(1 - \tau\lambda_k) &= (1 - \tau\alpha_1)(1 + \tau\alpha_1)(1 - \tau\alpha_2)(1 + \tau\alpha_2)\cdots(1 - \tau\alpha_l)(1 + \tau\alpha_l) \\
&= (1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2)\cdots(1 - \alpha_l^2) \\
&:= r \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto, pela equação (3.2), temos que

$$\Omega(E_i, N_j) = r\tau^q.$$

Ou seja, $\Omega(E_i, N_j)$ é um número paracomplexo real ou imaginário puro. Assim, em qualquer dos casos, $\mathscr{L}$ tem ângulo lagrangeano nulo, donde segue a minimalidade de $\mathscr{L}$. □

Capítulo 4

Subvariedades lagrangeanas autossimilares

Este capítulo é inteiramente dedicado ao estudo das subvariedades autossimilares. Tais subvariedades merecem um destaque especial principalmente por estarem associadas às soluções do fluxo da curvatura média. Daremos condições necessárias e suficientes para que as subvariedades $SO(n)$-equivariantes, bem como as superfícies de Castro-Chen, sejam autossimilares.

4.1 O fluxo da curvatura média e a equação autossimilar

Definição 4.1.1. *Seja S a imagem de uma imersão $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que a subvariedade S é* autossimilar *se satisfaz a seguinte equação*

$$\vec{H} + \lambda\ \phi^{\perp} = 0,$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de S e ϕ é o vetor posição em $\mathbb{R}^n$. Tal equação é conhecida como equação autossimilar.

A seguir, veremos que as equações autossimilares surgem como solução especial do fluxo da curvatura média, que preserva a forma da subvariedade ao longo da evolução.

Definição 4.1.2. *Dada uma variação $F : (-t_0, t_0) \times M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de uma imersão $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fixada, dizemos que F é solução do* fluxo da curvatura média (MCF) *se satisfaz a equação de evolução*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,p)\right)^{\perp} = \vec{H}_t(p), \quad \forall\ p \in M \ e\ -t_0 < t < t_0,$$

sendo $F(0,p) = \phi(p)$, $\forall\ p \in M$ e $\vec{H}_t(p)$ o vetor curvatura média da subvariedade $S_t := F_t(M)$ em $p \in M$.

Para comprovar o que dissemos anteriormente, vamos considerar, em particular, a variação

$$F : (-t_0, t_0) \times M \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{dada por} \quad \begin{cases} F(t,p) = f(t)\phi(p) \\ F(0,p) = \phi(p), \end{cases}$$

sendo $f : (-t_0, t_0) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ uma função suave tal que $f(0) = 1$. Tal variação move a subvariedade $S = \phi(M)$ por *homotetias* de razão $f(t) \in \mathbb{R}^*$. Note que a variação F satisfaz o fluxo da curvatura média se, e somente se,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,p)\right)^{\perp} = \big(f'(t)\phi(p)\big)^{\perp} = f'(t)\phi^{\perp}(p) = \vec{H}_t(p).$$

Como os vetores curvatura média $\vec{H}$ e $\vec{H}_t$ das imersões ϕ e F_t, respectivamente, se relacionam por

$$\vec{H}_t(p) = \frac{\vec{H}(p)}{f(t)}, \quad \forall\, p \in M,$$

obtemos uma condição necessária e suficiente para que F seja solução do fluxo da curvatura média, a qual é dada por

$$\begin{cases} \vec{H}(p) + \lambda\phi^{\perp}(p) = 0, & \forall\, p \in M \\ \lambda = -f(t)f'(t), & \forall\, t \in (-t_0, t_0) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Desta forma, se a imersão ϕ for autossimilar, isto é, se $\vec{H} + \lambda\phi^{\perp} = 0$, então

$$F_t(p) = \sqrt{1 - 2\lambda t}\ \phi(p)$$

é solução do fluxo da curvatura média, se $1 - 2\lambda t > 0$. Para obter a expressão de $f(t)$, basta integrar a equação diferencial por ela satisfeita, levando-se em conta que $f(0) = 1$.

Observação 4.1.1. *Se $\lambda = 1$, a família $F_t(p) = \sqrt{1-2t}\phi(p)$, com $0 \leq t < 1/2$, evoluciona a imersão inicial ϕ por* contrações (*homotetias de razão menor que um*) *até sua total extinção, no instante $t = 1/2$. Da mesma forma, se $\lambda = -1$, a família $F_t(p) = \sqrt{1+2t}\phi(p)$, com $t \geq 0$, evoluciona a imersão inicial ϕ por* dilatações (*homotetias de razão maior que um*).

A observação acima motiva a seguinte definição:

Definição 4.1.3. *Seja $S = \phi(M)$ uma subvariedade autossimilar. Se $\lambda = 1$, dizemos simplesmente que S é* autocontrátil, *e se $\lambda = -1$, dizemos que S é* autoexpansiva.

4.2 Subvariedades lagrangeanas autossimilares $SO(n)$-equivariantes

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathscr{L}$ a imagem da aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & I \times \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & (\mathbb{D}^n, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*) \\ & (s,x) & \longmapsto & \gamma(s)x, \end{array}$$

sendo $\gamma = a + \tau b : I \longrightarrow \mathbb{D}^*$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano paracomplexo $\mathbb{D}$. Então, $\mathscr{L}$ é uma subvariedade lagrangeana. Além disso, suponha que $\mathscr{L}$ seja não-degenerada e denote por $\vec{H}$ o vetor curvatura média da imersão. Seja ν um vetor normal unitário de γ e K_γ a curvatura associada. Então, $\mathscr{L}$ é autossimilar, isto é, satisfaz a seguinte equação

$$\vec{H} + \lambda\ \phi^{\perp} = 0,$$

para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a curvatura K_γ de γ é dada por

$$K_\gamma = \langle\gamma, \nu\rangle_* \left(\frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} - n\lambda \right).$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixado e $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ base ortonormal de $T_x\mathbb{S}^{n-1}$. Como $\mathbb{S}^{n-1}$ é uma hipersuperfície do $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, sabemos que

$$T_x\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n\ ;\ \langle v, x\rangle = 0\} = x^{\perp}.$$

Pelo Lema 1.3.1, existe $\psi : 0 \in \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $\psi(t) = \psi(t_1, \cdots, t_{n-1})$ um sistema de coordenadas locais normais em x, tal que $\psi(0) = x$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial t_i}(0) = e_i$. Agora, considere a seguinte

aplicação

$$\begin{array}{rcl} X : I \times \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ (s,t) & \longmapsto & X(s,t) = \phi(\varphi(s,t)), \end{array}$$

onde $\varphi : I \times \mathscr{U} \longrightarrow I \times \mathbb{S}^{n-1}$ é dada por $\varphi(s,t) = (s, \psi(t))$. Logo,

$$X(s,t) = \phi(s, \psi(t)) = \gamma(s)\psi(t). \tag{4.1}$$

Assim,

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s,t) = \gamma'(s)\psi(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial t_i}(s,t) = \gamma(s)\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t),$$

e portanto,

$$\frac{\partial X}{\partial s}(s,0) = \gamma'(s)x \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial t_i}(s,0) = \gamma(s)e_i.$$

Como

$$T_{(s,x)}\left(I \times \mathbb{S}^{n-1}\right) = \mathbb{R} \times T_x\mathbb{S}^{n-1}$$

e $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de $T_x\mathbb{S}^{n-1}$, fazendo a identificação $e_i \cong (0, e_i)$ e $1 \cong (1,0)$, para todo $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos que $\{E_0, E_1 \cdots, E_{n-1}\}$ forma uma base de $T_{\phi(s,x)}\mathscr{L}$, onde

$$E_0 := d\phi_{(s,x)}(1,0) = \gamma'(s)x \quad \text{e} \quad E_i := d\phi_{(s,x)}(0, e_i) = \gamma(s)e_i.$$

Veremos agora que a subvariedade $\mathscr{L}$ é lagrangeana. De fato, como a dimensão de $\mathscr{L}$ é n, resta mostrar que a forma simplética ω se anula em $\mathscr{L}$. Assim, $\forall\ i \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \omega(E_i, E_0) & = & \langle E_i, J(E_0)\rangle_* = \left\langle \gamma(s)e_i, \tau\gamma'(s)x\right\rangle_* \\ & = & \left\langle ae_i + \tau be_i, \tau(a' + \tau b')x\right\rangle_* \\ & = & \left\langle ae_i, \tau a'x\right\rangle_* + \left\langle ae_i, \tau^2 b'x\right\rangle_* + \left\langle \tau be_i, \tau a'x\right\rangle_* + \left\langle \tau be_i, \tau^2 b'x\right\rangle_* \\ & = & aa'\langle e_i, \tau x\rangle_* + ab'\langle e_i, x\rangle_* + ba'\langle \tau e_i, \tau x\rangle_* + bb'\langle \tau e_i, x\rangle_* \\ & = & aa'\langle e_i, \tau x\rangle_* + ab'\langle e_i, x\rangle_* - a'b\langle e_i, x\rangle_* - bb'\langle e_i, \tau x\rangle_* \\ & = & (aa' - bb')\langle e_i, \tau x\rangle_* + (ab' - a'b)\langle e_i, x\rangle_* \\ & = & \left\langle \gamma, \gamma'\right\rangle_*\langle e_i, \tau x\rangle_* \\ & = & 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \omega(E_i, E_j) & = & \langle E_i, J(E_j)\rangle_* = \langle \gamma(s)e_i, \tau\gamma(s)e_j\rangle_* \\ & = & \langle ae_i + \tau be_i, \tau ae_j + be_j\rangle_* \\ & = & a^2\langle e_i, \tau e_j\rangle_* + ab\langle e_i, e_j\rangle_* - ab\langle e_i, e_j\rangle_* + b^2\langle \tau e_i, e_j\rangle_* \\ & = & \left(a^2 - b^2\right)\langle e_i, \tau e_j\rangle_* \\ & = & 0. \end{array}$$

Logo, ω se anula em $\mathscr{L}$, donde segue que $\mathscr{L}$ é lagrangeana. Agora, como supomos que $\mathscr{L}$ é não-degenerada, segue pelo Teorema 2.2.1 que

$$J\left(T_{\phi(s,x)}\mathscr{L}\right) = \left(T_{\phi(s,x)}\mathscr{L}\right)^{\perp} = T^{\perp}_{\phi(s,x)}\mathscr{L}.$$

Desta forma, denotando

$$N_0 := J(E_0) = \tau\gamma'(s)x \quad \text{e} \quad N_i := J(E_i) = \tau\gamma(s)e_i,$$

obtemos que $\{N_0, N_1, \cdots, N_{n-1}\}$ é base de $T^{\perp}_{\phi(s,x)}\mathscr{L}$. Agora, denotemos por g a métrica induzida em $\mathscr{L}$, isto é, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle_*|_{\mathscr{L}}$, e coloque $\langle\gamma',\gamma'\rangle_* = \epsilon = \pm 1$. Calculemos os coeficientes da métrica g:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= g(E_0, E_0) = \left\langle \gamma'(s)x, \gamma'(s)x \right\rangle_* \\
&= \left\langle (a' + \tau b')x, (a' + \tau b')x \right\rangle_* \\
&= (a')^2\langle x, x\rangle_* + a'b'\langle x, \tau x\rangle_* + b'a'\langle \tau x, x\rangle_* + (b')^2\langle \tau x, \tau x\rangle_* \\
&= (a')^2\langle x, x\rangle_* + (b')^2\langle \tau x, \tau x\rangle_* \\
&= \left[(a')^2 - (b')^2\right]\langle x, x\rangle_* \\
&= \left\langle \gamma', \gamma' \right\rangle_* \langle x, x\rangle \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Considerando $j, k \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos

$$g_{jk} = g(E_j, E_k) = \langle \gamma e_j, \gamma e_k\rangle_* = (a^2 - b^2)\langle e_j, e_k\rangle_* = \epsilon_{jk}\delta_{jk}|\gamma|^2_*,$$

sendo $\epsilon_{jk} = \pm 1$ e δ_{jk} é o *delta de Kronecker*, e

$$g_{j0} = g(E_j, E_0) = \left\langle \gamma e_j, \gamma' x \right\rangle_* = (ab' - ba')\langle e_j, \tau x\rangle_* = 0.$$

Denotando $(g^{jk}) := (g_{jk})^{-1}$, segue que

$$g^{00} = \epsilon, \quad g^{0j} = g^{j0} = 0 \quad \text{e} \quad g^{jk} = \frac{1}{\epsilon_{jk}|\gamma|^2_*}\delta_{jk}.$$

Finalmente, como $\mathbb{D}^n = T_p\mathscr{L} \oplus T^{\perp}_p\mathscr{L}$, onde $p = \phi(s,x)$ e a métrica é não-degenerada, segue que

$$\left\langle \vec{H} + \lambda\phi^{\perp}, N_j \right\rangle_* = 0, \ \forall\, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{H} + \lambda\phi^{\perp} = 0.$$

Equivalentemente, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \left\langle \vec{H}, N_0 \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_0\rangle_* = 0 \\ \left\langle \vec{H}, N_j \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_j\rangle_* = 0, \ \forall\, j \in \{1, \cdots, n-1\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Como $\phi = \phi(s,x) = \gamma(s)x$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \phi, N_0\rangle_* &= \left\langle ax + \tau bx, \tau(a' + \tau b')x \right\rangle_* \\
&= aa'\langle x, \tau x\rangle_* + ab'\langle x, x\rangle_* + ba'\langle \tau x, \tau x\rangle_* + bb'\langle \tau x, x\rangle_* \\
&= (ab' - ba')\langle x, x\rangle_* \\
&= ab' - ba'.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle \phi, N_j\rangle_* = \langle ax + \tau bx, \tau(a + \tau b)e_j\rangle_* = ab\langle x, e_j\rangle_* - ab\langle x, e_j\rangle_* = 0,$$

para todo $j \in \{1, \cdots, n-1\}$. Para calcular os demais produtos internos, lembramos que no caso de $\{E_0, E_1, \cdots, E_{n-1}\}$ ser uma base qualquer de $T_p\mathscr{L}$, o vetor curvatura média da imersão é calculado pela expressão:

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=0}^{n-1} g^{ij}h(E_i, E_j).$$

Denote por ∇ a conexão de Levi-Civita de $\mathscr{L}$ em relação à métrica induzida do $(\mathbb{D}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_*)$ e defina $T_{ijk} := T(E_i, E_j, E_k)$, sendo T a aplicação tensorial definida na Proposição 2.2.3, ou seja,

$T_{ijk} = \langle h(E_i, E_j), JE_k\rangle_*$. Pela fórmula de Gauss, sabemos que

$$D_{E_j}E_i = \nabla_{E_j}E_i + h(E_j, E_i),$$

onde D é a derivada usual do $\mathbb{R}^{2n}$. Assim, para calcular os termos T_{ijk}, note que por (4.1),

$$D_{E_0}E_0 = \frac{\partial^2 X}{\partial s^2}(s,0) = \gamma''(s)\psi(0) = \gamma''(s)x,$$

$$D_{E_0}E_i = \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t_i}(s,0) = \gamma'(s)e_i$$

e

$$D_{E_j}E_i = \frac{\partial^2 X}{\partial t_j \partial t_i}(s,0) = \frac{\partial}{\partial t_j}\left(\gamma(s)\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t)\right)\Big|_{(s,0)} = \gamma(s)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t_j \partial t_i}(0).$$

Denotando $\nu_{jk} := \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t_j \partial t_k}(0)$ para simplificar a notação, obtemos

$$\begin{aligned} T_{000} &= \langle h(E_0, E_0), JE_0\rangle_* = \langle D_{E_0}E_0, JE_0\rangle_* = \left\langle \gamma''(s)x, \tau\gamma'(s)x\right\rangle_* \\ &= (a''b' - a'b'')\langle x, x\rangle_* \\ &= a''b' - a'b'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{jk0} &= \langle h(E_j, E_k), JE_0\rangle_* = \left\langle D_{E_j}E_k, JE_0\right\rangle_* = \left\langle \gamma(s)\nu_{jk}, \tau\gamma'(s)x\right\rangle_* \\ &= (ab' - a'b)\langle \nu_{jk}, x\rangle_* + (bb' - aa')\langle \tau\nu_{jk}, x\rangle_* \\ &= (ab' - a'b)\langle \nu_{jk}, x\rangle_*, \end{aligned}$$

$$T_{00j} = \langle h(E_0, E_0), JE_j\rangle_* = \langle D_{E_0}E_0, JE_j\rangle_* = \left\langle \gamma'' x, \tau\gamma e_j\right\rangle_* = 0$$

e

$$T_{jkl} = \langle h(E_j, E_k), JE_l\rangle_* = \left\langle D_{E_j}E_k, JE_l\right\rangle_* = \langle \gamma\nu_{jk}, \tau\gamma e_l\rangle_* = 0,$$

sendo $j, k, l \neq 0$. Além disso, como $\left\langle \dfrac{\partial \psi}{\partial t_k}(t), \psi(t)\right\rangle_* = 0$ para todo t e $\forall\ k \in \{1, \cdots, n-1\}$, então

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t), \psi(t)\right\rangle_* = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_j \partial t_k}(t), \psi(t)\right\rangle_* + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(t), \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(t)\right\rangle_* = 0.$$

Logo, em $t = 0$, obtemos

$$\langle \nu_{jk}, x\rangle_* = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_j \partial t_k}(0), \psi(0)\right\rangle_* = -\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(0), \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(0)\right\rangle_* = -\langle e_k, e_j\rangle_* = -\epsilon_{jk}\delta_{jk}.$$

E assim, podemos reescrever o termo T_{jk0} como

$$T_{jk0} = (ab' - a'b)\langle \nu_{jk}, x\rangle_* = -(ab' - a'b)\epsilon_{jk}\delta_{jk}.$$

No entanto, utilizando a notação da subseção 1.3.2 sobre curvas, temos que $\nu_\pm = \pm J\gamma'$ são os campos de vetores normais unitários à curva $\gamma = a + \tau b$. Logo,

$$T_{jk0} = -(ab' - a'b)\epsilon_{jk}\delta_{jk} = \left\langle \gamma, -J\gamma'\right\rangle_*\epsilon_{jk}\delta_{jk} = \langle \gamma, \mp\nu_\pm\rangle_*\epsilon_{jk}\delta_{jk}.$$

Mais ainda, sabemos que sua função curvatura é dada por

$$K_\gamma = \frac{\langle \gamma'', \nu_\pm \rangle_*}{\langle \gamma', \gamma' \rangle_*} = \pm \frac{\langle \gamma'', J\gamma' \rangle_*}{\langle \gamma', \gamma' \rangle_*} = \pm\epsilon \left(a''b' - b''a' \right),$$

e, portanto, o termo T_{000} fica igual a

$$T_{000} = a''b' - a'b'' = \pm\epsilon K_\gamma.$$

Assim, estamos aptos a calcular os produtos internos seguintes:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{H}, N_0 \right\rangle_* &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} g^{ij} \langle h(E_i, E_j), J(E_0) \rangle_* = \frac{1}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} g^{ij} T_{ij0} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g^{0j} T_{0j0} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} g^{ij} T_{ij0} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(g^{00} T_{000} + \sum_{j=1}^{n-1} g^{0j} T_{0j0} \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(g^{i0} T_{i00} + \sum_{j=1}^{n-1} g^{ij} T_{ij0} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\epsilon \left(\pm\epsilon K_\gamma \right) \right) + \frac{1}{n|\gamma|_*^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\epsilon_{ii}} \left(\langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_* \epsilon_{ii} \delta_{ii} \right) \\
&= \pm \frac{K_\gamma}{n} \epsilon^2 + \frac{1}{n|\gamma|_*^2} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_* \delta_{ii} \\
&= \pm \frac{K_\gamma}{n} + \frac{(n-1)\langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_*}{n|\gamma|_*^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{H}, N_k \right\rangle_* &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} g^{ij} \langle h(E_i, E_j), J(E_k) \rangle_* \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g^{0j} T_{0jk} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} g^{ij} T_{ijk} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo os valores encontrados dos produtos internos no sistema (4.2), obtemos que tal sistema é equivalente a seguinte equação:

$$\pm \frac{K_\gamma}{n} + \frac{(n-1)\langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_*}{n|\gamma|_*^2} + \lambda \langle \gamma, J\gamma' \rangle_* = 0,$$

ou seja, como $\langle \gamma, -J\gamma' \rangle_* = \langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_*$, então

$$\pm K_\gamma = \langle \gamma, \mp\nu_\pm \rangle_* \left(n\lambda - \frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} \right).$$

Em relação ao vetor normal ν_+, a curvatura de γ é dada por

$$K_\gamma = \langle \gamma, -\nu_+ \rangle_* \left(n\lambda - \frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} \right)$$

e, portanto,

$$K_\gamma = \langle \gamma, \nu_+ \rangle_* \left(\frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} - n\lambda \right).$$

Em relação ao vetor normal ν_-, a curvatura de γ é dada por

$$-K_\gamma = \langle \gamma, +\nu_- \rangle_* \left(n\lambda - \frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} \right),$$

ou seja,

$$K_\gamma = \langle \gamma, \nu_- \rangle_* \left(\frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} - n\lambda \right).$$

Assim, em qualquer um dos casos, temos que a curvatura de γ é dada por

$$K_\gamma = \langle \gamma, \nu \rangle_* \left(\frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} - n\lambda \right), \tag{4.3}$$

onde $\nu = \nu_+$ ou $\nu = \nu_-$. □

4.2.1 Análise da equação (4.3)

Com o intuito de identificar o gráfico da curva $\gamma = a + \tau b$ que satisfaz a equação (4.3), ou seja, a igualdade

$$K_\gamma = \langle \gamma, \nu \rangle_* \left(\frac{(n-1)}{|\gamma|_*^2} - n\lambda \right),$$

iremos recorrer à representação polar da mesma. Como observado pelo Teorema 4.2.1, podemos tomar como vetor normal à γ o vetor $\nu = -J\gamma'$. Além disso, como $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_* = \epsilon = \pm 1$, iremos dividir a análise nos 2 casos possíveis.

1º caso: $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_* = 1$.

Nesse caso, podemos escrever $\gamma'(s) = \pm e^{\tau\theta}$, onde s é o parâmetro de arco e $\theta = \theta(s)$. Logo, como $\nu = -J\gamma'$ é o vetor normal à curva γ, segue que

$$\gamma'' = \theta' \left(\pm \tau e^{\tau\theta} \right) = \theta' J\gamma',$$

e, portanto,

$$K_\gamma = \frac{\langle \gamma'', \nu \rangle_*}{\langle \gamma', \gamma' \rangle_*} = \theta' \langle J\gamma', \nu \rangle_* = \theta' \langle J\gamma', -J\gamma' \rangle_* = \theta'.$$

Denotemos $\gamma = \pm |\langle \gamma, \gamma \rangle_*|^{\frac{1}{2}} \tau^\beta e^{\tau\varphi} := r\tau^\beta e^{\tau\varphi}, \quad r = r(s), \ \varphi = \varphi(s)$. Como

$$\gamma = r\tau^\beta e^{\tau\varphi} = \begin{cases} re^{\tau\varphi} = (r\cosh\varphi, r\sinh\varphi), & \beta = 0 \\ r\tau e^{\tau\varphi} = (r\sinh\varphi, r\cosh\varphi), & \beta = 1, \end{cases}$$

temos que

$$\gamma' = \begin{cases} (r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi, r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi), & \beta = 0 \\ (r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi, r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi), & \beta = 1. \end{cases}$$

Utilizando o fato de que $\langle \gamma', \gamma' \rangle_* = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} 1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle_* &= \begin{cases} (r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi)^2 - (r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi)^2 \\ (r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi)^2 - (r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi)^2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (r')^2 - (r\varphi')^2, \quad \beta = 0 \\ -(r')^2 + (r\varphi')^2, \quad \beta = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, para cada s fixado, existe $\alpha = \alpha(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} r' = \cosh\alpha \\ r\varphi' = \sinh\alpha \end{cases}, \text{ se } \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r' = \sinh\alpha \\ r\varphi' = \cosh\alpha \end{cases}, \text{ se } \beta = 1. \tag{4.4}$$

Assim, utilizando o sistema acima, no caso $\beta = 0$, podemos reescrever γ' da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi, r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi) \\ &= (\cosh\alpha\cosh\varphi + \sinh\alpha\sinh\varphi, \cosh\alpha\sinh\varphi + \sinh\alpha\cosh\varphi) \\ &= (\cosh(\alpha+\varphi), \sinh(\alpha+\varphi)) \\ &= \pm(\cosh\theta, \sinh\theta). \end{aligned}$$

Da mesma forma, para o caso $\beta = 1$, podemos reescrever γ' como

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi, r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi) \\ &= (\sinh\alpha\sinh\varphi + \cosh\alpha\cosh\varphi, \sinh\alpha\cosh\varphi + \cosh\alpha\sinh\varphi) \\ &= (\cosh(\alpha+\varphi), \sinh(\alpha+\varphi)) \\ &= \pm(\cosh\theta, \sinh\theta). \end{aligned}$$

Em qualquer um dos casos, tem-se que

$$e^{\tau(\alpha+\varphi)} = \pm e^{\tau\theta}.$$

Observação 4.2.1. *Se o sinal na equação acima for negativo, chegamos a equação*

$$\cosh(\alpha+\varphi) + \cosh\theta = 0,$$

o que é um absurdo. Logo, temos necessariamente que $\gamma' = e^{\tau\theta}$.

Assim,

$$e^{\tau(\alpha+\varphi)} = e^{\tau\theta},$$

e portanto,

$$\alpha = \theta - \varphi.$$

Além disso, note que

$$\langle \gamma, \nu \rangle_* = \begin{cases} \left\langle re^{\tau\varphi}, -\tau e^{\tau\theta} \right\rangle_* = -r\sinh(\theta-\varphi) = -r\sinh\alpha, \quad \text{se } \beta = 0 \\ \left\langle r\tau e^{\tau\varphi}, -\tau e^{\tau\theta} \right\rangle_* = r\cosh(\theta-\varphi) = r\cosh\alpha, \quad \text{se } \beta = 1. \end{cases}$$

Usando que $K_\gamma = \theta'$,

$$|\gamma|_*^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle_* = r^2 \left\langle \tau^\beta e^{\tau\varphi}, \tau^\beta e^{\tau\varphi} \right\rangle_* = \pm r^2,$$

onde o sinal $\pm$ depende do valor de $\beta \in \{0, 1\}$, e as equações (4.4), segue que a equação (4.3) é

equivalente a um dos dois seguintes sistemas, respectivamente nos casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$:

$$\begin{cases} \theta' = -r\left(\dfrac{n-1}{r^2} - n\lambda\right)\sinh\alpha \\ \varphi' = \dfrac{1}{r}\sinh\alpha \\ r' = \cosh\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta' = r\left(\dfrac{n-1}{(-r^2)} - n\lambda\right)\cosh\alpha \\ \varphi' = \dfrac{1}{r}\cosh\alpha \\ r' = \sinh\alpha. \end{cases}$$

Note que as duas últimas igualdades de cada sistema seguem do fato de estarmos considerando γ' do tipo espaço. Como $\alpha = \theta - \varphi$, podemos reescrever os sistemas acima da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha' = \left(n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\sinh\alpha \\ r' = \cosh\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha' = \left(-n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\cosh\alpha \\ r' = \sinh\alpha, \end{cases} \tag{4.5}$$

respectivamente nos casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Observação 4.2.2. *Os sistemas acima são* sistemas autônomos*, uma vez que o lado direito de cada igualdade são funções que não dependem explicitamente da variável s. Geometricamente, notamos que $(\alpha'(s), r'(s))$ é um campo vetorial num aberto do plano e as* órbitas (soluções) *$(\alpha(s), r(s))$ são as curvas integrais desse campo, isto é, as curvas que, em cada ponto, são tangentes ao campo $(\alpha'(s), r'(s))$.*

Uma particular solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha' = \left(n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\sinh\alpha \\ r' = \cosh\alpha, \end{cases} \tag{4.6}$$

referente ao caso $\beta = 0$, plotada com o auxílio do software *Maple*, é dada por:

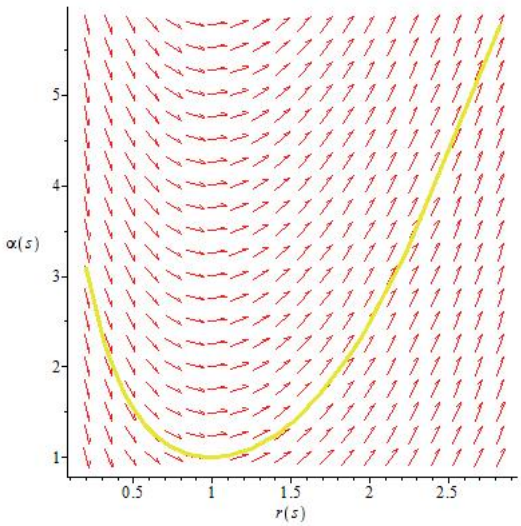

Figura 4.1: *Caso $\lambda = 1$ e $n = 2$.*

Se $\alpha = 0$, então obtemos $\varphi' = \theta' = 0$ e $r' = 1$ e, portanto, a curva $\gamma = \gamma(s)$ procurada tem a seguinte parametrização:

$$\gamma(s) = r(s)\tau^0 e^{\tau\varphi(s)} = (s+k)e^{\tau\varphi_0}, \quad k, \varphi_0 \in \mathbb{R} \text{ e } s \in I. \tag{4.7}$$

Suponha que $\alpha \neq 0$. Considere $\zeta(s) = (r(s), \alpha(s))$ uma *órbita* e $E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma *integral primeira* do sistema de equações diferenciais (4.6). Desta forma, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $E(\zeta(s)) = C$, para todo s. Derivando tal igualdade em relação à s, obtemos

$$\alpha'(s)E_\alpha + r'(s)E_r = 0,$$

e portanto,

$$\left(n\lambda r - \frac{n}{r}\right) E_\alpha \sinh\alpha + E_r \cosh\alpha = 0.$$

Pela igualdade acima, podemos notar que uma candidata a integral primeira do sistema é uma função da forma $E(r, \alpha) = Y(r)\sinh\alpha$. De fato, calculando as derivadas parciais da função E e substituindo na igualdade acima, obtemos

$$\cosh\alpha\sinh\alpha\left[Y'(r) + \left(n\lambda r - \frac{n}{r}\right)Y(r)\right] = 0.$$

Como $\sinh(2\alpha) = 2\cosh\alpha\sinh\alpha$ e $\alpha \neq 0$, a igualdade anterior é verificada se, e somente se, a função $Y(r)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$Y'(r) + \left(n\lambda r - \frac{n}{r}\right)Y(r) = 0.$$

Pelo *método do fator integrante*, notamos que $Y(r) = r^n \exp\left(-\frac{n\lambda r^2}{2}\right)$ é solução da equação diferencial acima. Portanto, uma integral primeira do sistema (4.6) é dada por

$$E(r, \alpha) = r^n \exp\left(-\frac{n\lambda r^2}{2}\right)\sinh\alpha. \tag{4.8}$$

Note que, dado $s_0 \in I$, podemos escrever

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{s_0}^{s} \varphi'(t)dt. \tag{4.9}$$

Como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sinh\alpha(s)}{r(s)} \quad \text{e} \quad \frac{dr}{ds} = \cosh\alpha(s),$$

então

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{\sinh\alpha}{r\cosh\alpha}.$$

Observe que, considerando $\alpha > 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} &= \left(\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{\cosh^2\alpha}{\sinh^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 + \frac{1}{\sinh^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 + \frac{r^{2n}\exp\left(-n\lambda r^2\right)}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aplicando (4.10) em (4.9), obtemos

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) = \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{d\varphi}{dr}dr = \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\rho^{2n}\exp\left(-n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho.$$

Portanto, para o caso em que $\alpha > 0$, temos que a curva procurada $\gamma = \gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)e^{\tau\varphi(s)}, \quad \text{com} \quad \varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\rho^{2n}\exp\left(-n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \tag{4.11}$$

Analogamente, se $\alpha < 0$, então a função seno hiperbólico nesse caso é negativa. Logo, a curva procurada $\gamma = \gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)e^{\tau\varphi(s)}, \quad \text{com} \quad \varphi(s) = \varphi(s_0) - \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\rho^{2n}\exp\left(-n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \tag{4.12}$$

Em relação ao segundo sistema de (4.5), referente ao caso $\beta = 1$, ou seja,

$$\begin{cases} \alpha' = \left(-n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\cosh\alpha \\ r' = \sinh\alpha, \end{cases} \tag{4.13}$$

uma particular solução (plotada com o software *Maple*) é dada por:

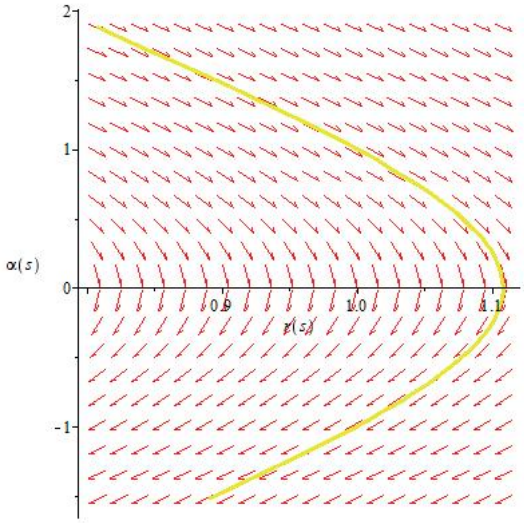

Figura 4.2: *Caso* $\lambda = 1$ *e* $n = 2$.

Assim como fizemos para o sistema anterior, verifica-se que uma candidata a integral primeira do sistema de equações diferenciais (4.13) é $E(r,\alpha) = Y(r)\cosh\alpha$. Se $\alpha = 0$, a curva procurada tem a forma

$$\gamma(s) = r_0\tau e^{\tau(as+b)}, \tag{4.14}$$

onde $a, b, r_0 \in \mathbb{R}$. Caso contrário, a função $Y(r)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$Y'(r) - \left(n\lambda r + \frac{n}{r}\right)Y(r) = 0.$$

Pelo *método do fator integrante*, encontramos $Y(r) = r^n \exp\left(\dfrac{n\lambda r^2}{2}\right)$ e, portanto,

$$E(r,\alpha) = r^n \exp\left(\frac{n\lambda r^2}{2}\right)\cosh\alpha. \tag{4.15}$$

Como

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cosh\alpha(s)}{r(s)} \quad \text{e} \quad \frac{dr}{ds} = \sinh\alpha(s),$$

então

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dr} = \frac{\cosh\alpha}{r\sinh\alpha}.$$

Note que, supondo $\alpha > 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} &= \left(\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{\sinh^2\alpha}{\cosh^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} \\
&= \left[\left(1 - \frac{r^{2n}\exp\left(n\lambda r^2\right)}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Fixado $s_0 \in I$ e utilizando (4.16), obtemos

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) = \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{d\varphi}{dr}dr = \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^{2n}\exp\left(n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho,$$

e então, a curva procurada $\gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)\tau e^{\tau\varphi(s)}, \quad \text{com} \quad \varphi(s) = \varphi(s_0) + \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^{2n}\exp\left(n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \qquad (4.17)$$

Analogamente, se $\alpha < 0$, então $\gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)\tau e^{\tau\varphi(s)}, \quad \text{com} \quad \varphi(s) = \varphi(s_0) - \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^{2n}\exp\left(n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \qquad (4.18)$$

2º caso: $\langle\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle_* = -1$.

Nesse caso, podemos escrever $\gamma'(s) = \pm\tau e^{\tau\theta}$. Logo, considerando $\nu = -J\gamma'$ como o vetor normal à curva γ, segue que

$$K_\gamma = \frac{\langle\gamma'', \nu\rangle_*}{\langle\gamma', \gamma'\rangle_*} = -\langle\gamma'', \nu\rangle_* = \theta'\langle J\gamma', J\gamma'\rangle_* = -\theta'\langle\gamma', \gamma'\rangle_* = \theta'.$$

Como no caso anterior, denotemos $\gamma = \pm|\langle\gamma, \gamma\rangle_*|^{\frac{1}{2}}\tau^\beta e^{\tau\varphi} := r\tau^\beta e^{\tau\varphi}$ e notemos que

$$-1 = \langle\gamma', \gamma'\rangle_* = \begin{cases} (r')^2 - (r\varphi')^2, & \beta = 0 \\ -(r')^2 + (r\varphi')^2, & \beta = 1. \end{cases}$$

Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} r' = \sinh\alpha \\ r\varphi' = \cosh\alpha \end{cases}, \text{ se } \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r' = \cosh\alpha \\ r\varphi' = \sinh\alpha \end{cases}, \text{ se } \beta = 1.$$

Se $\beta = 0$, podemos reescrever γ' da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\gamma' &= (r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi, r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi)\\
&= (\sinh\alpha\cosh\varphi + \cosh\alpha\sinh\varphi, \sinh\alpha\sinh\varphi + \cosh\alpha\cosh\varphi)\\
&= (\sinh(\alpha+\varphi), \cosh(\alpha+\varphi))\\
&= \pm(\sinh\theta, \cosh\theta).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, se $\beta = 1$, podemos reescrever γ' como

$$\begin{aligned}
\gamma' &= (r'\sinh\varphi + r\varphi'\cosh\varphi, r'\cosh\varphi + r\varphi'\sinh\varphi)\\
&= (\cosh\alpha\sinh\varphi + \sinh\alpha\cosh\varphi, \cosh\alpha\cosh\varphi + \sinh\alpha\sinh\varphi)\\
&= (\sinh(\alpha+\varphi), \cosh(\alpha+\varphi))\\
&= \pm(\sinh\theta, \cosh\theta).
\end{aligned}$$

Analogamente ao primeiro caso, obtemos

$$\tau e^{\tau(\alpha+\varphi)} = \pm\tau e^{\tau\theta},$$

e, portanto

$$\alpha = \theta - \varphi.$$

Consequentemente, $\gamma' = \tau e^{\tau\theta}$. Além disso, obtemos

$$\langle\gamma,\nu\rangle_* = \begin{cases} \left\langle re^{\tau\varphi}, -e^{\tau\theta}\right\rangle_* = -r\cosh(\theta-\varphi) = -r\cosh\alpha, & se\ \beta = 0\\ \left\langle r\tau e^{\tau\varphi}, -e^{\tau\theta}\right\rangle_* = r\sinh(\theta-\varphi) = r\sinh\alpha, & se\ \beta = 1. \end{cases}$$

Assim, como $K_\gamma = \theta'$ e

$$|\gamma|_*^2 = \langle\gamma,\gamma\rangle_* = r^2\left\langle \tau^\beta e^{\tau\varphi}, \tau^\beta e^{\tau\varphi}\right\rangle_* = \pm r^2,$$

onde o sinal $\pm$ depende do valor de $\beta \in \{0,1\}$, segue que a equação (4.3), neste caso, é equivalente a um dos dois seguintes sistemas

$$\begin{cases} \theta' = -r\left(\dfrac{n-1}{r^2} - n\lambda\right)\cosh\alpha\\ \varphi' = \dfrac{1}{r}\cosh\alpha\\ r' = \sinh\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta' = r\left(\dfrac{n-1}{(-r^2)} - n\lambda\right)\sinh\alpha\\ \varphi' = \dfrac{1}{r}\sinh\alpha\\ r' = \cosh\alpha. \end{cases}$$

Novamente, como $\alpha = \theta - \varphi$, temos os seguintes sistemas autônomos:

$$\begin{cases} \alpha' = \left(n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\cosh\alpha\\ r' = \sinh\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha' = \left(-n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\sinh\alpha\\ r' = \cosh\alpha, \end{cases} \tag{4.19}$$

respectivamente aos casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Em relação ao sistema

$$\begin{cases} \alpha' = \left(n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\cosh\alpha\\ r' = \sinh\alpha, \end{cases} \tag{4.20}$$

referente ao caso $\beta = 0$, uma particular solução plotada com o auxílio do software *Maple*, é dada por:

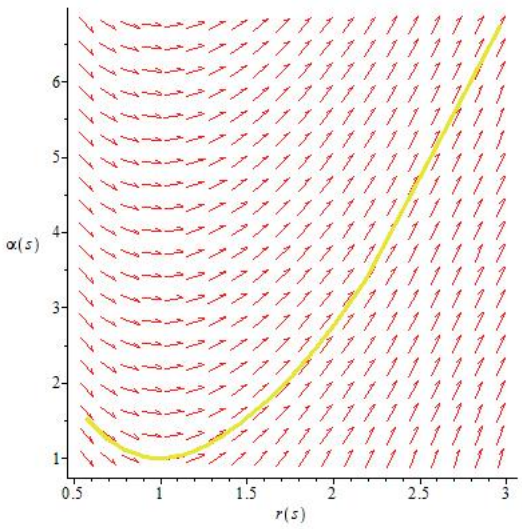

Figura 4.3: *Caso* $\lambda = 1$ *e* $n = 2$.

Se $\alpha = 0$, então a curva procurada $\gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r_0 e^{\tau\left(\frac{s}{r_0}+a\right)}, \tag{4.21}$$

onde $a, r_0 \in \mathbb{R}$. Caso contrário, procedendo da mesma forma como nos sistemas anteriores, uma integral primeira de (4.20) é dada por

$$E(r,\alpha) = r^n \exp\left(-\frac{n\lambda r^2}{2}\right)\cosh\alpha. \tag{4.22}$$

Além disso, como

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r}\left(\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha}\right),$$

obtemos para s_0 fixado:

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) = \pm\int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^{2n}\exp\left(-n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho,$$

onde o sinal acima é positivo, caso $\alpha > 0$, e negativo, caso $\alpha < 0$. Logo, a curva procurada $\gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)e^{\tau\varphi(s)},$$

com

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) \pm \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^{2n}\exp\left(-n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \tag{4.23}$$

Em relação ao sistema

$$\begin{cases} \alpha' = \left(-n\lambda r - \dfrac{n}{r}\right)\sinh\alpha \\ r' = \cosh\alpha, \end{cases} \tag{4.24}$$

referente ao caso $\beta = 1$, uma solução particular é dada por

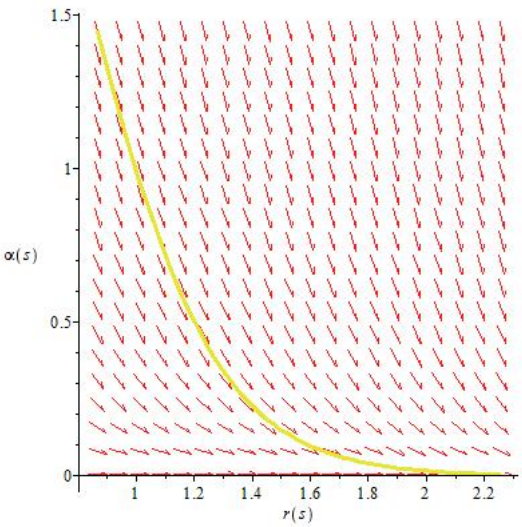

Figura 4.4: *Caso* $\lambda = 1$ *e* $n = 2$.

Se $\alpha = 0$, então $\gamma = \gamma(s)$ é dada por

$$\gamma(s) = (s + k)\tau e^{\tau\varphi_0}, \tag{4.25}$$

onde $k, \varphi_0 \in \mathbb{R}$. Caso contrário, uma integral primeira para o sistema (4.24) é dada por

$$E(r, \alpha) = r^n \exp\left(\frac{n\lambda r^2}{2}\right) \sinh \alpha. \tag{4.26}$$

Por sua vez, para s_0 fixado, obtemos

$$\varphi(s) - \varphi(s_0) = \pm \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\rho^{2n} \exp\left(n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho,$$

onde o sinal acima é positivo (se $\alpha > 0$) ou negativo (se $\alpha < 0$). Assim, a curva γ é dada por

$$\gamma(s) = r(s)\tau e^{\tau\varphi(s)},$$

com

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) \pm \int_{r(s_0)}^{r(s)} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\rho^{2n} \exp\left(n\lambda\rho^2\right)}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\rho. \tag{4.27}$$

Observação 4.2.3. *Os sistemas* (4.13) *e* (4.20) *possuem um* ponto de equilíbrio *em*

$$(r, \alpha) = \left(\pm\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}, 0\right) \quad e \quad (r, \alpha) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda}}, 0\right),$$

respectivamente.

A seguir, segue um plano de fases do sistema (4.20), plotado com o software *Maple*, ilustrando o caso $\lambda = 1$.

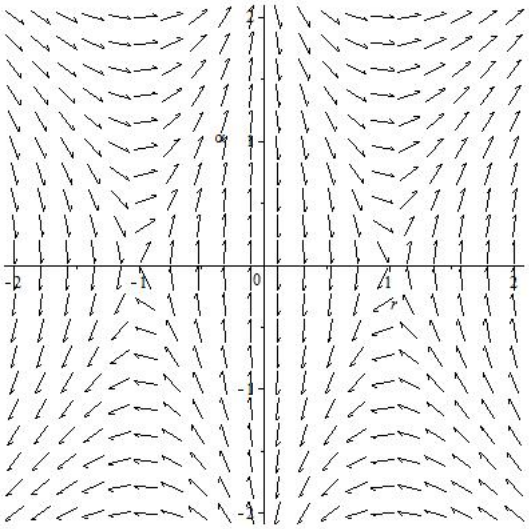

Figura 4.5: *Caso* $\lambda = 1$ *e* $n = 2$.

4.3 Superfícies de Castro-Chen

Considere os seguintes espaços *anti-de Sitter* em $\mathbb{D}^2$:

$$\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 := \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 \ ; \ \langle (z,w),(z,w)\rangle_* = 1\right\} = \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 \ ; \ |z|_*^2 + |w|_*^2 = 1\right\}$$

e

$$\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_* := \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 \ ; \ \langle (z,w),(z,w)\rangle_{\mathsf{T}} = -1\right\} = \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 \ ; \ |z|_*^2 - |w|_*^2 = -1\right\},$$

sendo

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_* = \mathrm{Re}\langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle_*$$

e

$$\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{T}} = \mathrm{Re}\langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle_{\mathsf{T}},$$

onde

$$\begin{aligned}
\langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle_{\mathsf{T}} &= dz_1 d\bar{z}_1 - dz_2 d\bar{z}_2 \\
&= \left(dx_1^2 - dy_1^2 - dx_2^2 + dy_2^2\right) - \tau\left(dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2\right) \\
&:= \langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{T}} - \tau\omega_{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Observação 4.3.1. *Denominamos os conjuntos acima como* espaços anti-de Sitter, *motivados pelas assinaturas das métricas* $\langle \cdot,\cdot\rangle_*$ *e* $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{T}}$ *dos espaços em questão, e levando em consideração a definição usual de* espaço anti-de Sitter, *ou seja, o conjunto* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ |x|_{n-1}^2 = 1\right\}$, *munido da métrica pseudo-riemanniana* $\langle \cdot,\cdot\rangle_{n-1}$, *cuja assinatura é* $(n-1,2)$.

Definição 4.3.1. *Dizemos que* $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ *e* $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ *são* curvas legendreanas *nos espaços anti-de Sitter* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ *e* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ *se satisfazem*

$$\left\langle \gamma', J\gamma\right\rangle_* = 0 \quad e \quad \left\langle \alpha', J\alpha\right\rangle_{\mathsf{T}} = 0,$$

respectivamente.

Exemplo 4.3.1. *A curva* $\nu(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\tau t}, e^{-\tau t}\right)$ *é legendreana em* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$, *pois como o seu vetor*

velocidade satisfaz $\nu'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tau e^{\tau t}, -\tau e^{-\tau t}\right)$ *e* $e^{-\tau t} = \overline{e^{\tau t}}$, *temos que* $\langle \nu', J\nu \rangle_* = 0$. *Além disso, verifica-se que* $\langle \nu, \nu \rangle_* = 1$.

Observação 4.3.2. *Se* $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (x_1 + \tau y_1, x_2 + \tau y_2)$ *é uma curva legendreana em* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$, *então*

$$\begin{aligned}
\gamma_1'\bar{\gamma_1} + \gamma_2'\bar{\gamma_2} &= (x_1' + \tau y_1')(x_1 - \tau y_1) + (x_2' + \tau y_2')(x_2 - \tau y_2) \\
&= (x_1'x_1 - y_1'y_1 + x_2'x_2 - y_2'y_2) + \tau(x_1y_1' - x_1'y_1 + x_2y_2' - x_2'y_2) \\
&= \langle \gamma', \gamma \rangle_* + \tau \langle \gamma, J\gamma' \rangle_* \\
&= \langle \gamma', \gamma \rangle_* - \tau \langle \gamma', J\gamma \rangle_* \\
&= 0, \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que $\langle \gamma', \gamma \rangle_* = 0$. *Analogamente, se* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (x_1 + \tau y_1, x_2 + \tau y_2)$ *é uma curva legendreana em* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
\alpha_1'\bar{\alpha_1} - \alpha_2'\bar{\alpha_2} &= (x_1' + \tau y_1')(x_1 - \tau y_1) - (x_2' + \tau y_2')(x_2 - \tau y_2) \\
&= (x_1'x_1 - y_1'y_1 - x_2'x_2 + y_2'y_2) + \tau(x_1y_1' - x_1'y_1 - x_2y_2' + x_2'y_2) \\
&= \langle \alpha', \alpha \rangle_{\mathsf{T}} + \tau \langle \alpha, J\alpha' \rangle_{\mathsf{T}} \\
&= -\tau \langle J\alpha, \alpha' \rangle_{\mathsf{T}} \\
&= 0. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Definição 4.3.2. *Chamaremos de* superfícies de Castro-Chen *às imagens de imersões da forma*

$$\begin{aligned}
\phi = \alpha \odot \gamma : I_1 \times I_2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\
(t, s) &\longmapsto \phi(t, s) = \alpha(t) \odot \gamma(s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s)),
\end{aligned}$$

sendo γ *e* α *curvas legendreanas nos espaços anti-de Sitter* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ *e* $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, *respectivamente.*

Teorema 4.3.1. *A imersão* $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ *dada por* $\phi(t, s) = \alpha(t) \odot \gamma(s)$ *é lagrangeana e* $F := \langle \phi_t, \phi_s \rangle_* = 0$.

Demonstração. Como $\phi_t = (\alpha_1'\gamma_1, \alpha_2'\gamma_2)$ e $\phi_s = (\alpha_1\gamma_1', \alpha_2\gamma_2')$, usando (4.28) e (4.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_t, \phi_s \rangle\rangle_* &= (dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2)(\phi_t, \phi_s) \\
&= (\alpha_1'\gamma_1)\overline{(\alpha_1\gamma_1')} + (\alpha_2'\gamma_2)\overline{(\alpha_2\gamma_2')} \\
&= (\alpha_1'\bar{\alpha_1})(\gamma_1\overline{\gamma_1'}) + \alpha_2'\bar{\alpha_2}\gamma_2\overline{\gamma_2'} \\
&= (\alpha_2'\bar{\alpha_2})(-\gamma_2\overline{\gamma_2'}) + \alpha_2'\bar{\alpha_2}\gamma_2\overline{\gamma_2'} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se tomarmos a parte imaginária da equação acima obteremos que a imersão ϕ é lagrangeana. Além disso, a parte real da mesma igualdade nos fornece um dos coeficientes da primeira forma fundamental, a saber, $F = \langle \phi_t, \phi_s \rangle_* = 0$. □

Observação 4.3.3. *Suponha que o vetor velocidade da curva* α *seja nulo, isto é,*

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle_{\mathsf{T}} = 0.$$

Logo, α *satisfaz*

$$|\alpha_1'|_*^2 - |\alpha_2'|_*^2 = 0. \qquad (4.30)$$

Note que, utilizando a equação (4.30)*, juntamente com o fato de* $\gamma \subset \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$*, temos*

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_t, \phi_t \rangle\rangle_* &= (dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2)(\phi_t, \phi_t) \\
&= (\alpha_1' \gamma_1)\overline{(\alpha_1' \gamma_1)} + (\alpha_2' \gamma_2)\overline{(\alpha_2' \gamma_2)} \\
&= \alpha_1' \overline{\alpha_1'} \gamma_1 \bar{\gamma}_1 + \alpha_2' \overline{\alpha_2'} \gamma_2 \bar{\gamma}_2 \\
&= |\alpha_1'|_*^2 |\gamma_1|_*^2 + |\alpha_2'|_*^2 |\gamma_2|_*^2 \\
&= |\alpha_1'|_*^2 |\gamma_1|_*^2 + |\alpha_1'|_*^2 (1 - |\gamma_1|_*^2) \\
&= |\alpha_1'|_*^2 |\gamma_1|_*^2 + |\alpha_1'|_*^2 - |\alpha_1'|_*^2 |\gamma_1|_*^2 \\
&= |\alpha_1'|_*^2.
\end{aligned}$$

Suponha que $\alpha_1 \alpha_2 \overline{\alpha_1' \alpha_2'} \neq 0$*. Assim, multiplicando a igualdade* (4.29) *por* $\alpha_1 \alpha_2 \overline{\alpha_1' \alpha_2'}$*, obtemos*

$$|\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 \alpha_2 \overline{\alpha_2'} = |\alpha_2'|_*^2 |\alpha_2|_*^2 \alpha_1 \overline{\alpha_1'}.$$

Novamente aplicando (4.29)*, encontramos*

$$|\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 \alpha_1 \overline{\alpha_1'} = |\alpha_2'|_*^2 |\alpha_2|_*^2 \alpha_1 \overline{\alpha_1'}. \tag{4.31}$$

Multiplicando (4.31) *por* $\bar{\alpha}_1 \alpha_1'$*, temos*

$$|\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2 |\alpha_2|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2,$$

e portanto, por (4.30)*, obtemos*

$$|\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 = |\alpha_1'|_*^2 |\alpha_2|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2.$$

E assim,

$$|\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 \left(|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2|_*^2\right) = 0,$$

donde segue que

$$|\alpha_1'|_*^2 |\alpha_1|_*^2 |\alpha_1'|_*^2 = 0. \tag{4.32}$$

Assim, se ocorrer de $|\alpha_1'|_*^2 \neq 0$*, então a equação* (4.32) *implica que* $|\alpha_1|_*^2 = 0$*. Logo, multiplicando* (4.29) *por* α_1*, obtemos*

$$\alpha_1' |\alpha_1|_*^2 = \alpha_2' \bar{\alpha}_2 \alpha_1.$$

Logo, $\alpha_2' \bar{\alpha}_2 \alpha_1 = 0$*, e portanto,* $|\alpha_2'|_*^2 \bar{\alpha}_2 \alpha_1 = 0$*. Assim, aplicando* (4.30)*, temos*

$$|\alpha_1'|_*^2 \bar{\alpha}_2 \alpha_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\alpha}_2 \alpha_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_2|_*^2 \alpha_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(1 + |\alpha_1|_*^2\right) \alpha_1 = 0,$$

donde segue que $\alpha_1 = 0$*. De* $\alpha_1' \bar{\alpha}_1 - \alpha_2' \bar{\alpha}_2 = 0$*, segue que* $\alpha_2' \bar{\alpha}_2 = 0$*. Assim,*

$$|\alpha_2'|_*^2 \bar{\alpha}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_1'|_*^2 \bar{\alpha}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\alpha}_2 = 0.$$

Logo, $\alpha_2 = 0$*, donde implica que* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = 0$*, o que é um absurdo. Assim,* (4.32) *implica que* $|\alpha_1'|_*^2 = 0$*. No entanto, como* $\langle\langle \phi_t, \phi_t \rangle\rangle_* = |\alpha_1'|_*^2 = 0$*, obtemos*

$$E := \mathrm{Re}\langle\langle \phi_t, \phi_t \rangle\rangle_* = 0,$$

donde segue que a métrica é degenerada.

Finalmente, se $\alpha_1 \alpha_2 \overline{\alpha_1' \alpha_2'} = 0$*, então* $\alpha_1' \neq 0$ *ou* $\alpha_2' \neq 0$*, pois caso contrário teríamos* α *não-regular. Além disso, temos que* $\alpha_1 \neq 0$ *ou* $\alpha_2 \neq 0$*, uma vez que* $\alpha \subset \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3$*. Portanto, temos os seguintes casos a analisar:*

(*i*) *Se* $\alpha_1' = 0$ *ou* $\alpha_2' = 0$*, então obviamente* $|\alpha_1'|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2 = 0$*;*

(ii) Se $\alpha_1 = 0$, então pela igualdade (4.29) segue que $\alpha_2' = 0$, donde $|\alpha_1'|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2 = 0$;

(iii) Se $\alpha_2 = 0$, então novamente por (4.29) segue que $\alpha_1' = 0$, donde $|\alpha_1'|_*^2 = 0$.

Em qualquer um dos casos obtemos que $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_1'\alpha_2'} = 0$ implica em $|\alpha_1'|_*^2 = 0$, donde segue que a métrica induzida também é degenerada*, nesse caso.*

Observação 4.3.4. *Da mesma forma como acima, suponha que*

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_* = 0,$$

ou seja,

$$|\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_2'|_*^2 = 0. \tag{4.33}$$

Utilizando a equação (4.33), juntamente com o fato de $\alpha \subset \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_s, \phi_s \rangle\rangle_* &= (\alpha_1\gamma_1')\overline{(\alpha_1\gamma_1')} + (\alpha_2\gamma_2')\overline{(\alpha_2\gamma_2')} \\
&= |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + |\alpha_2|_*^2|\gamma_2'|_*^2 \\
&= |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 - |\gamma_1'|_*^2(|\alpha_1|_*^2 + 1) \\
&= |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 - |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 - |\gamma_1'|_*^2 \\
&= -|\gamma_1'|_*^2.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio da observação anterior, se considerarmos $\gamma_1\gamma_2\overline{\gamma_1'\gamma_2'} \neq 0$ ou $\gamma_1\gamma_2\overline{\gamma_1'\gamma_2'} = 0$ obteremos que $|\gamma_1'|_*^2 = 0$ e, portanto,

$$G := \mathrm{Re}\langle\langle \phi_s, \phi_s \rangle\rangle_* = -|\gamma_1'|_*^2 = 0,$$

donde segue que a métrica induzida é degenerada.

Como estamos interessados no estudo de subvariedades não-degeneradas, pelas observações anteriores, devemos supor que γ' e α' sejam não-nulas. Assim, supondo que γ e α estejam parametrizadas pelo comprimento de arco, as seguintes identidades são por elas satisfeitas:

$$\begin{cases} (a)\ |\gamma_1|_*^2 + |\gamma_2|_*^2 = 1 \\ (b)\ |\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_2'|_*^2 = \epsilon_1 \\ (c)\ \gamma_1'\bar{\gamma_1} + \gamma_2'\bar{\gamma_2} = 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

e

$$\begin{cases} (d)\ |\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2|_*^2 = -1 \\ (e)\ |\alpha_1'|_*^2 - |\alpha_2'|_*^2 = \epsilon_2 \\ (f)\ \alpha_1'\bar{\alpha_1} - \alpha_2'\bar{\alpha_2} = 0, \end{cases} \tag{4.35}$$

onde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

Teorema 4.3.2. *A imersão $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$ é conforme. Em particular, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem*

$$EG - F^2 = \epsilon_1\epsilon_2\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)^2.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.1, temos que $F = \langle\langle \phi_t, \phi_s \rangle\rangle_* = 0$. Para calcularmos os demais coeficientes da primeira forma fundamental vamos proceder da seguinte maneira: utilizando as

igualdades (a) e (e) dos sistemas (4.34) e (4.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_t, \phi_t \rangle\rangle_* &= (dz_1 d\bar{z_1} + dz_2 d\bar{z_2})(\phi_t, \phi_t) \\
&= (\alpha_1'\gamma_1)\overline{(\alpha_1'\gamma_1)} + (\alpha_2'\gamma_2)\overline{(\alpha_2'\gamma_2)} \\
&= \alpha_1'\overline{\alpha_1'}\gamma_1\bar{\gamma_1} + \alpha_2'\overline{\alpha_2'}\gamma_2\bar{\gamma_2} \\
&= |\alpha_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 + |\alpha_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2 \\
&= |\alpha_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 + (|\alpha_1'|_*^2 - \epsilon_2)(1 - |\gamma_1|_*^2) \\
&= |\alpha_1'|_*^2 - \epsilon_2 + \epsilon_2|\gamma_1|_*^2 \\
&= |\alpha_2'|_*^2 + \epsilon_2|\gamma_1|_*^2.
\end{aligned}$$

Agora, note que, multiplicando a igualdade (f) de (4.35) por $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_1'\alpha_2'}$, encontramos

$$|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2\alpha_2\overline{\alpha_2'} = |\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2\alpha_1\overline{\alpha_1'}.$$

Aplicando (f) novamente, obtemos

$$|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2\alpha_1\overline{\alpha_1'} = |\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2\alpha_1\overline{\alpha_1'},$$

e assim,

$$|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2|\alpha_1|_*^2|\alpha_1'|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2|\alpha_1|_*^2|\alpha_1'|_*^2.$$

Logo,

$$|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2\left(|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2\right) = 0.$$

Como $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_1'\alpha_2'} \neq 0$, segue que $|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 \neq 0$, donde obtemos

$$|\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2.$$

Então, utilizando a equação acima, juntamente com as igualdades (d) e (e) de (4.35), obtem-se que

$$|\alpha_2'|_*^2|\alpha_2|_*^2 = |\alpha_2'|_*^2\left(|\alpha_1|_*^2 + 1\right) = |\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 = |\alpha_1|_*^2\left(\epsilon_2 + |\alpha_2'|_*^2\right).$$

Desta última equação, segue que $|\alpha_2'|_*^2 = \epsilon_2|\alpha_1|_*^2$. E assim, obtemos que

$$E := \mathrm{Re}\langle\langle \phi_t, \phi_t \rangle\rangle_* = \mathrm{Re}\left(|\alpha_2'|_*^2 + \epsilon_2|\gamma_1|_*^2\right) = \left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\epsilon_2.$$

Similarmente, utilizando as igualdades (b) e (d) de (4.34) e (4.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi_s, \phi_s \rangle\rangle_* &= (\alpha_1\gamma_1')\overline{(\alpha_1\gamma_1')} + (\alpha_2\gamma_2')\overline{(\alpha_2\gamma_2')} \\
&= |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + |\alpha_2|_*^2|\gamma_2'|_*^2 \\
&= |\alpha_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + (|\alpha_1|_*^2 + 1)(\epsilon_1 - |\gamma_1'|_*^2) \\
&= \epsilon_1|\alpha_1|_*^2 + \left(\epsilon_1 - |\gamma_1'|_*^2\right) \\
&= \epsilon_1|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_2'|_*^2 \\
&= \left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\epsilon_1,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos o fato de que $|\gamma_2'|_*^2 = \epsilon_1|\gamma_1|_*^2$. Isto pode ser provado utilizando-se a igualdade (c) de (4.34), multiplicada por $\gamma_1\gamma_2\overline{\gamma_1'\gamma_2'}$. De fato, como

$$|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2\gamma_2\overline{\gamma_2'} = -|\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'},$$

aplicando (c) novamente, obtemos

$$-|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'} = -|\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'},$$

e assim,

$$|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2|\gamma_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 = |\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2|\gamma_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2.$$

Logo,

$$|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2\left(|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 - |\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2\right) = 0.$$

Como $\gamma_1\gamma_2\overline{\gamma_1'\gamma_2'} \neq 0$, segue que $|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 \neq 0$, donde obtemos

$$|\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 = |\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2.$$

Então,

$$|\gamma_2'|_*^2|\gamma_2|_*^2 = |\gamma_2'|_*^2\left(1 - |\gamma_1|_*^2\right) = |\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 = |\gamma_1|_*^2\left(\epsilon_1 - |\gamma_2'|_*^2\right).$$

Assim, $|\gamma_2'|_*^2 - |\gamma_2'|_*^2|\gamma_1|_*^2 = \epsilon_1|\gamma_1|_*^2 - |\gamma_1|_*^2|\gamma_2'|_*^2$, donde segue que $|\gamma_2'|_*^2 = \epsilon_1|\gamma_1|_*^2$. Portanto,

$$G := \mathrm{Re}\langle\langle\phi_s, \phi_s\rangle\rangle_* = \left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\epsilon_1.$$

Resumindo, obtivemos $F = 0$, $E = \epsilon_2\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)$ e $G = \epsilon_1\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)$. Assim, $G = \epsilon_1\epsilon_2 E$, donde segue que a imersão é conforme. Finalmente, temos que

$$EG - F^2 = \epsilon_1\epsilon_2\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)^2,$$

donde segue o resultado. □

Observação 4.3.5. *Na demonstração do Teorema 4.3.2 utilizamos duas hipóteses adicionais, a saber, $\alpha_1\alpha_2\overline{\alpha_1'\alpha_2'} \neq 0$ e $\gamma_1\gamma_2\overline{\gamma_1'\gamma_2'} \neq 0$. Tais hipóteses também serão consideradas no restante do capítulo.*

Observação 4.3.6. *Como estamos considerando que a métrica induzida em $\mathscr{L} := \phi(I_1 \times I_2)$ é não-degenerada, o Teorema 4.3.2 afirma que $|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2 \neq 0$.*

Definição 4.3.3. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ uma curva regular não-degenerada, isto é, γ satisfaz $\det(\gamma, \gamma') \cdot \overline{\det(\gamma, \gamma')} \neq 0$. O* ângulo legendreano *θ_γ da curva γ é definido com sendo o argumento do número paracomplexo*

$$\det(\gamma, \gamma') = \gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'.$$

Considere $\widetilde{\gamma}(t) = (\widetilde{\gamma}_1(t), \widetilde{\gamma}_2(t)) = \gamma(f(t)) = \gamma(s)$ uma outra parametrização da curva $\gamma = \gamma(s)$. Então, como

$$\widetilde{\gamma}_1{}'(t) = f'(t)\gamma_1'(s) \quad \text{e} \quad \widetilde{\gamma}_2{}'(t) = f'(t)\gamma_2'(s),$$

temos que

$$\begin{aligned}\det(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}')(t) &= \left(\widetilde{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2{}' - \widetilde{\gamma}_2\widetilde{\gamma}_1{}'\right)(t)\\ &= f'(t)\left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right)(f(t))\\ &= f'(t)\det(\gamma, \gamma')(s).\end{aligned}$$

Como estamos considerando $\widetilde{\gamma}$ regular, temos que $f'(t) \neq 0$ e então $\theta_\gamma = \theta_{\widetilde{\gamma}}$, ou seja, o ângulo legendreano independe da parametrização.

Proposição 4.3.1. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ duas curvas regulares, não-degeneradas, parametrizadas pelo comprimento de arco. Se γ e α forem curvas legendreanas, então elas satisfazem*

$$\gamma'' + \epsilon_1\gamma - K_\gamma\tau\gamma' = 0 \quad e \quad \alpha'' - \epsilon_2\alpha - K_\alpha\tau\alpha' = 0,$$

sendo K_γ e K_α suas respectivas curvaturas. Além disso, os ângulos legendreanos satisfazem

$$\theta_\gamma' = K_\gamma \quad e \quad \theta_\alpha' = K_\alpha.$$

Demonstração. Como γ satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) do sistema (4.34), podemos ver que $\{\gamma, J\gamma, \gamma', J\gamma'\}$ é uma base ortonormal para $\mathbb{D}^2$, munido da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_* = dx_1^2 - dy_1^2 + dx_2^2 - dy_2^2$. Portanto, podemos escrever

$$\gamma'' = a\gamma + bJ\gamma + c\gamma' + dJ\gamma'.$$

Novamente utilizando as propriedades satisfeitas pela curva γ, podemos ver que $b = c = 0$, $a = -\epsilon_1$ e $d = K_\gamma$, sendo K_γ a curvatura de γ em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$. Assim, a curva γ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária de 2ª ordem

$$\gamma'' + \epsilon_1\gamma - K_\gamma\tau\gamma' = 0. \tag{4.36}$$

Por outro lado, utilizando as propriedades (a), (b) e (c) de (4.34), e o fato de que $\epsilon_1|\gamma_1|_*^2 = |\gamma_2'|_*^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\det(\gamma,\gamma')\cdot\overline{\det(\gamma,\gamma')} &= \left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right)\overline{\left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right)} \\
&= |\gamma_1|_*^2|\gamma_2'|_*^2 - \gamma_1\overline{\gamma_1'}\left(\gamma_2'\overline{\gamma_2}\right) - \gamma_1'\overline{\gamma_1}\left(\gamma_2\overline{\gamma_2'}\right) + |\gamma_2|_*^2|\gamma_1'|_*^2 \\
&= |\gamma_1|_*^2|\gamma_2'|_*^2 - \gamma_1\overline{\gamma_1'}\left(-\gamma_1'\overline{\gamma_1}\right) - \gamma_1'\overline{\gamma_1}\left(-\gamma_1\overline{\gamma_1'}\right) + |\gamma_2|_*^2|\gamma_1'|_*^2 \\
&= |\gamma_1|_*^2|\gamma_2'|_*^2 + |\gamma_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_2|_*^2|\gamma_1'|_*^2 \\
&= \epsilon_1|\gamma_1|_*^2 - |\gamma_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_1|_*^2|\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_1'|_*^2|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_2|_*^2|\gamma_1'|_*^2 \\
&= \epsilon_1|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_1'|_*^2\left(|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_2|_*^2\right) \\
&= |\gamma_1'|_*^2 + \epsilon_1|\gamma_1|_*^2 \\
&= |\gamma_1'|_*^2 + |\gamma_2'|_*^2 \\
&= \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Assim, o ângulo legendreano θ_γ de γ está bem definido e então, podemos escrever

$$\det(\gamma,\gamma') = \pm\tau^\delta e^{\tau\theta_\gamma} = \begin{cases} \pm e^{\tau\theta_\gamma}, & se \;\; \epsilon_1 = 1 \;\; e \;\; \delta = 0 \\ \pm\tau e^{\tau\theta_\gamma}, & se \;\; \epsilon_1 = -1 \;\; e \;\; \delta = 1. \end{cases}$$

E assim, derivando tal igualdade no primeiro caso ($\epsilon_1 = 1$), e utilizando (4.36), obtemos

$$\begin{aligned}
\pm\tau e^{\tau\theta_\gamma}\theta_\gamma' &= \left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right)' \\
&= \gamma_1'\gamma_2' + \gamma_1\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1' - \gamma_2\gamma_1'' \\
&= \gamma_1\left(K_\gamma\tau\gamma_2' - \epsilon_1\gamma_2\right) - \gamma_2\left(K_\gamma\tau\gamma_1' - \epsilon_1\gamma_1\right) \\
&= K_\gamma\tau\left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right) \\
&= \pm\tau K_\gamma e^{\tau\theta_\gamma},
\end{aligned}$$

donde segue que

$$K_\gamma = \theta_\gamma'.$$

Analogamente, derivando tal igualdade no segundo caso ($\epsilon_1 = -1$), obtemos novamente que

$$K_\gamma = \theta_\gamma'.$$

Assim, em qualquer um dos dois casos, obtemos $K_\gamma = \theta_\gamma'$. Em relação à curva

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3 = \left\{(z,w) \in \mathbb{D}^2 \;;\; |z|_*^2 - |w|_*^2 = -1\right\},$$

utilizando as propriedades (d), (e) e (f) de (4.35) satisfeitas pela curva α, podemos provar que $\{\alpha, J\alpha, \alpha', J\alpha'\}$ forma uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{D}^2$, munido da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{T}}$. Assim, podemos escrever

$$\alpha'' = a\alpha + bJ\alpha + c\alpha' + dJ\alpha'.$$

Denotando por K_α a função curvatura de α no espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ e utilizando as propriedades satisfeitas pela curva α, podemos ver que $b = c = 0$, $a = \epsilon_2$ e $d = K_\alpha$. E assim, α satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária de 2ª ordem

$$\alpha'' - \epsilon_2\alpha - K_\alpha J\alpha' = 0. \tag{4.37}$$

Da mesma forma como procedemos com a curva γ, podemos escrever

$$\det(\alpha, \alpha') = \begin{cases} \pm e^{\tau\theta_\alpha}, & \text{se } \ \epsilon_2 = 1 \\ \pm\tau e^{\tau\theta_\alpha}, & \text{se } \ \epsilon_2 = -1, \end{cases}$$

uma vez que $\det(\alpha, \alpha') \cdot \overline{\det(\alpha, \alpha')} = \epsilon_2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\det(\alpha, \alpha') \cdot \overline{\det(\alpha, \alpha')} &= \left(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1'\right)\overline{\left(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1'\right)} \\
&= |\alpha_1|_*^2|\alpha_2'|_*^2 - \alpha_1\overline{\alpha_1'}\left(\alpha_2'\overline{\alpha_2}\right) - \alpha_1'\overline{\alpha_1}\left(\alpha_2\overline{\alpha_2'}\right) + |\alpha_2|_*^2|\alpha_1'|_*^2 \\
&= |\alpha_1|_*^2|\alpha_2'|_*^2 - \alpha_1\overline{\alpha_1'}\left(\alpha_1'\overline{\alpha_1}\right) - \alpha_1'\overline{\alpha_1}\left(\alpha_1\overline{\alpha_1'}\right) + |\alpha_2|_*^2|\alpha_1'|_*^2 \\
&= |\alpha_1|_*^2|\alpha_2'|_*^2 - |\alpha_1|_*^2|\alpha_1'|_*^2 - |\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 + |\alpha_2|_*^2|\alpha_1'|_*^2 \\
&= |\alpha_1|_*^2\left(|\alpha_1'|_*^2 - \epsilon_2\right) - |\alpha_1|_*^2|\alpha_1'|_*^2 - |\alpha_1'|_*^2|\alpha_1|_*^2 + |\alpha_2|_*^2|\alpha_1'|_*^2 \\
&= -\epsilon_2|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_1'|_*^2\left(|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2|_*^2\right) \\
&= -\epsilon_2|\alpha_1|_*^2 + |\alpha_1'|_*^2 \\
&= -|\alpha_2'|_*^2 + |\alpha_1'|_*^2 \\
&= \epsilon_2.
\end{aligned}$$

Como fizemos com a curva γ, derivando a forma polar acima, tanto para $\epsilon_2 = 1$ quanto para $\epsilon_2 = -1$, obtemos $K_\alpha = \theta_\alpha'$. □

O resultado a seguir nos fornece uma recíproca para a proposição anterior.

Teorema 4.3.3. *Sejam duas curvas $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, com curvaturas K_γ e K_α, respectivamente.*

(*a*) *Suponha que γ satisfaz $\gamma'' + \epsilon_1\gamma - K_\gamma\tau\gamma' = 0$. Então,*

$$\gamma \text{ é legendreana} \iff \left\langle \gamma'(0), \tau\gamma(0)\right\rangle_* = 0 \quad (0 \in I_1).$$

(*b*) *Suponha que α satisfaz $\alpha'' - \epsilon_2\alpha - K_\alpha\tau\alpha' = 0$. Então,*

$$\alpha \text{ é legendreana} \iff \left\langle \alpha'(0), \tau\alpha(0)\right\rangle_{\mathsf{T}} = 0 \quad (0 \in I_2).$$

Demonstração. Em relação ao item (*a*), considere $f : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \langle\gamma'(s), \tau\gamma(s)\rangle_*$. Por hipótese, obtemos que

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \left\langle \gamma''(s), \tau\gamma(s)\right\rangle_* + \left\langle \gamma'(s), \tau\gamma'(s)\right\rangle_* \\
&= \left\langle K_\gamma(s)\tau\gamma'(s) - \epsilon_1\gamma(s), \tau\gamma(s)\right\rangle_* \\
&= K_\gamma(s)\left\langle \tau\gamma'(s), \tau\gamma(s)\right\rangle_* - \epsilon_1\langle\gamma(s), \tau\gamma(s)\rangle_* \\
&= -K_\gamma(s)\left\langle \gamma'(s), \gamma(s)\right\rangle_* \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde segue que $\langle\gamma'(s), \tau\gamma(s)\rangle_* = c \in \mathbb{R}$, para todo s. Em particular, se tomarmos $s = 0$, temos, por hipótese, que $c = 0$, donde segue o resultado. O item (*b*) prova-se de forma completamente análoga: basta comprovar que a função $g(s) := \langle\alpha'(s), \tau\alpha(s)\rangle_{\mathsf{T}}$ é constante. □

A seguir, queremos relacionar o ângulo lagrangeano da imersão ϕ, com os ângulos legendreanos θ_α e θ_γ das curvas α e γ. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.4. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ duas curvas regulares, não-degeneradas, legendreanas e parametrizadas pelo comprimento de arco, e $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ a imersão dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$. Se a métrica induzida em $\mathscr{L}$ for não-degenerada, então temos que o ângulo lagrangeano β_ϕ da imersão ϕ é dado por*

$$\beta_\phi(t,s) = \theta_\gamma(s) + \theta_\alpha(t).$$

Demonstração. Primeiramente, utilizando as igualdades (a) e (c) de (4.34), além das igualdades (d) e (f) de (4.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\Omega(\phi_t, \phi_s) &= \det(\phi_t, \phi_s) = \alpha_1'\gamma_1\alpha_2\gamma_2' - \alpha_1\gamma_1'\alpha_2'\gamma_2 \\
&= \alpha_1'\gamma_1\alpha_2\gamma_2' - \frac{1}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\alpha_1\gamma_2\alpha_2'\bar{\alpha_2}\gamma_1'\bar{\gamma_1} \\
&= \alpha_1'\gamma_1\alpha_2\gamma_2' - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}(\alpha_1'\bar{\alpha_1})(-\gamma_2'\bar{\gamma_2}) \\
&= \alpha_1'\gamma_1\alpha_2\gamma_2'\frac{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}} + |\alpha_1|_*^2|\gamma_2|_*^2\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}} \\
&= \frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left(|\alpha_1|_*^2|\gamma_2|_*^2 + |\gamma_1|_*^2|\alpha_2|_*^2\right) \\
&= \frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left[|\alpha_1|_*^2(1-|\gamma_1|_*^2) + |\gamma_1|_*^2(1+|\alpha_1|_*^2)\right] \\
&= \frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right). \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a igualdade (d) de (4.35) nas linhas 5 e 6, juntamente com a igualdade (f) de (4.35) nas linhas 3 e 5, segue que

$$\begin{aligned}
\det(\gamma,\gamma')\det(\alpha,\alpha') &= \left(\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'\right)\left(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1'\right) \\
&= \gamma_1\gamma_2'\frac{\alpha_2'}{\bar{\alpha_1}}|\alpha_1|_*^2 - \gamma_1\gamma_2'\frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}}|\alpha_2|_*^2 - \gamma_1'\gamma_2\alpha_1\alpha_2' + \gamma_1'\gamma_2\alpha_1'\alpha_2 \\
&= \gamma_1\gamma_2'|\alpha_1|_*^2\frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}} - \gamma_1\gamma_2'|\alpha_2|_*^2\frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}} - \gamma_1'\gamma_2\alpha_1\alpha_2'\frac{\bar{\alpha_1}}{\bar{\alpha_1}} + \gamma_1'\gamma_2\alpha_1'\alpha_2\frac{\bar{\alpha_2}}{\bar{\alpha_2}} \\
&= \frac{\gamma_1\gamma_2'\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}}\left(|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2|_*^2\right) + \gamma_1'\gamma_2\frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}}|\alpha_2|_*^2 - \gamma_1'\gamma_2\frac{\alpha_2'}{\bar{\alpha_1}}|\alpha_1|_*^2 \\
&= -\frac{\gamma_1\gamma_2'\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}} + \frac{\gamma_1'\gamma_2\alpha_2'}{\bar{\alpha_1}}\left(|\alpha_2|_*^2 - |\alpha_1|_*^2\right) \\
&= \frac{\gamma_1'\gamma_2\alpha_2'}{\bar{\alpha_1}} - \frac{\gamma_1\gamma_2'\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}}. \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Além disso, aplicando a equação (f) de (4.35), e as igualdades (a) e (c) de (4.34), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_1'\gamma_2\alpha_2'\bar{\alpha_2} - \gamma_2'\gamma_1\alpha_1'\bar{\alpha_1}}{\bar{\alpha_1}\bar{\alpha_2}} &= \frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}}\left(\gamma_1'\gamma_2 - \gamma_2'\gamma_1\right) = \frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left(\gamma_1'\bar{\gamma_1}\gamma_2 - \gamma_2'|\gamma_1|_*^2\right) \\
&= \frac{\alpha_1'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left(-\gamma_2'\bar{\gamma_2}\gamma_2 - \gamma_2'|\gamma_1|_*^2\right) \\
&= \frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}\left(-|\gamma_2|_*^2 - |\gamma_1|_*^2\right) \\
&= -\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha_2}\bar{\gamma_1}}. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (4.40) em (4.39), obtemos

$$\det(\gamma,\gamma')\det(\alpha,\alpha') = -\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}. \tag{4.41}$$

Finalmente, pela demonstração da Proposição 4.3.1, sabemos que os números paracomplexos $\det(\gamma,\gamma')$ e $\det(\alpha,\alpha')$ satisfazem

$$\det(\gamma,\gamma')\cdot\overline{\det(\gamma,\gamma')} = \epsilon_1 \quad \text{e} \quad \det(\alpha,\alpha')\cdot\overline{\det(\alpha,\alpha')} = \epsilon_2.$$

Então, a Proposição 1.1.1 afirma que

$$\arg\big(\det(\gamma,\gamma')\cdot\det(\alpha,\alpha')\big) = \arg\big(\det(\gamma,\gamma')\big) + \arg\big(\det(\alpha,\alpha')\big) = \theta_\gamma + \theta_\alpha.$$

Logo, utilizando as igualdades (4.41) e (4.38), segue

$$\begin{aligned}
\theta_\gamma + \theta_\alpha &= \arg\left(-\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}\right)\\
&= \arg\left(\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}\right)\\
&= \arg\left(\frac{\alpha_1'\gamma_2'}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}\left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\right)\\
&= \arg(\Omega(\phi_t,\phi_s))\\
&= \beta_\phi.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.3.1. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ duas curvas regulares, não-degeneradas, legendreanas e parametrizadas pelo comprimento de arco, e $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ a imersão dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$. Se a métrica induzida em $\mathscr{L}$ for não-degenerada, o vetor curvatura média de ϕ é dado por*

$$\vec{H} = -\frac{1}{2E}\left(K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s\right),$$

sendo $E = \left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\epsilon_2$.

Demonstração. Para calcular $\vec{H}$, utilizaremos o Teorema 2.2.2, o qual garante que $2\vec{H} = -J\nabla\beta_\phi$. Sabemos que ϕ é conforme e os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $F = 0$ e $|E| = |G| = \left||\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right|$. Então, denotando

$$e_1 := |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_t \quad \text{e} \quad e_2 := |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_s,$$

obtemos que

$$e_1(\beta_\phi) = d\beta_\phi(e_1) = |E|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\beta_\phi}{\partial t} \quad \text{e} \quad e_2(\beta_\phi) = d\beta_\phi(e_2) = |E|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\beta_\phi}{\partial s}.$$

Usando a igualdade do Teorema 4.3.4 e a Proposição 4.3.1, temos

$$d\beta_\phi(e_1) = |E|^{-\frac{1}{2}}\theta_\alpha' = |E|^{-\frac{1}{2}}K_\alpha \quad \text{e} \quad d\beta_\phi(e_2) = |E|^{-\frac{1}{2}}\theta_\gamma' = |E|^{-\frac{1}{2}}K_\gamma.$$

Como

$$\varepsilon_1 = \langle e_1, e_1\rangle_* = \left\langle |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_t, |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_t\right\rangle_* = |E|^{-1}\langle\phi_t,\phi_t\rangle_* = \frac{E}{|E|}$$

e

$$\varepsilon_2 = \langle e_2, e_2\rangle_* = \left\langle |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_s, |E|^{-\frac{1}{2}}\phi_s \right\rangle_* = |E|^{-1}\langle \phi_s, \phi_s\rangle_* = |E|^{-1}G = \epsilon_1\epsilon_2\frac{E}{|E|},$$

então $\{e_1, e_2\}$ forma uma base ortonormal do espaço tangente à subvariedade. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla\beta_\phi &= \varepsilon_1 d\beta_\phi(e_1)e_1 + \varepsilon_2 d\beta_\phi(e_2)e_2 \\ &= |E|^{-1}\left(\varepsilon_1 K_\alpha \phi_t + \varepsilon_2 K_\gamma \phi_s\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{H} = -\frac{1}{2}J\left(\nabla\beta_\phi\right) = -\frac{1}{2}|E|^{-1}\left(\varepsilon_1 K_\alpha J\phi_t + \varepsilon_2 K_\gamma J\phi_s\right),$$

ou seja,

$$\vec{H} = -\frac{1}{2E}\left(K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s\right),$$

uma vez que $\dfrac{E}{|E|^2} = E^{-1}$. □

Corolário 4.3.2. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ duas curvas regulares, não-degeneradas, legendreanas e parametrizadas pelo comprimento de arco, e $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ a imersão dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$. Assumindo que ϕ é não-degenerada, temos que ϕ é mínima se, e somente se, γ e α são geodésicas em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, respectivamente.*

Demonstração. Suponha que $\vec{H} = 0$. Pelo Corolário 4.3.1, temos que

$$-K_\alpha\langle\phi_t, \phi_t\rangle_* = K_\alpha\langle J\phi_t, J\phi_t\rangle_* = -\epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma\langle J\phi_s, J\phi_t\rangle_* = 0,$$

donde segue que $K_\alpha = 0$. Analogamente, conclui-se que $K_\gamma = 0$. Desta forma, o fato de ϕ ser mínima implica em α e γ serem geodésicas. Reciprocamente, se α e γ são geodésicas, então $K_\alpha = K_\gamma = 0$. E assim, pelo Corolário 4.3.1, segue que $\vec{H} = 0$. □

Proposição 4.3.2. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ duas curvas regulares, não-degeneradas, legendreanas e parametrizadas pelo comprimento de arco. Considere $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ a imersão dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$. Se ϕ é não-degenerada, então a curvatura média da imersão ϕ satisfaz $|\vec{H}|^2_* = \rho$ se, e somente se, as curvaturas de γ e α satisfazem*

$$\begin{cases} K_\gamma^2 = -4\rho\epsilon_1|\gamma_1|^2_* - \epsilon_1\epsilon_2\kappa \\ K_\alpha^2 = -4\rho\epsilon_2|\alpha_1|^2_* + \kappa, \end{cases}$$

respectivamente, para algum $\kappa \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Como ϕ é conforme, podemos ver que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{H}, \vec{H}\right\rangle_* &= \left(-\frac{1}{2E}\right)^2 \langle K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s, K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s\rangle_* \\ &= \frac{1}{4E^2}\left(K_\alpha^2\langle J\phi_t, J\phi_t\rangle_* + 2\epsilon_1\epsilon_2 K_\alpha K_\gamma\langle J\phi_t, J\phi_s\rangle_* + K_\gamma^2(\epsilon_1\epsilon_2)^2\langle J\phi_s, J\phi_s\rangle_*\right) \\ &= -\frac{1}{4E^2}\left(K_\alpha^2\langle \phi_t, \phi_t\rangle_* + 2\epsilon_1\epsilon_2 K_\alpha K_\gamma\langle \phi_t, \phi_s\rangle_* + K_\gamma^2\langle \phi_s, \phi_s\rangle_*\right) \\ &= -\frac{1}{4E^2}\left(EK_\alpha^2 + 2F\epsilon_1\epsilon_2 K_\alpha K_\gamma + GK_\gamma^2\right) \\ &= -\frac{1}{4E^2}\left(EK_\alpha^2 + \epsilon_1\epsilon_2 EK_\gamma^2\right) \\ &= -\frac{1}{4E}\left(K_\alpha^2 + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma^2\right). \end{aligned}$$

Assim, a imersão ϕ tem curvatura média constante $|\vec{H}|_*^2 = \left\langle \vec{H}, \vec{H} \right\rangle_* = \rho$ se, e somente se,

$$K_\alpha^2 + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma^2 = -4E\rho. \tag{4.42}$$

Finalmente, como $E = \left(|\alpha_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2\right)\epsilon_2$, temos que a igualdade (4.42) é equivalente a

$$K_\alpha^2 + 4\rho\epsilon_2|\alpha_1|_*^2 = -\epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma^2 - 4\rho\epsilon_2|\gamma_1|_*^2 := \kappa,$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$, uma vez que γ depende de s e α depende de t. □

A seguir, vamos verificar quais são as geodésicas nos espaços anti-de Sitter $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$. O procedimento será o seguinte: em relação ao espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$, vamos considerar a seguinte aplicação do tipo *projeção de Hopf*:

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2) \\ (z,w) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2z\bar{w}, |z|_*^2 - |w|_*^2\right), \end{array}$$

onde $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2) = \left\{(z,x) \in \mathbb{D}\times\mathbb{R}\ ;\ |z|_*^2 + x^2 = \dfrac{1}{4}\right\}$. Após provarmos um resultado que garante que tal aplicação projeta curvas legendreanas parametrizadas pelo comprimento de arco do espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ em curvas parametrizadas pelo comprimento de arco em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$, com a mesma função curvatura, a análise das geodésicas no espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ recairá sobre a análise das geodésicas no espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$.

Observação 4.3.7. *Denominamos a aplicação π acima como uma projeção de Hopf motivados pela definição usual desta projeção, a saber, uma aplicação $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ que descreve a 3-esfera canônica $\mathbb{S}^3$ em termos de fibras, onde cada fibra é um círculo, um para cada ponto de $\mathbb{S}^2$.*

Lema 4.3.1. *Considere a aplicação $\pi : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ dada por $\pi(z,w) = \left(z\bar{w}, \dfrac{|z|_*^2 - |w|_*^2}{2}\right)$. Tem-se que $\pi(z_0,w_0) = \pi(z_1,w_1)$ se, e somente se, $(z_1,w_1) = \lambda(z_0,w_0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{D}$ com $|\lambda|_*^2 = 1$.*

Demonstração. Primeiramente, note que tal aplicação está bem definida, pois

$$\begin{array}{rcl} |z\bar{w}|_*^2 + \left(\dfrac{|z|_*^2 - |w|_*^2}{2}\right)^2 & = & \dfrac{1}{2}|z|_*^2|w|_*^2 + \dfrac{|z|_*^4}{4} + \dfrac{|w|_*^4}{4} \\ & = & \dfrac{\left(|z|_*^2 + |w|_*^2\right)^2}{4} \\ & = & \dfrac{1}{4}. \end{array}$$

Agora, se existir $\lambda \in \mathbb{D}$ com $|\lambda|_*^2 = 1$ de modo que $(z_1,w_1) = \lambda(z_0,w_0)$, então certamente obtemos

$$\pi(z_1,w_1) = \frac{1}{2}\left(2z_1\overline{w_1}, |z_1|_*^2 - |w_1|_*^2\right) = \frac{1}{2}\left(2\lambda z_0\bar{\lambda}\bar{w}_0, \lambda\bar{\lambda}\left(|z_0|_*^2 - |w_0|_*^2\right)\right) = \lambda\bar{\lambda}\pi(z_0,w_0).$$

Reciprocamente, se $\pi(z_0,w_0) = \pi(z_1,w_1)$ então

$$\left\{\begin{array}{l} z_0\bar{w}_0 = z_1\bar{w}_1 \\ |z_0|_*^2 - |w_0|_*^2 = |z_1|_*^2 - |w_1|_*^2. \end{array}\right. \tag{4.43}$$

Como $(z_0,w_0),(z_1,w_1) \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$, temos que a última igualdade do sistema (4.43) nos fornece as seguintes informações: $|z_0|_*^2 = |z_1|_*^2$ e $|w_0|_*^2 = |w_1|_*^2$. Logo, existem $\lambda, \lambda' \in \mathbb{D}$, com $\lambda\bar{\lambda} = 1$ e $\lambda'\overline{\lambda'} = 1$,

tais que $z_1 = \lambda z_0$ e $w_1 = \lambda' w_0$. Agora, pela primeira igualdade do sistema (4.43), segue que

$$z_1\bar{w}_1 = \lambda\overline{\lambda'}z_0\bar{w}_0 = \lambda\overline{\lambda'}z_1\bar{w}_1.$$

Portanto

$$\left(\lambda\overline{\lambda'} - 1\right) z_1\bar{w}_1 = 0.$$

Se $z_1 = 0$, então certamente $z_0 = 0$, e portanto,

$$(z_1, w_1) = (0, \lambda' w_0) = \lambda'(z_0, w_0).$$

Analogamente, se $w_1 = 0$, então $w_0 = 0$, e portanto,

$$(z_1, w_1) = (\lambda z_0, 0) = \lambda(z_0, w_0).$$

Finalmente, se $\lambda\overline{\lambda'} = 1$, então $\lambda = \lambda'$. Logo

$$(z_1, w_1) = (\lambda z_0, \lambda' w_0) = \lambda(z_0, w_0).$$

Assim, em qualquer uma das possibilidades, segue o resultado. □

Dando continuidade às ideias acima, apresentamos a definição seguinte.

Definição 4.3.4. *Considere M e B variedades pseudo-riemannianas. Dizemos que uma aplicação $\pi : M^{n+k} \longrightarrow B^k$ é uma* submersão pseudo-riemanniana *quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) π é uma submersão;

(ii) $d\pi_p|_{\mathscr{H}_p} : \mathscr{H}_p \longrightarrow T_{\pi(p)}B$ é uma isometria, $\forall\, p \in M$.

Denotamos por $\mathscr{H} := \{\mathscr{H}_p \ ; \ p \in M\}$ a distribuição horizontal *da submersão π: para cada $p \in M$, o subespaço $\mathscr{H}_p$ é o complemento ortogonal do subespaço $\mathscr{V}_p$, o qual é definido por*

$$\mathscr{V}_p = \ker\left(d\pi_p\right) \subset T_pM.$$

Observação 4.3.8. *Sendo $d\pi_p$ uma aplicação linear sobrejetora, segue que a diferencial $d\pi_p$ restrita ao subespaço $\mathscr{H}_p$ é um isomorfismo linear, para todo ponto $p \in M$.*

Proposição 4.3.3. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2) \\ (z, w) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2z\bar{w}, |z|_*^2 - |w|_*^2\right), \end{array}$$

é uma submersão pseudo-riemanniana.

Demonstração. Dados $z = (z_1, z_2) \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $X = (X_1, X_2) \in \mathscr{H}_z \subset T_z\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$, como

$$T_z\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 = \left\{w \in \mathbb{D}^2 \ ; \ \langle w, z\rangle_* = 0\right\},$$

temos que $\langle X, z\rangle_* = 0$. Agora, considerando a curva $\iota(t) = e^{\tau t}z$, notamos que ι satisfaz $\iota(0) = z$, $\iota'(0) = \tau z = Jz$ e $\iota(t) \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ para todo t. Pelo Lema 4.3.1, segue que $\pi(\iota(t)) = \pi(z)$ e então

$$d\pi_z(Jz) = (\pi \circ \iota)'(0) = 0.$$

Logo, $Jz \in \ker(d\pi_z)$ e então, $\langle X, Jz\rangle_* = 0$, pois $X \in \mathscr{H}_z$. Portanto, o vetor X satisfaz

$$0 = \langle X, z\rangle_* - \tau\langle X, Jz\rangle_* = \langle\langle X, z\rangle\rangle_* = X_1\overline{z_1} + X_2\overline{z_2}. \tag{4.44}$$

Como

$$d\pi_z(X) \in T_{\pi(z)}\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2) = \{w \in \mathbb{D} \times \mathbb{R} \ ; \ \langle w, \pi(z)\rangle_1 = 0\},$$

onde

$$|\cdot|_1^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_1 = dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2,$$

então dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ tal que

$$\alpha(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (z_1, z_2) = z \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (X_1, X_2) = X,$$

temos que $d\pi_z(X) = \beta'(0)$, sendo $\beta(t) = \pi(\alpha(t))$. Portanto, um cálculo direto mostra que

$$\beta'(t) = \frac{1}{2}\left(2(\alpha_1'\overline{\alpha_2} + \alpha_1\overline{\alpha_2'}), \alpha_1'\overline{\alpha_1} + \alpha_1\overline{\alpha_1'} - \alpha_2'\overline{\alpha_2} - \alpha_2\overline{\alpha_2'}\right).$$

E assim, obtemos $\beta'(0) = \frac{1}{2}\left(2(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}), X_1\overline{z_1} + z_1\overline{X_1} - X_2\overline{z_2} - z_2\overline{X_2}\right)$. Aplicando (4.44), segue que

$$d\pi_z(X) = \beta'(0) = \left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}, X_1\overline{z_1} - z_2\overline{X_2}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle d\pi_z(X), d\pi_z(X)\rangle_1 &= \left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}\right)\overline{\left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}\right)} + \left(X_1\overline{z_1} - z_2\overline{X_2}\right)\overline{\left(X_1\overline{z_1} - z_2\overline{X_2}\right)} \\
&= |X_1|_*^2\left(|z_1|_*^2 + |z_2|_*^2\right) + |X_2|_*^2\left(|z_1|_*^2 + |z_2|_*^2\right) \\
&= |X_1|_*^2 + |X_2|_*^2 \\
&= \langle X, X\rangle_*.
\end{aligned}$$

Pela *identidade de polarização paracomplexa*, obtemos

$$\langle d\pi_z(X), d\pi_z(Y)\rangle_1 = \langle X, Y\rangle_*,$$

para todos $X, Y \in \mathscr{H}_z$, ou seja, $d\pi_z|_{\mathscr{H}_z}$ é uma isometria. □

Teorema 4.3.5. *A submersão π projeta curvas legendreanas parametrizadas pelo comprimento de arco em curvas parametrizadas pelo comprimento de arco com a mesma função curvatura.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\langle \gamma', \gamma'\rangle_* = \epsilon_1$. Suponha que γ passe pelo ponto $p \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$. Sendo $d\pi_p|_{\mathscr{H}_p} : \mathscr{H}_p \longrightarrow T_{\pi(p)}\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ uma isometria, então a curva projetada

$$\xi := \pi \circ \gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$$

satisfaz

$$\left\langle \xi', \xi'\right\rangle_1 = \left\langle d\pi(\gamma'), d\pi(\gamma')\right\rangle_1 = \left\langle \gamma', \gamma'\right\rangle_* = \epsilon_1.$$

Portanto, ξ é uma curva em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ parametrizada pelo comprimento de arco. Agora, para provar que $K_\xi = K_\gamma$, adaptaremos as ideias da seção 1.5 a este caso. Sendo $\mathscr{H}$ a distribuição horizontal de π, podemos escrever

$$T_p\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 = \mathscr{H}_\gamma \oplus [J\gamma],$$

uma vez que a curva γ passa por p. Como γ é legendreana, isto é, satisfaz $\langle \gamma', J\gamma\rangle_* = 0$, então γ' é um vetor horizontal. Mais ainda, como $d\pi(\gamma') = \xi'$, então γ' é o levantamento horizontal de ξ'. Assim, considere D, ∇^* e ∇ as conexões Levi-Civita em $\mathbb{D}^2$, $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$, respectivamente. Logo, ∇^* é a conexão de Levi-Civita relativa à métrica $\langle \cdot, \cdot\rangle_*|_{\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3}$.

A ideia aqui será provar que o levantamento horizontal de $\nabla_{\xi'}\xi'$ é $\nabla^*_{\gamma'}\gamma'$. Primeiramente, note que,

sendo γ legendreana, então

$$0 = \gamma'\langle\gamma', J\gamma\rangle_* = \langle D_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* + \langle\gamma', D_{\gamma'}J\gamma\rangle_*.$$

Como $\left(\mathbb{D}^2, J, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_*\right)$ é para-Kähler, então $D_{\gamma'}J\gamma = J\left(D_{\gamma'}\gamma\right)$. Logo,

$$\langle D_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* = -\langle\gamma', D_{\gamma'}J\gamma\rangle_* = -\langle\gamma', J\left(D_{\gamma'}\gamma\right)\rangle_* = -\langle\gamma', J\gamma'\rangle_* = 0.$$

Por outro lado, pela fórmula de Gauss, temos que

$$\begin{aligned}
\langle D_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* &= \langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* + \langle h(\gamma',\gamma'), J\gamma\rangle_* \\
&= \langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* + \langle A_{J\gamma}(\gamma'), \gamma'\rangle_* \\
&= \langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* - \langle D_{\gamma'}J\gamma, \gamma'\rangle_* \\
&= \langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* - \langle J\gamma', \gamma'\rangle_* \\
&= \langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_*.
\end{aligned}$$

Assim, $\langle \nabla^*{}_{\gamma'}\gamma', J\gamma\rangle_* = 0$ e, portanto, o campo $\nabla^*{}_{\gamma'}\gamma'$ é horizontal. Agora, como $d\pi(\gamma') = \xi'$, denotando por X e $\widetilde{X}$ as extensões locais de ξ' e γ', respectivamente, temos que $d\pi(\widetilde{X}) = X$. Seja Z um campo de vetores sobre $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ de forma que exista um campo de vetores horizontal $\widetilde{Z}$ sobre $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ tal que $d\pi(\widetilde{Z}) = Z$. Por um lado, pelo fato de $d\pi_p|_{\mathscr{H}_p}$ ser uma isometria, temos

$$X\langle Z, Z\rangle_1 = 2\langle\nabla_X Z, Z\rangle_1 = 2\left\langle d\pi\left(\widetilde{\nabla_X Z}\right), d\pi(\widetilde{Z})\right\rangle_1 = 2\left\langle\widetilde{\nabla_X Z}, \widetilde{Z}\right\rangle_*. \tag{4.45}$$

Por outro lado, obtemos

$$X\langle Z, Z\rangle_1 = X\left\langle d\pi(\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{Z})\right\rangle_1 = X\left\langle\widetilde{Z}, \widetilde{Z}\right\rangle_* = 2\left\langle\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}, \widetilde{Z}\right\rangle_*. \tag{4.46}$$

Então (4.45) e (4.46) implicam em

$$\left\langle\widetilde{\nabla_X Z} - \nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}, \widetilde{Z}\right\rangle_* = 0,$$

donde segue que

$$d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{Z}\right) = d\pi\left(\widetilde{\nabla_X Z}\right) = \nabla_X Z.$$

Em particular, tomando $Z = X$, obtemos $d\pi\left(\nabla^*_{\widetilde{X}}\widetilde{X}\right) = \nabla_X X$, e portanto,

$$d\pi\left(\nabla^*_{\gamma'}\gamma'\right) = \nabla_{\xi'}\xi'.$$

Assim, $\nabla^*_{\gamma'}\gamma'$ é o levantamento horizontal de $\nabla_{\xi'}\xi'$, e então

$$\langle\nabla_{\xi'}\xi', \nabla_{\xi'}\xi'\rangle_1 = \left\langle d\pi\left(\nabla^*_{\gamma'}\gamma'\right), d\pi\left(\nabla^*_{\gamma'}\gamma'\right)\right\rangle_1 = \langle\nabla^*_{\gamma'}\gamma', \nabla^*_{\gamma'}\gamma'\rangle_*.$$

Logo, por definição, segue que $K_\xi = K_\gamma$. □

Finalmente, estamos aptos a realizar a análise das geodésicas no espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$. Como $K_\xi = K_\gamma$, faremos esta análise estudando condições para que a curva projetada $\xi = \pi\circ\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ seja uma geodésica.

Teorema 4.3.6. *Se ξ for uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$, então ξ admite uma das seguintes parametrizações:*

$$\xi(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \quad \textit{ou} \quad \xi(t) = A\cosh(2t) + B\sinh(2t),$$

respectivamente aos casos de ξ' ser do tipo espaço ou tempo, sendo $A = \xi(0)$ e $2B = \xi'(0)$.

Demonstração. Por definição de geodésica, temos que $\nabla_{\xi'}\xi' = 0$. No entanto, como

$$\xi'' = (\xi'')^\top + (\xi'')^\perp = \nabla_{\xi'}\xi' + (\xi'')^\perp$$

e

$$\nabla_{\xi'}\xi' = (\xi'')^\top \in T_\xi\left(\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)\right) = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \langle v, \xi\rangle_1 = 0\right\} = \xi^\perp,$$

temos que $(\xi'')^\perp$ é um múltiplo do vetor ξ, digamos $(\xi'')^\perp = a\xi$. Portanto, ξ satisfaz

$$\xi'' - a\xi = 0.$$

Agora, como $\langle \xi, \xi\rangle_1 = \dfrac{1}{4}$, derivando tal igualdade obtemos $\langle \xi', \xi\rangle_1 = 0$. Derivando novamente e utilizando o fato que $\langle \xi', \xi'\rangle_1 = \epsilon_1$, obtemos

$$-\epsilon_1 = -\left\langle \xi', \xi'\right\rangle_1 = \left\langle \xi'', \xi\right\rangle_1 = a\langle \xi, \xi\rangle_1 = \frac{a}{4}.$$

Portanto, $a = -4\epsilon_1$, e ξ satisfaz

$$\xi'' + 4\epsilon_1\xi = 0.$$

Assim, se $\epsilon_1 = 1$ e, portanto, $\xi'' + 4\xi = 0$, então ξ deve ser da forma

$$\xi(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t),$$

sendo $A = \xi(0)$ e $2B = \xi'(0)$. Por outro lado, se $\epsilon_1 = -1$ e, portanto, $\xi'' - 4\xi = 0$, então ξ deve ser da forma

$$\xi(t) = A\cosh(2t) + B\sinh(2t),$$

sendo $A = \xi(0)$ e $2B = \xi'(0)$. □

Agora, faremos o mesmo procedimento para o espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$. Considere a *projeção de Hopf*:

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_* & \longrightarrow & \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2) \\ (z, w) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2z\bar{w}, |z|_*^2 + |w|_*^2\right), \end{array}$$

sendo $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2) = \left\{(z, x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R} \ ; \ |z|_*^2 - x^2 = -\dfrac{1}{4}\right\}$.

Lema 4.3.2. *A aplicação $\pi^* : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_* \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2)$ dada por $\pi^*(z, w) = \left(z\bar{w}, \dfrac{|z|_*^2 + |w|_*^2}{2}\right)$ satisfaz $\pi^*(z_0, w_0) = \pi^*(z_1, w_1)$ se, e somente se, $(z_1, w_1) = \lambda(z_0, w_0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{D}$ tal que $|\lambda|_*^2 = 1$.*

Demonstração. Note que tal aplicação está bem definida, pois

$$\begin{aligned} |z\bar{w}|_*^2 - \left(\frac{|z|_*^2 + |w|_*^2}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}|z|_*^2|w|_*^2 - \frac{|z|_*^4}{4} - \frac{|w|_*^4}{4} \\ &= -\frac{\left(|z|_*^2 - |w|_*^2\right)^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Supondo $(z_1, w_1) = \lambda(z_0, w_0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{D}$ com $|\lambda|_*^2 = 1$, então teremos

$$\pi^*(z_1, w_1) = \frac{1}{2}\left(2\lambda z_0\overline{\lambda w_0}, \left(|\lambda z_0|_*^2 + |\lambda w_0|_*^2\right)\right) = \lambda\bar{\lambda}\pi^*(z_0, w_0).$$

Reciprocamente, se $\pi^*(z_0, w_0) = \pi^*(z_1, w_1)$, então

$$\begin{cases} z_0\bar{w}_0 = z_1\bar{w}_1 \\ |z_0|_*^2 + |w_0|_*^2 = |z_1|_*^2 + |w_1|_*^2. \end{cases} \tag{4.47}$$

Como $(z_0, w_0), (z_1, w_1) \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, a última igualdade do sistema (4.47) garante-nos que $|z_0|_*^2 = |z_1|_*^2$ e $|w_0|_*^2 = |w_1|_*^2$. Logo, existem $\lambda, \lambda' \in \mathbb{D}$, com $\lambda\overline{\lambda} = 1$ e $\lambda'\overline{\lambda'} = 1$, tais que $z_1 = \lambda z_0$ e $w_1 = \lambda' w_0$. Agora, pela primeira igualdade do sistema (4.47), segue que $z_0\bar{w}_0 = z_1\bar{w}_1 = \lambda\overline{\lambda'} z_0\bar{w}_0$. Assim,

$$\left(\lambda\overline{\lambda'} - 1\right) z_0\bar{w}_0 = 0.$$

Se $z_0 = 0$, então $z_1 = 0$, e portanto,

$$(z_1, w_1) = (0, \lambda' w_0) = \lambda'(z_0, w_0).$$

Analogamente, se $w_0 = 0$, então $w_1 = 0$, e portanto,

$$(z_1, w_1) = (\lambda z_0, 0) = \lambda(z_0, w_0).$$

Finalmente, se $\lambda\overline{\lambda'} = 1$, então $\lambda = \lambda'$. Logo,

$$(z_1, w_1) = (\lambda z_0, \lambda' w_0) = \lambda'(z_0, w_0).$$

□

Proposição 4.3.4. *A aplicação* $\pi^* : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_* \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2)$ *dada por* $\pi^*(z, w) = \left(z\bar{w}, \dfrac{|z|_*^2 + |w|_*^2}{2}\right)$ *é uma submersão pseudo-riemanniana.*

Demonstração. Dados $z = (z_1, z_2) \in \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ e $X = (X_1, X_2) \in \mathscr{H}_z \subset T_z\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, como

$$T_z\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_* = \left\{w \in \mathbb{D}^2 \ ; \ \langle w, z\rangle_{\mathsf{T}} = 0\right\},$$

temos que $\langle X, z\rangle_{\mathsf{T}} = 0$. Além disso, tomando $t \longmapsto e^{\tau t} z$, que é uma curva contida em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$, podemos mostrar que $Jz \in \ker(d\pi^*_z)$, e então, $\langle X, Jz\rangle_{\mathsf{T}} = 0$. Portanto, como

$$\omega_{\mathsf{T}}(X, z) = \langle X, Jz\rangle_{\mathsf{T}},$$

segue que

$$0 = \langle X, z\rangle_{\mathsf{T}} - \tau\langle X, Jz\rangle_{\mathsf{T}} = \langle\langle X, z\rangle\rangle_{\mathsf{T}} = X_1\overline{z_1} - X_2\overline{z_2}. \tag{4.48}$$

Agora, como

$$d\pi^*_z(X) \in T_{\pi^*(z)}\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2) = \{w \in \mathbb{D} \times \mathbb{R} \ ; \ \langle w, \pi^*(z)\rangle_2 = 0\},$$

onde

$$|\cdot|_2^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle_2 = dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

então dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ tal que

$$\alpha(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (z_1, z_2) = z \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (X_1, X_2) = X,$$

temos que $d\pi^*_z(X) = \beta'(0)$, sendo $\beta(t) = \pi^*(\alpha(t))$. Logo,

$$\beta'(t) = \frac{1}{2}\left(2\left(\alpha_1'\overline{\alpha_2} + \alpha_1\overline{\alpha_2'}\right), \alpha_1'\overline{\alpha_1} + \alpha_1\overline{\alpha_1'} + \alpha_2'\overline{\alpha_2} + \alpha_2\overline{\alpha_2'}\right).$$

Portanto, aplicando (4.48), temos

$$d\pi_z^*(X) = \beta'(0) = \left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}, X_1\overline{z_1} + z_2\overline{X_2}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle d\pi_z^*(X), d\pi_z^*(X)\rangle_2 &= \left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}\right)\overline{\left(X_1\overline{z_2} + z_1\overline{X_2}\right)} - \left(X_1\overline{z_1} + z_2\overline{X_2}\right)\overline{\left(X_1\overline{z_1} + z_2\overline{X_2}\right)} \\
&= |X_1|_*^2\left(|z_2|_*^2 - |z_1|_*^2\right) + |X_2|_*^2\left(|z_1|_*^2 - |z_2|_*^2\right) \\
&= |X_1|_*^2 - |X_2|_*^2 \\
&= \langle X, X\rangle_{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Pela *identidade de polarização paracomplexa*, obtemos

$$\langle d\pi_z^*(X), d\pi_z^*(Y)\rangle_2 = \langle X, Y\rangle_{\mathsf{T}},$$

para todos $X, Y \in \mathscr{H}_z$, ou seja, $d\pi_z^*|_{\mathscr{H}_z}$ é uma isometria. □

Teorema 4.3.7. *A submersão* $\pi^* : \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^2(1/2)$ *dada por* $\pi^*(z,w) = \left(z\bar{w}, \dfrac{|z|_*^2 + |w|_*^2}{2}\right)$ *projeta curvas legendreanas parametrizadas pelo comprimento de arco em curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, com a mesma função curvatura.*

Demonstração. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3$ uma curva legendreana parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $\langle \alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} = 0$ e $\langle \alpha', \alpha'\rangle_{\mathsf{T}} = \epsilon_2$, e denote por

$$\eta := \pi^* \circ \alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^2(1/2)$$

a curva projetada. Como α' é um vetor horizontal, segue da proposição anterior que

$$\langle \eta', \eta'\rangle_2 = \langle d\pi^*(\alpha'), d\pi^*(\alpha')\rangle_2 = \langle \alpha', \alpha'\rangle_{\mathsf{T}} = \epsilon_2.$$

Portanto, η é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^2(1/2)$. Assim, resta provar que $K_\eta = K_\alpha$. Para isso, denotemos as conexões de Levi-Civita em $\left(\mathbb{D}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{T}}\right)$, $\mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3$ e $\mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^2(1/2)$ por D, ∇_* e ∇, respectivamente. Assim,

$$\alpha'' = D_{\alpha'}\alpha' = \nabla_{*\alpha'}\alpha' + \left(D_{\alpha'}\alpha'\right)^\perp \quad \text{e} \quad \eta'' = \nabla_{\eta'}\eta' + (\eta'')^\perp.$$

Sendo α lagrangeana, obtemos, pela fórmula de Gauss, que

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha'\langle \alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} = \langle D_{\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} + \langle \alpha', D_{\alpha'}J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} \\
&= \langle D_{\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} + \langle \alpha', J\left(D_{\alpha'}\alpha\right)\rangle_{\mathsf{T}} \\
&= \langle D_{\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} + \langle \alpha', J\alpha'\rangle_{\mathsf{T}} \\
&= \langle D_{\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} \\
&= \langle \nabla_{*\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}} + \left\langle \left(\alpha''\right)^\perp, J\alpha\right\rangle_{\mathsf{T}} \\
&= \langle \nabla_{*\alpha'}\alpha', J\alpha\rangle_{\mathsf{T}},
\end{aligned}$$

portanto, $\nabla_{*\alpha'}\alpha'$ é horizontal. Agora, denotando por X e $\widetilde{X}$ as extensões locais de η' e α', respectivamente, temos que $d\pi^*(\widetilde{X}) = X$. Além disso, considere um campo de vetores Z sobre $\mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^2(1/2)$ de forma que exista um campo de vetores horizontal $\widetilde{Z}$ sobre $\mathrm{Ad}\mathbb{S}_*^3$ tal que $d\pi^*(\widetilde{Z}) = Z$. Como

$$X\langle Z, Z\rangle_2 = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle_2 = 2\left\langle d\pi^*\left(\widetilde{\nabla_X Z}\right), d\pi^*(\widetilde{Z})\right\rangle_2 = 2\left\langle \widetilde{\nabla_X Z}, \widetilde{Z}\right\rangle_{\mathsf{T}}$$

e

$$X\langle Z,Z\rangle_2 = X\Big\langle d\pi^*(\widetilde{Z}), d\pi^*(\widetilde{Z})\Big\rangle_2 = X\Big\langle \widetilde{Z},\widetilde{Z}\Big\rangle_{\mathsf{T}} = 2\Big\langle \nabla_{*\widetilde{X}}\widetilde{Z},\widetilde{Z}\Big\rangle_{\mathsf{T}},$$

então

$$\Big\langle \widetilde{\nabla_X Z} - \nabla_{*\widetilde{X}}\widetilde{Z},\widetilde{Z}\Big\rangle_{\mathsf{T}} = 0,$$

donde segue que $d\pi^*\left(\nabla_{*\widetilde{X}}\widetilde{Z}\right) = \nabla_X Z$. Em particular, tomando $Z = X$, obtemos

$$d\pi^*\left(\nabla_{*\alpha'}\alpha'\right) = \nabla_{\eta'}\eta'.$$

Portanto,

$$\big\langle \nabla_{\eta'}\eta', \nabla_{\eta'}\eta'\big\rangle_2 = \big\langle \nabla_{*\alpha'}\alpha', \nabla_{*\alpha'}\alpha'\big\rangle_{\mathsf{T}},$$

donde segue que $K_\eta = K_\alpha$. □

Finalmente, analisemos as geodésicas do espaço $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$. Como π^* preserva a função curvatura, queremos saber quando η satisfaz $\nabla_{\eta'}\eta' = 0$. Assim como fizemos para curvas em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$, podemos seguir os mesmos passos e concluir que uma geodésica η em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial:

$$\eta'' - 4\epsilon_2\eta = 0.$$

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

Teorema 4.3.8. *Se η for uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2)$, então η admite uma das seguintes parametrizações:*

$$\eta(t) = A\cosh(2t) + B\sinh(2t) \quad \textit{ou} \quad \eta(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t),$$

conforme η' seja do tipo espaço ou tempo, respectivamente, sendo $A = \eta(0)$ e $2B = \eta'(0)$.

Observação 4.3.9. *Através dos Teoremas 4.3.6 e 4.3.8 podemos concluir que os espaços $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)$ e $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2)$ possuem as mesmas geodésicas, quando estas são parametrizadas pelo comprimento de arco. Essa informação já era esperada, uma vez que tais espaços são* anti-isométricos. *Logo, as* geodésicas positivas (*geodésicas com vetor velocidade tipo espaço*) *de uma são as* geodésicas negativas (*geodésicas com vetor velocidade tipo tempo*) *da outra. A* anti-isometria *é dada pela aplicação*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2) &\longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^2_*(1/2) \\ (z,x) &\longmapsto (Jz,x), \end{aligned}$$

a qual está bem definida, pois

$$|Jz|_*^2 - x^2 = -|z|_*^2 - x^2 = -\left(|z|_*^2 + x^2\right) = -\frac{1}{4},$$

e satisfaz

$$\langle d\zeta(X), d\zeta(Y)\rangle_2 = -\langle X,Y\rangle_1,$$

para todos $X,Y \in \mathfrak{X}\left(\mathrm{Ad}\mathbb{S}^2(1/2)\right)$.

No que segue, estudamos a autossimilaridade da superfície de Castro-Chen $\mathscr{L} = \phi(I_1 \times I_2)$.

Teorema 4.3.9. *Sejam $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$ e $\alpha : I_2 \longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3_*$ curvas regulares, não-degeneradas, legendreanas e parametrizadas pelo comprimento de arco, e $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ a imersão dada por $\phi(t,s) = (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s))$. A superfície de Castro-Chen $\mathscr{L} = \phi(I_1 \times I_2)$ é autossimilar se, e somente se, as curvaturas de α e γ satisfazem as seguintes equações*

$$K_\alpha = 2\lambda\big\langle \alpha_1', J\alpha_1\big\rangle_* \quad e \quad K_\gamma = -2\lambda\big\langle \gamma_1', J\gamma_1\big\rangle_*,$$

respectivamente.

Demonstração. Por um lado, pelo Corolário 4.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{H}, N_t \right\rangle_* &= -\frac{1}{2E}\langle K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s, J\phi_t\rangle_* \\
&= -\frac{1}{2E}\left(K_\alpha\langle J\phi_t, J\phi_t\rangle_* + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma\langle J\phi_s, J\phi_t\rangle_*\right) \\
&= -\frac{1}{2E}\left(-K_\alpha\langle \phi_t, \phi_t\rangle_*\right) \\
&= \frac{K_\alpha}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{H}, N_s \right\rangle_* &= -\frac{1}{2E}\langle K_\alpha J\phi_t + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma J\phi_s, J\phi_s\rangle_* \\
&= -\frac{1}{2E}\left(K_\alpha\langle J\phi_t, J\phi_s\rangle_* + \epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma\langle J\phi_s, J\phi_s\rangle_*\right) \\
&= -\frac{1}{2E}\left(-\epsilon_1\epsilon_2 K_\gamma\langle \phi_s, \phi_s\rangle_*\right) \\
&= \frac{K_\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\left\langle \vec{H}, N_t \right\rangle_* = \frac{K_\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \left\langle \vec{H}, N_s \right\rangle_* = \frac{K_\gamma}{2}. \tag{4.49}$$

Por outro lado, utilizando o fato de que $\overline{\tau z} = -\tau\overline{z}$, encontramos

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi, N_t\rangle\rangle_* &= (\alpha_1\gamma_1)\,\overline{(\tau\alpha_1'\gamma_1)} + (\alpha_2\gamma_2)\,\overline{(\tau\alpha_2'\gamma_2)} \\
&= -\tau\left[\alpha_1\gamma_1\overline{\alpha_1'}\overline{\gamma_1} + \alpha_2\gamma_2\overline{\alpha_2'}\overline{\gamma_2}\right] \\
&= -\tau\left[|\gamma_1|_*^2\alpha_1\overline{\alpha_1'} + |\gamma_2|_*^2\overline{\alpha_2'}\alpha_2\right] \\
&= -\tau\left[|\gamma_1|_*^2\alpha_1\overline{\alpha_1'} + |\gamma_2|_*^2\overline{\alpha_1'}\alpha_1\right] \\
&= -\tau\left(|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_2|_*^2\right)\alpha_1\overline{\alpha_1'} \\
&= -\tau\alpha_1\overline{\alpha_1'},
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\langle \phi, N_t\rangle_* = \mathrm{Re}\langle\langle \phi, N_t\rangle\rangle_* = -\left\langle \alpha_1', J\alpha_1 \right\rangle_*. \tag{4.50}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle\langle \phi, N_s\rangle\rangle_* &= (\alpha_1\gamma_1)\,\overline{(\tau\alpha_1\gamma_1')} + (\alpha_2\gamma_2)\,\overline{(\tau\alpha_2\gamma_2')} \\
&= -\tau\left[\alpha_1\gamma_1\overline{\alpha_1}\overline{\gamma_1'} + \alpha_2\gamma_2\overline{\alpha_2}\overline{\gamma_2'}\right] \\
&= -\tau\left[|\alpha_1|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'} + |\alpha_2|_*^2\gamma_2\overline{\gamma_2'}\right] \\
&= -\tau\left[|\alpha_1|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'} - |\alpha_2|_*^2\gamma_1\overline{\gamma_1'}\right] \\
&= -\tau\left(|\alpha_1|_*^2 - |\alpha_2|_*^2\right)\gamma_1\overline{\gamma_1'} \\
&= \tau\gamma_1\overline{\gamma_1'},
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\langle \phi, N_s\rangle_* = \mathrm{Re}\langle\langle \phi, N_s\rangle\rangle_* = \left\langle \gamma_1', J\gamma_1 \right\rangle_*. \tag{4.51}$$

Finalmente, como $\vec{H} + \lambda\phi^{\perp} = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \left\langle \vec{H}, N_t \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_t\rangle_* = 0 \\ \left\langle \vec{H}, N_s \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_s\rangle_* = 0, \end{cases}$$

aplicando (4.49), (4.50) e (4.51) no sistema acima, obtemos

$$0 = \left\langle \vec{H}, N_t \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_t\rangle_* = \frac{K_\alpha}{2} + \lambda\left(-\langle \alpha_1', J\alpha_1\rangle_*\right)$$

e

$$0 = \left\langle \vec{H}, N_s \right\rangle_* + \lambda\langle \phi, N_s\rangle_* = \frac{K_\gamma}{2} + \lambda\langle \gamma_1', J\gamma_1\rangle_*.$$

Portanto, seguem as igualdades

$$K_\alpha = 2\lambda\langle \alpha_1', J\alpha_1\rangle_*$$

e

$$K_\gamma = -2\lambda\langle \gamma_1', J\gamma_1\rangle_*.$$

□

Exemplo 4.3.2. *Dado $\delta > 0$, denote $s_\delta = \sinh(\delta)$ e $c_\delta = \cosh(\delta)$, e considere a curva seguinte:*

$$\begin{aligned} \gamma_\delta = (\gamma_{\delta,1}, \gamma_{\delta,2}) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{Ad}\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{D}^2 \\ s &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\left(e^{\tau c_\delta s}, c_\delta e^{-\frac{s}{c_\delta}\tau}\right). \end{aligned}$$

Como $\gamma_\delta'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\left(\tau c_\delta e^{\tau c_\delta s}, -\tau e^{-\frac{s}{c_\delta}\tau}\right)$, *temos que*

$$\begin{aligned} \langle\langle \gamma_\delta, \gamma_\delta\rangle\rangle_* &= \left(\frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\right)^2 \left(e^{\tau c_\delta s}\overline{e^{\tau c_\delta s}} + c_\delta e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\overline{c_\delta e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)\left(1 + c_\delta^2 e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\overline{e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)(1+c_\delta^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \gamma_\delta', J\gamma_\delta\right\rangle\right\rangle_* &= \left(\frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\right)^2 \left(\tau c_\delta e^{\tau c_\delta s}\overline{\tau e^{\tau c_\delta s}} + (-\tau)e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\overline{\tau c_\delta e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)\left(\tau\overline{\tau}\ c_\delta e^{\tau c_\delta s}e^{-\tau c_\delta s} - \tau\overline{\tau}c_\delta e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}e^{\frac{\tau s}{c_\delta}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)(\tau\overline{\tau}c_\delta - \tau\overline{\tau}c_\delta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, γ_δ é uma curva legendreana em $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^3$. Além disso, tal curva é parametrizada pelo com-

primento de arco, uma vez que

$$\begin{aligned}
\langle\langle \gamma_\delta', \gamma_\delta' \rangle\rangle_* &= \left(\frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\right)^2 \left(\tau c_\delta e^{\tau c_\delta s}\overline{\tau c_\delta e^{\tau c_\delta s}} + \left(-\tau e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\right)\overline{\left(-\tau e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)\left(\tau\overline{\tau}\ c_\delta^2 e^{\tau c_\delta s} e^{-\tau c_\delta s} + (-\tau)\overline{(-\tau)} e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}} e^{\frac{\tau s}{c_\delta}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{c_\delta^2+1}\right)\left(c_\delta^2+1\right)\tau\overline{\tau} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Agora, tome a curva

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{AdS}_*^3 \subset \mathbb{D}^2 \\
t &\longmapsto (\sinh t, \cosh t),
\end{aligned}$$

que é uma curva legendreana parametrizada pelo comprimento de arco em AdS_*^3*, pois satisfaz*

$$\langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathsf{T}} = -1, \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle_{\mathsf{T}} = 1 \quad e \quad \langle \alpha', J\alpha \rangle_{\mathsf{T}} = 0.$$

Com base nas curvas γ_δ *e* α*, considere a aplicação*

$$\begin{aligned}
\phi_\delta = \alpha \odot \gamma_\delta : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\
(t,s) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\left(\sinh(t)e^{\tau c_\delta s}, c_\delta \cosh(t) e^{-\frac{s}{c_\delta}\tau}\right).
\end{aligned}$$

A imersão ϕ_δ *é autossimilar, ou seja, satisfaz a equação* $\vec{H} + \lambda {\phi_\delta}^\perp = 0$*, para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$*. De fato, tome*

$$\lambda = \frac{c_\delta^4 - 1}{2c_\delta^2}.$$

Pela Proposição 4.3.1, a curva γ_δ *satisfaz*

$$\gamma_\delta'' - \gamma_\delta - K_{\gamma_\delta}\tau\gamma_\delta' = 0.$$

Equivalentemente, $K_{\gamma_\delta} = \langle \gamma_\delta'', J\gamma_\delta' \rangle_*$*. Como*

$$\begin{aligned}
\langle\langle \gamma_\delta'', J\gamma_\delta' \rangle\rangle_* &= \left(\frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\right)^2 \left(c_\delta^2 e^{\tau c_\delta s}\overline{c_\delta e^{\tau c_\delta s}} - \frac{1}{c_\delta} e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}\overline{e^{-\frac{\tau s}{c_\delta}}}\right) \\
&= \frac{1}{c_\delta^2+1}\left(c_\delta^3 - \frac{1}{c_\delta}\right) \\
&= \frac{1}{c_\delta^2+1}\left(\frac{c_\delta^4-1}{c_\delta}\right) \\
&= \frac{s_\delta^2}{c_\delta},
\end{aligned}$$

temos que

$$K_{\gamma_\delta} = \frac{s_\delta^2}{c_\delta}.$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\left\langle \gamma'_{\delta,1}, J\gamma_{\delta,1}\right\rangle_* &= c_\delta \left(\frac{1}{\sqrt{c_\delta^2+1}}\right)^2 \left(\mathrm{Re}\,(\tau e^{\tau c_\delta s})\,\mathrm{Re}\,(\tau e^{\tau c_\delta s}) - \mathrm{Im}\,(\tau e^{\tau c_\delta s})\,\mathrm{Im}\,(\tau e^{\tau c_\delta s})\right)\\ &= \left(\frac{c_\delta}{c_\delta^2+1}\right)\left(\sinh^2(c_\delta s) - \cosh^2(c_\delta s)\right)\\ &= -\frac{c_\delta}{c_\delta^2+1},\end{aligned}$$

temos que

$$-2\lambda\left\langle \gamma'_{\delta,1}, J\gamma_{\delta,1}\right\rangle_* = -2\left(\frac{c_\delta^4-1}{2c_\delta^2}\right)\left(\frac{-c_\delta}{c_\delta^2+1}\right) = \frac{c_\delta}{c_\delta^2}\left(c_\delta^2-1\right) = \frac{s_\delta^2}{c_\delta} = K_{\gamma_\delta},$$

que é a segunda igualdade do Teorema 4.3.9. Finalmente, em relação à curva α, a Proposição 4.3.1 nos garante que a curva α satisfaz

$$\alpha'' - \alpha - K_\alpha \tau\alpha' = 0.$$

Logo, $K_\alpha = -\langle \alpha'', \tau\alpha'\rangle_{\mathsf{T}}$. Como

$$\left\langle\left\langle \alpha'', \tau\alpha'\right\rangle\right\rangle_{\mathsf{T}} = -\tau\sinh t\cosh t + \tau\sinh t\cosh t = 0,$$

segue que $K_\alpha = 0$, e

$$\left\langle \alpha'_1, J\alpha_1\right\rangle_* = 0,$$

então a primeira igualdade do Teorema 4.3.9 também é verificada, isto é, temos

$$K_\alpha = 0 = 2\lambda\left\langle \alpha'_1, J\alpha_1\right\rangle_*.$$

Desta forma, está provada a autossimilaridade da aplicação ϕ_δ.

Observação 4.3.10. *Utilizando as projeções de Hopf vistas anteriormente e a igualdade (a) de (4.34), denotemos*

$$\xi = \pi\circ\gamma = \pi(\gamma_1,\gamma_2) = \frac{1}{2}\left(2\gamma_1\overline{\gamma_2}, |\gamma_1|_*^2 - |\gamma_2|_*^2\right) := (\xi_1 + \tau\xi_2, \xi_3)$$

e

$$\eta = \pi^*\circ\alpha = \pi^*(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{2}\left(2\alpha_1\overline{\alpha_2}, |\alpha_1|_*^2 + |\alpha_2|_*^2\right) := (\eta_1 + \tau\eta_2, \eta_3).$$

Assim, note que

$$\xi_1 + \tau\xi_2 = \gamma_1\overline{\gamma_2} := (a+\tau b)(c-\tau d) = (ac-bd) + \tau(bc-ad)$$

e

$$\xi_3 = \frac{|\gamma_1|_*^2 - |\gamma_2|_*^2}{2} = \frac{|\gamma_1|_*^2 + |\gamma_1|_*^2 - 1}{2} = |\gamma_1|_*^2 - \frac{1}{2}.$$

Analogamente, utilizando a igualdade (d) de (4.35), obtemos

$$\eta_1 + \tau\eta_2 = \alpha_1\overline{\alpha_2} := (a+\tau b)(c-\tau d) = (ac-bd) + \tau(bc-ad)$$

e

$$\eta_3 = \frac{|\alpha_1|_*^2 + |\alpha_2|_*^2}{2} = \frac{|\alpha_1|_*^2 + |\alpha_1|_*^2 + 1}{2} = |\alpha_1|_*^2 + \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\xi_1 = \eta_1 = ac - bd \quad e \quad \xi_2 = \eta_2 = bc - ad.$$

Logo, aplicando a igualdade (a) *de* (4.34)*, obtemos que a terceira componente do vetor* $\xi \times \xi'$ *se escreve da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
(\xi \times \xi')_3 &= \xi_1\xi_2' - \xi_2\xi_1' \\
&= (ac-bd)(bc-ad)' - (ac-bd)'(bc-ad) \\
&= (ac-bd)(b'c+bc'-a'd-ad') - (a'c+ac'-b'd-bd')(bc-ad) \\
&= (a^2-b^2)(c'd-cd') + (c^2-d^2)(ab'-ba') \\
&= |\gamma_1|_*^2\langle\gamma_2', J\gamma_2\rangle_* + |\gamma_2|_*^2\langle\gamma_1, J\gamma_1'\rangle_* \\
&= |\gamma_1|_*^2\left(\langle\gamma_2', J\gamma_2\rangle_* + \langle\gamma_1', J\gamma_1\rangle_*\right) - \langle\gamma_1', J\gamma_1\rangle_* \\
&= -\langle\gamma_1', J\gamma_1\rangle_*.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, utilizando a igualdade (d) *de* (4.35)*, segue que a terceira componente de* $\eta \times \eta'$ *é dada por:*

$$\begin{aligned}
(\eta \times \eta')_3 &= \eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' \\
&= (ac-bd)(bc-ad)' - (ac-bd)'(bc-ad) \\
&= (ac-bd)(b'c+bc'-a'd-ad') - (a'c+ac'-b'd-bd')(bc-ad) \\
&= (a^2-b^2)(c'd-cd') + (c^2-d^2)(ab'-ba') \\
&= |\alpha_1|_*^2\langle\alpha_2', J\alpha_2\rangle_* + |\alpha_2|_*^2\langle\alpha_1, J\alpha_1'\rangle_* \\
&= |\alpha_1|_*^2\left(\langle\alpha_2', J\alpha_2\rangle_* - \langle\alpha_1', J\alpha_1\rangle_*\right) - \langle\alpha_1', J\alpha_1\rangle_* \\
&= -\langle\alpha_1', J\alpha_1\rangle_*.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.3.9*, as curvaturas de* η *e* ξ *ficam iguais a*

$$K_\eta = -2\lambda(\eta \times \eta')_3 \quad e \quad K_\xi = 2\lambda(\xi \times \xi')_3,$$

respectivamente.

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, Lars V. *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953. 61

[2] Alekseevsky, D. V.; Medori, C.; Tomassini, A. *Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds.* Russian Math. Surveys 64 (2009), 1 - 43. 2

[3] Anciaux, Henri *Construction of Lagrangian self-similar solutions to the mean curvature flow in* $\mathbb{C}^n$. Geom. Dedicata 120 (2006), no. 1, 37 - 48. 3

[4] Anciaux, Henri *Minimal Lagrangian submanifolds in indefinite complex space.* Illinois J. Math. 56 (2012), no. 4, 1331 - 1343. 3

[5] Anciaux, Henri *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry.* World Scientific (2010) 2, 3, 11, 12, 14, 16, 59

[6] Anciaux, Henri *Special Lagrangian submanifolds in the complex sphere.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16 (2007), no. 2, 215 - 227. 3

[7] Anciaux, Henri *Two non existence results for the self-similar equation in Euclidean* 3*-space.* Journal of Geometry 96 (2009), no. 1 - 2. 3

[8] Anciaux, Henri; Castro, Ildefonso *Construction of Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space.* Results Math. 60 (2011), no. 1 - 4, 325 - 349. 4

[9] Castro, Ildefonso; Chen, Bang-Yen *Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane via spherical and hyperbolic curves.* Tohoku Math. J. (2) 58 (2006), no. 4, 565 - 579. 3, 4

[10] Chen, Bang-Yen *Geometry of submanifolds.* Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973. 3, 61

[11] Cruceanu, V.; Fortuny, P.; Gadea, P. M. *A survey on paracomplex geometry.* Rocky Mountain J. Math. 26 (1996), no. 1, 83 - 115. 1

[12] Freudenthal, Hans *Lie groups in the foundations of geometry.* Advances in Math. 1 (1964), 145 - 190. 1

[13] Gadea, Pedro Martínez; Muñoz Masqué, Jaime. *Classification of homogeneous para-Kaehlerian space forms.* Nova J. Algebra Geom. 1 (1992), no. 2, 111 - 124. 1

[14] Graves, John T. *On a connection between the general theory of normal couples and the theory of complete quadratic functions of two variables.* Phil. Magaz., London-Edinburgh-Dublin 26 (1845), 315 - 320. 1

[15] Harvey, Reese; Lawson, H. Blaine, Jr. *Calibrated geometries.* Acta Math. 148 (1982), 47 - 157. 3

[16] Lerma, Ana María *El flujo lagrangiano de la curvatura media.* Tesis doctoral en la Universidad de Jaén, 2013. 4

[17] Libermann, Paulette *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 36 (1954), 27 - 120. 1

[18] Libermann, Paulette *Sur les structures presque paracomplexes.* C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 2517 - 2519. 1

[19] Newlander, A.; Nirenberg, L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds.* Annals of Math. (2) 65 (1957), 391 - 404. 2

[20] 'Olafsson, G. *Causal symmetric spaces.* Math. Gottingensis, Heft 15 (1990). 1

[21] Oproiu, V. *A pseudo-Riemannian structure in Lagrange geometry.* An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat. 33 (1987), no. 3, 239 - 254. 1

[22] Rozenfeld, B. A. *On unitary and stratified spaces.* (Russian) Trude Sem. Vektor. Tenzor. Analizu 7 (1949), 260 - 275. 1

[23] Rozenfeld, B. A. *Non-Euclidean geometries.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.- Teor. Lit., Moskow, 1955. 744 pp. (Russian). 1

[24] Salvai, Marcos *Generalized geometric structures on complex and symplectic manifolds.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 194 (2015), no. 5, 1505 - 1525. 2

[25] Shirokov, A. P. *On the problem of A-spaces.* (Russian) One hundred and twenty-five years of the non-Euclidean geometry of Lobatchevski, 1826 - 1951, pp. 195 - 200. Gosudarstv. Izdat. Tehn.- Teor. Lit., Moskow-Leningrad, 1952. 1

[26] Vandoren, Stefan *Lectures on Riemannian geometry: part II - complex manifolds.* Institute for Theoretical Physics and Spinoza Institute Utrecht University (2008). 2

[27] Wade, Aïssa *Dirac structures and paracomplex manifolds.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), no. 11, 889 - 894. 2