INTEGRABILIDADE DE G-ESTRUTURAS

Gustavo Ignácio Duarte

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ivan Struchiner

São Paulo, junho de 2018

INTEGRABILIDADE DE G-ESTRUTURAS

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/05/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Struchiner (orientador) - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Maria Amelia Salazer Pinzón - UFF
- Prof. Dr. Lino Anderson da Silva Gama - Unicamp

Agradecimentos

Meus agradecimentos vão para meus pais Teresa e Lourival, que me apoiam e me apoiarão por toda a vida, meu amigo Marcelo cuja amizade deu-me ânimo pra ir até o fim e ao amigo e orientador Ivan, que me deu a força necessária para concluir este trabalho.

Resumo

DUARTE, G. I. **Integrabilidade de G-estruturas**. 2018. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Esta dissertação tem como objetivo discutir sob quais condições uma G-estrutura é integrável. Primeiro apresentam-se fibrados principais, vetoriais e outras estruturas a elas associados como torção, espaços verticais, espaços horizontais e conexões. Depois apresentam-se a definição de G-estrutura, de integrabilidade de G-estruturas, com exemplos e as respectivas versões de integrabilidade e equivalência de G-estruturas. Finalmente, são descritas condições mais gerais que garantem a integrabilidade de G-estruturas.

Palavras-chave: fibrados principais, fibrados vetoriais, fibrados associados, conexões, transporte paralelo, curvatura, torção, G-estruturas, integrabilidade, equivalência de G-estruturas, cohomologia de Spencer.

Abstract

DUARTE, G.I. **Integrability of G-structures**. 2018. 102 f. Dissertation (Master) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

This dissertation aims to discuss what are the conditions for the integrability of a G-structure. We begin presenting principal bundles, vector bundles, associated bundles and other structures related to them like torsion, vertical spaces, horizontal spaces and connections. After this, we present the definition of G-structure, integrability of G-structures with examples and respective versions of integrabilities and the equivalence of G-structures. Finally, we describe more general conditions that ensure the integrability of G-structures.

Keywords: principal bundles, vector bundles, associated bundles, connections, parallel transport, curvature, torsion, G-structures, integrability, equivalence of G-structures, Spencer cohomology.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fibrados Principais, Vetoriais e Associados.	3
2.1	Fibrados principais	3
2.1.1	Sobre as fibras	5
2.1.2	Morfismos de fibrados principais	6
2.1.3	Seções	7
2.1.4	Exemplos	8
2.2	Fibrado associado	9
2.3	Fibrados vetoriais.	13
2.3.1	Seções em fibrados associados.	14
2.3.2	Pullback de fibrados vetoriais.	16
2.3.3	Fibrados vetoriais como fibrados associados.	17
2.4	Conexões em fibrados principais.	18
2.4.1	Espaço vertical.	18
2.4.2	Conexões em fibrados principais e espaços horizontais.	20
2.4.3	Formas de conexão.	21
2.4.4	Transporte paralelo em fibrados principais	24
2.4.5	Curvatura.	25
2.5	Conexões em fibrados vetoriais.	28
2.5.1	Transporte paralelo em fibrados vetoriais.	31
2.6	Curvatura e torção.	33
2.6.1	Curvatura.	33
2.6.2	Torção	34
2.6.3	Quando a curvatura é zero.	35
2.6.4	Formas em fibrados associados	37
2.7	Conexões induzidas em fibrados associados	38

2.8	Redução do grupo estrutural	39
3	G-estruturas	41
3.1	G-estruturas em variedades	41
3.1.1	Problema da equivalência de G-estruturas	42
3.1.2	Exemplos	42
3.2	Conexões compatíveis	55
3.2.1	Compatibilidade entre conexões e G -estruturas	55
3.2.2	espaço das conexões compatíveis	56
3.3	Curvatura e torção de G-estruturas	57
3.3.1	Torção intrínseca	57
3.4	Equações estruturais, curvatura e torção	59
3.4.1	Forma tautológica	59
3.4.2	Torção e equações estruturais.	61
4	Integração de G-estruturas	69
4.1	Prolongamentos e Cohomologia de Spencer	69
4.2	Contato de k -ésima ordem e jatos.	71
4.3	Fibrados referenciais e forma tautológica	72
4.4	Funções estruturais	75
4.5	G-estruturas uniformemente k -integráveis	77
4.6	G-estruturas de tipo finita	78
A	Apêndice	79
A.1	Variedades: quocientes	79
A.2	Cálculos de Cartan	80
A.2.1	Derivada de Lie de um campo vetorial	80
A.2.2	Contração ou produto interior	81
A.2.3	Derivadas de Lie em formas diferenciais	82
A.3	Conexão de Levi-Civita	84
A.4	Lema ou Truque de Moser Local	86
A.5	Propriedade Universal de Maurer-Cartan	88
A.6	Exemplo não-integrável: variedades nearly Kähler	89
A.7	G_2 -estruturas	90
	Referências Bibliográficas	91
	Índice Remissivo	93

Capítulo 1

Introdução

As variedades são objetos centrais no estudo da Geometria. Muitas de suas propriedades podem ser estudadas a partir de um espaço vetorial muito importante: os espaços tangentes.

E podemos definir estruturas nos espaços tangentes que nos dão muitas informações importantes sobre a geometria da variedade (comprimento, volume etc.): produtos internos, orientações, folheações, estruturas simpléticas etc.

Existem certos referenciais (bases) dos espaços tangentes que são compatíveis com a estrutura em questão. Por exemplo, os referenciais ortonormais mantêm a informação produto interno, ou equivalentemente o conjunto das bases ortonormais para o produto interno.

A ação de certas transformações lineares sobre esses referenciais, que são elementos de subgrupos de Lie de $GL_n(\mathbb{R}^n)$ mantém invariante as propriedades geométricas em relação à estrutura. No mesmo exemplo, as transformações ortogonais, que pertencem ao grupo $O(n)$ representado pelas matrizes ortogonais, conservam informação do o produto interno, ou de forma equivalente o conjunto de bases ortonormais para o produto interno.

Dessa forma, obtemos um conjunto de referenciais especiais que tem uma compatibilidade com a estrutura em questão codificada pelo subgrupo de Lie que o mantém invariante. As G-estruturas são exatamente tais conjuntos de referenciais que através da escolha de $G \subseteq GL_n(\mathbb{R}^n)$, subgrupo de Lie, que determina um tipo de geometria.

Assim, essa forma de enxergar a Geometria, através do estudo das G-estruturas, permite um estudo dela mais global e com uma sistematização mais geral.

Uma G-estrutura é integrável se em torno de cada ponto da variedade existem cartas para os quais o referencial induzido funciona como acima descrito. Com isso, estudaremos teoremas clássicos de integrabilidade como o caso Riemanniano, em que a integrabilidade está relacionada com a curvatura e torção, o teorema de Frobenius, em que a integrabilidade está relacionada

com a involutividade de uma distribuição, teorema de Darboux que trata da integrabilidade de formas simpléticas.

Uma grande questão é a equivalência de G-estruturas: em que condições localmente existe um isomorfismo entre duas G-estruturas, cujo caso particular é a equivalência a chamada G-estrutura canônica ou standard, de $\mathbb{R}^n$.

O objetivo desse trabalho é encontrar tais condições e isso é desenvolvido no artigo *The Integrability Problem for G-Structures*, de Victor Guillemin ([Gui65]), com uma linguagem mais moderna que terá como base a linguagem de fibrados e trará uma série de ferramentas que serão muito úteis ao nosso propósito.

Capítulo 2

Fibrados Principais, Vetoriais e Associados.

Começaremos apresentando espaços de projeção: fibrados.

Iniciamos com o fibrado principal que é a estrutura básica na construção de G -estruturas. Em seguida estudaremos os fibrados associados que são o elo entre os fibrados principais e os fibrados vetoriais, última estrutura estudada nesse capítulo.

Em seguida veremos os conceitos de conexão e curvatura primeiro em fibrados principais e depois em fibrados vetoriais. Na primeira situação, serão apresentados os conceitos de espaços verticais e horizontais e suas propriedades geométricas. Também veremos as 1-formas de conexão e sua relação com espaços horizontais. Depois estudaremos conexões e curvatura em fibrados vetoriais, e como elas se correlacionam. Além disso, estudaremos o transporte paralelo em ambos fibrados.

Esse capítulo tem como forte suporte [\[Cra15\]](#)

2.1 Fibrados principais

Definição 2.1.1. *Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Um G -fibrado principal sobre M consiste de*

- (i) *uma variedade P e uma ação à direita $P \times G \rightarrow P, (p, g) \mapsto pg$ de G sobre P .*
- (ii) *uma submersão sobrejetora $\pi : P \rightarrow M$ G -invariante, isto é, $\pi(pg) =$*

$\pi(p)$, denominada *projeção*, que satisfaz a propriedade de trivialidade local: dado $x_0 \in M$ existem uma vizinhança aberta desse ponto U e um difeomorfismo

$$\Psi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

que leva cada fibra $\pi^{-1}(x)$ nas fibras $\{x\} \times G$ e é G -equivariante: $\Psi_U(pg) = \Psi_U(p)g$, pela ação G dada por: $(x, g)h = (x, gh)$, $h \in G$.

P é chamado de *espaço total*, M é de *espaço base*. Usaremos as notações P_x para a fibra $\pi^{-1}(x)$ e $P|_U$ para $\pi^{-1}(U)$.

Exemplo 2.1.1. O G -fibrado principais trivial sobre M é $M \times G$, munido com a ação descrita acima e a projeção como sendo a projeção $p_1 : M \times G \rightarrow M$, $p_1(x, g) = x$.

Proposição 2.1.1. A ação de G sobre P é livre, própria e transitiva nas fibras.

Demonstração. Primeiro vamos provar que ação á direita de G sobre $U \times G$ é livre: $(x, a)g = (x, a) \Rightarrow (x, ag) = (x, a) \Rightarrow ag = a$ e multiplicando ambos os membros da ultima igualdade por a^{-1} , obtemos $g = e$.

Agora, suponhamos que $p \cdot g = p$, com $p \in P, g \in G$. Aplicando uma trivialização local Ψ nesta igualdade, tem-se

$$\Psi(pg) = \Psi(g) \Rightarrow \Psi(p)g = \Psi(p) \Rightarrow g = e$$

Portanto, a ação de G sobre P é livre.

Para provar que a ação é própria, temos que provar que a função

$$P \times G \rightarrow P \times P, (p, g) \mapsto (p, pg)$$

é própria.

Uma aplicação é própria se a pré-imagem de um compacto no contradomínio é um compacto. O que equivale a provar que essa pré-imagem é sequencialmente compacta em nosso caso.

Seja $K \subseteq P \times P$, compacto, e $((p_i, g_i))_i$ uma sequência em $P \times G$, tal que $((p_i, p_i g_i)) \subseteq K$, para todo i . Nesse caso, com esta sequência está num compacto, ela admite uma subsequência convergente $((p_i, p_i g_i))_i$, cujo limite será $(p, q) \in K$. Consideremos a subsequência $((p_i, g_i))_i$ que é levada na subsequência convergente.

Seja $x = \pi(P)$ e $U \subseteq M$ um abeto trivializante em torno de M , cuja trivialização local é $\psi : E_x \rightarrow U \times G$. Sabemos que:

$$p_i \rightarrow p \Rightarrow \pi(p_i) \rightarrow \pi(p)$$

e por isso, exceto por um número finito de índices, $\pi(p_i) \in U$.

Além disso,

$$\begin{aligned} p_i g_i \rightarrow q &\Rightarrow \pi(p_i g_i) = \pi(p_i) \rightarrow \pi(q) \\ &\Rightarrow \pi(p) = \pi(q) \\ &\therefore q \in E_x \end{aligned}$$

Sejam $\psi(p) = (x, a)$, $\psi(q) = (x, b)$ e $\psi(p_i) = (x_i, a_i)$. Então $x \rightarrow x$, $a_i \rightarrow a$ e como $p_i g_i \rightarrow q$, então

$$\begin{aligned} \psi(p_i g_i) \rightarrow \psi(q) &\Rightarrow \psi(p_i) g_i \rightarrow (x, b) \\ (x_i, a_i g_i) &\rightarrow (x, b) \\ &\Rightarrow a_i g_i \rightarrow b \end{aligned}$$

Logo,

$$a_i g_i \rightarrow b \Rightarrow g_i \rightarrow a_i^{-1} b$$

Finalmente, $(p_i, g_i) \rightarrow (p, a_i^{-1} b)$

□

2.1.1 Sobre as fibras

Como π é uma função G -invariante, as fibras $\pi^{-1}(x)$ são G -espaços difeomorfos ao próprio grupo G (como G -espaços): fixado $x \in M$ todo $p \in \pi^{-1}(x)$ induz um difeomorfismo

$$\phi : G \rightarrow P_x$$

$$\phi_p(g) = pg, \quad p \in P_x \quad (2.1)$$

compatível com a ação à direita de G : $\phi(gh) = \phi(g)h, h \in G$

Denotando por $g_{p \rightarrow q}$ o único elemento em G tal que $q = pg$ temos a inversa da aplicação acima:

$$\phi_p^{-1} : P_x \rightarrow G, \phi_p^{-1}(q) = g_{p \rightarrow q}$$

Observação 1. Consideremos $P \times_M P = \{(p, q) : \pi(p) = \pi(q)\}$. Dessa forma, conseguimos um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \delta : P \times G &\rightarrow P \times_M P \\ (p, g) &\mapsto (p, pg) \end{aligned} \quad (2.2)$$

cujas inversa é

$$\begin{aligned} \Delta : P \times_M P &\rightarrow P \times G \\ (p, q) &\mapsto (p, g_{p \rightarrow q}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.2 Morfismos de fibrados principais

Definição 2.1.2. Se $\pi_i : P_i \rightarrow M, i = 1, 2$ são G -fibrados principais, um **morfismo entre G -fibrados principais** é uma função suave $F : P_1 \rightarrow P_2$ que comuta com as projeções: $\pi_1 = \pi_2 \circ F$ e é G -equivariante: $F(pg) = F(p)g, p \in P_1, g \in G$.

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{F} & P_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & M & \end{array}$$

Um G -fibrado principal é dito **trivializável** se é isomorfo ao fibrado principal trivial.

A condição de trivialidade local afirma que, $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo ao fibrado principal trivial.

Proposição 2.1.2. Todo morfismo entre fibrados principais é isomorfismo.

Demonstração. Sejam $\pi_1 : P_1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : P_2 \rightarrow M$ dois G -fibrados principais e $f : P_1 \rightarrow P_2$ um morfismo entre eles. Ou seja, $\pi_2 \circ f = \pi_1$.

Sejam $p, q \in P_1$ tais que $f(p) = f(q)$. Então

$$\pi_2(f(p)) = \pi_2(f(q)) \Rightarrow \pi_1(p) = \pi_1(q)$$

Desse modo, p e q pertencem à mesma fibra $\pi^{-1}(x)$, com $x \in M$. Como a ação de G é transitiva, existe $g \in G$ tal que $q = pg$. Daí

$$f(q) = f(pg) = f(p)g = f(q)g$$

Como a ação é livre, então $g = e$. Portanto, $q = p$. E assim, f é injetora.

Agora, consideremos $\bar{p} \in P_2$. Tomemos $b \in \pi_2(\bar{p})$. Vamos tomar agora $p \in \pi_1^{-1}(b)$. Sabemos que $\bar{p} \in \pi_2^{-1}(b)$ também.

Então, existe $g \in G$ tal que

$$\bar{p} = f(p)g \Rightarrow \bar{p} = f(pg)$$

Logo, f é sobrejetora.

Seja $h : P_2 \rightarrow P_1$ a inversa de f . Vamos provar que g é G -equivariante. Seja $q \in P_2$ e $g \in G$. Então $q = f(p)$, $p \in P_1$ de modo que $q = g(p)$. Assim:

$$h(qg) = h(f(p)g) = h(f(pg)) = pg = h(q)g$$

A função g também é contínua: consideremos as respectivas trivializações locais $\Psi : P_i : \pi_i^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, $i = 1, 2$, para $U \subseteq M$ aberto. Então, podemos considerar $f|_U : U \times G \rightarrow U \times G$ com

$$f|_U(x, g) = (x, \rho(x, g))$$

com $\rho : U \times G \rightarrow G$, tal que $\rho(x, hg) = \rho(x, h) \cdot g$. Como f é contínua, então ρ também o é. Além disso, como $\rho(x, g) \in G$, existe $\rho^{-1}(x, g)$ e a aplicação $g \mapsto g^{-1}$ é contínua em grupos topológicos, que é o caso de G um grupo de Lie.

Assim, $f|_U$ é localmente expressa por $(x, g) \mapsto (x, \rho^{-1}(g))$.

□

2.1.3 Seções

Definição 2.1.3. Se $\pi : P \rightarrow M$ é um G -fibrado principal, uma **seção** desse fibrado será um função $\sigma : M \rightarrow P$ em que $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x)$, ou seja, $\pi_P \circ \sigma = Id_M$.

$$\begin{array}{c} P \\ \downarrow \pi \quad \nearrow \sigma \\ M \end{array}$$

O espaço das seções de um fibrado principal é denotado por $\Gamma_M(P)$ ou simplesmente $\Gamma(P)$ se não houver dúvidas quanto ao espaço base.

Proposição 2.1.3. *Um G -fibrado principal admite seção global se, e somente se, é trivializável.*

Demonstração. Se o fibrado principal é trivializável, então existe um isomorfismo $f : M \times G \rightarrow P$. Vamos definir, para $g \in G$ fixado, a seguinte função:

$$\sigma_g : M \rightarrow P, \sigma_g(x) = f(x, g)$$

Isto define uma seção pois f leva fibra em fibra de modo que $f(x, g) \in \pi^{-1}(x)$.

Se σ é uma seção global do G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ então

$$F_\sigma : M \times G \rightarrow P, F_\sigma(x, g) = \sigma(x)g$$

é um isomorfismo de G -fibrados principais. Considerando as projeções $p_1 : M \times G \rightarrow M$ a projeção na primeira coordenada e $\pi : P \rightarrow M$ então:

$$\pi \circ F_\sigma(x, g) = \pi(\sigma(x)g) = \pi(\sigma(x)) = x$$

$$p_1(x, g) = x$$

Portanto, $p_1 = \pi \circ F_\sigma$. Assim, F_σ é um isomorfismo de G -fibrados principais, de modo que P é trivializável. □

2.1.4 Exemplos

Alguns exemplos de G -fibrados principais:

1. Seja $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ com $a^2 = e$ e definamos a ação desse grupo sobre S^n da seguinte maneira:

$$ze = z, za = -z, \quad z \in S^n$$

O quociente $S^n/\mathbb{Z}_2$ é difeomorfo ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$, de modo a obtermos o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

2. Seja $G = S^1$, identificado com $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Definindo a ação de

S^1 sobre $SO(3)$ como sendo

$$Mz = M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, M \in SO(3), \quad z = \cos \theta + i \sin \theta$$

e a projeção como sendo $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$ que associa $M \in SO(3)$ à sua primeira coluna.

Então $\pi : SO(3) \rightarrow S^2$ é um S^1 -fibrado principal.

3. Considere $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ e a ação de S^1 sobre S^3 dada por

$$(z_1, z_2) \cdot z = (z_1 z, z_2 z), \quad z \in S^1$$

e a projeção

$$\pi : S^3 \rightarrow S^2, \pi(z_1, z_2) = (2z_1 \bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

$\pi : S^3 \rightarrow S^2$ é um S^1 -fibrado principal. Este é a chamada fibração de Hopf.

4. Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado e do primeiro.

A ação de H sobre G é dada por multiplicação. Então $\pi : G \rightarrow G/H, \pi(g) = [g]$ é um H -fibrado principal, cujas fibras são exatamente as co-classes à esquerda de G/H .

2.2 Fibrado associado

Sejam F uma variedade, $G \times F \rightarrow F$ uma ação de G à esquerda sobre F e $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal.

Definição 2.2.1. *O fibrado associado ao fibrado principal é definido como*

$$E(P, F) = (P \times F)/G$$

onde $(p, v) \sim (pg, g^{-1}v)$.

Definimos a seguinte projeção

$$\tilde{\pi} : E(P, F) \rightarrow M$$

$$\tilde{\pi}([p, v]) = \pi(p)$$

Denotando por $[p, v]$ os elementos induzidos por (p, v) , observemos que

$$[pg, v] = [pg, g^{-1}gv] = [p, gv]$$

Quanto às fibras,

$$\tilde{\pi}^{-1}(x) = E(P, V)_x = \{[p, v] \in E(P, V) : p \in \pi^{-1}(x), v \in F\}$$

Dado $p_0 \in \pi^{-1}(x)$, temos

$$\begin{aligned} p_0 \in \pi^{-1}(x) &\Rightarrow p_0 = pg, g \in G \\ &\Rightarrow [p_0, v] = [pg, v] = [p, gv] = [p, w] \end{aligned}$$

Assim, $\pi^{-1}(x) = \{[p_0, v] : v \in F\}$

Proposição 2.2.1. *Seja $E(P, F)$ um fibrado associado. Então:*

1. $E(P, F)$ é uma variedade.
2. $\tilde{\pi} : E(P, F) \rightarrow M$ é uma submersão sobrejetora.
3. Em torno de cada $x \in M$ existe um aberto $U \subseteq M$ tal que existe um difeomorfismo

$$\tilde{\Psi}_U : E(P, F)|_U \rightarrow E \times F$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E(P, F)|_U & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_U} & U \times F \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

comuta

4. Para todos abertos U e V trivializantes, com $U \cap V \neq \emptyset$ e $\tilde{\Psi}|_U$ e $\tilde{\Psi}|_V$ as respectivas trivializações, então

$$\tilde{\Psi}|_V \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1} : (U \cap V) \times F \rightarrow (U \cap V) \times F$$

$$\tilde{\Psi}|_V \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1}(x, v) = (x, g_{UV}(\sigma(x))v)$$

com

$$g_{UV} : U \cap V \rightarrow G$$

difeomorfismo. Além disso, se $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, tem-se

$$g_{VW} \circ g_{UV} = g_{UW}$$

Demonstração. 1. Vamos considerar $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de abertos trivializantes de M .

Consideremos uma seção local $\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow P|_{U_\alpha}$.

Para cada $p \in P|_{U_\alpha}$, existe um único elemento $g_\alpha(p) \in G$ de modo que $p = \sigma_\alpha(\pi(p))g_\alpha(p)$. Isso define uma aplicação suave $g_\alpha : P|_{U_\alpha} \rightarrow G$. A partir de g_α , vamos definir a seguinte trivialização local

$$\tilde{\Psi}_\alpha : E(P, V)|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times F$$

$$[p, v] \mapsto (\pi(p), g_\alpha(p)v).$$

A sua inversa é dada por $(x, v) = [\sigma_\alpha(x), v]$.

2. O diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc} E(P, F)|_U & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_U} & U \times F \\ & \searrow \tilde{\pi} \quad \swarrow pr_1 & \\ & U & \end{array}$$

comuta por construção. Desse modo,

$$pr_1 \circ \tilde{\psi} = \tilde{\pi}$$

de forma que a ultima função é, localmente, a composição de duas funções sobrejetora, e portanto, sobrejetora. Além disso, novamente

localmente, $\tilde{\pi}$ expressa-se como uma projeção, de modo a ser uma submersão.

3. Provado em (1).
4. Seja $x \in U \cap V \neq \emptyset$, U e V abertos trivializantes de M , cujas respectivas trivializações associadas são $\tilde{\Psi}_U$ e $\tilde{\Psi}_V$ e as respectivas trivializações locais e $\sigma_{UV} : U \cap V \rightarrow P_{U \cap V}$ uma seção. Além disso, seja $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G$ como em (1). Se $p \in P|_{U \cap V}$, então

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_U^{-1}(x, v) &= [\sigma_U(x), v] \Rightarrow \\ \tilde{\Psi}_V(\tilde{\Psi}_U^{-1}(x, v)) &= (\pi(\sigma_U(x)), g_{UV}(\sigma_{UV}(x))v) \\ &= (x, g_{UV}(\sigma_{UV}(x))v)\end{aligned}$$

Sejam agora U, V e W abertos trivializantes de $\pi : E \rightarrow P$, tais que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$, com respectivas trivializações $\tilde{\Psi}|_U, \tilde{\Psi}|_V$ e $\tilde{\Psi}|_W$. Ademais, sejam $g_{UV} : U \cap V \rightarrow G, g_{VW} : V \cap W \rightarrow G, g_{UW} : U \cap W \rightarrow G$ como em (1) e $\sigma_{UVW} : U \cap V \cap W \rightarrow P|_{U \cap V \cap W}$. Então:

$$\tilde{\Psi}|_W \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1} = \tilde{\Psi}|_W \circ \tilde{\Psi}|_V^{-1} \circ \tilde{\Psi}|_V \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1}$$

Se $x \in U \cap V \cap W$ e $v \in F$, então

$$\tilde{\Psi}|_W \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1}(x, v) = (x, g_{UW}(\sigma_{UVW}(x))v)$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}|_W \circ \tilde{\Psi}|_V^{-1} \circ \tilde{\Psi}|_V \circ \tilde{\Psi}|_U^{-1}(x, v) &= \tilde{\Psi}|_W \circ \tilde{\Psi}|_V^{-1}(x, g_{UV}(\sigma_{UVW}(x))v) \\ &= \tilde{\Psi}|_W([\sigma_{UVW}(x), g_{UV}(\sigma_{UVW}(x))v]) \\ &= (x, g_{VW}g_{UV}(\sigma_{UVW}(x))v)\end{aligned}$$

de modo que $g_{UW} = g_{VW}g_{UV}$ □

Exemplo 2.2.1. Quando $F = V$ é um espaço vetorial e $\rho : G \rightarrow GL(V)$ é

uma representação de G em V , temos o seguinte fibrado associado:

$$E(P, V) = (P \times V)/G$$

onde ação de G sobre $P \times V$ é dada por $(p, v)g = (pg, \rho^{-1}(g)v)$, em que denotaremos $\rho^{-1}(g)v$ simplesmente por $g^{-1}v$. Neste caso o fibrado associado é um fibrado vetorial.

Observação 2. Um espaço E com projeção $\pi : E \rightarrow M$ satisfazendo 1-4 é chamado **fibrado com fibra F e grupo de estrutura G** .

2.3 Fibrados vetoriais.

Podemos assim definir as operações de espaço vetorial para o fibrado associado:

$$[p, u] + [p, v] = [p, u + v] \quad \text{e} \quad \alpha[p, v] = [p, \alpha v], \alpha \in \mathbb{R}$$

Observação 3. Considerando elementos arbitrários $[p, u]$ e $[q, v]$, existe $g \in G$ tal que $p = q \cdot g$, de modo que

$$[q, v] = [p, gv]$$

e assim

$$[p, u] + [q, v] = [p, u] + [p, gv] = [p, u + gv].$$

Proposição 2.3.1. A operação de soma acima definida está bem definida.

Demonstração. Sejam p e q elementos da mesma fibra $\pi^{-1}(x)$. Então $p = q \cdot g \cdot g \in G$. Sejam também $(p, u) \sim (p', u')$ e $(q, v) \sim (q', v')$. Assim,

$$(p, u) \cdot g_1 = (p', u'), (q, v) \cdot g_2 = (q', v'), g_1, g_2 \in G$$

Portanto,

$$(p', u') = (pg_1, g_1u)$$

$$(q', v') = (qg_2, g_2v)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} [p', u'] + [q', v'] &= [pg_1, g_1^{-1}u] + [qg_2, g_2^{-1}v] \\ &= [p, g_1g_1^{-1}u] + [q, g_2g_2^{-1}u] \\ &= [p, u] + [q, v] \end{aligned}$$

□

Seja $x \in M$ e escolhamos um elemento $p \in P$.

Proposição 2.3.2. *A função*

$$\varphi_p : V \rightarrow E(P, V)_x$$

$$\varphi_p(v) = [p, v]$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais:

Demonstração. Decorre diretamente da proposição anterior. □

2.3.1 Seções em fibrados associados.

Seja $E(P, F)$ um fibrado associado.

Consideremos o espaço das funções suaves equivariantes $C^\infty(P, F)^G = \{f \in C^\infty(P, F) : f(p \cdot g) = g^{-1} \cdot f(p)\}$.

Proposição 2.3.3. *A função: $\gamma : C^\infty(P, F)^G \rightarrow \Gamma(E(P, F))$, $\gamma(f)(x) = [p, f(p)]$, onde $p \in Px$, é uma bijeção.*

Demonstração. A função γ está bem definida: seja $q \in P_x$. Então $q = pg$. Assim

$$\begin{aligned} [q, f(q)] &= [pg, f(pg)] \\ &= [pg, g^{-1}f(p)] \\ &= [p, f(p)] \end{aligned}$$

Provemos que γ é injetora:

$$\gamma(f)(p) = \gamma(f')(p) \Rightarrow [p, f(p)] = [p, f'(p)] \Rightarrow f(p) = f'(p), \forall p \in P \Rightarrow f' = f$$

Provemos que γ é sobrejetora: seja $\sigma \in \Gamma(E(P, F))$. Então $\sigma(x) = [p_0, v_0]$, $p_0 \in P_x$.

Seja $q \in P_x$, de modo que $q = p_0 g$. Assim

$$\begin{aligned} [p_0, v_0] &= [qg^{-1}, v_0] \\ &= [q, g^{-1}v_0] \end{aligned}$$

Definindo $f_\sigma(q) = g^{-1}v_0$, obtemos $\sigma(x) = [q, f_\sigma(v)] = \gamma(f)(x)$.

□

Definição 2.3.1. *Seja M uma variedade. Um **fibrado vetorial de posto k** sobre M consiste de uma sobrejeção $\pi : E \rightarrow M$, em que E é uma variedade e em torno de cada $x_0 \in M$ pode-se encontrar um aberto U e um isomorfismo para o qual seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

o que induz estrutura de espaço vetorial nas fibras.

Exemplo 2.3.1. *O fibrado vetorial $p_1 : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$, $p_1(x, v) = x$ é o chamado fibrado trivial.*

Definição 2.3.2. *Dado um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ uma **seção** é uma função suave $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$, ou seja, $s(x) \in E_x$. O conjunto das seções de um fibrado vetorial é denotado por $\Gamma(E)$.*

Exemplo 2.3.2. *O fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$, onde $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ e $\pi(x, v) = x \in M$ é um fibrado vetorial. As fibras $\pi^{-1}(x)$ são exatamente os espaços tangentes $T_x M$. Se $(U, \phi) = (U, (x_1, \dots, x_n))$ é uma carta local para M , com $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ então definimos a seguinte função:*

$$\Phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_U \left(x, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = (x, (v_1, \dots, v_n))$$

esta função é um difeomorfismo e, portanto, uma trivialização local de TM .

Se restringirmos Φ_U ao espaço tangente $T_p M$, obtemos:

$$\Phi_U|_{T_x M} : T_p M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_U \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = (v_1, \dots, v_n)$$

é um isomorfismo linear, de modo que cumprem-se as condições de fibrado vetorial para o fibrado tangente.

Definição 2.3.3. *Um referencial em $x \in M$ é uma coleção de seções $\{s_1, \dots, s_k\}$ de E tais que $\{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$ é base de E_x .*

Dada $s \in \Gamma(E)$ e $\{s_1, \dots, s_k\}$ um referencial em $x \in U$ aberto em M , então podemos expressá-la como:

$$s(x) = f_1(x)s_1(x) + \dots + f_k(x)s_k(x)$$

em que f_i são funções suaves em U .

2.3.2 Pullback de fibrados vetoriais.

Sejam $\pi : E \rightarrow N$ um fibrado vetorial de posto k e $f \in C^\infty(M, N)$.

Definição 2.3.4. *O fibrado pullback de $\pi : E \rightarrow N$ por f , denotado por f^*E , é definido como:*

$$(f^*E) = \{(x, p) \in M \times E : f(x) = \pi(p)\}$$

com a projeção $pr_1 : f^*E \rightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Seja $V \subseteq N$ um aberto em torno de $y = f(x)$, trivializante. Então existe $\psi : E_V \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local do fibrado $\pi : E \rightarrow N$, com $\psi(p) = (\pi(p), \eta(p))$, $\eta : E_{\pi(p)} \rightarrow \mathbb{R}^k$, difeomorfismo nas fibras.

Consideremos

$$\bar{\psi} : pr_2^{-1}(f^{-1}(V)) \rightarrow f^{-1}(V), \bar{\psi}(x, p) = (x, \eta(p))$$

Estas são trivializações locais do fibrado pullback.

Observação 4. *Em termos de fibras, $(f^*E)_x \simeq E_f(x)$.*

Observação 5. *As seções em E induzem seções em f^*E da seguinte maneira:*

$$(f^*s)(x) = s(f(x))$$

Se $s \in \Gamma(E)$ então $f^*s = s \circ f : M \rightarrow E$ é de fato uma seção pois $(f^*s)(x) = s(f(x)) \in E_{f(x)} = (f^*E)_x$.

Lema 2.3.1. *Seja $\alpha \in \Gamma(f^*E)$ e U um aberto em M em torno de x . Então $\alpha(x) = \sum_{i=1}^k u_i(x)(f^*s_i)(x)$, onde $\{s_i\}_{i=1}^k$ é um referencial de x e $u_i \in C^\infty(U)$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \Gamma(f^*E)$, Então $\alpha(x) \in (f^*E)_x = E_{f(x)}$ com $x \in M$. Seja também $x \in M$ com $\{s_i\}_{i=1}^k$ um referencial em torno de $f(x)$. Dessa forma, existem $u_1, \dots, u_k \in C^\infty(U)$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{i=1}^k u_i s_i(f(x)) \\ &= \sum_{i=1}^k u_i (f^*s_i)(x) \end{aligned}$$

□

2.3.3 Fibrados vetoriais como fibrados associados.

Fibrado referencial.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial de posto k . Vimos que um referencial $\{s_i\}_{i=1}^k$ em $x \in M$ é uma base de E_x , que pode ser visto como um isomorfismo

$$\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$$

$$e_i \mapsto s_i(x)$$

em que $\{e_1, \dots, e_k\}$ é a base de canônica de $\mathbb{R}^k$.

Se $g \in GL_k(\mathbb{R})$ então $\phi \circ g : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ continua sendo um isomorfismo e assim $\phi \circ g$ também é um referencial.

Seja $Fr(E) = \{(x, \phi) : \phi \text{ é um referencial de } E_x\}$, o chamado fibrado referencial.

Definindo esta composição como uma ação à direita de $GL_k(\mathbb{R})$ sobre $Fr(E)$, então $\bar{\pi} : Fr(E) \rightarrow M$ com $\bar{\pi} = pr_1$, é um $GL_k(\mathbb{R})$ -fibrado principal, cujas fibras sobre x são $Fr(E)_x = \{\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow E_x \text{ referencial}\}$

Seja $x \in M$ e U um aberto em torno de x de modo que existe $\psi_U : E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local do fibrado. Então $\psi_U|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo de maneira a ser um referencial.

Dessa forma, $\psi_U \circ \phi \in GL_k(\mathbb{R})$. A função:

$$\Psi_U : Fr(E)|_U \rightarrow U \times GL_k(\mathbb{R})$$

$$(x, \phi) \mapsto (x, \psi_U \circ \phi)$$

Quando $E = TM$, denotamos $Fr(TM)$ por, simplesmente, $Fr(M)$.

Proposição 2.3.4. *Todo fibrado vetorial é um fibrado associado para algum fibrado principal.*

Demonstração. Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial de posto k . Então o fibrado referencial $pr_1 : Fr(E) \rightarrow M$ é um $GL_k(\mathbb{R})$ -fibrado principal.

Então $E(Fr(E), \mathbb{R}^n)$ é o fibrado associado ao fibrado referencial, aplicação

$$f : E(Fr(E), \mathbb{R}^k) \rightarrow E$$

$$[\phi, v] \mapsto \phi(v)$$

é um isomorfismo entre E e o fibrado associado. □

2.4 Conexões em fibrados principais.

2.4.1 Espaço vertical.

Seja $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal e a sua diferencial em $p \in P$, $(d\pi)_p : T_p P \rightarrow T_{\pi(p)} M$.

Definição 2.4.1. *O espaço vertical em p é definido por*

$$V_p = \ker(d\pi)_p \subseteq T_p P.$$

Observação 6. Se $x = \pi(p)$, os elementos do espaço vertical V_p são exatamente os vetores tangentes à fibra P_x , ou seja $V_p = T_p(P_x)$.

Proposição 2.4.1. Existe um isomorfismo entre $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G , e V_p .

Demonstração. Vamos definir a ação infinitesimal de $\mathfrak{g}$ em P :

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{X}(P) \\ \psi_p(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \exp(t\xi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

A correspondência $p \mapsto \psi_p(\xi)$ é o chamado campo vetorial fundamental gerado por ξ

Observemos que $\psi_P(\xi)$ é vertical:

$$\begin{aligned} \pi_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \exp(t\xi) \right) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\underbrace{p \exp(t\xi)}_{\in G}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então, a imagem da aplicação ψ está contida em V_p . Seja $p \in \pi^{-1}(x)$.

A aplicação

$$\phi_p : G \rightarrow P_x$$

$$g \mapsto pg$$

é um difeomorfismo tal que $d\phi_p = \psi_p$. Observando o diagrama a seguir, com δ e Δ como em 2.2 e 2.3, respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \xrightleftharpoons[\Delta]{\delta} & P \times_M P \\ \uparrow \scriptstyle g \mapsto (p,g) & \begin{array}{c} \downarrow \scriptstyle pr_2 \\ \downarrow \scriptstyle pr_2 \end{array} & \uparrow \scriptstyle i \\ G & \xrightarrow{\phi_p} & P_x \end{array}$$

vemos que ϕ_p é um suave pois

$$\phi_p = pr_2 \circ \delta \circ f$$

que é uma composição de funções suaves e sua inversa é $pr_2 \circ \Delta \circ i$ que é

suave pelo mesmo motivo. Assim, ϕ_p é um difeomorfismo. Desse modo, sua diferencial em p , que é ψ_p , é um isomorfismo linear. Desse modo,

$$\mathfrak{g} \simeq V_p.$$

□

2.4.2 Conexões em fibrados principais e espaços horizontais.

Definição 2.4.2. Uma **conexão** em um G -fibrado principal é uma distribuição em P , ou seja, um subfibrado $H \subseteq TP$ em que

$$(a) \quad T_p P = V_p \oplus H_p$$

$$(b) \quad (dR_g)_p(H_p) = H_{pg}, g \in G$$

O espaço H_p é chamado de **espaço horizontal**.

Os elementos de V_p são chamados de **vetores verticais** e os elementos de H_p de **vetores horizontais**.

Proposição 2.4.2. A restrição $(d\pi)_p|_{H_p} : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ é um isomorfismo.

Demonstração. Temos que $(d\pi)|_{H_p}$ é injetora pois $\ker(d\pi_p) = V_p$ e $V_p \cap H_p = \{0\}$. Além disso,

$$\dim T_p P = \dim(\ker(d\pi)_p) + \dim(\text{Im}(d\pi)_p) = \dim V_p + \dim T_{\pi(p)}M$$

$$\dim T_p P = \dim V_p + \dim H_p$$

Desse modo

$$\dim H_p = \dim T_{\pi(p)}M$$

□

Proposição 2.4.3. Se H_p é um espaço horizontal, existe uma função

$$h_p : T_{\pi(p)}M \rightarrow T_p P$$

chamada de **levantamento horizontal** tal que

$$(d\pi)_p \circ h_p = Id$$

e cuja imagem é H_p

Demonstração. Como $(d\pi)_p|_{H_p} : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ é um isomorfismo, existe sua inversa $h : T_{\pi(p)}M \rightarrow H_p$.

A função h_p obtém-se justamente quando se estende o contradomínio de h até T_pP .

□

2.4.3 Formas de conexão.

Definição 2.4.3. Uma 1-forma de conexão em P é uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tal que:

1. $\omega_p(\psi_p(\xi)) = \xi$.
2. $R_g^*(\omega) = Ad_{g^{-1}}(\omega)$

Exemplo 2.4.1 (Retirado de [Dup03]). Considere o G -fibrado principal trivial $\pi : M \times G \rightarrow M$, $\pi(x, g) = pr_1(x, g) = x$.

Vamos definir

$$\omega_{MC} : T_{(p,g)}M \times G \rightarrow T_eG = \mathfrak{g}$$

$$\omega_{MC} = (L_{g^{-1}} \circ pr_2)_*$$

onde $pr_2 : M \times G \rightarrow G$, com $pr_2(x, g) = g$ e $L_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ em que $L_{g^{-1}}(h) = g^{-1}h$. Esta é a chamada **forma de Maurer-Cartan**.

Observemos que

$$\begin{aligned} \omega_{MC} &= (L_{g^{-1}} \circ pr_2)_* \\ &= (L_{g^{-1}})_* \circ (pr_2)_* \\ &= (pr_2)^*((L_{g^{-1}})_*) \\ &= (pr_2)^*\theta, \theta_g = (L_{g^{-1}})_* \end{aligned}$$

Além disso, $R_g^*\omega_{MC} = R_g^* \circ pr_2^*\theta = pr_2^* \circ R_g^*\theta$. Vamos provar a segunda condição da definição para θ :

$$\begin{aligned} R_g^*(\theta)_h &= \theta_{hg} \circ (R_g)_* = (L_{(hg)^{-1}})_* \circ (R_g)_* \\ &= (L_{g^{-1}})_*(L_{h^{-1}})_* \circ (R_g)_* = Adg^{-1}(L_{h^{-1}})_* \\ &= Adg^{-1}\theta_g \end{aligned}$$

Lema 2.4.1. *Sejam $\pi : P \rightarrow M$ e $\pi' : P' \rightarrow M'$ dois G -fibrados principais e $f : P \rightarrow P'$ um difeomorfismo. Se ω' é uma 1-forma de conexão em P' , então $f^*\omega'$ é uma 1-forma de conexão em P .*

Demonstração. Vamos mostrar que $f^*\omega'$ é de fato uma 1-forma de conexão.

1. Como ω' é 1-forma de conexão então: $\omega'_{f(p)}(\psi_{f(p)}(v)) = v$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} (f^*\omega')_p(\psi_p(v)) &= \omega'_{f(p)}(df_p(\psi_p(v))) \\ &= \omega'_{f(p)}(\psi_{f(p)}(v)) \\ &= v \end{aligned}$$

2. $R_g^*(\omega') = Ad_{g^{-1}}(\omega')$. Então, se $X_p \in T_pP$,

$$\begin{aligned} R_g^*(\omega'_{f(p)})(df_p(X_p)) &= Ad_{g^{-1}}(\omega')(df_p(X_p)) \Rightarrow \\ R_g^*(f^*\omega')_p(X_p) &= Ad_{g^{-1}}(f^*\omega')_p(X_p), \forall X_p \in T_pP \Rightarrow \\ R_g^*(f^*\omega') &= Ad_{g^{-1}}(f^*\omega') \end{aligned}$$

□

Proposição 2.4.4. *Todo G -fibrado principal admite uma 1-forma de conexão.*

Demonstração. (Baseado em [Dup03])

Seja $\{U_\lambda\}$ uma cobertura de abertos trivializantes de M e sejam Ψ_λ as respectivas trivializações. Pelo exemplo 1.4.1, existe uma 1-forma de conexão ω_λ em $U_\lambda \times G$. Então, pelo lema, $\Psi_\lambda^*\omega_\lambda$ é uma conexão em $E|_{U_\lambda}$.

Seja $\{\rho_\lambda\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura. Definamos:

$$\omega = \sum_{\lambda} \rho_\lambda \Psi_\lambda^* \omega_\lambda.$$

Provemos que ω é uma 1-forma de conexão:

1. $\omega_p(\psi_p(v)) = \sum_{\lambda} \rho_\lambda(p)(\Psi_\lambda^*(\omega_\lambda)_p(\psi_p(v))) = \sum_{\lambda} \rho_\lambda(p)(v) = v$

2.

$$\begin{aligned}
R_g^*(\omega) &= R_g^*\left(\sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \Psi_{\lambda}^* \omega_{\lambda}\right) = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \Psi_{\lambda}^* \omega_{\lambda} ((R_g)_*) \\
&= \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} R_g^*(\Psi_{\lambda}^* \omega_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} (Ad_{g^{-1}}(\Psi_{\lambda}^* \omega_{\lambda})) \\
&= (Ad_{g^{-1}}(\sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \Psi_{\lambda}^* \omega_{\lambda})) = Ad_{g^{-1}}(\omega)
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.4.5. *Existe uma correspondência 1-1 entre conexões $H \subseteq TP$ e 1-formas de conexão $\omega \in \Omega(P, (g))$.*

Demonstração. Seja H uma conexão. Se $X \in \mathfrak{X}(P)$ então $X_p = X_p^V + X_p^H$ com $X_p^V \in V_p$ e $X_p^H \in H_p$. Definamos $\omega^H \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tal que

$$\omega_p^H(X_p) = \psi_p^{-1}(X_p^V) \in \mathfrak{g}$$

Essa é uma forma 1-forma de conexão pois:

1. $\omega_p^H(\psi_p(\xi)) = \psi_p^{-1}(\psi_p(\xi)) = \xi$
2. Se X é horizontal, vale a condição (2) da definição. Se X é vertical, então $X = \psi_p(\xi), \xi \in \mathfrak{g}$ e

$$\begin{aligned}
(R_g)_p^*(\omega_p^H(X)) &= \omega_{pg}^H((R_g)_*(\psi_p(\xi))) \\
&= \omega_{pg}^H(\psi_{pg}(Ad_{g^{-1}}\xi)) \\
&= Ad_{g^{-1}}(\xi) \\
&= Ad_{g^{-1}}\omega(\psi_p(\xi)) \\
&= Ad_{g^{-1}}(\omega(X))
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ é uma 1-forma de conexão então:

$$\ker(\omega_p) = \{X_p \in T_p P : \omega(X_p) = 0\}$$

é um espaço horizontal.

Sabemos que $\omega_p : T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ é linear. Além disso, pela condição 1 da definição de 1-forma de conexão, temos que $V_p \subseteq \text{Im}(\omega)_p \subseteq \mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g} \simeq V_p$

(Proposição 1.4.1) então $Im(\omega_p) = \mathfrak{g}$. Desse modo

$$\begin{aligned} \dim(ker(\omega_p)) &= \dim T_p P - \dim \mathfrak{g} \\ &= \dim T_p P - V_p \end{aligned}$$

Seja $X_p \in ker(\omega_p)$. Então:

$$\omega_{pg}((R_g)_*\omega)(X_p) = ((R_g)^*\omega_p)(X_p) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X_p)) = 0$$

Portanto $(dR_g)_p(X_p) \in H_{pg} = ker(\omega_{pg})$

Partindo de uma conexão H e construindo a correspondente 1-forma de conexão ω como descrita acima, então $X_p \in ker(\omega_p)$ se $\omega(X_p) = 0$. Mas isso ocorre se, e somente se, $\psi_p^{-1}(X_p^V) = 0$. Isso significa que $X_p^V = 0$, de modo que X_p é um vetor horizontal, ou seja, $X_p \in H_p$. Dessa forma, a correspondência entre conexões e 1-forma de conexões é uma bijeção. $\square$

2.4.4 Transporte paralelo em fibrados principais

Definição 2.4.4. *Seja $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva. Um **levantamento** de γ é uma curva $\tilde{\gamma} : I \rightarrow P$ tal que $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$*

Definição 2.4.5. *Se $\pi : P \rightarrow M$ é um G -fibrado principal e $H \subseteq TP$ uma conexão, uma curva $\tilde{\gamma} : I \rightarrow P$ é **horizontal** se $\tilde{\gamma}'(t) \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$.*

Definição 2.4.6. *Um **levantamento horizontal** de $\gamma : I \rightarrow M$ é um levantamento $\tilde{\gamma} : I \rightarrow P$ que é uma curva horizontal em P .*

Lema 2.4.2. *Seja $X : [t_0, t_1] \rightarrow \mathfrak{g}$ uma curva. Então existe uma única curva suave $g : [t_0, t_1] \rightarrow G$ tal que $g'(t)g(t)^{-1} = X(t), \forall t \in [t_0, t_1]$.*

Demonstração. Ver [KN63], páginas 69 e 70. $\square$

Lema 2.4.3. *Seja $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ uma curva sobre M . Então para $p_0 \in P_{\gamma(t_0)}, t_0 \in I$, existe um único levantamento horizontal $\tilde{\gamma} : I \rightarrow P$ de γ em P tal que $\tilde{\gamma}(t_0) = p_0$*

Demonstração. (Retirado de [KN63])

Seja $\beta : [t_0, t_1] \rightarrow M$ uma curva tal tal que $\pi(\beta) = \gamma$ e $\beta(t_0) = p_0$. Então $\tilde{\gamma}(t) = \beta(t)g(t)$ é uma levantamento de γ , com $g : [t_0, t_1] \rightarrow G$ uma curva em G tal que $g(t_0) = e$. Então

$$\tilde{\gamma}'(t) = \beta'(t)g(t) + \beta(t)g'(t)$$

Seja ω uma 1-forma de conexão em P . Assim

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{\gamma}'(t)) &= \omega(\beta'(t)g(t)) + \omega(\beta(t)g'(t)) \\ &= \omega(R_{g(t)}(\beta'(t)) + \omega(\beta(t)g'(t)) \\ &= Ad_{g(t)^{-1}}\omega(\beta'(t)) + g(t)^{-1}g'(t)\end{aligned}$$

A curva $\tilde{\gamma}$ é horizontal se $\omega(\tilde{\gamma}'(t)) = 0$, isto é

$$Ad_{g(t)^{-1}}\omega(\beta'(t)) + g(t)^{-1}g'(t) = 0$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}g(t)^{-1}g'(t) &= -Ad_{g(t)^{-1}}\omega(\beta'(t)) \Rightarrow \\ Ad_{g(t)}(g(t)^{-1}g'(t)) &= Ad_{g(t)}(-Ad_{g(t)^{-1}}\omega(\beta'(t))) \Rightarrow \\ g'(t)g(t)^{-1} &= -\omega(\beta'(t))\end{aligned}$$

E a solução existe de acordo com o lema anterior. $\square$

Definição 2.4.7. *O transporte paralelo ao longo de $\gamma : I \rightarrow M$, do tempo $t_0 \in I$ ao tempo $t_1 \in I$ é a função*

$$\mathcal{P}_\gamma^{t_0, t_1} : P_{\gamma(t_1)} \rightarrow P_{\gamma(t_0)}$$

$$\mathcal{P}_\gamma^{t_0, t_1}(p_0) = \tilde{\gamma}(t_1)$$

com $\tilde{\gamma}$ o único levantamento horizontal de γ tal que $\tilde{\gamma}(t_0) = p_0$.

2.4.5 Curvatura.

Consideremos o colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ da álgebra e Lie $\mathfrak{g}$. Ele se estende a um colchete

$$[\cdot, \cdot] : \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \times \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^2(P, \mathfrak{g})$$

$$[u, v](X, Y) = [u(X), v(Y)] - [u(Y), v(X)]$$

Sejam $X, Y \in TP$ que podemos estender a $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(P)$. Podemos considerar a parte horizontal destes campos vetoriais $\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H \in \Gamma(H)$, H uma conexão.

Definição 2.4.8. *Se ω é uma 1-forma de conexão em P então a forma curvatura é $R\omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ tal que*

$$R\omega(X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) \quad (2.5)$$

Proposição 2.4.6. $R\omega = 0 \iff [\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H]$ é horizontal (ou seja, a forma curvatura mede a falha na integrabilidade de distribuições horizontais.)

Demonstração. Temos que $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y]$. Então

$$d\omega(X^H, Y^H) = \tilde{X}^H\omega(\tilde{Y}^H) - \tilde{Y}^H\omega(\tilde{X}^H) - \omega[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H] = -\omega[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H]$$

Se $[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H]$ é horizontal, então $\omega[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H] = 0$, de modo que $R\omega = 0$.

Se $R\omega = 0$, então $\omega[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H] = 0$, o que significa que $[\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H]$ é horizontal. $\square$

Proposição 2.4.7.

$$R\omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) \quad (2.6)$$

Demonstração. Primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &= 2[\omega(X), \omega(Y)] \end{aligned}$$

Desse modo,

$$d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

Então, devemos provar que

$$d\omega(X^H, Y^H) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$$

Agora, vamos considerar três casos:

- X e Y horizontais ($X = X^H, Y = Y^H$): então $\omega(X) = \omega(Y)$ de modo que

$$d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = d\omega(X^H, Y^H) = R\omega(X, Y)$$

- X e Y são verticais: então existem $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$ tais que $\psi(\alpha) = X$ e $\psi(\beta) = Y$. Então

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y] + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &= X\omega(\psi(\beta)) - Y\omega(\psi(\alpha)) - \omega[\psi(\alpha), \psi(\beta)] - [\omega(\psi(\alpha)), \omega(\psi(\beta))] \\ &= -\omega(\psi([\alpha, \beta])) + [\alpha, \beta] \\ &= [\alpha, \beta] + [\alpha, \beta] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, $d\omega(X^H, Y^H) = 0$ pois X e Y são verticais, de modo que

- X vertical e Y horizontal: novamente, podemos assumir que $X = \psi(\alpha), \alpha \in \mathfrak{g}$. Assim $d\omega(X^H, Y^H) = 0$ pois X é vertical.

Além disso,

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] &= d\omega(\psi(\alpha), Y) + \omega[\psi(\alpha), Y] + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &= \psi(\alpha)\omega(Y) - Y\omega(\psi(\alpha)) - \omega[\psi(\alpha), Y] + [\omega(\psi(\alpha)), \omega(Y)] \\ &= -\omega[\psi(\alpha), Y] \end{aligned}$$

Agora, precisamos provar que se V_p é vertical e H_p é horizontal, então $\omega[\tilde{V}, \tilde{H}] = 0$ Pelas fórmulas de Cartan

$$\begin{aligned} \omega[\tilde{V}, \tilde{H}] &= i_{[\tilde{V}, \tilde{H}]} \omega \\ &= [\mathcal{L}_{\tilde{V}}, i_{\tilde{H}}] \omega \\ &= i_{\tilde{H}} \mathcal{L}_{\tilde{V}} \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

2.5 Conexões em fibrados vetoriais.

Definição 2.5.1. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Uma conexão em E é uma função ∇*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

$$\nabla(X, s) = \nabla_X(s)$$

com as seguintes propriedades:

1. ∇ é $\mathbb{R}$ -bilinear;
2. $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$;
3. $\nabla_X(gs) = g\nabla_X(s) + X(g)s$

com $f, g \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$

Lema 2.5.1. *O fibrado vetorial trivial admite uma conexão.*

Demonstração. Se $E = M \times \mathbb{R}^k$ então $\Gamma(E) = C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$. Assim, podemos definir a seguinte conexão

$$\nabla_X(s) = ds(X) \tag{2.7}$$

As propriedades de conexão decorrem todas das propriedades da diferencial ds . □

Lema 2.5.2. *Se ∇^1 e ∇^2 são ambas conexões sobre fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ e λ_1, λ_2 são funções suaves em M tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Então $\lambda_1 \nabla^1 + \lambda_2 \nabla^2$ é uma conexão sobre o mesmo fibrado vetorial.*

Demonstração. A $\mathbb{R}$ -bilinearidade de $\nabla := \lambda_1 \nabla^1 + \lambda_2 \nabla^2$ advém do fato de ela ser combinação de duas funções bilineares.

Seja $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} \nabla_f X(s) &= \lambda_1 \nabla_f^1 X(s) + \lambda_2 \nabla_f^2 X(s) \\ &= \lambda_1 f \nabla_X^1(s) + \lambda_2 f \nabla_X^2(s) \\ &= f(\lambda_1 \nabla_X^1(s) + \lambda_2 \nabla_X^2(s)) \\ &= f \nabla_X(s) \end{aligned}$$

Seja $g \in C^\infty(M)$. Então:

$$\begin{aligned}
 \nabla_X(gs) &= \lambda_1 \nabla_X^1(gs) + \lambda_2 \nabla_X^2(gs) \\
 &= \lambda_1[X(g)s + g\nabla_X^1(s)] + \lambda_2[X(g)s + g\nabla_X^2(s)] \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2)X(g)s + g[\lambda_1 \nabla_X^1(s) + \lambda_2 \nabla_X^2(s)] \\
 &= X(g)s + g(\lambda_1 \nabla_X^1 + \lambda_2 \nabla_X^2)_X(s) \\
 &= X(g)s + g\nabla_X(s)
 \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5.1. *Todo fibrado vetorial admite conexão.*

Demonstração. Consideremos uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}$ de M de modo que E_{U_λ} é trivializável e consideremos $\{\rho_\lambda\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura anterior. Sejam ∇ a conexão sobre E_λ . Então

$$\nabla_X(s) := \sum_\lambda \rho_\lambda \nabla_{X|_{U_\lambda}}(s|_{U_\lambda})$$

□

Proposição 2.5.2. *Seja ∇ uma conexão sobre um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow P$ e $s, s' \in \Gamma(E)$ seções tais que $s|_U, s'|_U$, e X e X' campos vetoriais tais que $X|_U = X'|_{U'}$, em U vizinhança aberta de $p \in M$. Então:*

$$\nabla_X(s)|_U = \nabla_{X'}(s')|_U$$

Demonstração. . A bilinearidade da conexão reduz a prova à duas situações:

1. se $s|_U = 0$ então $\nabla_X(s) = 0$ para toda $X \in \mathfrak{X}(M)$.
2. se $X|_U = 0$ então $\nabla_X(s) = 0$ para toda $s \in \Gamma(E)$.

Seja $\eta : U \rightarrow [0, 1]$ uma "bump function". Então:

1. $s|_U = 0 \Rightarrow \eta s|_U = 0$. Então, para $x_0 \in U$,

$$\begin{aligned}
 \nabla_X \eta s(x_0) &= 0 \Rightarrow \\
 (X(\eta) + \eta \nabla_X s)(x_0) &= 0 \Rightarrow \\
 \eta(x_0) \nabla_X s(x_0) &= 0 \Rightarrow \\
 \nabla_X s(x_0) &= 0
 \end{aligned}$$

2. $s|_U = 0 \Rightarrow \eta s|_U = 0$. Então, para $x_0 \in U$,

$$\begin{aligned}\eta X &= 0 \Rightarrow \\ \nabla_X \eta s(x_0) &= 0 \Rightarrow \\ (\eta \nabla_X s)(x_0) &= 0 \Rightarrow \\ \eta(x_0)(\nabla_X s)(x_0) &= 0 \Rightarrow \\ (\nabla_X s)(x_0) &= 0\end{aligned}$$

□

Definição 2.5.2. *Seja f^*E um fibrado pullback. Definimos a conexão pullback como*

$$(f^*\nabla)_Y(f^*s) = f^*(\nabla_{df(Y)}s)$$

para $Y \in \mathfrak{X}(N)$ e $s \in \Gamma(E)$.

Observação 7. *Seja $\alpha \in \Gamma(f^*E)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Então $\alpha = \sum u_i(f^*s_i)$, $s_i \in \Gamma(E)$ e*

$$\begin{aligned}(f^*\nabla)_Y \alpha &= (f^*\nabla)_Y \sum u_i(f^*s_i) \\ &= \sum (Y(u_i)(f^*s_i) + u_i(f^*\nabla)_Y(f^*s_i)) \\ &= \sum (Y(u_i)(f^*s_i) + u_i(f^*(\nabla)_Y s_i))\end{aligned}$$

Observação 8. *Dado um fibrado vetorial E de posto k e ∇ uma conexão em E , então se $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ é um referencial local para um aberto $U \subseteq M$ podemos escrever*

$$\nabla_X(\varepsilon_j) = \sum_{i=1}^k \omega_{ij} \varepsilon_j$$

de modo que a conexão fica determinada pela matriz

$$\mu(\nabla, \varepsilon) = [\mu_{ij}],$$

onde $\mu_{ij} \in \Omega^1(U)$. Esta matriz é chamada de **matriz da conexão**

2.5.1 Transporte paralelo em fibrados vetoriais.

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva. Se fizermos a construção do fibrado pullback de E por γ , obtemos $\gamma^*(E) = \{(t, p) \in I \times E : \gamma(t) = \pi(p)\}$. Uma seção $\alpha \in \Gamma(\gamma^*(E))$ é uma curva $\alpha : I \rightarrow \gamma^*(E)$ com $\alpha(t) \in \gamma^*(E)_t = E_{\gamma(t)}$, ou seja, $\pi(\alpha(t)) = \gamma(t)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma^*(E) & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow \alpha & \nearrow & \downarrow \pi \\
 I & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & M
 \end{array}$$

Definição 2.5.3. Uma seção $\alpha \in \Gamma(\gamma^*(E))$ é chamada de **seção ao longo de γ** .

Exemplo 2.5.1. Se σ é uma seção de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva em M , então $\sigma \circ \gamma : I \rightarrow E$ é uma seção de E ao longo de γ .

Definição 2.5.4. Seja $\alpha \in \Gamma(\gamma^*E)$. A derivada covariante com respeito a conexão ∇ ao longo de γ é definida como

$$\frac{\nabla \alpha}{dt} = (\gamma^* \nabla)_{\frac{d}{dt}} \alpha$$

Definição 2.5.5. Uma seção α sobre γ é **paralela** com respeito a ∇ se $\frac{\nabla \alpha}{dt} = 0, \forall t \in I$.

Lema 2.5.3. Seja $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial e ∇ uma conexão sobre ele com γ uma curva suave em M , definida em I . Então existe uma única seção α sobre γ que é paralelo e $\alpha(t_0) = \alpha_0 \in E_{\gamma(t_0)}, t_0 \in I$.

Demonstração. Seja U um aberto em M de modo que E_U é trivializável. Seja $\{s_1, \dots, s_k\}$ um referencial de $E|_U$. Então existem funções $f_i \in C^\infty(I)$ de modo que $\alpha \in \Gamma(\gamma^*(E))$ expressa-se com

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t) s_i(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^k f_i(t) (\gamma^* s_i)(t)$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla \alpha}{dt} &= (\gamma^* \nabla) \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^k f_i(t) s_i(\gamma(t)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{df_i(t)}{dt} (\gamma^* s_i)(t) + \sum_{i=1}^k f_i(t) (\gamma^* \nabla) \frac{d}{dt} (\gamma^* s_i)(t) \\
&= \sum_{i=1}^k f'_i(t) s_i(\gamma(t)) + \sum_{i=1}^k f_i(t) \sum_{j=1}^k g_j^i s_j(\gamma(t)) \\
&= \sum_{i=1}^k \left(f'_i(t) + \sum_{j=1}^k f_j(t) g_j^i \right) s_i(\gamma(t))
\end{aligned}$$

com $(\gamma^* \nabla) \frac{d}{dt} (\gamma^* s_i)(t) = \sum_{j=1}^k g_j^i s_j(\gamma(t))$, $g_j^i \in C^\infty(I)$ já que $(\gamma^* \nabla) \frac{d}{dt} (\gamma^* s_i) \in \Gamma(\gamma^*(E))$.

Se α é paralelo, então $\frac{\nabla \alpha}{dt} = 0$ e, consequentemente

$$f'_i(t) + \sum_{j=1}^k f_j(t) g_j^i = 0 \Rightarrow f'_i(t) = - \sum_{j=1}^k f_j(t) g_j^i$$

para cada $i = 1, \dots, k$ com $\alpha(t_0) = \alpha_0$

Este é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, cuja solução única é garantida pelo Teorema de Existência e Unicidade. $\square$

Definição 2.5.6. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva em M . O **transporte paralelo** ao longo de $\gamma : I \rightarrow M$, do tempo $t_0 \in I$ ao tempo $t_1 \in I$ com respeito a conexão ∇ é a função*

$$\mathcal{P}_\gamma^{t_0, t_1} : \pi^{-1}(\gamma(t_0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(t_1))$$

$$\mathcal{P}_\gamma^{t_0, t_1}(\alpha_0) = \alpha_1$$

com α a única seção ao longo de γ paralela sobre γ tal que $\alpha(t_0) = \alpha_0$.

2.6 Curvatura e torção.

2.6.1 Curvatura.

Definição 2.6.1. Se ∇ é uma conexão sobre um fibrado vetorial, a função

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

$$R(X, Y)(s) = \nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_X(s) - \nabla_{[X, Y]}(s) \quad (2.8)$$

é chamada de **curvatura de ∇** .

Proposição 2.6.1. $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E)$

Demonstração. Provar que $R \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E)$ significa provar que R é tensorial e antissimétrica.

1. A linearidade de cada parcela é consequência da linearidade da conexão e do colchete.
2. Sendo $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} R(fX, Y)(s) &= \nabla_{fX} \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_{fX}(s) - \nabla_{[fX, Y]}(s) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y f \nabla_X(s) + \nabla_{[Y, fX]}(s) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y(s) - Y(f) \nabla_X(s) - f \nabla_Y \nabla_X(s) + \nabla_{Y(f)X + f[X, Y]}(s) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y(s) - Y(f) \nabla_X(s) - f \nabla_Y \nabla_X(s) + Y(f) \nabla_X(s) + f \nabla_{[X, Y]}(s) \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_X(s) + \nabla_{[X, Y]}(s)) \\ &= fR(X, Y)(s) \end{aligned}$$

Analogamente prova-se que $R(X, fY) = fR(X, Y)$.

3. Sendo $g \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(gs) &= \nabla_X \nabla_Y(gs) - \nabla_Y \nabla_X(gs) - \nabla_{[X, Y]}(gs) \\ &= \nabla_X(Y(g)s + g \nabla_Y(s)) - \nabla_Y(X(g)s + g \nabla_X(s)) - [X, Y](g)s - g \nabla_{[X, Y]}(s) \\ &= XY(g)s + Y(g) \nabla_X(s) + X(g) \nabla_Y(s) + g \nabla_X \nabla_Y(s) \\ &\quad - YX(g)s - X(g) \nabla_Y(s) - Y(g) \nabla_X(s) - g \nabla_Y \nabla_X(s) \\ &\quad - XY(g)s + YX(g)s - g \nabla_{[X, Y]}(s) \\ &= g \nabla_X \nabla_Y(s) - g \nabla_Y \nabla_X(s) - g \nabla_{[X, Y]}(s) \\ &= gR(X, Y)(s) \end{aligned}$$

4. Vamos provar a antissimetria:

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)(s) &= \nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_X(s) - \nabla_{[X, Y]}(s) \\
 &= \nabla_X \nabla_Y(s) - \nabla_Y \nabla_X(s) + \nabla_{[Y, X]}(s) \\
 &= -(\nabla_Y \nabla_X(s) - \nabla_X \nabla_Y(s) + \nabla_{[Y, X]}(s)) \\
 &= -R(Y, X)(s)
 \end{aligned}$$

□

2.6.2 Torção

Ao trabalharmos com fibrados tangentes $\pi : TM \rightarrow M$, que são fibrados vetoriais, temos que $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$, de modo que uma conexão será uma função $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.6.2. *Dada uma conexão ∇ sobre um fibrado vetorial, a função*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (2.9)$$

é a torção de uma conexão ∇ .

Proposição 2.6.2. $T \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes TM)$

Demonstração. A linearidade sobre $\mathbb{R}$ em cada coordenada advém da linearidade da conexão e do colchete. Vamos provar que T é tensorial e antissimétrica:

$$\begin{aligned}
 T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] \\
 &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X + [Y, fX] \\
 &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X + Y(f)X + f[Y, X] \\
 &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f[X, Y] \\
 &= fT(X, Y)
 \end{aligned}$$

Analogamente prova-se que $T(X, fY) = fT(X, Y)$.

$$\begin{aligned}
T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= -\nabla_Y X + \nabla_X Y + [Y, X] \\
&= -(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X]) \\
&= -T(Y, X)
\end{aligned}$$

□

2.6.3 Quando a curvatura é zero.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Seja

$$\Omega^k(M, E) = \Gamma(\Lambda^k T^* M \otimes E)$$

e $\omega \in \Omega^p(M), \tau \in \Omega^q(M, E)$. Então

$$(\omega \wedge \tau)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \tau(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \quad (2.10)$$

com $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ e $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. Ou seja, $\Omega^\bullet(M, E)$ é um módulo sobre $\Omega^\bullet(M)$.

Definição 2.6.3. A *derivada exterior* é definida como o operador

$$d_\nabla : \Omega^\bullet(M, E) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M, E)$$

tal que

$$\begin{aligned}
d_\nabla(\tau)(X_0, \dots, X_q) &= \sum_0^q (-1)^i \nabla_{X_i} \tau(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q) + \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \tau([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$d_\nabla(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d_\nabla \tau \quad (2.11)$$

em que $|\omega|$ é o grau de ω . Agora, se é dado $d : \Omega^\bullet(M, E) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M, E)$, como obtemos uma conexão ∇ a ele associado?

Temos que $\Omega^0(M, E) = \Gamma(E)$. Desse modo, se $s \in \Gamma(E)$, então $ds \in \Omega^1(M, E)$. Definindo-se

$$\nabla_X(s) = ds(X),$$

temos:

- $\nabla_{fX}(s) = f ds(X) = f \nabla_X(s)$
- $\nabla_X(gs) = d(gs)(X) = (dg \wedge s)(X) + (-1)^0 g \wedge ds(X) = df(X)s + f \nabla_X(s)$

para f, g funções suaves em M . Assim, tal ∇ é uma conexão.

Exemplo 2.6.1. Se ∇ é uma conexão em $E = TM$, consideremos a 1-forma identidade $\mathbb{1} \in \Omega^1(M, TM)$.

Então

$$d_\nabla(\mathbb{1}) \in \Omega^2(M, TM) = \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes TM)$$

e

$$\begin{aligned} d_\nabla(\mathbb{1})(X_0, X_1) &= (-1)^0 \nabla_{X_0} X_1 + (-1)^1 \nabla_{X_1} X_0 + (-1)^{0+1} [X_0, X_1] \\ &= \nabla_{X_0} X_1 - \nabla_{X_1} X_0 - [X_0, X_1] \\ &= T(X_0, X_1) \end{aligned}$$

esta, a torção da conexão ∇ .

Vamos considerar agora o operador $d_\nabla^2 : \Omega^\bullet(M, E) \rightarrow \Omega^{\bullet+2}(M, E)$

Proposição 2.6.3. Seja ∇ uma conexão e ω uma k -forma. Então $d_\nabla^2(\omega) = R_\nabla \wedge \omega$

Demonstração. Se $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\tau \in \Omega^k(M, E)$, então

$$\begin{aligned} d_\nabla^2(\omega \wedge \tau) &= d_\nabla((d\omega) \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d_\nabla \tau) \\ &= d_\nabla((d\omega) \wedge \tau) (-1)^p d_\nabla(\omega \wedge d_\nabla \tau) \\ &= (d^2(\omega) \wedge \tau + (-1)^{p+1} d(\omega) \wedge d_\nabla(\tau)) + (-1)^p [d(\omega) \wedge d_\nabla(\tau) + (-1)^p \omega \wedge d_\nabla^2(\tau)] \\ &= \underbrace{d^2(\omega) \wedge \tau}_{=0} + (-1)^{2p} \omega \wedge d_\nabla^2(\tau) \\ &= \omega \wedge d_\nabla^2(\tau) \end{aligned}$$

Seja $s \in \Gamma(E)$ uma 0-forma. Então:

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^2 s(X, Y) &= d_{\nabla}(d_{\nabla} s)(X, Y) \\ &= \nabla_X(d_{\nabla} s(Y)) - \nabla_Y(d_{\nabla} s(X)) - \nabla_{[X, Y]} s \\ &= R_{\nabla} s(X, Y) \end{aligned}$$

Seja $\omega \in \Omega(M, E)$ e $\{s_1, \dots, s_k\}$ um referencial local de E então cujo domínio é U , então:

$$\omega|_U = \sum \omega_i^U s_i$$

com $\omega_i^U \in \Omega^k(U)$

Então,

$$\begin{aligned} d_{\nabla}^2 \omega|_U &= \sum \omega_i^U \wedge d_{\nabla}^2 s_i \\ &= \sum \omega_i^U \wedge R_{\nabla} s_i \\ &= \sum (-1)^{2k} R_{\nabla} \wedge \omega_i^U s_i \\ &= R_{\nabla} \wedge \omega|_U \end{aligned}$$

□

Corolário 2.6.1. $d_{\nabla}^2 = 0 \iff R_{\nabla} = 0$

2.6.4 Formas em fibrados associados

Consideremos $E(P, V)$ um fibrado associado.

Seja $\omega \in \Omega^1(P, V)$ tal que

$$\begin{cases} i_{\xi}(\omega) = 0, \text{ se } \xi \text{ é vertical;} \\ R_g^* \omega_p = g^{-1} \omega_{pg}. \end{cases}$$

Então ω induz $\bar{\omega} \in \Omega(M, E(P, V))$.

Definamos $\bar{\omega}_x(X) = [p, \omega_p(h_p X)]$, com $x = \pi(p)$, onde h_p é um levantamento horizontal. Vamos mostrar que está bem definida essa forma.

Primeiro vamos fixar a conexão. Então:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_x(X) &= [pg, \omega_{pg}(h_{pg}X)] \\
 &= [p, g\omega_{pg}(h_{pg}X)] \\
 &= [p, g\omega_{pg}(dR_g)_p(h_pX))] \\
 &= [p, gR_g^*\omega_p(h_pX)] \\
 &= [p, gg^{-1}\omega_p(h_pX)] \\
 &= [p, \omega_p(h_pX)]
 \end{aligned}$$

de modo que ω estava bem definida quanto ao representante na fibra.

Agora, mostremos que não há dependência da conexão: seja $\bar{\omega}'_x(X) = [p, \omega_p(h'_pX)]$; então:

$$[\bar{\omega}_x - \bar{\omega}'_x](X) = [p, \underbrace{\omega(h_pX - h'_pX)}_{\text{diferença de vetores horizontais é vertical}}] = [p, 0] \Rightarrow \bar{\omega} = \bar{\omega}'$$

2.7 Conexões induzidas em fibrados associados

Vamos considerar um G -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ e $\rho : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de G seja H é uma conexão em P .

Proposição 2.7.1. *H induz uma conexão no fibrado associado $E(P, V)$.*

Demonstração. (Baseado em [Bel]) Se diferenciarmos a ação em e , obtemos a aplicação $\bar{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$. Se tomarmos $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $[\cdot, \cdot]_{\text{End}(V)}$ o comutador em $\text{End}(V)$, então

$$[\bar{\rho}(X), \bar{\rho}(Y)]_{\text{End}(V)} = \bar{\rho}[X, Y].$$

Se $s \in \Gamma(E(P, V))$ e $\sigma \in \Gamma(U, P)$, U aberto em M , então vamos definir $u : U \rightarrow V$ tal que $s(x) = [\sigma(x), u(x)]$.

Definamos

$$\nabla(s) = [\sigma, \bar{\rho}(\sigma^*\omega)(u) + du]$$

onde ω a 1-forma de conexão associada a H .

Vamos provar que a definição acima independe da escolha da seção em U . Se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, P)$, então existe $g : U \rightarrow G$ tal que $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)g(x)$,

para $x \in U$. Além disso, correspondem , respectivamente a cada seção, u_1 e u_2 , de modo que $u_2 = \rho(g^{-1})u_1$

$$\begin{aligned} [\sigma_2, \bar{\rho}(\sigma_2^* \omega)(u_2) + du_2] &= [\sigma_1 g, \bar{\rho}((\sigma_1 g)^* \omega)(u_1) + d(\rho(g^{-1})u_2)] \\ &= [\sigma_1 g, \bar{\rho}(Ad_{\rho^{-1}}(\omega)(\rho(g^{-1})(u_1)) + \bar{\rho}(g^* \omega_{MC}(u_1)) - \\ &\quad - \bar{\rho}(g^* \omega_{MC}(u_1)) + \rho(g^{-1}(du_1)))] \\ &= [\sigma_1, \bar{\rho}(\sigma_1^* \omega)(u_1) + du_1] \end{aligned}$$

A regra de Leibniz é garantida pela presença de du na segunda coordenada da classe.

□

2.8 Redução do grupo estrutural

Seja $\pi : P \longrightarrow M$ um G -fibrado principal e G' um subgrupo de Lie G . Tal fibrado **admite uma redução de seu grupo estrutural a G'** se existe $P' \subseteq P$ tal que $\pi|_{P'} : P' \longrightarrow M$ é um H -fibrado principal

Exemplo 2.8.1. 1. Se $G' = \{e\}$ então uma redução será equivalente a uma trivialização .

2. Se $G' = O(n)$, então uma redução é a escolha de um produto interno.

3. Se $G' = GL_n^+(\mathbb{R})$, uma redução é a escolha de uma orientação.

Capítulo 3

G-estruturas

Nesse capítulo apresentaremos o que é uma G-estrutura e os principais exemplos.

Também discutiremos o conceito de carta adaptada à G-estrutura e de integrabilidade de G-estruturas. Esse é o conceito central que estamos estudando.

A curvatura e torção em G-estruturas são estruturas geométricas que podem nos ajudar na questão da integrabilidade.

No fim, com o auxílio da forma de Maurer-Cartan e a forma tautológica, vamos chegar a uma condição necessária de integrabilidade.

Esse capítulo também teve base em [\[Cra15\]](#)

3.1 G-estruturas em variedades

Definição 3.1.1. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ um subgrupo de Lie. Uma **G-estrutura** em M é subvariedade*

$$\mathcal{S} \subseteq Fr(M)$$

que é G-invariante e é um G-fibrado principal com relação à projeção $\pi : \mathcal{S} \rightarrow M$ e à ação induzida de G .

*Um elemento de $\mathcal{S}$ é denominado **G-referencial**.*

Definição 3.1.2. *Dadas uma carta local (U, φ) para M $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \right) \in \Gamma_U(Fr(M))$ é chamado de **referencial induzido**.*

Definição 3.1.3. Dada (U, φ) uma carta local e $\mathcal{S}$ uma G -estrutura. Se

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x) \right) \in \mathcal{S}_x, x \in U$$

o referencial é chamado de **adaptado** e respectiva carta local também é chamada **adaptada**. Uma G -estrutura é **integrável** se em torno de todo ponto $x \in M$ existe uma carta local adaptada.

3.1.1 Problema da equivalência de G -estruturas

Definição 3.1.4. Sejam duas G -estruturas $\mathcal{S}$ sobre M e $\bar{\mathcal{S}}$ sobre $\bar{M}$ e $f : M \rightarrow \bar{M}$ um difeomorfismo. A função f é **isomorfismo entre G -estruturas** se

$$\bar{\mathcal{S}}_{f(x)} = f_* \mathcal{S}_x$$

onde f_* é a função induzida por $d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$. No caso da existência de um isomorfismo, as G -estruturas $\mathcal{S}$ e $\bar{\mathcal{S}}$ são equivalentes.

Uma questão central da teoria de G -estruturas é o problema da equivalência local: quando existe um difeomorfismo local $f : U \rightarrow \bar{U}$, $U \subseteq M$ e $\bar{U} \subseteq \bar{M}$ abertos de modo que f_* seja um isomorfismo local entre G -estruturas.

A chamada G -estrutura padrão é aquela dada pelo referencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

em $\mathbb{R}^n$ e será denotada por $\mathcal{S}^{\text{stand}}$.

O problema da equivalência tem um caso particular que é a questão da integrabilidade. Esta procura as condições necessárias e suficientes da equivalência local entre G -estruturas e a G -estrutura padrão (também chamada de *flat*).

Assim, uma G -estrutura é integrável se, e somente se, é localmente equivalente $\mathcal{S}_x^{\text{stand}}$.

3.1.2 Exemplos

Exemplo 3.1.1 ($G = \{e\}$). O primeiro exemplo aborda o caso em que $G = \{e\}$. Uma G -estrutura, aqui chamada simplesmente *e-estrutura*, é um

referencial global $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Se (U, φ) é uma carta local, a integrabilidade da e -estrutura implica que

$$\phi_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, i = 1, \dots, n$$

O modelo padrão flat é $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ em $\mathbb{R}^n$.

Se $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ é uma e -estrutura em M e $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n)$ é uma e -estrutura em $\bar{M}$, um difeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ será isomorfismo se

$$df_x(\phi(x)) = \bar{\phi}(f(x))$$

A integrabilidade de um referencial está relacionada com as funções estruturais: quando calculamos os colchetes de Lie entre os elementos do referencial ϕ , obtemos

$$[\phi_i, \phi_j] = \sum_{k=1}^n c_{ik}^j \phi_k, \quad c_{ij}^k \in C^\infty(M)$$

em que os coeficientes c_{ij}^k são as funções estruturais.

Seja $\theta = (\theta^1, \dots, \theta_n)$ uma base de T^*M que é dual de ϕ : $\theta^j(\phi_i) = \delta_{ij}$. Ela é também chamada de correferencial e podemos analisar o problemas da integrabilidade do referencial olhando para o correferencial.

Proposição 3.1.1.

$$d\theta = \sum_{i < j} -c_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} d\theta^k(\phi_i, \phi_j) &= \phi_i(\theta^k(\phi_j)) - \phi_j(\theta^k(\phi_i)) - \theta^k[\phi_i, \phi_j] \\ &= -\theta^k \sum_{l=1}^n c_{ik}^l \phi_l \\ &= -c_{ik}^k \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\theta^k &= \sum_{p < q} b_{pq}^k \theta^p \wedge \theta^q \\ \Rightarrow d\theta^k(\phi_i, \phi_j) &= \sum_{p < q} b_{pq}^k \theta^p \wedge \theta^q(\phi_i, \phi_j) \\ &= b_{ij}^k \end{aligned}$$

Logo, $b_{ij}^k - c_{ij}^k$

□

Teorema 3.1.1. *Um referencial é integrável se, e somente se, as funções estruturais são todas nulas.*

Demonstração. Suponhamos que o referencial ϕ é integrável. Desse modo, $[\phi_i, \phi_j] = 0$, pois é o que ocorre com o referencial padrão. Como $[\phi_i, \phi_j] = c_{ij}^k \phi_k = 0$, então $c_{ij}^k = 0$, para todo k .

Agora assumamos que as funções estruturais são nulas. Desse modo, ϕ_i e ϕ_j comutam dois a dois. Seja

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$$

$$f(t_1, \dots, t_n) = \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_n^{t_n}(x_0)$$

onde $\Phi_i^{t_i}$ é o fluxo do campo vetorial ϕ_i e $0 \in U$. Temos que $f(0) = x_0$ e as derivadas parciais de f em $x \in M$ nos dá $\phi_i(f(x))$. O teorema da função inversa garante que f é difeomorfismo local definido numa vizinhança de 0 a qual pertence x_0 , de modo que $(U, \phi_i \circ f)$ é uma carta adaptada.

□

Exemplo 3.1.2 (Métricas Riemannianas: $G = O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$).

Definição 3.1.5. *Uma métrica riemanniana em M é uma seção suave de $S^2 T^*M$ que é positiva definida, ou seja, uma correspondência suave $x \mapsto g_x$ tal que $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno.*

Uma variedade riemanniana é aquela que admite uma métrica riemanniana.

Uma métrica riemanniana em M é equivalente a uma $O(n)$ -estrutura.

Seja g^{stand} o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$: $g^{stand}(u, v) = \langle u, v \rangle$. A estrutura padrão é dada por $\mathbb{R}^n$ com

$$g^{stand}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}.$$

Dada um produto interno g_x em $T_x M$, consideremos

$$S_g = \{\phi \in Fr(M) : g(\phi_i, \phi_j) = g^{stand}(e_i, e_j)\}$$

Sendo $\phi, \tilde{\phi} \in S_g$, consideremos $A = \tilde{\phi}^{-1} \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, então

$$g^{stand}(A(e_i), A(e_j)) = g(\phi_i, \phi_j) = g^{stand}(e_i, e_j)$$

de modo que A é uma transformação ortogonal e, portanto $A \in O(n)$.

Agora seja $\mathcal{S}$ uma $O(n)$ -estrutura. Tomemos $\phi \in \mathcal{S}$ e definamos

$$g_x(u, v) = g_{\phi(x)}^{stand}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$$

Se $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$, existe $A \in O(n)$ tal que: $\phi A = \tilde{\phi} \Rightarrow \phi^{-1} = A\tilde{\phi}^{-1}$. Assim

$$\begin{aligned} g_{\phi(x)}^{stand}(\phi^{-1}(\tilde{\phi}_i), \phi^{-1}(\tilde{\phi}_j)) &= g_{\phi(x)}^{stand}(G\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}_i), G\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}_j)) \\ &= g_{\phi(x)}^{stand}(Ge_i, Ge_j) \\ &= g_{\phi(x)}^{stand}(e_i, e_j) \\ &= g_{\phi(x)}^{stand}(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}_i), \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}_j)) \end{aligned}$$

Uma $O(n)$ -estrutura é integrável se, e somente se, existe um carata local (U, φ) em torno de cada $x \in M$ tal que

$$g_x\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right) = \delta_{ij}$$

Observação 9. O tensor de curvatura $R(X, Y) = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ são ideticamente nulos em $\mathbb{R}^n$ (∇ é a conexão de Levi-Civita).

Se $\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i}$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$, então

$$\nabla_X \nabla_Y \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i} = XY \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i}$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i} = YX \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i}$$

Portanto

$$(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i} = (XY - YX) \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i} = \nabla_{[X,Y]} u_i \frac{\partial_i}{\partial x_i}$$

Assim, em $\mathbb{R}^n$, $\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X = \nabla_{[X,Y]}$.

Proposição 3.1.2. *Uma variedade riemanniana (M, g) é integrável se, e somente se, o tensor curvatura R relativo à conexão de Levi-Civita é identicamente nulo.*

Demonstração. (Baseada em [Lee97])

Se a variedade é integrável, então ela é localmente equivalente a $\mathbb{R}^n$, de modo que o tensor de curvatura é, localmente, nulo.

Suponhamos que R é identicamente nulo. Vamos mostrar, primeiramente, que g admite referencial ortonormal paralelo em torno de cada ponto de M .

Sendo $x \in M$, podemos escolher $(X_p^1, \dots, X_p^n)$ uma base ortonormal de $T_x M$. Consideremos $(x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas centrado em x de maneira que $X_p^i = \partial/\partial x_i$. Podemos tomar vizinhanças de x^i de modo que $p \in C$, C um cubo centrado em p de lado medindo 2ε .

Por meio do transporte paralelo, podemos deslocar cada X_p^k ao longo do eixo x^1 . A partir de cada ponto desse eixo, de novo por meio de transporte paralelo, desloco agora X_p^k através do eixo x^3 , e assim por diante. O resultado será campos vetoriais $(X^1, \dots, X^n)$ definidas em C .

O transporte paralelo preserva produto interno de modo que $(X^1, \dots, X^n)$ formam referenciais ortonormais. Agora vamos mostrar que eles são parale-

los. Por construção,

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial/\partial x^1} X^j &= 0 \text{ em } \{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq 2\} \subseteq C, \\ \nabla_{\partial/\partial x^2} X^j &= 0 \text{ em } \{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq 3\} \subseteq C, \\ \nabla_{\partial/\partial x^3} X^j &= 0 \text{ em } \{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq 4\} \subseteq C \\ &\dots \\ \nabla_{\partial/\partial x^k} X^j &= 0 \text{ em } \{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq k+1\} \subseteq C\end{aligned}$$

Vamos provar por indução em k que em

$$\nabla_{\partial/\partial x^1} X^j = \dots = \nabla_{\partial/\partial x^k} X^j = 0, \text{ em } \{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq k+1\} (*)$$

Quando $k = 1$, isso vale por construção. Supondo que vale $(*)$, em $\{(x^1, \dots, x^n) : x^l = 0, l \geq k+2\}$, $\nabla_{\partial/\partial x^{k+1}} X^j = 0$ por construção e $\nabla_{\partial/\partial x^1} X^j = \dots = \nabla_{\partial/\partial x^k} X^j = 0$ em $\{(x^1, \dots, x^n) : x^{k+1} = 0\}$ por hipótese. Como $[\partial/\partial x^{k+1}, \partial/\partial x^i] = 0$ e

$$\nabla_{\partial/\partial x^{k+1}} (\nabla_{\partial/\partial x^i} X^j) = \nabla_{\partial/\partial x^i} (\nabla_{\partial/\partial x^{k+1}} X^j) = 0$$

de maneira que X^j é paralelo. Pela simetria da conexão, então $[X^i, X^j] = \nabla_{\partial/\partial x^i} X^j - \nabla_{\partial/\partial x^j} X^i = 0$.

Portanto, $(X^1, \dots, X^n)$ é um referencial ortonormal para o qual existem coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ para os quais $X^j = \partial/\partial x^j$ e, portanto

$$g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = g(X^i, X^j) = \delta_{ij}$$

de modo a ser (M, g) integrável. $\square$

Exemplo 3.1.3 (Orientações: $G = GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$).
Dois referenciais ϕ e ϕ' de $T_x M$ induzem a mesma orientação se a matriz de mudança de base de ϕ' para ϕ tem determinante positiva. Isso define uma relação de equivalência e uma orientação em $T_x M$ é uma classe de equivalência dessa relação.

Definição 3.1.6. *Uma **orientação** em M é uma coleção de orientações $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x : x \in M\}$ tal que: em torno de qualquer $x_0 \in M$ existe um aberto $U \subseteq M$ tal que se $x \in U$ e uma seção $\phi \in \Gamma_U(\text{Fr}(M))$ tal que ϕ_x induz a orientação $\mathcal{O}_x$,*

Uma orientação em M é, desse modo, uma $GL_n^+(\mathbb{R})$ -estrutura em M .

O modelo padrão é a orientação em $\mathbb{R}^n$ determinada pelo referencial canônico

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Nesse caso, um isomorfismo é difeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ em que a diferencial leva referenciais orientados de M em referenciais orientados de $\bar{M}$.

Uma $GL_n^+(\mathbb{R})$ ser integrável significa que em torno de cada $x \in M$ existe uma carta local (U, φ) de maneira que a orientação que a orientação $\mathcal{O}_x$ do espaço tangente $T_x M$ é induzido por

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x) \right).$$

Proposição 3.1.3. Toda orientação $\mathcal{O}$ em M como $GL_n^+(\mathbb{R})$ -estrutura é integrável.

Demonstração. Dada uma orientação $\mathcal{O}$ em M e $x_0 \in M$, podemos escolher um referencial ϕ definido num aberto $U \subseteq M$ em torno de x_0 que contém o domínio de uma carta local (V, φ) , de modo que $\phi(x)$ induz a orientação $\mathcal{O}_x$. Podemos assumir V conexo. Vamos considerar a matriz $B(x)$ da mudança de base de $\phi(x)$ para $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x) \right)$. As entradas dessa matriz são funções suaves com respeito a $x \in V$, de modo que $\det(B(x))$ também é suave. Podemos adotar a carta local de modo que $\det(B(x_0)) > 0$. Pela conexidade de V e continuidade do determinante, $\det(B(x)) > 0$ para todo $x \in V$ de modo que $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x) \right)$ induz a orientação $\mathcal{O}_x$. $\square$

Exemplo 3.1.4 (Formas volume: $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$).

Definição 3.1.7. Seja $\mu \in \Omega(M)$ uma forma que não anula-se em nenhum $x \in M$. Esta forma é uma **forma volume** em M .

Uma forma volume é $SL_n(\mathbb{R})$ -estrutura. A $SL_n(\mathbb{R})$ -estrutura padrão é $\mathbb{R}^n$ com $\mu^{stand} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Seja $\mathcal{S}_\mu = \{\phi \in Fr(M) : \phi^* \mu = \mu_{stand}\}$. Então

$$\mu(\phi_1(e_1), \dots, \phi_n(e_n)) = 1 = \mu^{stand}(e_1, \dots, e_n)$$

Tomemos $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{S}_\mu$. Vamos provar que a composta $\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um elemento de $SL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mu^{stand}(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x(e_1), \dots, \tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x(e_n)) &= \det(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x) \mu^{stand}(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x) \cdot 1 \\ &= \det(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \phi^* \mu &= \mu_{stand} \Rightarrow \mu \circ \phi = \mu^{stand}, \mu \circ \tilde{\phi} = \mu_{stand} \\ &\Rightarrow \mu \circ \phi = \mu^{stand}, \mu = \mu_{stand} \circ \tilde{\phi}^{-1} \\ &\Rightarrow \mu^{stand} \circ (\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi) = \mu_{stand} \end{aligned}$$

Portanto

$$\det(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x) = \mu^{stand}(\tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x(e_1), \dots, \tilde{\phi}_x^{-1} \circ \phi_x(e_n)) = \mu^{stand}(e_1, \dots, e_n) = 1$$

Agora, dada $\mathcal{S}$ uma $SL_n(\mathbb{R})$ -estrutura, para $\phi \in \mathcal{S}$, definamos

$$\mu_x(x_1, \dots, x_n) = \mu_{\phi^{-1}(x)}^{stand}(\phi^{-1}(x_1), \dots, \phi^{-1}(x_n))$$

Dado $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$, existe $G \in SL_n(\mathbb{R})$ tal que: $\phi G = \tilde{\phi}$. Dessa forma,

$$\phi G = \tilde{\phi} \Rightarrow \phi^{-1} = G \tilde{\phi}^{-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \mu_{\phi^{-1}(x)}^{stand}(\phi^{-1}(x_1), \dots, \phi^{-1}(x_n)) &= \mu_{\tilde{\phi}^{-1}(x)}^{stand}(G \tilde{\phi}^{-1}(x_1), \dots, G \tilde{\phi}^{-1}(x_n)) \\ &= \det(G) \mu_{\tilde{\phi}^{-1}(x)}^{stand}(\tilde{\phi}^{-1}(x_1), \dots, \tilde{\phi}^{-1}(x_n)) \\ &= \mu_{\tilde{\phi}^{-1}(x)}^{stand}(\tilde{\phi}^{-1}(x_1), \dots, \tilde{\phi}^{-1}(x_n)) \end{aligned}$$

Um isomorfismo aqui será um difeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ em que $f^*(\mu) = \bar{\mu}$.

Uma $SL_n(\mathbb{R})$ -estrutura é integrável se em torno de cada $x \in M$ existe

uma carta local (U, φ) de modo que

$$\mu = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

Proposição 3.1.4. *Toda forma volume μ em M é integrável.*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta local contendo $x \in M$. Então:

$$\mu = fd\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

onde $f \in C^\infty(U)$. Definamos numa vizinhança $U' \subseteq U$ de x uma função $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_1} = f$ e $\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_i} = 0, j > 1$. Dessa forma $d\eta = fd\varphi_1$, de modo que usando as coordenadas $(\eta, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ teremos

$$\mu = d\eta \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

□

Exemplo 3.1.5 (Folheações: $G = GL(p, n-p) =$

$$\left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix}, M \in GL_p(\mathbb{R}), P \in GL_{n-p}(\mathbb{R}) \right\}).$$

Definição 3.1.8. *Um subfibrado vetorial $F \subseteq TM$ de posto p é uma **distribuição p -dimensional** da variedade M .*

A escolha de uma p -distribuição é o mesmo que escolher uma $G = GL(p, n-p)$ -estrutura.

Definição 3.1.9. *Uma distribuição $F \subseteq TM$ é **involutiva** se*

$$[X, Y] \in \Gamma(F), X, Y \in \Gamma(F)$$

Definição 3.1.10. *Uma **folheação p -dimensional** é uma distribuição p -dimensional que é involutiva.*

O modelo padrão é $\mathbb{R}^n$ com a folheação $F^{stand} = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^p$

Uma $G = GL(p, n-p)$ -estrutura é integrável se em torno de todo $x \in M$ existe uma carta local (U, φ) de modo que

$$F_x = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_p}(x) \right\}$$

Teorema 3.1.2 (Frobenius). *Seja F uma distribuição k -dimensional em M . São equivalentes:*

1. F é involutiva.
2. F como $G = GL(p, n - p)$ -estrutura é integrável.

Demonstração. (Baseada em [Lee13])

Se a distribuição F é integrável, então ela será involutiva pois $\left[\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right] = 0$.

Agora suponhamos que F é involutiva. Seja $x \in M$ e (U, φ) uma carta local em torno de x . Se necessário, podemos reordenar as coordenadas de modo que F_x seja o espaço complementar de $T_x M$ gerado por $\frac{\partial}{\partial \varphi_{p+1}}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}(x)$.

Consideremos $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas primeiras p coordenadas. A diferencial, quando restrita a F_x , induz um isomorfismo

$$(d\pi)_x : F_x \rightarrow T_{\pi(x)}\mathbb{R}^p$$

Sejam $V_{i,x} = ((d\pi)_x|_{F_x})^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\pi(x))$, $i = 1, \dots, p$. Dessa forma,

$$d\pi_x([V_i, V_j]_x) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]_x = 0.$$

Portanto, existe um referencial de F_x difeomorfo ao referencial padrão. $\square$

Exemplo 3.1.6 (Estruturas complexas: $G = GL_n(\mathbb{C})$). *Aqui faremos a identificação $\mathbb{C}^k \simeq \mathbb{R}^{2k}$ através de*

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

Definição 3.1.11. *Uma **estrutura quase complexa** em uma variedade M é uma aplicação $J : TM \rightarrow TM$ que é um morfismo de fibrados vetoriais com a seguinte característica:*

$$J^2 = -Id.$$

Estruturas quase complexas são $GL_n(\mathbb{C})$ -estruturas.

O modelo padrão é desta vez $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, coma a estrutura quase complexa

$$J^{stand} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial y_n}$$

$$J^{stand} \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

A integrabilidade de uma $GL_n(\mathbb{C})$ -estrutura significa encontrar em trono de cada $x \in M$ uma carta coordena (U, φ) , $\varphi = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e

$$J \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial y_n}$$

$$J \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Definição 3.1.12. A aplicação

$$N_J : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY]$$

é o **tensor de Nijenhuis** da estrutura quase complexa J .

Proposição 3.1.5.

$$N_J \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes TM)$$

Demonstração. N_J é antissimétrica:

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY] \\ &= -[Y, X] - J([Y, JX] - [JY, X]) + [JY, JX] \\ &= -([Y, X] + J([Y, JX] + [JY, X]) - [JY, JX]) \\ &= -N_J(Y, X) \end{aligned}$$

Vamos provar que N_J é tensorial. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então

$$\begin{aligned}
 N_J(fX, Y) &= [fX, Y] + J[J(fX), Y] + J[fX, JY] - [JfX, JY] \\
 &= f[X, Y] - Y(fX) + J[fJX, Y] + Jf[X, JY] - J^2(Yf)X - f[JX, JY] + J(Yf)JX \\
 &= f[X, Y] - Y(fX) + Jf[JX, Y] - J(Yf)X \\
 &\quad + Jf[X, JY] + (Yf)X - f[JX, JY] + J(Yf)JX \\
 &= f[X, Y] + fJ[X, JY] + fJ[X, JY] - f[JX, JY] \\
 &= fN_J
 \end{aligned}$$

□

A seguir vem um resultado muito profundo sobre a integrabilidade de estruturas que é o Teorema de Newlander-Nirenberg. Trata-se de um teorema não trivial cuja demonstração é muito trabalhosa e não será feita, sendo indicada uma referência.

Teorema 3.1.3 (Newlander-Nirenberg). *Se J é uma estrutura quase complexa em M , então são equivalentes:*

1. $N_J \equiv 0$
2. A $GL_k(\mathbb{C})$ -estrutura J é integrável.

Demonstração. Ver em [NN57] ou em [Dem12], página 399. □

Exemplo 3.1.7 (Estruturas simpléticas: $G = Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : A^T J^{stand} A = J^{stand}\}$, $J^{stand} = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$).

Definição 3.1.13. Uma *estrutura quase simplética* ω em M é

$$\omega \in \Omega^2(M)$$

em que ω_x , para todo $x \in M$ é não degenerada :

$$\omega_x(u, v) = 0, \forall v \iff u = 0$$

Definição 3.1.14. Uma estrutura quase simplética ω será dita *simplética* se ω é fechada ($d\omega = 0$)

Um isomorfismo, nesse caso, é um difeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ tal que $f^*\bar{\omega} = \omega$, em que ω e $\bar{\omega}$ são estruturas quase simpléticas em M e $\bar{M}$, respectivamente.

Uma estrutura quase simplética é uma $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ -estrutura em M e o modelo padrão é $\mathbb{R}^{2n}$ com seus elementos denotados por $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ e

$$\omega^{stand} = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$$

Uma $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ -estrutura é integrável se, para cada $x \in M$, existe uma carta local $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$ contendo x tal que

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Lema 3.1.1 (Truque de Moser Local). *Seja $\{\omega_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ uma família de formas simpléticas diferenciáveis em t . Então existe uma vizinhança U de $p \in M$ tal que existe uma função $g_t : U \rightarrow U$ de maneira que $g_t^*\omega_t = \omega_0$ e $g_0^* = id$*

Demonstração. Apêndice, Teorema A.5.1. □

Teorema 3.1.4 (Darboux). *Se ω é uma estrutura quase simplética em M . Então, são equivalentes*

1. ω é simplética
2. ω é integrável.

Demonstração. (Retirada de [Les14])

Vamos provar que se ω é uma forma simplética em M , então existe uma vizinhança em torno de cada ponto de M de modo que existem

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ coordenadas locais para as quais $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$.

Sejam $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ coordenadas locais em M e $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$, $t \in [0, 1]$ uma família de 2-formas com $\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$. Cada ω_t é fechada: Em $x \in M$, $\omega_t(x) = \omega_0(x) = \omega(x)$

Por continuidade pode-se determinar uma vizinhança V de p de modo que $\omega_t(p)$ não é degenerada. Pelo lema de Moser, existe uma vizinhança

$U \subseteq V$ de modo que há uma função $g_t : U \rightarrow U$ como no lema. Desse modo:

$$\begin{aligned} g_t^* \omega_t = \omega_0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} g_t^* \omega_t = 0 \\ &\Rightarrow g_t^* \left(\frac{d}{dt} \omega_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right) = 0 \\ &\Rightarrow g_t^* \left(\frac{d}{dt} \omega_t + di_{X_t} \omega_t \right) = 0 \\ &\Rightarrow di_{X_t} \omega_t = -\frac{d}{dt} \omega_t \end{aligned}$$

Além disso

$$\frac{d}{dt} \omega_t \text{ exata} \Rightarrow di_{X_t} \omega_t = d\eta_t, \text{ numa vizinhança de } p, \eta_t \in \Omega^1(M)$$

Portanto, $i_{X_t} \omega_t = \eta_t$ já que ω_t é não-degenerada. esta equação tem solução, que determina um único campo vetorial X_t . Desse modo, existe g_1 tal que $g_1^* \omega = \omega_0$.

O campo vetorial X_t gera famílias de um-parâmetros de difeomorfismos $\{g_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ de modo que se pode mudar as coordenadas e obter $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$.

□

3.2 Conexões compatíveis

3.2.1 Compatibilidade entre conexões e G -estruturas

Definição 3.2.1. Uma conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é compatível com a G -estrutura $\mathcal{S}$ se, para toda curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, o transporte paralelo ao longo de γ com respeito a ∇

$$P_\gamma^{t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)} M$$

leva G -referenciais em G -referenciais.

Proposição 3.2.1. Seja ∇ uma conexão e $\mathcal{S}$ um G -estrutura. Então são equivalentes:

1. ∇ é compatível com $\mathcal{S}$

2. Se ϕ é um referencial local em $U \subseteq M$ tal que $\phi \in \mathcal{S}$ então a matriz da conexão $\mu(\nabla, \phi) \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$ (ver observação 8)
3. A conexão de fibrados principais em $Fr(M)$ representada pela 1-forma de conexão $\mu \in \Omega(Fr(M), gl_r)$ é tal que $\mu|_{\mathcal{S}} \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathfrak{g})$.

Demonstração. Vamos provar a equivalência entre (i) e (ii).

Primeiro provaremos a implicação direta: o cálculo do valor de μ aplicado a um vetor tangente $u'(0)$ equivale a levar $u(t)$ a $T_{\gamma(t_0)}M$ através do transporte paralelo e depois tomar a sua derivada com relação a t quando $t = 0$. Assim, se o transporte paralelo preserva $\mathcal{S}$ e $u'(0)$ é tangente a $\mathcal{S}$ e, logo, o processo resulta num elemento de $\mathcal{S}$, originando um elemento tangente a $\mathcal{S}$, ou seja, pertencente a $\mathfrak{g}$.

Agora, provemos a recíproca: $\mu|_{\mathcal{S}}$ é uma conexão em $\mathcal{S}$ e para curvas em $\mathcal{S} \subseteq Fr(M)$, a horizontalidade de μ e $\mu|_{\mathcal{S}}$ coincidem. Portanto, o transporte paralelo relativo a μ aplicado a elementos de $\mathcal{S}$ coincide com o transporte paralelo relativo a $\mu|_{\mathcal{S}}$ de modo a preservar elementos de $\mathcal{S}$.

Vamos provar a equivalência entre (ii) e (iii): $\mu(\nabla, \phi)$ aplicada a $u \in T_x M$ coincide com $\mu(h_{\phi_x}(u))$. $\square$

3.2.2 espaço das conexões compatíveis

O espaço das conexões ∇ em TM é um espaço afim modelado por $\Omega^2(M, End(TM))$. Isso se explica pelo fato de o espaço das conexões não é um espaço vetorial, mas duas conexões ∇^1, ∇^2 originam o elemento

$$\lambda(\nabla^1, \nabla^2) = \nabla^1 - \nabla^2 \in \Omega^1(E, End(TM)),$$

$$\nabla^1 - \nabla^2 : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

e pela seguinte proposição:

Proposição 3.2.2. *Dada ∇ uma conexão compatível com a G -estrutura $\mathcal{S}$, então é possível construir uma conexão ∇^λ ainda compatível com $\mathcal{S}$, para toda $\lambda \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}_{\mathcal{S}})$.*

Demonstração. Dada uma conexão ∇ e $\lambda \in \Omega^1(M, End(TM))$, podemos obter uma nova conexão

$$\nabla_\lambda : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$\nabla_X^\lambda Y = \nabla_X Y + \lambda(X)(Y).$$

A escolha de ∇ da origem a uma bijeção $\lambda \mapsto \nabla^\lambda$ entre $\Omega^1(M, \text{End}(TM))$ e o espaço das conexões.

□

Lema 3.2.1. *Seja ∇ uma conexão compatível com a G-estrutura $\mathcal{S}$ e $\xi \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}_\mathcal{S})$, então*

$$T_{\nabla^\xi} = T_\nabla + \mathcal{F}(\xi)$$

onde T_{∇^ξ} é a torção relativa à conexão ∇^ξ

Demonstração.

$$\begin{aligned} T_{\nabla^\xi}(X, Y) &= \nabla_X^\xi Y - \nabla_Y^\xi X - [X, Y] \\ &= \nabla_X Y + \xi(X)(Y) - \nabla_Y X - \xi(Y)(X) - [X, Y] \\ &= T_\nabla(X, Y) + \xi(X)(Y) - \xi(Y)(X) \\ &= T_\nabla(X, Y) + \mathcal{F}(\xi)(X, Y) \end{aligned}$$

□

Observação 10. *A torção T_∇ pode ser vista como uma aplicação*

$$\bar{T}_\nabla \mathcal{S} \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 V, V).$$

Se $\phi \in \mathcal{S}$ então

$$\bar{T}_\nabla(\phi)(u, v) = \phi^{-1} T_\nabla(\phi(u), \phi(v))$$

3.3 Curvatura e torção de G-estruturas

3.3.1 Torção intrínseca

Vamos considerar $V = \mathbb{R}^n$ e $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Consideremos a seguinte aplicação linear:

$$\mathcal{F} : \text{Hom}(V, \mathfrak{g}) \rightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 V, V)$$

$$\mathcal{F}(f)(u, v) = f(u)(v) - f(v)(u)$$

Definição 3.3.1. *O primeiro prolongamento de $\mathfrak{g}$*

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \ker(\mathcal{F}) = \{f : V \rightarrow \mathfrak{g} \mid f(u)(v) = f(v)(u)\}$$

Definição 3.3.2. *O espaço de torção de $\mathfrak{g}$ é o quociente.*

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) := \frac{\text{Hom}(\Lambda^2 V, V)}{\mathcal{F}(\text{Hom}(V, \mathfrak{g}))}$$

Proposição 3.3.1. *Seja ∇ uma conexão compatível com $\mathcal{S}$. Se sua torção é T_∇ , a composição com a projeção sobre $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$, o resultado*

$$\mathfrak{T} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$$

não depende da escolha da conexão.

Demonstração. Sejam ∇^1 e ∇^2 duas conexões compatíveis com $\mathcal{S}$. Assim:

$$\begin{aligned} T_{\nabla^1} - T_{\nabla^2} &= \nabla_X^1 Y - \nabla_Y^1 X - [X, Y] - \nabla_X^2 Y + \nabla_Y^2 X + [X, Y] \\ &= \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y - (\nabla_Y^1 X - \nabla_Y^2 X) \\ &= (\nabla^1 - \nabla^2)_X Y - (\nabla^1 - \nabla^2)_Y X. \end{aligned}$$

Assim, $T_{\nabla^1} - T_{\nabla^2} \in \mathcal{F}(\text{Hom}(V, \mathfrak{g}))$ e assim $[T_{\nabla^1}] = [T_{\nabla^2}]$, de modo que o resultado da composição não depende da escolha da conexão. $\square$

Definição 3.3.3. *A aplicação $\mathfrak{T}$ da proposição anterior é chamada de **torção intrínseca** de $\mathcal{S}$.*

Teorema 3.3.1. *Se a G -estrutura $\mathcal{S}$ é integrável, então a torção intrínseca $\mathfrak{T}$ é nula.*

Demonstração. Se a G -estrutura $\mathcal{S}$ é integrável, então ela é, localmente, equivalente a G -estrutura canônica flat. Portanto, a torção com respeito à conexão plana canônica é nula de modo que o resultado da composição acima será nulo. $\square$

Proposição 3.3.2. *Seja $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}$ uma G -estrutura arbitrária em M . Então*

1. *Se $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ então M admite no máximo uma conexão livre de torção compatível com $\mathcal{S}$.*
2. *Se $\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = 0$ então M admite, ao menos, uma conexão livre de torção compatível com $\mathcal{S}$.*

Demonstração. 1. Suponhamos que $\mathfrak{g}^{(1)} = \ker \mathcal{F} = \{0\}$, e $T_{\nabla} = 0$. Seja ∇' outra conexão livre de torção.

Então

$$(T_{\nabla} - T_{\nabla'})(X, Y) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\nabla - \nabla')_X Y - (\nabla - \nabla')_Y X &= 0 \Rightarrow \nabla - \nabla' \in \ker \mathcal{F} \\ &\Rightarrow \nabla - \nabla' = 0 \\ &\Rightarrow \nabla = \nabla' \end{aligned}$$

2. Seja ∇ uma conexão compatível com $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = 0$ então $T_{\nabla} \in \text{Im}(\mathcal{F})$, ou seja, $T_{\nabla} = \mathcal{F}(\lambda)$. Então, $T_{\nabla} - \mathcal{F}(\lambda)$ é a torção desejada. $\square$

3.4 Equações estruturais, curvatura e torção

3.4.1 Forma tautológica

Definição 3.4.1. *Seja G um subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}$ uma G -estrutura em uma variedade M . A **forma tautológica** é a 1-forma $\theta_{\mathcal{S}} \in \Omega(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$, em que, sendo $\phi \in \mathcal{S}$ e $X_{\phi} \in T_{\phi}\mathcal{S}$, então*

$$\theta_{\mathcal{S}}(X_{\phi}) := \phi^{-1}((d_{\phi}\pi)(X_{\phi}))$$

Definição 3.4.2. *Seja V um espaço vetorial e P um G -fibrado principal. A forma $\omega \in \Omega(P, V)$ é **estritamente horizontal** se $\ker(\omega_p) = \ker(d_p\pi)$.*

Proposição 3.4.1. *A forma tautológica é estritamente horizontal.*

Demonstração. Seja $X_{\phi} \in T_{\phi}\mathcal{S}$. Se $X_{\phi} \in \ker(\theta_{\mathcal{S}})$, então:

$$\phi^{-1}((d_{\phi}\pi)(X_{\phi})) = 0$$

Como ϕ é um isomorfismo então

$$(d_{\phi}\pi)(X_{\phi}) = 0$$

Dessa forma, X_ϕ é um vetor vertical. Logo, $\ker(\theta_S) \subseteq \ker(d_\phi\pi)$.

Se $X_\phi \in \ker(d_\phi\pi)$, então $(d_\phi\pi)(X_\phi) = 0$. Portanto, $\phi^{-1}((d_\phi\pi)(X_\phi)) = 0$ e $X_\phi \in \ker(\theta_S)$. Desse modo $\ker(d_\phi\pi) \subseteq \ker(\theta_S)$ $\square$

Proposição 3.4.2. *Seja $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ um subgrupo de Lie fechado, $\pi : P \rightarrow M$ é um G -fibrado principal com M uma variedade de dimensão n , e $\tau \in \Omega(P, \mathbb{R}^n)$ uma 1-forma G -equivariante e estritamente horizontal. Então, se θ é a forma tautológica em $Fr(M)$, existe um único mergulho G -equivariante $F : P \rightarrow Fr(M)$ de modo que $F^*\theta = \tau$.*

Demonstração. Consideremos $\tau : T_pP \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma 1-forma G -invariante e estritamente horizontal. Seja $x = \pi(p) \in M$. Definamos a seguinte função

$$F(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_xM$$

$$F(p)(v) = d_p\pi \left(\tau|_{H_p}^{-1}(v) \right)$$

em que H é uma conexão em P .

Vamos provar que:

1. *a função F não depende da escolha da conexão:* sejam H e H' duas conexões em P e $v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\tau|_{H_p}^{-1}(v) - \tau|_{H'_p}^{-1}(v) = w$$

que é um vetor vertical, pois

$$\tau(\tau^{-1}|_{H_p}(v) - \tau^{-1}|_{H'_p}(v)) = v - v = 0$$

e τ é estritamente horizontal. Logo,

$$F(p)(v) - F'(p)(v) = d_p\pi(w) = 0 \Rightarrow F(p) = F(p)$$

2. F é G -equivariante:

$$\begin{aligned}
 F(pg)(v) &= d_{pg}\pi(\tau^{-1}|_{H_{pg}}(v)) \\
 &= d_{pg}\pi(d_p R_g(\tau^{-1}|_{H_p}(gv))) \\
 &= d_{pg}\pi(\tau^{-1}|_{H_p}(gv)) \\
 &= F(p)(gv) \\
 &= (F(p)g)(v)
 \end{aligned}$$

3. F é um mergulho: F é um morfismo de fibrados cobrindo a identidade, com respeito à inclusão $G \hookrightarrow GL_n$. Como G é um subgrupo fechado, então segue que F é um mergulho.

Agora, vamos provar que $F^*\theta = \tau$, onde θ é a forma tautológica. Seja $X \in T_p P$. Então

$$\begin{aligned}
 (F^*\theta)_p(X) &= \theta_p(d_p F(X)) \\
 &= F(p)^{-1}(d_{F(p)}\pi d_p F(X)) \\
 &= F(p)^{-1}(d_p(\pi \circ F)(X)) \\
 &= F(p)^{-1}(d_p\pi(X)) \\
 &= ((d_p\pi \circ \tau^{-1}|_{H_p}))^{-1}(d_p\pi(X)) \\
 &= \tau_p(X)
 \end{aligned}$$

□

3.4.2 Torção e equações estruturais.

Definição 3.4.3. *Seja ω uma conexão no G -fibrado principal $\mathcal{S}$, advindo de uma G -estrutura. A **torção** de ω é a 2-forma $T_\omega \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$T_\omega(h(X), h(Y)) = d\theta(h(X), h(Y))$$

onde h é o levantamento horizontal associado a ω .

Agora, vamos fixar $\mathcal{S}$ uma G -estrutura e uma conexão com ela compatível. Considere a correspondente forma de conexão $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathfrak{g})$ e a curvatura K_ω e a torção T_ω com respeito a ω .

Primeiramente, vamos estabelecer o significado de algumas notações. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $P = \mathcal{S}$.

1. Seja $\theta \in \Omega^1(P, V)$ a forma tautológica. Então, $\theta \wedge \theta \in \Omega^2(P, V \wedge V)$ com

$$\theta \wedge \theta(X, Y) = \theta(X) \wedge \theta(Y)$$

2. Temos que $T_\omega \in C^\infty(S, \Lambda^2 V, V)$. Então $T_\omega(\theta \wedge \theta) \in \Omega(P, V)$, com

$$T_\omega(\theta \wedge \theta)_p(X_p, Y_p) = T_\omega(\theta_p(X_p) \wedge \theta_p(Y_p))$$

3. Sabemos que $K \in C^\infty(\text{Hom}(\Lambda^2(V), \mathfrak{g}))$. Então, $K(\theta \wedge \theta) \in \Omega(P, \mathfrak{g})$, com

$$K(\theta \wedge \theta)_p(X_p, Y_p) = K(\theta_p(X_p) \wedge \theta_p(Y_p))$$

4. $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. O colchete $[\omega, \omega] \in \Omega(P, \mathfrak{g})$, definindo-se

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]$$

5. Sejam $\theta \in \Omega^1(P, V)$ e $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Então, $\omega \wedge \theta \in \Omega^2(P, V)$, em que $\omega \wedge \theta(X, Y) = \omega(X)\theta(Y) - \omega(Y)\theta(X)$. Lembrado que $\omega(X)\theta(Y)$ é o produto de uma matriz por um vetor em $\mathbb{R}^n$, de modo a estar bem definido.

Sendo θ a forma tautológica e ω a 1-forma de conexão, a função

$$(\theta, \omega)_p : T_p P \longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$$

é um isomorfismo.

Assim, se

$$\theta = \theta^1 e_1 + \dots + \theta^n e_n$$

onde $e_1, \dots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, $\theta^1, \dots, \theta^n \in \Omega(\mathcal{S})$ e $\omega = \omega^1 A_1 + \dots + \omega^m A_m$ onde $A_1, \dots, A_m$ é uma base de $\mathfrak{g}$ e $\omega^1, \dots, \omega_m \in \Omega(\mathcal{S})$ então formam um correferencial de $\mathcal{S}$. Dessa forma, o produto wedge destas 1-formas são uma base das duas formas em $\Omega(\mathcal{S})$.

Dessa forma, como $d\theta \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathbb{R}^n)$, $d\omega \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathfrak{g})$, então podemos escre-

ver

$$\begin{aligned} d\theta &= A\theta \wedge \theta + B\omega \wedge \theta + C\omega \wedge \omega \\ d\omega &= a\theta \wedge \theta + b\omega \wedge \theta + c\omega \wedge \omega \end{aligned}$$

Proposição 3.4.3. *Temos as seguintes igualdades*

$$d\theta = T(\theta \wedge \theta) + \omega \wedge \theta \quad (3.1)$$

$$d\omega = K(\theta \wedge \theta) - \frac{1}{2}[\omega, \omega] \quad (3.2)$$

chamadas de equações estruturais.

Demonstração. Vamos determinar os coeficientes A, B e C .

Se $X, Y \in TS$ e $p \in M$, então $X_p = X_p^H + X_p^V$ e $Y_p = Y_p^H + Y_p^V$. Desse modo

$$d\theta(X, Y) = d\theta(X^H, Y^H) + d\theta(X^H, Y^V) + d\theta(X^V, Y^H) + d\theta(X^V, Y^V)$$

e assim, podemos resumir os cálculos em três casos:

1. *dois vetores horizontais:* seja H o correspondente espaço horizontal correspondente à conexão ω . Então $X_p^H = \theta|_{H_p}^{-1}(u), u \in \mathbb{R}^n$ e $Y_p^H = \theta|_{H_p}^{-1}(v), v \in \mathbb{R}^n$ e assim

$$\begin{aligned} d\theta(X_p, Y_p) &= d\theta(\theta|_{H_p}^{-1}(u), \theta|_{H_p}^{-1}(v)) \\ &= T_\omega(u, v) \\ &= T_p(\theta(X), \theta(Y)) \end{aligned}$$

2. *um vetor horizontal e outro vertical:* sabemos que $R_g^*\theta = g^{-1}\theta$. Derivando, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}\theta &= -\alpha \cdot \theta \Rightarrow \\ di_{\tilde{\alpha}}\theta + i_{\tilde{\alpha}}d\theta &= -\alpha \cdot \theta \end{aligned}$$

Portanto

$$d\theta(\tilde{\alpha}, Y) = -\tilde{\alpha} \cdot \theta(Y)$$

e assim, se X é vertical e Y é horizontal,

$$d\theta(X, Y) = -X \cdot \theta(Y)$$

3. *ambos os vetores verticais*: estendendo-se X, Y a respectivos campos $\tilde{A}, \tilde{B}$, obtemos

$$\begin{aligned} d\theta(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \underbrace{\mathcal{L}_{\tilde{A}}(\theta(\tilde{B}))}_{=0, \text{ pois } \tilde{B} \text{ é vertical}} - \underbrace{\mathcal{L}_{\tilde{B}}(\theta(\tilde{A}))}_{=0, \text{ pois } \tilde{A} \text{ é vertical}} - \underbrace{\theta[\tilde{A}, \tilde{B}]}_{=0, \text{ pois } [\tilde{A}, \tilde{B}] \text{ é vertical}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que $C=0$.

Agora vamos determinar a, b e c , da mesma maneira que anteriormente:

1. *ambos os vetores são horizontais*: novamente, se $X_p = \theta|_{H_p}^{-1}(u), u \in \mathbb{R}^n$ e $Y_p = \theta|_{H_p}^{-1}(v), v \in \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} d\omega_p(X_p, Y_p) &= d\omega_p(\theta|_{H_p}^{-1}(u), \theta|_{H_p}^{-1}(v)) \\ &= K_p(\theta(X), \theta(Y)). \end{aligned}$$

(definição de curvatura em fibrados principais).

2. *um vetor é horizontal e o outro vertical*: sejam X horizontal e $Y = \psi(\beta), \beta \in \mathfrak{g}$ vertical.

Assim:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([X, Y]) \end{aligned}$$

($\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = 0$ pois $\omega(Y)$ é constante e $\mathcal{L}_Y(\omega(X)) = 0$ pois $\omega(X) = 0$)

X é G -invariante: $dpR_g(X) = X, \forall g \Rightarrow [X, Y] = 0$. Portanto,

$$d\omega(X, Y) = 0$$

3. *ambos os vetores são verticais*: dessa forma $X = \psi(\alpha), Y = \psi(\beta), \alpha, \beta \in \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - \mathcal{L}_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([X, Y]) \\ &= -\omega([\psi(\alpha), \psi(\beta)]) \\ &= -\omega(\psi[\alpha, \beta]) \\ &= -[\alpha, \beta] \end{aligned}$$

($\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = 0$ pois $\omega(X)$ é constante e $\mathcal{L}_Y(\omega(X)) = 0$ pois $\omega(X)$ é constante).

□

Definição 3.4.4. *Seja $\omega_G \in \Omega(G, \mathfrak{g})$ definida por*

$$\omega_G(X_g) = (d_g L_{g^{-1}})(X_g), X_g \in T_g G.$$

ω_G é a chamada **forma de Maurer-Cartan**.

Definição 3.4.5. *Seja $\tau \in \Omega(I)$. O desenvolvimento de τ em G ao longo de $I=[a, b]$ começando em e é a única função suave $f : I \rightarrow G$ com $f(a) = e$ tal que $\tau = f^*(\omega_G)$.*

Definição 3.4.6. *Sejam $I = [a, b]$, N uma variedade e $\tau \in \Omega(N, \mathfrak{g})$. Dado um caminho $\gamma : I \rightarrow N$, seja $\tilde{\gamma} : I \rightarrow G$, com $\tilde{\gamma}(a) = e$ o desenvolvimento de $\gamma^*(\tau)$, ou seja, $\tilde{\gamma}(\omega_G) = \gamma^*(\tau)$. A função $\tilde{\gamma}$ é denominada **desenvolvimento de τ ao longo de γ começando em e** .*

Lema 3.4.1. *Seja G um grupo de Lie cuja respectiva álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$. Se N é uma variedade conexa e $\tau \in \Omega^1(N, \mathfrak{g})$ satisfazendo*

$$d\tau + \frac{1}{2}[\tau, \tau] = 0$$

então existe uma função suave $f : N \rightarrow G$ tal que $\tau = f^\omega_G$*

Demonstração. (Baseada em [Sha97])

Definamos $f : N \rightarrow G$, com $f(b) = e$, declarando $f(x)$ como final do desenvolvimento de τ ao longo de qualquer caminho que vai de b até x .

Vamos obter o valor de $f(x)$. Se $x_0 \in N$, podemos escolher um caminho de b para x_0 e outro de x_0 até x . Então, se o desenvolvimento do primeiro caminho começa em e e termina em g_0 , o segundo começa em e e termina em g . Então o desenvolvimento da composição dos caminhos começa em e e termina em g_0g .

A existência local garante que em torno de cada $x_0 \in N$, existe um aberto conexo U e $f_U : U \rightarrow G$ satisfazendo $f_U^*(\omega_G) = \tau$. Após uma translação de f_U por algum elemento de g , teremos que $f_U(x_0) = f(x)$. Dessa forma, o desenvolvimento de τ , começando em $f(x_0)$, ao longo de $\gamma : I \rightarrow U$ termina em $f_U(x)$. Dessa forma,, também termina em $f(x)$, então $f_U(x) = f(x)$, para todo $x \in U$. Portanto, $f^*(\omega_G) = f_U^*(\omega_G)$ em U .

□

Teorema 3.4.1. *Uma G -estrutura é integrável, se e somente, M admite, localmente, conexões flat livre de torção.*

Demonstração. Podemos tratar localmente o problema, de modo assumir a variedade M como sendo $\mathbb{R}^n$, e analisar em torno de 0. Se uma G -estrutura é integrável, todo referencial local é isomorfo ao referencial canônico, de modo a ser flat a conexão e livre de torção.

Agora vamos provar a volta. Se M admite uma conexão flat livre de torção, então as equações estruturais tornam-se

$$d\theta = \omega \wedge \theta,$$

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Vamos considerar uma nova álgebra de Lie

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$$

chamado de produto semi-direto de $\mathfrak{g}$ com sua representação em V , cujo colchete é definido como

$$[(A, u), (B, v)] = ([A, B], Au - Bv).$$

Essa álgebra de Lie advém do grupo $\bar{G} = G \times V$ tal que $(g, u)(h, v) = (gh, h^{-1}(u)v)$

Podemos, juntando ω e θ , formando a 1-forma $\Theta = (\omega, \theta) \in \Omega(\mathcal{S}, \bar{\mathfrak{g}})$.

Dessa forma, as equações estruturais, são reescritas como

$$d\Theta + \frac{1}{2}[\Theta, \Theta] = 0$$

Pelo lema, existe uma função $F : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{G}$ de modo que $F^*(\omega_{\tilde{G}}) = \Theta$. Como a questão é local, podemos adotar $V = \mathbb{R}^n$ e vamos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{F} & G \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

que obtemos ao passar ao quociente módulo G . F é o levantamento, ao menos localmente, de um difeomorfismo $f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde U é o domínio de uma carta local. A correspondente carta será uma carta adaptada, provando que M é localmente integrável.

□

Capítulo 4

Integração de G-estruturas

Este capítulo baseia-se em [Gui65] e nas notas [dA17] do colega Pedro Mendes de Araújo.

Neste capítulo discutiremos com mais atenção o problema da integrabilidade de G-estruturas através da cohomologia de Spencer, cujos grupos de cohomologia representam os obstáculos para se determinar a integrabilidade.

4.1 Prolongamentos e Cohomologia de Spencer

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n , $G \subseteq GL_n(V)$ um grupo de Lie e $\mathfrak{g} \subseteq gl_n(V) = End(V)$ sua respectiva álgebra de Lie.

Definição 4.1.1. *O k -ésimo prolongamento de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathfrak{g}^{(k)}$ é definido indutivamente da seguinte maneira: $\mathfrak{g}^{(1)}$ é o conjunto das transformações lineares $T : V \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que $T(u)(v) = T(v)(u)$, para $u, v \in V$ (esta definição coincide com a dada no capítulo anterior). Da mesma forma, $\mathfrak{g}^{(k)}$ é o conjunto das transformações lineares $T : V \longrightarrow \mathfrak{g}^{(k-1)}$ tal que $T(u)(v) = T(v)(u)$, $u, v \in V$.*

Assim, $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq Hom(V, \mathfrak{g}^{(k-1)})$ pode ser descrito diretamente por

$$\mathfrak{g}^{(k)} = (\mathfrak{g} \otimes S^k(V^*)) \cap (V \otimes S^{k+1}(V^*)).$$

Temos $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ e vamos definir $\mathfrak{g}^{(-1)} = V$.

Considerando $v \in V$, este pode ser visto como um elemento de $(V^*)^*$. Podemos estender v a uma derivação D_v em $S(V^*)$: se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ é uma base

de V^* , um elemento de $S(V^*)$ pode ser escrito como

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \lambda_{i_1} \otimes \dots \otimes \lambda_{i_k}.$$

Definindo-se

$$D_v(\lambda_i) = \lambda_i(v)$$

temos

$$D_v(\lambda_i \otimes \lambda_j) = \lambda_i(v)\lambda_j + \lambda_j(v)\lambda_i$$

de modo a termos a aplicação

$$D_v : S(V^*) \longrightarrow S(V^*)$$

$$D_v(pq) = D_v(p)q + pD_v(q)$$

Assim,

$$D_v \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \lambda_{i_1} \otimes \dots \otimes \lambda_{i_k} \right) = \sum_{1 \leq l \leq k} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \lambda_{i_l}(v) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}.$$

Sejam $u \otimes s \in V \otimes S^{r+1}(V^*)$ e $v \otimes t \in V \otimes S^{s+1}(V^*)$. Então, definido um colchete entre esses elementos por

$$[u \otimes s, v \otimes t] = v \otimes D_u t \circ s - u \otimes D_v s \circ t \in V \otimes S^{r+s+1}(V^*)$$

pois $s \in S^{r+1}(V^*), t \in S^{s+1}(V^*)$, de modo que

$$D_v t \in S^{s+1}(V^*) \Rightarrow D_v t \circ s \in S^{r+s+1}(V^*) \text{ e } D_u s \in S^{r+1}(V^*) \Rightarrow D_u s \circ t \in S^{r+s+1}(V^*)$$

Como $\mathfrak{g}^{(r)} \subseteq V \otimes S^{r+1}(V^*)$ e $\mathfrak{g}^{(s)} \subseteq V \otimes S^{s+1}(V^*)$, o colchete acima induz uma aplicação bilinear $\mathfrak{g}^{(r)} \otimes \mathfrak{g}^{(s)} \longrightarrow \mathfrak{g}^{(r+s)} \subseteq V \otimes S^{r+s+1}(V^*)$: se $\alpha \in \mathfrak{g}^{(r)}$ e $\beta \in \mathfrak{g}^{(s)}$ então $[\alpha, \beta] \in \mathfrak{g}^{(r+s)}$.

O colchete apresentado anteriormente faz de $\bigoplus_{k=-1}^{+\infty} \mathfrak{g}^{(k)}$ uma álgebra de Lie.

Definição 4.1.2. *Sejam $p, q \geq 0$ números naturais. Então, definimos o*

seguinte complexo duplo

$$C^{p,q} = \mathfrak{g}^{(p-1)} \otimes \Lambda^q(V^*)$$

Se $v \in V$ e $\alpha \in \mathfrak{g}^{(k)}$, temos

$$[v, \alpha] = \alpha(v) \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$$

Dado $s \in C^{p,q}$, definamos

$$\delta(s)(u, v) = D_u(s \circ v) - D_v(s \circ u), \delta(s) \in C^{p-1, q+1}$$

uma derivação de bigrau $(-1, 1)$. Se calcularmos δ^2 veremos que $\delta^2 = 0$, ou seja, δ é uma derivação

Definição 4.1.3. *Os grupos de cohomologia de Spencer são definidos como*

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}) = \frac{\ker \delta^{p,q}}{\text{Im}(\delta^{p+1, q-1})}$$

Os grupos de cohomologia de Spencer contém informações sobre a obstrução da integrabilidade de uma G -estrutura, através de tensores com valores nestes grupos.

4.2 Contato de k -ésima ordem e jatos.

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis tais que $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, de modo que f seja uma equivalência de G -estruturas em M e N , respectivamente.

Definição 4.2.1. *Sejam M uma variedade suave e M_1 e M_2 duas subvariedades de mesma dimensão n que possuem um ponto comum x . Dizemos que M_1 e M_2 têm **contato de k -ésima ordem em p** se é possível encontrar um sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_n)$ de M em torno de x , de modo que para M_1 , $y_j = 0, m+1 \leq j \leq n$ e para M_2 $y_j = f_j(y_1, \dots, y_m), m+1 \leq j \leq n$, com todas as derivadas de ordem menor ou iguais a k de f_j anulando-se.*

Definição 4.2.2. *Sejam M_1 e M_2 duas variedades suaves e $f, f' : U \rightarrow V$ funções suaves de uma vizinhança U de $x \in M_1$ em V uma vizinhança de $y = f(x) = f'(x) \in M_2$. Estas funções **concordam até ordem k em x***

se têm a mesma expansão de Taylor até a k -ésima ordem ($k \in [0, \infty]$) em alguma carta coordenada em torno de x e y . O k -**jato em** x é a classe de equivalência de todas as funções que concordam até a ordem k em x e denota-se por $j_x^k(f)$. O ponto x é chamado de **origem** do jato e $f(x)$ o **alvo** do jato.

Definição 4.2.3. Sejam $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ G -estruturas em M_1 e M_2 , respectivamente e $f : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo e $x \in M_1 \cap M_2$. A função f preserva G -estruturas até k -ésima ordem se se algum referencial de $\mathcal{S}_x^1$ é levado por df_x em outro referencial de $\mathcal{S}_{f(x)}^2$ e $f(\mathcal{S}^1)$ e $\mathcal{S}^2$ têm contato de k -ésima ordem.

Vamos denotar $J_x^k(M, N)$ o conjunto dos jatos de ordem k das funções $f : M \rightarrow N$ com origem em x . Se $l < k$, existe uma projeção $\pi_l^k : J_x^k(M, N) \rightarrow J_x^l(M, N)$, $j_x^k(f) \mapsto j_x^l(f)$

Observação 11. Se tomarmos uma outra função g que tem o mesmo $(k+1)$ -jato de f em x , as condições da definição são igualmente satisfeitas. Assim, a definição anterior não depende de f em si mas do $(k+1)$ -jato de f em x . Portanto, podemos dizer que um $j_x^{k+1}f$ preserva a estrutura até ordem k .

4.3 Fibrados referenciais e forma tautológica

Definição 4.3.1. O k -ésimo fibrado referencial é o conjunto

$$Fr^k(M) = \{j_0^{k+1}f | f \text{ é um difeomorfismo local de } M \text{ em } V\}$$

Quando $k = 0$, obtemos o fibrado referencial do capítulo anterior: $Fr^0(M) = \{\phi : V \rightarrow T_x M : \phi \text{ é isomorfismo linear}\}$.

$$GL_n^k = \{j_0^{k+1}g | g : V \rightarrow V \text{ é difeomorfismo que leva } 0 \text{ em } 0\}$$

$$E^k = \{j_0^{k+1}f | f : V \rightarrow M \text{ preserva estrutura até } k\text{-ésima ordem em } 0\}.$$

$$E_0^k = \{j_0^{k+1}f \in Fr^k(M) | f : V \rightarrow V \text{ preserva estrutura até } k\text{-ésima ordem em } 0\}.$$

$$G^k = \{j_0^{k+1}g \in GL_n^k | g \text{ preserva estrutura standart até } k\text{-ésima ordem em } 0\}$$

Observação 12. $E = E^1$ é a G -estrutura cuja integrabilidade queremos investigar e E_0 a G -estrutura padrão e $E^k \rightarrow M$ é um G^k -fibrado principal.

Pela decomposição de um jato em suas derivadas, obtemos um isomorfismo

$$J_0^k TV \simeq V \oplus \mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{gl}^{(1)} \oplus \mathfrak{gl}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}^{(k-1)}$$

Vamos definir o seguinte colchete

$$[,] : J_0^k TV \times J_0^k TV \longrightarrow J_0^{k-1} TV$$

$$[j_0^k X, j_0^k Y] = j_0^{k-1} [X, Y]$$

Este colchete está bem definido pois o resultado depende dos $k - \text{jatos}$ em 0 de X e Y , que não dependem de X e Y .

Consideremos a aplicação

$$\Phi : J_0^{k+1} TV \longrightarrow T_{j_0^{k+1} f} Fr^k(M)$$

$$\Phi(j_0^{k+1} X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} j_0^{k+1} (f \circ \exp(tX))$$

Definição 4.3.2. A *forma tautológica de ordem k* $\theta^k \in \Omega^1(Fr^k(M), J_0^k TV)$, é definida como

$$\theta_{j_0^{k+1} f}^k = \Phi^{-1} \circ d_{j_0^{k+1} f} \pi_{k-1}^k$$

onde $\pi_{k-1}^k : Fr^k(M) \rightarrow Fr^{k-1}(M)$ é a projeção.

Seja $\rho : GL^k \longrightarrow Aut(J_0^k TV)$,

$$\rho(j_0^{k+1} h)(j_0^k X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} j_0^k (h \circ \exp(tX) \circ h^{-1})$$

uma representação.

Lema 4.3.1.

$$R_g^* \theta^k = \rho(j_0^{k+1} h) \theta^k$$

Demonstração. Seja $\tilde{X} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} j_0^{k+1}(f \circ \exp(tX))$ em $j_0^{k+1}f \in Fr^k$. Então

$$\begin{aligned} R_g^* \theta^k(\tilde{X}) &= \theta_{j_0^{k+1}(f \circ h)}^k(d_{j_0^{k+1}f} R_g(\tilde{X})) \\ &= \theta_{j_0^{k+1}(f \circ h)}^k \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} j_0^{k+1}(h \circ \exp(tX) \circ h^{-1}) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} j_0^k(h \circ \exp(tX) \circ h^{-1}) \\ &= \rho(j_0^{k+1}h) \theta^k \end{aligned}$$

□

Proposição 4.3.1. *Seja $\tau : J_0^k TV \longrightarrow J_0^{k-1} TV$ projeção. Então*

$$d\tau \theta^k + \frac{1}{2}[\theta^k, \theta^k] = 0$$

Demonstração. Sejam

$$\bar{X} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} j_0^k(f \circ \exp(tX)), \bar{Y} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} j_0^k(f \circ \exp(tY))$$

vetores em $T_{j_0^{k+1}f} Fr^k(M)$, com $X, Y \in \Gamma(TV)$.

Assim,

$$\begin{aligned} d\theta^k(\bar{X}, \bar{Y}) &= \underbrace{\bar{X}(\theta^k(\bar{Y}))}_{=0(\theta^k(\bar{Y}))cte.} - \underbrace{\bar{Y}(\theta^k(\bar{X}))}_{=0(\theta^k(\bar{X}))cte.} - \theta^k([\bar{X}, \bar{Y}]) \\ &= \theta^k([\bar{X}, \bar{Y}]) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \theta^k([\bar{X}, \bar{Y}]) &= [\theta^k(\bar{X}), \theta^k(\bar{Y})] \\ &= \frac{1}{2}[\theta^k \theta^k](\bar{X}, \bar{Y}) \end{aligned}$$

Temos

$$\tau \theta^k[\bar{X}, \bar{Y}] = [\theta^k(\bar{X}), \theta^k(\bar{Y})]$$

□

4.4 Funções estruturais

Podemos escrever a forma tautológica como

$$\theta^k = \omega \oplus \Omega^0 \oplus \dots \oplus \Omega^{k-1}$$

em que $\omega, \Omega^0, \dots, \Omega^{k-1}$ são as partes homogêneas de θ^k : $\omega \in \Omega^1(Fr^k(M), V), \Omega^i \in (Fr^k(M), \mathfrak{g}^{(i)})$

Sejam E uma G -estrutura e $j_0^{k+1}f \in E^k$. Seja H um espaço horizontal contido em $T_\phi E^k$, no qual as formas $\Omega^0|_H = \dots = \Omega^{k-1}|_H = 0$. Em geral, tal subespaço não é único.

Seja $\pi^k : E^k \rightarrow M$ a projeção e $\zeta := (d_\phi \pi^k|_H)^{-1}$, onde $\phi = j_0^{k+1}f \in E^k$. Então, definamos a função

$$\Pi_H : \Lambda^2 V \longrightarrow V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$$

$$\Pi_H(u, v) = d\theta^k(\zeta(f_*u), \zeta(f_*v))$$

Podemos escrever Π_H como uma soma

$$\Pi_H = \Pi_H^{(-1)} \oplus \Pi_H^{(0)} \oplus \dots \oplus \Pi_H^{(k-1)}$$

ou seja, $\Pi_H^{(j)}, j = -1, \dots, k-1$ são suas partes homogêneas.

Proposição 4.4.1.

$$\Pi_H^{(i)} = 0, \text{ para } i < k-1.$$

Demonstração. Seja $d\Omega^i \circ H$ a parte horizontal de $d\Omega^i$.

Provemos que vale a identidade

$$d\Omega^i \circ H = d\Omega^i + \frac{1}{2}([\omega, \Omega^{i+1}] + [\Omega^0, \Omega^i], \dots, [\Omega^{i+1}, \omega]). \quad (4.1)$$

Cada lado desta igualdade é horizontal, de modo que, se aplicarmos os a vetores verticais, ambos anular-se-ão.

Mas as partes homogêneas anulam-se em vetores horizontais, de modo que ao aplicar o lado direito em m vetores horizontais u, v , obtemos $d\Omega^i(u, v)$. Mas obtemos a mesma coisa do lado direito, de modo a valer a identidade.

O lado direito é identicamente nulo, para $i, k-1$; basta usar a proposição 4.3.1

□

Ao diferenciar ambos os lado direito (1.1), quando $i = k - 2$, obtemos

$$[d\Omega^{k-1} \circ H, \omega] = 0.$$

Ou seja, $\delta\Pi_H^{(k-1)} = 0$, de modo que a induzir uma classe de cohomologia $[\Pi_H^{(k-1)}] \in H^{k,2}(\mathfrak{g})$.

Proposição 4.4.2. *A classe $[\Pi_H^{(k-1)}]$ não depende da escolha do espaço horizontal H .*

Demonstração. Sejam H e H' duas escolhas de espaço horizontal. Definamos $s_{H,H'} : V \longrightarrow \mathfrak{g}^{(k)}$

$$a(s_{H,H'}(u))_\phi = \zeta(f_*u) - \zeta'(f_u)$$

onde $a : V \rightarrow V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$ é o função de geradores infinitesimais e ζ' o levantamento horizontal em relação a H . Como H e H' são aniquilados por $\Omega^0, \dots, \Omega^{k-1}$, então $s_{HH'}$ assume, de fato, valores em $\mathfrak{g}^{(k)}$.

Vamos mostrar que $\Pi_{H'}^{(k-1)} - \Pi_H^{(k-1)} = \delta s_{HH'}$.

$$\begin{aligned} \Pi_{H'}^{(k-1)}(u, v) - \Pi_H^{(k-1)}(u, v) &= d\theta^{k+1}(\zeta'(f_*u), \zeta'(f_*v)) - d\theta^{k+1}(\zeta(f_*u), \zeta(f_*v)) \\ &= d\theta^{k+1}(a(s_{H,H'}(v)), \zeta'(f_*u)) - d\theta^{k+1}(a(s_{H,H'}(v))\zeta'(f_*u)) \\ &= (a(s_{HH'}(v)) \lrcorner d\theta^{k+1})(\zeta(f_*u)) - (a(s_{HH'}(u)) \lrcorner d\theta^{k+1})(\zeta(f_*v)) \end{aligned}$$

Ao diferenciarmos a condição $R_g^*\theta^{k+1} = g^{-1}\theta^{k+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} (a(s_{HH'}(v)) \lrcorner d\theta^{k+1})(\zeta(f_*u)) &= (\mathcal{L}_{a(s_{HH'}(v))}\theta^{k+1})(\zeta(f_*u)) \\ &= -s_{HH'}(v)u. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\Pi_{H'}^{(k-1)}(u, v) - \Pi_H^{(k-1)}(u, v) = s_{HH'}(u)v - s_{HH'}(v)u \quad (4.2)$$

□

Seja $c^k : E^k \longrightarrow H^{k,2}(\mathfrak{g})$ a função que associa a cada ponto de E^k a uma classe de cohomologia de $H^{k,2}(\mathfrak{g})$. Essa função é chamada de **k-ésimo**

tensor de estrutura de E .

4.5 G-estruturas uniformemente k -integráveis

Definição 4.5.1. *Uma G -estrutura é **uniformemente k -integrável** se, em cada ponto $x \in M$, existe um $(k+1)$ -jato de origem em x e alvo em $0 \in V$ que preserva estrutura até k -ésima ordem.*

A integrabilidade G -estruturas depende de $H^{i,j}$, que anula-se para i suficientemente grande de modo que a integração de uma G -estrutura é determinada por um número finito de passos.

Teorema 4.5.1. *Suponhamos que $E \rightarrow M$ é uniformemente k -integrável e seja $x \in M$. Se o k -ésimo tensor de estrutura anula-se em x , existe um $(k+2)$ -jato com origem em $0 \in V$ e alvo em x que preserva estrutura até $(k+1)$ -ésima ordem.*

Demonstração. Seja $\phi \in E^k$ na fibra sobre x . O fato de c^k anular-se implica na existência de um espaço horizontal H para o qual $d\Omega^{k-1} \circ H = 0$, ou seja,

$$d\Omega^{k-1} + \frac{1}{2}([\omega, \Omega^k] + [\Omega^0, \Omega^{k-1}] + \dots + [\Omega^k, \omega]) = 0 \quad (4.3)$$

e se $X \in \mathfrak{g}^k$ onde o correspondente vetor $\tilde{X} \in T_\phi E^k$, $\Omega^k \tilde{X}$ é a componente de X em $\mathfrak{g}^{(k)}$.

A 1-forma $\omega \oplus \Omega^0 \oplus \dots \oplus \Omega^{k-1}$ estabelece uma função $\gamma : T_\phi E^k \rightarrow T_{i_k} E_0^k$. Podemos estendê-la a uma função $\bar{\gamma} : T_\phi F^k \rightarrow T_{i_k} F_0^k$. Vamos provar que esta função é induzida por algum $(k+2)$ -jato de alguma função $M \rightarrow V$, com fonte x e alvo 0 .

Considerando $(f_1, \dots, f_k)$ as funções que definem $\bar{\gamma}$, e a proposição 4.4.1, cada $(k+2)$ -jato induz 1-jatos satisfazendo equações análogas a 4.3 e quantidade desses $(k+2)$ -jatos que estendem $(k+1)$ -jatos é igual ao número de soluções de tais equações.

Sendo $j_x^{k+2} f$ o jato que origina $\bar{\gamma}$, a função f preserva até $k+1$ -ésima ordem pois é uma função $T_\phi E^k \rightarrow T_{i_k} E_0^k$.

□

4.6 G-estruturas de tipo finita

Definição 4.6.1. *Um subgrupo $G \subseteq GL_n$ é **de tipo finito** se existe $k \geq 0$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. Se k é tal que $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ então a G é dito **de tipo finito do tipo k** .*

Teorema 4.6.1. *Seja G um grupo do tipo k . Então toda G -estrutura $(k+1)$ -uniformemente integrável será integrável.*

Demonstração. Como $H^{k+1,2}(\mathfrak{g}) = 0$, a função c^{k+1} será nula. Desse modo, pelo teorema 4.5.1, a G -estrutura será $(k+2)$ -integrável.

Além disso, já que $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k+1)} = 0$, então E^{k+1} e E^{k+2} projetam-se isomorficamente sobre E^k . Dessa maneira, também são idênticas as formas θ^{k+1} e θ^{k+2} .

Como provamos, vale a relação

$$d\tau\theta^{k+1} + \frac{1}{2}[\theta^{k+1}, \theta^{k+1}] = 0$$

e, pelo Teorema A.5.1, existe um difeomorfismo $f : U \subseteq E^k \longrightarrow E_0^k$, com $f^*\theta_0^k = \theta^k$, onde $E_0^k = V \rtimes G^k$ é a G -estrutura standart de $V = \mathbb{R}^n$, que é identificada com o grupo dado pelo produto semi-direto e θ_0^k é a forma de Maurer-Cartan deste grupo.

Assim, f induz uma aplicação $\gamma : W \subseteq M \longrightarrow V$ com levantamento $\gamma' : E \longrightarrow E_0$.

□

Apêndice A

Apêndice

A.1 Variedades: quocientes

Definição A.1.1. Se M é uma variedade e $M \times G \longrightarrow M$ é uma ação á direita de um grupo de Lie, então a ação é dita

1. **livre** se $xg = g$ então $x = e$
2. **própria** se a aplicação $M \times G \longrightarrow M \times M, (x, g) \mapsto (x, xg)$ é própria: a imagem inversa de todo compacto contido no contra domínio por essa aplicação é uma compacto contido no domínio.

Teorema A.1.1. Seja M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência M . São equivalentes:

1. Existe uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \longrightarrow M/\sim$ é uma submersão.
2. O gráfico de $R = \{(x, y) \in M \times M : p \sim q\}$ é uma subvariedade própria de $M \times M$ e a projeção $p_1 : M \times M \longrightarrow M$ restrita a R é uma submersão.

Demonstração. Ver [Fer03], página 43. □

Teorema A.1.2. Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável e $a : M \times G \longrightarrow M$ uma ação á direita diferenciável, livre e própria. Então M/G possui estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão. Em particular, $\dim M/G = \dim M - \dim G$.

Demonstração. (Retirado de [Fer03])

Relembrando que a relação de equivalência é dada por:

$$x \sim y, x, y \in M \iff \exists g \in G \text{ tal que } xg = y.$$

Vamos aplicar o teorema anterior a esta relação, verificando que

$$\Gamma = \{(x, xg) : x \in M, g \in G\} \subseteq M \times M$$

é uma subvariedade própria e a projeção $pr_1|_\Gamma : \Gamma \longrightarrow M$ é uma submersão.

Vamos considerara a função

$$\rho : M \times G \longrightarrow M \times M, \rho(xg) = (x, xg).$$

A imagem de ρ é exatamente Γ . A ação é livre, de modo que ρ é injetora. Seja sua diferencial em (x, g) a função

$$d_{(x,g)}\rho : T_x M \times T_g G \longrightarrow T_x M \times T_{xg} M$$

dada por

$$d_{(x,g)}\rho(u, v) = (u, u d_x a + v d_g a).$$

A ação a_x é uma imersão, portanto injetora. Assim, ρ é uma imersão injetora cuja imagem é Γ . Por hipótese, ρ é própria, de modo que Γ é uma subvariedade própria de $M \times M$.

A composição $pr_1 \circ \rho : M \times G \longrightarrow M$ é definida por $\rho(p, g) = p$ é uma submersão. Logo, $pr_1|_\Gamma$ é uma submersão. $\square$

A.2 Cálculos de Cartan

(Baseado em [Lee97] e [Tu10])

A.2.1 Derivada de Lie de um campo vetorial

Sejam M uma variedade diferenciável, $p \in M, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varphi :]\varepsilon, \varepsilon[\times U \longrightarrow M$ um fluxo local de X em U uma vizinhança de p .

Definição A.2.1. A *derivada de Lie* de Y com respeito a X em P é dado

por

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(Y_{\varphi_t(p)}) - Y_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* Y)_p - Y_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* Y)_p$$

Teorema A.2.1. *Se X e Y são campos suaves em M , então $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$*

Demonstração. Ver [Tu10], página 225. $\square$

A.2.2 Contração ou produto interior

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n . Considere $v \in V$ e $\omega \in \Lambda^k(V)$.

Definição A.2.2. *Chamamos de **produto interior** ou **contração de ω por v** à função linear $i_v : \Lambda^k(V^*) \longrightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$ tal que*

$$i_v \omega(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega(v, w_1, \dots, w_{k-1})$$

Denota-se $i_v \omega$ também por $v \lrcorner \omega$

Proposição A.2.1. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita n e $v \in V$. Então:*

1. $i_v \circ i_v = 0$
2. se $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e $\tau \in \Lambda^l(V^*)$, então

$$i_v(\omega \wedge \tau) = i_v \omega \wedge \tau + (-1)^k \omega(i_v \tau) \quad (\text{A.1})$$

Demonstração. 1. Se $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, então

$$\begin{aligned} i_v(i_v(\omega)) &= i_v(\omega(v, w_1, \dots, w_{k-1})) \\ &= \omega(v, v, w_1, \dots, w_{k-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Basta considerar o caso em que as formas decomponíveis já que todo tensor de posto positivo é combinação linear de outro decomponíveis. É suficiente provar

$$i_v(\omega \wedge \dots \wedge \omega^k) = \sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} \omega^i(v) \omega \wedge \dots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \dots \wedge \omega^k$$

Adotando $v_1 = v$, temos:

$$(\omega \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \det[\omega^i(v_j)]$$

Por outro lado

$$\sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) (\omega \wedge \dots \wedge \hat{\omega}^i \wedge \dots \wedge \omega^k)(v_2, \dots, v_k) = \sum_{i=1}^{i-1} (-1)^{i-1} \omega^i(v_1) \det[M_{ij}]$$

em que $[M_{ij}]$ é a matriz obtida de $[\omega^i(v_j)]$ ao eliminar-se a linha i e a coluna j .

□

A.2.3 Derivadas de Lie em formas diferenciais

Definição A.2.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ suave, $\omega \in \Omega^k(M)$. A derivada $\mathcal{L}_X \omega$ em $x \in M$ é*

$$(\mathcal{L}_X \omega)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*(\omega_{\varphi_t(x)}) - \omega_x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* \omega)_x - \omega_x}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* \omega)_x$$

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial suave e $\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$

Proposição A.2.2. *Se f é uma função suave em M e X um campo vetorial suave em M então $\mathcal{L}_X f = Xf$.*

Demonstração. Se φ é o fluxo de X , então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X d\omega &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* f)_x \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(x) \\ &= X_x f \end{aligned}$$

□

Proposição A.2.3. *Seja M uma variedade suave e $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega, \tau \in \Omega^*(M)$. Então*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\tau)$$

Demonstração. Seja $x \in M$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau))_x &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^*(\omega \wedge \tau)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_x \wedge (\varphi_t^*\tau)_x \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^*\omega)_x \wedge \tau_x + \omega_x \wedge \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^*\tau)_x \\ &= (\mathcal{L}_X\omega)_x \wedge \tau_x + \omega_x \wedge (\mathcal{L}_X\tau)_x \end{aligned}$$

□

Proposição A.2.4. *A derivada de Lie comuta com d : se X é um campo vetorial suave e ω uma diferencial suave, então*

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X d\omega &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* d\omega \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\varphi_t^* \omega \\ &= d \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega \right) \\ &= d\mathcal{L}_X\omega \end{aligned}$$

□

Proposição A.2.5 (Fórmula mágica de Cartan).

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d,$$

onde d é a derivada exterior.

Demonstração. A verificação do resultado é local, de modo a assumir que há uma carta em torno de certo ponto $x \in M$ para a qual as coordenadas

são $x^1, \dots, x^n$. Assim, podemos assumir $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Ambos os membros das fórmulas são derivações que comutam com d , de modo que a validade dela para duas forma ω e τ garante a validade para $d\omega$ e $\omega \wedge \tau$. Isso implica que a verificação daquela fórmula faz-se checando que $\mathcal{L}_X f = (di_X + i_X d)f$, para f uma função suave no domínio da carta. Mas

$$\begin{aligned} (di_X + i_X d)f &= di_X f + i_X df \\ &= d(i_X f) + i_X df \\ &= d(0) + df(X) \\ &= Xf \\ &= \mathcal{L}_X f \end{aligned}$$

□

A.3 Conexão de Levi-Civita

(Baseado em [Tu17])

Definição A.3.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana (M, g) é livre de torção se sua torção é nula, ou seja,*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição A.3.2. *Uma conexão é compatível com a métrica se*

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

para qualquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Lema A.3.1. *Um campo vetorial suave X em uma variedade riemanniana (M, g) é unicamente determinado pelos valores $g(X, Z)$, para todo Z campo vetorial em M .*

Demonstração. Devemos mostrar que se $g(X, Z) = g(X', Z)$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ então $X = X'$. Isso equivale a provar que se $g(X, Z) = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ então $X = 0$.

Vamos tomar $Z = X$. Então

$$g(X, X) = 0 \Rightarrow g_x(X_x, X_x) = 0, \forall x \in M \Rightarrow X_x = 0, \forall x \in M \Rightarrow X = 0$$

□

Teorema A.3.1. *Se (M, g) uma variedade riemanniana, então existe uma única conexão $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ livre de torção e compatível com a métrica g .*

Demonstração. Pela compatibilidade temos

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Das equações anteriores, vamos somar as duas primeiras e subtrair a terceira. Vamos combinar os termos usando também a condição de livre torção:

$$\nabla_X T \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\nabla_Y Z \nabla_Z Y = [Y, Z]$$

$$\nabla_Z X \nabla_X Z = [Z, X]$$

Obtemos assim

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(X, [Z, Y]) \end{aligned}$$

Pela fórmula acima para definir a conexão, pelo lema anterior, temos a unicidade os valores de $\nabla_X Y$ e, portanto, da conexão.

Vamos provar a existência mostrando que a conexão definida pela mesma forma tem as propriedades requeridas. Vamos chamar o lado direito dela de $\zeta(X, Y, Z)$.

A função ζ é C^∞ -linear em X e Y :

$$\begin{aligned}
\zeta(fX, Y, hZ) &= fXg(Y, Z) + Yfhg(Z, X) - hZg(X, Y) \\
&\quad + hg(Z, [fX, Y]) + g(Y, [hZ, fX]) + fg(X, [hZ, Y]) \\
&= fhXg(Y, Z) + fhYg(Z, X) - fhZg(X, Y) \\
&\quad + f(Xh)g(X, Y) + fY(h)g(Z, X) + hY(f)g(Z, X) - hZ(f)g(X, Y) \\
&\quad + hf g(Z, [X, Y]) + hf g(Y, [Z, X]) + fhg(X, [Z, Y]) \\
&\quad - hY(f)g(Z, X) - fX(h)g(Y, Z) + hZ(f)g(Y, X) - fY(h)g(X, Z) \\
&= fh\zeta(X, Y, Z)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X(fY), Z) &= fg(\nabla_X Y, Z) + X(f)g(X, Y) \\
&= g(f\nabla_X + X(f)Y, Z)
\end{aligned}$$

de maneira que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

□

Definição A.3.3. A conexão acima definida no teorema anterior é chamada de **conexão riemanniana** ou **conexão de Levi-Civita**.

A.4 Lema ou Truque de Moser Local

Lema A.4.1 (Lema ou Truque de Moser Local). *Seja $(\omega_t)_{t \in [0,1]}$ uma família de formas simpléticas diferenciáveis em t . Então, para $x \in M$, existe U um aberto em torno de x e $g_t : U \rightarrow U$ tal que $g_0^* = id$ e $g_t^* \omega_t = \omega_0$.*

Demonstração. (Baseado em [Les14])

Vamos procurar uma família X_t de campos vetoriais em U de modo que

$$\frac{d}{dt}g_t(p) = X_t(g_t(p)), g_0(p) = p$$

.

Usando a fórmula mágica de Cartan na derivação de $g_t^* \omega_t = \omega_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_t^* \omega_t &= g_t^* \left(\frac{d}{dt} \omega_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t \right) \\ &= g_t^* \left(\frac{d}{dt} \omega_t + di_{X_t} \omega_t \right) \end{aligned}$$

O lema de Poincaré nos diz que, localmente, toda forma fechada é exata. A forma ω_t é fechada: $d \frac{d}{dt} \omega_t = \frac{d}{dt} d\omega_t = 0$. Assim Em torno de x há um aberto para o qual existe η_t tal que $\frac{d}{dt} \omega_t = \eta_t$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_t^* \omega_t &= g_t^* (d\eta_t + di_{X_t} \omega_t) \\ &= g_t^* d(\eta_t + i_{X_t} \omega_t) \end{aligned}$$

Devemos encontrar g_t como no enunciado, de maneira que $\frac{d}{dt} g_t^* \omega_t = 0$, ou seja

$$\eta_t + i_{X_t} \omega_t$$

Como ω_t é não degenerada, a equação anterior tem solução com respeito a X_t e define $(g_t)_{t \in [0,1]}$. Se $(x_1, \dots, x_{2m})$ são coordenadas locais para M então

$$\begin{aligned} \eta_t &= \sum_{k=1}^{2m} \eta_k(t, x) dx_k, X_t = \sum_{k=1}^{2m} X_k(t, x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ i_{X_t} \omega_t &= \sum_{l,k=1}^{2m} (2\omega_k^l X_k) dx_l, \omega_t = \sum_{l,k=1}^{2m} \omega_k^l(t, x) dx_k \wedge dx_l \end{aligned}$$

e assim, o sistema de equações a ser resolvida é

$$\eta_t(t, x) + 2 \sum_{k=1}^{2m} \omega_k^l X_k(t, x) = 0.$$

ω_t é não degenerada. Logo, $[\omega_k(t, x)]$ é matriz não-degenerada e, portanto, o sistema anterior tem solução única que determina os campos X_t e, consequentemente, (g_t) como desejada.

□

A.5 Propriedade Universal de Maurer-Cartan

Teorema A.5.1. *Seja $\eta \in \Omega^1(E, \mathfrak{h})$, tal que $d\eta + \frac{1}{2}[\eta, \eta] = 0$. Então existe $U \subseteq E$ vizinhança de x tal que há uma única $f : U \rightarrow H$ de modo que $f(x) = e_H$ e $f^*\omega_{MC} = \eta$, sendo ω_{MC} a forma de Maurer-Cartan.*

Além disso, se $\dim E = \dim H$ então f é um difeomorfismo.

Demonstração. Definamos em $E \times H$ a forma $\Omega = pr_E^*\eta - pr_E^*\omega_{MC}$.

Seja $D \subseteq T(E \times H)$ onde

$$D_{(x,g)} = \{(u, \alpha) \in T_x E \times T_g H : pr_M^*\eta(u) - pr_M^*\omega_{MC}(\alpha) = (pr_M^*\eta - pr_M^*\omega_{MC})(u, \alpha) = 0\}.$$

Vamos provar que o posto de $D_{(x,h)}$ é constante. Consideremos a função $D_{(x,h)} \rightarrow T_x E, (u, \alpha) \mapsto u$. Esta é um isomorfismo cuja inversa é

$$T_x E \rightarrow D_{(x,h)}, u \mapsto (u, d_e R_h(\eta_x(u)))$$

Assim, $\text{posto} D_{(x,h)} = \text{posto} E$.

Vamos provar agora que $\ker \Omega$ é involutivo: sejam $\xi_1, \xi_2 \in \ker \Omega$. Primeiro, observemos que

$$\Omega = pr_E^*\eta - pr_E^*\omega_{MC} \Rightarrow pr_E^*\eta = \Omega + pr_E^*\omega_{MC}$$

Então

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega_{MC} - d\eta \\ &= \frac{1}{2}([\omega_{MC}, \omega_{MC}] - [\eta, \eta]) \\ &= \frac{1}{2}([\omega_{MC}, \omega_{MC}] - [\Omega + \omega_{MC}, \Omega + \omega_{MC}]) \\ &= -\frac{1}{2}([\Omega, \Omega] + [\Omega, \omega_{MC}] + [\omega_{MC}, \Omega]) \end{aligned}$$

Consequentemente, se $\Omega(\xi_1) = \Omega(\xi_2) = 0$ então $d\Omega(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Vamos provar que se $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\ker \Omega)$ então $[\xi_1, \xi_2] \in \Gamma(\ker \Omega)$. Temos

$$d\Omega(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\Omega(\xi_2) - \xi_2\Omega(\xi_1) - \Omega([\xi_1, \xi_2])$$

Assim

$$\Omega([\xi_1, \xi_2]) = -d\Omega(\xi_1, \xi_2) = 0.$$

Próximo passo será mostrar que D é transversal às fibras de π_E . Sabemos que $\pi_E \subseteq T_x E \times T_h H$ e $\ker d_{(x,h)}\pi_E = \{(0, \alpha) : \alpha \in T_g H\}$ e

$$D_{(x,h)} + \ker d_{(x,h)}\pi_E = T_x E \times T_h H.$$

A respeito das dimensões

$$\dim D_{(x,h)} + \dim \ker d_{(x,h)}\pi_E - \dim(D_{(x,h)} \cap \ker d_{(x,h)}\pi_E).$$

Mas $D_{(x,h)} \cap \ker d_{(x,h)}\pi_E = \{0\}$ pois $(u, \alpha) \in D_{(x,h)} \cap \ker d_{(x,h)}\pi_E = \{0\}$ implica $u = 0$ e daí, $\eta(u) = 0 = \omega_{MC}(\alpha)$ o que implica $\alpha = 0$.

Desse modo, foi provada a transversalidade de D .

Seja $N \subseteq E \times H$. a folha de D que passa por (x, e) . Como N é transversal a $\pi_E^{-1}(x)$, então N é localmente o gráfico de uma função $f : U \subseteq E \rightarrow H$.

Finalmente, $f^*\omega_{MC}(u) = \omega_{MC}(df(u))$. além disso, $(u, df(u)) \in TN$ de modo que

$$\Omega(u, df(u)) = 0 \Rightarrow \eta(u) - \omega_{MC} = 0 \Rightarrow \eta(u) = \omega_{MC}(df(u)).$$

de modo que,

$$f^*\omega_{MC} = \eta.$$

□

A.6 Exemplo não-integrável: variedades nearly Kähler

(Detalhes em [Gra70]).

Uma **variedade nearly Kähler** é uma estrutura quase Hermitiana (análogo da quase-Riemanniana em $\mathbb{C}$) dotada de uma estrutura quase complexa J , em que $\nabla_X J(X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, sendo ∇ não necessariamente de Levi-Civita.

Uma variedade Kähler é uma variedade Riemanniana, simplética e complexa. Toda variedade desse tipo é nearly Kähler mas não vale a recíproca.

Exemplo mais famoso de uma variedade nearly Kähler é a esfera S^6 que não é Kähler.

A.7 G_2 -estruturas

Sejam $\mathbb{O}$ a álgebra dos octônios, O grupo $Aut(\mathbb{O})$ dos automorfismo dos octônios é denotado por G_2 e denominado um dos **grupos de Lie excepcional** (de menor dimensão). Seu posto¹ é 2 e tem dimensão 14.

Se M é uma variedade tal que $dim M = 7$, então uma G_2 -estrutura é a redução do grupo estrutural do fibrado principal M ao grupo G_2 .

¹menor cardinalidade de um gerador do grupo

Referências Bibliográficas

- [Bel] Florin Belgun. Gauge theory. <https://www.math.uni-hamburg.de/home/belgun/Gauge4.pdf>. 38
- [Cra15] Marius Crainic. Mastermath course differential geometry 2015/2016. Utrecht University, Setembro 2015. 3, 41
- [dA17] Pedro Mendes de Araújo. Notes on the integrability problem for g-structures. Personal Notes, 2017. 69
- [Dem12] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. Université Grenoble I, 2012. 53
- [Dup03] John Dupont. Fibre bundles and chern-weyl theory. Aarhus Universitet, August 2003. 21, 22
- [Fer03] Rui Loja Fernandes. Lições de geometria diferencial. <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~rfern/GD/notas.pdf>, 2003. 79, 80
- [Gra70] Alfred Gray. Nearly kähler manifolds. *Journal of Differential Geometry*, Volume 4(Número 3):283–309, 1970. 89
- [Gui65] Victor Guillemin. The problem of integrability for g-structures. *Transactions of The American Mathematical Society*, 116:544–560, 1965. 2, 69
- [KN63] Soshichi Kobayashi e Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume I. Interscience Publishers, 1963. 24
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, 1997. 46, 80
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, segunda edição, 2013. 51
- [Les14] A. Lesfari. Morse’s lemma and the darbox theorem. *Universal Journal of Applied Mathematics*, 2014. 54, 86

- [NN57] A. Newlander e L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in a almost complex manifolds. *Annals of Mathematics*, 65(3), 1957. [53](#)
- [Sha97] R. W. Sharpe. *Differential Geometry*. Springer, 1997. [65](#)
- [Tu10] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, segunda edição, 2010. [80](#), [81](#)
- [Tu17] Loring W. Tu. *Differential Geometry*. Springer, 2017. [84](#)

Índice Remissivo

- G_2 -estruturas, 90
- 1-forma de conexão, 21
- ação
 - livre, 79
 - própria, 79
- carta adaptada, 42
- conexão
 - de Levi-Civita, 86
 - em fibrado principal, 20
 - riemanniana, 86
 - compatível com a métrica, 84
 - compatível com uma G-estrutura, 55
 - matrix de, 30
- conexões
 - em fibrados vetoriais, 28
 - em fibrados vetoriais, 38
- contato de k-ésima ordem, 71
- curva horizontal, 24
- curvatura
 - em fibrados principais, 26
 - em fibrados vetoriais, 33
- derivada de Lie, 82
 - de campos vetoriais, 80, 82
- derivada exterior, 35
- espaço horizontal, 20
- espaço vertical, 18
- estrutura
 - quase simplética, 53
 - simplética, 53
- estrutura quase complexa, 51
- Fórmula mágica de Cartan, 83
- fibração de Hopf, 9
- fibrado associado, 9
- fibrado referencial, 18
- fibrado vetorial, 15
 - pullback, 16
- folheação, 50
- forma de Maurer-Cartan, 65
- forma tautológica, 59
- forma tautológica de ordem k, 73
- forma volume, 48
- formas
 - em fibrados associados, 37
- funções estruturais, 43
- G-estrutura
 - uniformemente k-integrável, 77
- G-estrutura, 41
 - integrável, 42
- G-fibrado principal, 3
 - fibra, 4
 - morfismo de, 6
 - trivial, 4
 - trivializável, 6
- grupo do tipo finito
 - do tipo k, 78
- grupos de cohomologia de Spencer, 71
- isomorfismo
 - de G-estruturas, 42
- k-ésimo prolongamento, 69
- k-ésimo tensor de estrutura de E, 77
- k-jato, 72

- levantamento, [24](#)
- levantamento horizontal, [20](#)
- métrica riemanniana, [44](#)
- orientação, [47](#)
- prolongamento
 - primeiro, [57](#)
- Propriedade Universal de Maurer-Cartan, [88](#)
- redução do grupo estrutural, [39](#)
- referencial, [17](#)
 - fibrado vetorial, [16](#)
- seção
 - de fibrado principal, [7](#)
 - ao longo de uma curva, [31](#)
 - de fibrado vetorial, [15](#)
 - paralela, [31](#)
- subgrupo de tipo finito, [78](#)
- tensor de Nijenhuis, [52](#)
- torção
 - em fibrados vetoriais, [34](#)
 - espaço de, [58](#)
 - G-estruturas, [61](#)
 - intrínseca, [58](#)
- transporte paralelo
 - em fibrados vetoriais, [32](#)
- transporte paralelo
 - em fibrados principais, [25](#)
- Truque de Moser Local, [86](#)
- variedade nearly Kähler, [89](#)
- variedade riemanniana, [44](#)
- vetores
 - horizontais, [20](#)
 - verticais, [20](#)