**Sobre fluxos de Reeb tri-dimensionais:
existência implicada de órbitas
periódicas e uma caracterização
dinâmica do toro sólido.**

André Vanderlinde da Silva

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

Coorientador: Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
FAPESP - Número do processo: 2010/08364-3.

São Paulo, dezembro de 2014

**Sobre fluxos de Reeb tri-dimensionais:
existência implicada de órbitas
periódicas e uma caracterização
dinâmica do toro sólido.**

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/10/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo - IME-USP
- Prof. Dr. Salvador Addas Zanata - IME-USP
- Prof. Dr. Leonardo de Magalhães Macarini - UFRJ
- Prof. Dr. Joachin Weber - UNICAMP

*Dedico aos meus pais e
a minha namorada Ariana.*

Agradecimentos

À minha namorada Arianne, pelo apoio, incentivo, compreensão e, sobretudo, paciência durante estes quatro anos. As nossas conversas e a sua companhia foram fundamentais.

Aos meus pais, Antonio e Ede, pelo encorajamento e palavras de apoio desde o início dos meus estudos. Sem esta base, eu não teria conseguido.

Ao Professor Pedro Antonio Santoro Salomão, meu orientador, pela paciência com que sempre respondeu minhas dúvidas, mesmo as mais banais, pela disponibilidade e prestatividade, por apresentar uma área tão interessante e motivadora e sugerir futuros problemas de pesquisa.

Ao Professor Umberto Leone Hryniewicz, meu coorientador, pela hospitalidade durante a minha estada na UFRJ e sugestões de problemas para o doutorado e pesquisas posteriores.

Aos meus professores, em especial, Celso Melchades Doria, Edson de Faria, Eliezer Martins, Geraldo Moretto, Ivan Pontual Costa e Silva, Marcelo Marcus Veiga, Nelson Hein, Tânia Baier, Vera Pessoa e Walker Teles Walter, por serem exemplos de trabalho e decisivos na escolha e permanência na vida acadêmica.

Aos meus amigos, Adriana Koch, Bruno Leonardo Macedo Ferreira, Bruno Ropelato, Bruno Tadeu da Costa, Calisto José Sevegnani, Clóvis Reis Júnior, Daiane Koling, Diego Koling, Fabiano Carlos Cidral, Fernanda Rocha, Gustavo de Lima Prado, Heloisa Patrício, Leandro Augusto Lichtenfelz, Leonardo Garcia dos Santos, Marcio Ropelato, Naiara Vergian de Paulo e Thiago Krieger.

À FAPESP pelo apoio financeiro através do processo número: 2010/08364-3. Este auxílio foi fundamental para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Resumo

SILVA, A. V. **Sobre fluxos de Reeb tri-dimensionais: existência implicada de órbitas periódicas e uma caracterização dinâmica do toro sólido.** 2014. 194 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho, estudamos a dinâmica de Reeb associada a uma forma de contato λ definida numa 3-variedade compacta e conexa M . Assumimos que λ é *tight* e a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ satisfaz $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. No nosso primeiro resultado, supomos que M é fechada. Se existe uma órbita fechada L do fluxo de Reeb que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, cujos números de auto-enlaçamento e de rotação transversal satisfazem, respectivamente, $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ e $\rho(L^p) < 1$, provamos que existe uma órbita fechada contrátil P geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\rho(P) = 1$. Apresentamos também uma versão deste resultado para o caso em que M é uma 3-variedade cujo bordo é difeomorfo a um toro e invariante pelo fluxo de Reeb e não existem órbitas fechadas contidas no bordo. Nosso segundo resultado é uma caracterização dinâmica do toro sólido. Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida em uma 3-variedade M cujo bordo é difeomorfo a um toro e invariante pelo fluxo de Reeb. Se o fluxo de Reeb satisfaz certas hipóteses de torção sobre o bordo, provamos que ou existe uma órbita fechada contrátil com índice de Conley-Zehnder 2 ou M é folheada por discos transversais ao campo de Reeb. Neste último caso, M é difeomorfa a um toro sólido e existe uma órbita fechada não-contrátil em M que é ponto fixo da aplicação de retorno induzida pela folheação.

Palavras-chave: Variedades de contato, dinâmica de Reeb, curvas pseudo-holomorfas em simplificações, órbitas periódicas, folheações transversais.

Abstract

SILVA, A. V. **On three-dimensional Reeb flows: implied existence of periodic orbits and a dynamical characterization of the solid torus.** 2014. 194 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work, we study the Reeb dynamics associated to a tight contact form λ defined on a compact, connected 3-manifold M which satisfies $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi = \ker \lambda) \equiv 0$. In our first result, we assume that M is closed and there exists a closed Reeb orbit L which is a p -unknotted, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, whose self-linking number and transverse rotation number satisfy, respectively, $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ e $\rho(L^p) < 1$. Under these conditions we verify that there exists a contractible closed Reeb orbit P geometrically distinct from L and not linked to L satisfying $\rho(P) = 1$. We also prove a version of this result when M is a compact 3-manifold M whose boundary is diffeomorphic to a torus and invariant by the flow and, moreover, there does not exist closed Reeb orbits on the boundary. Our second result is a dynamical characterization of the solid torus. We assume that λ is a contact form on a compact 3-manifold M whose boundary is diffeomorphic to a torus. Under the hypothesis of λ being non-degenerate, if the flow is tangent to ∂M and satisfies some twist conditions on the boundary, then either there exists a contractible closed Reeb orbit which has Conley-Zehnder index 2 or M is foliated by disks transverse to the Reeb flow. In this last case, we see that M is diffeomorphic to a solid torus and there exists a non-contractible closed Reeb orbit M which is a fixed point of the return map induced by the foliation.

Keywords: Contact manifolds, Reeb dynamics, pseudo-holomorphic curves in symplectizations, closed orbits, transverse foliations.

Sumário

Introdução	viii
1 Introdução à Dinâmica Simplética	5
1.1 Noções Preliminares	5
1.2 Índices Dinâmicos	18
1.2.1 Índices de curvas de matrizes simpléticas	19
1.2.2 Índices dinâmicos: Órbitas fechadas de Reeb	24
1.3 Curvas pseudo-holomorfas	28
1.3.1 Comportamento Assintótico	36
1.3.2 Planos Rápidos	42
1.3.3 Estimativas do índice de Conley-Zehnder	44
1.3.4 Estrutura complexa genérica	45
2 Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.	49
2.1 Resultado Principal	49
2.2 Exemplos	55
2.3 Caso Não-Degenerado	60
2.3.1 Família de Bishop	63
2.3.2 Construção do disco furado de energia finita	69
2.3.3 Final da Demonstração da Proposição 2.6	83
2.4 Caso Degenerado	88
2.4.1 Existência de órbitas fechadas não-enlaçadas	89
3 Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.	97
3.1 Resultados Principais	97
3.2 Exemplos	104

3.3	Demonstração do Teorema 3.1	107
3.4	Demonstração do Teorema 3.8	115
3.4.1	Preenchimento de Dehn	115
3.4.2	Análise de <i>bubbling-off</i> para um preenchimento de Dehn	124
3.4.3	Final da Demonstração do Teorema 3.8	131
A	Órbitas fechadas contráteis e primeira classe de Chern	145
A.1	Primeira classe de Chern	145
A.2	Índice dinâmicos de órbitas fechadas contráteis	146
B	Construção de p-discos especiais	149
B.1	Definição de p -discos especiais	150
B.2	Construção Capítulo 2: p -disco especial	151
B.3	Construção Capítulo 3: Disco especial	153
C	Árvore de <i>bubbling-off</i>	155
C.1	Sequências Germinantes	155
C.2	Árvore de <i>bubbling-off</i>	158
C.2.1	Estimativas do índice de μ_{CZ}	162
D	Fluxos geodésicos	167
D.1	Cálculo de ρ de órbitas fechadas em SS^2	171
E	Perturbações de formas de contato: não-degenerescência	173
	Bibliografia	176

Introdução

Um conceito que será central nesta tese é a noção de curvas pseudo-holomorfas. Estas curvas são aplicações suaves definidas em superfícies de Riemann e com valores em variedades quase-complexas cuja diferencial é complexo-linear. As curvas pseudo-holomorfas tornaram-se fundamentais em topologia simplética quando Gromov, em [14], estuda as curvas pseudo-holomorfas com valores em variedades simpléticas e generaliza propriedades bem conhecidas de funções holomorfas para este contexto. Em particular, estas curvas mostraram-se úteis no estudo da dinâmica de Reeb através da noção de simpletizações de variedades de contato. Hofer introduz em [19] as chamadas curvas (pseudo-holomorfas) de energia finita em simpletizações de variedades de contato com o objetivo de provar a *conjectura de Weinstein* em S^3 , no caso *overtwisted*. A existência de tais curvas está relacionada à existência de órbitas fechadas de Reeb (veja [19]). A prova da *conjectura de Weinstein* apresentada por Hofer motivou o surgimento de uma nova e ativa área de pesquisa denominada *dinâmica simplética*. Uma vasta literatura estuda as propriedades das curvas introduzidas por Hofer e revela importantes propriedades tanto do fluxo de Reeb em dimensão 3 quanto da topologia das 3-variedades.

Um tema de particular interesse para a dinâmica simplética é a existência implicada de órbitas fechadas. Este tipo de problema deduz a existência de órbitas fechadas a partir de propriedades (topológicas, dinâmicas, etc.) de um conjunto de órbitas fechadas L que sabemos existir. Por exemplo, se em S^3 existe um *link* de Hopf $L = L_0 \cup L_1$, onde L_0, L_1 são órbitas fechadas de Reeb, tal que os números de rotação transversal L_0, L_1 satisfazem uma certa condição de não-ressonância, Hryniewicz, Momin e Salomão provam em [36], usando a *homologia de contato cilíndrica no complementar de L*, que existem infinitas órbitas fechadas de Reeb enlaçadas em L . Usando técnicas semelhantes, Momin prova em [45] que, para certos *links* L de órbitas fechadas, existem determinadas classes de homotopia de curvas fechadas no complementar de L que sempre possuem uma órbita fechada de Reeb. Nesta tese, apresentamos dois resultados de existência implicada de órbitas fechadas. Adiante explicaremos com detalhes.

Outra classe de resultados que aparecem em dinâmica simplética e que mostram a relevância e o potencial dos métodos aplicados são as caracterizações dinâmicas de 3-variedades de contato. Por exemplo, em [21], Hofer, Wyzocki e Zehnder usam os métodos de *preenchimento de Dehn* e análise de *bubbling-off* para mostrar que uma 3-variedade de contato, compacta e conexa (M, ξ) é contactomorfa à S^3 munida da estrutura de contato *tight* se e somente se existe uma

forma de contato λ definida em M tal que $\xi = \ker \lambda$ e o fluxo de Reeb associado (à λ) admite uma órbita fechada P com período mínimo, não-degenerada, bordo de um disco mergulhado F cujo interior é transversal ao campo de Reeb e o *índice de Conley-Zehnder* de P em relação a F satisfaz $\mu_{CZ}(P, F) = 3$. Em [23], Hofer, Wyzocki e Zehnder provam, adaptando os métodos citados acima, uma caracterização de S^3 análoga para o caso em que forma de contato λ é *dinamicamente convexa*¹. Em [35], Hryniewicz, Licata e Salomão mostram, aplicando adaptações dos métodos acima e a *teoria de planos rápidos*, esta última introduzida por Hryniewicz em [33], que se uma 3-variedade fechada e conexa M cuja estrutura de contato ξ admite uma forma de contato λ tal que $\xi = \ker \lambda$ e o fluxo de Reeb (associado à λ) possui uma órbita fechada de Reeb L que é um p -nó trivial com certas propriedades topológicas e dinâmicas e não existem órbitas fechadas P com *índice de Conley-Zehnder* satisfazendo $\mu_{CZ}(P) = 2$ contráteis em $M \setminus L$, então M é contactomorfa ao *espaço lenticulado* munido da estrutura de contato universalmente *tight*. No Capítulo 3, apresentamos uma caracterização dinâmica de uma 3-variedade. Aqui trabalharemos com o caso do toro sólido.

A organização do trabalho é feita em três capítulos e cinco apêndices. No primeiro capítulo, faremos uma breve exposição de alguns conceitos e resultados centrais para a dinâmica simplética. A apresentação é dividida em três seções. Na Seção 1.1, expomos alguns conceitos relacionados à topologia de contato e à dinâmica de Reeb. Na Seção 1.2, estudamos os índices dinâmicos (clássicos) associados às órbitas fechadas de Reeb. Na última seção, definimos a noção de superfícies de energia finita e enunciamos alguns resultados fundamentais da *teoria de curvas pseudo-holomorfas em simpletização de variedades de contato*.

Nosso primeiro resultado principal, apresentado no segundo capítulo, é motivado pelo Teorema 1.3 em [39]. Neste artigo, Hryniewicz e Salomão apresentam condições necessárias e suficientes para que uma órbita fechada de Reeb seja bordo de uma seção global tipo disco na 3-esfera *tight*. É natural questionar se existem condições impedindo que uma órbita fechada seja bordo de uma seção global tipo disco. Como resposta a esta pergunta, provamos que se M é uma 3-variedade de contato tal que a *primeira classe de Chern* se anula sobre $\pi_2(M)$ e existe uma órbita fechada do fluxo de Reeb L que é p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, com números de auto-enlaçamento e de rotação transversal satisfazendo, respectivamente, $sl(L) = -\frac{1}{p}$ e $\rho(L^p) < 1$, então existe uma órbita fechada de Reeb $\bar{P}$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L . Repare que este é um resultado de existência implicada de órbita fechada (não-enlaçada) e fornece condições para que uma órbita fechada não seja bordo de uma seção global tipo disco. A demonstração será dividida em dois casos: *não-degenerado* e *degenerado*. No primeiro, os métodos de *preenchimento por discos* e análise de *bubbling-off* similares àqueles encontrados em [19, 21, 23, 35, 39] produzem um disco furado (mergulhado) de energia finita com um único furo negativo cujo limite assintótico é uma órbita fechada de Reeb $\bar{P}$ satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$. A *Teoria de Interseção de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* de McDuff [49] implicará que $\bar{P}$ é não-enlaçada em

¹Isto é, a *primeira classe de Chern* se anula sobre $\pi_2(M)$ (veja Apêndice A) e os *índices de Conley-Zehnder* das órbitas fechadas de Reeb P_0 contráteis contidas em M satisfazem $\mu_{CZ}(P_0) \geq 3$.

Introdução

L . As órbitas fechadas L e $\bar{P}$ são geometricamente distintas pois L é um p -nó trivial satisfazendo $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ e $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$. O caso degenerado será um corolário do caso não-degenerado. É conhecido que podemos aproximar a forma de contato λ por formas de contato não-degeneradas. Esta aproximação pode ser feita de maneira que L seja também uma órbita fechada do campo de Reeb associado às formas de contato perturbadas. Estas perturbações, pelo caso não-degenerado, produzem uma sequência de órbitas fechadas geometricamente distintas de L , não-enlaçadas em L e com períodos limitados. Uma aplicação do *Teorema de Ascoli-Arzelà* mostra que existe uma órbita fechada $\bar{P}$ não-enlaçada em L . Como $\rho(L^p) < 1$, concluímos que $\bar{P}$ é geometricamente distinta de L .

No terceiro capítulo, estudamos a dinâmica de Reeb de uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo ao toro e invariante pelo fluxo de Reeb e a estrutura de contato é tal que a *primeira classe de Chern* se anula sobre $\pi_2(M)$. Nosso primeiro resultado é uma versão do teorema discutido acima para este contexto. Assumimos que não existem órbitas fechadas contidas em ∂M e o fluxo de Reeb possui uma órbita fechada L que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, e verificamos que, sob estas hipóteses, existe uma órbita fechada $\bar{P}$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$. Note que não estamos fazendo hipóteses sobre a não-degenerescência de λ . Dividimos a demonstração em dois casos: *não-degenerado* e *degenerado*. Em ambos, o primeiro passo é contruir um *preenchimento de Dehn* para M (veja Definição 3.2). No primeiro caso, a demonstração é semelhante à prova do teorema principal do Capítulo 2. Construímos um disco furado (mergulhado) de energia finita com um único furo negativo cujo limite assintótico é uma órbita fechada de Reeb P_0 satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. A hipótese de que o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb garante que este disco furado não pode intersectar ∂M . Isto é uma consequência da *Teoria de Interseção de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* introduzida por McDuff em [49]. Desta forma, a análise de *bubbling-off* realizada no Capítulo 2 estará contida no interior da 3-variedade M e disto seguirá que a órbita fechada fornecida pelo Capítulo 2 também está contida em $M \setminus \partial M$. O caso degenerado novamente é uma consequência do caso não-degenerado e do Teorema de Ascoli-Arzelà.

O segundo resultado do terceiro capítulo é uma caracterização (dinâmica) do toro sólido. Assumimos que λ é uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo ao toro e invariante pelo fluxo de Reeb. Supomos, além disso, que a estrutura de contato associada a λ é tal que a *primeira classe de Chern* se anula sobre $\pi_2(M)$. Se o bordo admite uma forma normal local, que explicaremos no Capítulo 3, e o fluxo de Reeb é verticalmente não-nulo sobre ∂M (isto é, verticalmente negativo ou verticalmente positivo (veja Definição 3.7)), verificamos que ou existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P}$ satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$ ou M é folheada por discos transversais ao campo de Reeb. Neste caso, em particular, temos que M é difeomorfa ao toro sólido $S^1 \times \mathbb{D}$ e existe uma órbita fechada não-contrátil em M que é ponto fixo da aplicação de retorno induzida pela folheação. Repare que este resultado mostra que a dinâmica de Reeb sobre o bordo ∂M impõe restrições sobre a dinâmica

no interior e, em alguns casos, determina inclusive a topologia da 3-variedade M . Este teorema é motivado por resultados em [9]. Neste artigo, Eliashberg e Hofer provam que se λ é uma forma de contato definida no cilindro sólido $[0, 1] \times \mathbb{D}$ trivial perto do bordo, então a complexidade da dinâmica de Reeb em $[0, 1] \times \mathbb{D}$ está atrelada à presença de órbitas fechadas de Reeb. Mais precisamente, ou $[0, 1] \times \mathbb{D}$ é folheado por discos transversais ao campo de Reeb ou existe uma órbita fechada de Reeb contida em $[0, 1] \times \mathbb{D}$. O nosso resultado é uma versão deste fato para a classe das 3-variedades (de contato *tight*) cujo bordo é difeomorfo ao toro. Na prova da nossa caracterização do toro sólido, usamos técnicas introduzidas por Hofer, Wysocki e Zehnder em [19, 21, 23, 24], a saber os métodos de *preenchimento de Dehn* e análise de *bubbling-off*, e a *teoria de planos rápidos*, introduzida por Hryniewicz em [33]. Nosso primeiro passo na demonstração deste resultado é construir um *preenchimento de Dehn* $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ para 3-variedade M e estender a forma de contato sobre o complementar $\mathring{V}_\nu$ de M em M_ν de maneira que exista uma órbita fechada de Reeb P contida na espinha de V_ν e as órbitas fechadas contidas em V_ν estejam enlaçadas em P . Veremos que a hipótese *verticalmente negativa* implica que órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P) \leq 1$. A análise de *bubbling-off* análoga àquela feita no Capítulo 2 produz uma órbita fechada $\bar{P}$ contrátil em M satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$. A hipótese *verticalmente positiva* implica que a órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P) = 3$. Uma análise de *bubbling-off* ou produz uma órbita fechada $\bar{P}$ contrátil em M satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$ ou produz um plano rápido de energia finita mergulhado assintótico no (único) furo positivo em ∞ à órbita fechada P . Seguindo [33] e [39], verificamos que ou existe uma órbita fechada $\bar{P}$ contrátil em M ou o espaço destes planos é compacto. Este fato fornece uma *decomposição em livro aberto* cuja *encadernação* é a órbita fechada P e as folhas são transversais ao campo de Reeb. Neste caso, a interseção das folhas desta decomposição com M produz uma folheação (transversal ao campo de Reeb) de M que induz um difeomorfismo entre M e o toro sólido. A folheação define também uma aplicação de retorno que possui um ponto fixo e, portanto, existe uma órbita fechada não-contrátil em M .

Capítulo 1

Introdução à Dinâmica Simplética

Neste capítulo, introduzimos algumas noções básicas em Dinâmica Simplética. Organizamos a exposição da seguinte forma. Na Seção 1.1, definimos variedades de contato e discutimos alguns conceitos relacionados à topologia de contato e à dinâmica de Reeb. Na Seção 1.2, veremos alguns índices dinâmicos associados às órbitas fechadas de Reeb. Estes índices fornecem informações sobre o comportamento do fluxo de Reeb numa vizinhança de uma órbita fechada. Na última seção, introduzimos a noção de superfícies de energia finita e apresentamos algumas ferramentas fundamentais da *teoria de curvas pseudo-holomorfas em simpletização de variedades de contato*. As referências para o que expomos a seguir são [12], [25], [26], [27], [28], [33], [35], [40] e [47].

1.1 Noções Preliminares

Seja M uma 3-variedade¹, possivelmente com bordo. Dizemos que uma 1-forma diferencial λ definida numa 3-variedade M é uma *forma de contato* em M quando $\lambda \wedge d\lambda$ é uma forma de volume em M , isto é, $\lambda \wedge d\lambda$ é uma 3-forma diferencial não-nula². Quando uma 3-variedade M está munida de uma forma de contato λ , dizemos que M é uma *variedade de contato* (*co-orientada*) e escrevemos (M, λ) . A forma de contato λ induz uma distribuição (suave) de 2-planos dada por $\xi = \ker \lambda$. Esta distribuição é denominada *estrutura de contato* (*co-orientada*)³.

¹Todas as variedades serão assumidas de classe C^∞ -diferenciável.

²A expressão *não-nula* significa que, para todo $p \in M$, existe uma tripla de vetores $\{v_1, v_2, v_3\} \subset T_p M$ tal que $\lambda_p \wedge d\lambda_p(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

³Em geral, a definição de estrutura de contato independe da existência de uma forma de contato globalmente definida em M (veja [12], [40]). Mais precisamente, se TM é o fibrado tangente de uma 3-variedade M , uma estrutura de contato ξ é uma distribuição suave de 2-planos tal que $\xi \rightarrow M$ é subfibrado suave de TM e, para todo $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$, $p \in U$, e uma 1-forma diferencial α_U definida em U satisfazendo $\xi|_U = \ker \alpha_U$ e $\alpha_U \wedge d\alpha_U \neq 0$. Isto distingue entre *estruturas de contato* e *estruturas de contato co-orientadas*. Para as nossas aplicações, precisamos considerar apenas variedades (e estruturas) de contato co-orientadas. Por simplicidade, denominamos variedades (e estruturas) de contato, subentendendo o fato de serem co-orientadas.

Usamos também a notação $(M, \xi = \ker \lambda)$ para indicar a estrutura de contato ξ induzida pela λ . Repare que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é uma função suave, então $f\lambda$ é também uma forma de contato em M , as estruturas de contato induzidas coincidem, isto é, $\ker f\lambda = \xi = \ker \lambda$, e o sinal da forma de volume $(f\lambda) \wedge d(f\lambda) = f^2\lambda \wedge d\lambda$ independe de f .

Exemplo 1.1. Sejam (x, y, z) coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^3$. Como a 1-forma diferencial $\alpha = dz + xdy$ satisfaz $\alpha \wedge d\alpha = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0$, temos que $\mathbb{R}^3$ munido de α é uma 3-variedade de contato. $\square$

Exemplo 1.2. A 1-forma diferencial $\lambda_0 = dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ também é uma forma de contato em $\mathbb{R}^3$ visto que $\lambda_0 \wedge d\lambda_0 = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0$. Se (z, r, θ) são coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}_*^3 := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r \neq 0\}$, a mudança de coordenadas $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ implica que $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$. $\square$

Exemplo 1.3. Sejam (x_0, y_0, x_1, y_1) coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^4$ e considere $\mathbb{R}^4$ munido da 1-forma diferencial

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=0,1} x_k dy_k - y_k dx_k \quad (1.1)$$

denominada *forma de Liouville*. Seja S^3 a 3-esfera trivialmente mergulhada em $\mathbb{R}^4$, isto é,

$$S^3 := \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{k=0,1} x_k^2 + y_k^2 = 1\}.$$

Observe que $T_p S^3 = \ker \beta_p$, para todo $p = (x_0, y_0, x_1, y_1) \in S^3$, onde $\beta_p = \sum_{k=0,1} x_k dx_k + y_k dy_k$.

Portanto, $T_p S^3 = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, onde v_1, v_2, v_3 são vetores dados por

$$\begin{aligned} v_1 &= x_0 \partial_{y_0} - y_0 \partial_{x_0} + x_1 \partial_{y_1} - y_1 \partial_{x_1} \\ v_2 &= x_1 \partial_{y_0} + y_1 \partial_{x_0} - x_0 \partial_{y_1} - y_0 \partial_{x_1}, \\ v_3 &= y_1 \partial_{y_0} - x_1 \partial_{x_0} - y_0 \partial_{y_1} + x_0 \partial_{x_1}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

É imediato que $\beta \wedge (\alpha_0|_{S^3}) \wedge (d\alpha_0|_{S^3})(v_0, v_1, v_2, v_3) \neq 0$, onde $v_0 = \sum_{k=0,1} y_k \partial_{y_k} + x_k \partial_{x_k}$. Isto mostra que $\alpha_0|_{S^3}$ é uma forma de contato em S^3 . Denotamos a estrutura de contato induzida por $\alpha|_{S^3}$ como $\xi_0 = \ker \alpha_0|_{S^3}$. $\square$

Observação 1.4. Em geral, se $S \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície estrelada em relação à origem⁴, a restrição $\alpha_0|_S$ é uma forma de contato em S (veja [40]).

Sejam λ_1 e λ_2 formas de contato definidas, respectivamente, em M_1 e M_2 . Se existe um difeomorfismo $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ e uma função suave $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $\Phi^* \lambda_2 = f \lambda_1$, dizemos que $(M_1, \xi_1 = \ker \lambda_1)$ é *contactomorfa* à $(M_2, \xi_2 = \ker \lambda_2)$. Esta noção estabelece uma equivalência

⁴Uma *semi-reta pela origem* em $\mathbb{R}^4$ é uma aplicação $r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $t \mapsto (a_1 t, a_2 t, a_3 t, a_4 t)$, para algum $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ não-nulo. Dizemos que uma hipersuperfície $S \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é *estrelada em relação à origem* se toda semi-reta pela origem intersecta S transversalmente em um único ponto.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

entre variedades de contato.

Exemplo 1.5 ([12], Exemplo 2.1.3). A aplicação $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$(x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}, z + \frac{xy}{2} \right)$$

é um contactomorfismo entre as variedades de contato

$$\left(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz + xdy) \right) \text{ e } \left(\mathbb{R}^3, \xi_0 = \ker \left(dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx) \right) \right).$$

Note que Φ é um contactomorfismo *estrito*, isto é, $\Phi^*(dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx)) = dz + xdy$. $\square$

Embora duas variedades de contato, do ponto de vista global, possam ser não-contactomorfos, na vizinhança de um ponto são sempre indistinguíveis. Este fato é o conteúdo do:

Teorema 1.6 (Teorema de Darboux). *Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade sem bordo M . Para todo $p \in M$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^3$, $V \subset M$ tais que $0 \in U$ e $p \in V$, e uma carta local $\Phi : U \rightarrow V$ satisfazendo $\Phi(0, 0, 0) = p$ e $\Phi^*\lambda = dz + xdy$.*

A demonstração deste resultado por ser encontrada em [12, Teorema 2.5.1]. O *Teorema de Darboux* mostra que as questões realmente interessantes para a *geometria de contato* são sempre de natureza global.

Campos de Reeb

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita ($\dim V = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$). Dizemos que V é um *espaço vetorial simplético* se V admite uma 2-forma $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, anti-simétrica (isto é, $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$, para todo $u, v \in V$) e não-degenerada (isto é, se $\Omega(u, \cdot) = 0$, então $u = 0$). Neste caso, Ω é denominada uma *forma simplética* e um espaço vetorial V munido de Ω é denotado por (V, Ω) . O exemplo canônico é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, munido da 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} dx_k \wedge dy_k, \quad (1.3)$$

onde $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^{2n}$. Em geral, se (V, Ω) é um espaço vetorial simplético, é possível provar que (V, Ω) é isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, onde $n = \frac{1}{2} \dim V$ (veja [40, Proposição 3.2] e [47, Teorema 2.3]). Um *fibrado simplético* (M, E, π, ω) de posto $2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, sobre uma variedade M é um fibrado real (M, E, π) , onde E é o espaço total e $\pi : E \rightarrow M$ é a projeção, tal que $\dim E_p = 2n$, ω_p é uma forma simplética em E_p , para todo $p \in M$, e ω é uma seção suave do fibrado $E^* \wedge E^* \rightarrow M$. A fibra de $E^* \wedge E^* \rightarrow M$ é o produto exterior $E_p^* \wedge E_p^*$ e

$$E_p^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_p) := \{\eta : E \rightarrow \mathbb{R} : \eta \text{ é } \mathbb{R}\text{-linear}\},$$

para todo $p \in M$. Um fibrado simplético (M, E, π, ω) é *localmente simpléticamente trivial* no sentido de que, para todo $p \in M$, existe um vizinhança aberta $U \subset M$ com $p \in U$, tal que

$(U, \pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, \omega|_U)$ é isomorfo a $(U, U \times \mathbb{R}^{2n}, \bar{\pi}, \omega_0)$, onde $\bar{\pi} : U \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator (veja [47, Seção 2.6]).

Veremos que uma forma de contato induz um fibrado simplético em M . De fato, seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M , como $\lambda \wedge d\lambda \neq 0$, a restrição $d\lambda_p|_{\xi_p}$ é não-degenerada e, portanto, $d\lambda_p|_{\xi_p}$ é uma forma simplética na fibra ξ_p , para todo $p \in M$. Deste modo, $(M, \xi = \ker \lambda, \pi, d\lambda|_{\xi})$, onde $\pi : \xi \rightarrow M$ é a projeção, é um fibrado simplético sobre M . Observe que o fato de $d\lambda_p|_{\xi_p}$ ser simplética implica que $\dim \ker d\lambda_p|_{\xi_p} = 1$, para todo $p \in M$. Isto permite escolher um campo de vetores X_λ sobre M , denominado *Campo de Reeb*, satisfazendo as seguintes condições:

$$i_{X_\lambda} d\lambda = 0 \quad \text{e} \quad i_{X_\lambda} \lambda = 1. \quad (1.4)$$

Este campo é unicamente determinado pela forma de contato λ e é transversal à estrutura de contato ξ . Note que X_λ induz a decomposição do fibrado tangente em $TM = \mathbb{R}X_\lambda \oplus \xi$.

Exemplo 1.7. O campo de Reeb para a forma de contato $\alpha = dz + xdy$ em $\mathbb{R}^3$ é $X_\lambda = \partial_z$. $\square$

Exemplo 1.8. Seja S^3 trivialmente mergulhada em $\mathbb{R}^4$ (conforme Exemplo 1.3). Considere X o campo de vetores em $\mathbb{R}^4$ definido por

$$X(p) = 2 \sum_{k=0,1} x_k \partial y_k - y_k \partial x_k, \quad \text{para todo } p = (x_0, y_0, x_1, y_1) \in S^3.$$

Note que $X(p)$ é ortogonal ao vetor radial. Isto significa que $X_0 := X|_{S^3}$ é tangente à S^3 . Como $d\alpha_0|_{S^3}(X_0, \cdot) = 0$ e $\alpha_0|_{S^3}(X_0) = 1$, vemos que X_0 é o campo de Reeb para $\alpha_0|_{S^3}$. $\square$

Sejam λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M e X_λ o campo de Reeb associado à λ . Dizemos que $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma *órbita de Reeb* (ou *linha de fluxo de Reeb*) se $x'(t) = X_\lambda \circ x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Estas linhas definem o chamado *fluxo de Reeb*. Denote este fluxo por $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Dizemos que $P = (x, T)$ é uma *órbita fechada de Reeb* se $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma órbita de Reeb T -periódica, $T > 0$. Identificamos o conjunto das órbitas fechadas de Reeb associados à forma de contato λ com um subconjunto de

$$C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M) := \frac{\{\eta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M : \eta \text{ é de classe } C^\infty\}}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}.$$

Vejamos com um pouco mais de detalhes. Observe que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ age por translações em $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$, isto é, existe uma ação $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ dada por $\psi(c, \eta(\cdot)) := \eta(\cdot + c)$. Seja $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ o quociente induzido por ψ . Note que, se $\eta, \tilde{\eta} \in [\eta]$, para alguma $[\eta] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$, então existe $c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que $\eta(t + c) = \tilde{\eta}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Se $P = (x, T)$ uma órbita fechada de Reeb, a aplicação

$$t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x_T(t) := x(Tt) \in M, \quad (1.5)$$

fixa uma classe em $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. Identificamos $P = (x, T)$ com o elemento em $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ fixado

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

pela aplicação x_T . Denotamos por $\mathcal{P}(\lambda)$ o conjunto das classes $[x_T] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ associadas às aplicações $x_T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ definidas conforme (1.5). Por simplicidade, escrevemos apenas $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$. A identificação explicada acima implica que, se $P = (x, T)$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ são duas órbitas fechadas de Reeb, então $[x_T] = [\bar{x}_{\bar{T}}] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ se e somente se $x_T(\mathbb{R}) = \bar{x}_{\bar{T}}(\mathbb{R})$ e $T = \bar{T}$.

Uma órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é dita *contrátil*, se existe um disco contínuo $v : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow M$, onde $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, tal que

$$v(e^{2\pi it}) = x(Tt), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

Denotamos por $\mathcal{P}^c(\lambda)$ o conjunto das órbitas fechadas contráteis associadas à λ .

Dizemos que $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é *prima* (ou *simplesmente recoberta*), se o período $T > 0$ é o período mínimo. Quando $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(\lambda)$ não é *prima*, existe uma constante $k \geq 2$ e uma órbita fechada $P = (x, T)$ tal que $P' = P^k = (x, kT)$. Neste caso, dizemos que P' é uma k -iterada de P .

A seguir, vamos introduzir a noção de órbita fechada não-degenerada. Começamos observando que o fluxo de Reeb $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ preserva a estrutura de contato. De fato, como

$$\mathcal{L}_{X_\lambda} \lambda = i_{X_\lambda} d\lambda + d(i_{X_\lambda} \lambda) = 0$$

(veja *Fórmula de Cartan* [43, Proposição 13.14]), o campo de Reeb X_λ satisfaz $\mathcal{L}_{X_\lambda} \lambda = 0$ e isto é equivalente à afirmação de que o fluxo de Reeb $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ preserva λ . Em particular, $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ preserva a decomposição $TM = \mathbb{R}X_\lambda \oplus \xi$ e, portanto,

$$(\phi_t)_*(\xi_p) = \xi_{\phi(p)} \quad \text{e} \quad (\phi_t)_*(X_\lambda(p)) = X_\lambda(\phi_t(p)),$$

para todo $p \in M$. Disto segue que, se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $d\phi_T$ é a linearização da aplicação ϕ_T , então $d\phi_T|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(T)}$ é uma transformação $\mathbb{R}$ -linear simplética em $\xi_{x(0)}$ (pois $\xi_{x(0)} = \xi_{x(T)}$). Dizemos que $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é uma órbita fechada de Reeb *não-degenerada* se 1 não é auto-valor de $d\phi_T|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(T)}$. Uma forma de contato λ é dita *não-degenerada* se todas as órbitas fechadas em $\mathcal{P}(\lambda)$ forem não-degeneradas.

No Capítulo 2, precisaremos de formas normais para a vizinhança de órbitas fechadas de Reeb. Seguindo [25] e [36], apresentamos o conceito de *tubo de Martinet*. Na definição a seguir, $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ é uma bola aberta de raio $r > 0$ centrada na origem e $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_r(0)$ munido da forma de contato $dz + xdy$, onde $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(x, y) \in B$.

Definição 1.9 ([25], Lema 3.2; [36], Definição 2.12). *Seja $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ uma órbita fechada de Reeb e $T > 0$ o período mínimo de x_0 . Dizemos que (U, Φ) é um **tubo de Martinet** para P_0 se $U \subset M$ é uma vizinhança aberta de $x_0(\mathbb{R})$ e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_r(0)$ é um difeomorfismo tal que $\Phi(x_0(Tt)) = (t, 0, 0)$ e $\Phi^*(h(dz + xdy)) = \lambda$, para alguma $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_r(0) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $h|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv T$ e $dh|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv 0$.*

Para as nossas aplicações, é conveniente observar que se $\eta(t) \in \xi|_{x_0(Tt)}$ é uma seção suave e não-nula do fibrado $(x_0|_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $P_0 = (x_0, T_0)$ é uma órbita fechada tal como na definição acima e $x_0|_T(t) := x_0(Tt)$, então (é possível provar que) existe um tubo de Martinet (U, Φ) para P_0 tal que $(\Phi_{x_0(Tt)})_* \eta(t) = \partial_x$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (veja [25, Lema 2.3]).

Noções topológicas e número de auto-enlaçamento

Nossos resultados de existência implicada de órbita fechada de Reeb assumem a existência de uma órbita fechada que é um p -nó trivial. Nesta seção, introduzimos esta noção e definimos, seguindo [2, 35], uma versão do número de auto-enlaçamento para p -nós triviais transversais (à estrutura de contato). Inicialmente, nossa exposição será apenas topológica. Veremos adiante que há uma maneira natural de inserir estes conceitos no contexto de órbitas fechadas de Reeb.

Definição 1.10. *Sejam $K : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \hookrightarrow M$ um nó (mergulhado) e $p \in \mathbb{Z}_+^*$. Um p -disco para K é uma imersão $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho em $M \setminus K$ e $v|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \xrightarrow{p:1} K$ é uma aplicação de p -recobrimento. Se K admite um p -disco, dizemos que K é um p -nó trivial.*

No lema a seguir, relacionamos algumas importantes propriedades dos p -nós triviais.

Lema 1.11 ([35], Lema 3.4, Lema 3.7). *Sejam $K : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \hookrightarrow M$ um p -nó trivial e $p \in \mathbb{Z}_+^*$. Então K satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *se $q \neq p$, então K não admite um q -disco;*
- (ii) *se $1 \leq q < p$, então a q -iterada do nó (mergulhado) K não é contrátil.*

Suponha que M está munida de uma forma de contato λ . Fixe um p -nó trivial $K : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \hookrightarrow M$ transversal à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Seja $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K e escolha uma orientação para $v(\mathbb{D})$ tal que a orientação induzida no bordo $v(\partial \mathbb{D}) = K(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ coincida com a orientação positiva de K , isto é, a orientação de K tal que $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} K^* \lambda > 0$. Considere o fibrado $v^* \xi \rightarrow \mathbb{D}$. Como $\mathbb{D}$ é contrátil, $v^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite uma trivialização e, portanto, podemos escolher uma seção não-nula $Z : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow v^* \xi$. Fixe uma métrica Riemanniana g em M e seja $\exp$ a aplicação exponencial correspondente. Seja K_ϵ um nó definido por

$$t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \exp_{e^{2\pi i t}}(\epsilon Z(e^{2\pi i t})) \in M. \quad (1.7)$$

Para $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno, K_ϵ é transversal à estrutura de contato ξ e positivamente orientado.

Definição 1.12 ([2], [35]). *Seja $K : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \hookrightarrow M$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, transversal à estrutura de contato ξ . Seja $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K . O **número de auto-enlaçamento racional** do p -nó trivial K é definido como*

$$\text{sl}(K, v) = \frac{1}{p^2} K_\epsilon \bullet v(\mathring{\mathbb{D}}) \in \mathbb{Q},$$

onde $K_\epsilon : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ é uma perturbação⁵ de K na direção de uma seção não-nula $Z : v(\mathbb{D}) \rightarrow$

⁵Note que podemos supor que K_ϵ é transversal a $v(\mathring{\mathbb{D}})$.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

$\xi|_{v(\mathbb{D})}$ tal como em (1.7) e $K_\epsilon \bullet v(\mathring{\mathbb{D}})$ é o número de interseção orientado⁶.

Observe que se K é um nó trivial, isto é, $p = 1$, o número de auto-enlaçamento racional coincide com o número de auto-enlaçamento clássico (veja [2, 12]). Repare também que se $K : S^1 \hookrightarrow M$ é um p -nó trivial e $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um p -disco para K , o fato de que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho, implica que $v(re^{2\pi it})$, quando $r > 0$ é suficientemente próximo de $r = 1$, é um nó trivial transversal à estrutura de contato ξ . Note que as curvas $t \mapsto v(re^{2\pi it})$ são perturbações de K^p , onde $K^p(t) := K(pt)$. Deste ponto de vista, a definição acima diz, essencialmente, que o “número de auto-enlaçamento da p -iterada de um p -nó trivial coincide com o número de auto-enlaçamento de nós triviais arbitrariamente próximos”.

Lema 1.13 ([2], Seção 1.1; [12], Observação 3.5.29, Corolário 3.5.31; [35], Seção 2.1). *Seja $K : S^1 \hookrightarrow M$ um p -nó trivial transversal à estrutura de contato ξ . Seja $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K . São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) $\text{sl}(K, v)$ é independente da seção não nula $Z : \mathbb{D} \rightarrow v^*\xi$;
- (ii) se $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) = 0$, então $\text{sl}(K, v)$ independe do p -disco $v : \mathbb{D} \rightarrow M$.

No lema acima, $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi)$ é a primeira classe de Chern $c_1(\xi)$ restrita ao segundo grupo de homotopia $\pi_2(M)$ (veja Apêndice A para os detalhes). É importante salientar que o número de auto-enlaçamento não é, em geral, independente do p -disco (veja [12, Proposição 3.5.30]). O lema a seguir é uma ferramenta útil no cálculo de $\text{sl}(K, v)$.

Lema 1.14 ([35], Lema 3.10). *Seja $K : S^1 \hookrightarrow M$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, transversal à estrutura de contato ξ . Sejam $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K e $Z : \mathbb{D} \rightarrow v^*\xi$ uma seção não-nula. Fixe também $N : \partial \mathbb{D} \rightarrow v^*\xi$ uma seção não-nula tal que $N(z) \in dv_z(T_z \mathbb{D})$, para todo $z \in \partial \mathbb{D}$. Então, $\text{sl}(K, v) = \frac{1}{p} \text{wind}(Z|_{\partial \mathbb{D}}, N)$.*

Podemos estender a noção de p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, para as órbitas fechadas de Reeb. Lembre que λ é uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Diremos que uma órbita fechada prima $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, se o mergulho x_T definido por

$$t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x(Tt) \in M$$

é um p -nó trivial. Se $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um p -disco para o mergulho x_T , dizemos que v é um p -disco para a órbita fechada P . Observe que, se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é um p -nó trivial, então as iteradas $P^q = (x, qT)$, para $1 \leq q < p$, são órbitas fechadas não-contráteis. Isto segue do Lema 1.11. Também é possível estender a noção de número de auto-enlaçamento racional para órbitas fechadas de Reeb. Seja $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ uma órbita fechada que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$. Se $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um p -disco para o mergulho x_T , definimos o número de auto-enlaçamento racional da órbita fechada P em relação a v como $\text{sl}(P, v) = \text{sl}(x_T, v)$.

⁶Isto é, seja $p \in K_\epsilon \cap v(\mathring{\mathbb{D}})$ e $\{v_1, v_2\} \subset T_p v(\mathring{\mathbb{D}})$ é uma base positivamente orientada. Então o número de interseção orientado em p é $+1$ (ou -1) se $\{K'_\epsilon, v_1, v_2\}$ é base positiva (ou negativa) do espaço tangente $T_p M$ orientado pela 3-forma $\lambda_p \wedge d\lambda_p$. Para os detalhes da definição do número de interseção orientado, veja Capítulo 4 em [15].

Exemplo 1.15 ([38]). Sejam α_0 a forma de Liouville em $\mathbb{R}^4$ e S^3 a 3-esfera trivialmente mergulhada em $\mathbb{R}^4$ (veja Exemplo 1.3). Lembre que o campo de Reeb para α_0 é

$$X = 2 \sum_{k=0,1} x_k \partial y_k - y_k \partial x_k.$$

Segue que $H_0 = (h_0, \pi)$, onde $h_0(t) := (0, e^{i2t})$, $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, é uma órbita fechada de Reeb⁷. Vamos provar que $\text{sl}(H_0) = -1$. Sejam (r, θ) coordenadas polares em $\mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $r \geq 0$, e considere a aplicação

$$\begin{aligned} v : \mathbb{D} &\rightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto \left(\sqrt{1-r^2}, re^{i\theta} \right). \end{aligned}$$

Observe que v satisfaz $v(\partial\mathbb{D}) = h_0(\mathbb{R})$ e, além disso,

$$N_0 = (-1, 0) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\partial_r v(r, \theta)}{\|\partial_r v(r, \theta)\|}.$$

Isto significa, em particular, que $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$ é um referencial normal sobre H_0 . Repare que N_0 é uma seção não-nula do fibrado $(h_0)_\pi^* \xi_0 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $(h_0)_\pi(t) := h_0(\pi t)$ e para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Considere $Z : S^3 \rightarrow \xi_0$ a seção não-nula da estrutura de contato dada por

$$Z(x_0, y_0, x_1, y_1) = y_1 \partial_{y_0} - x_1 \partial_{x_0} - y_0 \partial_{y_1} + x_0 \partial_{x_1}, \quad \text{para todo } (x_0, y_0, x_1, y_1) \in S^3.$$

Seja $t \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \mapsto (0, 0, \cos(2t), \sin(2t)) \in S^3$ uma parametrização para h_0 . Note que o campo Z , restrito à fibra de Hopf H_0 , é dado por $Z|_{H_0} = \sin(2t) \partial_{y_0} - \cos(2t) \partial_{x_0}$. Disto segue que $\text{wind}(Z|_{H_0}, N_0) = -1$ e, portanto, $\text{sl}(H_0) = \text{wind}(Z|_{H_0}, N_0) = -1$. $\square$

Estruturas de contato *tight* e *overtwisted*

Seja λ uma forma de contato definida em uma 3-variedade M . Diremos que a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é *overtwisted* se existir um disco mergulhado $i : D \hookrightarrow M$, denominado *disco overtwisted*, tal que

$$T_p \partial D \subset \xi_p \quad \text{e} \quad T_p D \neq \xi_p, \quad \text{para todo } p \in \partial D.$$

Se não existe um *disco overtwisted*, dizemos que ξ é *tight*. Frequentemente, diremos que a forma de contato é *overtwisted* (ou *tight*) caso a estrutura de contato induzida seja *overtwisted* (ou *tight*). Observe que se λ é uma forma de contato *overtwisted* definida numa 3-variedade M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^*$ é uma função suave, então a forma de contato $f\lambda$ também é *overtwisted*. Isto é consequência de $\xi = \ker \lambda = \ker f\lambda$. Afirmação análoga vale para o caso *tight*.

Teorema de Bennequin ([40], Teorema 5.1): *As seguintes estruturas de contato são tight:*

(i) $\xi = \ker(dz + xdy)$ em $\mathbb{R}^3$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são coordenadas retangulares;

⁷Dizemos que H_0 é uma *fibra de Hopf*. Esta denominação se estende a todas as órbitas fechadas de Reeb contidas em $\mathcal{P}(\alpha_0|_{S^3})$ (veja [12]).

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

- (ii) $\xi_0 = \ker(dz + r^2 d\theta)$ em $\mathbb{R}_*^3$, onde $(z, r, \theta) \in \mathbb{R}_*^3$ são coordenadas cilíndricas;
 (iii) $\bar{\xi}_0 = \ker\left(\frac{1}{2} \sum_{k=0,1} x_k dy_k - y_k dx_k \Big|_S\right)$ em uma hipersuperfície estrelada⁸ S mergulhada em $\mathbb{R}^4$, onde $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in \mathbb{R}^4$ são coordenadas retangulares.

O Teorema de Bennequin mostra que, até o momento, dispomos apenas de exemplos de estruturas de contato *tight* (veja Exemplos 1.1, 1.2, 1.3). Isto motiva o exemplo a seguir. Nele construímos uma estrutura de contato *overtwisted* para uma 3-variedade M .

Exemplo 1.16 (*Twist de Lutz*: [12], Seção 4.5; [40], Seção 2.5). Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Usaremos a estratégia chamada *twist de Lutz* para construir uma estrutura de contato *overtwisted* em M . Seja $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ um nó transversal à estrutura de contato⁹ induzida por λ . Sejam (r, θ) coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$ e $B_\delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r < \delta\}$ a bola aberta de raio $\delta > 0$. Considere $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_\delta$ munido da forma de contato $dz + r^2 d\theta$, onde $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(r, \theta) \in B_\delta$. Pelo Teorema da Vizinhança de Nós Transversais¹⁰ ([40, Teorema 2.36]), existe $\delta > 0$, uma vizinhança aberta $U \subset M$ contendo γ e um difeomorfismo $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_\delta$ tal que

$$\Psi(\gamma) = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\} \text{ e } \Psi^*(h(dz + r^2 d\theta)) = \lambda,$$

para alguma função suave $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^*$. Para simplificar a notação, seguindo [12, 40], assumiremos, sem perda de generalidade, que $\delta = 1$ e denotaremos $B_1 = \mathring{\mathbb{D}}$, onde $\mathbb{D} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \leq 1\}$. Defina 1-formas diferenciais

$$\lambda_{m,n} = m(r)dz + n(r)d\theta \text{ em } \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathring{\mathbb{D}},$$

tais que $m, n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves satisfazendo

- (i) $m(r) = 1$ e $n(r) = r^2$, para todo $r \in [0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\epsilon \ll 1$;
 (ii) os vetores $(m(r), n(r)) \neq 0$ e $(m'(r), n'(r)) \neq 0$ satisfazem

$$m(r)n'(r) - n(r)m'(r) \neq 0.$$

A condição (ii) acima implica que $\lambda_{m,n}$ é forma de contato em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathring{\mathbb{D}}$, pois

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} \wedge d\lambda_{m,n} &= (m(r)dz + n(r)d\theta) \wedge (m'(r)dr \wedge dz + n'(r)dr \wedge d\theta) \\ &= (m(r)n'(r) - n(r)m'(r)) dr \wedge d\theta \wedge dz \neq 0. \end{aligned}$$

Seja $\xi_{m,n}$ a estrutura de contato induzida por $\lambda_{m,n}$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathring{\mathbb{D}}$. Note que $\xi_{m,n}$ coincide com $\xi = \ker(dz + r^2 d\theta)$ próximo de $r = 1$.

⁸Esta subentendido que S é hipersuperfície estrelada em relação à origem.

⁹Pelo Teorema 3.3.1 em [12], dado um nó (mergulhado) $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$, a curva $\tilde{\gamma}$ pode ser C^0 -aproximada por um nó $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ transversal à estrutura de contato.

¹⁰**Teorema ([40], Teorema 2.36):** Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Seja $\gamma_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ um nó (mergulhado) transversal à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$. Considere $M_0 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ munido da estrutura de contato $\xi_0 = \ker(dz + r^2 d\theta)$, onde (z, r, θ) são coordenadas em M_0 com $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M_0$ dado por $t \mapsto (t, 0, 0)$. Então existem vizinhanças abertas $\mathcal{N}(\gamma_k)$, $k = 0, 1$, e um contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}(\gamma_1) \rightarrow \mathcal{N}(\gamma_0)$ tal que $\Phi(\gamma_1) = \gamma_0$.

Vamos exibir um disco *overtwisted* para a estrutura de contato $\xi_{m,n}$. Observe que a condição (ii) força $n(r) < 0$, para algum $r \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$. Fixe $a > 0$ tal que $n(a) = 0$ e $n(r) > 0$, para todo $r \in (0, a)$. Seja $\mathbb{D}_a = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \leq a\}$ e defina

$$\begin{aligned} u : \mathbb{D}_a &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (z(r), r, \theta), \end{aligned}$$

onde $z(r) : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave satisfazendo

- (i) $z(a) = 0$ e $z(0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;
- (ii) $z(r) > 0$, para todo $r \in [0, a]$;
- (iii) $z(r) = z(0) - r^2$, para r próximo de $r = 0$.

Vamos supor que $z'(r) = 0$ somente quando $r = 0$. É possível verificar que

$$u^*(m(r)dz + n(r)d\theta) = m(r)z'(r)dr + n(r)d\theta.$$

Note que o bordo $u(\partial\mathbb{D}_a)$ é uma curva *Legendriana*, isto é, se $\eta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ é dada por $t \mapsto \eta(t) = u(ae^{2\pi it})$, então $\eta'(t) \in \xi_{m,n}(\eta(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Como $z'(a) \neq 0$, então $\xi_{m,n}(p) \neq T_p u(\mathbb{D}_a)$, para todo $p \in u(\partial\mathbb{D}_a)$, e a folheação característica¹¹ sobre $\mathbb{D}_a$ é gerada por $V(r, \theta) = m(r)z'(r)\partial_\theta - n(r)\partial_r$, concluimos que $u(\mathbb{D}_a)$ é um disco *overtwisted* para $\xi_{m,n}$. $\square$

Variedades simpléticas e simplétização de variedades de contato

Seja M uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional ($n \in \mathbb{Z}_+^*$). Uma *forma simplética* em M é uma 2-forma diferencial ω que é fechada (isto é, a derivada exterior satisfaz $d\omega = 0$) e não-degenerada (isto é, para todo $p \in M$, se $\omega_p(u, \cdot) = 0$, onde $u \in T_p M$, então $u = 0$). Note que a não-degenerescência de ω significa que $(T_p M, \omega_p)$ é um espaço vetorial simplético, para todo $p \in M$ e, conseqüentemente, (M, TM, π, ω) é um fibrado simplético sobre M , onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica. O exemplo trivial de uma variedade simplética é $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, munido da 2-forma simplética

$$\omega_0 = \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} dx_k \wedge dy_k, \quad (1.8)$$

onde $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ são coordenadas retangulares em $\mathbb{R}^{2n}$.

Um outro exemplo, fundamental para as nossas aplicações, são as chamadas *simplétizações de variedades de contato*. Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M e considere $\mathbb{R} \times M$ munida da estrutura de variedade produto. Se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ uma função suave satisfazendo $\phi'(a) > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$, podemos definir uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R} \times M$ dada por

$$\lambda_\phi(a, p)(h, k) := \phi(a)\lambda(p)(k), \quad (1.9)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$ e $(h, k) \in T_{(a,p)}(\mathbb{R} \times M)$. É imediato verificar que $d\lambda_\phi$ é não-degenerada

¹¹Veja Apêndice B.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

e fechada, isto é, $d\lambda_\phi$ é uma forma simplética em $\mathbb{R} \times M$. Dizemos que $(\mathbb{R} \times M, d\lambda_\phi)$ é uma *simpletização da variedade de contato* M .

Observação 1.17 ([19], [39]). *Toda métrica Riemanniana em M induz, de maneira natural, uma métrica Riemanniana na simpletização $\mathbb{R} \times M$. Mais precisamente, seja g uma métrica Riemanniana em M e $\pi_M : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ a projeção no segundo fator, definimos uma métrica Riemanniana g_0 na simpletização $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo $g_0 = da \otimes da + \pi_M^* g$, onde $a : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção no primeiro fator e $\otimes$ denota o produto tensorial¹².*

Estruturas quase-complexas

Começamos definindo a noção de estrutura complexa em um espaço vetorial V de dimensão finita ($\dim V = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$). Seja $J : V \rightarrow V$ um isomorfismo de V , dizemos que J é uma *estrutura complexa* em V se $J^2 = -\mathbb{1}$. Denotamos por $\mathcal{J}(V)$ o espaço das estruturas complexas em V . Em $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, o exemplo canônico é

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

onde $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade em $\mathbb{R}^n$. Em geral, se $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um isomorfismo, então $J := \Phi^{-1} \circ J_0 \circ \Phi \in \mathcal{J}(V)$ (veja [47, Lema 2.45]). Para as nossas aplicações é interessante definir uma topologia em $\mathcal{J}(V)$. Pela Proposição 2.46 em [47], existe uma aplicação sobrejetora $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{J}(V)$, onde $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes reais $2n \times 2n$ inversíveis, cujo núcleo é $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, isto é, o grupo das matrizes complexas $n \times n$ inversíveis. Vamos considerar $\mathcal{J}(V)$ munido da topologia tal que $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{J}(V)$ é um homeomorfismo.

Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(V)$ é dita *compatível com Ω* (ou *Ω -compatível*) se $\Omega(J(u), J(v)) = \Omega(u, v)$, para todo $u, v \in V$, e $\Omega(u, J(u)) > 0$, para todo $u \in V$ não-nulo. Note que se J é uma estrutura complexa Ω -compatível, então $g_J(u, v) = \Omega(u, J(v))$, para $u, v \in V$, é um produto interno positivo-definido em V . Denotamos o espaço das estruturas complexas Ω -compatíveis em (V, Ω) por $\mathcal{J}(V, \Omega)$. Repare que a estrutura complexa J_0 definida em (1.10) é ω_0 -compatível em $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, onde ω_0 é a 2-forma simplética canônica em $\mathbb{R}^{2n}$. Vamos considerar em $\mathcal{J}(V, \Omega)$ a topologia induzida por $\mathcal{J}(V)$.

Proposição 1.18 ([40], Proposição 3.18). *Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. Para cada produto interno g em V , existe uma estrutura complexa Ω -compatível $J \in \mathcal{J}(V)$ induzida por g .*

Esboço da Demonstração: Dado um produto interno g , a estrutura Ω -complexa $J \in \mathcal{J}(V)$ pode ser definida explicitamente. Considere os seguintes isomorfismos

$$\begin{aligned} \tilde{g} : V &\rightarrow V^*, & \tilde{\Omega} : V &\rightarrow V^* \\ u &\mapsto \tilde{g}(u) = g(u, \cdot) & u &\mapsto \tilde{\Omega}(u) = \Omega(u, \cdot). \end{aligned}$$

¹²Para todo $(h_1, h_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, temos que $da \otimes da(h_1, h_2) = h_1 \cdot h_2$.

Definindo $J = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$, onde $A = \tilde{g} \circ \tilde{\Omega}$ e A^* é a adjunta de A , é possível verificar que $J \in \mathcal{J}(V, \Omega)$. ■

Seja $\text{Met}(V)$ o espaço dos produtos internos positivos-definidos em V . Como $\text{Met}(V)$ é convexo, segue que $\text{Met}(V)$ é contrátil. Este fato juntamente com a proposição anterior implicam o seguinte resultado:

Proposição 1.19 ([12], Proposição 2.48; [40], Proposição 3.20). *Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. O espaço das estruturas complexas Ω -compatíveis é contrátil.*

Podemos estender a noção de estrutura complexa para fibrados vetoriais. Seja (M, E, π) um fibrado vetorial de posto $2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, e denote por $\text{End}(E)$ o fibrado dos endomorfismos de E . A fibra de $\text{End}(E)$ no ponto $p \in M$ é End_p , isto é, os endomorfismos $\mathbb{R}$ -lineares $\phi_p : E_p \rightarrow E_p$. Uma *estrutura complexa* J em (M, E, π) é uma aplicação $J : M \rightarrow \text{End}(E)$ dada por $p \mapsto J_p$ tal que J_p é estrutura complexa na fibra E_p , para todo $p \in M$, e J é uma seção suave do fibrado $\text{End}(E) \rightarrow M$. Denotamos por $J(E)$ o espaço das estruturas complexas em (M, E, π) .

Definição 1.20. *Sejam M uma $2n$ -variedade, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, e TM o fibrado tangente de M . Uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(TM)$ é denominada uma **estrutura quase-complexa**. Neste caso, diremos que (M, J) é uma **variedade quase-complexa**.*

Seja (M, E, π, ω) um fibrado simplético. Dizemos que uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(E)$ é uma *estrutura complexa ω -compatível* em (M, E, π, ω) se J_p é estrutura complexa ω_p -compatível na fibra E_p , para todo $p \in M$. Denotamos por $\mathcal{J}(E, \omega)$ o espaço das estruturas complexas ω -compatíveis para o fibrado simplético (M, E, π, ω) . Note que a fibra de $\mathcal{J}(E, \omega)$ em $p \in M$ é $J_p(E, \omega) = J(E_p, \omega_p)$. Seja $\text{Met}(E)$ o conjunto das métricas em E , isto é, se $g \in \text{Met}(E)$, então $g_p \in \text{Met}(E_p)$, para todo $p \in M$. Pela Proposição 1.18, dada uma métrica $g \in \text{Met}(E)$, para todo $p \in M$, existe uma estrutura complexa ω_p -compatível induzida por g_p . Pela Proposição 1.19, sabemos que $J_p(E, \omega)$ é contrátil para todo $p \in M$. Isto prova a proposição a seguir:

Proposição 1.21 ([12], Proposição 2.61). *Seja (M, E, π, ω) um fibrado simplético. Então, para toda $g \in \text{Met}(E)$, existe uma estrutura complexa ω -compatível J induzida pela métrica g . Além disso, o espaço $\mathcal{J}(E, \omega)$ é contrátil.*

Um *fibrado Hermitiano* é um fibrado vetorial (M, E, π) de posto $2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, munido de uma *estrutura Hermitiana*, isto é, de uma tripla (ω, J, g) , onde ω é uma forma simplética, J é estrutura complexa ω -compatível e $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ é um produto interno positivo-definido. Em [47] é provado o seguinte resultado:

Proposição 1.22 ([47], Proposição 2.64). *Sejam Σ uma superfície de Riemann compacta com $\partial\Sigma \neq \emptyset$ e (E, Σ, π) um fibrado Hermitiano de posto $2n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, cuja estrutura Hermitiana é (ω, J, g) . Então existe uma trivialização $\Phi : E \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que*

$$\Phi^*J_0 = J, \quad \Phi^*\omega_0 = \omega, \quad \Phi^*g_0 = g \quad (1.11)$$

onde J_0 é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, ω_0 é a forma simplética canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e g_0

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

é o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^{2n}$.

Denominamos uma trivialização satisfazendo (1.11) de uma *trivialização unitária*. Em [47], McDuff e Salamon provam que todo fibrado hermitiano sobre S^1 admite uma trivialização unitária (veja [47, Lema 2.63]).

Observação 1.23. *Seja (Σ, E, π, ω) um fibrado simplético sobre uma superfície de Riemann compacta Σ com $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Uma trivialização $\Phi : E \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R}^{2n}$ preservando a forma simplética (isto é, $\Phi^*\omega_0 = \omega$) é chamada uma trivialização ω -simplética. A Proposição 2.61 em [47] mostra que todo fibrado simplético admite uma estrutura Hermitiana. Pela Proposição 1.22 existe uma trivialização unitária de (Σ, E, π) . Em particular, esta trivialização preserva ω e, portanto, sempre existe uma trivialização ω -simplética para (Σ, E, π, ω) . Note que afirmação análoga é válida para fibrados simpléticos sobre S^1 .*

Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Já observamos que $(M, \xi = \ker \lambda, \pi, d\lambda|_\xi)$ é um fibrado simplético sobre M . Pela Proposição 1.21, o espaço $\mathcal{J}(\lambda)$ das estruturas complexas em $\xi = \ker \lambda$ que são $d\lambda$ -compatíveis é não-vazio e contrátil. A notação $\mathcal{J}(\lambda)$ subentende o fibrado simplético $(M, \xi = \ker \lambda, \pi, d\lambda|_\xi)$ induzido pela λ . Para as nossas aplicações, é conveniente notar que, se $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um disco suave, da Observação 1.23 resulta que o fibrado *pull-back* $v^*\xi$ admite uma trivialização $d\lambda$ -simplética. Analogamente, se $x : S^1 \rightarrow M$ é uma aplicação suave, então $x^*\xi$ também admite uma trivialização $d\lambda$ -simplética.

Exemplo 1.24. Seja $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz + xdy))$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são coordenadas retangulares. Note que os campos $v_1 = \partial_x$, $v_2 = \partial_y - x\partial_z$ satisfazem $\xi = \text{span}\{v_1, v_2\}$. Defina J_ξ satisfazendo

$$J_\xi(v_1) = v_2 \quad \text{e} \quad J_\xi(v_2) = -v_1. \quad (1.12)$$

Segue que J_ξ é uma estrutura complexa em $\mathcal{J}(dz + xdy)$. □

Exemplo 1.25. Seja $(S^3, \xi = \ker \alpha_0|_{S^3})$, onde α_0 é a forma de Liouville. Sejam $v_1(p)$, $v_2(p)$, $v_3(p)$, para todo $p \in S^3$, os campos definidos em (1.2). Como $\xi_p = \text{span}\{v_2(p), v_3(p)\}$, para todo $p \in S^3$, defina $J : \xi \rightarrow \xi$ tal que, para todo $p \in S^3$, $J_p : \xi_p \rightarrow \xi_p$ é dada por

$$J_p(v_2(p)) = v_3(p) \quad \text{e} \quad J_p(v_3(p)) = -v_2(p). \quad (1.13)$$

Então $d\alpha_0(v_2, J(v_2)) = 1$ e, portanto, $J \in \mathcal{J}(\alpha_0)$. □

Observação 1.26. *Sejam λ uma forma de contato definida em uma 3-variedade M , $(M, \xi = \ker \lambda, \pi, d\lambda|_\xi)$ o fibrado simplético induzido por λ , $U \subset M$ um aberto e $d\lambda|_U$ é a restrição de $d\lambda$. Se J é uma estrutura complexa $d\lambda|_U$ -compatível (definida no aberto U), como $\mathcal{J}(\lambda)$ é contrátil, existe $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$ tal que $J'|_U = J$ (veja [1, 40] para os detalhes).*

Uma estrutura complexa $d\lambda$ -compatível em ξ induz de maneira natural uma estrutura quase-complexa no fibrado tangente da simplétização $\mathbb{R} \times M$. Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e considere

$\tilde{J} : T(\mathbb{R} \times M) \rightarrow T(\mathbb{R} \times M)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_\lambda(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (1.14)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times M$. De modo equivalente, poderíamos definir $\tilde{J}$ como

$$\tilde{J}_{(a,p)}(h, k) = (-\lambda_p(k), J_p(\pi_p(k)) + hX_\lambda(p)),$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$ e $(h, k) \in T(\mathbb{R} \times M)$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção na direção do campo de Reeb X_λ , isto é,

$$\pi_p(k) = k - \lambda_p(k)X_\lambda(p). \quad (1.15)$$

Desta forma, $(\mathbb{R} \times M, \tilde{J})$ é uma variedade quase-complexa. As equações (1.14) implicam que $\tilde{J}$ é $\mathbb{R}$ -invariante. Além disso, é possível verificar que $\tilde{J}$ é $d\lambda_\phi$ -compatível, onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função suave satisfazendo $\phi'(a) > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e λ_ϕ é definida por

$$\lambda_\phi(a, p)(h, k) := \phi(a)\lambda(p)(k),$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$ e $(h, k) \in T_{(a,p)}(\mathbb{R} \times M)$.

1.2 Índices Dinâmicos

Nesta seção, vamos introduzir alguns índices dinâmicos associados às órbitas fechadas de Reeb em $\mathcal{P}(\lambda)$. Estes índices medem o quanto que o fluxo de Reeb próximo de uma órbita fechada P *gira* em torno de P . As referências para esta seção são [3], [26], [30], [32], [40], [47].

Matrizes simpléticas e índice de Maslov

Já mencionamos que os espaços vetoriais simpléticos de mesma dimensão são isomorfos. Por esta razão, podemos fixar nossa atenção ao espaço $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, munido da forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} dx_k \wedge dy_k, \quad (1.16)$$

onde $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ são coordenadas retangulares em $\mathbb{R}^{2n}$, e da estrutura complexa ω_0 -compatível

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Fixe a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e considere o conjunto $\text{Sp}(n)$ das *matrizes reais* A de ordem $2n$ satisfazendo

$$A^T J_0 A = J_0, \quad (1.18)$$

onde A^T denota a transposta de A . Dizemos que $A \in \text{Sp}(n)$ é uma *matriz simplética*. Note que

(1.18) é equivalente a $A^*\omega_0 = \omega_0$, onde ω_0 é definida em (1.16). Como $\wedge^n \omega_0 = \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0$ (n vezes) é uma forma de volume em $\mathbb{R}^{2n}$ (veja [47, Corolário 2.5]), a condição $A^*\omega_0 = \omega_0$ implica que $\det A = 1$, para todo $A \in \mathrm{Sp}(n)$ (veja [47, pg. 19]). Este fato conduz à seguinte caracterização do espectro $\mathrm{Spec}(A) := \{\alpha \in \mathbb{C} : \exists v \in \mathbb{R}^{2n} \text{ tal que } Av = \alpha v\}$ das matrizes $A \in \mathrm{Sp}(n)$.

Lema 1.27 ([47], Lema 2.18). *Seja $A \in \mathrm{Sp}(n)$. Se $\alpha \in \mathrm{Spec}(A)$, então*

- (i) $\alpha \in \mathbb{C}^*$;
- (ii) $\alpha^{-1} \in \mathrm{Spec}(A)$;
- (iii) as multiplicidades de α e de α^{-1} coincidem.

É possível provar que o grupo fundamental de $\mathrm{Sp}(n)$ satisfaz $\pi_1(\mathrm{Sp}(n)) \simeq \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$ (veja [47, Proposições 2.20 e 2.21]). Este isomorfismo permite associar um índice às curvas contínuas e fechadas $\Psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Sp}(n)$. Denotaremos o espaço destas curvas por $\mathcal{L}(\mathrm{Sp}(n))$.

Teorema 1.28 ((Índice de Maslov) [47], Teorema 2.27). *Existe um único índice $\mu : \mathcal{L}(\mathrm{Sp}(n)) \rightarrow \mathbb{Z}$, chamado Índice de Maslov, satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) (**Homotopia**) Duas $\Psi_0, \Psi_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Sp}(n))$ são homotópicas se e somente se $\mu(\Psi_0) = \mu(\Psi_1)$;
- (ii) (**Produto**) Dadas $\Psi_0, \Psi_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Sp}(n))$, temos $\mu(\Psi_0 \cdot \Psi_1) = \mu(\Psi_0) + \mu(\Psi_1)$;
- (iii) (**Soma Direta**) Sejam $n', n'' \in \mathbb{Z}_+^*$ e considere $\mathrm{Sp}(n') \oplus \mathrm{Sp}(n'')$ identificado¹³ com um subgrupo de $\mathrm{Sp}(n)$, onde $n = n' + n''$, então $\mu(\Psi_0 \oplus \Psi_1) = \mu(\Psi_0) + \mu(\Psi_1)$;
- (iv) (**Normalização**) Seja $\Psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow U(1) \subset \mathrm{Sp}(n)$ dada por $\Psi(t) = e^{2\pi it}$. Então $\mu(\Psi) = 1$.

Esboço da Demonstração: O índice de Maslov μ pode ser construído explicitamente. Seja $A \in \mathrm{Sp}(n)$ e note que $(A \cdot A^T)^{-1/2}A \in \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n)$. Isto implica que existem $X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$(A \cdot A^T)^{-1/2}A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n). \quad (1.19)$$

Em particular, temos que $X^T Y = Y^T X$, $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é a identidade em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Estas condições garantem que $X + iY$ é unitária. Defina $\zeta : \mathrm{Sp}(n) \rightarrow S^1 := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ por $\zeta(A) = \det(X + iY)$. Se $\Psi \in \mathcal{L}(\mathrm{Sp}(n))$, considere a composição $\zeta \circ \Psi$ e note que existe um levantamento $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $\zeta \circ \Psi$ tal que $\det(X(t) + iY(t)) = e^{2\pi i \eta(t)}$. É possível verificar que $\mu(\Psi) = \eta(1) - \eta(0)$ satisfaz as condições do Teorema 1.28 (veja [47, Teorema 2.27]). ■

1.2.1 Índices de curvas de matrizes simpléticas

A seguir, vamos introduzir as noções de índice de Conley-Zehnder (usual, geométrico e generalizado) e de número de rotação no contexto de curvas de matrizes simpléticas. Posterior-

¹³Explicitamente, se M_1, M_2 são matrizes simpléticas tais que $M_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n')$ e $M_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n'')$, então a identificação é dada por $M_1 \oplus M_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}(n') \oplus \mathrm{Sp}(n'')$.

mente (na Subseção 1.2.2), veremos como aplicá-los ao estudo do fluxo de Reeb.

Índice de Conley-Zehnder

Nesta subseção, seguimos a exposição em [3]. Começamos com algumas noções básicas. Considere $\text{Sp}^*(n) = \{A \in \text{Sp}(n) : \det(\mathbb{1} - A) \neq 0\}$ o conjunto das matrizes simpléticas tais que $1 \notin \text{Spec}(A)$. É conhecido que o conjunto $\text{Sp}^*(n)$ se decompõe em duas componentes conexas:

$$\begin{aligned} \text{Sp}^+(n) &= \{A \in \text{Sp}(n) : \det(\mathbb{1} - A) > 0\}, \\ \text{Sp}^-(n) &= \{A \in \text{Sp}(n) : \det(\mathbb{1} - A) < 0\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

(veja [57, Lema 3.2]). Fixe duas matrizes simpléticas $W^\pm \in \text{Sp}^\pm(n)$ dadas por $W^+ = -\mathbb{1}$ e

$$W^- = \text{diag}(2, -1, \dots, -1, 1/2, -1, \dots, -1).$$

Seja $\Sigma^*(n) = \{\varphi : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \text{Sp}(n) : \varphi(0) = \mathbb{1} \text{ e } \varphi(1) \in \text{Sp}^*(n)\}$ o conjunto dos caminhos contínuos de matrizes simpléticas que começam na identidade e terminam em $\text{Sp}^*(n)$. Alguns autores chamam de *caminhos admissíveis* os elementos $\varphi \in \Sigma^*(n)$. Qualquer $\varphi \in \Sigma^*(n)$ admite uma extensão contínua $\tilde{\varphi} : [0, 2] \rightarrow \text{Sp}(n)$ tal que $\tilde{\varphi}(t) \in \text{Sp}^*(n)$, para todo $t \geq 1$, e

- (i) $\tilde{\varphi}(2) = W^+$, se $\varphi(1) \in \text{Sp}^+(n)$,
- (ii) $\tilde{\varphi}(2) = W^-$, se $\varphi(1) \in \text{Sp}^-(n)$.

Observamos acima que se $A \in \text{Sp}(n)$, então existem $X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$(A \cdot A^T)^{-1/2} A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n) \cap O(2n).$$

Defina a aplicação $\zeta : \text{Sp}(n) \rightarrow S^1$ por $A \mapsto \zeta(A) = \det(X + iY)$. Note que $\zeta^2(W^\pm) = 1$, onde $\zeta^2(W^\pm) := \zeta(W^\pm) \cdot \zeta(W^\pm)$. Sejam $\varphi \in \Sigma^*(n)$ e $\tilde{\varphi} : [0, 2] \rightarrow \text{Sp}(n)$ a respectiva extensão contínua. A composição $\zeta^2 \circ \tilde{\varphi} : [0, 2] \rightarrow S^1$ é uma curva fechada, visto que

$$\zeta^2(\tilde{\varphi}(0)) = \zeta^2(\mathbb{1}) = 1 = \zeta^2(W^\pm) = \zeta^2(\tilde{\varphi}(2)).$$

Como $\zeta^2 \circ \tilde{\varphi}(t) = e^{2\pi i \eta(t)}$, para algum levantamento $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de $\zeta^2 \circ \tilde{\varphi}$, definimos o *Índice de Conley-Zehnder* $\mu_{CZ}(\varphi)$ do caminho de matrizes simpléticas $\varphi \in \Sigma^*(n)$ como

$$\mu_{CZ}(\varphi) = \eta(2) - \eta(0). \quad (1.21)$$

Note que $\mu_{CZ}(\varphi)$ independe da extensão $\tilde{\varphi}$ e do levantamento η .

Para as nossas aplicações, precisamos considerar somente o caso $n = 1$. O teorema a seguir lista algumas propriedades de μ_{CZ} . Alguns autores apresentam este resultado como a definição axiomática do índice de Conley-Zehnder para $n = 1$.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Teorema 1.29 ([26], Teorema 3.1, [39], Teorema 1.4). *O índice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ} : \Sigma^*(1) \rightarrow \mathbb{Z}$ é a única aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) *se $s \mapsto \varphi^s$ é uma homotopia de curvas em $\Sigma^*(1)$, então $s \mapsto \mu_{CZ}(\varphi^s)$ é constante;*
- (ii) *se $\Phi : S^1 \rightarrow \text{Sp}(1)$ uma curva contínua fechada tal que $\Phi(0) = \mathbb{1}$, então*

$$\mu_{CZ}(\Phi \cdot \varphi) = 2\mu(\Phi) + \mu_{CZ}(\varphi), \quad \text{para todo } \varphi \in \Sigma^*(1), \quad (1.22)$$

onde μ é o índice de Maslov definido acima;

- (iii) *Se $\varphi \in \Sigma^*(1)$, então $\mu_{CZ}(\varphi^{-1}) = -\mu_{CZ}(\varphi)$, onde $\varphi^{-1}(t) := (\varphi(t))^{-1}$, para todo $t \in [0, 1]$;*
- (iv) *Se $\varphi(t) = e^{\pi i t}$, então $\mu_{CZ}(\varphi) = 1$.*

Observação 1.30. *O teorema anterior faz sentido somente para caminhos admissíveis. Veremos adiante que, do ponto de vista da dinâmica de Reeb, isto significa restringir a atenção apenas às órbitas fechadas não-degeneradas.*

Índice de Conley-Zehnder generalizado

Nesta subseção, vamos apresentar uma descrição alternativa, introduzida por Hofer, Wysocki e Zehnder em [26], para o índice de Conley-Zehnder. Esta descrição permitirá estender a definição de μ_{CZ} para curvas de matrizes simpléticas em $\Sigma(1)$.

Considere $\mathbb{R}^2$ munida da métrica Euclidiana. Seja $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ o espaço das (classes de equivalência de) funções $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que u_k são 2-integráveis, $k = 1, 2$. Denote por $W^{1,2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ o *espaço de Sobolev* constituído pelas (classes de equivalência de) funções $u = (u_1, u_2) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $u \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ e as derivadas fracas $\dot{u}_k$ existem e são 2-integráveis, $k = 1, 2$ (veja os detalhes em [48]). Considere o operador auto-adjunto não-limitado¹⁴

$$L : W^{1,2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$$

definido por

$$L(v(t)) = -i\partial_t v(t) - S(t)v(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

onde $S(t)$ é um caminho contínuo de matrizes simétricas e

$$i \simeq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A razão para definir L como em (1.23) é a seguinte: se $\varphi \in \Sigma(1)$ e $S(t) = -i\dot{\varphi}\varphi^{-1}$ é uma curva de matrizes (simétricas), então φ satisfaz a equação diferencial $-i\dot{\varphi} - S\varphi = 0$.

Denote por $\text{Spec}(L)$ o espectro de L . É possível verificar que $\text{Spec}(L) \neq \emptyset$ ([26]). Fixe $\beta \in \text{Spec}(L)$ e seja $\eta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma auto-função não-trivial para $\beta \in \text{Spec}(L)$. Defina $\text{wind}(\eta) = \deg\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)$, onde $\deg$ denota o grau de aplicações entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$. No Lema 3.4

¹⁴Estas propriedades são não-triviais. Veja os detalhes em [26].

em [26], Hofer, Wysocki e Zehnder verificam que $\text{wind}(\eta)$ independe da auto-função não-trivial η . Desta forma, podemos denotar apenas $\text{wind}(\beta)$ em lugar de $\text{wind}(\eta)$. No teorema a seguir, relacionamos outras propriedades do espectro $\text{Spec}(L)$. Para a demonstração, veja os Lemas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 em [26].

Lema 1.31. *Seja L o operador definido em (1.23). Então $\text{Spec}(L) \subset \mathbb{R}$ e se acumula em $\pm\infty$. As multiplicidades algébrica e geométrica dos elementos em $\text{Spec}(L)$ são 1 ou 2. Se $\beta, \beta' \in \text{Spec}(L)$ e η, η' são auto-funções não-triviais de β, β' , respectivamente, então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) *se $\beta \neq \beta'$ e $\text{wind}(\beta) = \text{wind}(\beta')$, então os vetores $\eta(t), \eta'(t)$ são linearmente independentes, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*
- (ii) *se $\beta \leq \beta'$, então $\text{wind}(\beta) \leq \text{wind}(\beta')$;*

Além disso, para todo $k \in \mathbb{Z}$, existem dois auto-valores $\beta_1, \beta_2 \in \text{Spec}(L)$, contados com multiplicidade, tais que $k = \text{wind}(\beta_1) = \text{wind}(\beta_2)$.

Hofer, Wysocki e Zehnder mostram em [26] que o índice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ}(\varphi)$ de uma curva suave $\varphi \in \Sigma^*(1)$ pode ser descrito em termos do espectro $\text{Spec}(L)$, onde L é definido em (1.23). Neste caso, $S(t) = -i\dot{\varphi}\varphi^{-1}$. Observam também que esta descrição permite estender a definição de $\mu_{CZ}(\varphi)$ para curvas suaves $\varphi \in \Sigma(1)$. A seguir expomos as principais ideias. Escolha os seguintes auto-valores:

$$\begin{aligned}\beta^{\text{pos}} &:= \min\{\beta \in \text{Spec}(L) : \beta > 0\}, \\ \beta^{\text{neg}} &:= \max\{\beta \in \text{Spec}(L) : \beta < 0\}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Considere $p \in \{0, 1\}$, denominada *paridade*, definida como $p = \frac{1}{2}(1 + (-1)^b)$. Aqui b é o número de auto-valores $\beta \in \text{Spec}(L) \cap (-\infty, 0)$ contados com multiplicidade tais que $\text{wind}(\beta) = \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$. Dado $\varphi \in \Sigma(1)$, defina o *índice de Conley-Zehnder generalizado* como

$$\mu_{\text{spec}}(\varphi) = 2\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + p = \text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + \text{wind}(\beta^{\text{pos}}).\tag{1.25}$$

Observe que $\varphi \in \Sigma^*(1)$ se e somente se $0 \notin \text{Spec}(L)$. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.32 ([26], Teorema 3.10). *Sejam $\varphi \in \Sigma^*(1)$ e $\eta^{\text{neg}} \in \text{Spec}(L)$, onde L o operador definido em (1.23). Então o índice $\mu_{\text{spec}}(\varphi) = 2\text{wind}(\eta^{\text{neg}}) + p$, onde p é a paridade, satisfaz as condições do Teorema 1.29, isto é, $\mu_{\text{spec}}(\varphi) = \mu_{CZ}(\varphi)$.*

O teorema acima estabelece uma conexão entre os índices de Conley-Zehnder usual e generalizado no caso em que $\varphi \in \Sigma^*(1)$. Esta conexão será útil, por exemplo, quando combinada com o invariante algébrico wind_∞ que será definido na Seção 1.3.

Índice de Conley-Zehnder geométrico

Em [20], Hofer e Kriener introduzem a *descrição geométrica do índice de Conley-Zehnder*. Seja $\varphi \in \Sigma(1)$ e considere $\theta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi(t)e^{2\pi i s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t,s)}$. Defina a

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

função variação $\Delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Delta(s) = \frac{\theta(1, s) - 2\pi s}{2\pi}. \quad (1.26)$$

É possível provar que a imagem $I(\varphi) := \{\Delta(s) : s \in [0, 1]\}$ da função Δ é um intervalo (fechado) cujo comprimento é menor do que $1/2$ (veja [20, Lema 3.2], [24, Apêndice 8]). Isto mostra que ou $I(\varphi)$ contém um inteiro ou $I(\varphi) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Definimos o *índice (de Conley-Zehnder) geométrico* como

$$\mu_{\text{geom}}(\varphi) = \begin{cases} 2k, & \text{se } k \in I(\varphi), \\ 2k + 1, & \text{se } I(\varphi) \subset (k, k + 1). \end{cases} \quad (1.27)$$

Quando $\varphi \in \Sigma^*(1)$, o índice μ_{geom} satisfaz as condições do Teorema 1.29 (veja [20, Teorema 3.5]). Como o Teorema 1.29 afirma a unicidade do índice, é válido o seguinte resultado:

Proposição 1.33 ([20, 40]). *Seja $\varphi \in \Sigma^*(1)$, então $\mu_{CZ}(\varphi) = \mu_{\text{geom}}(\varphi)$.*

Embora o índice geométrico $\mu_{\text{geom}}(\varphi)$ esteja definido para todo $\varphi \in \Sigma(1)$, em geral, $\mu_{\text{geom}}(\varphi)$ não coincide com $\mu_{\text{spec}}(\varphi)$. Apesar disso, é possível verificar que se $\varphi \in \Sigma(1)$, então ou $\mu_{\text{spec}}(\varphi) = \mu_{\text{geom}}(\varphi)$ ou $\mu_{\text{spec}}(\varphi) = \mu_{\text{geom}}(\varphi) - 1$ (veja [40, Proposição A.2]).

Número de rotação de curvas em $\Sigma(1)$

Considere uma curva de matrizes simpléticas $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \text{Sp}(1)$ satisfazendo $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave dada por $\varphi(t)e^{i2\pi s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t,s)}$ e $\theta(0, s) = 2\pi s$. Note que $\theta(t, s+1) = \theta(t, s) + 2\pi$. Seja $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função variação dada por

$$\Delta(s) = \frac{\theta(1, s) - 2\pi s}{2\pi}.$$

Repare que Δ é uma função 1-periódica e suave. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $s \mapsto f(s) := \theta(1, s)/2\pi$. É possível verificar que a função f satisfaz $f(s+1) = f(s) + 1$, $f(s) = s + \Delta(s)$ e induz um difeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ preservando a orientação (veja os detalhes em [36]).

Definição 1.34. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} \text{Sp}(1)$ satisfazendo $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos o **número de rotação** $\rho(\varphi)$ da curva φ como*

$$\rho(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k}. \quad (1.28)$$

Observe que $\rho(\varphi)$ independe de $s \in [0, 1]$ e está bem definido. Se denotarmos $\varphi^k(t) := \varphi(kt)$, para todo $t \in [0, 1]$ e $k \in \mathbb{Z}$, está naturalmente definida a variação $s \mapsto \Delta^k(s)$, para todo $s \in [0, 1]$. Como $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$\Delta^k(s) = \Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s)), \quad \text{para todo } s \in [0, 1]. \quad (1.29)$$

A equação anterior implica que podemos calcular o número de rotação conforme o seguinte lema:

Lema 1.35 ([36]). *Seja $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{C^\infty} Sp(1)$ satisfazendo $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $\varphi^k(t) := \varphi(kt)$ e $s \mapsto \Delta^k(s)$ é a variação associada, então*

$$\rho(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta^k(s)}{k}. \quad (1.30)$$

Novamente, $\rho(\varphi)$ é independente de $s \in [0, 1]$.

1.2.2 Índices dinâmicos: Órbitas fechadas de Reeb

A seguir, vamos relacionar os índices definidos acima com o comportamento da dinâmica de Reeb na vizinhança de órbitas fechadas. Primeiramente, introduziremos a noção de fluxo linearizado sobre órbitas fechadas de Reeb. Este fluxo induz, conforme explicaremos, curvas suaves de matrizes simpléticas. Os índices μ_{CZ} , μ_{geom} , μ_{spec} , ρ destas curvas permitirão obter informações sobre o fluxo de Reeb próximo de órbitas fechadas.

Nesta seção, consideramos fixada uma forma de contato λ definida numa 3-variedade M e denotamos por $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb em M . Fixe uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e seja $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa definida na simpletização $\mathbb{R} \times M$ e satisfazendo (1.14).

Fluxo linearizado

Seja $P = (x, T)$ uma órbita fechada de $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Considere $x_T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ tal que $t \mapsto x_T(t) := x(Tt)$. Observe que o fibrado $\xi_P := x_T^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um fibrado $d\lambda$ -simplético sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e admite uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$. Note que a escolha de uma trivialização $d\lambda$ -simplética é equivalente a escolha de uma seção não-nula $Z : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \xi_P$. Além disso, se $\tilde{Z}' : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \xi_P$ é uma seção não-nula de ξ_P distinta de Z e $\Psi(\tilde{Z}'(t)) = Z'(t)$, então existe uma única função $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $g(t) = a(t) + ib(t)$ tal que $Z'(t) = g(t)Z(t) = (a(t)Z(t) + ib(t))Z(t)$. Aqui identificamos $J \simeq i$. Defina

$$\text{wind}(Z', Z) = \deg \left(\frac{g}{|g|} \right) \in \mathbb{Z}. \quad (1.31)$$

Pela *Teoria Elementar do Grau* (veja [52]), o número de rotação¹⁵ $\text{wind}(Z', Z)$ depende somente da classe de homotopia das seções Z, Z' . Deste modo, Z e Z' são homotópicas se e somente se $\text{wind}(Z', Z) = 0$. Observe que $\text{wind}(Z', Z) = 0$ se, e somente se, $(a(t), b(t))$ é homotópico a $(1, 0)$. Portanto, Ψ, Ψ' são homotópicas¹⁶, onde $\Psi' : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ é a trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por Z' , se, e somente se, $\text{wind}(Z', Z) = 0$. Denotaremos por $\mathcal{S}_P$ o conjunto das *classes de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $\xi_P := x_T^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$* .

¹⁵Em inglês, *winding number*.

¹⁶Lembre que duas trivializações $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, $\Psi' : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ são ditas *homotópicas* se existe uma trivialização do fibrado $\xi_P \times [0, 1] \xrightarrow{\pi \times 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$, onde $\pi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, denotada por $\Phi : \xi_P \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1] \times \mathbb{C}$ tal que $\Phi(\tilde{v}, 0) = \Psi(\tilde{v})$ e $\Phi(\tilde{v}, 1) = \Psi'(\tilde{v})$, para todo $\tilde{v} \in \xi_P$.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Seja $P = (x, T)$ a órbita fechada de $\{\phi\}_{t \in \mathbb{R}}$ fixada acima. Considere a aplicação $d\phi_{Tt}|_{x(0)} : T_{x(0)}M \rightarrow T_{x(Tt)}M$ determinada pelo *fluxo linearizado* sobre a órbita fechada P . Lembre que o fluxo de Reeb $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz $\phi_t^* \lambda = \lambda$. Em particular, $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ é uma transformação ($\mathbb{R}$ -linear) $d\lambda$ -simplética. Fixe uma classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$ e seja $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética contida em α . Podemos definir uma aplicação $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))$, onde $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ denota as transformações $\mathbb{R}$ -lineares em $\mathbb{C}$, satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi(t) = \Psi_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot \Psi_0^{-1}. \quad (1.32)$$

Observe que φ é um caminho de transformações simpléticas. É natural identificar φ com um caminho de matrizes simpléticas, isto é, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$. Como $P = (x, T)$ é uma órbita fechada, segue que φ satisfaz $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Repare também que se $P = (x, T)$ é não-degenerada, então $\varphi(1) \in \text{Sp}^*(1) = \{A \in \text{Sp}(1) : \det(\mathbb{1} - A) \neq 0\}$.

Índice de Conley-Zehnder (usual e geométrico)

Sejam $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ não-degenerada e $\alpha \in \mathcal{S}_P$ uma classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas. Fixe uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ em α e seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ o caminho induzido por Ψ conforme (1.32). Definimos o *índice de Conley-Zehnder (usual)* da órbita fechada e não-degenerada $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$, em relação à classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$, como

$$\mu_{CZ}(P, \alpha) = \mu_{CZ}(\varphi|_{[0,1]}) \in \mathbb{Z}, \quad (1.33)$$

onde $\varphi|_{[0,1]}$ é a restrição de φ ao intervalo $[0, 1]$. De modo análogo, definimos o *índice de Conley-Zehnder geométrico* $\mu_{\text{geom}}(P, \alpha)$ de $P = (x, T)$, em relação à classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$, como

$$\mu_{\text{geom}}(P, \alpha) = \mu_{\text{geom}}(\varphi|_{[0,1]}) \in \mathbb{Z}, \quad (1.34)$$

onde μ_{geom} é o índice definido em (1.27)¹⁷. Lembre que a hipótese de não-degenerescência de $P = (x, T)$ implica $\mu_{CZ}(P, \alpha) = \mu_{\text{geom}}(P, \alpha)$. As notações $\mu_{CZ}(P, \alpha)$, $\mu_{\text{geom}}(P, \alpha)$ deixam explícita a dependência em relação à classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas. Para ver esta dependência, fixe uma classe $\beta \in \mathcal{S}_P$ distinta de α e escolha uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi' : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ em β . Seja $\varphi' \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ o caminho de matrizes simpléticas satisfazendo $\varphi'(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi'(t) = \Psi'_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot (\Psi'_0)^{-1}$. Note que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \Psi'_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot (\Psi'_0)^{-1} \\ &= (\Psi'_t \cdot \Psi_t^{-1}) \cdot \left(\Psi_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot \Psi_0^{-1} \right) \cdot (\Psi_0 \cdot (\Psi'_0)^{-1}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

¹⁷Pela construção feita na seção anterior, o índice geométrico μ_{geom} também está definido para órbitas fechadas degeneradas. Para as nossas aplicações, será suficiente considerar apenas o caso não-degenerado.

Como $\Psi'_t \cdot \Psi_t^{-1}$ é uma curva fechada de matrizes simpléticas, o item (ii) do Teorema 1.29 implica

$$\mu_{CZ}(P, \beta) = \mu_{CZ}(P, \alpha) + 2\mu(\Psi_t \cdot \Psi_t^{-1}),$$

onde μ é o índice de Maslov para curvas contínuas fechadas em $\text{Sp}(1)$ (veja Teorema 1.28).

Número de Rotação Transversal

Fixe uma órbita fechada $P = (x, T)$, possivelmente degenerada, e seja $\alpha \in \mathcal{S}_P$. Escolha uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ em α . Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ o caminho de matrizes simpléticas definido conforme (1.32). Como P é periódica, verificamos que $\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1)$. Note que $\varphi(1)$ não necessariamente pertence ao conjunto

$$\text{Sp}^*(1) = \{A \in \text{Sp}(1) : \det(\mathbb{1} - A) \neq 0\}.$$

O *número de rotação transversal*, em relação à classe α , para a órbita fechada $P = (x, T)$ é definido por

$$\rho(P, \alpha) = \rho(\varphi),$$

onde $\rho(\varphi)$ é o *número de rotação* tal como em (1.34). Observe que ρ depende da classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas. Se $\beta \in \mathcal{S}_P$ é uma classe distinta de α e $\Psi' : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ é uma trivialização $d\lambda$ -simplética em β , então $\rho(P, \beta) = \rho(P, \alpha) + \mu(\Psi'_t \circ \Psi_t^{-1})$, onde μ é o índice de Maslov e $\Psi'_t \circ \Psi_t^{-1}$ é uma curva fechada de matrizes simpléticas (veja [36]).

Operador assintótico e índice de Conley-Zehnder generalizado

No início desta seção, fixamos $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e definimos $\tilde{J}$ satisfazendo (1.14). Fixe uma órbita fechada $P = (x, T)$, possivelmente degenerada. Considere o fibrado $d\lambda$ -simplético $\xi_P := x_T^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $x_T(t) := x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A métrica $d\lambda(\cdot, J\cdot)$ induz uma estrutura de *espaço de Hilbert* em $L^2(\xi_P)$ (veja [26], [33]).

Definição 1.36 ([26], Seção 3; [33], Definição 4.3). *Sejam ∇ uma conexão simétrica em TM e ∇_t a derivada covariante ao longo da curva $t \mapsto x_T(t)$. O operador fechado e não-limitado*

$$\begin{aligned} A_P : W^{1,2}(\xi_P) &\subset L^2(\xi_P) \rightarrow L^2(\xi_P) \\ \eta &\mapsto J(-\nabla_t \eta + T\nabla_\eta X_\lambda) \end{aligned} \tag{1.36}$$

é denominado **operador assintótico** sobre a órbita fechada P .

Observe que A_P é independente da conexão simétrica em M . O operador assintótico A_P possui uma representação local que coincide com o operador L definido em (1.23). Para ver isto, fixe uma classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$ e seja $\Psi : \xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $\xi_P \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ contida na classe α . Considere a aplicação $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi(t) = \Psi_t \circ d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \circ (\Psi_0)^{-1}$, onde $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ é a aplicação dada pelo fluxo

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

linearizado restrito à estrutura de contato. Uma verificação direta mostra que

$$\Psi_t(A_P(\eta))(t) = -J(t)\dot{v}(t) - S(t)v(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (1.37)$$

para toda $\eta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \xi_P$, onde

$$v(t) := \Psi_t(\eta(t)), \quad J(t) := \Psi_t \cdot J_{x(Tt)} \cdot \Psi_t^{-1} \quad \text{e} \quad S(t) = -J(t)\dot{\varphi}(t)\varphi^{-1}(t).$$

As propriedades do operador L enunciadas no Lema 1.31 se transferem para A_P , embora dependam da classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$ contendo Ψ . Definimos o *índice de Conley-Zehnder generalizado* da órbita fechada $P = (x, T)$, em relação à classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$, como

$$\mu_{\text{spec}}(P, \alpha) = \mu_{\text{spec}}(\varphi), \quad (1.38)$$

onde μ_{spec} é o índice definido em (1.25). Quando a órbita fechada P é não-degenerada, o Teorema 1.32 garante que $\mu_{\text{spec}}(P, \alpha) = \mu_{CZ}(P, \alpha)$.

Iteradas de órbitas fechadas de Reeb

Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M . Fixe uma órbita fechada $P = (x, T)$ e uma classe $\alpha \in \mathcal{S}_P$. Seja $\Psi : x_T^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética na classe α e considere $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ a aplicação satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi(t) = \Psi_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot \Psi_0^{-1}$, onde $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ é a aplicação dada pelo fluxo linearizado restrito à ξ . Lembre que os auto-valores de uma matriz em $\text{Sp}(1)$ acontecem em pares, isto é, ou $(\beta, \bar{\beta}) \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ou $(\beta, \beta^{-1}) \in \mathbb{R}^2$ com $\beta > 0$ ou $(\beta, \beta^{-1}) \in \mathbb{R}^2$ com $\beta < 0$ (veja Lema 1.27). No caso em que P é não-degenerada, vamos classificar P de acordo com o espectro de $\varphi(1)$. Dizemos que P é

- (i) *elíptica*, se $(\beta, \bar{\beta}) \in S^1 \setminus \{1\} \subset \mathbb{C}$;
- (ii) *(+)-hiperbólica*, se $(\beta, \beta^{-1}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$ com $\beta > 0$;
- (iii) *(-)-hiperbólica*, se $(\beta, \beta^{-1}) \in \mathbb{R}^2$ com $\beta < 0$.

Observação 1.37 ([24], Apêndice 8). *Quando $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é uma órbita fechada elíptica, as iteradas $P^n = (x, nT)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, também são elípticas. O mesmo vale para o caso em que P é uma órbita fechada (+)-hiperbólica. Se P é uma órbita fechada (-)-hiperbólica, então temos a seguinte alternância:*

$$P^n \text{ é } \begin{cases} (-)\text{-hiperbólica, se } n=2k+1; \\ (+)\text{-hiperbólica, se } n=2k. \end{cases} \quad (1.39)$$

O resultado a seguir revela uma propriedade de *monotonicidade* do índice μ_{CZ} .

Proposição 1.38 ([24], Proposição 8.2). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M , $P = (x, T)$ uma órbita fechada, $\alpha \in \mathcal{S}_P$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. São verdadeiras as*

seguintes afirmações:

- (i) $\mu_{CZ}(P^n, \alpha) = 1 \Rightarrow \mu_{CZ}(P^m, \alpha) = 1$, para todo $m \leq n$;
- (ii) $\mu_{CZ}(P^n, \alpha) \leq 0 \Rightarrow \mu_{CZ}(P^m, \alpha) \leq 0$, para todo $m \leq n$.

O próximo teorema é uma caracterização do índice μ_{CZ} das órbitas fechadas hiperbólicas.

Teorema 1.39 ([24], Teorema 8.3). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M , $P = (x, T)$ uma órbita fechada hiperbólica e $\alpha \in \mathcal{S}_P$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) se P é (+)-hiperbólica, então $\mu_{CZ}(P, \alpha) = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\mu_{CZ}(P^n, \alpha) = n\mu_{CZ}(P, \alpha), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_+^*;$$

- (ii) se P é (-)-hiperbólica, então $\mu_{CZ}(P, \alpha) = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e

$$\mu_{CZ}(P^n, \alpha) = n\mu_{CZ}(P, \alpha), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

É possível apresentar uma fórmula explícita para o cálculo do índice μ_{CZ} das iteradas de uma órbita fechada elíptica. Veja os detalhes em [24, Apêndice 8]. Para as nossas aplicações é suficiente a seguinte estimativa:

Teorema 1.40 ([24], Teorema 8.3). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M , $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ uma órbita fechada elíptica e $\alpha \in \mathcal{S}_P$. Então $\mu_{CZ}(P, \alpha) = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, e as iteradas $P^n = (x, nT)$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, de P satisfazem*

$$2nk - 1 < \mu_{CZ}(P^n, \alpha) < 2n(k + 1) + 1. \quad (1.40)$$

Observação 1.41. *Sejam $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $\alpha \in \mathcal{S}_P$. Quando $\mu_{CZ}(P, \alpha) \leq 1$, os Teoremas 1.39 e 1.40 implicam que $\mu_{CZ}(P^n, \alpha) \leq 2n - 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Por razões análogas, se $\mu_{CZ}(P, \alpha) \geq 2$, temos $\mu_{CZ}(P^n, \alpha) \geq 2n$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$.*

É interessante observar que, se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_P$ são classes distintas, então $\mu_{CZ}(P, \beta)$ satisfaz $\mu_{CZ}(P, \beta) \in k + 2\mathbb{Z}$, onde $k = \mu_{CZ}(P, \alpha)$. Isto mostra que, independente da classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas, as órbitas fechadas elípticas e (-)-hiperbólicas possuem índice μ_{CZ} ímpar e as (+)-hiperbólicas possuem índice μ_{CZ} par.

1.3 Curvas pseudo-holomorfas

A teoria de curvas pseudo-holomorfas em variedades simpléticas, introduzida por Gromov em [14], tem sido fundamental no estudo da *dinâmica de Reeb* de uma 3-variedade de contato desde a prova da *Conjectura de Weinstein* em S^3 , no caso *overtwisted*, apresentada por Hofer em [19]. Neste artigo, Hofer introduz a *noção de curvas pseudo-holomorfas em simplificações de variedades de contato* e observa que a existência destas curvas, caso tenham energia finita,

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

está relacionada à presença de órbitas fechadas do fluxo de Reeb. Deste então, em uma extensa literatura, tem-se estudado as propriedades das curvas pseudo-holomorfas em simplectizações ([25, 26, 27, 28, 33]) e são inúmeras as aplicações na prova de existência de órbitas fechadas ([19, 30, 31, 36]), na caracterização (dinâmica) de variedades de contato ([9, 21, 23, 35]) e na construção de seções globais tipo-disco ([30, 33, 39]) e de folheações de variedades de contato ([24, 56]).

Nesta subseção, definiremos o conceito de curvas pseudo-holomorfas em simplectizações de variedades de contato e apresentaremos um resumo das propriedades necessárias para as nossas aplicações. Começamos com a definição de *curva pseudo-holomorfa* no contexto de variedades quase-complexas.

Definição 1.42 ([40, 48]). *Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann e $(W, \tilde{J})$ um variedade quase-complexa. Uma aplicação diferenciável $u : \Sigma \rightarrow W$ é dita uma **curva pseudo-holomorfa** (ou **$\tilde{J}$ -holomorfa**) se satisfaz as equações não-lineares de Cauchy-Riemann*

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}}(u) = \frac{1}{2}(du + \tilde{J}(u) \cdot du \cdot j) = 0. \quad (1.41)$$

Equivalentemente, podemos dizer que cada diferencial $du_z : T_z\Sigma \rightarrow T_{u(z)}W$ preserva multiplicações complexas no sentido de que $du_z \cdot j_z = \tilde{J}_{u(z)} \cdot du_z$, para todo $z \in \Sigma$.

Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann, não necessariamente compacta e possivelmente com bordo $\partial\Sigma$ não-vazio, e $\Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ um conjunto finito. Seja M uma 3-variedade fechada (compacta e sem bordo) munida de uma forma de contato λ . Fixe uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e considere a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ satisfazendo (1.14).

Definição 1.43 ([19, 40]). *Uma aplicação suave $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma **superfície de energia finita** (ou uma **curva pseudo-holomorfa** (**$\tilde{J}$ -holomorfa**) **de energia finita**) na simplectização $\mathbb{R} \times M$ quando satisfaz $\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = 0$ e a energia de Hofer*

$$E_H(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tilde{u}^* d\lambda_\phi, \quad (1.42)$$

onde $\Lambda := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' \geq 0\}$ e λ_ϕ é definida em (1.9), é finita. Dizemos que os pontos $z \in \Gamma$ são os **furos**¹⁸ de $\tilde{u}$.

Observação 1.44. *Observe que a forma pull-back $\tilde{u}^* d\lambda_\phi$ é uma 2-forma não-negativa, isto é,*

$$\tilde{u}^* d\lambda_\phi = [\phi' \cdot ((\partial_s a)^2 + (\partial_t a)^2) + \phi \cdot (|\pi \partial_s u|^2 + |\pi \partial_t u|^2)] ds \wedge dt \quad (1.43)$$

e

$$[\phi' \cdot ((\partial_s a)^2 + (\partial_t a)^2) + \phi \cdot (|\pi \partial_s u|^2 + |\pi \partial_t u|^2)] \geq 0, \quad (1.44)$$

para todo $\phi \in \Lambda$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é projeção na direção de X_λ definida em (1.15). As equações (1.43) e (1.44) implicam que uma superfície de energia finita $\tilde{u} : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é constante se

¹⁸Em inglês, *puncture*.

e somente se $E_H(\tilde{u}) = 0$. Em particular, quando Σ é fechada, o Teorema de Stokes garante que ou $\tilde{u}$ é constante ou $\Gamma \neq \emptyset$.

Observação 1.45. Para simplificar a nomenclatura, quando $\Sigma = \mathbb{S}^2$, dizemos que $\tilde{u} : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma esfera furada ($\tilde{J}$ -holomorfa) de energia finita. Em particular, se $\Sigma = \mathbb{S}^2$ e $\#\Gamma = 1$, $\tilde{u}$ é chamado um plano ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita. Se $\Sigma = \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, dizemos que $\tilde{u}$ é um disco ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita e, caso $\Gamma \neq \emptyset$, $\tilde{u}$ é um disco furado ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita.

Observe que, se $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma superfície de energia finita na simpletização $\mathbb{R} \times M$, então a equação (1.41) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u^* \lambda &= -da \circ i, \\ \pi \cdot du + J(u) \pi \cdot du \cdot j &= 0, \end{aligned} \tag{1.45}$$

onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo da direção de X_λ . Além disso, se $\tilde{u} = (a, u) : U \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma superfície de energia finita na simpletização $\mathbb{R} \times M$ e $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto, então (1.41) se resume a $\tilde{u}_s + \tilde{J}(\tilde{u})\tilde{u}_t = 0$, onde $s + it$ são coordenadas em $\mathbb{C}$.

Para as nossas aplicações, precisaremos de uma outra noção de energia, a chamada $d\lambda$ -energia. Mais precisamente, dada uma curva $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$, a $d\lambda$ -energia de $\tilde{u}$ é definida por $\int_{\Sigma \setminus \Gamma} u^* d\lambda$. Note que a $d\lambda$ -energia é finita quando $E_H(\tilde{u}) < \infty$ e satisfaz $\int_{\Sigma \setminus \Gamma} u^* d\lambda \geq 0$.

Exemplo 1.46. Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Fixe uma órbita fechada de Reeb $P = (x, T)$. Identifique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ com $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ usando $(s, t) \mapsto e^{2\pi(s+it)}$. A aplicação

$$\begin{aligned} F_P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \times M \\ (s, t) &\mapsto (Ts, x(Tt)) \end{aligned}$$

é uma curva $\tilde{J}$ -holomorfa. É possível verificar que $E_H(F_P) = T$ e a $d\lambda$ -energia de F_P é nula. $\square$

Exemplo 1.47. Seja $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker \lambda)$, onde $\lambda = dz + xdy$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são coordenadas retangulares. Seja $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ a simpletização de $\mathbb{R}^3$ munida da forma simplética $d\lambda_\phi$, onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função suave satisfazendo $\phi'(a) > 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$, e λ_ϕ é definida por

$$\lambda_\phi(a, p)(h, k) := \phi(a)\lambda(p)(k), \tag{1.46}$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ e $(h, k) \in T_{(a,p)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4)$. Fixe $J_\xi \in \mathcal{J}(\lambda)$ definida em (1.12) e seja $\tilde{J}_\xi$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ satisfazendo (1.14). Sejam $\tilde{v}_\tau = (a_\tau, v_\tau) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, discos tais que

$$\begin{aligned} a_\tau(s + it) &= \frac{\tau^2}{4}(s^2 + t^2 - 1), \\ v_\tau(s + it) &= \left(\tau s, \tau t, -\frac{\tau^2}{2}st \right). \end{aligned}$$

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Para todo $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, uma verificação direta mostra que $\tilde{v}_\tau$ é um disco $\tilde{J}_\epsilon$ -holomorfo. De (1.43) segue que $E_H(\tilde{v}_\tau) < \infty$, para todo $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Note que a $d\lambda$ -energia de $\tilde{v}_\tau$ é não-nula. $\square$

Exemplo 1.48. Seja $(S^3, \xi_0 = \ker \alpha_0|_{S^3})$, onde α_0 é a *forma de Liouville*. Seja $\mathbb{R} \times S^3$ a simplctização de S^3 munida da forma simplética $\omega_\phi = d(\alpha_0)_\phi$, onde $(\alpha_0)_\phi$ é definida tal como em (1.46). Sejam $J \in \mathcal{J}(\alpha_0)$ definida em (1.13) e $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo (1.14). Fixe $c \in \mathbb{C}^*$ e considere $\tilde{v}_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ dado por

$$z \mapsto \left(\frac{1}{2} \ln |z_c|, \frac{z_c}{|z_c|} \right),$$

onde $z_c = (z, c) \in \mathbb{C}^2$. É possível mostrar que $\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{v}_c) = 0$ e que $\tilde{v}_c$ é um plano $\tilde{J}$ -holomorfo com $d\lambda$ -energia não-nula. Quando $c = 0$, então $v_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ dado por

$$z \mapsto \left(\frac{1}{2} \ln |z|, \frac{z}{|z|} \right)$$

é um cilindro $\tilde{J}$ -holomorfo com $d\lambda$ -energia nula. É possível verificar que $E_H(\tilde{v}_c) < \infty$, $\forall c \in \mathbb{C}$. $\square$

Seja $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita. Em [26], Hofer, Wysocki e Zehnder estabelecem uma distinção entre os furos de $\tilde{u}$. Para ver esta distinção, dado $z_0 \in \Gamma$, parametrize uma vizinhança de z_0 da seguinte forma: seja $\varphi : (B_r(0), 0) \rightarrow (\mathcal{U}, z_0)$ uma carta holomorfa centrada em z_0 , onde $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{U}$ é uma vizinhança aberta de z_0 e $\varphi(0) = z_0$. Fixe $L = \frac{1}{2\pi} \log r$ e considere a aplicação $\tilde{\varphi} : [-L, \infty) \times S^1 \rightarrow \mathcal{U}$ satisfazendo

$$(s, t) \mapsto \tilde{\varphi}(s, t) = \varphi(e^{-2\pi(s+it)}). \quad (1.47)$$

Dizemos que $\tilde{\varphi}$ define *coordenadas positivas em torno de $z_0 \in \Gamma$* . Para simplificar a notação, vamos escrever $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t)) := \tilde{u}(\varphi(e^{-2\pi(s+it)}))$. Considere $m(z_0)$ definido por

$$m(z_0) := \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\{s\} \times S^1} u^* \lambda. \quad (1.48)$$

Como $E_H(\tilde{u}) < \infty$, o limite acima está bem-definido. Veja a prova deste fato em [26].

Definição 1.49. Dizemos que um furo $z_0 \in \Gamma$ de uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é **positivo** se $m(z_0) > 0$, **negativo** se $m(z_0) < 0$ ou **removível** se $m(z_0) = 0$.

O resultado a seguir relaciona a tricotomia de $m(z_0)$ dos furos $z_0 \in \Gamma$ de uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ com o comportamento de $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z)$.

Proposição 1.50 ([24], Proposição 1.3; [26], Seção 1). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita e $z_0 \in \Gamma$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = +\infty$, então z_0 é um furo positivo;
- (ii) se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = -\infty$, então z_0 é um furo negativo;
- (iii) se $\lim_{z \rightarrow z_0} a(z) = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, então z_0 é um furo removível.

Exemplo 1.51. No Exemplo 1.46, vimos que $F_P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por $(s, t) \mapsto (Ts, x(Tt))$ é uma superfície de energia finita. Aqui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ via $(s, t) \mapsto e^{2\pi(s+it)}$. Esta identificação implica que $a(z) = T \log |z|$, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e, portanto, $\lim_{z \rightarrow 0} a(z) = -\infty$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} a(z) = +\infty$, isto é, 0 é furo negativo e ∞ positivo para F_P . $\square$

Exemplo 1.52. No Exemplo 1.48, dado $c \in \mathbb{C}^*$, definimos $\tilde{v}_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo

$$z \mapsto \left(\frac{1}{2} \ln |z_c|, \frac{z_c}{|z_c|} \right),$$

onde $z_c = (z, c) \in \mathbb{C}^2$. Como $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln |z_c| = +\infty$, vemos que ∞ é (o único) furo positivo. Quando $c = 0$, temos que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln |z_0| = -\infty$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln |z_0| = +\infty$, isto é, $\tilde{v}_0$ possui um furo negativo em 0 e um furo positivo em ∞ . $\square$

O próximo lema justifica a nomenclatura adotada para designar as singularidades satisfazendo $m(z) = 0$. A prova deste resultado é uma consequência do *Teorema da Singularidade Removível de Gromov* ([40, Teorema 3.39] e [41, Teorema 2.1]).

Lema 1.53 ([26], Seção 1, [40], Lema 3.60). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita e $z \in \Gamma$. Se $m(z) = 0$, então $\tilde{u}$ se estende suavemente sobre $(\Sigma \setminus \Gamma) \cup \{z\}$.*

Por um instante, vamos fixar a atenção ao caso em que Σ é fechada. Já observamos que uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ com Σ fechada, obrigatoriamente, satisfaz $\Gamma \neq \emptyset$. O lema acima implica que pelo menos um destes furos é não-removível. Como a $d\lambda$ -energia satisfaz $\int_{\Sigma \setminus \Gamma} u^* d\lambda \geq 0$, pelo menos um furo de $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é positivo.

O próximo resultado afirma que a existência de superfícies de energia finita com furos não-removíveis implica a existência de órbitas fechadas de Reeb. Repare que a implicação no sentido contrário segue do Exemplo 1.46.

Teorema 1.54 ([19], Teorema 31). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita e $z \in \Gamma$ um furo não-removível. Seja $\varphi : (B_r(0), 0) \rightarrow (\mathcal{U}, z)$ uma carta holomorfa centrada em z e escreva $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t)) := \tilde{u}(\varphi(e^{-2\pi(s+it)}))$. Fixe uma sequência $s_n \rightarrow +\infty$ e seja $\epsilon_z = \pm 1$ o sinal de (1.48). Então existem uma órbita fechada de Reeb $P = (x, T)$, $T > 0$, uma subsequência $s_{n_k} \rightarrow +\infty$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tais que $u(s_{n_k}, t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x(\epsilon_z T t + c)$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$.*

Observação 1.55. *Note que $P = (x, T)$ pode depender da sequência s_n . No Teorema 1.67, veremos que existem hipóteses adicionais, explicadas adiante, tais que a convergência acima independa da sequência s_n , isto é, $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = x(\epsilon_z T t + c)$, onde ϵ_z é o sinal de (1.48).*

Princípio do Máximo para discos $\tilde{J}$ -holomorfos

Nesta subseção, vamos estudar uma consequência do *princípio do máximo forte*. Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M e $v : \mathbb{D} \hookrightarrow M$ um mergulho do disco unitário. Suponha que não existam órbitas fechadas contidas em $v(\mathbb{D})$, isto é, $x(\mathbb{R}) \not\subset v(\mathbb{D})$, para

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

toda $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco furado (não-constante) de energia finita tal que

- (i) $\Gamma \subset \mathring{\mathbb{D}}$ é finito e constitui os furos negativos de $\tilde{u}$;
- (ii) $\tilde{u}(\partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times v(\mathring{\mathbb{D}} \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R} \times M$.

Suponha que $\text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), v(0)) = +1$, isto é, a curva $u(S^1)$ envolve $v(0)$ uma única vez em $v(\mathbb{D})$ e o faz positivamente em relação às orientações de $\mathbb{D}$ e $v(\mathbb{D})$. De (1.45), temos que

$$\Delta a = d\lambda(u)(\pi u_s, \pi u_t) = d\lambda(u)(\pi u_s, J(u)\pi u_s) \geq 0, \quad (1.49)$$

onde $\Delta a = a_{ss} + a_{tt}$ é o Laplaciano, a_{ss}, a_{tt} denotam as derivadas parciais de segunda ordem e $s + it$ são coordenadas em $\mathbb{C}$. A desigualdade em (1.49) significa que a função suave a é subharmônica (não-constante). Como $a|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0$ e os furos em Γ são negativos, o princípio do máximo forte¹⁹ implica que

- (i) $\partial_r a(e^{i\theta}) = \frac{d}{dr} \Big|_{r=1} a(re^{i\theta}) > 0$;
- (ii) $\lambda_{u(e^{i\theta})}(\partial_\theta u) > 0$;
- (iii) $a|_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} < 0$.

O lema abaixo mostra que $\tilde{u}$ é um mergulho perto do bordo. Embora este resultado seja conhecido, apresentamos a prova porque o argumento será útil em algumas demonstrações nos próximos capítulos. No lema a seguir, dado $\epsilon > 0$, denotamos $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{D} : 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1\}$.

Lema 1.56. *O disco furado de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ fixado acima é um mergulho perto do bordo e existe $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{u}^{-1}(\tilde{u}(A_\epsilon)) = A_\epsilon$.*

Demonstração: Esta demonstração é, essencialmente, àquela do Lema 4.35 em [40]. Observe que a desigualdade no item (ii) acima implica que du_z tem posto máximo, para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Como $\text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), v(0)) = +1$, então $u|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow M$ é mergulho. Isto mostra que $\tilde{u}|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ também é um mergulho e, portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{u}|_{A_\epsilon} : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um mergulho. Suponha, por contradição, que $\tilde{u}^{-1}(\tilde{u}_0(A_\epsilon)) \neq A_\epsilon$. Então existem sequências $\{\zeta_n\}, \{\zeta'_n\} \subset \mathbb{D} \setminus \Gamma$ satisfazendo $\tilde{u}(\zeta_n) = \tilde{u}(\zeta'_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $|\zeta_n| \rightarrow 1$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \zeta'_n \leq 1 - \epsilon$. Escolhendo subsequências, se necessário, podemos supor que $z_n \rightarrow z' \in \partial\mathbb{D}$ e $\zeta_n \rightarrow \zeta' \in \mathring{\mathbb{D}}$. Do item (ii) acima, segue que $0 = a_0(z') = a_0(\zeta') < 0$. Esta contradição mostra que $\tilde{u}^{-1}(\tilde{u}_0(A_\epsilon)) = A_\epsilon$. ■

¹⁹Começamos observando que o máximo de uma função subharmônica ocorre no bordo.

Teorema (Princípio do Máximo Fraco)([13], Teorema 3.1): *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado e $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em Ω e C^0 em $\bar{\Omega}$. Se f satisfaz $\Delta f \geq 0$ em Ω , então o máximo de f é atingido em $\partial\bar{\Omega}$.*

Lembre que a função $a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\Delta a \geq 0$ e $a|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0$. Isto implica que o máximo de a ocorre no bordo $\partial\mathbb{D}$ e é igual a 0. O lema a seguir permite estimar a derivada na direção normal sobre o bordo.

Lema (Princípio do Máximo Forte)([13], Lema 3.4): *Sejam $\mathring{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}^2$ o disco unitário (aberto), $x_0 \in \partial\mathbb{D}$ e $f : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\mathring{\mathbb{D}}$ e contínua em $\mathbb{D}$. Suponha que $\Delta f \geq 0$ em $\mathring{\mathbb{D}}$, que f é contínua em x_0 e que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in \mathring{\mathbb{D}}$. Seja η o vetor normal em x_0 apontando para fora de $\mathbb{D}$. Se a derivada normal $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x_0)$ existe, então $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x_0) > 0$.*

Somewhere injective e fatoração de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas

Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e seja $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo (1.14). Nesta subseção, restringimos a nossa atenção às esferas furadas de energia finita e aos discos de energia finita. Começamos com a seguinte definição.

Definição 1.57 ([48]). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita. Dizemos que $\tilde{u}$ é **somewhere injective** se existe $z \in \Sigma \setminus \Gamma$ satisfazendo*

$$\tilde{u}^{-1}(\tilde{u}(z)) = \{z\} \quad e \quad d\tilde{u}_z \neq 0. \quad (1.50)$$

Se $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ satisfaz (1.50), dizemos que z é um **ponto de injetividade** para $\tilde{u}$.

O resultado a seguir mostra que algumas esferas furadas de energia finita se fatoram como a composição de uma esfera furada de energia finita *somewhere injective* e um polinômio em $\mathbb{C}$. Para as nossas aplicações é suficiente considerar esferas furadas de energia finita com um único furo positivo em ∞ . Neste caso, para simplificar a notação, escreveremos $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$, onde está subentendido um furo em ∞ e Γ é o conjunto dos furos negativos. Lembre que sempre assumimos $\Gamma \subset \mathbb{C}$ finito.

Proposição 1.58. *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita cujo único furo positivo é ∞ e Γ é o conjunto dos furos negativos. Suponha que $\pi \cdot du \not\equiv 0$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi = \ker \lambda$ é a projeção ao longo do campo de Reeb X_λ . Então existe uma esfera furada de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$, $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ finito, *somewhere injective* e um polinômio não-constante $p : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ satisfazendo $p(\Gamma) = \Gamma'$ e $p(\infty) = \infty$, tais que $\tilde{u} = \tilde{v} \circ p$.*

O resultado anterior é bastante conhecido e tem sido usado, por exemplo, em [23, 24, 35, 39]. A demonstração da proposição acima é uma adaptação da prova da Proposição 6.2 em [26], onde Hofer, Wysocki e Zehnder provam o caso particular $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$.

O resultado seguinte apresenta uma fatoração para o caso em que $\pi \cdot du \equiv 0$

Teorema 1.59 ([26], Teorema 6.11). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita cujo único furo positivo é ∞ e Γ é o conjunto dos furos negativos. Suponha que $\pi \cdot du \equiv 0$. Então existe um polinômio não-constante $p : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, uma órbita fechada $P = (x, T)$ e uma aplicação $\tilde{J}$ -holomorfa $F_P : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por*

$$F_P \left(e^{2\pi(s+it)} \right) = (Ts, x(Tt)),$$

tais que $p^{-1}(0) = \Gamma$, $p(\infty) = \infty$ e $\tilde{u}(z) = F_P \circ p(z)$.

Este resultado implica imediatamente que um plano de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ satisfaz $\int_{\mathbb{C}} u^* d\lambda > 0$. O teorema acima, na versão mais geral provada em [26], fornece uma caracterização das esferas furadas de energia finita com $d\lambda$ -energia nula.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

O lema a seguir é o análogo do Teorema 1.59 para o caso de um disco furado de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ com $d\lambda$ -energia nula. Neste caso, $\tilde{u}$ é um semi-cilindro sobre uma órbita fechada de Reeb.

Lema 1.60 ([35, 39]). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco furado de energia finita satisfazendo $\pi \cdot du \equiv 0$. Então existe uma função holomorfa $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, uma órbita fechada $P = (x, T)$ e uma aplicação $F_P : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dada por*

$$F_P \left((e^{2\pi(s+it)}) \right) = (Ts, x(Tt))$$

tais que $\tilde{u} = F_P \circ \varphi$ e $\Gamma_0 = \varphi^{-1}(0)$.

A prova deste resultado é uma aplicação do *princípio de similaridade de Carleman*.

Teoria de Interseção de McDuff

Nesta subseção, vamos comentar alguns resultados relacionados à *Teoria de Interseção* introduzida por McDuff em [49]. Embora originalmente esta teoria tenha sido desenvolvida para variedades quase-complexas, enunciaremos os resultados necessários para as nossas aplicações no contexto de superfícies de energia finita em simplectizações de variedades de contato.

Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e seja $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo (1.14). Seja $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita e suponha que $\tilde{u}$ é um mergulho perto do bordo. McDuff define um *número de auto-interseção* $\text{Int}(\tilde{u}) \in \mathbb{Z}_+$ (veja [49, Definição 4.1]). O invariante $\text{Int}(\tilde{u})$ é uma contagem de auto-interseções definido do ponto de vista topológico. Para as nossas aplicações, é suficiente observar algumas propriedades de $\text{Int}(\tilde{u})$. McDuff verifica que se $\tilde{u}$ é um disco de energia finita que é um mergulho perto do bordo, então

- (i) $\text{Int}(\tilde{u}) \geq 0$, isto é, *número de auto-interseção* é sempre não-negativo;
- (ii) $\text{Int}(\tilde{u}) = 0$ se e somente se $\tilde{u}$ é um mergulho;
- (iii) se $z \in \mathring{\mathbb{D}}$ satisfaz $d\tilde{u}_z = 0$, então z é uma *auto-interseção (não-transversal)* e o número de auto-interseção é $\text{Int}(\tilde{u}) \geq 2$.

Seja $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma imersão que é um mergulho perto do bordo. Se o conjunto

$$\mathcal{S}(\tilde{u}) := \{(z, z') \in (\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \setminus \Delta : \tilde{u}(z) = \tilde{u}(z')\}$$

é discreto e as auto-interseções em $\mathcal{S}(\tilde{u})$ são transversais, McDuff prova que $\text{Int}(\tilde{u}) = \#\mathcal{S}(\tilde{u})$. Aqui o conjunto $\Delta := \{(z, z') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} : z = z'\}$ é a diagonal de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Lema 1.61 ([49], Lema 4.3) (*Estabilidade de auto-interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*). *Seja $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco de energia finita cujas singularidades (auto-interseções e pontos críticos) estão contidas em $\mathring{\mathbb{D}}$. Se $\tilde{w} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um disco de energia finita imerso e C^∞ -próximo de $\tilde{u}$, então as singularidades de $\tilde{w}$ pertencem ao interior de $\mathbb{D}$ e $\text{Int}(\tilde{u}) = \text{Int}(\tilde{w})$.*

Em [49], McDuff estuda também a interseção entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas. Denote $\mathring{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}$ e sejam $\tilde{u}, \tilde{w} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ discos de energia finita. Considere

$$\delta(\tilde{u}, \tilde{w}) := \left\{ (z, z') \in \mathring{\mathbb{D}} \times \mathring{\mathbb{D}} : \tilde{u}(z) = \tilde{w}(z') \right\}$$

o conjunto das interseções entre $\tilde{u}$ e $\tilde{w}$. Se $\delta(\tilde{u}, \tilde{w})$ é finito, McDuff define $\text{Int}(\tilde{u}, \tilde{w}) = \#\delta(\tilde{u}, \tilde{w})$ contado com multiplicidades. Usando cartas locais nas vizinhanças das interseções (veja [49, Lema 2.5 e Proposições 2.6 e 3.1]), McDuff prova o lema abaixo. Este resultado mostra que cada interseção $(z, z') \in \delta(\tilde{u}, \tilde{w})$ contribui positivamente para $\#\delta(\tilde{u}, \tilde{w})$.

Lema 1.62 ([49], Seção 5) (*Positividade das interseções entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*). *Sejam $\tilde{u}, \tilde{w} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ discos de energia finita mergulhados tais que $\tilde{u}(0) = \tilde{w}(0)$ é a única interseção entre $\tilde{u}$ e $\tilde{w}$. Então $\text{Int}(\tilde{u}, \tilde{w}) \geq 1$.*

O lema a seguir mostra que as interseções são invariantes por pequenas perturbações.

Lema 1.63 ([49], Seção 5) (*Estabilidade das interseções entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*). *Sejam $\tilde{u}, \tilde{w} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ discos de energia finita mergulhados tais que $\text{Int}(\tilde{u}, \tilde{w}) \geq 1$. Seja $\tilde{w}' : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco de energia finita mergulhado suficientemente C^∞ -próximo de $\tilde{w}$. Então $\text{Int}(\tilde{u}, \tilde{w}') \geq 1$.*

1.3.1 Comportamento Assintótico

Em [26], Hofer, Wysocki e Zehnder estudam o comportamento das superfícies furadas de energia finita nas vizinhanças dos furos. No caso em que o limite de um furo (não-removível) $z \in \Gamma$ de uma superfície furada de energia finita $\tilde{u} : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma órbita fechada P não-degenerada²⁰, observam que a superfície furada se aproxima, numa vizinhança pequena de z , de um cilindro trivial sobre P . Este aspecto é denominado *comportamento assintótico*. A definição abaixo torna esta noção mais precisa.

Definição 1.64. *Sejam λ uma forma de contato definida numa 3-variedade fechada M , (Σ, j) uma superfície de Riemann, $\Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ um conjunto finito e $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita. Fixe um furo não-removível $z \in \Gamma$. Dizemos que $z \in \Gamma$ é um **furo não-degenerado** de $\tilde{u}$ se, fixada uma carta holomorfa $\varphi : (U, 0) \rightarrow (\varphi(U), z)$ centrada em z e $\tilde{u}(s, t) := \tilde{u} \circ \varphi(e^{-2\pi(s+it)})$, $s \gg 1$, existem $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e constantes $c, d \in \mathbb{R}$ tais que*

- (i) $\sup_{t \in S^1} |a(s, t) - \epsilon_z Ts - d| \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow +\infty$, onde $\epsilon_z = \pm 1$ é o sinal de (1.48);
- (ii) $u(s, t) \rightarrow x(\epsilon_z Tt + c)$ na topologia usual de $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$, quando $s \rightarrow +\infty$;
- (iii) se $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção ao longo de X_λ e $\pi \cdot du$ não é identicamente nulo sobre $\Sigma \setminus \Gamma$, então existe $N \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $\pi \cdot du(s, t) \neq 0$, para todo $s \geq N$;
- (iv) se $\zeta(s, t)$ é definido por $u(s, t) = \exp_{x(\epsilon_z Tt + c)} \zeta(s, t)$, então existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$\sup_{t \in S^1} e^{bs} |\zeta(s, t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty. \quad (1.51)$$

²⁰Lembre que sempre existe um limite (veja o Teorema 1.54), possivelmente degenerado.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Se $z \in \Gamma$ é um furo não-degenerado, dizemos que $\tilde{u}$ possui **comportamento assintótico** em z . A órbita fechada $P = (x, T)$ é chamada de **limite assintótico** de $\tilde{u}$ em $z \in \Gamma$ e dizemos que $\tilde{u}$ é **assintótica** à $P = (x, T)$ em $z \in \Gamma$.

Observação 1.65. Esta definição é independente da escolha da carta holomorfa φ e da aplicação exponencial $\exp$ (veja [25]).

Lembre que uma órbita fechada $P = (x, T)$ é não-degenerada quando 1 não é autovalor de $d\phi_T|_{\xi_x(0)} : \xi_x(0) \rightarrow \xi_x(T)$, onde $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o fluxo de Reeb. Uma forma de contato λ é não-degenerada quando todas as órbitas fechadas de Reeb em $\mathcal{P}(\lambda)$ são não-degeneradas. O seguinte resultado é provado em [25].

Teorema 1.66 ([25]). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita e $z \in \Gamma$ furo (não-removível). Seja $\varphi : (U, 0) \rightarrow (\varphi(U), z)$ uma carta holomorfa centrada em z tal como na Definição 1.64. Sejam $s_n \rightarrow +\infty$ uma sequência e $\epsilon_z = \pm 1$ o sinal de (1.48). Se existe $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ não-degenerada tal que, para alguma subsequência $s_{n_k} \rightarrow +\infty$,*

$$u(s_{n_k}, t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x(\epsilon_z T t + c), \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R} \quad (1.52)$$

na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$, então z é um furo não-degenerado de $\tilde{u}$.

Em particular, temos a seguinte versão do Teorema 1.54 para o caso não-degenerado.

Teorema 1.67 ([25]). *Sejam $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita e $z \in \Gamma$ um furo (não-removível). Seja $\varphi : (U, 0) \rightarrow (\varphi(U), z)$ uma carta holomorfa centrada em z tal como na Definição 1.64. Sejam $s_n \rightarrow +\infty$ uma sequência e $\epsilon_z = \pm 1$ o sinal de (1.48). Se existe $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ não-degenerada tal que, para alguma subsequência $s_{n_k} \rightarrow +\infty$,*

$$u(s_{n_k}, t) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x(\epsilon_z T t + c), \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R} \quad (1.53)$$

na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$, então $u(s, t) \xrightarrow{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)} x(\epsilon_z T t + c)$ quando $s \rightarrow +\infty$.

Invariantes Algébricos

Em [26], Hofer, Wysocki e Zehnder introduzem os invariantes algébricos wind_π , wind_∞ associados às esferas furadas de energia finita com $d\lambda$ -energia não-nula e comportamento assintótico nos furos. Estes invariantes são úteis, por exemplo, quando desejamos verificar se uma esfera furada é uma imersão ou se a projeção de uma esfera furada sobre a variedade de contato é um mergulho. Essencialmente, identificam os pontos em que a projeção não tem posto máximo (wind_π) e o modo como a esfera furada *gira* ao redor do limite assintótico (wind_∞).

Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e seja $\tilde{J}$ satisfazendo (1.14). Sejam $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a esfera de Riemann, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ um conjunto finito e $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{S}^2 \setminus (\{\infty\} \cup \Gamma) = \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita tal que ∞ é o único furo positivo e Γ é o conjunto dos furos negativos de $\tilde{u}$. Seja $\pi : TM \rightarrow \xi$

a projeção na direção do campo de Reeb. Considere $\pi \cdot du$ como uma seção suave do fibrado $\mathcal{E} := \text{Hom}(T(\mathbb{C} \setminus \Gamma), u^*\xi)$ cuja fibra $\text{Hom}_z(T_z(\mathbb{C} \setminus \Gamma), u_z^*\xi_{u(z)})$ em $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ é o espaço das aplicações $\mathbb{R}$ -lineares entre $T_z(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ e $u_z^*\xi_{u(z)}$. Como $\pi \cdot du$ satisfaz

$$\pi \cdot du \cdot i = J(u) \cdot \pi \cdot du, \quad (1.54)$$

o Princípio da Similaridade de Carleman ([48, Teorema 2.3.5]) implica que

$$\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u}) := \{z \in \mathbb{C} : \pi \cdot du(z) = 0\}$$

é formado por pontos isolados quando $\pi \cdot du \neq 0$ (veja [26, Proposição 4.1]). Pelo comportamento assintótico de $\tilde{u}$ nos furos $\{\infty\} \cup \Gamma$, se $\pi \cdot du \neq 0$, temos que $\#\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u}) < \infty$. Note que os zeros em $\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u})$ coincidem com as interseções entre $\pi \cdot du$ e a seção nula de $\mathcal{E}$.

Definição 1.68 ([26], Seções 4 e 5). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M e $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita. Suponha que ∞ é o único furo positivo e Γ é constituído pelos furos negativos de $\tilde{u}$. Se $\pi \cdot du \neq 0$, definimos*

$$\text{wind}_\pi(\tilde{u}) := \#\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u}), \quad (1.55)$$

onde $\#$ denota a soma algébrica dos zeros em $\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u})$.

Por definição, $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) \geq 0$. Além disso, $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = 0$ se, e somente se, $\pi \cdot du$ é não-nulo, isto é, se, e somente se, du_z tem posto máximo, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita tal que ∞ é o único furo positivo e Γ é o conjunto dos furos negativos. Considere o fibrado $d\lambda$ -simplético $u^*\xi \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Como $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ tem o tipo de homotopia de um *buquê*²¹ de finitas cópias de S^1 , a Proposição 1.22 mostra que existe uma trivialização $d\lambda$ -simplética para $u^*\xi \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Seja $Z : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow u^*\xi$ uma seção não-nula. Para todo $z \in \Gamma$ (não-removível), escolha uma carta holomorfa $\varphi : (U, 0) \rightarrow (\varphi(U), z)$ centrada em z e escreva $\tilde{u}(s, t) := \tilde{u} \circ \varphi(e^{-2\pi(s+it)})$, $s \gg 1$.

Definição 1.69 ([26], Seções 4 e 5). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M e $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita tal como no parágrafo acima. Fixe $z \in \Gamma$ (não-removível). Se $\pi \cdot du \neq 0$ e $\epsilon_z = \pm 1$ é o sinal de $z \in \Gamma \cup \{\infty\}$ dado por (1.48), definimos*

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z, Z) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \text{wind}(t \mapsto \pi \partial_s u(s, \epsilon_z t), t \mapsto Z(u(s, \epsilon_z t))), \quad (1.56)$$

onde $Z(u(s, \epsilon_z t)) = Z \circ u \circ \varphi(e^{-2\pi(s+it)})$. Seguindo [26], definimos

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}, Z) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty, Z) - \sum_{z \in \Gamma} \text{wind}_\infty(\tilde{u}, z, Z). \quad (1.57)$$

²¹Sejam $(S_j^1, x_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ n cópias de S^1 com pontos $x_j \in S_j^1$ selecionados. Um *buquê* de S^1 é a união $\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}} S_j^1$ em que os pontos x_j , $j \in \{1, \dots, n\}$, estão identificados.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Observe que $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z, Z)$, para todo $z \in \Gamma \cup \{\infty\}$, depende da classe de homotopia de seções não-nulas α tal que $Z \in \alpha$. Apesar disso, $\text{wind}_\infty(\tilde{u})$ é independente de α (veja [26]). Tanto $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z, Z)$, para todo $z \in \Gamma \cup \{\infty\}$, quanto $\text{wind}_\infty(\tilde{u})$ independem da escolha de φ .

O seguinte resultado, provado em [26], relaciona os invariantes algébricos wind_π e wind_∞ .

Proposição 1.70 ([26], Proposição 5.6). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M e $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita tal que ∞ é o único furo positivo, Γ é o conjunto dos furos negativos e $\pi \cdot du \neq 0$. Então*

$$\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) + \#\Gamma - 1, \quad (1.58)$$

onde $\#\Gamma$ denota a cardinalidade de Γ .

No caso em que a esfera furada de energia finita $\tilde{u}$ no enunciado acima é um plano de energia finita (isto é, $\Gamma = \emptyset$), a fórmula (1.58) se reduz a $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - 1$. Em particular, $\text{wind}_\infty(\tilde{u}) \geq 1$, visto que $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) \geq 0$.

Fórmula assintótica

Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e considere $\tilde{J}$ satisfazendo (1.14). Recorde que, na Definição 1.36, seguindo [26], introduzimos o operador assintótico A_P sobre órbitas fechadas $P = (x, T)$. O seguinte resultado mostra que os auto-valores do operador assintótico sobre a órbita fechada limite assintótico de um furo de uma superfície furada de energia finita $\tilde{u}$ fornecem informações sobre o comportamento assintótico de $\tilde{u}$.

Teorema 1.71 ((Fórmula Assintótica), [26]). *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M e $\pi : TM \rightarrow \xi$ a projeção na direção do campo de Reeb X_λ . Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann, $\Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ um subconjunto finito e $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita. Fixe $z \in \Gamma$ (não-removível) e seja $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}$ em $z \in \Gamma$. Escolha uma carta holomorfa $\varphi : (B_r(0), 0) \rightarrow (U, z)$ centrada em z , onde U é uma vizinhança aberta de z . Escreva:*

- $\tilde{u}(s, t) = \tilde{u}(\varphi(e^{-2\pi(s+it)}))$, para $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, se z é furo positivo;
- $\tilde{u}(s, t) = \tilde{u}(\varphi(e^{2\pi(s+it)}))$, para $(s, t) \in \mathbb{R}^- \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, se z é furo negativo.

A menos de uma rotação da carta φ , podemos supor que $\tilde{u}(s, t) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} x(Tt)$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$. Então, ou $\pi \cdot du$ é identicamente nulo, ou

(i) se z é furo positivo, existe uma função suave não-nula $f : \mathbb{R}^+ \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s, t) \pi \cdot \partial_s u(s, t) = \eta(t) \text{ na topologia usual de } C^\infty(\cdot, \xi), \quad (1.59)$$

onde η é uma auto-função de A_P associada a um auto-valor $\beta < 0$;

(ii) se z é furo negativo, existe uma função suave não-nula $f : \mathbb{R}^- \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} f(s, t) \pi \cdot \partial_s u(s, t) = \eta(t) \text{ na topologia usual de } C^\infty(\cdot, \xi), \quad (1.60)$$

onde η é uma auto-função de A_P associada a um auto-valor $\beta > 0$.

A seguir, vamos usar a *fórmula assintótica* para relacionar o invariante algébrico $\text{wind}_\infty(\tilde{u})$ de uma esfera furada de energia finita $\tilde{u}$ com o índice de Conley-Zehnder (generalizado) das órbitas fechadas que são limites assintóticos dos furos de $\tilde{u}$. Lembre que estamos assumindo λ não-degenerada.

Fixe uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que ∞ é o único furo positivo e $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos. Sejam $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em ∞ e $P_k = (x_k, T_k) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em z_k , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Como P_k , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, é contrátil, existe um disco contínuo $v_k : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ tal que $v_k(e^{2\pi i t}) = x(T_k t)$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Repare que uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi_k : v_k^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ fixa uma classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas $\alpha_k \in \mathcal{S}_P$ para o fibrado simplético $(x_{T_k})^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Esta classe independe de $\Psi_k : v_k^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Vamos usar os discos v_k para construir (i) um disco cujo bordo é P_∞ e (ii) uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $(x_{T_\infty})^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Mais precisamente, seja $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$ a compactificação de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ obtida por adicionar cópias de S^1 às singularidades $\Gamma \cup \{\infty\}$ e denote por $\bar{w}$ a extensão contínua de w sobre $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$. Considere

$$\bar{w} \left(\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma} \right) \bigcup_{k \in \{1, \dots, N\}} v_k(\mathbb{D}). \quad (1.61)$$

Pela não-degenerescência de λ , a união em (1.61) é um disco contínuo. Seja $\eta : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $\eta(\mathbb{D}) = \bar{w} \left(\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma} \right) \bigcup_{k \in \{1, \dots, N\}} v_k(\mathbb{D})$. Repare que $\eta(e^{2\pi i t}) = x_\infty(T_\infty t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (veja o Teorema 1.67). Seja $\Psi : \eta^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética. Observe que, por construção, Ψ induz uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $(x_{T_k})^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ na classe especial $\alpha_k \in \mathcal{S}_P$ fixada acima.

Seja $Z : \mathbb{D} \rightarrow \eta^* \xi$ a seção não-nula definida como $Z(p) = \Psi^{-1}(p, \partial_x)$, $p \in \mathbb{D}$, onde $\Psi : \eta^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ é a trivialização $d\lambda$ -simplética construída acima. Sejam $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty, Z)$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_k) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_k, Z)$, para todo $z_k \in \Gamma$, $k \in \{1, \dots, N\}$ (veja definições na Subseção 1.3.1). Considere os *operadores assintóticos* A_{P_∞} e A_{P_k} , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ (veja Definição 1.36), e sejam L_{P_∞} e L_{P_k} induzidos por Ψ , A_{P_∞} e A_{P_k} , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ (veja (1.37)). Para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, denote por $\text{Spec}(L_{P_\infty})$ e $\text{Spec}(L_{P_k})$ os espectros, respectivamente, de L_{P_∞} e L_{P_k} e escolha auto-valores $\beta_\infty^{\text{neg}}$ e β_k^{pos} satisfazendo

$$\begin{aligned} \beta_\infty^{\text{neg}} &= \max\{\beta_\infty \in \text{Spec}(L_{P_\infty}) : \beta_\infty < 0\}, \\ \beta_k^{\text{pos}} &= \min\{\beta_k \in \text{Spec}(L_{P_k}) : \beta_k > 0\}, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Se $\nu^{\text{neg}} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ é um autovetor correspondente ao autovalor β^{neg} , definimos o *número de*

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

rotação $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = \deg\left(\frac{\nu^{\text{neg}}}{|\nu^{\text{neg}}|}\right)$, onde $\deg$ denota o grau de aplicações entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$, em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ . Lembre que $\text{wind}(\beta^{\text{neg}})$ é independente do autovetor ν^{neg} (veja Seção 1.2.1).

Lema 1.72 ([26, 39]). *Seja $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita, onde ∞ é o único furo positivo e $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos. Suponha que $\pi \cdot dw \neq 0$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção na direção do campo de Reeb. Sejam $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em ∞ e $P_k = (x_k, T_k) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{w}$ em z_k , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. São verdadeiras as seguintes desigualdades:*

- (i) $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) \leq \text{wind}(\beta_\infty^{\text{neg}})$
- (ii) $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, z_k) \geq \text{wind}(\beta_{z_k}^{\text{pos}})$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$.

Esboço da Demonstração: (i) Introduza coordenadas holomorfas $\varphi : (B_1(0), 0) \rightarrow (V, \infty)$, onde V é o complemento de algum compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que $\Gamma \subset K$. Por abuso de notação, escrevemos $\tilde{w}(s, t) = \tilde{w}(\varphi(e^{-2\pi(s+it)}))$, para $(s, t) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Pelo item (i) do Teorema 1.71, existe $f : \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s, t) \pi \cdot \partial_s w(s, t) = \eta(t) \quad \text{na topologia usual de } C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \xi) \quad (1.63)$$

onde η é um autovetor do operador assintótico A_{P_∞} associado a algum autovalor $\beta < 0$. A definição de $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty)$ e a convergência em (1.63) implicam $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) = \text{wind}(\beta)$. Pelo item (iii) do Lema 1.31, $\text{wind}(\beta) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$. Isto conclui a prova de (i).

(ii) A prova deste item é análoga à anterior tendo em vista o item (ii) do Teorema 1.71. ■

O resultado seguinte fornece estimativas úteis para wind_∞ .

Lema 1.73. *Seja $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita, onde ∞ é o único furo positivo e $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos. Suponha que $\pi \cdot dw \neq 0$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção na direção do campo de Reeb. Sejam $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em ∞ e $P_k = (x_k, T_k) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em z_k , para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. São verdadeiras as seguintes afirmações:*

- (i) se $\mu_{CZ}(P_\infty) \leq 1$, então $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) \leq 0$;
- (ii) se $\mu_{CZ}(P_k) \geq 2$, para algum $k \in \{1, \dots, N\}$, então $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, z_k) \geq 1$;
- (iii) se $\mu_{CZ}(P_k) \geq 3$, para algum $k \in \{1, \dots, N\}$, então $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, z_k) \geq 2$.

Esboço da Demonstração: (i) Seja β^{neg} definido em (1.62) e considere $\text{wind}(\beta^{\text{neg}})$ o número de rotação de um auto-vetor $\nu^{\text{neg}} : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ para β^{neg} . Pelo Teorema 1.32, o índice de Conley-Zehnder generalizado é

$$\mu_{CZ}(P) = 2\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + p, \quad p \in \{0, 1\}. \quad (1.64)$$

Se P satisfaz $\mu_{CZ}(P) \leq 1$, então $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) \leq 0$. Como $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$, concluímos $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) \leq 0$.

(ii) Suponha que, para algum $k \in \{1, \dots, N\}$, tenhamos $\mu_{CZ}(P_k) \geq 2$. Seja β_k^{pos} definido em (1.62) e considere $\text{wind}(\beta_k^{\text{pos}})$ associado a β_k^{pos} . Então $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, z_k) \geq \text{wind}(\beta_k^{\text{pos}}) \geq 1$, onde a última desigualdade segue do Lema 1.31.

(iii) Suponha que $\mu_{CZ}(P_{z_k}) \geq 3$, para algum $k \in \{1, \dots, N\}$. Então ou $\mu_{CZ}(P_{z_k}) \geq 4$ ou $\mu_{CZ}(P_{z_k}) = 3$. No primeiro caso, (1.64) e o item (i) do Lema 1.72 implicam $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, z_k) \geq 2$. No segundo caso, temos $\text{wind}(\beta_k^{\text{neg}}) = 1$ com paridade $p = 1$. Lembre que $p = \frac{1}{2}(1 + (-1)^b)$ e b é o número de auto-valores $\beta \in \text{Spec}(L_{P_k}) \cap (-\infty, 0)$ contados com multiplicidade tais que $\text{wind}(\beta) = \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$. Como $p = 1$, temos que $b = 2$ e, portanto, $\text{wind}(\beta) > \text{wind}(\beta_k^{\text{neg}}) = 1$, para todo $\beta > 0$. O item (ii) do Lema 1.72 conclui o argumento. ■

1.3.2 Planos Rápidos

No Capítulo 3, precisaremos de uma classe especial de planos de energia finita. Estes planos são denominados *planos rápidos* e foram introduzidos por Hryniewicz em [33]. Para defini-los, consideramos λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M , $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa satisfazendo (1.14).

Definição 1.74 ([33], Definição 1.10). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um plano de energia finita. Dizemos que $\tilde{u}$ é um **plano rápido de energia finita** se o limite assintótico em ∞ é uma órbita fechada simplesmente recoberta e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}) = 1$.*

O teorema a seguir mostra que, dado um plano rápido de energia finita mergulhado $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$, existem perturbações de $\tilde{u}$ que também são planos rápidos. Estas perturbações são parametrizadas por uma bola aberta $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$, $r > 0$, e $\tilde{u}$ corresponde à origem.

Teorema 1.75 ([33], Teorema 2.3). *Seja λ uma forma de contato não-degenerada em uma 3-variedade M . Suponha que $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um plano rápido de energia finita mergulhado cujo limite assintótico em ∞ é a órbita fechada contrátil $P = (x, T)$. Seja $\bar{u}$ a extensão contínua de u sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Se $\mu_{CZ}(P, \bar{u}) \geq 3$, então $u(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$ e $u : \mathbb{C} \rightarrow M \setminus x(\mathbb{R})$ é um mergulho próprio²². Além disso, para todo $l \geq 1$, existe $B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$, $r > 0$, e um C^l -mergulho $f : \mathbb{C} \times B_r(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ satisfazendo:*

- (i) $f(z, 0) = \tilde{u}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (ii) se $|\tau| < r$, então $f(\cdot, \tau)$ é um plano rápido de energia finita mergulhado em $\mathbb{R} \times M$ assintótico à P e satisfazendo $\mu_{CZ}(P, \overline{f(\cdot, \tau)}) = \mu_{CZ}(P, \bar{u})$, onde $\overline{f(\cdot, \tau)}$ a extensão contínua de $f(\cdot, \tau)$ sobre $\overline{\mathbb{C}}$;
- (iii) Fixe $\tau_0 \in B_r(0)$ e seja $\{\tilde{u}_n\}$ uma sequência de planos rápidos de energia finita mergulhados assintóticos à órbita fechada P e satisfazendo $\tilde{u}_n \rightarrow f(\cdot, \tau_0)$, na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M)$, e $\mu_{CZ}(P, \bar{u}_n) = \mu_{CZ}(P, \bar{u})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então existem seqüências

$$\tau_n \rightarrow \tau_0, \quad A_n \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad B_n \rightarrow 0,$$

²²No sentido de que imagem inversa de um compacto é ainda compacto.

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

onde $\tau_n \in B_r(0)$ e $A_n, B_n \in \mathbb{C}$, $n \gg 1$, tais que

$$f(A_n z + B_n, \tau_n) = \tilde{u}_n(z), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}, \quad n \gg 1.$$

Nosso próximo passo é apresentar um resultado, provado por Hryniewicz em [33], que exhibe condições para a existência de uma *decomposição em livro aberto* de uma 3-variedade M . As folhas desta decomposição são projeções de planos rápidos de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times M$. Fixe uma órbita fechada contrátil $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ simplesmente recoberta. Seja

$$\text{Per}(\lambda) := \{T \in \mathbb{R}_+^* : T \text{ é período de alguma } P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)\}. \quad (1.65)$$

Escolha $\sigma(\tilde{T}) \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\sigma(\tilde{T}) < \min\{\sigma_1, \sigma_2(\tilde{T})\}$, onde $\sigma_1 := \inf\{T \in \mathbb{R}_+^* : T \in \text{Per}(\lambda)\}$ e

$$\sigma_2(\tilde{T}) := \inf\{|T_1 - T_2| \in \mathbb{R}_+^* : T_1, T_2 \in \text{Per}(\lambda), \quad T_1 \neq T_2 \text{ e } T_1, T_2 \leq \tilde{T}\}.$$

Repare que $\sigma(\tilde{T})$ está bem-definido visto que λ é não-degenerada. Fixe um subconjunto compacto $H \subset \mathbb{R} \times M$ e defina $\Theta(H, \tilde{P}, \lambda, J)$ como o subconjunto de $C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M)$ constituído pelos planos rápidos de energia finita $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ assintóticos (no único furo positivo em ∞) à órbita fechada $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ e satisfazendo

$$\tilde{u}(0) \in H, \quad \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} u^* d\lambda = \sigma(\tilde{T}).$$

Seguindo [33], vamos considerar os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \Lambda(H, \tilde{P}, \lambda, J) &:= \{\tilde{u} \in \Theta(H, \tilde{P}, \lambda, J) : \tilde{u} \text{ é mergulho}\}, \\ \Lambda_k(H, \tilde{P}, \lambda, J) &:= \{\tilde{u} = (a, u) \in \Lambda(H, \tilde{P}, \lambda, J) : \mu_{CZ}(\tilde{P}, \bar{u}) = k\}. \end{aligned}$$

Lembre que $\bar{u}$ denota a extensão contínua de u sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Note que

$$\Lambda(H, \tilde{P}, \lambda, J) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k(H, \tilde{P}, \lambda, J).$$

Por simplicidade, considerando que λ e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ estão fixados, escrevemos apenas

$$\Theta(H, \tilde{P}), \quad \Lambda(H, \tilde{P}), \quad \Lambda_k(H, \tilde{P}), \quad k \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Em [33], Hryniewicz prova que se $\Lambda_k(H, \tilde{P})$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, é compacto, em um sentido que ficará claro a seguir, então existe uma *decomposição em livro aberto* para a 3-variedade M cujas folhas são projeções de planos rápidos de energia finita e a *encadernação*²³ é o nó $\tilde{x}_{\tilde{T}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$, onde $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Isto é o conteúdo do seguinte resultado (que é o Teorema 2.5 em [33]).

Teorema 1.76. (*Decomposição em livro aberto*) *Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M . Suponha que exista um plano rápido de energia finita mer-*

²³Em inglês, *binding*.

gulgado $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ assintótico a uma órbita fechada contrátil $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ tal que $\mu_{CZ}(\tilde{P}, \tilde{u}_0) = k \geq 3$. Suponha também que o conjunto $\Lambda_k(H, \tilde{P})$ é C^∞ -compacto para todo subconjunto compacto $H \subset \mathbb{R} \times M$ satisfazendo $H \cap (\mathbb{R} \times \tilde{x}(\mathbb{R})) = \emptyset$. Então, para todo $l \geq 1$, existe uma aplicação $\bar{\mathcal{G}} = (a, \mathcal{G}) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ de classe C^l tal que:

- (i) $\bar{\mathcal{G}}(\tau, \cdot)$ é um plano rápido de energia finita mergulhado assintótico à órbita fechada $\tilde{P}$ em ∞ e $\mu_{CZ}(\tilde{P}, \bar{\mathcal{G}}(\tau, \cdot)) = k$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;
- (ii) $\bar{\mathcal{G}}(\tau, \mathbb{C}) \cap \tilde{x}(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e a aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow M \setminus \tilde{x}(\mathbb{R})$ é um difeomorfismo de classe C^l preservando a orientação;
- (iii) Cada $\bar{\mathcal{G}}(\tau, \mathbb{C})$ é uma seção global suave do tipo disco.

Lembre que uma seção global suave do tipo disco para a dinâmica de Reeb associada à forma de contato λ é um disco imerso $v : \mathbb{D} \hookrightarrow M$ tal que $v(\partial\mathbb{D})$ é uma órbita fechada de Reeb, $v(\mathring{\mathbb{D}})$ é um mergulho transversal ao campo de Reeb e todas as trajetórias em $M \setminus v(\partial\mathbb{D})$ intersectam $v(\mathring{\mathbb{D}})$ infinitas vezes para frente e para trás no tempo.

1.3.3 Estimativas do índice de Conley-Zehnder

Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada M . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e seja $\tilde{J}$ satisfazendo (1.14). Sejam (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada, $\Gamma \subset \Sigma \setminus \partial\Sigma$ um conjunto finito e $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita. Considere $\overline{\Sigma \setminus \Gamma}$ a compactificação de $\Sigma \setminus \Gamma$ obtida por adicionar cópias de S^1 nos furos $\Gamma \cup \{\infty\}$. Denote por $\bar{u}$ a extensão suave de $\tilde{u}$ sobre $\overline{\Sigma \setminus \Gamma}$. Lembre que $\bar{u}$ tem o tipo de homotopia de um *buquê* de S^1 e, portanto, $\bar{u}^*\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$ é trivializável. Sejam $\Psi : \bar{u}^*\xi \rightarrow \overline{\Sigma \setminus \Gamma} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética e α a classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $\bar{u}^*\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$ contendo Ψ . Note que, para todo $z \in \Gamma$, Ψ induz trivializações $d\lambda$ -simpléticas Ψ_z dos fibrados $d\lambda$ -simpléticos $(x_{T_z})^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $P_z = (x_z, T_z) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}$ em z . Dado $z \in \Gamma$, seja α_z a classe de trivialização $d\lambda$ -simplética do fibrado $(x_{T_z})^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ contendo Ψ_z . O índice de Conley-Zehnder de $\tilde{u}$ é a diferença

$$\mu_{CZ}^\Psi(\tilde{u}) = \sum_{z \in \Gamma^+} \mu_{CZ}(P_z, \alpha_z) - \sum_{z \in \Gamma^-} \mu_{CZ}(P, \alpha_z), \quad (1.66)$$

onde Γ^+ (Γ^-) é o conjunto dos furos positivos (negativos) e $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. É importante observar que $\mu_{CZ}^\Psi(\tilde{u})$ independe da trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ (veja [26, Proposição 5.5]).

O próximo resultado fornece uma estimativa para $\mu_{CZ}^\Psi(\tilde{u})$. No enunciado a seguir, denotamos por Γ_0 o conjunto dos furos $z \in \Gamma$ cujos limites assintóticos tem índice par e Γ_1 o conjunto dos furos $z \in \Gamma$ cujos limites assintóticos tem índice ímpar.

Teorema 1.77 ([26], Teorema 5.8). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície furada de energia finita tal que $\pi \cdot du \neq 0$, onde $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção na direção do campo de Reeb. Então*

$$\mu_{CZ}^\Psi(\tilde{u}) \geq 2\text{wind}_\pi(\tilde{u}) + 2\chi(\Sigma) - 2\#\Gamma_0 - \#\Gamma_1, \quad (1.67)$$

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

onde $\chi(\Sigma)$ é a característica de Euler da superfície de Riemann (Σ, j) .

Quando $\Sigma = \mathbb{S}^2$, $\Gamma = \{\infty\} \cup \tilde{\Gamma}$, ∞ é o único furo positivo e $\tilde{\Gamma}$ é o conjunto dos furos negativos de $\tilde{u}$, a fórmula (1.67) se reduz a $\mu_{CZ}^\Psi(\tilde{u}) \geq 4 - 2\#\Gamma_0 - \#\Gamma_1$.

O Teorema 1.77 juntamente com os invariantes algébricos apresentados na Seção 1.3.1 provam o seguinte teorema. Os detalhes da prova podem ser encontrados em [26].

Teorema 1.78 ([26], Teorema 1.2). *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um plano de energia finita. Se $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}$ no furo positivo em ∞ , então $\mu_{CZ}(P, u) \geq 2$. Além disso, se $\mu_{CZ}(P, u) \leq 3$, $\tilde{u}$ é somewhere injective e $u(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, então a aplicação $u : \mathbb{C} \rightarrow M \setminus x(\mathbb{R})$ é um mergulho.*

1.3.4 Estrutura complexa genérica

Nesta seção, definiremos *índices de Fredholm* para algumas classes de superfícies de energia finita. Estes índices foram introduzidos por Hofer, Wysocki e Zehnder em [27]. Neste artigo, os autores provam que existem estruturas complexas em $\mathcal{J}(\lambda)$ para as quais estes índices, quando calculados em *curvas pseudo-holomorfas especiais*, são não-negativos. Este fato tem consequências fundamentais para a análise de *bubbling-off* que faremos nos capítulos seguintes.

Disco furado de energia finita

Considere λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada M . Seja $v : \mathbb{D} \hookrightarrow M$ um mergulho cujo bordo $v(\partial\mathbb{D})$ é (positivamente) transversal à estrutura de contato. Suponha que a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^\mathcal{D} = T\mathcal{D} \cap \xi$, onde $\mathcal{D} := v(\mathbb{D})$, é *Morse-Smale* e possui uma única singularidade elíptica positiva e^+ (veja as definições no Apêndice B). Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo (1.14). Dado $\Gamma \subset \mathring{\mathbb{D}}$ um conjunto finito não-vazio, considere o seguinte problema de valor sobre o contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M \text{ é um mergulho;} \\ \bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = 0, \quad a(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, \quad u(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+\}; \\ \text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1; \\ \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} u^* d\lambda > 0 \quad e \quad E(\tilde{u}) < \infty; \\ \text{todo } z \in \Gamma \text{ é um furo negativo.} \end{array} \right. \quad (1.68)$$

Suponha que $\tilde{u} : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma solução do problema (1.68). Dado $z \in \Gamma$, suponha que $P_z = (x_z, T_z) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}$ no furo negativo z . Em [27], Hofer, Wysocki e Zehnder definem o *índice de Fredholm* associado ao disco furado de energia finita $\tilde{u}$ como

$$\text{Fred}(\tilde{u}) = \#\Gamma - \sum_{z \in \Gamma} \mu_{CZ}(P_z) + 1 \quad (1.69)$$

(veja [27, Lema 11.1]). É possível provar que existe um subconjunto residual $J_{\text{gen}} \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que se $J \in J_{\text{gen}}$ e $\tilde{u}$ é um disco furado de energia finita (relativamente à $J \in J_{\text{gen}}$) solução de

(1.68), então $\text{Fred}(\tilde{u}) \geq 0$. Mais precisamente:

Teorema 1.79 ([27], Seção 11). *Fixe $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $\Gamma_k \subset \mathring{\mathbb{D}}$, $\#\Gamma_k = k$ e $\{P_z = (x_z, T_z)\}_{z \in \Gamma_k} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$. Então existe um conjunto residual $\mathcal{J}_{\text{gen}}^k(\{P_z\}_{z \in \Gamma_k}) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que se $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}^k(\{P_z\}_{z \in \Gamma_k})$ e $\tilde{u} : \mathbb{D} \setminus \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma solução de (1.68) cujo limite assintótico em $z \in \Gamma_k$ é a órbita fechada $P_z = (x_z, T_z) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$, então $\text{Fred}(\tilde{u}) \geq 0$.*

No teorema acima estão fixados o inteiro positivo k , o conjunto dos furos negativos Γ_k e as órbitas fechadas de Reeb contráteis $P_z = (x_z, T_z)$. A seguir, vamos estudar uma alternativa para diminuir esta restrição.

Seja $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ a área do disco $\mathcal{D}$, isto é,

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{\mathbb{D}} |v^* d\lambda| \quad (1.70)$$

onde $v : \mathbb{D} \hookrightarrow M$ é o mergulho fixado acima. Seja $\tilde{u} : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma solução de (1.68). Note que

$$\int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} \tilde{u}^* d\lambda_\phi \leq \int_{\partial \mathbb{D}} u^* \lambda < \mathcal{A}(\mathcal{D}) =: C, \quad (1.71)$$

onde λ_ϕ é definida em (1.9). Como isto é verdade para toda $\phi \in \Lambda := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' \geq 0\}$, concluímos que $E_H(\tilde{u}) \leq C = \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Se $P = (x, T)$ é um limite assintótico de $\tilde{u}$, então a desigualdade (1.71) e o Teorema de Stokes implicam que $T < C$. Seja

$$\sigma_1 := \inf\{T > 0 : T \text{ é período de uma órbita fechada em } \mathcal{P}(\lambda)\} \quad (1.72)$$

e escolha

$$0 < \sigma_0 < \sigma_1. \quad (1.73)$$

Existe um número finito de inteiros positivos $k \in \mathbb{Z}_+^*$ satisfazendo $k \leq C/\sigma_0$. A não-degenerescência da forma de contato λ garante que existe um número finito de órbitas fechadas contráteis $P = (x, T)$ satisfazendo $T \leq C$. Denote o conjunto destas órbitas fechadas por $\mathcal{P}(C)$. Pela finitude $\mathcal{P}(C)$ é necessário considerar apenas um número finito de problemas tais como o Teorema 1.79. Ou seja, fixado $k \in \mathbb{Z}_+^*$, existem finitas possibilidades de combinações $\{P_z\}_{z \in \Gamma_k}$ em grupos de k elementos das órbitas fechadas em $\mathcal{P}(C)$. Cada combinação $\{P_z\}_{z \in \Gamma_k}$ produz um conjunto residual $\mathcal{J}_{\text{gen}}^k(\{P_z\}_{z \in \Gamma_k}) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ satisfazendo as condições do Teorema 1.79. Seja $\mathcal{J}_{\text{gen}}^k$, para $k \in \mathbb{Z}_+^*$ fixo, a interseção destes conjuntos. Como a interseção (finita) de conjuntos residuais é ainda residual, temos que $\mathcal{J}_{\text{gen}}^k$ é residual e, além disso,

$$\mathcal{J}_{\text{gen}}(C) := \bigcap_{k \leq C/\sigma_0} \mathcal{J}_{\text{gen}}^k \quad (1.74)$$

é também residual. Estas observações podem ser resumidas no seguinte resultado:

Teorema 1.80. *Fixe $C := \mathcal{A}(\mathcal{D})$, onde $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ é a área de $\mathcal{D}$, e seja $\mathcal{J}_{\text{gen}}(C)$ definido em (1.74).*

Capítulo 1. Introdução à Dinâmica Simplética

Dado $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}(C)$, se $\tilde{u} : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma solução do problema (1.68), então $\text{Fred}(\tilde{u}) \geq 0$.

Nos Capítulos 2 e 3, construiremos soluções para o problema (1.68). A escolha de J genérico permitirá exibir cotas superiores para os índices $\mu_{CZ}(P_z)$ das órbitas fechadas $P_z \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ limites assintóticos dos furos negativos $z \in \Gamma$.

Esferas de energia finita *somewhere injective*

A seguir, discutimos uma situação análoga para o caso de esferas furadas de energia finita. Considere λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada M . Seja $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita *somewhere injective* (conforme Definição 1.57) satisfazendo $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma} w^* d\lambda > 0$. Suponha que ∞ é o único furo positivo e $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos. Assuma que o limite assintótico $P_k = (x_k, T_k)$ de $\tilde{u}$ em z_k é uma órbita fechada de Reeb contrátil, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Seja $\eta : \mathbb{D} \rightarrow M$ um disco contínuo induzido por discos contínuos $v_k : \mathbb{D} \rightarrow M$, $k \in \{1, \dots, N\}$, satisfazendo $v_k(e^{2\pi i t}) = x_k(T_k t)$, conforme construído na Subseção 1.2.2, e fixe $\Psi : \eta^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times M$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética. Seguindo [7, 27], definimos o índice $\text{Fred}(\tilde{w})$ dado por

$$\text{Fred}(\tilde{w}) = \mu^+ - \mu^- - 1 + \#\Gamma \quad (1.75)$$

onde μ^+ denota o índice (em relação à Ψ) do (único) furo positivo e μ^- denota a soma dos índices μ_{CZ} (em relação à Ψ) dos furos positivos. O seguinte resultado é o análogo do Teorema 1.79 para este contexto:

Teorema 1.81 ([7], Corolário 2; [24], Teorema 2.1). *Fixe $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $\Gamma_k \subset \mathbb{C}$, $\#\Gamma_k = k$, $\{P_z = (x_z, T_z)\}_{z \in \Gamma_k} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$, e $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Então existe um conjunto residual $\mathfrak{J}_{\text{gen}}^k(P_\infty, \{P_z\}_{z \in \Gamma_k}) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que, para todo $J \in \mathfrak{J}_{\text{gen}}^k(P_\infty, \{P_z\}_{z \in \Gamma_k})$, se $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_k \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma esfera furada de energia finita *somewhere injective*, $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma_k} w^* d\lambda > 0$ e os limites assintóticos são $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ no único furo positivo em ∞ e $P_z = (x_z, T_z) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ em cada furo negativo $z \in \Gamma_k$, então $\text{Fred}(\tilde{w}) \geq 1$.*

Fixe $C \in \mathbb{R}_+^*$. Considere o conjunto $\mathcal{P}(C)$ das órbitas fechadas contráteis $P = (x, T)$ tais que $T \leq C$. Como λ é não-degenerada, $\#\mathcal{P}(C) < \infty$. Fixe $k \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $k \leq C/\sigma_0$, onde σ_0 é definido em (1.73). Fixe também uma órbita fechada $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}(C)$. Sabemos que existe apenas uma quantidade finita de combinações das órbitas fechadas $P = (x, T) \in \mathcal{P}(C)$ em grupos de k elementos. Cada combinação $\{P_z\}_{z \in \Gamma_k}$ produz, pelo Teorema 1.81, um conjunto residual $\mathfrak{J}_{\text{gen}}^k(P_\infty, \{P_z\}_{z \in \Gamma_k})$. Para $k \in \mathbb{Z}_+^*$ fixo, seja $\mathfrak{J}_{\text{gen}}^k(P_\infty)$ a interseção destes conjuntos. Como $\mathcal{P}(C)$ é finito, a interseção dos conjuntos $\mathfrak{J}_{\text{gen}}^k(P_\infty)$, para todo $P_\infty \in \mathcal{P}(C)$, denotada por $\mathfrak{J}_{\text{gen}}^k$, é residual. Como existem finitos $k \in \mathbb{Z}_+^*$ satisfazendo $k \leq C/\sigma_0$, então

$$\mathfrak{J}_{\text{gen}}(C) := \bigcap_{k \leq C/\sigma_0} \mathfrak{J}_{\text{gen}}^k \quad (1.76)$$

é um conjunto residual. A escolha da constante $C > 0$ para as nossas aplicações dependerá do contexto. As observações acima mostram o seguinte resultado:

Teorema 1.82. *Fixe $C > 0$ e seja $\mathfrak{J}_{gen}(C)$ definido em (1.79). Dado $J \in \mathfrak{J}_{gen}(C)$, se $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma esfera furada de energia finita somewhere injective satisfazendo $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma} w^* d\lambda > 0$ tal que ∞ é o único furo positivo, $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos e os limites assintóticos de $\tilde{u}$ são órbitas fechadas de Reeb contráteis $P = (x, T) \in \mathcal{P}(C)$. Então $\text{Fred}(\tilde{w}) \geq 1$.*

Capítulo 2

Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

Neste capítulo, estudaremos a dinâmica de Reeb associada a uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Vamos supor que existe uma órbita fechada do fluxo de Reeb L que é p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, cujos números de auto-enlaçamento e de rotação transversal satisfazem, respectivamente, $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ e $\rho(L^p) < 1$, e mostraremos que, neste caso, existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P}$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L . Em particular, resulta que L não pode ser bordo de uma seção global do tipo disco.

2.1 Resultado Principal

Assumiremos que M é uma 3-variedade fechada e conexa munida de uma forma de contato λ cuja estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é *tight*. Seja X_λ o campo de Reeb associado à forma de contato λ . Lembre que $P = (x, T)$ é uma órbita fechada de Reeb se $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ satisfaz

$$x'(t) = X_\lambda \circ x(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e é T -periódica, $T > 0$. No capítulo anterior, identificamos o conjunto $\mathcal{P}(\lambda)$ das órbitas fechadas de Reeb com um subconjunto de $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. Recorde que o quociente $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ é induzido pela ação $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ dada por $c \mapsto \psi(c, \eta(\cdot)) := \eta(\cdot + c)$. A identificação que mencionamos associa a cada órbita fechada de Reeb $P = (x, T)$ a classe de equivalência em $\frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ contendo a aplicação

$$t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x_T(t) := x(Tt) \in M. \quad (2.1)$$

Esta identificação implica que duas órbitas fechadas de Reeb $P = (x, T)$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ satisfazem $[x_T] = [\bar{x}_{\bar{T}}] \in \frac{C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ se e somente se $x_T(\mathbb{R}) = \bar{x}_{\bar{T}}(\mathbb{R})$ e $T = \bar{T}$. Por abuso de notação,

escrevemos $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)^1$. Dadas duas órbitas fechadas $P = (x, T)$, $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$, dizemos que P e $\bar{P}$ são *geometricamente distintas* se a imagem geométrica $x(\mathbb{R})$ é geometricamente distinta de $\bar{x}(\mathbb{R})$, isto é, $x(\mathbb{R}) \cap \bar{x}(\mathbb{R}) = \emptyset$. Dizemos que $\bar{P}$ é *não-enlaçada* em P se $\bar{x}(\mathbb{R})$ é contrátil em $M \setminus x(\mathbb{R})$. Se $P = (x, T)$ é uma órbita fechada de Reeb e existe um disco contínuo $v : \mathbb{D} \rightarrow M$, onde $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, tal que

$$v(e^{2\pi it}) = x(Tt), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

dizemos que a órbita fechada P é *contrátil* e o conjunto das órbitas fechadas contráteis de λ é denotado por $\mathcal{P}^c(\lambda)$. Estamos interessados no caso em que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho e $v|_{\partial \mathbb{D}}$ é um recobrimento. Vamos explicar com mais detalhes. Recorde que uma órbita fechada $P = (x, T)$ é *prima* (ou *simplesmente recoberta*) se o período $T > 0$ é mínimo. Se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é prima, diremos que $P = (x, T)$ é um *p-nó trivial*, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, quando o mergulho x_T definido em (2.1) é um *p-nó trivial*, isto é, quando existe uma imersão $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho em $M \setminus x_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ e $v|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \xrightarrow{p:1} x_T(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é uma aplicação de *p-recobrimento*. Neste caso, diremos que $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um *p-disco para a órbita fechada P*.

Lembre que $\mathcal{J}(\lambda)$ denota o espaço das estruturas complexas em ξ que são $d\lambda$ -compatíveis. Sabe-se que $\mathcal{J}(\lambda)$ é não-vazio e contrátil (veja Proposição 1.18). A estrutura de contato ξ , quando munida de uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, pode ser vista como um fibrado complexo sobre M . Seja $c_1(\xi) \in H^2(M)$ a *primeira classe de Chern* associada ao fibrado complexo $(\xi, J) \rightarrow M$. Note que $c_1(\xi)$ não depende de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma vez que o espaço $\mathcal{J}(\lambda)$ é contrátil. Assumiremos durante todo este capítulo que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$, isto é, $c_1(\xi)$ se anula sobre o segundo grupo de homotopia $\pi_2(M)$ (veja o Apêndice A). Esta hipótese garante que os índices dinâmicos $\rho(P)$ e $\mu_{CZ}(P)$ estão bem-definidos para toda órbita fechada contrátil $P = (x, T)$.

Nosso objetivo neste capítulo é provar a seguinte existência implicada de órbita fechada:

Teorema 2.1. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Se existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$, *p-nó trivial*, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\rho(\bar{P}) = 1$.*

Primeiramente, vamos assumir que a forma de contato λ é não-degenerada. Veremos que, neste caso, $\rho(L^p) < 1$ é equivalente a $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$. O primeiro passo da demonstração do Teorema 2.1 (quando λ é não-degenerada), é construir um *p-disco especial*² $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada L . A folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}} = (\xi \cap T\mathcal{D})^\perp$ de um *p-disco especial* $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$ possui uma única singularidade elíptica real e positiva $e^+ \in \mathring{\mathcal{D}}$ e as linhas de fluxo de $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ são bem comportadas no sentido de que emanam de e^+ e intersectam transversalmente a órbita fechada L . A construção do *p-disco especial* $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é feita no Apêndice B. O restante

¹Note que está subentendida uma classe de equivalência de aplicações em $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$.

²Veja a Definição B.5.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

da prova segue métodos de *preenchimento por discos*³ e uma análise de *bubbling-off* similares à estratégia de demonstração da *Conjectura de Weinstein*, em S^3 , no caso *overtwisted* em [19], do Teorema 1.4 em [21], Teorema 1.6 em [23], Teorema 1.3 em [35] e do Teorema 1.3 em [39]. Vejamos as ideias principais. Fixe uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ em ξ . Já observamos no capítulo anterior que é possível definir uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ na simpletização $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo as condições

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_\lambda(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (2.3)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times M$. Fixe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada L e denote $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$. Seja e^+ a única singularidade elíptica real e positiva. Lembre que um disco $\tilde{J}$ -holomorfo na simpletização $\mathbb{R} \times M$ é uma aplicação (suave) $\tilde{u} := (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ satisfazendo $\tilde{u}_s + \tilde{J}(\tilde{u})\tilde{u}_t = 0$, onde $s + it$ são coordenadas em $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Veremos na Seção 2.3.1 que existem discos $\tilde{J}$ -holomorfos mergulhados $\tilde{u} := (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ com condição de contorno em $\{0\} \times (\mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\})$, isto é, $\tilde{u}(\partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times (\mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\})$. Estes discos constituem um conjunto especial denominado *família de Bishop* e denotado por $\mathcal{M}$. Numa vizinhança da singularidade $e^+ \in \mathring{\mathcal{D}}$, esta família pode ser descrita da seguinte forma: sejam (V, Ψ) coordenadas de Darboux, onde $V \subset M$ é uma vizinhança aberta da singularidade e^+ , $\Psi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^3$ é um difeomorfismo e U é um aberto contendo $(0, 0, 0)$. Sabemos que Ψ satisfaz $\Psi^*(dz + xdy) = \lambda$, onde (x, y, z) são coordenadas em $\mathbb{R}^3$ e $dz + xdy$ é a forma de contato canônica em $\mathbb{R}^3$. Pelo Lema B.4, (Ψ, V) pode ser escolhido de modo que a imagem $\Psi(V \cap \mathcal{D})$ corresponda ao gráfico da função $(x, y) \mapsto -\frac{1}{2}xy$. Seja $\xi_0 = \ker(dz + xdy)$ e fixe uma estrutura complexa $J' : \xi_0 \rightarrow \xi_0$ definida em U e satisfazendo $J'e_1 = e_2$ e $Je_2 = -e_1$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, -x)$. Sejam $\tilde{u}_\tau = (a_\tau, u_\tau) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$, $0 < \tau \ll 1$, definidos por

$$a_\tau(s + it) = \frac{\tau^2}{4}(s^2 + t^2 + 1), \quad \Psi \circ u_\tau(s + it) = \left(\tau s, \tau t, -\frac{\tau^2}{2}st \right). \quad (2.4)$$

Considere $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ induzida⁴ por J' . As aplicações $\tilde{u}_\tau$ são discos $\tilde{J}$ -holomorfos mergulhados com condição de bordo em $\{0\} \times (\mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\})$, para todo $0 < \tau \ll 1$. Isto mostra que a *família de Bishop* $\mathcal{M}$ é não-vazia. Na Seção 2.3.2, vamos escolher uma sequência $\tilde{u}'_n \in \mathcal{M}$ que provaremos ser não-compacta. Isto significa que o conjunto dos pontos de *bubbling-off*⁵ é não-vazio. Escolhendo biholomorfismos do disco $\phi_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ adequados e considerando $\tilde{u}_n = \tilde{u}'_n \circ \phi_n$, podemos supor que o conjunto dos pontos de *bubbling-off* da (nova) sequência $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$, ainda denotado por Γ_0 , satisfaz $\Gamma_0 \subset \mathring{\mathbb{D}}$. Veremos que existem uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ tal que $\#\Gamma_0 < +\infty$ e um disco furado ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$. É possível provar que este disco furado de energia finita é um mergulho e que os pontos $z_0 \in \Gamma_0$

³Em inglês, *disk-fillings methods*.

⁴Isto é, considere $J = (\Psi^{-1})^* J'$. É possível estender J sobre M . Nestas condições, $\tilde{J}$ é, na verdade, a estrutura complexa induzida por J e (2.3).

⁵Isto é, o conjunto $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{D} : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ e } z_k \rightarrow z \text{ tais que } |d\tilde{u}'_{n_k}(z_k)| \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \infty\}$.

são furos negativos de $\tilde{u}_0$. Pelo Teorema 1.67, para todo $z_0 \in \Gamma_0$, o limite assintótico em $z_0 \in \Gamma_0$ é uma órbita fechada de Reeb $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0})$. Seguindo [21], [22], [23], [39], podemos reparametrizar adequadamente uma vizinhança de $z_0 \in \Gamma_0$ e produzir uma esfera furada ($\tilde{J}$ -holomorfa) de energia finita. A construção desta esfera é essencialmente a seguinte: fixado $z_0 \in \Gamma_0$, podemos escolher sequências $z_n \rightarrow z_0$, $\delta_n \rightarrow 0^+$, $R_n \rightarrow +\infty$ e reparametrizações $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dadas por

$$b_n(z) = a_n(z_n + \delta_n z) - a_n(z_n + 2\delta_n), \quad v_n(z) = u_n(z_n + \delta_n z). \quad (2.5)$$

Denotamos por Γ_{z_0} o conjunto de pontos de *bubbling-off* da sequência $\tilde{v}_n$. Provaremos que existem uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$ tal que $\#\Gamma_{z_0} < \infty$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{v}_{z_0} : \mathbb{C} \setminus \Gamma_{z_0} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}_{z_0}$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma_{z_0}, \mathbb{R} \times M)$. Veremos que o conjunto Γ_{z_0} é constituído pelos furos negativos de $\tilde{v}_{z_0}$ e ∞ é o único furo positivo de $\tilde{v}_{z_0}$. O Teorema 1.67 mostra que os limites assintóticos de $\tilde{v}_{z_0}$ em $\tilde{\Gamma}_{z_0} = \{\infty\} \cup \Gamma_{z_0}$ são órbitas fechadas de Reeb. É importante observar que a órbita fechada $P_\infty = (x_\infty, T_\infty)$ limite assintótico de $\tilde{v}_{z_0}$ em ∞ coincide com a órbita fechada $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0})$ limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em $z_0 \in \Gamma_0$ (veja figura abaixo). Este fato não-trivial é provado no Lema 2.19.

Figura 2.1: Identificação das órbitas fechadas P_{z_0} e P_∞ .

O processo de reparametrização na vizinhança de pontos de *bubbling-off* descrito acima é denominado *soft-rescaling*. Podemos repetir esta reparametrização na vizinhança de todos os pontos $z \in \Gamma_0$. Deste modo, para cada $z \in \Gamma_0$, dispomos de uma esfera furada de energia finita $\tilde{v}_z : \mathbb{C} \setminus \Gamma_z \rightarrow \mathbb{R} \times M$, onde Γ_z é o conjunto de furos negativos de $\tilde{v}_z$. O procedimento de *soft-rescaling* pode ser repetido também na vizinhança dos furos negativos das esferas $\tilde{v}_z$, para todo $z \in \Gamma_0$. Novamente são obtidas esferas furadas de energia finita $\tilde{v}_{z,y} : \mathbb{C} \setminus \Gamma_{z,y} \rightarrow \mathbb{R} \times M$, para todo $y \in \Gamma_z$, onde $\Gamma_{z,y}$ denota o conjunto dos furos negativos de $\tilde{v}_{z,y}$. Como antes, os limites assintóticos nos furos negativos de $\tilde{v}_{z,y}$ são órbitas fechadas de Reeb. A iteração do procedimento de reparametrização (*soft-rescaling*) na vizinhança de pontos de *bubbling-off* associa a cada $z \in \Gamma_0$ um conjunto $\mathfrak{F}$ finito de esferas furadas de energia finita. Veja a Figura 2.2. Cada um destes conjuntos é denominado uma árvore de *bubbling-off* (para $z \in \Gamma_0$). O esboço da construção de uma árvore de *bubbling-off* é feito no Apêndice C. Note que o conjunto $\mathfrak{F}$ está organizado em níveis, isto é, no primeiro nível está a esfera $\tilde{v}_z : \mathbb{C} \setminus \Gamma_z \rightarrow \mathbb{R} \times M$ obtida

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

a partir da reparametrização numa vizinhança do furo $z \in \Gamma_0$ do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$, no segundo nível estão as esferas resultantes da reparametrização nos furos negativos da esfera $\tilde{v}_z$ pertencente ao primeiro nível, e assim sucessivamente. Repare que a cada $z \in \Gamma_0$ está associado um número finito de ramos partindo de $\tilde{v}_z$ (veja a Figura 2.2). Note também que o fato de $\mathfrak{F}$ ser finita, implica que o último nível de cada ramo corresponde a um plano ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita $\tilde{v} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Esta última observação implica que, se $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ denota o conjunto das órbitas fechadas de Reeb limite assintótico de alguma das esferas furadas de energia finita em $\mathfrak{F}$, então $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$, isto é, as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ são contráteis (veja Seção C.2 no Apêndice C). Outra observação, essencial para a nossa análise e relacionada às órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, é o fato de que, para toda $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, temos $\mu_{CZ}(P) \geq 2$ (veja Corolário C.10). Em particular, $\mu_{CZ}(P_z) \geq 2$, para todo $z \in \Gamma_0$, visto que o limite assintótico em ∞ da esfera furada de energia finita $\tilde{v}_z$ no primeiro nível coincide com o limite assintótico do furo negativo $z \in \Gamma_0$ do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0$.

Figura 2.2: Árvore de *bubbling-off*

Seguindo [7] e [27], vimos na Seção 1.3.4 que podemos fixar uma estrutura complexa genérica. Um detalhe importante é que a construção de $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ poderia ter sido realizada já com a hipótese de genericidade. Isto é consequência da *transversalidade automática* das soluções em $\mathcal{M}$ (veja Seção 2.3.1 para os detalhes). A seguir, veremos quais implicações a escolha de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ genérica tem sobre a demonstração. Lembre que $\mu_{CZ}(P_z) \geq 2$, para todo $z \in \Gamma_0$. A genericidade de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e o *índice de Fredholm* de $\tilde{u}_0$ (veja (1.69) na Seção 1.3.4) implicam que $\mu_{CZ}(P_z) < 3$, para todo $z \in \Gamma_0$. Isto mostra que o conjunto Γ_0 é unitário, isto é, $\Gamma_0 = \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$, e, em particular, se $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 , então $\mu_{CZ}(P_0) = 2$ (veja o Lema 2.25). Este fato implica que se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, então $\mu_{CZ}(P) = 2$ (veja o Lema 2.26).

A seguir, comentamos uma outra consequência da escolha de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ genérico. Veremos que se $\mathfrak{F}$ é a árvore de *bubbling-off* associada ao (único) furo negativo de $\tilde{u}_0$, então $\mathfrak{F}$ possui um único plano de energia finita. Mais precisamente, seja $\tilde{v} \in \mathfrak{F}$ a esfera furada de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ contida na árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$ cujo limite assintótico no ∞ é a órbita fechada P_0 . Note que estamos escolhendo a esfera furada no primeiro nível de $\mathfrak{F}$ visto que $P_0 = (x_0, T_0)$ é também o limite assintótico do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0$ no único furo negativo. Na Seção 2.3.3, provaremos que a $d\lambda$ -energia de $\tilde{v}$ é não-nula, isto é, verificaremos que $\pi \cdot dv$ não é identicamente nulo. Se $\Gamma' \neq \emptyset$, a Proposição 1.59 garante que existe uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ *somewhere injective* com $\pi \cdot dw$ não identicamente nulo, e um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $p(\Gamma') = \tilde{\Gamma}$, $p(\infty) = \infty$, de modo que $\tilde{v}$ se fatora em $\tilde{v} = \tilde{w} \circ p$. Como as órbitas fechadas $P \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ satisfazem $\mu_{CZ}(P) = 2$, concluiremos que a esfera furada $\tilde{v}$ é também *somewhere injective*. Isto é consequência do *índice de Fredholm* de $\tilde{w}$ (veja (1.75) na Seção 1.3.4). De modo análogo, o *índice de Fredholm* de $\tilde{v}$ implica que $\tilde{v}$ possui um único furo (positivo) no ∞ , isto é, $\tilde{v}$ é um plano de energia finita (veja o Lema 2.25). A *teoria de interseção de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* introduzida por McDuff em [49] implica que P_0 é não-enlaçada em L . As órbitas fechadas L e P_0 são geometricamente distintas pelo fato de que L é um p -nó trivial, $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Segue que $\bar{P} = P_0$ é a órbita fechada desejada, no caso não-degenerado. A Figura 2.3 ilustra a projeção em M da ideia esboçada acima.

Figura 2.3: Ideia da Prova

O Teorema 2.1, no caso degenerado, é essencialmente um corolário do caso não-degenerado. Vamos explicar com um pouco mais de detalhes. O Lema 6.3 em [30] garante que podemos aproximar a forma de contato λ por formas de contato $g_n \lambda$ não-degeneradas, onde $g_n : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ e $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$. Esta aproximação pode ser feita de maneira que a órbita fechada L satisfaça $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda_n := g_n \lambda)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, L é órbita fechada do campo de Reeb X_{λ_n} , para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.1, no caso não-degenerado, existe uma sequência de órbitas fechadas contráteis $P_n = (x_n, T_n)$ geometricamente distintas de L e não-enlaçadas em L . É possível provar que existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que os períodos satisfazem $T_n < C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O Teorema de Ascoli-Arzelà implica que existe uma subsequência P_{n_k} ,

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

$n_k \rightarrow +\infty$, convergindo para uma órbita fechada contráteis $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$. Como as órbitas fechadas P_{n_k} são não-enlaçadas em L , o fato de $\rho(L^p) < 1$ implica que $\bar{P}$ é também geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L . Isto concluirá a prova do Teorema 2.1.

2.2 Exemplos

Exemplo 2.2 (Níveis Estrelados em $\mathbb{R}^4$). Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva mergulhada no primeiro quadrante. Fixe $\phi_0, \phi_1 \in \mathbb{R}$ e suponha que $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $x(0) > 0, y(0) = 0, e y'(0) > 0$;
- (ii) $x(1) = 0, y(1) > 0, e x'(1) < 0$;
- (iii) $x(t)y'(t) - x'(t)y(t) > 0$, para todo $t \in [0, 1]$, isto é, γ e γ' são não-colineares;
- (iv) $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \neq 0$, para todo $t \in [0, 1]$;
- (v) $(y'(0), -x'(0)) \in \mathbb{R}^+(1, \phi_1)$;
- (vi) $(y'(1), -x'(1)) \in \mathbb{R}^+(\phi_0, 1)$.

Figura 2.4: Comportamento da curva γ .

A curva γ tem o comportamento ilustrado na Figura 2.4. Considere S_γ em $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ satisfazendo $S_\gamma := \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \in \mathbb{R}^4 : (r_0^2, r_1^2) \in \gamma([0, 1])\}$, onde $(x_k, y_k) \simeq x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 0, 1$, são coordenadas em $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular para F e

$$\gamma([0, 1]) = F^{-1}(0) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x_0, y_0, x_1, y_1) = F(r_0^2, r_1^2)$. Então $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular também para H e, consequentemente, $S_\gamma = H^{-1}(0)$ é uma hipersuperfície suave de $\mathbb{R}^4$. Note que o espaço tangente $T_p S_\gamma$ em $p = (r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \in S_\gamma$ é

$$T_p S_\gamma = \ker dH(p) = \text{span} \left\{ \partial_{\theta_0}, \partial_{\theta_1}, (r_1 \cdot \partial_2 F(r_0^2, r_1^2)) \partial_{r_0} - (r_0 \cdot \partial_1 F(r_0^2, r_1^2)) \partial_{r_1} \right\}, \quad (2.6)$$

onde $\partial_1 F(r_0^2, r_1^2)$, $\partial_2 F(r_0^2, r_1^2)$ denotam as derivadas parciais de F em relação a x, y , respectivamente. Por simplicidade, de agora em diante escreveremos apenas $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ deixando (r_0^2, r_1^2)

subentendido. Da condição (iii) acima, segue que S_γ é hipersuperfície estrelada de $\mathbb{R}^4$. De fato, se S_γ *intersectasse pelo menos duas vezes* ou *tangenciasse* uma semi-reta pela origem, teríamos que a curva γ , respectivamente, *intersectaria pelo menos duas vezes* ou *tangenciaria* alguma semi-reta pela origem em $\mathbb{R}^2$, só que isto implicaria $x(t_0)y'(t_0) - x'(t_0)y(t_0) \leq 0$, para algum $t_0 \in [0, 1]$, contradizendo (iii). Considere $\mathbb{R}^4$ munido da *forma de Liouville*

$$\alpha_0(p) = i_{X(p)}\omega_0(p) = \frac{1}{2}(x_0dy_0 - y_0dx_0 + x_1dy_1 - y_1dx_1),$$

onde $p = (x_0, y_0, x_1, y_1)$, $X(p) = \frac{1}{2}p$ e $\omega_0 = \sum_{k=0,1} dx_k \wedge dy_k$ é a forma simplética canônica em $\mathbb{R}^4$.

Como S_γ é estrelada em relação à origem, S_γ é uma hipersuperfície de contato de $\mathbb{R}^4$ cuja forma de contato é $\alpha_0|_{S_\gamma}$ (a restrição da *forma de Liouville* α_0 à S_γ . Veja Exemplo 1.3). Pelo *Teorema de Bennequin*, a estrutura de contato $\xi_0 = \ker \alpha_0|_{S_\gamma}$ induzida pela forma $\alpha_0|_{S_\gamma}$ é *tight*. Note que, em coordenadas polares, a *forma de Liouville* é dada por $\alpha_0 = \frac{1}{2}(r_0^2 d\theta_0 + r_1^2 d\theta_1)$, quando $r_0, r_1 \neq 0$. De (2.6) segue que

$$\xi_0 = \text{span} \{ r_1^2 \partial_{\theta_0} - r_0^2 \partial_{\theta_1}, (r_1 \cdot \partial_2 F) \partial_{r_0} - (r_0 \cdot \partial_1 F) \partial_{r_1} \}, \text{ quando } r_0, r_1 \neq 0.$$

Vamos estudar a dinâmica de Reeb em S_γ induzida pela forma de contato $\alpha_0|_{S_\gamma}$. Lembre que escolhemos F de maneira que 0 seja valor regular, isto é, $\partial_1 F|_\gamma, \partial_2 F|_\gamma$ não são simultaneamente nulos. É imediato verificar que

$$d\alpha_0|_{S_\gamma} = d(r_0^2) \wedge d\theta_0 + d(r_1^2) \wedge d\theta_1.$$

Além disso, $\partial_1 F|_{S_\gamma} \cdot d(r_0^2) + \partial_2 F|_{S_\gamma} \cdot d(r_1^2) \equiv 0$, pois $F|_{S_\gamma} \equiv 0$, e $r_0^2 \partial_1 F|_{S_\gamma} + r_1^2 \partial_2 F|_{S_\gamma} \neq 0$, pois

$$\alpha_0|_{S_\gamma} \left(\partial_1 F|_{S_\gamma} \partial_{\theta_0} + \partial_2 F|_{S_\gamma} \partial_{\theta_0} \right) \neq 0.$$

Disto segue que o campo de Reeb X_0 associado à forma de contato $\alpha_0|_{S_\gamma}$ é dado por

$$X_0 = a_0(r_0^2, r_1^2) \partial_{\theta_0} + a_1(r_0^2, r_1^2) \partial_{\theta_1}, \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{cases} a_0(r_0^2, r_1^2) = \frac{2\partial_1 F}{r_0^2 \partial_1 F + r_1^2 \partial_2 F} \\ a_1(r_0^2, r_1^2) = \frac{2\partial_2 F}{r_0^2 \partial_1 F + r_1^2 \partial_2 F}. \end{cases}$$

Suponha que $F < 0$ sobre a componente limitada de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \setminus \gamma([0, 1])$. Note que, por hipótese, $(F \circ \gamma)(t) \equiv 0$ e, portanto, $\partial_1 F \cdot x'(t) + \partial_2 F \cdot y'(t) = (F \circ \gamma)'(t) \equiv 0$. Isto implica que os vetores $(\partial_1 F|_\gamma, \partial_2 F|_\gamma)$ e $(y'(t), -x'(t))$, onde $t \in [0, 1]$ é determinado por $(r_0^2, r_1^2) = \gamma(t)$, são colineares e apontam para a componente não limitada de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \setminus \gamma([0, 1]).$$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

Logo,

$$X_0 = a_0(r_0^2, r_1^2)\partial_{\theta_0} + a_1(r_0^2, r_1^2)\partial_{\theta_1} \in \mathbb{R}^+(y'(t)\partial_{\theta_0} - x'(t)\partial_{\theta_1}). \quad (2.8)$$

Observe que, dados $(\tilde{r}_0^2, \tilde{r}_1^2) \in \gamma((0, 1))$, o conjunto $T(\tilde{r}_0^2, \tilde{r}_1^2) := \{(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \in S_\gamma : r_0 = \tilde{r}_0, r_1 = \tilde{r}_1\}$ é um toro mergulhado em S_γ e invariante pelo fluxo de Reeb. Este último é consequência do fato de X_0 em (2.8) possuir componentes somente nas direções $\partial_{\theta_0}, \partial_{\theta_1}$. Como esta propriedade se verifica para todo $(r_0^2, r_1^2) \in \gamma((0, 1))$, fazendo $r_0 \rightarrow 0^+$, encontramos uma folheação por toros invariantes pelo fluxo de Reeb de uma vizinhança do conjunto $S_\gamma \cap (0 \times \mathbb{C})$. Isto mostra que $S_\gamma \cap (0 \times \mathbb{C})$ contém uma órbita fechada (do campo de Reeb). De modo análogo, verificamos que $S_\gamma \cap (\mathbb{C} \times 0)$ também contém uma órbita fechada. Denotamos por $L_0 = (z_0, T_0)$ e $L_1 = (z_1, T_1)$ as órbitas fechadas contidas, respectivamente, em $S_\gamma \cap (0 \times \mathbb{C})$ e $S_\gamma \cap (\mathbb{C} \times 0)$. Vamos supor que T_k são os períodos mínimos, $k = 0, 1$. Nosso objetivo a seguir é calcular os números de rotação transversal $\rho(L_0), \rho(L_1)$ das órbitas fechadas L_0, L_1 , respectivamente. Começamos provando que $\text{sl}(L_0) = \text{sl}(L_1) = -1$.

Seja $S^3 := \{(x_0, y_0, x_1, y_1) \in \mathbb{R}^4 : r_0^2 + r_1^2 = 1\}$, onde $x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 0, 1$. Seja $\Phi : S^3 \rightarrow S_\gamma$ a aplicação entre S^3 e S_γ induzida pela projeção ao longo de semi-retas pela origem, isto é,

$$\begin{aligned} \Phi : S^3 &\rightarrow S_\gamma \\ p &\mapsto f(p) \cdot p \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é uma função suave. Note que Φ é um difeomorfismo e a forma de contato *pull-back* corresponde a $\Phi^*(\alpha_0|_{S_\gamma}) = f^2 \alpha_0|_{S^3}$. De fato, para todo $p \in S^3$ e $v \in T_p S^3$,

$$\begin{aligned} \Phi^*(\alpha_0|_{S_\gamma})_p(v) &= (\alpha_0|_{S_\gamma})_{\Phi(p)}(\Phi_*(v)) \\ &= \frac{1}{2} \omega_0(f(p) \cdot p, \langle \nabla f(p), v \rangle \cdot p + f(p)v) \\ &= (f(p))^2 \frac{1}{2} \omega_0(p, v) = (f(p))^2 \cdot (\alpha_0|_{S^3})_p(v). \end{aligned}$$

Segue que Φ é um contactomorfismo entre S^3 e S_γ . Note que a órbita fechada $z_0(t) = (0, r_1 e^{iT_0 t})$ coincide com $\Phi \circ h_0(t)$, onde $h_0(t) := (0, e^{iT_0 t})$ e $H_0 = (h_0, T_0)$ é uma fibra de Hopf. Isto mostra que $H = (h_0, T_0)$ é levada na órbita fechada L_0 pelo contactomorfismo Φ . É conhecido que H_0 satisfaz $\text{sl}(H_0) = -1$ (veja Exemplo 1.15). Isto implica que $\text{sl}(L_0) = -1$. De modo análogo, como L_1 é a imagem da fibra de Hopf $H_1 = (h_1, T_1)$, onde $h_1(t) = (e^{iT_1 t}, 0)$, temos que $\text{sl}(L_1) = -1$.

Observe que, ao longo da órbita L_0 , a estrutura de contato é gerada por $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$. Este referencial é normal a L_0 . De fato, sejam $H_0 = (h_0, T_0)$ a fibra de Hopf em S^3 tal que $h_0(t) := (0, e^{iT_0 t})$ e $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$ um referencial sobre H_0 . Já observamos no Exemplo 1.15 que $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$ é um referencial normal. Se $Z : S^3 \rightarrow \xi_0$ é uma seção não-nula da estrutura de contato⁶, verificamos que $\text{wind}(Z, \partial_{x_0}) = \text{sl}(H_0) = -1$. Como Φ , definido em (2.9), é um contactomorfismo, segue que $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$ é um referencial normal sobre L_0 e $\text{wind}(\tilde{Z}, \partial_{x_0}) = \text{sl}(L_0) = -1$. Aqui

⁶No Exemplo 1.15, exibimos uma seção não-nula de $\xi_0 \rightarrow S^3$.

$\tilde{Z} : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{v}^*\xi_0$ é uma seção não-nula satisfazendo $\tilde{Z}(p) = d\Phi_q(Z(q))^7$, onde $q = \Phi^{-1}(p)$.

Como $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$ é um referencial normal sobre L_0 , estudar a rotação do fluxo linearizado $d\phi_{T_0t}|_{(\xi_0)_{z_0(0)}} : (\xi_0)_{z_0(0)} \rightarrow (\xi_0)_{z_0(T_0t)}$, restrito à estrutura de contato sobre a $L_0 = (z_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\alpha_0)$ significa estudar a variação angular Δ_{θ_0} da componente a_0 do campo de Reeb X_0 , onde X_0 é tal como em (2.8). Note que o período mínimo de L_0 é $2\pi/a_1(0, r_1^2)$. Isto implica que a variação angular Δ_{θ_0} do fluxo linearizado de X_0 restrito à $\xi_0|_{L_0}$ após a primeira volta, em relação à trivialização de $\xi_0|_{L_0}$ induzida por $\{\partial_{x_0}, \partial_{y_0}\}$, é

$$\frac{2\pi}{a_1(0, r_1^2)} a_0(0, r_1^2) = 2\pi \frac{y'(1)}{x'(1)} = 2\pi\phi_0. \quad (2.10)$$

A primeira igualdade em (2.10) segue de (2.8) e a segunda é consequência da escolha da curva γ satisfazendo as condições (i)-(vi). Já provamos acima que $\text{sl}(L_0) = -1$. Isto implica que o fluxo linearizado restrito à $\xi_0|_{L_0}$ gira $2\pi(1 + \phi_0)$ em relação a uma trivialização $d\alpha_0|_{S_\gamma}$ -simplética de ξ_0 induzida pela seção não-nula $\tilde{Z} : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{v}^*\xi_0$. Pela definição de número de rotação transversal (veja Definição 1.34), concluímos que $\rho(L_0) = (1 + \phi_0)$. Escolhendo $\phi_0 < 0$, temos que $\rho(L_0) < 1$. De maneira análoga, obtemos $\rho(L_1) = (1 + \phi_1) < 1$, para uma escolha adequada de $\phi_1 < 0$. Isto mostra que escolhendo ϕ_0, ϕ_1 convenientemente, cada uma das órbitas fechadas $L_0 = (z_0, T_0), L_1 = (z_1, T_1) \in \mathcal{P}^c(\alpha_0|_{S_\gamma})$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1. $\square$

Exemplo 2.3 (Fluxos Geodésicos: [39], [55]). Seja $S \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$ uma superfície mergulhada munida da métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Suponha que a curvatura de S é positiva. Considere a família de difeomorfismos $\phi_t : TS \rightarrow TS$ dada por

$$\phi_t(x, v) = (\gamma(t), \gamma'(t)),$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$, $v \in T_x S$ e γ é a geodésica satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. A família $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ define um fluxo no fibrado tangente TS denominado *fluxo geodésico*. O campo G em TS , que gera o fluxo geodésico, é chamado de *campo geodésico*. A seguir, estudamos o fluxo geodésico restrito ao fibrado tangente unitário SS , isto é, $SS := \{(x, v) \in TS : |v| = 1\}$, onde $|\cdot| := \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$ é a norma induzida pela métrica g . No Apêndice D, seguindo [37], [40] e [55], apresentamos uma exposição mais detalhada dos conceitos relacionados ao fluxo geodésico e das afirmações feitas adiante.

No Apêndice D, esboçamos a prova de que o fluxo geodésico $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ restrito ao fibrado unitário SS coincide com a dinâmica de Reeb de uma forma de contato definida em SS . Esta forma de contato é definida explicitamente por

$$\alpha_{(x,v)}(\zeta) = g_x(v, d\pi(\zeta)), \text{ para todo } (x, v) \in SS \text{ e } \zeta \in T_{(x,v)}SS, \quad (2.11)$$

⁷Observe que $\tilde{Z} : S_\gamma \rightarrow \xi_0$ satisfazendo $\tilde{Z}(p) := d\Phi_q(Z(q))$, $q = \Phi^{-1}(p)$, é uma seção não-nula do fibrado $\xi_0 \rightarrow S_\gamma$. Para as nossas aplicações é suficiente considerar a restrição de $\tilde{Z}$ ao disco $\tilde{v}(\mathbb{D})$.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

onde $\pi : SS \rightarrow S$ é a projeção canônica no primeiro fator, isto é, $(x, v) \mapsto x$. Denotamos por ξ a estrutura de contato induzida por α .

Vamos verificar primeiramente que $c_1|_{\pi_2(SS)}(\xi) \equiv 0$. No Apêndice D, observamos que existe um contactomorfismo $\Psi : SS \rightarrow SS_0^2$, onde $S_0^2 := (S^2, g_0)$ é a 2-esfera unitária canonicamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ munida da métrica Riemanniana g_0 induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$ e SS_0^2 é o fibrado unitário sobre S_0^2 . Em [6], Contreras e Oliveira mostram que existe $\mathfrak{R} : S^3 \rightarrow SS_0^2$ um recobrimento duplo de SS_0^2 dado explicitamente por

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (x_0^2 - y_0^2 + x_1^2 - y_1^2) & -2(x_0y_0 + x_1y_1) \\ 2(-x_0y_0 + x_1y_1) & -(x_0^2 - y_0^2 - x_1^2 + y_1^2) \\ 2(x_0y_1 + y_0x_1) & 2(x_0x_1 - y_0y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

O grupo de transformações de recobrimento é gerado pela aplicação antípoda $A(z) = -z \in S^3$. É conhecido que $\pi_2(SS_0^2) \approx \pi_2(S^3) \approx 0$ (veja [16, Teorema 4.41 e Exemplo 4.49]). O contactomorfismo Ψ implica que $c_1|_{\pi_2(SS)}(\xi) \equiv 0$ visto que $\pi_2(SS) \approx \pi_2(SS_0^2) \approx 0$. Contreras e Oliveira verificam também que $\mathfrak{R}^*\alpha = 4\alpha_0|_{S^3}$, onde α_0 é a *forma de Liouville* (veja [6, Proposição 1.1]). Isto mostra que a estrutura de contato $\xi = \ker \alpha$ é *tight*.

Observe que se $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma geodésica fechada com período $T > 0$ tal que $|\gamma_0'(t)| = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SS$ definida como $t \mapsto (\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$ é uma órbita fechada de Reeb em SS . Como antes, escrevemos $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\alpha)$.

Suponha que S possua uma geodésica fechada $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow S$ com período $T > 0$. Rescalando g , podemos supor que $T < \pi$. Suponha que a curvatura *Gaussiana* (na nova métrica) sobre γ_0 satisfaça $0 < K|_{\gamma_0} \leq 1$. Se $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow SS$ é definida como $t \mapsto (\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$, verificaremos que $P = (\gamma, T)$ é uma órbita fechada (do campo de Reeb associado à α) satisfazendo as propriedades $\text{sl}(P) = -\frac{1}{2}$ e $\rho(P^2) < 1$. Os invariantes sl, ρ são calculados em relação a uma trivialização $d\alpha$ -simplética global $\Psi : \xi \rightarrow SS \times \mathbb{C}$ (veja Apêndice D, Seção D.1).

Denote por $\mathcal{B}_8$ o conjunto formado pelas imersões $\beta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow S$ com uma única interseção transversal (isto é, imersões como *nó figura em oito* com interseção transversal). Em [37], Hryniewicz e Salomão verificam que, para todo $\beta \in \mathcal{B}_8$, a curva $\tilde{\beta} : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow SS$ definida como

$$t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \mapsto \tilde{\beta}(t) = \left(\beta(t), \frac{\beta'(t)}{|\beta'(t)|} \right) \in SS \quad (2.13)$$

é um nó trivial e satisfaz $\text{sl}(\tilde{\beta}) = -1$ (veja [37, Lema 3.1]). Vamos usar este fato para provar que $\text{sl}(P) = -\frac{1}{2}$. Lembre que $P = (\gamma, T) \in \mathcal{P}(\alpha)$ e $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$. Considere a curva $\gamma_0^2 : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow S$ dada por $\gamma_0^2(t) = \gamma_0(2t)$. É possível perturbar γ_0^2 mantendo um ponto p fixo e obter uma curva $\beta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow S$ contida em $\mathcal{B}_8$, arbitrariamente próxima de γ_0^2 e tal que a única interseção transversal satisfaz $\beta(0) = \beta(\frac{1}{2}) = p$. Seja $\tilde{\beta} : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow SS$ definida conforme (2.13). Já observamos que $\tilde{\beta}$ é um nó trivial. Isto implica que existe uma imersão $v : \mathbb{D} \rightarrow SS$ tal que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}}$ é um mergulho e $v|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \gamma(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, onde $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_0'(t))$, é um recobrimento

duplo. Em particular, $P^2 = (\gamma, 2T)$ é contrátil e $P = (\gamma, T)$ é 2-nó trivial. Como $\beta \in \mathcal{B}_8$ pode ser escolhida arbitrariamente próxima de γ_0^2 , o fato de que $\text{sl}(\tilde{\beta}) = -1$ implica $\text{sl}(P) = -\frac{1}{2}$.

Vamos verificar que $\rho(P^2) < 1$. Seja $\Psi : \xi \rightarrow SS \times \mathbb{C}$ a trivialização $d\alpha$ -simplética (global) da estrutura de contato construída no Apêndice D. Note que Ψ induz uma trivialização $d\alpha$ -simplética de $\xi_{P^2} := (x_{2T})^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. Por simplicidade, denote o fluxo (geodésico) associado ao campo de Reeb X_α também por $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ o caminho de matrizes simpléticas satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi(t) = \Psi_t \cdot d\phi_t|_{\xi_{\gamma(0)}} \cdot \Psi_0^{-1}$, onde $d\phi_t|_{\xi_{\gamma(0)}} : \xi_{\gamma(0)} \rightarrow \xi_{\gamma(t)}$ é a aplicação fluxo (geodésico) linearizado restrita à estrutura de contato. Defina aplicações $\varphi^k : [0, 2T] \rightarrow \text{Sp}(1)$ dadas por $\varphi^k(t) = \varphi(kt)$, para todo $t \in [0, 2T]$ e $k \in \mathbb{Z}_+^*$. Considere funções suaves $\theta^k : [0, 2T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Delta^k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, respectivamente, $\varphi^k(t)e^{i2\pi s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta^k(t,s)}$ e $\Delta^k(s) = \frac{\theta^k(2T,s) - 2\pi s}{2\pi}$. Lembre que, pelo Lema 1.35 (veja também Definição 1.34), temos

$$\rho(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta^k(s)}{k}. \quad (2.14)$$

Nosso objetivo é calcular o número de rotação transversal $\rho(\varphi)$. Por definição, teremos que $\rho(P^2) = \rho(\varphi)$, onde $P^2 = (\gamma, 2T)$. A equação (2.14) mostra que basta determinar Δ^k , para todo $k \in \mathbb{Z}_+^*$. A equação (D.16) do Apêndice D implica que

$$\begin{aligned} \Delta^k(s) &= \frac{\theta^k(2kT, s) - 2\pi s}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2kT} \frac{d\theta}{dt}(t, s) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2kT} [1 + (K(\gamma(t)) - 1) \sin^2(\theta(t, s))] dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2kT} dt = \frac{1}{2\pi} 2kT < k. \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, portanto, $0 < \Delta^k(s) < k$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+^*$. Note que a desigualdade anterior independente de $s \in [0, 1]$. Deste modo, (2.14) e (2.15) implicam $\rho(\varphi) < 1$ e, portanto, a órbita fechada $P = (\gamma, T)$ é um 2-nó trivial satisfazendo as condições do Teorema 2.1. $\square$

2.3 Caso Não-Degenerado

Nesta seção, vamos considerar λ uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Nosso objetivo é provar o Teorema 2.1 neste contexto. Antes de darmos início à demonstração, vamos provar a equivalência já mencionada entre o índice de Conley-Zehnder e o número de rotação transversal (quando se supõe λ não-degenerada). Lembre que o espaço $\mathcal{J}(\lambda)$ das estruturas complexas $d\lambda$ -compatíveis em $\xi = \ker \lambda$ é não-vazio e contrátil, conforme Proposição 1.18 do Capítulo 1. Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e recorde que ξ admite uma estrutura de fibrado complexo induzida por J . Por hipótese, estamos assumindo $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$, onde $c_1 \in H^2(M)$ é a *primeira classe de Chern* associada ao fibrado complexo $(\xi, J) \rightarrow M$. Observamos no Apêndice A que esta condição permite definir de maneira natural e sem ambiguidades os invariantes dinâmicos (isto é, ρ, μ_{CZ}) das órbitas fechadas contráteis do fluxo de Reeb. Esta definição consiste em uma escolha particular de trivializações $d\lambda$ -simpléticas da estrutura de contato sobre uma órbita fechada contrátil P . Mais precisamente, sejam $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ e $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um disco contínuo tal que $v(e^{2\pi i t}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

Segue que $v^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$ é um fibrado $d\lambda$ -simplético e existe uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : v^*\xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ sobre o disco $\mathbb{D}$. A restrição de Ψ à órbita fechada P induz a escolha de uma classe especial $\alpha_v \in \mathcal{S}_P$. Recorde que $\mathcal{S}_P$ denota o conjunto das classes de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas do fibrado simplético $x_T^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $x_T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ satisfaz $x_T(t) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Por simplicidade, denote por $\Psi : x_T^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ a restrição de Ψ . Dizemos que uma trivialização $d\lambda$ -simplética para $x_T^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ construída tal como Ψ é uma *trivialização $d\lambda$ -simplética induzida pelo disco contínuo v* . Lembre que $\Psi : x_T^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ induz uma aplicação $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi(t) = \Psi_t \circ d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \circ (\Psi_0)^{-1}, \quad (2.16)$$

onde $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ é a aplicação fluxo linearizado restrito à estrutura de contato. Tal como na Seção 1.2, podemos definir o *índice de Conley-Zehnder* da órbita fechada não-degenerada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ como $\mu_{CZ}(P, v) = \mu(\varphi)$, onde μ é o índice definido no Teorema 1.29, o *índice de Conley-Zehnder geométrico* $\mu_{\text{geom}}(P, v) = \mu_{\text{geom}}(\varphi)$, onde μ_{geom} é o índice definido em (1.27), e o *número de rotação transversal* $\rho(P, v) = \rho(\varphi)$, onde ρ é como na Definição 1.34. As notações $\mu_{CZ}(P, v)$, $\mu_{\text{geom}}(P, v)$, $\rho(P, v)$ mostram que estamos considerando uma trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por um disco contínuo para a órbita fechada P . É importante observar que as definições acima são independentes da trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : v^*\xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ do fibrado $v^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$. Como estamos assumindo $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$, estas definições são também independentes da escolha do disco contínuo $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $v(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Observação 2.4. Neste capítulo, dada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$, os índices $\mu_{CZ}(P, v)$, $\mu_{\text{geom}}(P, v)$ e $\rho(P, v)$ serão calculados em relação a trivializações $d\lambda$ -simpléticas induzidas por discos contínuos $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tais que $v(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A independência da escolha de v mencionada acima permite simplificar a notação escrevendo apenas $\mu_{CZ}(P)$, $\mu_{\text{geom}}(P)$ e $\rho(P)$.

Nosso primeiro objetivo é provar que as condições $\rho(P) < 1$, $\rho(P) > 1$ e $\rho(P) = 1$, quando se supõe λ não-degenerada, podem ser formuladas em termos do índice de Conley-Zehnder $\mu_{CZ}(P)$ da órbita fechada P .

Lema 2.5. *Sejam λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade M e $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\rho(P) < 1 \Leftrightarrow \mu_{CZ}(P) \leq 1$;
- (ii) $\rho(P) > 1 \Leftrightarrow \mu_{CZ}(P) \geq 3$;
- (iii) $\rho(P) = 1 \Leftrightarrow \mu_{CZ}(P) = 2$.

Demonstração. (i) ($\Rightarrow$). Suponhamos, por contradição, que a órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ satisfaça $\mu_{CZ}(P) > 1$. Seja $\Psi : (x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por um disco contínuo $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $v(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Como o fluxo linearizado $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ sobre a órbita fechada P é representado por uma curva suave de matrizes simpléticas $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Sp}(1)$ satisfazendo (2.16), podemos

definir $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t)e^{i2\pi s} \in \mathbb{R}^+e^{i\theta(t,s)}$, $\theta(0,s) = 2\pi s$, e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s \mapsto f(s) := \frac{\theta(1,s)}{2\pi}$. Definimos também $\Delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta(s) = \frac{\theta(1,s)-2\pi s}{2\pi}$ e considere o intervalo de rotação $I(\varphi) = \{\Delta(s) : s \in [0,1]\}$ que corresponde à imagem de Δ (veja Seção 1.2 para os detalhes). Note que Δ é 1-periódica. Lembre que a hipótese de não-degenerescência de λ implica $\mu_{CZ}(P) = \mu_{\text{geom}}(P)$ e, portanto,

$$\mu_{CZ}(P) = \begin{cases} 2k, & \text{se } k \in I(\varphi); \\ 2k+1, & \text{se } I(\varphi) \subset (k, k+1). \end{cases} \quad (2.17)$$

A hipótese (da prova por contradição) $\mu_{CZ}(P) > 1$ obriga $k \geq 1$. Caso $k > 1$, segue que $\Delta(s) > 1$, para todo $s \in [0,1]$, e, consequentemente, $\Delta(f^n(s)) > 1$, para todo $n \geq 1$. Se $1 \in I_\varphi$, então existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $\Delta(s_0) = 1$ e, disto concluímos $\Delta(f^n(s_0)) = 1$, para todo $n \geq 1$, visto que $f(s+1) = f(s) + 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Como a definição do número de rotação ρ independe de $s \in [0,1]$, nos dois casos acima verificamos que

$$\rho(P) = \rho(\varphi) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta(s) + \Delta(f(s)) + \cdots + \Delta(f^{k-1}(s))}{k} \geq 1.$$

Esta contradição mostra que devemos ter $\mu_{CZ}(P) \leq 1$.

($\Leftarrow$) Se $\mu_{CZ}(P) \leq 1$, então (2.17) implica $k \leq 0$. Logo, $\Delta(s) < 1 - \epsilon$, para todo $s \in [0,1]$, para algum $\epsilon > 0$. Logo, $\Delta(f^n(s)) \leq 1 - \epsilon$, para todo $n \geq 1$. Consequentemente, $\rho(P) \leq 1 - \epsilon$, isto é, $\rho(P) < 1$.

(ii) A demonstração de (ii) é análoga ao item (i).

(iii) É consequência imediata de (i) e (ii). De fato, se $\mu_{CZ}(P) \leq 1$, (i) implicaria $\rho(P) < 1$. Reciprocamente, $\rho(P) < 1$ implicaria, pelo item (i), que $\mu_{CZ}(P) \leq 1$. A conclusão da prova segue de (ii) por um raciocínio análogo. ■

Tendo em vista o lema anterior, o objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Se existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$, p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$.*

O lema a seguir, provado no Apêndice B, é item fundamental para a prova da Proposição 2.6. Este resultado fornece um p -disco especial no sentido da Definição B.5 (veja Apêndice B).

Lema 2.7. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Sejam $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ e $u' : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para L . Então existe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L tal que se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $x(\mathbb{R}) \subset u_L(\mathbb{D})$, então $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R})$. Além disso, u_L pode ser escolhido C^0 -próximo de u' .*

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

Pretendemos definir uma família de Bishop $\mathcal{M}$ com condição de contorno em um p -disco especial $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})^8$, para a órbita fechada $L = (y, T_{\min})$. Embora possam existir soluções do problema de Bishop em um p -disco qualquer, a preferência particular por p -discos cuja folheação característica é bem comportada permitirá parametrizar as soluções em $\mathcal{M}$ e escolher sequências (de discos $\tilde{J}$ -holomorfos) em $\mathcal{M}$ não-compactas forçando a existência de órbitas fechadas distintas de L .

2.3.1 Família de Bishop

Seja λ uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Estamos assumindo que existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$ que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, e satisfaz $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. Pelo Lema 2.7, existe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L . De agora em diante, consideramos u_L fixado e denotamos $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$. Lembre que a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ possui uma única singularidade elíptica real e positiva $e^+ \in \hat{\mathcal{D}}$.

A seguir, vamos construir uma *família de Bishop* com condição de contorno no disco $\mathcal{D}$. Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa definida na simpletização $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_\lambda(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (2.18)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times M$. Considere o seguinte problema de valor de contorno no disco $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} \tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M \text{ é um mergulho;} \\ \bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = 0, \quad a(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, \quad u(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\}; \\ \text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Note que o problema acima depende da estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ fixada. Vamos exibir uma estrutura complexa $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$ para a qual o conjunto solução do problema (2.19) é não-vazio. Seja $(\mathcal{V}, \Psi)$ a *carta de Darboux centrada em e^+* dada pelo Lema B.4 (veja o Apêndice B). Isto significa que $\mathcal{V} \subset M$ é um aberto contendo e^+ , $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um mergulho,

$$\Psi(e^+) = (0, 0, 0), \quad \Psi^*(dz + xdy) = \lambda \quad \text{e} \quad \Psi(\mathcal{V} \cap \mathcal{D}) \subset \text{gr}(f),$$

onde $\text{gr}(f) \subset \mathbb{R}^3$ denota o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y) \mapsto f(x, y) = -\frac{1}{2}xy$. Considere $e_1 = \partial_x$ e $e_2 = \partial_y - x\partial_z$ e observe que $\xi_0 = \ker(dz + xdy) = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Defina uma estrutura complexa $J_0 : \xi_0 \rightarrow \xi_0$ numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ satisfazendo as seguintes equações

$$J_0(e_1) = e_2 \quad \text{e} \quad J_0(e_2) = -e_1. \quad (2.20)$$

⁸Denominamos por p -disco especial tanto a aplicação $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ quando a imagem $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$.

É imediato que $J_0 \in \mathcal{J}(dz + xdy)$. Seja $\tilde{J}_0$ a estrutura quase-complexa (em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$) definida pelas equações (2.18). Considere as aplicações $\tilde{v}_\tau = (a_\tau, v_\tau) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ satisfazendo

$$a_\tau(s + it) = \frac{\tau^2}{4}(s^2 + t^2 - 1), \quad v_\tau(s + it) = \left(\tau s, \tau t, -\frac{\tau^2}{2}st \right).$$

Repare que $\partial_s \tilde{v}_\tau + \tilde{J}_0(\tilde{v}_\tau) \cdot \partial_t \tilde{v}_\tau \equiv 0$ e, portanto, $\tilde{v}_\tau$ são discos $\tilde{J}_0$ -holomorfos. Seja

$$J' := \Psi^* J_0 = d\Psi^{-1} \circ J_0 \circ d\Psi$$

e note que $J' \in \mathcal{J}(\lambda|_{\mathcal{V}})$. Pela Observação 1.26, podemos estender J' , definida localmente em $\mathcal{V}$, sobre M de modo que $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja $\tilde{J}'$ a estrutura quase-complexa em $\mathbb{R} \times M$ induzida por J' e (2.18). Defina $u_\tau := \Psi^{-1} \circ v_\tau$, para $0 < \tau \leq 1$, e observe que $\tilde{u}_\tau = (a_\tau, u_\tau) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ são discos $\tilde{J}'$ -holomorfos soluções para (2.19). Note que $u_\tau(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$. Escrevemos $\mathcal{M}_{J'}$ para o conjunto das soluções do problema (2.19), relativo à estrutura complexa $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$, satisfazendo a condição adicional $u(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$. O conjunto $\mathcal{M}_{J'}$ é denominado uma *família de Bishop*.

Observação 2.8. Em geral, dado $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ induzida por J e (2.18), denotamos por $\mathcal{M}_J$ a família de Bishop constituída pelos discos $\tilde{J}$ -holomorfos $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ soluções do problema (2.19) e satisfazendo $u(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$.

Energia de Hofer dos discos na família de Bishop

Seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e suponha que a família de Bishop $\mathcal{M}_J$ seja não-vazia. Lembre que a *energia de Hofer* de um disco $\tilde{J}$ -holomorfo $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é definida por

$$E_H(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\mathbb{D}} \tilde{u}^* d\lambda_\phi \quad (2.21)$$

onde $\Lambda = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' \geq 0\}$ e $\lambda_\phi(a, p) = \phi(a)\lambda(p)$, para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$. É possível verificar que

$$\int_{\mathbb{D}} \tilde{u}^* d\lambda_\phi \leq \left| \int_{\partial\mathbb{D}} u^* \lambda \right| \leq \int_{\mathcal{D}} |d\lambda| < \infty, \quad (2.22)$$

onde a primeira desigualdade segue do Teorema de Stokes. De (2.22), concluímos que a *energia de Hofer*, para todo $\tilde{u} \in \mathcal{M}_J$, satisfaz

$$E_H(\tilde{u}) \leq c(u_L) := \int_{\mathcal{D}} |d\lambda| < \infty.$$

Note que a cota superior $c(u_L)$ depende apenas do p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$.

Transversalidade em relação à folheação característica

Seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e suponha que $\mathcal{M}_J$ seja não-vazia. Vamos provar que o bordo $u(\partial\mathbb{D})$ de um disco de energia finita $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}_J$ intersecta cada folha da folheação característica

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

$\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}} = (\xi \cap T\mathcal{D})^\perp$ transversalmente uma única vez. Isto é consequência da escolha do p -disco especial $\mathcal{D}$ (conforme Lema 2.7) e do *princípio do máximo forte*.

Já observamos que, se $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um disco de energia finita e $s + it$ são coordenadas em $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, a equação $\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = \frac{1}{2}(d\tilde{u} + \tilde{J}(\tilde{u}) \cdot d\tilde{u} \cdot i) = 0$ pode ser reescrita como

$$\begin{cases} a_s = \lambda(u_t) \\ a_t = -\lambda(u_s) \\ \pi u_s + J(u)\pi u_t = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

onde i é a estrutura complexa canônica de $\mathbb{C}$ e $\pi : TM \rightarrow \xi$ é a projeção na direção de X_λ . Fixe arbitrariamente $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}_J$. Note que $\tilde{u}$ é não-constante e, portanto, $a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é não-constante. De (2.23) segue que

$$\Delta a = d\lambda(u)(\pi u_s, \pi u_t) = d\lambda(u)(\pi u_s, J(u)\pi u_s) \geq 0,$$

isto é, a função suave a é *subharmônica*. Como $a|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0$, o *princípio do máximo forte* (veja nota de rodapé 19 na Seção 1.3) implica que

$$\partial_n a(e^{i\theta}) = \frac{d}{dr} \Big|_{r=1} a(re^{i\theta}) > 0,$$

e, portanto, $\lambda(du_{e^{i\theta}}(i\eta(e^{i\theta}))) = da(\eta(e^{i\theta})) > 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, onde $\eta(e^{i\theta})$ é o campo normal sobre $\partial\mathbb{D}$. Consequentemente, $du_{e^{i\theta}}(i\eta(e^{i\theta})) \notin \xi_{u(e^{i\theta})}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Como $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ possui uma única singularidade elíptica real e positiva e^+ e o bordo $\partial\mathcal{D} = u_L(\partial\mathbb{D})$ é transversal à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$, as folhas (linhas de fluxo) de $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ emanam da singularidade e^+ e encontram $\partial\mathcal{D}$ transversalmente em tempo finito. A transversalidade entre $u(\partial\mathbb{D})$ e ξ verificada acima juntamente com $\text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1$ implicam que, para toda folha $l \in \mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$, a interseção entre l e $u(\partial\mathbb{D})$ é única e transversal.

Parametrização induzida por uma folha em $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$

Novamente, fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e suponha que $\mathcal{M}_J$ seja não-vazia. Observamos acima que as soluções $\tilde{u} \in \mathcal{M}_J$ intersectam cada folha da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ transversalmente uma única vez. Fixe uma métrica Riemanniana g em M e seja l uma folha em $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$. Visto que a singularidade e^+ é elíptica real e positiva e o bordo $\partial\mathcal{D}$ é transversal à estrutura de contato, existe uma parametrização $l : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ de l tal que $l(0) = e^+$, $l(1) \in \partial\mathcal{D}$ e o comprimento

$$\tau^* := \ell_0^1(l) = \int_0^1 \sqrt{g\left(\frac{dl}{dt}, \frac{dl}{dt}\right)} dt$$

da folha l é finito. Dado $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}_J$, existe $t(\tilde{u}) \in (0, 1)$ tal que $l(t(\tilde{u}))$ é a única interseção entre l e $u(\partial\mathbb{D})$. Seja $l_{\tilde{u}} := l|_{[0, t(\tilde{u})]}$ a restrição de $l : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ ao intervalo $[0, t(\tilde{u})]$ e considere $\tau(\tilde{u}) := \ell_0^{t(\tilde{u})}(l_{\tilde{u}})$ o comprimento de $l_{\tilde{u}}$ (veja Figura 2.5). É natural definir a função que associa

a cada $\tilde{u} \in \mathcal{M}_J$ o comprimento do segmento $l_{\tilde{u}}$, isto é,

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{M}_J &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &\mapsto \tau(\tilde{u}). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Note que $\tau(\tilde{u}) < \tau^*$, para toda $\tilde{u} \in \mathcal{M}_J$. Veremos adiante que a função τ é suave. A existência de τ será útil na escolha de sequências $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}_J$, $n \in \mathbb{N}$, não-compactas.

Figura 2.5: Definição de $\tau(\tilde{u})$

Transversalidade Automática

Ao apresentarmos soluções para o problema (2.19), fizemos uma escolha particular de estrutura complexa $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$. Veremos nesta subseção que a *transversalidade automática* das soluções de (2.19) permite perturbar a estrutura complexa $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$ e obter $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, distinto de J' , tal que $\mathcal{M}_J$ seja não-vazio. As referências básicas para esta subseção são [1], [19] e [40].

Fixe uma estrutura complexa $J_0 \in \mathcal{J}(\lambda)$ e considere $\tilde{J}_0$ satisfazendo (2.18). Suponha que exista um disco de energia finita $\tilde{w}_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ solução para (2.19) e satisfazendo $w_0(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$. Aqui $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$, onde $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o p -disco fixado no início desta seção. Começaremos construindo um modelo local para uma vizinhança da solução $\tilde{w}_0 \in \mathcal{M}_{J_0}$. Fixe uma métrica Riemanniana g em $\mathbb{R} \times M$ e seja $\exp$ a aplicação exponencial induzida. Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança de $\mathbb{D} \times \{0\}$ em $\mathbb{C}^2$. Considere $\tilde{w}_0$ definida em um disco aberto $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{D} \subset \mathcal{D}$. Note que podemos escolher $\mathcal{U}$ de modo que $\mathcal{U} \cap (\mathbb{C} \times \{0\}) = \mathcal{D}$. Seja

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{U} &\rightarrow \Phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R} \times M \\ (z, w) &\mapsto \exp(\tilde{w}_0(z), w). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Diminuindo $\mathcal{U}$, se necessário, podemos supor que Φ é um difeomorfismo sobre a imagem $\Phi(\mathcal{U})$. Seja $\hat{J}_0 := \Phi^* \tilde{J}_0$ a estrutura quase-complexa induzida. Note que $\Phi^{-1}(\tilde{w}_0(z)) = (z, 0) =: f_0(z)$. É possível provar que $\hat{J}_0(z, 0) = i\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}$, para todo $z \in \mathbb{D}$ (veja [40, Seção 4.1.3]). Repare que se $\tilde{v} : \mathbb{D} \rightarrow \Phi(\mathcal{U})$ é um disco $\tilde{J}_0$ -holomorfo, então $(h, k) = \Phi^{-1} \circ \tilde{v}$ satisfaz

$$(h, k)_s + \hat{J}_0(h, k)(h, k)_t \equiv 0,$$

onde $s + it$ são coordenadas holomorfas em $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Como $\tilde{w}_0(\partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times \mathcal{D}$, onde $\tilde{w}_0$ é o disco de energia finita (na *família de Bishop*) fixado acima, concluímos que $N := \Phi^{-1}(\{0\} \times \mathcal{D})$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

é não-vazio. Fixe $2 < r < \infty$ e defina⁹

$$\mathcal{B} := \{u \in W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2) : u(\partial\mathbb{D}) \subset N \text{ e } u(\mathbb{D}) \subset \mathcal{U}\}.$$

Note que $f_0(z) = (z, 0)$, para todo $z \in \mathbb{D}$, pertence a $\mathcal{B}$. O seguinte resultado é provado em [1]:

Proposição 2.9 ([1], Proposição 9.4.1). *O espaço $\mathcal{B}$ definido acima é uma subvariedade de Banach de $W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ cujo atlas contém uma carta global. Além disso, o espaço tangente em $f_0 \in \mathcal{B}$ é dado por*

$$T_{f_0}\mathcal{B} = \{(h, k) \in W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2) : (h(z), k(z)) \in T_{f_0}N, \text{ para todo } z \in \partial\mathbb{D}\}.$$

Seja Φ a carta definida em (2.25). Considere $\bar{\partial}_{\hat{J}_0} : \mathcal{B} \rightarrow L^r(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ o operador de Cauchy-Riemann dado, nesta carta, por:

$$(h(z), k(z)) \mapsto (h(z), k(z))_s + \hat{J}_0(h(z), k(z))(h(z), k(z))_t.$$

Pelas *Desigualdades de Sobolev* (veja [40, Teorema B.3]), temos que $W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2) \hookrightarrow C^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$, isto é, $W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ admite uma inclusão contínua em $C^1(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$. Isto implica, pela *regularidade de curvas $\tilde{J}_0$ -holomorfas*¹⁰, que $\bar{\partial}_{\hat{J}_0}^{-1}(0)$ é constituído de discos $\hat{J}_0$ -holomorfos $\bar{v} : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{U}$ de classe C^∞ satisfazendo $\bar{v}(\partial\mathbb{D}) \subset N$. É possível provar que os discos $\tilde{J}_0$ -holomorfos $\tilde{v} := \Phi \circ \bar{v} : \mathbb{D} \rightarrow \Phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R} \times M$ são soluções do problema (2.19), isto é, $\tilde{v} \in \mathcal{M}_{J_0}$ (veja [40, Corolário 4.28]). Veremos adiante que $\bar{\partial}_{\hat{J}_0}^{-1}(0)$ é uma variedade 4-dimensional de classe C^1 . Antes disso, considere:

Proposição 2.10 ([1], Proposição 9.4.4). *O operador de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_{\hat{J}_0}$ é de classe C^1 . A linearização $T := D\bar{\partial}_{\hat{J}_0}(f_0) : T_{f_0}\mathcal{B} \rightarrow L^r(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ em $f_0 \in \mathcal{B}$ é*

$$T(h(z), k(z)) = (h_s(z) + ih_t(z) + A(z)k(z), k_s(z) + ik_t(z) + A(z)k(z)),$$

para todo $(h, k) \in T_{f_0}\mathcal{B}$, onde $A, B \in C^\infty(\mathbb{D}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ denota o espaço das aplicações $\mathbb{R}$ -lineares em $\mathbb{C}$.

Como consequência do Teorema de Riemann-Roch (veja [48, Teorema C.1.10]), a linearização $T = D\bar{\partial}_{\hat{J}_0}(f_0)$ do operador de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_{\hat{J}_0}$ em $f_0 \in \mathcal{B}$ é um *operador de Fredholm*. É possível provar, sem qualquer hipótese de genericidade sobre a estrutura complexa $J_0 \in \mathcal{J}(\lambda)$, que o *índice de Fredholm* de T satisfaz $\text{Ind}(T) = 4$ e o núcleo de $T = D\bar{\partial}_{\hat{J}_0}(f_0)$ tem dimensão 4 (veja [19, Seção 2] e [40, Seção 4.1.3]). Isto é o que chamamos de *transversalidade automática* das soluções de (2.19). O fato de que $T = D\bar{\partial}_{\hat{J}_0}(f_0)$ é sobrejetor e o *Teorema da Função Implícita* (veja [48, Teorema A.3.1]) implicam que existe um aberto $\mathcal{W} \subset \mathcal{B}$ tal que $f_0 \in \mathcal{W}$ e $\bar{\partial}_{\hat{J}_0}^{-1}(0) \cap \mathcal{W}$ é uma 4-variedade de classe C^1 , isto é, as soluções em $\mathcal{M}_{J_0}$ próximas de

⁹Lembre que $L^r(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ denota o espaço das (classes de equivalência de) funções $u = (u_1, u_2) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tais que u_l são r -integráveis, $l = 1, 2$, e $W^{1,r}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ é o *espaço de Sobolev* constituído das (classes de equivalência de) funções $u = (u_1, u_2) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^2$ tais que $u \in L^r(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$ e as derivadas fracas $D_z u_l$ existem e são r -integráveis, $l = 1, 2$ (Veja [48, Apêndice B]).

¹⁰**Teorema ([40], Teorema 3.43):** *Sejam (W, J) uma 4-variedade quase-complexa e (Σ, i) uma superfície de Riemann. Se $\tilde{u} : \Sigma \rightarrow W$ é de classe C^1 e satisfaz $\bar{\partial}_J(\tilde{u}) \equiv 0$, então $\tilde{u}$ é de classe C^∞ .*

$\tilde{w}_0$ constituem uma vizinhança 4-dimensional de $\tilde{w}_0$.

Consequências da transversalidade automática

Sejam $J_0 \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\mathcal{V} \subset \mathcal{J}(\lambda)$ um subconjunto tal que $J_0 \in \mathcal{V}$. Suponha que $\mathcal{V}$ admita uma estrutura de variedade de Banach de classe C^k , $k \geq 1$. Assumindo que $\mathcal{M}_{J_0}$ seja não-vazio, fixe $\tilde{w}_0 \in \mathcal{M}_{J_0}$. Seja

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{U} &\rightarrow \Phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R} \times M \\ (z, w) &\mapsto \exp(\tilde{w}_0(z), w)\end{aligned}$$

a carta local definida em (2.25). Nestas coordenadas, seja $\bar{\partial} : \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{B} \rightarrow L^r(\mathbb{D}, \mathbb{C}^2)$, $2 < r < \infty$, o operador de Cauchy-Riemann definido como

$$\left(\hat{J}, (h(z), k(z)) \right) \mapsto (h(z), k(z))_s + \hat{J}(h(z), k(z))(h(z), k(z))_t,$$

onde $\mathcal{V}^*$ denota o conjunto das estruturas quase-complexas $\hat{J} := \Phi^* \tilde{J}$, para todo $J \in \mathcal{V}$, e $\tilde{J}$ é definida pelas equações (2.18). Denote $\hat{J}_0 = \Phi^* \tilde{J}_0$, onde $J_0 \in \mathcal{J}(\lambda)$ foi fixado acima. Lembre que $f_0(z) := (z, 0) = \Phi^{-1}(\tilde{w}_0(z))$, para todo $z \in \mathbb{D}$, e . A *transversalidade automática* revela que $D_2 \bar{\partial}(\hat{J}_0, (z, 0))$ é sobrejetor. Pelo *Teorema da Função Implícita*, é possível provar que existe um aberto $\mathcal{V}_0^* \subset \mathcal{V}^*$ com $\hat{J}_0 \in \mathcal{V}_0^*$ tal que, para todo $\hat{J} \in \mathcal{V}_0^*$, existe $(h, k) \in \mathcal{B}$ satisfazendo $\bar{\partial}(\hat{J}, (h, k)) \equiv 0$. Em outras palavras, para J próximo de J_0 , a família de Bishop relativa à estrutura complexa J é não vazia.

Reparametrizações por biholomorfismos do disco

Seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e suponha que a família de *Bishop* $\mathcal{M}_J$ é não-vazia. Repare que a composição de $\tilde{u} \in \mathcal{M}_J$ com um biholomorfismo do disco $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ satisfaz $\tilde{u} \circ \varphi \in \mathcal{M}_J$. Isto significa que o grupo de biholomorfismos do disco¹¹ $G := G(\mathbb{D})$ age por reparametrização em $\mathcal{M}_J$. A ação de $G := G(\mathbb{D})$ em $\mathcal{M}_J$ é suave, própria e livre. Estas propriedades, o *Teorema da Função Implícita* e a *caracterização dos fibrados principais* (veja [53, Seções 6.1 (c) e (d)]) implicam que $\mathcal{M}_J$ é um G -fibrado principal cuja base é a 1-variedade sem bordo $\mathcal{M}_J/G$. Denotamos por $\Pi : \mathcal{M}_J \rightarrow \mathcal{M}_J/G$ a projeção de $\mathcal{M}_J$ sobre $\mathcal{M}_J/G$ induzida pela ação de G .

A seguir, apresentamos algumas propriedades da função τ definida em (2.24). Para isto, considere a seguinte versão do *Teorema da Função Implícita* provada por Hofer em [19]. Este resultado também é uma consequência da *transversalidade automática* das soluções de (2.19).

Teorema 2.11 ([19], Teorema 17). *Seja $\tilde{w} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um mergulho solução de (2.19). Então existe um mergulho suave $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que*

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{\tilde{J}_0}(\Psi_\tau) &= 0, \text{ onde } \Psi_\tau(z) = \Psi(\tau, z), \\ \Psi(0, \cdot) &= \tilde{w}, \quad \Psi(\tau, \partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times (\mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\}),\end{aligned}$$

¹¹Seguindo [50], denotamos por $G(\mathbb{D})$ o grupo dos biholomorfismos do disco.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

onde e^+ é a única singularidade elíptica real e positiva em $\mathcal{D}$. Além disso, a família a 1-parâmetro $\tau \rightarrow \Psi_\tau(\mathbb{D})$ é única, a menos de reparametrização.

O teorema anterior significa que, dado $\tilde{w} \in \mathcal{M}_J$, se $\tilde{t} = \Pi(\tilde{w})$ e $s : \mathcal{M}_J/G \rightarrow \mathcal{M}_J$ é uma seção do fibrado $\mathcal{M}_J \rightarrow \mathcal{M}_J/G$ satisfazendo $s(\tilde{t}) = \tilde{w}$, então existe um aberto $U \subset \mathcal{M}_J/G$, $\tilde{t} \in U$, tal que a aplicação $\Psi : U \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por $(t, z) \mapsto s(t)(z)$ é um mergulho em $\mathbb{R} \times M$. Observe que, em particular, o Teorema 2.11 implica que a função τ definida em (2.24) é suave. Além disso, se $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{M}_J$ são tais que $\Pi(\tilde{u}), \Pi(\tilde{v}) \in U \subset \mathcal{M}_J/G$ e $\Pi(\tilde{u}) \neq \Pi(\tilde{v})$, então ou $\tau(\tilde{u}) > \tau(\tilde{v})$ ou $\tau(\tilde{u}) < \tau(\tilde{v})$. Observação análoga é válida se considerarmos uma componente conexa $\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}_J/G$. Mais precisamente, se $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{M}_J$ satisfazem $\Pi(\tilde{u}), \Pi(\tilde{v}) \in \mathcal{Y}$ e $\Pi(\tilde{u}) \neq \Pi(\tilde{v})$, o Teorema 2.11 implica que ou $\tau(\tilde{u}) > \tau(\tilde{v})$ ou $\tau(\tilde{u}) < \tau(\tilde{v})$.

2.3.2 Construção do disco furado de energia finita

Lembre que λ é uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Estamos supondo que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Nesta seção, vamos construir um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$, onde $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$, mergulhado cujo limite assintótico em z_0 é uma órbita fechada contrátil $P_0 = (x_0, T_0)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Veremos na Seção 2.3.3 que P_0 é a órbita fechada da tese da Proposição 2.6.

Seja $L = (y, T_{\min})$ a órbita fechada p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, conforme enunciado da Proposição 2.6. Lembre que fixamos na Seção 2.3.1 um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L e denotamos $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$. Nosso primeiro passo é escolher uma estrutura complexa genérica. Na Seção 1.3.4, seguindo [7], [27], verificamos que existe um conjunto residual $\mathcal{J}_{\text{gen}} \subset \mathcal{J}(\lambda)$ tal que se $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}$ são válidos os seguintes dois fatos:

(i) se $\Gamma \subset \mathring{\mathbb{D}}$ é não-vazio e finito, $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um disco furado de energia finita (imerso) que é um mergulho perto do bordo e satisfaz

$$\begin{cases} a(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, & u(\partial\mathbb{D}) \subset \mathring{\mathcal{D}} \setminus \{e^+\}; \\ \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} u^* d\lambda > 0; \\ \text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1; \\ \text{todo } z \in \Gamma \text{ é um furo negativo,} \end{cases} \quad (2.26)$$

e, para todo $z \in \Gamma$, o limite assintótico de $\tilde{u}$ em z é $P_z = (x_z, T_z)$, então

$$\text{Ind}(\tilde{u}) = \#\Gamma - \sum_{z \in \Gamma} \mu_{CZ}(P_z) + 1 \geq 0;$$

(ii) se $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ é finito, $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma esfera furada de energia finita, *somewhere injective* com $\pi \cdot dw$ não identicamente nulo, limites assintóticos contráteis e com um único furo positivo em ∞ , então

$$\text{Ind}(\tilde{w}) = \mu^+ - \mu^- - 1 + \#\Gamma' \geq 1,$$

onde μ^+ denota o índice (de Conley-Zehnder) do furo positivo e μ^- a soma dos índices dos furos negativos.

Já observamos que existe $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$ tal que a família de Bishop $\mathcal{M}_{J'}$ com condição de contorno em $\mathcal{D}$ é não-vazia. A transversalidade automática das soluções em $\mathcal{M}_{J'}$ permite perturbar J' e obter $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}$ de maneira que $\mathcal{M}_J$ seja não-vazia e as condições (i), (ii) acima sejam satisfeitas. *Durante o resto desta seção, vamos supor $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}$ fixado. Por simplicidade, deixaremos J genérico subentendido e a família de Bishop, relativa à estrutura complexa J , com condição de contorno em $\mathcal{D}$, será denotada apenas por $\mathcal{M}$.* Lembre que, para todo $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$, temos $u(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$. Repare que se J for escolhido próximo de J' ainda existem discos ($\tilde{J}$ -holomorfos) de energia finita em $\mathcal{M}$ com condição de contorno numa vizinhança da singularidade elíptica real e positiva $e^+ \in \mathring{\mathcal{D}}$. Seja $\tilde{w}_0 \in \mathcal{M}$ próximo de e^+ . Note que $\tilde{w}_0$ satisfaz

$$\tilde{w}_0(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset. \quad (2.27)$$

Pelo Teorema 2.11, existe uma componente conexa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{M}/G$ tal que $\Pi(\tilde{w}_0) \in \mathcal{Y}$, onde $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ é a projeção resultante do quociente de $\mathcal{M}$ pela ação de $G := G(\mathbb{D})$. A componente conexa $\mathcal{Y}$ contém discos de energia finita $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ arbitrariamente próximos de e^+ . É possível provar que todos os elementos em $\mathcal{Y}$ satisfazem (2.27). Isto é o conteúdo do seguinte teorema.

Teorema 2.12 ([35], Teorema 6.12). *Seja $\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}/G$ a componente conexa escolhida acima. Seja $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$ uma sequência tal que $\Pi(\tilde{u}_n) \in \mathcal{Y}$. Se existe uma aplicação suave $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{u}$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R} \times M)$, então $\tilde{u}$ satisfaz $\tilde{u}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$.*

A seguir, vamos escolher uma sequência $\tilde{u}_n \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})$, $n \in \mathbb{N}$, não-compacta. O termo não-compacta significa que existem $z \in \mathbb{D}$ e uma sequência $z_k \in \mathbb{D}$ tais que $z_k \rightarrow z$ e

$$|d\tilde{u}_{n_k}(z_k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty.$$

Na escolha de $\tilde{u}_n$, vamos usar a função τ definida em (2.24) restrita à componente $\Pi^{-1}(\mathcal{Y})$. Lembre que, dada uma métrica Riemanniana g em M e uma folha $l \in \mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$, a função $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ associa a cada $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$ o comprimento $\tau(\tilde{u})$, medido sobre $l \in \mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$, entre a singularidade e^+ e a interseção $l \cap u(\partial\mathbb{D})$. Seja $\tau_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ o supremo destes comprimentos, isto é,

$$\tau_{\max} := \sup_{\tilde{u} \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})} \tau(\tilde{u}). \quad (2.28)$$

Perceba que $\tau_{\max} \leq \tau^*$, onde τ^* é o comprimento da folha $l \in \mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$ relativo à métrica g . Seja $l : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ uma parametrização de l tal que $l(0) = e^+$ e $l(1) \in \partial\mathcal{D}$. Podemos supor, a menos de uma composição com uma rotação, que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} u_L^{-1}(l(t)) = 0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

onde $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \partial\mathbb{D}$ via $t \mapsto e^{2\pi it}$. Isto é consequência do fato de $u_L : \mathring{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D} \rightarrow M$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

ser um mergulho (lembre que u_L é um p -disco especial). Denote $l_1 := l$ e escolha l_i e l_{-1} outras duas folhas da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ de maneira que $\{l_1, l_i, l_{-1}\}$ está ordenado no sentido positivo sobre o bordo¹². Podemos supor que, se $l_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$, $l_{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ são parametrizações de l_i , l_{-1} , respectivamente, tais que

$$l_k(0) = e^+ \quad \text{e} \quad l_k(1) \in \partial\mathcal{D}, \quad k = i, -1,$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} u_L^{-1}(l_i(t)) &= 1/4 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} u_L^{-1}(l_{-1}(t)) &= 1/2 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Observe que esta escolha implica que $\mathring{l}_1$, $\mathring{l}_i$, $\mathring{l}_{-1}$ são duas a duas distintas, onde $\mathring{l}_k := l_k(0, 1)$, $k \in \{1, i, -1\}$, é a folha l_k sem os extremos.

Seja $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$ uma sequência e escolha discos de energia finita

$$\tilde{u}'_n = (a'_n, u'_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y}) \text{ satisfazendo } \tau(\tilde{u}_n) = \tau_n. \quad (2.29)$$

Existem reparametrizações $\phi_n \in G = G(\mathbb{D})$, $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$u'_n \circ \phi_n(k) \in l_k, \quad \text{para todo } k \in \{1, i, -1\}. \quad (2.30)$$

Denote $\tilde{u}_n := \tilde{u}'_n \circ \phi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A condição (2.30) nos permite supor que os pontos de *bubbling-off* não estão no bordo, isto é,

Teorema 2.13 ([35], Teorema 6.13). *Seja $\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}/G$ a componente conexa escolhida acima. Seja $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$ tal que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n\} > 0$. Se $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})$ é uma sequência satisfazendo $\tau(\tilde{u}_n) = \tau_n$ e a condição (2.30), então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1\}$, temos que $\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ z \in A_\epsilon}} |d\tilde{u}(z)| < \infty$.*

De agora em diante, consideramos a sequência $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$, onde $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n\} > 0$, fixada e seja $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{M}$ a sequência satisfazendo $\tau(\tilde{u}_n) = \tau_n$ e a condição (2.30). Seja

$$\tilde{\Gamma} = \{z \in \mathbb{D} : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ e } z_k \rightarrow z \text{ tais que } |d\tilde{u}_{n_k}(z_k)| \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \infty\} \quad (2.31)$$

o conjunto dos pontos de *bubbling-off* de $\tilde{u}_n$. Lembre que a $d\lambda$ -área $A(\mathcal{D})$ do p -disco especial $\mathcal{D}$ é definida como

$$A(\mathcal{D}) = \int_{\mathbb{D}} |u_L^* d\lambda|, \quad (2.32)$$

onde $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o p -disco especial fixado na seção anterior. Note que $0 < A(\mathcal{D}) < \infty$ e $\int_{\mathbb{D}} u^* d\lambda \leq A(\mathcal{D})$, para toda $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$.

¹²Definimos o *sentido positivo sobre o bordo* como o sentido tal que $\int_{\partial\mathbb{D}} u_L^* \lambda > 0$.

Lema 2.14 ([19, 21, 23, 35, 39, 40]). *Seja $\tilde{u}_n$ a sequência de discos de energia finita definida acima. Então existe uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ de $\tilde{u}_n$, um conjunto $\Gamma_0 \subset \mathring{\mathbb{D}}$ finito e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$.*

Demonstração. Lembre a definição de $\tilde{\Gamma}$ em (2.31). Note que o Teorema 2.13 implica $\tilde{\Gamma} \subset \mathring{\mathbb{D}}$. Se $\tilde{\Gamma} = \emptyset$, o Teorema 3.44¹³ em [40] mostra que existe uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ de $\tilde{u}_n$ e um disco de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R} \times M)$. Neste caso, $\Gamma_0 = \emptyset$. Suponhamos que $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$ e seja $z_1 \in \tilde{\Gamma}$. Pelo Teorema 1.54, existem $\tilde{T}_1 \in \text{Per}(\lambda)$, onde

$$\text{Per}(\lambda) := \{T \in \mathbb{R}_+^* : T \text{ é período de alguma } P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)\}, \quad (2.33)$$

e sequências $n_k \rightarrow \infty$, $r_k \rightarrow 0^+$ tais que

$$\int_{B_{r_k}(z_0)} u_{n_k}^* d\lambda \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{T}_1. \quad (2.34)$$

Por abuso de notação, denote a subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ apenas por $\tilde{u}_n$. Seja Γ_1 o conjunto dos pontos de *bubbling-off* da nova sequência $\tilde{u}_n$. Se $\Gamma_1 = \{z_1\}$, pelo Teorema 3.44 em [40], existem uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \{z_1\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \{z_1\}, \mathbb{R} \times M)$. Neste caso, $\Gamma_0 = \{z_1\}$. Por outro lado, se $\Gamma_1 \setminus \{z_1\} \neq \emptyset$, dado $z_2 \in \Gamma_1 \setminus \{z_1\}$, novamente existem $\tilde{T}_2 \in \text{Per}(\lambda)$ e sequências $n_k \rightarrow \infty$, $r_k \rightarrow 0^+$ tais que

$$\int_{B_{r_k}(z_2)} u_{n_k}^* d\lambda \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{T}_2. \quad (2.35)$$

De maneira análoga, denote a subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ apenas por $\tilde{u}_n$ e seja Γ_2 o conjunto dos pontos de *bubbling-off*. Se $\Gamma_2 = \{z_1, z_2\}$, então existem uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \{z_1, z_2\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \{z_0, z_1\}, \mathbb{R} \times M)$. Neste caso, $\Gamma_0 = \{z_1, z_2\}$. No entanto, se $\Gamma_2 \setminus \{z_1, z_2\} \neq \emptyset$, existem $z_3 \in \Gamma_2 \setminus \{z_1, z_2\}$, $\tilde{T}_3 \in \text{Per}(\lambda)$ e sequências $n_k \rightarrow \infty$, $r_k \rightarrow 0^+$ tais que

$$\int_{B_{r_k}(z_3)} u_{n_k}^* d\lambda \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{T}_3. \quad (2.36)$$

Este procedimento permite extrair uma nova subsequência de $\tilde{u}_n$ de modo análogo ao anterior. Procedendo indutivamente, vemos que para cada $z_i \in \Gamma_{i-1} \setminus \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$, obtemos uma (sub)sequência $\tilde{u}_n$ tal que ou $\Gamma_i = \{z_1, \dots, z_i\}$ ou $\Gamma_i \setminus \{z_1, \dots, z_i\} \neq \emptyset$. Sabemos que a $d\lambda$ -energia

¹³**Teorema** (Versão do Teorema 3.44 em [40]): Seja $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$ tal que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_n\} > 0$. Suponha que $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})$ é uma sequência em $\mathcal{M}$ satisfazendo $\tau(\tilde{u}_n) = \tau_n$ e existem $A \subset \mathbb{D}$, $K \subset \mathbb{R} \times M$ compactos tais que $\tilde{u}_n(A) \subset K$, quando n é suficientemente grande. Se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{z \in A \\ n \in \mathbb{N}}} |d\tilde{u}_n(z)| < c,$$

então existem uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ e uma aplicação $\tilde{u} : A \rightarrow \mathbb{R} \times M$ de classe C^∞ satisfazendo $\bar{\partial}_{\tilde{J}}(u) = 0$ tais que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}$ na topologia usual de $C^\infty(A, \mathbb{R} \times M)$, quando $k \rightarrow +\infty$.

de $\tilde{u}_n$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{D}} u_n^* d\lambda \leq A(\mathcal{D}), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

Observe que cada z_i , conforme (2.34), (2.35) e (2.36), consome uma quantidade estritamente positiva de $d\lambda$ -energia. De (2.37) segue que existe $i_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $\Gamma_{i_0} = \{z_1, \dots, z_{i_0}\}$. Denotando $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_{i_0}\} \subset \mathring{\mathbb{D}}$, existem uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$. ■

Durante o resto desta seção, consideramos $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita obtido no lema anterior. Nosso próximo objetivo é provar o seguinte resultado:

Proposição 2.15. *Seja $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita conforme Lema 2.14. Então $\tilde{u}_0$ é um mergulho satisfazendo as condições do problema (2.26). Além disso, $\#\Gamma_0 = 1$ e, se $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ no único furo negativo, então P_0 é contrátil e satisfaz $\mu_{CZ}(P_0) = 2$.*

A prova da proposição acima será dividida nos Lemas 2.16, 2.20, 2.23, 2.24 e 2.25.

Lema 2.16. *Para todo $z \in \Gamma_0$, z é um furo (não-removível) negativo de $\tilde{u}_0$.*

Demonstração. Seja $z \in \Gamma_0$ um furo de $\tilde{u}_0$. Como existem $n_k \rightarrow \infty$ e $z_k \rightarrow z$ tais que $|d\tilde{u}_{n_k}(z_k)| \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \infty$, então $z \in \Gamma_0$ é não-removível. Pela Seção 1.3, sabemos que o *princípio do máximo forte* implica $a|_{\mathring{\mathbb{D}}} < 0$, para todo $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$, e, portanto $a(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} -\infty$. ■

Análise de *bubbling-off*

O objetivo desta subseção é esboçar uma prova de que estão associadas a cada $z \in \Gamma_0$ uma *sequência germinante* e uma *árvore de bubbling-off*. Este fato é bastante conhecido e fundamental em [21], [23], [33], [34], [35] e [39]. Começamos recordando alguns conceitos. Lembre que estamos assumindo a não-degenerescência da forma de contato λ . Seja $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ a estrutura complexa (genérica) fixada acima¹⁴. Seja $C > 0$ e escolha um número $\sigma(C)$ tal que

$$0 < \sigma(C) < \min\{\sigma_1, \sigma_2(C)\}, \quad (2.38)$$

onde $\sigma_1, \sigma_2(C)$ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \inf\{T \in \mathbb{R}_+^* : T \text{ é um período de alguma } P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)\}, \\ \sigma_2(C) &:= \inf\{|T - T'| : T, T' \text{ são períodos distintos e } T, T' \leq C\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Note que $\sigma_2(C) > 0$, visto que λ é não-degenerada, e, portanto, $\sigma(C)$ está bem-definido. Sejam $R_n \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $R_n \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \infty$ e considere uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$, onde $B_{R_n}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}$, tal que

$$E_H(\tilde{v}_n) \leq C, \quad \int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} v_n^* d\lambda \leq \sigma(C), \quad (2.40)$$

¹⁴Na verdade, esta subseção é independente da genericidade da estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$.

para todo $n \in \mathbb{N}$, e tal que

$$\{b_n(2)\} \text{ é uniformemente limitada.} \quad (2.41)$$

Uma sequência $\tilde{v}_n := (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas satisfazendo (2.40) e (2.41) é chamada uma *sequência germinante*.

Lembre que em (2.29) escolhemos uma sequência de discos de energia finita $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$ com condição de contorno em $\mathcal{D}$, onde $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$ e $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um p -disco especial para a órbita fechada $L = (y, T_{\min})$. Pelo Lema 2.14, existe uma subsequência de discos de energia finita $\tilde{u}_{n_k} \in \mathcal{M}$, um conjunto $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ finito e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$. Por simplicidade, vamos denotar a subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ apenas como $\tilde{u}_n$. Fixe um furo negativo $z_0 \in \Gamma_0$ e seja $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ a única órbita fechada tal que $\tilde{u}_0$ é assintótica a P_0 em z_0 . Recorde que a massa $m(z_0)$ do furo z_0 é definida por

$$m(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon(z_0), \quad \text{onde } m_\epsilon(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} u_n^* \lambda,$$

e $\partial B_\epsilon(z_0)$ está orientado no sentido anti-horário. Note que $\epsilon \mapsto m_\epsilon(z_0)$ é não-decrescente. Isto segue do fato de $\tilde{u}_n$ ser $\tilde{J}$ -holomorfa, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $C \geq \mathcal{A}(\mathcal{D})$, onde $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ é a $d\lambda$ -área do p -disco especial $\mathcal{D}$ definida em (2.32). Fixe $\epsilon > 0$ tal que

$$m_\epsilon(z_0) - m(z_0) \leq \frac{\sigma(C)}{2}, \quad (2.42)$$

onde $\sigma(C) \in \mathbb{R}_+^*$ satisfaz (2.38). Escolha $z_n \in \overline{B_\epsilon(z_0)}$ satisfazendo

$$a_n(z_n) = \inf_{z \in B_\epsilon(z_0)} a_n(z). \quad (2.43)$$

Como z_0 é um furo negativo, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$ e $a_n|_K$ é limitado, para todo compacto $K \subset B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$, segue que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$. Defina δ_n tal que

$$\int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} u_n^* d\lambda = \sigma(C). \quad (2.44)$$

Note que δ_n está bem-definido e isto resulta de $m_\epsilon(z_0) \geq m(z_0) \geq \sigma_1 > \sigma(C)$, onde σ_1 é definido em (2.39). Afirmamos que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. De fato, suponha que exista uma subsequência δ_{n_k} tal que $\delta_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \delta > 0$. Neste caso, podemos escolher $0 < \epsilon' < \delta$ e

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(C)}{2} &\geq m_\epsilon(z_0) - m(z_0) \geq m_\epsilon(z_0) - m_{\epsilon'}(z_0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_{\epsilon'}(z_0)} u_{n_k}^* d\lambda \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_\delta(z_{n_k})} u_{n_k}^* d\lambda = \sigma(C). \end{aligned}$$

Esta contradição mostra que $\delta_n \rightarrow 0^+$. Escolha $R_n \rightarrow +\infty$ tal que $B_{R_n \delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(z_0)$ e defina uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas

$$\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M \quad (2.45)$$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

tal que

$$b_n(z) = a_n(z_n + \delta_n z) - a_n(z_n + 2\delta_n), \quad v_n(z) = u_n(z_n + \delta_n z). \quad (2.46)$$

Usando a mudança de coordenadas $z \mapsto z_n + \delta_n z$ e o fato de que $B_{R_n\delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(z)$, vemos que (2.44) e (2.46) implicam as seguintes desigualdades:

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} v_n^* d\lambda \leq \sigma(C), \quad (2.47)$$

$$\int_{B_{R_n}(0)} v_n^* d\lambda \leq \int_{B_\epsilon(z_0)} u_n^* d\lambda. \quad (2.48)$$

Lembre que a *energia de Hofer* da curva $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é definida por

$$E_H(\tilde{v}_n) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{B_{R_n}(0)} \tilde{v}_n^* d\lambda_\phi,$$

onde $\Lambda = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' \geq 0\}$ e $\lambda_\phi(a, p) = \phi(a)\lambda(p)$, para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$. Portanto,

$$E_H(\tilde{v}_n) \leq E_H(\tilde{u}_n) \leq C, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.49)$$

Como $b_n(2) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue de (2.47) e (2.49) que a sequência $\tilde{v}_n$ definida em (2.46) é uma sequência germinante. A seguir, construímos um limite para $\tilde{v}_n$.

Lema 2.17. *Seja $\tilde{v}_n$ a sequência germinante definida em (2.46). Então existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita e não-constante $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tais que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M)$. Além disso, $\tilde{v}$ possui um único furo positivo em ∞ e Γ' é o conjunto dos furos negativos.*

Demonstração. Pelo Lema C.2 (no Apêndice C), existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tais que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M)$. Precisamos apenas verificar que $\tilde{v}$ é não-constante. Note que isto implicará, novamente pelo Lema C.2, que $\tilde{v}$ possui um único furo positivo em ∞ e Γ' é o conjunto dos furos negativos. Suponha que $\Gamma' \neq \emptyset$, então existe pelo menos um furo negativo $z' \in \Gamma'$ e isto significa que $\lim_{z \rightarrow z'} b(z) = -\infty$. Portanto, $\tilde{v}$ é não-constante. Se $\Gamma' = \emptyset$, é suficiente verificar que $\int_{\mathbb{C}} v^* d\lambda > 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} v^* d\lambda &\geq \int_{\mathbb{D}} v^* d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} v_n^* d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\delta_n}(z_n)} u_n^* d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(z_0)} u_n^* d\lambda - \int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} u_n^* d\lambda \\ &= m_\epsilon(z_0) - \sigma(C) \geq \sigma_1 - \sigma(C) > 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (2.44) e $\sigma(C)$, σ_1 são definidos, respectivamente, em (2.38) e (2.39). Isto prova que $\tilde{v}$ é não-constante também no caso $\Gamma' = \emptyset$. ■

No Apêndice C, definimos a noção de árvore de *bubbling-off*¹⁵. Lembre que, por sim-

¹⁵Lembre que uma *árvore de bubbling-off* associada a uma sequência germinante $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ é um

plicidade, as esferas furadas de energia finita numa árvore de *bubbling-off* são denotadas por $\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M$, onde $\Gamma_q \subset \mathbb{C}$ é finito e corresponde aos furos negativos de $\tilde{w}_q$ e ∞ é o único furo positivo. No Apêndice C, apresentamos um esboço da demonstração de que *a toda sequência germinante $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ com limite não-constante está associada uma árvore de bubbling-off* (veja Proposição C.5). Denote por $\mathfrak{F} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M : q \text{ é um vértice de } T\}$ a árvore de *bubbling-off* associada à sequência germinante $\tilde{v}_n$ (com limite não-constante definida em (2.45) e (2.46)), e ao limite $\tilde{v}$. Por definição, $\mathfrak{F}$ está modelada numa árvore finita $T = (V, r, E)$ e $\tilde{w}_r = \tilde{v}$. Note que a Proposição C.5 implica também que

$$E_H(\tilde{w}_q) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E_H(\tilde{v}_n) \leq C, \text{ para todo } q \in V.$$

Denotamos por $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ o conjunto das órbitas fechadas $P = (x, T)$ tais que P é limite assintótico de alguma esfera furada de energia finita $\tilde{w}_q \in \mathfrak{F}$. Verificamos, no Apêndice C, que $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$. A prova deste fato consiste simplesmente em usar as projeções em M das esferas furadas de energia finita contidas em $\mathfrak{F}$ para construir discos contínuos para as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$. Estes discos são chamados *discos induzidos pela árvore de bubbling-off*. Para as nossas aplicações neste capítulo, a existência de tais discos é útil somente no sentido de que garante que as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ são contráteis. Conforme já observamos, os índices μ_{CZ} , ρ de órbitas fechadas contráteis $P = (x, T)$ independe do disco contínuo $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $v(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Lembre que isto é consequência da hipótese $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$.

Em vista das observações acima, o resultado a seguir traduz para o nosso contexto o Lema C.9 e o Corolário C.10 do Apêndice C. No enunciado abaixo, $\pi : TM \rightarrow \xi$ denota a projeção na direção do campo de Reeb.

Lema 2.18. *Seja $\tilde{v}_n$ a sequência germinante com limite não-constante $\tilde{v}$ definida em (2.45) e (2.46). Seja $\mathfrak{F}$ uma árvore de bubbling-off associada a $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, então $\mu_{CZ}(P) \geq 2$. Além disso, se $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma esfera furada de energia finita*

conjunto finito de esferas furadas ($\tilde{J}$ -holomorfas) de energia finita

$$\mathfrak{F} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_q \rightarrow \mathbb{R} \times M : q \text{ é um vértice de } T\}$$

modelada numa árvore finita $T = (V, r, E)$, onde V é o conjunto dos vértices, r é um vértice especial, chamado raiz, e E é o conjunto de arestas, orientado emanando da raiz r , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) cada $\tilde{w}_q$, $q \in V$, é uma esfera furada de energia finita e não-constante com um único furo positivo em ∞ e um número finito de furos negativos. Além disso, se $q \neq r$, $\tilde{w}_q$ não é um cilindro ($\tilde{J}$ -holomorfo) trivial sobre uma órbita fechada de Reeb;
- (ii) as arestas $\mathfrak{e} \in E$ partindo de um vértice $q \in V$ estão em bijeção com os furos negativos de $\tilde{w}_q$. Se $\mathfrak{e} \in E$ é uma aresta com extremidades em q, q' , orientada de q para q' , e z é um furo negativo correspondendo à aresta $\mathfrak{e}$, então o limite assintótico P_z de $\tilde{w}_q$ em z coincide com o limite assintótico P_∞ de $\tilde{w}_{q'}$ no furo positivo em ∞ ;
- (iii) Existe uma subsequência de $\tilde{v}_n$, ainda denotada por $\tilde{v}_n$, tal que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{w}_r$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_r, \mathbb{R} \times M)$. Para cada $q \neq r$, existem sequências $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{w}_q \text{ na topologia de } C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_q, \mathbb{R} \times M).$$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

contida em $\mathfrak{F}$ satisfazendo $\pi \cdot dw \equiv 0$, $\#\Gamma \geq 2$ e o limite assintótico no único furo positivo em ∞ é a $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$, então $\mu_{CZ}(P_\infty) \geq 3$.

Lembre que fixamos (arbitrariamente) um $z_0 \in \Gamma_0$, onde Γ_0 é o conjunto (finito) dos furos negativos do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ (conforme Lema 2.14). Nosso último objetivo nesta subseção é provar que, se $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em $z_0 \in \Gamma_0$, então P_0 é o limite assintótico no furo positivo em ∞ da esfera furada de energia finita e não-constante $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$, conforme Lema 2.17. Em particular, $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$ e, pelo Lema 2.18, $\mu_{CZ}(P_0) \geq 2$.

Lema 2.19 ([21], [23], [24], [33], [34], [35], [39]). *Sejam $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita conforme Lema 2.14, $z_0 \in \Gamma_0$ um furo negativo de $\tilde{u}_0$ e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 . Sejam $\tilde{v}_n$ a sequência germinante definida em (2.45) e (2.46), $\tilde{v}$ o limite (não-constante) de $\tilde{v}_n$ obtido no Lema 2.17 e $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ no furo positivo em ∞ . Então $P_0 = P_\infty$, isto é, o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 coincide com o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ∞ . Em particular, $\mu_{CZ}(P_0) \geq 2$.*

Demonstração. A demonstração deste lema é análoga à prova da Afirmação C.7. ■

Conclusão da prova da Proposição 2.15

Agora vamos voltar à prova da Proposição 2.15. Verificaremos nesta subseção que $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$, conforme Lema 2.14, é um disco furado de energia finita mergulhado e solução do problema (2.26). Veremos também que $\#\Gamma_0 = 1$ e, se $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ no único furo negativo, então $\mu_{CZ}(P_0) = 2$.

Seja $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um disco $\tilde{J}$ -holomorfo. Lembre que $\mathcal{S}(\tilde{u}) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \setminus \Delta : \tilde{u}(z_1) = \tilde{u}(z_2)\}$ denota o conjunto das auto-interseções de $\tilde{u}$, onde $\Delta := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} : z_1 = z_2\}$ é a diagonal de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, e $\mathcal{Z}(\tilde{u}) := \{z \in \mathbb{D} : d\tilde{u}(z) = 0\}$ é o conjunto dos pontos críticos de $\tilde{u}$.

Lema 2.20. *O conjunto Γ_0 dos furos negativos do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é não-vazio.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $\Gamma_0 = \emptyset$. Observe que, neste caso, pelo Lema 2.14, a convergência $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ é na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R} \times M)$. A Proposição 2.12 mostra que $\tilde{u}_0(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$, onde $L = (y, T_{\min})$ é a órbita fechada, p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, conforme enunciado da Proposição 2.6. Note que $\tilde{u}_0(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$ implica $\text{wind}(u_0(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1$. Pelo Lema 1.56, temos que $\tilde{u}_0$ é um mergulho próximo do bordo, isto é, existe $\epsilon > 0$ e $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{D} : 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1\}$ tal que $\tilde{u}_0|_{A_\epsilon} : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é mergulho. Repare que $\tilde{u}_0^{-1}(\tilde{u}_0(A_\epsilon)) = A_\epsilon$. Isto revela que os conjuntos $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$ e $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$ estão necessariamente contidos em $\mathring{\mathbb{D}}$. É possível provar que $\#\mathcal{S}(\tilde{u}_0) < \infty$ (veja [49, Lema 5.3]). Como os pontos críticos são isolados (veja [26, Lema 4.1]), também temos que $\#\mathcal{Z}(\tilde{u}_0) < \infty$. Sabemos que se $\mathcal{S}(\tilde{u}_0) \neq \emptyset$ ou $\mathcal{Z}(\tilde{u}) \neq \emptyset$, então $\text{Int}(\tilde{u}_0) > 0$, onde $\text{Ind}(\tilde{u}_0)$ é o número de interseção (generalizado) introduzido por McDuff em [49] (veja também Seção 1.3). Se tivéssemos $\text{Int}(\tilde{u}_0) > 0$, o Lema 1.61 mostraria que $\text{Int}(\tilde{u}_n) > 0$, para n suficientemente

grande. Note que isto contradiz o fato de $\tilde{u}_n$ ser mergulho, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\mathcal{S}(\tilde{u}_0) = \emptyset$ e $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0) = \emptyset$ e disto segue que $\tilde{u}_0$ é mergulho. Em particular, $\tilde{u}_0 \in \mathcal{M}$. Seja $\mathcal{Y}$ a componente conexa de $\mathcal{M}/G$ tal que $\Pi(\tilde{u}_n) \in \mathcal{Y}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lembre que $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ é a projeção induzida pela ação por reparametrização dos biholomorfismos do disco $G = G(\mathbb{D})$. Pela convergência $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$, temos que $\Pi(\tilde{u}_0) \in \mathcal{Y}$. Note que também temos $\tau(\tilde{u}_0) = \tau_{\max}$. Pelo Teorema 2.11, existe $\epsilon > 0$ e um mergulho $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\bar{J}}(\Phi_\tau) &= 0, \text{ onde } \Phi_\tau(z) = \Phi(\tau, z), \\ \Phi(0, \cdot) &= \tilde{u}_0, \quad \Phi(\tau, \partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times (\mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.12, concluímos que $\Phi_\tau(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$, para todo $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$. Acabamos de provar que existe um disco de energia finita $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ na família de Bishop $\mathcal{M}$ tal que $\tilde{u} \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})$ e $\tau(\tilde{u}) > \tau_{\max}$, o que contradiz a definição de $\tau_{\max}$. Portanto, $\Gamma_0 \neq \emptyset$. ■

Lema 2.21. *A $d\lambda$ -energia $\int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0} u_0^* d\lambda$ do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é não-nula.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que $\pi \cdot du_0 \equiv 0$. Então existe uma trajetória de Reeb $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $u_0(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \subset x(\mathbb{R})$. Como $\tilde{u}_0$ é não-constante, a trajetória x é periódica e $x(\mathbb{R}) = u_0(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$ e $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o p -disco especial para L fixado na Seção 2.3.1. Por construção, $\mathcal{D}$ não admite outras órbitas fechadas além de $L^p = (y, pT_{\min}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Consequentemente, $u_0(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) = y(\mathbb{R})$ e, em particular,

$$u_0(\partial\mathbb{D}) = y_{pT_{\min}}([0, 1]), \text{ onde } y_{pT_{\min}}(t) := y(pT_{\min}t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Note que isto implica $\deg(u_0|_{\partial\mathbb{D}}) = p$, uma vez que L é um p -nó trivial. Seja $F_P : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ a aplicação dada por $z = e^{2\pi(s+it)} \mapsto (T_{\min}s, y(T_{\min}t))$. Pelo Lema 1.60, existe uma função holomorfa $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\tilde{u}_0 = F \circ \varphi$, $\Gamma_0 = \varphi^{-1}(0)$ e $\varphi|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ tem grau p , isto é,

$$\deg(\varphi|_{\partial\mathbb{D}}) = \deg((F \circ \varphi)|_{\partial\mathbb{D}}) = \deg(u_0|_{\partial\mathbb{D}}) = p.$$

A seguir, veremos que $\#\Gamma_0 = 1$. De fato, suponha que $\#\Gamma_0 = N \geq 2$ e seja $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_N\}$. Sejam $m(z_i)$ as massas dos furos negativos $z_i \in \Gamma_0$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Pelo Teorema de Stokes temos que¹⁶

¹⁶Lembre que $\tilde{u}_0$ é o limite na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$ de uma sequência $\tilde{u}_n$ de discos de energia finita na família de Bishop $\mathcal{M}$. Sejam $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_N\}$ os furos negativos e considere $B_\epsilon(\Gamma_0) = \bigcup_{z_i \in \Gamma_0} B_\epsilon(z_i)$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_{\partial\mathbb{D}} u_n^* \lambda = \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} \int_{B_\epsilon(z_i)} u_n^* d\lambda + \int_{\mathbb{D} \setminus B_\epsilon(\Gamma_0)} u_n^* d\lambda.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $\int_{\partial\mathbb{D}} u_0^* \lambda = \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} m_\epsilon(z_i) + \int_{\mathbb{D} \setminus B_\epsilon(\Gamma_0)} u_0^* d\lambda$, e passando ao limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, concluímos

$$\int_{\partial\mathbb{D}} u_0^* \lambda = \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} m(z_i) + \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0} u_0^* d\lambda.$$

$$\int_{\partial\mathbb{D}} u_0^* \lambda = \sum_{i \in \{1, \dots, N\}} m(z_i) + \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0} u_0^* d\lambda.$$

Como $\int_{\partial\mathbb{D}} u_0^* \lambda = pT_{\min}$, $m(z_i) = p_i T_{\min}$, para algum $p_i > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$, e $\#\Gamma_0 = N \geq 2$, temos que $p_i < p$, para todo $i \in \{1, \dots, N\}$. Fixe $z_i \in \Gamma_0$. Sejam $r > 0$ pequeno e $\gamma_0^i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ dada por $\gamma_0^i(t) = \tilde{u}_0(z_i + re^{2\pi it})$. Visto que $\pi \cdot du_0 \equiv 0$, segue que γ_0^i é uma parametrização da órbita fechada $L^{p_i} = (y, p_i T_{\min})$. De maneira análoga, podemos definir $\gamma_n^i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ dado por $\gamma_n^i(t) = \tilde{u}_n(z_i + re^{2\pi it})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$, segue que $\gamma_n^i \rightarrow \gamma_0^i$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R} \times M)$. Como γ_n^i é contrátil, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que γ_0^i é contrátil. Deste modo, a órbita fechada $L^{p_i} = (y, p_i T_{\min})$ também é contrátil. Note que isto contradiz o fato de $L = (y, T_{\min})$ ser um p -nó trivial, pois, pelo Lema 1.11, as iteradas $L^q = (y, qT_{\min})$ com $q < p$ são não-contratéis. Esta contradição mostra que $\#\Gamma_0 = 1$. A menos de uma reparametrização por um biholomorfismo do disco, podemos supor que $\Gamma_0 = \{0\}$. Note que, se $\omega^{1/p} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dado por $z \mapsto z^{1/p}$, a composição $\omega^{1/p} \circ \varphi(z)$ é um biholomorfismo do disco que fixa a origem. Pelo *Lema de Schwarz* (veja [58, Lema 2.1]) existe $\zeta_0 \in \mathbb{D}$ com $|\zeta_0| = 1$ tal que $\omega^{1/p} \circ \varphi(z) = \zeta_0 \cdot z$, isto é, $\varphi(z) = \zeta \cdot z^p$, onde $\zeta = \zeta_0^p$. Isto mostra que o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ no furo negativo $0 \in \Gamma_0$ é a órbita fechada $L^p = (y, pT_{\min})$. Em particular, o Lema 2.19 implica $\mu_{CZ}(L^p) \geq 2$. Repare que isto contradiz as hipóteses da Proposição 2.6, visto que, $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$. Esta contradição conclui a prova do Lema 2.21. ■

O seguinte resultado é uma aplicação do Corolário 6.11¹⁷ em [35].

Lema 2.22. *Seja $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita. Para todo $z' \in \partial\mathbb{D}$, temos que $\tilde{u}_0(z') \notin y(\mathbb{R})$, onde $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$.*

Demonstração. Lembre que existe uma sequência $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$ tal que $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$ e $\tilde{u}_n(\mathbb{D}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha, por contradição, que exista $z' \in \partial\mathbb{D}$ tal que $\tilde{u}_0(z') \in y(\mathbb{R})$. Seja $U \subset \mathbb{D}$ um aberto contendo z' . O *Princípio da Similaridade de Carleman* (veja [48]) e o lema anterior implicam que $\int_U u_0^* d\lambda > 0$. Pelo Corolário 6.11 em [35], devem existir, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\zeta_n \in U$ tais que $u_n(\zeta_n) \in y(\mathbb{R})$. Mas isto contradiz $\tilde{u}_n(\mathbb{D}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta contradição mostra que $\tilde{u}_0(\partial\mathbb{D}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$. ■

Lembre que fixamos na Seção 2.3.1 um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada $L = (y, T_{\min})$ e estamos denotando $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$. A única singularidade elíptica real e positiva contida em $\mathring{\mathcal{D}} = u_L(\mathring{\mathbb{D}})$ é denotada por e^+ .

Lema 2.23. *Seja $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita. São verdadeiras as seguintes propriedades:*

- (i) $a_0(\partial\mathbb{D}) \equiv 0$, $u_0(\partial\mathbb{D}) \subset \mathring{\mathcal{D}} \setminus \{e^+\}$ e $\text{wind}(u_0(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1$;

¹⁷**Corolário ([35], Corolário 6.11):** Sejam $z' \in \partial\mathbb{D}$ e $U \subset \mathbb{D}$ uma vizinhança aberta de z' . Seja $\tilde{w}_n : U \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas satisfazendo $\tilde{w}_n(\partial\mathbb{D} \cap U) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$. Suponha que existe uma curva $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{w} : U \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{w}_n \rightarrow \tilde{w}$ na topologia de $C_{\text{loc}}^\infty(U, \mathbb{R} \times M)$ e $\int_U w^* d\lambda > 0$. Se $w(z') \in y(\mathbb{R})$, então, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existem $\zeta_n \in U$ tais que $w_n(\zeta_n) \in y(\mathbb{R})$.

(ii) existe $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{u}_0|_{A_\epsilon} : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é mergulho¹⁸ e, além disso, $\tilde{u}_0^{-1}(\tilde{u}_0(A_\epsilon)) = A_\epsilon$.

Demonstração: As propriedades de $\tilde{u}_0$ no item (i) são consequências imediatas do fato de que $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, da convergência $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$ e do lema anterior (pois, este garante $\tilde{u}_0(\partial\mathbb{D}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$). O item (ii) é consequência de $\text{wind}(u_0(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1$ e do *Princípio do Máximo Forte* (veja Lema 1.56). ■

Lema 2.24. O disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um mergulho.

Demonstração: Pelo lema anterior, sabemos que $\tilde{u}_0$ é mergulho perto do bordo. Como λ é não-degenerada, se $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_n\}$, existe, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, um $\epsilon_j \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno e $B_{\epsilon_j}(z_j) = \{z \in \mathbb{D} : |z - z_j| < \epsilon_j\}$ tal que $\tilde{u}_0|_{B_{\epsilon_j}(z_j)}$ é um mergulho. Estes fatos mostram que $\tilde{u}_0$ é mergulho numa vizinhança do bordo $\partial\mathbb{D}$ e dos furos negativos em Γ_0 .

Sejam $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0) = \{z \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 : du_0(z) = 0\}$ o conjunto formado pelos pontos críticos de $\tilde{u}_0$ e $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$ o conjunto das auto-interseções, isto é,

$$\mathcal{S}(\tilde{u}_0) := \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \Delta : \tilde{u}_0(z_1) = \tilde{u}_0(z_2)\},$$

onde

$$\Delta := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 : z_1 = z_2\}$$

é a diagonal de $\mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$. Vamos provar que $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0) = \emptyset$ e $\mathcal{S}(\tilde{u}_0) = \emptyset$. Começemos com $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$. Suponha, por contradição, que $\mathcal{S}(\tilde{u}_0) \neq \emptyset$. Primeiramente, vamos assumir que $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$ possui pontos limites em $(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \Delta$, isto é, existem $z, z' \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ distintos e sequências $\{z_k\}, \{z'_k\}$ em $\mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ tais que

$$\begin{aligned} z_k \neq z, \quad z'_k \neq z', \quad \tilde{u}_0(z_k) = \tilde{u}_0(z'_k), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \\ (z_k, z'_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (z, z') \end{aligned} \tag{2.50}$$

Denote por $\Xi \subset \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ o conjunto constituído pelos pares (z, z') (não necessariamente distintos) tais que existem sequências $\{z_k\}, \{z'_k\}$ satisfazendo (2.50). Repare que, por hipótese (de contradição), estamos assumindo que existe pelo menos um par $(z, z') \in \Xi$ tal que $z \neq z'$. Dado $z \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$, denote por $[z]$ o subconjunto de $\mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ constituído pelos $z' \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ tais que $(z, z') \in \Xi$. Seguindo Hofer, Wysocki e Zehnder em [26], considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} X &= (\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \mathcal{Z}(\tilde{u}_0), \\ Z &= \tilde{u}_0(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \tilde{u}_0(\mathcal{Z}(\tilde{u}_0)), \\ Y &= X \cap \tilde{u}_0^{-1}(Z). \end{aligned}$$

Note que se $z \in Y$, então $[z] \subset Y$. A prova do Lema 6.3 em [26] se aplica ao nosso caso e dela concluímos que $(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus Y$ consiste de pontos isolados. Dado $z \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$, podemos definir a *multiplicidade* de z como $M(z) = \#[z]$. No Lema 6.5 em [26], Hofer, Wysocki e Zehnder provam

¹⁸Lembre que $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{D} : 1 - \epsilon \leq |z| \leq 1\}$.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

que $M(z)$ é finita e independente de z , para todo $z \in Y$. Lembre que $\tilde{u}_0$ é mergulho perto do bordo e dos furos em Γ_0 . Isto implica que $M(z) = \#[z] = 1$, para todo $z \in Y$. Desta forma, se existe $(z, z') \in \Xi$ com $z \neq z'$, então $z, z' \in Y^c = (\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus Y$. Pela definição de Y , se $[z] \in Y^c$, então existe $\tilde{z} \in [z]$ tal que $d\tilde{u}_0(\tilde{z}) = 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $d\tilde{u}_0(z) = 0$. Assuma que existe $z' \in [z]$ tal que $d\tilde{u}_0(z') \neq 0$. Pelo Lema 2.4.3¹⁹ em [48], sabemos que existe uma função holomorfa $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ tal que $\tilde{u}_0|_U = \tilde{u}_0|_{\varphi(U)} \circ \varphi$, onde $U, \varphi(U)$ são abertos pequenos com $z \in U, z' \in \varphi(U)$. Diminuindo U , se necessário, podemos supor que $U \cap \varphi(U) = \emptyset$ e $d\tilde{u}_0(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \in (U \setminus \{z\}) \cup \varphi(U)$. Como $(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus Y$ consiste de pontos isolados, segue que

$$(U \setminus \{z\}) \cup (\varphi(U) \setminus \{z'\}) \subset Y.$$

Note que isto contradiz a existência da decomposição $\tilde{u}_0|_U = \tilde{u}_0|_{\varphi(U)} \circ \varphi$. De fato, $\tilde{u}_0|_U = \tilde{u}_0|_{\varphi(U)} \circ \varphi$ implica que existem $\tilde{z} \in U \setminus \{z\}, \tilde{z}' \in \varphi(U) \setminus \{z'\}$ tais que $(\tilde{z}, \tilde{z}') \in \Xi$ e $\tilde{z} \neq \tilde{z}'$. Lembre que neste caso existem sequências como em (2.50) e $M(\tilde{z}) = \#[\tilde{z}] \geq 2$. Já observamos acima que $M(z) = \#[z] = 1$, para todo $z \in Y$. Portanto, a existência de $(\tilde{z}, \tilde{z}')$ é uma contradição. Disto segue que $d\tilde{u}_0(z') = 0$ para todo $z' \in [z]$, isto é, $[z] \subset \mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$. Sejam z_k, z'_k sequências tais como em (2.50) convergindo, respectivamente, para z, z' . Como $z, z' \in \mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$, existem vizinhanças abertas U, U' de z, z' , respectivamente, tais que $d\tilde{u}_0(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \in (U \setminus \{z\}) \cup (U' \setminus \{z'\})$. Como $(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus Y$ consiste de pontos isolados, podemos escolher U, U' tais que $U \setminus \{z\}, U' \setminus \{z'\} \subset Y$. Isto implica que, para k suficientemente grande, $z_k, z'_k \in Y$. Como $M(z) = \#[z] = 1$, para todo $z \in Y$, segue que z_k, z'_k são interseções isoladas. Vamos provar que estas interseções não podem existir. Fixe $k \in \mathbb{N}$ e escolha vizinhanças $B_\epsilon(z_k)$ e $B_{\epsilon'}(z'_k)$, $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequenos, tais que $\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z_k)}$ e $\tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z'_k)}$ sejam mergulhos. Isto é possível visto que $z_k, z'_k \in Y$. A *Teoria de Interseção de McDuff* ([49]), conforme Seção 1.3, implica que

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z_k)}, \tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z'_k)} \right) > 0.$$

Como $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M)$, onde $\tilde{u}_n \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o Lema 1.61 (*estabilidade de interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*) implica que

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_n|_{B_\epsilon(z_k)}, \tilde{u}_n|_{B_{\epsilon'}(z'_k)} \right) > 0,$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Note que isto contradiz o fato de $\tilde{u}_n$ ser mergulho, para

¹⁹**Lema ([48], Lema 2.4.3):** Seja $\tilde{J}$ uma estrutura quase-complexa suave em $\mathbb{R} \times M$. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que $0 \in \Omega$ e $u, v : \Omega \rightarrow M$ curvas $\tilde{J}$ -holomorfas satisfazendo $u(0) = v(0)$ e $du(0) \neq 0$. Além disso, suponha que existem sequências $z_n, w_n \in \Omega$ tais que $u(z_n) = v(w_n)$, $w_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0.$$

Então, existe uma função holomorfa $\varphi : B_\epsilon(0) \rightarrow \Omega$ definida numa vizinhança de 0 tal que $\varphi(0) = 0$ e

$$v = u \circ \varphi.$$

todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, devemos ter

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z_k)}, \tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z'_k)} \right) = 0.$$

Logo, não podem existir z_k, z'_k seqüências tais como em (2.50) convergindo, respectivamente, para $z, z' \in \mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$. Isto significa que $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$ não pode conter pontos limites em $(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \times \mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \Delta$. Vamos provar que $\mathcal{S}(\tilde{u}_0)$ também não pode conter pontos isolados. Sejam $z, z' \in \mathcal{Z}(\tilde{u}_0)^c = (\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) \setminus \mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$ tais que $z \neq z', \tilde{u}_0(z) = \tilde{u}_0(z')$. Tal como antes, existem vizinhanças $B_\epsilon(z)$ e $B_{\epsilon'}(z')$, $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequenos, tais que $\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z)}$ e $\tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z')}$ são mergulhos e

$$\tilde{u}_0(B_\epsilon(z) \setminus \{z'\}) \cap \tilde{u}_0(B_{\epsilon'}(z') \setminus \{z'\}) = \emptyset.$$

Como

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z)}, \tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z')} \right) > 0,$$

a estabilidade de interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas implica que

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_n|_{B_\epsilon(z)}, \tilde{u}_n|_{B_{\epsilon'}(z')} \right) > 0,$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Esta contradição mostra que

$$\text{Int} \left(\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z)}, \tilde{u}_0|_{B_{\epsilon'}(z')} \right) = 0.$$

Por fim, vamos verificar que $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0) = \emptyset$. Suponha, por contradição, que existe $z \in \mathbb{D} \setminus \Gamma_0$ tal que $d\tilde{u}_0(z) = 0$. O Lema 2.4.1 em [48] garante que o conjunto $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0)$ é formado por pontos isolados. Isto implica que existe uma vizinhança aberta $B_\epsilon(z)$ tal que $d\tilde{u}_0(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \in B_\epsilon(z) \setminus \{z\}$. Como não existem auto-interseções isoladas de pontos em $\mathcal{Z}(\tilde{u}_0)^c$, temos que $\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z) \setminus \{z\}}$ é um mergulho. Uma vez que um ponto crítico corresponde, pela Teoria de Interseção de McDuff, a uma interseção não-transversal (veja Seção 1.3), temos que $\text{Int} \left(\tilde{u}_0|_{B_\epsilon(z)} \right) > 0$. A estabilidade de auto-interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas implica que $\text{Int} \left(\tilde{u}_n|_{B_\epsilon(z)} \right) > 0$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Esta contradição encerra a prova de que $\tilde{u}_0$ é mergulho. ■

Combinando os Lemas 2.20, 2.21, 2.23 e 2.24, concluímos a prova de que $\tilde{u}_0$ é um disco furado de energia finita mergulhado solução do problema (2.26). Agora vamos provar a segunda parte da Proposição 2.15, isto é, que $\#\Gamma_0 = 1$ e o limite assintótico no único furo negativo satisfaz $\mu_{CZ} = 2$. Mais precisamente:

Lema 2.25. *Seja $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ o disco furado de energia finita. O conjunto Γ_0 é um conjunto unitário, isto é, $\Gamma_0 = \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$. Além disso, se $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 , então $\mu_{CZ}(P_0) = 2$.*

Demonstração. Suponha que $\Gamma_0 = \{z_1, \dots, z_N\}$ e, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, seja $P_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_j . Lembre que escolhemos uma estrutura com-

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

plexa genérica. Esta escolha e o fato de que $\tilde{u}_0$ é um mergulho solução do problema (2.26) implicam que

$$\text{Ind}(\tilde{u}_0) = \#\Gamma_0 - \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \mu_{CZ}(P_j) + 1 \geq 0 \quad (2.51)$$

(veja Seção 1.3.4). Pelo Lema 2.19, sabemos que $\mu_{CZ}(P_j) \geq 2$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. De (2.51) segue que

$$0 \leq \text{Ind}(\tilde{u}_0) = \#\Gamma - \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \mu_{CZ}(P_j) + 1 \leq \#\Gamma_0 - 2\#\Gamma_0 + 1 = -\#\Gamma_0 + 1$$

isto é, $\#\Gamma_0 = 1$. Sejam $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$ tal que $\Gamma = \{z_0\}$ e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 . Suponha que $\mu_{CZ}(P_0) \geq 3$, então $0 \leq \text{Ind}(\tilde{u}) = 2 - \mu_{CZ}(P_{z_0}) \leq -1$. Esta contradição mostra que $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Este argumento é uma adaptação de parte da prova do Teorema 1.15 em [27] (veja também Seção 1.3.4). ■

2.3.3 Final da Demonstração da Proposição 2.6

Primeiramente, vamos lembrar alguns fatos. Seja $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$ o único furo negativo do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Seja $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 . De modo análogo à construção feita na *Subseção: Análise de bubbling-off*, é possível associar uma sequência germinante $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ ao furo negativo z_0 . Mais precisamente, para $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno, conforme (2.42), podemos escolher sequências

- (i) $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z_0$, conforme (2.43);
- (ii) $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$, conforme (2.44);
- (iii) $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ tal que $B_{R_n \delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(z_0)$,

e definir uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que

$$b_n(z) = a_n(z_n + \delta_n z) - a_n(z_n + 2\delta_n), \quad \text{e} \quad v_n(z) = u_n(z_n + \delta_n z). \quad (2.52)$$

Lembre que $\tilde{u}_n$ é a sequência de discos de energia finita na *família de Bishop* $\mathcal{M}$ escolhida em (2.29)²⁰. Já mencionamos que a sequência $\tilde{v}_n$ é uma sequência germinante. No Lema 2.17, provamos que existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita e não-constante

$$\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M \quad (2.53)$$

tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M)$. Lembre que Γ' corresponde aos furos negativos de $\tilde{v}$. No Lema 2.19, provamos que o limite assintótico de $\tilde{v}$ no (único) furo positivo em ∞ coincide com a órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Pela Proposição C.6 no Apêndice C e Lema 2.18, temos que $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} v^* d\lambda > 0$.

²⁰Aqui, na verdade, consideramos a subsequência obtida no Lema 2.14.

Nosso primeiro objetivo é verificar que $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é, na verdade, um plano de energia finita. Isto permitirá provar que $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ satisfaz as condições da tese da Proposição 2.6. Nesta direção, vamos provar o seguinte lema. Este resultado é uma importante ferramenta no cálculo dos índices μ_{CZ} dos limites assintóticos nos furos negativos de $\tilde{v}$.

Lema 2.26. *Seja $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita, onde ∞ é o único furo positivo e $\Gamma = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto de furos negativos. Sejam $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}$ em ∞ e $P_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}$ em z_j , para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Suponhamos que*

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} u^* d\lambda > 0, \quad \mu_{CZ}(P_\infty) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_{CZ}(P_j) \geq 2, \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Então $\mu_{CZ}(P_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$.

Demonstração. Denote por $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$ a compactificação de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ obtida por adicionar cópias de S^1 nos furos $\Gamma \cup \{\infty\}$ e seja $\bar{u}$ a extensão contínua de u sobre $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$. Esta extensão existe pois λ é não-degenerada. Tal como na Subseção 1.3.1, podemos escolher uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\bar{\Psi} : \eta^* \xi \rightarrow \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma} \times \mathbb{C}$ do fibrado $d\lambda$ -simplético $\bar{u}^* \xi \rightarrow \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$. Por construção, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, $\bar{\Psi}$ induz uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $x_{T_j}^* \xi \rightarrow S^1$, denotada por $\bar{\Psi}_j$, homotópica à trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ_j induzida pelo disco v_j . Em particular, o índice de Conley-Zehnder da órbita fechada P_j medido em relação à $\bar{\Psi}_j$ coincide com o medido em relação à Ψ_j . Isto é consequência do fato de que μ_{CZ} depende apenas da classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $x_{T_j}^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Note também que a hipótese $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ implica que $\mu_{CZ}(P_\infty, \bar{\Psi})$, medido em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por $\bar{\Psi}$, satisfaz $\mu_{CZ}(P_\infty, \bar{\Psi}) = 2$.

Seja $Z : \mathbb{D} \rightarrow \eta^* \xi$ uma seção não-nula definida como $Z(p) = \bar{\Psi}^{-1}(p, \partial_x)$, para todo $p \in \mathbb{D}$, onde $\bar{\Psi} : \eta^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ é a trivialização $d\lambda$ -simplética construída acima. Sejam $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty, Z)$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_j) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_j, Z)$, para todo $z_j \in \Gamma$, $j \in \{1, \dots, N\}$ (veja definições na Subseção 1.3.1). No Lema 1.73, verificamos que $\mu_{CZ}(P_\infty) = 2$ implica $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty) \leq 1$, e $\mu_{CZ}(P_j) \geq 2$ implica $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_j) \geq 1$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Suponha, por contradição, que exista $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\mu_{CZ}(P_{j_0}) \geq 3$. O Lema 1.73 implica $\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_{j_0}) \geq 2$. Se $\text{wind}_\pi(\tilde{u})$ é definido conforme (1.68), pelo Teorema 1.70, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) + N - 1 \\ &= \text{wind}_\infty(\tilde{u}, \infty) - \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \text{wind}_\infty(\tilde{u}, z_j) + N - 1 \\ &\leq 1 - (N - 1) - 2 + N - 1 = -1, \end{aligned}$$

Esta contradição mostra que $\mu_{CZ}(P_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. ■

Seja $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ a esfera furada de energia finita obtida acima. Pela Proposição 1.58, visto que $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} v^* d\lambda > 0$, existe uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} = (d, w) :$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

$\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ *somewhere injective* com $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{C}$ finito, e $\int_{\mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}} w^* d\lambda > 0$, e um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $p(\Gamma') = \bar{\Gamma}$, $p(\infty) = \infty$, e tais que $\tilde{v}$ se fatora em $\tilde{v} = \tilde{w} \circ p$. Lembre que escolhemos uma estrutura complexa J *genérica*. Como $\tilde{w}$ é *somewhere injective* e $\pi \cdot dw$ não é identicamente nulo, a genericidade de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ implica (veja Subseção 1.3.4) que

$$\text{Ind}(\tilde{w}) = \mu^+ - \mu^- - 1 + \#\Gamma' \geq 1, \quad (2.54)$$

onde μ^+ denota o índice (de Conley-Zehnder) do furo positivo e μ^- denota a soma dos índices dos furos negativos da esfera furada de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Este fato e o lema anterior implicam que $\Gamma' = \emptyset$. Vamos provar esta afirmação. Já observamos que $\tilde{v}$ possui um único furo positivo cujo limite assintótico é a órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ que satisfaz $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Sabemos também que $\Gamma' = \{z_1, \dots, z_N\}$ é o conjunto dos furos negativos e, se $P_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{v}$ em z_j , então $\mu_{CZ}(P_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Sejam $\bar{P}_0 = (x_0, \bar{T}_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em ∞ , $\bar{\Gamma} = \{y_1, \dots, y_{\bar{N}}\}$ o conjunto dos furos negativos de $\tilde{w}$ e $\bar{P}_l = (x_l, \bar{T}_l) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em y_l , $l \in \{1, \dots, \bar{N}\}$. Pelos Teoremas 1.39 e 1.40, os limites assintóticos $\bar{P}_0, \bar{P}_l, l \in \{1, \dots, \bar{N}\}$, de $\tilde{w}$ satisfazem $\mu_{CZ}(\bar{P}_0), \mu_{CZ}(\bar{P}_l) \geq 1$, para todo $l \in \{1, \dots, \bar{N}\}$, visto que $\mu_{CZ}(P_0), \mu_{CZ}(P_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. A genericidade de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e (2.54) implicam que

$$\mu^+ \geq \mu^- + 2 - \#\bar{\Gamma} \geq \#\bar{\Gamma} + 2 - \#\bar{\Gamma} \geq 2.$$

Como $\tilde{w}$ possui um único furo positivo no ∞ cujo limite assintótico é a órbita fechada $\bar{P}_0 = (x_0, \bar{T}_0)$, é imediato que $\mu_{CZ}(\bar{P}_0) = \mu^+ \geq 2$. Se $\deg(p) \geq 2$, então o índice $\mu_{CZ}(P_0)$ da órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0)$ limite assintótico no único furo positivo em ∞ de $\tilde{v}$ satisfaria $\mu_{CZ}(P_0) \geq 4$. No entanto, sabemos que $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Esta contradição mostra que $\deg(p) = 1$ e, portanto, $\tilde{v}$ é também *somewhere injective*. Para evitar ambiguidades, denotamos por $\tilde{\mu}^+$ o índice μ_{CZ} do furo positivo e $\tilde{\mu}^-$ a soma dos índices μ_{CZ} dos furos negativos de $\tilde{v}$. Novamente a genericidade de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e (2.54) implicam que

$$\tilde{\mu}^+ \geq \tilde{\mu}^- + 2 - \#\Gamma' \geq 2\#\Gamma' + 2 - \#\Gamma' \geq 2 + \#\Gamma'.$$

Visto que $\mu_{CZ}(P_0) = 2$, concluímos $\Gamma' = \emptyset$. Isto prova o seguinte lema:

Lema 2.27. *A esfera furada de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ satisfaz $\Gamma' = \emptyset$.*

Como $\mu_{CZ}(P_0) = 2$, resta apenas provar que P_0 satisfaz as condições topológicas da tese da Proposição 2.6. Primeiro, vamos provar o resultado a seguir.

Lema 2.28. *O plano de energia finita $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é um mergulho. Além disso, $v(\mathbb{C})$ é transversal ao campo de Reeb.*

Demonstração: Recorde que o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ∞ é a órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0) = 2$. Considere a seguinte afirmação:

Afirmação 2.29. *v é uma imersão transversal ao campo de Reeb.*

Demonstração. Seja $\bar{\mathbb{C}}$ a compactificação de $\mathbb{C}$ obtida por adicionar uma cópia de S^1 em

∞ e denote por $\bar{v}$ a extensão contínua de v sobre $\bar{\mathbb{C}}$. Lembre que esta extensão existe, pois λ é não-degenerada. Note que $\bar{\mathbb{C}} \stackrel{\text{difeo}}{\simeq} \mathbb{D}$. Por abuso de notação, escrevemos $\bar{v} : \mathbb{D} \rightarrow M$. Seja $\Psi : (x_0)_{T_0}^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, uma trivialização $d\lambda$ -simplética do fibrado $d\lambda$ -simplético $(x_0)_{T_0}^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida por uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $\bar{v}^* \xi \rightarrow \mathbb{D}$. Sejam A_{P_0} o operador assintótico sobre P_0 e fixe

$$\beta^{\text{neg}} = \max\{\beta \in \text{Spec}(A_{P_0}) : \beta < 0\},$$

onde $\text{Spec}(A_{P_0})$ é o espectro de A_{P_0} . Se $\nu^{\text{neg}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ é um autovetor correspondente ao autovalor β^{neg} , o número de rotação $\text{wind}(\beta^{\text{neg}})$, em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ , é definido por $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = \deg\left(\frac{\nu^{\text{neg}}}{|\nu^{\text{neg}}|}\right)$ (veja Subseção 1.2.2). Pelo Lema 1.31, $\text{wind}(\beta^{\text{neg}})$ é independente do autovetor ν^{neg} . Pelo Teorema 1.32, o índice de Conley-Zehnder generalizado é $\mu_{CZ}(P_0) = 2\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + p$, onde $p \in \{0, 1\}$ é a paridade. Como $\mu_{CZ}(P_0) = 2$, temos que $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$ e $p = 0$. No Lema 1.72, provamos que $\text{wind}_{\infty}(\tilde{v}, \infty) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$ e, portanto, $\text{wind}_{\infty}(\tilde{v}, \infty) \leq 1$. Visto que $\text{wind}_{\pi}(\tilde{v}) \geq 0$, o Teorema 1.70 nos diz que

$$0 \leq \text{wind}_{\pi}(\tilde{v}) = \text{wind}_{\infty}(\tilde{v}) - 1 \leq 0,$$

ou seja, $\text{wind}_{\pi}(\tilde{v}) = 0$. A definição de $\text{wind}_{\pi}(\tilde{v})$ implica $\pi \circ dv_z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, $\dim(\pi \cdot dv_z(T_z \mathbb{C})) = 2$, para todo $z \in \mathbb{C}$, já que $\bar{\partial}_{\tilde{f}}(\tilde{v}) = 0$. Combinando estas observações, concluímos que

$$\mathbb{R}X_{\lambda}(v(z)) \oplus dv_z(T_z \mathbb{C}) = T_{v(z)}M, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

e fica provado que v é uma imersão transversal ao campo de Reeb. Note que a transversalidade com o campo de Reeb segue de $\pi \circ dv_z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Afirmção 2.30. *O plano de energia finita $\tilde{v}$ é um mergulho.*

Demonstração. Nossa estratégia será provar que $\tilde{v}$ é imersão injetiva própria. A Proposição 5.4 em [43] implicará que $\tilde{v}$ é mergulho²¹. Começamos verificando que $\tilde{v}$ é injetiva. Considere o conjunto $\mathcal{S}(\tilde{v}) := \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta : \tilde{v}(z_1) = \tilde{v}(z_2)\}$ onde $\Delta := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z_1 = z_2\}$ é a diagonal de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Suponha, por contradição, que $\mathcal{S}(\tilde{v}) \neq \emptyset$. Se $\mathcal{S}(\tilde{v})$ possui um ponto limite em $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta$, pela Proposição 1.58, existe um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $\deg(p) \geq 2$ e um plano de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ *somewhere injective* fatorando $\tilde{v}$ em $\tilde{v} = \tilde{w} \circ p$. Como $\deg(p) \geq 2$ e $d\tilde{v} = d\tilde{w} \circ dp$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $d\tilde{v}(z)$ não é imersão, contradizendo a afirmação anterior. Disto segue que $\mathcal{S}(\tilde{v})$ somente pode conter pontos isolados. Vamos verificar que isto não pode acontecer. Lembre que existem seqüências $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{v} \text{ na topologia usual de } C_{\text{loc}}^{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M),$$

onde $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é a seqüência germinante definida em (2.52). Como as auto-interseções $\mathcal{S}(\tilde{v})$ são isoladas e $\pi \circ dv_z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, existe uma seqüência $r_j \in \mathbb{R}_+^*$ com $r_j \rightarrow +\infty$ e $B_{r_j}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_j\}$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\tilde{v}|_{\overline{B_{r_j}(0)}}$ admite um número finito de

²¹**Proposição ([43], Proposição 5.4):** Sejam M, N variedades diferenciáveis. Se M é compacta e $f : M \rightarrow N$ é uma imersão injetiva própria, então f é um mergulho com imagem fechada

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

auto-interseções contidas em $B_{r_j}(0)$. Podemos supor também que $\tilde{v}|_{\overline{B_{r_j}(0)}}$ é um mergulho perto do bordo. Pela *estabilidade e positividade de interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* (veja Subseção 1.3), para n suficientemente grande, concluímos

$$\text{Int} \left(\tilde{U}_n|_{\overline{B_{r_j}(0)}} \right) = \text{Int} \left(\tilde{v}|_{\overline{B_{r_j}(0)}} \right) > 0, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Note que isto é uma contradição ao fato de que as curvas $\tilde{U}_n$ são mergulhos para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathcal{S}(\tilde{v}|_{\overline{B_{r_j}(0)}}) = \emptyset$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Desta forma, $\tilde{v}|_{\overline{B_{r_j}(0)}}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, é uma imersão injetiva própria. Disto segue que $\tilde{v}$ é um mergulho. ■

Lembre que $L = (y, T_{\min})$ é a órbita fechada satisfazendo as condições da Proposição 2.6 e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{v}$ no único furo positivo em ∞ . Para concluir a demonstração da Proposição 2.6, precisamos apenas verificar que as órbitas fechadas $L = (y, T_{\min})$, $P_0 = (x_0, T_0)$ são geometricamente distintas e não-enlaçadas. Este é o conteúdo do lema a seguir. Antes enunciá-lo, é importante observar que a sequência germinante definida em (2.52) foi obtida a partir de reparametrizações de uma sequência discos de energia finita $\tilde{u}_n = (a_n, u_n)$ na família de Bishop $\mathcal{M}$ que, por definição, satisfazem $\tilde{u}_n(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $\tilde{v}_n(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times y(\mathbb{R})) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.31. *As órbitas fechadas de Reeb $L = (y, T_{\min})$ e $P_0 = (x_0, T_0)$ são geometricamente distintas e não-enlaçadas.*

Demonstração: Considere o cilindro $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita sobre a órbita fechada L , isto é, seja $F : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definido por

$$\zeta \rightarrow F(\zeta) = \left(\frac{T \log |\zeta|}{2\pi}, y \left(\frac{T \arg \zeta}{2\pi} \right) \right),$$

onde $\arg(\zeta = re^{i\theta}) = \theta$ e $|\zeta|$ é o módulo de ζ . Note que F é uma imersão. Defina o seguinte conjunto:

$$A = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) : \tilde{v}(z) = F(\zeta)\},$$

onde $\tilde{v} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é o plano de energia finita tal como no Lema 2.28. Se provarmos que $A = \emptyset$, concluímos que $v(\mathbb{C}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $v(\mathbb{C}) \cap y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Seja $(z^*, \zeta^*) \in A$ e suponha, inicialmente, que (z^*, ζ^*) não é isolado, isto é, existe uma sequência $(z_n, \zeta_n) \in A$ tal que $(z_n, \zeta_n) \rightarrow (z^*, \zeta^*)$. Por definição, $\tilde{v}(z_n) = F(\zeta_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que tanto $\tilde{v}$ quanto F são imersões $\tilde{J}$ -holomorfas, segue imediatamente do Lema 2.4.3²² em [48] que existe um biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ satisfazendo $F = \tilde{v} \circ \varphi$. Note que isto contradiz o fato de $\tilde{v}$ ser transversal ao campo de Reeb. Portanto, se $A \neq \emptyset$, então A deve ser discreto. Seja $(z^*, \zeta^*) \in A$ um ponto isolado. Sejam $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ sequências tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{v} \text{ na topologia usual de } C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M),$$

²²Veja nota de rodapé 20.

onde $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, é a sequência germinante definida em (2.52). Pela transversalidade de $v : \mathbb{C} \rightarrow M$ em relação ao campo de Reeb, segue que $\tilde{v}$ e F se intersectam transversalmente em (z^*, ζ^*) . Pela *positividade das interseções entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*, a interseção (z^*, ζ^*) contribui positivamente para o número de interseção $\text{Int}(\tilde{v}, F)$ de modo que $\text{Int}(\tilde{v}, F) \geq 1$. A *estabilidade das interseções entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* força que $\text{Int}(\tilde{U}_n, F) \geq 1$, isto é, existem interseções positivas entre F e as $\tilde{v}_n$, para n suficientemente grande, visto que $\tilde{U}_n$ é uma reparametrização de $\tilde{v}_n$. Mas, isto contradiz o fato de que $v_n(B_{R_n(0)}) \cap y(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disto segue que A também não pode ser discreto e, portanto, $A = \emptyset$.

Por fim, segue da definição de índice de Conley-Zehnder, do Teorema 1.78 e do Lema 2.28 que as órbitas fechadas $L = (y, T_{\min})$ e $P_0 = (x_0, T_0)$ são geometricamente distintas. Como $A = \emptyset$, temos que L e P_0 são não-enlaçadas e, portanto, $\bar{P} = P_0$ é a órbita desejada. Isto conclui a demonstração do Lema 2.31 e da Proposição 2.6. ■

2.4 Caso Degenerado

Nesta seção, provaremos o caso degenerado do Teorema 2.1. Lembre que λ é uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Denotamos por X_λ o campo de Reeb e por $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb associado à forma de contato λ . Por hipótese, existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$, p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. Queremos provar que existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\rho(\bar{P}) = 1$. Veremos que isto será uma consequência da Proposição 2.6 e do *Teorema de Ascoli-Arzelà*.

Nosso primeiro passo é aproximar a forma de contato λ , possivelmente degenerada, por formas de contato não-degeneradas. Seja $\mathcal{O}_\lambda$ o conjunto das funções suaves $g : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tais que $g\lambda$ é forma de contato não-degenerada. Pela Proposição 6.1 em [30], o conjunto $\mathcal{O}_\lambda$ é denso em $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ munido da topologia usual. Hofer, Wysocki e Zehnder observam, em particular, que é possível perturbar λ de maneira que $L = (y, T_{\min})$ seja órbita fechada do campo de Reeb $X_{g\lambda}$ associado à forma de contato $g\lambda$, para algum $g \in \mathcal{O}_\lambda$. Mais precisamente:

Lema 2.32 ([30], Lema 6.8). *Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade fechada e conexa M e $L = (y, T_{\min})$ a órbita fechada fixada acima. Então existe uma sequência $\{g_n\} \in \mathcal{O}_\lambda$ tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ e*

$$g_n|_L = 1 \quad e \quad dg_n|_L = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.55)$$

De agora em diante, vamos considerar fixada uma sequência $\{g_n\} \in \mathcal{O}_\lambda$ tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ e satisfazendo (2.55). Por simplicidade, para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\lambda_n = g_n\lambda$ e escrevemos X_{λ_n} , $\{\phi_{n,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente, para o campo e o fluxo de Reeb associados à forma de contato λ_n . Observe que o fato de g_n ser positiva e $d\lambda_n|_\xi = g_n d\lambda|_\xi$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implicam que $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ se, e somente se, $J \in \mathcal{J}(\lambda_n)$. Em particular, a hipótese $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ permanece válida. Vamos fixar uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

arbitrariamente. A propriedade que verificaremos a seguir (veja Lema 2.33) depende apenas da classe de homotopia de $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Na seção seguinte, precisaremos fazer escolhas adequadas de estruturas complexas (em $\mathcal{J}(\lambda_n)$). Tais escolhas se assemelham àsquelas feitas na Seção 1.3.4 do Capítulo 1 e na Seção 2.3.2 deste capítulo. Trataremos disto no momento oportuno.

O lema a seguir afirmar que $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda_n)$, quando $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, ainda satisfaz as hipóteses dinâmicas do Teorema 2.1. Usaremos a notação $\rho(L^p, \lambda_n)$ para indicar o *número de rotação transversal* de L^p quando $L = (y, T_{\min})$ é vista como órbita fechada de X_{λ_n} .

Lema 2.33. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Sejam $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para L e $Z : \mathbb{D} \rightarrow u^*\xi$ uma seção não-nula do fibrado $d\lambda$ -simplético $u^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$. Sejam $g_n \in \mathcal{O}_\lambda$, $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo (2.55) tais que $g_n \xrightarrow{C^\infty} 1$. Se $\rho(L^p) < 1$, então existe um inteiro $N_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que, para todo $n \geq N_0$, temos $\rho(L^p, \lambda_n) < 1$.*

O resultado acima é uma consequência de $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$.

2.4.1 Existência de órbitas fechadas não-enlaçadas

Nesta seção, provamos existir uma órbita fechada contrátil $P_0 = (x_0, T_0)$ satisfazendo $\rho(P_0) = 1$. Isto será uma consequência da demonstração da Proposição 2.6 e do Teorema de Ascoli-Arzelà. Veremos na *Subseção: Não-colapsamento de órbitas fechadas* que P_0 não é um recobrimento de $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Disto seguirá que P_0 é distinta de L e não-enlaçada em L (isto é, P_0 é a órbita fechada da tese do Teorema 2.1).

Lema 2.34. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Se existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$, p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então existe $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ satisfazendo $\rho(P_0) = 1$.*

Antes de começarmos a demonstração do lema acima, precisamos fixar um p -disco especial para a órbita fechada $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Queremos que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, nenhuma órbita fechada em $\mathcal{P}^c(\lambda_n)$ distinta de L esteja contida neste p -disco. A existência de um p -disco especial depende da hipótese $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. Lembre que estamos considerando perturbações $\lambda_n = g_n\lambda$ da forma de contato λ . Como $\xi_n = \ker \lambda_n = \ker \lambda = \xi$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e o número de auto-enlaçamento $\text{sl}(L)$ é um invariante da órbita fechada L em relação à estrutura de contato e não à forma de contato, temos que $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. No Apêndice B, verificamos o seguinte resultado:

Lema 2.35. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Sejam $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, e $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para L . Seja $g_n \in \mathcal{O}_\lambda$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência satisfazendo as condições do Lema B.6 fixada acima. Então existe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada L e um inteiro $N_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que se $P = (x, T)$ é uma órbita fechada contrátil do campo de Reeb associado à forma de contato*

λ_n , para algum $n \geq N_0$, e $x(\mathbb{R}) \subset u_L(\mathbb{D})$, então $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R})$. O p -disco $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$ pode ser escolhido C^0 -próximo de $u(\mathbb{D})$.

De agora em diante, vamos considerar fixado um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada L conforme Lema 2.35. Usaremos a notação $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$.

Demonstração do Lema 2.34: Seja $g_n \in \mathcal{O}(\lambda)$ a sequência de funções suaves fixada na seção anterior. Recorde que as formas de contato $\lambda_n = g_n \lambda$ são não-degeneradas e, por construção, $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por simplicidade, eliminando uma quantidade finita de termos, podemos supor que se $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$ é uma órbita fechada contrátil do campo de Reeb associado à forma de contato λ_n , para algum $n \in \mathbb{N}$, e $x(\mathbb{R}) \subset u_L(\mathbb{D})$, então $x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R})$.

Nosso primeiro passo nesta demonstração será construir uma sequência de órbitas fechadas contráteis $P_n = (x_n, T_n)$ do fluxo de Reeb $\{\phi_{n,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ geometricamente distintas de L e não-enlaçadas em L satisfazendo $\rho(P_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e exibir uma cota superior para os períodos T_n . Seja $\mathcal{A}_n(\mathcal{D})$ a área do p -disco especial $\mathcal{D}$ relativa à forma de contato λ_n , isto é,

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{D}) = \int_{\mathbb{D}} |u_L^* d\lambda_n|.$$

Fixe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $C = \mathcal{A}(\mathcal{D}) + 1$, onde $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{\mathbb{D}} |u_L^* d\lambda|$. Como $g_n \xrightarrow{C^\infty} 1$, então $\lambda_n \rightarrow \lambda$ na topologia usual de $C^\infty(M, \Omega^1(M))$, onde $\Omega^1(M)$ é o espaço vetorial das 1-formas diferenciais, e isto implica que $\mathcal{A}_n(\mathcal{D}) \leq C$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Eliminando uma quantidade finita de termos da sequência λ_n , podemos supor que $\mathcal{A}_n(\mathcal{D}) \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos escolher estruturas complexas $J_n \in \mathcal{J}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, adequadas. Inicialmente, fixe (arbitrariamente) $J_n \in \mathcal{J}(\lambda) = \mathcal{J}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e seja $\tilde{J}_n$ a estrutura quase-complexa na simplificação $\mathbb{R} \times M$ satisfazendo (2.18). Denotamos por $\mathcal{M}_{J_n}^{\lambda_n}$ a família de Bishop²³ com condição de contorno em $\mathcal{D}$. Lembre que $\tilde{u} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ está contido em $\mathcal{M}_{J_n}^{\lambda_n}$ se e somente se $\tilde{u}$ satisfaz (2.19). Observe que $\tilde{u} \in \mathcal{M}_{J_n}^{\lambda_n}$ não implica que $\tilde{u} \in \mathcal{M}_{J_m}^{\lambda_m}$, quando $m \neq n$. Pela Seção 2.3.1, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $J'_n \in \mathcal{J}(\lambda_n)$ tal que $\mathcal{M}_{J'_n}^{\lambda_n} \neq \emptyset$. No Capítulo 1, seguindo [7], [27], verificamos que existe um conjunto residual $\mathcal{J}_{\text{gen}}^n \subset \mathcal{J}(\lambda_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (veja Seção 1.3.4 para os detalhes). Pela transversalidade automática das soluções em $\mathcal{M}_{J'_n}^{\lambda_n}$, podemos escolher $J_n \in \mathcal{J}_{\text{gen}}^n \subset \mathcal{J}(\lambda_n)$ próximo de J'_n de maneira que $\mathcal{M}_{J_n}^{\lambda_n} \neq \emptyset$ e existam discos de energia finita próximos da singularidade e^+ . Esta escolha pode ser feita para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{J}(\lambda) = \mathcal{J}(\lambda_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é contrátil, segue que J_n é homotópica a J_m , para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Em particular, visto que ρ depende somente da classe de homotopia de J_n , continua válido que $\rho(L^p, \lambda_n) < 1$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja $\tilde{u}_k^n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma sequência de discos de energia finita em $\mathcal{M}_{J_n}^{\lambda_n}$ escolhida de modo análogo à construção na Seção 2.3.2. Verificamos no Lema 2.14 que existe uma subsequência $\tilde{u}_{k_j}^n$, um conjunto finito $\Gamma_0^n \subset \mathbb{D}$, e um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0^n = (a_0^n, u_0^n) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0^n \rightarrow \mathbb{R} \times M$

²³Podemos supor que o p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ foi perturbado em uma vizinhança da singularidade e^+ para um p -disco especial u_L^n de maneira que exista uma carta de Darboux centrada em e^+ tal como no Lema B.4 relativamente à forma de contato λ_n . A existência desta perturbação garante que a família de Bishop é não-vazia.

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

tal que $\tilde{u}_{k_j}^n \rightarrow \tilde{u}_0^n$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0^n, \mathbb{R} \times M)$. A escolha de J_n genérico implica, em particular, que $\Gamma_0^n = \{z_0^n\}$, para algum $z_0^n \in \mathring{\mathbb{D}}$. Lembre que a massa $m(z_0^n)$ de z_0^n é definida como $m(z_0^n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon(z_0^n)$, onde

$$m_\epsilon(z_0^n) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\partial B_\epsilon(z_0^n)} (u_{k_j}^n)^* \lambda_n.$$

A convergência $\tilde{u}_{k_j}^n \rightarrow \tilde{u}_0^n$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0^n, \mathbb{R} \times M)$ implica que

$$\int_{\partial \mathbb{D}} (u_0^n)^* \lambda_n = m(z_0^n) + \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0^n} (u_0^n)^* d\lambda_n. \quad (2.56)$$

Por outro lado, o *Teorema de Stokes* revela que

$$\int_{\partial \mathbb{D}} (u_0^n)^* \lambda_n = \int_{u_0^n(\partial \mathbb{D})} \lambda_n = \int_{\bar{D}} d\lambda_n \leq \mathcal{A}_n(\mathcal{D}), \quad (2.57)$$

onde $\bar{D} \subset \mathcal{D}$ é um disco tal que $\partial \bar{D} = u_0^n(\partial \mathbb{D})$. Como $\int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0^n} (u_0^n)^* d\lambda_n \geq 0$, comparando as equações (2.56) e (2.57), concluímos $m(z_0^n) \leq \mathcal{A}_n(\mathcal{D}) \leq C$. Seja $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0^n$ no único furo negativo $z_0^n \in \Gamma_0^n$. Visto que $m(z_0^n) \leq C$, temos $T_n \leq C$. Como fixamos $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente, o procedimento acima produz uma sequência $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$ tal que $T_n \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A desigualdade anterior implica a equicontinuidade da sequência $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x_n(T_n t) \in M$. Pelo *Teorema de Ascoli-Arzelà*²⁴, existem subsequências $n_j \rightarrow \infty$, x_{n_j} e uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0)$ tais que $x_{n_j}(T_{n_j} \cdot) \rightarrow x_0(T_0 \cdot)$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$. Como $P_{n_j} = (x_{n_j}, T_{n_j})$ são órbitas fechadas contráteis satisfazendo $\rho(P_{n_j}) = 1$, a convergência $x_{n_j}(T_{n_j} \cdot) \rightarrow x_0(T_0 \cdot)$ implica que $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ e $\rho(P_0) = 1$. ■

Não-colapsamento de órbitas fechadas

Seja $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência de órbita fechadas, conforme demonstração do Lema 2.34. Verificamos acima que existe uma subsequência de P_n , ainda denotada por P_n , tal que $x_n(T_n \cdot) \xrightarrow{C^\infty} x_0(T_0 \cdot)$, onde $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Nesta subseção, provaremos que a sequência P_n não pode convergir para um recobrimento $L^q = (y, qT_{\min})$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$, da órbita fechada $L = (y, T_{\min})$. Isto será uma consequência das propriedades topológicas (isto é, $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$) e dinâmicas (isto é, $\rho(L^p) < 1$) da órbita fechada L e de não-enlaçamento entre L e P_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Nossa estratégia de demonstração será um argumento por contradição. Suponha que exista $q \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $x_n(T_n \cdot) \xrightarrow{C^\infty} y(qT_{\min} \cdot)$. Visto que $\rho(L^p) < 1$ e $\rho(P_0) = 1$, é imediato que $q \neq p$. Suponha que $q < p$. Pelo Lema 1.11, o fato de que a órbita fechada $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é p -nó trivial implica que as iteradas $L^m = (y, mT_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$, para $m < p$, são não-contráteis. Caso $P_0 = L^q = (y, qT_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ com $q < p$, teríamos que $P_0 = L^q$ é não-contrátil. Esta contradição mostra que se P_n converge para um recobrimento L^q , então $q \not\leq p$. O resto desta seção será dedicado à prova de que também não é possível $q > p$. Considere

²⁴**Teorema de Ascoli-Arzelà:** *Sejam X compacto e $w_n \in C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$. Se a sequência w_n é ponto a ponto limitada e equicontínua, então existe $w \in C^\infty(X, \mathbb{R}^m)$ e uma subsequência w_{n_k} tal que $w_{n_k} \xrightarrow{C^\infty} w$.*

a seguinte observação: se $x_n(T_n \cdot) \xrightarrow{C^\infty} y(qT_{\min} \cdot)$, então $x_n(pT_n \cdot) \xrightarrow{C^\infty} y(qpT_{\min} \cdot)$, isto é, P_n^p converge para a q -iterada da órbita fechada L^p . Vamos verificar que isto não pode acontecer e concluiremos a prova de que P_0 não é um recobrimento de L .

Nosso primeiro passo é construir um p -recobrimento de uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de L de modo que o *pull-back* da órbita fechada L^p tenha período mínimo. Vejamos a construção com detalhes. Seja $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ o p -disco especial para a órbita fechada $L = (y, T_{\min})$ fixado na seção anterior. Escolha uma seção não-nula $N : \partial\mathbb{D} \rightarrow u_L^* \xi|_{\partial\mathbb{D}}$ tal que $N(t) \in du_L|_{e^{2\pi it}}(T_{e^{2\pi it}}\mathbb{D})$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Observe que se $v(t)$ é uma seção suave em $\xi|_{L^p}$, então $v(t)$ se decompõe em:

$$v(t) = a(t)N(t) + b(t)J_{y(pT_{\min}t)}N(t),$$

onde $a, b : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Usaremos esta decomposição para construir um p -recobrimento sobre uma vizinhança da órbita fechada L . Considere $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, com coordenadas (t, w_1, w_2) , tais que $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, e seja

$$T_\epsilon := \{(t, w_1, w_2) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 : w_1^2 + w_2^2 < \epsilon^2\}, \text{ para algum } \epsilon \in \mathbb{R}_+^*.$$

Seja g uma métrica Riemanniana em M e $\exp$ a aplicação exponencial associada. Se $\mathcal{U} \subset M$ é uma vizinhança aberta de L , defina a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Theta^\epsilon : T_\epsilon &\rightarrow \mathcal{U} \\ (t, a, b) &\mapsto \exp(u_L(e^{2\pi it}), (a, b)), \end{aligned} \tag{2.58}$$

onde $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o p -disco especial fixado acima e $(a, b) := aN(t) + bJ_{y(pT_{\min}t)}N(t) \in \xi_{y(pT_{\min}t)}$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e $a, b \in \mathbb{R}$. A menos de uma composição com um difeomorfismo de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, diminuindo $\epsilon > 0$ e $\mathcal{U}$ se necessário, podemos supor que $\Theta^\epsilon(t, a, 0)$ coincide com $u_L(F)$, onde $F \subset \mathbb{D}$ é uma vizinhança pequena de $\partial\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}$. Note que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação Θ^ϵ é um difeomorfismo local. Disto segue que Θ^ϵ é uma aplicação de p -recobrimento suave (sobre a imagem $\Theta^\epsilon(T_\epsilon)$). De agora em diante, seja $\mathcal{U} := \Theta^\epsilon(T_\epsilon)$. Considere a forma de contato *pull-back* $\lambda' := (\Theta^\epsilon)^*\lambda$ e repare que a espinha de T_ϵ contém uma órbita fechada $L' = (y', T')$ do campo de Reeb $X_{\lambda'}$ tal que $pT_{\min}$ é o período mínimo de L' . Seja (V, Φ) um tubo de Martinet para a órbita fechada L' . Isto é, existe uma vizinhança aberta $V \subset T_\epsilon$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ e um difeomorfismo suave $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ tal que $\Phi^{-1}(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}) = y'(\mathbb{R})$, onde $B := B_r(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$, para algum $r > 0$. Além disso, se $(\theta, x, y) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ são coordenadas em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$, as formas de contato $\lambda', \lambda'_n := (\Theta^\epsilon)^*\lambda_n$ satisfazem

$$\begin{aligned} \lambda' &\simeq \Phi^*(\tilde{g}(d\theta + xdy)) \\ \lambda'_n &= g_n \lambda \simeq \Phi^*(g_n \cdot \tilde{g}(d\theta + xdy)) = \Phi^*(\tilde{g}_n(d\theta + xdy)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{g} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^*$, $\tilde{g}_n = g_n \cdot \tilde{g}$ e $\lambda_0 = d\theta + xdy$ é a forma de contato canônica em $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times B$. Vamos denotar a estrutura de contato induzida por λ_0 como ξ_0 . Em particular, $(\Phi|_{L'})_*(\xi') = \{0\} \times \mathbb{R}^2$, onde $\xi' = \ker \lambda'$. Diminuindo $\mathcal{U}$ se necessário, considere a composição

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

$\bar{\Phi} := \Theta^\epsilon \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathcal{U}$. Diremos que $(\mathcal{U}, \bar{\Phi})$ é um *p-tubo de Martinet*. Seja $N : \partial\mathbb{D} \rightarrow u_L^* \xi|_{\partial\mathbb{D}}$ a seção não-nula fixada acima satisfazendo $N(t) \in du_L|_{e^{2\pi it}}(T_{e^{2\pi it}}\mathbb{D})$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Já observamos no Capítulo 1 que podemos escolher o tubo de Martinet (V, Φ) de maneira que o *p-tubo* de Martinet $(\mathcal{U}, \bar{\Phi})$ é tal que $\bar{\Phi}_*(\partial_x) = N(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Repare que a espinha $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ contém uma órbita fechada $\bar{L} = (\bar{y}, pT_{\min})$ do campo de Reeb $X_{\tilde{g}\lambda_0}$. Repare que $pT_{\min}$ é o período mínimo de $\bar{L}$.

Sejam $Z : \mathbb{D} \rightarrow u_L^* \xi$ uma seção não-nula e α_Z a classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $y^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida por $Z|_{\partial\mathbb{D}}$. Considere $\bar{Z} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\} \rightarrow \bar{y}^* \xi_0$ induzida por Z e $\bar{\Phi}$ e denote por $\alpha_{\bar{Z}}$ a classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $\bar{y}^* \xi_0 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida por $\bar{Z}$. Por construção, $\rho(\bar{L}, \alpha_{\bar{Z}}) = \rho(L^p, \alpha_Z) < 1$. Seja α_x a classe de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas do fibrado $\bar{y}^* \xi_0 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida por ∂_x . Lembre que $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. Isto significa que $\text{wind}(N, Z|_{\partial\mathbb{D}}) = 1$ e, portanto, $\text{wind}(\partial_x, \bar{Z}) = 1$. Pelo Corolário 3.11 em [35]²⁵, $\text{wind}(\partial_x, \bar{Z}) = 1$ e $\rho(\bar{L}, \alpha_{\bar{Z}}) < 1$ implicam $\rho(\bar{L}, \alpha_x) < 0$. Este fato será fundamental para a conclusão do argumento.

Por abuso de notação, denote por $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb para a forma de contato $\tilde{g}\lambda_0$. Seja Ψ' uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $\bar{y}^* \xi_0 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ na classe α_x . A aplicação fluxo linearizado $d\phi_{Tt}|_{\xi_0(\bar{y}(0))} : \xi_0(\bar{y}(0)) \rightarrow \xi_0(\bar{y}(Tt))$, onde $T = pT_{\min}$, restrita à estrutura de contato é representada, em relação à trivialização $\Psi' : \bar{y}^* \xi_0 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, pela curva de matrizes simpléticas $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Sp}(1)$ satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e

$$t \mapsto \varphi(t) = \Psi'_t \circ d\phi_{Tt}|_{\xi_0(\bar{y}(0))} \circ (\Psi'_0)^{-1}.$$

Novamente existem funções suaves θ , Δ e f associadas à aplicação φ . Lembre que Δ é 1-periódica. Sabemos que $\rho(\bar{L}, \alpha_x) < 0$ implica $\Delta(s) < 0$ ²⁶, para todo $s \in [0, 1]$. Esta observação pode ser interpretada da seguinte forma, se existe $h \in \xi_0(\bar{y}(0))$ tal que $d\phi_{mT}(\bar{y}(0))(h) = h$, para algum $m \in \mathbb{N}$, como $\Delta(s) < 0$, para todo $s \in [0, 1]$, temos que

$$\text{wind}_{t \in [0, mT]}(d\phi_{mT}(\bar{y}(0))(0, h)) < 0,$$

onde wind é computado em relação à trivialização simplética induzida por $\sigma = \{\partial_x, \partial_y\}$. Nosso último passo é exibir um $h \in \xi_0(\bar{y}(0))$. A existência deste $h \in \xi_0(\bar{y}(0))$ contradiz as propriedades de não-enlaçamento das órbitas fechadas P_n em relação à L .

Seja $(\mathcal{U}, \bar{\Phi})$ o *p-tubo de Martinet* definido acima. Lembre que $\mathcal{U} \subset M$ é uma vizinhança aberta de L e $\bar{\Phi} := \Theta^\epsilon \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathcal{U}$ é um *p-recobrimento*. Lembre que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ é uma vizinhança pequena de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$. Seja $\bar{L} = (\bar{y}, T = pT_{\min})$, a órbita fechada contida na espinha $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$. Para simplificar a notação, escreva $U = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$. Lembre que $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

²⁵**Corolário 3.11 ([35]):** Seja $L = (y, T_{\min})$ um p-nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$. Se α_v, α_N são, respectivamente, as classes de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas induzidas pelas seções Z e N , e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então $\rho(P, \alpha_v) = \rho(P, \alpha_N) + 1$.

²⁶De fato, suponha que $\Delta(s) \geq 0$, para todo $s \in [0, 1]$. Então, $\Delta(f^k(s)) \geq 0$, para todo $k \geq 1$, e pela definição de número de rotação transversal, concluímos $\rho(\bar{L}, \alpha_x) \geq 0$.

denota o fluxo de Reeb associado à forma de contato $\tilde{g}\lambda_0$. Fixe $N > 0$. É possível construir uma vizinhança $U(N)$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ tal que se $w \in U(N)$, a trajetória $\phi_t(w) \in U$, para todo $t \in [0, N]$. Diminuindo $U(N)$, se necessário, podemos supor que o fluxo de Reeb $\{\phi_{n,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ da forma de contato $\tilde{g}_n\lambda_0$ satisfaz $\phi_{n,t}(w) \in U$, para todo $w \in U(N)$, quando $n \in \mathbb{N}$ é grande.

Repare que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $x_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}$, onde $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$ é a sequência obtida na demonstração do Lema 2.34. Estamos assumindo que

$$x_n(pT_n \cdot) \rightarrow y(qT \cdot), \quad (2.59)$$

$q > p$, na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$. Lembre que $T = pT_{\min}$. Como $\tilde{g}_n\lambda_0 = \bar{\Phi}^*\lambda_n$, existem $y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ tais que y_n são $T'_n = pT_n$ -periódicas, $Q_n = (y_n, T'_n) \in \mathcal{P}(\tilde{g}_n\lambda)$ e $x_n(pT_n t) = \bar{\Phi}(y_n(pT_n t))$. Em vista de (2.59), podemos supor que

$$y_n(pT_n \cdot) \rightarrow \bar{y}(qT \cdot), \quad (2.60)$$

isto é, Q_n converge para $\bar{L}^q$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$. Repare que $T'_n \rightarrow qT$. Fixe $N > qT + 1$ e escolha uma vizinhança $U(N)$. Eliminando uma quantidade finita de termos, podemos supor que $y_n(\mathbb{R}) \subset U(N)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $Q_n = (y_n, T'_n) \in \mathcal{P}(\tilde{g}_n\lambda)$. Denotaremos por $(0, w_n)$ a intersecção de $y_n(\mathbb{R})$ com a seção $0 \times B_\epsilon(0)$ nas coordenadas acima. Segue que $w_n \rightarrow 0$ e, escolhendo uma subsequência se necessário, $w_n/\|w_n\| \rightarrow h \neq 0 \in \mathbb{R}^2$. Vamos provar que $d\phi_{qT}(0, h) = (0, h)$.

O argumento a seguir é uma adaptação da Seção 6.2 em [36]. Sejam $\Pi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção dada por $\Pi(t, w) = w$ e Π_* a projeção induzida no espaço tangente. Como $Q_n = (y_n, T'_n)$ é periódica, então $\phi_{n, T'_n}(0, w_n) = (0, w_n)$. Pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange vale a seguinte estimativa

$$\|\phi_{n,t}(0, w_n) - \phi_{n,t}(0, 0) - d\phi_{n,t}(0, 0) \cdot (0, w_n)\| \leq C_n \|w_n\|^2,$$

para todo $t \in [0, N]$, onde C_n é a sup-norma da segunda derivada de $\phi_{n,t}$ em $U(N)$ e $t \in [0, N]$. Uma vez que $\phi_{n,t} \rightarrow \phi_t$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty([0, N] \times U(N), U)$, podemos limitar C_n , para n grande, por duas vezes a sup-norma da segunda derivada de ϕ_t em $U(N)$ e $t \in [0, N]$. Projetando sobre $\mathbb{R}^2$ e usando que $\phi_{n,t}(0, 0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\|\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n)) - \Pi_* d\phi_{n,t}(0, 0) \cdot (0, w_n)\| \leq K_1 \|w_n\|^2, \quad \text{para todo } t \in [0, N], \quad (2.61)$$

quando $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande. Escolhendo

$$\epsilon_n^{(1)} := \sup_{\substack{t \in [0, N] \\ \|v\|=1}} \{\|d\phi_{n,t}(0, 0)(v) - d\phi_t(0, 0)(v)\|\},$$

obtemos

$$\|\Pi_* d\phi_{n,t}(0, 0) \cdot (0, w_n) - \Pi_* d\phi_t(0, 0) \cdot (0, w_n)\| \leq \epsilon_n^{(1)} \|w_n\|, \quad \text{para todo } t \in [0, N]. \quad (2.62)$$

Capítulo 2. Existência de órbita fechada não-enlaçada a uma órbita dada.

Observe que $\epsilon_n^{(1)} \rightarrow 0$. Seja $\|(w_n/\|w_n\|) - h\| = \epsilon_n^{(3)}$, então $\epsilon_n^{(3)} \rightarrow 0$ e

$$\|d\phi_t(0,0)(0, w_n) - \|w_n\|d\phi_t(0,0)(0, h)\| \leq \|d\phi_t(0,0)\| \cdot \|w_n - (\|w_n\|h)\| = \epsilon_n^{(2)}\|w_n\|, \quad (2.63)$$

onde $\epsilon_n^{(2)} = \epsilon_n^{(3)} \cdot K_2$ e K_2 é o supremo da sup-norma de $d\phi_t(0,0)$ sobre $t \in [0, N]$. Observe que $\epsilon_n^{(2)} \rightarrow 0$. Combinando (2.62) e (2.63), temos

$$\begin{aligned} \|\Pi_* d\phi_{n,t}(0,0) \cdot (0, w_n) - \|w_n\| \{\Pi_* d\phi_t(0,0) \cdot (0, h)\}\| &\leq \\ \|\Pi_* d\phi_{n,t}(0,0) \cdot (0, w_n) - \Pi_* d\phi_t(0,0) \cdot (0, w_n)\| &+ \\ + \|\Pi_* d\phi_t(0,0) \cdot (0, w_n) - \|w_n\| \Pi_* d\phi_t(0,0) \cdot (0, h)\| & \\ \leq \|w_n\| \left(\epsilon_n^{(1)} + \epsilon_n^{(2)} \right), & \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde $\epsilon_n^{(1)} + \epsilon_n^{(2)} \rightarrow 0$. Colocando (2.61) e (2.64) juntas e dividindo por $\|w_n\| \neq 0$, temos

$$\left\| \frac{\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n))}{\|w_n\|} - \Pi_* d\phi_t(0,0)(0, h) \right\| \leq \left(K_1 \|w_n\| + \epsilon_n^{(2)} + \epsilon_n^{(2)} \right) \rightarrow 0, \quad (2.65)$$

para $t \in [0, N]$ e n grande. Como $\phi_{n,T'_n}(0, w_n) = (0, w_n)$, para $t = T'_n$, (2.65) implica que

$$\left\| \left(0, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right) - d\phi_{T'_n}(0,0)(0, h) \right\| \rightarrow 0, \quad (2.66)$$

quando $n \rightarrow \infty$, isto é, $d\phi_{qT}(0, h) = (0, h)$, visto que $T'_n \rightarrow qT$. Já observamos que neste caso $\text{wind}_{t \in [0, qT]}(d\phi_t(0,0)(0, h)) < 0$.

Escolha $n \in \mathbb{N}$ de maneira que $K_1\|w_n\| + \epsilon_n^{(1)} + \epsilon_n^{(2)}$ seja menor que o ínfimo de $\|d\phi_t(0,0)(0, h)\|$ sobre $t \in [0, N]$. A estimativa (2.65) implica

$$\begin{aligned} \text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n))) &= \text{wind}_{t \in [0, T'_n]} \left(\frac{\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n))}{\|w_n\|} \right) \\ &= \text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(\Pi_* d\phi_t(0,0)(0, h)) \\ &= \text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(d\phi_t(0,0)(0, h)), \end{aligned} \quad (2.67)$$

Como as órbitas fechadas Q_n não estão enlaçadas em $\bar{L}$, isto é, $\text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n))) = 0$, concluímos, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$0 = \text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(\Pi(\phi_{n,t}(0, w_n))) = \text{wind}_{t \in [0, T'_n]}(\Pi_* d\phi_t(0,0)(0, h)) < 0.$$

Esta contradição mostra que as órbitas fechadas Q_n não convergem para um recobrimento $\bar{L}^q$, $q > p$, da órbita fechada $\bar{L}$. Isto conclui a prova de que a órbita fechada P_0 , conforme Lema 2.34, é geometricamente distinta de L . Desta forma, $\bar{P} = P_0$ é a órbita fechada desejada e isto encerra a demonstração do Teorema 2.1.

Capítulo 3

Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

Neste capítulo, estudamos a dinâmica de Reeb associada a uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo ao toro. Assumiremos que o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb e a estrutura de contato satisfaz $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Nosso primeiro resultado é uma existência implicada de órbita fechada. Se não existem órbitas fechadas contidas em ∂M e o fluxo de Reeb possui uma órbita fechada L p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, verificamos que existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P}$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$. O segundo resultado é uma caracterização do toro sólido. Quando a forma de contato é não-degenerada e o campo de Reeb é *verticalmente não-nulo* sobre ∂M (veja Definição 3.7), então ou existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P}$ satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$ ou M é folheada por discos transversais ao campo de Reeb. Em particular, M é o difeomorfo a um toro sólido. Neste caso, existe uma órbita fechada não-contrátil em M que é ponto fixo da aplicação de retorno induzida pela folheação. Este teorema mostra que a dinâmica de Reeb sobre o bordo ∂M impõe restrições sobre a dinâmica no interior e, em alguns casos, determina inclusive a topologia de M .

3.1 Resultados Principais

Sejam λ uma forma de contato definida numa 3-variedade compacta M . Lembre que $\xi = \ker \lambda$ é a estrutura de contato, X_λ é o campo de Reeb, $\mathcal{P}(\lambda)$ é o conjunto das órbitas fechadas de Reeb e $\mathcal{P}^c(\lambda)$ é o conjunto das órbitas fechadas (de Reeb) contráteis. Recorde também que uma órbita fechada prima (período mínimo) $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é um p -nó trivial se o mergulho $y_{T_{\min}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ definido por $y_{T_{\min}}(t) = y(T_{\min}t)$ é um p -nó trivial, isto é, se existe uma imersão $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho em $M \setminus y(\mathbb{R})$ e $v|_{\partial \mathbb{D}}$ é uma aplicação de p -recobrimento. Neste caso, v é um p -disco para $y_{T_{\min}}$ (e para L).

Dizemos que uma superfície S mergulhada em uma variedade de contato M é *invariante*

pelo fluxo de Reeb (ou o fluxo de Reeb é tangente à S) se o campo de Reeb X_λ satisfaz $X_\lambda(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$. Seguindo [9, 10, 42], fixamos a nossa atenção aos casos em que o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb.

Nosso primeiro resultado principal é motivado pela trabalho de Taubes e Hutchings em [42]. Neste artigo, os autores provam a *Conjectura de Weinstein* para 3-variedades cujo bordo é invariante pelo fluxo de Reeb. Esta conjectura afirma que $\mathcal{P}(\lambda)$ é não-vazio. Podemos questionar se a presença de órbitas fechadas de Reeb com certas propriedades dinâmicas e topológicas força a dinâmica de Reeb a admitir outras órbitas fechadas. Esta pergunta é parcialmente respondida pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo ∂M é difeomorfo a $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Suponha, além disso, que o bordo é invariante pelo fluxo de Reeb e não possui órbitas fechadas de Reeb. Se existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então existe uma órbita fechada $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\rho(\bar{P}) = 1$.*

Na prova do teorema acima, construiremos um *preenchimento de Dehn*¹ para M .

Definição 3.2 (Preenchimento de Dehn). *Seja N uma 3-variedade compacta tal que $\partial N \stackrel{\text{difeo}}{\simeq} \mathbb{T}^2$. Se ν é uma direção² sobre ∂N e $V_\nu = S^1 \times \mathbb{D}$ é um toro sólido, o **preenchimento de Dehn** de N na direção ν é a 3-variedade fechada $N_\nu = N \cup_{\partial N} V_\nu$ resultante da identificação $\partial N \simeq \partial V_\nu$ tal que ν é o bordo do disco $\{\phi_0\} \times \mathbb{D}$ em V_ν , para algum $\phi_0 \in S^1$. Quando N está munida de uma forma de contato λ , diremos que N_ν é um **preenchimento de Dehn de contato** se existe uma forma de contato (suave) $\tilde{\lambda}$ definida em N_ν cuja restrição $\tilde{\lambda}|_N$ coincide com λ .*

Seja M uma 3-variedade satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1. Considere um preenchimento de Dehn M_ν para M , para alguma direção ν sobre ∂M . Existe uma extensão natural da forma de contato λ , ainda denotada por λ , sobre M_ν (veja Seção 3.3). Como, por hipótese, $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ está contida em $M \subset M_\nu$, é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, e satisfaz $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, dispomos de todas as hipóteses do Teorema 2.1 do Capítulo 2, exceto pela condição sobre a *primeira classe de Chern*, isto é, não sabemos se $c_1|_{\pi_2(M_\nu)}(\xi) \equiv 0$ ³. O restante da prova do Teorema 3.1 é, essencialmente, um corolário da demonstração do Teorema 2.1. Novamente dividiremos a prova em dois casos: *não-degenerado* e *degenerado*. Pelo Lema 2.5, o primeiro caso corresponde à proposição seguinte.

Teorema 3.3. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo ∂M é difeomorfo ao toro. Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Suponha, além disso, que o bordo é invariante pelo fluxo de Reeb e não possui órbitas fechadas de Reeb. Se existe*

¹Em inglês, *Dehn filling*.

²Uma direção ν sobre ∂N é uma classe de isotopia de curvas fechadas simples γ em ∂N tais que $[\gamma] \in \pi_1(\partial N)$ é não-trivial.

³Veremos que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ é suficiente para a nossa estratégia de demonstração.

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

uma órbita fechada $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$, então existe uma órbita fechada $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ geometricamente distinta de L e não-enlaçada em L satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$.

Existe uma extensão de λ sobre o preenchimento de Dehn. Pelo Apêndice E, podemos supor que esta extensão é não-degenerada. Neste contexto, é possível repetir a construção feita na Seção 2.3.2. A seguir, resumimos estas ideias. Como L é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, em $M \subset M_\nu$, pelo Apêndice B existe um p -disco especial $\mathcal{D}$ contido em $M \subset M_\nu$ para a órbita fechada L . Dado $J \in \mathcal{J}(\lambda)$, podemos definir uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ em $\mathbb{R} \times M_\nu$ satisfazendo

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_\lambda(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (3.1)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M_\nu$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times M_\nu$. Escolhendo $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ (genérico) adequadamente, existe uma família de Bishop $\mathcal{M}_J$ constituída de discos $\tilde{J}$ -holomorfos mergulhados $\tilde{u} := (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ com condição de bordo em $\mathcal{D}$. A hipótese de que o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb garante que a família de Bishop não pode intersectar ∂M (veja Lema 3.15). Isto é uma consequência da *Teoria de Interseção de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* introduzida por McDuff em [49]. Desta forma, a análise de *bubbling-off* da família de Bishop realizada nas Seções 2.3.2 e 2.3.3 do capítulo anterior está contida no interior da 3-variedade $M \subset M_\nu$. Isto implica, em particular, que a órbita fechada $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ fornecida pela tese da Proposição 2.1 está contida em $M \setminus \partial M$ e satisfaz as condições da tese do Teorema 3.1.

O caso degenerado é uma consequência da Proposição 3.3 e do *Teorema de Ascoli-Arzelà*. Como não existem órbitas fechadas contidas em ∂M , é possível provar que λ não possui órbitas fechadas com período pequeno perto de ∂M . Isto implica, por argumento análogo ao do Apêndice E, que podemos aproximar λ por formas de contato que são não-degeneradas no complementar de uma vizinhança pequena de ∂M . Usando aproximações arbitrariamente próximas, obtemos uma sequência de órbitas fechadas com períodos uniformemente limitados e uma aplicação do *Teorema de Ascoli-Arzelà* conclui a demonstração.

O nosso próximo resultado é motivado por [9]. Neste artigo, Eliashberg e Hofer provam que se o cilindro sólido $[0, 1] \times \mathbb{D}$ está munido de uma forma de contato λ que é trivial perto do bordo⁴, então ou $[0, 1] \times \mathbb{D}$ é folheado por discos transversais ao campo de Reeb ou existe uma órbita fechada de Reeb contida em $[0, 1] \times \mathbb{D}$. Este resultado mostra que as órbitas fechadas, neste caso, estão associadas a uma dinâmica de Reeb mais complexa. Usando técnicas introduzidas por Hofer, Wysocki e Zehnder em [19, 21, 23, 24], e a *teoria de planos rápidos* introduzida por Hryniewicz em [33], fomos capazes de estudar a dinâmica de Reeb de uma 3-variedade de contato cujo bordo é invariante pelo fluxo e admite uma forma normal local que explicaremos adiante (Definição 3.6). Supondo que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ e que o campo de Reeb é verticalmente não-nulo sobre o bordo (Definição 3.7), provamos que ou existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ satisfazendo $\mu_{CZ}(\bar{P}) = 2$ ou M é folheada por discos transversais ao campo de Reeb.

⁴Isto é, perto do bordo $\lambda = dz + xdy$, onde $z \in [0, 1]$ e $(x, y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Antes de enunciarmos o resultado comentado no parágrafo anterior, vamos discutir a forma normal mencionada acima. Seja $\Lambda = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ uma faixa em $\mathbb{R}^2$. Dado $y \in \mathbb{R}$, considere $f_y : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto \frac{x^2}{1 - x^2} + y.$$

Denote por $\text{gr}(f_y)$ o gráfico de f_y . É possível verificar que

$$\{x = \pm 1\} \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \text{gr}(f_y)$$

define uma folheação F da faixa Λ (veja [18]). Note que F é preservada pela translação $U(x, y) = (x, y + 1)$. Isto implica que F induz uma folheação F_o em $[-1, 1] \times S^1$, onde S^1 é o quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A folheação F_o em $[-1, 1] \times S^1$ é chamada uma *componente de Reeb*. É natural estender a noção de componentes de Reeb para folheações sobre superfícies regulares. Seja S uma superfície regular e $\mathcal{F}$ uma folheação em S , dizemos que $\mathcal{F}$ possui uma *componente de Reeb* se existe um anel $\mathcal{A}$ contido em S e um homeomorfismo $\Phi : (\mathcal{A}, \mathcal{F}|_{\mathcal{A}}) \rightarrow ([-1, 1] \times S^1, F_o)$ preservando as respectivas folheações. Estamos interessados no caso em que a folheação em questão é a *folheação característica* sobre um toro $\mathbb{T}^2$ mergulhado em uma 3-variedade M munida de uma forma de contato λ . Denotamos a folheação característica neste caso por $\mathcal{F}_\xi^{\mathbb{T}^2}$, onde $\xi = \ker \lambda$ é a estrutura de contato.

Definição 3.4. *Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Um toro $\mathbb{T}^2$ mergulhado em M é dito **normal** se $\mathcal{F}_\xi^{\mathbb{T}^2}$ não possui nem singularidades e nem componentes de Reeb. Diremos também que a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathbb{T}^2}$ é normal.*

Exemplo 3.5. Seja $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$, nas coordenadas cilíndricas (z, r, θ) , a forma de contato padrão em $\mathbb{R}_*^3 := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r \neq 0\}$. Seja $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_*^3 \rightarrow \mathbb{R}_*^3$ a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}_*^3$ tal que $g(n, (z, r, \theta)) = (z + n, r, \theta)$. Denote por $\mathbb{T} := \mathbb{R}_*^3 / g$ o espaço das órbitas de g . Note que a forma de contato (padrão) $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$ e, portanto, a estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$, descem para $\mathbb{T}$. O quociente $\mathbb{T}$ munido de λ_0 é uma 3-variedade de contato. A forma de contato $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$ definida em $\mathbb{T}$ é (também) denominada *forma de contato padrão*. Fixe $r_0 > 0$ e seja $T_{r_0} = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = r_0\}$. Como $\xi_0 = \text{span}\{\partial_r, r^2 \partial_z - \partial_\theta\}$ e o par $\{\partial_\theta, \partial_z\}$ trivializa o fibrado tangente do toro T_{r_0} , o campo $r_0^2 \partial_z - \partial_\theta$ é uma seção suave e não-nula da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{T_{r_0}}$, isto é, T_{r_0} é normal. Observe que a situação acima é, na verdade, um caso particular do seguinte. Sejam $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ e $T_f = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\}$. Como o fibrado tangente de T_f coincide com $\text{span}\{f_\theta \partial_r + \partial_\theta, f_z \partial_r + \partial_z\}$, o campo $\vartheta(z, \theta) \partial_r + f(z, \theta)^2 \partial_z - \partial_\theta$ pertence à $\mathcal{F}_\xi^{T_f}$. Aqui $\vartheta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ satisfaz $(z, \theta) \mapsto \vartheta(z, \theta) = f(z, \theta)^2 f_z(z, \theta) - f_\theta(z, \theta)$. Como $f(z, \theta)^2 \partial_z - \partial_\theta$ é não-nulo, segue que $\vartheta(z, \theta) \partial_r + f(z, \theta)^2 \partial_z - \partial_\theta$ é não-nulo e, portanto, T_f é normal. $\square$

Sejam $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ e T_f tais como no Exemplo 3.5. Frequentemente, usaremos as notações $T_f^- := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r \leq f(z, \theta)\}$ e $\mathcal{N}^-(T_f) = \mathcal{N}(T_f) \cap T_f^-$, onde $\mathcal{N}(T_f) \subset \mathbb{T}$ é uma vizinhança aberta de T_f . Chamamos $\mathcal{N}^-(T_f)$ de uma *vizinhança interior* ao

toro T_f .

Definição 3.6. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo ∂M é difeomorfo ao toro. Sejam $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ e $h : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathbb{R}^*$ funções suaves. Dizemos que M admite um **modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo** se existe uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(\partial M) \subset M$ do bordo e um contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ satisfazendo $\Phi^*\lambda = h\lambda_0$, onde $\lambda_0 = dz + r^2d\theta$ é a forma de contato padrão em $\mathbb{T}$. Em particular, quando $h(\mathcal{N}^-(T_f)) > 0$ (ou $h(\mathcal{N}^-(T_f)) < 0$), dizemos que M admite um **modelo local do tipo (f, h^+) (ou (f, h^-)) próximo ao bordo**. O contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ será chamado **forma normal local** do bordo.*

Suponha que uma 3-variedade M com bordo ∂M difeomorfo ao toro e munida de uma forma de contato λ admita um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo. Seja $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ o contactomorfismo satisfazendo $\Phi^*\lambda = h\lambda_0$, conforme Definição 3.6. Como Φ é um contactomorfismo estrito (ou seja, preserva as formas de contato), então $X = (\Phi^{-1})_*(X_\lambda)$ é o campo de Reeb para a forma de contato $h\lambda_0$, isto é, $X = X_{h\lambda_0}$.

Definição 3.7. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade M cujo bordo ∂M é difeomorfo ao toro. Suponha que M admita um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo. Diremos que M é **verticalmente não-nula sobre o bordo** se o campo de Reeb $X_{h\lambda_0}$ satisfaz $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) \neq 0$. Em particular, se $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) > 0$ (ou $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) < 0$), dizemos que M é **verticalmente positiva (ou negativa) sobre o bordo** (veja Figura 3.1).*

Figura 3.1: Exemplo de 3-variedade M verticalmente não-nula sobre o bordo.

Vamos definir a noção de *número de auto-enlaçamento sobre o bordo*. Seja M uma 3-variedade compacta com bordo difeomorfo ao toro e munida de uma forma de contato λ . Denote por $\xi = \ker \lambda$ a estrutura de contato induzida por λ . Considere $\sigma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial M$ um nó trivial transversal à estrutura de contato ξ e seja $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ um mergulho tal que $u(e^{2\pi it}) = \sigma(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$ próximo de $r = 1$ e defina um nó trivial $\bar{\sigma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M$ dado

por $\bar{\sigma}(t) = u(re^{2\pi it})$. O número de auto-enlaçamento sobre o bordo $\text{sl}_\partial(\sigma)$ do nó trivial σ e, por definição, $\text{sl}_\partial(\sigma) = \text{sl}(\bar{\sigma})$. Essencialmente, $\text{sl}_\partial(\sigma)$ é o número de auto-enlaçamento de uma perturbação de σ arbitrariamente próxima.

Antes de enunciarmos o segundo resultado deste capítulo, precisamos da noção de *nó trivial transversal simplesmente enlaçado*. Sejam λ uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade M . Suponha que M que admita um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo e seja $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ o contactomorfismo dado pela Definição 3.6. Suponha que $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial M$ é um nó trivial em M transversal à estrutura de contato tal que $\text{sl}_\partial(\tilde{\sigma}) = -1$ e a curva $\sigma := \Phi^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ coincide com o nó mergulhado $t \mapsto (1/2, f(t, 1/2), t)$, dizemos que $\tilde{\sigma}$ é um *nó trivial transversal simplesmente enlaçado*. Neste caso, diremos também que a 3-variedade M possui um *nó trivial transversal simplesmente enlaçado*.

Estamos em condições de enunciar o nosso próximo resultado principal:

Teorema 3.8. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro. Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Suponha, além disso, que o bordo é invariante pelo fluxo de Reeb e M admite um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo. Se M é verticalmente não-nula sobre o bordo e possui um nó trivial simplesmente enlaçado, então vale alguma das seguintes alternativas:*

- (i) *existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ e um disco $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $u(e^{2\pi it}) = \bar{x}(\bar{T}t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tais que $u|_{\mathring{\mathbb{D}}} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow M^5$ é transversal ao campo de Reeb e $\mu_{CZ}(\bar{P}, u) = 2$;*
- (ii) *existe um difeomorfismo $\mathcal{H} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, é transversal ao campo de Reeb e $\mathcal{H}(\cdot, \partial\mathbb{D})$ é difeomorfo a ∂M . Neste caso, existe uma órbita fechada de Reeb que é ponto fixo da aplicação de retorno induzida pela folheação.*

Antes de explicarmos a nossa estratégia de demonstração, é conveniente observar que o índice μ_{CZ} de uma órbita fechada permanece invariante quando multiplicamos a forma de contato λ por -1 . Esta observação trivial permite simplificar a prova do Teorema 3.8 uma vez que, se M é uma 3-variedade de contato que admite um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo, considerando $-\lambda$, se necessário, podemos supor M admite um modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo. Assim, dividimos a demonstração do Teorema 3.8 em (apenas) dois casos. A saber, o caso negativo, isto é, $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) < 0$, e o caso positivo, isto é, $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) > 0$. O caso negativo corresponde à seguinte proposição.

Proposição 3.9. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro. Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Suponha, além disso, que o bordo é invariante pelo fluxo de Reeb e M admite um modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo. Se M é verticalmente negativa sobre o bordo e possui um nó trivial simplesmente enlaçado, então existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ e um disco $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $u(e^{2\pi it}) = \bar{x}(\bar{T}t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tais que $u|_{\mathring{\mathbb{D}}} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow M$ é transversal ao campo de*

⁵Usamos a notação $\mathring{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}$.

Reeb e $\mu_{CZ}(\bar{P}, u) = 2$.

Nosso primeiro passo na demonstração da proposição acima é construir um *preenchimento de Dehn* $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ para a 3-variedade M . Aqui ν é uma direção sobre ∂M e V_ν é um toro sólido. Tal como na prova do Teorema 3.1, vamos estender a forma de contato sobre o complementar $\mathring{V}_\nu := M_\nu \setminus M$. Esta extensão será feita de maneira que: (1) *exista uma órbita fechada de Reeb P contida na espinha de V_ν* e (2) *as órbitas fechadas contidas em V_ν estejam enlaçadas em P* . Repare que, em geral, esta extensão de λ , ainda denotada por λ , poderia induzir uma estrutura de contato *overtwisted*⁶. Além disso, não sabemos se $c_1|_{\pi_2(M_\nu)}(\xi := \ker \lambda) \equiv 0$. Veremos que as hipóteses de que $\lambda|_M$ é *tight* e $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ são suficientes para o argumento.

No Apêndice E, verificamos que é possível perturbar λ (agora definida sobre M_ν) de modo que a forma de contato perturbada coincida com λ sobre M e seja não-degenerada. O restante da prova do Teorema 3.8 é, essencialmente, uma aplicação dos métodos de *preenchimentos por discos* e análise de *bubbling-off* desenvolvidos por Hofer, Wysocki e Zehnder em [19, 21, 23, 24]. Veremos que a hipótese $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) < 0$ implicará que a órbita fechada P contida na espinha de V_ν satisfaz $\mu_{CZ}(P, u_P) \leq 1$, onde $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é um disco especial (mergulhado) satisfazendo $u_P(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Este disco será construído no Lema 3.20. Esta construção é possível porque estamos supondo que existe um *nó trivial transversal simplesmente enlaçado*. A análise de *bubbling-off* de uma *família de Bishop* com condição de contorno em $\mathcal{D} := u_P(\mathbb{D})$ produz uma órbita fechada satisfazendo as condições da tese da Proposição 3.9. Esta análise é análoga àquela usada na prova da Proposição 2.1.

A proposição a seguir corresponde ao caso positivo do Teorema 3.8.

Proposição 3.10. *Seja λ uma forma de contato tight e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro. Suponha que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Suponha, além disso, que bordo é invariante pelo fluxo de Reeb e M admite um modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo. Se M é verticalmente positiva sobre o bordo e possui um nó trivial simplesmente enlaçado, então vale alguma das seguintes alternativas:*

- (i) *existe uma órbita fechada contrátil $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ e um disco $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $u(e^{2\pi it}) = \bar{x}(\bar{T}t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tais que $u|_{\mathring{\mathbb{D}}} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow M$ é transversal ao campo de Reeb e $\mu_{CZ}(\bar{P}, u) = 2$;*
- (ii) *existe um difeomorfismo $\mathcal{H} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, é transversal ao campo de Reeb e $\mathcal{H}(\cdot, \partial\mathbb{D})$ é difeomorfo a ∂M . Neste caso, existe uma órbita fechada de Reeb que é ponto fixo da aplicação de retorno induzida pela folheação.*

Tal como na prova da Proposição 3.9, construímos um *preenchimento de Dehn* M_ν para 3-variedade M e cuidadosamente estendemos a forma de contato sobre o complementar $\mathring{V}_\nu := M_\nu \setminus M$ de maneira que a forma de contato estendida possua uma órbita fechada P contida na espinha de V_ν . A hipótese $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) > 0$ implicará que a órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P, u_P) = 3$, onde $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é um disco especial para P (que será construído no Lema 3.23). Uma

⁶Isto é, poderia existir um disco *overtwisted* contido em V_ν .

análise de *bubbling-off* de uma *família de Bishop* com condição de contorno em $\mathcal{D} := u_P(\mathbb{D})$ ou produz uma órbita fechada satisfazendo as condições enunciadas no item (i) da proposição acima ou produz um plano rápido de energia finita mergulhado assintótico no (único) furo positivo em ∞ à órbita fechada P . A argumentação na construção do plano rápido é uma adaptação daquela apresentada na prova do Teorema 2.4 em [33] e do Teorema 1.3 em [39]. Um estudo da compacidade do espaço destes planos (veja Seção 3.4.3 para os detalhes) ou produz uma órbita fechada satisfazendo (i) ou fornece, pelo Teorema 1.76, uma *decomposição em livro aberto* $\mathcal{G} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow M_\nu$ cuja *encadernação* é a própria órbita fechada P e as folhas são transversais ao campo de Reeb. A interseção das folhas de $\mathcal{G}$ com M produz um difeomorfismo conforme o item (ii) acima.

3.2 Exemplos

Nosso objetivo nesta seção é apresentar exemplos de 3-variedades M que admitam um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo.

Exemplo 3.11. Sejam M uma 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro e λ uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida em M . Suponha que a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ seja normal (no sentido da Definição 3.4)⁷. Pelo Lema 4.3.1 e pela Proposição 4.3.2 em [18]⁸, o fato de $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ ser normal é equivalente à afirmação de que existe um difeomorfismo $\eta : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, uma *suspensão* de η no toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e um difeomorfismo $\Psi_0 : \partial M \rightarrow \mathbb{T}^2$ preservando as folheações. Em particular, existe uma família $\gamma_\tau : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \partial M$, $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de curvas mergulhadas transversais às folhas de $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$. Oriente γ_τ de maneira que $\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \gamma_\tau^* \lambda > 0$,

⁷O Lema 6.2 em [10] mostra que, se não existem órbitas fechadas (de Reeb) contidas em ∂M , então a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ é normal.

⁸A exposição a seguir é uma adaptação de [18]. Vamos introduzir o conceito de *suspensão* de difeomorfismos em $\text{Difeo}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) := \{\nu : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} : \nu \text{ é difeomorfismo}\}$. Seja $\nu \in \text{Difeo}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ preservando a orientação. Considere $\Sigma = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ e defina a ação $k : \Sigma \rightarrow \Sigma$ de $\mathbb{Z}$ em $\Sigma = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ dada por $(\varphi, t) \mapsto k(\varphi, t) = (f^k(\varphi), t + k)$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $f^k = f \circ \dots \circ f$ (k vezes). Como a ação de $\mathbb{Z}$ é livre, propriamente descontínua e de classe C^∞ , o quociente $\Sigma_\nu := \Sigma/\mathbb{Z}$ é uma superfície e a projeção $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma_\nu$ é um recobrimento regular. Note que as linhas $\{\varphi\} \times \mathbb{R}$, para todo $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, sobre Σ definem uma folheação F_0 invariante pela ação de $\mathbb{Z}$ no sentido de que se $l \in F_0$ é uma folha, então $k(l) \in F_0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Considere o seguinte resultado:

Lema ([18], Lema 3.1.3): Seja (Σ_0, F_0) uma superfície folheada e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ é um recobrimento regular induzido pela ação de $\mathbb{Z}$ em Σ_0 . Se F_0 é preservada pela ação de $\mathbb{Z}$, então existe uma folheação F em Σ tal que $F_0 = \pi^* F$. Além disso, se F_0 e π são de classe C^∞ , então F é de classe C^∞ .

Portanto, existe uma folheação F_ν no quociente Σ_ν induzida pela aplicação quociente $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma_\nu$. Dizemos que o par (Σ_ν, F_ν) é uma *suspensão* do difeomorfismo ν . Abusando da terminologia, diremos que a folheação F_ν é também uma suspensão de ν .

Lema ([18], Lema 4.3.1, Proposição 4.3.2): Seja $(\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathcal{F})$ um toro folheado. São equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) $\mathcal{F}$ é uma suspensão;
- (ii) $\mathcal{F}$ não contém componentes de Reeb;
- (iii) existe uma curva fechada em $\mathbb{T}^2$ transversal a cada folha em $\mathcal{F}$.

para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Escolha um campo de vetores não-nulo V tal que $\mathbb{R}V = \mathcal{F}_\xi^{\partial M}$. Vamos orientar V adequadamente. Recorde que a 3-variedade M admite uma vizinhança aberta de ∂M em M difeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times (1 - \epsilon, 1]$, para algum $\epsilon > 0$ ⁹. Sejam $\Phi : \mathbb{T}^2 \times (1 - \epsilon, 1] \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ um difeomorfismo e $\partial_n := \Phi_*(\partial_a)$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{T}^2 \times (1 - \epsilon, 1]$. Fixe $p \in \partial M$ e escolha $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de modo que $\gamma_\tau(t_0) = p$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Oriente $V(p)$ de modo que a tripla $\{V, \partial_n, \gamma'_\tau\}$ seja positivamente orientada em relação à orientação $\mathcal{O}_\lambda$ induzida por λ (na verdade, como M é uma 3-variedade, esta orientação depende somente da estrutura de contato). Como fixamos $p \in \partial M$ arbitrariamente, este procedimento induz uma orientação para V .

Tal como no Exemplo 3.5, sejam $\mathbb{R}_*^3 := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r \neq 0\}$ e $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_*^3 \rightarrow \mathbb{R}_*^3$ a ação dada por $g(n, (z, r, \theta)) = (z + n, r, \theta)$. Denotamos por $\mathbb{T} := \mathbb{R}_*^3/g$ o quociente induzido pela g . Lembre que $\mathbb{T}$ está munido da estrutura de contato $\xi_0 = \ker(dz + r^2 d\theta)$. No lema a seguir, construímos uma função $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ e um difeomorfismo entre ∂M e $T_f := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\}$ preservando as folheações características. A demonstração deste resultado é baseada em alguns lemas apresentados em [44].

Lema 3.12 ([44], Lema 4.4, Lema 4.5, Lema 5.3). *Seja M uma 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro. Seja λ uma forma de contato definida em M tal que $\xi = \ker \lambda$ é tight. Suponha que a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ é normal. Então existe*

- (i) uma função $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$;
- (ii) um toro $T_f = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\} \subset \mathbb{T}$;
- (iii) um difeomorfismo $\psi : \partial M \rightarrow T_f$ tal que $\psi_*(\mathcal{F}_\xi^{\partial M}) = \mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$ preservando a orientação das folheações características $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ e $\mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$.

Demonstração. Visto que $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ é normal, a Proposição 4.3.2 em [18] implica que $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ é a suspensão de um difeomorfismo de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (veja nota de rodapé da página anterior) e, portanto, existe um difeomorfismo $\eta : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Note que η preserva a orientação e, consequentemente, é isotópico à identidade. Escolha uma isotopia suave $F : [0, 1] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tal que

$$F(z, \theta) = \begin{cases} \theta, & \text{se } z \in [0, \epsilon]; \\ \eta(\theta), & \text{se } z \in [1 - \epsilon, 1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Fixe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F_z(z, \theta) + 2k\pi > 0$. Defina um campo de vetores X em $[0, 1] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ satisfazendo

$$X(z, \theta) = \partial_z - (F_z(z, \theta) + 2k\pi)\partial_\theta.$$

Uma vez que $F_z(z, \theta) = 0$, para todo $z \in [0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]$, existe uma extensão $\tilde{X}$, suave e periódica, do campo X para o domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. A extensão $\tilde{X}$ é dada explicitamente por $\tilde{X}(z + n, \theta) = X(z, \theta)$. Como $\tilde{X}(z + 1, \theta) = \tilde{X}(z, \theta)$, podemos restringir o campo $\tilde{X}$ ao toro $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para uma condição inicial $\beta_{\theta_0}(0) = (0, \theta_0) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, as linhas de fluxo deste campo são $\beta_{\theta_0}(t) = (t, -F(t, \theta_0) - 2k\pi \cdot t + 2\theta_0)$ e satisfazem $\beta_{\theta_0}(1) = (1, -F(1, \theta_0) - 2k\pi + 2\theta_0) =$

⁹Isto é o Teorema da Vizinhança do Bordo (veja [51, Corolário 3.5]).

$(0, -\eta(\theta_0) + 2\theta_0) = (0, \eta(\theta))$. Considere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (z, \theta) &\mapsto (F_z(z, \theta) + 2k\pi)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e defina um mergulho $\Psi_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ tal que $\Psi_1(z, \theta) = (z, f(z, \theta), \theta)$. Como existe um difeomorfismo $\Psi_0 : \partial M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, dado pela suspensão de $\eta : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, então $\psi := (\Psi_1 \circ \Psi_0)^{-1}$ é um difeomorfismo entre T_f e ∂M . Note que $\tilde{X}(z, \theta) = \partial_z - \frac{1}{f(z, \theta)^2} \partial_\theta$ e $\xi|_{T_f} = \text{span}\{\partial_r, f(z, \theta)^2 \partial_z - \partial_\theta\}$ e, portanto, $(\Psi_1)_*(\tilde{X})$ é colinear ao campo $\vartheta(z, \theta) \partial_r + f(z, \theta)^2 \partial_z - \partial_\theta \in \xi|_{T_f}$, onde $\vartheta(z, \theta) = f(z, \theta)^2 f_z(z, \theta) - f_\theta(z, \theta)$, e, portanto, $(\Psi_1)_*(\tilde{X}) \in \mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$. Isto mostra que ψ leva as folhas de $\mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$, nas folhas de $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$ preservando as orientações de $\mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$ e $\mathcal{F}_\xi^{\partial M}$. ■

Podemos remover um toro sólido de $\mathbb{R}^3$ e colar M no lugar. Mais precisamente, fixe $r, R \in \mathbb{R}_+^*$ com $r < R$ e considere $T(r, R) := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$. Seja $T_{\text{int}}(r, R)$ a componente limitada de $\mathbb{R}^3 \setminus T(r, R)$. Sabemos que existe um difeomorfismo $\psi : \mathbb{T}^2 \times [0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$. Podemos remover a região $T_{\text{int}}(r, R)$ e colar M pelo difeomorfismo $\psi|_{\mathbb{T}^2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \partial M$. Pela definição de formas diferenciais em variedades com bordo, podemos estender a forma de contato λ para o complementar $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{T_{\text{int}}(r, R)}$. O seguinte resultado será útil na conclusão deste exemplo.

Teorema 3.13 ([12], Teorema 2.5.23). *Sejam S_k , $k = 0, 1$, superfícies fechadas mergulhadas, respectivamente, nas 3-variedades de contato $(M_k, \xi_k = \ker \lambda_k)$. Seja $\tilde{\phi} : S_0 \rightarrow S_1$ um difeomorfismo tal que $\tilde{\phi}(\mathcal{F}_{\xi_0}^{S_0}) = \mathcal{F}_{\xi_1}^{S_1}$ e preserva a orientação de $\mathcal{F}_{\xi_0}^{S_0}$, $\mathcal{F}_{\xi_1}^{S_1}$. Então existem vizinhanças $\mathcal{N}(S_0)$, $\mathcal{N}(S_1)$ e um contactomorfismo $\tilde{\Phi} : \mathcal{N}(S_0) \rightarrow \mathcal{N}(S_1)$ tal que $\tilde{\Phi}(S_0) = S_1$ e $\tilde{\Phi}|_{S_0} = \tilde{\phi}$.*

Esboço da Demonstração: Identificando vizinhanças abertas de S_k com $S_k \times \mathbb{R}$, $k = 0, 1$, podemos estender $\tilde{\phi}$ sobre $S_k \times \mathbb{R}$. Esta extensão pode ser realizada de maneira que λ_0 e $\tilde{\phi}^* \lambda_1$ induzam a mesma orientação em $S_0 \times \mathbb{R}$. O truque de Moser permite construir uma isotopia ψ_t entre λ_0 e $\tilde{\phi}^* \lambda_1$ mantendo S_0 fixa. Então $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} \circ \psi_1$ é o contactomorfismo desejado. ■

Identifique $T_f \times \mathbb{R}$ e $\partial M \times \mathbb{R}$ com vizinhanças abertas de T_f e ∂M , respectivamente. Estenda o difeomorfismo ψ construído no lema anterior de maneira que $\psi_*(\partial_n) = \partial_r$, onde ∂_n denota a direção real em $\partial M \times \mathbb{R}$ e ∂_r é a direção radial em $\mathbb{T}$. Note que ∂_r, ∂_n são campos normais apontando para fora de T_f e ∂M , respectivamente. Seja V_{T_f} um campo (não-nulo) em T_f tal que $\mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f} = \mathbb{R}V_{T_f}$. Como $\mathcal{F}_{\xi_0}^{T_f}$ está positivamente orientada, então $\{V_{T_f}, \partial_r, \partial_\theta\}$ é um referencial positivo em T_f , isto é, $\lambda_0 \wedge d\lambda_0(V_{T_f}, \partial_r, \partial_\theta) > 0$. Por outro lado, se $\psi^* \lambda$ é o *pull-back* da forma de contato λ , temos

$$\psi^*(\lambda \wedge d\lambda)(V_{T_f}, \partial_r, \partial_\theta) = \lambda \wedge d\lambda(\psi_*(V_{T_f}), \psi_*(\partial_r), \psi_*(\partial_\theta)) = \lambda \wedge d\lambda(V, \partial_n, \gamma'_\tau) > 0,$$

para algum $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde V é um campo de vetores tal que $\mathcal{F}_\xi^{\partial M} = \mathbb{R}V$. Lembre que a orientação de V foi escolhida de maneira que $\{V, \partial_n, \gamma'_\tau\}$ seja um referencial positivo. Portanto, pelo Teorema 3.13, existe um contactomorfismo $\tilde{\Phi}$ entre vizinhanças abertas de ∂M e T_f . Note

que a extensão do difeomorfismo ψ feita acima mostra que $\tilde{\Phi}(\mathcal{N}^-(\partial M)) \subset T_f^- = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r \leq f(z, \theta)\}$. Em outras palavras, uma vizinhança aberta de ∂M é levada por $\tilde{\Phi}$ em uma vizinhança interior de T_f^- . Como $\tilde{\Phi}$ é contactomorfismo, existe $h : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $\Phi^*(h\lambda_0) = \lambda$. Portanto, considerando $\Phi = \tilde{\Phi}^{-1}$, temos provado que se uma 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo ao toro está munida de uma λ forma de contato *tight* e a folheação característica induzida por $\xi = \ker \lambda$ sobre o bordo é normal, então M admite um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo. $\square$

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Já observamos no início deste capítulo que a prova do Teorema 3.1 no caso não-degenerado (isto é, da Proposição 3.3) é, de certa forma, um corolário da demonstração da Proposição 2.6. Por esta razão, vamos recordar rapidamente qual foi a nossa estratégia de demonstração. Isto permitirá entender quais modificações são necessárias para a prova da Proposição 3.3. Para evitar confusões, considere o seguinte contexto: seja λ' uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa N . Suponha que $c_1|_{\pi_2(N)}(\xi' := \ker \lambda') \equiv 0$. Como hipótese da Proposição 2.6, dispúnhamos de uma órbita fechada $L' = (y', T'_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda')$, p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\mu_{CZ}(L'^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L') = -\frac{1}{p}$. Seja $u_{L'} : \mathbb{D} \rightarrow N$ um p -disco especial para L' . Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda')$ e defina uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ em $T(\mathbb{R} \times N)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_{\lambda'}(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (3.4)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times N$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times N$. Para uma escolha adequada de $J' \in \mathcal{J}(\lambda')^{10}$, existe uma família não-vazia de discos de energia finita, denominada *família de Bishop* e denotada por $\mathcal{M}_{J'}$, com condição de contorno no p -disco especial $\mathcal{D} := u_{L'}(\mathbb{D})$ (veja Seção 2.3.1). Lembre que as soluções em $\mathcal{M}_{J'}$ satisfazem

$$\begin{cases} \tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times N \text{ é um mergulho;} \\ \bar{\partial}_{\tilde{J}'}(\tilde{u}) = 0, \quad a(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, \quad u(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup L\}; \\ \text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1; \\ u(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset. \end{cases} \quad (3.5)$$

Recorde que escolhemos uma sequência $\tilde{u}'_n = (a'_n, u'_n) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ na *família de Bishop* $\mathcal{M}_J$ cujo conjunto dos pontos de *bubbling-off* é não-vazio e unitário, isto é, $\Gamma'_0 = \{z'_0\}$, para algum $z'_0 \in \mathbb{D} \setminus \partial\mathbb{D}$. Construimos uma sequência germinante $\tilde{v}'_n = (b'_n, v'_n) : B_{R'_n}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ satisfazendo

$$b'_n(z) = a'_n(z'_n + \delta'_n z) - a'_n(z'_n + 2\delta'_n), \quad v'_n(z) = u'_n(z'_n + \delta'_n z), \quad (3.6)$$

onde $R'_n \rightarrow +\infty$, $z'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z'_0$ e $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$ são sequências adequadamente escolhidas (veja Seção 2.3.2). Esta sequência possui um limite não-constante $v' : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times N$, onde $\Gamma' \subset \mathbb{C}$

¹⁰Lembre que J' é genérico. Veja a Seção 1.3.4.

é finito. Portanto, existe uma árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}'$ associada a $\tilde{v}'_n$ e $\tilde{v}'$. A escolha de $J \in \mathcal{J}(\lambda')$ genérico permitiu provar que $\mathfrak{F}'$ é constituída de apenas um plano de energia finita. Mais precisamente, $\Gamma' = \emptyset$ e $\tilde{v}' = (b', v') : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é um plano de energia finita. É muito importante observar que $\tilde{v}'$ é o limite, na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times N)$, de uma subsequência $\tilde{v}'_{n_k}$ da sequência germinante $\tilde{v}'_n$ definida em (3.6). Além disso, (3.6) implica que $\tilde{v}'$ pode ser aproximado por reparametrizações de discos de energia finita $\tilde{u}'_{n_k} = (a'_{n_k}, u'_{n_k}) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ na família de Bishop, quando $k \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande. Outro fato importante é que $\tilde{v}'$ é assintótico no único furo positivo em ∞ a uma órbita fechada contrátil $P'_0 = (x'_0, T'_0)$ geometricamente distinta de L' e não-enlaçada em L' satisfazendo $\mu_{CZ}(P'_0) = 2$.

Voltemos ao contexto da Proposição 3.3. Seja M_ν um *preenchimento de Dehn de contato* para M , onde ν é uma direção sobre ∂M (provaremos adiante que este preenchimento de Dehn existe). Vamos supor que M_ν é uma 3-variedade de contato fechada e conexa. Por hipótese, existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$ contida em M , p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, e satisfazendo $\mu_{CZ}(L^p) \leq 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$. Fixe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ para L . Tal como no esboço da prova da Proposição 2.6 apresentado acima, existe uma sequência $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ na família de Bishop $\mathcal{M}$ com condição de contorno no p -disco especial $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$ cujo conjunto de pontos de *bubbling-off* é não-vazio. Isto produz uma sequência germinante $\tilde{v}_n$ com limite não-constante $\tilde{v}$ e, pelo Apêndice C, existe uma árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$ associada a $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Se provarmos que a *projeção de $\mathfrak{F}$ em M_ν está contida*¹¹ em M , toda a construção feita na Seção 2.3.2 (e no Apêndice C) está restrita ao interior de M . Como as esferas furadas de energia finita em $\mathfrak{F}$ podem ser aproximadas por reparametrizações de discos de energia finita na família de Bishop, uma condição suficiente para que as projeções das esferas furadas de energia finita em $\mathfrak{F}$ estejam contidas em M é que não existam interseções entre os discos $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ e o toro invariante ∂M . No caso em que a projeção de $\mathfrak{F}$ em M_ν está contida em M , os limites assintóticos das esferas furadas de energia finita em $\mathfrak{F}$ também estão contidos em M . Em particular, temos que $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$, a órbita fechada da tese da Proposição 2.6, está contida em M . Isto mostra que precisamos somente verificar que não existem interseções entre os discos de energia finita na família de Bishop $\mathcal{M}_{J'}$ e o bordo ∂M . Isto será feito nos Lemas 3.14 e 3.15.

Preenchimento de Dehn

Seja λ uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo a toro. Como, por hipótese, não existem órbitas fechadas contidas em M , então M admite um modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo. Isto significa que existem $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$, um toro $T_f = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\}$, $h : \mathcal{N}^-(T_f) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^*$, uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(\partial M) \subset M$ de ∂M e um contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ satisfazendo $\Phi^*\lambda = h\lambda_0$, onde $\lambda_0 = dz + r^2d\theta$ é a forma de contato padrão em $\mathbb{T}$.

Vamos construir um preenchimento de Dehn M_ν , onde ν é uma direção sobre ∂M , da

¹¹Isto é, se $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$, onde $\Gamma \subset \mathbb{C}$ é finito, é uma esfera furada de energia finita contida na árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$, então $w(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \subset M$.

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

3-variedade M . Veremos que M_ν será constituído de 3 partes: (i) a 3-variedade M , (ii) um 3-anel $T(f, N) = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$, para algum $N \in \mathbb{R}_+^*$, e (iii) um toro sólido.

Fixe $N \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $N > \sup_{(z, \theta)} \{f(z, \theta)\}$, onde o supremo estende-se sobre $(z, \theta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Vamos colar a componente $T_N := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = N\}$ do bordo do 3-anel $T(f, N)$ com o bordo do toro sólido $T = S^1 \times \mathbb{D}$. Sejam (μ, ρ, ϕ) coordenadas em $T = S^1 \times \mathbb{D}$, onde $\mu \in S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(\rho, \phi) \in \mathbb{D}$ são coordenadas polares. Definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \vartheta : S^1 \times \partial\mathbb{D} &\rightarrow T_N \\ (\mu, 1, \phi) &\mapsto \vartheta(\mu, 1, \phi) = \left(\frac{\phi}{2\pi}, N, 2\pi\mu \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Seja $V = T(f, N) \cup_\vartheta T$ a 3-variedade resultante da colagem induzida por ϑ . Note que $V = T(f, N) \cup_\vartheta T$ é difeomorfa a um toro sólido. Agora vamos colar o bordo $T_f := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\}$ do toro sólido V com o bordo ∂M da 3-variedade M . A colagem entre os bordos T_f e ∂M é feita através do difeomorfismo $\Phi|_{T_f} : T_f \rightarrow \partial M$, onde $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ é o contactomorfismo dado pelo modelo local do tipo (f, h) próximo ao bordo ∂M . A direção que gera o preenchimento de Dehn corresponde à curva fechada $\nu := \Phi \circ \tilde{\nu} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial M$, onde $\nu : S^1 \rightarrow T_f$ é $z \mapsto (z, f(z, \theta_0), \theta_0)$, para algum $\theta_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Se V_ν é o toro sólido $V = T(f, N) \cup_\vartheta T$ em que a curva ν está identificada com o bordo do disco $F' \cup_\vartheta \left\{ \frac{\theta_0}{2\pi} \right\} \times \mathbb{D}$, onde $F' := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : \theta = \theta_0, f(z, \theta_0) \leq r \leq N\}$ é uma faixa em $T(f, N)$ e $\left\{ \frac{\theta_0}{2\pi} \right\} \times \mathbb{D}$ é um disco fechado em $T = S^1 \times \mathbb{D}$, então $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ é um preenchimento de Dehn para M .

Figura 3.2: Preenchimento de Dehn $M_\nu = M \cup V_\nu$.

Agora vamos estender a forma de contato λ sobre o complementar de M em M_ν (isto é, sobre V_ν). Como $h : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathbb{R}^*$ é suave, existe uma extensão, ainda denotada por h , sobre uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(T_f)$ do toro $T_f \subset \mathbb{T}$. Uma verificação direta mostra que podemos estender h sobre o 3-anel $T(f, N) = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$. Seja $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ uma

vizinhança aberta de $S^1 \times \partial\mathbb{D}$ em $S^1 \times \mathbb{D}$. Definimos a aplicação $\Omega : \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{T}$ satisfazendo

$$(\mu, \rho, \phi) \mapsto \Omega(\mu, \rho, \phi) = \left(\frac{\phi}{2\pi}, N + (1 - \rho), 2\pi\mu \right). \quad (3.8)$$

Considere a 1-forma de contato *pull-back* $\alpha := \Omega^*(h\lambda_0)$ definida em $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ e observe que α satisfaz

$$\alpha(\mu, \rho, \phi) := \Omega_{(\mu, \rho, \phi)}^*(h\lambda_0) = g(\rho) \left(\frac{1}{2\pi} d\phi + 2\pi \cdot k(\rho)^2 d\mu \right)$$

onde $g(\rho) = h \circ k(\rho)$ e $k(\rho) = N + 1 - \rho$. Note que a forma de contato α é do tipo: $\alpha_{m,n} = md\phi + nd\mu$, onde m, n são funções suaves definidas em domínios apropriados. É imediato exibir extensões das funções m e n sobre $S^1 \times \mathbb{D}$ cuja $\alpha_{m,n}$ é forma de contato. Isto conclui a construção do *preenchimento de Dehn (de contato)* para M .

Interseções entre toros e discos $\tilde{J}$ -holomorfos na família de Bishop

Seja (M_ν, λ) o preenchimento de Dehn de contato construído acima. Nosso primeiro passo é provar que, caso existam discos de energia finita na família de Bishop $\mathcal{M}$ cuja interseção com o complementar de $M_\nu \setminus M$ é não-vazia, então existe $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$ que é o *primeiro a intersectar* o bordo ∂M . Para evitar confusões com as notações e hipóteses sobre M , vamos provar a observação acima no contexto exposto a seguir.

Seja λ' uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa N . Suponha que $\mathbb{T}^2$ é um toro mergulhado em N *dividindo N em duas variedades conexas*, isto é, existem 3-variedades compactas N_k , $k = 1, 2$, mergulhadas em N com bordo $\partial N_k = \mathbb{T}^2$, $k = 1, 2$, satisfazendo $N = N_1 \cup N_2$ e $N_1 \cap N_2 = \mathbb{T}^2$. Seja $\mathcal{D} \hookrightarrow N_1$ um disco mergulhado tal que o bordo $\partial\mathcal{D}$ é um nó transversal à estrutura de contato e a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^\mathcal{D} = T\mathcal{D} \cap \xi$ possui uma única singularidade elíptica real e positiva e^+ . A princípio não precisamos supor que λ é *tight*, a existência do disco $\mathcal{D}$ é suficiente para a prova dos lemas adiante. Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda')$ e defina uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ na simplificação $\mathbb{R} \times N$ satisfazendo (3.4). Denote por $\mathcal{M}$ a *família de Bishop* com condição de contorno em $\mathcal{D}$. Lembre que $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ se e somente se $\tilde{u}$ satisfaz (3.35). Fixe uma métrica Riemanniana g em N e uma folha l da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$ sobre o disco $\mathcal{D}$. Em (2.24) na Seção 2.3.1, definimos a função $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que associa a cada $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ o comprimento $\tau(\tilde{u})$ entre e^+ e a (única) interseção de $u(\partial\mathbb{D})$ com a folha $l \in \mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$. Este comprimento é medido em relação à métrica g . Seja G o grupo dos biholomorfismos do disco $\mathbb{D}$ e $\mathcal{M}/G$ o quociente de $\mathcal{M}$ pela ação induzida pela composição dos discos de energia finita $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ com elementos em G . Denote por $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ a projeção de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}/G$ (para os detalhes, veja a Seção 2.3.1). Fixe $\mathcal{Y}$ uma componente conexa de $\mathcal{M}$. A restrição de $\tau|_{\Pi^{-1}(\mathcal{Y})}$ à componente $\Pi^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{M}$ permite introduzir uma ordem em $\Pi^{-1}(\mathcal{Y})$, denotada por $\tilde{u} \leq \tilde{v}$. Por definição, se $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{M}$ satisfazem $\Pi(\tilde{u}), \Pi(\tilde{v}) \in \mathcal{Y}$, então $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ se, e somente se, $\tau|_{\Pi^{-1}(\mathcal{Y})}(\tilde{u}) \leq \tau|_{\Pi^{-1}(\mathcal{Y})}(\tilde{v})$. Por simplicidade, se $\tau|_{\Pi^{-1}(\mathcal{Y})}(\tilde{u}) < \tau|_{\Pi^{-1}(\mathcal{Y})}(\tilde{v})$, denotamos apenas $\tilde{u} < \tilde{v}$.

Lema 3.14. *Sejam N , N_1 , N_2 , λ' , $\mathcal{D}$ e $\mathbb{T}^2$ fixados acima. Suponha válidas as condições:*

- (i) *existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, se $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$ satisfaz $u(\mathbb{D}) \subset N_1$, então¹² $\|d\tilde{u}\|_\infty < C$;*
- (ii) *existe uma componente conexa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{M}/G$ tal que existe $\tilde{u}_1 = (a_1, u_1) \in \mathcal{M}$ satisfazendo $\Pi(\tilde{u}_1) \in \mathcal{Y}$, $u_1(\mathbb{D}) \subset \mathring{N}_1$, e existe $\tilde{u}_2 = (a_2, u_2) \in \mathcal{M}$ satisfazendo $\Pi(\tilde{u}_2) \in \mathcal{Y}$ e $u_2(z) \notin N_1$, para algum $z \in \mathring{\mathbb{D}}$.*

Então existe $\tilde{u}' = (a', u') \in \mathcal{M}$ satisfazendo $\Pi(\tilde{u}') \in \mathcal{Y}$ e $\tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) \neq \emptyset$ tal que se $\tilde{v} \in \mathcal{M}$ satisfaz $\tilde{v} < \tilde{u}'$, então $\tilde{v}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) = \emptyset$. Além disso, se $z \in \mathring{\mathbb{D}}$ satisfaz $\tilde{u}'(z) \in \tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$, então $\tilde{u}'(z)$ é uma tangência entre $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ e $\tilde{u}'(\mathbb{D})$.

Demonstração. Considere o mergulho $\mathbb{R} \times N_1 \hookrightarrow \mathbb{R} \times N$ induzido pelo mergulho $N_1 \hookrightarrow N$. Lembre que, como consequência do Teorema da Função Implícita ([48], Teorema A.3.1) e da transversalidade automática das soluções em $\mathcal{M}$, dada uma solução $\tilde{u}_0 \in \mathcal{M}$ e $t_0 = \Pi(\tilde{u}_0)$, onde $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$, se s é uma seção do fibrado $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ numa vizinhança de t_0 tal que $s(t_0) = \tilde{u}_0$, então existe uma vizinhança $U \subset \mathcal{M}/G$, $t_0 \in U$, e uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{R} \times N \\ (t, z) &\mapsto s(t)(z) \end{aligned} \tag{3.9}$$

tal que Φ é um mergulho suave sobre sua imagem. A existência de cartas locais tais como (3.9) permitirá, pelas hipóteses (i) e (ii), obter soluções em $\mathcal{M}$ *arbitrariamente próximas do bordo* $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. Isto forçará interseções entre discos de energia finita em $\mathcal{M}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. A seguir provaremos esta afirmação. Seja $\mathcal{Y}$ a componente conexa de $\mathcal{M}/G$ conforme item (ii). Considere a família maximal $\mathcal{M}_{\text{int}}$ das soluções $\tilde{u} = (a, u)$ satisfazendo $u(\mathbb{D}) \in \mathring{N}_1$. Sejam g e l , respectivamente, a métrica Riemanniana e a folha l da folheação característica fixadas acima. Denote por l_2 o comprimento do segmento em l conectando e^+ e a interseção $l \cap u_2(\partial\mathbb{D})$, onde $\tilde{u}_2 = (a_2, u_2) \in \mathcal{M}$ é dada no item (ii). Se $\tilde{u} \in \mathcal{M}_{\text{int}}$, seja $\tau(\tilde{u})$ o comprimento do segmento em l conectando a singularidade e^+ e a interseção $l \cap u(\partial\mathbb{D})$. Defina

$$\tau = \sup_{\tilde{u} \in \mathcal{M}_{\text{int}}} \tau(\tilde{u}).$$

Pela condição (ii) acima, sabemos que $\tau < l_2$. Seja $\tau_n \rightarrow \tau$ e escolha $\tilde{u}_n$ tal que $\tau(\tilde{u}_n) = \tau_n$. Como $\|d\tilde{u}_n\|_\infty < C$, existe uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ de $\tilde{u}_n$ e um disco de energia finita $\tilde{u}' : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}'$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{D}, \mathbb{R} \times N)$. Pela convergência uniforme, $\tilde{u}'$ é solução do problema de Bishop, isto é, $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}_{\text{int}}$ é maximal, devemos ter que $\tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \neq \emptyset$. De fato, se isto não fosse válido, poderíamos escolher uma carta local Φ tal como em (3.9) e, a menos de uma reparametrização, poderíamos identificar $U = (-\epsilon, \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$, de maneira que $s(0)(z) = \tilde{u}_0(z)$, onde s é uma seção do fibrado $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ numa vizinhança de 0 ¹³. Escolha um intervalo $U = (-\epsilon, \epsilon)$, suficientemente pequeno, de tal forma que $u(\mathbb{D}) \subset \mathring{N}_1$ para todo $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$ satisfazendo $\Pi(\tilde{u}) \in (-\epsilon, \epsilon)$. Isto é possível em vista do item (i).

¹² $\|d\tilde{u}\|_\infty := \sup_{\substack{z \in \mathbb{D} \\ |v|=1}} \{|d\tilde{u}(z)(v)|\}.$

¹³Dizemos que a carta Φ está *centrada* em $\tilde{u}'$.

Como as soluções $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ são duas a duas disjuntas¹⁴, em especial os bordos $\tilde{u}(\partial\mathbb{D})$, existe $\tilde{v} \in \mathcal{M}$ satisfazendo a condição (i) e $\tilde{v} > \tilde{u}'$. Isto contradiz a definição de $\mathcal{M}_{\text{int}}$. Portanto, $\tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) \neq \emptyset$ é a solução desejada.

Lembre que $\mathbb{T}^2$ divide N em duas variedades conexas N_1, N_2 . Seja $\tilde{u}' = (a, u') \in \mathcal{M}$ o disco de energia finita obtido na primeira parte da demonstração. Recorde que se $\tilde{v} \in \mathcal{M}$ satisfaz $\tilde{v} < \tilde{u}'$, então $\tilde{v}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) = \emptyset$. Vamos provar que as interseções entre $\tilde{u}'$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ correspondem às tangências entre $\tilde{u}'$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. Suponha, por contradição, que $z \in \mathring{\mathbb{D}}$ satisfaz $\tilde{u}'(z) \in \tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$ e $\tilde{u}'(z)$ é uma interseção transversal entre $\tilde{u}'(\mathbb{D})$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$, isto é, $T_{u'(z)}(\tilde{u}'(\mathbb{D})) \pitchfork T_{u'(z)}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$. Esta transversalidade em z força $u'(z') \notin N_1$, para algum $z' \in \mathring{\mathbb{D}}$ próximo de z . De fato, como $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$, existe uma carta local Φ tal como em (3.9) centrada em $\tilde{u}'$. Dado $\bar{v} \in T_{\tilde{u}'(z)}(\tilde{u}'(\mathbb{D})) \setminus T_{\tilde{u}'(z)}(\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2)$, considere $v = d(\tilde{u}'_z)^{-1}(\bar{v})$. Se $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{D}$ é uma curva suave tal que $\gamma(0) = z$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, então a curva $\tilde{\gamma} := \tilde{u}' \circ \gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \times N$ satisfaz $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{u}'(z)$, $\tilde{\gamma}((-\delta, \delta)) \subset \tilde{u}'(\mathbb{D})$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (a, \tilde{v})$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Logo, para τ suficientemente próximo de 0, temos $\tilde{\gamma}(\tau) \notin \mathbb{R} \times N_1$, isto é, $u(\gamma(\tau)) \notin N_1$. Seja $z' = \gamma(\tau)$. Como $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ em (3.9) é mergulho sobre a imagem e está centrado em $\tilde{u}$, isto é, $\Phi(0, \mathbb{D}) = \tilde{u}'(\mathbb{D})$, existe $\tilde{\epsilon} \neq 0$ satisfazendo $|\tilde{\epsilon}| \ll 1$ tal que a curva $t \mapsto \Phi(t, z')$ passando por $\tilde{u}'(z')$ é suave e $\Phi(\tilde{\epsilon}, z') \notin \mathbb{R} \times N_1$. Em outras palavras, denotando $\tilde{v} = \Phi(\tilde{\epsilon}, \mathbb{D})$, temos $\tilde{v}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) \neq \emptyset$. Mas isto contradiz a escolha do disco de energia finita $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$ e conclui a prova do Lema 3.14. $\blacksquare$

Verificaremos a seguir que não existem soluções na família de Bishop satisfazendo a condição (ii) do lema anterior quando se supõe que $\mathbb{T}^2$ é invariante pelo fluxo de Reeb.

Lema 3.15. *Sejam $N, N_1, N_2, \lambda', \mathcal{D}$ e $\mathbb{T}^2$ fixados no início desta subseção. Suponha que $\mathbb{T}^2$ é invariante pelo fluxo de Reeb. Então $u(\mathbb{D}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$, para toda solução $\tilde{u} \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. Argumentando indiretamente, suponha que a família de Bishop $\mathcal{M}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do lema anterior, isto é, existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tal que se $\tilde{u} = (a, u) \in \mathcal{M}$ satisfaz $u(\mathbb{D}) \subset N_1$, então $\|d\tilde{u}_n\|_\infty < C$, e existe uma componente conexa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{M}/G$ tal que para algum $\tilde{u}_1 = (a_1, u_1) \in \mathcal{M}$ com $\Pi(\tilde{u}_1) \in \mathcal{Y}$, temos $u_1(\mathbb{D}) \subset \mathring{N}_1$, e para algum $\tilde{u}_2 = (a_2, u_2) \in \mathcal{M}$ com $\Pi(\tilde{u}_2) \in \mathcal{Y}$, temos $u_2(z) \notin N_1$, $z \in \mathring{\mathbb{D}}$. Pelo Lema 3.14, existe $\tilde{u}' = (a', u') \in \mathcal{M}$ intersectando o bordo $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ de maneira que se $\tilde{v} \in \mathcal{M}$ satisfaz $\tilde{v} < \tilde{u}'$, então $\tilde{v}(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) = \emptyset$. Observe que as interseções entre $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ e $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$ são isoladas. De fato, seja $z \in \mathbb{D}$ uma interseção entre $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ e $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$. Denote por $\pi : TN \rightarrow \xi$ a projeção na direção do campo de Reeb X_λ . Como u' satisfaz $\pi \cdot du' + J(u') \cdot \pi \cdot du' \cdot i \equiv 0$, se $v \in T_z\mathbb{D}$, então $\{\pi \cdot du'_z(v), J(u') \cdot \pi \cdot du'_z(v)\}$ é uma base para $\pi \cdot du'_z(T_z\mathbb{D})$. Se existisse $v \in T_z\mathbb{D}$ tal que $\pi \cdot du'_z(v) \neq 0$, então $\pi \cdot J(u') \cdot du'_z(v) \neq 0$ e, portanto, teríamos que $X_\lambda \notin d\tilde{u}'_z(T_z\mathbb{D})$. Isto mostra que o conjunto dos pontos $z \in \mathring{\mathbb{D}}$ tais que $\tilde{u}'(z) \in \tilde{u}'(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ está contido em $\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u}') := \{z \in \mathbb{D} : \pi \cdot du'(z) = 0\}$. Pela Proposição 4.1 em [26], o conjunto $\mathcal{Z}_\pi(\tilde{u}')$ é constituído de pontos isolados, logo as interseções entre $\tilde{u}'(\mathbb{D})$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ devem ser isoladas.

¹⁴Veja Teorema 17 em [19].

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

Provaremos que estas interseções isoladas não existem. Isto será uma consequência da *Teoria de Interseção de Curvas $\tilde{J}$ -holomorfas* de McDuff (veja [49]). Seja $z \in \mathbb{D}$ tal que $\tilde{u}'(z)$ é uma interseção entre $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ e $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$. Como a condição de contorno para $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$ é

$$\tilde{u}'(\partial\mathbb{D}) \subset \{0\} \times \mathcal{D} \subset \{0\} \times N$$

e $\mathcal{D} \subset N_1 \setminus \partial N_1$, segue que $z \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$. Lembre que (3.9) fornece um $\epsilon > 0$ e uma família de discos de energia finita $\tilde{u}_\tau$ suavemente parametrizadas por $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\tilde{u}_0 = \tilde{u}'$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{u}_\tau(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2) = \emptyset$, para todo $\tau \in (0, \epsilon)$. Isto é consequência da escolha de $\tilde{u}'$ como o primeiro disco de energia finita em $\mathcal{M}$ intersectando $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$. Considere, para algum $0 < \vartheta \ll 1$, a linha de fluxo de Reeb $\gamma_{u'(z)} : (-\vartheta, \vartheta) \rightarrow N$ passando por $u'(z)$, isto é, $\gamma_{u'(z)}(0) = u'(z)$. Uma vez que $\mathbb{T}^2$ é invariante pelo fluxo de Reeb, então $\gamma_{u'(z)}((-\vartheta, \vartheta)) \subset \mathbb{T}^2$. Defina a curva $\tilde{J}$ -holomorfa

$$\begin{aligned} \tilde{w} : \mathbb{R} \times (-\vartheta, \vartheta) &\rightarrow \mathbb{R} \times N \\ (s, t) &\mapsto (s, \gamma_{u'(z)}(t)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que $u'(z)$ é interior em $\gamma_{u'(z)}((-\vartheta, \vartheta))$ e, portanto, a interseção entre $\tilde{w}$ e $\tilde{u}'$ é em um ponto interior. A positividade e a estabilidade das interseções entre curvas $\tilde{J}$ -holomorfas, estabelecidas por McDuff em [49], implicam que $\tilde{w}$ deve intersectar $\tilde{u}_\tau$ para τ próximo de 0, contradizendo a nossa escolha de $\tilde{u}' \in \mathcal{M}$. Isto conclui a prova do Lema 3.15 e do Teorema 3.1, no caso não-degenerado. ■

Caso degenerado

Lembre que λ é uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo ∂M é difeomorfo ao toro. Supomos também que ξ satisfaz $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Vamos provar o caso degenerado do Teorema 3.1. Recorde que estamos supondo que o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb e não possui órbitas fechadas de Reeb. Nosso primeiro objetivo é provar que λ não possui órbitas fechadas contráteis com período pequeno perto do bordo.

Lema 3.16. *Para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um aberto $V_N \subset M$ tal que $\partial M \subset V$ e não existem órbitas fechadas de Reeb contráteis com período $T \leq N$ contidas em V .*

Demonstração. Fixe $N \in \mathbb{R}_+^*$. Seja $\mathcal{P}_N^c(\lambda)$ o conjunto das órbitas fechadas contráteis com período $T \leq N$. Existe um difeomorfismo $\psi : \mathbb{T}^2 \times [0, \epsilon) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ entre $\mathbb{T}^2 \times [0, \epsilon)$, para algum $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno, e uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(\partial M) \subset M$ de ∂M . Suponha, por contradição, que, para alguma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, existam $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}_N^c(\lambda)$ tais que $x_n(\mathbb{R}) \subset \psi(\mathbb{T}^2 \times [0, \epsilon_n))$. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, existe uma subsequência P_{n_k} e uma órbita fechada contrátil $P = (x, T)$ tal que $x_{n_k}(T_{n_k} \cdot) \rightarrow x(T \cdot)$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$. Como $\epsilon_n \rightarrow 0^+$, temos que $x(\mathbb{R}) \subset \partial M$. Esta contradição conclui a demonstração. ■

Estamos assumindo, conforme enunciado do Teorema 3.1, que existe uma órbita fechada $L = (y, T_{\min})$ p-nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo $\rho(L^p) < 1$ e $\text{sl}(L) = -\frac{1}{p}$ contida em M . Escolha um p -disco $u'_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L . Seja $\mathcal{A}(\mathcal{D}') := \int_{\mathbb{D}} |(u'_L)^* d\lambda|$ a área de $\mathcal{D}' := u'_L(\mathbb{D})$. Fixe

$N \geq \mathcal{A}(\mathcal{D}') + K$, para $K \in \mathbb{N}$ grande. Considere um *preenchimento de Dehn de contato* M_ν para M de modo análogo ao que fizemos acima. Lembre que ν é uma direção sobre ∂M . Denote ainda por λ a forma de contato estendida sobre M_ν . O lema acima implica que não existem órbitas fechadas do fluxo de Reeb em M_ν com período $T \leq N$ contidas numa vizinhança de $\partial M \subset M_\nu$. É possível aproximar λ por formas de contato $f\lambda$, onde $f : M_\nu \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfaz $f|_V \equiv 1$ sobre um aberto V contendo ∂M , tal que as órbitas fechadas do fluxo de Reeb com período $T \leq N$ contidas em A são não-degeneradas, não existem órbitas fechadas com período $T \leq N$ contidas numa vizinhança pequena de ∂M em M_ν e L é órbita fechada de Reeb da forma de contato perturbada, isto é, $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(f\lambda)$. Esta afirmação é o conteúdo do lema a seguir. Este resultado é o correspondente do Lema 6.8 em [30] para o nosso contexto. A prova é por um argumento análogo àquele apresentado na demonstração do Lema E.1 no Apêndice E.

Lema 3.17. *Seja λ a forma de contato definida na 3-variedade $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ fechada e conexa e $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Então existe um aberto $V \subset M_\nu$ com $\partial M \subset V$ e uma sequência $\{g_n\} \in C^\infty(M_\nu, \mathbb{R}_+^*)$ tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M_\nu, \mathbb{R}_+^*)$ e*

$$g_n|_{L \cup V} = 1 \quad e \quad dg_n|_L = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

Além disso, g_n pode ser escolhida de modo que $g_n\lambda|_{V^c}$ é não-degenerada, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere fixada uma sequência $\{g_n\} \in \mathcal{O}_\lambda$ tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ satisfazendo (3.11). Como antes, denotamos $\lambda_n = g_n\lambda$ e escrevemos X_{λ_n} , $\{\phi_{t,n}\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente, para o campo e o fluxo de Reeb associados à forma de contato λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema B.7, existe um p -disco especial, ainda denotado por $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$, para a órbita fechada L e para a sequência g_n . Podemos escolher u_L arbitrariamente próximo do p -disco u'_L fixado acima. Eliminando uma quantidade finita de termos, temos que $\mathcal{A}_n(u_L(\mathbb{D})) := \int_{\mathbb{D}} |(u_L)^* d\lambda_n| < N$.

Neste momento é importante que se faça uma observação a respeito do enunciado da Proposição 2.6. No capítulo anterior, fizemos uma distinção entre o caso degenerado e o não-degenerado. Poderíamos ter considerado uma situação um pouco mais geral. Fixado $N \in \mathbb{N}$ (de modo análogo ao que fizemos acima), a estratégia de demonstração da Proposição 2.6 e, em particular do Teorema 3.1, para o caso não-degenerado funciona para a situação em que supomos apenas que as órbitas fechadas com período $T \leq N$ são não-degeneradas. Este tipo de hipótese já foi explorada por Hofer, Wysocki e Zehnder em [23, 30] e Hryniewicz em [34]. De modo análogo, a escolha da sequência g_n (conforme o Lema 3.17) implica que a demonstração do Teorema 3.1 no caso degenerado é apenas um corolário da estratégia de prova do Teorema 2.1. Vejamos com um pouco mais de detalhes. Por uma construção análoga à Seção 2.4.1, é possível provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma órbita fechada $P_n = (x_n, T_n) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n = g_n\lambda)$ satisfazendo $\rho(P_n) = 1$. Pelo Lema 2.34, os períodos satisfazem $T_n \leq N$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, e, portanto, existe uma subsequência P_{n_k} tal que $x_{n_k}(T_{n_k} \cdot) \rightarrow x(T \cdot)$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M_\nu)$, onde $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Pela Seção 2.4.1, P não é um recobrimento de L . Logo, P satisfaz as condições da tese do Teorema 3.1. Note que P está contida no interior de M . Isto conclui a prova do Teorema 3.1.

3.4 Demonstração do Teorema 3.8

Nesta seção, vamos provar o Teorema 3.8 (isto é, provaremos as Proposições 3.9 e 3.10). Dividiremos a demonstração em três partes: construção dos preenchimentos de Dehn, análise de *bubbling-off*, conclusão das demonstrações das Proposições 3.9 e 3.10.

3.4.1 Preenchimento de Dehn

Lembre que λ é uma forma de contato *tight* e não-degenerada definida numa 3-variedade compacta M cujo bordo é difeomorfo ao toro. Estamos supondo que M admite um modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo e, portanto, existem $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$, um toro $T_f = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = f(z, \theta)\}$, $h : \mathcal{N}^-(T_f) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$, uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(\partial M) \subset M$ de ∂M e um contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ satisfazendo $\Phi^*\lambda = h\lambda_0$, onde $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$ é a forma de contato padrão em $\mathbb{T}$.

Queremos construir um preenchimento de Dehn (de contato) para M . Tal como na Seção 3.3, M_ν será constituído de 3 partes: (i) a 3-variedade M , (ii) um 3-anel $T(f, N) = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$, para algum $N \in \mathbb{R}_+^*$, e (iii) um toro sólido. A construção do preenchimento de Dehn (topológico) é análoga àquela feita na Seção 3.3. Nosso objetivo é estender a forma de contato λ sobre $\mathring{V}_\nu = M_\nu \setminus M$ de modo que (1) *exista uma órbita fechada de Reeb P contida na espinha de V_ν* e (2) *as órbitas fechadas contidas em V_ν estejam enlaçadas em P* . Lembre que estamos considerando dois casos: verticalmente negativo e positivo. O primeiro corresponde à Proposição 3.9 e o segundo à Proposição 3.10. Estas extensões serão feitas separadamente (veja as duas subseções a seguir). Antes de prosseguirmos, faremos uma observação trivial que indica qual a estratégia de demonstração. Recorde que o contactomorfismo $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ dado pelo *modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo* satisfaz $\Phi^*\lambda = h\lambda_0$, onde $\lambda_0 = dz + r^2 d\theta$ é a forma de contato padrão em $\mathbb{T}$. Uma verificação direta¹⁵ mostra que o campo de Reeb para a forma de contato $h\lambda_0 = h(dz + r^2 d\theta)$ é dado por

$$X_{h\lambda_0} = \left(\frac{rh_r + 2h}{2h^2} \right) \partial_z + \left(\frac{h_\theta - r^2 h_z}{2rh^2} \right) \partial_r + \left(-\frac{h_r}{2rh^2} \right) \partial_\theta, \quad (3.12)$$

onde $\partial_z, \partial_\theta, \partial_r$ são os vetores coordenadas e h_r, h_θ, h_z são as derivadas parciais em relação a r, θ, z , respectivamente. Por hipótese, $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) < 0$ (ou > 0), nas coordenadas cilíndricas da forma normal. De (3.12) segue que $rh_r + 2h < 0$ (ou > 0).

Preenchimento de Dehn de contato para a Proposição 3.9

Nesta subseção, estendemos a forma de contato λ sobre M_ν assumindo que $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) < 0$. Repare que é possível escolher a vizinhança aberta $\mathcal{N}(T_f)$ suficientemente pequena de maneira

¹⁵Estamos supondo que h está definida sobre uma vizinhança aberta $\mathcal{N}(T_f)$ do toro $T_f \subset \mathbb{T}$. Isto é possível visto que $h : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é suave.

que $dz|_{\mathcal{N}(T_f)}(X_{h\lambda_0}) < 0$. Vamos começar a extensão pelo 3-anel $T(f, N) := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$, onde $N \in \mathbb{R}_+^*$ satisfaz $N > \sup_{(z, \theta)} \{f(z, \theta)\}$ e o supremo estende-se sobre $(z, \theta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Lema 3.18. *Seja $K = \mathcal{N}(T_f) \cup T(f, N)$. Existe uma função suave $H : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que estende h e satisfaz $rH_r + 2H < 0$.*

Demonstração. Seja $b \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $b < r$, para todo $(z, r, \theta) \in \mathcal{N}(T_f)$. Poderíamos escolher b como o ínfimo dos raios r em $\mathcal{N}(T_f)$. Escolha uma constante $C > 2 + \frac{2}{b}$. Fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo

$$0 < a < \inf_{(z, r, \theta) \in \mathcal{N}(T_f)} \left\{ h(z, r, \theta) \right\}. \quad (3.13)$$

Diminuindo $\mathcal{N}(T_f)$, se necessário, podemos supor que $a \in \mathbb{R}_+^*$ está bem-definido. Defina uma função $g : K \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^*$ satisfazendo

$$g(z, r, \theta) = \frac{a}{(r+1)^C}. \quad (3.14)$$

Note que $rg_r(z, r, \theta) + 2g(z, r, \theta) < 0$, para todo $(z, r, \theta) \in K$. Fixe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno tal que

$$T(f - \epsilon, f + \epsilon) := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) - \epsilon \leq r \leq f(z, \theta) + \epsilon\} \subset \mathcal{N}(T_f).$$

Escolha uma função $\eta : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ satisfazendo

$$\eta(z, r, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \leq f(z, \theta) - \epsilon \\ 0, & \text{se } r \geq f(z, \theta) + \epsilon. \end{cases} \quad (3.15)$$

Suponha que $\eta_r \leq 0$. Defina a função $H : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ por

$$H(z, r, \theta) = \eta(z, r, \theta) \cdot h(z, r, \theta) + (1 - \eta(z, r, \theta)) \cdot g(z, r, \theta). \quad (3.16)$$

Repare que H é de classe C^∞ . É imediato verificar que

$$\begin{aligned} rH_r(z, r, \theta) + 2H(z, r, \theta) &= r\eta_r(z, r, \theta)(h(z, r, \theta) - g(z, r, \theta)) + \\ &\quad + \eta(z, r, \theta)(rh_r(z, r, \theta) + 2h(z, r, \theta)) + \\ &\quad + (1 - \eta(z, r, \theta))(rg_r(z, r, \theta) + 2g(z, r, \theta)) < 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A desigualdade segue de $\eta_r(z, r, \theta) \leq 0$, $h(z, r, \theta) > g(z, r, \theta)$, $rh_r(z, r, \theta) + 2h(z, r, \theta) < 0$ e $rg_r(z, r, \theta) + 2g(z, r, \theta) < 0$ ¹⁶. ■

A seguir, vamos estender λ sobre $V_\nu \setminus T(f, N)$. Para simplificar a escrita, vamos escrever $T = \overline{V_\nu \setminus T(f, N)}$ e supor que a função H esta definida sobre $T(f, N + \tau) := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N + \tau\}$, para algum $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno. Assumiremos também que

¹⁶É importante notar que, a princípio, h esta definida apenas em $\mathcal{N}(T_f)$. Como $\eta(z, r, \theta) = 0$ quando $r \geq f(z, \theta) + \epsilon$, podemos considerar h definida sobre $K \setminus \mathcal{N}(T_f)$.

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

$rH_r(z, r, \theta) + 2H(z, r, \theta) < 0$, para todo $(z, r, \theta) \in T(f, N + \tau)$.

Seja $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ uma vizinhança aberta de $S^1 \times \partial\mathbb{D}$ em $S^1 \times \mathbb{D}$. Lembre que (μ, ρ, ϕ) são coordenadas em $T = S^1 \times \mathbb{D}$, onde $\mu \in S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(\rho, \phi) \in \mathbb{D}$ são coordenadas polares em $\mathbb{D}$. Recorde que na Seção 3.3, definimos a aplicação $\Omega : \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{T}$ satisfazendo

$$(\mu, \rho, \phi) \mapsto \Omega(\mu, \rho, \phi) = \left(\frac{\phi}{2\pi}, N + (1 - \rho), 2\pi\mu \right). \quad (3.18)$$

Escolha $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ suficientemente pequena de maneira que $\Omega(\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})) \subset T(N, N + \tau)$, onde $T(N, N + \tau) = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : N \leq r \leq N + \tau\}$. Considere a 1-forma de contato *pull-back* $\alpha := \Omega^*(H\lambda_0)$ definida em $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ e observe que α satisfaz

$$\alpha(\mu, \rho, \phi) := \Omega_{(\mu, \rho, \phi)}^*(H\lambda_0) = g(\rho) \left(\frac{1}{2\pi} d\phi + 2\pi \cdot k(\rho)^2 d\mu \right)$$

onde $g(\rho) = H \circ k(\rho)$ e $k(\rho) = N + 1 - \rho$. Note que a função g depende somente de ρ pois H depende apenas de r quando $r \geq N$. A forma de contato α também é do tipo: $\alpha_{m,n} = m d\phi + n d\mu$, onde m, n são funções suaves definidas em domínios apropriados. Recorde que uma condição necessária e suficiente para que $\alpha_{m,n}$ seja uma forma de contato é $m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho \neq 0$. Neste caso, o campo de Reeb $X_{\alpha_{m,n}}$ é dado por

$$X_{\alpha_{m,n}} = \left(-\frac{m_\rho}{m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho}, \frac{m_\mu - n_\phi}{m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho}, \frac{n_\rho}{m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho} \right) \quad (3.19)$$

m_μ, m_ρ, n_ρ e n_ϕ denotam as derivadas parciais das funções m, n . As funções $m, n : \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ associadas à forma de contato $\alpha = \Omega^*(H\lambda_0)$ são, respectivamente, $m(\mu, \rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} g(\rho)$ e $n(\mu, \rho, \phi) = 2\pi \cdot g(\rho) \cdot k(\rho)^2$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Como m, n dependem apenas de ρ , por abuso de notação, consideramos m, n definidas em $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$, mas escrevemos apenas $m(\rho), n(\rho)$. Visto que a vizinhança aberta $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ é pequena, temos que

$$\begin{aligned} n_\rho(\rho) &= (2\pi \cdot g(\rho) \cdot k(\rho)^2)_\rho = 2\pi \cdot (k(\rho)^2 \cdot H_k(k) \cdot k_\rho(\rho) + 2g(\rho) \cdot k(\rho) \cdot k_\rho(\rho)) \\ &= 2\pi \cdot k(\rho) \cdot k_\rho(\rho) (k(\rho) \cdot H_k(k) + 2g(\rho)) > 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

para todo ρ tal que $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Note que o termo entre parênteses corresponde a $rH_r + 2H$ que, por construção, é estritamente menor do que 0. Observe que (3.20) implica $m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho) < 0$, para todo ρ tal que $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. As desigualdades acima implicam que a componente do campo de Reeb X_α na direção ∂_ϕ satisfaz $d\phi(X_\alpha(\mu, \rho, \phi)) = \frac{n_\rho(\rho)}{m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho)} < 0$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Vamos estender a forma de contato α para o restante do toro $S^1 \times \mathbb{D}$ de maneira que a componente do campo de Reeb na direção de ∂_ϕ seja não-nula fora da espinha $S^1 \times \{(0, 0)\} \subset S^1 \times \mathbb{D}$ e exista uma órbita fechada de Reeb contida em $S^1 \times \{(0, 0)\}$. No lema a seguir, fazemos esta construção.

Lema 3.19. *Existe uma forma de contato α_1 definida em $T = S^1 \times \mathbb{D}$ tal que α_1 coincide com $\alpha(\mu, \rho, \phi) = g(\rho) \left(\frac{1}{2\pi} d\phi + 2\pi k(\rho)^2 d\mu \right)$ para ρ próximo de $\rho = 1$ e o campo de Reeb X_{α_1} satisfaz $d\phi(X_{\alpha_1}(\mu, \rho, \phi)) < 0$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in T$ e $\rho \neq 0$. Além disso, esta extensão pode ser feita*

de maneira que:

- (i) exista uma órbita fechada $P_1 = (x_1, T_1) \in \mathcal{P}(\alpha_1)$ contida em $S^1 \times \{(0, 0)\}$;
- (ii) se β é a classe de homotopia de trivializações $d\alpha_1$ -simplética do fibrado $\xi_1|_{P_1} := (x_1|_{T_1})^* \xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $x_1|_{T_1}(t) = x_1(T_1 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, induzida pelo campo normal¹⁷, então a órbita fechada P_1 satisfaz $\rho(P_1, \beta) < 0$.

Demonstração. Nossa estratégia será construir uma forma de contato do tipo $\alpha_{m,n} = md\varphi + nd\phi$, onde m, n são funções de classe C^∞ definidas no toro $T = S^1 \times \mathbb{D}$. Vamos estender as funções m e n já definidas numa vizinhança aberta $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$ do bordo para o interior de $S^1 \times \mathbb{D}$. Lembre que $m_\rho, n_\rho > 0$ e $m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho < 0$ sobre $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$.

Fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno. Escolha $\delta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, se $\rho_0 = 1 - \delta_0$, então o toro $T_{\rho_0} := \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \rho = \rho_0\}$ está contido em $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Considere uma função suave $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo

$$m(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}g(\rho), & \text{se } \rho \geq 1 - \delta_0 \\ a\rho^2, & \text{se } \rho \leq 1 - 2\delta_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Podemos escolher m de modo que $m_\rho(\rho) > 0$, para todo $\rho \in (0, 1)$. Fixe $b \in \mathbb{R}_+^*$ e escolha uma função suave $n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$ satisfazendo

$$n(\rho) = \begin{cases} 2\pi g(\rho)k(\rho)^2, & \text{se } \rho \geq 1 - \delta_0 \\ \rho^2 + b, & \text{se } \rho \leq 1 - 2\delta_0, \end{cases} \quad (3.22)$$

para $\rho \in [0, \rho_0]$. Para $b \in \mathbb{R}_+^*$ suficientemente pequeno, podemos supor que $n_\rho(\rho) > 0$, para todo $\rho \in (0, 1)$. A Figura 3.3 mostra um par (m, n) satisfazendo (3.21) e (3.22). Observe que os vetores $(m(\rho), n(\rho))$ e $(m_\rho(\rho), n_\rho(\rho))$ satisfazem $m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho) < 0$, para todo $\rho \in [0, 1]$. Disto segue que $md\varphi + nd\phi$ é uma forma de contato definida em $T = S^1 \times \mathbb{D}$.

Figura 3.3: Exemplo de funções $(m(\rho), n(\rho))$.

Como m, n são funções de ρ (e constantes em relação às variáveis φ, θ), o campo de Reeb associado à $md\varphi + nd\mu$ é dado por

¹⁷O campo é normal à faixa $F_0 := \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \phi = \phi_0\}$, para algum $\phi_0 \in \partial\mathbb{D}$, sobre P_1 .

$$X_{m d\phi + n d\mu} = \left(-\frac{m_\rho}{m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho}, 0, \frac{n_\rho}{m \cdot n_\rho - n \cdot m_\rho} \right). \quad (3.23)$$

Note que os toros com raio constante, isto é, $T_{\rho_0} = \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \rho = \rho_0\}$, contidos em $T = S^1 \times \mathbb{D}$ são invariantes pelo fluxo de Reeb. Em particular, isto implica que existe uma órbita fechada de Reeb contida na espinha $S^1 \times \{0\}$. Repare que se $\rho \in (0, 1 - 2\delta_0]$, o campo de Reeb de α_1 é dado explicitamente por $X_{\alpha_1}(\rho) = \frac{1}{b} (1, 0, -\frac{1}{a})$ e a componente na direção ∂_ϕ satisfaz $d\phi(X_{\alpha_1}(\rho)) = -\frac{1}{a} < 0$. Quando $\rho > 1 - 2\delta_0$, como $n_\rho(\rho) > 0$ e $m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho) < 0$, de (3.23) segue que $d\phi(X_{\alpha_1}(\rho)) < 0$. A condição $d\phi(X_{\alpha_1}) < 0$ força as órbitas do campo de Reeb a girar em sentido negativo. Isto significa que se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T$ é uma órbita (não necessariamente fechada) do fluxo de Reeb, então a orientação da tripla $\{\partial_\mu, \partial_\rho, \gamma'\}$ não coincide com a orientação de $\{\partial_\mu, \partial_\rho, \partial_\phi\}$ que é um tripla positivamente orientada.

Denote por $\{\phi_t^1\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb associado à forma de contato α_1 e $\xi_1 = \ker \alpha_1$. Seja $P_1 = (x_1, T_1) \in \mathcal{P}(\alpha_1)$ a órbita fechada contida em $S^1 \times \{0\}$ com período $T_1 > 0$ mínimo. Seja β é a classe de homotopia de trivializações $d\alpha_1$ -simplética do fibrado $\xi_1|_{P_1} := (x_1|_{T_1})^* \xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida pelo campo normal à faixa $F_0 = \{(\mu, \rho, \phi) \in T : \phi = \phi_0\}$, para algum $\phi_0 \in \partial\mathbb{D}$. Seja $\Psi : \xi_1|_{P_1} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\alpha_1$ -simplética na classe β . Defina uma aplicação $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi_1(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi_1(t) = \Psi_t \circ d\phi_{T_1 t}^1|_{\xi_1(0)} \circ (\Psi_0)^{-1}$$

onde $\xi_1(0) := \xi_1(x_1(0))$, $d\phi_{T_1 t}^1|_{\xi_1(0)} : \xi_1(0) \rightarrow \xi_1(T_1 t)$ é a aplicação fluxo linearizado restrito à estrutura de contato e $\xi_1(T_1 t) := \xi_1|_{x_1(T_1 t)}$. Sejam $\theta_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_1(t)e^{i2\pi s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta_1(t,s)}$, $\theta_1(0, s) = 2\pi s$, e $\Delta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta_1(s) = \frac{\theta_1(1,s) - 2\pi s}{2\pi}$, e $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s \mapsto f_1(s) := \frac{\theta_1(1,s)}{2\pi}$. Como as linhas de fluxo de Reeb γ giram em sentido negativo ao redor de $P_1 = (x_1, T_1)$, segue que o intervalo $I(\varphi_1) = \{\Delta_1(s) : s \in [0, 1]\} \subset (-\infty, 0)$. Isto mostra que $\Delta_1((f_1)^n(s)) < 0$, para todo $s \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de *número de rotação transversal* temos que $\rho(P_1, \beta) = \rho(\varphi_1) < 0$. Embora seja desnecessário para as nossas aplicações, poderíamos perturbar α_1 de maneira que o número de rotação transversal seja arbitrariamente pequeno. ■

A seguir vamos estudar algumas propriedades topológicas e dinâmicas da órbita fechada P_1 construída acima. Seja $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ o preenchimento de Dehn para M construído na seção anterior. Lembre que ν é uma direção sobre ∂M , V_ν é um toro sólido e a colagem entre ∂M e V_ν foi induzida pela aplicação ϑ definida em (3.7). Por simplicidade, vamos denotar por λ_1 a extensão de λ sobre M_ν , conforme os Lemas 3.18 e 3.19. Seja $\xi_1 = \ker \lambda_1$ a estrutura de contato associada. Nosso objetivo é exibir um disco mergulhado $u_{P_1} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ tal que $u_{P_1}(e^{2\pi i t}) = x_1(T_1 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Em relação a este disco, vamos calcular propriedades topológicas (isto é, sl) e dinâmicas (isto é, ρ) da órbita fechada P_1 ¹⁸.

¹⁸Lembre que se $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda_1)$, $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um disco contínuo tal que $v(e^{2\pi i t}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e $Z : \mathbb{D} \rightarrow v^* \xi_1$ é uma seção não-nula do fibrado $d\lambda_1$ -simplético $v^* \xi_1 \rightarrow \mathbb{D}$, então o número

Antes de enunciar o lema a seguir, lembre que P_1 satisfaz $\rho(P_1, \beta) < 0$, onde β é a classe de homotopia de trivializações $d\alpha_1$ -simplética do fibrado $\xi_1|_{P_1} := (x_1|_{T_1})^*\xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida pelo campo normal à faixa F_0 .

Lema 3.20. *Existe um mergulho $u_{P_1} : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $u_{P_1}(e^{2\pi it}) = x_1(T_1 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e a órbita fechada P_1 satisfaz $\text{sl}(P_1, u_{P_1}) = -1$, $\rho(P_1, u_{P_1}) < 1$. Além disso, se $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(\lambda_1)$ é distinta de P_1 e está contida em $M_\nu \setminus M$, então P' é não-contrátil em $M_\nu \setminus x_1(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Por hipótese, existe um nó trivial transversal simplesmente enlaçado $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial M$. Lembre que $\tilde{\sigma}$ é um nó trivial (em M) transversal à estrutura de contato satisfazendo $\text{sl}(\tilde{\sigma}) = -1$ e, se $\sigma = \Phi^{-1} \circ \tilde{\sigma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow T_f$, então $t \mapsto \sigma(t) = (1/2, f(1/2, t), t)$. Aqui $\Phi : \mathcal{N}^-(T_f) \rightarrow \mathcal{N}(\partial M)$ é o contactomorfismo induzido pela forma normal local para o bordo e T_f é o toro induzido pela função $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (veja Definição 3.6). Seja D um disco mergulhado em M tal que $\partial D = \tilde{\sigma}(\mathbb{R})$. Lembre que fixamos $N \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo $N \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo $N > \sup_{(z, \theta)} \{f(z, \theta)\}$, onde o supremo estende-se sobre $(z, \theta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Considere a faixa

$$F_1 := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : z = 1/2, f(z, \theta) \leq r \leq N\} \quad (3.24)$$

e cole os bordos ∂D e $\partial F_1(f) = \{(z, r, \theta) \in F_1 : r = f(z, \theta)\}$. Esta colagem é induzida pelo contactomorfismo Φ . Note que a faixa F_1 é transversal à estrutura de contato. Isto é consequência de $\xi_0 = \ker(H(dz + r^2 d\theta)) = \text{span}\{\partial_r, r^2 \partial_z - \partial_\theta\}$ e $TF_1 = \text{span}\{\partial_r, \partial_\theta\}$. Dentro do toro sólido $T = S^1 \times \mathbb{D}$, considere $F_0 := \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \phi = \pi\}$. A faixa F_0 é também transversal à estrutura de contato, visto que $\xi_1 = \ker \lambda_1|_T = \ker \alpha_1 = \text{span}\{\partial_\rho, n\partial_\phi - m\partial_\mu\}$, onde $m, n \neq 0$ são funções suaves (veja Lema 3.19), e $TF_0 = \text{span}\{\partial_\rho, \partial_\nu\}$. Cole os bordos $\partial F_0(1) = \{(\mu, \rho, \phi) \in F_0 : \rho = 1\}$ e $\partial F_1(N) = \{(z, r, \theta) \in F_1 : r = N\}$ pela aplicação ϑ definida em (3.7). A união $\mathcal{D} := D \cup F_1 \cup F_2$ é um disco contínuo mergulhado satisfazendo $\partial \mathcal{D} = P_1$. Seja $u_{P_1} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ um mergulho contínuo tal que $u_{P_1}(\mathbb{D}) = \mathcal{D}$. A menos de uma perturbação pequena, ainda denotada por u_{P_1} , podemos supor que $\mathcal{D} = u_{P_1}(\mathbb{D})$ é um disco mergulhado cujo bordo é a órbita fechada $P_1 = (x_1, T_1)$. Como a perturbação pode ser escolhida arbitrariamente pequena e $\text{sl}(\tilde{\sigma}) = -1$, concluímos que $\text{sl}(P_1, u_{P_1}) = -1$.

Seja $Z : \mathbb{D} \rightarrow (u_{P_1})^*\xi_1$ uma seção não-nula do fibrado $d\lambda_1$ -simplético $(u_{P_1})^*\xi_1 \rightarrow \mathbb{D}$. Seja $\Psi : \xi_{P_1} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ a trivialização $d\lambda_1$ -simplética de $\xi_{P_1} := (x_1|_{T_1})^*\xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida pela seção $Z|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \rightarrow \xi_{P_1}$. Pela primeira parte da demonstração, $\text{sl}(P_1, u_{P_1}) = -1$, pelo Lema 3.19, sabemos que $\rho(P_1, \beta) < 0$. O Lema 1.14 implica que $\rho(P_1, u_{P_1}) < 1$.

Vamos provar que as órbitas fechadas distintas de P_1 e contidas em $M_\nu \setminus (M \setminus \partial M)$ estão enlaçadas em P_1 . Note que os toros $T_f \simeq \partial M$ e $T_N \simeq \partial T = S^1 \times \partial \mathbb{D}$, onde $T_N = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : r = N\}$, são invariantes pelo fluxo de Reeb. Isto significa que as órbitas (linhas

de auto-enlaçamento da órbita fechada P em relação ao disco $v(\mathbb{D})$ é denotado por $\text{sl}(P, v)$. De maneira análoga, podemos considerar o número de rotação transversal da órbita fechada P induzido pelo disco $v(\mathbb{D})$. Seja $\Psi : x_T^*\xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ uma trivialização $d\lambda_1$ -simplética de $x_T^*\xi_1 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induzida pela seção $Z|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \rightarrow x_T^*\xi_1$, onde $x_T(t) := x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. O número de rotação transversal de P em relação à Ψ é denotado por $\rho(P, v)$.

de fluxo) de Reeb com condição inicial em $T = S^1 \times \mathbb{D}$ permanecem em T , para todo $t \in \mathbb{R}$, e o mesmo vale tanto para o 3-anel $T(f, N) = \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$ quanto para a 3-variedade M . Verificaremos que as linhas de fluxo contidas em V_ν estão enlaçadas em P_1 . A condição $d\phi(X_{\lambda_1}) = d\phi(X_{\alpha_1}) < 0$ força as órbitas do campo de Reeb a girar em sentido negativo. Começemos com T . Seja $\tilde{x}$ uma órbita de Reeb. Observe que as interseções entre $\tilde{x}$ e a faixa F_0 são tais que a orientação da tripla $\{\partial_\mu, \partial_\rho, \tilde{x}'\}$ não coincide com a orientação de $\{\partial_\mu, \partial_\rho, \partial_\phi\}$. Esta última é uma tripla positivamente orientada. Em particular, se $\tilde{x}$ é $\tilde{T}$ -periódica, então a condição $d\phi(\tilde{x}(\tilde{T}t)) < 0$ obriga a órbita fechada $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ a dar um giro completo na direção $-\partial_\phi$. Disto segue que $\tilde{P}$ é não-contrátil em $M_\nu \setminus x_1(\mathbb{R})$. Por fim, suponha que $\tilde{x}$ é uma linha de fluxo de Reeb contida em $T(f, N)$. Lembre que $dz|_{T(f, N)}(X_{H\lambda_0}) < 0$, pelo Lema 3.21. Isto força $\tilde{x}(\mathbb{R}) \cap F_1 \neq \emptyset$, onde F_1 é definida em (3.24). Portanto, $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T}) \in \mathcal{P}(\lambda_1)$ é não-contrátil em $M_\nu \setminus x_1(\mathbb{R})$. ■

Preenchimento de Dehn para a Proposição 3.10

Nesta subseção, assumimos que $dz|_{T_f}(X_{h\lambda_0}) > 0$, nas coordenadas cilíndricas da forma normal. De (3.12), segue que $rh_r + 2h > 0$. Seja $\mathcal{N}(T_f)$ uma vizinhança aberta de $T_f \subset \mathbb{T}$. Diminuindo $\mathcal{N}(T_f)$, se necessário, podemos supor que $dz|_{\mathcal{N}(T_f)}(X_{h\lambda_0}) > 0$, isto é, $rh_r + 2h > 0$ sobre $\mathcal{N}(T_f)$ ¹⁹.

Seguindo a estratégia de demonstração da subseção anterior, começamos estendendo λ sobre o 3-anel $T(f, N) := \{(z, r, \theta) \in \mathbb{T} : f(z, \theta) \leq r \leq N\}$, onde $N \in \mathbb{R}_+^*$ satisfaz $N > \sup_{(z, \theta)} \{f(z, \theta)\}$ e o supremo estende-se sobre $(z, \theta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Lema 3.21. *Sejam $N \in \mathbb{R}_+^*$ fixado acima e $K = \mathcal{N}(T_f) \cup T(f, N)$. Existe uma função suave $H : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que estende h e satisfaz $rH_r + 2H > 0$.*

Demonstração. Neste caso a extensão é mais simples. Fixe $c \gg \sup_{(z, \theta)} \{h(z, f(z, \theta), \theta)\}$, onde o supremo estende-se sobre $(z, \theta) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Escolha uma função suave $H : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo

$$H(z, r, \theta) = \begin{cases} h(z, r, \theta), & \text{se } r = f(z, \theta); \\ c, & \text{se } r \geq N. \end{cases} \quad (3.25)$$

Note que H estende h . Pelo fato de que h satisfaz $rh_r + 2H > 0$ sobre $\mathcal{N}(T_f)$ e pela escolha de $c > 0$, podemos supor que $rH_r + 2H > 0$ sobre K . ■

Seja $\mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D}) \subset S^1 \times \mathbb{D}$ uma vizinhança aberta de $S^1 \times \partial\mathbb{D}$ suficientemente pequena. Como na subseção anterior, definimos uma aplicação $\Omega : \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{T}$ dada por

$$(\mu, \rho, \phi) \mapsto \Omega(\mu, \rho, \phi) = \left(\frac{\phi}{2\pi}, N + (1 - \rho), 2\pi\mu \right). \quad (3.26)$$

Repare que, no Lema 3.21, construímos H satisfazendo $H(r) \equiv c > 0$, para todo $r \geq N$. Isto

¹⁹Estamos supondo que h está definida sobre $\mathcal{N}(T_f)$.

implica que a forma *pull-back* $\alpha := \Omega^*(H\lambda_0)$ satisfaz

$$\alpha(\mu, \rho, \phi) := \Omega_{(\mu, \rho, \phi)}^*(H\lambda_0) = c \left(\frac{1}{2\pi} d\phi + 2\pi \cdot k(\rho)^2 d\mu \right),$$

onde $k(\rho) = N + 1 - \rho$. Note que α também é da forma $\alpha_{m,n} = md\phi + nd\mu$, onde $m = \frac{1}{2\pi}c$ e $n(\rho) = 2\pi \cdot c \cdot k(\rho)^2$ é uma função suave definida para todo ρ tal que $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Observe que $m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho) < 0$ e $n_\rho(\rho) < 0$, para todo ρ tal que $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Disto segue, tendo em vista (3.19), que a componente do campo de Reeb X_α na direção ∂_ϕ satisfaz $d\phi(X_\alpha(\mu, \rho, \phi)) = \frac{n_\rho(\rho)}{m(\rho) \cdot n_\rho(\rho) - n(\rho) \cdot m_\rho(\rho)} > 0$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Nosso próximo objetivo é provar o correspondente do Lema 3.19 para o caso verticalmente positivo.

Lema 3.22. *Existe uma forma de contato α_2 definida em $T = S^1 \times \mathbb{D}$ tal que α_2 coincide com $\alpha(\mu, \rho, \phi) = c \left(\frac{1}{2\pi} d\phi + 2\pi k(\rho)^2 d\mu \right)$ para ρ próximo de $\rho = 1$ e o campo de Reeb X_{α_2} satisfaz $d\phi(X_{\alpha_2}(\mu, \rho, \phi)) > 0$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in T$ e $\rho \neq 0$. Além disso, a extensão pode ser feita de maneira que:*

- (i) *exista uma órbita fechada $P_2 = (x_2, T_2) \in \mathcal{P}(\alpha_2)$ contida em $S^1 \times \{(0, 0)\}$;*
- (ii) *se β é a classe de homotopia de trivializações $d\alpha_2$ -simplética do fibrado $\xi_2|_{P_2} := (x_2|_{T_2})^* \xi_2 \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $x_2|_{T_2}(t) = x_2(T_2 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, induzida pelo campo normal²⁰, então a órbita fechada P_2 satisfaz $\rho(P_2, \beta) < 0$.*

Demonstração. Fixe $\delta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que se $\rho_0 = 1 - \delta_0$, então $T_{\rho_0} := \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \rho = \rho_0\} \subset \mathcal{N}(S^1 \times \partial\mathbb{D})$. Considere uma função suave $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que²¹

$$m(\rho) = \begin{cases} \frac{c}{2\pi}, & \text{se } \rho \geq 1 - \delta_0 \\ \rho^2, & \text{se } \rho \leq 1 - 2\delta_0. \end{cases}$$

Note que não há problema em supor que $c > 2\pi$. Isto permite escolher a função m satisfazendo $m_\rho(\rho) > 0$, para todo ρ em $(0, 1)$. Escolha $n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$ tal que

$$n(\rho) = \begin{cases} 2\pi c \cdot k(\rho)^2, & \text{se } \rho \geq 1 - \delta_0 \\ a, & \text{se } \rho \leq 1 - 2\delta_0, \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}_+^*$ é escolhido de maneira que podemos supor $n_\rho(\rho) < 0$, para todo $\rho \in (0, 1)$. A Figura 3.4 mostra $(m(\rho), n(\rho))$ satisfazendo as condições acima.

Vamos fazer uma última perturbação. Por construção, $\alpha_{m,n} = md\phi + nd\mu$ satisfaz $\alpha_{m,n} = (\rho^2 d\phi + ad\mu)$ perto da espinha $S^1 \times \{(0, 0)\}$ do toro sólido $T = S^1 \times \mathbb{D}$. Fixe $q > 0$ e seja $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\kappa > 2q\pi\rho_1^2 + a$, onde $\rho_1 = 1 - 3\delta_0$. Defina a função $f : [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^*$ tal que

$$f(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{se } \rho \geq 1 - 2\delta_0 \\ \frac{\kappa}{2q\pi\rho^2 + a}, & \text{se } \rho \leq \rho_1 = 1 - 3\delta_0. \end{cases}$$

²⁰Novamente ∂_n é normal à faixa $F_0 := \{(\mu, \rho, \phi) \in S^1 \times \mathbb{D} : \phi = \phi_0\}$, para algum $\phi_0 \in \partial\mathbb{D}$, sobre P_2 .

²¹Esta função *estende* a constante $m = \frac{c}{2\pi}$ definida acima.

Figura 3.4: Exemplo de funções $(m(\rho), n(\rho))$.

Pela escolha de κ , podemos supor que $f_\rho(\rho) < 0$, para todo $\rho \in (0, 1 - 2\delta_0)$. Considere $\alpha_2 = f\alpha_{m,n}$. Note que o campo de Reeb X_{α_2} próximo de $S^1 \times \{(0, 0)\}$ satisfaz

$$X_{\alpha_2}(\mu, \rho, \phi) = \left(\frac{\rho^2 f_\rho(\rho) + 2\rho f(\rho)}{2a\rho f(\rho)^2}, 0, -\frac{a f_\rho(\rho)}{2a\rho f(\rho)^2} \right) = \left(\frac{1}{\kappa}, 0, \frac{2q\pi}{\kappa} \right). \quad (3.27)$$

Seja $\{\phi_{2,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb para a forma de contato α_2 . Observe que a variação das linhas de fluxo de Reeb, após a primeira volta na direção ∂_ϕ , em relação a ∂_μ , é $\frac{2q\pi/\kappa}{1/\kappa} = 2q\pi > 0$. Repare, além disso, que a escolha de m e n implica que $d\phi(X_{\alpha_2}(\mu, \rho, \phi)) > 0$, para todo $(\mu, \rho, \phi) \in T = S^1 \times \mathbb{D}$ com $\rho \neq 0$. Tal como na prova do Lema 3.19, a condição $d\phi(X_{\alpha_2}) > 0$ força as órbitas do campo de Reeb a girarem em sentido positivo.

Novamente os toros com raio constante contidos em $T = S^1 \times \mathbb{D}$ são invariantes pelo fluxo de Reeb. Isto implica que existe uma órbita fechada $P_2 = (x_2, T_2) \in \mathcal{P}(\alpha_2)$ contida em $S^1 \times \{(0, 0)\}$. Aqui T_2 é o período mínimo. Denote $(x_2|_{T_2})(t) = x_2(T_2 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Seja $\Psi : \xi_2|_{P_2} \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}$ a trivialização $d\alpha_2$ -simplética do fibrado $\xi_2|_{P_2} \rightarrow S^1$ na classe β e considere a aplicação $\varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi_2(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi_2(t) = \Psi_t \circ d\phi_{2,T_2 t}|_{\xi_2(0)} \circ (\Psi_0)^{-1}$$

onde $\xi_2(0) := \xi_2(x_2(0))$, $d\phi_{2,T_2 t}|_{\xi_2(0)} : \xi_2(0) \rightarrow \xi_2(T_2 t)$ é a aplicação fluxo linearizado restrito à estrutura de contato. Pela definição de número de rotação transversal, temos que $\rho(P_2, \beta) = \rho(\varphi_2) > 0$. Isto conclui a prova do Lema 3.22. ■

Denotamos por λ_2 a forma de contato definida no preenchimento de Dehn M_ν e construída nos Lemas 3.21 e 3.22. O lema a seguir é o análogo do Lema 3.20 para o caso verticalmente positivo (Proposição 3.10). A demonstração é idêntica. Enunciamos este resultado apenas para futuras referências.

Lema 3.23. *Existe um mergulho $u_{P_2} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ tal que $u_{P_2}(e^{2\pi i t}) = x_2(T_2 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e a órbita fechada P_2 satisfaz $\text{sl}(P_2, u_{P_2}) = -1$, $\rho(P_2, u_{P_2}) > 1$. Além disso, se $P' = (x', T') \in$*

$\mathcal{P}(\lambda_2)$ é distinta de P_2 e está contida em $M_\nu \setminus M$, então P' é não-contrátil em $M_\nu \setminus x_1(\mathbb{R})$.

3.4.2 Análise de *bubbling-off* para um preenchimento de Dehn

Num primeiro momento, vamos relembrar alguns conceitos sem levar em conta o fato de que tratamos de um preenchimento de Dehn. Este fato será importante somente na demonstração do Lema 3.35. Inicialmente, vamos considerar o seguinte contexto. Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa N . Considere $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ arbitrário. A construção a seguir é independente da estrutura complexa em $J(\lambda)$. Também não faremos hipóteses sobre $c_1|_{\pi_2(N)}(\xi)$. Nosso objetivo é provar algumas propriedades relacionadas à análise de *bubbling-off* de sequências germinantes no caso em que $c_1|_{\pi_2(N)}(\xi)$ pode ser não-nulo. Começemos lembrando o conceito de sequência germinante. Denote $B_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, para algum $R > 0$. Fixe $C > 0$ e defina constantes $\sigma_1, \sigma_2(C) \in \mathbb{R}_+^*$ dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \inf\{T \in \mathbb{R}_+^* : T \text{ é período de alguma } P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)\}, \\ \sigma_2(C) &:= \inf\{|T - T'| : T, T' \text{ são períodos, } T, T' \leq C \text{ e } T \neq T'\}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Segue que $\sigma_2(C) > 0$. Isto é consequência de λ ser não-degenerada. Escolha $\sigma(C) \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$0 < \sigma(C) < \min\{\sigma_1, \sigma_2(C)\}.\tag{3.29}$$

A não-degenerescência de λ implica que $\sigma(C)$ está bem-definido. Seja $R_n \in \mathbb{R}$ tal que $R_n \rightarrow \infty$. Dizemos que uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é uma *sequência germinante* se

$$E_H(\tilde{v}_n) \leq C, \quad \int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} v_n^* d\lambda \leq \sigma(C)\tag{3.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\{b_n(2)\} \text{ é uniformemente limitada.}\tag{3.31}$$

Dizemos que $\tilde{v}_n$ possui um *limite não-constante* se existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times N$ não-constante tais que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times N)$. Provamos no Apêndice C que se a sequência germinante $\tilde{v}_n$ admite um limite não-constante $\tilde{v}$, então existe uma árvore de *bubbling-off*²² associada à $\tilde{v}_n$ e ao limite $\tilde{v}$.

Sejam $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante e $\tilde{v}$ um limite não-constante para $\tilde{v}_n$. Seja $\mathfrak{F}$ uma árvore de *bubbling-off* para $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$ e denote por $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ o conjunto das órbitas fechadas contidas em $\mathfrak{F}$. No Apêndice C, verificamos que existem *discos contínuos induzidos por $\mathfrak{F}$* para as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$. Vamos relembrar esta construção. Sejam $\tilde{w} = (b, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times N$ uma esfera furada de energia finita em $\mathfrak{F}$ e $T = (V, r, E)$ a árvore finita associada à árvore de *bubbling-off*

²²Veja a Definição C.3 no Apêndice C.

$\mathfrak{F}$. O par (V, E) pode ser interpretado como um grafo orientado. Seja $\mathfrak{e}$ o vértice associado à $\tilde{w}$ e denote por $(V_{\tilde{w}}, E_{\tilde{w}})$ o subgrafo emanando de $\mathfrak{e}$. Considere o subconjunto

$$\mathfrak{R}_{\tilde{w}} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times N : q \in V_{\tilde{w}} \text{ e } q \neq \mathfrak{e}\}$$

de $\mathfrak{F}$. Se $\bar{w}_q$ denota a extensão de w_q sobre a compactificação $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma_q}$ e $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{w}$ no furo positivo em ∞ , então podemos definir

$$D_{\tilde{w}} = \bar{w} \bigcup_{q \in V_{\tilde{w}}} \bar{w}_q. \quad (3.32)$$

Esta construção mostra que se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ é limite assintótico de uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times N$ no único furo positivo em ∞ , então existe um disco contínuo definido conforme (3.32) cujo bordo é a órbita fechada $P = (x, T)$. Dizemos que (3.32) é um *disco induzido pela árvore de bubbling-off*.

Uma construção análoga àquela exposta acima prova o seguinte lema (veja Apêndice C para um esboço da demonstração). Este resultado permitirá minorar os índices μ_{CZ} das órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$.

Lema 3.24. *Seja $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times N$ uma esfera furada de energia finita cujo único furo positivo é ∞ e Γ corresponde aos furos negativos. Sejam $P_{\infty} = (x_{\infty}, T_{\infty})$, $P_z = (x_z, T_z) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ os limites assintóticos nos furos ∞ e $z \in \Gamma$, respectivamente. Suponha que existam $u_z : \mathbb{D} \rightarrow N$ tal que $\mu_{CZ}(P_z, u_z) \geq 2$, para todo $z \in \Gamma$. Então existe um disco contínuo $u_{\infty} : \mathbb{D} \rightarrow N$ tal que $u_{\infty}(e^{2\pi it}) = x_{\infty}(T_{\infty}t)$, para todo $t \in S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e $\mu_{CZ}(P_{\infty}, u_{\infty}) \geq 2$. Em particular, se $\pi \cdot dw \equiv 0$ e $\#\Gamma \geq 2$, então $\mu_{CZ}(P_{\infty}, u_{\infty}) \geq 3$.*

Já observamos no Apêndice C que o lema anterior tem o seguinte corolário para o caso de uma árvore de *bubbling-off* induzida por uma sequência germinante com limite não-constante.

Corolário 3.25. *Sejam $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante com limite não-constante $\tilde{v}$ e $\mathfrak{F}$ uma árvore de bubbling-off associada a $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ e $u : \mathbb{D} \rightarrow N$ é o disco induzido por $\mathfrak{F}$, então $\mu_{CZ}(P, u) \geq 2$.*

O resultado a seguir é uma importante ferramenta na análise de *bubbling-off* que faremos adiante. É uma versão da Proposição 3.10 em [39] adaptada ao nosso contexto. A demonstração combina argumentos encontrados em [22, 39].

Lema 3.26. *Seja $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante e suponha que $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times N$, onde $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ é finito, é um limite não-constante para $\tilde{v}_n$. Suponha que $\tilde{v}_n$ é mergulho, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathfrak{F}$ uma árvore de bubbling-off associada a $\tilde{v}_n$ e ao limite $\tilde{v}$. Seja $P_{\infty} = (x_{\infty}, T_{\infty}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ no único furo positivo em ∞ e suponha que $\mu_{CZ}(P_{\infty}, u_{\infty}) \leq 2$, onde $u_{\infty} : \mathbb{D} \rightarrow N$ é o disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$. Então existe um plano de energia finita $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ e uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ limite assintótico de $\tilde{v}_0$ no único furo em ∞ tais que*

- (i) $v_0 : \mathbb{C} \rightarrow N$ é uma imersão transversal ao campo de Reeb;
- (ii) $\tilde{v}_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é um mergulho;
- (iii) $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$, onde $\bar{v}_0$ é a extensão contínua de v_0 sobre a compactificação $\bar{\mathbb{C}}$;
- (iv) se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ satisfaz $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Demonstração. Se $\Gamma' = \emptyset$, então a conclusão é óbvia. Suponha que $\Gamma' \neq \emptyset$ e denote $\Gamma' = \{z_1, \dots, z_k\}$. Dado $j \in \{1, \dots, k\}$, seja $Q_j = (y_j, T'_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ em z_j e $u_j : \mathbb{D} \rightarrow M$ o disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$ para a órbita fechada Q_j . O Corolário 3.25 mostra que $\mu_{CZ}(Q_j, u_j) \geq 2$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Por hipótese, existe um disco contínuo $u_\infty : \mathbb{D} \rightarrow N$ induzido por $\mathfrak{F}$ tal que $\mu_{CZ}(P_\infty, u_\infty) \geq 2$. Se $\pi \cdot dv \equiv 0$, pelo Lema 3.24, concluímos que $\#\Gamma' = 1$ e existe $P_1 = P_\infty$ tal que $\mu_{CZ}(P_1, u_1) = 2$. Se $\pi \cdot dv \not\equiv 0$, então, ou $\Gamma' = \emptyset$ ou existe $z' \in \Gamma'$. No primeiro caso, $\tilde{v}$ é um plano de energia finita cujo limite assintótico em ∞ é a órbita fechada $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. É imediato que $\mu_{CZ}(P_\infty, u_\infty) = 2$. No segundo caso, a hipótese $\mu_{CZ}(P_\infty, u_\infty) \leq 2$, a noção de *índice de Conley-Zehnder generalizado* e os Lemas 1.72 e 1.73 no Capítulo 1 implicam que

$$\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq \text{wind}(\beta_\infty^{\text{neg}}) \leq 1.$$

Como $\mu_{CZ}(Q_j, u_j) \geq 2$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, a noção de *índice de Conley-Zehnder generalizado* e os Lemas 1.72 e 1.73 mostram que

$$\text{wind}_\infty(\tilde{v}, z_j) \geq \text{wind}(\beta_{z_j}^{\text{pos}}) \geq 1.$$

Se existisse $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\mu_{CZ}(Q_{j_0}, u_{j_0}) \geq 3$, os Lemas 1.72 e 1.73 implicariam $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, z_{j_0}) \geq 2$ e, pelo Teorema 1.70, teríamos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{wind}_\pi(\tilde{v}) = \text{wind}_\infty(\tilde{v}) + k - 1 \\ &= \text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) - \sum_{j \in \{1, \dots, k\}} \text{wind}_\infty(\tilde{v}, z_j) + k - 1 \\ &\leq 1 - (k - 1) - 2 + k - 1 = -1. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Esta contradição mostra que $\mu_{CZ}(Q_j, u_j) = 2$, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Lembre que (V, r, E) é a árvore finita associada à árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}_{\tilde{v}_n}$. Escolha um $z' \in \Gamma'$ e seja $\mathfrak{e} \in E$ a aresta, com extremidades $q, q' \in V$, associada ao furo negativo z' . Seja $\tilde{v}_1 = (b_1, v_1) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R} \times M$ a esfera furada de energia finita contida em $\mathfrak{F}$ correspondente ao vértice q' . Note que o limite assintótico de $\tilde{v}_1$ (no único furo positivo) em ∞ é a órbita fechada $Q_{z'} = (y_{z'}, T'_{z'})$. Pelo Lema 3.24, se $\pi \cdot dv_1 \equiv 0$, visto que $\#\Gamma_1 \geq 2$, concluiríamos que $\mu_{CZ}(Q_{z'}, u_{z'}) \geq 3$, onde $u_{z'} : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$ satisfazendo $u_{z'}(e^{2\pi it}) = x_{z'}(T'_{z'}t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Portanto, $\pi \cdot dv_1 \not\equiv 0$ e, ou $\Gamma' = \emptyset$ e neste caso $\tilde{v}_1$ é um plano de energia finita cujo limite assintótico em ∞ é a órbita fechada $Q_{z'} = (y_{z'}, T'_{z'}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ ou existe $z_1 \in \Gamma_1$ de modo que se $\tilde{Q}_{z_1} = (\tilde{y}_{z_1}, \tilde{T}'_{z_1}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é a órbita fechada limite assintótico de $\tilde{v}_1$ em z_1 , então $\mu_{CZ}(\tilde{Q}_{z_1}, u_{z_1}) = 2$. Aqui $u_{z_1} : \mathbb{D} \rightarrow N$ é o disco induzido por $\mathfrak{F}$ para a órbita fechada $\tilde{Q}_{z_1} = (\tilde{y}_{z_1}, \tilde{T}'_{z_1})$. Novamente existe uma esfera furada de energia finita $\tilde{v}_2 = (b_2, v_2) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_2 \rightarrow$

$\mathbb{R} \times N$ contida em $\mathfrak{F}$ satisfazendo $\pi \cdot dv_2 \neq 0$ e tal que o limite assintótico de $\tilde{v}_2$ em ∞ é a órbita fechada $\tilde{Q}_{z_1} = (\tilde{y}_{z_1}, \tilde{T}'_{z_1}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Ou $\Gamma_2 = \emptyset$ e $\tilde{v}_2$ é um plano de energia finita cujo limite assintótico em ∞ é a órbita fechada $Q_{z_2} = (y_{z_2}, T'_{z_2}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ ou existe $z_2 \in \Gamma_1$ tal que se $\tilde{v}_2$ é assintótica a $\tilde{Q}_{z_2} = (\tilde{y}_{z_2}, \tilde{T}'_{z_2}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$, então $\mu_{CZ}(\tilde{Q}_{z_2}, u_{z_2}) = 2$, onde $u_{z_2} : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o disco induzido por $\mathfrak{F}$ para $\tilde{Q}_{z_2} = (\tilde{y}_{z_2}, \tilde{T}'_{z_2})$. Indutivamente, este procedimento produz um conjunto finito de órbitas fechadas $Q_{z_i} = (y_{z_i}, T'_{z_i}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ e esferas furadas de energia finita $\tilde{v}_i = (b_i, v_i) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R} \times M$ contida em $\mathfrak{F}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, satisfazendo $\pi \cdot dv_i \neq 0$ e cujo limite assintótico em ∞ é $\tilde{Q}_{z_i} = (\tilde{y}_{z_i}, \tilde{T}'_{z_i}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ tal que $\mu_{CZ}(\tilde{Q}_{z_i}, u_{z_i}) = 2$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Lembre que $u_{z_i} : \mathbb{D} \rightarrow M$ denota o disco induzido por $\mathfrak{F}$ para $\tilde{Q}_{z_i} = (\tilde{y}_{z_i}, \tilde{T}'_{z_i})$. A finitude destes conjuntos é consequência da finitude de $\mathfrak{F}$. Note que $\tilde{v}_m = (b_m, v_m) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_m \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é um plano de energia finita. Esta construção mostra que podemos assumir a existência de um plano de energia finita $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ cujo limite assintótico em ∞ é uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$, onde $\bar{v}_0$ é a extensão de v_0 sobre a compactificação $\bar{\mathbb{C}}$. Lembre que $\bar{\mathbb{C}}$ é a compactificação de $\mathbb{C}$ obtida por adicionar uma cópia de S^1 em ∞ .

Nosso próximo objetivo é provar que v_0 é uma imersão. O argumento a seguir é, com pequenas modificações, aquele usado na prova da Proposição 3.10 em [39]. Seja $\bar{v}_0$ como acima. Repare que $\bar{\mathbb{C}}$ é difeomorfo ao disco fechado $\mathbb{D}$ e, a menos de uma composição com um difeomorfismo, podemos escrever $\bar{v}_0 : \mathbb{D} \rightarrow N$. Seja $A_{P_0, \bar{v}_0}$ o operador assintótico em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por uma trivialização $d\lambda$ -simplética de $\bar{v}_0^* \xi \rightarrow \mathbb{D}$. Seja $\beta^{\text{neg}} = \max\{\beta \in \text{Spec}(A_{P_0, \bar{v}_0}) : \beta < 0\}$, onde $\text{Spec}(A_{P_0, \bar{v}_0})$ é o espectro $A_{P_0, \bar{v}_0}$. O índice de Conley-Zehnder generalizado (Teorema 1.32) mostra que

$$2 = \mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + p \Rightarrow \text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$$

e $p = 0$. No Lema 1.72 mostramos que $\text{wind}_\infty(\tilde{v}_0, \infty) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}})$. Disto concluímos $\text{wind}_\infty(\tilde{v}_0, \infty) \leq 1$. O Teorema 1.70 implica $0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{v}_0) = \text{wind}_\infty(\tilde{v}_0, \infty) - 1 \leq 0$, isto é, $\text{wind}_\pi(\tilde{v}_0) = 0$, disto segue que $\pi \circ dv_0(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Deste modo, $\mathbb{R}X_\lambda(v_0(z)) \oplus dv_0(z)(T_z\mathbb{C}) = T_{v_0(z)}N$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e v_0 é uma imersão transversal ao campo de Reeb.

Vamos provar que $\tilde{v}_0$ é injetiva. Considere o conjunto $\mathcal{S}(\tilde{v}_0) := \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta : \tilde{v}_0(z_1) = \tilde{v}_0(z_2)\}$, onde $\Delta := \{(z, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$ é a diagonal de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Suponha, por contradição, que $\mathcal{S}(\tilde{v}_0) \neq \emptyset$. Caso $\mathcal{S}(\tilde{v}_0)$ possua um ponto limite em $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta$, pela Proposição 1.58 (veja também [26, Proposição 6.2]), existe um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $\deg(p) \geq 2$ e um plano de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ *somewhere injective* fatorando $\tilde{v}_0$ em $\tilde{v}_0 = \tilde{w} \circ p$. Como $\deg(p) \geq 2$ e $d\tilde{v}_0 = d\tilde{w} \circ dp$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $d\tilde{v}_0(z)$ não é imersão. Isto mostra que $\mathcal{S}(\tilde{v}_0)$ possui somente pontos isolados. Lembre que $\tilde{v}_0$ pode ser aproximada por reparametrizações de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas na sequência germinante $\tilde{v}_n$. Como $\tilde{v}_0 \in \mathfrak{F}$ e, portanto, existem sequências $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{v}_0 \text{ na topologia usual de } C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times N).$$

O fato de que $\mathcal{S}(\tilde{v}_0)$ é constituído de pontos isoladas implica que existe um compacto $K \subset \mathbb{C}$, suficientemente grande, tal que $\tilde{v}_0|_K$ admite um número finito de auto-interseções contidas no interior de K (possivelmente não todas as interseções). Pela *Teoria de Interseção* de McDuff, $\text{Int}(\tilde{v}_0|_K) > 0$. Pela *estabilidade de interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*, temos que $\text{Int}(\tilde{v}_n|_K) > 0$, para n suficientemente grande. Isto é uma contradição ao fato de que as curvas $\tilde{v}_n$ são mergulhos. Portanto, $\mathcal{S}(\tilde{v}_0) = \emptyset$, isto é, $\tilde{v}_0$ é injetiva. Como o conjunto $\mathcal{Z}(\tilde{v}_0) = \{z \in \mathbb{C} : d\tilde{v}_0(z) = 0\}$ dos pontos críticos é vazio, concluímos que $\tilde{v}_0$ é um mergulho.

Vamos verificar que se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ satisfaz $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Seja $F : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R} \times N$ o cilindro (imerso) de energia finita definido por

$$\zeta \mapsto \left(\frac{T \log |\zeta|}{2\pi}, x_0 \left(\frac{T \arg \zeta}{2\pi} \right) \right).$$

Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) : \tilde{v}_0(z) = F(\zeta)\}.$$

No que segue, vamos verificar que $A = \emptyset$. Isto implica que $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Sejam $(z^*, \zeta^*) \in A$ não isolado e $(z_n, \zeta_n) \in A$ uma sequência tal que $(z_n, \zeta_n) \rightarrow (z^*, \zeta^*)$. Por definição, $\tilde{v}_0(z_n) = F(\zeta_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 2.4.3 em [48], existe um biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ satisfazendo $F = \tilde{v}_0 \circ \varphi$. Note que ϕ existe pois tanto $\tilde{v}_0$ quanto F são imersões $\tilde{J}$ -holomorfas. Repare que existência de ϕ contradiz o fato de que $\tilde{v}$ é transversal ao campo de Reeb. Esta contradição mostra que A , caso seja não vazio, é discreto. Escolha $(z^*, \zeta^*) \in A$ isolado. Como $\tilde{v}_0 \in \mathfrak{F}$, existem sequências $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{v}_0 \text{ na topologia usual de } C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times N),$$

Observe que a interseção entre $\tilde{v}_0$ e F em (z^*, ζ^*) é transversal. Pela *positividade e estabilidade de interseções de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas*, conforme *Teoria de Interseção* de McDuff em [49], a existência de (z^*, ζ^*) força interseções entre a F e as $\tilde{v}_n$, para n suficientemente grande. Isto não é possível, visto que, por hipótese, $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $A = \emptyset$ e isto conclui a prova do Lema 3.26. ■

Adiante precisaremos de uma versão do lema anterior com a hipótese $\mu_{CZ}(P_\infty) \leq 2$ trocada por $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$. Antes de enunciarmos este resultado, vamos fixar uma trivialização $d\lambda$ -simplética conveniente para o fibrado $\xi_{P_\infty} := (x_\infty)_{T_\infty}^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Conforme o enunciado do Lema 3.26, $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times N$ no (único) furo positivo em ∞ , $\tilde{v}$ é um limite (não-constante) para $\tilde{v}_n$ e Γ' corresponde aos furos negativos de $\tilde{v}$. Denote $\Gamma' = \{z_1, \dots, z_k\}$ e, para $j \in \{1, \dots, k\}$, seja $Q_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ em z_j . Fixe discos contínuos $u_j : \mathbb{D} \rightarrow N$ induzidos por $\mathfrak{F}$ para Q_j , para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Já mencionamos no Capítulo 1 que existe uma trivialização $d\lambda$ -simplética

de $\bar{v}^*\xi \rightarrow \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma'}$ induzida pela trivialização $d\lambda$ -simplética de $u_\infty^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$, onde $u_\infty : \mathbb{D} \rightarrow N$ satisfaz $u_\infty(\mathbb{D}) = \bar{v} \bigcup_{z \in \Gamma'} u_z$. Aqui $\bar{v}$ denota a extensão de v sobre a compactificação $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma'}$. No resultado a seguir consideramos $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty)$ medido em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética acima.

Lema 3.27. *Sejam $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante e $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times N$, onde $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ é finito, é um limite não-constante para $\tilde{v}_n$ satisfazendo $\pi \cdot dv \not\equiv 0$. Suponha que $\tilde{v}_n$ é mergulho, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathfrak{F}$ uma árvore de bubbling-off associada a $\tilde{v}_n$ e ao limite $\tilde{v}$. Suponha que $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$. Então existe um plano de energia finita $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ e uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ limite assintótico de $\tilde{v}_0$ no único furo em ∞ tais que*

- (i) $v_0 : \mathbb{C} \rightarrow N$ é uma imersão transversal ao campo de Reeb;
- (ii) $\tilde{v}_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é um mergulho;
- (iii) $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$, onde $\bar{v}_0$ é a extensão contínua de v_0 sobre a compactificação $\bar{\mathbb{C}}$;
- (iv) se $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ satisfaz $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Demonstração. Lembre que $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{v}$ no único furo positivo em ∞ e seja $u_\infty : \mathbb{D} \rightarrow N$ o disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$ para P_∞ . No lema anterior, dispúnhamos da hipótese $\mu_{CZ}(P_\infty, u_\infty) \leq 2$ e esta implicava $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$. Como esta última desigualdade é a nossa hipótese, a demonstração do Lema 3.27, deste ponto em diante, é idêntica à prova do Lema 3.26. ■

Lema auxiliar para a análise de *bubbling-off*

Nesta subseção, vamos considerar o seguinte contexto. Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa N . Suponha que $\mathbb{T}^2$ é um toro mergulhado em N dividindo N em duas variedades (tri-dimensionais) conexas, compactas e mergulhadas N_k , $k = 1, 2$, com bordo $\partial N_k = \mathbb{T}^2$, $k = 1, 2$, satisfazendo $N = N_1 \cup N_2$ e $N_1 \cap N_2 = \mathbb{T}^2$. Assumiremos que N_2 é difeomorfa a $S^1 \times \mathbb{D}$ e ∂N_2 é invariante pelo fluxo de Reeb. Suponha que $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é uma órbita fechada contida na espinha de N_2 (isto é, $x(\mathbb{R}) \subset S^1 \times \{(0, 0)\} \subset S^1 \times \mathbb{D} \simeq N_2$). Assumiremos que $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ é o plano mergulhado de energia finita (obtido conforme os Lemas 3.26 e 3.27), e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{v}_0$ em ∞ . Suponha que $x_0(\mathbb{R}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$ e $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Disto, concluiremos $v_0(\mathbb{C}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$. Isto é o conteúdo do lema (técnico) a seguir. Este resultado será útil nas demonstrações das Proposições 3.9 e 3.10.

Lema 3.28. *Seja $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times N$ o plano mergulhado de energia finita e transversal ao campo de Reeb (conforme os Lemas 3.26 e 3.27) cujo limite assintótico em ∞ é a órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Suponha que $x_0(\mathbb{R}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$ e $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, onde $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ foi fixada acima. Então $v_0(\mathbb{C}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$. Em particular, $\mu_{CZ}(P_0, u) = 2$, para todo $u : \mathbb{D} \rightarrow N_1$ satisfazendo $u(e^{2\pi it}) = x_0(T_0 t)$ e $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Demonstração. A prova será por contradição. Suponha que $v_0(\mathbb{C}) \cap N_2 \neq \emptyset$, onde $N_2 := \overline{N \setminus N_1}$. Considere $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow N_1$ dada por $\gamma(t) = v_0(Re^{2\pi it})$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, para algum $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Como $x_0(\mathbb{R}) \subset N_1 \setminus \partial N_1$, escolhendo $R \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, podemos supor que $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap N_2 = \emptyset$ e $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cap \partial N_2 = \emptyset$. Considere $\Sigma = v_0(D_R(0))$, onde $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, e repare que Σ é uma superfície imersa e $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \partial \Sigma$. Lembre que $\mathbb{T}^2 = \partial N_1 = \partial N_2$. Como $v_0(\mathbb{C}) \cap N_2 \neq \emptyset$, devemos ter que $v_0(\mathbb{C}) \cap \partial N_2 \neq \emptyset$. Sabemos que $v_0(\mathbb{C})$ (e, portanto, Σ) é transversal ao campo de Reeb e, por hipótese, ∂N_2 é invariante pelo fluxo de Reeb. Isto mostra que a interseção $\Sigma \cap \mathbb{T}^2$ é transversal e, portanto, $\Sigma \cap \mathbb{T}^2$ é uma subvariedade imersa 1-dimensional²³ de N . Como Σ é compacta, $\Sigma \cap \mathbb{T}^2$ é compacta. Além disso, $\partial(\Sigma \cap \mathbb{T}^2) = \partial \Sigma \cap \mathbb{T}^2 = \emptyset$ e, pelo *Teorema de Classificação das variedades 1-dimensionais* (veja [15, Seção 2.2]), $\Sigma \cap \mathbb{T}^2$ é uma união (finita) de cópias de S^1 . Seja $\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ uma imersão de uma cópia de S^1 . Note que existe uma região fechada (e limitada) $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tal que $v_0(\Lambda) \subset N_2$ e uma das componentes de bordo de $v_0(\Lambda)$ é a curva $\eta(S^1)$. A região Λ é ilustrada abaixo.

Figura 3.5: Região fechada (e limitada) Λ .

Lembre que estamos supondo $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, onde $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$. Em particular, $\Sigma \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Seja $r : N_2 \setminus x(\mathbb{R}) \rightarrow \partial N_2$ uma projeção suave sobre N_2 tal que a restrição de r a N_2 é a identidade, isto é, $r|_{N_2} = \text{id}$. Considere a composição $F := r \circ v_0$. Observe que $F : \Lambda \rightarrow \partial N_2$ é uma 2-cadeia em ∂N_2 . Repare que isto é consequência de $\Sigma \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$ ²⁴. Como ∂N_2 é invariante pelo fluxo de Reeb, então $\int_{\Lambda} F^* d\lambda = 0$. Repare que $v_0|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow N_2$ é uma 2-cadeia cujo bordo coincide com o bordo de $F : \Lambda \rightarrow \partial N_2$. Sabemos, pelo *princípio de Similaridade de Carleman*, pois $\tilde{v}_0$ é um plano de energia finita, que $\int_{\Lambda} v_0^* d\lambda > 0$. O *Teorema de Stokes* implica que $0 < \int_{\Lambda} v_0^* d\lambda = \int_{\partial \Lambda} v_0^* \lambda = \int_{\partial \Lambda} (\text{id} \circ v_0)^* \lambda = \int_{\partial \Lambda} F^* \lambda = \int_{\Lambda} F^* d\lambda = 0$. Esta contradição conclui a demonstração do Lema 3.35. ■

²³ **Teorema da Imagem Inversa** ([3], *Teorema 5.11, Corolário 5.12*): Sejam N uma variedade n -dimensional e M uma variedade m -dimensional. Sejam $Z \subset N$ uma subvariedade imersa z -dimensional e $f : M \rightarrow N$ uma função suave. Se $f \pitchfork Z$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade imersa de M satisfazendo

$$\dim M - \dim f^{-1}(Z) = \dim N - \dim Z.$$

Em particular, se f é uma imersão de M em N , então $\dim(f(M) \pitchfork Z) = m + z - n$.

²⁴ Aqui consideramos Λ orientada como subconjunto de $\mathbb{C}$ e $\partial \Lambda$ com a orientação induzida.

3.4.3 Final da Demonstração do Teorema 3.8

Nas subseções seguintes, vamos concluir as demonstrações das Proposições 3.9 e 3.10. Isto completará a prova do Teorema 3.8.

Final da demonstração da Proposição 3.9

Na Seção 3.4.1, construímos um *preenchimento de Dehn de contato* M_ν para a 3-variedade de contato M . Lembre que cuidadosamente estendemos a forma de contato λ sobre M_ν . Denotamos esta extensão por λ_1 . No Lema 3.19, construímos uma órbita fechada $P_1 = (x_1, T_1) \in \mathcal{P}^c(\lambda_1)$ e, no Lema 3.20, exibimos um mergulho $u_{P_1} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ cujo bordo é a órbita fechada P_1 e verificamos que $\rho(P_1, u_{P_1}) < 1$. No Apêndice E, mostramos que existe uma perturbação de λ_1 , ainda denotada por λ_1 , constante sobre M , tal que λ_1 é não-degenerada e P_1 é órbita fechada (não-degenerada) da forma de contato perturbada. Isto implica, em particular, que $\mu_{CZ}(P_1, u_{P_1}) \leq 1$ (veja Lema 2.5). A grosso modo, estamos no contexto da demonstração da Proposição 2.6 do Capítulo 2.

Observação 3.29. *Como durante toda esta subseção trabalharemos com o caso negativo (isto é, estaremos no contexto da Proposição 3.9), vamos simplificar as notações λ_1 , $P_1 = (x_1, T_1)$ e u_{P_1} e escrever apenas λ , $P = (x, T)$ e u_P .*

Nosso primeiro objetivo é construir uma *família de Bishop* de maneira análoga à estratégia de prova da Proposição 2.6. Faremos uma exposição resumida desta construção (para os detalhes, sugerimos o Capítulo 2). Sejam $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ uma estrutura quase-complexa $\mathbb{R}$ -invariante em $\mathbb{R} \times M_\nu$ definida por

$$\begin{cases} \tilde{J}_{(a,p)}(\partial_a) = X_\lambda(p) \\ \tilde{J}_{(a,p)}|_{\xi_p} = J_p, \end{cases} \quad (3.34)$$

para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M_\nu$, onde ∂_a é a direção real em $\mathbb{R} \times M_\nu$. Considere uma perturbação do mergulho $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$, ainda denotada por u_P , tal que o disco perturbado é um disco especial (lembre que P é simplesmente recoberta). Seja $\mathcal{D} := u_P(\mathbb{D})$ e e^+ a única singularidade elíptica real e positiva de $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$. Seja $\mathcal{M}_J$ o conjunto dos discos ($\tilde{J}$ -holomorfos) de energia finita, denominado *família de Bishop*, satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \tilde{u} = (a, u) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu \text{ é um mergulho;} \\ a(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, \quad u(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+ \cup P\}; \\ \text{wind}(u(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1; \\ u(\partial\mathbb{D}) \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset. \end{cases} \quad (3.35)$$

Observação 3.30. *Já observamos que existe $J' \in \mathcal{J}(\lambda)$ tal que $\mathcal{M}_{J'}$ é não-vazio (veja Seção 2.3.1). Pela transversalidade automática das soluções em $\mathcal{M}_{J'}$, podemos escolher $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}$ de modo que $\mathcal{M}_J$ é não-vazio. Lembre que $\mathcal{J}_{\text{gen}} \subset \mathcal{J}(\lambda)$ é um subconjunto residual construído de*

3.4. Demonstração do Teorema 3.8

maneira análoga à Seção 1.3.4. Este J pode ser escolhido arbitrariamente próximo de J' . Até o fim desta subseção, consideraremos $J \in \mathcal{J}_{gen}$ próximo de J' fixado e escreveremos apenas $\mathcal{M}$.

Fixe uma métrica Riemanniana g em M_ν e uma folha $l \in \mathcal{F}_\xi^D$. Denote por τ^* o comprimento da folha l relativo à métrica g . Seguindo [35, 39], definimos a função

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \tilde{u} &\mapsto \tau(\tilde{u}) \end{aligned} \tag{3.36}$$

que associa a cada $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ o comprimento $\tau(\tilde{u})$ (medido em relação à g) do segmento sobre l entre a singularidade e^+ e a interseção entre l e $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ (veja os detalhes na Seção 2.3.1). Fixe um disco de energia finita $\tilde{w}_0 \in \mathcal{M}$ próximo de e^+ . Recorde que $\tilde{w}_0$ satisfaz

$$\tilde{w}_0(\mathbb{D}) \cap (\mathbb{R} \times x(\mathbb{R})) = \emptyset. \tag{3.37}$$

Lembre que a ação por reparametrização dos biholomorfismos do disco $G = G(\mathbb{D})$ em $\mathcal{M}$ induz um quociente $\mathcal{M}/G$ cuja projeção é denotada por $\Pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$. Seja $\mathcal{Y}$ a componente conexa de $\mathcal{M}/G$ tal que $\Pi(\tilde{w}_0) \in \mathcal{Y}$. Podemos supor que todos os elementos $\tilde{u} \in \mathcal{M}$ tais que $\Pi(\tilde{u}) \in \mathcal{Y}$ satisfazem (3.37). Isto é consequência do Teorema 2.12. Considere a restrição da função τ definida em (3.36) à componente $\Pi^{-1}(\mathcal{Y})$ e defina

$$\tau_{\max} := \sup_{\tilde{u} \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})} \tau(\tilde{u}). \tag{3.38}$$

Note que $\tau_{\max} \leq \tau^*$. Seja $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$ uma sequência e escolha

$$\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y}) \text{ satisfazendo } \tau(\tilde{u}_n) = \tau_n. \tag{3.39}$$

Sejam $l_1 := l$, l_i e l_{-1} folhas da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^D$ duas a duas distintas e positivamente ordenadas. A menos de reparametrizações por biholomorfismos do disco em $G = G(\mathbb{D})$, podemos supor que

$$u_n(1) \in l_1, \quad u_n(i) \in l_i, \quad u_n(-1) \in l_{-1}. \tag{3.40}$$

Esta condição garante que o conjunto Γ_0 dos pontos de *bubbling-off* satisfaz $\Gamma_0 \subset \mathring{\mathbb{D}}$. Isto é o conteúdo do Teorema 2.13. Por um argumento análogo à prova do Lema 2.14, existe uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ tal que $\#\Gamma_0 < \infty$ e existe um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M_\nu)$. Veremos que Γ_0 é não-vazio e $\tilde{u}_0$ satisfaz as seguintes condições

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu \text{ é um mergulho;} \\ \bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}_0) = 0, \quad a_0(\partial\mathbb{D}) \equiv 0, \quad u_0(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+\}; \\ \text{wind}(u_0(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1, \quad \int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma} u_0^* d\lambda > 0; \\ \text{todo } z \in \Gamma_0 \text{ é um furo negativo.} \end{array} \right. \tag{3.41}$$

Lembre que $\mathcal{D} = u_P(\mathbb{D})$ é o disco especial fixado acima.

Nosso primeiro passo na direção de provar que $\tilde{u}_0$ satisfaz (3.41) é demonstrar o seguinte

lema. Este resultado é o correspondente, para este contexto, dos Lemas 2.20 e 2.23.

Lema 3.31. *Seja $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ o disco furado de energia finita fixado acima. Então $\tilde{u}_0$ satisfaz $\Gamma_0 \neq \emptyset$, $a_0(\partial\mathbb{D}) \equiv 0$, $u_0(\partial\mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+\}$ e $\text{wind}(u_0(\partial\mathbb{D}), e^+) = +1$.*

Demonstração. A prova de que $\Gamma_0 \neq \emptyset$ é uma adaptação trivial da prova do Lema 2.20. As demais propriedades são consequências da convergência $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M_\nu)$ e do fato de P ser simplesmente recoberta. ■

Fixe $C \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $C \geq \mathcal{A}(\mathcal{D})$, onde $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ é a $d\lambda$ -área de $\mathcal{D}$ definida por

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{\mathbb{D}} |u_P^* d\lambda|. \quad (3.42)$$

Escolha $\sigma(C) \in \mathbb{R}_+^*$ conforme (3.29). A não-degenerescência de λ implica que $\sigma(C)$ está bem definido. Fixe um furo negativo $z_0 \in \Gamma_0$ do disco de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $m_\epsilon(z_0) - m(z_0) \leq \frac{\sigma(C)}{2}$. Aqui $m(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon(z_0)$,

$$m_\epsilon(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} u_n^* \lambda \quad (3.43)$$

e $\partial B_\epsilon(z_0)$ está orientado no sentido anti-horário. Para todo $n \in \mathbb{N}$, fixe $z_n \in \overline{B_\epsilon(z_0)}$ tal que

$$a_n(z_n) = \inf_{z \in B_\epsilon(z_0)} a_n(z)$$

e $\delta_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $\int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} u_n^* d\lambda = \sigma(C)$. Já observamos na Seção 2.3.2 que as sequências z_n, δ_n escolhidas desta forma estão bem-definidas e satisfazem $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0, \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$. Escolha $R_n \rightarrow +\infty$ tal que $B_{R_n \delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(z_0)$ e defina uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n &= (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu \\ z &\mapsto (a_n(z_n + \delta_n z) - a_n(z_n + 2\delta_n), u_n(z_n + \delta_n z)). \end{aligned} \quad (3.44)$$

A sequência $\tilde{v}_n$ é uma sequência germinante. Observe que $\tilde{v}_n$ satisfaz $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Isto é consequência da escolha da sequência $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ na família de Bishop $\mathcal{M}$ satisfazendo $u_n(\mathbb{D}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Pelo Lema 2.17, existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M_\nu)$. Lembre que $\tilde{v}$ é um limite não-constante para a sequência $\tilde{v}_n$. Seja $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ∞ . Sabemos que, se $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico do disco de energia finita $\tilde{u}_0$ em $z_0 \in \Gamma_0$, então $P_{z_0} = P_\infty$. Isto significa que o limite assintótico de $\tilde{v}$ no furo positivo em ∞ coincide com o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ no furo negativo $z_0 \in \Gamma_0$ (veja o Lema 2.19). Seja $\mathfrak{F}$ a árvore de *bubbling-off* associada a $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Como $\mathfrak{F}$ fornece um disco contínuo $u : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$, para toda órbita fechada $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, e $\mu_{CZ}(\bar{P}, u) \geq 2$ (veja Lema 3.24), temos que $\mu_{CZ}(P_{z_0}, u_{z_0}) \geq 2$, onde $u_{z_0} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é um disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$. Este fato é válido para todo $z \in \Gamma_0$. Recorde que a órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P, u_P) \leq 1$, onde $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é um disco especial conforme Lemas 3.20 (veja também Lema B.8). Estas estimativas sobre os índices μ_{CZ} das órbitas P e P_{z_0}

implicam que $\tilde{u}_0$ não pode ser um semi-cilindro sobre uma órbita fechada, isto é, $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0)$ satisfaz $\pi \cdot du_0 \neq 0$. Este é o conteúdo do lema a seguir cuja demonstração é uma adaptação da prova do Lema 2.21.

Lema 3.32. *O disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tem $d\lambda$ -energia não-nula, isto é, $\int_{\mathbb{D} \setminus \Gamma_0} u_0^* d\lambda > 0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\pi \cdot du_0 \equiv 0$. Como $\tilde{u}_0$ é não-constante e o disco especial $\mathcal{D}$ contém apenas uma órbita fechada de Reeb (que é justamente $P = (x, T)$), então $u_0(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0) = x(\mathbb{R})$. Pelo Lema 1.60, existem $F : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ dada por $z = e^{2\pi(s+it)} \mapsto (Ts, x(Tt))$ e uma função $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa satisfazendo $\tilde{u}_0 = F \circ \varphi$, $\Gamma_0 = \varphi^{-1}(0)$ e $\text{wind}(\varphi|_{\partial\mathbb{D}}, 0) = 1$. Este último fato é consequência do Lema 3.31. Consequentemente, φ é um biholomorfismo do disco $\mathbb{D}$ e, portanto, $\#\Gamma_0 = 1$. A menos de uma reparametrização, podemos supor que $\Gamma_0 = \{0\}$. Seja $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ no furo negativo $0 \in \Gamma_0$. Como $\pi \cdot du_0 \equiv 0$, então $x(\mathbb{R}) = \tilde{x}(\mathbb{R})$. Isto significa que a órbita fechada $\tilde{P}$ é uma k -iterada, $k \in \mathbb{Z}_+^*$, da órbita fechada $P = (x, T)$. Como P é simplesmente recoberta, o Teorema de Stokes implica que $k = 1$ (veja Lema 2.21). Fixe $r_0 > 0$ pequeno e seja $\gamma_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M_\nu$ dada por $\gamma_0(t) = u_0(r_0 e^{2\pi r t})$. Também definimos $\gamma_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M_\nu$ satisfazendo $\gamma_n(t) = u_n(r_0 e^{2\pi r t})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \times M_\nu)$, segue que $\gamma_{n_k} \rightarrow \gamma_0$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M_\nu)$. Como $\tilde{u}_n$ são discos de energia finita na família de Bishop e γ_n é bordo do disco

$$\mathcal{D}_n := \{p \in M_\nu : p = u_n(r e^{2\pi r t}), \ r \leq r_0 \text{ e } t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\},$$

concluimos que o disco contínuo $u : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ induzido pela árvore de *bubbling-off* para a órbita fechada P é homotópico ao disco especial $\mathcal{D} = u_P(\mathbb{D})$ fixado no início desta subseção. Mas, isto implica que $2 \leq \mu_{CZ}(P, u) = \mu_{CZ}(P, u_P) \leq 1$, onde a primeira desigualdade segue do Corolário 3.25 e a última é consequência do Lema 3.20. Esta contradição conclui a prova. ■

Lema 3.33. *O disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ é um mergulho. Além disso, $\Gamma_0 = \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$.*

Demonstração. A demonstração da primeira parte é análoga à prova do Lema 2.24. A segunda parte, segue da escolha de $J \in \mathcal{J}_{\text{gen}}$ tal como a prova do Lema 2.25. ■

O lema anterior conclui a prova de que $\tilde{u}_0$ é um mergulho solução do problema (3.41). Seja $\tilde{v}_n$ a sequência germinante associada ao furo z_0 e definida tal como em (3.44). Sabemos que existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita não-constante $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M_\nu)$. Observe que a sequência germinante $\tilde{v}_n$ está nas condições do Lema 3.26. Isto implica que existe um plano de energia finita $\tilde{v}_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ cujo limite assintótico $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ no furo positivo em ∞ satisfaz $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$. Aqui $\bar{v}_0$ é a extensão de v_0 sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Repare que $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ satisfaz $v_n(B_{R_n}(0)) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Além disso, como $\mu_{CZ}(P, u_P) \leq 1$ e $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$, as órbitas

fechadas P e P_0 poderiam coincidir somente se $P_0 = (x, 2T)$, isto é, se P_0 fosse uma 2-iterada de $P = (x, T)$. Neste caso, o Teorema 1.78 implicaria que $\tilde{v}_0 : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow M_\nu \setminus P$ é um 2-disco para a órbita fechada P de modo que P seria tanto um nó-trivial quanto 2-nó trivial, contradizendo o Lema 1.11. Isto mostra que P e P_0 são distintas e não-enlaçadas. Como as órbitas fechadas de Reeb contidas em $M_\nu \setminus \mathring{M}$ estão enlaçadas em P (veja Lema 3.20), completamos a prova do seguinte lema:

Lema 3.34. *Sejam $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ o plano de energia finita obtido acima e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}_0$ no único furo positivo ∞ . Então $x_0(\mathbb{R}) \subset M \setminus \partial M$.*

O lema anterior combinado com o Lema 3.35 provado na Seção 3.4.2 mostram que a projeção de $\tilde{v}_0$ em M_ν está contida em M . Mais precisamente,

Proposição 3.35. *Sejam $\tilde{v}_0 = (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ o plano de energia finita obtido acima e $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}_0$ em ∞ . Então $v_0(\mathbb{C}) \subset \mathring{M}$. Em particular, $\mu_{CZ}(P_0, u) = 2$, para todo $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ satisfazendo $u(e^{2\pi it}) = x_0(T_0 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Com a proposição anterior, concluímos a prova da Proposição 3.9. Isto encerra também a prova do caso negativo do Teorema 3.8. Em síntese, constatamos que se o campo de Reeb é *verticalmente negativo* (veja Definição 3.7) sobre o bordo ∂M , a dinâmica de Reeb sobre ∂M força a existência de uma órbita fechada contrátil P contida no interior de M satisfazendo $\mu_{CZ}(P) = 2$. Observe que esta é a única situação possível.

Final da demonstração da Proposição 3.10

Nesta subseção, vamos estudar o caso verticalmente positivo. Lembre que M é uma 3-variedade compacta cujo bordo é difeomorfo ao toro munida de uma forma de contato λ que é *tight* e não-degenerada. Estamos assumindo que $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi := \ker \lambda) \equiv 0$. Supomos também que M admite um modelo local do tipo (f, h^+) próximo ao bordo ∂M , contém um nó trivial simplesmente enlaçado e o bordo ∂M é invariante pelo fluxo de Reeb.

Na Seção 3.4.1, construímos um preenchimento de Dehn $M_\nu = M \cup_\nu V_\nu$ ²⁵. Nos Lemas 3.21 e 3.22, estendemos a forma de contato λ sobre M_ν . Sejam λ esta extensão²⁶ e $\xi = \ker \lambda$ a estrutura de contato induzida. Verificamos também que existe uma órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ contida na espinha de $T = S^1 \times \mathbb{D}$ e construímos um disco mergulhado $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ cujo bordo é P . Pela demonstração do Lema 3.22, a variação angular, em relação ao campo normal (sobre o bordo $x(\mathbb{R})$), das órbitas próximas de P é $2\pi q$, para algum $q \in \mathbb{R}_+^*$. Sejam $Z : \mathbb{D} \rightarrow (u_P)^*\xi$ uma seção não-nula e $Z|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow (x_T)^*\xi$ a restrição de Z ao bordo $\partial\mathbb{D}$ ²⁷. Como $\text{sl}(P, u_P) = -1$, a variação angular das órbitas próximas de P em relação à seção $Z|_{\partial\mathbb{D}}$ é $2\pi(q + 1)$. Nossa construção permite fixar $q \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrariamente (veja Seção 3.4.1). Seja $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\epsilon \ll 1$ e escolha $q \in (\epsilon, 1 - \epsilon)$. Denote por $\Psi : (x_T)^*\xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ a trivialização

²⁵Lembre que ν é uma direção sobre ∂M e V_ν é o toro sólido.

²⁶Nesta subseção, em lugar de λ_2 , ξ_2 , $P_2 = (x_2, T_2)$, u_{P_2} , escrevemos apenas λ , ξ , $P = (x, T)$ e u_P .

²⁷Aqui $x_T(t) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$d\lambda$ -simplética induzida por $Z|_{\partial\mathbb{D}}$. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ a aplicação satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi(t) = \Psi_t \circ d\phi_{Tt}|_{\xi(0)} \circ (\Psi_0)^{-1}$$

onde $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ denota o fluxo de Reeb de λ e $d\phi_{Tt}|_{\xi(0)} : \xi(0) \rightarrow \xi(Tt)$ é a aplicação fluxo linearizado restrito à estrutura de contato. Sejam $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t)e^{i2\pi s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t,s)}$, $\theta(0, s) = 2\pi s$, e $\Delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta(s) = \frac{\theta(1,s) - 2\pi s}{2\pi}$, e considere o intervalo de variação $I(\varphi) := \{\Delta(s) : s \in [0, 1]\}$. Pela escolha de $q \in (\epsilon, 1 + \epsilon)$, podemos supor que $I(\varphi)$ satisfaz $I(\varphi) \subset (1, 2)$. Pelo Lema E.1, a menos de uma perturbação que é constante sobre M , temos que a forma de contato λ é não-degenerada. Esta perturbação pode ser escolhida arbitrariamente pequena e invariante sobre P . Pela noção de *índice de Conley-Zehnder geométrico* (veja Seção 1.2.2), temos que $\mu_{CZ}(P, u_P) = 3$. O lema B.8 garante que podemos perturbar o disco (mergulhado) u_P e obter um disco (mergulhado) especial para P . De agora em diante, supomos este disco fixado. Note que o (novo) disco u_P é homotópico ao disco mergulhado construído no Lema 3.23.

Lembre que a tese da Proposição 3.10 é a seguinte: ou existe uma órbita fechada contrátil $P_0 = (x_0, T_0)$ e um disco contínuo $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ tais que $u|_{\mathring{\mathbb{D}}} : \mathring{\mathbb{D}} \rightarrow M$ é transversal ao campo de Reeb e $\mu_{CZ}(P_0, u) = 2$, ou existe um difeomorfismo $\mathcal{H} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, é transversal ao campo de Reeb e $\mathcal{H}(\cdot, \partial\mathbb{D})$ é difeomorfo a ∂M .

Hipótese 3.36. *De agora em diante, assumiremos que não existe uma órbita fechada contrátil $P_0 = (x_0, T_0)$ e um disco contínuo $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ tais que $\mu_{CZ}(P_0, u) = 2$.*

Na primeira parte da demonstração, a estratégia é análoga à primeira parte da prova da Proposição 3.9. Fixe $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e considere $\tilde{J}$ satisfazendo (3.34). Seja $\mathcal{M}_J$ a família de Bishop com condição de contorno no disco especial $\mathcal{D} := u_P(\mathbb{D})$. Lembre que $\mathcal{M}_J$ é o conjunto solução do problema (3.35). Conforme explicado na Observação 3.30, podemos supor que está fixada uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ genérica (veja também Seção 1.3.4). Em particular, a *família de Bishop* $\mathcal{M}_J$ é não vazia²⁸. Fixando uma métrica Riemanniana g em M_ν e uma folha $l \in \mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$, podemos definir $\tau(\tilde{u})$ tal como em (3.36) para todo $\tilde{u} \in \mathcal{M}$. Fixe uma componente conexa $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{M}/G$ contendo discos de energia finita arbitrariamente próximos da (única) singularidade elíptica real e positiva e^+ . Defina $\tau_{\max}$ satisfazendo (3.38). Dada uma sequência $\tau_n \rightarrow \tau_{\max}$, existem $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Pi^{-1}(\mathcal{Y})$ tal que $\tau(\tilde{u}_n) = \tau_n$. Fixadas $l_1 := l$, l_i e l_{-1} , folhas da folheação característica $\mathcal{F}_\xi^\mathcal{D}$ duas a duas distintas e ordenadas positivamente, a menos de reparametrizações por biholomorfismos do disco em $G = G(\mathbb{D})$, podemos supor que

$$u_n(1) \in l_1, \quad u_n(i) \in l_i, \quad u_n(-1) \in l_{-1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.45)$$

Já observamos que a condição acima garante que o conjunto Γ_0 dos pontos de *bubbling-off* satisfaz $\Gamma_0 \subset \mathring{\mathbb{D}}$. Sabemos que existe uma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$ tal que $\#\Gamma_0 < \infty$ e existe um disco furado de energia finita $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}_0$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \Gamma_0, \mathbb{R} \times M_\nu)$. No caso que consideramos nesta subseção (isto é, quando o fluxo de Reeb

²⁸Como no Capítulo 2 e na seção anterior, de agora em diante, omitiremos J na notação $\mathcal{M}_J$.

sobre ∂M é verticalmente positivo), diferentemente do caso negativo em que $\tilde{u}_0$ era uma solução do problema (3.41), veremos que $\tilde{u}_0$ é um semi-cilindro ($\tilde{J}$ -holomorfo) de energia finita sobre P . Isto é o conteúdo da proposição a seguir. Este resultado é o correspondente, para o nosso contexto, da Proposição 5.11 provada por Hryniewicz e Salomão em [39]. A demonstração é uma adaptação de [39].

Proposição 3.37. *Seja $\tilde{u}_0 : \mathbb{D} \setminus \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ o disco furado de energia finita obtido acima. Então $\tilde{u}_0$ satisfaz $\Gamma_0 \neq \emptyset$, $a_0(\partial \mathbb{D}) \equiv 0$, $u_0(\partial \mathbb{D}) \subset \mathcal{D} \setminus \{e^+\}$ e $\text{wind}(u_0(\partial \mathbb{D}), e^+) = +1$. Temos também que $\#\Gamma_0 = 1$. A menos de uma reparametrização, podemos supor que $\Gamma_0 = \{0\}$. Além disso, $\tilde{u}_n \rightarrow F_P$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \times M_\nu)$, onde $F_P : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ é dado por $z = e^{2\pi(s+it)} \mapsto (Ts, x(Tt))$. Em particular, temos que $\tilde{u}_0$ é um mergulho.*

Demonstração. A prova da primeira parte do enunciado acima é análoga à demonstração do Lema 2.23. Precisamos provar apenas que $\#\Gamma_0 = 1$ e $\tilde{u}_n \rightarrow F_P$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \times M_\nu)$. Primeiramente vamos verificar que $\pi \cdot du_0 \equiv 0$. Suponha, por contradição, que $\pi \cdot du_0 \not\equiv 0$. Como $\Gamma_0 \neq \emptyset$, o disco furado $\tilde{u}_0$ é solução de (3.41). Seja $z_0 \in \Gamma_0$ e escolha $\epsilon > 0$ tal que $m_\epsilon(z_0) - m(z_0) \leq \frac{\sigma(C)}{2}$, lembrando que $m(z_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon(z_0)$ e

$$m_\epsilon(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} u_n^* \lambda,$$

onde $\partial B_\epsilon(z_0)$ está orientada no sentido anti-horário, e $\sigma(C)$ é definida em (3.29). Lembre que λ é não-degenerada e, portanto, $\sigma(C)$ está bem-definida. Fixe $z_n \in \overline{B_\epsilon(z_0)}$ tal que $a_n(z_n) = \inf_{z \in \overline{B_\epsilon(z_0)}} a_n(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\delta_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $\int_{B_\epsilon(z_0) \setminus B_{\delta_n}(z_n)} u_n^* d\lambda = \sigma(C)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Já mencionamos que z_n, δ_n estão bem-definidos, para todo $n \in \mathbb{N}$, e satisfazem $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$, $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$. Escolha $R_n \rightarrow +\infty$ tal que $B_{R_n \delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(z_0)$ e defina curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ dadas por

$$z \mapsto (b_n(z), v_n(z)) := (a_n(z_n + \delta_n z) - a_n(z_n + 2\delta_n), u_n(z_n + \delta_n z)). \quad (3.46)$$

Pelo Lema 2.17, existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita não-constante $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M_\nu)$. Note que $\tilde{v}_n$ é uma sequência germinante com limite não-constante $\tilde{v}$ e, portanto, existe uma árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$ associada à $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Pelo Lema 3.24, se $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T}) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$, existe um disco contínuo $u : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ induzido por $\mathfrak{F}$ para a órbita fechada $\bar{P}$ tal que $\mu_{CZ}(\bar{P}, u) \geq 2$. Já observamos também que se $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é o limite assintótico do disco furado de energia finita $\tilde{u}_0$ em z_0 , então $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0}) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}^{29}$. Disto segue que existe um disco contínuo $u_{z_0} : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ induzido por $\mathfrak{F}$ para a órbita fechada P_{z_0} tal que $\mu_{CZ}(P_{z_0}, u_{z_0}) \geq 2$. Observe que isto se verifica para todo $z \in \Gamma_0$ e, portanto, um argumento análogo ao da prova do Lema 2.25 garante que $\#\Gamma_0 = 1$. Sejam $\Gamma = \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \mathbb{D}$, e $P_{z_0} = (x_{z_0}, T_{z_0}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{u}_0$ em z_0 . Então $\mu_{CZ}(P_{z_0}, u_{z_0}) = 2$. Recorde que este último fato e $\#\Gamma_0 = 1$ são consequências da escolha da estrutura complexa

²⁹Pois P_{z_0} é o limite assintótico de $\tilde{v}$ no único furo positivo em ∞ .

genérica. Repare que estamos nas hipóteses do Lema 3.26 e, conseqüentemente, existe um plano de energia finita $\tilde{v}_0 : (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ cujo limite assintótico em ∞ é uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ não-enlaçada em P (isto é, $v_0(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$) e satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$. Recorde que $\bar{v}_0$ denota a extensão contínua de v_0 sobre a compactificação $\bar{\mathbb{C}}$. Observe que P_0 e P são geometricamente distintas, pois $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$ e $\mu_{CZ}(P, u_P) = 3$, onde $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é o disco especial para a órbita fechada P fixado no início desta subseção. O fato de existir P_0 não-enlaçada em P e distinta de P contradiz a Hipótese 3.36. Esta contradição mostra que devemos ter $\pi \cdot du_0 \equiv 0$. Pelo Lema 1.60 e pelo fato de P ser simplesmente recoberta, existe uma função $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa satisfazendo $\tilde{u}_0 = F_P \circ \varphi$, $\Gamma_0 = \varphi^{-1}(0)$ e $\text{wind}(\varphi|_{\partial\mathbb{D}}, 0) = 1$. Segue que φ é um biholomorfismo do disco $\mathbb{D}$. Isto prova, em particular, que $\tilde{u}_0$ é um mergulho e $\#\Gamma_0 = 1$. A menos de uma reparametrização por um biholomorfismo do disco, podemos supor que $\Gamma = \{0\}$. ■

Vamos construir uma sequência germinante a partir de uma reparametrização numa vizinhança de $z = 0$. Tal como na demonstração do lema anterior, fixe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno de modo que $m_\epsilon(0) - m(0) \leq \frac{\sigma(C)}{2}$ e escolha sequências $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$. Escolha também $R_n \rightarrow +\infty$ tal que $B_{R_n\delta_n}(z_n) \subset B_\epsilon(0)$ e defina uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ satisfazendo (3.46). Novamente, existe uma subsequência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita não-constante $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M_\nu)$. Como antes, ∞ é o único furo positivo de $\tilde{v}$. Além disso, como $\pi \cdot du_0 \equiv 0$, o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ∞ é a órbita fechada $P = (x, T)$. Isto é provado por um argumento análogo àquele da prova do Lema C.5 do Apêndice C (e do Lema 2.19 no Capítulo 2). Nosso objetivo é verificar que $\tilde{v}$ é um plano de energia finita. Começemos observando que a $d\lambda$ -energia de $\tilde{v}$ é não-nula.

Lema 3.38. *Seja $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ a esfera furada de energia finita obtida acima. Então $\tilde{v}$ satisfaz $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} v^* d\lambda > 0$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\pi \cdot dv$ seja identicamente nula. Pelo Teorema 1.59, existe um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $\Gamma' = p^{-1}(0)$ e $\tilde{v} = F_P \circ p$, onde $P = (x, T)$ é o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ∞ ³⁰ e $F_P : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ é dado por $z = e^{2\pi(s+it)} \mapsto (Ts, x(Tt))$. O polinômio p satisfaz $\deg(p) = 1$ e $p(0) = 0$. Estes fatos são conseqüências de P ser simplesmente recoberta e $0 \in \Gamma'$. Então existe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $p(z) = az$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} T &= \int_{\partial\mathbb{D}} v^* \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} v_n^* d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{\delta_n}(0)} u_n^* d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(0)} u_n^* d\lambda - \int_{B_\epsilon(0) \setminus B_{\delta_n}(0)} u_n^* d\lambda \\ &= m_\epsilon(0) - \sigma(C) = m(0) + m_\epsilon(0) - m(0) - \sigma(C) \leq T + \sigma(C)/2 - \sigma(C) = T - \sigma(C)/2 \end{aligned}$$

ou seja, $\sigma(C) \leq 0$. Esta contradição mostra que $\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} v^* d\lambda > 0$. ■

Sejam $u_P : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ o disco especial fixado no início desta subseção e $Z : \mathbb{D} \rightarrow u_P^* \xi$ uma seção não-nula de $u_P^* \xi \rightarrow \mathbb{D}$. Denote por $\Psi : x_T^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ a trivialização $d\lambda$ -simplética

³⁰Lembre que P é a órbita fechada construída no Lema 3.22.

induzida por $Z|_{\partial\mathbb{D}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow x_T^* \xi$. Sejam A_P o operador assintótico sobre P e

$$\beta^{\text{neg}} = \max\{\beta \in \text{Spec}(A_P) : \beta < 0\},$$

onde $\text{Spec}(A_P)$ é o espectro de A_P . Veja as definições na Seção 1.2.2. Lembre que definimos $\text{wind}(\beta^{\text{neg}})$ como o número de rotação de uma auto-função $\nu^{\text{neg}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ para o auto-valor β^{neg} , em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ . Como a órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P, u_P) = 3$, a noção de *índice de Conley-Zehnder generalizado* $\mu_{CZ}(P, u_P) = 2\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) + p$ mostra que $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$ e $p = 1$. Lembre que $p \in \{0, 1\}$ é denominada *paridade*. No Lema 1.73 verificamos que $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$. O fato de que $\tilde{v}$ satisfaz $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$ implica que $\Gamma' = \emptyset$. Este é o conteúdo do lema a seguir.

Lema 3.39. *A esfera furada de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ satisfaz $\Gamma' = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\Gamma' \neq \emptyset$. Como $\tilde{v}$ satisfaz $\pi \cdot dv \neq 0$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$, o Lema 3.27 fornece um plano de energia finita $\tilde{v}_0 : (b_0, v_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ cujo limite assintótico em ∞ é uma órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ não-enlaçada em P e satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0, \bar{v}_0) = 2$. Como $P_0 = (x_0, T_0)$ satisfaz $x_0(\mathbb{R}) \subset M \setminus \partial M$, temos que $v_0(\mathbb{C}) \subset M \setminus \partial M$. Isto é consequência do Lema 3.35. Por hipótese, esta órbita fechada não pode existir. Esta contradição mostra que $\Gamma' = \emptyset$. ■

Lema 3.40. *O plano de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ é um plano rápido mergulhado.*

Demonstração. Aqui argumentamos como em [39]. Primeiramente, provaremos que $\tilde{v}$ é uma imersão. Como $\tilde{v}$ satisfaz $\pi \cdot dv \neq 0$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) \leq 1$, o Teorema 1.70 implica que

$$0 \leq \text{wind}_\pi(\tilde{v}) = \text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) - 1 \leq 0, \quad (3.47)$$

isto é, $\text{wind}_\pi(\tilde{v}) = 0$. Portanto $\pi \circ dv(z) \neq 0$ e $\mathbb{R}X_\lambda(v(z)) \oplus dv(z)(T_z\mathbb{C}) = T_{v(z)}M$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Isto significa que v é uma imersão transversal ao campo de Reeb. Resta provar que $\tilde{v}$ é injetiva. Considere o conjunto $\mathcal{S}(\tilde{v})$ das auto-interseções de $\tilde{v}$, isto é,

$$\mathcal{S}(\tilde{v}) := \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta : \tilde{v}(z_1) = \tilde{v}(z_2)\},$$

onde $\Delta := \{(z, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$ é a diagonal de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Se $\mathcal{S}(\tilde{v}) \neq \emptyset$ e $\mathcal{S}(\tilde{v})$ possui um ponto limite em $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \Delta$, então existe um polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $\deg(p) \geq 2$ e um plano de energia finita *somewhere injective* $\tilde{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{v} = \tilde{w} \circ p$ (veja Proposição 1.58). Como $\deg(p) \geq 2$ e, portanto, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $d\tilde{v}(z)$ não é imersão, concluímos que $\mathcal{S}(\tilde{v})$ possui somente pontos isolados. A seguir, veremos que isto também não é válido. Como $\tilde{v}$ é um limite para a sequência germinante $\tilde{v}_n$ definida em (3.46), podemos aproximar $\tilde{v}$ por uma subseqüência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{v}_{n_k}$. Mais precisamente, existem seqüências $n_k \rightarrow +\infty$, $z_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$, $\delta_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0^+$ tais que

$$\tilde{v}_{n_k}(z) = (b_{n_k}(z), v_{n_k}(z)) := (a_{n_k}(z_{n_k} + \delta_{n_k}z) - a_{n_k}(z_{n_k} + 2\delta_{n_k}), u_{n_k}(z_{n_k} + \delta_{n_k}z)) \rightarrow \tilde{v}$$

na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M_\nu)$. Lembre que a sequência germinante $\tilde{v}_n$ é obtida pela

reparametrização de soluções $\tilde{u}_n$ na família de Bishop $\mathcal{M}$ fixada no início desta subseção. Como os discos de energia finita em $\mathcal{M}$ são mergulhos, a *Teoria de Interseção* de McDuff implica que $\mathcal{S}(\tilde{v}) = \emptyset$, isto é, $\tilde{v}$ também não pode admitir auto-interseções isoladas. Isto implica que $\tilde{v}$ é injetiva. Por fim, observe que (3.47) implica $\text{wind}_\infty(\tilde{v}, \infty) = 1$. Pela Definição 1.74, temos que $\tilde{v}$ é um plano rápido de energia finita mergulhado. ■

Compacidade de Planos Rápidos: Nosso objetivo é, a partir do Teorema 1.76, provar a existência de uma *decomposição em livro aberto* para M_ν tal que a *encadernação* é a órbita fechada $P = (x, T)$. Lembre que $P = (x, T)$ é a órbita fechada construída no Lema 3.22 para o caso verticalmente positivo. Nesta direção, dado que já construímos acima um plano rápido de energia finita mergulhado, precisamos apenas verificar a compacidade de planos rápidos. Vamos lembrar alguns fatos necessários. Considere $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ e $\tilde{J}$ fixados acima. Recorde que λ é não-degenerada. Seguindo [33], dado um subconjunto compacto $H \subset \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $H \cap (\mathbb{R} \times x(\mathbb{R})) = \emptyset$, definimos $\Theta(H, P)$ como o subconjunto de $C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M_\nu)$ constituído pelos planos rápidos de energia finita $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ assintóticos no furo positivo em ∞ à órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ e satisfazendo as condições $\tilde{u}(0) \in H$ e $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} u^* d\lambda = \sigma(T)$, onde $\sigma(T)$ é definida em (3.29). Consideramos também os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \Lambda(H, P) &:= \{\tilde{u} \in \Theta(H, P) : \tilde{u} \text{ é mergulho}\}, \\ \Lambda_k(H, P) &:= \{\tilde{u} = (a, u) \in \Lambda(H, P) : \mu_{CZ}(P, u) = k\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nas notações acima, estamos subentendendo λ e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ fixados. Queremos provar que $\Lambda_3(H, P)$ é C^∞ -compacto para todo subconjunto compacto $H \subset \mathbb{R} \times M_\nu$ satisfazendo $H \cap (\mathbb{R} \times x(\mathbb{R})) = \emptyset$. A argumentação a seguir é baseada na prova do Lema 4.17 em [33] e do Teorema 4.1 em [39]. Seja $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Lambda_3(H, P)$ e defina

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ e } z_k \rightarrow z \text{ tais que } |d\tilde{u}_{n_k}(z_k)| \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \infty\}. \quad (3.49)$$

Lembre que $E_H(\tilde{u}_n) = T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $\tilde{w}_n = (c_n, w_n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ por

$$c_n(z) = a_n(z) - a_n(2), \quad w_n(z) = u_n(z). \quad (3.50)$$

Note que $\tilde{w}_n(2) \in \{0\} \times M_\nu$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definição, temos que $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_n^* d\lambda = \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} u_n^* d\lambda = \sigma(T)$. Isto mostra que $\tilde{w}_n$ é uma sequência germinante. O lema a seguir é uma reformulação do Lema 2.17 no Capítulo 2. A demonstração é análoga.

Lema 3.41. *Seja $\tilde{w}_n$ a sequência germinante de planos de energia finita definida em (3.50). Então existe uma subsequência $\tilde{w}_{n_k}$ tal que o conjunto $\Gamma \subset \mathbb{C}$ é finito e existe uma esfera furada de energia finita não-constante $\tilde{w} := (c, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ tal que $\tilde{w}_{n_k} \rightarrow \tilde{w}$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma, \mathbb{R} \times M_\nu)$. Além disso, $\tilde{w}$ possui um único furo positivo em ∞ , os pontos em Γ são os furos negativos e $0 < E_H(\tilde{w}) \leq \sup_n E_H(\tilde{u}_n) = T$.*

Observação 3.42. *É importante notar que o fato de $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_n^* d\lambda = \sigma(T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica $\Gamma \subset \mathbb{D}$. Veja demonstração do Lema C.2 no Apêndice C.*

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

Nosso objetivo a seguir é provar que $\tilde{w}$ é um plano de energia finita. Primeiramente, vamos introduzir algumas notações. Seja $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(T)$ o subconjunto de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M_\nu)$ definido por $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(T) = \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x(Tt) \in M_\nu : P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda), T \leq \tilde{T}\}$. Seja $\mathcal{W} \subset C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M_\nu)$ uma vizinhança aberta $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -invariante de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(T)$. Como λ é não-degenerada, podemos escolher $\mathcal{W}$ de maneira que se $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ e $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ são órbitas fechadas de Reeb distintas satisfazendo $\tilde{T}, \bar{T} \leq T$ e $\tilde{T} \neq \bar{T}$, então $\tilde{P}$ e $\bar{P}$ estão contidas em componentes conexas distintas (veja os detalhes no Apêndice C). Denotamos por $\mathcal{W}^+$ a componente conexa contendo P .

Observe que os planos de energia finita $\tilde{w}_{n_k}$ satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{2 \leq |z| \leq R} w_{n_k}^* d\lambda \leq \sigma(T), \text{ para todo } R \geq 2,$$

$$\int_{|z|=2} w_{n_k}^* \lambda \geq \int_{\mathbb{C}} w_{n_k}^* d\lambda - \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_{n_k}^* d\lambda = T - \sigma(T), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Considere a identificação

$$\mathbb{C} \setminus B_2(0) \simeq \left[\frac{1}{2\pi} \log 2, +\infty \right) \times S^1$$

dada por $z = e^{2\pi(s+it)} \mapsto (s, t)$. Aplique o Lema de *soft-rescaling* (veja Apêndice C) para $\delta = T - \sigma(T)$ e para os cilindros de energia finita $\tilde{w}_{n_k} : \mathbb{C} \setminus B_2(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$. Portanto, existe $h > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \mapsto w_{n_k}(re^{2\pi(s+it)})$ pertence a $\mathcal{W}$ para $k \geq k_0$ e $r \geq 2e^h$. Note que estes caminhos, devido à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -invariância de $\mathcal{W}$, não escapam de $\mathcal{W}$.

Lema 3.43. *O limite assintótico em ∞ da esfera furada de energia finita $\tilde{w} := (c, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$, conforme Lema 3.41, é a órbita fechada $P = (x, T)$.*

Demonstração. Este lema é consequência da observação acima. De fato, lembre que $\sigma(T)$ foi escolhido satisfazendo (3.29) e $\tilde{w}_{n_k}$ satisfaz $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_{n_k}^* d\lambda = \sigma(T)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Estas propriedades juntamente com o Lema de *soft-rescaling*, considerando $\delta = T - \sigma(T)$, mostram que existem $k_0 \in \mathbb{N}$ e $R_0 > 1$ tais que $t \mapsto w_{n_k}(R_1 e^{2\pi it})$ e $t \mapsto w(R_1 e^{2\pi it})$ pertencem à mesma componente conexa em $\mathcal{W}$ para $k \geq k_0$ e $R_1 \geq R_0$. Portanto, $t \mapsto w_{n_k}(R_1 e^{2\pi it})$ e $t \mapsto w(R_1 e^{2\pi it})$ pertencem à componente $\mathcal{W}^+$ contendo P e, portanto, P é o limite assintótico de $\tilde{w}$ em ∞ . ■

Lema 3.44. *A esfera furada de energia finita $\tilde{w} := (c, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$, conforme Lema 3.41, satisfaz $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w^* d\lambda > 0$ e $\Gamma = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\pi \cdot dw \equiv 0$. Seja $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ o cilindro de energia finita definido como $z = e^{2\pi it} \mapsto F_P(z) = (Ts, x(Tt))$. Já sabemos que existe um polinômio não-constante $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{w} = F_P \circ p$ e $\Gamma = p^{-1}(0)$. Isto mostra, em particular, que $\Gamma \neq \emptyset$ e $\tilde{w}(\mathbb{C} \setminus \Gamma) \subset \mathbb{R} \times x(\mathbb{R})$. Como a órbita fechada $P = (x, T)$ é, por construção, simplesmente recoberta, obtemos que $\deg(p) = 1$ e, portanto, $\Gamma = p^{-1}(0) = \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \mathbb{C}$. Já observamos acima que $\Gamma \subset \mathbb{D}$. Suponha que $z_0 \in \mathring{\mathbb{D}}$. Disto temos que

$$T = \int_{\partial \mathbb{D}} (F_P \circ p)^* \lambda = \int_{\partial \mathbb{D}} w^* \lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{D}} w_{n_k}^* d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} w_{n_k}^* d\lambda - \int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w_{n_k}^* d\lambda = T - \sigma(T),$$

o que é uma contradição, visto que $\sigma(T) > 0$. Portanto, $z_0 \in \partial \mathbb{D}$. Isto implica que, se $K \subset \mathring{\mathbb{D}}$ é

um compacto, então $\tilde{w}_{n_k} \rightarrow \tilde{w}$ na topologia usual de $C^\infty(K, \mathbb{R} \times M_\nu)$. Lembre que $\tilde{w}_{n_k}$ é uma subsequência dada pelo Lema 3.41. Como $\tilde{w} = F_P \circ p$, a convergência $\tilde{w}_{n_k} \rightarrow \tilde{w}$ implica que $\tilde{w}_{n_k}(0)$ converge para um ponto em $H \cap (\mathbb{R} \times x(\mathbb{R}))$. Como isto contradiz a nossa escolha de H , concluímos que $\int_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} w^* d\lambda > 0$.

Vamos provar que $\Gamma_0 = \emptyset$. Suponha, por contradição, que $\Gamma_0 \neq \emptyset$. Fixe $z_0 \in \Gamma_0$ e seja $\tilde{w}_{z_0, n}$ uma sequência germinante associada a z_0 definida tal como em (3.46). Sabemos que existe um limite não-contante $\tilde{w}_{z_0}$ e, portanto, existe uma árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$ associada a $\tilde{w}_{z_0, n}$ e $\tilde{w}_{z_0}$. Como a órbita fechada P satisfaz $\mu_{CZ}(P, u) = 3$, onde $u : \mathbb{D} \rightarrow M_\nu$ é um disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$ para P , a noção de *índice de Conley-Zehnder generalizado* implica que $\text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$, onde

$$\beta^{\text{neg}} = \max\{\beta \in \text{Spec}(A_P) : \beta < 0\},$$

A_P o operador assintótico sobre P e $\text{Spec}(A_P)$ é o espectro de A_P . Pelo Lema 1.73, temos que $\text{wind}_\infty(\tilde{w}, \infty) \leq \text{wind}(\beta^{\text{neg}}) = 1$. Pelo Teorema 1.70, concluímos $\text{wind}_\pi(\tilde{w}) = 0$. Recorde que $w_n(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = u_n(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$ (veja Teorema 1.75). Isto nos mostra que estamos nas condições do Lema 3.27 e, portanto, existe um plano de energia finita $\tilde{w}_0 = (c_0, w_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ e uma órbita fechada contrátil $P_0 = (x_0, T_0)$ limite assintótico de $\tilde{w}_0$ no único furo em ∞ tais que $\mu_{CZ}(P_0, \bar{w}_0) = 2^{31}$. Como $\mu_{CZ}(P, u_P) = 3$, temos também que $\overline{w_0(\mathbb{C})} \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$. Em particular, $x_0(\mathbb{R}) \subset M$ e, pelo Lema 3.35, obtemos que $w_0(\mathbb{C}) \subset M$. Em outras palavras, existe $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ geometricamente distinta de P e não-enlaçada em P contida em M tal que $\mu_{CZ}(P_0, u) = 2$, onde $u : \mathbb{D} \rightarrow M \subset M_\nu$ é um disco contínuo para P_0 . Isto contradiz a nossa hipótese. Portanto, $\Gamma = \emptyset$ e $\tilde{w}$ é um plano de energia finita. ■

Observe que o plano de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ não é exatamente o limite que esperamos para verificar a C^∞ -compacidade de $\Lambda_3(H, \tilde{P})$. No entanto, se definirmos o plano de energia finita $\tilde{u}(z) = (c(z) + c, w(z))$, onde $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(2) = c \in \mathbb{R}$, temos que $\tilde{u}$ é um plano de energia finita e $\tilde{u}_{n_k} \rightarrow \tilde{u}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M_\nu)$, para alguma subsequência $\tilde{u}_{n_k}$. Disto segue que

$$\int_{\mathbb{D}} u^* d\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{D}} u_{n_k}^* d\lambda = T - \sigma(T)$$

e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{w}) = 1$. Como $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - 1 = 0$, verificamos que $\tilde{u}$ é uma imersão. Um argumento análogo à prova do Lema 3.40 mostra que $\tilde{u}$ é mergulho. Isto prova que $\Lambda_3(H, P)$ é sequencialmente C^∞ -compacto e, portanto, $\Lambda_3(H, P)$ é C^∞ -compacto.

Decomposição em livro aberto: Seja $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ a órbita fechada, conforme Seção 3.4.1. A Hipótese 3.36 implica que $\Lambda_3(H, P)$ é não-vazio e compacto. Pelo Teorema 1.76, dado $l \geq 1$, existe uma aplicação $\bar{\mathcal{G}} = (a, \mathcal{G}) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M_\nu$ de classe C^l tal que:

- (i) $\bar{\mathcal{G}}(\tau, \cdot)$ é um plano rápido de energia finita mergulhado assintótico à órbita fechada $P = (x, T)$ em ∞ e $\mu_{CZ}(P, \bar{\mathcal{G}}(\tau, \cdot)) = 3$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;
- (ii) $\bar{\mathcal{G}}(\tau, \mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e a aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow M_\nu \setminus x(\mathbb{R})$ é um

³¹Aqui $\bar{w}_0$ é a extensão contínua de w_0 sobre a compactificação $\bar{\mathbb{C}}$.

Capítulo 3. Dinâmica de Reeb em 3-variedades com bordo difeomorfo a $\mathbb{T}^2$.

difeomorfismo de classe C^l preservando a orientação;

(iii) Cada $\overline{\mathcal{G}(\tau, \mathbb{C})}$ é uma seção global suave do tipo disco;

Como $x(\mathbb{R})$ é a espinha do toro sólido no complementar de M no preenchimento de Dehn M_ν , o difeomorfismo $\bar{\mathcal{G}} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow M_\nu \setminus x(\mathbb{R})$ induz uma folheação de M por seções transversais ao campo de Reeb. Deste modo, concluimos que existe um difeomorfismo $\mathcal{H} : S^1 \times \mathbb{D} \rightarrow M$ induzido por $\bar{\mathcal{G}}$ de modo que M é um toro sólido e as folhas $\mathcal{H}(\tau, \cdot)$ satisfazem $d\mathcal{H}(\tau, \cdot) \lrcorner \mathbb{R}X_\lambda$, para todo $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$. Repare que $\mathcal{H}$ induz uma aplicação de retorno e, portanto, existe uma órbita fechada não-contrátil contida em M . Isto conclui a prova da Proposição 3.10 e encerra a demonstração do Teorema 3.8.

Apêndice A

Órbitas fechadas contráteis e primeira classe de Chern

Neste apêndice, vamos discutir uma hipótese topológica que possibilita definir os índices dinâmicos μ_{CZ} e ρ de órbitas fechadas contráteis sem ambiguidades. Nesta hipótese, consideramos a *primeira classe de Chern* do fibrado complexo induzido pela estrutura de contato em uma 3-variedade. Na seção a seguir, discutimos brevemente este conceito.

A.1 Primeira classe de Chern

A exposição nesta seção é uma adaptação daquela apresentada em [47]. Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada (compacta e sem bordo) e orientada. Existe um mergulho $\gamma : S^1 \rightarrow \Sigma$, $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tal que $\Sigma = \Sigma_n \cup \Sigma_s$, onde Σ_n, Σ_s são superfícies de Riemann com bordo e $\partial\Sigma_n = \partial\Sigma_s = \gamma(S^1)$. Oriente γ como o bordo de Σ_n .

Seja (Σ, E, π, ω) um fibrado simplético $2n$ -dimensional, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, sobre Σ , onde $\pi : E \rightarrow \Sigma$ é a projeção. É conhecido que uma superfície de Riemann com bordo tem o tipo de homotopia de um *buquê* de S^1 (veja [12, pg. 118]). Isto significa que as restrições de (Σ, E, π, ω) sobre Σ_N , Σ_S admitem trivializações ω -simpléticas

$$\begin{aligned}\Psi_N : E|_{\Sigma_N} &\rightarrow \Sigma_N \times \mathbb{C}^n, \\ \Psi_S : E|_{\Sigma_S} &\rightarrow \Sigma_S \times \mathbb{C}^n.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Considere o caminho $\Psi : S^1 \rightarrow \mathrm{Sp}(1)$ sobre $\gamma(S^1)$ definido por

$$\Psi(t) = \Psi_N^{-1}(\gamma(t)) \cdot \Psi_S(\gamma(t)).$$

Já observamos no Capítulo 1 que, se $A \in \mathrm{Sp}(n) = \{A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) : A^T J_0 A = J_0\}$, onde J_0 é a estrutura complexa canônica em $\mathbb{R}^{2n}$, então $(A \cdot A^T)^{-1/2} A \in \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n)$ e, portanto, existem

A.2. Índice dinâmicos de órbitas fechadas contráteis

$X, Y \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que

$$(A \cdot A^T)^{-1/2} A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

e $X^T Y = Y^T X$, $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é a identidade em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Lembre que, neste caso, $X + iY$ é unitária e, consequentemente, está bem-definida a função $\zeta : \text{Sp}(n) \rightarrow S^1$ satisfazendo $\zeta(A) = \det(X + iY)$. Considere a composição $\zeta \circ \Psi : S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ dada por $\zeta \circ \Psi(t) = \det(X(t) + iY(t))$, onde $X(t), Y(t)$ satisfazem para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$(\Psi(t) \cdot \Psi(t)^T)^{-1/2} \Psi(t) = \begin{pmatrix} X(t) & -Y(t) \\ Y(t) & X(t) \end{pmatrix}.$$

Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de $\zeta \circ \Psi$ tal que $\det(X(t) + iY(t)) = e^{2\pi i \eta(t)}$. Definimos $c_1(E) = \eta(1) - \eta(0) \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $c_1(E)$ é o *primeiro número de Chern*. Observe que as restrições $\Psi_N|_\gamma : \gamma^* E \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}^n$, $\Psi_S|_\gamma : \gamma^* E \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}^n$ sobre a curva γ das trivializações ω -simpléticas Ψ_N, Ψ_S são homotópicas somente quando $c_1(E) = 0$.

O seguinte resultado é provado em [47]:

Teorema A.1 ([47], Teorema 2.67). *Seja (Σ, j) uma superfície de Riemann fechada e orientada. O primeiro número de Chern c_1 é a única aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) **(Naturalidade)** *Dois fibrados vetoriais simpléticos E, E' sobre Σ são isomorfos se e somente se $\dim E = \dim E'$ e $c_1(E) = c_1(E')$;*
- (ii) **(Functorialidade)** *Para toda aplicação suave $\eta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ e todo fibrado vetorial simplético (Σ, E, π, ω) , onde $\pi : E \rightarrow \Sigma$ é a projeção, temos que $c_1(\eta^* E) = \deg(\eta) \cdot c_1(E)$;*
- (iii) **(Aditividade)** *Dados quaisquer fibrados vetoriais simpléticos $E \rightarrow \Sigma, E' \rightarrow \Sigma$, temos que $c_1(E \oplus E') = c_1(E \otimes E') = c_1(E) + c_1(E')$;*
- (iv) **(Normalização)** *O número de Chern do fibrado tangente $T\Sigma$ satisfaz $c_1(T\Sigma) = 2 - 2g$, onde g é o genus de Σ .*

No caso em que (M, E, π, ω) é um fibrado simplético $2n$ -dimensional, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, sobre uma 3-variedade M e $f : \Sigma \rightarrow M$ é uma aplicação suave, podemos definir o *primeiro número de Chern* $c_1(f^* E)$ do fibrado simplético $2n$ -dimensional *pull-back* $(\Sigma, f^* E, \pi_f, f^* \omega)$, onde $\pi_f : f^* E \rightarrow \Sigma$ é a projeção. O número $c_1(f^* E)$ depende somente da classe de homologia de f e, portanto, induz uma classe $c_1(E) \in H^2(M)$ denominada *primeira classe de Chern* (veja [48, Observação 2.68]). Esta classe coincide com a primeira classe de Chern definida no contexto de Classes Características (veja [53]).

A.2 Índice dinâmicos de órbitas fechadas contráteis

Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Fixe uma órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ (possivelmente degenerada) e seja $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um disco contínuo tal

Apêndice A. Órbitas fechadas contráteis e primeira classe de Chern

que $v(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$. Já mencionamos que $v^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$ é um fibrado $d\lambda$ -simplético e existe uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi_v : v^*\xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ sobre o disco $\mathbb{D}$. Seja $\Psi_v|_{S^1} : (v^*\xi)|_P \rightarrow S^1 \times \mathbb{C}$ a restrição da trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ_v sobre a órbita fechada P . Por simplicidade, escrevemos $\Psi_v = \Psi_v|_{S^1}$. Note que Ψ_v induz a escolha de uma classe $\alpha_v \in \mathcal{S}_P$ contendo Ψ_v . Lembre que $\mathcal{S}_P$ é o conjunto das classes de homotopia de trivializações $d\lambda$ -simpléticas do fibrado $x_T^*\xi \rightarrow S^1$. Tal como no Capítulo 1, existe uma aplicação $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi(0) = \mathbb{1}$ e

$$\varphi(t) = \Psi_t \cdot d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} \cdot \Psi_0^{-1} \quad (\text{A.3})$$

onde $d\phi_{Tt}|_{\xi_{x(0)}} : \xi_{x(0)} \rightarrow \xi_{x(Tt)}$ é a aplicação fluxo linearizado restrita à estrutura de contato. Definimos o *índice de Conley-Zehnder (generalizado) da órbita fechada contrátil* $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ como $\mu_{CZ}(P, v) = \mu_{\text{spec}}(\varphi)$, onde μ é o índice definido em (1.25). Definimos também o *número de rotação transversal da órbita fechada contrátil* $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ como $\rho(P, v) = \rho(\varphi)$, onde ρ é definido em (1.34). As notações $\mu_{CZ}(P, v)$ e $\rho(P, v)$ deixam explícita a dependência do disco $v : \mathbb{D} \rightarrow M$. Observe que tanto μ_{CZ} quanto ρ independem da trivialização $d\lambda$ -simplética de $v^*\xi \rightarrow \mathbb{D}$ para um disco $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ fixado. Repare que no caso de uma órbita fechada P não-degenerada, $\mu_{CZ}(P, v)$ coincide com o índice de Conley-Zehnder usual (veja Teorema 1.29).

Vamos discutir uma hipótese sobre a *primeira classe de Chern* que implica a independência de $\mu_{CZ}(P, v)$ e $\rho(P, v)$ em relação ao disco contínuo $v : \mathbb{D} \rightarrow M$. Fixe $v_1, v_2 : \mathbb{D} \rightarrow M$ dois discos contínuos tais que $v_k(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, $k = 1, 2$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Defina $f : \mathbb{S}^2 := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow M$ satisfazendo

$$f(z) = \begin{cases} v_1(z), & \text{se } |z| \leq 1; \\ v_2(1/\bar{z}), & \text{se } 1 \leq |z| < \infty; \\ v_2(0), & \text{se } z = \infty, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde $\bar{z}$ é o conjugado de z . Considere o *primeiro número de Chern* $c_1(f^*\xi)$. Observe que, no caso de $c_1(f^*\xi) = 0$, o Teorema A.1 garante que as trivializações $d\lambda$ -simpléticas Ψ_{v_1}, Ψ_{v_2} induzidas por v_1, v_2 , respectivamente, são homotópicas. Em particular, $\mu_{CZ}(P, v_1) = \mu_{CZ}(P, v_2)$ e $\rho(P, v_1) = \rho(P, v_2)$. Isto mostra que uma condição suficiente para que o *índice de Conley-Zehnder* e o *número de rotação transversal* de órbitas fechadas contráteis sejam independentes do disco contínuo é $c_1(f^*\xi) = 0$, para todo $f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{C^0} M$. Isto significa supor que a *primeira classe de Chern* do fibrado $\xi \rightarrow M$ se anula sobre o segundo grupo de homotopia $\pi_2(M)$. Vamos denotar esta propriedade por $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) = 0$. Os exemplos canônicos de 3-variedades de contato satisfazendo $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) = 0$ são $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz + xdy))$ e $(S^3, \xi_0 = \ker(\frac{1}{2} \sum_{k=0,1} x_k dy_k - y_k dx_k))$. Nestes casos, $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) = 0$ é consequência de $\pi_2(\mathbb{R}^2) \approx \pi_2(S^3) \approx 0$.

Apêndice B

Construção de p -discos especiais

Sejam λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M e $\xi = \ker \lambda$ a estrutura de contato. Vamos mostrar que existem p -discos cuja folheação característica induzida por ξ é bem comportada (em um sentido que ficará claro adiante). Lembre que um p -disco, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, para um p -nó trivial $K = \gamma(S^1)$, onde $\gamma : S^1 \hookrightarrow M$ é um mergulho, é uma imersão $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $v|_{\mathbb{D} \setminus \partial \mathbb{D}}$ é um mergulho em $M \setminus K$ e $v|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \xrightarrow{(p:1)} K$ é um p -recobrimento. As referências para a exposição a seguir são [12, 19, 39, 40, 54].

Sejam K um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, transversal à estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ e $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K . Denote $\mathcal{D} := u(\mathbb{D})$. Considere a distribuição singular $\mathcal{F} = (\xi \cap T\mathcal{D})^\perp$ sobre $\mathcal{D}$ induzida pela estrutura de contato ξ . Dizemos que $\mathcal{F}$ é a *folheação característica* sobre $\mathcal{D}$. Defina o campo de vetores $V : \mathcal{D} \rightarrow T\mathcal{D}$ satisfazendo

$$\begin{cases} i_V \lambda = 0 \\ i_V d\lambda = dH - (i_{X_\lambda} dH) \lambda \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave definida numa vizinhança aberta $U \subset M$ do p -disco $\mathcal{D}$. Podemos supor que $0 \in H(U)$ é valor regular e $\mathcal{D} \subset H^{-1}(0)$. Observe que $\mathbb{R}_z V_z = \xi_z \cap T_z \mathcal{D}$, para todo $z \in \mathcal{D}$ tal que $V_z \neq 0$, e $\xi_z = T_z \mathcal{D}$, para todo $z \in \mathcal{D}$ tal que $V_z = 0$. Se $\zeta \in \mathcal{D}$ é tal que $V_\zeta = 0$, dizemos que ζ é uma *singularidade* da folheação característica $\mathcal{F} = \xi \cap T\mathcal{D}$. Sejam $\zeta \in \mathcal{D}$ uma singularidade de $\mathcal{F}$ e $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ autovalores de $dV_\zeta : T_\zeta \mathcal{D} \rightarrow T_\zeta \mathcal{D}$. Aqui estamos usando a identificação $\xi_\zeta \simeq T_\zeta \mathcal{D}$. Diremos que a singularidade ζ é

- (i) *não-degenerada*, se $\beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0$;
- (ii) *hiperbólica*, se $\beta_1 \cdot \beta_2 < 0$;
- (iii) *elíptica*, se $\beta_1 \cdot \beta_2 > 0$.

Além disso, uma singularidade elíptica $e \in \mathcal{D}$ será dita *elíptica real* se $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. É comum associar um sinal a cada singularidade. Isto é feito da seguinte forma. Oriente o bordo $\partial \mathcal{D}$ de maneira que $\lambda|_{T_z \partial \mathcal{D}} > 0$, para todo $z \in \partial \mathcal{D}$. Seja $N : \partial \mathcal{D} \rightarrow T\mathcal{D}$ o campo normal apontando para fora de $\mathcal{D}$. Denote por $\mathcal{O}$ a orientação induzida em $\mathcal{D}$ pelo par $\{X_\lambda, N\}$, onde X_λ é o campo

de Reeb. Seja $\mathcal{O}'$ a orientação induzida em ξ pela forma simplética $d\lambda|_{\xi}$. A singularidade ζ é dita *positiva* se as orientações $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ coincidem em $T_{\zeta}\mathcal{D} = \xi_{\zeta}$ e *negativa* caso contrário.

A folheação característica $\mathcal{F} = (\xi \cap T\mathcal{D})^{\perp}$ de um p -disco qualquer $\mathcal{D}$ possui um comportamento bastante arbitrário. Veremos, entretanto, que hipóteses adequadas sobre $\mathcal{D}$ permitem supor, a menos de perturbações pequenas, que $\mathcal{F}$ é bastante simples.

B.1 Definição de p -discos especiais

Seja Σ uma variedade 2-dimensional. Denote por $\mathfrak{X}^r(\Sigma)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^r , $r \geq 1$, definidos em Σ . Considere a seguinte classe especial de campos de vetores.

Definição B.1 ([12], [54]). *Seja Σ uma variedade 2-dimensional, compacta e orientável. Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}^r(\Sigma)$ é **Morse-Smale** se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (i) *existe um número finito de singularidades e órbitas fechadas, todas não-degeneradas;*
- (ii) *os α -limite e ω -limite das linhas de fluxo do campo X são ou uma singularidade ou uma órbita fechada ou o bordo $\partial\Sigma$;*
- (iii) *não existem trajetórias conectando singularidades hiperbólicas.*

O seguinte resultado é provado em [54].

Teorema B.2 ([54], Teorema 2.6). *Seja Σ uma variedade 2-dimensional compacta e orientável. O conjunto dos campos Morse-Smale de classe C^r , $r \geq 1$, é denso em $\mathfrak{X}^r(\Sigma)$.*

Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M . Suponha que K é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, transversal à estrutura de contato ξ induzida por λ e sejam $v : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para K e $\mathcal{D} = v(\mathbb{D})$. Como a folheação característica $\mathcal{F} = (\xi \cap T\mathcal{D})^{\perp}$ próxima de K (isto é, numa faixa pequena $F \subset \mathcal{D}$ tal que $K \subset \partial F$) não possui singularidades, o teorema acima garante que podemos perturbar $\mathcal{D}$ mantendo a faixa F invariante e obter um novo p -disco, ainda denotado por $v : \mathbb{D} \rightarrow M$, tal que a folheação característica sobre $\mathcal{D} = v(\mathbb{D})$ é *Morse-Smale*.

O lema a seguir é um ingrediente fundamental para as nossas construções. Veremos que a folheação característica $\mathcal{F}$ sobre o p -disco $\mathcal{D}$ pode ser assumida, a menos de uma perturbação pequena, como ilustrada pela Figura B.1.

Lema B.3 ([19], Seção 5). *Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M cuja estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é tight. Seja $\bar{u} : \mathbb{D} \rightarrow M$ o mergulho tal que $\bar{K} = \bar{u}(\partial\mathbb{D})$ é um nó (mergulhado) transversal à ξ e $\text{sl}(\bar{K}) = -1$. Então existe um mergulho $u : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{D} = u(\mathbb{D}) \subset M$ tal que $\partial\mathcal{D} = \bar{K}$ e $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}} = (\xi \cap T\mathcal{D})^{\perp}$ possui uma única singularidade elíptica real e positiva e^+ . Além disso, o mergulho u pode ser escolhido arbitrariamente C^0 -próximo de $\bar{u}$ e C^{∞} -próximo de $\bar{u}$ numa vizinhança suficientemente pequena de $\bar{K}$.*

A seguir, enunciamos outro lema provado em [19]. Este resultado fornece um modelo local para uma vizinhança da singularidade e^+ .

Figura B.1: Folheação com uma única singularidade.

Lema B.4 ([19], Seção 5). *Seja λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M cuja estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ é tight. Seja $\bar{u} : \mathbb{D} \rightarrow M$ o mergulho tal que $\bar{K} = \bar{u}(\partial\mathbb{D})$ é um nó (mergulhado) transversal à ξ e $\text{sl}(\bar{K}) = -1$. Suponha que $\mathcal{F}_{\xi}^{\bar{\mathcal{D}}} = (\xi \cap T\bar{\mathcal{D}})^\perp$ possui uma única singularidade elíptica e positiva e^+ . Aqui $\bar{\mathcal{D}} = \bar{u}(\mathbb{D})$. Seja $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança de e^+ em M e seja $(\mathcal{V}, \Psi)$ uma carta de Darboux centrada em e^+ . Então existe um mergulho $u : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{D} = u(\mathbb{D}) \subset M$ tal que $\partial\mathcal{D} = \bar{K}$ e as seguintes propriedades são válidas:*

- (i) $e^+ \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \setminus \mathcal{U} = \bar{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{U}$;
- (ii) e^+ é a única singularidade de $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}}$ em $\mathcal{D}$.
- (iii) e^+ é elíptica real e positiva;
- (iv) existe um aberto $\mathcal{X} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$ tal que $\Psi(\mathcal{D} \cap \mathcal{X}) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\frac{1}{2}xy\}$.

Diremos que uma carta de Darboux centrada em e^+ satisfazendo o item (iv) do Lema B.4 é uma *carta de Darboux adaptada à singularidade e^+* . Na definição a seguir, introduzimos a noção de p -disco especial para uma órbita fechada que é um p -nó trivial.

Definição B.5. *Sejam λ uma forma de contato definida numa 3-variedade M e $\xi = \ker \lambda$ a estrutura de contato associada. Seja $L = (x, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ um órbita fechada que é um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para L . Dizemos que u_L é um **p -disco especial** para L se as seguintes propriedades são verificadas:*

- (i) a folheação característica $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}}$, onde $\mathcal{D} := u_L(\mathbb{D})$, é Morse-Smale;
- (ii) $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}}$ não possui órbitas fechadas;
- (iii) existe uma única singularidade e^+ elíptica real e positiva.

Para as nossas aplicações, dado um p -disco especial, precisaremos fazer uma última perturbação a fim de obter uma carta de Darboux adaptada à singularidade e^+ . A existência desta carta é fundamental para as construções nos Capítulos 2 e 3.

B.2 Construção Capítulo 2: p -disco especial

Seja λ uma forma de contato *tight* definida numa 3-variedade M . Seja $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ a órbita fechada p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, satisfazendo as condições do Teorema 2.1. No Lema

B.7, provamos que existe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L cuja única órbita fechada de Reeb contida em $u_L(\mathbb{D})$ é a órbita fechada L . A demonstração é basicamente um corolário do Lema B.3 e uma adaptação da prova da Proposição 5.6 em [39]. Ideias análogas podem ser encontradas na Seção 3 em [23] e Seção 5 em [33].

Começemos com algumas observações básicas. Sabemos que é possível perturbar λ de maneira que a forma de contato perturbada seja não-degenerada. Esta perturbação pode ser feita de modo que L seja uma órbita fechada do campo de Reeb da nova forma de contato. Estas afirmações são sustentadas pelo lema a seguir. Lembre que $\mathcal{O}_\lambda$ é o conjunto das funções $h : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ tais que $h\lambda$ é forma de contato não-degenerada em M .

Lema B.6 ([30], Lema 6.8). *Seja λ uma forma de contato em M e $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$. Então existe uma sequência $\{g_n\} \in \mathcal{O}_\lambda$ tal que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$,*

$$g_n|_L = 1 \quad e \quad dg_n|_L = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.2})$$

Nosso objetivo é construir um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L tal que $u_L(\mathbb{D})$ não contenha órbitas fechadas $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda_n)$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Lema B.7. *Seja λ uma forma de contato tight definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Seja $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ um p -nó trivial, $p \in \mathbb{Z}_+^*$, e $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ um p -disco para L . Sejam $g_n \in \mathcal{O}_\lambda$ funções tais que $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ na topologia usual de $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ e satisfazendo (B.2). Então existe um p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ para a órbita fechada L e um inteiro $N \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que se $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{T})$ é órbita fechada do campo de Reeb associado à forma de contato λ_n , para algum $n \geq N$, e $\bar{x}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$, então $\bar{x}(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R})$. O p -disco especial $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ pode ser escolhido C^0 -próximo de $u : \mathbb{D} \rightarrow M$.*

Demonstração: Nosso primeiro passo é construir um p -disco $\bar{u} : \mathbb{D} \rightarrow M$ para L tal que a única órbita fechada em $\mathcal{P}(\lambda_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, contida em $\bar{\mathcal{D}} = \bar{u}(\mathbb{D})$ é a própria L . Considere o seguinte espaço

$$X := \{g \in C^\infty(\mathbb{D}, M) | g(z) = u(z) \text{ se } z \in \partial\mathbb{D}\}. \quad (\text{B.3})$$

Aqui $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o p -disco fixado no enunciado acima. O conjunto X é subespaço fechado do espaço métrico completo $C^\infty(\mathbb{D}, M)$. Fixe $n_0 \in \mathbb{N}$ e seja $P = (x, T)$ uma órbita fechada de $X_{\lambda_{n_0}}$ geometricamente distinta de L . Defina o seguinte conjunto

$$X_{n_0, x} := \{g \in X | x(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{D})\}.$$

Afirmamos que $X_{n_0, x}^c$ é aberto e denso em X . Como fixamos $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrariamente e $\mathcal{P}(\lambda_n)$ é enumerável (pois, λ_n é não-degenerada), para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema da Categoria de Baire implica que

$$\left(\bigcup_{\substack{P=(x,T) \in \mathcal{P}(\lambda_n) \\ n \in \mathbb{N}}} X_{n,x} \right)^c$$

Apêndice B. Construção de p -discos especiais

é residual em X . Escolhendo uma perturbação $\bar{u} : \mathbb{D} \rightarrow M$ que é C^∞ -próxima do p -disco $u : \mathbb{D} \rightarrow M$, podemos supor que a única órbita fechada de Reeb para a forma de contato λ_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, contida em $\bar{\mathcal{D}} = \bar{u}(\mathbb{D})$ é $L = (y, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda_n)$.

Seja $F_0 = \bar{u}(\mathbb{D}_r)$, onde $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Se $r < 1$ é suficientemente próximo de $r = 1$, então $K_0 = \partial F_0$ é também um nó transversal a ξ . Já mencionamos no Capítulo 1 que, neste caso, $\text{sl}(K_0, F_0) = -1$. Note que a faixa $F_0^c := \bar{\mathcal{D}} \setminus F_0$, pelo que provamos acima, contém L e esta é a única órbita fechada de Reeb contida em F_0^c . O Teorema B.2 e o Lema B.3 implicam que podemos perturbar F_0 e obter um disco F mergulhado (C^0 -próximo de F_0) com $\partial F = K_0$ tal que se $\mathcal{D} = F \cup_{K_0} F_0^c$, então $\mathcal{D}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) existe um p -disco $u_L : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$;
- (ii) a folheação característica $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}} = \xi \cap T\mathcal{D}$ é Morse-Smale;
- (iii) $\mathcal{F}_\xi^{\mathcal{D}}$ não possui órbitas fechadas;
- (iv) existe uma única singularidade e^+ elíptica real e positiva.

Note que, pela primeira parte desta demonstração, podemos supor que existe um disco $F = u_L(\mathbb{D}_r)$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, onde $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, contido em $\mathcal{D} = u_L(\mathbb{D})$ tal que a faixa complementar $F^c := \mathcal{D} \setminus F$ não contém órbitas fechadas de Reeb das formas de contato λ_n , $n \in \mathbb{N}$ distintas de L .

Resta somente eliminar as órbitas fechadas contidas em $F = u_L(\mathbb{D}_r) \subset \mathcal{D}$. Seja $e^+ \in \mathcal{D}$ a única singularidade elíptica real e positiva da folheação característica $(\xi \cap T\mathcal{D})^\perp$. Suponha que $u_L(0) = e^+$. Como $g_n \xrightarrow{C^\infty} 1$, existe uma vizinhança $U_{e^+} \subset \mathbb{D}$, $0 \in U_{e^+}$, tal que X_{λ_n} é transversal a $u_L(U_{e^+})$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Em outras palavras, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ e $0 < \delta \ll 1$ tal que se $|z| < \delta$, então $T_{u_L(z)}(u_L(\mathbb{D})) \pitchfork X_{\lambda_n}$, para todo $n \geq N_0$. Diminuindo δ , se necessário, podemos supor que se $1 - \delta \leq |z| \leq 1$, então $u_L(z) \in F^c$. Dito isto, defina o seguinte espaço

$$Y := \{g \in C^\infty(\mathbb{D}, M) : g(z) = u_L(z) \text{ se } |z| < \delta \text{ ou } 1 - \delta \leq |z| \leq 1\}.$$

Fixe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq N_0$, e seja $P = (x, T)$ uma órbita fechada do campo de Reeb $X_{\lambda_{n_0}}$ geometricamente distinta de L . Considere o seguinte conjunto

$$Y_{n_0, x} := \{g \in Y : x(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{D})\}.$$

É imediato mostrar que $Y_{n_0, x}^c$ é aberto e denso em Y . Pelo *Teorema da Categoria de Baire*, $\left(\bigcup_{\substack{P=(x,T) \in \mathcal{P}(\lambda_n) \\ n \geq N_0}} Y_{n, x}\right)^c$ é residual em Y . Consequentemente, podemos supor que, a menos de uma perturbação arbitrariamente pequena, u_L satisfaz as condições do Lema B.7. ■

B.3 Construção Capítulo 3: Disco especial

No Capítulo 3, após o preenchimento de Dehn, dispomos de uma 3-variedade fechada e conexa N que possui um toro $\mathbb{T}^2$ mergulhado separando N em duas 3-variedades com bordo,

isto é, $\mathbb{T}^2 = N_1 \cap N_2$, onde $N = N_1 \cup N_2$ e N_1, N_2 são 3-variedades com bordo. Suponha que N_2 é um toro sólido. Assumiremos que existe uma forma de contato não-degenerada definida em N cuja restrição $\lambda|_{N_1}$ é *tight* e uma órbita fechada $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ contida na espinha de N_2 (isto é, $\tilde{x}(\mathbb{R}) \subset S^1 \times \{(0, 0)\} \subset S^1 \times \mathbb{D} \simeq N_2$).

No lema a seguir, vamos construir um 1-disco especial (denominado apenas *disco especial*) $u_{\tilde{P}} : \mathbb{D} \rightarrow N$ para órbita fechada $\tilde{P}$. O enunciado abaixo é bastante técnico e isto se deve ao contexto particular do Capítulo 3. A prova segue, com mínimas alterações, os argumentos apresentados nos lemas anteriores.

Lema B.8. *Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa N . Seja $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ um toro mergulhado em N tal que $\mathbb{T}^2 = N_1 \cap N_2$, onde $N = N_1 \cup N_2$ e N_1, N_2 são 3-variedades com bordo e $N_2 \stackrel{\text{difeo}}{\simeq} S^1 \times \mathbb{D}$. Suponha que $\lambda|_{N_1}$ é *tight*. Seja $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T}) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ uma órbita fechada do fluxo de Reeb tal que $\tilde{x}(\mathbb{R}) \subset S^1 \times \{(0, 0)\} \subset S^1 \times \mathbb{D} \stackrel{\text{difeo}}{\simeq} N_2$. Suponha que exista um mergulho (disco especial) $u : \mathbb{D} \rightarrow N$ tal que $u(e^{2\pi it}) = \tilde{x}(\tilde{T}t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Suponha que a faixa $F_1 = u(\mathbb{D}) \cap N_2$ é transversal à $\xi = \ker \lambda$ e, se $K \hookrightarrow \mathbb{T}^2$ é um nó mergulhado satisfazendo $\partial F_1 = \tilde{x}(\mathbb{R}) \cup K$, então K transversal à ξ . Suponha que $\text{sl}(\tilde{P}, u(\mathbb{D})) = -1$. Então existe um disco especial $u_{\tilde{P}} : \mathbb{D} \rightarrow N$ tal que não existem órbitas fechadas $P = (x, T)$ do fluxo de Reeb distintas de $\tilde{P}$ satisfazendo $x(\mathbb{R}) \subset u_{\tilde{P}}(\mathbb{D})$. O disco especial $u_{\tilde{P}} : \mathbb{D} \rightarrow N$ pode ser escolhido C^0 -próximo de $u : \mathbb{D} \rightarrow N$.*

Demonstração. Por hipótese, o nó $K \hookrightarrow \mathbb{T}^2$ mergulhado é transversal à ξ . Como $K \subset \mathcal{D}_0 := u(\mathbb{D})$, onde $u : \mathbb{D} \rightarrow N$ é o mergulho do enunciado acima, podemos considerar uma perturbação pequena K_0 de K contida em $\mathcal{D}_0 \cap N_1$. Não há problema em supor que K_0 é um nó transversal à ξ . Seja $F_0 \subset \mathcal{D}_0 \cap N_1$ a região (contida em $\mathcal{D}_0$ e) limitada pelo nó K_0 . Note que F_0 é um disco (mergulhado) e $K_0 = \partial F_0$. Aumentando F_1 (lembre que $F_1 = u(\mathbb{D}) \cap N_2$), considere $\mathcal{D}_0 = F_0 \cup F_1$. Como $\text{sl}(\tilde{P}, \mathcal{D}_0) = -1$, concluímos que $\text{sl}(K_0, F_0) = -1$.

Lembre que a forma de contato λ restrita a N_1 é *tight*. Isto implica, pelo Teorema B.2 e pelo Lema B.3, que podemos perturbar F_0 e obter um disco F mergulhado C^0 -próximo de F_0 com $\partial F = K_0$ e tal que, se $\mathcal{D} = F \cup_{K_0} F_1$, então

- (i) existe um mergulho $u_{\tilde{P}} : \mathbb{D} \hookrightarrow N$ tal que $\mathcal{D} = u_{\tilde{P}}(\mathbb{D})$;
- (ii) a folheação característica $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}}$ é Morse-Smale;
- (iii) $\mathcal{F}_{\xi}^{\mathcal{D}}$ não possui órbitas fechadas;
- (iv) existe uma única singularidade e^+ elíptica real e positiva.

Note que as perturbações induzidas pelos Lemas B.3 e B.4 tiveram suporte no interior de N_1 . A transversalidade de F_1 em relação à estrutura de contato garante que existe o disco especial mesmo que λ não seja globalmente *tight*.

A conclusão da prova do Lema B.8 segue de um argumento análogo àquele usado na demonstração do Lema B.7 para eliminar as órbitas fechadas de Reeb contidas em um p -disco especial. ■

Apêndice C

Árvore de *bubbling-off*

Neste apêndice, vamos reunir alguns fatos centrais relacionados à análise de *bubbling-off*. As ideias expostas a seguir são fundamentais nas demonstrações dos teoremas principais dos Capítulos 2 e 3. As referências básicas deste apêndice são [21, 22, 23, 24, 31, 35, 39].

C.1 Sequências Germinantes

Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Fixe uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}(\lambda)$. Seja $C > 0$ e defina constantes $\sigma_1, \sigma_2(C) \in \mathbb{R}_+^*$ dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \inf\{T \in \mathbb{R}_+^* : T \text{ é período de alguma } P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)\}, \\ \sigma_2(C) &:= \inf\{|T - T'| : T, T' \text{ são períodos, } T, T' \leq C \text{ e } T \neq T'\}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Note que $\sigma_2(C) > 0$, visto que λ é não-degenerada. Escolha uma constante $\sigma(C) \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$0 < \sigma(C) < \min\{\sigma_1, \sigma_2(C)\}.\tag{C.2}$$

Observe que $\sigma(C)$ está bem-definida. Sejam $R_n \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $R_n \rightarrow \infty$ e considere sequências de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas

$$\tilde{v}_n = (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M,$$

onde $B_{R_n}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}$, satisfazendo

$$E_H(\tilde{v}_n) \leq C, \quad \int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} v_n^* d\lambda \leq \sigma(C), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},\tag{C.3}$$

onde $E_H(\tilde{v}_n)$ é a *energia de Hofer* e é definida por

$$E_H(\tilde{v}_n) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{B_{R_n}(0)} \tilde{v}_n^* d\lambda_\phi, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.\tag{C.4}$$

Lembre que $\Lambda = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]) : \phi' \geq 0\}$ e $\lambda_\phi(a, p) = \phi(a)\lambda(p)$, para todo $(a, p) \in \mathbb{R} \times M$. Suponha que a sequência $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ é tal que

$$\{b_n(2)\} \text{ é uniformemente limitada.} \quad (\text{C.5})$$

Em vista de (C.3) e (C.5), temos a seguinte definição.

Definição C.1 ([21, 22, 23, 35, 39]). *Se $\tilde{v}_n := (b_n, v_n) : B_{R_n}(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas satisfazendo (C.3) e (C.5), dizemos que $\tilde{v}_n$ é uma **sequência germinante**.*

Lema C.2 ([21, 22, 23, 35, 39]). *Seja $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante. Então existe uma subseqüência $\tilde{v}_{n_k}$, um conjunto finito $\Gamma' \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tais que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M)$. Além disso, se $\tilde{v}$ é não-constante, então $\tilde{v}$ tem um único furo positivo em ∞ e Γ' é o conjunto dos furos negativos.*

Demonstração. Considere o conjunto $\tilde{\Gamma}'$ dos pontos de *bubbling-off* de $\tilde{v}_n$, isto é,

$$\tilde{\Gamma}' := \{z \in \mathbb{C} : \exists n_k \rightarrow \infty \text{ e } \zeta_k \rightarrow z \text{ tal que } |d\tilde{v}_{n_k}(\zeta_k)| \rightarrow +\infty\}. \quad (\text{C.6})$$

Visto que $\tilde{v}_n$ satisfaz (C.3), para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\tilde{\Gamma}' \subset \mathbb{D}$. De fato, suponha, por contradição, que existe $z' \in \tilde{\Gamma}' \cap \mathbb{D}^c$. Escolha uma vizinhança pequena $B_\epsilon(z')$ de z' , para algum $\epsilon > 0$. Observe que não estamos assumindo que z' seja o único ponto de *bubbling-off* contido em $B_\epsilon(z')$. Sejam $n_k \rightarrow \infty$ e $\zeta_k \rightarrow z'$ tais que $|d\tilde{v}_{n_k}(\zeta_k)| \rightarrow +\infty$. Pelo *Lema de Ekeland-Hofer*¹, podemos assumir que

$$|d\tilde{v}_{n_k}(\zeta)| \leq 2|d\tilde{v}_{n_k}(\zeta_k)|, \quad \text{para todo } \zeta \in B_\epsilon(z').$$

Sejam $R_k := |d\tilde{v}_{n_k}(\zeta_k)|$ e $B_{R_k}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_k\}$. Defina uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas $\tilde{w}_k = (d_k, w_k) : B_{R_k}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dadas por

$$\tilde{w}_k(z) = \left(b_{n_k} \left(\zeta_k + \frac{\epsilon z}{R_k} \right) - b_{n_k}(\zeta_k), v_{n_k} \left(\zeta_k + \frac{\epsilon z}{R_k} \right) \right). \quad (\text{C.8})$$

Note que $\epsilon > 0$ foi escolhido independente de $k \in \mathbb{N}$. Verificamos que $\tilde{w}_k$ satisfaz

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}} \tilde{w}_k = 0, \quad |d\tilde{w}_k(0)| = 1, \quad |d\tilde{w}_k(z)| \leq 2, \quad \text{para todo } z \in B_{R_k}(0),$$

$$\begin{aligned} \limsup_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_{R_k}(0) \setminus \mathbb{D}} w_k^* d\lambda &\leq \sigma(C) \quad \text{e} \\ \liminf_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_{R_k}(0)} w_k^* d\lambda &> 0. \end{aligned}$$

¹**Lema de Ekeland-Hofer** ([19]), **Lema 26**; [40], **Lema 3.66**): Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $f : X \rightarrow [0, +\infty)$ uma função contínua. Dados $\epsilon_0 > 0$ e $x_0 \in X$ existem $\epsilon'_0 \in (0, \epsilon_0]$ e $x'_0 \in \overline{B_{2\epsilon_0}(x_0)}$ tais que

$$\begin{aligned} f(x'_0)\epsilon'_0 &\leq f(x_0)\epsilon_0, \\ d(x, x'_0) &\leq \epsilon'_0 \Rightarrow f(x) \leq 2f(x'_0). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Apêndice C. Árvore de *bubbling-off*

Pelo Teorema 3.44 em [40], existe uma subsequência $\tilde{w}_{k_j}$ e uma aplicação $\tilde{w} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ de classe C^∞ satisfazendo $\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{w}) = 0$ tal que $\tilde{w}_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \tilde{w}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M)$. Pelo Teorema 1.54, existe um período $T' \in \mathbb{R}_+^*$ de uma órbita fechada de Reeb tal que $T' = E_H(\tilde{w}) = \int_{\mathbb{C}} w^* d\lambda$. No entanto, (C.3) implica que $T' \leq \sigma(C) < \sigma_1$, onde σ_1 , conforme (C.1), é o ínfimo dos períodos das órbitas fechadas em $\mathcal{P}(\lambda)$. Esta contradição mostra que $\tilde{\Gamma}' \subset \mathbb{D}$.

A prova de que existe um limite para a sequência germinante $\tilde{v}_n$ é análoga à demonstração do Lema 2.14 no Capítulo 2. Vejamos as ideias principais. Suponha que $\tilde{\Gamma}' = \emptyset$, pelo Teorema 3.44 em [40], existe uma subsequência $\{\tilde{v}_{n_k}\}$ e um plano $\tilde{J}$ -holomorfo $\tilde{v} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{v}$ na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R} \times M)$. Caso $\tilde{\Gamma}' \neq \emptyset$, seja $\zeta_1 \in \tilde{\Gamma}'$. Pelo Teorema 1.54, existem sequências $r_k \rightarrow 0^+$, $n_k \rightarrow \infty$ e um período $T'_1 > 0$ de alguma órbita fechada em $\mathcal{P}(\lambda)$ tais que

$$\int_{B_{r_k}(\zeta_1)} v_{n_k}^* d\lambda \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} T'_1. \quad (\text{C.9})$$

Por simplicidade, vamos denotar a subsequência $\tilde{v}_{n_k}$ como $\tilde{v}_n$. Seja Γ'_1 o conjunto dos pontos de *bubbling-off* da (nova) sequência germinante $\tilde{v}_n$. Se $\Gamma'_1 = \{\zeta_1\}$, pelo Teorema 3.44 em [40], existe uma subsequência $\{\tilde{v}_{n_k}\}$ e uma esfera furada $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1\}, \mathbb{R} \times M)$. Se $\Gamma'_1 \setminus \{\zeta_1\} \neq \emptyset$, dado $\zeta_2 \in \Gamma'_1 \setminus \{\zeta_1\}$, novamente existem $T'_2 > 0$ e sequências $n_k \rightarrow \infty$, $r_k \rightarrow 0^+$ tais que

$$\int_{B_{r_k}(\zeta_2)} v_{n_k}^* d\lambda \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} T'_2. \quad (\text{C.10})$$

Mais uma vez denotamos a subsequência $\tilde{v}_{n_k}$ apenas como $\tilde{v}_n$. Se Γ'_2 é o conjunto dos pontos de *bubbling-off* da (nova) sequência germinante $\tilde{v}_n$, ou $\Gamma'_2 = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ e existe uma subsequência $\{\tilde{v}_{n_k}\}$ e uma esfera furada $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\}, \mathbb{R} \times M)$, ou $\Gamma'_2 \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\} \neq \emptyset$. Tal como na prova do Lema 2.14, cada $\zeta_i \in \Gamma'_i \setminus \Gamma'_{i-1}$ consome uma quantidade não-nula de $d\lambda$ -energia e, portanto, existe $i_0 \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que $\Gamma'_{i_0} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_{i_0}\} = \emptyset$. Denotando $\Gamma' = \{\zeta_1, \dots, \zeta_{i_0}\} \subset \mathbb{C}$, o Teorema 3.44 em [40] implica que existe uma subsequência $\{\tilde{v}_{n_j}\}$ e uma esfera furada $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma', \mathbb{R} \times M)$.

Observe que a esfera furada $\tilde{J}$ -holomorfa $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é de energia finita. De fato, pelo *Lema de Fatou*, temos que

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{v}_n^* d\lambda_\phi \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma'} \tilde{v}_n^* d\lambda_\phi,$$

Como $E_H(\tilde{v}_n)$ é definida por (C.4), vemos que $E_H(\tilde{v}) \leq C$.

Observe que se $\Gamma' \neq \emptyset$, então $\tilde{v}$ é não-constante. Isto é consequência do fato de que existe pelo menos um furo negativo $z' \in \Gamma'$ e, portanto, $\lim_{z \rightarrow z'} b(z) = -\infty$. Isto mostra que $\tilde{v}$ pode ser constante somente quando $\Gamma' = \emptyset$. Vamos provar que, no caso em que $\Gamma' \neq \emptyset$, os pontos $z \in \Gamma'$ correspondem aos furos negativos de $\tilde{v}$. Suponha, por contradição, que $z \in \Gamma'$ é um furo positivo

de $\tilde{v} = (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Seja $\Phi : (U, 0) \rightarrow (\Phi(U), z)$ uma carta holomorfa centrada em z dada por $s + it \mapsto \Phi(e^{-2\pi(s+it)})$, $s \gg 1$, e denote $\tilde{v}(s, t) = \tilde{v} \circ \Phi(e^{-2\pi(s+it)})$. O fato de $z \in \Gamma'$ ser um furo positivo significa que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\{s\} \times S^1} v^* \lambda = T' > 0$, onde $T' \in \mathbb{R}_+^*$ é o período de alguma órbita fechada em $\mathcal{P}(\lambda)$. Observe que $\Phi(e^{-2\pi(s_0+it)})$ está orientado no sentido horário, para todo $s_0 \in \mathbb{R}$. Seja $B_r(z)$ um disco de raio $r > 0$ centrado em z cujo bordo é orientado no sentido anti-horário. Existe uma sequência $r_n \rightarrow 0^+$ tal que $\int_{\partial B_{r_n}(z)} v^* \lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -T'$. Podemos fixar $r > 0$ tal que $\int_{\partial B_r(z)} v^* \lambda < -T'/2$ e encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $\int_{\partial B_r(z)} v_{k_0}^* \lambda < -T'/2$. Pelo Teorema de Stokes, temos $\int_{B_r(z)} v_{k_0}^* d\lambda < -T'/2$. Esta contradição mostra que $z \in \Gamma'$ não pode ser um furo positivo.

Já mencionamos no Capítulo 1 que uma curva $\tilde{J}$ -holomorfa de energia finita não-constante definida numa superfície de Riemann fechada possui pelo menos um furo positivo. Como $\tilde{v}$ está definida em $\mathbb{S}^2 \setminus (\Gamma' \cup \{\infty\}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma'$, ∞ é um furo não-removível e Γ' é constituído pelos furos negativos, então ∞ é (o único) furo positivo de $\tilde{v}$. ■

A esfera furada $\tilde{J}$ -holomorfa de energia finita $\tilde{v} := (b, v) : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M$ obtida no Lema C.2 é denominada um *limite para a sequência germinante* $\tilde{v}_n$. Veremos que é bastante útil o caso em que este limite é não-constante. A razão está ligada à noção de árvores de *bubbling-off*.

C.2 Árvore de *bubbling-off*

A seguir, vamos introduzir a noção de árvore de *bubbling-off*. Este conceito tem sido fundamental no estudo da Dinâmica de Reeb.

Definição C.3 ([35], Definição 4.6). *Uma árvore de bubbling-off associada a uma sequência germinante $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ é um conjunto finito de esferas furadas de energia finita*

$$\mathfrak{F} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_q \rightarrow \mathbb{R} \times M : q \text{ é um vértice de } T\}$$

modelada numa árvore finita $T = (V, r, E)$, onde V é o conjunto dos vértices, r é um vértice especial, chamado **raiz**, e E é o conjunto de arestas, orientado emanando da raiz r , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) cada $\tilde{w}_q$, $q \in V$, é uma esfera furada de energia finita e não-constante com um único furo positivo em ∞ e um número finito de furos negativos. Além disso, se $q \neq r$, $\tilde{w}_q$ não é um cilindro $\tilde{J}$ -holomorfo trivial sobre uma órbita fechada de Reeb²;
- (ii) as arestas $\mathfrak{e} \in E$ partindo de um vértice $q \in V$ estão em bijeção com os furos negativos de $\tilde{w}_q$. Se $\mathfrak{e} \in E$ é uma aresta com extremidades em q, q' , orientada de q para q' , e z é um furo negativo correspondendo à aresta $\mathfrak{e}$, então o limite assintótico P_z de $\tilde{w}_q$ em z coincide com o limite assintótico P_∞ de $\tilde{w}_{q'}$ no furo positivo em ∞ ;
- (iii) existe uma subsequência de $\tilde{v}_n$, ainda denotada por $\tilde{v}_n$, tal que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{w}_r$ na topologia usual

²Por um cilindro $\tilde{J}$ -holomorfo trivial sobre uma órbita fechada de Reeb entendemos a aplicação $F_P : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por $(s, t) \mapsto (Ts, x(Tt))$, onde $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$.

Apêndice C. Árvore de *bubbling-off*

de $C_{loc}^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_r, \mathbb{R} \times M)$. Para cada $q \neq r$, existem sequências $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, $r_n \rightarrow 0^+$ e $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{U}_n(z) := (b_n(z_n + r_n z) + c_n, v_n(z_n + r_n z)) \rightarrow \tilde{w}_q$$

na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_q, \mathbb{R} \times M)$.

Como as esferas furadas ($\tilde{J}$ -holomorfas) de energia finita $\tilde{w}_q : \mathbb{S}^2 \setminus \tilde{\Gamma}_q \rightarrow \mathbb{R} \times M$, com $\tilde{\Gamma}_q = \{\infty\} \cup \Gamma_q$, na definição acima possuem um único furo positivo em ∞ e $\Gamma_q \subset \mathbb{C}$ corresponde aos furos negativos de $\tilde{w}_q$, por simplicidade, denotaremos $\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Nesta notação está subentendido o furo positivo em ∞ .

Observação C.4. Como $\mathfrak{F}$ é finita, no extremo de cada ramo (base de cada ramo) da árvore $T = (V, r, E)$ estão planos de energia finita.

O seguinte resultado mostra que existe uma árvore de *bubbling-off* associada a uma sequência $\tilde{v}_n = (b_n, v_n)$ com limite não-constante. A demonstração a seguir é essencialmente àquela encontrada em [35].

Proposição C.5 ([35], Proposição 4.7). *Fixe $C > 0$. Sejam $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante e $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$, $\Gamma \subset \mathbb{C}$ finito, um limite não-constante para $\tilde{v}_n$. Suponha que $E_H(\tilde{v}_n) \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma árvore de *bubbling-off**

$$\mathfrak{F} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M : q \text{ é um vértice de } T\}$$

modelada numa árvore $T = (V, r, E)$, associada a $\tilde{v}_n$, tal que $\tilde{w}_r = \tilde{v}$. Além disso,

$$E_H(\tilde{w}_q) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E_H(\tilde{v}_n) \leq C, \quad \text{para todo } q \in V.$$

Esboço da Demonstração: Como $\tilde{v}$ é um limite não-constante para $\tilde{v}_n$, existe uma sub-sequência $\tilde{v}_{n_k}$ tal que $\tilde{v}_{n_k} \rightarrow \tilde{v}$ na topologia usual de $C_{loc}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma, \mathbb{R} \times M)$. Considere $\tilde{w}_r = \tilde{v}$, isto é, $\tilde{v}$ é a raiz. Se $\Gamma = \emptyset$, então a árvore finita T satisfaz $T = (\{r\}, r, \emptyset)$. Caso $\Gamma \neq \emptyset$, fixe um furo negativo $\zeta \in \Gamma$. A seguir, construímos uma sequência germinante associada ao furo ζ . O argumento é análogo àquele exposto na Seção 2.3.2. Vamos expor os principais passos. Recorde que a massa de $\zeta \in \Gamma$ é definida por $m(\zeta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} m_\epsilon(\zeta)$, onde

$$m_\epsilon(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial B_\epsilon(\zeta)} u_n^* \lambda$$

e $\partial B_\epsilon(\zeta)$ está orientado no sentido anti-horário. Fixe $\epsilon > 0$ tal que

$$m_\epsilon(\zeta) - m(\zeta) \leq \frac{\sigma(C)}{2}, \tag{C.11}$$

onde $\sigma(C)$ é definido em (C.2). Note que isto é possível, visto que $\epsilon \mapsto m_\epsilon(\zeta)$ é não-decrescente.

Escolha $\zeta_n \in \overline{B_\epsilon(\zeta)}$ tal que

$$a_n(\zeta_n) = \inf_{z \in \overline{B_\epsilon(\zeta)}} a_n(z). \quad (\text{C.12})$$

É possível provar que $\zeta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta$ (veja (2.43) na Seção 2.3.2). Fixe δ_n satisfazendo

$$\int_{B_\epsilon(\zeta) \setminus B_{\delta_n}(\zeta_n)} v_n^* d\lambda = \sigma(C).$$

Esta sequência δ_n está bem-definida e satisfaz $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (veja (2.44) na Seção 2.3.2). Escolha $R_n \rightarrow +\infty$ tal que $B_{R_n \delta_n}(\zeta_n) \subset B_\epsilon(\zeta)$ e defina uma sequência de curvas $\tilde{J}$ -holomorfas

$$\tilde{w}_{\zeta,n} = (d_{\zeta,n}, w_{\zeta,n}) : B_{R_n}(0) \rightarrow \mathbb{R} \times M \quad (\text{C.13})$$

tal que

$$d_{\zeta,n}(z) = b_n(\zeta_n + \delta_n z) - b_n(\zeta_n + 2\delta_n), \quad w_{\zeta,n}(z) = v_n(\zeta_n + \delta_n z). \quad (\text{C.14})$$

É possível provar que as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \int_{B_{R_n}(0) \setminus \mathbb{D}} w_{\zeta,n}^* d\lambda \leq \sigma(C), \quad (\text{C.15})$$

$$\int_{B_{R_n}(0)} w_{\zeta,n}^* d\lambda \leq \int_{B_\epsilon(\zeta)} v_n^* d\lambda. \quad (\text{C.16})$$

Como as curvas $\tilde{v}_n$ satisfazem $E_H(\tilde{v}_n) \leq C$, concluímos que $E_H(\tilde{w}_{\zeta,n}) \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $d_{\zeta,n}(2) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $\tilde{w}_{\zeta,n}$ definida em (C.14) é uma sequência germinante. Pelo Lema C.2, existe uma subsequência $\tilde{w}_{\zeta,n_k}$, um conjunto finito $\Gamma_\zeta \subset \mathbb{C}$ e uma esfera furada de energia finita $\tilde{w}_\zeta : \mathbb{D} \setminus \Gamma_\zeta \rightarrow \mathbb{R} \times M$ tal que $\tilde{w}_{\zeta,n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{w}_\zeta$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma_\zeta, \mathbb{R} \times M)$. Antes de seguirmos, considere o seguinte resultado provado por Hofer, Wysocki e Zehnder em [22].

Proposição C.6 ([22], Proposição 8.1). *Seja $\tilde{w}_\zeta = (d_\zeta, w_\zeta) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\zeta \rightarrow \mathbb{R} \times M$ a esfera furada de energia finita obtida acima. Sejam $\Gamma_\zeta = \{z_1, \dots, z_N\}$ os furos negativos e ∞ o único furo positivo. Então*

$$m(\infty) = \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} m(z_j) + \int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma_\zeta} w_\zeta^* d\lambda. \quad (\text{C.17})$$

Além disso, se $\Gamma_\zeta \neq \emptyset$, então $0 \in \Gamma_\zeta$ e, se $\#\Gamma_\zeta \leq 1$, então $\int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} w_\zeta^* d\lambda > 0$.

A proposição acima implica que $\tilde{w}_\zeta$ não é um cilindro trivial sobre uma órbita fechada. Note que este fato é parte da condição (i) na Definição C.3.

Nosso próximo objetivo é provar que o limite assintótico de $\tilde{v}$ em $\zeta \in \Gamma'$ coincide com o limite assintótico de $\tilde{w}_\zeta$ no único furo positivo em ∞ . Mais precisamente, sejam $P_0 = (x_0, T_0) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ζ e $P_\infty = (x_\infty, T_\infty) \in \mathcal{P}(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}_\zeta$ em ∞ .

Afirmção C.7. $P_0 = P_\infty$

Apêndice C. Árvore de *bubbling-off*

Demonstração: Seja $C > 0$ fixado. Seja $\mathcal{W} \subset C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ uma vizinhança aberta e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -invariante do conjunto $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(C)$ definido como

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(C) := \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x(Tt) \in M : P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda), \quad T \leq C\}. \quad (\text{C.18})$$

Como λ é não-degenerada, podemos escolher $\mathcal{W}$ tal que se $P = (x, T)$ e $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{T})$ são órbitas fechadas de Reeb distintas satisfazendo $T, \tilde{T} \leq C$, então P e $\tilde{P}$ estão contidas em componentes conexas distintas de $\mathcal{W}$. Denotamos por $\mathcal{W}_0$ a componente conexa contendo a órbita fechada P_0 e $\mathcal{W}_\infty$ a componente conexa contendo a órbita fechada P_∞ .

O fato de que λ é não-degenerada implica também que $\tilde{v}$ e $\tilde{w}_\zeta$ tem comportamento assintótico nos furos em Γ e Γ_ζ , respectivamente. Pelo Teorema 1.67, existem $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\rho_0 < \epsilon$, onde ϵ foi escolhido em (C.11), e $R_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $R_0 \gg 1$, de modo que

$$\begin{aligned} t \mapsto v(\zeta + \rho e^{2\pi i t}) &\in \mathcal{W}_0, \quad \text{para todo } \rho \leq \rho_0, \\ t \mapsto w_\zeta(R e^{2\pi i t}) &\in \mathcal{W}_\infty, \quad \text{para todo } R \geq R_0. \end{aligned}$$

Note que, para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, a curva fechada $t \mapsto v(\zeta + \rho e^{2\pi i t})$ é o limite na topologia usual de $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ de uma subsequência de $t \mapsto v_n(\zeta_n + \rho e^{2\pi i t})$, onde $\zeta_n \rightarrow \zeta$ é a sequência escolhida em (C.12). De modo análogo, se $R \geq R_0$, então a curva fechada $t \mapsto w_\zeta(R e^{2\pi i t})$ é limite de uma subsequência de $t \mapsto w_{\zeta, n}(R e^{2\pi i t})$. Como $w_{\zeta, n}(z) = v_n(\zeta_n + \delta_n z)$, então $t \mapsto w_\zeta(R e^{2\pi i t})$ é limite de uma subsequência de $t \mapsto v_n(\zeta_n + \delta_n R e^{2\pi i t})$. Em suma, concluímos que

$$\begin{aligned} t \mapsto v_n(\zeta + \rho e^{2\pi i t}) &\in \mathcal{W}_0, \quad \text{para todo } \rho \leq \rho_0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande,} \\ t \mapsto v_n(\zeta + \delta_n R e^{2\pi i t}) &\in \mathcal{W}_\infty, \quad \text{para todo } R \geq R_0 \text{ e } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Considere os cilindros $\tilde{J}$ -holomorfos $\tilde{\eta}_n = (f_n, \eta_n) : \left[\frac{\ln \delta_n R_0}{2\pi}, \frac{\ln \rho_0}{2\pi} \right] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dados por

$$(s, t) \mapsto \tilde{v}_n(\zeta_n + e^{2\pi(s+it)}) = \left(b_n(\zeta_n + e^{2\pi(s+it)}), v_n(\zeta_n + e^{2\pi(s+it)}) \right).$$

Como, para $n \in \mathbb{N}$ grande, vemos que $\delta_n R_0 < \rho_0$, então $\tilde{\eta}_n$ está bem-definida. Lembre que escolhemos δ_n tal que $\int_{B_\epsilon(\zeta) \setminus B_{\delta_n}(\zeta_n)} v_n^* d\lambda = \sigma(C)$. Isto implica

$$\int_{\left[\frac{\ln \delta_n R_0}{2\pi}, \frac{\ln \rho_0}{2\pi} \right] \times S^1} \eta_n^* d\lambda \leq \sigma(C).$$

Repare que $\int_{\partial B_{\delta_n R_0}(\zeta_n)} \eta_n^* \lambda > 0$, para n suficientemente grande. Escolha $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\delta < \int_{\partial B_{\delta_n R_0}(\zeta_n)} \eta_n^* \lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que δ pode ser escolhido como

$$\delta := \liminf \int_{\partial B_{\delta_n R_0}(\zeta_n)} \eta_n^* \lambda > 0. \quad (\text{C.20})$$

Considere o seguinte lema provado em [24]:

Lema C.8 ([24], Lema 4.9 (Lema de *soft-rescaling*)). *Fixe números reais $C > 0$, $\delta > 0$. Seja $\sigma(C) > 0$, conforme (C.2), e $\mathcal{W} \subset C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ uma vizinhança aberta $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -invariante do conjunto definido em (C.18). Então, existe $h > 0$ tal que se $\tilde{u} = (a, u) : [r, R] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma aplicação suave satisfazendo:*

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = 0, \quad E(u) \leq C, \quad \int_{[r, R] \times S^1} u^* d\lambda \leq \sigma(C)$$

e

$$\int_{\{\rho\} \times S^1} u^* \lambda \geq \delta, \quad \text{para todo } \rho \in [r, R], \quad r + h \leq R - h,$$

então, $t \mapsto u(\rho e^{2\pi i t}) \in \mathcal{W}$, para $\rho \in [r+h, R-h]$. Além disso, $t \mapsto u(\rho e^{2\pi i t})$, para $\rho \in [r+h, R-h]$, estão todos contidos na componente $\mathcal{W}_{P'} \subset \mathcal{W}$ de alguma órbita fechada de Reeb $P' = (x', T')$.

Aplicue o Lema C.8 para $\delta > 0$ (escolhido em (C.20)), $C > 0$ e a vizinhança $\mathcal{W}$ e obtenha $h \in \mathbb{R}_+^*$ tal que se $s \in \left[\frac{\ln \delta_n R_0}{2\pi} + h, \frac{\ln \rho_0}{2\pi} - h\right]$, então a curva fechada $t \mapsto v_n(\zeta_n + e^{2\pi(s+it)})$ pertence a $\mathcal{W}$, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Em particular, de (C.19) segue que $t \mapsto v_n(z_n + e^{2\pi(s+it)})$, para $n \in \mathbb{N}$ grande, pertence tanto à $\mathcal{W}_0$ quanto à $\mathcal{W}_\infty$, isto é, $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_\infty$. Isto prova que $t \mapsto v(\zeta + e^{-h}\rho_0 e^{2\pi i t})$ e $t \mapsto w_\zeta(e^h R_0 e^{2\pi i t})$ pertencem a mesma componente conexa em $\mathcal{W}$ e, conseqüentemente, $x_0(\mathbb{R}) = x_\infty(\mathbb{R})$. Como as componentes conexas em $\mathcal{W}$ separam as órbitas fechadas distintas, temos que $T_0 = T_\infty$. Isto prova que $P_0 = P_\infty$. ■

A afirmação acima mostra que o limite assintótico de $\tilde{v}$ em ζ coincide com o limite assintótico de $\tilde{w}_\zeta$ em ∞ . Portanto, podemos acrescentar um vértice q_ζ à árvore T e definir $\tilde{w}_{q_\zeta} = \tilde{w}_\zeta$. A construção acima pode ser repetida para todo $\zeta \in \Gamma$. Além disso, dado $\zeta \in \Gamma$, se ζ' é furo negativo de $\tilde{w}_\zeta$, a sequência $\tilde{w}_{\zeta, n}$ induz uma sequência germinante $\tilde{w}_{\zeta, \zeta', n}$ associada ao furo ζ' . A construção neste caso é análoga ao procedimento descrito acima para construir a sequência $\tilde{w}_{\zeta, n}$. Pelo Lema C.2, existe uma subsequência $\tilde{w}_{\zeta, \zeta', n_k}$, um conjunto $\Gamma_{\zeta, \zeta'} \subset \mathbb{C}$ finito e uma esfera furada de energia finita $\tilde{w}_{\zeta, \zeta'}$ tal que $\tilde{w}_{\zeta, \zeta', n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{w}_{\zeta, \zeta'}$ na topologia usual de $C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{C} \setminus \Gamma_{\zeta, \zeta'}, \mathbb{R} \times M)$. Novamente, podemos acrescentar um vértice $q_{\zeta, \zeta'}$ à árvore T e definir $\tilde{w}_{q_{\zeta, \zeta'}} = \tilde{w}_{\zeta, \zeta'}$. Este procedimento pode ser repetido para todos os furos negativos das esferas furadas de energia finita $\tilde{w}_\zeta$, para todo $\zeta \in \Gamma$. Podemos repetir a construção para os furos negativos de $\tilde{w}_{\zeta, \zeta'}$, para todo $\zeta' \in \Gamma_\zeta$. E assim sucessivamente. Observe que a Proposição C.6 implica que este procedimento deve ser finito e, portanto, esta construção produz uma árvore de *bubbling-off* satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) da Definição C.3. ■

C.2.1 Estimativas do índice de μ_{CZ}

Nosso objetivo, na subseção, é estimar o índice μ_{CZ} das órbitas fechadas que são limites assintóticos das esferas furadas de energia finita contidas numa árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$ associada a uma sequência germinante $\tilde{v}_n$ com limite não-constante $\tilde{v}$. Denote por $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ o conjunto das órbitas fechadas $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ tais que existe uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ contida em $\mathfrak{F}$ cujo limite assintótico em algum furo em $\{\infty\} \cup \Gamma$ é $P = (x, T)$.

Apêndice C. Árvore de *bubbling-off*

Vamos verificar que $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$. Nosso objetivo é exibir discos contínuos para as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$. Estes discos serão induzidos por $\mathfrak{F}$. Nossa construção começará pela base de $\mathfrak{F}$. Lembre que na base de $\mathfrak{F}$ estão planos de energia finita. Fixe um plano de energia finita $\tilde{w}_0 = (b_0, w_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ em $\mathfrak{F}$. Denote por $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ a órbita fechada limite assintótico de $\tilde{w}_0$ no (único) furo positivo em ∞ . Pelo comportamento assintótico de $\tilde{w}_0$ em ∞ , se $\bar{\mathbb{C}}$ é a compactificação de $\mathbb{C}$ obtida por adicionar uma cópia de S^1 em ∞ e $\bar{w}_0$ é a extensão contínua de w_0 sobre $\bar{\mathbb{C}}$, então $\bar{w}_0$ fornece um disco contínuo cujo bordo é a órbita fechada P . Pelo Teorema 1.78, temos que $\mu_{CZ}(P, \bar{w}_0) \geq 2$. Suponha agora que $\tilde{w} = (b, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times \tilde{M}$ é uma esfera furada de energia finita em $\mathfrak{F}$. Lembre que existe uma árvore finita $T = (V, r, E)$, onde V é o conjunto dos vértices, r é um vértice especial chamado raiz e E é o conjunto de arestas, orientado emanando da raiz r , associada à árvore de *bubbling-off* $\mathfrak{F}$. O par (V, E) pode ser interpretado como um grafo orientado. Seja $\mathfrak{e}$ o vértice associado à $\tilde{w}$ e denote por $(V_{\tilde{w}}, E_{\tilde{w}})$ o subgrafo emanando de $\mathfrak{e}$. Considere o subconjunto $\mathfrak{R}_{\tilde{w}} = \{\tilde{w}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M : q \in V_{\tilde{w}} \text{ e } q \neq \mathfrak{e}\}$ de $\mathfrak{F}$. Note que $\mathfrak{R}_{\tilde{w}}$ é constituído das esferas furadas de energia finita $\tilde{w}_q = (b_q, w_q) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times M$ que estão associadas aos vértices que estão conectados (com a orientação positiva da árvore de *bubbling-off*) ao vértice $\mathfrak{e}$ associado à $\tilde{w}$. Seja $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma_q}$ a compactificação de $\mathbb{C} \setminus \Gamma_q$ obtida por adicionar cópias de S^1 nas singularidades $\Gamma_q \cup \{\infty\}$ e seja $\bar{w}_q$ a extensão de w_q sobre $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma_q}$. Podemos definir

$$D_{\tilde{w}} = \bar{w} \bigcup_{q \in V_{\tilde{w}} \setminus \mathfrak{e}} \bar{w}_q. \quad (\text{C.21})$$

Esta construção é ilustrada na Figura C.1. Suponha que $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é o limite assintótico de $\tilde{w}$ no furo positivo em ∞ e $\eta : \mathbb{D} \rightarrow M$ é um disco contínuo satisfazendo $\eta(\mathbb{D}) = D_{\tilde{w}}$. Repare que η satisfaz $\eta(e^{2\pi it}) = x(Tt)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Portanto, P é contrátil. Este procedimento pode ser repetido para toda esfera furada de energia finita $\tilde{w}' = (b', w') : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times M_{\nu}$ contida em $\mathfrak{F}$. Isto mostra que se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ é limite assintótico de uma esfera furada de energia finita $\tilde{w} = (b, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M_{\nu}$ no único furo positivo em ∞ , então existe um disco contínuo definido conforme (C.21) tendo como bordo a órbita fechada $P = (x, T)$. Isto é válido para todas as órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ e, portanto, $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{P}^c(\lambda)$. Diremos que os discos obtidos pela construção exposta acima são *discos induzidos pela árvore de bubbling-off*.

Já observamos no Apêndice A que a condição topológica $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$ implica que o índice de Conley-Zehnder de órbitas fechadas de Reeb contráteis $P = (x, T) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ é independente do disco contínuo cujo bordo é a própria P . Em geral, no Capítulo 3 não dispomos de $c_1|_{\pi_2(M)}(\xi) \equiv 0$. Isto motiva, em vista da existência de discos induzidos pela árvore de *bubbling-off*, provar o seguinte lema. Este resultado mostrará que é possível minorar os índices μ_{CZ} das órbitas fechadas em $\mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$.

Lema C.9. *Seja λ uma forma de contato não-degenerada definida numa 3-variedade fechada e conexa M . Seja $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma esfera furada de energia finita cujo único furo positivo é ∞ e Γ corresponde aos furos negativos. Considere $z_1 = \infty$ e $\Gamma = \{z_2, \dots, z_n\}$. Para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, seja $P_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ o limite assintótico de $\tilde{w}$ em z_j . Suponha que,*

 Figura C.1: Discos induzidos por $\mathfrak{F}$.

para $j \geq 2$, existam discos contínuos $u_j : \mathbb{D} \rightarrow M$ tais que $u_j(e^{2\pi it}) = x_j(T_j t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e $\mu_{CZ}(P_j, u_j) \geq 2$. Então existe um disco contínuo $u_1 : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $u_1(e^{2\pi it}) = x_1(T_1 t)$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e $\mu_{CZ}(P_1, u_1) \geq 2$. Em particular, se $\pi \cdot dw \equiv 0$ e $\#\Gamma \geq 2$, então $\mu_{CZ}(P_1, u_1) \geq 3$.

Demonstração. Suponha primeiro que $\pi \cdot dw \not\equiv 0$. Por uma construção análoga à descrita acima, os discos contínuos $u_j : \mathbb{D} \rightarrow M$, para $j \geq 2$, induzem um disco contínuo $u_1 : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $u_1(\mathbb{D}) = \bar{w} \bigcup_{j \geq 2} u_j$ e $u_1(e^{2\pi it}) = x_1(T_1 t)$. Aqui $\bar{w} : \overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma} \rightarrow M$ é a extensão de w sobre a compactificação $\overline{\mathbb{C} \setminus \Gamma}$ de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Seja $Z : \mathbb{D} \rightarrow u_1^* \xi$ uma seção não-nula de $u_1^* \xi \rightarrow \mathbb{D}$. Para todo $j \geq 2$, seja $Z|_{P_j} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \eta^* \xi$ a restrição de Z sobre a órbita fechada P_j . Já mencionamos que $\mu_{CZ}(P_j, Z|_{P_j}) = \mu_{CZ}(P_j, u_j)$, onde $j \geq 2$ e $\mu_{CZ}(P_j, Z|_{P_j})$ é o índice de Conley-Zehnder da órbita fechada P_j calculado em relação à trivialização $d\lambda$ -simplética induzida por $Z|_{P_j}$. Vamos aplicar o Teorema 1.78 considerando as trivializações $d\lambda$ -simpléticas induzidas por $Z|_{P_j}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Lembre que Γ_0 denota o conjunto dos furos $z_j \in \Gamma$ tais que $\mu_{CZ}(P_j, u_j)$ é par e Γ_1 denota o conjunto dos furos $z_j \in \Gamma$ tais que $\mu_{CZ}(P_j, u_j)$ é ímpar. Como as órbitas fechadas P_j , para $j \geq 2$, satisfazem $\mu_{CZ}(P_j, u_j) \geq 2$, pelo Teorema 1.77, vemos que

$$\begin{aligned} \mu^+ &\geq \mu^- + 4 - 2\#\Gamma_0 - \#\Gamma_1 \geq \mu^- + 4 - 2\#\Gamma_0 - 2\#\Gamma_1 \\ &\geq 2(\#\Gamma_0 + \#\Gamma_1 - 1) + 4 - 2(\#\Gamma_0 + \#\Gamma_1) = 2, \end{aligned}$$

onde μ^+, μ^- denotam a soma dos índices dos furos positivos e negativos, respectivamente.

Suponha agora que $\pi \cdot dw \equiv 0$. A demonstração a seguir é uma adaptação de um argumento em [22]. Pelo Teorema 1.59, existe uma órbita fechada $P = (x, T_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$ e polinômio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $p^{-1}(0) = \Gamma$ e $\tilde{w}(z) = F_P \circ p(z)$, onde F_P é a aplicação $\tilde{J}$ -holomorfa $F_P : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ definida por $F_P(e^{2\pi(s+it)}) = (Ts, x(T_{\min}t))$. Lembre que $z_1 = \infty$ e $\Gamma = \{z_2, \dots, z_n\}$. Para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, existe $k_j \in \mathbb{Z}_+^*$ tal que os períodos das órbitas fechadas $P_j = (x_j, T_j) \in \mathcal{P}^c(\lambda)$ satisfazem $T_j = k_j T_{\min}$. Além disso, pela Proposição C.6, temos que

$$T_1 = k_1 T_{\min} = \sum_{j \geq 2} k_j T_{\min}.$$

Apêndice C. Árvore de *bubbling-off*

Note que existe uma aplicação $u_1 : \mathbb{D} \rightarrow M$ tal que $u_1(\mathbb{D}) := \bigcup_{j \geq 2} u_j(\mathbb{D})$ cuja imagem é a união dos discos $u_j(\mathbb{D})$. Esta união induz um disco contínuo para P_1 . Nosso objetivo é calcular $\mu_{CZ}(P_1, u_1)$. Para $j \geq 2$, sejam $\Psi_j : x_{T_j}^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ trivializações $d\lambda$ -simpléticas induzidas por trivializações $d\lambda$ -simpléticas dos fibrados $u_j^* \xi \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Defina aplicações $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \text{Sp}(1))$ satisfazendo $\varphi_j(0) = \mathbb{1}$ e $\varphi_j(t) = \Psi_{j,t} \circ d\phi_{k_j T t}|_{\xi_{x_j(0)}} \circ (\Psi_{j,0})^{-1}$, onde $d\phi_{k_j T t}|_{\xi_{x_j(0)}} : \xi_{x_j(0)} \rightarrow \xi_{x_j(k_j T t)}$ é a aplicação fluxo linearizado restrita à ξ . Calcular $\mu_{CZ}(P_1, u_1)$ significa calcular $\mu_{CZ}(\hat{\varphi})$, onde $\hat{\varphi} \in C^\infty([0, T_1], \text{Sp}(1))$ é definida como:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_t &= \varphi_2(t), \text{ se } t \in [0, k_2 T] \\ \hat{\varphi}_t &= \varphi_3(t - k_2 T) \varphi_1(k_2 T), \text{ se } t \in [k_2 T, (k_2 + k_3) T] \\ &\vdots \\ \hat{\varphi}_t &= \varphi_2 \left(t - \left(\sum_{j \in \{2, \dots, n-1\}} k_j \right) T \right) \varphi_{n-1}(k_{n-1} T) \cdots \varphi_1(k_2 T), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

onde na última equação $t \in \left[\left(\sum_{j \in \{2, \dots, n-1\}} k_j \right) T, \left(\sum_{j \in \{2, \dots, n\}} k_j \right) T \right]$. Vamos calcular $\mu_{CZ}(\hat{\varphi})$ usando a noção de índice de Conley-Zehnder geométrico. Por simplicidade, considere $\hat{\varphi}_{T_1}(t) := \hat{\varphi}(T_1 t)$, para todo $t \in [0, 1]$. Note que $\hat{\varphi}_{T_1} \in C^\infty([0, 1], \text{Sp}(1))$. Lembre que existe a função suave $\theta_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\hat{\varphi}_{T_1}(t) e^{2\pi i s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta_1(t,s)}$ e a função variação $\Delta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Delta_1(s) = \frac{\theta_1(1,s) - 2\pi s}{2\pi}$. Seja $I(\hat{\varphi}_{T_1})$ o intervalo de variação dado pela imagem de Δ_1 , isto é, $I(\hat{\varphi}_{T_1}) := \{\Delta_1(s) : s \in [0, 1]\}$. Queremos provar que $I_1(\hat{\varphi}_{T_1}) \subset (1, +\infty)$. Para ver isto, vamos estudar o intervalo de variação das curvas φ_j , $j \in \{2, \dots, N\}$. Existem, para todo $j \in \{2, \dots, N\}$, funções suaves $\theta_j : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\varphi_j(t) e^{2\pi i s} \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta_j(t,s)}$, e $\Delta_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta_j(s) = \frac{\theta_j(1,s) - 2\pi s}{2\pi}$. Sejam $I(\varphi_j) := \{\Delta_j(s) : s \in [0, 1]\}$ os respectivos intervalos de variação. A noção de *índice de Conley-Zehnder geométrico* $\mu_{CZ}(\varphi_j)$ diz que

$$\mu_{CZ}(\varphi_j) = \begin{cases} 2k, & \text{se } k \in I(\varphi_j); \\ 2k + 1, & \text{se } I(\varphi_j) \subset (k, k + 1). \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Por hipótese, estamos assumindo que $\mu_{CZ}(\varphi_j) = \mu_{CZ}(P_j, u_j) \geq 2$. Disto concluímos que $I(\varphi_j) \subset (1/2, +\infty)$, para todo $j \in \{2, \dots, N\}$. Quando $\#\Gamma = 1$, então $\mu_{CZ}(\varphi_1) \geq 2$. No entanto, se $\#\Gamma \geq 2$, como cada furo acrescenta pelo menos $1/2$ ao intervalo de variação de $\hat{\varphi}_{T_1}$, significa que $I(\hat{\varphi}_{T_1}) \subset (1, +\infty)$, isto é, $\mu_{CZ}(P_1, u_1) = \mu_{CZ}(\hat{\varphi}_{T_1}) > 2$. ■

Como a base de $\mathfrak{F}$ é constituída por planos de energia finita $\tilde{w} = (d, w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ e $\mu_{CZ}(P, \bar{w}) \geq 2$, onde $\overline{\mathbb{C}}$ é a compactificação de $\mathbb{C}$ e $\bar{w}$ é a extensão contínua de w sobre $\overline{\mathbb{C}}$, o resultado anterior tem o seguinte corolário para o caso de uma árvore de *bubbling-off* induzida por uma sequência germinante.

Corolário C.10. *Seja $\tilde{v}_n$ uma sequência germinante com limite não-constante $\tilde{v}$ e $\mathfrak{F}$ uma árvore de bubbling-off associada a $\tilde{v}_n$ e $\tilde{v}$. Se $P = (x, T) \in \mathbb{O}_{\mathfrak{F}}$ e $u : \mathbb{D} \rightarrow M$ é o disco contínuo induzido por $\mathfrak{F}$, então $\mu_{CZ}(P, u) \geq 2$.*

Apêndice D

Fluxos geodésicos

Sejam S uma superfície difeomorfa a $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e g uma métrica Riemanniana em S . Considere a família de difeomorfismos $\phi_t : TS \rightarrow TS$ dada por

$$\phi_t(x, v) = (\gamma(t), \gamma'(t)),$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$, $v \in T_x S$ e γ é a geodésica satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. A família $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ e, portanto, define um fluxo em TS denominado *fluxo geodésico*. O campo G que gera o fluxo geodésico é chamado *campo geodésico*. A seguir, faremos algumas afirmações a respeito deste fluxo. Tais propriedades encontram-se verificadas em [40] e [55], referências estas que seguiremos nesta exposição e sugerimos ao leitor interessado nos detalhes.

Por abuso de notação, se $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TS$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, é uma curva no fibrado tangente, escrevemos $\gamma(t) = (\alpha(t), Z(t))$, para todo $t \in I$, onde $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma curva em S e $Z(t) \in T_{\alpha(t)} S$, para todo $t \in I$, é um campo de vetores sobre α . Começemos observando que o espaço tangente $T_{(x,v)} TS$, para todo $(x, v) \in TS$, se decompõe como

$$T_{(x,v)} TS = H(x, v) \oplus V(x, v),$$

onde $H(x, v)$ e $V(x, v)$ são denominados *subespaços horizontal e vertical*, respectivamente, ambos isomorfos a $T_x S$. Vamos construir primeiro o subespaço vertical $V(x, v) \subset T_{(x,v)} TS$, onde $(x, v) \in TS$. Fixe $(x, v) \in TS$, $w \in T_x S$ e considere a curva $\gamma_w(t) = (x, v + tw)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ em TS . Como $\dim T_x S = 2$, o conjunto $V(x, v)$ das curvas γ_w , $w \in T_x S$, é um subespaço de dimensão 2 em $T_{(x,v)} TS$ e a aplicação $N : T_x S \rightarrow V(x, v)$ dada por $w \mapsto \gamma'_w(0)$ é um isomorfismo. Note que, se $\pi : TS \rightarrow S$ é a projeção canônica $(x, v) \mapsto x$, então $V(x, v) = \ker d\pi_{(x,v)}$. Resta construir o subespaço horizontal $H(x, v) \subset T_{(x,v)} TS$. Novamente fixe $(x, v) \in TS$ e seja $\zeta \in T_{(x,v)} TS$. Considere a curva regular $\gamma_\zeta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TS$, $\epsilon > 0$, satisfazendo

$$\begin{cases} \gamma_\zeta(0) = (x, v), \\ \gamma'_\zeta(0) = \zeta. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Diremos que γ_ζ é uma *curva adaptada a ζ* . Uma vez que $V(x, v) = \ker d\pi_{(x, v)}$, assumamos $d\pi_{(x, v)}(\zeta) = w \neq 0$. Então, $\gamma_\zeta(t) = (\alpha(t), Z(t))$, onde $\alpha(t) \in S$ é uma curva regular com $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = w$, e $Z(t) \in T_{\alpha(t)}S$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, é um campo de vetores tangentes a S sobre α . Seja $Q_{(x, v)} : T_{(x, v)}TS \rightarrow T_xS$ a aplicação dada por

$$\zeta \mapsto \frac{DZ(t)}{dt} \Big|_{t=0} \in T_xS, \quad (\text{D.2})$$

onde $\frac{D}{dt}$ é a *derivada covariante* associada à metrica Riemanniana g em S , isto é, $\frac{DZ(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \nabla_{\alpha'(t)}Z(t) \Big|_{t=0}$ e ∇ é a *conexão Riemanniana* de g . Definimos $H(x, v) := \ker Q_{(x, v)}$. O subespaço $H(x, v) \subset T_{(x, v)}S$ também é isomorfo a T_xS . De fato, sejam $(x, v) \in TS$, $w \in T_xS$ não nulo e $\alpha(t) \in S$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma curva regular tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = w$. Seja $Z(t)$ o transporte paralelo de $v \in T_xS$ ao longo de α e defina a curva regular $\gamma(t) = (\alpha(t), Z(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. É imediato que a aplicação $M_{(x, v)} : T_xS \rightarrow H(x, v)$ dada por $M_{(x, v)}(w) = \gamma'(0)$ é injetora e, portanto, $\dim M_{(x, v)}(T_xS) = 2$. Disto segue que $M_{(x, v)}$ é um isomorfismo entre T_xS e $H(x, v)$. Desta forma, a aplicação $L_{(x, v)} : T_{(x, v)}TS \rightarrow T_xS \times T_xS$ definida como $\zeta \mapsto (d\pi_{(x, v)}(\zeta), Q_{(x, v)}(\zeta))$ é um isomorfismo. Note que $d\pi_{(x, v)} \circ M_{(x, v)} = \text{id}_{T_xS}$, donde segue que $d\pi_{(x, v)}|_{H(x, v)} : H(x, v) \rightarrow T_xS$ é a inversa de $M_{(x, v)} : T_xS \rightarrow H(x, v)$. Lembre que uma geodésica $\gamma_0 : I \rightarrow S$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, satisfaz $\frac{D\gamma'_0}{dt}(t) = 0$, para todo $t \in I$. Se $\gamma : I \rightarrow TS$ é definida como $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma'_0(t)) \in TS$, então $\gamma'(t) \in H(\gamma(t))$, para todo $t \in I$. Isto mostra que, na decomposição $T_{(x, v)}TS = H(x, v) \oplus V(x, v)$, o campo geodésico G é dado por $G(x, v) = (M_{(x, v)}(v), 0)$, para todo $(x, v) \in TS$. Como $d\pi(\gamma'(t)) = \gamma'_0(t)$, onde $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma'_0(t)) \in TS$, usaremos a identificação $G(x, v) = (v, 0)$, para todo $(x, v) \in TS$.

Os isomorfismos $H(x, v) \xrightarrow{M} T_xS$, $V(x, v) \xrightarrow{N} T_xS$ induzem métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_x^h$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_x^v$ em $H(x, v)$ e $V(x, v)$, respectivamente. Isto permite definir de maneira natural, tendo em vista a decomposição $T_{(x, v)}TS = H(x, v) \oplus V(x, v)$, uma métrica em $T_{(x, v)}TS$:

$$\langle \langle \zeta, \eta \rangle \rangle_{(x, v)} = \langle \zeta_h, \eta_h \rangle_x^h + \langle \zeta_v, \eta_v \rangle_x^v, \quad \text{para todo } (x, v) \in TS,$$

para todo $\zeta = (\zeta_h, \zeta_v)$, $\eta = (\eta_h, \eta_v) \in H(x, v) \oplus V(x, v)$. Esta métrica é denominada *métrica de Sasaki*. Usando novamente que $T_{(x, v)}TS = H(x, v) \oplus V(x, v)$, está bem-definida uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ dada por

$$\tilde{J}_{(x, v)}(\zeta_h, \zeta_v) = (-\zeta_v, \zeta_h), \quad \text{para todo } (x, v) \in TS \text{ e } (\zeta_h, \zeta_v) \in T_{(x, v)}TS,$$

A métrica de Sasaki e a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ induzem uma 2-forma Ω em TS satisfazendo

$$\Omega_{(x, v)}(\zeta, \eta) := \left\langle \left\langle \tilde{J}_{(x, v)}\zeta, \eta \right\rangle \right\rangle_{(x, v)} = \langle \zeta_h, \eta_v \rangle_x^v - \langle \zeta_v, \eta_h \rangle_x^h, \quad (\text{D.3})$$

para todo $(x, v) \in TS$. Note que Ω está bem-definida visto que $\tilde{J}_{(x, v)}(\zeta_h, \zeta_v) = (-\zeta_v, \zeta_h) \in H(x, v) \oplus V(x, v)$. É possível provar que a 2-forma Ω é uma forma simplética em TS (veja [55,

Apêndice D. Fluxos geodésicos

Proposição 1.24]). Considere a seguinte 1-forma α em TS

$$\alpha_{(x,v)}(\zeta) = \langle \langle \zeta, G(x, v) \rangle \rangle_{(x,v)} = \langle \zeta_h, v \rangle_x^h + \langle \zeta_v, 0 \rangle_x^v = \langle \zeta_h, v \rangle_x^h, \quad (\text{D.4})$$

para todo $(x, v) \in TS$. Como $d\pi(\zeta) = \zeta_h$, onde $\pi : TS \rightarrow S$ é a projeção canônica $(x, v) \mapsto x$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle_x^h$ é induzida pela métrica g através da identificação $H(x, v) \xrightarrow{M} T_x S$, podemos escrever

$$\alpha_{(x,v)}(\zeta) = g_x(v, d\pi(\zeta)), \quad \text{para todo } (x, v) \in TS \text{ e } \zeta \in T_{(x,v)}TS.$$

É possível verificar explicitamente (veja [55, Seção 1.3.3]) que $d\alpha = -\Omega$, onde Ω é a forma simplética definida em (D.3).

Estudaremos a seguir a restrição de α ao fibrado tangente unitário $SS := \{(x, v) \in TS : |v| = 1\}$, onde $|\cdot| = \sqrt{g(\cdot, \cdot)}$ é a norma induzida pela métrica g . É conhecido que o espaço tangente $T_{(x,v)}SS$ é um subespaço de dimensão 3 em $T_{(x,v)}TS$, para todo $(x, v) \in TS$, e é constituído pelos vetores $\zeta \in T_{(x,v)}TS$ tais que $g_x(Q_{(x,v)}(\zeta), v) = 0$, onde $Q_{(x,v)} : T_{(x,v)}TS \rightarrow T_x S$ é definida em (D.2) (veja [55, Exercício 1.28]). Considere a restrição de α ao fibrado unitário SS . É imediato verificar que $\alpha_{(x,v)}(G(x, v)) = 1$, para todo $(x, v) \in SS$, e

$$i_{G(x,v)}d\alpha_{(x,v)}(\zeta) = -(\Omega|_{SS})_{(x,v)}(G(x, v), \zeta) = \langle v, \zeta_v \rangle_x = 0,$$

para todo $(x, v) \in SS$ e $\zeta \in T_{(x,v)}SS$. Consequentemente, a restrição $\alpha|_{SS}$ é forma de contato em SS e o campo geodésico G é o campo de Reeb para $\alpha|_{SS}$.

Contactomorfismo entre fibrados tangentes unitários

Sejam $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a 2-esfera unitária canonicamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e g_0 a métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Denotamos $S_0^2 := (S^2, g_0)$. Seja $S \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$ uma superfície mergulhada munida da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Suponha que a curvatura de S é positiva. Seja g_E a métrica induzida em S pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Considere uma cópia da 2-esfera munida da métrica Riemanniana *pull-back* $\tilde{g} = \phi^*g_E$. Aqui $\phi : S^2 \rightarrow S$ é um difeomorfismo. Denotamos, por simplicidade, $S^2 := (S^2, \tilde{g})$. Nosso objetivo nesta subseção é construir um contactomorfismo entre os fibrados unitários de S_0^2 e S^2 . Este contactomorfismo será útil no Exemplo 2.3 do Capítulo 2.

Por um instante, vamos considerar uma superfície (Riemanniana) $S := (S^2, g)$, onde g é uma métrica Riemanniana. Neste contexto, g representa tanto g_0 quanto $\tilde{g}$. Seja T^*S o fibrado cotangente de S . A métrica g induz um isomorfismo $\mathcal{L} : TS \rightarrow T^*S$ entre TS e T^*S dado por $(x, v) \xrightarrow{\mathcal{L}} (x, g_x(v, \cdot))$. Em T^*S está definida uma 1-forma canônica

$$(\alpha_{\text{taut}})_{(x,p)}(\zeta) = p(d\pi_{(x,p)}^*(\zeta)), \quad \text{para todo } (x, p) \in T^*S \text{ e } \zeta \in T_{(x,p)}T^*S,$$

onde $\pi^* : T^*S \rightarrow S$ é a projeção canônica $(x, p) \mapsto x$. Sejam $(x, v) \in TS$ e $(x, p) = \mathcal{L}(x, v) \in T^*S$,

então

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^* \alpha_{\text{taut}})|_{(x,v)}(\zeta') &= (\alpha_{\text{taut}})_{(x,p)}(d\mathcal{L}_{(x,v)}(\zeta')) = p(d\pi_{(x,p)}^*(d\mathcal{L}_{(x,v)}(\zeta'))) \\ &= p(d\pi_{(x,v)}(\zeta')) = g_x(v, d\pi_{(x,v)}(\zeta')) = \alpha_{(x,v)}(\zeta'), \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde $\pi = \pi^* \circ \mathcal{L}$ e $\alpha_{(x,v)}(\zeta') = g_x(v, d\pi(\zeta'))$ é a 1-forma definida em (D.4). Note que a métrica g induz uma métrica g^* em T^*S satisfazendo $g^*(p, q) = g(\mathcal{L}^{-1}(p), \mathcal{L}^{-1}(q))$. Defina o fibrado cotangente unitário $S^*S := \{(x, p) \in T^*S : |p| = 1\}$, onde $|\cdot| := \sqrt{g^*(\cdot, \cdot)}$. É natural considerar a restrição $\mathcal{L}|_{SS} : SS \rightarrow S^*S$. Note que, pela definição da cométrica g^* , a restrição $\mathcal{L}|_{SS}$ está bem definida. Deste modo, (D.5) implica que $\mathcal{L}^*(\alpha_{\text{taut}}|_{S^*S}) = \alpha|_{SS}$ e, portanto, a restrição $\mathcal{L}|_{SS} : SS \rightarrow S^*S$ é um contactomorfismo. Para fixar notação, considere os seguintes contactomorfismos: $\mathcal{L}_0|_{SS_0^2} : TS_0^2 \rightarrow T^*S_0^2$, $\mathcal{L}|_{SS^2} : TS^2 \rightarrow T^*S^2$, onde S_0^2 e S^2 são fixadas no início desta subseção. As aplicações $\mathcal{L}_0|_{SS_0^2}$ e $\mathcal{L}|_{SS^2}$ serão úteis na construção a seguir.

Nosso próximo passo, é construir um contactomorfismo entre S^*S^2 e $S^*S_0^2$. Considere o seguinte difeomorfismo $\Phi : S^*S^2 \rightarrow S^*S_0^2$ dado por

$$(x, v) \mapsto \left(x, \frac{v}{\sqrt{g_0^*(v, v)}} \right).$$

Como a forma de contato $\alpha_{\text{taut}}|_{S^*S_0^2}$ em $S^*S_0^2$ é dada por

$$(\alpha_{\text{taut}}|_{S^*S_0^2})_{(x,p)}(\zeta') = p(d\pi_{(x,p)}^*(\zeta')), \text{ para todo } \zeta' \in T_{(x,p)}S^*S_0^2,$$

onde $\pi^* : S^*S_0^2 \rightarrow S^2$ é a projeção $(x, p) \mapsto x$, segue que

$$\begin{aligned} (\Phi^* \alpha_{\text{taut}}|_{S^*S_0^2})_{(x,p)}(\zeta) &= \Phi^* p(d\pi_{(x,p)}^*(\zeta)) \\ &= \frac{p}{\sqrt{g_0^*(p, p)}} \left(d\pi_{\left(x, \frac{p}{\sqrt{g_0^*(p, p)}}\right)}^* \circ d\Phi(\zeta) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_0^*(p, p)}} p(d\tilde{\pi}_{(x,p)}^*(\zeta)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\pi}^* := \pi^* \circ \Phi : S^*S^2 \rightarrow S^2$ é a projeção $(x, q) = (x, \Phi(p)) \mapsto x$. Como $(\alpha_{\text{taut}}|_{S^*S^2})_{(x,p)}(\zeta) = p(d\tilde{\pi}_{(x,p)}^*(\zeta))$, então Φ é um contactomorfismo satisfazendo

$$(\Phi^* \alpha_{\text{taut}}|_{S^*S_0^2})_{(x,p)} = \frac{1}{\sqrt{g_0^*(p, p)}} (\alpha_{\text{taut}}|_{S^*S^2})_{(x,p)}.$$

Consequentemente, a composição

$$\Psi := (\mathcal{L}_0|_{SS_0^2})^{-1} \circ \Phi \circ (\mathcal{L}|_{SS^2}) : SS^2 \rightarrow SS_0^2 \quad (\text{D.6})$$

é um contactomorfismo entre os fibrados tangentes unitários SS^2 e SS_0^2 .

D.1 Cálculo de ρ de órbitas fechadas em SS^2

Seja $S \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$ uma superfície mergulhada munida da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Suponha que a curvatura de S é positiva. Denote por $\vec{n}$ o campo unitário e normal a $S \subset \mathbb{R}^3$ e seja $v^\perp = \vec{n} \wedge v \in T_x S$. Já mencionamos que

$$T_{(x,v)}SS = \{\zeta \in T_{(x,v)}TS : \langle v, Q_{(x,v)}(\zeta) \rangle = 0\}, \text{ para todo } (x, v) \in SS, \quad (\text{D.7})$$

onde $Q_{(x,v)} : T_{(x,v)}TS \rightarrow T_x S$ é definida em (D.2). Em particular, $H(x, v) \subset T_{(x,v)}SS$. A parte vertical $V(x, v)$ intersecta $T_{(x,v)}SS$ em um subespaço de dimensão 1 gerado por $X_1(x, v) := N_{(x,v)}(v^\perp) \in V(x, v)$, onde N é o isomorfismo $N : T_x S \rightarrow V(x, v)$ construído no início deste apêndice. Por simplicidade, usando a identificação induzida por N , denotamos $X_1 = (0, v^\perp)$. De modo análogo, pela identificação dada pelo isomorfismo M , escrevemos $(v, 0), (v^\perp, 0) \in H(x, v)$. Note que $(v, 0), (v^\perp, 0)$ são ortogonais em relação à métrica de Sasaki. Disto segue que $\{X_1 = (0, v^\perp), X_2 = (v^\perp, 0), X_3 = (v, 0)\}$ é uma base ortonormal para $T_{(x,v)}SS$ munida da métrica de Sasaki. Repare que $X_3 = (v, 0)$ é o campo geodésico. Lembre que a 1-forma $\alpha_{(x,v)}(\zeta) = \langle v, d\pi(\zeta) \rangle_x$, onde $\pi : SS \rightarrow S$ é a projeção $(x, v) \mapsto x$, é forma de contato em SS . Considere o subfibrado ξ de TSS dado por $\xi = \text{span}\{X_1, X_2\}$. É imediato verificar que $\alpha|_\xi \equiv 0$, $d\alpha(X_1, X_2) = 1$ e, portanto, $\{X_1, X_2\}$ é uma base simplética e gera a estrutura de contato $\ker \alpha|_{SS}$. Note que $\{X_1, X_2\}$ define uma trivialização global da estrutura de contato $\xi = \ker \alpha|_{SS}$.

A seguir, apresentamos uma construção que permite calcular o número de rotação transversal, em relação à trivialização global induzida pelo par $\{X_1, X_2\}$, de uma órbita fechada do campo geodésico (Reeb) em SS . Começaremos observando que a linearização $d\phi_t : TTS \rightarrow TTS$ do fluxo geodésico ϕ é dada por

$$(d\phi_t)_{(x,v)}\zeta = \left(J_\zeta(t), \frac{DJ_\zeta}{dt}(t) \right) \in H(x, v) \oplus V(x, v), \quad (\text{D.8})$$

para todo $(x, v) \in TS$ e $\zeta \in T_{(x,v)}TS$, onde $J_\zeta(t)$ é um *campo de Jacobi* ao longo de uma geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, $\epsilon > 0$, satisfazendo $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v$. Veja [40, 55] para a prova da decomposição em (D.8). Repare que o campo de Jacobi tem as condições iniciais $J_\zeta(0) = d\pi_{(x,v)}\zeta$ e $\frac{DJ_\zeta}{dt}(0) = Q_{(x,v)}(\zeta)$. O *campo de Jacobi* satisfaz a equação (de Jacobi)

$$\frac{D^2 J_\xi}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J_\xi(t))\gamma'(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (\text{D.9})$$

onde R denota o *tensor de curvatura* em S . Lembre que J_ξ é normal à geodésica γ se $\langle J_\xi(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, para todo t no domínio de γ . É conhecido que J_ξ é normal se e somente se $\langle J_\xi(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \frac{DJ_\xi}{dt}(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Considere agora o fluxo geodésico $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ restrito a SS . Se $(x, v) \in SS$ e $y_0 \in \text{span}\{X_1(x, v), X_2(x, v)\} \subset T_{(x,v)}SS$, então $\langle J_{y_0}(0), \gamma'(0) \rangle = \langle d\pi_{(x,v)}(y_0), v \rangle = \langle av^\perp, v \rangle = 0$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $\langle \frac{DJ_{y_0}}{dt}(0), \gamma'(0) \rangle = \langle Q_{(x,v)}(y_0), v \rangle = 0$, visto que $y_0 \in T_{(x,v)}SS$ e $T_{(x,v)}SS$ é

dado por (D.7). Deste modo, o campo de Jacobi J_{y_0} para algum $y_0 \in \text{span}\{X_1(x, v), X_2(x, v)\} \subset T_{(x, v)}SS$ é normal.

Seja $(x, v) \in SS$ e $y_0 \in \xi = \text{span}\{X_1(x, v), X_2(x, v)\} \subset T_{(x, v)}SS$. O fluxo geodésico linearizado ao longo de uma solução geodésica $t \in (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \gamma = (\gamma_0(t), \gamma'_0(t)) \in SS$, $\gamma(0) = (x, v)$, tem a seguinte forma

$$y(t) = (d\phi_t)_{(x, v)} y_0. \quad (\text{D.10})$$

Como ξ é invariante pelo fluxo geodésico ϕ_t , podemos decompor (D.10) em

$$y(t) = a_1(t)X_1(\beta(t)) + a_2X_2(\beta(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (\text{D.11})$$

onde $a_1, a_2 : (-\epsilon, \epsilon) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$. Comparando (D.8), (D.10) e (D.11), vemos que

$$\begin{aligned} J_{y_0}(t) &= a_2(t)\gamma'(t)^\perp, \\ \frac{DJ_{y_0}}{dt}(t) &= a_1(t)\gamma'(t)^\perp. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Lembre que J_{y_0} é normal à geodésica γ . Então

$$\frac{D^2J_{y_0}}{dt}(t) = -K(\gamma(t))J_{y_0}(t). \quad (\text{D.13})$$

Como $\frac{D}{dt}\gamma'(t) = \frac{D}{dt}\gamma'(t)^\perp = 0$, combinando (D.12) e (D.13), temos que o sistema de EDO's

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K(\gamma(t)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{D.14})$$

rege o fluxo geodésico linearizado, ao longo de uma solução geodésica, em relação à trivialização global da estrutura de contato dada pelos campos X_1 e X_2 . Sejam (ρ, θ) coordenadas polares em $\xi = \text{span}\{X_1, X_2\}$ e $(\rho(t), \theta(t))$ funções tais que $a_1(t) = \rho(t) \cos(\theta(t))$ e $a_2(t) = \rho(t) \sin(\theta(t))$. Concluimos que as soluções não-triviais de (D.14) satisfazem

$$\dot{\theta}(t) = 1 + (K(\gamma(t)) - 1) \sin^2 \theta(t). \quad (\text{D.15})$$

Suponha que $L = (x, T)$ seja uma órbita fechada do campo geodésico (Reeb) em SS . Então a variação angular Δ_θ do fluxo linearizado na estrutura de contato ao longo de uma solução geodésica é dada pela seguinte fórmula

$$\Delta_\theta(T) := \theta(T) - \theta(0) = \int_0^T \dot{\theta}(t) dt = \int_0^T (1 + (K(\gamma(t)) - 1) \sin^2 \theta(t)) dt. \quad (\text{D.16})$$

Note que a dependência da condição inicial $y_0 \in \text{span}\{X_1(x, v), X_2(x, v)\} \subset T_{(x, v)}SS$ está somente em $\theta(t)$, visto que $a_1(t) = \rho(t) \cos(\theta(t))$ e $a_2(t) = \rho(t) \sin(\theta(t))$. Considerando iteradas de L e o correspondente Δ_θ , é possível calcular o número de rotação transversal $\rho(L)$. Isto é o que fazemos no Exemplo 2.3 do Capítulo 2.

Apêndice E

Perturbações de formas de contato: não-degenerescência

Seja $M_1 = S^1 \times \mathbb{D}$ um toro sólido mergulhado numa 3-variedade fechada M . Suponha que λ é uma forma de contato definida em M tal que a restrição de λ a $\overline{M_1^c} = M \setminus \mathring{M}_1$ é não-degenerada. Neste apêndice, vamos provar que podemos perturbar λ sobre $\mathring{M}_1$ de maneira que a nova forma de contato seja não-degenerada sobre M . Este fato já é conhecido e foi usado, por exemplo, na prova da *Conjectura de Weinstein*, no caso *tight*, para toros sólidos apresentada por Etnyre, Ghrist em [10]. A demonstração apresentada aqui é distinta daquela em [10]. Os argumentos a seguir são uma adaptação daqueles encontrados na prova do Lema 2 em [4].

Começamos introduzindo uma noção equivalente de não-degenerescência para as órbitas fechadas. Essencialmente, vamos relacionar órbitas fechadas de um fluxo com pontos fixos de um difeomorfismo. Sejam $\Phi : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e $\Gamma(\Phi) := \{(p, q) \in M \times M : q = \Phi(p)\}$ o gráfico de Φ . Podemos considerar a aplicação $\Gamma_\Phi : M \rightarrow M \times M$ dada por $p \mapsto (p, \Phi(p))$. Repare que se $p \in M$ é um ponto fixo de Φ , então $T_p \Gamma_\Phi = \{(u, v) \in T_p M \times T_p M : v = \Phi_*(u)\}$, ou seja, o espaço tangente $T_p \Gamma_\Phi$ coincide com o gráfico da diferencial Φ_* . Denote por $\Delta_M = \{(q, q) \in M \times M : q \in M\}$ a diagonal de $M \times M$. Como Φ é um difeomorfismo, ou $\Gamma(\Phi) \pitchfork \Delta_M$ e, neste caso, $T_p \Gamma_\Phi \oplus T_p \Delta_M$, para todo $p \in \Gamma(\Phi) \pitchfork \Delta_M$, ou existe $u \in T_p M$ tal que $u = \Phi_*(u)$, de modo que a aplicação $\Phi_* - \text{id} : T_p M \rightarrow T_p M$ não é injetiva. Isto significa que 1 é autovalor de Φ_* . Lembre que uma órbita fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é dita não-degenerada se o fluxo de Reeb $\phi_T : M \rightarrow M$ não possui 1 como autovalor de $(\phi_T)_*$, onde $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o fluxo de Reeb. Pelo que acabamos de observar, $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é não-degenerada se e somente se $\Gamma(\phi_T) \pitchfork \Delta_M$, onde $\Gamma(\phi_T)$ é o gráfico de ϕ_T .

Usando esta noção equivalente de não-degenerescência, será possível eliminar, através de perturbações da forma de contato, as órbitas fechadas do fluxo de Reeb $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ que são degeneradas. Por abuso de notação, considere $\phi_N : [0, N] \times M \rightarrow M$ o fluxo de Reeb restrito a $[0, N] \times M$. Seja $\Gamma(\phi_N) \subset [0, N] \times M \times M$ o gráfico de ϕ_N tal que $(t, p, q) \in \Gamma(\phi_N)$ se e somente se $\phi_N(t, p) = q$. A estratégia de demonstração do lema a seguir é, fixada uma órbita

fechada $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ (degenerada), perturbar a forma de contato λ numa vizinhança de P de modo que, após a perturbação, P seja uma órbita fechada não-degenerada. Observe que isto significa eliminar pontos de não-transversalidade entre $\Gamma(\phi_N)$ e Δ_M .

Lema E.1. *Seja λ uma forma de contato definida na 3-variedade fechada e conexa M . Seja $M_1 = S^1 \times \mathbb{D} \hookrightarrow M$ um toro sólido mergulhado em M e suponha que λ é não-degenerada em $\overline{M^c} = M \setminus \mathring{M}_1$. Suponha, além disso, que o bordo $\partial \overline{M^c} = \partial M_1$ é invariante pelo fluxo de Reeb. Então existe uma função $f : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $f|_{\overline{M^c}} \equiv c$, para algum $c \in \mathbb{R}_+^*$, e tal que $f\lambda$ é forma de contato não-degenerada em M .*

Demonstração. Fixe $N \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $x \in \Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$, $x = (T_0, p_0, p_0)$, um ponto não-transversal. Seja $P_0 = (x_0, T_0)$ a órbita fechada de Reeb tal que $x_0(T_0) = x_0(0) = p_0$. Seja (U, Φ) um tubo de Martinet para $P_0 = (x_0, T_0)$, isto é, sejam $U \subset M$ uma vizinhança aberta de $x_0(\mathbb{R})$, $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ uma bola aberta de raio $r > 0$ centrada na origem e $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ um difeomorfismo satisfazendo $\Phi(x_0(T_{\min}t)) = (t, 0, 0)$, onde $T_{\min}$ é o período mínimo de x_0 , e $\Phi^*(h\lambda_0) = \lambda$, onde (θ, x, y) são coordenadas em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$, $\lambda_0 = d\theta + xdy$ e $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}_+^*$ satisfaz $h|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv T_{\min}$ e $dh|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv 0$. Começamos estudando o fluxo linearizado da forma de contato $\bar{\lambda} := h\lambda_0$. Denotamos $\bar{\xi} = \ker \bar{\lambda}$ e $\{\bar{\phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o fluxo de Reeb de $\bar{\lambda}$. Como $\bar{\phi}_t$ satisfaz $\frac{d}{dt}\bar{\phi}_t(p) = X_{\bar{\lambda}}(\bar{\phi}_t(p))$, para todo $(t, p) \in [0, N] \times M$, verificamos que

$$\frac{d}{dt}d\bar{\phi}_t(p) = d\left(\frac{d}{dt}\bar{\phi}_t(p)\right) = dX_{\bar{\lambda}}(\bar{\phi}_t(p)) \cdot d\bar{\phi}_t(p) \quad (\text{E.1})$$

isto é, $d\bar{\phi}_t(p)$ é a solução do sistema linear de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d}{dt}\vartheta(t, p) = dX_{\bar{\lambda}} \cdot \vartheta(t, p) \quad (\text{E.2})$$

com condição inicial $\vartheta(0, p) = \mathbb{1}$. Como $e^{dX_{\bar{\lambda}}t}$ é solução deste sistema, então $d\bar{\phi}_t(p) = e^{dX_{\bar{\lambda}}t}$. Lembre que o fluxo linearizado $d\bar{\phi}_t$ deixa a decomposição $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}X_{\bar{\lambda}} \oplus \bar{\xi}$ invariante ao longo de uma linha de fluxo de Reeb. Em outras palavras,

$$d\bar{\phi}_t(t, 0, 0) = e^{dX_{\bar{\lambda}}(t, 0, 0)t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(t) \end{pmatrix}.$$

Lembre que o campo de Reeb para $h\lambda_0$, nas coordenadas do tubo de Martinet, é dado por

$$X_{\bar{\lambda}}(\theta, x, y) = \frac{1}{h(\theta, x, y)^2} \begin{pmatrix} h(\theta, x, y) + xh_x(\theta, x, y), h_y(\theta, x, y) - xh_\theta(\theta, x, y), -h_x(\theta, x, y) \end{pmatrix}.$$

Fixe $\theta_0 \in S^1$ e considere a aplicação $Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{h(\theta_0, x, y)^2} \begin{pmatrix} h_y(\theta_0, x, y) - xh_\theta(\theta_0, x, y), -h_x(\theta_0, x, y) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$dY(\theta_0, 0, 0) = \begin{pmatrix} h_{xy}(\theta_0, 0, 0) & h_{yy}(\theta_0, 0, 0) \\ -h_{xx}(\theta_0, 0, 0) & -h_{xy}(\theta_0, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

Como $d\bar{\phi}_t$ preserva $\mathbb{R}X_{\bar{\lambda}} \oplus \bar{\xi}$ sobre a órbita fechada $P_0 = (x_0, T_0)$, então, nas coordenadas acima, o fluxo linearizado $d\bar{\phi}_{T_0 t}|_{\bar{\xi}_{x_0(0)}} : \bar{\xi}_{x_0(0)} \rightarrow \bar{\xi}_{x_0(T_0 t)}$ restrito à estrutura de contato é dado por

$$d\bar{\phi}_{T_0 t}|_{\bar{\xi}_{x_0(0)}} = e^{dY(\theta_0, 0, 0)t} = e^{-J\text{Hess}(h)t}, \quad (\text{E.3})$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a estrutura complexa canônica em $\mathbb{R}^2$. Como $P_0 = (x_0, T_0)$ é órbita fechada degenerada, existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $d\bar{\phi}_{T_0}|_{\bar{\xi}_{x_0(0)}}(u) = u$ e, pela equação (E.3), temos $\det(\text{Hess}(h)) = 0$.

A seguir, vamos perturbar $h\lambda_0$ por uma função $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de maneira que $P_0 = (x_0, T_0)$ seja órbita fechada não-degenerada. Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $df|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}} \equiv 0$ e com suporte numa vizinhança aberta pequena de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$. Considere a forma de contato $\bar{\lambda}_{\epsilon, f} = (1 + \epsilon f)h\lambda_0$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Denote por $\bar{\phi}_{\epsilon, f}$ o fluxo de Reeb de $\bar{\lambda}_{\epsilon, f}$. É imediato verificar que o campo de Reeb¹ $X_{\bar{\lambda}_{\epsilon, f}}$ é

$$X_{\bar{\lambda}_{\epsilon, f}}(\theta, x, y) = \frac{1}{(h(1 + \epsilon f))^2} \begin{bmatrix} h(1 + \epsilon f) + xh_x + \epsilon xhf_x + \epsilon xh_x f \\ h_y + \epsilon hf_y + \epsilon h_y f - xh_z - \epsilon xhf_z - \epsilon xfh_z \\ -h_x - \epsilon hf_x - \epsilon h_x f \end{bmatrix}.$$

Note que $X_{\bar{\lambda}_{\epsilon, f}}(\theta, 0, 0) = \frac{1}{(h(1 + \epsilon f))}(1, 0, 0)$. Novamente, fixe $\theta_0 \in S^1$ e defina $Y_{\epsilon, f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{(h(1 + \epsilon f))^2} (h_y + \epsilon hf_y + \epsilon h_y f - xh_z - \epsilon xhf_z - \epsilon xfh_z, -h_x - \epsilon hf_x - \epsilon h_x f).$$

Então,

$$dY_{\epsilon, f}(\theta_0, 0, 0) = \begin{pmatrix} h_{xy} & h_{yy} \\ -h_{xx} & -h_{xy} \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon f)^2} \begin{pmatrix} f_{xy} & f_{yy} \\ -f_{xx} & -f_{xy} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$dY_{\epsilon, f}(\theta_0, 0, 0) = -J\text{Hess}(h) - \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon f)^2} J\text{Hess}(f).$$

Em outras palavras, a inclusão do termo ϵf em $(1 + \epsilon f)h\lambda_0$ corresponde ao termo adicional $-\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon f)^2} J\text{Hess}(f)$ no fluxo linearizado. Escolhendo f suficientemente próximo da função constante $p \in M \mapsto 0 \in \mathbb{R}$, vemos que $\det(dY_{\epsilon, f}(\theta_0, 0, 0)) \neq 0$, ou seja, P_0 é órbita fechada não-degenerada. Como o suporte de f está contido numa vizinhança aberta pequena de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{(0, 0)\}$, podemos compor f com Φ , onde Φ é o difeomorfismo do tubo de Martinet, e considerar uma função suave $f_P : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ que coincide com $f \circ \Phi^{-1}$ em U e é constante

¹Para simplificar a notação, deixamos as variáveis subentendidas.

igual a 0 em $U^c = M \setminus U$. Observe que podem existir, após a perturbação acima, órbitas fechadas distintas de P_0 e com período $T \leq N$ contidas em U . Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, estas órbitas fechadas com período $T \leq N$ podem ser vistas como perturbações de órbitas fechadas $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(h\lambda_0)$ com período $T' \leq N$. De fato, suponha que exista uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que $(1 + \epsilon_n f)h\lambda_0$ admite órbitas fechadas $P_n(x_n, T_n) \in \mathcal{P}((1 + \epsilon_n f)h\lambda_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com período $T_n \leq N$ contidas em U . O *Teorema de Ascoli-Arzelà* implica que existem subsequências $n_j \rightarrow \infty$, T_{n_j} tal que $T_{n_j} \rightarrow T'$, para algum $0 < T' \leq N$, e x_{n_j} tal que $x_{n_j}(T_{n_j} \cdot) \rightarrow x'(T' \cdot)$, onde $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(h\lambda)$, na topologia usual de $C^\infty(S^1, M)$. Isto significa que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, *não são criadas novas órbitas fechadas* pela perturbação, na verdade, as órbitas fechadas contidas em U podem ser entendidas como perturbações de órbitas fechadas de $X_{h\lambda_0}$, isto é, de órbitas fechadas que já existiam antes da perturbação. Desta forma, não precisamos nos preocupar com o aparecimento (sem controle) de novas órbitas fechadas a cada nova perturbação. A construção acima mostra que o ponto $x \in \Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$, $x = (T_0, p_0, p_0)$, fixado no início da demonstração é agora um ponto de transversalidade. Isto nos diz que existe uma vizinhança aberta U_x de $x \in \Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$ tal que todas as órbitas fechadas com período menor ou igual a N passando por U_x são não-degeneradas.

Podemos repetir o procedimento acima para todos os pontos de não-transversalidade entre $\Gamma(\phi_N)$ e $[0, N] \times \Delta_M$. Observe que os pontos $x \in \Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$, $x = (T_0, p_0, p_0)$, são tais que $p_0 \notin \partial M_1$. Isto é consequência da hipótese de $\lambda|_{M \setminus M_1}$ ser não-degenerada. Portanto, as perturbações, tais como acima, são realizadas no interior de M_1 . Note também que $\Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$ é compacto, de modo que existe uma subcobertura finita formada por U_{x_i} , $x_i \in \Gamma(\phi_N) \cap [0, N] \times \Delta_M$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja $g_i = 1 + \epsilon_i f_i$, $\epsilon_i \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno, a função que realiza a perturbação correspondente ao ponto x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Considere o espaço R gerado pelas combinações lineares das funções g_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, isto é,

$$R := \text{span} \{g_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*) : i \in \{1, \dots, n\}\}. \quad (\text{E.4})$$

Se $g \in R$, denote por $\{\phi_t^g\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo de Reeb associado à forma de contato $g\lambda$. Pela construção acima, dado $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ pequeno, o conjunto

$$\Gamma_{\lambda, R} := \{(t, p, q) \in \mathbb{R}^+ \times M \times M : \phi_t^g(p) = q, \ g \in R, \ \|g\|_\infty < \delta\} \quad (\text{E.5})$$

é transversal à diagonal $[0, N] \times \Delta_M$. Considere a aplicação $\Pi : \Gamma_{\lambda, R} \cap [0, N] \times \Delta_M \rightarrow R$ dada por $(t, p, q) \mapsto g$, onde $g \in R$ é tal que $\phi_t^g(p) = q$. Pelo *Teorema de Sard*, existe g_N arbitrariamente próxima da função nula que é valor regular de Π . Deste modo, as órbitas fechadas $P = (x, T) \in \mathcal{P}(g_N \lambda)$ com $T \leq N$ são não-degeneradas. Por fim, a noção de transversalidade nos mostra que o conjunto Ω_N das formas de contato α cujas órbitas fechadas $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\alpha)$ com período $T \leq N$ são não-degeneradas é aberto. O *Teorema de Sard* mostra também que Ω_N é denso. Portanto, o *Teorema de Baire* implica que $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \Omega_N$ é não-vazio. ■

Referências Bibliográficas

- [1] C. Abbas, H. Hofer. *Holomorphic Curves and Global Questions in Contact Geometry*, http://math.berkeley.edu/~simic/Home_page/Hofer_book.pdf, (2006).
- [2] K. L. Baker, J. B. Etnyre. *Rational Linking and contact geometry*. Perspectives in analysis, geometry, and topology, 19 - 37, Progr. Math., 296, Birkhauser/Springer, New York, (2012).
- [3] A. Banyaga, D. Hurtubise. *Lectures on Morse homology*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, Boston, (2004).
- [4] F. Bourgeois. *Introduction to Contact Homology*. Summer School in Berder: Holomorphic curves and contact topology, <http://math.mit.edu/conferences/geometryworkshop/references/bourgeois-introduction-to-contact-homology.pdf>. (2003).
- [5] B. Bramham, H. Hofer. *First steps towards a symplectic dynamics*. Surveys in Differential Geometry, **17**, (2012), 127-178.
- [6] G. Contreras, F. Oliveira. *C^2 -densely the 2-sphere has an elliptic closed geodesic*. Erg. Th. and Dyn. Sys., **24**, (2004), 1395-1423.
- [7] D. Dragnev. *Fredholm theory and transversality for noncompact pseudoholomorphic maps in symplectizations*. Comm. Pure Appl. Math., **57**, (2004), no. 6, 726-763.
- [8] Y. Eliashberg. *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **42**, (1992), 165-192.
- [9] Y. Eliashberg, H. Hofer. *A Hamiltonian characterization of the three-ball*. Diff. Integral Equations, **7**, (1994), 1303-1324.
- [10] J. Etnyre, R. Ghrist. *Contact topology and hydrodynamics II: Solid tori*. Ergod. Thy. e Dyn. Sys., **22**, (2002), no. 3, 819-833.
- [11] J. Franks. *Area-preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero*. New York J. Math., **2** (1996), 1-19.
- [12] H. Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge studies in advanced Mathematics, Cambridge University Press, (2008).

- [13] D. Gilbarg, N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin, (2001).
- [14] M. Gromov. *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. Math., **82**, (1985), 307-347.
- [15] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1974).
- [16] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>. (2001).
- [17] A. Hatcher. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mdownloads.html>. (2007).
- [18] G. Hector, U. Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations, Part A*. Aspects of Mathematics, Vol E1. Vieweg, Braunschweig, (1981).
- [19] H. Hofer. *Pseudoholomorphic curves and symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three*. Invent. Math., **114**, (1993), 515-563.
- [20] H. Hofer, M. Kriener. *Holomorphic curves in contact geometry*. Proceedings of Symposia in Pure Math.. Differential Equations, La Pietra, Conference on Differential Equations, marking the 70th birthday of Peter Lax and Louis Nirenberg, **65**, (1996), 77-132.
- [21] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *A characterization of the tight three sphere*. Duke Math. J., **81**, (1995), no. 1, 159-226.
- [22] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Correction to: A characterization of the tight three sphere*. Duke Math. J., **89**, (1997), no. 3, 603-617.
- [23] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *A characterization of the tight three sphere II*. Comm. Pure Appl. Math., **55**, (1999), no. 9, 1139-1177.
- [24] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics*. Ann. Math., **157**, (2003), 125-255.
- [25] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations I: Asymptotics*. Ann. Inst. H. Poincaré e Anal. Non Linéaire, **13**, (1996), 337-379.
- [26] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations II: Embedding controls and algebraic invariants*. Geom. Funct. Anal., **5**, (1995), no. 2, 270-328.
- [27] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations III: Fredholm theory*. Topics in nonlinear analysis, Birkhäuser, Basel, (1999), 381-475.

- [28] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations IV: Asymptotics with degeneracies*. Contact and symplectic geometry (Cambridge, 1994), 78-117. Publications of the Newton Institute, **8**. Cambridge University Press, Cambridge, (1996).
- [29] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Pseudoholomorphic curves and dynamics in three dimensions*. Handbook of dynamical systems, 1A, North-Holland, Amsterdam, (2002), 1129-1188.
- [30] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *The dynamics of strictly convex energy surfaces in $\mathbb{R}^4$* . Ann. of Math., **148**, (1998), 197-289.
- [31] H. Hofer, K. Wysocki, E. Zehnder. *Unknotted periodic orbits for Reeb flows on the three-sphere*. Topol. Methods Nonlinear Anal., **7**, (1996), 219-244.
- [32] H. Hofer, E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, (1994).
- [33] U. L. Hryniewicz. *Fast finite-energy planes in symplectizations and applications*. Trans. Amer. Math. Soc., **364**, (2012), 1859-1931.
- [34] U. L. Hryniewicz. *Systems of global surfaces of section for dynamically convex Reeb flows the 3-sphere*, (2013), a ser publicado em *Journal of Symplectic Geometry*.
- [35] U. L. Hryniewicz, J. Licata, Pedro. A. S. Salomão. *A dynamical characterization of universally tight lens spaces*, (2013), a ser publicado em *Proceedings of the London Mathematical Society*.
- [36] U. L. Hryniewicz, A. Momin, Pedro. A. S. Salomão. *A Poincare-Birkhoff theorem for tight Reeb flows on S^3* , (2012), a ser publicado em *Inventiones Mathematicae*.
- [37] U. L. Hryniewicz, Pedro. A. S. Salomão. *Global properties of tight Reeb flows with applications to Finsler geodesic flows on S^2* . Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **154**, (2013), 1-27.
- [38] U. L. Hryniewicz, Pedro. A. S. Salomão. *Introdução à Geometria Finsler*. Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 29º Colóquio Brasileiro de Matemática, (2013).
- [39] U. L. Hryniewicz, Pedro. A. S. Salomão. *On the existence of disk-like global sections for Reeb flows on the tight 3-sphere*. Duke Math. J., **160**, (2011), no. 3, 415-465.
- [40] U. L. Hryniewicz, Pedro. A. S. Salomão. *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica Hamiltoniana*. Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, (2009).
- [41] C. Hummel. *Gromov's compactness theorem for pseudoholomorphic curves*. Progress in Mathematics, Birkhäuser, **151**, (1997).

- [42] M. Hutchings, C. H. Taubes. *The Weinstein conjecture for stable Hamiltonian structures*. Geometry and Topology, **13**, (2009), 901-941.
- [43] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Graduate texts in math. Springer, New York, (2013).
- [44] S. Makar-Limanov. *Tight contact structures on solid tori*. Trans. Am. Math. Soc., **350**, (1998), 1013-1044.
- [45] A. Momin. *Contact Homology of Orbit Complements and Implied Existence*. J. of Modern Dynamics. **3**, (2011), 409 - 472.
- [46] M. P. Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, **10**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [47] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, (1998).
- [48] D. McDuff, D. Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 52, (2004).
- [49] D. McDuff. *The local behavior of J-holomorphic curves in almost complex 4-manifolds*. J. Diff. Geom., **34**, (1991), 143-164.
- [50] J. W. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Princeton Univ. Press, Princeton, (2006).
- [51] J. W. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton Univ. Press, Princeton, (1965).
- [52] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Univ. Press, Princeton, (1997).
- [53] S. Morita. *Geometry of differential forms*. American Math. Society, Providence, (2001).
- [54] J. Palis, W. Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer-Verlag, New York, (1982).
- [55] G. P. Paternain. *Geodesic Flows*. Progress in Mathematics, **180**, Birkhauser, (1999).
- [56] N. V. de Paulo, Pedro. A. S. Salomão. *Systems of transversal sections near critical energy levels of Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^4$* , pré-publicação, (2013). Disponível em arXiv:1310.8464.
- [57] D. Salamon, E. Zehnder. *Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index*. Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1303-1360.
- [58] E. M. Stein, R. Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton Univ. Press, Princeton, (2003).
- [59] A. C. Silva. *Lectures on symplectic geometry*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, (2001).