Espaços de Banach com várias estruturas complexas

Wilson Albeiro Cuellar Carrera

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

Processos: 2010/17512-6 e 2012/00631-8

São Paulo, Abril 29 de 2015

Espaços de Banach com várias estruturas complexas

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/04/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Valentin Raphael Henri Ferenczi (orientador)- IME-USP
- Prof. Dr. Elói Medina Galego- IME-USP
- Prof. Dr. Manuel Gonzalez Ortiz - Universidad de Cantabria
- Prof^a. Dr^a. Yolanda Moreno Salguero- Universidad de Extremadura
- Prof. Jorge López Abad- ICMAT

Agradecimentos

Ao professor Valentin Ferenczi pela orientação e amizade, que iniciaram em 2009 quando entrei no programa do mestrado no IME-USP, será sempre uma referência como pessoa e como profissional.

Aos professores Yolanda Moreno, Jordi López Abad, Manuel Gonzalez e Elói Galego pela participação na banca examinadora. À professora Christina Brech pelo apoio no grupo de análise funcional e teoria descritiva de conjuntos do IME-USP. Ao professor Jordi López Abad pelas conversas e sugestões durante meu estágio de pesquisa em Madri.

A Matilde, Gregorio, Eduardo e Johana pelo apoio incondicional e por todos os seus ensinamentos.

A todos os amigos e colegas do IME-USP pelo apoio e atitude integradora. Em especial a Thiago Grando.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

CUELLAR CARRERA, W. A. **Espaços de Banach com várias estruturas complexas.** 2015. x+98f. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

No presente trabalho, estudamos alguns aspectos da teoria de estruturas complexas em espaços de Banach. Demonstramos que se um espaço de Banach real X tem a propriedade P , então todas as estruturas complexas em X também satisfazem P , quando P é qualquer uma das seguintes propriedades: propriedade de aproximação limitada, *G.L-l.u.st*, ser injetivo e ser complementado num espaço dual. Abordamos o problema da unicidade de estruturas complexas em espaços de Banach com base subsimétrica, provando que um espaço de Banach real E com base subsimétrica e isomorfo ao espaço de seqüências $E[E]$ admite estrutura complexa única. Por outro lado, apresentamos um exemplo de espaço de Banach com exatamente ω estruturas complexas distintas.

Também usamos a teoria de estruturas complexas para estudar o clássico problema dos hiperplanos no espaço Z_2 de Kalton-Peck. Com o propósito de distinguir Z_2 de seus hiperplanos nos perguntamos se os hiperplanos admitem estrutura complexa. Nesse sentido, provamos que os hiperplanos de Z_2 contendo a cópia canônica de ℓ_2 não admitem estruturas complexas que sejam extensões de estruturas complexas em ℓ_2 . Também construímos uma estrutura complexa em ℓ_2 que não pode-se estender a nenhum operador em Z_2 .

Palavras-chave: estruturas complexas, somas torcidas, espaço de Kalton-Peck, bases subsimétricas, espaços com ‘poucos operadores’.

Abstract

CUELLAR CARRERA, W. A. **Banach spaces with various complex structures**. 2015. x+98f. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

In this work, we study some aspects of the theory of complex structures in Banach spaces. We show that if a real Banach space X has the property P , then all its complex structures also satisfy P , where P is any of the following properties: bounded approximation property, $G.L-l.u.st$, being injective and being complemented in a dual space. We address the problem of uniqueness of complex structures in Banach spaces with subsymmetric basis by proving that a real Banach space E with subsymmetric basis and isomorphic to the space of sequences $E[E]$ admits a unique complex structure. On the other hand, we show an example of Banach space with exactly ω different complex structures.

We also use the theory of complex structures to study the classical problem of hyperplanes in the Kalton-Peck space Z_2 . In order to distinguish between Z_2 and its hyperplanes we wonder whether the hyperplanes admit complex structures. In this sense we prove that no complex structure on ℓ_2 can be extended to a complex structure on the hyperplanes of Z_2 containing the canonical copy l_2 . We also constructed a complex structure on l_2 that can not be extended to any operator in Z_2 .

Keywords: complex structures, twisted sums, Kalton-Peck space, subsymmetric basis, spaces with ‘few operators’.

Sumário

Introdução	ix
1 Resultados preliminares	1
1.1 Bases em espaços de Banach	1
1.2 Operadores de Fredholm	9
2 Somas torcidas e espaço de Kalton-Peck	11
2.1 Espaços quase-normados	11
2.2 Somas torcidas	12
2.3 Definição de Z_2 e propriedades	18
2.4 Dual de uma soma torcida	20
2.5 O espaço de Kalton-Peck complexo	21
3 Estruturas complexas em espaços de Banach	23
3.1 Definição de estruturas complexas	23
3.2 Problema da unicidade de estrutura complexa	28
3.3 Estruturas complexas em espaços de Banach com base subsimétrica	29
3.4 Propriedades preservadas por estruturas complexas	37
4 Espaço de Banach com ômega estruturas complexas	43
4.1 Construção do espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$	44
4.2 Estruturas complexas em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$	47
4.3 Codificação e Sequências especiais	53
4.4 Sequências rapidamente crescentes $(R.I.S)$	55
4.5 Desigualdade básica	59
4.6 Prova do Passo II	64
4.7 Prova do Passo III	66
5 Estruturas complexas compatíveis no espaço de Kalton-Peck	73
5.1 Estruturas complexas em Z_2	73

5.2	Operadores compatíveis em somas torcidas	78
5.3	Estruturas complexas compatíveis em Z_2	80
5.4	Estrutura complexa não compatível com Z_2	87
5.4.1	(U, U) não compatível	87
5.4.2	(T, U) não compatível	92
5.4.3	(U, T) não compatível	93
Referências Bibliográficas		95

Introdução

A teoria clássica dos espaços de Banach tem muitas aplicações em várias áreas da matemática, especificamente da análise. Em muitas situações pode-se trabalhar indiferentemente com espaços de Banach definidos no corpo dos números reais ou no corpo dos números complexos. Por exemplo, uma ampla parte da teoria clássica dos espaços de Banach, tal como desenvolvida no livro de J. Lindenstrauss e T. Tzafriri [43], é igualmente válida para espaços complexos ou reais. Há, no entanto, situações em que o corpo dos números complexos desempenha um papel crucial. Destacamos os casos das C^* álgebras, a teoria de funções analíticas em espaços de Banach e a teoria espectral de operadores. Em particular, neste último caso, para construir uma teoria espectral de operadores lineares em espaços de Banach reais, muitas vezes é necessário entrar na descrição da complexificação do espaço e transferir os resultados da teoria complexa de volta ao quadro real.

Em outras situações o contexto mais natural é considerar a estrutura $\mathbb{R}$ -linear dos espaços como, por exemplo, na teoria das álgebras de funções lipschitzianas definidas em espaços métricos com valores reais, na teoria da renormação ou na prova do teorema de Hahn-Banach. Um outro exemplo é o teorema de Mazur-Ulam [45], que garante que toda isometria entre espaços normados reais é a composição de uma translação com uma isometria linear. Porém, veremos que esse resultado não se estende ao caso complexo.

De um modo geral, a teoria das *estruturas complexas* corresponde ao estudo das relações entre as propriedades de um dado espaço de Banach real e as propriedades do mesmo espaço visto como complexo. Também são estudadas condições que permitem decidir a escolha do corpo de escalares natural em cada teoria.

O primeiro resultado na literatura nessa direção tem origem no trabalho de J. Dieudonné [16] em 1952, no qual é demonstrado que o espaço de James $\mathcal{J}$ (Ver exemplo 1.d.2 [43]) não é $\mathbb{R}$ -linearmente isomorfo a nenhum espaço complexo. Desta forma, $\mathcal{J}$ não pode ser o espaço real subjacente de um espaço complexo. Podemos pensar nele como um espaço *sem estrutura complexa*.

Não obstante, o primeiro resultado significativo na teoria de estruturas complexas data da década de 1980, quando J. Bourgain [12] exhibe exemplos de espaços de Banach isométricos como reais mas não isomorfos como espaços complexos, provando que o teorema de Mazur-Ulam não

se estende ao caso complexo. Especificamente, Bourgain construiu, usando métodos da teoria local de espaços de Banach, ou seja, de teoria dos operadores normados em espaços de Banach de dimensão finita, um espaço complexo $\mathcal{B}$ não isomorfo a seu conjugado. O conjugado de um espaço de Banach complexo X está definido como o espaço X munido da lei escalar $\lambda \odot x = \bar{\lambda}x$ em vez de λx . Claramente, o conjugado de X é $\mathbb{R}$ -linearmente isométrico a X . Assim, o espaço real subjacente de $\mathcal{B}$ tem pelo menos duas maneiras distintas de ser visto como complexo, ou seja, tem pelo menos duas *estruturas complexas* diferentes.

Dessa forma, diremos que um espaço de Banach real X admite *estrutura complexa* se é $\mathbb{R}$ -linearmente isomorfo a um espaço complexo. O espaço complexo associado será chamado de *estrutura complexa em X* . Além disso, diremos que X admite estrutura complexa *única* se admite estrutura complexa e todas as estruturas complexas em X são $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfas entre si, e que X admite *várias* estruturas complexas se tem pelo menos duas estruturas complexas não $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfas entre si.

Vale observar que um espaço de Banach real X tem estrutura complexa se, e somente se, existe um operador $\mathbb{R}$ -linear J em X tal que $J^2 = -Id$. A aplicação do operador J sobre X corresponde à multiplicação por i na estrutura complexa associada. Por exemplo, a estrutura complexa conjugada corresponde à escolha de $-J$ em vez de J . Em alguns casos chamaremos o próprio operador J de estrutura complexa em X .

Outro exemplo de espaço complexo X não isomorfo a seu conjugado foi apresentado por Kalton [36] em 1995 utilizando a teoria de *somas torcidas*. Essa teoria tem importantes aplicações em problemas de extensão de operadores, estudo de escalas de interpolação, entre outros. Ao contrário da construção de Bourgain, que usa técnicas probabilísticas, a construção de Kalton é explícita e corresponde a uma soma torcida não trivial de $\ell_2(\mathbb{C})$ com $\ell_2(\mathbb{C})$, ou seja, X contém um subespaço E tal que E e o quociente X/E são isomorfos a $\ell_2(\mathbb{C})$, mas X não é isomorfo a $\ell_2(\mathbb{C})$.

Lembremos que a década de 1990 foi extremamente produtiva na teoria dos espaços de Banach, com os resultados de W. T. Gowers [28, 29, 31] e Gowers - B. Maurey [32, 33], vendo a resolução de vários problemas antigos da teoria: o problema do espaço homogêneo, o problema do hiperplano de Banach, o problema de Schroeder-Bernstein para espaços de Banach, o problema da sequência básica incondicional, entre outros. As técnicas de Gowers e Maurey permitiram definir uma nova classe de espaços ditos exóticos ou com poucos operadores, que são candidatos naturais a contra-exemplos na teoria. Assim, técnicas similares foram usadas por V. Ferenczi [20] em 2007 para provar que as estruturas complexas num dado espaço X podem ser classificadas usando a teoria de Fredholm, mais especificamente a partir do estudo dos elementos de quadrado $-Id$ da álgebra $A_X = \mathcal{L}(X)/\mathcal{S}(X)$, quociente da álgebra $\mathcal{L}(X)$ dos operadores em X pelo ideal

dos operadores estritamente singulares em X . Ele usou vários exemplos de espaços definidos por Gowers e Maurey [32, 33] com uma caracterização da álgebra A_X associada, para dar vários exemplos de espaços com exatamente n estruturas complexas, para n inteiro. No estudo de Ferenczi [20] foi também resolvida uma pergunta de S. Szarek [51], pela construção de um exemplo de espaço com estrutura complexa única diferente do espaço de Hilbert. Além disso, Ferenczi e E. Galego [22] continuaram os estudos de [20] e provaram que se X é um espaço de Banach real de dimensão infinita e H é um hiperplano de X , então os elementos de quadrado $-Id$ da álgebra A_X correspondem a estruturas complexas em X ou no hiperplano H .

Indo ao extremo, R. Anisca [2] em 2003, usando resultados técnicos sobre espaços sem estrutura local incondicional baseados nos trabalhos de Komorowski e Tomczak-Jaegermann [39], deu exemplos de espaços separáveis que têm um número contínuo de estruturas complexas não isomorfas.

Nesse contexto, uma pergunta natural refere-se à existência de espaços com exatamente um número infinito enumerável de estruturas complexas.

Neste trabalho, respondemos a essa pergunta. A partir da construção de S. Argyros, J. Lopez-Abad e S. Todorčević [7] de uma versão não separável de um espaço exótico de tipo Gowers-Maurey, estudamos no Capítulo 4 um espaço de Banach reflexivo e separável $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ com exatamente ω estruturas complexas diferentes, o qual admite uma decomposição de Schauder de dimensão infinita $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C}) = \bigoplus_k \mathfrak{X}_k$ tal que todo operador $\mathbb{R}$ -linear T sobre $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ pode ser escrito como $T = D_T + S$, onde S é estritamente singular, $D_T|_{\mathfrak{X}_k} = \lambda_k Id_{\mathfrak{X}_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$) e $(\lambda_k)_k$ é uma sequência convergente. É possível observar que, a partir da construção do espaço $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$, obtemos um número contínuo de exemplos de espaços de Banach com a propriedade de ter exatamente ω estruturas complexas. Essa construção também demonstra a existência de um espaço de Banach real não separável com exatamente ω_1 estruturas complexas não isomorfas.

Um outro problema não resolvido na teoria das estruturas complexas consiste em determinar se espaços com mais regularidade, como ter base incondicional ou subsimétrica, admitem no máximo uma estrutura complexa. De fato, todos os exemplos apresentados até agora de espaços com várias estruturas são de certa forma exóticos: usando métodos probabilísticos ou estimativas de incondicionalidade local em espaços de dimensão finita [2], [12]; definidos por somas torcidas [36]; ou enfim, por serem espaços com poucos operadores [15], [20]. Além disso, Kalton (ver [22], 2007) provou que os espaços clássicos ℓ_p , L_p , $1 \leq p \leq +\infty$, c_0 e $C[0, 1]$, admitem estrutura complexa única.

Nessa direção, no Capítulo 3, estudamos o problema da unicidade de estrutura complexa em espaços de Banach com base subsimétrica. Inspirados na prova do método de decomposição de Pełczyński, obtemos um condição suficiente para que um espaço de Banach real E com base subsimétrica admita estrutura complexa única. Essa condição depende da propriedade do espaço

ser isomorfo ao espaço de sequências $E[E]$ associado à base (ver Teorema 3.17). Também nesse capítulo, Seção 3.4, estudamos algumas propriedades de espaços de Banach que são herdadas a suas estruturas complexas, no sentido de que, se um espaço de Banach real X tem a propriedade P, então toda estrutura complexa em X também possui P.

Finalmente, no Capítulo 5, aplicamos resultados da teoria das estruturas complexas para estudar problemas estruturais do espaço real Z_2 de Kalton-Peck definido em 1979 [37]. Como o exemplo de Kalton não isomorfo a seu conjugado complexo, esse espaço corresponde a uma soma torcida de ℓ_2 com ℓ_2 . Entre as muitas propriedades interessantes de Z_2 estão as seguintes [11]:

1. Todo subespaço complementado de dimensão infinita de Z_2 contém um subespaço complementado isomorfo a Z_2 .
2. Nenhum subespaço complementado de dimensão infinita de Z_2 tem uma base incondicional.

Desde sua construção a começo da década de 1980, conjecturou-se que Z_2 não é primo, e que, de fato, é um contra-exemplo ao problema dos hiperplanos de Banach. Ou seja, que Z_2 não é isomorfo a seus hiperplanos. A resposta ao problema dos hiperplanos de Banach foi dada por Gowers [29] em 1994, e desde então vários outros exemplos tem sido construídos, porém a pergunta em Z_2 continua aberta. A questão em Z_2 é relevante, pois seria o exemplo mais simples com a propriedade de não ser isomorfo a seus hiperplanos. Uma estratégia para provar a conjectura de Z_2 , seria provando que seus hiperplanos não admitem estrutura complexa (Z_2 admite estrutura complexa pois é isomorfo a seu quadrado), ou seja, provando que Z_2 tem dimensão infinita par, segundo a terminologia de [21]. Obtendo assim um critério explícito para diferenciar Z_2 de seus hiperplanos. Nessa direção, usando um resultado de Ferenczi e Galego [21] sobre os elementos de quadrado $-Id$ da álgebra $\mathcal{L}(X)/\mathcal{S}(X)$, provamos um resultado parcial: os hiperplanos canônicos $\ell_2 \oplus_{\Omega_2} H$ de Z_2 não admitem estruturas complexas que sejam extensões de estruturas complexas de ℓ_2 . Também construímos uma estrutura complexa em ℓ_2 que não se estende a nenhum operador em Z_2 .

Os resultados do Capítulo 5 fazem parte de um trabalho em conjunto com os professores J. M. F. Castillo, V. Ferenczi e Y. Moreno.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e alguns resultados que serão utilizados no decorrer da tese. Não apresentamos as demonstrações de muitos resultados clássicos, mas em cada caso sugerimos a respectiva referência. Na seção 1.1, recordamos conceitos clássicos de bases em espaços de Banach e uma noção de base de Schauder transfinita que generaliza a definição usual. Também, introduzimos notações que serão usadas nas construções do capítulo 4. Na seção 1.2, estudamos brevemente alguns resultados da teoria de operadores de Fredholm que serão utilizados principalmente no capítulo 3.

1.1 Bases em espaços de Banach

Nesta seção, relembremos alguns conceitos clássicos da teoria de espaços de Banach referentes às bases. Primeiro, vamos fixar algumas notações. Todos os espaços de Banach considerados neste trabalho serão sempre sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Num espaço de Banach X denotaremos por B_X a bola unitária de X , i.e., o conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, se o espaço X estiver claro no contexto, escreveremos simplesmente B . Dada uma sequência de vetores $(x_n)_n$ de X denotamos por $\text{span}(x_n)_n$ o espaço linear gerado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $A \subseteq X$, o conjunto de seus pontos aderentes será notado por $\overline{A}$.

Usaremos o termo *operador* entre dois espaços de Banach X e Y para referirmos a uma função $T : X \rightarrow Y$ linear e limitada. No caso que $X = Y$ dizemos simplesmente que T é um operador em X . Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ ($\mathcal{L}(X)$ quando $X = Y$) o espaço de todos os operadores de X em Y , munido da norma usual de operadores. Seja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e Z um subespaço de X , escrevemos $T|_Z$ para denotar a restrição do operador T ao subespaço Z . Denotamos por Id_X (ou simplesmente Id) o operador identidade em X , i.e., $Id(x) = x$ para todo $x \in X$.

Definição 1.1. *Uma sequência $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é uma base de Schauder se*

para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

(i.e., tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\| = 0$). A base $(x_n)_n$ será chamada *normalizada*, se $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos que os vetores $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, formam uma base de Schauder normalizada para os espaços clássicos c_0 , ℓ_p ($1 \leq p < \infty$). Essa base é usualmente chamada de base canônica.

Dizemos que uma sequência $(x_n)_n$ de X é uma *sequência básica* se for uma base de Schauder para o fecho de seu subespaço linear gerado $\overline{\text{span}}(x_n)_n$.

Por outro lado, uma *base de Hamel* de X é um conjunto (e_α) linearmente independente tal que $\text{span}(e_\alpha) = X$. Neste trabalho, o termo *base* num espaço de Banach será usado para referirmos exclusivamente a uma base de Schauder. Quando usarmos bases de Hamel será claramente especificado.

Dada uma base $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X , definimos os *funcionais coordenados* $x_n^* : X \rightarrow \mathbb{K}$ por $x_n^*(x) = \alpha_n$, e uma sequência de aplicações lineares $(P_n)_n$ em X por $P_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, onde $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Cada P_n é uma projeção sobre $\text{span}\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ e, por definição $P_n(x) \rightarrow x$ em norma quando $n \rightarrow \infty$. Um fato notável, provado por Banach, é que todas as aplicações $(P_n)_n$, e portanto todos os funcionais coordenados $(x_n^*)_n$, são contínuos.

Proposição 1.2. *Se $(x_n)_n$ é uma base para um espaço de Banach X , então cada P_n é contínua. Além disso, $K = \sup_n \|P_n\| < \infty$.*

O número $K = \sup \|P_n\|$ é chamado de *constante da base* de $(x_n)_n$. Uma base com constante 1 é chamada base monótona. Por exemplo, a base canônica de ℓ_p e c_0 é monótona. Todo espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_n$ pode ser munido de uma norma equivalente tal que a constante da base seja 1. De fato, é suficiente considerar $\|x\| = \sup_n \|P_n(x)\|$.

Se um espaço de Banach tem uma base $(x_n)_n$, então é separável, uma vez que o conjunto de todas as combinações lineares finitas $\sum_{i=1}^n r_i x_i$, onde r_i são números racionais (reais ou complexos), é um conjunto denso enumerável de X . Entretanto, a pergunta de que todo espaço de Banach separável tem base de Schauder permaneceu em aberto por vários anos. A resposta a esse problema dada por Enflo em 1973, foi negativa. Porém, um resultado mais fraco, mas bastante importante, é verdadeiro:

Teorema 1.3 (Mazur, 1932). *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém uma sequência básica.*

Demonstração. Ver [43, Teorema 1.a.5]. □

Duas bases $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ de espaços de Banach X e Y , respetivamente, são ditas equivalentes, se para qualquer sequência de escalares $(\alpha_n)_n$ temos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ é convergente se, e somente se, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ é convergente. Segue do Teorema do gráfico fechado que, $(x_n)_n$ é equivalente a $(y_n)_n$ se, e somente se, existe um isomorfismo $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(x_n)_n$ é equivalente a $(y_n)_n$ se, e somente se, existe uma constante $0 < C < \infty$ tal que

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e toda sequência de escalares $(\alpha_i)_{i=1}^n$.

Agora vamos introduzir dois tipos especiais de bases que estão relacionados com a reflexividade do espaço. Dada uma base de Schauder $(x_n)_n$ de X , a sequência de funcionais coordenados é uma sequência básica do espaço dual X^* , mas não necessariamente é base de X^* . Assim, a seguinte definição é natural:

Definição 1.4. *Seja $(x_n)_n$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(x_n^*)_n$ a sequência de funcionais coordenados. Dizemos que $(x_n)_n$ é uma base contrátil se $\overline{\text{span}}(x_n^*)_n = X^*$.*

Definição 1.5. *Uma base de Schauder $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é limitadamente completa se $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge para toda sequência de escalares $(\alpha_n)_n$ tal que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| < \infty$.*

Um espaço com base limitadamente completa é linearmente isomorfo a um espaço dual. Juntando as duas noções anteriores, James prova o seguinte importante teorema

Teorema 1.6 (James, 1950). *Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder $(x_n)_n$. Então X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_n$ é contrátil e limitadamente completa.*

Demonstração. Ver [43, Teorema 1.b.5]. □

A base canônica $(e_n)_n$ dos espaços ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) tem a propriedade adicional que para toda permutação $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(e_{\pi(n)})_n$ é também uma base de ℓ_p . As bases com essa importante propriedade são chamadas de bases incondicionais.

Lembremos que uma série $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ é dita incondicionalmente convergente, se para toda permutação $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\pi(i)}$ é convergente. Neste caso, pode-se demonstrar que as somas $\sum_{i=1}^{\infty} y_{\pi(i)}$ não dependem da permutação π .

Definição 1.7. *Uma base de Schauder $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é incondicional se para todo $x \in X$ a série $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge incondicionalmente. Dizemos que uma sequência básica $(x_n)_n$ é uma sequência básica incondicional se é uma base de Schauder incondicional do $\overline{\text{span}}(x_n)_n$.*

Utilizando as propriedades das séries incondicionalmente convergentes temos as seguintes propriedades classicamente equivalentes sobre sequências básicas incondicionais.

Proposição 1.8. *Uma sequência básica $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é incondicional se, e somente se, satisfaz alguma das seguintes propriedades*

1. *Para cada permutação $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a sequência $(x_{\pi(n)})_n$ é uma sequência básica.*
2. *Para cada subconjunto $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ implica a convergência de $\sum_{i \in \sigma} \alpha_i x_i$.*
3. *A convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ implica a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i$ sempre que $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Ver [43, Proposição 1.c.6]. □

Se $(x_n)_n$ é uma base de Schauder incondicional para um espaço X , e $\theta = (\theta_n)_n$ é uma sequência de escalares de módulo 1, segue das propriedades anteriores, que a aplicação linear M_θ em X definida por $M_\theta(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \alpha_i x_i$ é limitada. Além disso, pelo princípio de limitação uniforme, segue que $K = \sup_\theta \|M_\theta\| < \infty$. A constante K é chamada de *constante incondicional* da base e denotaremos por $u.c(X)$. Neste caso diremos que a base é K -incondicional.

A seguinte definição é uma noção mais geral que a de base incondicional.

Definição 1.9. *Um espaço de Banach X possui G.L-l.u.st (estrutura local incondicional) se existe uma constante $C > 0$ tal que para cada subespaço $F \subseteq X$ de dimensão finita, o operador inclusão $i : F \rightarrow X$ pode ser fatorado através de um espaço de Banach E com base incondicional e operadores $u : F \rightarrow E$, $v : E \rightarrow X$:*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{u} & E \\ & \searrow i & \downarrow v \\ & & X \end{array}$$

tal que $\|u\| \|v\| u.c(E) \leq C$.

Claramente, se X tem uma base incondicional então tem G.L-l.u.st. Por outro lado, os espaços $C[0, 1]$ e $L_1(0, 1)$ possuem G.L-l.u.st mas não admitem base incondicional.

É fácil encontrar espaços de Banach separáveis sem base incondicional. Uma pergunta clássica neste contexto, é de saber se todo espaço de Banach de dimensão infinita tem uma sequência básica incondicional. Este problema foi resolvido na década de 1990 com a resposta negativa dada por T. W. Gowers e B. Maurey [32]. Eles construíram em 1991 o primeiro exemplo (real e complexo) de um espaço X_{GM} com a propriedade de ser *hereditariamente indecomponível* (H.I.),

ou seja, nenhum subespaço fechado de X_{GM} é soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita, portanto X_{GM} não pode conter sequências básicas incondicionais. Em particular, X_{GM} responde também a pergunta feita por J. Lindenstrauss em 1970 [42] sobre se é possível decompor todo espaço de Banach de dimensão infinita como a soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita.

O espaço de operadores de um espaço de Banach H.I. tem notáveis propriedades. Lembremos que um operador $S : Y \rightarrow Z$ entre dois espaços de Banach é chamado de *estritamente singular* se a restrição de S a qualquer subespaço de dimensão infinita de Y nunca é um isomorfismo sobre a imagem. Equivalentemente, se para todo $\epsilon > 0$ e todo subespaço Y' de Y , existe $y \in Y'$ tal que $\|S(y)\| < \epsilon\|y\|$. O ideal dos operadores estritamente singulares de Y em Z será denotado por $\mathcal{S}(Y, Z)$, ou simplesmente $\mathcal{S}(Y)$, quando $Y = Z$.

Gowers e Maurey provaram que todo espaço H.I. complexo X tem ‘poucos operadores’ no sentido de que cada operador T em X é uma perturbação estritamente singular de um múltiplo da identidade, $T = \lambda Id + S$, para $S \in \mathcal{S}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta propriedade dos operadores implica que X não é isomorfo a seus subespaços próprios, portanto X_{GM} é um exemplo de espaço não isomorfo a seus hiperplanos. V. Ferenczi em [19] estende esta propriedade: se X é um espaço H.I. complexo e Y é um subespaço de X , então todo operador de Y em X é da forma $\lambda i_{Y,X} + S$, onde $i_{Y,X}$ é a inclusão canônica de Y em X e $S \in \mathcal{S}(Y, X)$. Essa propriedade dos operadores caracteriza os espaços H.I. complexos. Porém, tal caracterização não é válida no caso dos espaços H.I. reais.

O espaço real de Gowers e Maurey X_{GM} também tem ‘poucos operadores’, de fato satisfaz que para todo subespaço $Y \subseteq X_{GM}$, cada operador de Y em X_{GM} é da forma $\lambda i_{Y, X_{GM}} + S$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $S \in \mathcal{S}(Y, X_{GM})$ [32] (observe que esta propriedade dos operadores implica ser H.I.). Em geral, para um espaço H.I. real X , Ferenczi [18] demonstra que $\mathcal{L}(X)/\mathcal{S}(X)$ é uma álgebra de divisão isomorfa a $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou à álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$. Exemplos de espaços com essas propriedades foram construídos também por Ferenczi [20] modificando a construção original de Gowers e Maurey.

Muitos outros exemplos de espaços H.I. tem sido construídos desde o exemplo de Gowers e Maurey. Em particular, S. Argyros e R. Haydon [6] em 2011 construíram um espaço H.I. X_{AH} tal que todo operador em X_{AH} é da forma $\lambda Id + K$, onde λ é um escalar e K é um operador compacto.

Lembremos que um operador $T : X \rightarrow Y$ entre dois espaços de Banach X e Y é *compacto* se $\overline{TB_X}$ é compacto em relação à topologia da norma em Y . Todo operador compacto é estritamente singular, mas por exemplo, a inclusão canônica $j : \ell_p \rightarrow \ell_r$ ($1 \leq p < r < \infty$) é um operador estritamente singular não compacto. Por outro lado, o ideal dos operadores estritamente singulares $\mathcal{S}(\ell_p)$ coincide com o ideal dos operadores compactos no espaço ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) ([43, p. 76]).

Um resulatado clássico de V. Lomonosov [44] diz que se um operador T num espaço normado de dimensão infinita X comuta com um operador compacto não nulo K , ou seja, $TK = KT$, então T admite um subespaço próprio não trivial invariante, i.e. $T(H) \subseteq H$ para algum subespaço fechado $\{0\} \subsetneq H \subsetneq X$. Claramente $\lambda Id + K$ comuta com K para todo operador compacto não nulo. Portanto, o espaço de Argyros e Haydon X_{AH} é um exemplo (o primeiro conhecido) de espaço de Banach tal que todo operador T em X_{AH} tem um subespaço próprio não trivial invariante.

A importância dos espaços H.I. decorre também da dicotomia de Gowers: todo espaço de Banach contém uma sequência básica incondicional ou um subespaço H.I. [28]. Esse resultado deu início ao programa de classificação de Gowers [23]. A dicotomia de Gowers junto com os resultados de R. Komorowski e N. Tomczak-Jaegermann [39] permitiram resolver o problema do espaço homogêneo: se um espaço de Banach X é isomorfo a todos seus subespaços de dimensão infinita, então X é isomorfo a ℓ_2 .

As seguintes são condições equivalentes na definição de espaço H.I.

Lema 1.10. *Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *O espaço X é H.I.;*
- (2) *Para cada par de subespaços fechados de dimensão infinita Y, Z de X , $\text{dist}(S_Y, S_Z) = 0$;*
- (3) *Para cada par de subespaços fechados de dimensão infinita Y, Z de X e $\delta > 0$, existem $y \in Y$ e $z \in Z$, tais que $\|y - z\| \leq \delta\|y + z\|$.*

Demonstração. Ver [9, Proposição 1.1]. □

Voltando ao tema das bases, vale notar que as bases canônicas de ℓ_p e c_0 não apenas satisfazem que, para cada permutação π de $\mathbb{N}$, a sequência $(e_{\pi(n)})_n$ é base, mas também que $(e_{\pi(n)})_n$ é equivalente a $(e_n)_n$. Bases com essa propriedade são exemplos de bases *simétricas*.

Definição 1.11. *Uma base $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é simétrica se $(x_n)_n$ é equivalente a $(x_{\pi(n)})_n$ para toda permutação π de $\mathbb{N}$.*

Segue da Proposição 1.8, que toda base simétrica é incondicional.

Seja $(x_n)_n$ uma base simétrica de X . Para cada permutação π de $\mathbb{N}$, a aplicação linear $V_\pi : X \rightarrow X$ definida por $V_\pi(\sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_{\pi(i)}$ é um automorfismo de X . Além disso, a família de automorfismos $\{V_\pi\}$ induzidos pelas permutações são uniformemente limitados. Dado que, $(x_n)_n$ também é incondicional, temos que $K = \sup_{\theta, \pi} \|M_\theta V_\pi\| < \infty$. O número K , assim definido, é a *constante simétrica* de $(x_n)_n$. Neste caso, diremos que a base é K -simétrica.

Definição 1.12. Uma base $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X é subsimétrica se é incondicional e, para toda sequência crescente de inteiros $(k_n)_n$, $(x_{k_n})_n$ é equivalente a $(x_n)_n$. A constante subsimétrica de $(x_n)_n$ é a menor constante $K \geq 1$ tal que para qualquer sequência de escalares $(\alpha_n)_n$, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \alpha_i x_{k_i} \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\|$$

para todas as sequências de escalares $\theta = (\theta_n)_n$ de módulo 1 e todas as sequências crescentes de inteiros $(k_n)_n$. Neste caso diremos que $(x_n)_n$ é K -subsimétrica.

As bases canônicas de ℓ_p e c_0 também são bases subsimétricas. Não é difícil mostrar que toda base simétrica é subsimétrica, porém existem bases subsimétricas que não são simétricas [26].

Definição 1.13. Um espaço de Banach X é primo se todo subespaço complementado de dimensão infinita de X é isomorfo a X . O espaço X é primário se para toda projeção limitada Q em X , QX ou $(Id - Q)X$ é isomorfo a X .

Claramente, todo espaço de Banach de dimensão infinita primo é primário. Os espaços clássicos c_0 , ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$) são primos, enquanto L_p ($1 \leq p < \infty$) e $C[0, 1]$ são primários [43]. O seguinte fato sobre projeções em espaços de Banach com base subsimétrica será fundamental para os resultados da Seção 3.3.

Proposição 1.14 (P. G. Casazza - Bor-Luh Lin, 1974). Seja X um espaço de Banach com uma base subsimétrica $(x_n)_n$. Então para toda projeção limitada Q de X , QX ou $(Id - Q)X$ contém um subespaço fechado isomorfo a X que é complementado em X .

Demonstração. Ver [43, Proposição 3.b.8] □

É um problema aberto se um espaço de Banach X com base subsimétrica ou mesmo simétrica é primário (Ver [43, Problema 3.b.9]).

Para terminar esta seção, vamos definir uma generalização da noção de base de um espaço de Banach. Essa generalização consiste em considerar bases que não necessariamente estejam formadas por uma família enumerável de vetores. Mais especificamente, vamos substituir o conjunto de índices $\mathbb{N}$ na definição usual por um intervalo de números ordinais. Para uma completa apresentação desse tópico sugerimos o livro de I. Singer [49].

Lembremos que ω e ω_1 denotam o menor cardinal infinito e o menor cardinal não enumerável, respetivamente. Dados números ordinais γ, ξ escrevemos $\gamma + \xi$, $\gamma \cdot \xi$, γ^ξ para as operações aritméticas usuais (ver [34]). Para cada ordinal γ denotamos por $[0, \gamma)$ o intervalo de ordinais $0 \leq \alpha < \gamma$.

Seja X um espaço de Banach e γ um ordinal. Uma sequência transfinita de X (de ordem γ) é uma função $f : [0, \gamma) \rightarrow X$. Para cada $\alpha < \gamma$, dizemos que $f(\alpha)$ é o α -ésimo termo de f . Analogamente à forma como denotamos as sequências, é usual representar o α -ésimo termo de f por x_α .

A seguinte definição encontra-se, por exemplo, em [7, Definição 1.1].

Definição 1.15. *Seja X um espaço de Banach e γ um número ordinal.*

1. *Uma sequência transfinita $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ de X é chamada de base transfinita se $X = \overline{\text{span}}(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ e se existir uma constante $C \geq 1$ tal que para cada intervalo I de γ a aplicação linear canônica definida no $\text{span}(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$*

$$\sum_{\alpha < \gamma} \lambda_\alpha x_\alpha \mapsto \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha$$

pode se estender a uma projeção limitada $P_I : X \rightarrow X_I = \overline{\text{span}}(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, com $\|P\| \leq C$.

2. *Uma base transfinita $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ de X é bimonótona se para cada intervalo I de γ , a correspondente projeção P_I tem norma igual a 1.*

Para o caso $\gamma = \omega$ a definição anterior coincide com a definição usual de base de Schauder. Para cada base transfinita $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$, os funcionais coordenados $(x_\alpha^*)_{\alpha < \gamma}$ estão bem definidos. Da mesma forma que nas bases de Schauder usuais, cada $x^* \in X^*$ tem uma representação única do tipo $\sum_{\alpha < \gamma} x^*(x_\alpha) x_\alpha^*$, onde a série é w^* -convergente.

Definição 1.16. *Uma base transfinita de um espaço de Banach $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ é chamada:*

- *contrátil se para toda sequência crescente de ordinais $(\alpha_n)_n$, $(x_{\alpha_n})_n$ for contrátil no sentido usual.*
- *limitadamente completa se para toda sequência crescente de ordinais $(\alpha_n)_n$, $(x_{\alpha_n})_n$ for limitadamente completa no sentido usual.*

O seguinte resultado é a extensão do teorema de James para bases transfinitas.

Proposição 1.17. *Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ uma base transfinita de um espaço de Banach X . Então X é reflexivo se, e somente se, $(x_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ é contrátil e limitadamente completa.*

Demonstração. Ver [7, Proposição 1.6] □

Vamos introduzir algumas notações que serão usadas principalmente no capítulo 4. Seja γ um ordinal, denotamos por $c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$ o espaço vetorial de todas as funções $x : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ tal que o conjunto $\text{supp } x = \{\alpha < \gamma : x(\alpha) \neq 0\}$ é finito, e por $(e_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ a base de Hamel canônica de $c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$.

Para cada vetor $x \in c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$, escrevemos $\text{ran } x$ para denotar o menor intervalo de ordinais contendo o $\text{supp } x$. Dados dois subconjuntos E_1, E_2 de γ dizemos que $E_1 < E_2$ se $\max E_1 < \min E_2$. Assim, para $x, y \in c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$ $x < y$ significa que $\text{supp } x < \text{supp } y$. Para cada vetor $x \in c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$ e cada subconjunto E de ω_1 denotamos por Ex (ou $P_E x$) a restrição de x a E ou seja, simplesmente a função $x\chi_E$, onde χ_E é a função característica de E . Finalmente em alguns casos denotaremos os elementos de $c_{00}(\gamma, \mathbb{C})$ como funções $f, g, h \dots$ e a base de Hamel como $(e_\alpha^*)_{\alpha < \gamma}$ pois serão vistos como funcionais de um conjunto normante.

Dizemos que uma sequência transfinita $(y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ é uma *sequência de blocos* se $y_\alpha < y_\beta$ para todo $\alpha < \beta < \gamma$. Dada uma sequência de blocos $(y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ uma *subsequência de blocos* de $(y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ é uma sequência de blocos $(x_\beta)_{\beta < \xi}$ no espaço gerado $\text{span } (y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$. Uma *subsequência de blocos real* de $(y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ é uma subsequência de blocos no espaço *real* gerado $\text{span}_{\mathbb{R}}(y_\alpha)_{\alpha < \gamma}$.

Para cada ordinal γ denotamos por $\Lambda(\gamma)$ o conjunto de todos os ordinais *limite* $< \gamma$.

1.2 Operadores de Fredholm

Nesta seção apresentamos brevemente algumas propriedades básicas dos *operadores de Fredholm*. Essa classe de operadores foram introduzidos por I. Fredholm [25] num estudo sobre equações integrais. De certa forma, os operadores de Fredholm correspondem a ‘pequenas perturbações’ de isomorfismos. Os resultados desta seção serão usados para provar algumas propriedades sobre estruturas complexas equivalentes na Seção 3.1.

Dado um operador $T : X \rightarrow Y$ entre dois espaços de Banach X e Y , denotamos por $\ker T$ e $T(X)$ o núcleo e a imagem de T , respetivamente. Isto é,

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{e} \quad T(X) = \{Tx : x \in X\}.$$

Vamos introduzir uma importante noção de índice de um operador.

Definição 1.18. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador entre dois espaços de Banach X e Y tal que $T(X)$ é fechado. Escrevemos*

$$n(T) = \dim \ker T \quad \text{e} \quad d(T) = \dim Y/T(X).$$

Se $n(T) < \infty$ ou $d(T) < \infty$ definimos o índice $i(T)$ de T por $i(T) = n(T) - d(T)$. Se $n(T)$ e $d(T)$ são ambos finitos (i.e., $i(T)$ está definido e é um número finito) então T é chamado um operador de Fredholm.

É claro que um operador $T : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo de X sobre Y se, e somente se, $n(T) = 0$ e $d(T) = 0$. Logo todo isomorfismo é um operador de Fredholm de índice 0. Seja

$k \in \mathbb{N}$, o operador $T_k : \ell_p \rightarrow \ell_p$ definido por $T_k(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots)$ é um operador de Fredholm de índice k ($1 \leq p \leq \infty$).

O seguinte resultado é uma observação natural sobre os operadores de Fredholm.

Lema 1.19. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador de Fredholm entre espaços de Banach X e Y . Então existe um subespaço fechado V de X e um subespaço de dimensão finita W de Y tais que*

$$X = V \oplus \ker T \quad e \quad Y = T(X) \oplus W.$$

Em particular, o operador sobrejetor $T|_V : V \rightarrow T(X)$ é um isomorfismo e $\dim W = d(T)$.

Demonstração. Ver [43, p. 77]. □

Outra importante propriedade que usaremos neste trabalho é que uma perturbação estritamente singular de um operador de Fredholm é um operador de Fredholm com o mesmo índice.

Proposição 1.20. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador entre espaços de Banach X e Y tal que $T(X)$ é fechado e $n(T) < \infty$. Seja $S : X \rightarrow Y$ um operador estritamente singular. Então, $n(T + S) < \infty$, $(T + S)(X)$ é fechado e $i(T + S) = i(T)$.*

Demonstração. Ver [43, Proposição 2.c.10]. □

Capítulo 2

Somas torcidas e espaço de Kalton-Peck

Este capítulo introdutório tem como objetivo o estudo de alguns conceitos da teoria de somas torcidas e introduzir a definição do espaço de Kalton-Peck junto com suas propriedades mais relevantes.

2.1 Espaços quase-normados

A categoria adequada para falar de somas torcidas entre espaços de Banach é a dos espaços quase-Banach. De fato, veremos que uma soma torcida de dois espaços de Banach pode não ser de Banach. Dizemos que um espaço vetorial topológico X sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é quase-normado, se sua topologia é gerada por uma quase-norma, i.e., uma função $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ de valores não negativos, tal que

- $\|x\| > 0$, se $x \neq 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $\|x_1 + x_2\| \leq C(\|x_1\| + \|x_2\|)$, para todo $x_1, x_2 \in X$, e uma constante $C \geq 1$ independente de x_1, x_2 .

Duas quase-normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ num espaço vetorial X são equivalentes se existem constantes $0 < c \leq C$ tais que

$$c|||x||| \leq \|x\| \leq C|||x|||,$$

para todo $x \in X$. Neste caso, as topologias em X geradas pelas quase-normas $\|\cdot\|$ e $|||\cdot|||$ são equivalentes.

O seguinte resultado clássico de Aoki-Rolewicz induz uma métrica invariante em cada espaço quase-normado.

Teorema 2.1 (Aoki-Rolewicz, 1957). *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado. Então existem $p \in [0, 1)$ e uma quase-norma $|||\cdot|||$ equivalente a $\|\cdot\|$, tais que*

$$|||x_1 + x_2|||^p \leq |||x_1|||^p + |||x_2|||^p$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

Demonstração. Ver [38, Teorema 1.3]. □

Usando a quase-norma p -subaditiva obtida do teorema de Aoki e Rolewicz podemos induzir em cada espaço quase-normado uma métrica invariante que dará sentido à noção de espaço quase-normado completo.

Definição 2.2. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço quase-normado. Sejam $p \in (0, 1]$ e $|||\cdot|||$ uma quase-norma equivalente a $\|\cdot\|$ obtida pelo teorema de Aoki-Rolewicz. Então*

$$d(x, y) = |||x - y|||^p$$

define uma métrica invariante em X . O espaço quase-normado X é chamado de quase-Banach se X é completo em relação à métrica d .

2.2 Somas torcidas

Agora, introduzimos o conceito de soma torcida de espaços de Banach.

Definição 2.3. *Dados X e Y espaços de Banach. Uma soma torcida de X e Y é um espaço quase-Banach Z que possui um subespaço X' isomorfo a X tal que Z/X' seja isomorfo a Y .*

Equivalentemente, Z é uma soma torcida de X, Y se existir uma *sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$

i.e., se existirem operadores $j : X \rightarrow Z$ e $q : Z \rightarrow Y$, injetor e sobrejetor, respetivamente, tais que $\Im(j) = \ker(q)$.

A soma torcida Z de dois espaços de Banach X e Y é dita *trivial* se a copia de X em Z é um subespaço complementado em Z . Nesse caso Z é isomorfo a o espaço produto $X \oplus Y$.

Definição 2.4. *Dizemos que duas sequências exatas curtas $0 \longrightarrow X \xrightarrow{j_1} Z_1 \xrightarrow{q_1} Y \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow X \xrightarrow{j_2} Z_2 \xrightarrow{q_2} Y \longrightarrow 0$ são equivalentes, se existir um operador $T : Z_1 \longrightarrow Z_2$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \xrightarrow{q_1} & Y & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow T & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_2} & Z_2 & \xrightarrow{q_2} & Y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Observe que na definição anterior o operador T é em particular um isomorfismo entre os espaços Z_1 e Z_2 .

Usando a teoria desenvolvida por N. Kalton e N. Peck [37] podemos identificar cada soma torcida com uma aplicação quase linear.

Definição 2.5. *Sejam X, Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $\Omega : Y \longrightarrow X$ é uma aplicação quase linear se satisfaz as seguintes condições:*

- (a) $\Omega(\lambda y) = \lambda \Omega(y)$, para todo $y \in Y$ e $\lambda \in K$
- (b) $\|\Omega(y_1 + y_2) - \Omega(y_1) - \Omega(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|)$, para todo $y_1, y_2 \in Y$ onde M é uma constante independente de y_1, y_2 .

Proposição 2.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\Omega : Y \longrightarrow X$ uma aplicação quase linear. Então a fórmula*

$$\|(x, y)\|_\Omega = \|y\| + \|x - \Omega(y)\|$$

define uma quase-norma no espaço vetorial $X \times Y$ tal que $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ é uma soma torcida de X e Y .

Demonstração. É fácil verificar que $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ é um espaço quase-normado. Agora, observe que o subespaço $X' = \{(x, 0) : x \in X\}$ de $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ é isométrico a X e que $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)/X'$ é isométrico a Y . Com efeito, defina $j(x) = (x, 0)$, assim

$$\|j(x)\|_\Omega = \|(x, 0)\|_\Omega = \|x\|.$$

Completamos a afirmação observando que

$$\begin{aligned}
\|(x_0, y) + X'\|_\Omega &= \inf \{ \|(x_0, y) + (x, 0)\|_\Omega : x \in X \} \\
&= \inf \{ \|x - \Omega(y)\| + \|y\| : x \in X \} \\
&= \|y\|.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que $\|\cdot\|_\Omega$ uma quase-norma p convexa em $X \times Y$. Vamos mostrar que $X \times Y$ munido da métrica

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|_\Omega^p$$

é completo. Assim $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ é um espaço quase-Banach e portanto, $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ é uma soma torcida de X e Y .

Seja $(x_n, y_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $(X \times Y, d)$. Então, para todos $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^p &= \|(x_n - x_m, y_n - y_m) + X'\|^p \\ &\leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_\Omega^p \\ &= d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) \end{aligned}$$

assim $(y_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em Y , e portanto convergente a um $y \in Y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x'_n \in X$ tal que

$$\|(x'_n, y - y_n)\|_\Omega \leq \|(0, y_n - y) + X'\| + 1/n.$$

Assim, $(x'_n, y_n - y)$ converge para $(0, 0)$ em $(X \times Y, d)$. Notemos que $x_n - x'_n$ é uma sequência de Cauchy em X . De fato,

$$(x_n - x'_n, 0) = (x_n, y_n) - (x'_n, y_n - y) - (0, y).$$

Seja $x = \lim(x_n - x'_n)$. Então

$$\lim(x_n, y_n) = \lim(x_n - x'_n, 0) + (x'_n, y_n - y) + (0, y) = (x, y).$$

Portanto $(x_n, y_n)_n$ é convergente e $(X \times Y, d)$ é completo. □

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\Omega : Y \rightarrow X$ uma aplicação quase linear, denotamos por $X \oplus_\Omega Y$ a soma torcida $(X \times Y, \|\cdot\|_\Omega)$ obtida da sequência exata curta:*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{j} (X \times Y, \|\cdot\|_\Omega) \xrightarrow{q} Y \rightarrow 0,$$

onde $j(x) = (x, 0)$ e $q(x, y) = y$, para todos $x \in X$ e $y \in Y$.

Observe que tomando a aplicação quase linear nula $\Omega = 0$ a soma torcida $X \oplus_\Omega Y$ obtida é a soma trivial $X \oplus Y$. Em geral, veremos que a soma torcida $X \oplus_\Omega Y$ é trivial se, e somente se, Ω pode ser escrita da forma $\Omega = B + L$, onde $B, L : Y \rightarrow X$ são aplicações tais que B é homogênea e limitada (i.e. $\|By\| \leq C\|y\|$ para todo $y \in Y$ e C uma constante fixa) e L é linear.

A seguinte Proposição demonstra que existe uma correspondência entre as somas torcidas de X e Y e as aplicações quase lineares $\Omega : Y \rightarrow X$.

Proposição 2.8 (Kalton-Peck). *Cada sequência exata curta $0 \rightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \rightarrow 0$ é equivalente à sequência exata associada a uma soma torcida $X \oplus_\Omega Y$, para alguma aplicação quase linear $\Omega : Y \rightarrow X$.*

Demonstração. Seja $0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta. Segue, usando o axioma da escolha para tomar uma base de Hamel de Y , que existe uma aplicação linear $\theta : Y \longrightarrow Z$ tal que $q\theta = id_Y$, i.e., θ é uma inversa à direita de q . Do fato que $q : Z \longrightarrow Y$ é aberta, existe uma constante C e uma aplicação $\phi : Y \longrightarrow Z$ tal que

- (a) $\|\phi(y)\| \leq C \|y\|$, para todo $y \in Y$.
- (b) $q\phi(y) = y$, para todo $y \in Y$.
- (c) $\phi(\lambda y) = \lambda\phi(y)$, para todo $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Com efeito, pelo teorema da aplicação aberta existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}\mathfrak{B}_Y \subseteq q(\mathfrak{B}_Z)$. Vamos definir ϕ inicialmente em $S_Y = \{y \in Y : \|y\| = 1\}$. Considere sobre S_Y a seguinte relação de equivalência, $y_1 R y_2$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| = 1$ tal que $y_2 = \lambda y_1$. Para cada $y \in S_Y$, denotemos por $\bar{y}$ a classe de equivalência de y . Pelo axioma de escolha, consideremos $J = \bigcup_{\alpha \in I} \{y_\alpha\}$ um conjunto que contém um único representante de cada classe de equivalência. Para cada $y_\alpha \in J$, definamos $\phi(y_\alpha) = Cz_\alpha$ onde $y_\alpha = q(Cz_\alpha)$ para algum $z_\alpha \in \mathfrak{B}_Z$. Deste modo $\|\phi(y_\alpha)\| \leq C$ para todo $\alpha \in I$. Agora dado $y \in S_Y$, definimos $\phi(y) = \phi(y_\alpha)$ se $y \in \bar{y}_\alpha$. E para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y \in S_Y$ definamos $\phi(\lambda y) = \lambda\phi(y)$. Assim, para $y \in Y$, $y \neq 0$ arbitrário

$$\phi(y) = \|y\| \phi\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

e com isto ϕ satisfaz as propriedades enunciadas.

Como $\phi(y) - \theta(y) \in \ker(q) = j(X)$ e j é injetora, então definamos $\Omega(y) = j^{-1}(\phi(y) - \theta(y))$. Seja L tal que $\|j^{-1}z\| \leq L\|z\|$ para todo $z \in j(X)$. Assim, para todo $y_1, y_2 \in Y$

$$\begin{aligned} \|\Omega(y_1 + y_2) - \Omega(y_1) - \Omega(y_2)\| &= \|j^{-1}(\phi(y_1 + y_2) - \phi(y_1) - \phi(y_2))\| \\ &\leq L \|\phi(y_1 + y_2) - \phi(y_1) - \phi(y_2)\| \\ &\leq LK^2 (\|\phi(y_1 + y_2)\| + \|\phi(y_1)\| + \|\phi(y_2)\|) \\ &\leq LK^2C (\|y_1 + y_2\| + \|y_1\| + \|y_2\|) \\ &\leq 2LK^3C (\|y_1\| + \|y_2\|). \end{aligned}$$

Portanto, Ω é um operador quase linear, pois é claro que $\Omega(\lambda y) = \lambda\Omega(y)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Agora definamos $T : Z \longrightarrow X \oplus_\Omega Y$ mediante a fórmula

$$T(z) = (j^{-1}(z - \theta qz), qz).$$

Então

$$\begin{aligned}
\|T(z)\|_{\Omega} &= \|qz\| + \|j^{-1}(z - \theta(qz)) - j^{-1}(\phi(qz)) - \theta(qz)\| \\
&= \|qz\| + \|j^{-1}(z - \phi(qz))\| \\
&\leq \|qz\| + L\|z - \phi(qz)\| \\
&\leq \|qz\| + KL(\|z\| + \|\phi(qz)\|) \\
&\leq \|q\|\|z\| + KL(\|z\| + C\|q\|\|z\|) \\
&= (\|q\| + KL + KLC\|q\|)\|z\|.
\end{aligned}$$

Com isto, T é contínuo. Observemos que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{q} & Y & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \downarrow T & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & X \oplus_{\Omega} Y & \xrightarrow{q'} & Y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

comuta, pois

- $T(jx) = (j^{-1}(jx - \theta q(jx)), q(jx)) = (x, 0) = i(x)$ para todo $x \in X$
- $q'T(z) = qz$ para todo $z \in Z$.

O que completa a prova da proposição. □

A proposição anterior permite realizar o estudo das somas torcidas a partir do estudo das aplicações quase lineares. Por exemplo, para mostrar a equivalência entre duas somas torcidas será suficiente verificar uma relação de equivalência entre as aplicações quase lineares. Portanto, a seguinte definição é natural:

Definição 2.9. *Duas aplicações quase lineares $\Omega, \Phi : Y \rightarrow X$ são equivalentes, se as seqüências exatas associadas às somas torcidas $X \oplus_{\Omega} Y$ e $X \oplus_{\Phi} Y$ são equivalentes.*

Lema 2.10. *Duas aplicações quase lineares $\Omega, \Phi : Y \rightarrow X$ são equivalentes se, e somente, se existe uma constante C e uma aplicação linear $L : Y \rightarrow X$ tal que*

$$\|\Omega(y) - \Phi(y) + L(y)\| \leq C\|y\|, \quad \forall y \in Y$$

Demonstração. Ver [37, Teorema 2.5] □

Em particular, uma soma torcida $X \oplus_{\Omega} Y$ é trivial se, e somente se, Ω pode ser escrita da forma $\Omega = B + L$, onde $L : Y \rightarrow X$ é uma aplicação linear e $B : Y \rightarrow X$ é uma aplicação homogênea e limitada.

Por exemplo, suponhamos que $\Omega : Y \rightarrow X$ é uma aplicação quase linear que pode ser escrita da forma anterior $\Omega = B + L$. Então o operador $T : X \oplus Y \rightarrow X \oplus_\Omega Y$ definido por $T(x, y) = (x - Ly, y)$ faz o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus_\Omega Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A continuidade de T segue de

$$\|T(x, y)\|_\Omega = \|x - Ly - \Omega y\| + \|y\| = \|x - By\| + \|y\| \leq (C + 1)(\|x\| + \|y\|).$$

Na prática, construir aplicações quase lineares não triviais é um processo difícil. A seguinte proposição é uma simplificação na definição de aplicações quase lineares, permitindo sua definição num subespaço denso.

Proposição 2.11. *Sejam X e Y espaços de Banach e Y_0 um subespaço denso de Y . Se $\Omega_0 : Y_0 \rightarrow X$ é uma aplicação quase linear, então existe uma aplicação quase linear $\Omega : Y \rightarrow X$ tal que $\Omega(y) = \Omega_0(y)$, para todo $y \in Y_0$. Mais ainda, se $\Phi : Y \rightarrow X$ é uma aplicação quase linear tal que $\Phi(y) = \Omega_0(y)$, para todo $y \in Y_0$, então Ω e Φ são equivalentes.*

Demonstração. Ver [37, Teorema 3.1] □

Exemplo 2.12 (M. Ribe [48], 1979). *Existe uma soma torcida não trivial $\mathbb{R} \oplus_\Omega \ell_1$ de $\mathbb{R}$ com ℓ_1 que não é um espaço de Banach.*

Demonstração. De fato, Ribe construiu uma aplicação quase linear $\Omega : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega(x) = \sum x_i \log |x_i| - \left(\sum x_i \right) \log \left| \sum x_i \right|,$$

para todo $x \in \ell_1$ de suporte finito, onde escrevemos $0 \log 0 = 0$. Vejamos que a soma torcida $\mathbb{R} \oplus_\Omega \ell_1$ não é trivial: suponhamos por absurdo que Ω pode ser escrita da forma $\Omega = B + L$, com B homogênea e limitada e L linear, então existiria uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \Omega \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega e_i \right| = \left| B \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) - \sum_{i=1}^n B e_i \right| \leq Cn,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado,

$$\left| \Omega \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega e_i \right| = \left| \Omega \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \right| = n \log n.$$

Isto é uma contradição. Logo, $\mathbb{R} \oplus_{\Omega} \ell_1$ não é uma soma torcida trivial e a cópia de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R} \oplus_{\Omega} \ell_1$ não é complementada. Portanto, $\mathbb{R} \oplus_{\Omega} \ell_1$ não é um espaço de Banach, já que pelo teorema de Hahn-Banach todo subespaço de dimensão finita num espaço de Banach é complementado. $\square$

Definição 2.13. *Sejam X e Y espaços de Banach e $\Omega : Y \rightarrow X$ uma aplicação quase linear. Dizemos que Ω é singular se para todo subespaço fechado de dimensão infinita W de Y , a restrição $\Omega|_W$ não é trivial.*

Teorema 2.14. *Seja $\Omega : Y \rightarrow X$ uma aplicação quase linear associada a uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} X \oplus_{\Omega} Y \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0.$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

1. Ω é singular.
2. A aplicação quociente q é estritamente singular.
3. Não existe um subespaço fechado de dimensão infinita Z de $X \oplus_{\Omega} Y$ tal que $j(X) \oplus Z$ seja uma soma direta topológica dentro de $X \oplus_{\Omega} Y$.

Demonstração. Ver [13]. $\square$

2.3 Definição de Z_2 e propriedades

Um problema atribuído a Palais [17] é: se X é um espaço de Banach e Y é um subespaço de X tal que Y e X/Y são isomorfos a um espaço de Hilbert, então X deve ser também isomorfo a um espaço de Hilbert? Em termos de somas torcidas, o problema de Palais questiona a existência de uma soma torcida não trivial de ℓ_2 e ℓ_2 . Esse problema foi resolvido por Enflo, Lindenstrauss e Pisier em 1975 [17] usando a estrutura de subespaços de dimensão finita de ℓ_2 . Pouco tempo depois, Kalton e Peck em 1979 [37] desenvolveram uma abordagem geral das somas torcidas a partir de operadores quase lineares e, inspirados na construção de Ribe, construíram os espaços de Banach Z_p , chamados de espaços de Kalton-Peck, que correspondem a somas torcidas não triviais de ℓ_p com ℓ_p ($1 < p < \infty$). Em particular, para o caso de espaços de Hilbert, o espaço Z_2 tem várias propriedades interessantes que estudaremos brevemente nesta seção.

Seja $c_{00} \subseteq \ell_2$ o subespaço das sequências com suporte finito. Defina $\tilde{\Omega}_2 : c_{00} \rightarrow \ell_2$

$$\tilde{\Omega}_2(x) = \sum x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} e_n$$

para cada $x = \sum x_n e_n \in c_{00}$, onde o somando $x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} e_n$ será entendido como 0 quando $x_n = 0$.

Lema 2.15. $\tilde{\Omega}_2 : c_{00} \rightarrow \ell_2$ é uma aplicação quase linear.

Demonstração. Ver [37, Teorema 3.7] □

Seja $\Omega_2 : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ uma aplicação quase linear obtida da Proposição 2.11, que estende $\tilde{\Omega}_2$. O espaço de *Kalton-Peck*, que denotaremos por Z_2 , está definido como sendo a soma torcida $\ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2$. Z_2 é uma soma torcida não trivial. A quase norma associada a Ω_2 é equivalente a uma norma e, portanto, Z_2 é um espaço de Banach. Claramente, a sequência de espaços $E_n = \text{span}\{(e_n, 0), (0, e_n)\}$ forma uma decomposição de Schauder 2-dimensional de Z_2 . Tal decomposição é 1- incondicional, i.e., $\|\sum w_n\|_{\Omega_2} = \|\sum \theta_n w_n\|_{\Omega_2}$, para qualquer sequência finita de vetores $w_n \in E_n$ e de sinais $\theta_n = \pm 1$. A decomposição $Z_2 = \sum E_n$ também possui certa propriedade simétrica. De fato, se $x, y \in c_{00}$ e σ uma permutação de $\mathbb{N}$

$$\|(x, y)\|_{\Omega_2} = \|(u_\sigma(x), u_\sigma(y))\|_{\Omega_2},$$

onde u_σ denota o operador em ℓ_2 tal que $u_\sigma(x) = \sum x_{\sigma(n)} e_n$, para cada $x = \sum x_n e_n$.

Assim, $\{(e_1, 0), (0, e_1), (e_2, 0), (0, e_2), \dots\}$ é uma base de Schauder para Z_2 , porém não é incondicional. Na verdade, Z_2 não admite bases incondicionais:

Teorema 2.16 ([35] Johnson, Lindenstrauss, Schechtman, 1980). *Z_2 não possui estrutura local incondicional.*

Outra interessante propriedade de Z_2 está na estrutura de seus subespaços complementados.

Teorema 2.17. *Todo subespaço complementado W de dimensão infinita de Z_2 contém um subespaço complementado e isomorfo a Z_2 .*

Demonstração. Ver [35] □

Em particular, Z_2 não contém cópias complementadas de ℓ_2 . Decorre também do Teorema 2.17 que todo espaço de dimensão infinita complementado de Z_2 tem complemento único, ou seja, se $Z_2 \simeq H \oplus X \simeq H \oplus Y$, então $X \simeq Y$.

Por último, destacamos que a restrição de Ω_2 a subespaços fechados de dimensão infinita de ℓ_2 não é trivial.

Teorema 2.18 (Kalton, Peck). *A aplicação quase linear Ω_2 é singular.*

Demonstração. Ver [37] □

A seguinte é uma conjectura que permanece desde a década de 1980.

Conjectura: Z_2 não é isomorfo a seus hiperplanos.

2.4 Dual de uma soma torcida

Dada uma soma torcida de espaços de Banach

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} X \oplus_{\Omega} Y \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$

ao tomar os respectivos operadores transpostos, obtemos uma sequência exata curta de espaços duais:

$$0 \longrightarrow Y^* \xrightarrow{q^*} (X \oplus_{\Omega} Y)^* \xrightarrow{j^*} X^* \longrightarrow 0.$$

Uma pergunta interessante é a relação entre a aplicação Ω e a aplicação quase linear $\Omega^* : X^* \rightarrow Y^*$ que define a soma torcida dual. No caso de Z_2 , temos uma representação explícita.

Para cada vetor $x \in \ell_2$, denotamos por $x^* \in \ell_2^*$ o funcional linear de ℓ_2 tal que $x^*(y) = \langle x, y \rangle$ para todo $y \in \ell_2$.

Lema 2.19 ([11], Proposição 16.12). Z_2^* e $\ell_2^* \oplus_{\Omega_2^*} \ell_2^*$ são equivalentes, onde $\Omega_2^* : \ell_2^* \rightarrow \ell_2^*$ é a aplicação quase linear tal que

$$\Omega_2^*(x^*) = (-\Omega_2(x))^*$$

em vetores $x \in \ell_2$ de suporte finito.

Demonstração. Seja T a aplicação linear definida por

$$T(x^*, y^*)(u, v) = x^*(v) + y^*(u) = \langle x, v \rangle + \langle y, u \rangle$$

Vamos provar que $T : \ell_2^* \oplus_{\Omega_2^*} \ell_2^* \rightarrow Z_2^*$ é um operador contínuo que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2^* & \xrightarrow{j} & \ell_2^* \oplus_{\Omega_2^*} \ell_2^* & \xrightarrow{p} & \ell_2^* \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow T & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2^* & \xrightarrow{q^*} & (\ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2)^* & \xrightarrow{i^*} & \ell_2^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $j(x^*) = (x^*, 0)$ e $p(x^*, y^*) = y^*$.

Inicialmente vejamos que o diagrama é comutativo. Seja $x^* \in \ell_2^*$, então $Tjx^*(u, v) = T(x^*, 0)(u, v) = x^*(v)$ e $q^*x^*(u, v) = x^*q(u, v) = x^*(v)$, para todo $u, v \in \ell_2$. Portanto, $Tjx^* = q^*x^*$.

Por outro lado, seja $(x^*, y^*) \in \ell_2^* \oplus_{\Omega_2^*} \ell_2^*$, então $p(x^*, y^*) = y^*$ e $i^*T(x^*, y^*)u = T(x^*, y^*)iu = T(x^*, y^*)(u, 0) = y^*u$, para todo $u \in \ell_2$. Portanto, $p(x^*, y^*) = i^*T(x^*, y^*)$.

Para mostrar que T está bem definida e é contínua observe que é suficiente encontrar $K > 0$ tal que

$$|T(x^*, y^*)(u, v)| \leq K\|(x^*, y^*)\|_{\Omega_2^*}\|(u, v)\|_{\Omega_2},$$

para todo $x, y, u, v \in \ell_2$. Usando a notação $\langle, \rangle$ para avaliação de funcionais, segue que

$$\begin{aligned}
& | \langle x^*, v \rangle + \langle y^*, u \rangle | \\
& \leq | \langle x^* - \Omega_2^* y^*, v \rangle | + | \langle y^*, u - \Omega_2 v \rangle | + | \langle \Omega_2^* y^*, v \rangle + \langle y^*, \Omega_2 v \rangle | \\
& \leq \|x^* - \Omega_2^* y^*\|_2 \|v\|_2 + \|y^*\|_2 \|u - \Omega_2 v\|_2 + | \langle (-\Omega_2 y)^*, v \rangle + \langle y^*, \Omega_2 v \rangle | \\
& \leq \|(x^*, y^*)\|_{\Omega_2^*} \|(u, v)\|_{\Omega_2} + \|(x^*, y^*)\|_{\Omega_2^*} \|(u, v)\|_{\Omega_2} + | \langle y, \Omega_2 v \rangle - \langle \Omega_2 y, v \rangle |
\end{aligned}$$

Portanto, é suficiente encontrar $K > 0$ tal que

$$| \langle y, \Omega_2 v \rangle - \langle \Omega_2 y, v \rangle | \leq K \|y\|_2 \|v\|_2$$

o que é uma consequência da desigualdade

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \log \left| \frac{a_i}{b_i} \right| \right| \leq \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)/e,$$

para toda sequência finita de escalares reais a_k e b_k , onde cada somando da direita será entendido como 0 quando $a_k = 0$ ou $b_k = 0$. $\square$

2.5 O espaço de Kalton-Peck complexo

No capítulo 5, consideramos a versão complexa do espaço de Kalton-Peck que consiste em fazer a soma torcida de $\ell_2(\mathbb{C})$ com $\ell_2(\mathbb{C})$ associada à versão complexa da aplicação quase linear Ω_2 . Isto é, seja $\Omega_2^{\mathbb{C}} : \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$ a aplicação quase linear que estende a aplicação $\tilde{\Omega}_2^{\mathbb{C}} : c_{00}(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$ definida por

$$\tilde{\Omega}_2^{\mathbb{C}}(z) = \sum z_n \log \frac{\|z\|_2}{z_n} e_n,$$

para cada sequência complexa $z = \sum z_n e_n \in c_{00}(\mathbb{C})$ de suporte finito.

Denotamos por $Z_2(\mathbb{C})$ a soma torcida $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus_{\Omega_2^{\mathbb{C}}} \ell_2(\mathbb{C})$.

Capítulo 3

Estruturas complexas em espaços de Banach

Neste capítulo, são introduzidos os conceitos básicos e algumas propriedades fundamentais da teoria de estruturas complexas. Em particular, estudamos o problema de unicidade de estrutura complexa. Na seção 3.3 é obtida uma condição suficiente para a unicidade de estrutura complexa em espaços com base subsimétrica. Na seção 3.4, estudamos algumas propriedades de espaços de Banach que são herdadas do espaço real a suas estruturas complexas.

3.1 Definição de estruturas complexas

Uma estrutura complexa num espaço de Banach X é um espaço de Banach complexo $\mathbb{R}$ -linearmente isomorfo a X . Seja Z uma estrutura complexa em X , denotemos por $T : X \rightarrow Z$ um isomorfismo $\mathbb{R}$ -linear de X sobre Z . A multiplicação pelo número complexo i em vetores de X , herdada de Z , está dada pelo operador $Ix = T^{-1}(iT x)$. Claramente, I satisfaz que $I^2 = -Id$. Reciprocamente, todas as estruturas complexas em X estão determinadas por operadores $\mathbb{R}$ -lineares $I : X \rightarrow X$ tais que $I^2 = -Id$. De fato, quando tais operadores existem, podemos dotar a X de uma estrutura de $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, definindo uma multiplicação por escalares complexos da seguinte forma: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, então

$$(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta I(x).$$

O espaço complexo obtido será denotado por X^I , que munido da norma

$$\|x\| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|e^{i\theta} x\|,$$

é um espaço de Banach complexo.

Definição 3.1. *Um espaço de Banach X admite estrutura complexa se existe um operador $\mathbb{R}$ -linear T em X tal que $T^2 = -Id$.*

Observamos facilmente, que o quadrado de um espaço de Banach sempre admite uma estrutura complexa. Com efeito, $J : X \oplus X \rightarrow X \oplus X$, dada por $J(x, y) = (-y, x)$, é um operador $\mathbb{R}$ -linear que satisfaz $J^2 = -Id$. Essa estrutura complexa é chamada de complexificação de X , cujo uso é clássico em, por exemplo, a teoria espectral.

Neste trabalho, os operadores $\mathbb{R}$ -lineares T de um espaço de Banach X , tal que $T^2 = -Id$, serão chamados também de estruturas complexas em X . Note que uma estrutura complexa I num espaço de Banach *real* X é um automorfismo cuja inversa é $-I$ que, por sua vez é em si uma estrutura complexa em X .

Seja Z um espaço de Banach complexo. Então Z é também um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Denotemos esse espaço por $Z_{\mathbb{R}}$. Logo, o operador $\mathbb{R}$ -linear $I : Z_{\mathbb{R}} \rightarrow Z_{\mathbb{R}}$, definido por $Ix = ix$, induz uma estrutura complexa em $Z_{\mathbb{R}}$ e o espaço complexo obtido $Z_{\mathbb{R}}^I$ é exatamente Z .

Definição 3.2. *Duas estruturas complexas X^I e X^J em X são chamadas equivalentes se existe um automorfismo $\mathbb{R}$ -linear $T : X \rightarrow X$ tal que $TI = JT$.*

Note que a definição anterior é equivalente a dizer que os espaços complexos X^I e X^J são $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfos. Para ver isso, basta observar que a relação $TI = JT$ na verdade significa que o operador T é $\mathbb{C}$ -linear visto de X^I em X^J .

No caso de estruturas complexas, a equivalência se mantém sobre perturbações estritamente singulares.

Proposição 3.3 (Ferenczi- Galego, [22]). *Sejam I e J duas estruturas complexas num espaço de Banach real X tais que $I - J$ é um operador estritamente singular. Então I e J são equivalentes.*

Demonstração. Consideremos o operador $\mathbb{R}$ -linear $\alpha = I + J$ em X . Por hipótese, $\alpha = 2I + S$, onde $S : X \rightarrow X$ é estritamente singular. Assim, α é uma perturbação estritamente singular de um operador de Fredholm real de índice 0. Em virtude da teoria de Fredholm, α é por sua vez de Fredholm de índice 0. Ou seja, a imagem $\alpha(X)$ é um subespaço fechado de X e

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker \alpha = \dim_{\mathbb{R}} X / \alpha(X) < \infty$$

Por outro lado, observemos que

$$\alpha I = -Id + JI = J\alpha.$$

Logo, α como operador do espaço complexo X^I em X^J é $\mathbb{C}$ -linear. Então, $\alpha(X^I)$ é fechado em X^J e

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker \alpha = \dim_{\mathbb{C}} X^J / \alpha(X^I) < \infty.$$

Portanto, α é de Fredholm de índice 0 como operador complexo. Assim, existem subespaços complexos fechados X_1, A de X^I e X_2, B de X^J , tais que

$$X^I = X_1 \oplus A,$$

$$X^J = X_2 \oplus B,$$

onde $\dim_{\mathbb{C}} A = \dim_{\mathbb{C}} B < \infty$, e $\alpha|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_2$ é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear. Tomemos β um isomorfismo complexo entre A e B . Segue que, o operador $\gamma : X^I \rightarrow X^J$, definido por $\gamma(x_1 + a) = \alpha(x_1) + \beta(a)$ é um isomorfismo $\mathbb{C}$ linear entre X^I e X^J . Portanto, I é equivalente a J . $\square$

A Proposição 3.3 pode ser estendida utilizando perturbações ‘essencialmente’ singulares (ver [22, Lema 20]).

Estruturas complexas nem sempre existem em espaços de Banach. Por exemplo, um espaço de Banach real de dimensão finita admite estrutura complexa se, e somente se, tem dimensão par. O primeiro exemplo na literatura de espaço de Banach de dimensão infinita sem estrutura complexa foi obtido por J. Dieudonné [16] (1952), verificando que o espaço de James não admite estrutura complexa. Outros exemplos de espaços sem estruturas complexas são o espaço uniformemente convexo construído por S. Szarek [51] (1986), e o espaço de Banach real H.I construído por W. T. Gowers e B. Maurey [32] (1993). Gowers [29] (1994) e S. A. Argyros, K. Beanland e T. Raikoftsalis [4] (2012) também construíram espaços com base incondicional sem estruturas complexas, o segundo sendo um espaço weak Hilbert. Em geral, esses espaços têm poucos operadores. Por exemplo, cada operador no espaço real de Gowers-Maurey é uma perturbação estritamente singular de um múltiplo da identidade, e isso proíbe a existência de estruturas complexas: suponha que T é um operador neste espaço tal que $T^2 = -Id$, e escrevamos $T = \lambda Id + S$ com S um operador estritamente singular. Segue-se que $(\lambda^2 + 1)Id$ é estritamente singular, pois os operadores estritamente singulares formam um ideal, portanto $\lambda^2 + 1 = 0$, que é impossível.

Outros exemplos de espaços de Banach sem estrutura complexa foram construídos por P. Koszmider, M. Martín e J. Merí [40, 41] (2009, 2011). De fato, eles introduziram o conceito de *espaço de Banach extremamente não complexo*: Um espaço de Banach real X é extremamente não complexo se cada operador $T : X \rightarrow X$ satisfaz a igualdade em norma $\|Id + T^2\| = 1 + \|T\|^2$. Entre os exemplos de espaços extremamente não complexos estão espaços da forma $C(K)$ com poucos operadores (e.g. todo operador T de $C(K)$ é da forma $T = gId + S$ onde $g \in C(K)$ e S é um operador fracamente compacto em $C(K)$); um espaço $C(K)$ contendo uma copia isomorfa e complementada de ℓ_{∞} (tendo, assim, um espaço mais rico do operadores do que o primeiro

mencionado); e um espaço de Banach extremamente não complexo não isomorfo a nenhum $C(K)$.

Com o propósito de apresentar exemplos de espaços de Banach com estrutura complexa, introduzimos dois espaços: O conjugado de um espaço complexo e a complexificação.

Definição 3.4. *Seja Z um espaço de Banach complexo. O complexo conjugado de Z , que denotaremos por $\bar{Z}$, é o espaço de Banach complexo com os mesmos elementos de Z munido da seguinte lei de multiplicação por escalares: se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $z \in Z$, então $\lambda z := \bar{\lambda}z$.*

Observamos que todo espaço de Banach complexo X com base incondicional $\{x_n\}_n$ é isomorfo a seu conjugado. De fato, o operador $\sum_{i=1}^n \lambda_n x_n \rightarrow \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_n x_n$ é um isomorfismo complexo entre X e $\bar{X}$.

Claramente, o complexo conjugado de uma estrutura complexa X^I é X^{-I} . Como espaços reais, Z e $\bar{Z}$ são idênticos ($\mathbb{R}$ -linearmente isométricos). Por outro lado, J. Bourgain [12] (1986) e N. Kalton [36] (1995) construíram exemplos de espaços de Banach complexos não isomorfos a seus correspondentes conjugados complexos, desse modo, esses espaços admitem pelo menos duas estruturas complexas não $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfas. O exemplo de Bourgain é uma soma ℓ_2 de espaços de dimensão finita cuja distância a seus conjugados tende ao infinito; enquanto o exemplo de Kalton é uma soma torcida de dois espaços de Hilbert i.e., X tem um subespaço fechado E tal que E e X/E são isomorfos a ℓ_2 , embora X não seja isomorfo a um espaço de Hilbert. Recentemente, R. Anisca [3] (2007) construiu um espaço complexo weak Hilbert não isomorfo a seu conjugado complexo.

Agora, vamos lembrar o processo de complexificação de um espaço vetorial e introduzir nele uma norma adequada. Seja X um espaço de Banach real. A complexificação de X , que denotaremos por $X \oplus_{\mathbb{C}} X$, é o espaço vetorial $X \times X$ de todos os pares ordenados $z = (x, y)$ junto com a operação usual de multiplicação complexa: se $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x).$$

É conveniente identificar cada ponto x de X com o ponto $(x, 0)$ de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Existem infinitas normas (equivalentes) em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ que o tornam um espaço de Banach complexo. Aqui, consideraremos uma norma de tal forma que a identificação canônica de X como subespaço de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ seja uma isometria:

$$\|(x, y)\| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} (\|\cos \theta x - \sin \theta y\|^2 + \|\cos \theta y + \sin \theta x\|^2)^{1/2}.$$

Para outras considerações sobre possíveis escolhas de normas razoáveis em espaços complexifi-

cados sugerimos os resultados de G. Muñoz, Y. Sarantopoulos e A. Tonge [46].

Note que a complexificação de um espaço de Banach real X pode ser igualmente definida como o espaço de Banach complexo $(X \oplus X)^I$ onde I é a estrutura complexa em $X \oplus X$ dada por $I(x, y) = (-y, x)$ para todo $x, y \in X$, e o produto cartesiano $X \oplus X$ está munido da norma $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ ($x, y \in X$).

O complexificado dos espaços clássicos c_0 , ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$), L_p ($1 \leq p \leq \infty$) e $C[0, 1]$ é isomorfo aos espaços complexos $c_0(\mathbb{C})$, $\ell_p(\mathbb{C})$ ($1 \leq p \leq \infty$), $L_p(\mathbb{C})$ ($1 \leq p \leq \infty$) e $C[0, 1]$.

É claro que, para cada espaço de Banach real X , o espaço complexificado $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ é $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfo a seu conjugado complexo $(T : X \oplus_{\mathbb{C}} X \rightarrow \overline{X \oplus_{\mathbb{C}} X})$ dado por $T(x, y) = (x, -y)$ é um isomorfismo). Por outro lado, nem todos os espaços de Banach complexos são a complexificação de espaços reais, por exemplo, os espaços construídos por Bourgain [12] e Kalton [36], que não são isomorfos a seus conjugados. Um outro exemplo é um espaço de Banach H.I complexo construído por Ferenczi [20] que também é H.I como real, portanto não decomponível.

Seja X um espaço de Banach real, dado $T : X \rightarrow X$ um operador em X , o correspondente operador complexo $T \oplus T$ em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$, induzido por T , está definido por $T \oplus T(x, y) = (Tx, Ty)$. Observe que $\|T \oplus T\| \leq 2\|T\|$:

$$\begin{aligned} \frac{\|T \oplus T(x, y)\|}{\|(x, y)\|} &\leq \frac{\|(Tx, 0)\| + \|(0, Ty)\|}{\|(x, y)\|} = \frac{\|Tx\| + \|Ty\|}{\|(x, y)\|} \leq \\ &\|T\| \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{\|(x, y)\|} \right) \leq 2\|T\|. \end{aligned}$$

O espaço dual do complexificado de X é isomorfo à complexificação do espaço dual X^* . De fato, a aplicação $\psi : X^* \oplus_{\mathbb{C}} X^* \rightarrow (X \oplus_{\mathbb{C}} X)^*$ tal que $\psi(f, g)(x, y) = (f(x) - g(y), f(y) + g(x))$, para todo $f, g \in X^*$ e $x, y \in X$, é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear.

Vamos agora mostrar um novo resultado que relaciona as estruturas complexas e o espaço complexificado.

Lema 3.5. *Seja X um espaço de Banach real e X^J uma estrutura complexa em X . Então X^J é isomorfo a um subespaço complementado de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Além disso, $X^J \oplus X^{-J} \cong X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Demonstração. Observemos primeiro que $X_1 = \{(x, -Jx), x \in X\}$ e $X_2 = \{(x, Jx), x \in X\}$ são subespaços complexos fechados de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. De fato, são invariantes sobre multiplicação de escalares complexos

$$i(x, -Jx) = (Jx, x) = (Jx, -J(Jx)) \in X_1,$$

$$i(x, Jx) = (-Jx, x) = (-Jx, J(-Jx)) \in X_2.$$

São subespaços fechados, pois são gráficos de funções contínuas. Além disso, $X_1 \oplus X_2 = X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Claramente $X_1 \cap X_2 = \{(0, 0)\}$ e cada $(x, y) \in X \oplus_{\mathbb{C}} X$ admite a seguinte representação única

$$(x, y) = 1/2(x + Jy, Jx - y) + 1/2(x - Jy, Jx + y).$$

Resta provar que $X_1 \cong X^J$ e $X_2 \cong X^{-J}$. Para ver isso, notemos que as imersões canônicas $T_1 : X^J \rightarrow X_1$ e $T_2 : X^{-J} \rightarrow X_2$ definidas por

$$T_1 x = (x, -Jx),$$

$$T_2 x = (x, Jx),$$

são isomorfismos $\mathbb{C}$ -lineares. □

3.2 Problema da unicidade de estrutura complexa

Nesta seção, vamos tratar o problema de unicidade de estrutura complexa.

Proposição 3.6 ([21] Kalton, 2010). *Seja X um espaço de Banach real tal que o espaço complexificado de X é primário. Então X admite no máximo uma estrutura complexa*

Demonstração. Suponhamos que existe I uma estrutura complexa em X . Segue do Lema 3.5, que $X \oplus_{\mathbb{C}} X \cong X^I \oplus X^{-I}$. Por hipótese, $X^I \cong X \oplus_{\mathbb{C}} X$ ou $X^{-I} \cong X \oplus_{\mathbb{C}} X$. No segundo caso, $\overline{X^{-I}} \cong \overline{X \oplus_{\mathbb{C}} X} \cong X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Portanto, $X^I \cong X \oplus_{\mathbb{C}} X$, i.e., todas as estruturas complexas em X são isomorfas à complexificação de X . □

Consequentemente, os espaços clássicos c_0 , ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$), L_p ($1 \leq p \leq \infty$) e $C[0, 1]$ admitem estrutura complexa única.

Outro exemplo de espaço de Banach real $X(\mathbb{H})$ com estrutura complexa única, diferente dos espaços clássicos foi construído por V. Ferenczi [20]. Esse exemplo é um espaço H.I. com a propriedade que o quociente $\mathcal{L}(X(\mathbb{H}))/\mathcal{S}(X(\mathbb{H}))$ é isomorfo a álgebra dos quaternios.

Uma pergunta em aberto na teoria de estruturas complexas é de saber se a existência de maior regularidade do espaço implica em unicidade de existência de estruturas complexas. Especificamente,

Problema aberto 1: Existe um espaço de Banach real com base incondicional que admita pelo menos duas estruturas complexas?

No caso incondicional, temos exemplos de espaços de Banach admitindo nenhuma ou única estrutura complexa. Por exemplo, o espaço construído por W.T. Gowers [29] com base incondicional em que cada operador é uma perturbação estritamente singular de um operador diagonal não tem estruturas complexas, isso segue imediatamente da propriedade dos operadores. Por outro lado, V. Ferenczi [20] apresentou um espaço de Banach, diferente dos ℓ_p 's e L_p 's, com base incondicional e estrutura complexa única.

A pergunta da unicidade ainda é interessante em espaços com mais regularidade. Por exemplo, quando o espaço tem uma base subsimétrica. Lembremos que uma sequência $\{x_n\}_n$ de vetores de um espaço de Banach X é uma base subsimétrica de X se for uma base de Schauder incondicional, e para cada sequência crescente de inteiros positivos $\{k_n\}_n$, $\{x_{k_n}\}_n$ é equivalente a $\{x_n\}_n$. Note que, neste caso o espaço admite pelo menos uma estrutura complexa, pois o espaço é isomorfo a seu quadrado. A base canônica dos espaços clássicos ℓ_p ($1 \leq p < \infty$), c_0 é subsimétrica e sabemos a partir da Proposição 3.6 que esses espaços admitem estrutura complexa única. Isso nos leva à seguinte pergunta:

Problema aberto 2: Todo espaço de Banach real com base subsimétrica possui estrutura complexa única?

Esta questão está fortemente relacionada com a conjectura clássica [43]: *Todo espaço de Banach com base simétrica é primário?* De fato, uma resposta positiva a esta conjectura implica uma solução positiva para a versão simétrica do Problema aberto 2. É suficiente notar que a complexificação de um espaço com base simétrica tem uma base simétrica (Proposição 3.9) e, pela Proposição 3.6, o espaço deve ter no máximo uma estrutura complexa a menos de isomorfismo.

Nessa direção, na próxima seção apresentamos respostas parciais do Problema 2.

3.3 Estruturas complexas em espaços de Banach com base subsimétrica

Nesta seção, provamos uma condição suficiente para que um espaço de Banach real E com base subsimétrica admita estrutura complexa única. Esta condição depende da propriedade do espaço ser isomorfo ao espaço de sequências $E[E]$ associado à base (ver Teorema 3.17). Em particular, quando $E = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) ou $E = c_0$ esta propriedade é satisfeita, mas existem outros exemplos [47].

É também uma questão em aberto determinar se a propriedade: *ter base de Schauder* é herdada do espaço real para as suas estruturas complexas, no entanto, uma resposta positiva é obtida quando se passa de X a sua complexificação.

Lema 3.7. *Seja X um espaço de Banach real e $\{x_n\}_n$ uma sequência de X . Então $\{x_n\}_n$ é uma base de Schauder de X se, e somente se, $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base de Schauder de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{x_n\}_n$ é uma base de Schauder de X . Seja (x, y) um elemento de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Temos que existem únicos escalares $(\alpha_n)_n$ e $(\beta_n)_n$ tais que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n.$$

Assim,

$$\|(x, y) - \sum_{n=1}^k (\alpha_n + i\beta_n)(x_n, 0)\| \leq \|x - \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n\| + \|y - \sum_{n=1}^k \beta_n x_n\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, cada vetor em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ possui uma representação da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x_n, 0)$. Esta representação é única, pois se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x_n, 0)$ converge para (x, y) então $\sum_{n=1}^{\infty} \Re(\lambda_n)x_n = x$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \Im(\lambda_n)x_n = y$.

Reciprocamente, suponhamos que $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base de Schauder de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ para uma sequência $\{x_n\} \subseteq X$. Então para cada $x \in X$ o vetor $(x, 0) \in X \oplus_{\mathbb{C}} X$ pode ser escrito de forma única como $(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(x_n, 0)$ (α_n, β_n reais). Segue do comentário acima, que a representação $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ é única. $\square$

O resultado anterior também é válido para espaços com base incondicional, simétrica e subsimétrica como observamos nos seguintes Lemas.

Lema 3.8. *Seja $\{x_n\}_n$ uma base incondicional de um espaço de Banach real X . Então $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base incondicional de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Demonstração. Sabemos que $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base de Schauder de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Então precisamos provar que, para cada $(x, y) \in X \oplus_{\mathbb{C}} X$ sua expansão em termos da base $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(x_n, 0)$ converge incondicionalmente. Por [43, Prop. 1.c.1], é suficiente mostrar que para cada escolha de sinais $(\theta_n)_n$ (i.e. $\theta_n = \pm 1$), a série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(\alpha_n + \beta_n)(x_n, 0)$ converge. Portanto, a prova do Lema decorre observando que

$$\left\| \sum_{n=k}^m \theta_n(\alpha_n + \beta_n)(x_n, 0) \right\| \leq \left\| \sum_{n=k}^m \theta_n \alpha_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n=k}^m \theta_n \beta_n x_n \right\| \xrightarrow{k, m \rightarrow \infty} 0,$$

onde os limites são zero, pois $\{x_n\}$ é uma base incondicional de X . $\square$

Lema 3.9. *Seja $\{x_n\}_n$ uma base simétrica de um espaço de Banach real X . Então $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base simétrica de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\{(x_n, 0)\}$ é equivalente a $\{(x_{\pi(n)}, 0)\}$ para cada permutação π . Fixemos π uma permutação de $\mathbb{N}$, e seja $C > 0$ tal que para cada sequência finita não nula de números reais $\{a_n\}_n$

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n a_n x_{\pi(n)} \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_n x_n \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n a_n x_{\pi(n)} \right\|.$$

Então, para uma sequência finita não nula de escalares complexos $\{\alpha_n + i\beta_n\}_n$, temos

$$\begin{aligned} (2C)^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_n + i\beta_n)(x_{\pi(n)}, 0) \right\| &\leq (2C)^{-1} \left(\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_n x_{\pi(n)} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \beta_n x_{\pi(n)} \right\| \right) \\ &\leq 2^{-1} \left(\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_n x_n \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \beta_n x_n \right\| \right) \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_n + i\beta_n)(x_n, 0) \right\| \\ &\leq \left(\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_n x_n \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \beta_n x_n \right\| \right) \\ &\leq C \left(\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_n x_{\pi(n)} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \beta_n x_{\pi(n)} \right\| \right) \\ &\leq 2C \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_n + i\beta_n)(x_{\pi(n)}, 0) \right\| \end{aligned}$$

Portanto, $\{(x_n, 0)\}$ é equivalente a $\{(x_{\pi(n)}, 0)\}$. □

Lema 3.10. *Seja $\{x_n\}_n$ uma base subsimétrica de um espaço de Banach real X . Então $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base subsimétrica de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Demonstração. Segue do Lema 3.8 que, $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base incondicional de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. A demonstração que $\{x_{k_n}\}_n$ é equivalente a $\{x_n\}_n$, para toda sequência crescente de inteiros positivos $\{k_n\}_n$, é similar à prova do Lema anterior. □

Utilizando a relação entre as projeções de espaços com base subsimétrica de P. G. Casazza-Bor-Luh Lin (Proposição 1.14) podemos demonstrar que a complexificação de um espaço de Banach com base subsimétrica X é complementado em toda estrutura complexa de X .

Proposição 3.11. *Seja X um espaço de Banach com uma base subsimétrica $\{x_n\}_n$. Então para cada estrutura complexa X^J em X , X^J e $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ são complementados um no outro.*

Demonstração. Já vimos que $\{(x_n, 0)\}_n$ é uma base subsimétrica para o complexificado de X . Pelo Lema 3.5, X^J é complementado em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$, mais ainda $X^J \oplus X^{-J} \simeq X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Segue da Proposição 1.14 que X^J ou X^{-J} contém um subespaço fechado E complementado em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ e isomorfo a $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Suponhamos que E está contido em X^J , então E é complementado em X^J . Portanto, $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ é complementado em X^J . Agora, se E está contido em X^{-J} , usando o mesmo argumento temos que $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ está complementado em X^{-J} . Assim, $X \oplus_{\mathbb{C}} X \simeq \overline{X \oplus_{\mathbb{C}} X}$ é complementado em $\overline{X^{-J}} = X^J$. $\square$

A partir da Proposição 3.11 observamos que o problema da unicidade de estrutura complexa em espaços de Banach com base subsimétrica também está relacionado com o *problema de Schroeder-Bernstein para espaços de Banach (SBP)*. De fato, *SBP* questiona se dados dois espaços de Banach X e Y tais que X é isomorfo a um subespaço complementado de Y e Y é isomorfo a um subespaço complementado de X , então X e Y devem ser isomorfos? A resposta negativa a esse problema foi dada por Gowers [30] em 1996. Porém não são conhecidos contra-exemplos do *SBP* com base incondicional.

O seguinte corolário segue imediato a partir do método de decomposição de Pełczyński.

Corolário 3.12. *Seja X um espaço de Banach real com base subsimétrica, e J uma estrutura complexa em X tal que X^J é $\mathbb{C}$ -linearmente isomorfo a seu quadrado. Então $X^J \simeq X \oplus_{\mathbb{C}} X$.*

Uma pergunta em aberto é determinar se dado um espaço de Banach real X isomorfo a seu quadrado, então toda estrutura complexa X^J deve ser isomorfa a seu quadrado? Se a resposta a esse problema fosse afirmativa, então teríamos a unicidade de estrutura complexa em espaços com base subsimétrica, pois todo espaço com base subsimétrica é isomorfo a seu quadrado.

Inspirados na prova do método de decomposição de Pełczyński, apresentamos no Teorema 3.17 uma condição suficiente para a unicidade de estrutura complexa em espaços de Banach com base subsimétrica. Para isto, primeiro precisamos introduzir certo tipo de espaço de seqüências e provar algumas de suas propriedades.

Dado um espaço de Banach E com uma base 1-incondicional $\{e_n\}_n$, e um espaço de Banach X qualquer, consideramos o espaço de seqüências $E[X]$ definido por:

$$E[X] = \{(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X e_n \right\|_E < \infty\}.$$

Lema 3.13. *Sejam E um espaço de Banach com uma base 1-incondicional $\{e_n\}_n$, e X um*

espaço de Banach qualquer. Então o espaço de seqüências $E[X]$ munido da norma

$$\|(x_n)_n\|_{E[X]} := \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| e_n \right\|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $c_{00}(X) \subseteq X^{\mathbb{N}}$ o subespaço linear de todas as seqüências de suporte finito de X . Vamos mostrar que $E[X]$ é o completamento do espaço normado $(c_{00}(X), \|\cdot\|_{E[X]})$. A única propriedade não trivial para verificar que $\|\cdot\|_{E[X]}$ é realmente uma norma em $c_{00}(X)$ é a desigualdade triangular, a prova depende da propriedade da base ser 1-incondicional:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n + (y_n)_n\|_{E[X]} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| e_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| + \|y_n\|) e_n \right\| \\ &\leq \|(x_n)_n\|_{E[X]} + \|(y_n)_n\|_{E[X]} \end{aligned}$$

Claramente, $c_{00}(X)$ é um subespaço denso de $E[X]$. Para terminar a prova verificamos que $(E[X], \|\cdot\|_{E[X]})$ é completo.

Seja $(x^n)_n$ uma seqüência de Cauchy de $E[X]$. Escrevemos para cada n , $x^n = (x_k^n)_k \in E[X]$. Fixemos $k \in \mathbb{N}$, segue a partir da seguinte desigualdade que $(x_k^n)_n$ é uma seqüência de Cauchy de X :

$$\begin{aligned} \|x_k^n - x_k^m\| &\leq \left| \|x_k^n\| - \|x_k^m\| \right| = |e_k^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\|x_j^n\| - \|x_j^m\|) e_j \right)| \\ &\leq 2 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_j^n\| - \|x_j^m\|) e_j \right\| = 2 \|x^n - x^m\|_{E[X]}. \end{aligned}$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^n$. Denotemos por $x := (x_1, x_1, x_3, \dots)$.

Por outro lado, a seqüência de vetores $\xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n\| e_k \in E$ é também uma seqüência de Cauchy de E :

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi_m\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\|x_k^n\| - \|x_k^m\|) e_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \|x_k^n\| - \|x_k^m\| \right| e_k \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^m\| e_k \right\| = \|x^n - x^m\| \end{aligned}$$

onde usamos duas vezes o fato que $(e_n)_n$ é 1-incondicional. Seja $\xi \in E$ o limite $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Temos pela convergência pontual que

$$e_n^*(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_n^* \xi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^n\| = \|x_n\|$$

Isto implica que $x = (x_n) \in E[X]$. Resta provar que $x^n \rightarrow x$ em norma $\|\cdot\|_{E[X]}$.

Primeiro vamos fazer uma observação: Fixe $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^m\| e_k)_m$ é de Cauchy em E :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^{m_1}\| e_k - \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^{m_2}\| e_k \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^{m_1} - x_k^{m_2}\| e_k \right\| \\ &= \|x^{m_1} - x^{m_2}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Onde a desigualdade segue da 1-incondicionalidade de $(e_n)_n$. Tomando o limite, temos pela convergência pontual que, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^m\| e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k\| e_k.$$

Seja $\epsilon > 0$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m > N$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k^m\| e_k \right\| < \epsilon$$

passando ao $\lim_{m \rightarrow \infty}$ dentro da norma e usando a observação anterior, obtemos

$$\|x^n - x\|_{E[X]} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n - x_k\| e_k \right\| \leq \epsilon.$$

Portanto, $x^n \rightarrow x$ em norma $\|\cdot\|_{E[X]}$. Isto completa a prova. $\square$

A seguinte proposição é simples de provar, mas não encontrada na literatura.

Proposição 3.14. *Seja E um espaço de Banach real com uma base 1-incondicional $\{e_n\}_n$ tal que $E[E] \simeq E$. Então, o espaço complexificado $F = E \oplus_{\mathbb{C}} E$ também satisfaz $F[F] \simeq F$.*

Demonstração. Seja $T : E \rightarrow E[E]$ um isomorfismo $\mathbb{R}$ -linear, escrevemos $T(x) = (T_n x)_n \in E[E]$, para cada $x \in E$. Definamos a aplicação $S : F \rightarrow F[F]$ como sendo $S(x, y) = (T_n x, T_n y)_n$. Facilmente podemos verificar que S é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear:

$$S(i(x, y)) = S(-y, x) = (T_n(-y), T_n x) = (-T_n y, T_n x) = iS(x, y).$$

S é limitada:

$$\begin{aligned}
 \|S(x, y)\|_{F[F]} &= \|(T_n x, T_n y)\|_{F[F]} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|T_n x\| + \|T_n y\|)(e_n, 0) \right\| \\
 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x\|(e_n, 0) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n y\|(e_n, 0) \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x\|e_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n y\|e_n \right\| \\
 &\leq \|T\|(\|x\| + \|y\|) = \|T\|\|(x, y)\|.
 \end{aligned}$$

Claramente, S é injetora e sobrejetora (devido às propriedades de T). Portanto, S é um isomorfismo. $\square$

Proposição 3.15. *Seja E um espaço de Banach com uma base 1-incondicional $\{e_n\}_n$. Então para todo par de espaços de Banach X e Y , $E[X \oplus Y] \simeq E[X] \oplus E[Y]$.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \in E[X]$ e $(y_n)_n \in E[Y]$. Então

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|(x_n, y_n)\|e_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\| + \|y_n\|)e_n \right\| \\
 &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|e_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|e_n \right\| \\
 &= \|(x_n)_n\|_{E[X]} + \|(y_n)_n\|_{E[Y]}
 \end{aligned}$$

o que implica que a aplicação $T : E[X] \oplus E[Y] \rightarrow E[X \oplus Y]$ definida por $T((x_n)_n, (y_n)_n) = (x_n, y_n)_n$ é linear e limitada. Claramente, T é uma bijeção. Assim, T é um isomorfismo. $\square$

Observação 3.16. *Sejam E um espaço de Banach real com uma base 1-subsimétrica $\{e_n\}_n$, e X um espaço de Banach. Então $E[X] \simeq E[X] \oplus X$*

Esta observação natural, decorre do fato que $E[X]$ é apenas um número enumerável de cópias de X somados de certa forma subsimétrica, e acrescentando mais uma cópia, não faz diferença a menos de isomorfismo. De fato, $T : E[X] \oplus X \rightarrow E[X]$ definido por $T((x_n)_n, x) = (x, x_1, x_2, x_3, \dots)$ é uma bijeção linear e limitada:

$$\begin{aligned}
\|T((x_n)_n, x)\| &= \left\| \|x\|e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|e_{n+1} \right\| \\
&\leq \|x\|\|e_1\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|e_n \right\| \\
&\leq (1 + \|e_1\|)(\|x\| + \|(x_n)_n\|_{E[X]}).
\end{aligned}$$

Portanto, T é um isomorfismo.

O seguinte teorema é o resultado principal desta seção.

Teorema 3.17. *Seja E um espaço de Banach real com uma base 1-subsimétrica tal que $E[E] \simeq E$. Então E admite estrutura complexa única.*

Demonstração. É claro que E admite uma estrutura complexa sendo isomorfo a seu quadrado. Vamos mostrar que toda estrutura complexa E^J em E é isomorfa a o espaço complexificado $F = E \oplus_{\mathbb{C}} E$.

Sabemos pela Proposição 3.11, que existe um espaço de Banach Y tal que $X^J \simeq F \oplus Y$. Também pela Proposição 3.14, temos que $F \simeq F[F]$. Assim

$$X^J \simeq F \oplus Y \simeq F \oplus F \oplus Y \simeq F \oplus X^J,$$

pois F é isomorfo a seu quadrado. Por outro lado, utilizando a Nota 3.16 e Proposição 3.15:

$$\begin{aligned}
F[F] &\simeq F[X^J \oplus X^{-J}] \simeq F[X^J] \oplus F[X^{-J}] \simeq X^J \oplus F[X^J] \oplus F[X^{-J}] \\
&\simeq X^J \oplus F[X^J \oplus X^{-J}] \simeq X^J \oplus F[F] \\
&\simeq X^J \oplus F
\end{aligned}$$

Concluimos que $X^J \simeq F$. □

A unicidade de estruturas complexas para os espaços clássicos ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) e c_0 é devido a Kalton (Proposição 3.6). Com o teorema anterior incluímos nessa lista outros espaços, C. J. Read [47] provou que existem espaços de Banach diferente dos ℓ_p 's ou c_0 tais que $E[E] \simeq E$. Fica em aberto estender o resultado ao caso geral de espaços com base subsimétrica.

3.4 Propriedades preservadas por estruturas complexas

Concluimos este capítulo estudando outro problema natural das estruturas complexas, relacionado com as propriedades que são herdadas de X a qualquer estrutura complexa X^I , no sentido de que, se um espaço de Banach real X tem a propriedade P , então toda estrutura complexa X^I também possui P . O problema inverso, sobre as propriedades de um espaço de Banach complexo que ainda são válidas no espaço real subjacente, também é natural, porém na maioria dos casos as provas são simples: apenas observando que subespaços complexos ou operadores complexos são, em particular reais. Assim, nosso objetivo nesta seção é mostrar esse tipo de resultados para propriedades nas quais não é claro que exista uma prova direta.

Em geral, nos perguntamos: que tipo de propriedades são herdadas passando para um ambiente complexo? Por exemplo, as topologias de X e X^I são equivalentes,

$$\|x\| \leq \|x\| \leq (1 + \|I\|)\|x\|.$$

Além disso, a identificação canônica entre os espaços duais X^* e $(X^I)^*$ (i.e., a aplicação que associa cada $f \in X^*$ a o funcional complexo $f_{\mathbb{C}} \in (X^I)^*$, definida por $f_{\mathbb{C}}(x) = f(x) - if(Ix)$) nos permite concluir que as topologias fracas de X e X^I também são equivalentes e têm as mesmas sequências convergentes. Portanto, propriedades tais como Schur ou Dunford-Pettis (ver definições 2.3.4, 5.4.3, [1]) são herdadas de X para qualquer estrutura complexa X^I . A identificação análoga dos biduals prova que a reflexividade também é herdada.

Em [20], V. Ferenczi prova que se X é um espaço de Banach, então todas as estruturas complexas em X satisfazem P , ou todas as estruturas complexas em X falham P , quando P é qualquer uma das seguintes propriedades: conter uma sequência básica incondicional, ser incondicionalmente saturado, conter um espaço H.I, ser saturado por espaços H.I, ser H.I. Por outro lado, se X tem uma estrutura complexa H.I, então X admite estrutura complexa única ou X tem exatamente duas estruturas complexas que são conjugadas, em [20] são apresentados exemplos dos dois casos. No entanto, a complexificação do espaço real H.I de Gowers e Maurey é H.I como complexo mas seu espaço real subjacente não é H.I.

Como aplicação de Lema 3.5, nesta seção provamos que as seguintes propriedades de espaços de Banach são herdadas a suas estruturas complexas.

- Propriedade de aproximação limitada,
- G.L-*l.u.st*,

- ser injetivo,
- ser complementado num espaço dual.

Lembremos que um espaço de Banach X tem a *Propriedade de aproximação limitada* (B.A.P) se existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $\epsilon > 0$, e cada conjunto compacto $K \subseteq X$, existe um operador de posto finito $T : X \rightarrow X$ com $\|T\| \leq C$ tal que $\|Tx - x\| < \epsilon$ para cada x em K . Um espaço de Banach com base de Schauder tem B.A.P, porém o recíproco não é verdadeiro [50].

Proposição 3.18. *Seja X um espaço de Banach real com a propriedade de aproximação limitada. Então $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ também tem a propriedade de aproximação limitada.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de $X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Consideremos as projeções sobre a primeira e segunda coordenada

$$K_1 = P_1(K) = \{x \in X : (x, y) \in K \text{ para algum } y \in X\},$$

$$K_2 = P_2(K) = \{y \in X : (x, y) \in K \text{ para algum } x \in X\}.$$

Assim, K_1 e K_2 são imagens de funções contínuas, e portanto compactos. Usando a hipótese, existe um operador de posto finito $T : X \rightarrow X$, tal que $\|Tx - x\| < \epsilon/2$ para cada $x \in K_1 \cup K_2$ e $\|T\| \leq C$, onde C é uma constante obtida pelo fato de X ter B.A.P. A aplicação $T \oplus T$ é $\mathbb{C}$ -linear em $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ e tem posto finito. Também é limitada $\|T \oplus T\| \leq 2\|T\| \leq 2C$, e

$$\|T \oplus T(x, y) - (x, y)\| = \|(Tx - x, Ty - y)\| = \|Tx - x\| + \|Ty - y\| < \epsilon.$$

para todo $(x, y) \in K$. Isto completa a prova. $\square$

Corolário 3.19. *Seja X um espaço de Banach com B.A.P. Então toda estrutura complexa em X tem B.A.P.*

A prova do Corolário segue do Lema 3.5 e do fato clássico que subespaços complementados de espaços com B.A.P também têm B.A.P.

Lembremos que um espaço de Banach X possui G.L-*l.u.st* (estrutura local incondicional) se existe uma constante $C > 0$ tal que para cada subespaço $F \subseteq X$ de dimensão finita, o operador inclusão $i : F \rightarrow X$ pode ser fatorado através de um espaço de Banach E com base incondicional e operadores $u : F \rightarrow E$, $v : E \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{u} & E \\ & \searrow i & \downarrow v \\ & & X \end{array}$$

tal que $\|u\|\|v\|u.c(E) \leq C$, onde $u.c(E)$ é a constante incondicional da base de E .

É um problema em aberto saber se a propriedade *ter base incondicional* é herdada às estruturas complexas. No entanto, é verdade para a propriedade de ter $G.L-l.u.st$.

Proposição 3.20. *Seja X um espaço real com $G.L-l.u.st$. Então $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ tem $G.L-l.u.st$.*

Demonstração. Seja $F \subseteq X \oplus_{\mathbb{C}} X$ de dimensão finita. Tomemos como antes, $F_1 = P_1(F)$ e $F_2 = P_2(F)$. Então existe um espaço de Banach E com base incondicional, e operadores $u : \text{span}\{F_1 \cup F_2\} \rightarrow E$, $v : E \rightarrow X$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \text{span}\{F_1 \cup F_2\} & \xrightarrow{u} & E \\ & \searrow i & \downarrow v \\ & & X \end{array}$$

Segue do Lema 3.8 que $E \oplus_{\mathbb{C}} E$ tem base incondicional e $u.c(E \oplus_{\mathbb{C}} E) \leq u.c(E)$. Obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{u \oplus u} & E \oplus_{\mathbb{C}} E \\ & \searrow i & \downarrow v \oplus v \\ & & X \oplus_{\mathbb{C}} X \end{array}$$

tal que $\|u \oplus u\|\|v \oplus v\|u.c(E \oplus_{\mathbb{C}} E) \leq 4\|u\|\|v\|u.c(E) \leq 4C$. Isto completa a prova. $\square$

Corolário 3.21. *Seja X um espaço de Banach real com $G.L-l.u.st$. Então toda estrutura complexa em X tem $G.L-l.u.st$.*

A prova segue rapidamente do Lema 3.5 e do fato que subespaços complementados de espaços de Banach com $G.L-l.u.st$ também tem $G.L-l.u.st$.

Um espaço de Banach X é chamado *injetivo* se para qualquer par de espaços de Banach W, Z com $W \subseteq Z$, cada operador $T : W \rightarrow X$ pode ser estendido a Z , i.e., existe um operador $\tilde{T} : Z \rightarrow X$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ i \uparrow & \searrow \tilde{T} & \\ W & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Usando o Teorema de Hahn-Banach é fácil mostrar que ℓ_{∞} é injetivo. Por outro lado, c_0 é um subespaço de ℓ_{∞} que não é injetivo, pois em caso contrário, c_0 deveria ser complementado em ℓ_{∞} . É um problema aberto saber se todo espaço injetivo a um espaço $C(K)$ [10].

Proposição 3.22. *Seja X um espaço de Banach real injetivo. Então $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ é injetivo.*

Demonstração. Sejam $W \subseteq Z$ dois espaços de Banach complexos e um operador $T : W \rightarrow X \oplus_{\mathbb{C}} X$. Escrevemos $T = (T_1, T_2)$, onde $T_1, T_2 : W \rightarrow X$ são operadores $\mathbb{R}$ -linear tais que $T(w) = (T_1w, T_2w)$ para cada $w \in W$. É claro que, $\|T_i\| \leq \|T\|$ ($i = 1, 2$). Usando a $\mathbb{C}$ -linearidade de T obtemos a relação $T_2(w) = -T_1(iw)$ para todo $w \in W$. Segue do fato que X é injetivo, que existe um operador $\mathbb{R}$ -linear $\tilde{T}_1 : Z_{\mathbb{R}} \rightarrow X$ que estende a T_1 :

$$\begin{array}{ccc} & Z_{\mathbb{R}} & \\ & \uparrow i & \searrow \tilde{T}_1 \\ W_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{T_1} & X \end{array}$$

Definamos $\tilde{T} : Z \rightarrow X \oplus_{\mathbb{C}} X$, por $\tilde{T}(z) = (\tilde{T}_1(z), -\tilde{T}_1(iz))$ para todo $z \in Z$. Claramente, $\tilde{T}$ é $\mathbb{C}$ -linear:

$$\tilde{T}(iz) = (\tilde{T}_1(iz), -\tilde{T}_1(z)) = i(\tilde{T}_1(z), -\tilde{T}_1(iz)) = i\tilde{T}(z).$$

$\tilde{T}$ é limitado $\|\tilde{T}\| \leq 2\|T\|$. Vejamos que $\tilde{T}$ estende a T , seja $w \in W$

$$\tilde{T}(w) = (\tilde{T}_1(w), -\tilde{T}_1(iw)) = (T_1(w), -T_1(iw)) = (T_1(w), T_2(w)) = T(w).$$

Portanto, $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ é injetivo □

Corolário 3.23. *Seja X um espaço de Banach real injetivo. Então toda estrutura complexa em X é um espaço injetivo.*

A prova decorre do fato que subespaços complementados de espaços de Banach injetivos também são injetivos.

Proposição 3.24. *Seja X um espaço de Banach real complementado num espaço dual. Então toda estrutura complexa X^J em X é complementada num espaço dual.*

Demonstração. Suponhamos que X é um espaço de Banach real complementado no espaço dual Y^* . Então $X \oplus_{\mathbb{C}} X$ é complementado em $Y^* \oplus_{\mathbb{C}} Y^* \simeq (Y \oplus_{\mathbb{C}} Y)^*$. Segue do Lema 3.5 que qualquer estrutura complexa X^J em X é também complementada no espaço dual $(Y \oplus_{\mathbb{C}} Y)^*$. □

Concluimos este capítulo listando algumas perguntas abertas nessa linha de pesquisa.

1. Se X é um espaço de Banach real com base de Schauder (incondicional), então toda estrutura complexa em X tem base de Schauder (incondicional)?
2. Se X é um espaço de Banach isomorfo a seu quadrado, então toda estrutura complexa em X é isomorfa a seu quadrado?

3. Existe contra-exemplo para o problema de Schroeder-Bernstein para espaços de Banach com base incondicional?
4. Todo subespaço complementado de um espaço com base incondicional tem base incondicional?

Capítulo 4

Espaço de Banach com ômega estruturas complexas

No Capítulo 3 mencionamos exemplos de espaços de Banach separáveis sem estrutura complexa, com estrutura única, e com pelo menos duas estruturas complexas distintas. Por outro lado, V. Ferenczi [20] construiu um espaço de Banach separável $X(\mathbb{C})$ tal que a estrutura complexa $X(\mathbb{C})^J$, associada a um operador $\mathbb{R}$ -linear J , e seu conjugado $X(\mathbb{C})^{-J}$ são as únicas estruturas complexas em $X(\mathbb{C})$ a menos de isomorfismo. Além disso, cada operador $\mathbb{R}$ -linear T em $X(\mathbb{C})$ é da forma $T = \lambda Id + \mu J + S$, onde λ, μ são números reais e S é um operador estritamente singular. Ferenczi também provou que o espaço $X(\mathbb{C})^n$ tem exatamente $n + 1$ estruturas complexas para cada inteiro positivo n . Indo ao extremo, R. Anisca [2] deu exemplos de subespaços de L_p ($1 \leq p < 2$) que admitem o continuo de estruturas complexas não isomorfas.

Cabe perguntarmos se existem exemplos de espaços de Banach com exatamente ômega estruturas complexas diferentes. A primeira abordagem natural para resolver este problema é a construção de uma soma infinita de cópias de $X(\mathbb{C})$. Com o propósito de controlar o número de estruturas complexas, deveria se tomar uma soma uniforme, por exemplo, $\ell_1(X(\mathbb{C}))$. Segue das propriedades de $X(\mathbb{C})$, que cada operador $\mathbb{R}$ -linear T em $\ell_1(X(\mathbb{C}))$ é da forma $T = \lambda(T) + S$, onde $\lambda(T)$ é a parte escalar de T , i.e., uma matriz infinita de operadores em $X(\mathbb{C})$ da forma $\lambda_{i,j} Id + \mu_{i,j} J$, e S é uma matriz infinita de operadores estritamente singulares em $X(\mathbb{C})$. é fácil provar que se T é uma estrutura complexa, então $\lambda(T)$ é também uma estrutura complexa. Lembremos que, pela Proposição 3.3, duas estruturas complexas cuja diferença é estritamente singular são equivalentes. Infelizmente, o operador S na representação de T não é necessariamente estritamente singular, e isso torna muito difícil entender as estruturas complexas em $\ell_1(X(\mathbb{C}))$.

Portanto, se faz necessário considerar uma soma mais ‘rígida’ de cópias de espaços do tipo

$X(\mathbb{C})$. Encontramos esta interessante propriedade no espaço não separável $\mathfrak{X}_{\omega_1}$ construído por S. Argyros, J. Lopez-Abad e S. Todorčević [7] em 2005. Com base em essa construção apresentamos um espaço de Banach separável e reflexivo $\mathfrak{X}_{\omega_2}(\mathbb{C})$ com exatamente uma quantidade enumerável infinita de estruturas complexas diferentes. Esse espaço admite uma decomposição de Schauder infinito dimensional $\mathfrak{X}_{\omega_2}(\mathbb{C}) = \bigoplus_k \mathfrak{X}_k$ tal que cada operador $\mathbb{R}$ -linear T em $\mathfrak{X}_{\omega_2}(\mathbb{C})$ pode ser escrito da forma $T = D_T + S$, onde S é um operador estritamente singular, $D_T|_{\mathfrak{X}_k} = \lambda_k Id_{\mathfrak{X}_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$) e $(\lambda_k)_k$ é uma sequência convergente.

Esta construção também implica a existência de uma família não enumerável de exemplos de espaços de Banach não separável com a propriedade de ter exatamente ω estruturas complexas, e a existência de um espaço de Banach com exatamente ω_1 estruturas complexas.

4.1 Construção do espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$

Neste capítulo, vamos construir um espaço de Banach complexo $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com uma base de Schauder transfinita bimonotona $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$, tal que cada estrutura complexa I em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ seja da forma $I = D + S$, onde D é um operador diagonal adequado e S é estritamente singular singular.

Basicamente, o espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ corresponde à versão complexa do espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}$ construído em [7] modificando a construção de tal forma que os operadores $\mathbb{R}$ -lineares tenham propriedades estruturais similares às dos operadores no espaço original $\mathfrak{X}_{\omega_1}$ (i.e. os operadores são perturbações estritamente singulares de um operador diagonal complexo).

Agora vamos definir a norma de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Para tal fim, definiremos um conjunto de funcionais, que denotaremos por $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, do espaço $c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$. Em seguida, construímos uma norma em $c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$ induzida por $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, e $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ será o completamento desse espaço métrico.

Começamos fixando duas sequências crescentes $(m_j)_j$ e $(n_j)_j$, as quais serão usadas durante todo o capítulo. As sequências estão definidas recursivamente da seguinte forma:

1. $m_1 = 2$ e $m_{j+1} = m_j^4$;
2. $n_1 = 4$ e $n_{j+1} = (4n_j)^{s_j}$, onde $s_j = \log_2 m_{j+1}^3$.

Como podemos ver, os termos das sequências rapidamente tornam-se muito grandes.

Seja $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ o subconjunto minimal de $c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$ satisfazendo as seguintes condições:

1. O conjunto contém cada e_α^* , $\alpha < \omega_1$. Para cada $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e cada número complexo $\theta = \lambda + i\mu$ com λ e μ números racionais e $|\theta| \leq 1$, também $\theta\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. O conjunto é fechado sobre restrições a intervalos de ω_1 , i.e., para cada $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e cada intervalo I de ω_1 , a função $\phi\chi_I \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$.
2. Para cada $\{\phi_i, : i = 1, \dots, n_{2j}\} \subseteq \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $\phi_1 < \dots < \phi_{n_{2j}}$, o funcional

$$\phi = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} \phi_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}).$$

Nesse caso, dizemos que ϕ é resultado de uma (m_{2j}^{-1}, n_{2j}) -operação.

3. Para cada *sequência especial* $(\phi_1, \dots, \phi_{n_{2j+1}})$ (ver Definição 4.14), o funcional

$$\phi = \frac{1}{m_{2j+1}} \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} \phi_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}).$$

Nesse caso, dizemos que ϕ é um *funcional especial* e que ϕ é o resultado de uma $(m_{2j+1}^{-1}, n_{2j+1})$ -operação.

4. é racionalmente convexo, i.e., é fechado sobre combinações convexas racionais.

Definimos uma norma em $c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$ por:

$$\|x\| = \sup \left\{ \left| \sum_{\alpha < \omega_1} \phi(\alpha)x(\alpha) \right| : \phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \right\}.$$

O espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é definido como o completamento do espaço normado $(c_{00}(\omega_1, \mathbb{C}), \|\cdot\|)$.

A definição aqui apresentada do conjunto normante $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é similar à apresentada em [7]. Nós adicionamos a propriedade de ser fechado sobre produtos de números complexos de norma menor o igual que 1 que tem parte real e imaginária racionais. Isto, juntamente com a propriedade 2 acima, garante a existência de certo tipo de sequências (como ℓ_1^n -médias e *R.I.S*) da mesma forma que são construídas para $\mathfrak{X}_{\omega_1}$. Também pela Propriedade 1, segue que a norma em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ está dada por

$$\|x\| = \sup \left\{ \phi(x) = \sum_{\alpha < \omega_1} \phi(\alpha)x(\alpha) : \phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}), \phi(x) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Equivalentemente, temos a seguinte formulação implícita para a norma:

$$\|x\| = \max \left\{ \|x\|_\infty, \sup_j \sup_{m_{2j}} \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} \|E_i x\|, E_1 < E_2 < \dots < E_{n_{2j}} \right\} \vee \\ \sup \left\{ \frac{1}{m_{2j+1}} \left| \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} \phi_i(Ex) \right| : (\phi_i)_{i=1}^{n_{2j+1}} \text{ is } n_{2j+1}\text{-especial, } E \text{ intervalo} \right\}.$$

Cada uma das condições da definição do conjunto normante implica em propriedades do espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}^*(\mathbb{C})$. 1. faz que a sequência $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ seja uma base bimonotona transfinita, 2. garante a existência de sequências RIS dentro de cada sequência de blocos (satura o espaço com estrutura local incondicional: permite obter cópias de ℓ_1^n em toda parte), 3. satura de estrutura condicional: o espaço não contém sequências básicas incondicionais, 4. identifica a bola unitária de $\mathfrak{X}_{\omega_1}^*(\mathbb{C})$ com o fecho fraco estrela do conjunto normante.

Usando a minimalidade de $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, cada $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, possui uma das seguintes formas:

- (i) ϕ é do tipo 0, se $\phi = \pm c_\alpha^*$,
- (ii) ϕ é do tipo I , se $\phi = \theta E f$, para f resultado de uma (m_j^{-1}, n_j) -operação, e E um intervalo. Nesse caso, dizemos que o peso $\omega(\phi)$ de ϕ é m_j .
- (iii) ϕ é do tipo II , se ϕ é uma combinação convexa racional de funcionais do tipo 0 e I .

Definição 4.1. Para $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, dizemos que $m_j \in \mathbb{N}$ é um peso de ϕ , ou $\omega(\phi) = m_j$, se ϕ pode ser escrito como resultado de uma (m_j^{-1}, n_j) -operação.

Notemos que $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, pode ter vários pesos.

Segue da definição do conjunto normante, que a base canônica de Hamel $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é uma base de Schauder transfinita bimonotona de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. De fato, pela propriedade 1 para cada intervalo I de ω_1 a projeção P_I tem norma 1:

$$\|P_I x\| = \sup_{f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})} |f P_I x| = \sup_{f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})} |P_I f x| \leq \|x\|$$

Além disso, temos que a base $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é contrátil e limitadamente completa, a prova segue das modificações naturais à prova para o caso $\mathfrak{X}_{\omega_1}$ (ver [7, Proposição 4.13]). Em consequência $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é reflexivo.

Proposição 4.2. $\overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*} = B_{\mathfrak{X}_{\omega_1}^*(\mathbb{C})}$.

Demonstração. Lembremos que o conjunto $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é por definição racionalmente convexo. Observe-mos que, de fato, $\overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$ é um conjunto convexo. De fato, sejam $f, g \in \overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$ e $t \in (0, 1)$. Suponha que $f_n \xrightarrow{\omega^*} f$, $g_n \xrightarrow{\omega^*} g$ e $t_n \rightarrow t$, onde $f_n, g_n \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $t_n \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $tf + (1 - t)g \in \overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$, pois

$$t_n f_n + (1 - t_n)g_n \xrightarrow{\omega^*} tf + (1 - t)g.$$

Da mesma forma podemos provar que $\overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$ é um conjunto equilibrado i.e., $\lambda \overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*} \subseteq \overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$ para cada $|\lambda| \leq 1$. Para provar a proposição, suponhamos por absurdo que existe $f \in B_{\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})} \setminus \overline{\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})}^{\omega^*}$. Segue por um argumento clássico de separação (Teorema 3.18 [24]) que existe $x \in \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que

$$|f(x)| > \sup\{|g(x)| : g \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})\}$$

o que é uma contradição. $\square$

4.2 Estruturas complexas em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$

Seja $I \subseteq \omega_1$ um intervalo de ordinais, denotamos por $\mathfrak{X}_I(\mathbb{C})$ o subespaço fechado de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ gerado por $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Para cada ordinal $\gamma < \omega_1$ escrevemos $\mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{C}) = \mathfrak{X}_{[0, \gamma)}(\mathbb{C})$. Notemos que $\mathfrak{X}_I(\mathbb{C})$ é um subespaço 1-complementado de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$: a restrição às coordenadas de I é uma projeção de norma 1 sobre $\mathfrak{X}_I(\mathbb{C})$. Esta projeção será denotada por P_I e por $P^I = (Id - P_I)$ denotaremos a correspondente projeção sobre o espaço complementar $(Id - P_I)\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, o qual denotaremos por $\mathfrak{X}^I(\mathbb{C})$. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma *sequência de blocos* de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ se for uma subsequência de blocos de $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$.

Teorema 4.3. *Seja $T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, isto é, T é um operador $\mathbb{R}$ -linear tal que $T^2 = -Id$. Então, existe um operador diagonal $D_T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, que é uma estrutura complexa, tal que $T - D_T$ seja estritamente singular. Além disso, $D_T = \sum_{j=1}^k \epsilon_j i P_{I_j}$ para alguma sequência de sinais $(\epsilon_j)_{j=1}^k$ e intervalos ordinais $I_1 < I_2 < \dots < I_k$ cujos extremos são ordinais limite de tal forma que $\omega_1 = \cup_{j=1}^k I_j$.*

A estratégia para a demonstração do Teorema 4.3 é a mesma do que a prova do [7, Teorema 5.32] para o caso real. No entanto, nosso interesse é entender a forma dos operadores $\mathbb{R}$ -lineares num espaço complexo. Isto nos obriga a justificar que as idéias de [7] ainda funcionam em nosso contexto. O resultado é obtido usando os seguintes teoremas os quais explicaremos com mais detalhes nas seções 4.4, 4.6 e 4.7.

Passo I. Existe uma família $\mathfrak{F}$ de subsequências de blocos semi-normalizadas de $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$,

chamadas de seqüências rapidamente crescentes ($R.I.S$), tal que cada seqüência de blocos normalizada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tem uma subsequência de blocos real em $\mathfrak{F}$.

Passo II. Para cada seqüência de blocos normalizada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, o subespaço $\overline{\text{span}}_{\mathbb{R}}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é um espaço H.I real.

Passo III. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma $R.I.S$ e $T : \overline{\text{span}}_{\mathbb{C}}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, \mathbb{C}x_n) = 0$.

As provas dos Passos I, II e III encontram-se nas seções 4.4, 4.6 e 4.7.

Passo IV. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma $R.I.S$ e $T : \overline{\text{span}}_{\mathbb{C}}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então a seqüência $\lambda_T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $d(Tx_n, \mathbb{C}x_n) = \|Tx_n - \lambda_T(n)x_n\|$ é convergente.

Prova do Passo IV. Inicialmente, repare que a seqüência $(\lambda_T(n))_n$ é limitada. Consideremos $(\alpha_n)_n$ e $(\beta_n)_n$ duas seqüências estritamente crescente de inteiros positivos, e suponha que $\lambda_T(\alpha_n) \rightarrow \lambda_1$ e $\lambda_T(\beta_n) \rightarrow \lambda_2$, quando $n \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que $\lambda_1 = \lambda_2$, o que é suficiente para concluir que $(\lambda_T(n))_n$ é convergente. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $x_{\alpha_n} < x_{\beta_n} < x_{\alpha_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Fixe $\epsilon > 0$. Usando o resultado do Passo III, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_{\alpha_n} - \lambda_1 x_{\alpha_n}\| = 0$. Passando a uma subsequência, se necessário, suponha-se que

$$\|Tx_{\alpha_n} - \lambda_1 x_{\alpha_n}\| \leq \frac{\epsilon}{2n6},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $w = \sum_n a_n x_{\alpha_n} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_{\alpha_n})_n$ com $\|w\| \leq 1$ nos temos

$$\begin{aligned} \|Tw - \lambda_1 w\| &\leq \sum_n |a_n| \|Tx_{\alpha_n} - \lambda_1 x_{\alpha_n}\| \\ &\leq \epsilon/3. \end{aligned}$$

pois $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é uma base transfinita bimonotona. Da mesma forma, podemos supor que, para cada $w \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_{\beta_m})_m$ com $\|w\| \leq 1$, $\|Tw - \lambda_2 w\| \leq \epsilon/3$. Segue do Passo II que $\overline{\text{span}}_{\mathbb{R}}(x_{\alpha_n})_n \cup (x_{\beta_n})_n$ é H.I. real. Então, existem vetores unitários $w_1 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_{\alpha_n})_n$ e $w_2 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_{\beta_m})_m$, tais que $\|w_1 - w_2\| \leq \frac{\epsilon}{3}\|T\|$. Portanto,

$$\|\lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2\| \leq \|Tw_1 - \lambda_1 w_1\| + \|Tw_1 - Tw_2\| + \|Tw_2 - \lambda_2 w_2\| \leq \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\|\lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2\| \geq \|(\lambda_1 - \lambda_2)w_1\| - \|\lambda_2(w_1 - w_2)\| = |\lambda_1 - \lambda_2| - |\lambda_2|\epsilon.$$

Em consequência, $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq (1 + |\lambda_2|)\epsilon$. Como ϵ foi arbitrário, segue que $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Seja $T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Associamos a T um operador diagonal D_T (em relação à base $(e_\gamma)_{\gamma < \omega_1}$) tal que $T - D_T$ seja um operador estritamente singular: fixe $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$ um ordinal limite, e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas *R.I.S* tais que $\sup_n \max \text{supp } x_n = \sup_n \max \text{supp } y_n = \alpha + \omega$. Utilizando uma propriedade de $\mathfrak{F}$, podemos combinar as sequências $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ formando uma nova sequência *R.I.S* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_{2k} \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $z_{2k-1} \in \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (Ver Nota 4.17). Em seguida, segue-se a partir do Passo IV, que as sequências definidas pelas fórmulas $d(Tx_n, \mathbb{C}x_n) = \|Tx_n - \lambda_T(n)x_n\|$ e $d(Ty_n, \mathbb{C}y_n) = \|Ty_n - \mu(n)y_n\|$ são convergentes, e por causa da mistura dos elementos da sequência, ambos limites devem coincidir. Assim, para cada $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$ existe um único número complexo $\xi_T(\alpha)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tw_n - \xi_T(\alpha)w_n\| = 0 \quad (4.1)$$

para cada $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *R.I.S* em $\mathfrak{X}_{I_\alpha}$, onde escrevemos I_α para denotar o intervalo ordinal $[\alpha, \alpha + \omega)$.

Observe, ainda, que a sequência $(\xi_T(\alpha))_{\alpha \in \Lambda(\omega_1)}$ é convergente. Isto é, para cada sequência estritamente crescente $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\Lambda(\omega_1)$, a subsequência correspondente $(\xi_T(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, fixe $(y_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma *R.I.S* em $\mathfrak{X}_{I_{\alpha_n}}$. Então podemos tomar $(y_n^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ uma *R.I.S* tal que $\|Ty_n^{k_n} - \xi_T(\alpha_n + \omega)y_n^{k_n}\| < 1/n$. Utilizando o Passo IV, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_n \|Ty_n^{k_n} - \lambda y_n^{k_n}\| = 0$. Portanto, $\lim_n \xi_T(\alpha_n + \omega) = \lambda$.

Definição 4.4. *Seja $T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Definimos uma aplicação diagonal D_T na decomposição (linear) de $\text{span}(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$*

$$\text{span}(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda(\omega_1)} \text{span}(x_\beta)_{\beta \in I_\alpha}$$

da seguinte forma: $D_T(e_\beta) = \xi_T(\alpha)e_\beta$ quando $\beta \in I_\alpha$, onde $\xi_T(\alpha)$ é o único número complexo satisfazendo a equação (4.1) acima para cada $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *R.I.S* em $\mathfrak{X}_{I_\alpha}$.

É possível mostrar que esta aplicação diagonal D_T define um operador em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ em geral (i.e., D_T é limitada). A demonstração é a mesma que no caso real [7, Proposição 5.31] e utiliza que certo espaço do tipo James de um espaço de Tsirelson misto é representável finitamente por intervalo em cada sequência de blocos transfinita normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Para o caso

de estruturas complexas T , temos uma prova mais simples do fato que D_T é limitada (ver Proposição 4.8). Primeiro, será necessário estabelecer alguns resultados.

Proposição 4.5. *Seja A um subconjunto de ordinais de ω_1 e $X = \overline{\text{span}}_{\mathbb{C}}(e_\alpha)_{\alpha \in A}$. Considere $T : X \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então T é estritamente singular se, e somente se, para cada $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ R.I.S em X , $\lim_n Ty_n = 0$.*

Demonstração. A proposição é trivial quando o conjunto A é finito. Podemos assumir então que A é infinito. Suponhamos que T é estritamente singular. Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma R.I.S em X tal que $\lim_n Ty_n \neq 0$. Segue do Passo IV que existe $\lambda \neq 0$ tal que $\lim_n \|Ty_n - \lambda y_n\| = 0$. Tomemos $0 < \epsilon < |\lambda|$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\|(T - \lambda Id)|_{\overline{\text{span}}(y_n)_n}\| < \epsilon$. Isso implica que $T|_{\overline{\text{span}}(y_n)_n}$ é um isomorfismo, o que é uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que para cada $(y_n)_n$ R.I.S em X , $\lim_n Ty_n = 0$. Por contradição assuma que T não é estritamente singular. Então, existe um subespaço de blocos $Y = \overline{\text{span}}(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tal que T restrito a Y é um isomorfismo. Pelo Passo I, podemos supor que a sequência $(y_n)_n$ é uma R.I.S em X . Portanto $\inf_n \|Ty_n\| > 0$, o que é um absurdo. $\square$

Dado $Y \subseteq \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ denotaremos por ι_Y a inclusão canônica de Y em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$.

Corolário 4.6. *Sejam $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$ e $T : \mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então existe um único $\xi_T(\alpha) \in \mathbb{C}$ tal que $T - \xi_T(\alpha)\iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})}$ é estritamente singular.*

Demonstração. Seja $\xi_T(\alpha)$ o único número complexo tal que $\lim \|Ty_n - \xi_T(\alpha)y_n\| = 0$ para cada $(y_n)_n$ R.I.S em $\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})$. Segue da Proposição anterior que $T - \xi_T(\alpha)\iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})}$ é estritamente singular. $\square$

Lembremos que dado $I \subseteq \omega_1$ um intervalo de ordinais, denotamos por $\mathfrak{X}_I(\mathbb{C})$ o subespaço fechado de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ gerado por $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\mathfrak{X}^I(\mathbb{C})$ denota seu respectivo complemento em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$.

Corolário 4.7. *Sejam $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$ e $R : \mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}^{I_\alpha}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então R é estritamente singular.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, $\iota_{\mathfrak{X}^{I_\alpha}(\mathbb{C})}R = \lambda_\alpha \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + S$ com S estritamente singular. Assim, projetando por P^{I_α} obtemos $R = P^{I_\alpha} \circ \iota_{\mathfrak{X}^{I_\alpha}(\mathbb{C})}R = P^{I_\alpha}S$ que é estritamente singular. $\square$

Proposição 4.8. *Seja T uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Então a aplicação diagonal D_T é um operador em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ que também é uma estrutura complexa.*

Demonstração. Seja T uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e D_T a correspondente aplicação diagonal acima definida. Fixe $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$. Vamos provar que $\xi_T(\alpha)^2 = -1$. De fato,

$$\begin{aligned} T \circ \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} &= P_{I_\alpha}T \circ \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + P^{I_\alpha}T \circ \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} \\ &= P_{I_\alpha}T \circ \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + S_1 \end{aligned}$$

onde S_1 é estritamente singular. Isso implica que $P_{I_\alpha}T \circ \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} = \xi_T(\alpha)Id_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + S_2$ com S_2 estritamente singular. Agora calculando:

$$\begin{aligned}
 (P_{I_\alpha}T \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})}) \circ (P_{I_\alpha}T \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})}) &= P_{I_\alpha}T \circ P_{I_\alpha}T \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} \\
 &= P_{I_\alpha}T \circ (Id - P^{I_\alpha})T \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} \\
 &= P_{I_\alpha}T^2 \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} - P_{I_\alpha}T \underline{P^{I_\alpha}T \iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})}} \\
 &= -Id_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + S_3
 \end{aligned}$$

onde S_3 é estritamente singular porque o operador sublinhado é estritamente singular. Portanto, temos que $(\xi_T(\alpha)^2 + 1)Id_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}}$ é estritamente singular. O que nos permite concluir que $\xi_T(\alpha)^2 = -1$. A continuidade de D_T está garantida pela convergência de $(\xi_T(\alpha))_{\alpha \in \Lambda(\omega_1)}$. De fato, $\xi_T(\alpha) = \pm i$ para cada $\alpha \in \Lambda(\omega_1)$, e pela convergência temos que a variação dos sinais é finita, então existem intervalos ordinais $I_1 < I_2 < \dots < I_k$ com $\omega_1 = \cup_{j=1}^k I_j$ tais que $D_T = \sum_{j=1}^k \epsilon_j i P_{I_j}$ para alguns sinais $(\epsilon_j)_{j=1}^n$. □

Observação 4.9. *A demonstração da Proposição 4.8 realmente mostra que se T é um operador $\mathbb{R}$ -linear em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $T^2 + Id = S$ para algum operador S estritamente singular, então D_T é um operador tal que $D_T^2 = -Id$.*

Agora podemos concluir a prova do Teorema 4.3.

Prova do Teorema 4.3. Seja $T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e D_T o operador diagonal associado. Resta provar que $T - D_T$ é estritamente singular. Isso decorre diretamente da Proposição 4.5, pois por definição, $\lim_n (T - D_T)y_n = 0$ para cada $(y_n)_n$ R.I.S em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. □

Voltemos para o estudo das estruturas complexas em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Denotemos por $\mathfrak{D}$ a família de estruturas complexas D_T em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com a forma do Teorema 4.3, i.e., $D_T = \sum_{j=1}^k \epsilon_j i P_{I_j}$ onde $(\epsilon_j)_{j=1}^k$ são sinais, e $I_1 < I_2 < \dots < I_k$ são intervalos de ordinais cujos extremos são ordinais limite tais que $\omega_1 = \cup_{j=1}^k I_j$. Note que $\mathfrak{D}$ tem cardinalidade ω_1 .

Dois espaços de Banach são chamados incomparáveis se nenhum deles se mergulha no outro.

Corolário 4.10. *O espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tem ω_1 estruturas complexas a menos de isomorfismo. Além disso, todo par de estruturas complexas não isomorfas são incomparáveis.*

Demonstração. Seja J uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Pelo Teorema 4.3, temos que $J - D_J$ é um operador estritamente singular, e $D_J \in \mathfrak{D}$. Lembremos por [20] que, duas estruturas

complexas cuja diferença é um operador estritamente singular são equivalentes. Assim, J é equivalente a D_J .

Para completar a demonstração do Corolário é suficiente mostrar que todo par de elementos de $\mathfrak{D}$ definem estruturas complexas não equivalentes. Mais ainda, provamos que nenhuma estrutura de $\mathfrak{D}$ mergulha em outra estrutura de $\mathfrak{D}$. Fixemos $J \neq K \in \mathfrak{D}$. Então existe um intervalo de ordinais $I_\alpha = [\alpha, \alpha + \omega)$ tal que, sem perda de generalidade, $J|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = iId|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}}$ e $K|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = -iId|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}}$. Suponhamos que existe $T : \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})^J \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})^K$ um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear sobre a imagem. Assim, T é em particular um operador $\mathbb{R}$ -linear tal que $TJ = KT$. Escrevemos, utilizando o Corolário 4.6, $T|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = \xi_T(\alpha)\iota_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}(\mathbb{C})} + S$ com S estritamente singular. Então $\xi_T(\alpha)J|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} - \xi_T(\alpha)K|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = S_1$ onde S_1 é estritamente singular. Em particular, para cada $x \in \mathfrak{X}_{I_\alpha}$, $S_1x = 2\xi_T(\alpha)ix$. Dado que $\mathfrak{X}_{I_\alpha}$ é de dimensão infinita, segue que $\xi_T(\alpha) = 0$. Portanto, $T|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = S$, o que é uma contradição, pois T é um mergulho. $\square$

O próximo Corolário nos oferece uma coleção não enumerável de exemplos de espaços de Banach separáveis com exatamente uma quantidade infinita enumerável de estruturas complexas.

Corolário 4.11. *O espaço $\mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{C})$ tem exatamente ω estruturas complexas a menos de isomorfismo, para cada ordinal limite $\omega^2 \leq \gamma < \omega_1$.*

Demonstração. Seja J uma estrutura complexa em $\mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{C})$. Estendemos J a uma estrutura complexa definida em todo o espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ através da fórmula $T = JP_I + iP^I$, onde $I = [0, \gamma)$. Segue que $T = D_T + S$ para algum operador estritamente singular S e um operador diagonal D_T como no Teorema 4.3. Note que, $D_Tx = ix$ para cada $x \in \mathfrak{X}^I$, caso contrário, existiria um ordinal limite α tal que $S|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}} = 2iId|_{\mathfrak{X}_{I_\alpha}}$. Portanto, $JP_I = D_TP_I + S$. Isso implica que J tem a seguinte forma: $J = \sum_{j=1}^k \epsilon_j iP_{I_j} + S_1$, onde S_1 é estritamente singular em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, $(\epsilon_j)_{j=1}^k$ são sinais, e $I_1 < I_2 < \dots < I_k$ são intervalos de ordinais cujos extremos são ordinais limite tais que $\gamma = \cup_{j=1}^k I_j$. Agora, o resto da prova é idêntica à prova do Corolário anterior. Em particular, todas as estruturas complexas não isomorfas de $\mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{C})$ são incomparáveis. $\square$

Temos também, usando a mesma prova do Corolário anterior, que para cada sequência crescente de ordinais limite $A = (\alpha_n)_n$, o espaço $\mathfrak{X}_A = \bigoplus_n \mathfrak{X}_{I_{\alpha_n}}(\mathbb{C})$, onde $I_{\alpha_n} = [\alpha_n, \alpha_n + \omega)$, tem exatamente uma quantidade infinita enumerável de estruturas complexas. Se A e B são duas sequências crescentes de ordinais limite distintas, então pelo Corolário 4.7 $\mathfrak{X}_A$ e $\mathfrak{X}_B$ não são espaços isomorfos. Portanto, existe uma família, com a cardinalidade do contínuo, de espaços de Banach, tal que cada espaço da família possui exatamente ω estruturas complexas.

4.3 Codificação e Sequências especiais

Nas próximas seções vamos provar os Teoremas relacionados com os Passos I, II, III.

Primeiro vamos esclarecer a definição do conjunto normante $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, definindo o conceito de *sequência especial*. Esta definição dependerá fundamentalmente de certa codificação. Todas as definições que apresentamos nas próximas seções são as correspondentes traduções de [7] para o caso complexo.

Denotamos por $[\omega_1]^2 = \{(\alpha, \beta) \in \omega_1^2 : \alpha < \beta\}$.

Definição 4.12 (ϱ -função). *Uma função $\varrho : [\omega_1]^2 \rightarrow \omega$ que satisfaz as seguintes propriedades*

1. $\varrho(\alpha, \gamma) \leq \max\{\varrho(\alpha, \beta), \varrho(\beta, \gamma)\}$ para todo $\alpha < \beta < \gamma < \omega_1$.
2. $\varrho(\alpha, \beta) \leq \max\{\varrho(\alpha, \gamma), \varrho(\beta, \gamma)\}$ para todo $\alpha < \beta < \gamma < \omega_1$.
3. O conjunto $\{\alpha < \beta : \varrho(\alpha, \beta) \leq n\}$ é finito para todo $\beta < \omega_1$ e $n \in \mathbb{N}$

é chamada de ϱ -função.

A existência de ϱ -funções é um resultado de S. Todorcevic [53, 54], introduzidas para estudar ‘walks on ordinals’. Vamos fixar uma ϱ -função $\varrho : [\omega_1]^2 \rightarrow \omega$, e todo o resto desse trabalho dependerá dessa escolha da função ϱ .

Definição 4.13. *Seja F um subconjunto finito de ω_1 e $p \in \mathbb{N}$, escrevemos*

$$\rho_F = \rho_\varrho(F) = \max_{\alpha, \beta \in F} \varrho(\alpha, \beta).$$

$$\overline{F}^p = \{\alpha \leq \max F : \text{existe um } \beta \in F \text{ tal que } \alpha \leq \beta \text{ e } \varrho(\alpha, \beta) \leq p\}$$

Denotamos por $\mathbb{Q}_s(\omega_1, \mathbb{C})$ o conjunto de sequências finitas $(\phi_1, w_1, p_1, \dots, \phi_d, w_d, p_d)$ tais que

1. Para todo $i \leq d$, $\phi_i \in c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$, e para todo $\alpha < \omega_1$ as partes real e imaginária de $\phi(\alpha)$ são números racionais.
2. $(w_i)_{i=1}^d, (p_i)_{i=1}^d \in \mathbb{N}^d$ são sequência estritamente crescentes.
3. $p_i \geq \rho_{(\cup_{k=1}^i \text{supp } \phi_k)}$ para cada $i \leq d$.

Seja $\mathbb{Q}_s(\mathbb{C})$ o conjunto das sequências finitas $(\phi_1, w_1, p_1, \phi_2, w_2, p_2, \dots, \phi_d, w_d, p_d)$ satisfazendo as propriedades (1), (2) acima, e para cada $i \leq d$, $\phi_i \in c_{00}(\omega, \mathbb{C})$. Então $\mathbb{Q}_s(\mathbb{C})$ é um conjunto enumerável enquanto $\mathbb{Q}_s(\omega_1, \mathbb{C})$ tem cardinalidade ω_1 . Fixemos uma função injetora $\sigma : \mathbb{Q}_s(\mathbb{C}) \rightarrow \{2j : j \text{ is ímpar}\}$ tal que

$$\sigma(\phi_1, w_1, p_1, \dots, \phi_d, w_d, p_d) > \max\{p_d^2, \frac{1}{\epsilon^2}, \max \text{supp } \phi_d, \}$$

onde $\epsilon = \min\{|\phi_k(e_\alpha)| : \alpha \in \text{supp } \phi_k, k = 1, \dots, d\}$. dado um subconjunto finito F de ω_1 , denotamos por $\pi_F : \{1, 2, \dots, \#F\} \rightarrow F$ a aplicação canônica que preserva a ordem, i.e. π_F é a enumeração crescente de F .

Dado $\Phi = (\phi_1, w_1, p_1, \dots, \phi_d, w_d, p_d) \in \mathbb{Q}_s(\mathbb{C})$, definimos

$$G_\Phi = \overline{\cup_{i=1}^d \text{supp } \phi_i}^{p_d}.$$

Consideremos a família $\pi_{G_\Phi}(\Phi) = (\pi_G(\phi_1), w_1, p_1, \pi_G(\phi_2), w_2, p_2, \dots, \pi_G(\phi_d), w_d, p_d)$ onde

$$\pi_G(\phi_k)(n) = \begin{cases} \phi_k(\pi_{G_\Phi}(n)), & \text{if } n \in G_\Phi \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Finalmente $\sigma_p : \mathbb{Q}_s(\omega_1, \mathbb{C}) \rightarrow \{2j : j \text{ ímpar}\}$ está definido por $\sigma_p(\Phi) = \sigma(\pi_G(\Phi))$.

Definição 4.14. *Uma sequência $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_{2j+1}})$ de funcionais de $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é chamada de $2j + 1$ sequência especial se*

(SS 1.) $\text{supp } \phi_1 < \text{supp } \phi_2 < \dots < \text{supp } \phi_{n_{2j+1}}$. Para cada $k \leq n_{2j+1}$, ϕ_k é de tipo I, $w(\phi_k) = m_{2j_k}$ com j_1 par e $m_{2j_1} > n_{2j+1}^2$.

(SS 2.) Existe uma sequência estritamente crescente $(p_1^\Phi, p_2^\Phi, \dots, p_{n_{2j+1}-1}^\Phi)$ de números naturais tal que para todo $1 \leq i \leq n_{2j+1} - 1$, temos $w(\phi_{i+1}) = m_{\sigma_\epsilon(\Phi_i)}$ onde

$$\Phi_i = (\phi_1, w(\phi_1), p_1^\Phi, \phi_2, w(\phi_2), p_2^\Phi, \dots, \phi_i, w(\phi_i), p_i^\Phi)$$

Sequências especiais em espaços separáveis onde a codificação é uma aplicação injetora, são em geral mais simples: elas são da forma $(\phi_1, w(\phi_1), \dots, \phi_k, w(\phi_k))$. Sua principal característica é que, se $(\phi_1, w(\phi_1), \dots, \phi_k, w(\phi_k))$ e $(\psi_1, w(\psi_1), \dots, \psi_l, w(\psi_l))$ são duas sequências especiais, então existe $i_0 \leq \min\{k, l\}$ com a propriedade que

$$(\phi_i, w(\phi_i)) = (\psi_i, w(\psi_i)) \quad \forall i \leq i_0, \quad (4.2)$$

$$\{w(\phi_i) : i_0 \leq i \leq k\} \cap \{w(\psi_i) : i_0 \leq i \leq l\} = \emptyset. \quad (4.3)$$

No caso de espaços de Banach não separáveis, codificações injetoras são impossíveis, por-

tanto (1), (2) não são mais verdadeiras. Felizmente, existe uma característica similar a (1), (2) chamada *tree-like interference* de um par de sequência exatas (Ver [7, Lema 2.9]): Seja $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n_{2j+1}})$ e $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n_{2j+1}})$ duas $2j+1$ -sequências especiais, então existem dois números $0 \leq \kappa_{\Phi, \Psi} \leq \lambda_{\Phi, \Psi} \leq n_{2j+1}$ de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas:

TP. 1 Para todo $i \leq \lambda_{\Phi, \Psi}$, $w(\phi_i) = w(\psi_i)$ e $p_i^\Phi = p_i^\Psi$.

TP. 2 Para todo $i < \kappa_{\Phi, \Psi}$, $\phi_i = \psi_i$.

TP. 3 Para todo $\kappa_{\Phi, \Psi} < i < \lambda_{\Phi, \Psi}$

$$\text{supp } \phi_i \cap \overline{\text{supp } \psi_1 \cup \dots \cup \text{supp } \psi_{\lambda_{\Phi, \Psi}-1}}^{p_{\lambda_{\Phi, \Psi}-1}} = \emptyset$$

$$\text{e } \text{supp } \psi_i \cap \overline{\text{supp } \phi_1 \cup \dots \cup \text{supp } \phi_{\lambda_{\Phi, \Psi}-1}}^{p_{\lambda_{\Phi, \Psi}-1}} = \emptyset$$

TP. 4 $\{w(\phi_i) : \lambda_{\Phi, \Psi} < i \leq n_{2j+1}\} \cap \{w(\psi_i) : i \leq n_{2j+1}\} = \emptyset$ e $\{w(\psi_i) : \lambda_{\Phi, \Psi} < i \leq n_{2j+1}\} \cap \{w(\phi_i) : i \leq n_{2j+1}\} = \emptyset$.

4.4 Sequências rapidamente crescentes (*R.I.S*)

Lembremos primeiro o enunciado do Passo I:

Passo I. Existe uma família $\mathfrak{F}$ de subsequências de blocos semi-normalizadas de $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$, chamadas de sequências rapidamente crescentes (*R.I.S*), tal que cada sequência de blocos normalizada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tem uma subsequência de blocos real em $\mathfrak{F}$.

Para a prova do Passo I construiremos uma família de sequências de blocos em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ comumente chamadas de *sequências rapidamente crescentes* (*R.I.S*). Estas sequências serão úteis para obter boas estimativas de limites superiores de $|f(x)|$ quando $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e x seja uma média de *R.I.S*.

Para a construção da família $\mathfrak{F}$ a única diferença com a teoria geral de [7] é que nosso interesse agora é estudar operadores $\mathbb{R}$ -lineares no espaço complexo $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Portanto, todas as construções de *R.I.S* numa determinada sequência de blocos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ devem estar no seu span linear *real*. Destacamos que não há problemas com isso, porque todas as combinações lineares dos vetores $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para obter *R.I.S* usam escalares racionais.

Definição 4.15 (*R.I.S*). Dizemos que uma sequência de blocos $(x_k)_k$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é uma (C, ϵ) -*R.I.S*, $C, \epsilon > 0$, quando existir uma sequência estritamente crescente de números naturais $(j_k)_k$ tal que:

- (i) $\|x_k\| \leq C$;
- (ii) $|\text{supp } x_k| \leq m_{j_{k+1}}\epsilon$;
- (iii) Para todos os funcionais ϕ of $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I, com $\omega(\phi) < m_{j_k}$, $|\phi(x_k)| \leq \frac{C}{\omega(\phi)}$.

A seguinte observação é consequência imediata da definição.

Observação 4.16. *Seja $\epsilon' < \epsilon$. Cada (C, ϵ) -R.I.S tem uma subsequência (C, ϵ') -R.I.S. Para cada sequência estritamente crescente de ordinais $(\alpha_n)_n$ e todo $\epsilon > 0$, $(e_{\alpha_n})_n$ é uma $(1, \epsilon)$ -R.I.S.*

Observação 4.17. *Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ duas (C, ϵ) - R.I.S tais que $\sup_n \max \text{supp } x_n = \sup_n \max \text{supp } y_n$. Então existe $(z_n)_n$ uma (C, ϵ) - R.I.S. tal que $z_{2n-1} \in \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $z_{2n} \in \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.*

Demonstração. Suponhamos que $(t_k)_k$ e $(s_k)_k$ sejam sequências estritamente crescentes de números naturais satisfazendo a definição de R.I.S para $(x_k)_k$ e $(y_k)_k$, respetivamente. Vamos construir $(z_k)_k$ da seguinte forma: Seja $z_1 = x_1$ e $j_1 = t_1$. Escolhemos s_{k_1} tal que $x_1 < y_{s_{k_1}}$ e $t_2 < s_{k_1}$. Em seguida, definimos $j_2 = s_{k_1}$ e $z_2 = y_{s_{k_1}}$. Note que

- (i) $\|z_1\| \leq C$;
- (ii) $|\text{supp } z_1| \leq m_{t_2}\epsilon \leq m_{s_{k_1}}\epsilon = m_{j_2}\epsilon$;
- (iii) Para todo funcional ϕ de $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I, com $\omega(\phi) < m_{j_1}$, $|\phi(z_1)| \leq \frac{C}{\omega(\phi)}$.

Continuando com este processo obtemos a sequência desejada.

□

Para demonstrar o Teorema 4.21, onde será construída a família $\mathfrak{F}$ de R.I.S do Passo I, será necessário introduzir certo tipo de sequências mais simples:

Definição 4.18. *Seja X um espaço de Banach, $C \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$. Um vetor normalizado y é chamado de $C - \ell_1^k$ -média de X , se existir uma sequência de blocos finita $(x_1, \dots, x_k)$ tal que*

- (1) $y = (x_1 + \dots + x_k)/k$;
- (2) $\|x_i\| \leq C$, para todo $i = 1, \dots, k$.

No próximo resultado queremos ressaltar que podemos construir esse tipo especial de sequências na estrutura *real* do espaço $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$.

As seguintes estimativas (Proposições 4.19, 4.20) já se encontram em [8] e [32].

Proposição 4.19. *Para cada sequência de blocos normalizada (x_n) de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, e cada inteiro k , existe $z_1 < \dots < z_k$ em $\text{span}_{\mathbb{R}}(x_n)$, tal que $(z_1 + \dots + z_k)/k$ é uma $2 - \ell_1^k$ -média.*

Demonstração. Suponhamos que o resultado é falso. Consideremos j e n números naturais com

$$\begin{aligned} 2^n &> m_{2j} \\ n_{2j} &> k^n. \end{aligned}$$

Seja $N = k^n$ e $x = \sum_{i=1}^N x_i$. Para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq k^{n-i}$, definimos

$$x(i, j) = \sum_{t=(j-1)k^i+1}^{jk^i} x_t.$$

Assim, $x(0, j) = x_j$ e $x(n, 1) = x$.

Provamos por indução sobre i que $\|x(i, j)\| \leq 2^{-i}k^i$, para todo i, j . De fato, para $i = 0$ é claro. Por definição,

$$x(i+1, j) = x(i, j_1) + \dots + x(i, j_k).$$

Assim, dado que $\frac{x(i+1, j)}{\|x(i+1, j)\|}$ não é uma $2 - l_1^k$ média, existe $t \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\left\| \frac{kx(i, j_t)}{\|x(i+1, j)\|} \right\| > 2,$$

e o resultado segue aplicando a hipótese de indução :

$$2^{-i}k^i \geq \|x(i, j_t)\| > 2k^{-1}\|x(i+1, j)\|.$$

Portanto, $\|x(i+1, j)\| \leq 2^{-(i+1)}k^{i+1}$. Em particular, $\|x\| = \|x(n, 1)\| \leq 2^{-n}k^n = 2^{-n}N$. Segue da *Propriedade 1* da definição do conjunto normante:

$$\|x\| \geq \frac{1}{m_{2j}} \sum_{t=1}^{n_{2j}} \|x_t\| = \frac{n_{2j}}{m_{2j}} > \frac{N}{m_{2j}}.$$

Em consequência,

$$\begin{aligned} 2^{-n}N &> \frac{N}{m_{2j}} \\ m_{2j} &> 2^n, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. □

Proposição 4.20. *Suponha que y é uma $C - \ell_1^k$ média de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e suponha que $E_1 < \dots < E_n$*

são intervalos com $n < k$. Então $\sum_{i=1}^n \|E_i y\| \leq C(1 + \frac{2n}{k})$

Demonstração. Seja y uma $C - \ell_1^k$ média. Então $ky = \sum_{i=1}^k x_i$ onde $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ e $\|x_i\| \leq C$, para todo $i = 1, \dots, k$. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, definamos

$$\begin{aligned} A_j &= \{i \in \{1, \dots, k\} : \text{supp}(x_i) \subseteq E_j\} \\ B_j &= \{i \in \{1, \dots, k\} : E_j(x_i) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Assim

$$\|E_j ky\| \leq \left\| \sum_{i \in B_j} E_j x_i \right\| \leq C(|A_j| + 2),$$

pois a base transfinita $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é bimonótona. Dado que $\sum_{j=1}^k |A_j| \leq k$, podemos concluir

$$\sum_{j=1}^n \|E_j y\| \leq \frac{C}{k} \left(\sum_{j=1}^n |A_j| + 2n \right) \leq C \left(1 + \frac{2n}{k} \right).$$

□

O teorema seguinte refere-se à construção da família $\mathfrak{F}$ de *R.I.S.* O método que usamos consiste em 'juntar' varias ℓ_1^n -médias do span $\mathbb{R}$ -linear de cada sequência de blocos normalizada.

Teorema 4.21. *Seja $(x_k)_k$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}$ e $\epsilon > 0$. Então existe uma sequência de blocos $(y_n)_n$ em $\text{span}_{\mathbb{R}}\{x_k\}$ que é uma $(3, \epsilon)$ -RIS.*

Demonstração. Para demonstrar o Teorema, primeiro observemos que se y é uma $C - \ell_1^{n_j}$ -média de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tem peso $\omega(\phi) < m_j$, então $|\phi(y)| \leq \frac{3C}{2\omega(\phi)}$. De fato, escrevamos $\phi = 1/\omega(\phi) \sum_{i=1}^d \phi_i$, onde $\phi_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $d \leq n_k < n_j$. Denotemos por $E_i = \text{supp } \phi_i$. Logo $\phi_i(y) = \phi_i E_i(y)$. Segue da Proposição 4.20 que

$$|\phi(y)| \leq \frac{1}{\omega(\phi)} \sum_{i=1}^d \|E_i(y)\| \leq \frac{1}{\omega(\phi)} C \left(1 + \frac{2d}{n_j} \right) \leq \frac{3C}{\omega(\phi)}.$$

Em particular, se y é uma $2 - \ell_1^{n_j}$ média de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, então $|\phi(y)| \leq \frac{3}{\omega(\phi)}$, para todo $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com $\omega(\phi) < m_j$.

Agora, seja $(x_k)_k$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $j_1 \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 4.19, existe $y_1 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_n)$ uma $2 - \ell_1^{n_{j_1}}$ -média. Tomemos $j_2 > j_1$ tal que

$$|\text{supp } y_1| < \epsilon m_{j_2}.$$

Utilizando de novo a Proposição 4.19, obtemos $y_2 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_k)$ uma $2 - \ell_1^{n_{j_2}}$ -média com $y_2 > y_1$. Continuando esse procedimento, obtemos uma sequência de blocos $(y_n)_n$, onde cada $y_n \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_k)$, e uma sequência crescente de inteiros $(j_k)_k$ tais que cada y_k é uma $2 - \ell_1^{n_{j_k}}$ -média e

$$|\text{supp } y_k| < \epsilon m_{j_{k+1}}.$$

Segue do comentário inicial, que $|\phi(y_{j_k})| \leq \frac{3}{\omega(\phi)}$, para todo $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com $\omega(\phi) < m_{j_k}$. Portanto, $(y_k)_k$ é uma $(3, \epsilon)$ -RIS. $\square$

4.5 Desigualdade básica

Para demonstrar os Passos II e III precisamos de um resultado fundamental chamado de *desigualdade básica* o qual é muito importante para achar boas estimativas da norma de certas combinações de *R.I.S* em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Primeiro será necessário definir os espaços *Tsirelson mistos* introduzidos por Argyros e I. Deliyanni em [5] (1997).

O espaço de Tsirelson misto $T[(m_j^{-1}, n_j)_j]$ é definido como o completamento de $c_{00}(\omega, \mathbb{C})$ com a norma $\|\cdot\|_0$ dada pela seguinte fórmula implícita:

$$\|x\|_0 = \max \left\{ \|x\|_{\infty}, \sup_j \sup \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{n_j} \|E_i x\|_0 \right\},$$

O supremo no interior da fórmula é tomado sobre todas as sequências $E_1 < \dots < E_{n_j}$ de subconjuntos de ω . Note que, nesse espaço a base de Hamel canônica $(e_n)_{n < \omega}$ de $c_{00}(\omega, \mathbb{C})$ é uma base 1-subsimétrica e 1-incondicional.

Podemos dar uma definição alternativa para a norma de $T[(m_j^{-1}, n_j)_j]$ definindo o seguinte conjunto normante: seja $W[(m_j^{-1}, n_j)] \subseteq c_{00}(\omega, \mathbb{C})$ o conjunto minimal de $c_{00}(\omega, \mathbb{C})$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada $\alpha < \omega$, $e_{\alpha}^* \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$. Se $\phi \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$ e $\theta = \lambda + i\mu$ é um número complexo com λ e μ racionais e $|\theta| \leq 1$, $\theta\phi \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$;
2. Para cada $\phi \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$ e $E \subseteq \omega$, $E\phi \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$;
3. Para cada $j \in \mathbb{N}$ and $\phi_1 < \dots < \phi_{n_j}$ em $W[(m_j^{-1}, n_j)]$, $(1/m_j) \sum_{i=1}^{n_j} \phi_i \in W[(m_j^{-1}, n_j)]$;

4. $W[(m_j^{-1}, n_j)]$ é fechado sobre combinações convexas racionais.

Segue da definição do conjunto normante $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ que cada $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é construída a partir dos funcionais básicos e_α^* após um número finito de passos, onde em cada passo aplicamos alguma (m_j^{-1}, n_j) -operação, ou uma combinação convexa. A seguinte definição descreve este processo e será útil na hora de várias estimativas.

Definição 4.22. *Seja ϕ um funcional do conjunto normante $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Uma análise de árvore para ϕ é uma aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, $t \mapsto \mathcal{F}(t) = \phi_t$ que satisfaz as seguintes condições:*

- (1) $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \prec)$ é uma árvore finita com única raiz $\emptyset \in \mathcal{T}$, e $\phi_\emptyset = \phi$.
- (2) Se $t \in \mathcal{T}$ é um nó maximal de $\mathcal{T}$, então $\phi_t = \pm e_\alpha^*$, para algum $\alpha < \omega_1$.
- (3) Se $t \in \mathcal{T}$ não é um nó maximal, denotando por S_t o conjunto dos sucessores imediatos de t , então S_t deve satisfazer exatamente uma das seguintes condições:
 - (a) Existe uma única ordenação de $S_t = \{s_1 <_t \dots <_t s_d\}$ definida por $\phi_{s_1} < \dots < \phi_{s_d}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $d \leq n_j$ e $\phi_t = (1/m_j) \sum_{i=1}^d \phi_{s_i}$.
 - (b) Para cada $s \in S_t$, ϕ_s é do tipo 0 ou I, e existe uma família subconvexa $\{r_u\}_{u \in S_t}$ de racionais positivos tais que $\phi_t = \sum_{s \in S_t} r_s \phi_s$.
- (4) Para todos $s \prec t$, $\text{ran } \phi_s < \text{ran } \phi_t$.

Teorema 4.23 (Desigualdade básica para R.I.S). *Seja $(x_n)_n$ uma (C, ϵ) -R.I.S de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $(b_k)_k \in c_{00}(\mathbb{C}, \mathbb{N})$. Suponhamos que para algum $j_0 \in \mathbb{N}$ temos que para cada $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de peso $w(f) = m_{j_0}$ e para cada intervalo E de ω_1 ,*

$$\left| f \left(\sum_{k \in E} b_k x_k \right) \right| \leq C \left(\max_{k \in E} |b_k| + \epsilon \sum_{k \in E} |b_k| \right).$$

Então para todo $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I, existem $g_1, g_2 \in c_{00}(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ tais que

$$\left| f \left(\sum_{k \in E} b_k x_k \right) \right| \leq C(g_1 + g_2) \left(\sum_{k \in E} |b_k| e_k \right),$$

onde $g_1 = h_1$ ou $g_1 = e_t^* + h_1$, $t \notin \text{supp } h_1$, e $h_1 \in W[(m_j^{-1}, 4n_j)]$ tal que $h_1 \in \text{conv}_{\mathbb{Q}} \{h \in W[(m_j^{-1}, 4n_j)] : w(f) = w(h)\}$ e m_j não aparece como peso de um nó na análise de árvore de h_1 , e $\|g_2\|_\infty \leq \epsilon$.

Demonstração. Ver [7, Seção 8.2]

□

Observação 4.24. Fixando $(x_n)_n$ uma (C, ϵ) -RIS e $(b_k)_k \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ sempre existe um $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com peso $\omega(f) = m_{j_0}$ e para qualquer intervalo E de ω ,

$$\left| f \left(\sum_{k \in E} b_k x_k \right) \right| \leq C \left(\max_{k \in E} |b_k| + \epsilon \sum_{k \in E} |b_k| \right) (*).$$

Demonstração. Observemos que para cada intervalo E de ω ,

$$\begin{aligned} \left| f \left(\sum_{k \in E} b_k x_k \right) \right| &\leq \|f\|_{\infty} \left\| \sum_{k \in E} b_k x_k \right\|_1 \\ &\leq \|f\|_{\infty} C \sum_{k \in E} |b_k|, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \sup_E \left| f \left(\sum_{k \in E} b_k x_k \right) \right| &\leq \|f\|_{\infty} C d \\ &\leq \frac{C d}{\omega(f)}, \end{aligned}$$

onde $d = \sum_{k \in E} |b_k| < \infty$. Dado que $m_j \rightarrow \infty$ (quando $j \rightarrow \infty$), seja j_0 tal que

$$\frac{C d}{m_{j_0}} \leq C \left(\max_{k \in E} |b_k| + \epsilon \sum_{k \in E} |b_k| \right).$$

Portanto, para cada $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, $\omega(f) = m_{j_0}$, temos que satisfaz a equação (*). $\square$

Os seguintes resultados são consequências da desigualdade básica. A prova destas propriedades no nosso caso é a mesma que em [7].

Proposição 4.25. Seja $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ ou $f \in W[(m_j^{-1}, 4n_j)]$ de Tipo I. Consideremos $j \in \mathbb{N}$ e $l \in \left[\frac{n_j}{m_j}, n_j \right]$. Então para cada conjunto $F \subseteq c_{00}(\omega_1, \mathbb{C})$ de cardinalidade l ,

$$\left| f \left(\frac{1}{l} \sum_{\alpha \in F} e_{\alpha} \right) \right| \leq \begin{cases} \frac{2}{w(f)m_j}, & \text{if } w(f) < m_j, \\ \frac{1}{w(f)} & \text{if } w(f) \geq m_j. \end{cases}$$

Se a análise de árvore de f não contém nós de peso m_j , então

$$\left| f \left(\frac{1}{l} \sum_{\alpha \in F} e_{\alpha} \right) \right| \leq \frac{2}{m_j^3}$$

Demonstração. [7, Proposição 4.6] O seguinte é o esquema da prova.

1. A proposição é verificada para todo funcional de tipo I $f \in W$ do conjunto normante do espaço auxiliar $T[(m_j^{-1}, 4n_j)]$. (Usando indução na análise de árvore)

2. Usando que a base canônica $(e_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ de $X_{au} = T_{\omega_1}[(m_j^{-1}, 4n_j)]$ é 1-subsimétrica, segue de 1. que a proposição é válida para todo funcional de tipo I do conjunto normante W_{au} de X_{au} .

3. A norma $\|\cdot\|_{au}$ domina a norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}_{\omega_1}}$, assim $\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}_{\omega_1}^*} \subseteq \mathfrak{B}_{X_{au}^*}$. Logo para cada $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $\epsilon > 0$ existe $g \in W_{au}$ do mesmo peso tal que

$$\left| f\left(\frac{1}{l} \sum_{\alpha \in F} e_\alpha\right) - g\left(\frac{1}{l} \sum_{\alpha \in F} e_\alpha\right) \right| < \epsilon$$

Como o resultado é válido para g segue que é válido para f .

□

Proposição 4.26. *Seja $(x_k)_k$ uma (C, ϵ) - R.I.S de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ com $\epsilon \leq \frac{1}{n_j}$, $l \in \left[\frac{n_j}{m_j}, n_j\right]$ e seja $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I. Então,*

$$\left| f\left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k\right) \right| \leq \begin{cases} \frac{3C}{w(f)m_j}, & \text{se } w(f) < m_j \\ \frac{C}{w(f)} + \frac{2C}{n_j}, & \text{se } w(f) \geq m_j. \end{cases}$$

Por conseguinte, se $(x_k)_{k=1}^l$ é uma (C, ϵ) - R.I.S normalizada com $\epsilon \leq \frac{1}{n_{2j}}$, $l \in \left[\frac{n_{2j}}{m_{2j}}, n_{2j}\right]$, então

$$\frac{1}{m_{2j}} \leq \left\| \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k \right\| \leq \frac{2C}{m_{2j}}.$$

Demonstração. Seja $(x_k)_k$ uma (C, ϵ) - R.I.S, tomemos $b = (\frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l}, 0, 0, \dots) \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Segue da desigualdade básica que para cada $f \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I, existe $h_1 \in W[(m_j^{-1}, 4n_j)]$ com $\omega(h_1) = \omega(f)$, $t \in \mathbb{N}$ e $g_2 \in c_{00}(\mathbb{N})$ com $\|g_2\|_\infty \leq \epsilon$ tais que

$$\left| f\left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k\right) \right| \leq C(e_t^* + h_1 + g_2) \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l e_k\right).$$

além disso,

$$\left| g_2 \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l e_k \right) \right| \leq \|g_2\|_\infty \left\| \frac{1}{l} \sum_{k \in E} e_k \right\|_1 \leq \epsilon \leq \frac{1}{n_j}.$$

Agora pelas estimativas sobre o espaço auxiliar $T[(m_j^{-1}, 4n_j)_j]$ da Proposição 4.25, temos

- Se $\omega(f) < m_j$,

$$\begin{aligned} \left| f \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k \right) \right| &\leq C \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{\omega(f)m_j} + \frac{1}{n_j} \right) \\ &\leq C \left(\frac{m_j}{n_j} + \frac{2}{\omega(f)m_j} + \frac{1}{n_j} \right) \\ &\leq \frac{3C}{\omega(f)m_j} \end{aligned}$$

- Se $\omega(f) \geq m_j$,

$$\begin{aligned} \left| f \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k \right) \right| &\leq C \left(\frac{1}{l} + \frac{C}{\omega(f)} + \frac{1}{n_j} \right) \\ &\leq \frac{C}{\omega(f)} + \frac{2C}{n_j} \end{aligned}$$

Notemos que

- $\frac{3C}{\omega(f)m_{2j}} \leq \frac{2C}{m_{2j}}$, if $\omega(f) < m_{2j}$,
- $\frac{C}{\omega(f)} + \frac{2C}{n_{2j}} \leq \frac{C}{m_{2j}} + \frac{C}{m_{2j}} = \frac{2C}{m_{2j}}$, if $\omega(f) \geq m_{2j}$.

Concluimos a partir do fato que $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é o conjunto normante:

$$\|(1/l) \sum_{k=1}^l x_k\| \leq 2C/m_{2j}.$$

Para verificar a segunda parte do Teorema, seja $(x_k)_{k=1}^l$ uma $(C, \epsilon) - R.I.S$ normalizada com $\epsilon \leq \frac{1}{n_{2j}}$, $l \in \left[\frac{n_{2j}}{m_{2j}}, n_{2j} \right]$. Para cada $k \leq l$, consideremos $x_k^* \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, tal que $x_k^*(x_k) = 1$ e $\text{ran } x_k^* \subseteq \text{ran } x_k$, então $x^* = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{k=1}^l x_k^* \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $x^* \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k \right) = \frac{1}{m_{2j}}$. Portanto, $\frac{1}{m_{2j}} \leq \left\| \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l x_k \right\|$. $\square$

4.6 Prova do Passo II

Primeiro lembremos o enunciado do Passo II:

Passo II. Para cada sequência de blocos normalizada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, o subespaço $\overline{\text{span}}_{\mathbb{R}}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ é um espaço H.I real.

Vamos apresentar mais um tipo de sequências, com o propósito de construir a estrutura condicional em $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. De fato, este espaço não possui sequências básicas incondicionais reais.

Definição 4.27. Um par (x, ϕ) com $x \in \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, é chamado de (C, j) -par exato, se:

$$(a) \quad \|x\| \leq C, \quad \omega(\phi) = m_j \quad \text{e} \quad \phi(x) = 1.$$

(b) Para cada $\psi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de Tipo I e $\omega(x) = m_i$, $i \neq j$, temos

$$|\psi(x)| \leq \begin{cases} \frac{2C}{m_i}, & \text{se } i < j \\ \frac{C}{m_j^2} & \text{se } i > j \end{cases}$$

Exemplo 4.28. Tome $x = \frac{m_{2j}}{n_{2j}} \sum_{\alpha \in F} e_{\alpha}$, $\phi = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{\alpha \in F} e_{\alpha}^*$, $\#F = n_{2j}$. Então (x, ϕ) é um $(6, 2j)$ -par exato.

Proposição 4.29. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Então para cada $j \in \mathbb{N}$, existe (x, ϕ) um $(6, 2j)$ -par exato tal que $x \in \text{span}_{\mathbb{R}}(x_n)$, $\phi \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$.

Demonstração. Fixemos $(x_n)_n$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e um inteiro positivo j . Pela Proposição 4.21, existe $(y_n)_n$ uma $(3, 1/n_{2j}) - R.I.S$ normalizada no $\text{span}_{\mathbb{R}}(x_n)$. Para cada $1 \leq i \leq n_{2j}$ e $\epsilon > 0$, tomemos $\phi_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $\phi_i(y_i) > 1 - \epsilon$, e $\phi_i < \phi_{i+1}$. Seja $x = (m_{2j}/n_{2j}) \sum_{i=1}^{n_{2j}} y_i$ e $\phi = (1/m_{2j}) \sum_{i=1}^{n_{2j}} \phi_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Perturbando o vetor x por um coeficiente racional no suporte de algum y_i , podemos supor que $\phi(x) = 1$. Utilizando a Proposição 4.26, concluímos que (x, ϕ) é um $(6, 2j)$ -par exato. $\square$

Definição 4.30. Seja $j \in \mathbb{N}$. Uma sequência $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ é chamada de $(1, j)$ -sequência dependente, se

$$(DS. 1) \quad \text{supp } x_1 \cup \text{supp } \phi_1 < \dots < \text{supp } x_{n_{2j+1}} \cup \text{supp } \phi_{n_{2j+1}}$$

$$(DS. 2) \quad \text{A sequência } \Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n_{2j+1}}) \text{ é uma } 2j + 1\text{-sequência especial.}$$

(DS. 3) (x_i, ϕ_i) é um $(6, 2j_i)$ -par exato. $\#\text{supp } x_i \leq m_{2j+1}/n_{2j+1}^2$ para cada $1 \leq i \leq n_{2j+1}$

(DS. 4). Para cada $(2j+1)$ -sequência especial $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n_{2j+1}})$, temos

$$\bigcup_{k_{\Phi, \Psi} < i < \lambda_{\Phi, \Psi}} \text{supp } x_i \cap \bigcup_{k_{\Phi, \Psi} < i < \lambda_{\Phi, \Psi}} \text{supp } \psi_i = \emptyset.$$

onde $k_{\Phi, \Psi}, \lambda_{\Phi, \Psi}$ são os números introduzidos na Definição 4.14.

Proposição 4.31. Para cada sequência de blocos normalizada $(y_n)_n$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, e todo inteiro positivo j , existe uma $(1, j)$ -sequência dependente $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ tal que x_i pertence ao span $\mathbb{R}$ -linear de $(y_n)_n$ ($i = 1, \dots, n_{2j+1}$).

Demonstração. Seja $(y_n)_n$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $j \in \mathbb{N}$. Vamos construir a sequência $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ indutivamente. Primeiro, usando a Proposição 4.29 escolhemos um $(6, 2j_1)$ -par exato (x_1, ϕ_1) tal que j_1 seja par, $m_{2j_1} > n_{2j_1}^2$ e $x_1 \in \text{span}_{\mathbb{R}}(y_n)_n$. Suponhamos que temos construído uma sequência $(x_1, \phi_1, \dots, x_{l-1}, \phi_{l-1})$ de forma tal que exista $(p_1, \dots, p_{l-1})$ satisfazendo

1. $\text{supp } x_1 \cup \text{supp } \phi_1 < \dots < \text{supp } x_{l-1} \cup \text{supp } \phi_{l-1}$, onde $x_i \in \text{span}_{\mathbb{R}}(y_n)_n$ e (x_i, ϕ_i) é um $(6, 2j_i)$ -par exato.
2. Para $1 < i \leq l-1$, $w(\phi_i) = \sigma_{\phi}(\phi_1, w(\phi_1), p_1, \dots, \phi_{i-1}, w(\phi_{i-1}), p_{i-1})$.
3. Para $1 \leq i < l-1$, $p_i \geq \max\{p_{i-1}, p_{F_i}\}$, onde $F_i = \bigcup_{k=1}^i \text{supp } \phi_k \cup \text{supp } x_k$.

Para completar a construção por indução escolha $p_{l-1} \geq \max\{p_{l-2}, p_{F_{l-1}}, n_{2j+1}^2 \#\text{supp } x_{l-1}\}$ e $2j_l = \sigma_{\phi}(\phi_1, w(\phi_1), p_1, \dots, \phi_{l-1}, w(\phi_{l-1}), p_{l-1})$. Assim, tome um $(6, 2j_l)$ -par exato (x_l, ϕ_l) tal que $x_l \in \text{span}_{\mathbb{R}}(y_n)_n$ e $\text{supp } x_{l-1} \cup \text{supp } \phi_{l-1} < \text{supp } x_l \cup \text{supp } \phi_l$. Note que as propriedades (DS.1), (DS.2) e (DS.3) são claramente satisfeitas por definição da sequência. (DS.4) segue de (3) junto com (TP.3). $\square$

Modificando um pouco o argumento anterior obtém-se o seguinte:

Proposição 4.32. Para todo par de sequências de blocos normalizadas $(y_n)_n$ e $(z_n)_n$ de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, e cada $j \in \mathbb{N}$ existe uma $(1, j)$ -sequência dependente $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ tal que $x_{2l-1} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(y_n)$ e $x_{2l} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(z_n)$ para cada $l = 1, \dots, n_{2j+1}$. $\square$

Outra consequência da desigualdade básica é a seguinte Proposição.

Proposição 4.33. Seja $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ uma $(1, j)$ -sequência dependente. Então:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \left\| \frac{1}{n_{2j+1}} \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} x_i \right\| \geq \frac{1}{m_{2j+1}} \\
2. \quad & \left\| \frac{1}{n_{2j+1}} \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} (-1)^{i+1} x_i \right\| \leq \frac{1}{m_{2j+1}^3}
\end{aligned}$$

Demonstração. A primeira desigualdade é clara uma vez que o funcional $\phi = 1/m_{2j+1} \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} \phi_i$ pertence a $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e $\phi(\sum_{i=1}^{n_{2j+1}} x_i) = n_{2j+1}/m_{2j+1}$. A segunda é obtida utilizando a desigualdade básica. Para a prova completa ver [7, Proposição 3.7]. $\square$

Agora estamos em condições de demonstrar o Passo II.

Proposição 4.34. *Seja $(y_n)_n$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Então o fecho do span real de $(y_n)_n$ é H.I.*

Demonstração. Seja $(y_n)_n$ uma sequência de blocos normalizada de $\mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Fixemos $\epsilon > 0$ e duas subsequências de blocos $(z_n)_n$ e $(w_n)_n$ no $\text{span}_{\mathbb{R}}(y_n)_n$. Consideremos um inteiro positivo j tal que $m_{2j+1}\epsilon > 1$. Segue da Proposição 4.32, que existe uma $(1, j)$ -sequência dependente $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ tal que $x_{2i-1} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(z_n)$ e $x_{2i} \in \text{span}_{\mathbb{R}}(w_n)$. Definamos $z = (1/n_{2j+1}) \sum_{i=1(mpar)}^{n_{2j+1}} x_i$ e $w = 1/n_{2j+1} \sum_{i=1(par)}^{n_{2j+1}} x_i$. Note que $z \in \text{span}_{\mathbb{R}}(z_n)$ e $w \in \text{span}_{\mathbb{R}}(w_n)$. Assim, pela Proposição 4.33, obtemos $\|z + w\| \geq 1/m_{2j+1}$ e $\|z - w\| \geq 1/m_{2j+1}^2$. Portanto $\|z - w\| \leq \epsilon \|z + w\|$. $\square$

4.7 Prova do Passo III

Primeiro lembramos o enunciado do Passo III:

Passo III. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma R.I.S e $T : \overline{\text{span}}_{\mathbb{C}}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, \mathbb{C}x_n) = 0$.

Definição 4.35. *Uma sequência $(z_1, \phi_1, \dots, z_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ é chamada de $(0, j)$ -sequência dependente se satisfaz as seguintes condições.*

- (ODS.1) A sequência $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n_{2j+1}})$ é uma $2j + 1$ -sequência especial e $\phi_i(z_k) = 0$ para cada $1 \leq i, k \leq n_{2j+1}$.
- (ODS.2) Existe $\{\psi_1, \dots, \psi_{n_{2j+1}}\} \subseteq \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $w(\psi_i) = w(\phi_i)$, $\#\text{supp } z_i \leq w(\phi_{i+1})/n_{2j+1}^2$ e (z_i, ψ_i) é um $(6, 2j_i)$ -par exato, para cada $1 \leq i \leq n_{2j+1}$.

- (0DS.3) Se $H = (h_1, \dots, h_{n_{2j+1}})$ é uma $2j + 1$ -sequência especial arbitrária, então

$$\left(\bigcup_{\kappa_{\Phi, H} < i < \lambda_{\Phi, H}} \text{supp } z_i \right) \cap \left(\bigcup_{\kappa_{\Phi, H} < i < \lambda_{\Phi, H}} \text{supp } h_i \right) = \emptyset.$$

Proposição 4.36. Para cada $(0, j)$ -sequência dependente $(x_1, \phi_1, \dots, x_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$ temos

$$\left\| \frac{1}{n_{2j+1}} \sum_{k=1}^{n_{2j+1}} x_k \right\| \leq \frac{1}{m_{2j+1}^2}.$$

Demonstração. [7, Proposição 5.23]. □

Agora vamos demonstrar o Passo III.

Proposição 4.37. Sejam $(y_n)_n$ uma $(C, \epsilon) - R.I.S$, $Y = \overline{\text{span}}_{\mathbb{C}}(y_n)$, e $T : Y \longrightarrow \mathfrak{X}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ um operador $\mathbb{R}$ -linear. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Ty_n, \mathbb{C}y_n) = 0$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Ty_n, \mathbb{C}y_n) \neq 0$. Então existe um subconjunto infinito $B \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\inf_{n \in B} d(Ty_n, \mathbb{C}y_n) > 0$. Vamos mostrar que, para cada $\epsilon > 0$ existe $y \in Y$ tal que $\|y\| < \epsilon \|Ty\|$, e isso é uma contradição com o fato de T ser limitado.

Afirmção 1. Existem um ordinal limite γ_0 , $A \subseteq \mathbb{N}$ infinito e $\delta > 0$ tais que

$$\inf_{n \in A} d(P_{\gamma_0} Ty_n, \mathbb{C}y_n) > \delta$$

Para provar esta afirmação observemos que

$$\gamma_0 = \min\{\gamma < \omega_1 : \exists A \in [\mathbb{N}]^\infty \inf_{n \in A} d(P_\gamma Ty_n, \mathbb{C}y_n) > 0\}$$

é um ordinal limite. De fato, pela hipótese, o conjunto do lado direito é não vazio. Se γ_0 não fosse limite, então seria da forma $\gamma_0 = \beta + 1$. A sequência $(y_n)_n$ é fracamente nula (pois $(e_\alpha)_\alpha$ é contrátil), assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{\beta+1}^* Ty_n = 0.$$

Para todo n suficientemente grande e cada $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|P_\beta Ty_n - \lambda y_n\| &\geq \|P_{\beta+1} Ty_n - \lambda y_n\| - \|e_{\beta+1}^* Ty_n\| \\ &\geq \delta - |e_{\beta+1}^* Ty_n| \geq \delta/2, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Afirmção 2. Fixemos γ_0 e $A \subseteq \mathbb{N}$ como os obtidos pela Afirmção 1. Então existem uma sequência $n_2 < n_3 < \dots$ em A , uma sequência de funcionais $f_2, f_3, \dots$ em $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e uma sequência de ordinais $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_0$ tais que

- (1) $d(P_{[\gamma_k, \gamma_{k+1}]}Ty_{n_k}, \mathbb{C}y_{n_k}) \geq \delta/2$
- (2) $f_kTy_{n_k} \geq \delta/2$
- (3) $f_k(y_{n_k}) = 0$
- (4) $\text{ran } f_k \subseteq \text{ran } Ty_{n_k}$
- (5) $\text{supp } f_k \cap \text{supp } y_{n_m} = \emptyset$ quando $m \neq k$

Para provar esta Afirmção, seja $\xi = \sup \max \text{supp } y_n$. Nós analisamos as três possibilidades para ξ :

Caso a.) $\xi < \gamma_0$. Seja $n_1 = \min A$ e escolha $\xi < \gamma_1 < \gamma_0$ tal que

$$\|P_{\gamma_0}Ty_{n_1} - P_{\gamma_1}Ty_{n_1}\| < \delta/2,$$

assim, $d(P_{\gamma_1}Ty_{n_1}, \mathbb{C}y_{n_1}) > \delta/2$. Por minimalidade de γ_0 , temos

$$\inf_{n \in A} d(P_{\gamma_1}Ty_n, \mathbb{C}y_n) = 0,$$

então podemos tomar $n_2 > n_1$ em A de forma que $d(P_{\gamma_1}Ty_{n_2}, \mathbb{C}y_{n_2}) < \delta/2$, isso implica que

$$d((P_{\gamma_0} - P_{\gamma_1})Ty_{n_2}, \mathbb{C}y_{n_2}) > \delta/2.$$

Aproximando o vetor $(P_{\gamma_0} - P_{\gamma_1})Ty_{n_2}$, escolha $\gamma_0 > \gamma_2 > \gamma_1$ tal que $\|(P_{\gamma_0} - P_{\gamma_2})Ty_{n_2}\|$ seja suficientemente pequeno, afim de garantir que

$$d(P_{[\gamma_1, \gamma_2]}Ty_{n_2}, \mathbb{C}y_{n_2}) > \delta/2.$$

Usando o Teorema de Hahn Banach complexo, existe $g_2 \in B_{\mathfrak{X}_{\omega_1}^*(\mathbb{C})}$ tal que

- $g_2(P_{[\gamma_1, \gamma_2]}Ty_{n_2}) > \delta/2$
- $g_2(y_{n_2}) = 0$

e pela Proposição 4.2, podemos tomar $h_2 \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ de forma que $h_2(P_{[\gamma_1, \gamma_2]}Ty_{n_2}) > \delta/2$ e $h_2(y_{n_2})$ seja arbitrariamente pequeno. Substituindo h_2 por $\alpha h_2 + \beta k_2$ onde $|\alpha| + |\beta| = 1$, $k_2(y_{n_2})$ seja suficientemente perto de 1, e $k_2 \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$, podemos supor que $h_2(y_{n_2}) = 0$.

Seja $f_2 = h_2 P_{[\gamma_1, \gamma_2] \cap \text{ran } Ty_{n_2}} \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. Novamente por minimalidade de γ_0 , existe $n_3 > n_2$ em A tal que $d(P_{\gamma_2} Ty_{n_3}, \mathbb{C}y_{n_3}) < \delta/2$ e escolhemos $\gamma_0 > \gamma_3 > \gamma_2$ satisfazendo

$$d(P_{[\gamma_2, \gamma_3]} Ty_{n_3}, \mathbb{C}y_{n_3}) > \delta/2.$$

Assim, por Hahn Banach e a Proposição 4.2 existe um funcional $h_3 \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que

- $h_3(P_{[\gamma_2, \gamma_3]} Ty_{n_3}) > \delta/2$
- $h_3(y_{n_3}) = 0$

definimos $f_3 = h_3 P_{[\gamma_2, \gamma_3] \cap \text{ran } Ty_{n_3}} \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$. O argumento anterior nos oferece um método para construir as sequências da Afirmação 2. Propriedades (1)-(5) são fáceis de verificar. Em particular, a propriedade (5) é válida pois $\min \text{supp } f_k > \xi > \max \text{supp } y_{n_l}$, para todos inteiros positivos k, l .

Caso b.) $\xi > \gamma_0$. Neste caso, começamos escolhendo $n_1 \in A$ tal que $\min \text{supp } y_{n_1} > \gamma_0$. Em seguida, repetimos exatamente o mesmo argumento que no caso a.).

Case c.) $\xi = \gamma_0$. Repetimos o mesmo argumento que no caso a.) com o cuidado adicional de manter a propriedade (5) válida. Ou seja, cada vez que seja escolhido o ordinal γ_{k+1} (com $\gamma_0 > \gamma_{k+1} > \gamma_k$) verificamos que $\gamma_{k+1} > \max \text{supp } y_{n_{k+1}}$.

Afirmação 3. Existe uma $(0, j)$ -sequência dependente $(z_1, \phi_1, \dots, z_{n_{2j+1}})$ tal que

- $z_i \in X$ para cada $1 \leq i \leq n_{2j+1}$
- $\text{ran } \phi_k \subseteq \text{ran } Ty_k$ e $\phi_k(Tz_k) > \delta/2$

Seja j com $m_{2j+1} > 24/\epsilon\delta$. Tomemos j_1 um inteiro par tal que $m_{2j_1} > n_{2j_1}^2$ (ver definição de sequência especial 4.14) e $F_1 \subseteq A$ com $\#F_1 = n_{2j_1}$ tal que $(y_{n_k})_{k \in F_1}$ é uma $(3, 1/n_{2j_1}^2)$ -R.I.S. Em seguida, defina

$$\phi_1 = \frac{1}{m_{2j_1}} \sum_{i \in F_1} f_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \text{ e } z_1 = \frac{m_{2j_1}}{n_{2j_1}} \sum_{k \in F_1} y_k$$

observemos que $w(\phi_1) = m_{2j_1}$, $\phi_1(Tz_1) = \frac{1}{n_{2j_1}} \sum_{i \in F_1} f_i (\sum_{k \in F_1} Ty_k) > \delta/2$ and $\phi_1(z_1) = \frac{1}{n_{2j_1}} \sum_{i \in F_1} f_i (\sum_{k \in F_1} y_k) = 0$. Selecione

$$p_1 \geq \max\{p_\theta(\text{supp } z_1 \cup \text{supp } Ty_1 \cup \text{supp } \phi_1), n_{2j_1}^2 \# \text{supp } z_1\}$$

denotemos $2j_2 = \sigma_\varrho(\phi_1, m_{2j_1}, p_1)$. Assim, tomando $F_2 \subseteq A$ com $\#F_2 = n_{2j_2}$ e $F_2 > F_1$ tal que $(y_k)_{k \in F_2}$ é uma $(3, 1/n_{2j_2}^2) - R.I.S$, defina

$$\phi_2 = \frac{1}{m_{2j_2}} \sum_{i \in F_2} f_i \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C}) \text{ and } z_2 = \frac{m_{2j_2}}{n_{2j_2}} \sum_{k \in F_2} y_k$$

Portanto, temos $\phi_1 < \phi_2$, $\phi_2(Tz_2) > \delta$ e $\phi_2(z_1) = \phi_2(z_2) = 0$. Consideremos

$$p_2 \geq \max\{p_1, p_\varrho(\text{supp } z_1 \cup \text{supp } z_2 \cup \text{supp } Tz_1 \cup \text{supp } Tz_2 \cup \text{supp } \phi_1 \cup \text{supp } \phi_2), n_{2j_2+1}^2 \# \text{supp } z_2\}$$

e defina $2j_3 = \sigma_\varrho(\phi_1, m_{2j_1}, p_1, \phi_2, m_{2j_2}, p_2)$. Continuando com esse procedimento formamos uma sequência $(z_1, \phi_1, \dots, z_{n_{2j+1}}, \phi_{n_{2j+1}})$. Agora, vamos verificar que é uma $(0, j)$ -sequência dependente.

A primeira propriedade (0DS.1) é mostrar que a sequência $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_{n_{2j+1}})$ é uma $2j+1$ -sequência especial e que $\phi_i(z_k) = 0$ para cada $1 \leq i, k \leq n_{2j+1}$. Mas isto é claro pela construção dos funcionais, pois seus pesos satisfazem $w(\phi_{i+1}) = m_{\sigma_\varrho(\Phi_i)}$ onde $\Phi_i = (\phi_1, w(\phi_1), p_1, \dots, \phi_i, w(\phi_i), p_i)$.

A segunda propriedade (0DS.2) consiste em construir uma sequência $\{\psi_1, \dots, \psi_{n_{2j+1}}\} \subseteq \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $w(\psi_i) = w(\phi_i)$, $\# \text{supp } z_i \leq w(\phi_{i+1})/n_{2j+1}^2$ e (z_i, ψ_i) seja um $(6, 2j_i)$ -par exato, para cada $1 \leq i \leq n_{2j+1}$:

Vamos construir uma sequência $\{\psi_1, \dots, \psi_{n_{2j+1}}\}$ em $\mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que (z_i, ψ_i) seja um $(6, 2j_i)$ -par exato e $w(\psi_i) = w(\phi_i)$ para cada $1 \leq i \leq n_{2j+1}$. A outra condição $\# \text{supp } z_i \leq w(\phi_{i+1})/n_{2j+1}^2$ já se obtém a partir da construção dos pesos. Para cada z_i existe um subconjunto $F_i \subseteq A$ com $\#F_i = n_{2j_i}$ tal que $z_i = (m_{2j_i}/n_{2j_i}) \sum_{k \in F_i} y_{n_k}$ onde $(y_{n_k})_{k \in F_i}$ é uma $(3, 1/n_{2j_i}^2)$ R.I.S. Agora seguimos o mesmo argumento da Proposição 4.29. Para cada $k \in F_i$ tomamos $f_{n_k} \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ tal que $f_{n_k}(y_{n_k}) = 1$ e $f_{n_k} < f_{n_{k+1}}$. Assim, $\psi_i = (1/m_{2j_i}) \sum_{k \in F_i} f_{n_k} \in \mathcal{K}_{\omega_1}(\mathbb{C})$ e (z_i, ϕ_i) é um $(6, 2j_i)$ -par exato.

A terceira propriedade (0DS. 3) é verificar que e $H = (h_1, \dots, h_{n_{2j+1}})$ é uma $2j+1$ -sequência especial arbitrária, então

$$\left(\bigcup_{\kappa_{\Phi, H} < i < \lambda_{\Phi, H}} \text{supp } z_i \right) \cap \left(\bigcup_{\kappa_{\Phi, H} < i < \lambda_{\Phi, H}} \text{supp } h_i \right) = \emptyset.$$

Seja $H = (h_1, \dots, h_{n_{2j+1}})$ uma $2j+1$ -sequência especial arbitrária. Passando a uma subsequência, se necessário, basta considerar os seguintes dois casos: a) Suponha que $\max \text{supp } z_k \leq \max \text{supp } \phi_k$ para cada $1 \leq k \leq n_{2j+1}$. Então $\text{supp } z_k \subseteq \text{supp } \overline{\phi_{\lambda_{\Phi, H}^{-1}}^{p_{\lambda_{\Phi, H}^{-1}}}}$ para todo $\kappa_{\Phi, H} <$

$k < \lambda_{\Phi, H}$. Logo, pela segunda parte de (TP. 3) obtemos o resultado desejado. (b) Suponha que $\max \text{supp } \phi_k \leq \max \text{supp } z_k$ para cada $1 \leq k \leq n_{2j+1}$. Então $\text{supp } \phi_k \subseteq \text{supp } \overline{z_{\lambda_{\Phi, H}-1}}^{p_{\lambda_{\Phi, H}-1}}$ para todo $\kappa_{\Phi, H} < k < \lambda_{\Phi, H}$, e o resultado segue a partir da primeira parte de (TP3).

Fixemos uma $(0, j)$ -sequência dependente como a obtida na Afirmação 2, definamos

$$z = (1/n_{2j+1}) \sum_{k=1}^{n_{2j+1}} z_k \text{ and } \phi = (1/m_{2j+1}) \sum_{k=1}^{n_{2j+1}} \phi_k.$$

Então $\phi(Tz) = (1/n_{2j+1}) \sum_{k=1}^{n_{2j+1}} \phi_k(Tz) \geq \delta/m_{2j+1}$ e $\|z\| \leq 12/m_{2j+1}^2$. Portanto, $\|Tz\| \geq \delta/m_{2j+1} \geq \delta m_{2j+1} \|z\|/12 > \epsilon \|z\|$ o que completa a prova da Proposição 4.37 por absurdo.

□

Capítulo 5

Estruturas complexas compatíveis no espaço de Kalton-Peck

Neste capítulo, utilizamos a teoria de estruturas complexas para estudar o problema dos hiperplanos do espaço de Kalton-Peck Z_2 . Demonstramos que os hiperplanos canônicos $\ell_2 \oplus_{\Omega_2} H$ de Z_2 não admitem estruturas complexas que sejam extensões de estruturas complexas em ℓ_2 . Na seção 5.4, construímos uma estrutura complexa em ℓ_2 que não pode ser estendida a nenhum operador em Z_2 .

5.1 Estruturas complexas em Z_2

No capítulo 2, foi definido o espaço de Kalton-Peck Z_2 como a soma torcida de ℓ_2 com ℓ_2 associado a uma aplicação quase linear Ω_2 tal que

$$\Omega_2(x) = \sum x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} e_n$$

para todo $x \in \ell_2$ de suporte finito. Nesta seção, estudaremos o problema de estruturas complexas em Z_2 . Esse problema tem varias semelhanças com o estudo de estruturas complexas em espaços com base subsimétrica. Sabemos que Z_2 não tem uma base incondicional, porém admite uma decomposição de Schauder 2-dimensional com certas propriedades simétricas. Existem três estruturas complexas que podemos associar de maneira natural a Z_2 . A primeira, herdada de ℓ_2 , i.e., o operador $J(x, y) = (u_2(x), u_2(y))$ em Z_2 , onde u_2 é a estrutura canônica de ℓ_2 . A segunda, obtida a partir da complexificação $Z_2 \oplus_{\mathbb{C}} Z_2$, e do fato que Z_2 é isomorfo a seu quadrado. E a terceira, considerando o espaço de Kalton-Peck complexo $Z_2(\mathbb{C})$, ou seja, a soma torcida de $\ell_2(\mathbb{C})$ com $\ell_2(\mathbb{C})$ gerada por $\Omega_2^{\mathbb{C}}$ a aplicação quase linear complexa de Kalton-Peck.

Proposição 5.1. *Os seguintes espaços complexos são isomorfos:*

- $Z_2(\mathbb{C})$
- $Z_2 \oplus_{\mathbb{C}} Z_2$
- Z_2^J

Demonstração. Segue dos Lemas 5.3, 5.4 a seguir. $\square$

Denotemos por $\{f_n\}$ e $\{e_n\}$ as bases canônicas de ℓ_2 e $\ell_2(\mathbb{C})$, respetivamente. Assim para cada $x = \sum x_n f_n \in \ell_2$ a estrutura complexa canônica u_2 em ℓ_2 está dada por

$$u_2(x) = \sum -x_{2n} f_{2n-1} + \sum x_{2n-1} f_{2n}.$$

Consideremos $\Omega : \ell_2^{u_2} \rightarrow \ell_2^{u_2}$ a aplicação quase linear complexa definida por

$$\Omega(x) = \Omega_2(x), \quad \forall x \in \ell_2.$$

Para verificar que Ω é quase linear, só falta provar a propriedade de homogeneidade: $\Omega(ix) = i\Omega(x)$ para todo $x \in \ell_2^{u_2}$.

$$\begin{aligned} \Omega u_2(x) &= \Omega_2(-x_{2n} f_{2n-1} + \sum x_{2n-1} f_{2n}) \\ &= \sum -x_{2n} \log \frac{\|x\|_2}{|x_{2n}|} f_{2n-1} + \sum x_{2n-1} \log \frac{\|x\|_2}{|x_{2n-1}|} f_{2n} \\ &= u_2\left(\sum x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} f_n\right) \\ &= u_2 \Omega(x). \end{aligned}$$

Lema 5.2. *Os espaços complexos $\ell_2^{u_2} \oplus_{\Omega} \ell_2^{u_2}$ e $\ell_2(\mathbb{C}) \oplus_{\Omega_{\mathbb{C}}} \ell_2(\mathbb{C})$ são isomorfos.*

Demonstração. Claramente, o operador $A : \ell_2^{u_2} \rightarrow \ell_2(\mathbb{C})$ definido como

$$A\left(\sum x_n f_n\right) = \sum (x_{2n-1} + ix_{2n}) e_n$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear entre $\ell_2^{u_2}$ e $\ell_2(\mathbb{C})$. Seja $T : \ell_2^{u_2} \oplus_{\Omega} \ell_2^{u_2} \rightarrow \ell_2(\mathbb{C}) \oplus_{\Omega_{\mathbb{C}}} \ell_2(\mathbb{C})$ a aplicação linear definida por $T(x, y) = (Ax, Ay)$ ($x, y \in \ell_2$), então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2^{u_2} & \longrightarrow & \ell_2^{u_2} \oplus_{\Omega} \ell_2^{u_2} & \longrightarrow & \ell_2^{u_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow A & & \downarrow T & & \downarrow A \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{C}) \oplus_{\Omega_{\mathbb{C}}} \ell_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{C}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Em particular, T é uma bijeção. Falta provar que T é limitado. Primeiro vejamos que $A\Omega - \Omega_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} A$ é limitado:

$$\begin{aligned}
A\Omega(x) &= A\left(\sum x_n \log \frac{\|x\|_2}{|x_n|} f_n\right) \\
&= \sum \left(x_{2n-1} \log \frac{\|x\|_2}{|x_{2n-1}|} + ix_{2n} \log \frac{\|x\|_2}{|x_{2n}|} \right) e_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2^{\mathbb{C}} A(x) &= \Omega_2^{\mathbb{C}} \left(\sum (x_{2n-1} + ix_{2n}) e_n \right) \\
&= \sum \left((x_{2n-1} + ix_{2n}) \log \frac{\|x\|_2}{|x_{2n-1} + ix_{2n}|} \right) e_n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|A\Omega(x) - \Omega_2^{\mathbb{C}} A(x)\|^2 &= \left\| \sum \left(x_{2n-1} \log \frac{|x_{2n-1} + ix_{2n}|}{|x_{2n-1}|} + ix_{2n} \log \frac{|x_{2n-1} + ix_{2n}|}{|x_{2n}|} \right) e_n \right\|^2 \\
&= \sum |x_{2n-1} + ix_{2n}|^2 \left| \frac{x_{2n-1}}{x_{2n-1} + ix_{2n}} \right|^2 \left| \log \frac{|x_{2n-1} + ix_{2n}|}{|x_{2n-1}|} \right|^2 \\
&\quad + \sum |x_{2n-1} + ix_{2n}|^2 \left| \frac{x_{2n}}{x_{2n-1} + ix_{2n}} \right|^2 \left| \log \frac{|x_{2n-1} + ix_{2n}|}{|x_{2n}|} \right|^2 \\
&\leq 2 \sum |x_{2n-1} + ix_{2n}|^2 \\
&= 2\|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Com isto, podemos concluir que a T é limitada:

$$\begin{aligned}
\|T(x, y)\| &= \|(Ax, Ay)\| \\
&= \|Ax - \Omega_2^{\mathbb{C}} Ay\| + \|Ay\| \\
&\leq \|A(x - \Omega y)\| + \|(A\Omega - \Omega_2^{\mathbb{C}} A)y\| \\
&\leq \|A\| \|(x, y)\| + \sqrt{2}\|y\| \\
&\leq (\|A\| + \sqrt{2})\|(x, y)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, T é um isomorfismo. □

Seja $J = (u_2, u_2)$ a estrutura complexa em Z_2 herdada de ℓ_2 . Observemos que Z_2^J é isomorfo a $\ell_2^{u_2} \oplus_{\Omega} \ell_2^{u_2}$. De fato, a identidade $Id : \ell_2^{u_2} \oplus_{\Omega} \ell_2^{u_2} \rightarrow Z_2^J$ é $\mathbb{C}$ -linear:

$$i(x, y) = (ix, iy) = (u_2x, u_2y) = J(x, y),$$

e claramente $\|(x, y)\|_\Omega = \|(x, y)\|_{\Omega_2}$. Assim, do lema anterior obtemos:

Lema 5.3. $Z_2(\mathbb{C})$ é isomorfo a Z_2^J .

Lema 5.4. Z_2^J é isomorfo a $Z_2 \oplus_{\mathbb{C}} Z_2$.

Demonstração. Definamos

$$\begin{aligned} T : Z_2^J &\longrightarrow Z_2 \oplus_{\mathbb{C}} Z_2 \\ (x, y) = \left(\sum x_n f_n, \sum y_n f_n \right) &\longmapsto \left(\left(\sum x_{2n-1} f_n, \sum y_{2n-1} f_n \right), \left(\sum x_{2n} f_n, \sum y_{2n} f_n \right) \right) \end{aligned}$$

Denotemos para $x = \sum x_n f_n \in \ell_2$

$$x_i = \sum x_{2n-1} f_n$$

$$x_p = \sum x_{2n} f_n$$

Então $\|T(x, y)\| = \|((x_i, y_i), (x_p, y_p))\| = \|(x_i, y_i)\| + \|(x_p, y_p)\|$

Sem perda de generalidade, suponhamos $\|y_i\|_2 = 1$ e $\|y_p\|_2 \leq 1$. Notemos que nesse caso $\|y\|_2^2 = \|y_i\|_2^2 + \|y_p\|_2^2 = 1 + \|y_p\|_2^2$.

Por definição $\|(x_i, y_i)\| = \|x_i - \Omega_2 y_i\|_2 + \|y_i\|_2$. Agora para cada n

$$\begin{aligned} |(x_i)_n - (\Omega_2 y_i)_n| &= \left| (x_i)_n - (y_i)_n \log \frac{\|y_i\|_2}{|(y_i)_n|} \right| \\ &= \left| x_{2n-1} - y_{2n-1} \log \frac{\|y_i\|_2}{|y_{2n-1}|} \right| \\ &\leq \left| x_{2n-1} - y_{2n-1} \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n-1}|} \right| + |y_{2n-1}| \left| \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n-1}|} - \log \frac{\|y_i\|_2}{|y_{2n-1}|} \right| \\ &= \left| x_{2n-1} - y_{2n-1} \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n-1}|} \right| + |y_{2n-1}| |\log \|y\|_2| \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|(x_i, y_i)\| &\leq \|(x, y)\| + \|y_i\|_2 |\log \|y\|_2| + \|y_i\|_2 \\ &= \|(x, y)\| + \|y_i\|_2 \left(1 + \frac{1}{2} |\log(1 + \|y_p\|_2^2)| \right) \\ &\leq \|(x, y)\| + (1 + \log \sqrt{2}) \|y\|_2 \\ &\leq (2 + \log \sqrt{2}) \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

Analogamente $\|(x_p, y_p)\| = \|x_p - \Omega_2 y_p\|_2 + \|y_p\|_2$. Para cada n

$$\begin{aligned}
 |(x_p)_n - (\Omega_2 y_p)_n| &= \left| (x_p)_n - (y_p)_n \log \frac{\|y_p\|_2}{|(y_p)_n|} \right| \\
 &= \left| x_{2n} - y_{2n} \log \frac{\|y_p\|_2}{|y_{2n}|} \right| \\
 &\leq \left| x_{2n} - y_{2n} \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n}|} \right| + |y_{2n}| \left| \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n}|} - \log \frac{\|y_p\|_2}{|y_{2n}|} \right| \\
 &= \left| x_{2n} - y_{2n} \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n}|} \right| + |y_{2n}| \left| \log \frac{\|y\|_2}{\|y_p\|_2} \right| \\
 &= \left| x_{2n} - y_{2n} \log \frac{\|y\|_2}{|y_{2n}|} \right| + \frac{1}{2} |y_{2n}| \left| \log \left(1 + \frac{1}{\|y_p\|_2^2} \right) \right|
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \|(x_p, y_p)\| &\leq \|(x, y)\| + \frac{1}{2} \|y_p\|_2 \left| \log \left(1 + \frac{1}{\|y_p\|_2^2} \right) \right| + \|y_p\|_2 \\
 &= \|(x, y)\| + \frac{1}{2} + \|y_p\|_2 \\
 &\leq \|(x, y)\| + 2\|y\|_2 \\
 &\leq 3\|(x, y)\|,
 \end{aligned}$$

pois $|t(1 + \log(1/t^2))| \leq 1$ para $0 < t < 1$. Concluimos que $\|T(x, y)\| \leq (5 + \log \sqrt{2})\|(x, y)\|$.

No caso geral, para qualquer $(x, y) \in Z_2^J$ seja $c = \max\{\|y_i\|_2, \|y_p\|_2\}$ e aplicamos o resultado anterior para $(x/c, y/c)$. $\square$

Agora obtemos interessantes consequências:

Proposição 5.5. *Seja I uma estrutura complexa em Z_2 . Então temos:*

1. Z_2^I é isomorfo a um subespaço complementado de $Z_2(\mathbb{C})$.
2. Z_2^I contém um subespaço complementado e isomorfo a $Z_2(\mathbb{C})$.
3. Se $(Z_2^I)^2 \simeq Z_2^I$, então Z_2^I é isomorfo a $Z_2(\mathbb{C})$.

Demonstração. Consideremos I uma estrutura complexa de Z_2 . Para provar (1) observe que do Teorema 3.5 segue que Z_2^I está complementado no complexificado de Z_2 e pela Proposição 5.1 é complementado em $Z_2(\mathbb{C})$. (2) é consequência de (1) e da versão complexa do Teorema 2.17 para $Z_2(\mathbb{C})$. (3) resulta de aplicar o método de decomposição de Pełczyński. $\square$

Pergunta 5.6. Z_2 admite estrutura complexa única?

5.2 Operadores compatíveis em somas torcidas

Sejam $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ uma soma torcida de espaços de Banach X e Y , e $\alpha : X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Uma pergunta natural é determinar quando existe um operador em Z que estende α , i.e., um operador em Z tal que sua restrição à cópia de X em Z seja exatamente α . Em termos de diagramas, procuramos operadores $\gamma : Z \rightarrow Z$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Quando tal extensão existe, um operador β é induzido no quociente $Y = Z/X$ (determinado por $\beta(z + X) = \gamma(z) + X$) de maneira que o diagrama completo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Se a soma torcida Z está determinada por uma aplicação quase linear $\Omega : Y \rightarrow X$, a condição para $\gamma : X \oplus_{\Omega} Y \rightarrow X \oplus_{\Omega} Y$ ser uma extensão de α é equivalente à condição $\gamma(x, 0) = (\alpha(x), 0)$ para todo $x \in X$.

Uma pergunta mais restritiva surge quando fixamos dois operadores $\alpha : X \rightarrow X$ e $\beta : Y \rightarrow Y$ e queremos achar $\gamma : Z \rightarrow Z$ tal que a restrição de γ a X seja α e o operador induzido no quociente Y coincida com β . Nesse caso a partir de α e β queremos achar $\gamma : Z \rightarrow Z$ tal que o diagrama comute

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \end{array} \tag{5.1}$$

Definição 5.7. *Seja Z uma soma torcida de espaços de Banach X e Y e operadores $\alpha : X \rightarrow X$ e $\beta : Y \rightarrow Y$. Dizemos que o par (α, β) é compatível com Z se existir um operador $\gamma : Z \rightarrow Z$ tal que o diagrama (5.1) seja comutativo.*

Quando um par de operadores (α, β) forem compatíveis com uma soma torcida $X \oplus_{\Omega} Y$, simplesmente diremos que são compatíveis com Ω .

Lembremos que uma aplicação quase linear $\Omega : Y \rightarrow X$ é trivial se pode ser escrita como $B+L$, onde B é limitada e homogênea (não necessariamente linear) e L sendo linear e homogênea (não necessariamente limitada)

Proposição 5.8. *Sejam X e Y espaços de Banach, α e β dois operadores em X e Y , respectivamente, e $\Omega : Y \rightarrow X$ uma aplicação quase linear. Então o par (α, β) é compatível com $X \oplus_\Omega Y$ se, e somente se, $\alpha\Omega - \Omega\beta$ é um operador quase linear trivial.*

Demonstração. Suponhamos que o par (α, β) é compatível com $X \oplus_\Omega Y$. Seja $\gamma : X \oplus_\Omega Y \rightarrow X \oplus_\Omega Y$ um operador que faz o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus_\Omega Y & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus_\Omega Y & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Logo, para cada $(x, y) \in X \oplus_\Omega Y$, temos

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &= \gamma(x, 0) + \gamma(0, y) \\ &= (\alpha x, 0) + (Ly, \beta y) \\ &= (\alpha x + Ly, \beta y) \end{aligned}$$

onde $L : Y \rightarrow Y$ é uma aplicação linear. Usando o fato que γ é limitada existe uma constante K tal que $\|\gamma(\Omega y, y)\|_\Omega \leq K\|y\|$, para todo $y \in Y$. Portanto,

$$\|\alpha\Omega y + Ly - \Omega\beta y\| + \|\beta y\| \leq K\|y\|.$$

Concluimos do Lema 2.10 que $\alpha\Omega - \Omega\beta$ é trivial.

Reciprocamente, suponhamos que podemos escrever $\alpha\Omega - \Omega\beta = B + L$, com $B : Y \rightarrow X$ limitado e $L : Y \rightarrow X$ linear. Definimos $\gamma : X \oplus_\Omega Y \rightarrow X \oplus_\Omega Y$ como $\gamma(x, y) = (\alpha x + Ly, \beta y)$, para todo $(x, y) \in X \oplus_\Omega Y$. Claramente o diagrama obtido é comutativo. Portanto é suficiente provar que γ é limitado.

$$\begin{aligned} \|\gamma(x, y)\|_\Omega &= \|(\alpha x + Ly, \beta y)\|_\Omega \\ &= \|\alpha x + Ly - \Omega\beta y\| + \|\beta y\| \\ &\leq \|\alpha\|\|x - \Omega y\| + \|\alpha\Omega y - \Omega\beta y + Ly\| + \|\beta\|\|y\| \\ &\leq C\|(x, y)\|_\Omega \end{aligned}$$

Concluimos que o par (α, β) é compatível com Ω . □

Exemplo 5.9. *Seja u_2 a estrutura complexa canônica de ℓ_2 . Então $u_2\Omega_2 - \Omega_2u_2 = 0$, portanto o par de operadores (u_2, u_2) é compatível com Ω_2 . Isto é, $\begin{bmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix}$ é um operador contínuo em Z_2 .*

Sejam α, β estruturas complexas em X e Y , respetivamente. Suponhamos que o par (α, β) é compatível com $\Omega : Y \rightarrow X$. Então o operador $\gamma : X \oplus_\Omega Y \rightarrow X \oplus_\Omega Y$ que faz o diagrama comutar têm a forma: $\gamma(x, y) = (\alpha x - Ly, \beta y)$ para todo $(x, y) \in X \oplus_\Omega Y$. Em particular, γ é uma estrutura complexa se $\gamma^2(x, y) = (-x - \alpha Ly - L\beta y, -y) = -(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \oplus_\Omega Y$. Portanto, γ é uma estrutura complexa em $X \oplus_\Omega Y$ se, e somente se, $\alpha L + L\beta = 0$.

5.3 Estruturas complexas compatíveis em Z_2

O principal problema em aberto sobre Z_2 é de saber se é isomorfo a seus hiperplanos. Sabemos que Z_2 admite estrutura complexa, portanto, o problema seria resolvido se conseguirmos provar que os hiperplanos de Z_2 não admitem estrutura complexa, ou seja, que Z_2 é ‘par’ segundo termos de [22].

Conjectura: Os hiperplanos de Z_2 não admitem estrutura complexa.

Como todos os hiperplanos são isomorfos entre si, para provar a conjectura é suficiente provar que existe um hiperplano de Z_2 sem estrutura complexa. Nesta seção, estudamos as estruturas complexas nos hiperplanos de Z_2 que contém a cópia canônica de ℓ_2 , ou seja, hiperplanos da forma $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ para algum hiperplano H de ℓ_2 . Observaremos, usando um teorema de Ferenczi-Galego (Teorema 5.15), que esse tipo de hiperplanos não admitem estruturas complexas que sejam extensões de estruturas complexas em ℓ_2 .

Lembremos que um par de operadores (T, U) de ℓ_2 são compatíveis com Ω_2 , se e somente se, o comutador generalizado $[T, \Omega_2, U] = T\Omega_2 - \Omega_2 U$ é uma aplicação quase linear trivial, i.e., pode ser escrita da forma $B + L$, onde $B : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é limitada homogênea, e $L : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é linear. Nesta seção, provaremos que se o par (T, U) é compatível com Ω_2 , então $T - U$ é compacto. Primeiro demonstramos que dados T um operador em ℓ_2 e Z um subespaço de blocos de ℓ_2 , existe um subespaço de blocos Y de Z tal que o comutador $[T, \Omega_2]$ é trivial em Y , i.e., $[T, \Omega_2]$ nunca é singular.

Proposição 5.10. *Seja $V : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ um operador tal que sua restrição a um subespaço de blocos Z of ℓ_2 é um isomorfismo, então $\Omega_2 V - V\Omega_2$ é trivial em algum subespaço de blocos Y de Z .*

Demonstração. Sejam $x_1 < x_2 < \dots$ vetores sucessivos em Z tais que $Vx_i = y_i + h_i$, onde $y_1 < y_2 < \dots$, e $\|h_i\| < \epsilon_i$, $y_i < h_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ com $\sum_i \epsilon_i = \epsilon < \|V^{-1}\|^{-1}$. Denotamos por $Y = [x_n]$ o fecho do subespaço linear gerado por $\{x_n\}_n$, e definamos o operador linear

$V_0 : Y \longrightarrow \ell_2$ satisfazendo $V_0 x_i = y_i$. Note que $\|V - V_0\| \leq \epsilon$. De fato, para cada vetor $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ de norma 1

$$\|Vx - V_0x\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|h_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|h_i\| \leq \epsilon.$$

Para completar a prova da Proposição, usaremos a estimativa do seguinte Lema:

Lema Existe uma constante K tal que para qualquer sequência de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ temos a seguinte estimativa:

$$\left\| \left(\Omega_2 \left(\sum_{i=1}^n V \lambda_i x_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 V \lambda_i x_i \right) - \left(\Omega_2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i y_i \right) \right\| \leq K \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2}$$

Prova do Lema. Usando a teoria de somas torcidas na definição de Ω_2 (ver Proposição 2.8), fora de c_{00} pode ser escrita da forma $A + H$, onde A é uma aplicação linear, e H é quase linear obtida a partir da sequência exata definida como $H = j^{-1}(\phi - L)$, onde $j : \ell_2 \longrightarrow Z_2$ é a injeção canônica, ϕ é uma inversa à direita homogênea e limitada (por uma constante C) da aplicação quociente q de Z_2 sobre ℓ_2 , e L é uma inversa à direita linear de q . Escrevendo Ω_2 desta forma obtemos para $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| = 1$ a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} & \left\| \Omega_2 \left(\sum_{i=1}^n V \lambda_i x_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 V \lambda_i x_i - \left(\Omega_2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i y_i \right) \right\| \\ &= \left\| j^{-1} \left\{ \phi \left(\sum_{i=1}^n V \lambda_i x_i \right) - \phi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n (\phi V \lambda_i x_i - \phi \lambda_i y_i) \right\} \right\| \\ &\leq \|j^{-1}\| (C\|V\| \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| + C\|V\| \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| - \sum_{i=1}^n \|\lambda_i h_i\| + \sum_{i=1}^n \|\phi V \lambda_i x_i - \phi \lambda_i y_i\|) \\ &\leq \|j^{-1}\| (C(2\|V\| + \sum_{i=1}^n \epsilon_i) + \|j^{-1}\| \sum_{i=1}^n \|\phi V \lambda_i x_i - \phi \lambda_i y_i\|) \leq k_0 + k_1 \sum_{i=1}^n \|\phi V \lambda_i x_i - \phi \lambda_i y_i\| \end{aligned}$$

É claro que para uma escolha distinta de ϕ , por exemplo uma ϕ' com propriedades adicionais e limitada por uma constante $2C$, é obtida uma estimativa da mesma ordem. Definamos ϕ' como

$$\phi'(Vx_i) = \phi(y_i) + \phi(h_i),$$

e

$$\phi'(x) = \phi(x)$$

se x não for múltiplo de algum Vx_i . Dado que $Vx_i = y_i + h_i$, ϕ' é uma inversa à direita de q , e como $\|\phi'(Vx_i)\| \leq C(\|y_i\| + \|h_i\|) \leq C(\|Vx_i\| + 2\epsilon_i) \leq 2C\|Vx_i\|$, então ϕ' é limitada com constante $2C$.

Calculando com a expressão obtida para Ω_2 , temos

$$\begin{aligned} \|\Omega_2(\sum_{i=1}^n V\lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 V\lambda_i x_i - (\Omega_2(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i y_i)\| &\leq k'_0 + k'_1 \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|\phi' Vx_i - \phi' y_i\| \\ &\leq k'_0 + k'_1 \sum_{i=1}^n \|\phi' Vx_i - \phi y_i\| \leq k'_0 + Ck'_1 \sum_{i=1}^n \epsilon_i, \end{aligned}$$

o que completa a prova do Lema. □

Utilizamos a seguinte estimativa sobre vetores de suportes disjuntos z'_i s

$$\Omega_2(\sum_{i=1}^n z_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2(z_i) = \sum_{i=1}^n \log(\|\sum_i z_i\|/\|z_i\|) z_i$$

para calcular $\Omega_2 V - V\Omega_2$ no espaço gerado $\text{span}\{x_n\}$: Seja $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

$$\begin{aligned} \Omega_2 V - V\Omega_2(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) &= \Omega_2(\sum_{i=1}^n V\lambda_i x_i) - V(\Omega_2(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)) \\ &= \left(\Omega_2(\sum_{i=1}^n V\lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 V\lambda_i x_i \right) - \left(\Omega_2(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i y_i \right) + \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\|}{\|\lambda_i y_i\|}\right) \lambda_i y_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \lambda_i \Omega_2 Vx_i - V\left(\sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|}{\|\lambda_i x_i\|}\right) \lambda_i x_i\right) \\ &= \left(\Omega_2(\sum_{i=1}^n V\lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 V\lambda_i x_i \right) - \left(\Omega_2(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i) - \sum_{i=1}^n \Omega_2 \lambda_i y_i \right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \lambda_i (\Omega_2 V - V\Omega_2) x_i \tag{5.3}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\|V_0(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)\|}{\|V_0 \lambda_i x_i\|} \frac{\|\lambda_i x_i\|}{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|}\right) \lambda_i y_i \tag{5.4}$$

$$- \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|}{\|\lambda_i x_i\|}\right) \lambda_i h_i \tag{5.5}$$

A equação (5.2) é limitada por causa do Lema. (5.3) é linear em relação a $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. (5.4) é limitada porque a parte $\log$ é limitada: De fato, suponha que $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| = 1$, então temos $\|V_0 x\| \geq \|Vx\| - \|Vx - V_0 x\| \geq \|V^{-1}\|^{-1} - \epsilon > 0$. E

$$\|V^{-1}\|^{-1} - \epsilon \leq \|V_0 x\| \leq \|Vx\| + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i \right\| \leq \|V\| + \epsilon$$

de onde obtemos que é uma expressão limitada pois os y'_i s são sucessivos

$$\left\| \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\|V_0(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)\|}{\|V_0 \lambda_i x_i\|} \frac{\|\lambda_i x_i\|}{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|} \right) \lambda_i y_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \right\| \leq K \|V_0\| \|x\|.$$

(5.5) é limitada: suponha que $\|x\| = 1$ então

$$\left\| -\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|}{\|\lambda_i x_i\|} \right) \lambda_i h_i \right\| = \left\| -\sum_{i=1}^n \log \left(\frac{1}{|\lambda_i|} \right) \lambda_i h_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \log(|\lambda_i|) \lambda_i h_i \right\| \leq (1/e) \sum_{i=1}^n \epsilon_i.$$

Portanto, $\Omega_2 V - V \Omega_2$ é trivial em Y . $\square$

Corolário 5.11. *Sejam $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ um operador e Z um subespaço de blocos de ℓ_2 . Então existe Y um subespaço de blocos de Z tal que $[\Omega_2, T]|_Y$ é trivial.*

Demonstração. Suponha, por absurdo que $[\Omega_2, T]$ não é trivial em nenhum subespaço de blocos de Z , segue pela Proposição anterior que $T|_Z$ é estritamente singular. Agora, é fácil observar que $[T, \Omega_2]$ é equivalente a $[Id - T, \Omega_2]$. Portanto, $(Id - T)|_Z$ é estritamente singular, e consequentemente $Id|_Z$ é estritamente singular, obtendo uma contradição. $\square$

Apesar, que para todo operador T em ℓ_2 e subespaço de blocos Z de ℓ_2 , o comutador $[T, \Omega_2]|_{Z'}$ é trivial num subespaço de blocos de Z' de Z , na próxima seção apresentaremos um exemplo de estrutura complexa U em ℓ_2 tal que $[U, \Omega_2]$ é não trivial, mais ainda $[U, \Omega_2, T]$ é não trivial para qualquer operador T em ℓ_2 .

Teorema 5.12. *Sejam $T, U : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ um par de operadores lineares limitados compatíveis com Z_2 . Então $T - U$ é compacto.*

Demonstração. Suponha que $T - U$ não é compacto. Então, existe um subespaço de blocos Z de ℓ_2 tal que a restrição $(T - U)|_Z$ é um isomorfismo. Assim, ou $T|_Z$ é compacto ou $T|_{Z'}$ é um isomorfismo em algum subespaço de blocos Z' de Z . No primeiro caso, temos que $U|_Z$ não pode ser estritamente singular, então a restrição de U em algum subespaço de blocos de Z deve ser um isomorfismo. Portanto, a prova do teorema decorre como consequência dos seguintes dois lemas. $\square$

Lema 5.13. *Sejam $T, U : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ um par de operadores lineares limitados compatíveis com Z_2 tal que $T|_Z$ é um isomorfismo sobre a imagem em um subespaço de blocos $Z \subseteq \ell_2$. Então, $(T - U)|_Y$ é compacto em algum subespaço de blocos Y de Z .*

Lema 5.14. *Sejam $T, U : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ um par de operadores lineares limitados compatíveis com Z_2 tal que $U|_Z$ é um isomorfismo sobre a imagem em um subespaço de blocos $Z \subseteq \ell_2$. Então, $(T - U)|_Y$ é compacto em algum subespaço de blocos Y de Z .*

Prova do Lema 5.13. Suponhamos que $T|_Z$ é um isomorfismo sobre a imagem, segue da Proposição 5.10 que $\Omega_2 T - T\Omega_2$ é trivial em algum subespaço Y de Z . Lembremos que para a aplicação quase linear Ω_2 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\Omega_2(x + y) - \Omega_2 x - \Omega_2 y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \quad \forall x, y \in \ell_2$$

o que implica que $\Omega_2(T - U) - \Omega_2 T + \Omega_2 U$ é limitado. Assim,

$$\begin{aligned} \Omega_2(T - U) &= \Omega_2(T - U) - \Omega_2 T + \Omega_2 U \\ &\quad + \Omega_2 T - T\Omega_2 \\ &\quad + T\Omega_2 - \Omega_2 U \end{aligned}$$

é trivial em Y . Concluimos que $(T - U)|_Y$ é compacto, caso contrario existiria um subespaço de blocos Y_1 de Y tal que $(T - U)|_{Y_1}$ é um isomorfismo e então Ω_2 seria trivial em $(T - U)Y_1$, o que é um absurdo. $\square$

Prova do Lema 5.14. Consideremos agora um par (T, U) compatível com Z_2 tal que $U|_Z$ seja um isomorfismo sobre a imagem para algum subespaço de blocos Z de ℓ_2 . Usando a Proposição 5.10 temos que $\Omega_2 U - U\Omega_2$ é trivial em um subespaço de blocos $Y_1 = [x_n]$ de Z com $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(T - U)\Omega_2 = T\Omega_2 - \Omega_2 U + \Omega_2 U - U\Omega_2$$

é trivial em Y_1 . Denotemos por Ω_{Y_1} a aplicação de Kalton-Peck definida em Y_1 associada à base (x_n) , definida para cada $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mediante

$$\Omega_{Y_1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \log\left(\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|/|\lambda_i|\right) \lambda_i x_i.$$

Definamos uma aplicação linear $L : \text{span}\{x_n\} \longrightarrow \ell_2$ por $L(x_n) = -x_n \log |x_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$

e linearmente no resto. É fácil ver (Lema 3 [13]) que

$$\Omega_2 = \Omega_{Y_1} + L \quad (5.6)$$

em $\text{span}\{x_n\}$. Portanto, $(T - U)\Omega_{Y_1}$ é trivial em $\text{span}\{x_n\}$. Afirmamos que $(T - U)|_{Y_1}$ é compacto, pois em outro caso existiria um subespaço de blocos Y_2 de Y_1 tal que $(T - U)|_{Y_2}$ é um isomorfismo e com $(T - U)\Omega_{Y_2}$ trivial. Consequentemente, Ω_{Y_2} é trivial em Y_2 e por Lema 3 de [13] aplicado a Y_2 teríamos que Ω_2 é trivial em Y_2 o que é uma contradição. $\square$

Aplicaremos o resultado anterior para o estudo das estruturas complexas em hiperplanos de Z_2 . Uma ferramenta fundamental para tal propósito será o seguinte teorema:

Teorema 5.15 ([22] Ferenczi-Galego, 2007). *Sejam X um espaço de real Banach de dimensão infinita e H um hiperplano de X . Seja I um operador em X tal que $I^2 = -Id + S$, onde S é um operador estritamente singular de X . Então existe um operador estritamente singular s de X tal que*

1. Ou $(I + s)^2 = -Id$, i.e., $I + s$ é uma estrutura complexa em X ,
2. ou $I + s = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde J é uma estrutura complexa em H .

E apenas uma das duas alternativas de conclusão é válida.

Em particular, usando que as condições 1. e 2. do teorema de Ferenczi-Galego são excludentes, obtemos que se I é uma estrutura complexa num espaço de Banach real de dimensão infinita X , e j é uma estrutura complexa num hiperplano H de X , então $I|_H - j$ nunca é estritamente singular.

Dado X um espaço de Banach e H um subespaço fechado de X . Se uma estrutura complexa I em X é invariante em H , então a restrição $I|_H$ é estrutura complexa em H , e o operador induzido $I_{X/H}(x + H) = Ix + H$ é uma estrutura complexa no quociente X/H . Em particular, a restrição de uma estrutura complexa de X a um hiperplano H nunca é uma estrutura complexa em H . O teorema de Ferenczi-Galego garante mais ainda que $I|_H$ não é uma perturbação estritamente singular de nenhuma estrutura complexa em H .

Lema 5.16. *Sejam $q : Z \rightarrow Y$ um operador estritamente singular e sobrejetor entre espaços de Banach, e $T : \ker q \rightarrow \ker q$ um operador.*

1. *Se T é estritamente singular e $T_1 : Z \rightarrow Z$ é uma extensão de T , então T_1 é estritamente singular.*
2. *Em particular, se $T_1, T_2 : Z \rightarrow Z$ são duas extensões de T , então $T_2 - T_1$ é um operador estritamente singular.*

Demonstração. Ver [14]. □

Até o final desta seção sempre consideraremos hiperplanos da forma $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ para algum hiperplano H de ℓ_2 , onde $i : H \rightarrow \ell_2$ é a inclusão canônica. Observamos que $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ é uma soma torcida

$$0 \longrightarrow \ell_2 \xrightarrow{j} \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \xrightarrow{q} H \longrightarrow 0,$$

associada à aplicação quase linear $\Omega_2 i$. Como no caso de Z_2 , o operador quociente q é estritamente singular.

Uma primeira consequência do Teorema 5.15 está contida na seguinte proposição:

Proposição 5.17. *Seja α uma estrutura complexa em ℓ_2 . Se Z_2 admite uma estrutura complexa que estende α então nenhuma estrutura complexa no hiperplano $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ de Z_2 estende α .*

Demonstração. Considere $\gamma : Z_2 \rightarrow Z_2$ uma estrutura complexa que estende α . Suponha, por absurdo, que $\tilde{\gamma} : \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \rightarrow \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ é uma estrutura complexa que também estende a α . Segue da proposição anterior que $\gamma|_{\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H} - \tilde{\gamma}$ é um operador estritamente singular. No entanto, pelo Teorema 5.15, $\gamma|_{\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H} - \tilde{\gamma}$ não pode ser estritamente singular. Obtendo uma contradição. □

Na verdade, vamos demonstrar um resultado mais forte: não existem estruturas complexas no hiperplano $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ que sejam extensões de estruturas complexas em ℓ_2 .

Teorema 5.18. *Seja $\alpha : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ uma estrutura complexa. Então nenhuma estrutura complexa $\gamma : \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \rightarrow \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} \ell_2 & \xrightarrow{j} & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ \ell_2 & \xrightarrow{j} & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H \end{array}$$

Demonstração. Por absurdo, suponha que existe uma estrutura complexa γ em $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$ tal que o diagrama anterior seja comutativo (i.e., γ estende a α). O operador β induzido no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

definido pela relação $\beta q = q\gamma$, é também uma estrutura complexa em H . De fato, para cada $h \in H$ se $h = qz$, então

$$\beta^2 h = \beta(\beta qz) = \beta(q\gamma z) = q\gamma^2 z = -h.$$

Considere os operadores U em ℓ_2 e $\tilde{\gamma}$ em Z_2 extensões de β e γ , respectivamente, tais que se $\ell_2 = H \oplus \langle x \rangle$ para certo $x \in \ell_2$, então $Ux = x$ e $\tilde{\gamma}(0, x) = (0, x)$. Note que o par de operadores (α, U) são compatíveis com Ω_2 . De fato, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \tilde{\gamma} & & \downarrow U \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \oplus_{\Omega_2} \ell_2 & \longrightarrow & \ell_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Portanto, segue do Teorema 5.12 que $\alpha - U$ é compacto. Agora, pelo Teorema 5.15, $\alpha|_H - \beta$ não é estritamente singular. Obtemos assim uma contradição. $\square$

Entretanto, permanece em aberto determinar se em geral os hiperplanos de Z_2 não admitem estrutura complexa.

5.4 Estrutura complexa não compatível com Z_2

Como observamos na Proposição 5.17, nenhuma estrutura complexa em ℓ_2 pode ser estendida simultaneamente ao espaço Z_2 e ao hiperplano $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$. Segue do Teorema 5.18 que nunca pode-se estender ao hiperplano $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$. Dessa forma, é natural perguntar se toda estrutura complexa em ℓ_2 pode ser estendida ao espaço inteiro Z_2 .

A resposta é negativa. Nesta seção construímos uma estrutura complexa U em ℓ_2 que não pode ser estendida para nenhum operador em Z_2 . Portanto, U não se estende a nenhuma estrutura complexa em Z_2 nem pode ser estendida a uma estrutura complexa no hiperplano $\ell_2 \oplus_{\Omega_2 i} H$. Obtemos assim um exemplo de operador em ℓ_2 tal que o comutador $[U, \Omega_2]$ não é trivial. Também verificamos que para qualquer operador T em ℓ_2 , os pares de operadores (U, T) e (T, U) não são compatíveis com Ω_2 .

5.4.1 (U, U) não compatível

Seja $(e_n)_n$ a base canônica de ℓ_2 . Para cada inteiro par n , escolhemos vetores ortonormais $f_1^n, \dots, f_n^n \in \text{span}\{e_{2^n}, \dots, e_{2^{n+1}-1}\}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_1^n &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{j+1} e_{2^n+j-1} \\ f_2^n &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (-1)^{j+1} (e_{2^n+2(j-1)} + e_{2^n+2j-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ f_n^n &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} ((e_{2^n} + e_{2^n+1} + \cdots + e_{2^n+2^{n-1}+1}) - (e_{2^n+2^{n-1}} + e_{2^n+2^{n-1}+1} + \cdots + e_{2^{n+1}-1})) \end{aligned}$$

Portanto, para cada sequência de sinais $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ existe um (único) $l \in \{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ tal que $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \sqrt{2^n}(f_1^n(l), \dots, f_n^n(l))$.

Definimos uma estrutura complexa U em ℓ_2 com a seguinte formula:

$$U(f_k^n) = e_{2^{n+1}+k} \quad (k = 1, \dots, n)$$

e

$$U(e_{2^{n+1}+k}) = -f_k^n$$

quando n é um inteiro par e, estendendo de maneira adequada a todo ℓ_2 tomando uma base ortonormal $\mathfrak{B}$ de ℓ_2 que contenha os vetores $\{f_k^n, e_{2^n+k} : n \text{ par}, k \leq n\}$. U estará definida apropriadamente nos outros vetores de $\mathfrak{B}$, i.e., se $\{g_p\}$ é a família que completa a base $\mathfrak{B}$, então definimos $U(g_{2p}) = g_{2p+1}$ e $U(g_{2p+1}) = -g_{2p}$, ($p \in \mathbb{N}$). Observe que U assim definido é uma isometria).

Para provar que $[U, \Omega_2]$ não é trivial usaremos a seguinte proposição:

Proposição 5.19. *Seja G uma aplicação quase linear trivial em ℓ_2 . Então para quaisquer vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ em ℓ_2*

$$Ave_{\pm} \left\| G \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k G(x_k) \right\| \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração. Suponhamos que podemos escrever $G = B + L$ com B uma aplicação homogênea e limitada, e L linear. Sejam $x_1, \dots, x_n$ vetores de ℓ_2 , então usando que ℓ_2 tem tipo 2, obtemos:

$$Ave_{\pm} \left\| G \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k G(x_k) \right\| = Ave_{\pm} \left\| B \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k B(x_k) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq cAve_{\pm} \left\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k x_k \right\| + Ave_{\pm} \left\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k Bx_k \right\| \\
&\leq c \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right)^{1/2} + c \left(\sum_{k=1}^n \|Bx_k\|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.20. *Para todo n (par) suficientemente grande*

$$Ave_{\pm} \left\| [U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n \right\| \geq (1/10) \sqrt{n} \log n.$$

Em particular, $[U, \Omega_2]$ é não trivial, ou seja, (U, U) não é compatível com Ω_2 .

Demonstração.

Primeiro descrevemos uma expressão para $\Omega_2(\sum_{k=1}^n f_k^n)$. Para cada $0 \leq j \leq n$, defina

$$A_j = \left\{ l \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\} : \sum_{k=1}^n f_k^n(l) = \frac{n - 2j}{\sqrt{2^n}} \right\}.$$

Observe que $(A_j)_{j=0}^n$ forma uma partição do conjunto $\{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Cada $l \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ pertence a A_j se, e somente se, o número de -1 's aparecendo em $\sqrt{2^n}(f_1^n(l), \dots, f_n^n(l))$ é j . Portanto, cada A_j tem cardinalidade $|A_j| = \binom{n}{j}$. Obtemos que

$$\begin{aligned}
\Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) &= \sum_{j=0}^n \sum_{l \in A_j} \left(\sum_{k=1}^n f_k^n(l) \right) \log \frac{\sqrt{n}}{|\sum_{k=1}^n f_k^n(l)|} e_l \\
&= \sum_{j=0}^n \sum_{l \in A_j} \frac{n - 2j}{\sqrt{2^n}} \log \frac{\sqrt{n} \sqrt{2^n}}{|n - 2j|} e_l,
\end{aligned}$$

e sua norma está dada pela expressão

$$\left\| \Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 \frac{\sqrt{n} \sqrt{2^n}}{|n - 2k|}.$$

Fixemos agora uma sequência de sinais $(\epsilon_k)_{k=1}^n$. Observe que os vetores $\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n$ e $\sum_{k=1}^n f_k^n$ têm nas suas ‘colunas’ todas as possíveis sequências de n sinais. Isto significa que $\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n =$

$u_\sigma(\sum_{k=1}^n f_k^n)$ onde u_σ é o operador associado a uma permutação σ em $\{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Segue a partir das propriedades de Ω_2 que

$$\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) = u_\sigma \Omega_2\left(\sum_{k=1}^n f_k^n\right).$$

É fácil observar que $\Omega_2(f_k^n) = \log \sqrt{2^n} f_k^n$. Agora calculamos

$$\begin{aligned} & [U, \Omega_2]\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n \\ &= U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Omega_2 f_k^n \right) - \Omega_2 U \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) + \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Omega_2 U f_k^n \\ &= U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k e_{2^{n+1}+k} \right) + \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Omega_2 e_{2^{n+1}+k} \\ &= U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \log \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k e_{2^{n+1}+k} \\ &= U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n - \log \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) \\ &= U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{n 2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| [U, \Omega_2]\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n \right\| &= \left\| U \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{n 2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) \right\| \\ &= \left\| \Omega_2\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n\right) - \log \sqrt{n 2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right\| \\ &= \left\| u_\sigma \left(\Omega_2\left(\sum_{k=1}^n f_k^n\right) - \log \sqrt{n 2^n} \sum_{k=1}^n f_k^n \right) \right\| \\ &= \left\| \Omega_2\left(\sum_{k=1}^n f_k^n\right) - \log \sqrt{n 2^n} \sum_{k=1}^n f_k^n \right\| \end{aligned}$$

Sejam $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $l \in A_j$, temos que

$$\begin{aligned} \Omega_2\left(\sum_{k=1}^n f_k^n\right)(l) - \log \sqrt{n2^n} \sum_{k=1}^n f_k^n(l) &= \left(\log \frac{\sqrt{n}}{\left|\sum_{k=1}^n f_k^n(l)\right|} - \log \sqrt{n2^n}\right) \sum_{k=1}^n f_k^n(l) \\ &= \frac{(n-2j)}{\sqrt{2^n}} \log \frac{1}{|n-2j|}. \end{aligned}$$

Segue da equação anterior

$$\begin{aligned} Ave_{\pm} \left\| [U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n \right\| &= Ave_{\pm} \left\| \Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \log \sqrt{n2^n} \sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right\| \\ &= \left\| \Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) - \log \sqrt{n2^n} \sum_{k=1}^n f_k^n \right\| \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n-2k)^2 \log^2 |n-2k|} \end{aligned}$$

Para avaliar esta quantidade, consideremos $B_n = \{k : |n-2k| \geq \sqrt{n}\}$. Então temos

$$\sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = 1 - \sum_{0 \leq k \leq n, k \notin B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \geq 1 - \frac{\sqrt{n}}{2^n} \binom{n}{n/2},$$

e pela formula de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \binom{n}{n/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Concluimos que para todo n (par) suficientemente grande:

$$\begin{aligned} Ave_{\pm} \left\| [U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n \right\| &\geq \sqrt{\sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n-2k)^2 \log^2 |n-2k|} \\ &\geq \sqrt{\left(\sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \right) n \log^2 \sqrt{n}} \\ &\geq (1/10) \sqrt{n} \log n. \end{aligned}$$

□

5.4.2 (T, U) não compatível

Proposição 5.21. *Seja T um operador em ℓ_2 , então $[T, \Omega_2, U]$ não é trivial. Portanto, o par (T, U) não é compatível com Ω_2 .*

Demonstração.

Seja $(\epsilon_k)_{k=1}^n$ uma sequência de sinais, então para alguma permutação σ de $\{2^n, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ temos que

$$\begin{aligned} & [T, \Omega_2, U] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [T, \Omega_2, U] f_k^n \\ &= [U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [U, \Omega_2] f_k^n - (U - T) \left(\Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Omega_2 f_k^n \right) \\ &= u_\sigma([U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n [U, \Omega_2] f_k^n) - (U - T) u_\sigma \left(\Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \Omega_2 f_k^n \right). \end{aligned}$$

Suponhamos que o par (T, U) é compatível com Ω_2 , então pelo Teorema 5.12 temos que $U - T$ é compacto. Escrevamos $y_n = u_\sigma([U, \Omega_2] \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n [U, \Omega_2] f_k^n)$ e $x_n = u_\sigma(\Omega_2 \left(\sum_{k=1}^n f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \Omega_2 f_k^n)$. Observemos que,

$$\|x_n\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 \frac{\sqrt{n}}{|n - 2k|}}.$$

Definamos como antes, $B_n = \{k : |n - 2k| \geq \sqrt{n}\}$. Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 \frac{\sqrt{n}}{|n - 2k|} &= \sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 \frac{|n - 2k|}{\sqrt{n}} \\ &\leq \sum_{k \in B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 |n - 2k| \\ &\leq \|y_n\|^2 \end{aligned}$$

Também (para todo n (par) suficientemente grande)

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} (n - 2k)^2 \log^2 \frac{\sqrt{n}}{|n - 2k|} &\leq \left(\sum_{k \notin B_n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \right) n \log^2 \sqrt{n} \\ &\leq c \|y_n\|^2 \end{aligned}$$

Dado que $U - T$ é compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(U - T)|_{[e_n, n \geq N]}\| \leq 1/2\sqrt{1 + c}$. Isto implica

que para todo n suficientemente grande

$$\|(U - T)x_n\| \leq (1/2\sqrt{1+c})\|x_n\| \leq (1/2)\|y_n\|.$$

E portanto $\|y_n - (U - T)x_n\| \geq (1/20)\sqrt{n} \log n$. Concluimos que

$$Ave_{\pm} \|[T, \Omega_2, U] \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k f_k^n \right) - \sum_{k=1}^n \epsilon_k [T, \Omega_2, U] f_k^n\| \geq (1/20)\sqrt{n} \log n.$$

□

5.4.3 (U, T) não compatível

Proposição 5.22. *Seja T um operador em ℓ_2 , então o par (U, T) não é compatível com Z_2 .*

Demonstração. Para demonstrar esta proposição usaremos a dualidade das sequências exatas. Consideremos T um operador em ℓ_2 , e suponhamos que (U, T) é compatível com Ω_2 . Então existe um operador $R : Z_2 \rightarrow Z_2$ que faz o diagrama comutar

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & \ell_2 \longrightarrow 0 \\ & & U \downarrow & & \downarrow R & & \downarrow T \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & \ell_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

portanto o diagrama dual também é comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2^* & \longrightarrow & Z_2^* & \longrightarrow & \ell_2^* \longrightarrow 0 \\ & & T^* \downarrow & & \downarrow R^* & & \downarrow U^* \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2^* & \longrightarrow & Z_2^* & \longrightarrow & \ell_2^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

Segue do Lema 2.19 que (T^*, U^*) é compatível com Ω_2^* . Agora observemos que para cada $x^* \in \ell_2$ de suporte finito,

$$\begin{aligned} (T^* \Omega_2^* - \Omega_2^* U^*)(x^*) &= T^* \Omega_2^* x^* - \Omega_2^* U^* x^* = T^*(-\Omega_2 x)^* - \Omega_2^*(-Ux)^* \\ &= (-T^t \Omega_2 x)^* - (\Omega_2 Ux)^* \\ &= ((-T)^t \Omega_2 x - \Omega_2 Ux)^* \end{aligned}$$

onde $T^t : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é o operador que satisfaz $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^t y \rangle$ para todo par de vetores $x, y \in \ell_2$. Portanto

$$\|(T^* \Omega_2^* - \Omega_2^* U^*)(x^*)\| = \|((-T)^t \Omega_2 - \Omega_2 U)x\|$$

Assim $(-T)^t \Omega_2 - \Omega_2 U$ é trivial e $(-T^t, U)$ é compatível com Ω_2 , uma contradição com a Pro-

posição 5.21.

A partir das proposições anteriores podemos concluir:

Teorema 5.23. *Existe uma estrutura complexa $U : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ tal que U não se estende a nenhum operador em Z_2 . Além disso, U também não se releva a nenhum operador em Z_2 , i.e., no existe um operador em ℓ_2 que admita um extensão em Z_2 de tal forma que o operador induzido no quociente seja U .*

□

Referências Bibliográficas

- [1] F. Albiac, N.J. Kalton. Topics in Banach Space Theory, *Graduate Texts in Mathematics* 233, Springer (2006). [37](#)
- [2] R. Anisca. Subspaces of L_p with more than one complex structure, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (9) (2003), 2819–2829. [xi](#), [43](#)
- [3] R. Anisca. An irregularity in the class of weak Hilbert spaces, *Illinois J. Math.* 51 (2) (2007), 379–395. [26](#)
- [4] S. A. Argyros, K. Beanland, T. Raikoftsalis. An extremely non-homogeneous weak Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (9) (2012), 4987–5014. [25](#)
- [5] S. A. Argyros, I. Deliyanni. Examples of asymptotic ℓ_1 Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 349 (1997), 973–995. [59](#)
- [6] S. A. Argyros, R. Haydon. A hereditarily indecomposable $\mathfrak{L}_\infty$ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Math.* (206) (2011) 1–54. [5](#)
- [7] S. A. Argyros, J. Lopez-Abad, S. Todorčević. A class of Banach spaces with few non strictly singular operators, *J. of Funct. Anal.* 222 (2) (2005), 306–384. [xi](#), [8](#), [44](#), [45](#), [46](#), [47](#), [49](#), [53](#), [55](#), [60](#), [61](#), [62](#), [66](#), [67](#)
- [8] S. A. Argyros, A. Manoussakis. An indecomposable and unconditionally saturated Banach space, *Studia Math.* 159 (2) (2003), 1–32. [56](#)
- [9] S. A. Argyros, A. Tolias. Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* (170) (2004), no. 806. [6](#)
- [10] A. Avilés, F. Cabello Sánchez, J.M.F. Castillo, M. González, Y. Moreno. On separably injective Banach spaces, *Adv. Math.* 234 (2013), 192–216. [39](#)
- [11] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss. Geometric Nonlinear Functional Analysis, *American Mathematical Society* (2000). [xii](#), [20](#)
- [12] J. Bourgain. Real isomorphic complex Banach spaces need not be complex isomorphic, *Proc. Amer. Math. Soc.* 96 (2) (1986), 221–226. [ix](#), [xi](#), [26](#), [27](#)
- [13] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, J. Suárez. On strictly singular nonlinear centralizers, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), 3313–3321. [18](#), [85](#)

- [14] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, N. J. Kalton. Complex interpolation and twisted Hilbert spaces, eprint arXiv:1406.6723 (2014) [86](#)
- [15] W. Cuellar Carrera. A Banach space with a countable infinite number of complex structures, *J. Funct. Anal.* **267** (5) (2014), 1462–1487. [xi](#)
- [16] J. Dieudonné. Complex structures on real Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1) (1952), 162–164. [ix](#), [25](#)
- [17] P. Enflo, J. Lindenstrauss, G. Pisier. On the three space problem, *Math. Scand.* (36) (1975), 199–210. [18](#)
- [18] V. Ferenczi. Hereditarily finitely decomposable Banach spaces, *Studia Math.* **123** (2) (1997), 135–149. [5](#)
- [19] V. Ferenczi. Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces, *Bull. London Math. Soc.* (29) (1997), 338–344. [5](#)
- [20] V. Ferenczi. Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach spaces, *Adv. Math.* (213) (2007), 462–488. [x](#), [xi](#), [5](#), [27](#), [28](#), [29](#), [37](#), [43](#), [51](#)
- [21] V. Ferenczi, E. Galego. Countable groups of isometries on Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (8) (2010), 4385–4431. [xii](#), [28](#)
- [22] V. Ferenczi, E. Galego. Even infinite-dimensional real Banach spaces, *J. of Functional Analysis.* (253) **2** (2007), 534–549. [xi](#), [24](#), [25](#), [80](#), [85](#)
- [23] V. Ferenczi, C. Rosendal. Banach spaces without minimal subspaces, *J. of Functional Analysis.* (257) (2009), 149–193. [6](#)
- [24] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, *CMS Books in Math., Springer, Nova York*, (2001). [47](#)
- [25] I. E. Fredholm. Sur une classe d’équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365–390. [9](#)
- [26] D. J. H. Garling. Symmetric bases of locally convex spaces, *Studia Math.* (30) (1968), 163–181. [7](#)
- [27] G. Godefroy, N. J. Kalton. Lipschitz-free Banach spaces, *Studia Math.* **159** (1) (2003), 12–141.
- [28] W. T. Gowers, An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies, *Ann. of Math.* (2) **156** (3) (2002), 797–833. [x](#), [6](#)
- [29] W.T. Gowers. A solution to Banach’s hyperplane problem, *Bull. Lond. Math. Soc.* **26** (6) (1994), 523–530. [x](#), [xii](#), [25](#), [29](#)
- [30] W.T. Gowers. A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces, *Bull. London Math. Soc.*, **28** (1996), 297–304. [32](#)

- [31] W.T. Gowers. [x](#)
Ramsey methods in Banach spaces, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, North-Holland, Amsterdam (2003) 1071–1097.
- [32] W.T. Gowers, B. Maurey. The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (4) (1993), 851–874. [x](#), [xi](#), [4](#), [5](#), [25](#), [56](#)
- [33] W.T. Gowers, B. Maurey. Banach spaces with small spaces of operators, *Math. Ann.* (307) (1997), 543–568. [x](#), [xi](#)
- [34] Jech, T. Set theory, *Springer Monographs in Mathematics -3rd ed.*, Berlin (2006). [7](#)
- [35] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss and G. Schechtman. On the relation between several notions of unconditional structure, *Israel Journal of Mathematics* **37** (1980), 120–129. [19](#)
- [36] N. J. Kalton. An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate, *Canad. Math. Bull.* (38) (1995), 218–222. [x](#), [xi](#), [26](#), [27](#)
- [37] N. J. Kalton, N. T. Peck. Twisted sums of sequence spaces and the three space problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **255** (1979), 1–30. [xii](#), [13](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#)
- [38] N. J. Kalton, J. W. Roberts. An F -space sampler, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **89**, Cambridge University Press, Cambridge (1984). [12](#)
- [39] R. Komorowski e N. Tomczak-Jaegermann. Banach spaces without local unconditional structure, *Israel J. Math.* (89) (1995), 205–226. [xi](#), [6](#)
- [40] P. Koszmider, M. Martín, J. Merí. Extremely non-complex $C(K)$ spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **350** (2) (2009), 601–615. [25](#)
- [41] P. Koszmider, M. Martín, J. Merí. Isometries on extremely non-complex Banach spaces, *J. Inst. Math. Jussieu* **10** (2) (2011), 325–348. [25](#)
- [42] J. Lindenstrauss. Some aspects of the theory of Banach spaces, *Adv. Math.* (5) (1970), 159–180. [5](#)
- [43] J. Lindenstrauss, L Tzafriri. Classical Banach Spaces I, Sequence spaces, *Springer-Verlag, Berlin* (1977). [ix](#), [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [7](#), [10](#), [29](#), [30](#)
- [44] V. I. Lomonosov. Invariant subspaces for operators commuting with compact operators, *Funct. Anal. Appl* (7) (1973), 213–214. [6](#)
- [45] S. Mazur, S. Ulam, Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 946–948. [ix](#)
- [46] G. Muñoz, Y. Sarantopoulos, A. Tonge. Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps, *Studia Mat.* **134** (1) (1999), 1–33. [27](#)
- [47] C. J. Read. When E and $E[E]$ are isomorphic, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* (158) (1990), 245–252. [29](#), [36](#)

- [48] M. Ribe. Examples for the nonlocally convex three space problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **73** (3) (1979), 351–355. [17](#)
- [49] I. Singer. Bases in Banach spaces, II, *Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest*, (1981). [7](#)
- [50] S. Szarek. A Banach space without a basis which has the bounded approximation property, *Acta Math.* (159) (1987), 81–98. [38](#)
- [51] S. Szarek. A superreflexive Banach space which does not admit complex structure, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (3) (1986), 437–444. [xi](#), [25](#)
- [52] S. Szarek. On the existence and uniqueness of complex structure and spaces with few operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1) (1986), 339–353.
- [53] Todorčević, S. Partitioning pairs of countable ordinals. *Acta Math* **159** (3–4) (1987), 261–294. [53](#)
- [54] Todorčević, S. Walks on ordinals and their characteristics. *Progress in Mathematics* vol **263** Birkhauser Verlag, Basel, (2007). [53](#)