**Resultados motivados por uma caracterização
de operadores pseudo-diferenciais
conjecturada por Rieffel**

Marcela Irene Merklen Olivera

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo**
Co-orientadora: **Prof. Dra. Cristina Cerri**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

**Resultados motivados por uma caracterização
de operadores pseudo-diferenciais
conjecturada por Rieffel**

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e
defendida por Marcela Irene Merklen Olivera
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, outubro de 2002.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Ruy Exel Filho - UFSC
- Prof. Dr. Milton Lopes - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. José Ruidival Santos Filho - UFSCar
- Profa. Dra. Beatriz Abadie - UNIV. REP. URUGUAI

*a Alejandra, Ana, Héctor,
minha família,
com muito amor*

Agradecimentos

Não há palavras que possam expressar minha gratidão por poder ter tido a oportunidade de trabalhar com o professor Dr. Severino Toscano do Rego Melo, meu orientador.

Gostaria de agradecer à professora Cristina Cerri, minha co-orientadora, que tantas vezes me ajudou a clarear as idéias.

À professora Marina Pizzotti, por sua ajuda em Teoria da Integração.

A tantos outros professores que, de um modo ou de outro, me ajudaram a concluir este trabalho.

Aos amigos tão queridos Pablo, Hernán, Liane, Daniel, Marcelo, Irene, Zé, Carolina, Marcel, Raul, Maité, Aldo, Bárbara, que me deram seu carinho e seu apoio todos estes anos.

A Cecilia Tosar, minha amiga, minha companheira, por estar sempre por perto e me ajudar tanto, não só na digitação final da tese, mas também em várias ocasiões em minha vida.

A Fernando Abadie, um grande amigo, que me ajudou tantas vezes discutindo matemática comigo. E à sua esposa, Daniella, que sempre teve palavras doces para mim.

A meus amigos no Uruguay, Gerardo, Yolanda, Mauro, Fernando que, a pesar de morar longe, sempre estiveram próximos.

A meu pai, professor Dr. Héctor Merklen, que me ajudou discutindo problemas e a quem devo a digitação da tese.

A minha mãe, professora Dra. Ana María Olivera Yamín, quem sempre me acompanhou e me ajudou.

A minha irmã, Alejandra, que sempre foi carinhosa comigo.

A minha família, em fim, sem a qual não sou nada, não pertenço a nada, que tanto me abrigou e me ajudou nestes anos e em toda minha vida.

Finalmente, a todos aqueles que não tive oportunidade de mencionar, mas com quem tive oportunidade de compartilhar minha vida nestes anos, muito obrigada.

Resumo

Trabalhamos com funções definidas em $\mathbb{R}^n$ que tomam valores numa C^* -álgebra A . Consideramos o conjunto $S^A(\mathbb{R}^n)$ das funções de Schwartz, (de decrescimento rápido), com norma dada por $\|f\|_2 = \|\int f(x)^* f(x) dx\|^{\frac{1}{2}}$. Denotamos por $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ o conjunto das funções C^∞ com todas as suas derivadas limitadas. Provamos que os operadores pseudo-diferenciais com símbolo em $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ são contínuos em $S^A(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|_2$, fazendo uma generalização de [10]. Rieffel prova em [1] que $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ age em $S^A(\mathbb{R}^n)$ por meio de um produto deformado, induzido por uma matriz anti-simétrica, J , como segue: $L_F g(x) = F \times_J g(x) = \int e^{2\pi i uv} F(x + Ju) g(x + v) dudv$, (integral oscilatória).

Dizemos que um operador S é Heisenberg-suave se as aplicações $z \mapsto T_{-z} S T_z$ e $\zeta \mapsto M_{-\zeta} S M_\zeta$, $z, \zeta \in \mathbb{R}^n$, são C^∞ ; onde $T_z g(x) = g(x - z)$ e $M_\zeta g(x) = e^{i\zeta x} g(x)$. No final do capítulo 4 de [1], Rieffel propõe uma conjectura: que todos os operadores "adjuntáveis" em $S^A(\mathbb{R}^n)$, Heisenberg-suaves, que comutam com a representação regular à direita de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, $R_G f = f \times_J G$, são os operadores do tipo L_F . Provamos este resultado para o caso $A = \mathbb{C}$, [14], usando a caracterização de Cordes [17] dos operadores Heisenberg-suaves em $L^2(\mathbb{R}^n)$ como sendo os operadores pseudo-diferenciais com símbolo em $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Também é provado neste trabalho que, se vale uma generalização natural da caracterização de Cordes, a conjectura de Rieffel é verdadeira.

Abstract

We work with functions defined on $\mathbb{R}^n$ with values in a C^* -algebra A . We consider the set $S^A(\mathbb{R}^n)$ of Schwartz functions (rapidly decreasing), with norm given by $\|f\|_2 = \|\int f(x)^* f(x) dx\|^{\frac{1}{2}}$. We denote $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ the set of functions which are C^∞ and have all their derivatives bounded. We prove that pseudo-differential operators with symbol in $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ are continuous on $S^A(\mathbb{R}^n)$ with the norm $\|\cdot\|_2$, thus generalizing the result in [10]. Rieffel proves in [1] that $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ acts on $S^A(\mathbb{R}^n)$ through a deformed product induced by an anti-symmetric matrix, J , as follows: $L_F g(x) = F \times_J g(x) = \int e^{2\pi i uv} F(x + Ju) g(x + v) dudv$ (an oscillatory integral).

We say that an operator S is Heisenberg-smooth if the maps $z \mapsto T_{-z} S T_z$ and $\zeta \mapsto M_{-\zeta} S M_\zeta$, $z, \zeta \in \mathbb{R}^n$ are C^∞ ; where $T_z g(x) = g(x - z)$ and where $M_\zeta g(x) = e^{i\zeta x} g(x)$. At the end of chapter 4 of [1], Rieffel proposes a conjecture: that all "adjointable" operators in $S^A(\mathbb{R}^n)$ that are Heisenberg-smooth and that commute with the right-regular representation of $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, $R_G f = f \times_J G$, are operators of type L_F . We proved this result for the case $A = \mathbb{C}$ in [14], using Cordes' characterization of Heisenberg-smooth operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ as being the pseudo-differential operators with symbol in $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. It is also proved in this thesis that, if a natural generalization of Cordes' characterization is valid, then the Rieffel conjecture is true.

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1	4
Capítulo 2	19
Capítulo 3	26
Capítulo 4.	36
Apêndice A	49
Apêndice B	59
Referências Bibliograficas	61

Introdução

Consideramos uma C^* -álgebra, A , e funções de $\mathbb{R}^n$ em A . Em particular, trabalhamos com o conjunto das funções de Schwartz, $S^A(\mathbb{R}^n)$, que consiste nas funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow A$, C^∞ , tais que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|$ é limitado para quaisquer multi-índices α e β , [1, capítulo 3]. Neste conjunto definimos o "produto interno" $\langle f, g \rangle = \int f(x)^* g(x) dx$, [1, (4.1)]. $S^A(\mathbb{R}^n)$, com a norma induzida por este produto interno, $\|f\|_2 = \|\langle f, f \rangle\|^{\frac{1}{2}}$, é um pré-módulo de Hilbert (ver definição 1.2). Denotamos por $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ o módulo de Hilbert correspondente, isto é o completamento de $S^A(\mathbb{R}^n)$ com respeito a esta norma.

Observamos que o espaço de Fréchet $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, das funções C^∞ limitadas, com todas as derivadas limitadas, age em $S^A(\mathbb{R}^n)$ do seguinte modo: dadas $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ e $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $L_F(g) = F \times_J g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, como vemos em [1, (3.3)]. Aqui Rieffel define o produto deformado, $\times_J$, para uma matriz, $J, n \times n$, anti-simétrica, em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, como segue: $F \times_J G(x) = \int \int F(x + Ju)G(x + v)e(u \cdot v)du dv$, onde $e(u \cdot v) = \exp(2\pi i u \cdot v)$ e a integral acima é uma integral oscilatória, [1, (1.3)]. O operador L_F definido acima possui "adjunto", [1, (4.2)], (com respeito ao "produto interno" acima definido), e é contínuo no módulo de Hilbert $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, [1, (4.7)].

Seja $B^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ o conjunto dos operadores lineares contínuos em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ que possuem adjunto. Como no caso escalar, [2, capítulo 8], consideramos em $B^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ a ação do grupo de Heisenberg como segue: $(z, \zeta, \varphi) \mapsto E_{z, \zeta, \varphi} \Lambda E_{z, \zeta, \varphi}^{-1}$, $z, \zeta \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathbb{R}$, para $\Lambda \in B^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$, onde $E_{z, \zeta, \varphi} = e^{i\varphi} M_\zeta T_z$, com $T_z u(x) = u(x - z)$, $M_\zeta u(x) = e^{\zeta x} u(x)$, $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Notamos que $E_{z, \zeta, \varphi}^{-1} \Lambda E_{z, \zeta, \varphi}$ independe de φ . Tomamos, então, $\varphi = 0$ e usamos a notação $E_{z, \zeta} = E_{z, \zeta, 0}$ e $\Lambda_{z, \zeta} = E_{z, \zeta}^{-1} \Lambda E_{z, \zeta}$. Dizemos que o operador Λ é Heisenberg-suave se a aplicação $(z, \zeta) \mapsto \Lambda_{z, \zeta}$ ($(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$) é C^∞ .

Assim como definimos a ação à esquerda de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$ por $L_F(g) = F \times_J g$, podemos definir a ação à direita de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$ por $R_G(f) = f \times_J G$, $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ e $f \in S^A(\mathbb{R}^n)$. R_G é um operador contínuo no espaço de Banach $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, embora não seja homomorfismo de módulos à direita.

No final do capítulo 4 de [1], Rieffel propõe uma questão que podemos enunciar do seguinte modo: o conjunto dos operadores em $B^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$, Heisenberg-suaves, que comutam com R_G , para toda $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, é o conjunto dos operadores L_F , $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$.

No primeiro capítulo deste trabalho demonstramos esta conjectura para o caso em que A é a C^* -álgebra dos números complexos, [14]. Para isto, usamos a caracterização feita por Cordes em [17] dos operadores lineares contínuos em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (no caso em que $A = \mathbb{C}$, $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n)$) que são Heisenberg-suaves. Cordes prova que estes são os operadores $a(x, D)$, dados por um símbolo, uma função $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, do seguinte modo: $a(x, D)u(x) = \int \int (2\pi)^{-n} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi$, onde $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Provamos, então, que, se $a(x, D)$ comuta com R_G para toda G em $CB^\infty(\mathbb{R}^n)$, então se $F(x) = a(x, 0)$, $a(x, D) = L_F$.

No capítulo 2, precisamos supor que A é separável para provar um resultado interessante. Na verdade, se A tiver unidade, a separabilidade não é necessária, pois só a necessitamos para ter uma aproximação da unidade em A dada por uma seqüência. Dizemos que um operador Λ em $B^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ é suave por translações se a aplicação $z \mapsto \Lambda_z$, $z \in \mathbb{R}^n$ é C^∞ , onde temos que $\Lambda_z = T_z^{-1} \Lambda T_z$, usando a notação anterior. Neste capítulo, provamos que se Λ é suave por translações e comuta com R_g para qualquer g em $S^A(\mathbb{R}^n)$, então Λ é Heisenberg-suave.

O capítulo 3 consiste em uma generalização do teorema de Calderón-Vaillancourt, [10], baseada no teorema 3.14 de [11]. Provamos que um operador no módulo $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ dado por um símbolo (como no caso escalar, [2]) é contínuo. Aqui estamos nos referindo aos operadores $a(x, D)$, $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ dados por $a(x, D)u(x) = \int \int (2\pi)^{-n} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi$, para $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$. A integral acima é uma integral oscilatória. Novamente supomos que A é separável, para poder aplicar o Teorema de Convergência Dominada, e outras propriedades, para a integral de Bochner, [13, (E.6)], e também para usar que a transformada de Fourier é um operador "unitário" em $S^A(\mathbb{R}^n)$ (ver apêndice B) e que $S^A(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$ (ver apêndice A).

Usando os resultados dos capítulos 2 e 3, no capítulo 4, provamos que uma generalização natural, para uma C^* -álgebra separável qualquer, A , da caracterização de Cordes implicaria que a conjectura de Rieffel é verdadeira. Isto generaliza os resultados

de [14]; lá nós provamos que a caracterização de Cordes implica a conjectura de Rieffel, no caso $A = \mathcal{C}$, através de um argumento que usa o núcleo de Schwartz de um operador pseudo-diferencial. No capítulo 4, os argumentos que envolvem distribuições temperadas no capítulo 1, serão substituídos pela proposição 4.11, que se trata, na verdade, de uma extensão imediata, para o caso A qualquer, de um trecho da demonstração na caracterização de Cordes.

Capítulo 1

Neste capítulo vamos apresentar a conjectura proposta por Rieffel no final de [1, Capítulo 4] para uma C^* -álgebra qualquer e veremos uma resposta para o caso da C^* -álgebra dos números complexos.

Seja A uma C^* -álgebra. Consideremos o espaço das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}^n$ em A , que possuem derivadas de todas as ordens que são contínuas e limitadas.

$$CB^\infty(\mathbb{R}^n, A) = \{F : \mathbb{R}^n \longrightarrow A; \|\partial^\alpha F\|_\infty \leq \infty, \forall \alpha\},$$

onde α é um multi-índice, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e

$$\partial^\alpha F = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n} F,$$

$$\|\partial^\alpha F\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha F(x)\|,$$

onde esta última é a norma em A .

Consideremos em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ as seminormas

$$\|F\|_j = \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha F\|_\infty,$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Deste modo vemos que $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ é um espaço de Fréchet.

Dada J , uma matriz anti-simétrica $n \times n$, definimos o *produto deformado* $\times_J$ em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ como segue:

$$F \times_J G(x) = \int F(x + Ju)G(x + v)e^{iu \cdot v} \mathbb{d}u \mathbb{d}v,$$

onde $\mathbb{d}u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} du$, $\mathbb{d}v = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dv$. Notemos que a rigor, considerando a definição de Rieffel do capítulo 3 de [1], nosso $\times_J$ é seu $\times_{2\pi J}$.

A integral acima é uma integral oscilatória. Isto é, se temos $\psi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que satisfaz

(i) $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \psi_m(x)| < c_\alpha$, para cada multi-índice α , para todo $m \in \mathbb{N}$, onde $c_\alpha \in \mathbb{R}^+$ é uma constante que depende só de α .

(ii) $\psi_m(x) = 1$, se x pertence à bola de centro na origem e raio r_m , $B(O, r_m)$, onde r_m cresce para infinito;

e também $\psi'_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que satisfaz (i) e (ii), então

$$\int F(x + Ju)G(x + v)e^{iu \cdot v} \mathbb{d}u \mathbb{d}v = \lim_{k, m \rightarrow \infty} \int \int F(x + Ju)G(x + v)\psi_m(u)\psi'_k(v)e^{iu \cdot v} \mathbb{d}u \mathbb{d}v.$$

Prova-se que o limite existe e é independente da escolha de ψ_m e ψ'_k ([1, (2.4)]).

O produto deformado está bem definido em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ ([1, 2.2]).

Proposição 1.1. Dadas $F, G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, temos que

$$F \times_J G(x) = \int e^{iu(x-v)} F(x - Ju)G(v) \mathbb{d}v \mathbb{d}u.$$

Demonstração. Pelo visto acima, temos que

$$\begin{aligned} F \times_J G(x) &= \lim_{m, k} \int \int e^{iuv} F(x + Ju)G(x + w)\psi_m(u)\psi'_k(w) \mathbb{d}u \mathbb{d}w = \\ &= \lim_{m, k \rightarrow \infty} \int \int e^{iu(v-x)} F(x + Ju)G(v)\psi_m(u)\psi'_k(v-x) \mathbb{d}u \mathbb{d}v = \\ &= \lim_{m, k \rightarrow \infty} \int \int e^{-iu(v-x)} F(x - Ju)G(v)\psi_m(-u)\psi'_k(v-x) \mathbb{d}v \mathbb{d}u \end{aligned}$$

pela proposição A.18 e pelo Teorema de Fubini. Para x fixo, $\psi_m(-u)$ e $\psi'_k(v-x)$ satisfazem as condições (i) e (ii) acima, então temos:

$$F \times_J G(x) = \int e^{iu(x-v)} F(x - Ju)G(v) \mathbb{d}u \mathbb{d}v. \quad \blacksquare$$

Interessa-nos $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ agindo num espaço com produto interno. Assim, vamos considerar as funções de Schwartz. Seja $S^A(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ das funções tais que o produto de suas derivadas por polinômios em $\mathbb{R}^n$ são limitadas.

$$S^A(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow A / \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty < \infty\}$$

para α e β multi-índices.

Dadas $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ e $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, prova-se que $F \times_J g$ e $g \times_J F$ estão em $S^A(\mathbb{R}^n)$ ([1, 3.3]).

Definição 1.2. Um *pré-módulo de Hilbert* sobre A é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, E , que é também um módulo à direita equipado com uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow A$ que é linear na segunda variável e satisfaz, para $a \in A, x, y \in E$, as seguintes propriedades:

- (i) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$
- (ii) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv) se $\langle x, x \rangle = 0$, então $x = 0$.

Em E definimos $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \quad x \in E$.

Prova-se que assim E é um espaço normado ([7, lema 1.1.2]). Se E é completo com respeito a esta norma, dizemos que E é um *módulo de Hilbert*.

Nota 1.3. Podemos ler mais sobre módulos de Hilbert em [7, capítulo 1].

Consideremos em $S^A(\mathbb{R}^n)$ o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)^* g(x) dx.$$

É fácil ver que $S^A(\mathbb{R}^n)$ com este produto interno é um pré-módulo de Hilbert sobre A . A norma correspondente é

$$\|f\|_2 = \|\langle f, f \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \quad f \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Denotemos por L a ação à esquerda de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$ dada pelo produto deformado como segue:

$$L_F g = F \times_J g \quad F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A), \quad g \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Vemos em [1, (4.7)] que L_F é um operador contínuo em $S^A(\mathbb{R}^n)$ como pré-módulo de Hilbert. No capítulo 3 deste trabalho, veremos uma demonstração do Teorema de Calderón-Vaillancourt [10] para operadores pseudo-diferenciais com símbolo tomando valores em A , que também implica que L_F é contínuo.

Além disso, o operador L_F é "adjuntável", isto é, existe $(L_F)^*$, operador limitado em $S^A(\mathbb{R}^n)$, tal que $\langle L_F u, v \rangle = \langle u, (L_F)^* v \rangle$, para todo $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$. De fato, denotando por F^* a função $F^*(x) = F(x)^*$, demonstra-se (ver [1, (4.2)]) que $(L_F)^* = L_{F^*}$.

Do mesmo modo, denotemos por R a ação à direita de $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$:

$$R_G f = f \times_J G \quad f \in S^A(\mathbb{R}^n), \quad G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A).$$

Observemos que R_G não é um homomorfismo no módulo de Hilbert $S^A(\mathbb{R}^n)$, pois, dado $a \in A$,

$$\begin{aligned} R_G(fa)(x) &= \int f(x + Ju) a G(x + v) e^{iu \cdot v} du dv \\ R_G(f)a(x) &= \int f(x + Ju) G(u + v) a e^{iu \cdot v} du dv. \end{aligned}$$

Ou seja, se A não é comutativa, não vale necessariamente que $R_G(f)a = R_G(fa)$.

Como feito em [1, (4.4)], temos que, dada $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, o operador R_g é contínuo no espaço de Banach $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, o completamento de $S^A(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\cdot\|_2$.

Denotemos com $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ os operadores em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ que possuem adjunto. Como feito por Cordes, para o caso $A = \mathbb{C}$ ([2, Cap.8, Sec.2]), consideremos a ação do grupo de Heisenberg em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$. O Grupo de Heisenberg é o espaço $\mathbb{R}^{2n+1}$ equipado com a operação

$$(z, \zeta, \varphi) \circ (z', \zeta', \varphi') = (z + z', \zeta + \zeta', \varphi + \varphi' - \zeta' z),$$

unidade $= (0, 0, 0)$.

Para $z, \zeta \in \mathbb{R}^n$, sejam os operadores $T_z, M_\zeta \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ dados por

$$T_z f(x) = f(x - z)$$

$$M_\zeta f(x) = e^{i\zeta x} f(x)$$

para $f \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Notemos que T_z e M_ζ são "unitários" com respeito ao "produto interno" $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Observemos que vale

$$T_{-z} M_\zeta T_z M_{-\zeta} = e^{iz\zeta} \quad M_\zeta^* = M_{-\zeta} \quad T_z^* = T_{-z}$$

Assim, o sub-grupo dos operadores unitários em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ gerado pelos operadores T_z e M_ζ , GH , consiste no conjunto dos operadores

$$E_{z,\zeta,\varphi} = e^{i\varphi} M_\zeta T_z, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad z, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Deste modo, temos uma aplicação do grupo de Heisenberg em GH , bem definida (não injetora), que a cada $(z, \zeta, \varphi) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ associa o operador $E_{z,\zeta,\varphi}$. A partir de agora, estaremos pensando no grupo GH quando mencionarmos o grupo de Heisenberg.

Consideremos então a ação do grupo de Heisenberg em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ por conjugação. Para $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ seja $T_{z,\zeta} = E_{z,\zeta,\varphi}^{-1} T E_{z,\zeta,\varphi}$.

Observemos que $T_{z,\zeta}$ independe de φ . De agora em diante tomemos $\varphi = 0$ e denotemos por $E_{z,\zeta}$ o operador $E_{z,\zeta,0}$. No final de [1, Cap.4], Rieffel faz uma conjectura que, no presente contexto, pode ser enunciada como segue:

O conjunto dos operadores L_F com F em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ é o conjunto dos operadores adjuntáveis em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ que são suaves pela ação do grupo de Heisenberg e comutam com R_G para toda G em $CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, ou seja os operadores $T \in \mathcal{B}^(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ tais que a aplicação $(z, \zeta) \rightarrow T_{z,\zeta}$ é C^∞ para $(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $[T, R_G] = 0$, $\forall G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$.*

Definição 1.4. Dado $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$, dizemos que T é *Heisenberg-suave* se a aplicação $(z, \zeta) \rightarrow T_{z,\zeta}$ é C^∞ , para $(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Proposição 1.5. Dada $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, o operador L_F é Heisenberg-suave.

Demonstração. Dada $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, temos, pela proposição 1.1

$$L_F g(x) = \int e^{iu(x-v)} F(x - Ju) g(v) \, dv \, du.$$

Para $z, \zeta \in \mathbb{R}^n$, por argumentos similares aos usados na proposição 1.1,

$$\begin{aligned} E_{z,\zeta}^{-1} L_F E_{z,\zeta} g(x) &= T_{-z} M_{-\zeta} L_F E_{z,\zeta} g(x) = e^{-i\zeta(x+z)} L_F E_{z,\zeta} g(x+z) = \\ &= e^{-i\zeta(x+z)} L_F E_{x,\zeta} g(x+z) = e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{iu(x+z-v)} F(x+z - Ju) E_{z,\zeta} g(v) \, dv \, du = \\ &= e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{iu(x+z-v)} F(x+z - Ju) e^{i\zeta v} g(v-z) \, dv \, du = \\ &= e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{iu(x-w)} F(x+z - Ju) e^{i\zeta(w+z)} g(w) \, dw \, du = \\ &= e^{-i\zeta x} \int e^{iux} e^{-iw(u-\zeta)} F(x+z - Ju) g(w) \, dw \, du = \\ &= e^{-i\zeta x} \int e^{i(\xi+\zeta)x} e^{-iw\xi} F(x+z - J(\xi+\zeta)) g(w) \, dw \, d\xi = \\ &= \int e^{i\xi(x-w)} F(x+z - J(\xi+\zeta)) g(w) \, dw \, d\xi. \end{aligned}$$

(Notemos que esta manipulação formal é válida também para integrais oscilatórias.)

Consideremos o quociente:

$$\frac{(L_F)_{x+te_j, \zeta} - (L_F)_{z, \zeta}}{t} = \frac{E_{z,\zeta}^{-1} (L_F)_{te_j, 0} E_{z,\zeta} - E_{z,\zeta}^{-1} L_F E_{z,\zeta}}{t} = E_{z,\zeta}^{-1} \left[\frac{(L_F)_{te_j, 0} - L_F}{t} \right] E_{z,\zeta},$$

onde $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

E, pelo visto acima,

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(L_F)_{te_j, 0} - L_F}{t} \right] (g)(x) = \\ &= \int e^{i\xi(x-w)} \left[\frac{F(x+te_j - J\xi) - F(x - J\xi)}{t} \right] g(w) \, dw \, d\xi. \end{aligned}$$

Por [1, (4.7)] temos que existem $k \in \mathbb{N}$ e uma constante $c_k \in \mathbb{R}^+$, tais que $\|L_G\| \leq c_k \|G\|_{2k}$, para toda $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$. Sejam $H_t(y) = \frac{F(y+te_j) - F(y)}{t}$ e $\partial_{e_j} F(y) =$

$\lim_{t \rightarrow 0} H_t(y)$. Como $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, temos que para todo $l \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \|H_t - \partial_{e_j} F\|_l = 0$. De fato, dado $l \in \mathbb{N}$, $\|H_t - \partial_{e_j} F\|_l = \sup_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha (H_t - \partial_{e_j} F)\|_\infty$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, A.14,

$$\begin{aligned} H_t(y) - \partial_{e_j} F(y) &= \frac{F(y + te_j) - F(y)}{t} - \partial_{e_j} F(y) = \\ &= \int_{[0,t]} \left[\frac{\partial_{e_j} F(y + he_j)}{t} - \partial_{e_j} F(y) \right] dh = \int_{[0,t]} \frac{1}{t} [\partial_{e_j} F(y + he_j) - \partial_{e_j} F(y)] dh = \\ &= \int_{[0,t]} \frac{1}{t} \int_{[0,h]} \partial_{e_j}^2 F(y + se_j) ds dh. \end{aligned}$$

Logo, $\|H_t(y) - \partial_{e_j} F(y)\| \leq t \|\partial_{e_j}^2 F\|_\infty$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

De modo análogo, temos que

$$\|\partial^\alpha (H_t - \partial_{e_j} F)\|_\infty \leq t \|\partial_{e_j}^2 \partial^\alpha F\|_\infty, \quad |\alpha| \leq l,$$

e, assim, $\lim_{t \rightarrow 0} \|H_t - \partial_{e_j} F\|_l = 0$, $\forall l \in \mathbb{N}$.

Deste modo, $\|L_{H_t} - L_{\partial_{e_j} F}\| \leq c_k \|H_t - \partial_{e_j} F\|_{2k}$ e, portanto, $\lim_{t \rightarrow 0} \|L_{H_t} - L_{\partial_{e_j} F}\| = 0$, o que implica que existe a derivada parcial $\partial_{z_j}(L_F)_{z,\zeta} = L_{\partial_{e_j} F}$. Como obtivemos um operador do mesmo tipo, o processo pode ser repetido indefinidamente. Logo, L_F é Heisenberg-suave. ■

Proposição 1.6. Dadas $F, G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, quaisquer, $[L_F, R_G] = 0$.

Demonstração. Consideremos $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

$$L_F R_G u = F \times_J R_G u = F \times_J (u \times_J G)$$

$$R_G L_F u = L_F u \times_J G = (F \times_J u) \times_J G.$$

Como o producto deformado é associativo ([1, 2.14]), temos $[L_F, R_G] = 0$. ■

1.7. Deste modo, dado $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, temos que L_F é um operador Heisenberg-suave que comuta com R_G para todo $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$.

Observação 1.8. Pelo visto na proposição 1.1, $L_F g(x) = \int e^{iu(x-v)} F(x - Ju) g(v) \mathbb{A}v \mathbb{A}u$

Demonstraremos a seguir a conjectura proposta por Rieffel para o caso em que a C^* -álgebra é o conjunto dos números complexos.

Observemos que se $A = \mathbb{C}$, $S^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, a norma $\|\cdot\|_2$ é a norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\overline{S(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Notação 1.9. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.10. . Dadas $A \in B(\mathcal{H})$ e J , matriz $n \times n$ anti-simétrica, A é Heisenberg-suave e $[A, R_G] = 0 \ \forall G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ se e somente se existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $A = L_F$.

Cordes fez uma caracterização dos operadores suaves pela ação do grupo de Heisenberg ([17]): $A \in B(\mathcal{H})$ é Heisenberg-suave se, e somente se, existe uma função $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $Au(x) = \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) \mathbb{A}y \mathbb{A}\xi$, onde $\mathbb{A}y = (2\pi)^{-n/2} dy$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. A função a é chamada de *símbolo* de A e o operador A é um operador pseudo-diferencial. Ressaltamos que a integral acima é uma integral oscilatória. Além disso, prova-se facilmente que $Au \in S(\mathbb{R}^n)$. O teorema de Calderón-Vaillancourt [10] mostra que A pode ser estendido a um operador em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, [2, Capítulo 8, secção 1].

Pelo visto na observação 1.8, é fácil ver que o operador L_F , onde $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$, é um operador pseudo-diferencial com símbolo $\tilde{F} \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ com $\tilde{F}(x, \xi) = F(x - J\xi)$.

Vejamos agora um resultado que estabelece uma relação entre um operador pseudo-diferencial e seu símbolo.

Observemos primeiramente que podemos ver $S(\mathbb{R}^n)$ como um sub-conjunto de $S'(\mathbb{R}^n)$, o conjunto das distribuições temperadas, como segue: cada $f \in S(\mathbb{R}^n)$ determina um funcional linear contínuo em $S(\mathbb{R}^n)$, F , dado por:

$$\langle F, g \rangle = \int f g \quad \text{para } g \in S(\mathbb{R}^n)$$

([3, cap.8, sec.5(i)]).

Definição 1.11. Uma função $f \in C(\mathbb{R}^n)$ é dita de *crescimento polinomial* se existe $N \geq 0$ tal que $(1 + |x|)^{-N} f$ é limitada.

Proposição 1.12. Existe um isomorfismo T em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ tal que todo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, opera -dor pseudo-diferencial com símbolo $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, satisfaz

$$\langle T(a), u \otimes v \rangle = \langle Av, u \rangle \quad u, v \in S(\mathbb{R}^n),$$

onde $u \otimes v$ denota a função $u \otimes v(x, y) = u(x)v(y)$.

Demonstração. Sejam $\varphi, \psi : S(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow S(\mathbb{R}^{2n})$ dadas por

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x, y) &= f(x, x - y) \\ \psi(f)(x, y) &= (2\pi)^{-n} \int e^{iy\xi} f(x, \xi) d\xi.\end{aligned}$$

φ, ψ são isomorfismos.

Seja $T = \varphi \circ \psi$.

$$\begin{aligned}\langle T(f), g \rangle &= \int \varphi \circ \psi(f)(x, y) g(x, y) dx dy = \\ &= \int \psi(f)(x, x - y) g(x, y) dx dy = \int \psi(f)(x, z) g(x, x - z) dx dz = \\ &= \int (2\pi)^{-n} \left(\int e^{iz \cdot \xi} f(x, \xi) d\xi \right) \varphi(g)(x, z) dx dz = \\ &= \int f(x, \xi) \left((2\pi)^{-n} \int e^{iz \cdot \xi} \varphi(g)(x, z) dz \right) dx d\xi = \\ &= \int f(x, \xi) \psi \circ \varphi(g)(x, \xi) dx d\xi = \langle f, \psi \circ \varphi(g) \rangle.\end{aligned}$$

Se $\tilde{T} = \psi \circ \varphi$, temos $\langle T(f), g \rangle = \langle f, \tilde{T}(g) \rangle$. Então, T se estende a um isomorfismo em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ (ver [3, cap.8, sec.5]), que também chamamos T , definido como segue. Para $Q \in S'(\mathbb{R}^{2n})$,

$$\langle T(Q), g \rangle = \langle Q, \tilde{T}(g) \rangle.$$

Notemos que T é um operador contínuo em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ com a topologia fraca *.

Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, a tem crescimento polinomial; logo a define uma distribuição em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ ([4, V.3]).

Para $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T(a), u \otimes v \rangle = \langle a, \tilde{T}(u \otimes v) \rangle.$$

E

$$\begin{aligned} \tilde{T}(u \otimes v)(x, y) &= \psi \circ \varphi(u \otimes v)(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\xi} \varphi(u \otimes v)(x, \xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{iy\xi} (u \otimes v)(x, x - \xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{iy(x-\xi)} (u \otimes v)(x, \xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n} e^{iyx} u(x) \int e^{-iy\xi} v(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \langle a, \tilde{T}(u \otimes v) \rangle &= \int a(x, y) (2\pi)^{-n} e^{iyx} u(x) \int e^{-iy\xi} v(\xi) d\xi dx dy = \\ &= \int \left(\int e^{iy(x-\xi)} a(x, y) v(\xi) d\xi dy \right) u(x) dx = \langle Av, u \rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 1.13. Dado $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, operador pseudo-diferencial com símbolo $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$, a aplicação $a \rightarrow A$ é injetora.

Demonstração. Pela proposição (1.12), temos que existe um isomorfismo T em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ tal que, para $u, v \in S(\mathbb{R}^n)$ vale $\langle T(a), u \otimes v \rangle = \langle Av, u \rangle$. Logo, se $A = 0$, $\langle T(a), u \otimes v \rangle = 0$. Como $S(\mathbb{R}^n) \otimes S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $S(\mathbb{R}^{2n})$, [8, teorema 51.6], então temos que $T(a) = 0$, o que implica $a = 0$. ■

Nota 1.14. Citaremos a seguir, na proposição (1.16), o lema 2 de [14], que afirma que existe uma sequência $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que L_{e_k} converge para a identidade na topologia forte de operadores.

Notação 1.15. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto dos operadores Heisenberg-suaves, A , tais que

$$[A, R_G] = 0 \quad \forall G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Pela caracterização de Cordes, todo $A \in \mathcal{A}$ é da forma $A = a(x, D)$ para alguma $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Proposição 1.16. Dado $A \in \mathcal{A}$, existe uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ de modo que L_{f_k} converge para A na topologia forte de operadores.

Demonstração. Seja $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que L_{e_k} converge para a identidade na topologia forte de operadores [14, Lema 2]. Como A mantém $S(\mathbb{R}^n)$ invariante, $A(e_k) \in S(\mathbb{R}^n)$. Seja $f_k = A(e_k)$.

Dada $u \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$L_{f_k} u = f_k \times_J u = A e_k \times_J u = R_u A e_k = A R_u e_k = A L_{e_k} u.$$

Assim, $L_{f_k} = A L_{e_k}$, pois $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{H}$; e, como L_{e_k} converge para $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ na topologia forte de operadores, então L_{f_k} converge para A nesta topologia. ■

Proposição 1.17. Dado $A \in \mathcal{A}$, seja (F_k) uma seqüência de funções em $CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ de modo que A é limite de L_{F_k} na topologia forte de operadores. Se a é o símbolo de A e a_k é o símbolo de L_{F_k} , então temos $a_k \longrightarrow a$ em $S'(\mathbb{R}^{2n})$.

Demonstração. Por hipótese vale que

$$L_{F_k} v \longrightarrow A v \quad \forall v \in H.$$

Logo,

$$\langle L_{F_k} v, u \rangle \longrightarrow \langle A v, u \rangle \quad \forall u, v \in S(\mathbb{R}^n).$$

Logo, pela proposição (1.12)

$$\langle T(a_k), u \otimes v \rangle \longrightarrow \langle T(a), u \otimes v \rangle.$$

ou seja, $\langle T(a_k) - T(a), u \otimes v \rangle \longrightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$.

Queremos provar que, para toda $h \in S(\mathbb{R}^{2n})$, $\langle T(a_k) - T(a), h \rangle \longrightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$.

Primeiramente, observemos que, pelo Princípio da Limitação Uniforme, $\sup \|L_{F_k}\| < \infty$ (ver [6, teorema 2.6]).

Além disso, vemos em [8, teorema 51.6] que $S(\mathbb{R}^n) \otimes S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $S(\mathbb{R}^{2n})$. Pelo corolário anterior ao teorema 51.6, temos que $S(\mathbb{R}^n)$ é nuclear; logo, pelo feito na segunda página do capítulo 50, temos que $S(\mathbb{R}^n) \otimes S(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^n) \otimes_\pi S(\mathbb{R}^n)$, onde $\otimes_\pi$ é definido em [8, capítulo 43, definição 43.2].

Assim, pelo teorema 45.1 de [8], temos que dada $h \in S(\mathbb{R}^{2n})$, existem seqüências $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em $S(\mathbb{R}^{2n})$, convergindo a zero, e $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, tal que $\sum_j |\lambda_j| < \infty$, que satisfazem

$$h = \sum_j \lambda_j u_j \otimes v_j.$$

Como visto acima, temos que, para todo j ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(a_k) - T(a), u_j \otimes v_j \rangle = 0.$$

E, considerando que:

1. $\langle T(a_k) - T(a), u_j \otimes v_j \rangle = \langle (L_{F_k} - A)v_j, u_j \rangle$,
2. (u_j) e (v_j) convergem a zero em $S(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, convergem a zero em $L^2(\mathbb{R}^n)$,
3. $\sup_k \|L_{F_k}\| < \infty$,

temos que $\sup_{k,j} |\langle T(a_k) - T(a), u_j \otimes v_j \rangle| < \infty$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada para séries, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j \lambda_j \langle T(a_k) - T(a), u_j \otimes v_j \rangle = 0$.

Isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle T(a_k) - T(a), h \rangle = 0$. Como T é isomorfismo em $S'(\mathbb{R}^{2n})$, temos então que (a_k) converge para a em $S'(\mathbb{R}^{2n})$. ■

Definição 1.18. Dadas funções $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, definimos seu *colchete de Poisson* como segue:

$$\{a, b\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j} - \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{\partial b}{\partial x_j} \right).$$

Proposição 1.19. Dadas $F, G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ e J matriz anti-simétrica $n \times n$, sejam

$$a(x, \xi) = F(x - J\xi)$$

e

$$b(x, \xi) = G(x + J\xi).$$

Então, $\{a, b\} = 0$.

Demonstração. Fazendo contas, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_i} &= \partial_i F & \frac{\partial a}{\partial \xi_i} &= \sum_{j=1}^n J_{ij} \partial_j F \\ \frac{\partial b}{\partial x_i} &= \partial_i G & \frac{\partial b}{\partial \xi_i} &= - \sum_{j=1}^n J_{ij} \partial_j G \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial \xi_i} - \frac{\partial a}{\partial \xi_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} = -\partial_i F \sum_{j=1}^n J_{ij} \partial_j G - \partial_i G \sum_{j=1}^n J_{ij} \partial_j F = \partial_i F \sum_{j=1}^n J_{ji} \partial_j G + \partial_i G \sum_{j=1}^n J_{ji} \partial_j F.$$

Assim,

$$\{a, b\} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (J_{ji} \partial_i F \partial_j G + J_{ji} \partial_i G \partial_j F)$$

e $\{a, b\} = 0$ pois J é anti-simétrica. ■

Notação 1.20. Seja $\mathcal{P}_B(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que elas e todas as suas derivadas são de crescimento polinomial.

Proposição 1.21. Dadas $A \in \mathcal{A}$, com símbolo $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$, e a função $b(x, \xi) = G(x + J\xi)$, com $G \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R}^{2n})$, então $\{a, b\} = 0$.

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{A}$, existe uma seqüência $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde $A_k = L_{F_k}$, com $F_k \in S(\mathbb{R}^n)$, de modo que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para A na topologia forte de operadores, 1.16. Se a_k é o símbolo de A_k , vimos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para a em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ (1.17). Como o símbolo de A_k é $F_k(x - J\xi)$, temos pela proposição anterior que $\{a_k, b\} = 0$, $\forall k$.

Como $b \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R}^{2n})$, $\{a_k, b\} \in S'(\mathbb{R}^{2n})$, $\forall k$. Como $a_k \longrightarrow a$ em $S'(\mathbb{R}^{2n})$, e como a multiplicação por uma derivada qualquer da função b é uma operação contínua em $S'(\mathbb{R}^{2n})$ ([4, V.3]), temos que :

$$\frac{\partial b}{\partial \xi_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial b}{\partial \xi_i} \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial b}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial \xi_i} \longrightarrow \frac{\partial b}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial \xi_i}$$

em $S'(\mathbb{R}^{2n})$, e vale que $\{a_k, b\} \longrightarrow \{a, b\}$ em $S'(\mathbb{R}^{2n})$. Como $\{a_k, b\} = 0 \quad \forall k$ temos que $\{a, b\} = 0$. ■

Lema 1.22. Seja $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ que satisfaz $\{a, b\} = 0$ para qualquer $b \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R}^{2n})$ com $b(x, \xi) = G(x + J\xi)$. Então existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $a(x, \xi) = F(x - J\xi)$.

Demonstração. Seja b_i a projeção de $x + J\xi$ na coordenada i ,

$$b_i(x, \xi) = x_i + \sum_{k=1}^n J_{ik} \xi_k.$$

Assim definida, $b_i \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R}^{2n})$ e, pela proposição anterior, temos $\{a, b_i\} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} J_{ij} - \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \delta_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n J_{ij} \frac{\partial a}{\partial x_j} - \frac{\partial a}{\partial \xi_i} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial a}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^n J_{ij} \frac{\partial a}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Portanto, aplicando as idéias de [16, 2.1], temos que

$$a(x, \xi) = a((x, \xi) + s(-J_{i1}, \dots, -J_{in}, e_i)), \quad (**)$$

para todo $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, para qualquer $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Agora, em (**), consideremos s_1 em lugar de s , $i = 1$, e $(x, \xi) = (x_0, 0)$:

$$a(x_0, 0) = a((x_0, 0) + s_1(-J_{11}, \dots, -J_{1n}, e_1)) = a((x_0, 0) + (-J_{11}s_1, \dots, -J_{1n}s_1, s_1e_1)).$$

Apliquemos (**) novamente para s_2 no lugar de s , $i = 2$ e $(x, \xi) = (x_0 - (J_{11}s_1, \dots, J_{1n}s_1), s_1e_1)$. Assim, temos

$$a(x_0, 0) = a(x_0 + (-J_{11}s_1, \dots, -J_{1n}s_1) + (-J_{21}s_2, \dots, -J_{2n}s_2), s_1e_1 + s_2e_2).$$

Repetindo o raciocínio para $i = 3, \dots, n$, temos

$$a(x_0, 0) = a(x_0 - \left(\sum_{i=1}^n J_{i1}s_i, \dots, \sum_{i=1}^n J_{in}s_i \right), \sum_{i=1}^n s_i e_i).$$

Como J é anti-simétrica, tomando $\xi = (s_1, \dots, s_n)$, temos:

$$a(x_0, 0) = a(x_0 + J\xi, \xi).$$

Seja $F(x) = a(x, 0)$. Então $a(x, \xi) = F(x - J\xi)$. ■

Corolário 1.23. Dado $A \in \mathcal{A}$, existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $A = L_F$.

Demonstração. Dado $A \in \mathcal{A}$, pela caracterização feita por Cordes dos operadores Heisenberg-suaves, A é um operador pseudo-diferencial. Seja $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ seu símbolo. Pela proposição (1.21), dada $b(x, \xi) = G(x + J\xi)$, com $G \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R}^n)$, temos $\{a, b\} = 0$. Assim, pelo lema (1.22), existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $a(x, \xi) = F(x - J\xi)$. Temos, então, que o operador A tem símbolo $F(x - J\xi)$, ou seja, $A = L_F$. ■

Com isto fica provado o Teorema (1.10) e portanto a questão proposta por Rieffel, no caso da C^* -álgebra ser o conjunto dos números complexos.

Capítulo 2

Seja A uma C^* -álgebra separável ao longo deste capítulo. Consideremos, novamente, a ação do grupo de Heisenberg em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$,

$$(z, \zeta) \rightarrow E_{z, \zeta}^{-1} T E_{z, \zeta}$$

onde $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ e $E_{z, \zeta} u(x) = e^{i\zeta x} u(x - z)$ se $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Notação 2.1. $T_{z, \zeta} = E_{z, \zeta}^{-1} T E_{z, \zeta}$.

Definição 2.2. Dizemos que $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ é *Heisenberg-suave* se a aplicação $(z, \zeta) \mapsto T_{z, \zeta}$ é C^∞ . Dizemos que $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ é *suave por translações* se a aplicação $z \mapsto T_{z, 0}$ é C^∞ .

Neste capítulo veremos que dado um operador T em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ que comuta com qualquer operador R_g para g em $S^A(\mathbb{R}^n)$ (ver capítulo 1), se T é suave por translações então é Heisenberg-suave.

Lema 2.3. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow A$ uma função contínua tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^l \|f(x)\| < \infty$ para todo inteiro positivo l . Então, dada J , matriz anti-simétrica $n \times n$, para cada $l \in \mathbb{Z}^+$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$|x|^l \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < \varepsilon$$

para quaisquer $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ com $|\xi| < \delta$.

Demonstração. Dados $\varepsilon > 0$, $l \in \mathbb{Z}^+$, existe $R_l \in \mathbb{N}$ tal que se $|x| > R_l$,

$$|x|^l \|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Seja d_J , $0 < d_J \leq 1$, tal que se $|\xi| < d_J$, $|J\xi| < 1$. Consideremos

$$X_{f,l} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |x| \leq R_l + 1, |\xi| \leq d_J\}.$$

Embora a notação fique um pouco "carregada", consideramos que é necessário para situar mais facilmente o leitor.

1º passo: $l = 0$.

Se $g(x, \xi) = f(x + J\xi)e^{ix\xi}$, g é uniformemente contínua em $X_{f,0}$, pois $X_{f,0}$ é compacto. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, $\delta \leq d_J$, tal que se $|(x, \xi) - (x', \xi')| < \delta$ e $(x, \xi), (x', \xi') \in X_{f,0}$, temos $\|g(x, \xi) - g(x', \xi')\| < \varepsilon$. Seja, agora, $(x', \xi') = (x, 0)$. Assim $|(x, \xi) - (x', \xi')| = |\xi|$. Portanto, se $|\xi| < \delta$, $\|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq R_0 + 1$.

Se $|x| > R_0 + 1$ e $|\xi| < \delta$, $|x + J\xi| > R_0$ pois $|J\xi| < 1$, e temos, por (1):

$$\|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| \leq \|f(x + J\xi)\| + \|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2º passo: l qualquer.

Seja $h(x) = |x|^l f(x)$. Pelo primeiro passo, aplicado a h , temos que existe $\sigma_l \leq d_J$ tal que, se $|\xi| < \sigma_l$, então

$$\||x + J\xi|^l f(x + J\xi)e^{ix\xi} - |x|^l f(x)\| < \varepsilon. \quad (2)$$

E notemos que, por (2), se $|\xi| < \sigma_l$,

$$\begin{aligned} |x|^l \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| &\leq \||x + J\xi|^l f(x + J\xi)e^{ix\xi} - |x|^l f(x)\| + \||x|^l f(x + J\xi)e^{ix\xi} - \\ &\quad |x + J\xi|^l f(x + J\xi)e^{ix\xi}\| < \varepsilon + \||x|^l - |x + J\xi|^l\| \|f(x + J\xi)\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Se $(x, \xi) \in X_{f,l}$, $|x + J\xi| \leq R_l + 2$, pois $|J\xi| < 1$.

Seja $K = \sup_{|y| \leq R_l + 2} \|f(y)\|$. Se $p(x, \xi) = |x + J\xi|^l$, p é uniformemente contínua em $X_{f,l}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_l > 0$, $\delta_l \leq \sigma_l$ (δ_l depende de l), tal que se

$(x, \xi), (x', \xi') \in X_{f,l}$ e $|(x, \xi) - (x', \xi')| < \delta_l$ então $|p(x, \xi) - p(x', \xi')| < \frac{\varepsilon}{K}$. Tomando $(x', \xi') = (x, 0)$, temos $||x + J\xi|^l - |x|^l| < \frac{\varepsilon}{K}$ para $|\xi| < \delta_l$ e $|x| \leq R_l + 1$.

Logo, se $|\xi| < \delta_l$, temos $|x|^l \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < 2\varepsilon$ para $|x| \leq R_l + 1$.

Se $|x| > R_l + 1$, e $|\xi| < \delta_l \leq \sigma_l \leq d_J$, temos que $|x + J\xi| > R_l$ pois $|J\xi| < 1$. Sem perda de generalidade, consideremos $R_l > 1$ e teremos: $|J\xi| < 1 < R_l < |x + J\xi|$.

Assim

$$|x| = |x + J\xi - J\xi| \leq |x + J\xi| + |J\xi| \leq 2|x + J\xi|. \quad (4)$$

O lado direito de (3) é, portanto, menor ou igual a

$$\varepsilon + |x|^l \|f(x + J\xi)\| + |x + J\xi|^l \|f(x + J\xi)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon + 2^l |x + J\xi|^l \|f(x + J\xi)\| + |x + J\xi|^l \|f(x + J\xi)\| < \varepsilon + (2^l + 1) \frac{\varepsilon}{2},$$

por (1), já que $|x + J\xi| > R_l$.

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_l > 0$ tal que

$$|x|^l \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < \varepsilon(2^{l-1} + \frac{3}{2})$$

para $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ com $|x| > R_l + 1$ e $|\xi| < \delta_l$.

Para todo $\varepsilon' > 0$, seja $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon(2^{l-1} + \frac{3}{2}) < \varepsilon'$, e $2\varepsilon < \varepsilon'$.

Assim, temos que, para qualquer $\varepsilon' > 0$, existe $\delta_l > 0$ tal que $|x|^l \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < \varepsilon'$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $|\xi| < \delta_l$, tendo fixado $l \in \mathbb{N}$. ■

Observação 2.4. Usaremos o lema (2.3) na demonstração da proposição (2.5) do seguinte modo: estaremos considerando a função $s(x) = (1 + |x|)^n$ e vamos provar que, dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|\xi| < \delta$, $s(x) \|f(x + J\xi)e^{ix\xi} - f(x)\| < \varepsilon_1$. Notemos que $s(x)$ é uma soma finita de termos do tipo $c_l |x|^l$, onde $c_l \in \mathbb{Z}^+$ é uma constante, e $l \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dado qualquer $\varepsilon_1 > 0$, escolhemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\sum c_l \varepsilon < \varepsilon_1$. Para cada valor de l , aplicamos o lema (2.3). Isto demonstra a afirmação.

Proposição 2.5. Dada J , matriz anti-simétrica $n \times n$, existe uma seqüência (e_k) em $S^A(\mathbb{R}^n)$ tal que, para toda $f \in S^A(\mathbb{R}^n)$, temos $\lim_{k \rightarrow 0} L_{e_k}(f) = f$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$ com $\|\cdot\|_2$.

Demonstração. Como A é separável, admite uma aproximação da unidade que é uma seqüência ([5, Remark(3.11)]). Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma aproximação da unidade para A , com $u_k \geq 0$ e $\|u_k\| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \geq 0$ tal que o suporte de ψ está contido na bola unitária, $(\text{supp}(\psi) \subseteq B(0, 1))$, e $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) d\xi = 1$. Para $k \in \mathbb{Z}^+$, seja $\psi_k(\xi) = k^n \psi(k\xi)$; assim $\text{supp}(\psi_k) \subseteq B(0, \frac{1}{k})$. Seja $\phi_k = \psi_k u_k$. Assim $\text{supp}(\phi_k) \subseteq B(0, \frac{1}{k})$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(\xi) d\xi = u_k$. Seja φ_k dada por $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \varphi_k(y) dy = \phi_k(\xi)$. Como $\phi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, $\varphi_k \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Como feito na proposição, 1.1, e, por [1, (1.13)], para $f \in S^A(\mathbb{R}^n)$ temos que $R_f(\varphi_k)(x) = \int e^{ix\xi} \phi_k(\xi) f(x + J\xi) d\xi$.

Como $\int \phi_k(\xi) f(x) d\xi = u_k f(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \|(2\pi)^{\frac{n}{2}} R_f(\varphi_k)(x) - u_k f(x)\| &\leq \int \|e^{ix\xi} \phi_k(\xi) f(x + J\xi) - \phi_k(\xi) f(x)\| d\xi \leq \\ &\leq \int \|\phi_k(\xi)\| \|e^{ix\xi} f(x + J\xi) - f(x)\| d\xi. \end{aligned}$$

Pela observação (2.4) temos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $k > \frac{1}{\delta}$:

$$s(x) \|(2\pi)^{\frac{n}{2}} R_f(\varphi_k)(x) - u_k f(x)\| \leq \varepsilon \int_{B(0, \frac{1}{k})} \|\phi_k(\xi)\| d\xi < \varepsilon,$$

pois

$$\int_{B(0, \frac{1}{k})} \|\phi_k(\xi)\| d\xi = \int_{B(0, \frac{1}{k})} \psi_k(\xi) d\xi \|u_k\| \leq 1, \text{ para } k > \frac{1}{\delta}.$$

Portanto

$$\|(2\pi)^{\frac{n}{2}} R_f(\varphi_k) - u_k f\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|(2\pi)^{\frac{n}{2}} R_f(\varphi_k)(x) - u_k f(x)\|^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{s(x)^2} dx. \quad (1)$$

Por outro lado, $\|f - u_k f\|_2^2 \leq \int \|(f - u_k f)(x)\|^2 dx$. Como u_k é aproximação da unidade em A , para cada $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x) - u_k f(x)\| = 0$. Além disso, $\|f(x) - u_k f(x)\| \leq 2\|f(x)\|$. Como $2\|f(x)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \|(f - u_k f)(x)\|^2 dx = 0$, o que implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - u_k f\|_2 = 0. \quad (2)$$

Portanto, por (1) e (2), $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(2\pi)^{\frac{n}{2}} R_f(\varphi_k) - f\|_2 = 0$.

Tomando $e_k = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varphi_k$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_f(e_k) - f\|_2 = 0$.

Observamos que $R_f(e_k) = e_k \times_J f = L_{e_k}(f)$. Portanto, temos que para toda $f \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{e_k}(f) = f$ em $(S^A(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$. ■

Usamos agora argumentos semelhantes a [9, secção 1].

Definição 2.6. Dada $F \in \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, para cada $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$ definimos $L_F(g) = R_g(F)$. Como R_g é contínuo em $(S^A(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$, se estende a $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, logo L_F está bem definido, como operador de $S^A(\mathbb{R}^n)$ em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$.

Corolário 2.7. Dado $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ que comuta com R_g para qualquer $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, existe (F_k) em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{F_k}(g) = T(g)$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pela proposição (2.5) existe uma seqüência (e_k) em $S^A(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{e_k}(g) = g$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, temos que $L_{Te_k}g = R_gTe_k = TR_g e_k = TL_{e_k}g$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{Te_k}(g) = T(g), \quad \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Tomando $F_k = Te_k$ temos a tese. ■

Observação 2.8. Notemos que o operador L_{F_k} acima é contínuo para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, pois $\|L_{F_k}\| = \|L_{Te_k}\| = \|TL_{e_k}\| \leq \|T\| \|L_{e_k}\|$.

Proposição 2.9. Sejam $U, V \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ operadores que preservam $S^A(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que para toda $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$ vale $U^*L_hU = V^*L_hV$. Então, dada $F \in \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, temos $U^*L_FU = V^*L_FV$.

Aqui estamos vendo os operadores U^*L_FU e V^*L_FV como operadores de $S^A(\mathbb{R}^n)$ em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, não necessariamente limitados.

Demonstração. Dada $F \in \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, existe uma seqüência (h_k) em $S^A(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = F$ em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$. Dada $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, como R_g é contínuo em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, temos

$$L_F(g) = R_g(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} R_g(h_k).$$

Calculemos (lembrando que $U(g) \in S^A(\mathbb{R}^n)$ e $V(g) \in S^A(\mathbb{R}^n)$):

$$\begin{aligned} U^* L_F U(g) &= U^* \lim_{k \rightarrow \infty} R_{U(g)}(h_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} U^* R_{U(g)}(h_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} U^* L_{h_k} U(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} V^* L_{h_k} V(g) = V^* \lim_{k \rightarrow \infty} R_{V(g)}(h_k) = V^* L_F V(g). \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 2.10. Dada $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$ vale que $(L_h)_{z,\zeta} = (L_h)_{z-J\zeta,0}$.

Demonstração. Lembremos que $(L_h)_{z,\zeta} = E_{z,\zeta}^{-1} L_h E_{z,\zeta}$, onde $E_{z,\zeta} = M_\zeta T_z$, com $M_\zeta u(x) = e^{i\zeta x} u(x)$, $T_z(u)(x) = u(x - z)$ para $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$ (ver capítulo 1 e notação (2.1)). Além disso,

$$E_{z,\zeta}^{-1} u(x) = T_{-z} M_{-\zeta} u(x) = e^{-i\zeta(x+z)} u(x+z).$$

Dada $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \widehat{E_{z,\zeta}(g)}(\xi) &= \int e^{-i\xi y} E_{z,\zeta} g(y) dy = \\ &= \int e^{-i\xi y} e^{i\zeta y} g(y - z) dy = \int e^{-i(\xi - \zeta)(y+z)} g(y) dy = e^{-iz(\xi - \zeta)} \hat{g}(\xi - \zeta). \end{aligned}$$

Portanto, por [1, (3.1)]

$$\begin{aligned} (L_h)_{z,\zeta} g(x) &= e^{-i\zeta(x+z)} L_h E_{z,\zeta} g(x+z) = e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{i(x+z)\xi} h(x+z - J\xi) \widehat{E_{z,\zeta}(g)}(\xi) d\xi = \\ &= e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{ix\xi} e^{i\zeta z} h(x+z - J\xi) \hat{g}(\xi - \zeta) d\xi = e^{-i\zeta x} \int e^{ix(\xi + \zeta)} h(x+z - J(\xi + \zeta)) \hat{g}(\xi) d\xi = \\ &= \int e^{ix\xi} h(x+z - J\zeta - J\xi) \hat{g}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Isto é,

$$(L_h)_{z,\zeta} g(x) = \int e^{ix\xi} h(x+z - J\zeta - J\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

para qualquer $(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Logo,

$$(L_h)_{z-J\zeta,0} g(x) = \int e^{ix\xi} h(x+(z - J\zeta) - J\xi) \hat{g}(\xi) d\xi.$$

Portanto, para qualquer $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $(L_h)_{z,\zeta}(g) = (L_h)_{z-J\zeta,0}(g)$. Como L_h é contínua em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, temos $(L_h)_{z,\zeta} = (L_h)_{z-J\zeta,0}$. $\blacksquare$

Corolário 2.11. Dada $F \in \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, temos $(L_F)_{z,\zeta} = (L_F)_{z-J\zeta,0}$, como operadores de $S^A(\mathbb{R}^n)$ em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$.

Demonstração. Sejam $U = E_{z,\zeta}$ e $V = E_{z-J\zeta,0}$. Notemos que, dada $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $U(h)$ e $V(h)$ pertencem a $S^A(\mathbb{R}^n)$. Logo, por (2.9) e (2.10), temos

$$(L_F)_{z,\zeta} = (L_F)_{z-J\zeta,0}. \blacksquare$$

Teorema 2.12. Seja $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$ com $TR_g = R_gT$ para toda $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Se T é suave por translações, então T é Heisenberg-suave.

Demonstração. Pelo corolário (2.7), temos que existe uma sequência (F_k) em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{F_k}(g) = T(g)$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Isto implica que para $(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$ temos $\lim_{k \rightarrow \infty} (L_{F_k})_{z,\zeta}(g) = T_{z,\zeta}(g)$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Além disso, pelo (2.11), temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} (L_{F_k})_{z,\zeta}(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (L_{F_k})_{z-J\zeta,0}(g)$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Assim, $T_{z,\zeta}(g) = T_{z-J\zeta,0}(g)$, $\forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$ e, como T é contínua, temos $T_{z,\zeta} = T_{z-J\zeta,0}$.

Como T é suave por translações, a aplicação

$$(z, \zeta) \longrightarrow z - J\zeta \longrightarrow T_{z-J\zeta,0}$$

é C^∞ , ou seja $(z, \zeta) \longrightarrow T_{z,\zeta}$ é C^∞ . $\blacksquare$

Capítulo 3

Neste capítulo veremos uma generalização do teorema de Calderón-Vaillancourt [10] para operadores pseudo-diferenciais com símbolos tomando valores numa C^* -álgebra separável, baseada na demonstração feita por Seiler em [11].

Dadas uma C^* -álgebra separável A e uma função a em $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, veremos que o operador $a(x, D)$ dado por

$$(I) \quad a(x, D)u(x) = \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) d y d \xi \text{ para } u \text{ em } S^A(\mathbb{R}^n)$$

é contínuo com a norma $\|\cdot\|_2$; $\|u\|_2 = \left\| \int u(x)^* u(x) dx \right\|^{\frac{1}{2}}$.

A integral em (I) deve ser entendida como uma integral oscilatória. Mais precisamente, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $a(x, D)u(x) = \lim_{k, m \rightarrow \infty} \int \int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) \psi_m(y) \psi'_k(\xi) d y d \xi$, onde ψ_m, ψ'_k são as seqüências introduzidas na segunda página do capítulo 1. Demonstre, então, que a integral oscilatória é igual à integral iterada (não necessariamente absolutamente convergente) $\int e^{ix\xi} a(x, \xi) \left[\int e^{-iy\xi} u(y) d y \right] d \xi$.

Observação 3.1. Notemos que o operador dado por

$$a(x, D)_R u(x) = \int e^{i(x-y)\xi} u(y) a(x, \xi) d y d \xi, \quad u \in S^A(\mathbb{R}^n),$$

não é um homomorfismo de módulos à direita em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, se A não é comutativa, pois, dados $b \in A, u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $a(x, D)_R(ub)(x) = \int e^{i(x-y)\xi} u(y) b a(x, \xi) d y d \xi$ e $a(x, D)_R(u)b(x) = \int e^{i(x-y)\xi} u(y) a(x, \xi) b d y d \xi$. Ou seja, em geral, $a(x, D)_R(ub)$ e $a(x, D)_R(u)b$ não são iguais.

Definição 3.2. Definimos a *transformada de Fourier* de u em $S^A(\mathbb{R}^n)$ como segue:

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-iy\xi} u(y) dy.$$

Observação 3.3. Temos (como no caso escalar) que a transformada de Fourier é um operador contínuo e inversível em $S^A(\mathbb{R}^n)$. Além disso, é uma isometria com relação à norma $\|\cdot\|_2$, (corolário B.4). Assim, $a(x, D)u(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$.

Observação 3.4. Notemos que, pelo Teorema da Convergência Dominada (A.7), $a(x, D)u$ é uma função contínua, pois $\|e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi)\| \leq \|a\|_\infty \|\hat{u}(\xi)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definição 3.5. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, seja $\pi(a) = \sup\{\|\partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma a\|_\infty, \beta, \gamma \leq (1, 1, \dots, 1)\}$.

Notação 3.6. $\alpha = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$.

Lema 3.7. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ com $\phi \equiv 1$ perto do zero. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, seja $a_\varepsilon(y, \eta) = \phi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Então existe uma constante $c_1 \in \mathbb{R}^+$, independente de a e ε , tal que $\pi(a_\varepsilon) \leq c_1 \pi(a)$.

Demonstração. Dados os multi-índices $\beta, \gamma \leq \alpha$,

$$\begin{aligned} \partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma a_\varepsilon(y, \eta) &= \partial_y^\beta [\partial_\eta^\gamma \phi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)] = \partial_y^\beta \left[\sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \partial_\eta^{\gamma_1} \phi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) \partial_\eta^{\gamma_2} a(y, \eta) \right] = \\ &= \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} \partial_y^{\beta_1} \partial_\eta^{\gamma_1} \phi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) \partial_y^{\beta_2} \partial_\eta^{\gamma_2} a(y, \eta). \end{aligned}$$

Portanto, se $\phi_\varepsilon(x, y) = \phi(\varepsilon y, \varepsilon x)$, temos:

$$\|\partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma a_\varepsilon\|_\infty \leq \sum_{\beta_1 \leq \beta} \sum_{\gamma_1 \leq \gamma} \|\partial_y^{\beta_1} \partial_\eta^{\gamma_1} \phi_\varepsilon\|_\infty \pi(a).$$

Assim,

$$\pi(a_\varepsilon) \leq \sum_{\beta, \gamma \leq \alpha} \varepsilon^{|\beta + \gamma|} \|\partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma \phi\|_\infty \pi(a) \leq \sum_{\beta, \gamma \leq \alpha} \|\partial_y^\beta \partial_\eta^\gamma \phi\|_\infty \pi(a). \quad \blacksquare$$

Nota 3.8. Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$ (ver A.9), $(f|g) = \int f(x)^* g(x) dx$ está bem definido, pois $f^* g \in L^1(\mathbb{R}^n, A)$ (ver A.9) por Hölder [3, 6.2]. E temos que $(\cdot|\cdot) : L^2(\mathbb{R}^n, A) \times L^2(\mathbb{R}^n, A) \rightarrow A$ é contínua como função das duas variáveis, pois $\|(f|g)\| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$. Notemos que, se $h_1, h_2 \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $(h_1|h_2) = \langle h_1, h_2 \rangle$. E temos que $\|h\|_2 \leq \|h\|_{L_2}$, para $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.9. $L^2(\mathbb{R}^n, A) \subseteq \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ e a inclusão é contínua.

Demonstração. Definamos $\iota : (S^A(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_2}) \rightarrow \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ por $\iota(h) = h$, $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Notemos que $\|\iota(h)\|_2 = \|h\|_2 \leq \|h\|_{L_2}$. Portanto, ι é contínua.

Seja $\mathcal{I} : L^2(\mathbb{R}^n, A) \rightarrow \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ a única extensão contínua de ι . Provemos que $\mathcal{I}$ é injetora; ou seja que se $\mathcal{I}(f) = 0 \Rightarrow f = 0$, para $f \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$, seja (f_m) uma sequência em $S^A(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{L_2} = 0$ (ver A.19). Para $g \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$ temos que (por Hölder): $\|(f_m - f)g\| \leq \int \|(f_m - f)(x)^* g(x)\| dx \leq \|f_m - f\|_{L_2} \|g\|_{L_2}$. Logo,

$$(1) \quad (f_m|g) \rightarrow (f|g), \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n, A).$$

Se $\mathcal{I}(f) = 0$, como $\mathcal{I}$ é contínua, $\mathcal{I}(f_m) \rightarrow 0$, ou seja, $\|f_m\|_2 \rightarrow 0$. Assim, dada $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $\| \langle f_m, h \rangle \| \leq \|f_m\|_2 \|h\|_2 \rightarrow 0$ por Cauchy-Schwartz [6, lemma 1.1.2]. Ou seja,

$$(2) \quad \mathcal{I}(f) = 0 \Rightarrow \langle f_m, h \rangle \rightarrow 0, \quad \forall h \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Suponhamos $\mathcal{I}(f) = 0$. Então, dada $h \in S^A(\mathbb{R}^n)$, por (1) e (2) temos $(f|h) = 0$; em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$, $(f|f_m) = 0$. Novamente por (1), tomando $g = f$, temos que $(f|f_m) \rightarrow (f|f)$ e, portanto, $(f|f) = 0$, ou seja, $f = 0$, (A.17) e $\mathcal{I}$ é injetora. ■

Corolário 3.10. Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$, então $\langle f, g \rangle = (f|g)$. Em particular, $\|f\|_2 = \left\| \int f(x)^* f(x) dx \right\|^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Sejam (f_m) e (g_k) seqüências em $S^A(\mathbb{R}^n)$ que convergem em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$ para f e g , respectivamente. Como a inclusão $L^2(\mathbb{R}^n, A) \subseteq \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ é contínua, (pela proposição 3.9), (f_m) e (g_k) convergem em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ para f e g , respectivamente. Portanto, (ver 3.8),

$$(f|g) \longleftarrow (f_m|g_k) = \langle f_m, g_k \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle.$$

Isto é $\langle f, g \rangle = \int f(x)^* g(x) dx$. ■

Observação 3.11. Se $D_{y_j} = -i\partial_{y_j}$, vale que $(i+x)^\alpha e^{ixy} = (i+D_y)^\alpha e^{ixy}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. (Escrevemos $(i+x)$ querendo dizer $(i\alpha+x)$).

Proposição 3.12. Dadas $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ e $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então $a(x, D)(u) \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$.

Demonstração. Notemos que, pela observação 3.4, $a(x, D)(u)(x)$ é uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ em A e, portanto, mensurável.

$$\begin{aligned} a(x, D)(u)(x) &= \int e^{ix\eta} a(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta = \int (i+x)^{-\alpha} [(i+x)^\alpha e^{ix\eta}] a(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta = \\ &= (i+x)^{-\alpha} \int [(i+D_\eta)^\alpha e^{ix\eta}] a(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta = (i+x)^{-\alpha} \int e^{ix\eta} [(i-D_\eta)^\alpha a(x, \eta) \hat{u}(\eta)] d\eta \end{aligned}$$

(para a última igualdade fizemos integração por partes, ver A.15).

Como $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ e $\hat{u} \in S^A(\mathbb{R}^n)$, (3.3), a última integral é limitada; digamos que, em norma, é menor ou igual que $c_2 \in \mathbb{R}^+$. Veremos na observação (3.14) que c_2 depende de a e de u , mas não depende de x . Assim, temos $\|a(x, D)(u)\|_{L^2}^2 \leq c_2^2 \int |i+x|^{-2|\alpha|} dx$ e portanto $a(x, D)(u) \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$. ■

Corolário 3.13. Pela Proposição (3.9) $a(x, D)(u) \in \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$.

Observação 3.14. Sobre a constante c_2 da proposição (3.12).

$$\left\| \int e^{ix\eta} [(i-D_\eta)^\alpha a(x, \eta) \hat{u}(\eta)] d\eta \right\| \leq \int \|(i-D_\eta)^\alpha a(x, \eta) \hat{u}(\eta)\| d\eta$$

e temos que $(i-D_\eta)^\alpha a(x, \eta) \hat{u}(\eta)$ é soma de termos do tipo $D_\eta^{\alpha_1} a(x, \eta) D_\eta^{\alpha_2} \hat{u}(\eta)$ (multiplicados por uma potência de i) e vale

$$\|D_\eta^{\alpha_1} a(x, \eta) D_\eta^{\alpha_2} \hat{u}(\eta)\| \leq \pi(a) \|D_\eta^{\alpha_2} \hat{u}(\eta)\|,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \leq \alpha$. Assim, $\left\| \int e^{ix\eta} [(i-D_\eta)^\alpha a(x, \eta) \hat{u}(\eta)] d\eta \right\| \leq M \pi(a)$, onde $M \in \mathbb{R}^+$ é uma constante (que depende de n e de u) que tem a ver com a soma citada acima (número de termos e módulo das constantes) e com a soma das integrais do tipo $\int \|D_\eta^{\alpha_2} \hat{u}(\eta)\| d\eta$. Logo, a constante c_2 mencionada acima é $M \pi(a)$, onde M não depende de a nem de x .

A seguinte proposição foi baseada no lema 3.13 de [11].

Proposição 3.15. Dados a e a_ε como no lema (3.7) e $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$, vale que

$$\langle v, a_\varepsilon(x, D)u \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle v, a(x, D)u \rangle \text{ em } A.$$

Demonstração. Sejam $b_\varepsilon = a_\varepsilon - a$ ($b_\varepsilon \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$) e $B_\varepsilon = b_\varepsilon(x, D)$. Provemos que $\langle v, B_\varepsilon u \rangle \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. $B_\varepsilon u(x) = \int e^{ix\eta} b_\varepsilon(x, \eta) \hat{u}(\eta) d\eta$, e temos que $\|e^{ix\eta} b_\varepsilon(x, \eta) \hat{u}(\eta)\| \leq \pi(b_\varepsilon) \|\hat{u}(\eta)\|$.

Observemos que, pelo lema (3.7), existe $c_1 \in \mathbb{R}^+$, independente de b_ε , tal que $\pi(b_\varepsilon) = \pi(a_\varepsilon - a) \leq \pi(a_\varepsilon) + \pi(a) \leq (c_1 + 1)\pi(a)$. Portanto, $\|e^{ix\eta} b_\varepsilon(x, \eta) \hat{u}(\eta)\| \leq (c_1 + 1)\pi(a) \|\hat{u}(\eta)\|$.

Como $\|e^{ix\eta} b_\varepsilon(x, \eta) \hat{u}(\eta)\| \rightarrow 0$ e $\int \|\hat{u}(\eta)\| d\eta < \infty$, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\|B_\varepsilon u(x)\| \rightarrow 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, como visto na proposição (3.12) e na observação (3.14), existe uma constante $M \in \mathbb{R}^+$, independente de ε , tal que

$$\int \|B_\varepsilon u(x)\|^2 dx \leq M^2 \pi(b_\varepsilon)^2 \int |i + x|^{-2|\alpha|} dx \leq M^2 (c_1 + 1)^2 \pi(a)^2 \int |i + x|^{-2|\alpha|} dx < \infty.$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\|B_\varepsilon u\|_{L_2} \rightarrow 0$. Isto implica que $\|B_\varepsilon u\|_2 \rightarrow 0$ por (3.8). Finalmente, por Cauchy-Schwarz, como $\|\langle v, B_\varepsilon u \rangle\| \leq \|v\|_2 \|B_\varepsilon u\|_2$, temos que $\langle v, a_\varepsilon(x, D)u \rangle \rightarrow \langle v, a(x, D)u \rangle$ em A . ■

Nota 3.16. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, pelo visto na proposição (3.12), $a(x, D)(u) \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$, para $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Assim, pela nota (3.8), $\langle v, a(x, D)u \rangle$ está bem definido para $v \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.17. Dada $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$ seja $f(x, \xi) = \int e^{-iy\xi} (i + x - y)^{-\alpha} u(y) dy$. Então, $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}, A)$.

Demonstração. Como para qualquer $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{(1 - \Delta_y)^N e^{-iy\xi}}{(1 + |\xi|^2)^N} = e^{-iy\xi},$$

temos

$$f(x, \xi) = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^N} \int [(1 - \Delta_y)^N e^{-iy\xi}] (i + x - y)^{-\alpha} u(y) dy.$$

Queremos provar que a integral acima é combinação linear de termos do tipo

$$\int e^{-iy\xi} \partial_y^\beta u(y) (i+x-y)^{-\gamma} dy, \quad \beta \geq 0 \text{ e } \gamma \geq \alpha.$$

Para isto, calculemos, para $j = 1, \dots, n$, $M, P \leq N$:

$$\int \partial_{y_j} [(1 - \Delta_y)^M e^{-iy\xi}] [(1 - \Delta_y)^P u(y) (i+x-y)^{-\alpha}] dy = (*).$$

Para (x, ξ) fixo, o integrando acima é uma função de $L^1(\mathbb{R}^n, A)$, pois $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Sejam $g(y) = (1 - \Delta_y)^M e^{-iy\xi}$ e $h(y) = (1 - \Delta_y)^P u(y) (i+x-y)^{-\alpha}$. Pelo corolário A.16, temos que

$$\int [\partial_{y_1} g(y)](y) dy = - \int g(y) (\partial_{y_1} h(y)) dy.$$

Pelo Teorema de Fubini (A.13), temos, tomando $j = 1$ sem perda de generalidade:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{y_1} g(y) h(y) dy_1 \right) dy_2 \cdots dy_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\lim_{R \rightarrow +\infty} g(R, y_2, \dots, y_n) h(R, y_2, \dots, y_n) - \right. \\ &\quad \left. \lim_{R \rightarrow -\infty} g(R, y_2, \dots, y_n) h(R, y_2, \dots, y_n) \right] dy_2, \dots, dy_n, \end{aligned}$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, A.14.

Cada um dos limites acima é igual a zero. Portanto,

$$\int [\partial_{y_1} g(y)] h(y) dy = - \int g(y) [\partial_{y_1} h(y)] dy,$$

isto é, podemos fazer a integração por partes. Deste modo, temos que $f(x, \xi)$ é combinação linear de termos do tipo

$$\frac{1}{(1 + |\xi|^2)^N} \int e^{-iy\xi} \partial_y^\beta u(y) (i+x-y)^{-\gamma} dy, \quad \beta \geq 0, \gamma \geq \alpha,$$

onde a integral é finita pois $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, pela desigualdade de Petree ([15, (3.6)]), temos que

$$|(i+x-y)^{-\gamma}| \leq 4^n \frac{\sqrt{1+y_1^2} \cdots \sqrt{1+y_n^2}}{\sqrt{1+x_1^2} \cdots \sqrt{1+x_n^2}}.$$

E, além disso,

$$\partial_{y_1}(i+x-y)^{-\gamma} = -\gamma_1(i+x_1-y_1)^{-\gamma_1-1}(i+x_2-y_2)^{-\gamma_2} \cdots (i+x_n-y_n)^{-\gamma_n}.$$

Deste modo, $\|f(x, \xi)\|$ é menor ou igual que uma combinação linear de termos do tipo

$$\frac{4^n}{(1+|\xi|^2)^N \sqrt{1+x_1^2} \cdots \sqrt{1+x_n^2}} \int \|\partial_y^\beta u(y)\| \sqrt{1+y_1^2} \cdots \sqrt{1+y_n^2} dy, \quad \beta \geq 0,$$

que pertence a $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ para $N \geq \frac{n}{2}$. Então $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}, A)$. ■

Lema 3.18. Dada $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, seja $f(x, \xi) = \int e^{-iy\xi}(i+x-y)^{-\alpha} u(y) dy$. Então existe $c_3 \in \mathbb{R}^+$, independente de f e de u , tal que $\|f\|_2 \leq c_3 \|u\|_2$.

Demonstração. Sejam $h(z) = (i-z)^{-\alpha}$ e $h_z(y) = h(y-z)$; assim, $f(x, \xi) = \int e^{-iy\xi} h_x(y) u(y) dy = \widehat{h_x u}(\xi)$. (Notemos que $h_x u \in S^A(\mathbb{R}^n)$.) Como a transformada de Fourier é um operador "unitário" em $S^A(\mathbb{R}^n)$ (B.3), temos que, dados $g, p \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $\langle \hat{p}, \hat{g} \rangle = \langle p, g \rangle$.

Vimos no lema (3.17) que $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}, A)$, logo, pelo Teorema de Fubini, (A.13), temos

$$\begin{aligned} \int f(x, \xi)^* f(x, \xi) dx d\xi &= \int [\widehat{h_x u}(\xi)]^* \widehat{h_x u}(\xi) d\xi dx = \int \langle \widehat{h_x u}, \widehat{h_x u} \rangle dx = \\ &= \int \langle h_x u, h_x u \rangle dx = \int u(\xi)^* \overline{h_x(\xi)} h_x(\xi) u(\xi) d\xi dx = \int u(\xi)^* \int \overline{h_x(\xi)} h_x(\xi) dx u(\xi) d\xi = \\ &= \int u(\xi)^* \int \overline{h(\xi-x)} h(\xi-x) dx u(\xi) d\xi = \int \overline{h(x)} h(x) dx \int u(\xi)^* u(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Logo, se $c_3 = \|h\|_{L_2}$, (3.9), temos $\|f\|_2 \leq c_3 \|u\|_2$. ■

O próximo teorema foi enunciado e demonstrado baseando-nos no teorema 3.14 de [11].

Teorema 3.19. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, então a induz um operador contínuo em $S^A(\mathbb{R}^n)$ como pré-módulo de Hilbert. Além disso, existe uma constante $k \in \mathbb{R}^+$, independente de a , tal que $\|a(x, D)\| \leq k\pi(a)$.

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que a tem suporte compacto. Seja $T = a(x, D)$. Calculemos, para $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $\langle \hat{v}, \widehat{Tu} \rangle = \langle v, Tu \rangle$.

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int e^{i\xi(x-y)} a(x, \xi) u(y) d\eta d\xi \\ \widehat{Tu}(\eta) &= \int e^{-ix\eta} e^{i\xi(x-y)} a(x, \xi) u(y) d\eta d\xi dx \\ \langle \hat{v}, \widehat{Tu} \rangle &= \int e^{-ix\eta} e^{i\xi(x-y)} \hat{v}(\eta)^* a(x, \xi) u(y) d\eta d\xi dx d\eta = \\ &= \int e^{-ix\eta} (i+x-y)^{-\alpha} \hat{v}(\eta)^* [(i+x-y)^\alpha e^{i\xi(x-y)}] a(x, \xi) u(y) d\eta d\xi dx dy d\eta. \end{aligned}$$

Como a tem suporte compacto e $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$, vale Fubini (A.13), o que justifica as igualdades acima; além disso, podemos aplicar a integração por partes e, pela observação (3.11), temos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}, \widehat{Tu} \rangle &= \int e^{-ix\eta} (i+x-y)^{-\alpha} \hat{v}(\eta)^* [(i+D_\xi)^\alpha e^{i\xi(x-y)}] a(x, \xi) u(y) d\eta d\xi dx dy d\eta = \\ &= \int e^{-ix\eta} (i+x-y)^{-\alpha} v(\eta)^* e^{i\xi x} e^{-i\xi y} [(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)] u(y) d\eta d\xi dx dy d\eta = \\ &= \int e^{-iy\xi} (i+x-y)^{-\alpha} (i+\xi-\eta)^{-\alpha} [(i+\xi-\eta)^\alpha e^{ix(\xi-\eta)}] \hat{v}(\eta)^* [(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)] u(y) d\eta d\xi dx dy d\eta = \\ &= \int e^{-iy\xi} (i+x-y)^{-\alpha} (i+\xi-\eta)^{-\alpha} [(i+D_x)^\alpha e^{ix(\xi-\eta)}] \hat{v}(\eta)^* [(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)] u(y) d\eta d\xi dx dy d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int e^{-iy\xi}(i+x-y)^{-\alpha}e^{-ix\eta}(i+\xi-\eta)^{-\alpha}e^{ix\xi}\hat{v}(\eta)^*[(i-D_x)^\alpha(i-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)]u(y)dxd\xi dyd\eta = \\
&= \int e^{ix\xi}(e^{-ix\eta}h_\xi(\eta)\hat{v}(\eta)^*[(i-D_x)^\alpha(i-D_\xi)^\alpha a(x,\xi)](e^{-iy\xi}h_x(y)u(y)))dxd\xi dyd\eta
\end{aligned}$$

usando a notação do lema (3.18) .

Sejam

$$\begin{aligned}
f(x, \xi) &= \int e^{-ix\eta}h_\xi(\eta)\hat{v}(\eta)^*d\eta \\
g(x, \xi) &= \int e^{-iy\xi}h_x(y)u(y)d\eta.
\end{aligned}$$

Então:

$$\langle \hat{v}, \widehat{Tu} \rangle = \int e^{ix\xi}f(x, \xi)[(i-D_x)^\alpha(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)]g(x, \xi)dxd\xi.$$

Abusando da notação, colocando as variáveis das funções, temos:

$$\| \langle \hat{v}, \widehat{Tu} \rangle \| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \| \langle e^{-ix\xi}f^*(x, \xi), [(i-D_x)^\alpha(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)]g(x, \xi) \rangle \|.$$

Seja $c(x, \xi) = (i-D_x)^\alpha(i-D_\xi)^\alpha a(x, \xi)$. Como $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, temos que $\|c\|_\infty = \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|c(x, \xi)\| < \infty$. Além disso, pela definição de c , existe uma constante $l \in \mathbb{R}^+$, que não depende de a , tal que $\|c\|_\infty \leq l\pi(a)$. E temos, pela demonstração do teorema 2.2.5 de [5],

$$\begin{aligned}
\int g(x, \xi)^*c(x, \xi)^*c(x, \xi)g(x, \xi)dxd\xi &\leq \int \|c(x, \xi)\|^2g(x, \xi)^*g(x, \xi)dxd\xi \leq \\
&\leq \|c\|_\infty^2 \int g(x, \xi)^*g(x, \xi)dxd\xi.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema (3.18) , $\|cg\|_2 \leq l\pi(a)c_3\|u\|_2$.

Como $f^*(x, \xi) = \int e^{ix\eta} \overline{h_\xi(\eta)} \hat{v}(\eta) d\eta$, de um modo análogo ao feito na demonstração do lema (3.18) , temos $\|f^*\|_2 \leq c_3 \|\hat{v}\|_2 = c_3 \|v\|_2$ (ver observação (3.3)). Logo, por Cauchy-Schwarz,

$$\| \langle \hat{v}, \widehat{T}u \rangle \| \leq \frac{lc_3^2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \pi(a) \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Tomando $k_1 = \frac{lc_3^2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, temos que $\| \langle v, a(x, D)u \rangle \| \leq k_1 \pi(a) \|u\|_2 \|v\|_2$, onde k_1 não depende de a , e então $a(x, D)$ é contínuo em $S^A(\mathbb{R}^n)$.

Para o caso geral, consideremos a_ε como na proposição (3.15) . Então, pelo feito acima, temos:

$$\| \langle v, a(x, D)u \rangle \| \xleftarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \| \langle v, a_\varepsilon(x, D)u \rangle \| \leq k_1 \pi(a_\varepsilon) \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Portanto, pelo lema (3.7) , $\| \langle v, a(x, D)u \rangle \| \leq k_1 c_1 \pi(a) \|u\|_2 \|v\|_2$. E, assim, existe $k \in \mathbb{R}^+, k = k_1 c_1$, independente de a , tal que $\| \langle v, a(x, D)u \rangle \| \leq k \pi(a) \|u\|_2 \|v\|_2$.

Tomemos $v = a(x, D)(u)$. Como $v \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$, proposição (3.12) , pela nota (3.8) , a seguinte desigualdade faz sentido:

$$\| \langle a(x, D)(u), a(x, D)(u) \rangle \| \leq k \pi(a) \|u\|_2 \|a(x, D)(u)\|_2, \quad \forall u \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, $\|a(x, D)(u)\|_2 \leq k \pi(a) \|u\|_2$, e temos $\|a(x, D)\| \leq k \pi(a)$. ■

Corolário 3.20. Nas condições do teorema, vemos que $a(x, D)$ se estende ao módulo de Hilbert $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, continuamente.

Capítulo 4

No capítulo 1, vimos a demonstração da conjectura proposta por Rieffel no final do capítulo 4 de [1] para o caso da C^* -álgebra dos números complexos. Foi necessária a caracterização feita por Cordes ([2, capítulo 8]) dos operadores suaves pela ação do grupo de Heisenberg, os operadores pseudo-diferenciais. Neste capítulo, veremos que uma generalização da caracterização de Cordes para uma C^* -álgebra, A , qualquer, implicaria que a conjectura proposta por Rieffel é verdadeira.

Suponhamos então que vale a seguinte generalização da caracterização de Cordes:

4.1. Seja $\mathcal{HS}$ o conjunto dos operadores Heisenberg-suaves em $\mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$. Então a aplicação $O : CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A) \rightarrow \mathcal{HS}$, dada por $O(a) = a(x, D)$ é uma bijeção, onde $a(x, D)$ é o operador definido em (I) do capítulo 3.

Vejamos que O (acima) está bem definida.

Lema 4.2. Dado $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, de suporte compacto, o operador $O(a)$ possui adjunto; ou seja, existe um operador T em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$, contínuo, tal que

$$\langle O(a)u, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \text{ se } u, v \in S^A(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle O(a)u, v \rangle &= \int \left[\int e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi \right]^* v(x) dx = \\ &= \int \int e^{i(y-x)\xi} u(y)^* a(x, \xi)^* dy d\xi v(x) dx = \int u(y)^* \left[\int e^{i(y-x)\xi} a(x, \xi)^* v(x) dx d\xi \right] dy, \end{aligned}$$

para a última igualdade aplicamos o Teorema de Fubini, A.13, pois a tem suporte compacto e $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Como a tem suporte compacto, $a \in S^A(\mathbb{R}^{2n})$. Seja F_2 a transformada de Fourier, na segunda variável, definido em $S^A(\mathbb{R}^{2n})$. Com esta notação, seja

$$c(y, z) = \int e^{iz\xi} a(y - z, \xi)^* d\xi = F_2^{-1} a^*(y - z, z) \quad (1).$$

e temos $c \in S^A(\mathbb{R}^{2n})$.

Seja $p(y, z) = F_2 c(y, z)$, ($p \in S^A(\mathbb{R}^{2n})$, ver início do Apêndice B), então

$$c(y, z) = F_2^{-1} p(y, z) \quad (2)$$

Por (1), temos $c(y, y-x) = \int e^{i(y-x)\xi} a(x, \xi)^* d\xi$ e, por (2), $c(y, y-x) = \int e^{i(y-x)\xi} p(y, \xi) d\xi$.

Portanto, $\int e^{i(y-x)\xi} a(x, \xi)^* v(x) d\xi dx = \int e^{i(y-x)\xi} p(y, \xi) v(x) d\xi dx$.

Assim,

$$\int u(y)^* \left[\int e^{i(y-x)\xi} a(x, \xi)^* v(x) d\xi dx \right] dy = \int u(y)^* \left[\int e^{i(y-x)\xi} p(y, \xi) v(x) d\xi dx \right] dy$$

ou seja, $\langle O(a)u, v \rangle = \langle u, O(p)v \rangle$, $\forall u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$. ■

Observação 4.3. Sobre a função p do lema 4.2,

$$\begin{aligned} p(y, \xi) &= F_2 c(y, \xi) = \int e^{-i\xi z} c(y, z) dz = \int e^{-i\xi z} \int e^{iz\zeta} a(y - z, \zeta)^* d\zeta dz = \\ &= \int e^{-iz(\xi - \zeta)} a(y - z, \zeta)^* d\zeta dz = \int e^{-iz\eta} a(y - z, \xi - \eta)^* d\eta dz. \end{aligned}$$

Observação 4.4. Notemos que, como visto no capítulo 1, $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ é um espaço de Fréchet, com as semi-normas

$$\|F\|_j = \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha F\|_\infty,$$

onde $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, $j \in \mathbb{N}$, α é um multi-índice e $\|\partial^\alpha F\|_\infty = \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|\partial^\alpha F(x, \xi)\|$.

Temos também que $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A))$ é um espaço de Fréchet com as semi-normas

$$\|G\|_{jk} = \sup_{i \leq j} \sup_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta G\|_i,$$

$G \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A))$, onde

$$\|G\|_i = \sup_{(z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}} \|G(z, \eta)\|_i;$$

lembramos que, para cada $(z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $G(z, \eta)$ é uma função em $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$.

Aplicaremos no próximo lema os resultados de [1] sobre integrais oscilatórias, para funções tomando valores no espaço de Fréchet $CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$.

Lema 4.5. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, se $p(y, \xi) = \int e^{-iz\eta} a(y - z, \xi - \eta)^* d\eta d\eta$, então $p \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$.

Demonstração. Seja $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ dada por $G(z, \eta)(y, \xi) = a(y - z, \xi - \eta)$. Provemos que $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A))$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|(z, \eta) - (z', \eta')\| < \delta$, ($\Leftrightarrow \|(y - z, \xi - \eta) - (y - z', \xi - \eta')\| < \delta$, $\forall (y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$), então $\|(\partial^\alpha a)(y - z, \xi - \eta) - (\partial^\alpha a)(y - z', \xi - \eta')\| < \varepsilon$, pois $\partial^\alpha a$ é uniformemente contínua.

Como, para cada $(z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, $G(z, \eta)$ é uma função de variável $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, escrevemos $\partial^\alpha(G(z, \eta))$ para denotar a derivada de multi-índice α da função $G(z, \eta) \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, para (z, η) fixado. E, como $\partial^\alpha(G(z, \eta))(y, \xi) = (\partial^\alpha a)(y - z, \xi - \eta)$, temos $\|\partial^\alpha(G(z, \eta)) - \partial^\alpha(G(z', \eta'))\|_\infty < \varepsilon$. Logo, dados $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|(z, \eta) - (z', \eta')\| < \delta$, $\|G(z, \eta) - G(z', \eta')\|_j < \varepsilon$, e G é contínua.

Além disso, é fácil ver que $\forall j \in \mathbb{N}, \forall (z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}, \|G(z, \eta)\|_j \leq \|a\|_j$, i.e. G é limitada.

Vejamos agora que G é derivável. Para isto, provemos que G possui derivadas parciais de primeira ordem.

Se $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, provemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(z + te_j, \eta) - G(z, \eta)}{t} = H(z, \eta), \quad (z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},$$

onde

$$H(z, \eta)(y, \xi) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{a(y - z - ke_j, \xi - \eta) - a(y - z, \xi - \eta)}{k}.$$

Notemos que $H(z, \eta) \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$.

Consideraremos $t \geq 0$, o caso $t \leq 0$ é análogo.

Dado $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo A.14, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{G(z + te_j, \eta)(y, \xi) - G(z, \eta)(y, \xi)}{t} - H(z, \eta)(y, \xi) = \\ &= \frac{a(y - z - te_j, \xi - \eta) - a(y - z, \xi - \eta)}{t} + \partial_j a(y - z, \xi - \eta) = \\ &= \int_{[0, t]} \frac{-\partial_j a(y - z - he_j, \xi - \eta)}{t} + \partial_j a(y - z, \xi - \eta) dh = \\ &= - \int_{[0, t]} \frac{\partial_j a(y - z - he_j, \xi - \eta) - \partial_j a(y - z, \xi - \eta)}{t} dh = \\ &= \int_{[0, t]} \int_{[0, h]} \frac{\partial_j^2 a(y - z - se_j, \xi - \eta)}{t} ds dh, \quad h \in [0, t]. \end{aligned}$$

Aqui estamos usando a notação $\partial_j a(y, \zeta) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{a(y + ke_j, \zeta) - a(y, \zeta)}{k}$.

Logo, para todo $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{G(z + te_j, \eta)(y, \xi) - G(z, \eta)(y, \xi)}{t} - H(z, \eta)(y, \xi) \right\| \leq \\ & \leq \int_{[0, t]} \int_{[0, h]} \frac{\|a\|_2}{t} ds dh \leq t \|a\|_2, \end{aligned}$$

o que implica que, para qualquer $(z, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\sup_{(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \left\| \frac{G(z + te_j, \eta)(y, \xi) - G(z, \eta)(y, \xi)}{t} - H(z, \eta)(y, \xi) \right\| \leq t \|a\|_2.$$

Aplicando o mesmo resultado para $\partial^\alpha(G(z, \eta))$, $|\alpha| \leq j$, a derivada de ordem α da função $G(z, \eta)$, temos:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{G(z + te_j, \eta) - G(z, \eta)}{t} - H(z, \eta) \right\|_j \leq \\ & \leq \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{|\alpha| \leq j} \left\| \frac{\partial^\alpha(G(z + te_j, \eta)) - \partial^\alpha(G(z, \eta))}{t} - \partial^\alpha(H(z, \eta)) \right\|_\infty \leq \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha a\|_2 \cdot t = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Do mesmo modo, vemos que existem todas as derivadas parciais de G e portanto G é C^∞ . Como antes, vemos que estas derivadas são limitadas e, portanto, $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A))$.

Assim, pela definição de integral oscilatória ([1, (1.3)]),

$$\int e^{iz\eta} G(z, \eta) d\eta \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$$

e, portanto, $\left(\int e^{iz\eta} G(z, \eta) d\eta \right)^* \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, ou seja

$$p(y, \xi) = \int e^{-iz\eta} a(y - z, \xi - \eta)^* d\eta \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A). \quad \blacksquare$$

Proposição 4.6. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, existe $p \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ tal que, se $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $\langle O(a)u, v \rangle = \langle u, O(p)v \rangle$.

Demonstração. Seja $p(y, \xi) = \int e^{-iz\eta} a(y - z, \xi - \eta)^* d\eta$. Vimos no lema 4.5 que $p \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$. A integral acima é uma integral oscilatória.

Sejam $\psi_m, \psi'_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, como no capítulo 1 e sejam $a_{m,k}(x, w) = \psi_m(x) \psi'_k(w) a(x, w)$ e $p_{m,k}(y, \xi) = \int e^{-iz\eta} a_{m,k}(y - z, \xi - \eta)^* d\eta$. Segue da proposição 1.6 de [1] que, para cada $(y, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lim_{m,k} p_{m,k}(y, \xi) = p(y, \xi)$.

Dadas $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \langle u, O(p)v \rangle &= \int u(y)^* \left[\int e^{iy\xi} p(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right] dy = \\ &= \int u(y)^* \left[\int e^{iy\xi} \lim_{m,k} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right] dy \end{aligned}$$

É fácil ver que decorre da desigualdade básica 1.4 de [1] (e da definição de ψ_m e ψ'_k) que existem $j \in \mathbb{N}$ e uma constante $M \in \mathbb{R}^+$, que não depende de a nem de ψ_m ou ψ'_k (é possível escolher ψ_m tais que $\sup_{\alpha, m} |\psi_m^{(\alpha)}| < \infty$, e analogamente para ψ'_k), tais que $\|p_{mk}(y, \xi)\| \leq M \|a\|_{2j}$.

Assim, $\|u(y)^* p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi)\| \leq M \|a\|_{2j} \|u(y)\| \|\hat{v}(\xi)\| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

Pelo Teorema de Fubini (A.15) temos:

$$\int u(y)^* \left[\int e^{iy\xi} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right] dy = \int \int u(y)^* e^{iy\xi} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi dy.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (A.7), temos:

$$\begin{aligned} \lim_{m,k} \int \int u(y)^* e^{iy\xi} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi dy &= \int \int u(y)^* e^{iy\xi} \lim_{m,k} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi dy = \\ &= \int u(y)^* \left[\int e^{iy\xi} \lim_{m,k} p_{m,k}(y, \xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right] dy \end{aligned}$$

(novamente pelo Teorema de Fubini).

$$\text{Portanto, } \langle u, O(p)v \rangle = \lim_{m,k} \langle u, O(p_{m,k})v \rangle.$$

Pelo lema 4.2 e pela observação 4.3, $\langle O(a_{m,k})u, v \rangle = \langle u, O(p_{m,k})v \rangle$. Além disso, como $a_{m,k}(x, \xi) = \psi_m(x) \psi'_k(\xi) a(x, \xi)$, temos $\|a_{m,k}(x, \xi)\| \leq \|a(x, \xi)\|$, $\forall m, \forall k$. Portanto, $\|\hat{u}(\xi)^* a(x, \xi)^* v(x)\| \leq \|a\|_\infty \|\hat{u}(\xi)\| \|v(x)\| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

Aplicando Fubini e o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned} \lim_{m,k} \langle O(a_{m,k})u, v \rangle &= \lim_{m,k} \int \left[\int e^{-ix\xi} \hat{u}(\xi)^* a_{m,k}(x, \xi)^* d\xi \right] v(x) dx = \\ &= \int \left[\int e^{-ix\xi} \hat{u}(\xi)^* a(x, \xi)^* d\xi \right] v(x) dx = \langle O(a)u, v \rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, $\langle O(a)u, v \rangle = \langle u, O(p)v \rangle$. ■

Proposição 4.7. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, $O(a)$ é Heisenberg-suave.

Demonstração.

Seja $T = a(x, D)$ e $T_{z,\zeta} = E_{z,\zeta}^{-1} T E_{z,\zeta}$ (como no capítulo 1). Vemos que o símbolo de $T_{z,\zeta}$ é $a_{z,\zeta}$, com $a_{z,\zeta}(x, \xi) = a(x + z, \xi + \zeta)$, (da mesma maneira como no caso $A = \mathbb{C}$ [2, 2.20]). Queremos provar que a aplicação $(z, \zeta) \mapsto T_{z,\zeta}$ é C^∞ .

Vejamos que $(z, \zeta) \mapsto T_{z,\zeta}$ é contínua em (z_0, ζ_0) , i.e., que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, se $\|(z, \zeta) - (z_0, \zeta_0)\| < \delta$, então $\|T_{z,\zeta} - T_{z_0,\zeta_0}\| < \varepsilon$.

Vimos no capítulo 3 (3.19) que existe uma constante $k \in \mathbb{R}^+$, independente de a , tal que $\|O(a)\| \leq k\pi(a)$, onde $\pi(a) = \sup\{\|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a\|_\infty, \beta, \gamma \leq (1, \dots, 1)\}$.

Como $T_{z,\zeta} - T_{z_0,\zeta_0}$ tem símbolo $a_{z,\zeta} - a_{z_0,\zeta_0}$, temos que $\|T_{z,\zeta} - T_{z_0,\zeta_0}\| \leq k\pi(a_{z,\zeta} - a_{z_0,\zeta_0})$.

Dados $\beta, \gamma \leq (1, \dots, 1)$,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma (a_{z,\zeta} - a_{z_0,\zeta_0})\|_\infty &= \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a_{z,\zeta}(x, \xi) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a_{z_0,\zeta_0}(x, \xi)\| = \\ &= \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|(\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z, \xi + \zeta) - (\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z_0, \xi + \zeta_0)\|. \end{aligned}$$

Como $\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a$ é uniformemente contínua, $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0$ tal que, se

$$\|(y, \eta) - (y', \eta')\| < \sigma \Rightarrow \|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(y, \eta) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(y', \eta')\| < \varepsilon$$

se

$$\begin{aligned} \|(z, \zeta) - (z_0, \zeta_0)\| < \sigma &\Rightarrow \|(z + x, \zeta + \xi) - (z_0 + x, \zeta_0 + \xi)\| < \sigma, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|(\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z, \xi + \zeta) - (\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z_0, \xi + \zeta_0)\| < \varepsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma (a_{z,\zeta} - a_{z_0,\zeta_0})\|_\infty < \varepsilon$, se $\|(z, \zeta) - (z_0, \zeta_0)\| < \sigma$.

Notemos que σ depende de β e γ . Como β, γ são finitos, tomamos $\delta > 0$ como sendo o mínimo dos σ acima e temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\|(z, \zeta) - (z_0, \zeta_0)\| < \delta \Rightarrow \pi(a_{z,\zeta} - a_{z_0,\zeta_0}) < \varepsilon$. Logo, $\|T_{z,\zeta} - T_{z_0,\zeta_0}\| < \varepsilon$ e $(z, \zeta) \mapsto T_{z,\zeta}$ é contínua em $\mathbb{R}^{2n}$.

Por outro lado, se $\{e_i\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, seja

$$\partial_i T_{z,\zeta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{z+he_i,\zeta} - T_{z,\zeta}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(a_{z+he_i,\zeta}) - O(a_{z,\zeta})}{h}.$$

Provemos que $\partial_i T_{z,\zeta} = O(\partial_i a_{z,\zeta})$, onde $\partial_i a_{z,\zeta}(x, \xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_{z,\zeta}(x + he_i, \xi) - a_{z,\zeta}(x, \xi)}{h}$ e $a_{z,\zeta}(x, \xi) = a(x + z, \xi + \zeta)$.

Temos, como antes, que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_{z+he_i,\zeta} - T_{z,\zeta}}{h} - O(\partial_i a_{z,\zeta}) \right\| &= \left\| \frac{O(a_{z+he_i,\zeta} - a_{z,\zeta} - h\partial_i a_{z,\zeta})}{h} \right\| \\ &\leq \frac{k}{h} \pi(a_{z+he_i,\zeta} - a_{z,\zeta} - h\partial_i a_{z,\zeta}). \end{aligned}$$

Dados $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $h \geq 0$ (o caso $h \leq 0$ é análogo), pelo Teorema Fundamental do Cálculo, (A.14),

$$\begin{aligned}
& a(x + he_i + z, \xi + \zeta) - a(x + z, \xi + \zeta) - h\partial_i a(x + z, \xi + \zeta) = \\
& = \int_{[0, h]} \partial_i a(x + z + te_i, \xi + \zeta) dt - h\partial_i a(x + z, \xi + \zeta) = \\
& = \int_{[0, h]} [\partial_i a(x + z + te_i, \xi + \zeta) - \partial_i a(x + z, \xi + \zeta)] dt = \\
& = \int_{[0, h]} \int_{[0, t]} \partial_i(\partial_i a)(x + z + se_i, \xi + \zeta) ds dt = \\
& = \int_{[0, h]} \int_{[0, t]} \partial_i^2 a(x + z + se_i, \xi + \zeta) ds dt.
\end{aligned}$$

A última igualdade determina o significado da notação $\partial_i^2 a$.

Logo,

$$\begin{aligned}
& \|a(x + he_i + z, \xi + \zeta) - a(x + z, \xi + \zeta) - h\partial_i a(x + z, \xi + \zeta)\| \leq \\
& \leq h^2 \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|\partial_i^2 a_{z, \zeta}(x, \xi)\|.
\end{aligned}$$

De modo análogo, dados $\beta, \gamma \leq (1, 1, \dots, 1)$, temos que

$$\begin{aligned}
& \|(\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z + he_i, \xi + \zeta) - \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(x + z, \xi + \zeta) - \\
& - h(\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a)(x + z, \xi + \zeta)\| \leq \\
& h^2 \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} \|\partial_i^2 \partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a_{z, \zeta}(x, \xi)\| \leq h^2 \pi(\partial_i^2 a_{z, \zeta}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{O(a_{z+he_i, \zeta}) - O(a_{z, \zeta})}{h} - O(\partial_i a_{z, \zeta}) \right\| \leq \lim_{h \rightarrow 0} k.h\pi(\partial_i^2 a_{z, \zeta}) = 0.$$

ou seja, $\partial_i T_{z, \zeta} = O(\partial_i a_{z, \zeta})$.

Do mesmo modo, temos que $\partial_z^\beta \partial_\zeta^\gamma T_{z, \zeta} = O(\partial_z^\beta \partial_\zeta^\gamma a_{z, \zeta})$, e temos, como antes, que $(z, \zeta) \mapsto \partial_z^\beta \partial_\zeta^\gamma T_{z, \zeta}$ é contínua, i.e., $(z, \zeta) \mapsto T_{z, \zeta}$ é C^∞ . ■

Corolário 4.8. Dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, $O(a) \in \mathcal{HS}$.

Nosso objetivo agora é provar que, se vale 4.1, dado um operador $T \in \mathcal{HS}$ tal que para toda $G \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ comuta com R_G , então existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ de modo que $T = L_F$.

Na verdade, provaremos o resultado acima com uma hipótese mais fraca, que o operador $T \in \mathcal{HS}$ comuta com R_g , para toda $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Consideraremos primeiramente o caso $n = 1$.

Lema 4.9. Dada $f \in CB^\infty(\mathbb{R}, A)$ temos que

$$\int \gamma(t)(1 - \partial_t)^2 f(t) dt = f(0),$$

onde

$$\gamma(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

.

Demonstração. Como $f \in CB^\infty(\mathbb{R}, A)$, $\gamma(t)(1 - \partial_t)^2 f(t) \in L^1(\mathbb{R}, A)$.

$$\int \gamma(t)(1 - \partial_t)^2 f(t) dt = \int_{\mathbb{R}^+} te^{-t}(f(t) - 2\partial_t f(t) + \partial_t^2 f(t)) dt.$$

Fazendo integração por partes (ver A.15), para $R \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \int_{[0,R]} te^{-t} \partial_t f(t) dt &= Re^{-R} f(R) - \int_{[0,R]} \partial_t (te^{-t}) f(t) dt. \\ \int_{[0,R]} te^{-t} \partial_t^2 f(t) dt &= Re^{-R} \partial_t f(R) - \int_{[0,R]} \partial_t (te^{-t}) \partial_t f(t) dt = \\ &= Re^{-R} \partial_t f(R) - \left[(e^{-R} - Re^{-R}) f(R) - f(0) - \int_{[0,R]} \partial_t^2 (te^{-t}) f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Assim, como $\int_{R^+} te^{-t}(1 - \partial_t)^2 f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0,R]} te^{-t}(1 - \partial_t)^2 f(t) dt$, pela observação A.6, temos:

$$\int \gamma(t)(1 - \partial_t)^2 f(t) dt = \int_{R^+} [te^{-t} + 2\partial_t (te^{-t}) + \partial_t^2 (te^{-t})] f(t) dt + f(0) = f(0). \blacksquare$$

Nota 4.10. Para o caso geral, consideramos $\bar{\gamma}(x) = \prod_{j=1}^n \gamma(x_j)$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

e temos, de modo análogo, que $\int \bar{\gamma}(x) \prod_{j=1}^n (1 - \partial_{x_j})^2 f(x) dx = f(0)$, se $f \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$.

De fato, pelo Teorema de Fubini (A.13), temos

$$\begin{aligned} & \int \bar{\gamma}(x) \prod_{j=1}^n (1 - \partial_{x_j})^2 f(x) dx = \\ &= \int \prod_{j=2}^n \gamma(x_j) \left(\int \gamma(x_1) (1 - \partial_{x_1})^2 \left[\prod_{j=2}^n (1 - \partial_{x_j})^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right] dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \int \prod_{j=3}^n \gamma(x_j) \left(\int \gamma(x_2) (1 - \partial_{x_2})^2 \left[\prod_{j=3}^n (1 - \partial_{x_j})^2 f(0, x_2, \dots, x_n) \right] dx_2 \right) dx_3 \cdots dx_n = \\ &= \cdots = f(0, \dots, 0) = f(0). \end{aligned}$$

A proposição seguinte, para o caso $A = \mathbb{C}$, foi provada por Cordes em [2, corolário 2.4].

Proposição 4.11. Dadas $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^2, A)$ e $b = (1 + \partial_y)^2 (1 + \partial_\eta)^2 a$ então temos que

$$a(x, \xi) = \int \gamma(y) \gamma(\eta) b(x - y, \xi - \eta) dy d\eta.$$

Demonstração. Notemos que

$$b(x - y, \xi - \eta) = [(1 + \partial_y)^2 (1 + \partial_\eta)^2 a](x - y, \xi - \eta) = (1 - \partial_y)^2 (1 - \partial_\eta)^2 [a(x - y, \xi - \eta)].$$

Logo,

$$\int \gamma(y) \gamma(\eta) b(x - y, \xi - \eta) dy d\eta = \int \gamma(y) \gamma(\eta) (1 - \partial_y)^2 (1 - \partial_\eta)^2 a(x - y, \xi - \eta) dy d\eta.$$

Como $\gamma(y) \gamma(\eta) (1 - \partial_y)^2 (1 - \partial_\eta)^2 a(x - y, \xi - \eta) \in L^1(\mathbb{R}^2, A)$, podemos aplicar o Teorema de Fubini e, considerando que $(1 - \partial_\eta)^2 a(x - y, \xi - \eta) \in CB^\infty(\mathbb{R}, A)$ para x, ξ, η fixados, aplicamos o lema 4.9:

$$\int \gamma(\eta) \int \gamma(y) (1 - \partial_y)^2 (1 - \partial_\eta)^2 a(x - y, \xi - \eta) dy d\eta = \int \gamma(\eta) (1 - \partial_y)^2 a(x, \xi - \eta) d\eta.$$

Novamente, para x, ξ fixos, pelo lema 4.9, $\int \gamma(\eta) (1 - \partial_\eta)^2 a(x, \xi - \eta) d\eta = a(x, \xi)$ ■

Corolário 4.12. Nas hipóteses da proposição 4.11, temos

$$a(z, \zeta) = \int \gamma(-x)\gamma(-\xi)b(x+z, \xi+\zeta)dxd\xi.$$

Nota 4.13. Para o caso geral, dada $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$, seja $b = \prod_{j=1}^n (1 + \partial_{y_j})^2 (1 + \partial_{\eta_j})^2 a$, e temos, de modo análogo, que $a(z, \zeta) = \int \bar{\gamma}(-x)\bar{\gamma}(-\xi)b(x+z, \xi+\zeta)dxd\xi$, usando a notação da nota 4.10.

Lema 4.14. Sejam F a transformada de Fourier e $E_{z,\zeta}$ definido como no capítulo 1. Então temos:

1. $FE_{z,\zeta} = (E_{-\zeta,z})^{-1}F$
2. $F(E_{z,\zeta})^{-1} = E_{-\zeta,z}F$.

Demonstração.

Dada $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} 1. \quad FE_{z,\zeta}u(x) &= \int e^{-ixy}E_{z,\zeta}u(y)d\mathbf{y} = \int e^{-ixy}e^{i\zeta y}u(y-z)d\mathbf{y} = \\ &= \int e^{-i(y+z)(x-\zeta)}u(y)d\mathbf{y} = e^{-iz(x-\zeta)}Fu(x-\zeta) = T_\zeta M_{-z}Fu(x) = (E_{-\zeta,z})^{-1}Fu(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad FE_{z,\zeta}^{-1}u(x) &= \int e^{-ixy}T_{-z}M_{-\zeta}u(y)d\mathbf{y} = \int e^{-ixy}e^{-i\zeta(y+z)}u(y+z)d\mathbf{y} = \\ &= \int e^{-ix(y-z)}e^{-i\zeta y}u(y)d\mathbf{y} = e^{ixz} \int e^{-iy(x+\zeta)}u(y)d\mathbf{y} = e^{ixz}Fu(x+\zeta) = M_zT_{-\zeta}Fu(x) = \\ &= E_{-\zeta,z}Fu(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Observação 4.15. Lembremos que, como vimos na demonstração da proposição 2.5, dadas $g, u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, temos que $R_g u(x) = \int e^{ix\xi}Fu(\xi)g(x+J\xi)d\xi$

Lema 4.16. Dada $g \in S(\mathbb{R}^n)$, vale que

1. $E_{z,\zeta}^{-1}R_g = R_{T_{-z-J\zeta}g}E_{z,\zeta}^{-1}$

$$2. E_{z,\zeta} R_g = R_{T_{z+J\zeta}g} E_{z,\zeta}.$$

Demonstração.

1. Dada $u \in S(\mathbb{R}^n)$, pelo lema 4.14,

$$E_{z,\zeta}^{-1} R_g u(x) = e^{-i\zeta(x+z)} R_g u(x+z) = e^{-i\zeta(x+z)} \int e^{i(x+z)\xi} F u(\xi) g(x+z+J\xi) d\xi.$$

$$\begin{aligned} R_{T_{-z-J\zeta}g} E_{z,\zeta}^{-1} u(x) &= \int e^{ix\xi} F(E_{z,\zeta}^{-1} u)(\xi) T_{-z-J\zeta} g(x+J\xi) d\xi = \\ &= \int e^{ix\xi} E_{-\zeta,z} F u(\xi) g(x+z+J(\xi+\zeta)) d\xi = \int e^{ix\xi} e^{iz\xi} F u(\xi+\zeta) g(x+z+J(\xi+\zeta)) d\xi = \\ &= \int e^{i(x+z)(\xi-\zeta)} F u(\xi) g(x+z+J\xi) d\xi = E_{z,\zeta}^{-1} R_g u(x). \end{aligned}$$

$$2. E_{z,\zeta} R_g u(x) = e^{i\zeta x} R_g u(x-z) = e^{i\zeta x} \int e^{i(x-z)\xi} F u(\xi) g(x-z+J\xi) d\xi.$$

$$\begin{aligned} R_{T_{z+J\zeta}g} E_{z,\zeta} u(x) &= \int e^{ix\xi} F(E_{z,\zeta} u)(\xi) T_{z+J\zeta} g(x+J\xi) d\xi = \\ &= \int e^{ix\xi} (E_{-\zeta,z})^{-1} F u(\xi) g(x-z+J(\xi-\zeta)) d\xi = \int e^{ix\xi} e^{-iz(\xi-\zeta)} F u(\xi-\zeta) g(x-z+J(\xi-\zeta)) d\xi = \\ &= \int e^{ix(\xi+\zeta)} e^{-iz\xi} F u(\xi) g(x-z+J\xi) d\xi = E_{z,\zeta} R_g u(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 4.17. Dado $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$, se $[T, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então $[T_{z,\zeta}, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo lema 4.16, temos

$$T_{z,\zeta} R_g = E_{z,\zeta}^{-1} T E_{z,\zeta} R_g = E_{z,\zeta}^{-1} T R_{T_{z+J\zeta}g} E_{z,\zeta} = E_{z,\zeta}^{-1} R_{T_{z+J\zeta}g} T E_{z,\zeta} = R_g E_{z,\zeta}^{-1} T E_{z,\zeta} = R_g T_{z,\zeta}. \blacksquare$$

Proposição 4.18. Dadas $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ e $b = \prod_{j=1}^n (1+\partial_{x_j})^2 (1+\partial_{\xi_j})^2 a$, se $O(a) \in \mathcal{HS}$ e $[O(a), R_g] = 0$, para todo $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então $O(b) \in \mathcal{HS}$ e $[O(b), R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Notemos que, como visto na demonstração de 4.7, se $T = O(a)$ e $B = O(b)$, $B_{z,\zeta} = \prod_{j=1}^n (1 + \partial_{z_j})^2 (1 + \partial_{\zeta_j})^2 T_{z,\zeta}$.

Logo, se $(z, \zeta) \mapsto T_{z,\zeta}$ é C^∞ , $(z, \zeta) \mapsto B_{z,\zeta}$ é C^∞ .

Vimos na proposição 4.17 que se $[T, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então $[T_{z,\zeta}, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Assim, se $\{e_j\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (\partial_{z_j} T_{z,\zeta}) R_g &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{z+he_j, \zeta} - T_{z,\zeta}}{h} R_g = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{z+he_j, \zeta} R_g - T_{z,\zeta} R_g}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} R_g \frac{T_{z+he_j, \zeta} - T_{z,\zeta}}{h} = R_g (\partial_{z_j} T_{z,\zeta}). \end{aligned}$$

De modo análogo, provamos que $[R_g, B] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 4.19. Dado $T \in \mathcal{B}^*(\overline{S^A(\mathbb{R}^n)})$, Heisenberg-suave, tal que para toda $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, $[T, R_g] = 0$. Supondo que vale 4.1, então existe $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ de modo que $T = L_F$.

Demonstração. Por 4.1 temos que existe $a \in CB^\infty(\mathbb{R}^{2n}, A)$ de modo que $T = O(a)$. Sejam $b = \prod_{j=1}^n (1 + \partial_{x_j})^2 (1 + \partial_{\xi_j})^2 a$ e $B = O(b)$. Pela proposição 4.18, temos que $[B, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$. Logo, $[B_{z,\zeta}, R_g] = 0, \forall g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, pela proposição 4.17. Assim, pelo visto na demonstração do teorema 2.12, $B_{z,\zeta} = B_{z-J\zeta, 0}$.

Por outro lado, o símbolo de $B_{z,\zeta}$ é $b(x+z, \xi+\zeta)$ e o símbolo de $B_{z-J\zeta, 0}$ é $b(x+z-J\zeta, \xi)$. Portanto, por 4.1, temos que $b(x+z, \xi+\zeta) = b(x+z-J\zeta, \xi)$. Assim, pela nota 4.13, temos:

$$\begin{aligned} a(z, \zeta) &= \int \bar{\gamma}(-x) \bar{\gamma}(-\xi) b(x+z, \xi+\zeta) dx d\xi = \\ &= \int \bar{\gamma}(-x) \bar{\gamma}(-\xi) b(x+z-J\zeta, \xi) dx d\xi = a(z-J\zeta, 0). \end{aligned}$$

Tomando $F(z) = a(z, 0)$, temos $F \in CB^\infty(\mathbb{R}^n, A)$ e $a(z, \zeta) = F(z-J\zeta)$, e, pela observação 1.8, portanto, $T = L_F$. ■

Apêndice A

Veremos agora alguns resultados sobre integrais de funções que chegam num espaço de Banach, Integral de Bochner. Para isto, nos baseamos fundamentalmente no apêndice E de [13].

Seja E um espaço de Banach separável e seja $\mathcal{B}(E)$ a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de E .

Definição A.1. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é *mensurável* se é mensurável com respeito a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e a $\mathcal{B}(E)$.

É fácil ver que, se f é mensurável, então $x \mapsto \|f(x)\|$ é mensurável.

Definição A.2. Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é dita *simples* se $f(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto finito de E . Na verdade, se $f(\mathbb{R}^n) = \{a_1, \dots, a_p\}$, seja $J_l = f^{-1}(a_l)$; então, $f(x) = \sum_{l=1}^p a_l \chi_{J_l}(x)$, onde χ_{J_l} é a função característica de J_l e onde os conjuntos J_l são disjuntos e pertencem a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Lema A.3. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, seja $D \subseteq E$ enumerável denso em $f(\mathbb{R}^n)$. Então, $\forall \varepsilon > 0, \forall a \in f(\mathbb{R}^n)$, existem $d \in D$ e $r \in \mathcal{Q}$, tais que $\|rd\| \leq \|a\|$ e $\|rd - a\| < \varepsilon$.

Demonstração. Dado $1 > \varepsilon > 0$, como D é denso em $f(\mathbb{R}^n)$, existe $d \in D$ tal que $\|a - d\| < \varepsilon$. Seja $r \in \mathcal{Q}^+$ tal que $1 - \varepsilon < r < 1$ e $r \leq \frac{\|a\|}{\|d\|}$. Assim, $\|rd\| \leq \|a\|$ e temos

$$\|rd - a\| \leq \|d - rd\| + \|a - d\| \leq \|d\|(1 - r) + \varepsilon \leq \frac{\|a\|}{r} \varepsilon + \varepsilon \leq \|a\| \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon_1 > 0$, escolhemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\|a\| \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \varepsilon \leq \varepsilon_1$ e temos $\|rd - a\| < \varepsilon_1$ e $\|d\| \leq \|a\|$ ■

Proposição A.4. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, mensurável, existe uma seqüência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$, e $\|f_k(x)\| \leq \|f(x)\|, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponhamos que f é não nula.

Seja $D \subseteq E$ enumerável, denso em $f(\mathbb{R}^n)$. Seja D' o conjunto dos múltiplos racionais de D , $D' = \{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Podemos assumir que $c_1 = 0$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, e cada $k \in \mathbb{N}$, seja $E_k(x) \subseteq E$ dado por:

$$E_k(x) = \{c_j \in D', j \leq k \text{ e } \|c_j\| \leq \|f(x)\|\}.$$

Como $c_1 = 0$, $E_k(x)$ é não vazio.

Vamos construir a seqüência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tomando $f_k(x)$ o elemento de $E_k(x)$ que está mais próximo de $f(x)$.

Consideremos

$$A_k(x) = \{c_i \in E_k(x) / \|f(x) - c_i\| = \inf\{\|f(x) - c_j\|, c_j \in E_k(x)\}\}.$$

Seja $I_k(x)$ o conjunto dos índices dos $c_i \in A_k(x)$ e seja $i_0 = \min I_k(x)$ e $f_k(x) = c_{i_0}$.

Como os conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n, f_k(x) = c_{i_0}\}$ podem ser descritos por meio de desigualdades envolvendo $\|f(x)\|, \|c_j\|, j = 1, \dots, k$, e $\|f(x) - c_j\|, j = 1, \dots, k$, cada f_k é mensurável. É fácil ver, então, que f_k é simples, $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, por construção de f_k e de $E_k(x)$, temos que $\|f_k(x)\| \leq \|f(x)\|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Vejamos agora que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para f . Consideremos:

1. Pelo lema A.3, para todo $\varepsilon > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $c_{h_0} \in D'$ tal que $\|c_{h_0}\| \leq \|f(x)\|$ (isto implica $c_{h_0} \in E_{h_0}(x)$) e $\|c_{h_0} - f(x)\| < \varepsilon$.
2. Se $k \geq h_0$, $E_{h_0}(x) \subseteq E_k(x)$.
3. $\|f(x) - f_k(x)\| \leq \|f(x) - c_k\|$, para qualquer $c_k \in E_k(x)$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja $h_0 \in \mathbb{N}$ como em (1). Então temos, $\forall k \geq h_0$, $\|f(x) - f_k(x)\| \leq \|f(x) - c_{h_0}\| < \varepsilon$. ■

Definição A.5. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, mensurável. Dizemos que f é *Bochner integrável* (*integrável*) se a função $x \mapsto \|f(x)\|$ é integrável.

Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, simples e integrável, com $f(x) = \sum_{l=1}^p a_l \chi_{J_l}$, $a_l \in E$ e $J_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, definimos a integral de f como segue:

$$\int f(x)dx = \sum_{l=1}^p a_l \mu(J_l),$$

onde μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. É claro que f integrável implica que $\mu(J_l) < \infty$, $l = 1, \dots, p$.

É fácil ver que

$$\left\| \int f(x)dx \right\| \leq \int \|f(x)\|dx$$

e que, se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e g uma função simples integrável,

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ integrável, seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples tal que $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e tal que $x \mapsto \sup_k \|f_k(x)\| = \|f(x)\|$ é integrável (ver A.4). Como $\|f_k(x) - f(x)\| \leq 2\|f(x)\|$, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\int \|f_k(x) - f(x)\|dx \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Logo, a seqüência $(\int f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em E e portanto converge.

Definimos

$$\int f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)dx.$$

É fácil ver que esta definição não depende da escolha da seqüência $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ [13, pg.352].

Proposição A.6. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, integrável. Então

$$\left\| \int f(x)dx \right\| \leq \int \|f(x)\|dx.$$

Demonstração. Seja $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples (como na proposição A.5), tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\sup_k \|f_k(x)\| \leq \|f(x)\|$ e $f(x) = \lim_k f_k(x)$.

Logo, $\left\| \int f_k(x) dx \right\| \leq \int \|f_k(x)\| dx \leq \int \|f(x)\| dx$. Como $\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx$, vale a tese. ■

Teorema da Convergência Dominada A.7. Sejam $f, f_1, f_2, \dots$ funções de $\mathbb{R}^n$ em E , mensuráveis, tais que $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\|f_k(x)\| \leq g(x)$, q.s., para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, integrável. Então, $f, f_1, \dots$ são integráveis e $\int f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx$.

Demonstração. Como $\|f_k(x)\| \leq g(x)$ q.s., $\forall k \in \mathbb{N}$, a integrabilidade de $f_1, f_2, \dots$ é imediata. Além disso, temos $\|f(x)\| \leq g(x)$ q.s. e f é integrável. Portanto, $\|(f_k - f)(x)\| \leq 2g(x)$ q.s.. Pelo Teorema da Convergência Dominada (caso escalar) temos então que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \|(f_k - f)(x)\| dx = 0$, e, pela proposição A.6, temos $\left\| \int (f_k - f)(x) dx \right\| \leq \int \|(f_k - f)(x)\| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. ■

Observação A.8. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é integrável e $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\int_J f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_J(x) dx.$$

Se $g : \mathbb{R} \rightarrow E$ é integrável, notemos que $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} g(t) dt$, pois, se $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}^+$, crescente, com $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty$, e se $g_k(t) = g(t) \chi_{[-R_k, R_k]}(t)$, temos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t) = g(t)$ e $\sup_k \|g_k(t)\| \leq \|g(t)\|$; portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada A.7

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-R_k, R_k]} g(t) dt.$$

Definição A.9. Seja $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E)$ o conjunto das funções de $\mathbb{R}^n$ em E integráveis. Definimos

$$\|f\|_{L^1} = \int \|f(x)\| dx, \text{ para } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E).$$

É claro que $\|\cdot\|_{L^1}$ é semi-norma. É fácil ver que o conjunto $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ das classes de equivalência de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E)$, com respeito à igualdade quase sempre, é um espaço vetorial normado onde $\|\cdot\|_{L^1}$ é a norma ([13, proposição E.4]). Também podemos provar que $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ é completo adaptando a demonstração de [13, teorema 3.4.1].

De um modo análogo, definimos os espaços de Banach $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ das classes de equivalência de funções iguais q.s. que tem a propriedade $\int \|f(x)\|^p dx < \infty$. A norma é dada por $\|f\|_{L^p} = \left(\int \|f(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, para $f \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Proposição A.10. As funções simples do tipo $\sum_{l=1}^q a_l \chi_{J_l}$, $\mu(J_l) < \infty$, $a_l \in E$, são densas em $L^p(\mathbb{R}^n, E)$.

Demonstração. É fácil ver, pela definição A.5, que as funções simples do enunciado pertencem a $L^p(\mathbb{R}^n, E)$. Dada uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n, E)$, seja uma seqüência de funções simples $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, como na proposição A.4, tal que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale que $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ e $\|f_k(x)\| \leq \|f(x)\|$. Assim, $\|(f_k - f)(x)\|^p \leq 2^p \|f(x)\|^p$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, (A.7), $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \|(f_k - f)(x)\|^p dx = 0$, o que implica $\|f - f_k\|_{L^p} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. ■

Um resultado útil, mas que não provaremos aqui, é o teorema E.9 de [13], que diz o seguinte:

Teorema A.11. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ é mensurável se e somente se, para todo funcional linear contínuo φ em E^* , a função $\varphi \circ f$ é mensurável.

Proposição A.12. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, integrável, então, para qualquer funcional linear contínuo $\varphi \in E^*$ vale que

$$\int \varphi \circ f(x) dx = \varphi \left(\int f(x) dx \right) \quad (*)$$

Além disso, se existe $a_0 \in E$ tal que $\forall \varphi \in E^*, \varphi(a_0) = \int \varphi \circ f(x) dx$, então $a_0 = \int f(x) dx$.

Demonstração. Dado qualquer $\varphi \in E^*$, por (A.11), sabemos que $\varphi \circ f$ é mensurável. Vejamos que $\varphi \circ f$ é integrável.

$$\int |\varphi \circ f(x)| dx \leq \int \|\varphi\| \|f(x)\| dx = \|\varphi\| \int \|f(x)\| dx.$$

Como f é integrável, $\varphi \circ f$ é integrável.

Suponhamos que f é simples, $f(x) = \sum_{l=1}^p a_l \chi_{J_l}(x)$, $a_l \in E$ e $\mu(J_l) < \infty$, onde J_l são disjuntos, $l = 1, \dots, p$.

$$\varphi \left(\int f(x) dx \right) = \varphi \left(\sum_{l=1}^p a_l \mu(J_l) \right) = \sum_{l=1}^p \varphi(a_l) \mu(J_l).$$

$$\int \varphi \circ f(x) dx = \int \varphi \left(\sum_{l=1}^p a_l \chi_{J_l}(x) \right) dx = \int \sum_{l=1}^p \varphi(a_l) \chi_{J_l}(x) dx = \sum_{l=1}^p \varphi(a_l) \mu(J_l).$$

Portanto, vale (*) para funções simples.

Seja agora $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ integrável e $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções simples tal que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ e $\sup_k \|f_k(x)\| \leq \|f(x)\|$. Desta maneira, é claro que f_k é integrável para todo $k \in \mathbb{N}$ e temos que

$$\varphi \left(\int f_k(x) dx \right) = \int \varphi \circ f_k(x) dx. \quad (1)$$

Além disso, $\|f_k(x)\| \leq \|f(x)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$; então, pelo Teorema da Convergência Dominada (A.7), $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx$ e, portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \left(\int f_k(x) dx \right) = \varphi \left(\int f(x) dx \right). \quad (2)$$

Por outro lado, $|\varphi \circ f_k(x)| \leq \|\varphi\| \|f_k(x)\| \leq \|\varphi\| \|f(x)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall k \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \circ f_k(x) = \varphi \circ f(x)$ q.s., pelo Teorema da Convergência Dominada, $\varphi \left(\int f(x) dx \right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \left(\int f_k(x) dx \right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi \circ f_k(x) dx = \int \varphi \circ f(x) dx$, e vale (*).

Suponhamos que existe $a_0 \in E$ tal que $\varphi(a_0) = \int \varphi \circ f dx$, $\forall \varphi \in E^*$. Deste modo, temos que $\varphi \left(a_0 - \int f(x) dx \right) = 0$, $\forall \varphi \in E^*$. Logo, pelo Teorema de Hahn-

Banach, (ver também [13, corolário E.8]), existe $\psi \in E^*$ tal que $\psi \left(a_0 - \int f(x)dx \right) = \left\| a_0 - \int f(x)dx \right\|$, ou seja, $\left\| a_0 - \int f(x)dx \right\| = 0$ e portanto $a_0 = \int f(x)dx$. ■

Tendo este resultado, podemos ver que várias propriedades que são válidas para integração de funções complexas são válidas também para funções que tomam valores num espaço de Banach separável.

Teorema de Fubini A.13. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n}, E)$, então $y \mapsto f(x, y)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \mapsto f(x, y)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$. Além disso, as funções $h(x) = \int f(x, y)dy$ e $k(y) = \int f(x, y)dx$ definidas q.s. pertencem a $L^1(\mathbb{R}^n, E)$ e vale:

$$\int f(x, y)dx dy = \int \left[\int f(x, y)dy \right] dx = \int \left[\int f(x, y)dx \right] dy.$$

Demonstração. Por definição, temos que $\|f\| \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Logo, pelo Teorema de Fubini, [13, (2.37)], temos que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \|f(x, y)\|$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é, $y \mapsto f(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ q.s.. Analogamente para $x \mapsto f(x, y)$.

Também temos que, se $\bar{h}(x) = \int \|f(x, y)\|dy$, $\bar{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. E, como $\|h(x)\| \leq \bar{h}(x)$, $h \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$. Do mesmo modo, $k \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$.

Por outro lado, dado qualquer $\varphi \in E^*$, temos $\varphi \circ f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, pois $\int \|\varphi \circ f(x, y)\|dx dy \leq \|\varphi\| \int \|f(x, y)\|dx dy < \infty$. Também $\varphi \circ k$, $\varphi \circ h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, apliquemos [3, 2.37]:

$$\begin{aligned} \int \varphi \circ h(x)dx &= \int \left[\varphi \left(\int f(x, y)dy \right) \right] dx = \int \left[\int \varphi \circ f(x, y)dy \right] dx = \\ &= \int \left[\int \varphi \circ f(x, y)dx \right] dy = \int \varphi \circ k(y)dy. \end{aligned}$$

Logo, pela proposição A.12, $\varphi \left(\int h(x)dx \right) = \varphi \left(\int k(y)dy \right)$, $\forall \varphi \in E^*$, e então $\int h(x)dx = \int k(y)dy$, ou seja,

$$\int \left[\int f(x, y) dy \right] dx = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy.$$

Do mesmo modo, temos

$$\begin{aligned} \int \varphi \circ f(x, y) dx dy &= \int \varphi \circ k(y) dy, \quad \forall \varphi \in E^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \int f(x, y) dx dy &= \int k(y) dy = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema Fundamental do Cálculo A.14. Seja $f : [a, b] \rightarrow E$ uma função contínua e diferenciável tal que f' (a função derivada de f) é limitada. Então:

$$\int_{[a,b]} f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Demonstração. Dado $\varphi \in E^*$, qualquer, consideremos a função $\varphi \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Seja $F(t) = \varphi \circ f(t)$. Notemos que

$$F'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi \left(\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right) = \varphi \circ f'(t_0).$$

Logo, F é contínua, diferenciável, com derivada limitada. Além disso, como F' é mensurável, isto é, $\varphi \circ f'$ é mensurável para todo $\varphi \in E^*$, pelo teorema A.11 temos que f' é mensurável. Assim, por [3, (3.36)], temos: $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$, isto é, $\varphi \left(\int_{[a,b]} f'(t) dt \right) = \varphi(f(b) - f(a))$, $\forall \varphi \in E^*$ e, portanto, $\int_{[a,b]} f'(t) dt = f(b) - f(a)$. $\blacksquare$

Corolário A.15. Integração por partes. Dadas $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, então, para $-\infty < a < b < \infty$, vale que

$$\int_{[a,b]} f(x) g'(x) dx + \int_{[a,b]} f'(x) g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Demonstração. Notemos que $fg \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$. Além disso, $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo A.14 aplicado à função fg ,

$$\int_{[a,b]} f(x)g'(x)dx + \int_{[a,b]} f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad \blacksquare$$

Corolário A.16. Seja A uma C^* -álgebra separável. Dadas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, A)$, com $f(x) = x^\gamma e^{ix\xi}$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$ dado, e $g \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então temos que

$$\int [\partial_{x_j} f(x)] g(x) dx = - \int f(x) [\partial_{x_j} g(x)] dx.$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda da generalidade, que $j = 1$. Como $fg \in L^1(\mathbb{R}^n, A)$, temos, pelo Teorema de Fubini A.13, que

$$\begin{aligned} \int \partial_{x_1} [f(x)g(x)] dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} [f(x)g(x)] dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]} \partial_{x_1} [f(x)g(x)] dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} [f(R, x_2, \dots, x_n)g(R, x_2, \dots, x_n) - f(-R, x_2, \dots, x_n)g(-R, x_2, \dots, x_n)] \right) dx_2 \cdots dx_n = 0 \end{aligned}$$

(ver Observação A.8), pelo corolário A.15. Portanto,

$$\int [\partial_{x_1} f(x)] g(x) dx = - \int f(x) [\partial_{x_1} g(x)] dx. \quad \blacksquare$$

Proposição A.17. Seja A uma C^* -álgebra separável e seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$. Então, se $\int f(x)^* f(x) dx = 0$, $f(x) = 0$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Dado um funcional positivo, $\psi \in A^*$, temos que $\psi(f(x)^* f(x)) \geq 0$. Por outro lado, pela proposição (A.12), $\int \psi(f(x)^* f(x)) dx = 0$, o que implica $\psi(f(x)^* f(x)) = 0$ q.s.. Como qualquer funcional linear $\varphi \in A^*$ é dado por $\varphi = (\psi_1^+ - \psi_1^-) + i(\psi_2^+ - \psi_2^-)$, onde ψ_i^+, ψ_i^- são funcionais lineares positivos, $i = 1, 2$ ([5, teorema 3.3.10 e comentários acima]), temos que $\varphi(f^*(x)f(x)) = 0$, q.s., $\forall \varphi \in A^*$.

Notemos que a bola unitária, $\mathcal{B}$, de A^* é compacta na topologia fraca* pelo teorema de Banach-Alaoglu ([6, 3.15]) e portanto, como A é separável, $\mathcal{B}$ é metrizável na topologia fraca* ([6, 3.16]). Logo a bola unitária de A^* é separável (todo espaço métrico

compacto é separável). Seja $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ um subconjunto enumerável denso na topologia fraca^* .

Vimos que para qualquer $\varphi_m \in \mathcal{D}$, $\varphi_m(f^*(x)f(x)) = 0$ q.s.. Portanto, o conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_m(f^*(x)f(x)) \neq 0, \text{ para algum } \varphi_m \in \mathcal{D}\}$ tem medida nula. Além disso, se $x \notin E$ temos que $\varphi_m(f^*(x)f(x)) = 0$ para todo $\varphi_m \in \mathcal{D}$ e então $\phi(f^*(x)f(x)) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{B}$. Assim, se $x \notin E$, $\varphi(f^*(x)f(x)) = 0, \forall \varphi \in A^*$. Logo, se $x \notin E$, $f(x) = 0$; ou seja, $f(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Proposição A.18. Mudança de variável. Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^1 e $D_x T$ a transformação linear dada pela matriz $\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)\right)_{ij}$; e seja $\det D_x T$ o determinante da matriz acima. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, A)$, temos que

$$\int f(x)dx = \int f \circ T(x)|\det D_x T|dx.$$

Demonstração. Dado qualquer $\varphi \in A^*$, $\varphi \circ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, por [3, (2.47)], $\int \varphi \circ f(x)dx = \int \varphi \circ f \circ T|\det D_x T|dx$, o que implica que, $\forall \varphi \in A^*$, $\varphi\left(\int f(x)dx\right) = \varphi\left(\int f \circ T|\det D_x T|dx\right)$ e portanto $\int f(x)dx = \int f \circ T|\det D_x T|dx$. ■

Proposição A.19. Dada uma C^* -álgebra separável, A , temos que $S^A(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$.

Demonstração. Vemos em [3, (8.17)] a demonstração de que $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. A demonstração de que $S^A(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$ é feita seguindo os mesmos passos. Primeiro, provamos que as funções contínuas de suporte compacto são densas em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$. Depois, a demonstração de que as funções C^∞ de suporte compacto são densas em $L^2(\mathbb{R}^n, A)$ segue por convolução como no caso escalar. ■

Apêndice B

Usaremos aqui vários resultados do apêndice A e, portanto, consideraremos A uma C^* -álgebra separável.

Definição B.1. Dada $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, definimos a *Transformada de Fourier*, F , de u , como segue:

$$F(u)(x) = \int e^{-ix\xi} u(\xi) d\xi, \text{ onde } d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} d\xi.$$

Temos, como no caso escalar ([12, teorema V.1.1]), que F é um operador contínuo de $S^A(\mathbb{R}^n)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$.

Proposição B.2. F é continuamente inversível de $S^A(\mathbb{R}^n)$ em $S^A(\mathbb{R}^n)$ e vale que

$$F^{-1}(u)(x) = \int e^{ix\xi} u(\xi) d\xi, \quad u \in S^A(\mathbb{R}^n). \quad (*)$$

Demonstração. Usaremos a função auxiliar $\phi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Notemos que $\hat{\phi}(\xi) = \phi(\xi)$ ([12, exemplo V.1.2]), onde $\hat{\phi}$ é a transformada de Fourier (usual) de ϕ . Tomemos, em (*), $u = F(v)$, para $v \in S^A(\mathbb{R}^n)$.

$$v(x) = \int e^{ix\xi} \left[\int e^{-iy\xi} u(y) dy \right] d\xi.$$

Aqui não podemos trocar a ordem de integração pois $e^{i(x-y)\xi} v(y)$ não é integrável em ξ se $v(y) \neq 0$. Por este motivo, vamos usar a função ϕ do seguinte modo:

Seja $\phi_\varepsilon(x) = \phi(\varepsilon x)$, para $\varepsilon > 0$, dado. É fácil ver que $\hat{\phi}_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Assim, aplicando o Teorema de Fubini (A.13),

$$\int \phi_\varepsilon(\xi) e^{ix\xi} \left[\int e^{-iy\xi} v(y) dy \right] d\xi = \int e^{-iy\xi} v(y) \left[\int e^{ix\xi} \phi_\varepsilon(\xi) d\xi \right] dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int v(y) \left[\int e^{-i(y-x)\xi} \phi_\varepsilon(\xi) d\xi \right] dy = \int v(y) \hat{\phi}_\varepsilon(y-x) dy = \\
&\int v(y+x) \hat{\phi}_\varepsilon(y) dy = \int v(y+x) \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = \int v(x+\varepsilon y) \phi(y) dy.
\end{aligned}$$

E temos $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x) = 1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x+\varepsilon y) = v(x)$ e, pelo visto acima:

$$\int e^{ix\xi} \phi_\varepsilon(\xi) F(v)(\xi) d\xi = \int v(x+\varepsilon y) \phi(y) dy.$$

Por outro lado, $\|e^{ix\xi} \phi_\varepsilon(\xi) F(v)(\xi)\| \leq \|F(v)(\xi)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|v(x+\varepsilon y) \phi(y)\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|v(x)\| \|\phi(y)\| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada (A.7), temos

$$\int e^{ix\xi} F(v)(\xi) d\xi = \int v(x) \phi(y) dy.$$

Como $\int \phi(y) dy = 1$, $v(x) = \int e^{ix\xi} F(v)(\xi) d\xi$, o que prova (*).

A continuidade de F^{-1} se demonstra de modo análogo à continuidade de F , ([12, teorema V.1.1]). ■

Proposição B.3. F é um operador "unitário" em $S^A(\mathbb{R}^n)$, com respeito ao produto interno definido no início do capítulo 1.

Demonstração. Dadas $u, v \in S^A(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema de Fubini,

$$\langle F(u), v \rangle = \int \left[\int e^{-ix\xi} u(\xi) d\xi \right]^* v(x) dx = \int u(\xi)^* \left[\int e^{ix\xi} v(x) dx \right] d\xi = \langle u, F^{-1}(v) \rangle.$$

Portanto $F^* = F^{-1}$ e F é unitário em $S^A(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário B.4. Se $u \in S^A(\mathbb{R}^n)$, então $\|F(u)\|_2 = \|u\|_2$.

Demonstração. $\langle F(u), F(u) \rangle = \langle u, F^{-1}(F(u)) \rangle = \langle u, u \rangle$, portanto $\|F(u)\|_2 = \|u\|_2$. ■

Corolário B.5. Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, A)$, temos que $\langle F(f), F(g) \rangle = \langle f, g \rangle$.

Demonstração. Sabemos, pela proposição (3.9) que $L^2(\mathbb{R}^n, A) \subseteq \overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$. Assim, existem seqüências $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de funções em $S^A(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_2 = 0$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} \|g_l - g\|_2 = 0$. Pelo corolário B.4, F é contínua em $\overline{S^A(\mathbb{R}^n)}$ com a norma $\|\cdot\|_2$. Assim, pela proposição B.3, $\langle F(f), F(g) \rangle = \lim_{k,l} \langle F(f_k), F(g_l) \rangle = \lim_{k,l} \langle f_k, g_l \rangle = \langle f, g \rangle$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Marc A. Rieffel, *Deformation Quantization for actions of $\mathbb{R}^d$* , A.M.S. Memoirs, 506, 1993, ix+93pp.
- [2] H. O. Cordes, *The technique of pseudodifferential operators*, London Math. Soc. Lect. N. Series 202, 1995, xii+382pp.
- [3] Gerald B. Folland, *Real Analysis*, J. Wiley & S. Interscience, 1984, xiv+350pp.
- [4] M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I*, 1972, xvi+400pp.
- [5] Gerard T. Murphy, *C^* -algebras and Operator Theory*, Ac. Press, 1990, x+286pp.
- [6] Walter Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw Hill, 1991, xvi+424pp.
- [7] K. K. Jensen & K. Thomsen, *Elements of KK -Theory*, Birkhäuser, 1991, viii+202pp.
- [8] François Trèves, *Topological vector spaces, Distributions and Kernels*, Ac. Press, 1967, xvi+565pp.
- [9] Marc A. Rieffel, *Square Integrable Representations of Hilbert Algebras*, J. Funct. Analysis **3** (1969) 265-300.
- [10] A. P. Calderón & R. Vaillancourt, *On the boundedness of pseudo-differential operators*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971) 374-378.

- [11] Jörg Seiler, *Continuity of Edge and Corner Pseudodifferential Operators*, Math. Nach. **205** (1999) 163-182.
- [12] Jorge Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 12^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979, vi+164pp.
- [13] Donald C. Cohn *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980, x+372pp..
- [14] S. T. Melo & M. I. Merklen, *On a conjectured noncommutative Beals-Cordes-type characterization*, A.M.S. Proc. **130** (2002) 1997-2000.
- [15] J. J. Kohn & L. Nirenberg, *An Algebra of Pseudo-Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965) 269-305.
- [16] C. Evans Lawrence, *Partial Differential Equations*, A. M. S., 1991.
- [17] H. O. Cordes, *On pseuso-differential operators and smoothness of special Lie-group representations*, Manuscripta Math. **28** (1979) 51-69.