**Seções globais para fluxos de Reeb
dinamicamente convexos em $L(p, 1)$
e folheação $3 - 2^3$ no Hamiltoniano
de Hénon-Heiles**

Alexsandro Schneider

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

Durante o desenvolvimento deste trabalho
o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq

São Paulo, fevereiro de 2018

**Seções globais para fluxos de Reeb
dinamicamente convexos em $L(p, 1)$
e folheação $3 - 2^3$ no Hamiltoniano
de Hénon-Heiles**

Esta é a versão tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/12/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

*Dedico a todos que me acompanharam durante esta caminhada.
Em especial às duas mulheres da minha vida:
Minha mãe Erini e minha noiva Ana Julia.*

Agradecimentos

Durante os anos de pós-graduação muitas pessoas me ajudaram. A estes agradeço:

Aos meus pais, Santo e Erini, pelo amor e apoio constante. Certamente boa parte da motivação e gosto que possuo pela matemática teve início antes mesmo de começar meus estudos no ensino básico. Sempre fui incentivado a resolver exercícios de multiplicação e divisão no caderno de ‘quadrinhos’; presente da minha mãe. A vocês o meu muito obrigado.

À minha noiva, Ana Julia, pelo amor, dedicação, compreensão e paciência. Por me ajudar em tempos difíceis com palavras de consolo. Por me ouvir falando sem parar de matemática (ela é farmacêutica!) ou simplesmente por me presentear com este lindo sorriso. Obrigado por tudo.

Aos amigos e colegas que fiz durante o período do doutorado e que me ajudaram de alguma forma, desde uma discussão sobre algum exercício até o simples convite pra fumar no canteiro entres os blocos A e B (eu que não fumo!). Em especial, gostaria de agradecer aos amigos: Ana Kelly, Antônio, Carolina, Diego, Giliard, Edite, Felipe, João, Sé e Max. Vocês tornaram esse período de grande mudança em minha vida especial.

Aos amigos que morei durante quase todo o período do doutorado: Abraham, Beto, Denício, Giliard (novamente! kk), Hermínio, Iuri, Milton, Paulo Henrique, Rayner, Rui e Vitor. Um agradecimento especial, por todas as vezes em que fui à cozinha tomar um café e acabei por ficar horas conversando sobre qualquer assunto. Vocês certamente foram a minha família aqui em SP.

Aos amigos que fiz ainda durante a época do mestrado e ainda mantive contato durante o doutorado: Adriana, Allan, Ícaro e Taimara. Provavelmente, o que mais sentirei falta serão as nossas conversas sobre matemática, física, a vida, o universo e tudo mais (kk). Hoje olho para trás me considero uma pessoa de sorte, por ter conhecido pessoas tão especiais.

Aos professores Alexandre Lymberopoulos, Gláucio Terra, Marcos Alexandrino, Raul Ferraz e Sylvain Phillippe Pierre Bonnot. Pela atenção prestada em sala de aula ou sempre que fui tirar dúvidas de listas de exercícios. Vocês foram fundamentais para a minha formação, muito obrigado.

Agradeço à USP pela oportunidade, à CAPES e o CNPq pelo incentivo financeiro.

Por último um agradecimento especial ao meu orientador Pedro Salomão. Por ser um

orientador sempre presente e pelas discussões que tivemos tornando este trabalho possível. Agradeço também ao incentivo dado a continuidade de meus estudos. A você o meu muito obrigado.

Resumo

SCHNEIDER, A. **Seções globais para fluxos de Reeb dinamicamente convexos em $L(p, 1)$ e folheação $3 - 2^3$ no Hamiltoniano de Hénon-Heiles.** Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

Neste trabalho, mostramos que fluxos de Reeb dinamicamente convexos em um espaço lenticular $L(p, 1)$, $p > 1$, admite uma órbita periódica de Reeb especial P que é o *binding* de uma decomposição em livro aberto racional, com páginas tipo-disco tal que cada página é uma seção global. O índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada de P é 3. Como corolário, o fluxo de Reeb possui duas ou infinitas órbitas periódicas. Este resultado aplica-se ao Hamiltoniano de Hénon-Heiles, cujo fluxo restrito a energia baixa possui $\mathbb{Z}_3$ -simetria e define um fluxo de Reeb em $L(3, 1)$. Devido a $\mathbb{Z}_4$ -simetria aplicamos nosso resultado ao problema lunar de Hill regularizado. Na segunda parte deste trabalho investigamos a existência de uma folheação $3 - 2^3$ em níveis de energia no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles, para energia logo acima da crítica. Provamos que certa região de interesse é uma hipersuperfície de contato. Provamos também que o fluxo de Reeb possui uma órbita periódica $\mathbb{Z}_3$ simétrica, cujo índice de Conley-Zehnder é 3 e possui número de auto-enlaçamento -1 .

Palavras-chave: Espaços lenticulares, Fluxos de Reeb, Seções globais, Sistemas globais de seções transversais, Hamiltoniano de Hénon-Heiles.

Abstract

SCHNEIDER, A. **Global surfaces of section for dynamically convex Reeb flows on $L(p, 1)$ and $3 - 2^2$ foliation in the Hénon-Heiles Hamiltonian.** Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

We show that a dynamically convex Reeb flow on a lens space $L(p, 1)$, $p > 1$ admits a special closed Reeb orbit P which is the binding of a rational open book decomposition with disk-like pages so that each page is a global surface of section. The Conley-Zehnder index of the p -th iterate of P is 3. As a corollary, the Reeb flow has 2 or infinitely many closed Reeb orbits. This result applies to the Hénon-Heiles Hamiltonian whose flow restricted to low energy levels has $\mathbb{Z}_3$ -symmetry and descends to $L(3, 1)$. Due to a $\mathbb{Z}_4$ -symmetry we also apply our results to Hill's lunar problem. In the second part of this work we investigate the existence of a $3 - 2^3$ foliation on energy levels of the Hénon-Heiles Hamiltonian, for energies above the critical one. We show that some region is of contact-type and the Reeb flow has a $\mathbb{Z}_3$ -symmetric periodic orbit, whose Conley-Zehnder is 3 and has self-linking number -1 .

Keywords: Lens spaces, Reeb flows, Surfaces of section, Systems of transversal sections, Hénon-Heiles Hamiltonian.

LISTA DE FIGURAS

2.1	A figura à esquerda representa o espaço de fase do sistema Hamiltoniano associado a H_1 e a figura à direita representa o espaço de fase do sistema Hamiltoniano associado a H_2	12
2.2	Ilustração da distribuição de Hiperplanos ξ_0 em $\mathbb{R}^3$	14
2.3	Ilustração da estrutura de contato ξ e do campo de Reeb X_λ	16
2.4	Ilustração do campo de Reeb X_{λ_0} definido em S^1	17
2.5	Ilustração de um disco <i>overtwisted</i>	19
2.6	Ilustração de um 1-disco $u(D)$ e da perturbação K_ϵ	25
3.1	Ilustração de um corte de uma decomposição em livro aberto na esfera $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Os pontos azuis representam a órbita periódica P_0 , e cada linha tracejada representa uma folha da decomposição em livro aberto	35
3.2	Projeção de níveis de energia do Hamiltoniano de Hénon-Heiles no plano x_1x_2 . A projeção em vermelho é dada pelo nível crítico $E = 1/6$, em que os pontos de interseção entre as retas vermelhos é dada por equilíbrios sela-centro	40
3.3	Ilustração de níveis de energia do problema lunar de Hill regularizado projetado no plano x_1x_2	44
3.4	Ilustração da $\mathbb{Z}_p$ -simetria presente em $\tilde{Z}$ para $t = 1/p$. A figura da esquerda representa a órbita periódica $\tilde{P}_1$ em S^3 contida no plano q_0p_0 . A figura a direita representa a relação entre a seção $\tilde{Z}$ e a base $\{\partial p_1, \partial q_1\}$	47
3.5	Ilustração da sequência de planos $\tilde{u}_k$	58
3.6	Ilustração da esfera v_r . A órbita periódica assintótica P_{w_1} sendo não-contrátil implica que cada uma das demais órbitas periódicas assintóticas pode ser vista como o bordo de um disco mergulhado	61

3.7	Ilustração do cilindro u_r , tendo como limite assintótico associado ao furo positivo a órbita periódica $(P_\infty)^{p/k}$ e como limite assintótico a ao furo negativo a órbita periódica $(P_{w_1})^{p/k}$	63
4.1	Possíveis configurações para as folhas regulares de um sistema global de seções transversais. Órbitas em azul, vermelho e verde, representam limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 3, 2 e 1, respectivamente	75
4.2	Corte de uma folheação $3-2-3$ em S^3 . Na ilustração os pontos representam as encadernações da folheação, linhas tracejadas as famílias a 1-parâmetro e linhas contínuas folhas rígidas. As setas representam a direção do campo de Reeb X_λ . Em cinza estão representadas as variedades estável e instável associadas a encadernação P_2	78
4.3	Projeções do fluxo Hamiltoniano próximo de um equilíbrio sela-centro . . .	80
4.4	Projeções dos níveis de energia $K^{-1}(E)$ no plano q_1p_1	80
4.5	Na figura a esquerda temos a projeção da 2-esfera N_E^0 no plano q_1p_1 , para $E > 0$ pequeno. A figura a direita representa a 2-esfera N_E^0 em $K^{-1}(E)$, os hemisférios $U_{1,E}$, $U_{2,E}$ e a órbita periódica de Lyapunov P_E	81
4.6	Representação da 3-bola fechada $S_E \subset H^{-1}(E)$, $E > 0$ pequeno	82
4.7	Corte de uma folheação $2-3$ em S_E . Pontos azuis e vermelhos representam as encadernações da folheação com índice de Conley-Zehnder 3 e 2, respectivamente. Linhas contínuas em preto representam os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , o par de linhas contínuas em verde correspondem ao cilindro rígido V_E e as linhas tracejadas a família de discos $D_{\tau,E}$, com $\tau \in (0, 1)$. As setas pretas apontam na direção do campo X_H . Em cinza estão representadas as variedades estável $W_{E,loc}^s(P_{2,E})$ e instável $W_{E,loc}^u(P_{2,E})$ do equador $P_{2,E}$	83
4.8	Ilustração de $\tilde{S}_E$	85
4.9	Ilustração da variedade S_E	86

4.10	Corte de uma folheação $3-2^3$ em S_E . Pontos azuis e vermelhos representam as encadernações da folheação com índice de Conley-Zehnder 3 e 2, respectivamente. Linhas contínuas em preto representam os hemisférios das três 2-esferas que compõem ∂S_E , os pares de linhas contínuas verdes correspondem aos cilindros rígidos V_E^1 , V_E^2 e V_E^3 e as linhas tracejadas as famílias de discos $D_{\tau_i, E}$, com $\tau_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$ e 3	87
4.11	Função de corte f	88
4.12	Domínio de interpolação do campo X no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos, respectivamente, as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$	89
4.13	Função de corte f_E	91
4.14	Domínio de interpolação do campo X_E no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos, respectivamente, as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$	92
4.15	Regiões de interpolação do campo X_E no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$, respectivamente.	94
4.16	Função regularização f	95
4.17	Projeção no plano x_1x_2 dos níveis de energia da regularização $\tilde{H}^\delta$. Linhas tracejadas em vermelho representam a projeção dos níveis de energia de H , enquanto que linhas contínuas azuis representam a projeção dos níveis de energia de $\tilde{H}^\delta$	96
4.18	Domínio $B_0 \subset B_0^H$	100
4.19	Ilustração da órbita periódica P_E contida em S_E	107

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Noções básicas	7
2.1	Dinâmica Hamiltoniana e variedades simpléticas	7
2.2	Variedades de contato e dinâmica de Reeb	13
2.3	Invariantes dinâmicos	20
2.3.1	Índice de Conley-Zehnder generalizado	20
2.3.2	Índice de Conley-Zehnder geométrico e número de rotação transversal	23
2.3.3	Número de auto-enlaçamento racional	24
2.4	Curvas pseudo-holomorfas	25
2.4.1	Simplectizações	27
2.4.2	Invariantes algébricos	31
3	Seções globais para fluxos de Reeb dinamicamente convexos em $L(p, 1)$	33
3.1	Seções globais para o fluxo	33
3.2	Espaços lenticulares e o resultado principal	36
3.3	Algumas aplicações	38
3.3.1	O Hamiltoniano de Hénon-Heiles	39
3.3.2	O problema lunar de Hill regularizado	42
3.4	Demonstração do resultado principal	45
3.4.1	Caso não-degenerado	46
3.4.2	Caso degenerado	67
3.4.3	Definições e resultados utilizados	68

4	Sistema de seções transversais e o Hamiltoniano de Hénon-Heiles	73
4.1	Sistemas globais de seções transversais	74
4.2	Conjuntos singulares estritamente convexos e a Folheação $2 - 3$	78
4.3	Folheação $3 - 2^3$ e o Hamiltoniano de Hénon-Heiles	84
4.3.1	S_E é hipersuperfície de contato, para $E > \frac{1}{6}$ próximo de $\frac{1}{6}$	87
4.3.2	Existência de órbita periódica P , com simetria $\mathbb{Z}_3$, número de auto-enlaçamento -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$	94
4.3.3	Continuidade do trabalho e perspectivas futuras	107
	Referências Bibliográficas	109

INTRODUÇÃO

Um problema clássico em dinâmica conservativa é investigar a existência de órbitas periódicas para fluxos Hamiltonianos restritos a certos níveis de energia. Poincaré e Birkhoff fizeram grandes contribuições para este problema, mostrando que, sob certas condições, o problema restrito dos três corpos e os fluxos geodésicos na esfera bi-dimensional S^2 podem ser estudados utilizando-se seções globais para estes fluxos. Nestes casos especiais, o estudo do fluxo é reduzido ao estudo de um difeomorfismo em uma superfície bi-dimensional, dado pela aplicação de primeiro retorno, e as ferramentas de dinâmica discreta podem ser utilizadas para a obtenção de órbitas periódicas.

Os níveis de energia dos sistemas estudados por Poincaré e Birkhoff são difeomorfos ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$, ou seja, o quociente da 3-esfera pela ação antipodal. Hoje, é bem sabido que tais níveis de energia são de contato e o fluxo Hamiltoniano restrito a estes níveis é equivalente ao fluxo de Reeb em $\mathbb{R}P^3$, munido de uma forma de contato universalmente *tight* [1]. No estudo destes sistemas, é comum realizar o levantamento do fluxo para a 3-esfera *tight* por meio de seu recobrimento duplo e, em alguns casos, é até possível mostrar que o fluxo de Reeb definido no levantamento é dinamicamente convexo [2]. O estudo da dinâmica dos fluxos de Reeb em variedades de contato de dimensão 3 é motivado por estes problemas clássicos e tem papel fundamental na área de Dinâmica Simplética.

Com o passar dos anos várias técnicas foram desenvolvidas visando compreender estes tipos de problemas. Em [3], Hofer, Wysocki e Zehnder utilizaram curvas pseudoholomorfas definidas em symplectizações para estudar fluxos de Reeb dinamicamente convexos na 3-esfera. Tais autores encontraram uma órbita periódica que é não-nó e possui índice de Conley-Zehnder 3. Esta órbita é o bordo de uma seção global tipo-disco para o fluxo de Reeb. Aplicando-se um resultado obtido por J. Franks em [4] para difeomorfismos no disco que preservam área, obtemos a surpreendente dicotomia de que o fluxo deve possuir duas

ou infinitas órbitas periódicas em S^3 . Neste mesmo trabalho, os autores provam que a dinâmica Hamiltoniana definida em um nível de energia estritamente convexo $S \subset \mathbb{R}^4$, difeomorfo a S^3 , é equivalente a dinâmica de Reeb em S^3 , para alguma forma de contato dinamicamente convexa. Tal resultado garante a existência de uma seção global tipo-disco para fluxo Hamiltoniano nestes níveis de energia.

Encontrar condições necessárias e suficientes para uma órbita periódica de Reeb seja o bordo de uma seção global do tipo-disco constitui uma questão importante na dinâmica de Reeb. A importância deste problema vem do fato de que, sob certas circunstâncias, a órbita periódica pode até mesmo caracterizar a variedade de contato. Relevantes estudos nesta área podem ser encontrados em [3, 5, 6, 7, 8, 9]. Em [5], Hofer, Wysocki e Zehnder apresentam o seguinte resultado que caracteriza a 3-esfera *tight*; se uma forma de contato dinamicamente convexa e não-degenerada λ definida em uma 3-variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ admite uma órbita periódica de Reeb P_0 , não-nó, com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder 3 , então (M, ξ) é contactomorfa a 3-esfera *tight*. A prova é baseada na construção de uma decomposição em livro aberto com encadernação (*binding*) P_0 , cujas páginas são seções globais tipo-disco para o fluxo de Reeb. Apesar da beleza e importância do resultado acima, se uma variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ admite tal órbita periódica, temos que M deve ser difeomorfa à S^3 , porém isto não pode ocorrer em problemas clássicos como o dos três corpos restrito estudado por Poincaré e Birkhoff, pois tais níveis de energia são difeomorfos ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$.

O espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$ dado pelo quociente da 3-esfera pela ação antipodal, é difeomorfo ao Espaço lenticular $L(2, 1)$. Espaços lenticulares $L(p, q)$, $1 \leq q < p \in \mathbb{Z}$, são dados pelo quociente da 3-esfera por uma determinada ação de $\mathbb{Z}_p$. Além disso, tais espaços são de contato. Recentemente Hryniewicz, Licata e Salomão [9] apresentaram um resultado que caracterizava Espaços lenticulares munidos de uma estrutura de contato universalmente *tight*; se $(M, \xi = \ker \lambda)$ é uma variedade de contato fechada que admite uma órbita periódica P_0 , p -não-nó, com índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada 3 e número de auto-enlaçamento $-1/p$, então $(M, \xi = \ker \lambda)$ é contactomorfa ao Espaço lenticular $L(p, q)$, com $q < p$, para algum q , munido de uma forma de contato universalmente *tight*. Mais ainda, P_0 é a encadernação (*binding*) de uma decomposição em livro aberto (racional), cujas páginas são seções globais tipo-disco de ordem p para o fluxo de Reeb.

Os resultados mencionados acima indicam que na construção de uma seção global tipo-disco, é necessário encontrar *a priori* uma órbita periódica, a qual será a encadernação da decomposição em livro aberto. Desta forma, é de grande interesse encontrar condições

suficientes que garantam para o fluxo de Reeb associado a forma de contato a existência de tal órbita periódica. A seguinte questão ainda não foi completamente respondida:

- A convexidade dinâmica de uma forma de contato λ definindo a estrutura universalmente *tight* no Espaço lenticular $(L(p, q), \xi = \ker \lambda)$ é suficiente para garantir a existência de uma órbita periódica P_0 , p -não-nó, com número de auto-enlaçamento $-1/p$ e índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada 3?

A existência desta órbita periódica, juntamente com a convexidade dinâmica e resultados presentes em [9], implicam a existência de uma decomposição em livro aberto (racional), com encadernação P_0 , cujas páginas são seções globais tipo-disco de ordem p para o fluxo de Reeb em $L(p, q)$. Como dito por Hryniewicz, Licata e Salomão em [12], é delicado decidir quando um Espaço lenticular munido de uma estrutura de contato universalmente *tight* admite uma seção global tipo-disco. A existência desta seção global implica a existência de duas órbitas periódicas formando um *link de Hopf*, e com isso, infinitas órbitas periódicas podem ser obtidas, se verificada uma condição de ressonância [11].

Por convenção $L(1, 1) \simeq S^3$. Desta forma, o teorema de Hofer, Wysocki e Zehnder produz uma resposta afirmativa para a questão acima quando $p = q = 1$. Para $L(2, 1) \simeq \mathbb{R}P^3$, uma prova recente foi dada por Hryniewicz e Salomão em [12]. Nosso resultado principal apresenta uma resposta afirmativa para o caso $q = 1$. Mais precisamente, provamos que fluxos de Reeb dinamicamente convexos em $L(p, 1)$, $1 < p \in \mathbb{Z}$, admitem uma órbita periódica especial P_0 , p -não-nó, com índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada 3 e número de auto-enlaçamento $-1/p$. Desta forma, concluímos que P_0 é a encadernação de uma decomposição em livro aberto (racional), cujas páginas são seções globais tipo-disco de ordem p para o fluxo de Reeb.

Aplicamos nosso resultado principal em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, cujas componentes dos níveis de energia difeomorfos à 3-esfera S^3 apresentam simetria $\mathbb{Z}_p$ e o fluxo define um fluxo de Reeb no Espaço lenticular universalmente *tight* $L(p, 1)$, por meio da aplicação quociente. Este é o caso do Hamiltoniano de Hénon-Heiles, para energia positiva inferior à $1/6$, em que a componente difeomorfa à S^3 apresenta simetria $\mathbb{Z}_3$. Provamos, por meio de um critério encontrado em [13], que tais níveis de energia são dinamicamente convexos. Além disso, resultados devido à Churchill, Kummer, Rod e Pecelli [14, 15], garantem a existência de 8 órbitas periódicas em cada nível. Desta forma, por meio do resultado de J. Franks podemos concluir a existência de infinitas órbitas periódicas nestes níveis de energia.

Aplicamos também nossos resultados ao problema lunar de Hill regularizado, cujo fluxo em níveis de baixa energia define fluxos de Reeb no Espaço lenticular universalmente *tight* $L(4, 1)$. Neste caso, a convexidade dinâmica segue do fato de que níveis de energia suficientemente próximos de um ponto mínimo não-degenerado da função Hamiltoniana são estritamente convexos.

Uma hipótese crucial em nosso resultado principal é a convexidade dinâmica do fluxo de Reeb. Se tal condição não for satisfeita, a existência de uma seção global se torna uma questão mais delicada. Hofer, Wysocki e Zehnder provam em [16] que, se λ é uma forma de contato *tight* e não-degenerada em S^3 , então o fluxo de Reeb associado à λ admite um sistema global de seções transversais. Este sistema global de seções transversais é obtido como a projeção de uma folheação estável de energia finita definida na simplectização de S^3 . Um caso de particular interesse é quando a forma de contato λ é fracamente convexa, nesta situação, o fluxo de Reeb pode admitir órbitas periódicas de índice de Conley-Zehnder 2. A existência de tal órbita periódica, não lincada com uma órbita periódica de índice de Conley-Zehnder 3, obstrui a existência de uma decomposição em livro aberto para o fluxo de Reeb.

Órbitas periódicas com índice de Conley-Zehnder 2 aparecem ‘naturalmente’ em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Como exemplo, nestes sistemas um equilíbrio do tipo sela-centro possui a variedade central folheada por órbitas periódicas chamadas órbitas periódicas de Lyapunov, estando cada uma delas em um nível de energia diferente. Além disso, tais órbitas possuem índice de Conley-Zehnder 2 neste nível de energia [17]. Dado um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade, Salomão introduz em [13] o chamado conjunto singular estritamente convexo $S \subset \mathbb{R}^4$. Este conjunto é um nível de energia homeomorfo à S^3 contendo uma única singularidade do tipo sela-centro e curvatura estritamente positiva em seus pontos regulares. Mesmo contendo uma singularidade, tal nível também possui uma órbita periódica simples P_0 , com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 [18].

Em [17], de Paulo e Salomão estudaram a dinâmica em níveis de energia logo acima de um conjunto singular estritamente convexo e garantiram a existência de uma folheação do tipo $2 - 3$ em tais níveis. Esta folheação possui duas encadernações, uma órbita periódica de índice de Conley-Zehnder 3 e a órbita periódica de Lyapunov, isto justifica o nome desta folheação. Os autores provam que existe uma componente fracamente convexa em tais níveis e obtém tal folheação por meio da projeção de uma folheação estável de energia finita na simplectização deste nível.

Mencionamos anteriormente que o sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles possui uma componente que é dinamicamente convexa para energia positiva inferior à $1/6$. Porém, para energia crítica $1/6$, o nível de energia possui uma componente homeomorfa à S^3 contendo exatamente três pontos críticos do tipo sela-centro. Motivados pelo trabalho de de Paulo e Salomão em [17], para níveis de energia logo acima de um conjunto singular estritamente convexo, a segunda parte deste trabalho se concentra em investigar a existência de uma folheação para níveis de energia logo acima do nível crítico no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles. Esta folheação deve conter como encadernações uma órbita periódica de índice de Conley-Zehnder 3 e três órbitas periódicas de Lyapunov, que estão localizadas nas chamadas ‘regiões de pescoço’ dos níveis de energia. Provamos que, para a energia logo acima da crítica existe uma componente que pode ser vista como uma hipersuperfície de contato. Provamos também que, cada nível de energia possui uma órbita periódica simples $\mathbb{Z}_3$ -simétrica, cujo índice de Conley-Zehnder é 3 e possui número de auto-enlaçamento -1 . Além disso, tal órbita não está lincada com nenhuma das órbitas periódicas de Lyapunov.

No capítulo 2, as duas primeiras seções apresentam conceitos básicos relacionados à sistemas Hamiltonianos, variedades simpléticas e de contato, bem como, a relação entre a dinâmica Hamiltoniana e a dinâmica de Reeb. Na terceira seção, serão expostos alguns invariantes dinâmicos associados às órbitas periódicas, como o índice de Conley-Zehnder e o número de auto-enlaçamento. Finalizamos o capítulo 2 com as chamadas curvas pseudo-holomorfas definidas em simplectizações e seus invariantes algébricos.

Na primeira e segunda seções do capítulo 3, definiremos seções globais para o fluxo de Reeb, os chamados Espaços lenticulares e apresentaremos o principal resultado deste trabalho. Na terceira seção, aplicamos nosso resultado principal em sistemas Hamiltonianos com 2 graus de liberdade que possuem certa simetria. Trazemos como exemplos os sistemas Hamiltonianos de Hénon-Heiles e o problema lunar de Hill regularizado. A demonstração do resultado principal poderá ser encontrada na quarta seção deste capítulo, porém por se tratar de uma construção que envolve uma série de resultados recentes, a quinta seção contém algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer da demonstração.

Na primeira seção do capítulo 4, apresentaremos os sistemas globais de seções transversais. Na segunda seção, apresentaremos o comportamento dinâmico próximo de um equilíbrio sela-centro, definiremos os conjuntos singulares estritamente convexos e apresentaremos a folheação $2-3$. Na última seção, definiremos a folheação $3-2^3$ e apresentaremos uma construção visando garantir a existência desta folheação em níveis de energia no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles.

NOÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos e alguns dos resultados preliminares que serão utilizados posteriormente. Será introduzida a noção de variedades simpléticas e de contato, bem como as noções de dinâmica Hamiltoniana e de Reeb. Feito isto, serão discutidos conceitos que envolvem invariantes dinâmicos associados à orbitas periódicas, tais como o índice de Conley-Zehnder e o número de auto-enlaçamento. Finalizamos este capítulo com uma breve discussão sobre curvas pseudo-holomorfas e algumas de suas aplicações. Este capítulo tem como base as seguintes referências [19, 20, 21, 22, 23, 24].

2.1 Dinâmica Hamiltoniana e variedades simpléticas

A geometria simplética tem como origem o estudo de sistemas Hamiltonianos. Tais sistemas descrevem a evolução de sistemas mecânicos de natureza conservativa e as equações são chamadas *equações de Hamilton*. Como exemplo, considere o movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$ de massa $m > 0$, submetida a um campo de forças conservativo F dado por

$$F(q) = -\nabla V(q),$$

em que $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ e $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a *energia potencial*. Para cada estado inicial dado pela sua posição e velocidade, podemos determinar completamente sua trajetória $q(t)$ em função do tempo por meio da segunda lei de Newton:

$$m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t)) = F(q(t)). \quad (2.1)$$

Seja agora $p = m\dot{q}$ o *momento linear* da partícula. Podemos descrever o sistema de três equações de segunda ordem (2.1), como um sistema de seis equações de primeira ordem nas variáveis q_i e p_i :

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\nabla V.$$

O espaço $\mathbb{R}^3 = \{(q_1, q_2, q_3)\}$ de possíveis posições é chamado *espaço das configurações*, enquanto que o espaço $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{(q, p)\}$ é chamado *espaço de fase*. A *energia total* da partícula denotada por H é dada por

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + V(q),$$

e podemos escrever (2.1) no espaço de fase como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.2)$$

As equações (2.2) são chamadas *equações de Hamilton* que descrevem o sistema.

Como vimos, as equações de Hamilton podem ser derivadas das equações de Newton, porém tais equações também podem ser expostas de uma forma mais intrínseca, por meio de um contexto mais geométrico. Considere o espaço de fase $\mathbb{R}^{2n}$, com coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Dada uma função suave $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, temos bem definido um campo de vetores dado por

$$X_H := J_0 \nabla H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (2.3)$$

chamado *campo Hamiltoniano*. Em que J_0 é uma matriz $2n \times 2n$ dada por

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

e a H é chamada *função Hamiltoniana*. O sistema Hamiltoniano (2.3) assume a forma

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)), \quad (2.5)$$

em que $x(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$. Assumiremos que o fluxo associado a (2.5) é completo. Note que a função Hamiltoniana H é sempre preservada ao longo das soluções de (2.5), pois

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla H(x(t)) \cdot J_0 \nabla H(x(t)) = 0.$$

Esta é uma das propriedades que dá ao formalismo Hamiltoniano seu caráter conservativo.

Tome a 2-forma em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i,$$

e sejam (q, p) e $v \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\begin{aligned}\omega_0(X_H(q, p), v) &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i(X_H(q, p), v) \\ &= \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i(J_0 \nabla H(q, p), v) \\ &= (J_0 \nabla H(q, p))^t J_0 v \\ &= -\nabla H(q, p)v,\end{aligned}$$

como (p, q) e $v \in \mathbb{R}^{2n}$ são quaisquer, podemos concluir que

$$\omega_0(X_H, \cdot) = -\nabla H(\cdot). \quad (2.6)$$

Desta forma, as equações de Hamilton pode ser vistas como o ‘gradiente’ de H associado à 2-forma ω_0 .

A construção realizada acima tem como objetivo apresentar e motivar a relação entre as equações de movimento e a dinâmica Hamiltoniana. Note que, as equações de Hamilton tem como espaço de fase o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$, porém é natural que sistemas Hamiltonianos não se encontrem limitados apenas a tais espaços. Como veremos a seguir, sistemas Hamiltonianos tem variedades simpléticas como espaço de fase.

Definição 2.1. *Seja W uma variedade suave e ω uma 2-forma definida em W . Dizemos que ω é uma forma simplética se:*

- ω é não-degenerada, isto é, $\ker \omega_x = \{0\}$, $\forall x \in W$,
- ω é fechada, ou seja $d\omega = 0$.

O par (W, ω) é chamado variedade simplética.

Exemplo 2.2. *O primeiro exemplo de variedade simplética é o próprio espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$, munido com forma simplética padrão*

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i. \quad (2.7)$$

Exemplo 2.3. *A esfera $S^2 \in \mathbb{R}^3$ munida da forma simplética*

$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \times v \rangle, \forall x \in S^2, \text{ e } \forall u, v \in T_x S^2.$$

Exemplo 2.4. Um exemplo relevante no estudo de sistemas Hamiltonianos é o fibrado cotangente T^*M de uma variedade suave M^n , munido com a 2-forma dada localmente nas coordenadas $(T^*U, (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n))$, por

$$\omega_{can} = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i,$$

em que $U \subset M$ é um aberto com coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$. Note que a forma simplética ω_{can} é a primitiva da 1-forma localmente definida em T^*M por

$$\lambda_{taut} = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i,$$

em que a 1-forma λ_{taut} é chamada forma tautológica. Além disso, as formas ω_{can} e λ_{taut} independem da escolha de coordenadas, portanto, são globalmente definidas em T^*M . Uma prova destas afirmações pode ser encontrada em [19].

Note que, os exemplos apresentados acima são variedades suaves de dimensão par. Esta não é uma coincidência, pois toda variedade simplética possui esta propriedade. De fato, seja (W, ω) uma variedade simplética de dimensão n e $x \in W$. Tome A a matriz que representa a aplicação bilinear $\omega_x : T_x W \times T_x W \rightarrow \mathbb{R}$. Sendo ω_x anti-simétrica e não-degenerada, temos que o determinante da matriz A é não-nulo, portanto

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A,$$

desta forma, n deve ser par. Além disso, a forma

$$\Lambda := \omega^n,$$

define uma forma volume em W e podemos concluir que W deve ser orientável.

Definição 2.5. Duas variedades simpléticas (W_1, ω_1) e (W_2, ω_2) são ditas *simplectomorfas* se existe um difeomorfismo $\psi : (W_1, \omega_1) \rightarrow (W_2, \omega_2)$ satisfazendo $\psi^* \omega_2 = \omega_1$. A aplicação ψ é chamada *simplectomorfismo*.

O Teorema de Darboux prova que não existem invariantes locais em geometria simplética, ou seja, variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente iguais. A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrado em [19].

Teorema 2.6 (Darboux). *Seja (W, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e $p \in W$. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica ω_0 definida em (2.7). Então existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de $p \in W$, $\mathcal{V}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e um simplectomorfismo $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que $\psi(p) = 0$ e $\psi^* \omega_0 = \omega$.*

Como mencionado anteriormente, sistemas Hamiltonianos tem como espaço de fase variedades simpléticas. Com o que já foi exposto podemos enunciar de uma forma mais geral a definição de um sistema Hamiltoniano.

Definição 2.7. *Um sistema Hamiltoniano é uma tripla (W, ω, H) , em que (W, ω) é uma variedade simplética e $H : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, chamada função Hamiltoniana.*

Associado a um sistema Hamiltoniano (W, ω, H) , motivados por (2.6), temos bem definido um campo Hamiltoniano X_H , dado implicitamente por

$$\iota_{X_H}\omega = -dH. \quad (2.8)$$

Como ω é não-degenerada, o campo X_H que satisfaz (2.8) existe e é único. Associado ao campo Hamiltoniano X_H , temos o sistema autônomo

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)),$$

também chamado *sistema Hamiltoniano*. Note que, o exemplo da partícula apresentado no início desta seção pode ser visto por meio desta formulação.

A seguir será apresentado um exemplo de sistema Hamiltoniano que servirá de motivação para o estudo da dinâmica de Reeb. Além disso, tal exemplo contribuirá para a compreensão do comportamento de um sistema Hamiltoniano próximo de um equilíbrio do tipo sela-centro, que será estudado com mais detalhes no capítulo 4.

Exemplo 2.8. *Considere os sistemas Hamiltonianos $(\mathbb{R}^2, \omega_0, H_i)$, $i = 1, 2$, cujas funções Hamiltonianas são dadas por*

$$H_1(q, p) = -qp \text{ e } H_2(q, p) = \frac{q^2 + p^2}{2}.$$

Para a função Hamiltoniana H_1 , o campo Hamiltoniano é dado por $X_{H_1}(q, p) = (-q, p)$ e o sistema Hamiltoniano possui a forma

$$\begin{cases} \dot{q} = -q \\ \dot{p} = p, \end{cases}$$

enquanto que para a função Hamiltoniana H_2 , o campo Hamiltoniano é dado por $X_{H_2}(q, p) = (p, -q)$ e o sistema Hamiltoniano possui a seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q. \end{cases}$$

A Figura 2.1 apresenta os espaços de fase dos sistemas Hamiltonianos associados à X_{H_1} e X_{H_2} .

Figura 2.1: A figura à esquerda representa o espaço de fase do sistema Hamiltoniano associado a H_1 e a figura à direita representa o espaço de fase do sistema Hamiltoniano associado a H_2 .

Sejam agora (W, ω, H) um sistema Hamiltoniano e $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo Hamiltoniano associado ao campo de vetores X_H .

Definição 2.9. Um ponto de equilíbrio de φ_t é um ponto $x \in W$, tal que $\varphi_t(x) = x$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Por meio das definições apresentadas acima não é difícil verificar que $x \in W$ é um ponto de equilíbrio se, e somente se, $X_H(x) = 0$ e, mais ainda, vale também $dH(x) = 0$. Além disso, a forma simplética é invariante pelo fluxo Hamiltoniano, ou seja, $\varphi_t^* \omega = \omega$, ver [21]. O caráter conservativo apresentado no início desta seção é mantido nesta formulação mais geral, ou seja, o fluxo Hamiltoniano φ_t preserva os níveis de energia. De fato, seja $H^{-1}(E)$, $E \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathcal{L}_{X_H} H = dH(X_H) = -\iota_{X_H} \omega(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0.$$

Desta forma, o estudo de um sistema Hamiltoniano pode ser realizado por meio do estudo da dinâmica restrita a seus níveis de energia. Dentre os possíveis níveis de energia estamos particularmente interessados em níveis do tipo *contato*. Na próxima seção serão apresentados conceitos básicos relacionados a tais níveis especiais.

2.2 Variedades de contato e dinâmica de Reeb

Podemos dizer que variedades de contato aparecem como análogas a variedades simpléticas, porém ao contrário de uma variedade simplética, uma variedade de contato possui dimensão ímpar. Seja M uma variedade suave de dimensão $2n + 1$ e $\xi \subset TM$ uma distribuição suave de hiperplanos. Dizemos que o par (M, ξ) é uma *variedade de contato*, se $\xi \subset TM$ é localmente definida como o núcleo de uma 1-forma λ que satisfaz

$$\lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0. \quad (2.9)$$

Neste caso, $\xi \subset TM$ é chamada uma *estrutura de contato* e a 1-forma λ é chamada uma *forma de contato*. Dizemos que (M, ξ) é co-orientável se existe 1-forma λ globalmente definida em M , tal que $\xi = \ker \lambda$.

Note que, se f é uma função suave que não se anula, então λ e $f\lambda$ definem a mesma estrutura de contato. Além disso, $\lambda \wedge (d\lambda)^n$ define uma forma volume em M , de modo que M deve ser orientável. Note também que a condição (2.9) é uma propriedade que depende apenas da estrutura de contato ξ e não da forma de contato que a define. De fato, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}/\{0\}$ temos

$$(f\lambda) \wedge (d(f\lambda))^n = f\lambda \wedge (fd\lambda + d\lambda \wedge \lambda)^n = f^{n+1}\lambda \wedge (d\lambda)^n \neq 0.$$

Portanto, se n é ímpar o sinal da forma volume depende apenas da estrutura de contato ξ . Desta forma, a estrutura de contato induz uma orientação em M . Suponha agora M orientada, se a orientação induzida por ξ coincide com a orientação de M , dizemos que (M, ξ) é uma *variedade de contato positiva*. Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato, temos bem definido o seguinte fibrado vetorial simplético $\xi \rightarrow M$. Mais precisamente, temos que $d\lambda|_{\xi}$ é não-degenerada e portanto, cada fibra $(\xi_p, d\lambda_p|_{\xi_p})$ é um espaço vetorial simplético.

Exemplo 2.10. *O primeiro exemplo de variedade de contato é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n+1}$, com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$. Temos que a 1-forma*

$$\tilde{\lambda}_0 = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i, \quad (2.10)$$

define uma forma de contato em $\mathbb{R}^{2n+1}$ e $\xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_0$ é chamada estrutura de contato padrão em $\mathbb{R}^{2n+1}$. A Figura 2.2 ilustra o comportamento da distribuição $\xi_0 \subset T\mathbb{R}^3$.

Figura 2.2: Ilustração da distribuição de hiperplanos $\xi_0 = \ker \lambda_0$ em $\mathbb{R}^3$.

Existe uma grande conexão entre variedades de contato e variedades simpléticas. Variedades de contato surgem ‘naturalmente’ como subvariedades de variedades simpléticas. Para apresentarmos mais exemplos de variedades de contato, será necessária a introdução de dois conceitos: campos de Liouville e hipersuperfícies de contato.

Definição 2.11. Dizemos que um campo de vetores Y , definido em um aberto $\mathcal{U}$ de uma variedade simplética (W, ω) é um campo de Liouville, se $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$.

Exemplo 2.12. Um exemplo de campo de Liouville em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é o campo radial

$$X(x) = \frac{x}{2},$$

em que $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Desta forma, temos

$$\lambda_0 = \iota_X \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i dp_i - p_i dq_i, \quad (2.11)$$

e $d\lambda_0 = \omega_0$. Mais ainda, seja $x_1 \in \mathbb{R}^{2n}$, temos que o campo radial centrado em $x_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, dado por

$$X(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (q_i - \alpha_i) \partial_{q_i} + (p_i - \beta_i) \partial_{p_i}.$$

é também um campo de Liouville. Estes campos radiais serão de suma importância no capítulo 4.

Definição 2.13. *Seja (W, ω) uma variedade simplética. Dizemos que uma hipersuperfície regular S é uma hipersuperfície de contato, se existe um campo de Liouville definido em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset W$ de S que é transversal a S .*

O resultado a seguir apresenta uma das relações entre variedades simpléticas e variedades de contato:

Proposição 2.14. *Seja (W, ω) uma variedade simplética e S uma hipersuperfície de contato. Então existe 1-forma λ definida em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de S , tal que $(S, \xi = \ker \lambda)$ é uma variedade de contato. Além disso, $d\lambda|_S = \omega|_S$.*

Demonstração. Seja S uma hipersuperfície de contato de uma variedade simplética (W, ω) . Então existe um campo de Liouville Y definido em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset W$ de S , que é transversal a S . Afirmamos que

$$\lambda := \iota_Y \omega$$

define uma forma de contato restrita a S . Note inicialmente que pela fórmula de Cartan, temos

$$\omega = \mathcal{L}_Y \omega = d\iota_Y \omega + \iota_Y d\omega = d\iota_Y \omega,$$

e, portanto, $d\lambda = \omega$. Como S tem dimensão ímpar, para todo $x \in S$, existe $X(x) \in T_x S$, tal que $\omega_x(X(x), v) = 0, \forall v \in T_x S$ e $X(x) \neq 0$. Segue que $\lambda_x(X(x)) = \omega_x(Y(x), X(x)) \neq 0$, pois ω é não-degenerada. Seja $H_x \subset T_x S$ o hiperplano complementar a $X(x)$ definido por $H_x := \{v \in T_x S; \lambda_x(v) = \omega_x(Y(x), v) = 0\}$. Como ω é não-degenerada, $d\lambda|_{H_x} = \omega|_{H_x}$ também é não-degenerada. Tome agora $\{e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ uma base simplética para $(H_x, d\lambda|_{H_x})$, uma prova da existência desta base pode ser encontrada em [19]. Desta forma, temos

$$\lambda \wedge (d\lambda)^{n-1}(X(x), e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}) = \lambda(X(x))(d\lambda)^{n-1}(e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}) \neq 0.$$

■

Pela Proposição 2.14, segue que toda hipersuperfície em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ transversal ao campo radial pode ser vista como uma variedade de contato. Mais precisamente, dizemos que uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ é *star-shaped* (estrelada) com relação à origem, se toda semi-reta partindo da origem, intersecta S transversalmente em um único ponto. Como exemplos, temos que esferas S^{2n-1} são variedades de contato, porém nem toda variedade difeomorfa à S^{2n-1} é uma variedade de contato, ver [22, 25].

Definição 2.15. *Sejam $(M_1, \xi_1 = \ker \lambda_1)$ e $(M_2, \xi_2 = \ker \lambda_2)$ variedades de contato. Dizemos que M_1 e M_2 são contactomorfas, se existe um difeomorfismo $\psi : M_1 \rightarrow M_2$, tal que $\psi_* \xi_1 = \xi_2$, em que ψ é chamado contactomorfismo. Se o contactomorfismo ψ é tal que $\psi^* \lambda_1 = \lambda_2$, dizemos que ψ é um contactomorfismo estrito.*

Assim como em variedades simpléticas, não existem invariantes locais entre variedades de contato. É isso o que diz o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [19]:

Teorema 2.16 (Darboux). *Seja (M, λ) uma variedade de contato de dimensão $2n + 1$. Existem vizinhanças $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ e $\mathcal{V}$ de $x \in M$, e um difeomorfismo $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ centrado em x , tal que $\psi^* \lambda = \lambda_0$, em que λ_0 é a forma de contato em $\mathbb{R}^{2n}$ definida em (2.11).*

Seja agora $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato. O campo de vetores definido implicitamente por

$$\begin{cases} \iota_{X_\lambda} d\lambda = 0 \\ \iota_{X_\lambda} \lambda = 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

é chamado *campo de Reeb* associado a forma de contato λ . A Figura 2.3 ilustra a estrutura de contato ξ dada pelo núcleo da 1-forma λ e o campo de Reeb X_λ .

Figura 2.3: Ilustração da estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ e do campo de Reeb X_λ .

O campo de Reeb X_λ gera um fluxo $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sobre M , chamado *fluxo de Reeb* em que

$$\dot{x}(t) = X_\lambda(x(t)).$$

Note que, o fluxo de Reeb preserva a forma de contato. De fato

$$\mathcal{L}_{X_\lambda} \lambda = d\iota_{X_\lambda} \lambda + \iota_{X_\lambda} d\lambda = 0.$$

Além disso, a estrutura de contato $\xi = \ker \lambda$ também é preservada, ou seja, $\phi_t^* \xi = \xi$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.17. *Seja $\mathbb{R}^{2n+1}$, com coordenadas $(q, p, z) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, z)$ e munido da forma de contato λ_0 definida em (2.11). Temos que o campo de Reeb é dado por $X_{\lambda_0} = \partial_z$.*

De fato, da primeira equação de (2.12), temos que

$$\iota_{\partial_z} d\lambda_0 = \iota_{\partial_z} \left(\sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \right) = 0.$$

e para a segunda equação de (2.12), segue

$$\iota_{\partial_z} \lambda_0 = dz(\partial_z) = 1.$$

Exemplo 2.18. *Seja agora $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Temos que a 1-forma*

$$\lambda_0 = \iota_{\frac{x}{2}} \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i - q_i dp_i$$

define uma forma de contato quando restrita à S^{2n-1} . Por meio de uma verificação direta como a realizada no exemplo anterior, temos que campo de Reeb associado a λ_0 em S^{2n-1} é dado por

$$X_{\lambda_0} = 2 \sum_{i=1}^n p_i \partial_{q_i} - q_i \partial_{p_i}.$$

A Figura 2.4 ilustra o comportamento do campo de Reeb para $n = 1$.

Figura 2.4: Ilustração do campo de Reeb X_{λ_0} definido em S^1 .

Note que, no exemplo 2.18, para $n = 1$, obtemos $X_{\lambda_0} = 2(p, -q)$, $(q, p) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Neste caso, o campo de Reeb é igual a um múltiplo do campo Hamiltoniano X_H definido no Exemplo 2.8, restrito ao nível de energia $H^{-1}(1)$. Este fato não é uma mera coincidência, veremos a seguir que existe uma grande conexão entre o campo Hamiltoniano e o campo de Reeb.

Seja S contido em um nível de energia regular $H^{-1}(E)$, $E \in \mathbb{R}$, uma hipersuperfície de contato. Pela Proposição 2.14, temos que $\lambda|_S := (\iota_Y \omega)|_S$ define uma forma de contato em S e portanto o par $(S, \xi = \ker \lambda)$ é uma variedade de contato, em que Y é um campo de Liouville transversal à S . Além disso, a forma de contato λ satisfaz $d\lambda|_S = \omega|_S$. Por meio da definição do campo Hamiltoniano X_H e do fato de $E \in \mathbb{R}$ ser um valor regular de H , obtemos que

$$\omega_x(X_H(x), v) = (\iota_{X_H} \omega)_x(v) = -d_x H(v) = 0,$$

para quaisquer $x \in S$ e $v \in T_x S$. Desta forma, $X_H|_S$ pode ser visto como uma seção no fibrado de linhas, dado por $\ker \omega|_S = \ker d\lambda$. O mesmo ocorre com o campo de Reeb X_λ , pois por definição $\iota_{X_\lambda} \omega = 0$. Portanto, $X_H|_S$ e X_λ diferem apenas por um fator multiplicativo não-nulo. Disto, podemos concluir que o fluxo Hamiltoniano restrito a uma hipersuperfície de contato $S \in H^{-1}(E)$, com $E \in \mathbb{R}$, coincide com o fluxo de Reeb em S a menos de uma reparametrização no tempo.

Com o passar dos anos muitas técnicas foram desenvolvidas com objetivo compreender o comportamento do fluxo de Reeb, e conseqüentemente, o comportamento do fluxo Hamiltoniano restrito a hipersuperfícies de contato. Neste trabalho, estamos particularmente interessados em sistemas Hamiltonianos definidos em $\mathbb{R}^4$ e certos níveis de energia que são hipersuperfícies de contato. A partir deste momento, ficará subentendido que $\dim(M) = 3$.

Martinet provou em [26] que toda variedade suave co-orientável compacta admite uma forma de contato. Nestas variedades as estruturas de contato são classificadas como *overtwisted* ou *tight*. Uma estrutura de contato ξ é dita *overtwisted*, se existe um disco mergulhado $D \hookrightarrow M$, em que $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, tal que

$$\begin{cases} T_z(\partial D) \subset \xi_z \\ T_z D \not\subset \xi_z. \end{cases}$$

Se tal disco não existe a estrutura de contato é dita *tight*. Eliashberg apresenta em [27], uma classificação de estruturas de contato *overtwisted* em variedades suaves compactas orientáveis. A Figura 2.5 ilustra um disco *overtwisted* D em uma variedade de contato M .

Figura 2.5: Ilustração de um disco *overtwisted*.

Bennequin provou em [28], que a estrutura de contato em $\mathbb{R}^3$ definida como o núcleo da 1-forma de contato $\tilde{\lambda}_0$ definida em (2.11) é *tight*. Porém, dado um ponto $p \in S^3$, existe um difeomorfismo $\psi : S^3 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\psi^* \tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$, em que λ_0 é a forma de contato padrão em S^3 . Desta forma, temos que a estrutura de contato padrão $\ker \tilde{\lambda}_0 = \xi_0$ em S^3 também é *tight*.

Definição 2.19. *Sejam (M, ξ_0) e (M, ξ_1) variedades de contato e M fechada. As estruturas de contato ξ_0 e ξ_1 são ditas isotópicas, se existe uma família de difeomorfismos suaves $\psi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, tal que $\psi_0 = Id$, $\xi_t = (\psi_t)_* \xi_0$ é uma estrutura de contato em M para todo $t \in [0, 1]$ e $(\psi_1)_* \xi_0 = \xi_1$.*

As formas de contato definidas em S^3 do tipo $f\lambda_0|_{S^3}$, em que $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definem a estrutura de contato padrão em S^3 , e por meio do Teorema de classificação de Eliashberg presente em [27], esta é a única estrutura de contato *tight* em S^3 , a menos de isotopias. Desta forma, podemos concluir que, a menos de difeomorfismos, uma forma de contato em S^3 é *tight* se, e somente se, é da forma $f\lambda_0|_{S^3}$, para alguma função suave $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposição 2.20. *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e S uma hipersuperfície estrelada de $\mathbb{R}^4$ contida em um nível de energia regular de H . Então o fluxo Hamiltoniano restrito à S é equivalente ao fluxo do campo de Reeb X_λ em S^3 associado a forma de contato $\lambda = f_S \lambda_0|_{S^3}$, em que $f_S : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função suave.*

A Proposição 2.20 motiva o estudo de formas de contato $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$, em que $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função suave. Ao estudar a dinâmica do fluxo de Reeb associada a estas formas de contato, estamos estudando indiretamente o fluxo Hamiltoniano em níveis de energia estrelados.

2.3 Invariantes dinâmicos

Nesta seção apresentaremos de uma forma resumida conceitos relacionados à invariantes dinâmicos associados à órbitas periódicas; invariantes como o índice de Conley-Zehnder, número de rotação transversal e número de auto-enlaçamento. Esta seção tem como principais referências [9, 16, 29, 30].

2.3.1 Índice de Conley-Zehnder generalizado

O índice de Conley-Zehnder é um invariante da dinâmica linearizada ao longo de uma órbita periódica de um sistema Hamiltoniano. Existem várias formas para se definir o índice de Conley-Zehnder. Nesta seção apresentaremos uma definição espectral. Apesar de ser mais abstrata, tal definição é muito útil na análise do comportamento assintótico de aplicações pseudo-holomorfas que veremos mais adiante.

Seja $S : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave, tal que $S(t)^T = S(t)$, $\forall t$. Identifique $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^{2 \times 2} \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ e considere o operador ilimitado

$$L_S = -i\partial_t - S(t), \quad (2.13)$$

chamado *operador assintótico*, definido no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, com domínio $W^{1,2}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ e munido com a estrutura induzida pelo produto interno euclidiano em $\mathbb{C}$. Hofer, Wysocki e Zehnder apresentam em [29] várias propriedades associadas ao operador (2.13). O espectro $\sigma(L_S)$ é dado por uma sequência discreta de autovalores que se acumula em $\pm\infty$. Para $\eta \in \sigma(L_S)$, temos que todo autovetor (auto-seção) $e : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ associada ao autovalor η , nunca se anula, portanto, temos bem definido um *winding number* definido por

$$\text{wind}(e, \eta) = \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)) \in \mathbb{Z},$$

para alguma função contínua $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $e(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t)}$. Além disso, este número não depende da escolha do autovetor (auto-seção) $e(t)$, portanto, será denotada apenas por $\text{wind}(\eta)$. Outra propriedade do operador (2.13) é que, se $\eta_1 \leq \eta_2$, então $\text{wind}(\eta_1) \leq \text{wind}(\eta_2)$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existem exatamente dois autovalores (contando multiplicidades) cujo o *winding number* é igual à k .

Denote agora por $Sp(2)$ o grupo das matrizes simpléticas 2×2 e considere o conjunto Σ das aplicações suaves $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Sp(2)$ que satisfaz

$$\varphi(t+1) = \varphi(t)\varphi(1), \forall t, \text{ e } \varphi(0) = \text{Id}.$$

Temos que $S(t) := -i\varphi'(t)\varphi(t)^{-1}$ define um caminho suave de matrizes 1-periódicas que satisfaz $S(t)^T = S(t)$, $\forall t$. Desta forma, temos bem definido o operador ilimitado L_S como em (2.13), possuindo as mesmas propriedades. Neste momento, estamos interessados em autovalores especiais dados por

$$\eta^{\geq 0} = \min\{\eta \in \sigma(L_S); \eta \geq 0\} \text{ e } \eta^{< 0} = \max\{\eta \in \sigma(L_S); \eta < 0\}.$$

Definição 2.21. *O índice de Conley-Zehnder do caminho φ é definido por*

$$\mu_{CZ}(\varphi) = \text{wind}(\eta^{< 0}) + \text{wind}(\eta^{\geq 0}). \quad (2.14)$$

Antes de apresentarmos a relação entre o índice de Conley-Zehnder e órbitas periódicas do fluxo de Reeb, iremos expor de forma resumida conceitos relacionados a trivializações de fibrados. Seja $\Pi : E \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um fibrado vetorial orientado, tal que $\text{rank}_{\mathbb{R}}(E) = 2$. Denote por Ω_E^+ o conjunto das classes de trivializações orientadas de E , ou seja, de isomorfismos de fibrados

$$\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2,$$

tal que, para cada $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\Psi(t) : E_t \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um symplectomorfismo. Dada uma seção não-nula $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto Z(t) \in \Pi^{-1}(t)$, existe uma seção não-nula Z' , tal que $\{Z(t), Z'(t)\}$ é uma base orientada de $\Pi^{-1}(t)$, $\forall t$. Desta forma, $\{Z, Z'\}$ determina uma trivialização orientada e sua classe de homotopia $\beta \in \Omega_E^+$ depende apenas de Z , a menos de homotopias por meio de seções não-nulas. A classe β é chamada *classe induzida por Z* [9]. Para outra seção não-nula W , temos que $W(t) = a(t)Z(t) + b(t)Z'(t)$, para únicas funções a e b . Além disso, temos que

$$\text{wind}(W, Z) := \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)) \in \mathbb{Z}, \quad (2.15)$$

em que $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave que satisfaz $a(t) + ib(t) \in \mathbb{R}^+ e^{i\theta(t)}$. Este inteiro depende apenas das classes de homotopias das seções não-nulas Z e W . Seja $\beta' \in \Omega_E^+$ a classe de homotopia orientada induzida por W , denotaremos $\text{wind}(\beta', \beta) = \text{wind}(W, Z)$.

Seja agora $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato e seja $P = (x, T)$ uma órbita periódica do fluxo de Reeb $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ associado ao campo de Reeb X_λ , isto é, $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ satisfaz $x(t) = \phi_t(x(0))$, é periódica, e $T > 0$ é o período de x . Dizemos que P é simples, se T é o menor período positivo de P . Denotamos por $\mathcal{P}(\lambda)$ o conjunto das classes de equivalência de órbitas periódicas do fluxo de Reeb de λ com a identificação

$$P = (x, T) \sim Q = (y, T') \Leftrightarrow T = T' \text{ e } x(\mathbb{R}) = y(\mathbb{R}).$$

A órbita periódica $P = (x, T)$ é dita contrátil se a aplicação

$$x_T : t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto x(Tt) \in M \quad (2.16)$$

é contrátil em M . Como vimos, a estrutura de contato é preservada pelo fluxo ϕ_t , ou seja, $\phi_t^* \xi = \xi$, $\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desta forma, se $P = (x, T)$ é uma órbita periódica, temos

$$d\phi_1(x_T(0))(\xi_{x_T(0)}) = \xi_{\phi_1(x_T(0))} = \xi_{x_T(1)} = \xi_{x_T(0)},$$

portanto, está bem definida a aplicação $d\phi_1(x_T(0)) : \xi_{x_T(0)} \rightarrow \xi_{x_T(0)}$. Dizemos que a órbita periódica $P = (x, T)$ é *não-degenerada* se o valor 1 não faz parte do espectro da aplicação $d\phi_1(x_T(0))$, caso contrário, P é dita *degenerada*. Se todas as órbitas periódicas forem não-degeneradas, dizemos que λ é uma *forma de contato não-degenerada*. Por meio da construção realizada acima, temos bem definido um fibrado vetorial $(x_T)^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ orientado por λ . Agora escolha uma trivialização $d\lambda$ -simplética $\Psi : (x_T)^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ representando uma classe $\beta \in \Omega_{(x_T)^* \xi}^+$. Podemos definir um caminho de matrizes simpléticas $\varphi \in \Sigma$ por

$$\varphi(t) := \Psi_t \cdot d\phi_{Tt} \cdot (\Psi_0)^{-1}, \quad (2.17)$$

em que Ψ_t é a restrição de Ψ à fibra sobre t . Temos então que o *índice de Conley-Zehnder* de (P, β) é o inteiro

$$\mu_{CZ}(P, \beta) := \mu_{CZ}(\varphi),$$

em que $\mu_{CZ}(\varphi)$ foi definida em (2.14). Este inteiro não depende da escolha da trivialização Ψ na classe β . Além disso, se $\beta' \in \Omega_{(x_T)^* \xi}^+$, temos a seguinte relação

$$\mu_{CZ}(P, \beta) = \mu_{CZ}(P, \beta') + 2\text{wind}(\beta', \beta). \quad (2.18)$$

Se P é contrátil em M , podemos considerar uma aplicação $v : D \rightarrow M$, em que $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, satisfazendo $v(e^{2\pi i t}) = x(Tt)$, $\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Temos que o fibrado simplético $v^* \xi \rightarrow D$ é trivial, ou seja, existe uma trivialização

$$\Psi : v^* \xi \rightarrow D \times \mathbb{R}^2,$$

tal que, para cada $z \in D$, $\Psi(z) : \xi_{v(z)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um symplectomorfismo. Se definirmos o caminho de matrizes simpléticas como em (2.17) utilizando trivialização acima e $\pi_2(M) = 0$, esta classe não depende do disco v . Desta forma, temos bem definida uma classe especial $\beta_{\text{disk}} \in \Omega_{(x_T)^* \xi}^+$, induzida por trivializações que se estendem à um disco.

2.3.2 Índice de Conley-Zehnder geométrico e número de rotação transversal

Considere o caminho de matrizes simpléticas definido em (2.17). Uma descrição geométrica do índice de Conley-Zehnder foi apresentada em [16]. Seja $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, temos que o arco de matrizes $\varphi(t)$ transforma o vetor z_0 conforme $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ varia. Considere o caminho de vetores em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$z(t) = \varphi(t)z_0.$$

Devido a forma com que o caminho de matrizes é definido, temos que $z(t)$ é solução do problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = J_0 S(t) z(t) \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

desta forma, temos que $z(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pois $z_0 = z(0) \neq 0$. Seja $\theta_{z_0} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $z(t) = |z(t)|e^{2\pi i \theta_{z_0}(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Estamos interessados na variação do argumento realizado por $z(t)$, devido a variação de t . Basicamente, é a variação angular dos vetores na estrutura de contato ξ , devido à ação do fluxo linearizado ao longo da órbita periódica P , com relação à trivialização Ψ .

Defina agora a função contínua $\Delta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta(z_0) := \theta(1) - \theta(0).$$

Temos que vetores linearmente dependentes possuem a mesma imagem, de modo que $\Delta(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \Delta(S^1)$. Como S^1 é conexo, compacto e a função Δ é contínua, segue que $\Delta(S^1) = I_\varphi = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso, em [16] os autores provam que o comprimento do intervalo I_φ é estritamente menor do que $1/2$. Dado $\epsilon > 0$, defina o intervalo transladado

$$I_\varphi^\epsilon = I_\varphi - \epsilon.$$

Sendo o comprimento do intervalo menor do que $1/2$, temos que apenas duas possibilidades podem ocorrer: I_φ^ϵ está contido entre dois inteiros consecutivos, para todo $\epsilon > 0$ pequeno, ou I_φ^ϵ contém um número inteiro em seu interior, para qualquer $\epsilon > 0$ pequeno.

Definição 2.22. *O índice de Conley-Zehnder geométrico da órbita periódica P é dado por*

$$\mu_{CZ}^g(P, \beta) = \begin{cases} 2k + 1, & \text{se } I_\varphi^\epsilon \subset (k, k + 1), \forall \epsilon > 0 \text{ pequeno} \\ 2k, & \text{se } k \in I_\varphi^\epsilon \setminus \partial I_\varphi^\epsilon, \forall \epsilon > 0 \text{ pequeno} . \end{cases}$$

Da mesma forma que o índice de Conley-Zehnder generalizado, o índice de Conley-Zehnder geométrico não depende da escolha da trivialização Ψ na classe $\beta \in \Omega_{(x_T)^*\xi}^+$. Por meio da construção do índice de Conley-Zehnder geométrico, temos que $\mu_{CZ}^g(P, \beta)$ estima a variação angular dos vetores não-nulos da estrutura de contato ξ sob a ação do fluxo linearizado ao longo da órbita periódica P , com relação a um referencial de ξ . Uma demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [30].

Proposição 2.23. *Se $P = (x, T)$ é uma órbita periódica não-degenerada, então $\mu_{CZ}^g(P, \beta) = \mu_{CZ}(P, \beta)$.*

Mantendo a notação da construção realizada acima, apresentaremos outro invariante associado à órbita periódica P , tal invariante dado por

$$\rho(P, \beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\theta_{z_0}(t)}{2\pi t}$$

e chamado *número de rotação transversal*. Este número não depende da escolha de $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e da trivialização simplética Ψ na classe β . Seja $n \geq 1$ um inteiro e denote por $P^n := (x, nT)$ a n -ésima iterada da órbita periódica $P = (x, T)$. Temos que a seguinte relação é válida

$$\rho(P^n, \beta^n) = n\rho(P, \beta), \quad (2.19)$$

em que $\beta^n \in \Omega_{(x_{nT})^*\xi}^+$ é a classe induzida por $\beta \in \Omega_{(x_T)^*\xi}^+$. Se a órbita periódica P^n é não-degenerada, segue que

$$\mu_{CZ}(P^n, \beta^n) = \begin{cases} n\mu_{CZ}(P, \beta), & \text{se } P^n \text{ é hiperbólica} \\ 2\lfloor n\rho(P, \beta) \rfloor + 1, & \text{se } P^n \text{ é elíptica.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Além disso $\mu_{CZ}(P, \beta) = 2$ se, e somente se, $\rho(P, \beta) = 1$.

2.3.3 Número de auto-enlaçamento racional

Seja (M, ξ) uma variedade de contato positiva. Um nó $K \subset M$ é dito k -não-nó, $k \in \mathbb{N}$, se existe uma imersão $u : D \rightarrow M$, com $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, tal que $u|_{\text{int}(D)}$ é um mergulho e $u|_{\partial D} : \partial D \rightarrow K$ é um k -recobrimento. Neste caso a aplicação u é chamada k -disco para o nó K . Se K já está munido de uma orientação, dizemos que o k -disco u está orientado, se $u|_{\partial D}$ preserva orientação, quando ∂D está munido da orientação natural dada por $\mathbb{C}$. Suponha agora que K é transversal à estrutura de contato ξ em M e tome uma

seção Z não-nula de $u^*\xi$. Para $\epsilon > 0$ pequeno, considere a perturbação $K_\epsilon : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow M \setminus K$, dada por

$$K_\epsilon(t) := \exp(\epsilon Z(e^{2\pi i t})),$$

para alguma aplicação exponencial, ver Figura 2.6.

Figura 2.6: Ilustração de um 1-disco $u(D)$ e da perturbação K_ϵ .

Definição 2.24. O número de auto-enlaçamento racional $sl(K, u) \in \mathbb{Q}$ é definido por

$$sl(K, u) = \frac{1}{k^2} \#(K_\epsilon \cap u) \text{ (número de interseção orientado).}$$

Este inteiro $sl(K, u)$ não depende da escolha de $\epsilon > 0$ pequeno, da exponencial $\exp$ e da seção não-nula Z . Se $\pi_2(M) = 0$, então o número de auto-enlaçamento racional $sl(K, u)$ também não depende da escolha do k -disco u e será denotado apenas por $sl(K)$ [31].

2.4 Curvas pseudo-holomorfas

Nesta seção, introduzimos a noção de curvas pseudo-holomorfas em uma variedade simplética. No caso particular de symplectizações de variedades de contato, definimos a energia de Hofer de tais curvas e apresentamos sua relação com a dinâmica de Reeb.

Seja $E \rightarrow X$ um fibrado vetorial suave. Uma *estrutura simplética* em E é uma 2-forma ω não-degenerada sobre E , tal que para cada $x \in X$, $\omega_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear, anti-simétrica e não-degenerada. O par (E, ω) é chamado *fibrado vetorial simplético*. Uma *estrutura complexa* em E é uma aplicação suave de fibrados $J : E \rightarrow E$

sobre a identidade de X satisfazendo $J^2 = -Id$. O par (E, J) é chamado *fibrado vetorial complexo*.

Definição 2.25. Dizemos que uma estrutura complexa J é compatível com a estrutura simplética ω em E se

$$g_J(x)(\cdot, \cdot) := \omega_x(\cdot, J\cdot),$$

define um produto interno na fibra E_x , para todo $x \in X$. Neste caso, J é chamada de estrutura ω -compatível em E e o espaço de tais estruturas é denotado por $\mathcal{J}(E, \omega)$.

Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável X e ω uma estrutura simplética em E . Para cada métrica em E , é possível associar uma estrutura complexa $J : E \rightarrow E$ compatível com ω , e portanto, $\mathcal{J}(E, \omega)$ é não-vazio. Mais ainda, é possível mostrar que o espaço $\mathcal{J}(E, \omega)$ é contrátil [19]. Como primeiro exemplo, seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato, temos que $(\xi, d\lambda|_\xi)$ define um fibrado vetorial simplético sobre M , pois $d\lambda|_\xi$ é não-degenerada. É comum denotar o espaço das estruturas complexas $J : \xi \rightarrow \xi$ compatíveis com $d\lambda|_\xi$, simplesmente por $\mathcal{J}(\lambda)$.

Se o fibrado vetorial é o fibrado tangente de uma variedade suave W , uma estrutura complexa J em TW é conhecida como uma estrutura quase-complexa em W e o par (W, J) é chamado variedade quase-complexa. Se W está munida com uma forma simplética ω , uma estrutura complexa ω -compatível em TW recebe o nome de estrutura quase-complexa ω -compatível em W . O espaço das estruturas quase complexas ω -compatíveis em W será denotado por $\mathcal{J}(W, \omega)$.

Exemplo 2.26. Seja $W = \mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$. A aplicação $J_0 : T\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T\mathbb{R}^{2n}$ representada pela matriz constante

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

é uma estrutura quase-complexa ω_0 -compatível em $\mathbb{R}^{2n}$, pois $\omega_0(\cdot, J_0\cdot)$ coincide com o produto interno canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^{2n}$.

Neste momento estamos em condições de introduzir o conceito de curvas pseudo-holomorfas que serão fundamentais no decorrer deste texto. Em 1985, Gromov utilizou a noção de curva pseudo-holomorfa, ou J -holomorfa no estudo de propriedades globais de variedades simpléticas [32].

Definição 2.27. *Sejam (S, j) uma superfície de Riemann e (W, J) uma variedade quase-complexa. Uma aplicação $u : S \rightarrow W$ é dita uma curva pseudo-holomorfa, ou curva J -holomorfa, se satisfaz as equações (não-lineares) de Cauchy-Riemann*

$$\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}(du + J(u) \circ du \circ j) = 0.$$

Em outras palavras, cada diferencial $du(z) : T_z S \rightarrow T_{u(z)} W$ preserva multiplicações complexas: $du(z) \circ j_z = J_{u(z)} \circ du(z)$.

Desta forma, funções holomorfas definidas entre superfícies de Riemann são exemplos de curvas pseudo-holomorfas. Note que, se $u : (S, j) \rightarrow (W, J)$ é J -holomorfa e $\psi : (S', j') \rightarrow (S, j)$ é holomorfa, então $u \circ \psi$ também é J -holomorfa.

2.4.1 Simplectizações

Estamos particularmente interessados em curvas pseudo-holomorfas definidas em simplectizações de variedades de contato. Tal noção foi apresentada inicialmente por Hofer em [33]. Nesse trabalho, Hofer provou que a existência de curvas pseudo-holomorfas de energia finita está intimamente relacionada à existência de órbitas periódicas do campo de Reeb.

Definição 2.28. *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato. A simplectização de M é o espaço $\mathbb{R} \times M$ munido da estrutura simplética $d(e^a \lambda)$. Aqui a denota a coordenada real e λ é vista como uma 1-forma em $\mathbb{R} \times M$ (pull-back pela projeção canônica em M).*

Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato. Dada $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura complexa $d\lambda|_\xi$ -compatível na estrutura de contato ξ , define-se uma estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ na simplectização $\mathbb{R} \times M$, dada por

$$\tilde{J}|_\xi = J \quad \text{e} \quad \tilde{J} \cdot \partial_a = X_\lambda,$$

em que X_λ e ξ são vistos em $\mathbb{R} \times M$, como objetos $\mathbb{R}$ -invariantes. Além disso, temos que a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ é $d(e^a \lambda)$ -compatível, veja [33].

Denote por $\pi : TM \rightarrow \xi$ a projeção em ξ ao longo da direção do campo de Reeb X_λ , ou seja, $\pi_w(k) = k - \lambda_w(k)X_\lambda(w)$, para todo $w \in M$ e $k \in T_w M$. Segue que, para a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ é válido

$$\tilde{J}_{(a,w)}(h, k) = (-\lambda_w(k), J_w \cdot \pi_w(k) + hX_\lambda(w)),$$

em que $(a, w) \in \mathbb{R} \times M$, $(h, k) \in T_{(a,w)}(\mathbb{R} \times M)$. Além disso, a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$ é $\mathbb{R}$ -invariante, ou seja, $T_c^* \tilde{J} = \tilde{J}$, para todo $c \in \mathbb{R}$, em que $T_c : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é a translação na coordenada real dada por $T_c(a, w) = (a + c, w)$. Em determinados momentos denotaremos a estrutura quase-complexa por $\tilde{J} = (J, \lambda)$. Desta forma, a simplectização de uma variedade de contato torna-se uma variedade quase-complexa munida com a estrutura quase-complexa $\tilde{J}$.

Definição 2.29. *Seja (S, j) uma superfície de Riemann compacta e $\Gamma \in S \setminus \partial S$ um conjunto finito. Uma aplicação não-constante $\tilde{u} : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é chamada superfície de energia finita, se satisfaz*

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}}(\tilde{u}) = \frac{1}{2}(d\tilde{u} + \tilde{J}(\tilde{u}) \circ d\tilde{u} \circ j) = 0, \quad (2.21)$$

e possui energia de Hofer finita

$$E(\tilde{u}) = \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{S \setminus \Gamma} \tilde{u}^* d(\phi \lambda) < \infty.$$

Em que $\Lambda := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]); \phi' \geq 0\}$ e ϕ é vista como uma função em $\mathbb{R} \times M$ que depende apenas da coordenada real.

Por meio do Teorema de Stokes, se $\tilde{u} : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é uma superfície de energia finita e S uma superfície de Riemann fechada, temos que $\Gamma \neq \emptyset$. Os pontos $z \in \Gamma$ são chamados furos da superfície de energia finita $\tilde{u} : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$.

Denote por $\tilde{u} = (a, u)$ as componentes de uma superfície de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times M$, temos que (2.21) se reduz à

$$u^* \lambda \cdot j = da \quad \text{e} \quad J \cdot \pi \cdot du = \pi \cdot du \cdot j. \quad (2.22)$$

Seja $z \in S \setminus \partial S$ e tome coordenadas holomorfas $\Psi_z : (D \subset \mathbb{C}, i) \rightarrow (\mathcal{U} \subset S, j)$ em torno de z , em que i é a estrutura complexa usual em $\mathbb{C}$. Temos que (2.22) pode ser escrito nas coordenadas $s + it \in D$, como

$$\begin{cases} \lambda(u_t(s, t)) = a_s(s, t) \\ \lambda(u_s(s, t)) = -a_t(s, t) \\ \pi u_s(s, t) + J(u(s, t)) \pi u_t(s, t) = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

em que, por simplicidade, denotamos a composição $\tilde{u} \circ \psi_z(s, t)$ apenas por $\tilde{u}(s, t) = (a(s, t), u(s, t))$.

Em torno de $z \in \Gamma \subset S$, é conveniente tomar coordenadas cilíndricas positivas $(s, t) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definidas por $(s, t) \simeq \psi_z(e^{-2\pi(s+it)})$, ou coordenadas cilíndricas negativas $(s, t) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definidas por $(s, t) \simeq \psi_z(e^{2\pi(s+it)})$.

Definição 2.30. *Sejam (s, t) coordenadas cilíndricas positivas em torno de um furo $z \in \Gamma$. Definimos a massa do furo z por*

$$m(z) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{s \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}} u^* \lambda.$$

Um furo z é dito *positivo* se $m(z) > 0$, neste caso, temos que $a(\zeta) \rightarrow +\infty$, quando $\zeta \rightarrow z$. Um furo z é dito *negativo* se $m(z) < 0$, neste caso, temos que $a(\zeta) \rightarrow -\infty$, quando $\zeta \rightarrow z$. Um furo z é dito *removível* se $m(z) = 0$, neste caso, a componente real a é limitada em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de z . Além disso, por meio do Teorema de Remoção de Singularidade devido a Gromov, temos que uma superfície de energia finita pode ser estendida suavemente em um furo removível, veja [33]. Novamente, por meio do Teorema de Stokes, pode-se garantir que uma superfície de energia finita possui pelo menos um furo positivo.

A partir deste momento assumiremos que todos os furos de uma superfície de energia finita $\tilde{u} : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ são não-removíveis. O sinal de um furo positivo é $\epsilon_z = +1$ e o sinal de um furo negativo é $\epsilon_z = -1$. O resultado a seguir apresenta uma profunda conexão entre superfícies de energia finita e órbitas periódicas do campo de Reeb.

Teorema 2.31 (Hofer, [33]). *Sejam (s, t) coordenadas cilíndricas em torno de um furo não-removível $z \in \Gamma$. Então para cada sequência $s_n \rightarrow +\infty$, existe subsequência s_{n_k} , uma órbita periódica do campo de Reeb $P = (x, T)$, com $T = |m(z)|$ e $c \in \mathbb{R}$, tais que $u(s_{n_k}, t) \rightarrow x(\epsilon_z T t + c)$ em $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$, quando $k \rightarrow \infty$.*

A órbita periódica P é chamada *limite assintótico de $\tilde{u}$ em z* . Seja $z \in \Gamma$ um furo não-removível de uma superfície de energia finita e $\epsilon_z \in \{+1, -1\}$ o sinal de z e (s, t) coordenadas cilíndricas em torno de z .

Definição 2.32. *O furo z de $\tilde{u} = (a, u)$ é dito não-degenerado, se o seguinte ocorre:*

- *Existem uma órbita periódica $P = (x, T)$ e $c, d \in \mathbb{R}$, tais que $u(s, t) \rightarrow x(\epsilon_z T t + d)$ e $|a(s, t) - \epsilon_z T s - c| \rightarrow 0$, uniformemente em t , quando $s \rightarrow +\infty$.*
- *Se $\zeta(s, t) \in \xi|_{x(\epsilon_z T t + d)}$ é definida por $u(s, t) = \exp_{x(\epsilon_z T t + d)}(\zeta(s, t))$, para $s \gg 1$, então existe $b > 0$, tal que $e^{bs}|\zeta(s, t)| \rightarrow 0$, uniformemente em t , quando $s \rightarrow +\infty$.*
- *Se $\pi \circ du$ não é identicamente nulo, então $\pi \circ du$ não se anula para s suficientemente grande.*

Se λ é não-degenerada, Hofer, Wysocki e Zehnder provam em [34], que todo furo não-removível de uma superfície de energia finita é não-degenerado.

Definição 2.33. *Um tubo de Martinet para uma órbita periódica $P = (x, T) \in \mathcal{P}(\lambda)$ é um par $(\mathcal{U}, \Psi)$, em que $\mathcal{U} \subset M$ é uma vizinhança de $x(\mathbb{R})$ e $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ é um difeomorfismo ($B \subset \mathbb{R}^2$ é uma bola centrada na origem e $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B$ está munida com coordenadas (θ, x_1, x_2)) satisfazendo*

$$a) \quad \Psi^*(f(d\theta + x_1 dx_2)) = \lambda, \text{ em que a função suave } f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times B \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ satisfaz } f|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times 0} \equiv T_{\min} \text{ e } df|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times 0} \equiv 0.$$

$$b) \quad \Psi(x(T_{\min} t)) = (t, 0, 0).$$

Aqui $T_{\min}$ é o período positivo mínimo de x .

A existência de tubos de Martinet é garantida por meio de argumentos tipo-Moser. Seja $\tilde{u} = (a, u) : (S \setminus \Gamma, j) \rightarrow (\mathbb{R} \times M, \tilde{J})$ uma superfície de energia finita, $\Gamma \subset S$ o conjunto de furos não-removíveis e $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa induzida por (λ, J) , com $J \in \mathcal{J}_+(\xi)$. Sejam $z_0 \in \Gamma$ um furo, ϵ o sinal associado a z_0 e tome coordenadas cilíndricas (s, t) positivas se z_0 for positivo, ou negativas se z_0 for negativo. Assuma que λ é não degenerada e seja $P = (x, T)$ o limite assintótico de $\tilde{u}$ em z_0 . Escolha um tubo de Martinet $(\mathcal{U}, \Psi)$ para P . Se $\epsilon s \gg 1$, existem bem definidas funções $\theta(s, t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x_1(s, t), x_2(s, t) \in \mathbb{R}$, $z(s, t) \in \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\Psi \circ u(s, t) = (\theta(s, t), x_1(s, t), x_2(s, t)), \quad z(s, t) = (x_1(s, t), x_2(s, t)).$$

Denote novamente por $\theta(s, t)$ o seu levantamento para o recobrimento universal $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desta forma, θ, z podem ser vistas como funções de $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, tais que z é 1-periódica em t e $\theta(s, t + 1) = \theta(s, t) + k$, em que $k \geq 1$ é a multiplicidade de recobrimento de P . A menos de uma rotação, podemos assumir que $\theta(s, 0) \rightarrow 0$.

Teorema 2.34 (Hofer, Wysocki e Zehnder [34], Siefring [35]). *Existe autovalor η do operador assintótico A_P associado a (λ, J) satisfazendo $\epsilon \eta < 0$, uma auto-seção não nula $v(t) \in \ker(A_P - \eta I)$, uma função $R(s, t) \in \mathbb{R}^2$ definida para $\epsilon s \gg 1$ e $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e constantes $c \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tais que o seguinte é válido. As funções $a(s, t)$ e $\theta(s, t)$ satisfazem*

$$\lim_{\epsilon s \rightarrow +\infty} e^{r|s|} \|\partial_s^{\beta_1} \partial_t^{\beta_2} [a(s, t) - Ts - c](s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} = 0$$

$$\lim_{\epsilon s \rightarrow +\infty} e^{r|s|} \|\partial_s^{\beta_1} \partial_t^{\beta_2} [\theta(s, t) - kt](s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} = 0$$

para todo $\beta_1, \beta_2 \geq 0$. Mais ainda, se $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto e(t) \in \mathbb{R}^2$ é a representação de $v(t)$ na base $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$ ao longo de $x(Tt)$ induzido pelo tubo de Martinet $(\mathcal{U}, \Psi)$, então

$$z(s, t) = e^{\eta s}(e(t) + R(s, t)) \quad \lim_{\epsilon s \rightarrow +\infty} \|\partial_s^{\beta_1} \partial_t^{\beta_2} R(s, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})} = 0.$$

O autovalor η e a auto-seção $v(t)$ são chamados *autovalor* e *auto-seção assintóticos* de $\tilde{u}$, respectivamente. Hryniewicz em [8], prova que os resultados do Teorema 2.34 são válidos, se exigirmos apenas que o furo z seja não-degenerado. Seja z um furo não-degenerado de uma superfície de energia finita $\tilde{u}$, $P = (x, T)$ o limite assintótico de $\tilde{u}$ em z , com período mínimo $T_{\min} > 0$ e $k = T/T_{\min}$. Tome $v(t)$ a auto-seção assintótica de $\tilde{u}$ em z e escolha uma classe de homotopia β de trivializações $d\lambda$ -simpléticas de $x(T_{\min} \cdot)^* \xi$.

Definição 2.35 ([12]). *O furo z é chamado furo relativamente primo, se $\text{wind}(v, \beta^k)$ e k são inteiros relativamente primos.*

A definição 2.35 não depende da escolha da classe de homotopia β . Neste momento, estamos em condições de enunciar um lema que será extremamente relevante na demonstração do resultado principal do capítulo 3.

Lema 2.36 ([12], Lema 2.11). *Seja $z \in \Gamma$ um furo não-degenerado relativamente primo de uma superfície de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$. Então existe vizinhança $\mathcal{U} \subset S$ de z , tal que $u|_{\mathcal{U} \setminus \{z\}}$ é um mergulho.*

2.4.2 Invariantes algébricos

Finalizaremos este capítulo apresentando alguns invariantes algébricos que serão relevantes no decorrer do texto. Seja $\tilde{u} = (a, u) : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times M$ uma superfície de energia finita $\tilde{J}$ -holomorfa na simplectização da variedade de contato $(M, \xi = \ker \lambda)$ e suponha que todo furo de $\tilde{u}$ é não-degenerado. Em [29], os autores definem o índice de Conley-Zehnder de $\tilde{u}$ por

$$\mu_{CZ}(\tilde{u}) = \sum_{z \in \Gamma_+} \mu_{CZ}(P_z, \beta) - \sum_{z \in \Gamma_-} \mu_{CZ}(P_z, \beta),$$

em que Γ_+ e Γ_- são os conjuntos dos furos positivos e negativos de $\tilde{u}$, respectivamente e P_z é o limite assintótico de $\tilde{u}$ no furo $z \in \Gamma$. Se $\tilde{u}$ for um mergulho, o índice de Fredholm de $\tilde{u} = (a, u)$ é dado por

$$\text{Fred}(\tilde{u}) = \mu_{CZ}(\tilde{u}) - \chi(S) + \#\Gamma,$$

em que $\chi(S)$ é a característica de Euler da superfície de Riemann S . O índice de Fredholm de uma superfície de energia finita mergulhada $\tilde{u}$ corresponde a dimensão do espaço de superfícies de energia finita mergulhadas (módulo reparametrizações) próximas de $\tilde{u}$ com a mesma quantidade de furos e mesmos limites assintóticos, uma prova para esta afirmação pode ser encontrada em [7].

Suponha agora que $u^*d\lambda$ não é identicamente nulo e seja $\pi : TM = \xi \oplus X_\lambda \rightarrow \xi$ a projeção ao longo do campo de Reeb X_λ , segue que $\pi \circ du$ não se anula próximo aos furos de $\tilde{u}$. Além disso, por meio de (2.23) segue que $\pi \circ du$ satisfaz uma equação de Cauchy-Riemann perturbada na estrutura de contato. Desta forma, por meio do uso do Princípio da Similaridade generalizado, pode-se mostrar que o conjunto dos zeros de $\pi \circ du$ é finito e a cada um destes zeros pode ser associado uma ordem positiva. Hofer, Wysocki e Zehnder definem em [29] o inteiro $\text{wind}_\pi(\tilde{u})$ como sendo a soma finita das ordens dos zeros de $\pi \circ du$.

Tome agora uma trivialização $d\lambda$ -simplética Ψ de $u^*\xi$. Então, para todo $z \in \Gamma$, temos que Ψ induz uma classe de homotopia β_z de trivializações $d\lambda$ -simpléticas associadas à $x_z(T_z \cdot)^*\xi$, em que $P = (x_z, T_z)$ é a órbita periódica assintótica de $\tilde{u}$ em z . Considere o autovalor η_z e o η_z -autovetor $e_z : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ assintóticos associados à A_P nesta trivialização. Define-se o *winding number* de $\tilde{u}$ em z como sendo o *winding number* do loop $e_z(t) \in \mathbb{R}^2$ dado por

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}, z, \beta_z) := \text{wind}(t \mapsto e_z(t), t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Desta forma, temos o seguinte invariante associado à superfície de energia finita $\tilde{u}$ dado por

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}) = \sum_{z \in \Gamma_+} \text{wind}(\tilde{u}, z, \beta_z) - \sum_{z \in \Gamma_-} \text{wind}(\tilde{u}, z, \beta_z).$$

Este inteiro não depende da escolha de σ . Em [29], os autores provam a seguinte relação

$$\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}) - \chi(S) + \#\Gamma. \quad (2.24)$$

Definição 2.37. *Um plano de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : S^2 \setminus \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é dito rápido, se $+\infty$ é um furo não-degenerado e $\text{wind}_\pi(\tilde{u}) = 0$.*

SEÇÕES GLOBAIS PARA FLUXOS DE REEB DINAMICAMENTE CONVEXOS EM $L(p, 1)$

Neste capítulo enunciaremos e demonstraremos o resultado principal deste trabalho. Na primeira seção, apresentaremos algumas definições relacionadas a seções globais para fluxos. Na segunda, seção apresentaremos de forma sucinta os espaços lenticulares e o nosso resultado principal. Na terceira, seção aplicaremos nosso resultado principal aos sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, possuindo certa simetria. Trazemos como exemplos os modelos de Hénon-Heiles e o problema lunar de Hill regularizado. Na penúltima seção, apresentaremos a demonstração do resultado principal. Como mencionado na introdução deste trabalho, por se tratar de uma demonstração construtiva que depende de uma série de resultados recentes, os mesmos poderão ser encontrados na última seção deste capítulo.

3.1 Seções globais para o fluxo

Definição 3.1. *Seja X um campo vetorial suave definido em uma 3-variedade suave M . Uma seção global para o fluxo de X é uma superfície compacta N mergulhada em M , em que componentes de bordo são órbitas periódicas do fluxo, cujo interior $\dot{N} = N \setminus \partial N$ é transversal ao campo X e com a seguinte propriedade: toda órbita de X passando por um ponto $p_0 \in M \setminus \partial N$ intersecta $\dot{N}$ em tempos positivos e negativos. Se N for um disco mergulhado em M , dizemos que N é uma seção global tipo-disco para o fluxo de X .*

Seja agora $(\mathbb{R}^4, \omega_0, H)$ um sistema Hamiltoniano. Como visto no capítulo 2 a dinâmica Hamiltoniana em níveis de energia estrelados $S \simeq S^3$, é equivalente à dinâmica de Reeb em $(S^3, \xi_0 = \ker \lambda)$, munido de uma forma de contato $\lambda = f_S \lambda_0$, para alguma função suave

$f_S : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$.

Definição 3.2 (Hofer, Wysocki e Zehnder, [3]). *Uma forma de contato λ definida em uma 3-variedade suave é dita dinamicamente convexa, se $c_1(\xi = \ker \lambda)|_{\pi_2(M)} = 0$, em que c_1 é primeira classe de Chern e toda órbita periódica contrátil $P \in \mathcal{P}(\lambda)$, satisfaz $\mu_{CZ}(P) \geq 3$.*

Hofer, Wysocki e Zehnder estudaram em [3] a dinâmica de fluxos de Reeb em S^3 , definidos por meio de formas de contato $\lambda = f\lambda_0$ dinamicamente convexas e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Se λ é uma forma de contato dinamicamente convexa definida em S^3 , então existe uma órbita periódica simples P , tal que $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$ e P é o bordo de uma seção global tipo-disco para o fluxo de Reeb.*

O resultado a seguir deixa claro que a convexidade dinâmica impõe restrições contatológicas em uma 3-variedade de contato fechada.

Teorema 3.4 (Hofer, Wysocki e Zehnder, [5]). *Se λ é uma forma de contato dinamicamente convexa em uma 3-variedade fechada M , então $\pi_2(M) = 0$ e $\xi = \ker \lambda$ é uma estrutura de contato tight.*

Como vimos no capítulo 2, níveis de energia estrelados são hipersuperfícies de contato. Dentre os conjuntos estrelados em $\mathbb{R}^4$, conjuntos de curvatura positiva são ainda mais especiais neste contexto.

Definição 3.5. *Sejam $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana e S uma hipersuperfície contida em um nível de energia regular de H . Se*

$$a) \langle \text{Hess}H(x)v, v \rangle > 0, \forall x \in S, 0 \neq v \in T_x S$$

$$b) T_x S \cap S = \{x\}, \forall x \in S,$$

então S é chamada hipersuperfície estritamente convexa. No caso em que S é difeomorfa a S^3 , S recebe o nome de ovaloide.

Muitas propriedades dinâmicas do fluxo Hamiltoniano definido sobre um ovaloide são conhecidas graças ao trabalho de Hofer, Wysocki e Zehnder em [3]. Neste trabalho, os autores provaram que a dinâmica Hamiltoniana nestes níveis de energia é equivalente a dinâmica de Reeb em S^3 munida de uma forma de contato dinamicamente convexa, garantindo assim a existência de uma órbita periódica simples P , com $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$

que é o bordo de uma seção global do tipo-disco para o fluxo. O disco obtido acima faz parte de uma família parametrizada em S^1 de seções globais do tipo-disco que folheiam $S^3 \setminus P$, ver Figura 3.1. Esta família é chamada decomposição em livro aberto (*openbook decomposition*) e a órbita P é chamada encadernação (*binding*) da decomposição.

Figura 3.1: Ilustração de um corte de uma decomposição em livro aberto na esfera $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Os pontos azuis representam a órbita periódica P_0 , e cada linha tracejada representa uma folha da decomposição em livro aberto.

A seção global tipo-disco obtida por Hofer, Wysocki e Zehnder garante a existência de uma aplicação

$$\gamma : \dot{D} \rightarrow \dot{D}, \text{ em que } \dot{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \quad (3.1)$$

chamada *aplicação de Poincaré* (primeiro retorno), que preserva área, ou seja, $\gamma^* d\lambda|_{\dot{D}} = d\lambda|_{\dot{D}}$. Desta forma, o estudo do fluxo de Reeb associado à forma de contato dinamicamente convexa λ em S^3 , se resume a compreender a dinâmica de um difeomorfismo no disco aberto. Pontos fixos deste difeomorfismo são órbitas periódicas do fluxo de Reeb. Além disso, por meio do Teorema do ponto fixo de Brouwer, tais aplicações sempre possuem pelo menos um ponto fixo, ou seja, a dinâmica deve possuir pelo menos 2 órbitas periódicas. Algo ainda mais surpreendente decorre do resultado devido à J. Franks em [4], o qual garante que, se tal aplicação possuir um segundo ponto fixo, então possui infinitos. Com isso obtemos a interessante dicotomia de que fluxos de Reeb dinamicamente convexos em S^3 possuem exatamente duas ou infinitas órbitas periódicas.

Para uma variedade de contato, a existência de uma seção global pode estar relacionada com a existência de uma órbita periódica especial. Em [5], Hofer, Wysocki e Zehnder apresentam um interessante resultado de caracterização:

Teorema 3.6. *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato, conexa e orientada. Se (M, ξ) admite uma órbita periódica simples não-degenerada P , com $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$ que é bordo de uma seção global tipo-disco para o fluxo, então M é contactomorfa à S^3 , munida de uma forma de contato dinamicamente convexa.*

Apesar da beleza e importância do Teorema 3.6, a existência de tal órbita periódica especial implica que M deve ser difeomorfa à S^3 . Porém, isto não pode ocorrer em problemas clássicos como o problema dos três corpos restrito, estudado por Poincaré e Birkhoff, pois tais níveis de energia são difeomorfos ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$.

Na próxima seção introduziremos o conceito de espaços lenticulares, tais espaços serão o nosso objeto de estudo neste capítulo. Em nosso contexto, tanto S^3 quanto o espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$, podem ser vistos como um espaço lenticular.

3.2 Espaços lenticulares e o resultado principal

Sejam (z_1, z_2) coordenadas em $\mathbb{C}^2$ e considere a 3-esfera

$$S^3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

A 1-forma de Liouville

$$\lambda_0 = \frac{1}{4i}(\bar{z}_1 dz_1 - z_1 d\bar{z}_1 + \bar{z}_2 dz_2 - z_2 d\bar{z}_2),$$

restrita à S^3 é uma forma de contato. A estrutura de contato $\xi_0 = \ker \lambda_0$ é chamada *padrão*. Dados inteiros relativamente primos $p > q \geq 1$, existe uma ação livre de $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ em (S^3, ξ_0) gerada pelo contactomorfismo $g_{p,q} : S^3 \rightarrow S^3$ definido por

$$g_{p,q}(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2). \quad (3.2)$$

O espaço das órbitas

$$L(p, q) := S^3 / \mathbb{Z}_p,$$

é chamado *Espaço lenticular*. A estrutura de contato padrão em S^3 define, por meio da aplicação quociente, uma estrutura de contato em $L(p, q)$, ainda denotada por ξ_0 e chamada *padrão*.

Espaços lenticulares foram apresentados inicialmente por Tietze no ano de 1908 [36]. Tais espaços foram os primeiros exemplos de variedades que não podem ser caracterizadas

apenas pelo grupo fundamental. Tietze provou que o grupo fundamental de $L(p, q)$ é $\mathbb{Z}_p$, porém Tietze suspeitava que $L(5, 1)$ e $L(5, 2)$ não eram homeomorfos. Alexander confirmou tal suspeita em 1919, apesar de possuírem mesmo grupo de homologia. Para uma melhor exposição histórica neste contexto, sugerimos o trabalho de Dieudonné [37].

A existência de uma seção global tipo-disco em S^3 pode estar relacionada com a existência de uma órbita periódica especial do fluxo. Tal órbita não pode existir em um Espaço lenticular $L(p, q)$, $p > q \geq 1$, pois isso implicaria $L(p, q) \simeq S^3$, o que não é verdade. Note que, na definição de uma seção global exige-se que a superfície seja mergulhada, porém para uma seção global tipo-disco, do ponto de vista dinâmico, estamos particularmente interessados na aplicação γ como em (3.1), definida apenas no interior do disco. Desta forma, apresentaremos agora uma definição mais geral para uma seção global do tipo-disco, na qual a superfície não precisa ser um mergulho no bordo.

Definição 3.7. *Seja $(M, \xi = \ker \lambda)$ uma variedade de contato. Uma seção global do tipo-disco de ordem k , $k \in \mathbb{N}$, para o fluxo de Reeb é um k -disco $u : D \rightarrow M$, tal que $K := u(\partial D)$ é tangente a X_λ , $u(D \setminus \partial D)$ é transversal a X_λ , e para cada trajetória de Reeb $x(t)$ em $M \setminus K$, podemos encontrar $t_n^\pm \rightarrow \pm\infty$, tal que $x(t_n^\pm) \in u(D \setminus \partial D)$, para todo n .*

Definição 3.8. *Seja λ uma forma de contato e $K \subset L(p, q)$ um nó. Uma decomposição em livro aberto (racional) (K, π) de $L(p, q)$ com páginas tipo-disco de ordem k e encadernação K é adaptada à λ , se K é uma órbita fechada de Reeb e as páginas são seções globais tipo-disco de ordem k para o fluxo de Reeb.*

Recentemente Hryniewicz, Licata e Salomão provaram em [9], o seguinte resultado que caracteriza Espaços lenticulares:

Teorema 3.9. *Se (M, ξ) é uma 3-variedade de contato dinamicamente convexa, co-orientável que admite uma órbita periódica P , p -não-nó, cujo índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada é 3 e possui número de auto-enlaçamento $-1/p$, então existe uma decomposição em livro aberto com folhas tipo-disco de ordem p e encadernação P . Além disso, M é contactomorfa ao espaço lenticular $L(p, q)$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \geq q \geq 1$, para algum q , tal que $\text{mdc}(p, q) = 1$, munido de uma forma de contato dinamicamente convexa.*

Os resultados mencionados acima mostram que na construção de uma seção global tipo-disco, é necessário *a priori* encontrar uma órbita periódica especial que será a encadernação da decomposição em livro aberto. Desta forma, é uma questão de central interesse

providenciar condições para a forma de contato que garantam a existência de tais órbitas periódicas. A seguinte questão ainda não foi totalmente respondida:

- A convexidade dinâmica é condição suficiente para garantir a existência de tal órbita periódica especial em $L(p, q)$?

A existência de tal órbita periódica especial implica a existência de uma seção global tipo-disco de ordem p em $L(p, q)$. É delicado decidir quando um espaço lenticular munido de uma estrutura de contato universalmente *tight* admite uma seção global tipo-disco. A existência de tal seção global implica a existência de um par de órbitas periódicas formando um link de Hopf e infinitas órbitas periódicas podem ser obtidas, se verificada uma simples condição de ressonância devido a resultados em [11]. Como vimos, se por convenção, $L(1, 1) \simeq S^3$, o Teorema de Hofer, Wysocki e Zehnder [5], apresenta uma resposta afirmativa para a questão acima. Para $L(2, 1) \simeq \mathbb{R}P^3$, uma prova foi dada no recente trabalho devido à Hryniewicz e Salomão em [12].

A seguir, apresentaremos o resultado principal deste capítulo, que responde afirmativamente a questão levantada anteriormente, para todo $p \in \mathbb{N}$ e $q = 1$. A demonstração do resultado principal poderá ser encontrada na seção 3.4.

Teorema 3.10. *Se λ é uma forma de contato dinamicamente convexa em $L(p, 1)$, então seu fluxo de Reeb admite uma órbita periódica P , p -não-nó, com número de auto-enlaçamento $sl(P) = -1/p$. O índice de Conley-Zehnder da p -ésima iterada é 3. Mais ainda, P é a encadernação de uma decomposição em livro aberto (racional) cujas páginas são seções globais tipo-disco de ordem p para P . Se P' é um ponto fixo da aplicação de primeiro retorno associado a tal seção global, então P' é também a encadernação de uma decomposição em livro aberto (racional) cujas páginas são seções globais tipo-disco de ordem p para P' .*

3.3 Algumas aplicações

Como visto no capítulo 2, um sistema Hamiltoniano é uma tripla $(\mathbb{R}^4, \omega, H)$, em que $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e ω é uma forma simplética em $\mathbb{R}^4$. Associado a um sistema Hamiltoniano, temos bem definido um campo de vetores X_H dado implicitamente por $\iota_{X_H}\omega = -dH$. Além disso, o fluxo Hamiltoniano $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ se preserva nos níveis de energia $S_E = H^{-1}(E)$, para $E \in \mathbb{R}$. Se o nível de energia é de contato, então existe um

campo de Liouville Y transversal à S_E e o fluxo Hamiltoniano é equivalente ao fluxo de Reeb gerado pela forma de contato

$$\lambda := \iota_Y \omega|_{S_E} \quad (3.3)$$

restrita à S_E .

Seja S_E um nível de energia de contato difeomorfo à S^3 possuindo $\mathbb{Z}_p$ -simetria e assuma que λ definida em (3.3) também preserva a mesma simetria. Desta forma, por meio da ação de $\mathbb{Z}_p$, temos que $S_E/\mathbb{Z}_p \simeq L(p, 1)$ e está bem definida uma forma de contato $\tilde{\lambda}$ em $L(p, 1)$, induzida pela aplicação quociente. Se λ é dinamicamente convexa, devido ao Teorema 3.4 seque que λ é *tight* [5], desta forma, $\tilde{\lambda}$ é universalmente *tight*. Por meio da classificação de estruturas de contato *tight* em espaços lenticulares devido a Honda, veja [38], existe apenas uma estrutura de contato universalmente *tight* em $L(p, 1)$, a menos de difeomorfismos.

Uma aplicação do teorema 3.10 é a seguinte:

Teorema 3.11. *Se λ é dinamicamente convexa em S_E , então o fluxo Hamiltoniano em S_E admite uma órbita periódica não-nó P , $\mathbb{Z}_p$ -simétrica com índice de Conley-Zehnder 3 que é a encadernação de uma decomposição em livro aberto, cujas páginas são seções globais tipo-disco para P . Esta decomposição em livro aberto é dada pelo levantamento para S_E de uma decomposição em livro aberto (racional) de $S_E/\mathbb{Z}_p$ com propriedades similares.*

3.3.1 O Hamiltoniano de Hénon-Heiles

Hénon e Heiles propuseram em 1964 um modelo galático que descreve o comportamento dinâmico de uma estrela cujo potencial é independente do tempo [39]. O modelo é um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade em que função Hamiltoniana é dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}, \quad (3.4)$$

e ω_0 é a forma simplética padrão em $\mathbb{R}^4$ definida em (2.7).

Lunsford e Ford mostraram que certos sistemas genéricos possuem um comportamento equivalente ao de Hénon-Heiles, quando desconsiderados termos de ordem superior à cúbica na expansão do potencial em série de Taylor [40]. Em [41] é apresentada uma lista de problemas relacionados ao sistema de Hénon-Heiles que vão desde o problema dos três corpos restrito até sistemas de plasma estacionários.

É bem sabido que o Hamiltoniano H é invariante pela ação de $\mathbb{Z}_3$ em $\mathbb{R}^4$, gerada por $\tilde{g}_{3,1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$(w_1 := x_1 + ix_2, w_2 := y_1 + iy_2) \mapsto \tilde{g}_{3,1}(w_1, w_2) = \left(e^{\frac{2\pi i}{3}} w_1, e^{\frac{2\pi i}{3}} w_2 \right),$$

e, além disso, que a forma de Liouville λ_0 em $\mathbb{R}^4$ é $\mathbb{Z}_3$ -simétrica, isto é, $\tilde{g}_{3,1}^* \lambda_0 = \lambda_0$.

Os níveis de energia $H^{-1}(E)$, $0 < E < 1/6$, contém uma componente S_E difeomorfa a S^3 . Como veremos, S_E é uma hipersuperfície estritamente convexa e portanto o fluxo Hamiltoniano restrito a S_E é dinamicamente convexo. O nível crítico $H^{-1}(\frac{1}{6})$, contém um subconjunto $S_{\frac{1}{6}}$ homeomorfo a S^3 , que é o limite C^0 do conjunto S_E , quando $E \rightarrow \frac{1}{6}^-$, veja Figura 3.2. O subconjunto $S_{\frac{1}{6}}$ contém exatamente três pontos críticos que são $\mathbb{Z}_3$ -simétricos e correspondem a equilíbrios tipo sela-centro para o fluxo Hamiltoniano de H . Para energia maior do que a crítica os níveis tornam-se não-compactos.

Figura 3.2: Projeção de níveis de energia do Hamiltoniano de Hénon-Heiles no plano x_1x_2 . A projeção em vermelho é dada pelo nível crítico $E = 1/6$, em que os pontos de interseção entre as retas vermelhas é dada por equilíbrios sela-centro.

Apesar da simplicidade da função Hamiltoniana, sua dinâmica é muito complexa, possuindo múltiplas ferraduras e comportamento caótico [42, 43]. Arioli e Zgliczyński provaram em [44], que o nível de energia crítico $S_{\frac{1}{6}}$ possui uma rica estrutura de dinâmica simbólica e garantem a existência de infinitas órbitas periódicas para níveis logo abaixo e acima do nível crítico.

Neste momento, estamos interessados apenas na componente $S_E \subset H^{-1}(E)$ difeomorfa a S^3 , isto é, para $0 < E < \frac{1}{6}$. A seguir, provaremos que S_E é uma hipersuperfície estrita-

mente convexa, em particular, tais níveis são estrelados com relação à origem e apresentam $\mathbb{Z}_3$ -simetria. Portanto, tomando-se o campo radial centrado na origem em (3.3), λ define uma forma de contato $\mathbb{Z}_3$ -simétrica dinamicamente convexa, quando restrita à S_E .

Salomão apresenta em [13] um critério para verificar a convexidade estrita em níveis de energia difeomorfos à S^3 , dados por sistemas Hamiltonianos do tipo ‘energia cinética + potencial’.

Teorema 3.12. (Teorema 1, [13]) *Seja $H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2)$ uma função Hamiltoniana em $\mathbb{R}^4$ com potencial suave $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Seja também $S_E \subset H^{-1}(E)$ uma componente regular deste nível de energia difeomorfa a S^3 . Denote por $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção natural no plano x_1x_2 e $B_E = \pi(S_E)$. Então S_E é estritamente convexo se, e somente se, a função*

$$G_E = 2(E - V)(V_{x_1x_1}V_{x_2x_2} - V_{x_1x_2}^2) + V_{x_1x_1}V_{x_2}^2 + V_{x_2x_2}V_{x_1}^2 - 2V_{x_1}V_{x_2}V_{x_1x_2} \quad (3.5)$$

é positiva em B_E .

Utilizaremos o Teorema 3.12 para provar que S_E é estritamente convexa.

Teorema 3.13. *Para $0 < E < \frac{1}{6}$, S_E é uma hipersuperfície estritamente convexa.*

Demonstração. A função $G_E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associada ao Hamiltoniano de Hénon-Heiles, é dada por

$$G_E(x_1, x_2) = 2(E - V(x_1, x_2))(1 - 4x_1^2 - 4x_2^2) + I(x_1, x_2),$$

em que

$$I(x_1, x_2) = +x_2^2 - 3x_2^4 + 2x_2^5 + x_1^2[1 - 6x_2^2 - 4x_2^3 + x_1^2(-3 - 6x_2)]. \quad (3.6)$$

Para todo $0 < E < \frac{1}{6}$, B_E está contido no interior do triângulo $B_{\frac{1}{6}} = \pi(S_{\frac{1}{6}})$ (ver Figura 3.2), cujos vértices são os pontos

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), (0, 1) \text{ e } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

veja Figura 3.2. Em particular, todo ponto $(x_1, x_2) \in B_E$ satisfaz

$$x_1^2 + x_2^2 < 1. \quad (3.7)$$

Como $6V = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1^2x_2 - 2x_2^3$, temos que

$$x_1^2(3 + 6x_2) = 6V - 3x_2^2 + 2x_2^3. \quad (3.8)$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
 I &= x_2^2 - 3x_2^4 + 2x_2^5 + x_1^2(1 - 6x_2^2 - 4x_2^3 - 6V + 3x_2^2 - 2x_2^3) \\
 &= x_2^2 - 3x_2^4 + 2x_2^5 + x_1^2(1 - 6V - 3x_2^2 - 6x_2^3) \\
 &= x_2^2 - 3x_2^4 + 2x_2^5 + x_1^2(1 - 6V) - 6Vx_2^2 + 3x_2^4 - 2x_2^5 \\
 &= (1 - 6V)(x_1^2 + x_2^2).
 \end{aligned}$$

Por meio de (3.7) e da desigualdade $1 > 6E$, obtemos

$$\begin{aligned}
 G_E &= 2(E - V)(1 - 4x_1^2 - 4x_2^2) + (1 - 6V)(x_1^2 + x_2^2) \\
 &\geq 2(E - V)(1 - 4x_1^2 - 4x_2^2) + (6E - 6V)(x_1^2 + x_2^2) \\
 &= 2(E - V)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Note que a primeira inequação acima é estrita se $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Como $V(0, 0) = 0 < E$, a última desigualdade acima é estrita se, e somente se, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Desta forma, concluímos que $G_E > 0$ em B_E , como queríamos. Uma aplicação do Teorema 3.12 completa a prova deste teorema. ■

Os Teoremas 3.11 e 3.13 implicam na existência de uma decomposição em livro aberto para o fluxo em S_E , para cada $0 < E < \frac{1}{6}$.

Teorema 3.14. *Para cada $0 < E < \frac{1}{6}$, existem duas órbitas periódicas 3-não-nó $P_1, P_2 \subset S_E/\mathbb{Z}_3 \simeq L(3, 1)$, que formam um link de Hopf e tal que cada P_i é a encadernação de uma decomposição em livro aberto (racional) com páginas tipo-disco de ordem 3. Além disso P_1^3 e P_2^3 são órbitas periódicas $\mathbb{Z}_3$ -invariantes em S_E e cada uma é bordo de uma seção global tipo-disco para o fluxo Hamiltoniano.*

Em [14, 15], os autores garantem a existência de oito órbitas periódicas em S_E , para cada $0 < E < \frac{1}{6}$. Desta forma, combinando o Teorema 3.14 e o resultado de J. Franks em [4], obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.15. *Para energia positiva $0 < E < \frac{1}{6}$, existem infinitas órbitas periódicas em cada nível de energia S_E .*

3.3.2 O problema lunar de Hill regularizado

Um problema muito interessante em dinâmica Hamiltoniana é o bem conhecido problema dos três corpos. De uma forma simplória, podemos dizer que o problema dos três

corpos consiste em assumirmos dois primários Q_1 e Q_2 seguindo movimento circular de Kepler e uma partícula com massa desprezível R , que não influencia as trajetórias. Como este é um problema difícil, é comum estudá-lo com algumas restrições, como o caso em que os corpos estão no plano. O movimento da lua pode ser estudado desta forma, em que Q_1 , Q_2 e R são o sol, terra e lua, respectivamente. A teoria lunar pode ser vista como um limite do problema restrito dos três corpos, pois o Sol é muito mais massivo do que a Terra e a Lua.

Uma formulação importante para o problema lunar é devido a Hill em [45]. Em coordenadas rotacionais a função Hamiltoniana do problema lunar de Hill é dada por

$$H_{HLP}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Para uma exposição precisa das equações relacionadas com o problema lunar de Hill referimos [46]. Em [47], Lee provou que níveis de energia abaixo de um certo valor crítico são *fiberwise* convexos, isto implica que os índices de Conley-Zehnder de órbitas periódicas são positivos, porém a convexidade dinâmica ainda não foi provada.

Simó e Stichu realizaram uma regularização na função Hamiltoniana por meio da regularização de Levi-Civita e obtiveram uma nova função Hamiltoniana dada por

$$H(p) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + 2(x_1^2 + x_2^2)(x_2 y_1 - x_1 y_2) - 4(x_1^6 - 3x_1^4 x_2^2 - 3x_1^2 x_2^4 + x_2^6),$$

em que $p = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, veja [48] para detalhes. A função Hamiltoniana H é chamada de Hamiltoniano regularizado do problema lunar de Hill. Esta regularização evita colisões presentes no Hamiltoniano original e o torna polinomial, o que é mais conveniente do ponto de vista computacional. Um trabalho recente devido à Llibre e Roberto provou a existência de pelo menos duas órbitas periódicas em cada nível de energia positivo [49].

O problema lunar de Hill regularizado é $\mathbb{Z}_4$ -invariante pela ação definida em (3.2) nas coordenadas (x_1, x_2) e (y_1, y_2) . Estamos interessados apenas em níveis de baixa energia, aqueles que são difeomorfos à S^3 . A Figura 3.3 ilustra o comportamento de certos níveis de energia do problema lunar de Hill regularizado, projetados no plano $x_1 x_2$.

Figura 3.3: Ilustração de níveis de energia do problema lunar de Hill regularizado projetado no plano x_1x_2 .

Proposição 3.16. *Se a energia $E > 0$ é suficientemente pequena, então S_E é estritamente convexa.*

Demonstração. O Hamiltoniano do problema lunar de Hill regularizado não é do tipo energia cinética + potencial, desta forma, o Teorema 3.12 não pode ser aplicado. Como $S_E \simeq S^3$, para provarmos que S_E é estritamente convexo, basta verificarmos que o Hessiano de H é positivo definido, quando restrito à $T_p S_E$, $\forall p \in S_E$. O Hessiano de $H(p)$, $p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$, pode ser representado por uma matriz dada por

$$\text{Hess}H(p) = Id + O(p),$$

em que Id é a matriz identidade de ordem 4 e $O(p)$ é uma matriz cujas entradas são termos de ordem 2 e 4.

Seja $0 \neq v \in \mathbb{R}^4$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{Hess}H(p)v, v \rangle &= \langle [Id + O(p)]v, v \rangle \\ &= \langle Idv, v \rangle + \langle O(p)v, v \rangle \\ &\geq |v|^2 - \|O(p)\||v|^2 \\ &= (1 - \|O(p)\|)|v|^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

para $p \in \mathbb{R}^4$, sempre que $|p|$ suficientemente pequeno. Desta forma, para $E > 0$ pequeno, segue que se $p \in S_E$, então $\langle \text{Hess}H(p)v, v \rangle$ é positivo, para qualquer $0 \neq v \in \mathbb{R}^4$. Portanto, o Hessiano de H deve ser positivo definido, para todo $p \in S_E$. ■

Por meio da Proposição 3.16, temos que para energias suficientemente pequenas, S_E são ovaloides. Portanto, a 1-forma λ definida em (3.3), induzida pelo campo de vetores radial centrado na origem, define uma forma de contato $\mathbb{Z}_4$ -invariante dinamicamente convexa em S_E . Novamente, devido ao Teorema 3.11 temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.17. *Para energia positiva E suficientemente pequena, existem órbitas periódicas P_1 e P_2 em $S_E/\mathbb{Z}_4 \simeq L(4,1)$, que são encadernações para decomposições em livro aberto racionais com páginas tipo-disco de ordem 4. Além disso P_1^4 e P_2^4 são órbitas periódicas $\mathbb{Z}_4$ -invariantes em S_E e cada uma é bordo de uma seção global tipo-disco para o fluxo Hamiltoniano.*

3.4 Demonstração do resultado principal

Toda a construção da prova do Teorema 3.10 é baseada nos passos presentes no recente trabalho [12], porém como p é um natural qualquer nos deparamos com certas técnicas importantes que não podem ser evitadas; como estimativas do índice de Conley-Zehnder para trivializações que não se estendem a um disco. Muitos resultados recentes serão utilizados em nossa construção e visando uma melhor compreensão, tais resultados poderão ser encontrados na seção 3.4.3.

Se λ é uma forma de contato é dinamicamente convexa em $L(p,1)$ e $\pi_{p,1}$ é a projeção de S^3 em $L(p,1)$, então a forma de contato $\pi_{p,1}^*\lambda$ em S^3 é também dinamicamente convexa e portanto *tight* devido ao Teorema 3.4. Desta forma, $\xi = \ker \lambda$ é uma estrutura de contato universalmente *tight* em $L(p,1)$ e coincide com ξ_0 , a menos de difeomorfismos; pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\lambda = f\lambda_0$ para uma função suave $f : L(p,1) \rightarrow (0, +\infty)$, ver [50].

Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ função Hamiltoniana associada à forma simplética padrão ω_0 dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{x_1^2 + y_1^2}{r_1^2} + \frac{x_2^2 + y_2^2}{r_2^2},$$

em que $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$. Considere o elipsoide $E = H^{-1}(1) \in \mathbb{R}^4$ e seja $\lambda_E = f_E\lambda_0$ a forma de contato definida em S^3 associada ao elipsoide. Como $g_{p,1}^*\lambda_E = \lambda_E$, a forma de contato λ_E define uma forma de contato também denotada por λ_E em $L(p,1)$. Se $(r_1/r_2)^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então o fluxo de Reeb de λ_E em $L(p,1)$ contém precisamente duas órbitas periódicas simples não-degeneradas $P_1 = \pi_{p,1}(S^1 \times \{0\})$ e $P_2 = \pi_{p,1}(\{0\} \times S^1)$ formando um link de Hopf cujos períodos principais satisfazem $T_1 = \pi r_1^2/p$ e $T_2 = \pi r_2^2/p$, respectivamente. As

órbitas periódicas P_1 e P_2 são p-não-nós e possuem número de auto-enlaçamento igual à $-1/p$ devido ao Lema 3.34. Além disso, $\mu_{CZ}(P_1^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$ e $\mu_{CZ}(P_2^p, \beta_{\text{disk}}) = 2k + 1$, em que $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$ é tal que $r_1^2/r_2^2 \in (k-1, k)$. Para a forma de contato $\lambda = f\lambda_0$ em $L(p, 1)$ é sempre possível tomar $0 < r_1 < r_2$ suficientemente grandes, tais que $f < f_E$ em $L(p, 1)$, devido a forma com que f_E é definida, ver [19].

3.4.1 Caso não-degenerado

A proposição a seguir implica o Teorema 3.10 para o caso em que a forma de contato é não-degenerado. O caso degenerado será tratado como o limite de formas de contato não-degeneradas.

Proposição 3.18. *Seja $\lambda = f\lambda_0$ em que $f : L(p, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ é suave. Escolha $0 < r_1 < r_2$ com $r_1^2/r_2^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $f < f_E$. Assuma que toda órbita periódica $P \in \mathcal{P}(\lambda)$ com período menor ou igual a πr_1^2 satisfaz:*

- a) P é não-degenerada.
- b) Se P é contrátil, então $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$.

Seja $J \in \mathcal{J}$ uma estrutura complexa $d\lambda$ -compatível em $\xi = \ker \lambda$ e seja $\tilde{J}$ a estrutura quase-complexa cilíndrica em $\mathbb{R} \times L(p, 1)$ induzida por (λ, J) . Então existe um plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ satisfazendo:

1. $\tilde{u}$ é um mergulho.
2. O limite assintótico de $\tilde{u}$ é uma órbita periódica não-degenerada $P_0^p = (x_0, pT_0)$ satisfazendo $\mu_{CZ}(P_0^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$, em que $P_0 = (x_0, T_0)$ é uma órbita periódica simples.
3. u é um mergulho transversal a X_λ e $u(\mathbb{C}) \cap x_0(\mathbb{R}) = \emptyset$. Em particular, $x_0(\mathbb{R})$ é p-não-nó com número de auto-enlaçamento igual a $-1/p$.
4. $E(\tilde{u}) = pT_0 \leq \pi r_1^2$.

Inicialmente serão provados dois lemas. O primeiro lema é de grande importância para a análise que será realizada posteriormente quando estimaremos o índice de Conley-Zehnder de certas órbitas periódicas não-contráteis.

Lema 3.19. *Existe uma trivialização simplética $\beta : x_1(T_{\min} \cdot)^* \xi \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, tal que se $1 \leq k \leq p$, $k \in \mathbb{Z}$, então $\mu_{CZ}((P_1)^k, (\beta)^k) = 2k - 1$. Além disso, temos que $\text{wind}((\beta)^p, \beta_{\text{disk}}) = 2 - p$.*

Demonstração. Podemos parametrizar a órbita periódica $\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, T)$ em S^3 , dada pelo elipsoide $H^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^2$, por $t \mapsto (e^{2\pi i t}, 0)$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Tome a seguinte seção não-nula $\tilde{Z}_1(t) \in [\tilde{x}_1(T \cdot)^* \xi]_{e^{2\pi i t}}$, dada em coordenadas complexas por $\tilde{Z}_1(t) = -e^{-2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Esta seção pode ser completada a uma base de $[\tilde{x}_1(T \cdot)^* \xi]_{e^{2\pi i t}}$, em que par $\{\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2\}$ determina uma trivialização simplética orientada na classe de homotopia $\beta_{\text{disk}} \in \Omega_{[\tilde{x}_1(T \cdot)^* \xi]_{e^{2\pi i t}}}^+$ [20].

Agora defina a seguinte seção não-nula

$$\tilde{Z}(t) := -e^{(p-1)(-2\pi i t)}, \quad t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad (3.9)$$

de $[\tilde{x}_1(T \cdot)^* \xi]_{e^{2\pi i t}}$. Por meio da definição de $\tilde{Z}$ e (2.15), temos que

$$\text{wind}(\tilde{Z}, \tilde{Z}_1) = 2 - p.$$

Portanto, se denotamos por $\tilde{\beta} \in \Omega_{[\tilde{x}_1(T \cdot)^* \xi]_{e^{2\pi i t}}}^+$ a classe de homotopia de trivializações simpléticas induzida por $\tilde{Z}$, segue que

$$\text{wind}(\tilde{\beta}, \beta_{\text{disk}}) = 2 - p.$$

Mais ainda, se $1 \leq k \leq p$, $k \in \mathbb{N}$, a seção $\tilde{Z}$ preserva a seguinte simetria

$$\tilde{Z}\left(\frac{k}{p}\right) = e^{2\pi i \frac{k}{p}} \tilde{Z}(0), \quad (3.10)$$

a Figura 3.4 ilustra a $\mathbb{Z}_p$ -simetria presente em $\tilde{Z}$ para $t = 1/p$.

Figura 3.4: Ilustração da $\mathbb{Z}_p$ -simetria presente em $\tilde{Z}$ para $t = 1/p$. A figura da esquerda representa a órbita periódica $\tilde{P}_1$ em S^3 contida no plano $q_0 p_0$. A figura a direita representa a relação entre a seção $\tilde{Z}$ e a base $\{\partial p_1, \partial q_1\}$.

Por meio da projeção $\pi_{p,1} : S^3 \rightarrow L(p, 1)$, em que $\pi_{p,1}(\tilde{x}_1(T\cdot)) = x_1(pT_{\min}\cdot)$, as seções $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$ definem em $L(p, 1)$ seções não-nulas de $x_1(pT_{\min}\cdot)^*\xi$, denotadas por Z , Z_1 e Z_2 , respectivamente. Para tais seções, temos também que

$$\text{wind}(Z, Z_1) = 2 - p, \quad (3.11)$$

e devido à simetria (3.10), se definirmos $\bar{Z}(t) = Z(t/p)$, segue que $\bar{Z}$ é uma seção não-nula de $x_1(T_{\min}\cdot)^*\xi$. Como $\bar{Z}$ é uma seção não-nula, segue que $\{\bar{Z}, i\bar{Z}\}$ define uma trivialização β de $x_1(T_{\min}\cdot)^*\xi$. Desta forma, de (3.11), temos que $\text{wind}((\beta)^p, \beta_{\text{disk}}) = 2 - p$. Resta verificar a última afirmação do lema. Dadas as trivializações $(\beta)^p$ e β_{disk} temos que

$$\mu_{CZ}((P_1)^p, \beta_{\text{disk}}) = \mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) + 2\text{wind}((\beta)^p, \beta_{\text{disk}}). \quad (3.12)$$

Em particular, sabemos que $\mu_{CZ}((P_1)^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$ e de (3.12), temos

$$\begin{aligned} 3 &= \mu_{CZ}((P_1)^p, \beta_{\text{disk}}) \\ &= \mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) + 2\text{wind}((\beta)^p, \beta_{\text{disk}}) \\ &= \mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) + 2(2 - p) \\ &= \mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) + 4 - 2p, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) = 3 - (4 - 2p) = 2p - 1. \quad (3.13)$$

Suponha agora $\mu_{CZ}(P_1, \beta) \geq 3$, temos que $\rho(P_1, \beta) > 1$ e sendo P_1 elíptica e não-degenerada, de (2.20), obtemos

$$\mu_{CZ}((P_1)^p, (\beta)^p) = 2\lfloor p\rho(P_1, \beta) \rfloor + 1 \geq 2p + 1 > 2p - 1,$$

o que é um absurdo, portanto $\mu_{CZ}(P_1, \beta) = 1$. Além disso, de (3.13) e (2.20) podemos concluir que

$$\frac{p-1}{p} < \rho(P_1, \beta) < 1. \quad (3.14)$$

Seja agora $1 \leq k \leq p$, de (3.14) segue

$$k-1 < k\frac{(p-1)}{p} < k\rho(P_1, \beta) < k \Rightarrow k-1 < k\rho(P_1, \beta) < k,$$

e podemos concluir que $\lfloor k\rho(P_1, \beta) \rfloor = k-1$. Portanto,

$$\mu_{CZ}((P_1)^k, (\beta)^k) = 2k - 1.$$

■

Lema 3.20. *Seja $P \in \mathcal{P}(\lambda)$ uma órbita periódica não-degenerada λ -Reeb satisfazendo $\mu_{CZ}(P) = 3$ e $T \leq \pi r_1^2$. Se P não é simples, então $P = (P')^k$, para uma órbita periódica simples P' não-contrátil e k divisor de p .*

Demonstração. Seja P' uma órbita periódica simples e contrátil, tal que $P = (P')^k$. Como P é não-degenerada, temos que P' também é não-degenerada. Por meio de (2.19) segue que

$$1 < \rho(P, \beta_{\text{disk}}) < 2 \Rightarrow \frac{1}{k} < \rho(P', \beta_{\text{disk}}) < \frac{2}{k}. \quad (3.15)$$

Por hipótese $\mu_{CZ}(P', \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, logo $\rho(P', \beta_{\text{disk}}) > 1$. De (3.15), concluímos que $k = 1$ e P é simples.

Por meio argumento acima, se P não é simples, então existe $k \geq 2$ e uma órbita periódica simples $P' \in \mathcal{P}(\lambda)$ não contrátil, tal que $(P')^k = P$. Iremos provar agora que k divide p . Como $\pi_1(L(p, 1)) \simeq \mathbb{Z}_p$ temos que P' pertence uma das classes de equivalência

$$[P'] = q \in \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Sendo P contrátil, temos que $qk = np$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$.

Se k não divide p , por meio da fatoração em termos primos, temos que $k = k_1 k_2$, para certos inteiros k_1, k_2 , com $k_1 \geq 2$ divisor de n . Desta forma, $(P')^{k_2}$ é contrátil, pois $qk_2 = \frac{n}{k_1}p$. Por meio do mesmo argumento utilizado acima obtemos que $k_1 = 1$, pois $((P')^{k_2})^{k_1} = P$, o que é um absurdo. Desta forma, concluímos que k divide p . ■

Cobordismo simplético

O primeiro passo da nossa construção visando provar a Proposição 3.18, será realizar um cobordismo simplético entre as formas de contato λ e λ_E , para mais detalhes ver [3, 12]. Tome $h : \mathbb{R} \times L(p, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave satisfazendo

- $h(a, q) = f(q)$, se $a \leq -2$.
- $h(a, q) = f_E(q)$, se $a \geq 2$.
- $\frac{\partial h}{\partial a} \geq 0$ e $\frac{\partial h}{\partial a} > \sigma > 0$ em $[-1, 1] \times L(p, 1)$, para alguma constante $\sigma > 0$.

A família de formas de contato $\lambda_a := h(a, \cdot)\lambda_0$, $a \in \mathbb{R}$, interpola λ e λ_E de uma forma monotônica e $\xi = \ker \lambda_a$ não depende de a . Escolha $J_E \in \mathcal{J}(\lambda_E)$ e seja $J_a \in \mathcal{J}(\lambda_a)$, com $a \in \mathbb{R}$, uma família de estruturas complexas $d\lambda_a$ -compatíveis em ξ tal que

se $a \leq -2$, então $J_a = J$ e se $a \geq 2$, então $J_a = J_E$. Considere agora uma estrutura quase-complexa suave $\bar{J}$ na simplectização $\mathbb{R} \times L(p, 1)$ com as seguintes propriedades. Em $(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \times L(p, 1)$ considere a estrutura quase-complexa usual dada por $\bar{J}|_\xi = J_a$ e $\bar{J} \cdot \partial_a = X_a$ em $T(\mathbb{R} \times L(p, 1))|_{a \times L(p, 1)}$, em que X_a é o campo de Reeb associado à λ_a . Em $[-1, 1] \times L(p, 1)$ exige-se apenas que $\bar{J}$ seja compatível com a forma simplética $d(h\lambda_0)$. O espaço de tais estruturas quase-complexas em $\mathbb{R} \times L(p, 1)$ é não-vazio e contrátil na topologia C^∞ e será denotada por $\mathcal{J}(\lambda_E, J_E, \lambda, J)$, ver [19].

Curvas de energia finita generalizadas

Seja $\Gamma \in \mathbb{C}$ um conjunto finito. Consideraremos aplicações não-constantes

$$\tilde{u} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1),$$

satisfazendo

$$d\tilde{u} \circ i = \bar{J}(\tilde{u}) \circ d\tilde{u}, \quad (3.16)$$

para alguma estrutura $\bar{J} \in \mathcal{J}(\lambda_E, J_E, \lambda, J)$, com energia de Hofer finita $E(\tilde{u}) < \infty$.

A energia $E(\tilde{u})$ é definida da seguinte maneira: seja Λ a coleção de funções suaves $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\phi' \geq 0$ e $\phi = 1/2$ em $[-1, 1]$. Então

$$E(\tilde{u}) := \sup_{\phi \in \Lambda} \int_{\mathbb{C} \setminus \Gamma} \tilde{u}^* d(\phi(a)\lambda_a),$$

em que λ_a é vista como uma 1-forma em $\mathbb{R} \times L(p, 1)$ dependendo de $a \in \mathbb{R}$. Estas aplicações são chamadas *esferas de energia finita generalizadas* e se $\Gamma = \emptyset$, então são chamadas *planos de energia finita generalizados*.

Como no caso de estruturas quase-complexas cilíndricas, o conjunto de furos de esferas de energia finita generalizadas $\tilde{u} = (a, u) : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é não-vazio, e se $\tilde{u}$ possui um furo não-removível $z_0 \in \Gamma$, então $a(z) \rightarrow +\infty$ ou $a(z) \rightarrow -\infty$ quando $z \rightarrow z_0 \in \Gamma$. Desta forma, pode-se falar em furos positivos e negativos. Mais ainda, se $\tilde{u}$ é uma esfera generalizada de energia finita, então $\tilde{u}$ possui pelo menos um furo positivo, devido a natureza exata da forma simplética definindo $\bar{J}$. Por meio da teoria desenvolvida por Hofer em [33] temos a seguinte proposição.

Proposição 3.21. *Se $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é um plano de energia finita generalizado, então $a(z) \rightarrow +\infty$ quando $|z| \rightarrow +\infty$, e $u(Re^{2\pi it}) \rightarrow x(Tt)$ em C^∞ quando $R \rightarrow +\infty$, em que $x(t)$ é uma órbita periódica contrátil de λ_E com período igual a $E(\tilde{u})$.*

Teoria de Fredholm

Os teoremas a seguir que estão presentes em [7] são partes importantes da análise que será desenvolvida.

Definição 3.22. *Uma curva pseudo-holomorfa $\tilde{u} : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é dita somewhere injective se existir um ponto $z_0 \in \Sigma \setminus \Gamma$ tal que*

$$d\tilde{u}(z_0) \neq 0 \quad e \quad \tilde{u}^{-1}(\tilde{u}(z_0)) = \{z_0\}.$$

Neste caso, z_0 é chamado de ponto injetivo de $\tilde{u}$.

Teorema 3.23. *Existe um subconjunto denso $\mathcal{J}_{reg} \subset \mathcal{J}(\lambda_E, J_E, \lambda, J)$ com as seguintes propriedades: se $\tilde{u} : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é uma esfera generalizada de energia finita somewhere injective com um furo positivo, que é pseudo-holomorfa com relação à $\bar{J} \in \mathcal{J}_{reg}$, então*

$$\text{Fred}(\tilde{u}) := \mu_{CZ}(P_\infty, \beta) - \sum_{z \in \Gamma} \mu_{CZ}(P_z, \beta) + \#\Gamma - 1 \geq 0. \quad (3.17)$$

Em que $\Gamma \subset \mathbb{C}$ é o conjunto finito dos furos negativos de $\tilde{u}$, P_∞ é o limite assintótico de $\tilde{u}$ no furo positivo ∞ , e P_z é o limite assintótico de $\tilde{u}$ em $z \in \Gamma$. Os índices de Conley-Zehnder são calculados utilizando a trivialização induzida por $\tilde{u}$.

Fixe uma estrutura $\bar{J} \in \mathcal{J}_{reg}$ tal que a desigualdade (3.17) do Teorema 3.23 se verifique. Estamos interessados no espaço de planos generalizados de energia finita $\bar{J}$ -holomorfos $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ que são assintóticos em ∞ à órbita periódica P_1^p de λ_E . Lembre-se que $P_1 \subset L(p, 1)$ é uma órbita periódica elíptica, não-contrátil do campo de Reeb X_{λ_E} com período principal $\pi r_1^2/p$, e que $\mu_{CZ}(P_1^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Além disso, $E(\tilde{u}) = \pi r_1^2$. Em [7], os autores provam o seguinte resultado:

Teorema 3.24. *Seja $\tilde{u}_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ um plano $\bar{J}$ -holomorfo de energia finita mergulhado, assintótico a P_1^p no furo positivo ∞ . Então existe um mergulho suave*

$$\Phi : \mathbb{C} \times B \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$$

em que $B \subset \mathbb{R}^2$ é uma bola aberta centrada na origem, com as seguintes propriedades:

1. $\Phi(z, 0) = \tilde{u}_0(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Para todo $\tau \in B$ a aplicação $z \mapsto \Phi(z, \tau)$ é um plano $\bar{J}$ -holomorfo de energia finita assintótico à P_1^p .

3. Se $\tilde{v}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ são planos $\bar{J}$ -holomorfos de energia finita assintóticos à P_1^p tais que $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{u}_0$ em C_{loc}^∞ , então pode-se encontrar $A_n, B_n \in \mathbb{C}$, $\tau_n \in \mathbb{R}^2$, tais que $A_n \rightarrow 1$, $B_n \rightarrow 0$, $\tau_n \rightarrow (0, 0)$ e $\tilde{v}_n(z) = \Phi(A_n z + B_n, \tau_n)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ e todo n suficientemente grande.

O Teorema 3.24 é válido para qualquer $\bar{J} \in \mathcal{J}(\lambda_E, J_E, \lambda, J)$, mesmo que $\bar{J} \notin \mathcal{J}_{reg}$.

Existência de planos de energia finita generalizados

Denote por Θ o espaço dos planos $\bar{J}$ -holomorfos de energia finita generalizados assintóticos a P_1^p , módulo reparametrizações holomorfas. Note que, como P_1 é não-contrátil, todo plano $\tilde{u} \in \Theta$ deve ser *somewhere injective*.

Teorema 3.25. *Existe um plano $\tilde{J}_E$ -holomorfo de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ assintótico a P_1^p no infinito tal que $\tilde{u}$ é um mergulho, em que $\tilde{J}_E$ é uma estrutura quase-complexa cilíndrica induzida por (λ_E, J_E) . Em particular, depois de transladar na direção real, podemos assumir que $\inf a(\mathbb{C}) > 2$, de maneira que $\tilde{u}$ representa um elemento de Θ . Portanto o conjunto Θ é não-vazio.*

Demonstração. Considere a estrutura quase-complexa $\tilde{J}_E$ induzida por (λ_E, J_E) em $\mathbb{R} \times L(p, 1)$. Note que λ_E é dinamicamente convexa, não-degenerada e admite uma órbita periódica P_1 , p-não-nó, com período $\pi r_1^2/p$. A Proposição 3.37 implica que para alguma estrutura $J_0 \in \mathcal{J}(\lambda_E)$ existe um plano rápido $\tilde{J}_0$ -holomorfo mergulhado $\tilde{u}_0 = (a_0, u_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$, em que $\tilde{J}_0$ é a estrutura quase-complexa cilíndrica induzida por (λ_E, J_0) . Este plano é assintótico a P_1^p em ∞ e possui energia $E(\tilde{u}_0) = \pi r_1^2$. Segue da Proposição 3.38 que existe algum plano rápido mergulhado $\tilde{J}_E$ -holomorfo $\tilde{u} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ assintótico a P_1^p . Agora podemos transladar $\tilde{u}$ na direção real tal que $\min_{z \in \mathbb{C}} a(z) > 2$. Desta forma, $\tilde{u}$ também resolve a equação (3.16) e por isso é um plano de energia finita generalizado. Por construção, segue que $\tilde{u}$ é um mergulho, assintótico a P_1^p em ∞ e $E(\tilde{u}) = \pi r_1^2$. ■

O conjunto Θ é uma variedade suave de dimensão 2. A demonstração do Teorema 3.25 garante que existe uma componente conexa $\Theta' \subset \Theta$ que contém planos mergulhados $\tilde{u} = (a, u)$ satisfazendo $\inf a(\mathbb{C}) > 2$, que consequentemente, podem ser vistos como $\tilde{J}_E$ -holomorfos.

Teoria de interseções de Siefring

Nesta seção, será utilizada a teoria de interseções devido à Siefring em [35, 51], para provar algumas propriedades importantes dos elementos da componente conexa Θ' .

Proposição 3.26. *Se $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Theta'$, então segue que*

1. $\tilde{u}$ é um mergulho.
2. $\tilde{u}(\mathbb{C}) \cap \tilde{v}(\mathbb{C}) = \emptyset$ ou $\tilde{u}(\mathbb{C}) = \tilde{v}(\mathbb{C})$.

Demonstração. Siefring introduz em [51] o número de interseção generalizado $[\tilde{u}] * [\tilde{v}]$ entre dois planos de energia finita generalizados $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Theta$ com imagens distintas, e o número de auto-interseção generalizado $[\tilde{u}] * [\tilde{u}]$ de um plano de energia finita generalizado $\tilde{u} \in \Theta$. Tais números calculam interseções, auto-interseções de pontos críticos, mais “interseções no infinito”, ou “auto-interseções no infinito”, que são contribuições dadas pelo comportamento assintótico de planos próximo do furo ∞ . Tais contribuições adicionais no infinito fazem estes inteiros invariantes sob homotopias por meio das chamadas aplicações assintoticamente cilíndricas. Desta forma, tais números não dependem de $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Theta'$. No nosso contexto a relevância destes números está relacionado com as seguintes implicações

$$[\tilde{u}] * [\tilde{v}] = 0 \Rightarrow \tilde{u}(\mathbb{C}) \cap \tilde{v}(\mathbb{C}) = \emptyset \quad (3.18)$$

e

$$[\tilde{u}] * [\tilde{u}] = 0 \Rightarrow \tilde{u} \text{ é um mergulho.} \quad (3.19)$$

Se verificarmos (3.18) e (3.19) para escolhas especiais de elementos em Θ' , devido a invariância homotópica destes números, tais identidades se verificam para qualquer par de elementos em Θ' , e desta forma, segue o resultado.

Utilizando resultados presentes em [9], segue que existe uma família a um parâmetro de planos $\tilde{J}_E$ -holomorfos de energia finita mergulhados $\tilde{u}_\tau = (a_\tau, u_\tau)$, $\tau \in S^1$, tais que $\{u_\tau\}$ determina uma decomposição em livro aberto (racional) de $L(p, 1)$ com páginas tipo-disco e encadernação P_1 . Todos estes planos são assintóticos à P_1^p em ∞ e rápidos, pois $\mu_{CZ}(P_1^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Transladando cada plano na direção real, se necessário, podemos assumir que $\min_{z \in \mathbb{C}} a_\tau(z) > 2$, $\forall \tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desta forma, podemos ver $\tilde{u}_\tau \in \Theta$, $\forall \tau$, e que Θ' é a componente conexa de Θ que contém tais planos.

Para cada τ , temos que $u_\tau(\mathbb{C}) \cap P_1 = \emptyset$. De fato, podemos ver que cada $\tilde{u}_\tau$ como um plano que é pseudo-holomorfo com relação a estrutura complexa cilíndrica $\tilde{J}_E$ induzida por

(λ_E, J_E) , portanto, podemos utilizar ferramentas que são especiais para o caso cilíndrico, tais como wind_π , wind_∞ e etc. Note que planos rápidos devem ser *somewhere injective*. De fato, se eles não forem, poderíamos fatorá-los por meio de um plano *somewhere injective* utilizando um polinômio de grau pelo menos 2, forçando a existência de pontos críticos, uma contradição. Por meio do Teorema 3.39, segue que $u_\tau : \mathbb{C} \rightarrow L(p, 1) \setminus P_1$ é um mergulho.

Como já observado, os inteiros $\text{wind}_\pi(\tilde{u}_\tau)$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}_\tau)$ estão bem-definidos. Sendo $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$, segue que

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}_\tau) = \text{wind}^{<0}(A_{P_1^p}, \infty, \beta_{\text{disk}}) = 1. \quad (3.20)$$

Utilizando que cada $\tilde{u}_\tau$ é $\tilde{J}_E$ -holomorfo, calculamos $[\tilde{u}] * [\tilde{u}]$ como no caso de estruturas quase-complexas cilíndricas. Por meio do Corolário 4.9, presente em [51] podemos garantir que

$$[\tilde{u}_\tau] * [\tilde{u}_\tau] = 0 \Leftrightarrow u_\tau(\mathbb{C}) \cap P_1 = \emptyset \text{ e } d_0(\tilde{u}_\tau) = 0,$$

em que $d_0(\tilde{u}_\tau) = \text{wind}^{<0}(A_{P_1^p}, \infty, \beta_{\text{disk}}) - \text{wind}_\infty(\tilde{u}_\tau) \geq 0$. Logo, de (3.20) segue que $d_0(\tilde{u}_\tau) = 1 - 1 = 0$ e concluímos devido ao que já foi exposto que $[\tilde{u}_\tau] * [\tilde{u}_\tau] = 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Portanto, por meio da invariância homotópica, $[\tilde{u}] * [\tilde{u}] = 0$, para todo $\tilde{u} \in \Theta'$, ou seja, se $\tilde{u} \in \Theta'$, então $\tilde{u}$ é mergulho.

Considere agora $\tau_1 \neq \tau \in S^1 \Rightarrow \tilde{u}_{\tau_1}(\mathbb{C}) \cap \tilde{u}_\tau(\mathbb{C}) = \emptyset$. Por meio do Corolário 4.17 presente em [51], garante-se que

$$[\tilde{u}_{\tau_1}] * [\tilde{u}_\tau] = 0 \Leftrightarrow u_\tau(\mathbb{C}) \cap P_1 = \emptyset \text{ e } d_0(\tilde{u}_{\tau_1}) = 0.$$

Como tais expressões já foram calculadas, concluímos que $[\tilde{u}_{\tau_1}] * [\tilde{u}_\tau] = 0$. Por meio da invariância homotópica, temos que $[\tilde{u}] * [\tilde{v}] = 0$, para qualquer $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Theta'$. Concluímos do que já foi exposto que $\tilde{u}(\mathbb{C}) \cap \tilde{v}(\mathbb{C}) = \emptyset$, para todo $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Theta'$ satisfazendo $\tilde{u}(\mathbb{C}) \neq \tilde{v}(\mathbb{C})$. ■

Compacidade

Nesta seção serão vistas algumas propriedades de compacidade do conjunto Θ . Sejam $\alpha_1 < \alpha_2$ número reais e $\Theta_{\alpha_1, \alpha_2} \subset \Theta$ o conjunto das classes de equivalência representadas por aplicações $\tilde{u} = (a, u) \in \Theta$ satisfazendo

$$\alpha_1 \leq \min \tilde{u} := \min_{z \in \mathbb{C}} a(z) \leq \alpha_2.$$

Proposição 3.27. *Dada uma sequência $[\tilde{u}_n]$ em $\Theta_{\alpha_1, \alpha_2}$, existe $[u] \in \Theta_{\alpha_1, \alpha_2}$ e $n_j \rightarrow \infty$ tal que, a menos de reparametrizações holomorfas e $\mathbb{R}$ -translações, temos que $\tilde{u}_{n_j} \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ quando $j \rightarrow \infty$.*

Para provar a Proposição 3.27, será utilizado o teorema da compacidade SFT presente em [52]. Considere uma árvore orientada, enraizada e finita $\mathcal{T}$, e um conjunto finito $\mathcal{U}$ de esferas pseudo-holomorfas de energia finita tais que as seguintes propriedades se verificam.

1. Existe uma correspondência bijetiva entre vértices $q \in \mathcal{T}$ e esferas furadas de energia finita $\tilde{u}_q \in \mathcal{U}$. Cada esfera $\tilde{u}_q : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é pseudo-holomorfa com respeito à $\tilde{J}$, $\tilde{J}_E$ ou $\bar{J}$. Mais ainda, cada caminho ordenado $(q_1, \dots, q_N)$ da raiz $q_1 = r$ para a folha q_N , em que q_{k+1} é o descendente direto de q_k , contém no máximo um vértice q_i tal que $\tilde{u}_{q_i}$ é $\bar{J}$ -holomorfo, e neste caso $\tilde{u}_{q_j}$ é $\tilde{J}_E$ -holomorfo $\forall 1 \leq j < i$, e $\tilde{u}_{q_j}$ é $\tilde{J}$ -holomorfo $\forall i < j \leq N$.
2. Cada esfera $\tilde{u}_q$ possui exatamente um furo positivo em ∞ e $0 \leq \#\Gamma_q < +\infty$ furos negativos, em que Γ_q é o conjunto dos furos negativos de $\tilde{u}_q$.
3. Se o vértice q não é a raiz então q possui uma aresta e que ‘chega’ de um vértice q' , e $\#\Gamma_q$ arestas $f_1, \dots, f_{\#\Gamma_q}$ que saem para os vértices $p_1, \dots, p_{\#\Gamma_q} \in \mathcal{T}$, respectivamente. A aresta e está associada com o furo positivo de $\tilde{u}_q$ e as arestas $f_1, \dots, f_{\#\Gamma_q}$ estão associadas com os furos negativos de $\tilde{u}_q$. O limite assintótico de $\tilde{u}_q$ em seu furo positivo coincide com o limite assintótico de $\tilde{u}_{q'}$ em seu furo negativo associado à e . Da mesma forma, o limite assintótico de $\tilde{u}_q$ em seu furo negativo correspondendo à f_i coincide com o limite assintótico de $\tilde{u}_{q_i}$ no seu único furo positivo. Se $\tilde{u}_q$ é $\tilde{J}_E$ -holomorfa, então $\tilde{u}_{p_i}$ é $\tilde{J}_E$ ou $\bar{J}$ -holomorfa. Se $\tilde{u}_q$ é $\bar{J}$ ou $\tilde{J}$ -holomorfa, então $\tilde{u}_{p_i}$ é necessariamente $\tilde{J}$ -holomorfa.
4. Se a área de contato de $\tilde{u}_q$ se anula e $\tilde{u}_q$ é $\tilde{J}_E$ ou $\tilde{J}$ -holomorfa, então $\#\Gamma_q \geq 2$.

Será denotado por $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{U})$ a árvore de *bubbling-off*, em que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$ satisfazem as propriedades acima.

Considere agora a sequência $\tilde{u}_n = (a_n, u_n)$ de planos de energia finita generalizados representando elementos de Θ . Temos então que $E(\tilde{u}_n)$ é uniformemente limitada pela constante πr_1^2 . Assuma ainda que todas as órbitas periódicas de λ que possuem período $\leq \pi r_1^2$ são não-degeneradas. Um corolário do Teorema de Compacidade SFT é o seguinte.

Teorema 3.28. *A menos de subsequência de $\tilde{u}_n$, ainda denotada por $\tilde{u}_n$, existe uma árvore de bubbling-off $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{U})$ com as seguintes propriedades.*

- Para cada vértice q de $\mathcal{T}$ existem sequências $z_n^q, \delta_n^q \in \mathbb{C}$ e $c_n^q \in \mathbb{R}$ tais que

$$\tilde{u}_n(z_n^q + \delta_n^q \cdot) + c_n^q \rightarrow \tilde{u}_q(\cdot) \quad (3.21)$$

em C_{loc}^∞ quando $n \rightarrow \infty$. Em que $\tilde{u} + c := (a + c, u)$.

- A aplicação $\tilde{u}_r$ é assintótica a P_1^p em ∞ . Além disso, os limites assintóticos de todos os planos $\tilde{u}_q$ são órbitas periódicas contráteis com período $\leq \pi r_1^2$ do fluxo de Reeb de λ_E ou λ .

O lema a seguir apresenta propriedades interessantes da convergência SFT da sequência $(a_n, u_n) \in \Theta$.

Lema 3.29 ([12], Lema 3.12). *Sejam z_n^q, δ_n^q , e c_n^q sequências tais que (3.21) se verifique para todos os vértices de $\mathcal{T}$. Então podemos assumir, a menos de escolha de uma subsequência, que também será denotada por $\tilde{u}_n$, que apenas uma das três seguintes possibilidades se verifica para cada vértice q .*

- (I) c_n^q é limitada, $a_n(z_n^q + \delta_n^q \cdot)$ é $C_{loc}^0(\mathbb{C} \setminus \Gamma_q)$ -limitado e $\tilde{u}_q$ é $\bar{J}$ -holomorfa.
- (II) $c_n^q \rightarrow -\infty$, $a_n(z_n^q + \delta_n^q \cdot) \rightarrow \infty$ em $C_{loc}^0(\mathbb{C} \setminus \Gamma_q)$ quando $n \rightarrow \infty$, e $\tilde{u}_q$ é $\tilde{J}_E$ -holomorfa.
- (III) $c_n^q \rightarrow \infty$, $a_n(z_n^q + \delta_n^q \cdot) \rightarrow -\infty$ em $C_{loc}^0(\mathbb{C} \setminus \Gamma_q)$ quando $n \rightarrow \infty$, e $\tilde{u}_q$ é $\tilde{J}$ -holomorfa.

Além disso, se q é um vértice tal que (III) se verifica, então $\tilde{u}_q$ é assintótico ao seu furo positivo a uma órbita periódica λ -Reeb com período estritamente menor do que πr_1^2 . Em particular, (III) não se verifica para a raiz r .

Será dada agora a demonstração da Proposição 3.27. Seja $\tilde{u}_n = (a_n, u_n)$ uma sequência em $\Theta_{\alpha_1, \alpha_2}$. Por meio do Teorema de Compacidade SFT, existe árvore de bubbling-off $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{U})$ que é o SFT-limite de uma subsequência de $\tilde{u}_n$, que ainda será denotada por $\tilde{u}_n$.

Afirmamos que $\mathcal{T}$ possui apenas um vértice, a então chamada raiz r . Como sabemos, para cada vértice q existem z_n^q , e $\delta_n^q \in \mathbb{C}$ e $c_n^q \in \mathbb{R}$ tais que (3.21) se verifica. Podemos assumir sem perda de generalidade, a menos de uma subsequência, que apenas umas das

três possibilidades presentes no Lema 3.29 se verifica para cada vértice q . Note que (III) é excluída, pois a componente real dos planos $\tilde{u}_n$ é limitada por $\alpha_1 > -\infty$.

Suponha que (II) se verifica para a raiz r . Afirmamos que $\tilde{u}_r$ não pode possuir furos negativos. De fato, suponha inicialmente que a área de contato se anula, por meio das propriedades da árvore de *bubbling-off*, o cilindro sobre P_1^p não pode ser trivial. Portanto, a ação de suas órbitas periódicas assintóticas aos furos negativos deve ser estritamente inferior a πr_1^2 , o que seria um absurdo, pois tais órbitas periódicas são λ_E -Reeb contráteis. Se a área não se anula, os limites assintóticos aos furos negativos de $\tilde{u}_r$ devem ser órbitas periódicas λ -Reeb contráteis com ação estritamente menores do que πr_1^2 , um absurdo. Concluimos então, que $\tilde{u}_r$ não possui furos negativos neste caso. Se (I) se verifica para a raiz r , concluímos de $\tilde{u}_n \in \Theta_{\alpha_1, \alpha_2}$ e (3.21) que a componente real de $\tilde{u}_r$ é limitada por baixo, excluindo a possibilidade de furos negativos.

Como $\tilde{u}_r$ não possui furos negativos para todos os casos, segue que a árvore possui apenas um vértice r . Assuma que (II) se verifica para a raiz r . Por meio do Lema 3.40 encontramos $R_0 > 0$ tal que se $|z| > R_0$, então $a_n(z_n^r + \delta_n^r z) > \alpha_2 - c_n^r > \alpha_2$, para todo n suficientemente grande. Porém $\inf\{a_n(z_n^r + \delta_n^r z) : |z| \leq R_0\} \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Como neste caso, (II) se verifica para r , então $\inf\{a_n(z) : z \in \mathbb{C}\} > \alpha_2$, para n suficientemente grande, mas isto contradiz $[\tilde{u}_n] \in \Theta_{\alpha_1, \alpha_2}$. Desta forma, concluímos que (I) se verifica para o único vértice r , concluindo a demonstração da Proposição 3.27. Além disso, provamos também que $\mathcal{T}$ possui apenas um vértice r .

Proposição 3.30. *Existe sequência $\{[\tilde{u}_k = (a_k, u_k)]\} \in \Theta'$ tal que*

$$\min_{z \in \mathbb{C}} a_k(z) \rightarrow -\infty \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (3.22)$$

Demonstração. Assuma por contradição que existe $m > -\infty$ tal que

$$\inf_{\tilde{u}=(a,u) \in \Theta'} [\inf a(\mathbb{C})] = m.$$

Como sabemos, $\Theta' \subset \Theta$ é uma componente conexa contendo planos de energia finita $\tilde{J}_E$ -holomorfos mergulhados assintóticos a P_1^p . Para qualquer $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ denote $\Theta'_{\alpha_1} = \{[\tilde{u} = (a, u)] \in \Theta'; \inf a(\mathbb{C}) \geq \alpha_1\}$. Tome uma sequência $\tilde{u}_n = (a_n, u_n) \in \Theta'_m$ satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n(\mathbb{C}) = m$. Por meio do Teorema 3.25, temos que $m \leq 1$.

Por meio da Proposição 3.27, encontramos um plano $[\tilde{u}_\infty = (a_\infty, u_\infty)] \in \Theta'$, tal que a menos de subsequência e possivelmente reparametrizações, $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_\infty$ em $C_{loc}^\infty(\mathbb{C})$, quando $n \rightarrow \infty$. Para cada n , escolha $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $a_n(z_n) = \inf a_n(\mathbb{C}) \rightarrow m$. Do Lema 3.40

podemos assumir $|z_n|$ limitado, a menos de subsequência. Além disso, se necessária nova subsequência, que $z_n \rightarrow z_\infty$, para algum $z_\infty \in \mathbb{C}$. Portanto $a_\infty(z_\infty) = m$ e consequentemente $\inf a_\infty(\mathbb{C}) = m$. Por meio da Proposição 3.26, segue que $\tilde{u}_\infty$ é um mergulho e desta forma, podemos aplicar o Teorema 3.24 para encontrar planos $[\tilde{u} = (a, u)] \in \Theta'$ satisfazendo $\inf a(\mathbb{C}) < m$, o que é uma contradição. A Figura 3.5 ilustra a sequência $\{[\tilde{u}_k]\}_k$. ■

Figura 3.5: Ilustração da sequência de planos $\tilde{u}_k$.

Teorema 3.31. *A árvore de bubbling-off $\mathcal{B} = (\mathcal{T}, \mathcal{U})$ obtida como limite SFT da sequência (3.22), contém apenas 2 vértices. A raiz r corresponde a um cilindro $\bar{J}$ -holomorfo de energia finita $\tilde{u}_r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ que é assintótico a P_1^p no furo positivo ∞ e a uma órbita $P \in \mathcal{P}(\lambda)$ no furo negativo 0 , satisfazendo $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. O vértice q corresponde a um plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita mergulhado $\tilde{u}_q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ assintótico a P em ∞ .*

Demonstração. Seja $\tilde{u}_r = (a_r, u_r) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ a esfera de energia finita associada à raiz $r \in \mathcal{T}$. Então P_1^p é o limite assintótico de $\tilde{u}_r$ no seu furo positivo. Será verificado inicialmente que $\tilde{u}_r$ é $\bar{J}$ -holomorfo.

Existem sequências z_n^r, δ_n^r, c_n^r tais que (3.21) é válido para a raiz r . Aplicando o Lema 3.29 segue que apenas (I) ou (II) se verificam para a raiz r . Suponha que (II) se verifica para a raiz r . Então $\tilde{u}_r$ é $\tilde{J}_E$ -holomorfa e segue que a área de contato pode ou não se anular. Suponha que a área de contato se anula, então $\tilde{u}_r$ possui furos negativos e não é um cilindro trivial sobre P_1^p ; consequentemente os limites assintóticos dos furos negativos são órbitas λ_E -Reeb fechadas contráteis com período estritamente menor do que πr_1^2 , o que é um absurdo. Se a área de contato de $\tilde{u}_r$ não se anula e possui furos negativos, novamente

podemos encontrar órbitas λ_E -Reeb fechadas contráteis com período estritamente menor do que πr_1^2 . Suponha agora que $\tilde{u}_r$ é um plano $\tilde{J}_E$ -holomorfo. Neste caso, utilizando o Lema 3.40, segue que existe $R_0 > 0$ tal que $a_n(z_n^r + \delta_n^r z) > -c_n^r$, para todo z satisfazendo $|z| > R_0$ e $a_n(z_n^r + \delta_n^r z) > 0$ para todo z satisfazendo $|z| \leq R_0$, para n suficientemente grande. Como $c_n^r \rightarrow -\infty$ segue que $\inf a_n(\mathbb{C}) \geq 0$, para n suficientemente grande, porém isto contradiz o fato de que $\min a_n(\mathbb{C}) \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, concluímos que (I) se verifica para a raiz r .

Agora será verificado que $\tilde{u}_r$ possui furos negativos. Suponha que $\Gamma_r = \emptyset$, então segue que $\tilde{u}_r$ é um plano $\bar{J}$ -holomorfo de energia finita. Como c_n^r é limitado, por meio do Lema 3.40, existe $R_0 > 0$ tal que $a_n(z_n^r + \delta_n^r z) \subset [0, \infty)$, para $|z| > R_0$ e n suficientemente grande. Porém $a_n(z_n^r + \delta_n^r \cdot)$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, em particular em $D_{R_0} := \{z \leq R_0\}$. Isto contradiz o fato de que $a_n(\mathbb{C}) \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. O próximo passo será garantir que $\#\Gamma_r = 1$.

Suponha inicialmente que $\tilde{u}_r$ não é *somewhere injective*. Então podemos fatorar $\tilde{u}_r = \tilde{v}_r \circ Q$, em que $\tilde{v}_r : \mathbb{C} \setminus \Gamma' \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$ é uma esfera de energia finita generalizada *somewhere injective*, $1 \leq \#\Gamma'$ e Q é um polinômio de grau $\deg(Q) \geq 2$, tal que $Q^{-1}(\Gamma') = \Gamma_r$. O conjunto Γ' consiste dos furos negativos de $\tilde{v}_r$, todo limite assintótico de $\tilde{v}_r$ é uma órbita λ -Reeb periódica. Além disso, segue que $\text{cov}(u, \infty) = \text{cov}(v, \infty)\deg(Q)$, em que $\text{cov}(u, \infty)$ e $\text{cov}(v, \infty)$ representam o número de vezes que u e v recobrem P_1 no infinito, respectivamente. Seja $k := \text{cov}(v, \infty)$, então $\deg(Q) = p/k$.

Proposição 3.32. *Existe um único furo em Γ' cujo limite assintótico é não-contrátil.*

Demonstração. Note que, $P_\infty = P_1^k$ é não-contrátil e existe $z_1 \in \Gamma_r$, tal que $Q(z_1) = w_1 \in \Gamma'$ e $Q'(z_1) = 0$, caso contrário, Q seria um biholomorfismo local para todo $w \in \Gamma'$ e P_w seria limite assintótico de $\tilde{u}_r$, portanto contrátil, um absurdo.

Defina $\tilde{Q}(z) := Q(z) - w_1$. Como $\tilde{Q}(z_1) = \tilde{Q}'(z_1) = 0$, temos que

$$\tilde{Q}(z) = a(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_n)^{k_n},$$

em que $a \neq 0$ é uma constante, z_i e k_i são raízes e suas respectivas multiplicidades do polinômio $\tilde{Q}$. Desta forma, segue que

$$Q(z) = w_1 + a(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_n)^{k_n}. \quad (3.23)$$

Note que

$$k_i \geq 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

caso contrário, teríamos $Q(z_i) = w_1$ e $Q'(z_i) \neq 0$, para algum i , Q seria um biholomorfismo local para z_i . Desta forma, w_1 seria um furo de $\tilde{u}_r$ e consequentemente associado a uma órbita periódica contrátil, uma contradição. Como $\sum_{i=1}^n k_i = \deg(Q)$, devido à (3.24), segue que

$$n \leq \frac{\deg(Q)}{2}. \quad (3.25)$$

Suponha agora $\bar{w}_1 \in \Gamma'$ é um furo associado a uma órbita periódica não-contrátil. Neste momento, queremos provar que $\bar{w}_1 = w_1$. Por meio dos mesmos argumentos anteriores, temos

$$Q(z) = \bar{w}_1 + b(z - \bar{z}_1)^{l_1}(z - \bar{z}_2)^{l_2} \dots (z - \bar{z}_m)^{l_m}, \quad (3.26)$$

em que $b \neq 0$ é uma constante, $l_j \geq 2$, para $j = 1, \dots, m$ e

$$m \leq \frac{\deg(Q)}{2}. \quad (3.27)$$

Afirmamos que $\bar{z}_j = z_i$, para algum $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Suponha por absurdo que tal afirmação não é válida. Note agora que cada z_i , $i = 1, \dots, n$, representa $k_i - 1$ pontos críticos do polinômio Q , contanto multiplicidades. A soma dos pontos críticos representados por z_i , $i = 1, \dots, n$, é dada por

$$\sum_{i=1}^n (k_i - 1) = \sum_{i=1}^n k_i - n = \deg(Q) - n.$$

Como o polinômio Q possui exatamente $\deg(Q) - 1$ pontos críticos, restam apenas

$$\deg(Q) - 1 - (\deg(Q) - n) = n - 1, \quad (3.28)$$

pontos críticos de Q . A soma dos pontos críticos representados por $\bar{z}_j$, $j = 1, \dots, m$ é dada por

$$\sum_{j=1}^m (l_j - 1) = \sum_{j=1}^m l_j - m = \deg(Q) - m.$$

Por meio de (3.28), restam apenas $n - 1$ pontos críticos do polinômio Q . Desta forma, como estamos assumindo $z_i \neq \bar{z}_j$, para todo i e j temos

$$n - 1 \geq \deg(Q) - m \Rightarrow \deg(Q) \leq n + m - 1, \quad (3.29)$$

porém de (3.25), (3.27) e (3.29), segue

$$\deg(Q) \leq \deg(Q) - 1,$$

o que é um absurdo, portanto a afirmação se verifica. Desta forma, existe $z_i = \bar{z}_j$, para algum i e j , donde segue que $\bar{w}_1 = w_1$. Portanto podemos concluir que w_1 é o único furo de $\tilde{v}_r$ associado a uma órbita periódica não-contrátil. ■

Note que a Proposição 3.32 é válida para $L(p, q)$, com $p > q \geq 1$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Assuma, sem perda de generalidade que P_{w_1} é uma órbita periódica não-contrátil e seja $n = \#\Gamma'$. Por meio da Proposição 3.32, temos que as órbitas periódicas $P_{w_i} = (x_i, T_{w_i})$, $i = 2, \dots, n$, são contráteis e podemos tomar uma trivialização simplética de $x_{w_i}(T_{w_i} \cdot)^* \xi$ que se estende a um disco $f_i : D \rightarrow L(p, 1)$. Mais ainda, $\tilde{v}_r \# f_1 \# \dots \# f_n$ é homotópico a um cilindro e portanto, ao escolher uma trivialização β para $x_\infty(T_\infty \cdot)^* \xi$, será induzida uma trivialização para $x_{w_1}(T_{w_1} \cdot)^* \xi$, ver Figura 3.6.

Figura 3.6: Ilustração da esfera v_r . A órbita periódica assintótica P_{w_1} sendo não-contrátil implica que cada uma das demais órbitas periódicas assintóticas pode ser vista como o bordo de um disco mergulhado.

Pelo Lema 3.19 podemos tomar uma trivialização especial $\beta' = \beta^k$ de $x_\infty(kT_{\min} \cdot)^* \xi$, tal que $\mu_{CZ}(P_\infty, \beta') = \mu_{CZ}(P_1^k, \beta^k) = 2k - 1$. Como a estrutura quase-complexa escolhida $\bar{J} \subset \mathcal{J}_{reg}$ é genérica, nos encontramos nas hipóteses do Teorema 3.23, desta forma

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mu_{CZ}(P_1^k, \beta') - \mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') - \sum_{w_i \in \Gamma', i \neq 1} \mu_{CZ}(P_{w_i}, \beta_{\text{disk}}) + \#\Gamma' - 1 \\
 &= \mu_{CZ}(P_1^k, \beta^k) - \mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') - \sum_{w_i \in \Gamma', i \neq 1} \mu_{CZ}(P_{w_i}, \beta_{\text{disk}}) + \#\Gamma' - 1 \\
 &= 2k - 1 - \mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') - 3(n - 1) + n - 1 \\
 &= -\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') - 2(n - 1) + 2k - 1,
 \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') \leq 2k - 1. \quad (3.30)$$

Lema 3.33. $\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') = 2k - 1$ e $n = 1$.

Demonstração. A trivialização $\beta' = \beta^k$ induz uma trivialização $(\beta')^{p/k} = (\beta^k)^{p/k} = \beta^p$ para $x_\infty(\frac{p}{k}(kT_{\min}) \cdot)^* \xi = x_\infty(pT_{\min} \cdot)^* \xi$, tal que $\mu_{CZ}((P_1^k)^{p/k}, (\beta')^{p/k}) = 2p - 1$. Mais ainda, $\text{wind}((\beta')^{p/k}, \beta_{\text{disk}}) = 2 - p$. Por hipótese, $\mu_{CZ}(P_{w_1}^{p/k}, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, de (2.18), temos que

$$\mu_{CZ}(P_{w_1}^{p/k}, (\beta')^{p/k}) \geq 3 - 2\text{wind}((\beta')^{p/k}, \beta_{\text{disk}}) = 3 - 2(2 - p) = 2p - 1. \quad (3.31)$$

A órbita periódica P_{w_1} é não-degenerada e pode ser hiperbólica ou elíptica. Assuma que P_{w_1} é hiperbólica e suponha por contradição que $\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') < 2k - 1$. De (2.20), obtemos

$$\mu_{CZ}((P_{w_1})^{p/k}, (\beta')^{p/k}) = \frac{p}{k} \mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') < p \frac{(2k - 1)}{k} < 2p - 1,$$

o que é uma contradição devido à (3.31). Assuma agora que P_{w_1} é elíptica e note que de (3.31) podemos garantir também que

$$\rho(P_{w_1}, \beta') \geq k - 1. \quad (3.32)$$

Portanto de (2.20) e (3.32), segue que

$$\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') = 2\lfloor \rho(P_{w_1}, \beta') \rfloor + 1 \geq 2k - 1.$$

Desta forma, de (3.30), temos $\mu_{CZ}(P_{w_1}, \beta') = 2k - 1$. Mais ainda, $n = 1$. ■

O Lema 3.33, implica que $\Gamma' = \{w_1\}$. Além disso,

$$\frac{p}{k} \rho(P_{w_1}, \beta') < p \Rightarrow \mu_{CZ}((P_{w_1})^{p/k}, (\beta')^{p/k}) \leq 2p - 1,$$

e por meio de (3.31), podemos concluir que $\mu_{CZ}((P_{w_1})^{p/k}, (\beta')^{p/k}) = 2p - 1$. Finalmente por meio do Lema 3.19 e de (2.18), obtemos

$$\mu_{CZ}((P_{w_1})^{p/k}, \beta_{\text{disk}}) = 2p - 1 + 2(2 - p) = 3.$$

Lembre que $\deg(Q) = p/k$. Afirmamos que o polinômio Q possui a forma

$$Q(z) = w_1 + a(z - z_1)^{p/k}, \quad (3.33)$$

para algum $a \in \mathbb{C}^*$ e $z_1 \in \Gamma_r$. Se esse não é o caso, então $Q(z) = w_1 + b \prod_{i=1}^l (z - z_i)^{m_i}$, para algum $b \in \mathbb{C}^*$, $m_i \in \mathbb{N}^*$, $z_i \neq z_j \in \mathbb{C}$, $\forall i \neq j$, e $l \geq 2$. Note que $\Gamma_r = \{z_1, \dots, z_l\}$ é o conjunto

de furos de $\tilde{u}_r$. Temos que $\sum_{i=1}^l m_i = p/k$ e $\sum_{i=1}^l (m_i - 1) = p/k - l \leq p/k - 2 < \deg(Q')$. Portanto, Q deve possuir um ponto crítico $z^* \notin \Gamma_r$. Isto implica que z^* é um ponto crítico de $\tilde{u}_r$, o que é uma contradição, pois $\tilde{u}_r$ é limite C_{loc}^∞ de $\tilde{u}_n$ e nenhum elemento desta sequência possui pontos críticos. Desta forma, concluímos que $\Gamma_r = \{z_1\}$ e Q possui a forma (3.33). Mais ainda, o limite assintótico de $\tilde{u}_r$ em z_1 é uma órbita periódica contrátil $P := P_{w_1}^{p/k}$ que possui índice de Conley-Zehnder 3, como ilustrado na Figura 3.7.

Figura 3.7: Ilustração do cilindro u_r , tendo como limite assintótico associado ao furo positivo a órbita periódica $(P_\infty)^{p/k}$ e como limite assintótico a ao furo negativo a órbita periódica $(P_{w_1})^{p/k}$.

Agora assumamos que $\tilde{u}_r$ é *somewhere injective*. Temos que os limites assintóticos P_z de $\tilde{u}_r$ em qualquer furo negativo $z \in \Gamma_r$ são órbitas contráteis e portanto $\mu_{CZ}(P_z, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$. Por meio do Teorema 3.23, segue

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu_{CZ}(P_\infty^p, \beta_{\text{disk}}) - \sum_{z \in \Gamma} \mu_{CZ}(P_z, \beta_{\text{disk}}) + \#\Gamma_r - 1 \\ &= 2 - \sum_{z \in \Gamma_r} \mu_{CZ}(P_z, \beta_{\text{disk}}) + \#\Gamma_r \\ &\leq 2 - 3\#\Gamma_r + \#\Gamma_r = 2(1 - \#\Gamma_r). \end{aligned}$$

Como $\Gamma_r \neq \emptyset$, podemos concluir que $\#\Gamma_r = 1$. Sendo assim, Γ_r consiste de apenas um único furo de $\tilde{u}_r$, cujo limite assintótico P é uma órbita periódica contrátil com $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$.

Agora queremos provar que o vértice q está associado a um plano mergulhado. Como $\tilde{u}_r$ é $\bar{J}$ -holomorfo, concluímos que a esfera de energia finita $\tilde{u}_q = (a_p, u_q) : \mathbb{C} \setminus \Gamma_q \rightarrow \mathbb{R} \times L(p, 1)$, que corresponde ao segundo vértice $q \in \mathcal{T}$, é uma esfera $\tilde{J}$ -holomorfa de energia finita. Mais ainda, $\tilde{u}_q = (a, u)$ é assintótica a $P = (x, T)$ no seu furo positivo, $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Todos

os limites assintóticos aos seus furos negativos são contráteis com período $\leq \pi r_1^2$, são não-degeneradas e possuem índice de Conley-Zehnder ≥ 3 , com relação a trivialização que se estende a um disco.

Suponha que $\Gamma_q \neq \emptyset$ e denote por P_z a órbita periódica associada ao limite assintótico de $\tilde{u}_q$ no ponto $z \in \Gamma_q$. Se a área de contato se anula, por meio do Teorema 3.41, segue que $\tilde{u}_q(\mathbb{C} \setminus \Gamma_q) \subset \mathbb{R} \times P$ e podemos encontrar inteiros $k_z \geq 1$, tais que $\tilde{u}_q$ é assintótico à $(P')^{k_z}$, para cada $z \in \Gamma_q$, para uma órbita periódica P' de λ . Por meio do Lema 3.20, temos que P é simples ou $P = (P')^k$, para uma órbita simples P' , não-contrátil e k um divisor de p . Se P é simples, então $\sum_{z \in \Gamma_q} k_z = 1$. Portanto $\#\Gamma_q = 1$, o que é um absurdo, pois $\Gamma_q \geq 2$. Se $P = (P')^k$, como $\sum_{z \in \Gamma_q} k_z = k$ e $\#\Gamma_q \geq 2$, segue que existe furo negativo $\bar{z} \in \Gamma_q$, tal que $P_{\bar{z}} = (P')^{k_{\bar{z}}}$, com $k_{\bar{z}} \leq k/2$. Sendo $P_{\bar{z}}$ contrátil, segue que $\mu_{CZ}(P_{\bar{z}}, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, e consequentemente,

$$\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) \geq \mu_{CZ}([(P')^{k_{\bar{z}}}]^2, \beta_{\text{disk}}) \geq 5,$$

o que é um absurdo. Portanto concluímos que a área de contato não se anula. Neste caso, estão bem definidos os inteiros $\text{wind}_\pi(\tilde{u}_q)$, $\text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, \infty)$ e $\text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, z)$, $\forall z \in \Gamma_q$.

Seja σ uma trivialização simplética de $(\tilde{u}_q)^*\xi$. Como todo limite assintótico de $\tilde{u}_q$ é contrátil, podemos assumir que σ se estende sobre todo limite assintótico a uma trivialização simplética de ξ na classe β_{disk} . Sendo $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$ e $\mu_{CZ}(P_z, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, $\forall z \in \Gamma_q$, temos

$$\text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, \infty, \beta_{\text{disk}}) = 1 \text{ e } \text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, z, \beta_{\text{disk}}) \geq 2, \forall z \in \Gamma_q.$$

Por meio das desigualdades acima e (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{wind}_\pi(\tilde{u}_q) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}_q) - 1 + \#\Gamma_q \\ &= \text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, \infty, \beta_{\text{disk}}) - \sum_{z \in \Gamma_q} \text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, z, \beta_{\text{disk}}) - 1 + \#\Gamma_q \\ &\leq 1 - 2\#\Gamma_q - 1 + \#\Gamma_1 = -\#\Gamma_1, \end{aligned}$$

e, portanto, $\Gamma_q = \emptyset$. Desta forma, temos que $\tilde{u}_q$ é um plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita e

$$\text{wind}_\pi(\tilde{u}_q) = \text{wind}_\infty(\tilde{u}_q, \infty, \beta_{\text{disk}}) - 1 = 0.$$

Em particular, segue que u_q é uma imersão transversal ao campo de Reeb X_λ . Isto implica também que $\tilde{u}_q$ é *somewhere injective*, pois caso contrário, poderíamos fatorar $\tilde{u}_q = \tilde{v}_q \circ Q$, para um plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita e um polinômio $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grau $\deg(Q) \geq 2$. Desta forma, $\tilde{u}_q$ deve ter pontos críticos, um absurdo.

Até o momento, sabemos que o segundo vértice $q \in \mathcal{T}$ corresponde a um plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita que é assintótico à P e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Devido a forma com que a árvore foi definida, segue, em particular, que $\mathcal{T}$ possui apenas dois vértices $\{r, q\}$. Resta provar que $\tilde{u}_q$ é um mergulho. Sabemos que $\tilde{u}_q$ é uma imersão, pois $\text{wind}_\pi(\tilde{u}_q) = 0$. Se $\tilde{u}_q$ não é um mergulho, segue que o conjunto

$$D_g := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{\text{diagonal}\}; \tilde{u}_q(z_1) = \tilde{u}_q(z_2)\},$$

é não-vazio. Além disso, o conjunto D_g deve ser discreto, pois um ponto limite de D_g iria implicar que $\tilde{u}_q$ é multiplamente coberta. Esta observação segue do princípio da similaridade. Portanto, auto-interseções de $\tilde{u}_q$ são isoladas. Devido a (3.21), a estabilidade e a positividade das interseções de imersões pseudo-holomorfas, segue que $\tilde{u}_n$ possui auto-interseções, para n suficientemente grande, mas isso é um absurdo, pois $\tilde{u}_n$ são mergulhos. ■

Pelo Teorema 3.31, concluímos que a árvore de *bubbling-off* possui exatamente dois vértices $\{r, q\}$. A curva $\tilde{u}_q$ é um plano de energia finita $\tilde{J}$ -holomorfo mergulhado, cujo limite assintótico em ∞ é uma órbita periódica $P \in \mathcal{P}(\lambda)$ e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Mais ainda, $\text{wind}_\pi(\tilde{u}_q) = 0$ e, portanto, u é uma imersão transversal ao campo de Reeb X_λ .

Neste momento, queremos provar que

$$u|_{\mathbb{C} \setminus B_R(0)} \text{ é um mergulho para } R \gg 1. \quad (3.34)$$

Como P é contrátil e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$, Lema 3.20 implica que P é simples ou $P = (P')^k$, para uma órbita periódica simples P' não-contrátil e $k \geq 2$ divisor de p . Se P é simples, (3.34) segue diretamente.

A classe β de trivializações $d\lambda_E$ -simpléticas da estrutura de contato ao longo de P_1 , como dada no Lema 3.19, induz uma classe $\bar{\beta} \simeq \beta$ de trivializações $d\lambda$ -simpléticas para a estrutura de contato ao longo de curvas fechadas na classe 1. Sabemos que $[P'] = q \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ e que existe $n \in \mathbb{N}^*$, tal que

$$qk = np. \quad (3.35)$$

Tome uma trivialização $d\lambda$ -simplética da estrutura de contato ao longo da órbita periódica contrátil $P = (P')^k$ na classe $\bar{\beta}^p$. Como $\text{wind}(\beta_{\text{disk}}, \bar{\beta}^p) = p - 2$, segue que

$$\begin{aligned} \mu_{CZ}((P')^k, \bar{\beta}^p) &= \mu_{CZ}((P')^k, \beta_{\text{disk}}) + 2\text{wind}(\beta_{\text{disk}}, \bar{\beta}^p) \\ &= 3 + 2(p - 2) = 2p - 1. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, \bar{\beta}^p) = p - 1. \quad (3.36)$$

Tome agora uma trivialização $d\lambda$ -simplética da estrutura de contato ao longo de P' na classe $\bar{\beta}^q$. De (3.35) e (3.36), temos

$$\begin{aligned} \text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, (\bar{\beta}^q)^k) &= \text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, (\bar{\beta})^{qk}) = \text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, (\bar{\beta})^{np}) \\ &= \text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, (\bar{\beta}^p)^n) = n \text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, \bar{\beta}^p) \\ &= n(p - 1). \end{aligned}$$

Afirmamos que $n(p - 1)$ e k são números relativamente primos. Note que k divide p , portanto k e $p - 1$ são números relativamente primos. Se n e k não são relativamente primos, então $n = ln_1$ e $k = lk_1$, para certos inteiros $2 \leq l$, $n_1, k_1 \in \mathbb{N}^*$. Isto implica que $qk_1 = n_1p$, portanto a órbita periódica $(P')^{k_1}$ é contrátil. Como $(P')^{k_1}$ é contrátil, $\mu((P')^{k_1}, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, temos que

$$\mu((P')^k, \beta_{\text{disk}}) = \mu(((P')^{k_1})^l, \beta_{\text{disk}}) > 3,$$

uma contradição. Portanto $n(p - 1)$ e k são números relativamente primos.

Como $\text{wind}(\tilde{u}_q, \infty, (\bar{\beta}^q)^k)$ e k são números relativamente primos, ∞ é um furo relativamente primo e, pelo Lema 2.36, temos que (3.34) se verifica. Portanto $\tilde{u}$ é um plano rápido mergulhado.

Sendo $\tilde{u}$ é um plano rápido mergulhado, por meio do Teorema 3.42 existe uma folheação suave F bidimensional de uma vizinhança de $\tilde{u}(\mathbb{C})$ em $\mathbb{R} \times L(p, 1)$ por planos $\tilde{J}$ -holomorfos de energia finita mergulhados assintóticos à P , tal que $\tilde{u}(\mathbb{C})$ é uma folha de F . Além disso, a demonstração do Teorema 3.42 garante que esta família contém translações no eixo real $\tilde{u}_\epsilon = (a + \epsilon, u)$ de $\tilde{u}$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos. Desta forma, temos que $\tilde{u}_\epsilon(\mathbb{C}) \cap \tilde{u}(\mathbb{C}) = \emptyset$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequenos. Tal informação será utilizada para garantir que $u(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$.

Suponha que $u(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Como u é uma imersão transversal ao campo de Reeb X_λ e $\tilde{u}$ é assintótico à P , podemos encontrar $z, z' \in \mathbb{C}$ e $c > 0$ tais que $\tilde{u}(z') = \tilde{u}_c(z)$. Fixe $c > 0$, será verificado que, para todo $0 < \epsilon < c$, existe $R > 0$ tal que, se $b \in [\epsilon, c]$ e $\tilde{u}(z) = \tilde{u}_b(w)$, então $|z|, |w| < R$. Isto implicaria, junto com a positividade e estabilidade de interseções de curvas pseudo-holomorfas que $\tilde{u}(\mathbb{C}) \cap \tilde{u}_\epsilon(\mathbb{C}) \neq \emptyset$, $\forall \epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que seria um absurdo. Suponha por absurdo que existe sequências $b_n \in [\epsilon, c]$, $z_n, w_n \in \mathbb{C}$, tais que $\tilde{u}_{b_n}(z_n) = \tilde{u}(w_n)$ e $\max\{|z_n|, |w_n|\} \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue que

$$\tilde{u}_{b_n}(z_n) = (a(z_n) + b_n, u(z_n)) = (a(w_n), u(w_n)) = \tilde{u}(w_n),$$

e como $b_n \neq 0$ temos que $z_n \neq w_n$. Por meio da escolha de uma subsequência, se necessário, podemos assumir que uma das seguinte alternativas é verdadeira; (i) $|z_n|, |w_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$; (ii) z_n é limitada e $|w_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$; (iii) $|z_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e w_n é limitada. Sendo $z_n \neq w_n$, $u(z_n) = u(w_n)$ e $u|_{\mathbb{C} \setminus B_R(0)}$ um mergulho, para $R > 0$ suficientemente grande, segue que a primeira alternativa não se verifica. Como $a(z_n) + b_n = a(w_n)$ e b_n é limitado, temos que ambos z_n e w_n são limitados ou ambos são ilimitados, o que exclui a segunda e a terceira opção. Portanto concluímos que $u(\mathbb{C}) \cap x(\mathbb{R}) = \emptyset$.

O Teorema 3.43 garante que $u : \mathbb{C} \rightarrow L(p, 1) \setminus x(\mathbb{R})$ é injetora. Sendo u injetora e $u|_{\mathbb{C} \setminus B_R(0)}$ um mergulho, para $R \gg 1$, temos que u define um k -disco orientado para $x(\mathbb{R})$, em que k é tal que $P = (P')^k$. Aplicando-se Lema 3.44, temos que $sl(P) = -1/k$. Por meio do Lema 3.47, existe uma decomposição em livro aberto (racional) com folhas do tipo-disco de ordem k . Se $k \neq p$, a Proposição 3.48 implica que $L(p, 1)$ é difeomorfo à $L(k, 1)$, uma contradição. Portanto, u é um p -disco para a órbita periódica P , aplicando-se novamente o Lema 3.47, obtemos uma decomposição em livro aberto (racional) com folhas do tipo-disco de ordem p para o fluxo de Reeb, concluindo a demonstração da Proposição 3.18.

3.4.2 Caso degenerado

Como já visto, $\ker \lambda$ é universalmente *tight* e não há perda de generalidade em assumir que $\lambda = f\lambda_0$ para uma função $f : L(p, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ suave. Escolha r_1 e r_2 como anteriormente, tal que a função f_E satisfaz $f < f_E$ em cada ponto. Escolha $\mathcal{V}$ uma vizinhança C^∞ da função constante 1 com a seguinte propriedade: se $h \in \mathcal{V}$, então $hf < f_E$ em cada ponto, e se a órbita periódica de Reeb contrátil $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(h\lambda)$ satisfaz $T' \leq \pi r_1^2$, então $\mu_{CZ}(P') \geq 3$. Como λ é dinamicamente convexa, aplicando-se o teorema de Arzelà-Ascoli, combinado com a semi-continuidade do índice de Conley-Zehnder generalizado, podemos garantir que tal vizinhança existe.

Seja $h \in \mathcal{V}$. Devido a Proposição 3.46, podemos escolher uma sequência $h_n \rightarrow h$ em C^∞ , tal que $\lambda_n := h_n\lambda = h_nf\lambda_0$ é não-degenerada, para todo n . Então $h_nf < f_E$ em cada ponto, para n suficientemente grande. Será verificado que, para n grande o suficiente λ_n satisfaz as hipóteses da Proposição 3.18. Suponha por absurdo que λ_n não satisfaz as hipóteses da Proposição 3.18, então que existe subsequência, novamente denotada por λ_n , tal que λ_n admite uma órbita periódica contrátil Q_n , com período $0 < T_n \leq \pi r_1^2$ e

$\mu_{CZ}(Q_n, \beta_{\text{disk}}) \leq 2$. Por meio do Teorema de Arzelà-Ascoli, a menos de subsequência, podemos admitir que Q_n converge em C^∞ , quando $n \rightarrow \infty$, para uma órbita periódica contrátil Q de λ , com período $\leq \pi r_1^2$. Devido a semi-continuidade inferior do índice de Conley-Zehnder generalizado, segue que $\mu_{CZ}(Q, \beta_{\text{disk}}) \leq 2$, o que é um absurdo, pois $h \in \mathcal{V}$. Desta forma, por meio da Proposição 3.18, λ_n admite uma órbita periódica simples p -não-nó P_n , com número de auto-enlaçamento $-1/p$ e $\mu_{CZ}(P_n^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$, para todo n grande. Mais ainda, seus períodos são uniformemente limitados por $\frac{\pi r_1^2}{p}$. Portanto, utilizando o Teorema de Arzelà-Ascoli, temos que $P_n \rightarrow P$, quando $n \rightarrow \infty$ em C^∞ , a menos de uma subsequência, em que P é uma órbita periódica de λ , com período $\leq \frac{\pi r_1^2}{p}$.

Como P_n é p -não-nó, temos que P_n^p é contrátil, implicando que P^p também seja contrátil. Novamente, utilizando a semi-continuidade inferior do índice de Conley-Zehnder generalizado, temos que $\mu_{CZ}(P^p, \beta_{\text{disk}}) \leq 3$. Como $f \in \mathcal{V}$, segue que $\mu_{CZ}(P^p, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Além disso, temos que P é simples, pois, caso contrário $P = (P')^k$, para $k \geq 2$. Sendo $\pi_1(L(p, 1)) \simeq \mathbb{Z}_p$, segue que $(P')^p$ é contrátil e $\mu_{CZ}((P')^p, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$. De $P^p = ((P')^k)^p = ((P')^p)^k$, para $k \geq 2$, temos que $\mu_{CZ}(P^p, \beta_{\text{disk}}) > 3$, uma contradição. Desta forma, P é simples e $P_n \rightarrow P$, quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, P é transversalmente isotópica a cada P_n , para todo n suficientemente grande, portanto P é p -não-nó e possui número de auto-enlaçamento igual a $-1/p$. Aplicando-se o Corolário 3.49, a órbita periódica P deve ser o bordo de um p -disco, que é uma seção global para o fluxo de Reeb. Mais ainda, este p -disco é uma página de uma decomposição em livro aberto (racional) em $L(p, 1)$, com encadernação P , tal que todas as páginas são seções globais tipo-disco de ordem p . Isto conclui a prova do Teorema 3.10.

3.4.3 Definições e resultados utilizados

Lema 3.34. ([9], Lemas 3.7 e 3.12) *Seja K um nó racional de ordem p . Se $1 \leq p' < p$, então a p' -ésima iterada de K é não-contrátil em M . Mais ainda, K é tangente ao campo de Reeb de λ_0 e possui número de auto-enlaçamento igual à $-1/p$.*

Definição 3.35. *Seja $h : D \rightarrow M$ um disco para P no sentido que $h(e^{2\pi it}) = x(Tt + c)$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que P é p -não-nó na classe de homotopia de h se existe um p -disco para $x(\mathbb{R})$ representando a mesma classe em $\pi_2(M, x(\mathbb{R}))$ que h .*

Definição 3.36. *Dizemos que um p -disco $u_0 : D \rightarrow M$ para K é especial para (λ, K) se satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) A distribuição característica singular de $u_0(D \setminus \partial D)$ possui precisamente um único ponto singular e , que é positivo. Mais ainda, é possível encontrar coordenadas (x, y, z) em uma vizinhança arbitrariamente pequena $\mathcal{V}$ de e tal que $e \simeq (0, 0, 0)$, $\lambda \simeq dz + xdy$, e

$$u_0(D) \cap \mathcal{V} \simeq \{z = -\frac{1}{2}xy\}.$$

- b) $\exists \epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon < |z| < 1 \Rightarrow R|_{u_0(z)} \notin du_0(T_z D)$ em que X_λ denota o campo de Reeb associado a λ .

- c) Se x é uma trajetória periódica de X_λ contida em $u_0(D)$, então $x(\mathbb{R}) = K$.

Proposição 3.37. ([9], Proposição 6.8) *Seja λ uma forma de contato não-degenerada que define a estrutura de ξ na 3-variedade fechada M . Assuma que $c_1(\xi)|_{\pi_2(M)} = 0$ e que existe uma órbita fechada de Reeb $P_0 = (x_0, T_0)$ com período positivo mínimo $T_{\min}$, tal que $K = x_0(\mathbb{R})$ é um nó racional de ordem p com número de auto-enlaçamento $-1/p$, em que $p = T_0/T_{\min}$. Suponha também que $\mu_{CZ}(P_0, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$. Considere o conjunto $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}(\lambda)$ das órbitas periódicas do campo de Reeb X_λ satisfazendo*

1. P é contrátil em M ,
2. P está contida em $M \setminus x_0(\mathbb{R})$,
3. $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 2$.

Considere também o p -disco u_0 que é especial para (λ, K) no sentido da Definição 3.36 e tome

$$C_0 = \int_D |u_0^* d\lambda|.$$

Se toda órbita $P \in \mathcal{P}^*$ satisfaz

$$\int_P \lambda > C_0 \text{ ou } P \text{ é não-contrátil em } M \setminus K,$$

então para alguma estrutura $J \in \mathcal{J}_+(\xi)$ existe um plano de energia finita $\tilde{J}$ -holomorfo rápido mergulhado $\tilde{u} = (a, u)$ assintótico a P_0 . Mais ainda, K é p -não-nó na classe de homotopia de u no sentido da definição 3.35.

Proposição 3.38. ([12], Proposição 4.3) *Seja λ uma forma de contato não-degenerada para a 3-variedade fechada (M, ξ) . Assuma que $c_1(\xi)|_{\pi_2(M)} = 0$, e que existe uma trajetória periódica $x : \mathbb{R} \rightarrow M$ do campo de Reeb X_λ , tal que $x(\mathbb{R})$ é p -não-nó e possui número de*

auto-enlaçamento $-1/p$. Fixe um ponto $y \in M \setminus x(\mathbb{R})$ e considere $P = (x, T = pT_{\min}) \in \mathcal{P}(\lambda)$, em que $T_{\min} > 0$ é o período positivo mínimo de x . Seja $\mathcal{J}_{\text{fast}}(\lambda, y) \subset \mathcal{J}_+(\xi)$ o conjunto das estruturas complexas $d\lambda$ -compatíveis $J : \xi \rightarrow \xi$ para qual existe algum plano $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita rápido mergulhado $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ assintótico a P e satisfazendo $y \in u(\mathbb{C})$; aqui $\tilde{J}$ é determinado por (λ, J) .

Se $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$ e toda órbita contrátil $P' = (x', T') \in \mathcal{P}(\lambda)$ em $M \setminus x(\mathbb{R})$ e satisfazendo $\mu_{CZ}(P', \beta_{\text{disk}}) = 2$ satisfaz

$$T' > T \text{ ou } P' \text{ é não-contrátil em } M \setminus x(\mathbb{R}),$$

então $\mathcal{J}_{\text{fast}}(\lambda, y) = \emptyset$ ou $\mathcal{J}_{\text{fast}}(\lambda, y) = \mathcal{J}_+(\xi)$.

Teorema 3.39. ([29], Teorema 1.2) Seja $\tilde{u} = (a, u)$ um plano de energia finita com um limite assintótico não-degenerado P_∞ , satisfazendo $\mu_{CZ}(P_\infty, \beta_{\text{disk}}) \leq 3$. Se $\tilde{u}$ é somewhere injective e $u(\mathbb{C}) \cap P_\infty = \emptyset$, então $u : \mathbb{C} \rightarrow M \setminus P_\infty$ é um mergulho.

Lema 3.40. ([12], Lema 3.13) Sejam z_n^a, δ_n^a e c_n^a sequências tais que (3.21) se verifica para a raiz r . Então, por meio do Teorema 3.28, segue que $P_1^p = (x_1, \pi r_1^2)$ é o limite assintótico de $\tilde{u}_r$ em seu furo positivo ∞ . Para cada vizinhança $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ -invariante $\mathcal{W}$ de $t \mapsto x_1(\pi r_1^2 t)$ em $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, L(p, 1))$ e para cada $M > 0$, existe $R_0 > 0$ e n_0 tais que se $R > R_0$ e $n > n_0$, então $t \mapsto u_n(z_n^r + \delta_n^r R e^{2\pi i t})$ pertence a $\mathcal{W}$ e $a_n^r(z_n^r + \delta_n^r R e^{2\pi i t}) + c_n^r > M$.

Teorema 3.41. ([29], Teorema 6.11) Seja $\tilde{u} = (a, u)$ uma curva pseudo-holomorfa de energia finita cuja área de contato se anula. Então existe uma órbita periódica $P = (x, T)$, com período $T = E(\tilde{u})$ e uma aplicação não-constante holomorfa $\phi : S \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ satisfazendo

$$\phi^{-1}(\infty) = \Gamma^+ \text{ e } \phi^{-1}(0) = \Gamma^-,$$

tal que

$$\tilde{u}(z) = \tilde{\eta} \circ \phi(z), \forall z \in \dot{S} := S \setminus \Gamma, \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-,$$

em que a aplicação pseudo-holomorfa trivial $\tilde{v} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ é definida por $\tilde{v}(e^{2\pi(s+it)}) = (Ts + c, x(Tt))$, para uma constante $c \in \mathbb{R}$ adequada.

Teorema 3.42. ([9], Teorema A.1) Seja λ uma forma de contato não-degenerada definindo a estrutura de contato em uma 3-variedade (M, ξ) , $J \in \mathcal{J}_+(\xi)$ e $\tilde{u} = (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um plano rápido $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita assintótico a uma órbita fechada de Reeb $P_0 = (x_0, T_0)$. Se $\mu_{CZ}(P_0, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$, então, denotando $B \subset \mathbb{C}$ a bola unitária aberta, existe um mergulho suave $F : B \times \mathbb{C} \rightarrow \times M$ satisfazendo;

1. $F(0, z) = \tilde{u}(z), \forall z \in \mathbb{C}$.
2. $z \mapsto F(z', z)$ é um plano rápido $\tilde{J}$ -holomorfo de energia finita mergulhado assintótico a $P_0, \forall z' \in B$.
3. Se $\tilde{u}_k$ é uma sequência de planos de energia finita mergulhados assintóticos a P_0 com $\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}$ em C_{loc}^∞ , então existem sequências $z'_n \rightarrow 0, A_k \rightarrow 1$ e $B_k \rightarrow 0$ tais que $\tilde{u}_k(z) = F(z'_k, A_k z + B_k), \forall z \in \mathbb{C}$.

Teorema 3.43. ([29], Teorema 2.3) *Seja $\tilde{u} := (a, u) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times M$ um plano de energia finita não-degenerado tendo como limite assintótico a órbita periódica $P_\infty = (x, T)$. Assuma $\tilde{u}$ somewhere injective e que $u(\mathbb{C}) \cap P_\infty = \emptyset$, então $u : \mathbb{C} \rightarrow M$ é injetora.*

Lema 3.44. ([9], Lema 3.10) *Seja $K \subset (M, \xi)$, p -não-nó, transversal a ξ e orientado pela co-orientação de ξ . Seja $u : D \rightarrow M$ um p -disco orientado para K , Z uma seção não-nula de $u^*\xi$ e N uma seção não-nula de $u^*\xi|_{\partial D}$ satisfazendo $N(z) \in du_z(T_z D), \forall z \in \partial D$. Então*

$$sl(K, u) = \frac{1}{p} \text{wind}(Z|_{\partial D}, N).$$

Teorema 3.45. ([9], Teorema 1.3) *Seja (M, ξ) uma 3-variedade de contato conexa e fechada satisfazendo $c_1(\xi)|_{\pi_2(M)} = 0$ (primeira classe de Chern), e seja p um inteiro positivo. Então (M, ξ) é contactomorfa à $(L(p, k), \xi_0)$ para algum k se, e somente se, $\xi = \ker \lambda$ para uma forma de contato λ que admite uma órbita periódica do campo de Reeb Q tal que*

$$i) \ Q \text{ é } p\text{-não-nó, } \mu_{CZ}(Q^p) \geq 3, \ sl(Q) = \frac{-1}{p}, \text{ e}$$

$$ii) \text{ nenhuma órbita periódica } P \subset M \setminus Q \text{ com } \rho(P) = 1 \text{ é contrátil em } M \setminus Q.$$

Mais ainda, se λ, Q são como exposto acima e Q possui monodromia $-q$, então (M, ξ) é contactomorfa a $(L(p, q), \xi_0)$.

Proposição 3.46. ([3], Proposição 6.1) *O conjunto $\mathcal{O}_\lambda$ de todas as funções suaves $f : M \rightarrow (0, \infty)$ tais que o campo de Reeb associado à forma de contato $f\lambda$ possui apenas órbitas periódicas não-degeneradas é denso em $C^\infty(M, (0, \infty))$, na topologia C^∞ usual.*

Lema 3.47. ([9], Lema 7.3) *Assuma que λ é não-degenerada, $P_0 = (x_0, T_0)$ é órbita periódica do campo de Reeb com período mínimo T_{min} e $K = x_0(\mathbb{R})$. Seja u_0 um p -disco que é especial para (λ, K) e considere $\mathcal{P}^* \in \mathcal{P}(\lambda)$ o conjunto das órbitas periódicas $P' \subset M \setminus K$ contráteis em M , tais que $\mu_{CZ}(P', \beta_{disk}) = 2$. Se toda órbita $P' \in \mathcal{P}^*$ satisfaz*

a) P' é não contrátil em $M \setminus K$, ou

b) $\int_{P'} \lambda > \int_D |u_0^* d\lambda|$,

então existe uma decomposição em livro aberto (racional) (K, π) com páginas tipo-disco de ordem p adaptada à λ .

Proposição 3.48. ([9], Proposição 1.6) *Sejam $p > q \geq 1$ números relativamente primos. Suponha que (M, ξ) é uma 3-variedade de contato fechada, co-orientável, conexa que admite uma decomposição em livro aberto (racional) (K, π) com páginas tipo-disco de ordem p . Se a monodromia de K é igual $-q$ e o campo de Reeb de alguma forma de contato definindo ξ é positivamente transversal a K e positivamente transversal ao interior das páginas de (K, π) , então (M, ξ) é contactomorfa à $(L(p, q), \xi_0)$.*

Corolário 3.49 ([12], Corolário 1.8). *Se λ é uma forma de contato dinamicamente convexa qualquer em $L(p, q)$, então todo p -não-nó K tangente ao campo de Reeb de λ que possui número de auto-interseção $-1/p$, deve ser bordo de um p -disco que é uma seção global para o fluxo de Reeb. Mais ainda, este p -disco é uma página de uma decomposição em livro aberto (racional) de $L(p, q)$ com encadernação K , tal que todas as páginas são seções globais tipo-disco para o fluxo de Reeb.*

SISTEMA DE SEÇÕES TRANSVERSAIS E O HAMILTONIANO DE HÉNON-HEILES

No capítulo 3, apresentamos uma discussão em torno das condições necessárias e suficientes para a existência de uma seção global tipo-disco (racional) para o fluxo de Reeb no Espaço lenticular $L(p, 1)$, $1 < p \in \mathbb{Z}$. Vimos que a convexidade dinâmica é uma condição suficiente para garantir a existência de uma órbita periódica especial P , cujo número de auto-enlaçamento $-1/p$ e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Desta forma, o Teorema de caracterização devido à Hryniewicz, Licata e Salomão garante que P é encadernação de uma folheação em livro aberto (racional) para o fluxo. Em geral, se a convexidade dinâmica não é satisfeita tal questão se torna mais delicada. Hofer, Wysocki e Zehnder provam em [16] que, se λ é uma forma de contato *tight* e não-degenerada em S^3 , então o fluxo de Reeb associado a λ admite um sistema global de seções transversais. Tal conceito será apresentado na primeira seção deste capítulo.

Este capítulo tem como principal objetivo investigar a existência de um sistema global de seções transversais para níveis de energia logo acima da energia crítica no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles. O nível de energia crítico $H^{-1}(\frac{1}{6})$ no sistema de Hénon-Heiles possui exatamente três equilíbrios tipo-sela centro. Desta forma, na segunda seção apresentaremos de forma resumida o comportamento do fluxo Hamiltoniano próximo de um equilíbrio do tipo sela-centro, quando o mesmo admite uma certa mudança de coordenadas, caso que ocorre no sistema de Hénon-Heiles. Feito isso, serão introduzidos os conjuntos singulares estritamente convexos e a folheação tipo $3 - 2$. Na terceira seção, será apresentada a chamada folheação do tipo $3 - 2^3$, discutiremos a possível existência desta folheação nos níveis de energia do sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles e apresentaremos uma construção neste sentido. Na última seção apresentaremos os passos finais que ainda realizaremos para garantir a existência da folheação.

4.1 Sistemas globais de seções transversais

Definição 4.1. *Seja λ uma forma de contato tight em S^3 . Um sistema global de seções transversais para o fluxo de X_λ é uma folheação singular $\mathcal{F}$ de S^3 com as seguintes propriedades:*

- *O conjunto singular de $\mathcal{F}$, denotado por $\mathcal{P}$, é formado por um número finito de órbitas periódicas não-nós de X_λ , com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder em $\{1, 2, 3\}$ com relação a trivialização que se estende a um disco. Cada elemento de $\mathcal{P}$ é chamado de encadernação da folheação $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma folheação suave de $S^3 \setminus \cup_{P \in \mathcal{P}} P$. O fecho de cada folha $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$ é uma 2-esfera mergulhada em S^3 , com um número finito de discos abertos removidos, e suas componentes de bordo, são chamados de limites assintóticos de F , são elementos distintos de $\mathcal{P}$. Além disso, para cada folha $F \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$, temos as seguintes possibilidades:*
 - a) *F possui um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 3 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1. Tais folhas aparecem em uma família a 1-parâmetro de folhas com os mesmos limites assintóticos.*
 - b) *F possui um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 3, um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 2 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1.*
 - c) *F possui um limite assintótico com índice de Conley-Zehnder 2 e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 1.*

Nos casos b) e c), dizemos que a folha F é rígida, ver Figura 4.1.

- *O campo de Reeb X_λ é transversal às folhas de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{P}$.*

Figura 4.1: Possíveis configurações para as folhas regulares de um sistema global de seções transversais. Órbitas em azul, vermelho e verde, representam limites assintóticos com índice de Conley-Zehnder 3, 2 e 1, respectivamente.

Hofer, Wysocki e Zehnder provam em [16] a existência deste sistema global de seções transversais em S^3 , fazendo o uso de técnicas que envolvem aplicações pseudo-holomorfas definidas na simplectização $\mathbb{R} \times S^3$. O sistema de seções transversais é obtido como a projeção de uma folheação estável de energia finita na simplectização $\mathbb{R} \times S^3$. Cada folha é dada pela projeção em S^3 de uma superfície de energia finita na simplectização. A definição de uma folheação estável de energia finita será apresentada a seguir.

Definição 4.2. *Seja λ uma forma de contato tight em S^3 e $J \in \mathcal{J}(\lambda)$ uma estrutura complexa. Um folheação estável de energia finita para $\tilde{J} = (\lambda, J)$ é uma folheação suave da simplectização $\mathbb{R} \times S^3$ com as seguintes propriedades:*

- Cada folha $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ é a imagem de uma superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} = (a, u) : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$. Chamamos de furos e limites assintóticos de $\tilde{F}$, respectivamente, os furos e os limites assintóticos de $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F}$. Definimos o índice de Fredholm de $\tilde{F}$ como $\text{Fred}(\tilde{F}) := \text{Fred}(\tilde{u})$.
- Existe uma constante uniforme $C > 0$, tal que $0 < E(\tilde{u}) < C$ para toda superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$.
- Para toda $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ e todo $c \in \mathbb{R}$, temos que $T_c(\tilde{F}) \in \tilde{\mathcal{F}}$, em que T_c é a translação na coordenada real dada por $T_c(a, c) = (a + c, z)$, $\forall (a, z) \in \mathbb{R} \times S^3$. Além disso, para quaisquer $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ e $c \in \mathbb{R}$, $T_c(\tilde{F}_1) \cap \tilde{F}_2 = \emptyset$ ou $T_c(\tilde{F}_1) = \tilde{F}_2$.
- Todos os limites assintóticos das folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ são órbitas periódicas não-nós de X_λ com número de auto-enlaçamento -1 e índice de Conley-Zehnder em $\{1, 2, 3\}$.

- Cada $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}$ tem precisamente um furo positivo e um número finito arbitrário (possivelmente zero) de furos negativos. Se $T_c(\tilde{F}) \cap \tilde{F} = \emptyset$, $\forall c \neq 0$, então $\text{Fred}(\tilde{F}) \in \{1, 2\}$ e u é um mergulho transversal ao campo de Reeb X_λ . Se $T_c(\tilde{F}) = \tilde{F}$, $\forall c \in \mathbb{R}$, então $\tilde{F}$ tem precisamente um furo negativo e ambos os furos de $\tilde{F}$, o positivo e o negativo estão associados ao mesmo limite assintótico. Neste último caso, $\text{Fred}(\tilde{F}) = 0$ e $\tilde{F}$ é um cilindro sobre o seu limite assintótico.

No capítulo 2, comentamos que o índice de Fredholm de uma superfície de energia finita mergulhada $\tilde{u}$ pode ser interpretado como a dimensão local do espaço local $\mathcal{M}$ de superfícies de energia finita mergulhada (módulo reparametrizações) próximas de $\tilde{u}$ com a mesma quantidade de furos e os mesmos limites assintóticos. Desta forma, as definições de furo, limite assintótico e índice de Fredholm de uma folha $\tilde{F}$ não dependem da escolha da superfície mergulhada de energia finita $\tilde{u} : S^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \times S^3$ satisfazendo $\tilde{u}(S^2 \setminus \Gamma) = \tilde{F}$. As translações $T_c(\tilde{F})$ produzem naturalmente uma dimensão de $\mathcal{M}$, desta forma, se $\text{Fred}(\tilde{F}) = 1$, então o espaço local $\mathcal{M}$ é dado por $\{T_c(\tilde{F}), c \in \mathbb{R}\}$, e conseqüentemente, sua projeção em S^3 é sempre a mesma. Por este motivo, tais folhas são chamadas de *rígidas*. Se $\text{Fred}(\tilde{F}) = 2$, além das translações reais, temos uma segunda direção dada pelo campo de Reeb X_λ e, portanto, $\mathcal{M}$ se projeta em S^3 como uma família a 1-parâmetro de superfícies mergulhadas.

Teorema 4.3 (Hofer, Wysocki e Zehnder, [16]). *Seja $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ uma forma de contato não-degenerada em S^3 , em que $f : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função suave. Então existe um subconjunto denso $\mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda) \subset \mathcal{J}(\lambda)$ na topologia C^∞ tal que, para qualquer $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, a estrutura quase-complexa $\tilde{J} = (\lambda, J)$ admite uma folheação estável de energia finita $\tilde{F}$ na simplectização $\mathbb{R} \times S^3$. Além disso, a projeção de $\tilde{F}$ em S^3 , via projeção $\pi : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow S^3$ no segundo fator, é um sistema global de seções transversais para o fluxo de X_λ .*

Um caso de particular interesse é quando a forma de contato $\lambda = f\lambda_0|_{S^3}$ em S^3 é fracamente convexa.

Definição 4.4. *Uma forma de contato λ em S^3 é dita fracamente convexa se, para toda órbita periódica contrátil P do campo de Reeb X_λ , temos $\mu_{\text{CZ}}(P, \beta_{\text{disk}}) \geq 2$.*

Suponha agora que λ é uma forma de contato não-degenerada, *tight* e fracamente convexa. Dada uma estrutura complexa $J \in \mathcal{J}_{\text{reg}}(\lambda)$, temos que existe uma folheação estável de energia finita $\tilde{F}$ para $(\tilde{J}, \lambda)$ com as possíveis seguintes configurações:

- *Tipo (3)*: $\tilde{F}$ é um plano de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita periódica P de índice 3 em seu furo positivo, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ pertence a uma família a 1-parâmetro de planos em S^3 com o mesmo limite assintótico P .
- *Tipo (3, 2)*: $\tilde{F}$ é um cilindro de energia finita $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita periódica P de índice 3 em seu furo positivo e uma órbita Q de índice 2 em seu furo negativo, e sua projeção em $F \in \mathcal{F}$ é um cilindro rígido em S^3 que conecta P e Q .
- *Tipo (2)*: $\tilde{F}$ é um plano de energia finita em $\mathbb{R} \times S^3$, assintótico a uma órbita periódica P de índice 2 em seu furo positivo, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ é um plano rígido em S^3 cujo bordo é dado por P .
- *Cilindro sobre uma órbita periódica*: $\tilde{F}$ possui um furo positivo e um furo negativo ambos associados ao mesmo limite assintótico P de índice 2 ou 3, e sua projeção $F \in \mathcal{F}$ em S^3 é dada exatamente por P .

Note que, o conjunto singular $\mathcal{P}$ do sistema de seções transversais $\mathcal{F} = \pi(\tilde{\mathcal{F}})$, possui pelo menos uma órbita periódica P , tal que $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$, pois $\mathcal{F}$ deve folhear toda a esfera S^3 .

Finalizaremos esta seção descrevendo um tipo especial de folhação chamada *folhação 3 – 2 – 3* definida em [17]. Para uma melhor compreensão, acompanhe a construção tendo em vista a Figura 4.2. Suponha que o conjunto singular $\mathcal{P}$ do sistema de seções transversais $\mathcal{F} = \pi(\tilde{\mathcal{F}})$ seja formado por apenas 3 órbitas periódicas. Duas órbitas periódicas P_3 e P'_3 com índice 3 e uma órbita periódica P_2 com índice 2. Existem planos rígidos U^1 e U^2 , ambos assintóticos à P_2 , tais que $U := U^1 \cup P_2 \cup U^2$ é uma 2-esfera topológica mergulhada que separa S^3 em duas componentes disjuntas M e M' , ou seja $S^3 \setminus U = M \dot{\cup} M'$. Além disso, $P_3 \subset M$ e $P'_3 \subset M'$. Existem cilindros rígidos de $\mathcal{F}$, $V \subset M$ e $V' \subset M'$ conectando respectivamente P_3 com P_2 e P'_3 com P_2 . Desta forma, $\mathcal{F}$ contém famílias de planos D_τ e $D_{\tau'}$, $\tau \in (0, 1)$, assintóticos, respectivamente à P_3 e P'_3 , que folheiam respectivamente $M \setminus (P_3 \cup V)$ e $M' \setminus (P'_3 \cup V')$. Nos pontos extremos 0 e 1 do intervalo de parâmetros $(0, 1)$, a família D_τ se quebra respectivamente sobre $U^1 \cup P_2 \cup V$ e $U^2 \cup P_2 \cup V$ e a família $D_{\tau'}$, se quebra respectivamente sobre $U^1 \cup P_2 \cup V'$ e $U^2 \cup P_2 \cup V'$. Para mais detalhes sobre tais afirmações ver [16].

Definição 4.5. *O sistema global de seções transversais $\mathcal{F}$ que descrevemos acima é chamado folhação 3 – 2 – 3 para o fluxo de Reeb em S^3 .*

Figura 4.2: Corte de uma folheação 3–2–3 em S^3 . Na ilustração os pontos representam as encadernações da folheação, linhas tracejadas as famílias a 1-parâmetro e linhas contínuas folhas rígidas. As setas representam a direção do campo de Reeb X_λ . Em cinza estão representadas as variedades estável e instável associadas à encadernação P_2 .

4.2 Conjuntos singulares estritamente convexos e a Folheação 2 – 3

Seja $(\mathbb{R}^4, \omega_0, H)$ um sistema Hamiltoniano. Vimos no capítulo 2, que o campo Hamiltoniano associado a H é dado por

$$X_H = J_0 \nabla H,$$

com J_0 definido em (2.4). Apresentaremos a seguir a definição de um equilíbrio do tipo sela-centro.

Definição 4.6. Dizemos que um ponto de equilíbrio $p_c \in \mathbb{R}^4$ de um sistema Hamiltoniano $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$ é do tipo sela-centro se a matriz $J_0 \text{Hess}H(p_c)$, que representa $dH(p_c)$, possui dois autovalores reais α e $-\alpha$ e dois autovalores imaginários puros ωi e $-\omega i$, com α e $\omega > 0$.

Suponha agora que $H^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^4$ contém uma componente S_0 homeomorfa a S^3 possuindo um único equilíbrio $p_c \in \mathbb{R}^4$ do tipo sela-centro. Assuma que existem coordenadas locais $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, com $\mathcal{V}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$, vizinhanças de 0 e p_c , respectivamente, de modo que nestas novas coordenadas $(q_1, q_2, p_1, p_2) = \psi^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_2)$, a forma simplética em $\mathcal{V}$ é

dada por $\omega_0 = \sum_{i=1}^2 dp_i \wedge dq_i$ e a função Hamiltoniana $K := H \circ \psi$ assume a seguinte forma normal

$$K(q_1, q_2, p_1, p_2) = -\alpha I_1 + \omega I_2 + R(I_1, I_2), \quad (4.1)$$

em que

$$I_1(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1, \quad I_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{q_2^2 + p_2^2}{2} \text{ e } R(I_1, I_2) = \mathcal{O}(I_1^2 + I_2^2).$$

Tais coordenadas são chamadas *coordenadas de Moser*.

Moser mostrou em [53] que, se H for uma função real-analítica em torno do sela-centro p_c , então existe uma mudança de variáveis como a apresentada acima e resultados em [54] devido a Rüssmann, garantem que tal mudança é simplética. Portanto, existe uma conjugação entre os campos Hamiltonianos X_K e $X_H|_{\mathcal{U}}$ associados à K e $H|_{\mathcal{U}}$. Desta forma, podemos utilizar (4.1) para analisar o comportamento do fluxo Hamiltoniano de H em torno do sela-centro p_c . O fluxo Hamiltoniano próximo a equilíbrios do tipo sela-centro é bem conhecido por aparecer naturalmente em sistemas Hamiltonianos clássicos. Apresentaremos agora de forma resumida o comportamento associado ao fluxo Hamiltoniano próximo de um equilíbrio do tipo sela-centro, para uma descrição detalhada referimos à excelente tese de de Paulo [21].

O sistema Hamiltoniano associado a K é dado por

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \partial_{p_1} K = \partial_{I_1} K q_1 = -(\alpha - \partial_{I_1} R) q_1 \\ \dot{q}_2 = \partial_{p_2} K = \partial_{I_2} K p_2 = (\omega + \partial_{I_2} R) p_2 \\ \dot{p}_1 = -\partial_{q_1} K = -\partial_{I_1} K p_1 = (\alpha - \partial_{I_1} R) p_1 \\ \dot{p}_2 = -\partial_{q_2} K = \partial_{I_2} K q_2 = -(\omega + \partial_{I_2} R) q_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Por meio deste sistema, pode-se mostrar que as funções I_1 e I_2 são constantes ao longo de soluções de (4.2), ou seja, I_1 e I_2 são integrais primeiras para o fluxo de X_K . Seja agora $z(t) = (q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$ uma solução do sistema Hamiltoniano (4.2), temos que

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\bar{\alpha}t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\alpha}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_2(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\bar{\omega}t) & \text{sen}(\bar{\omega}t) \\ -\text{sen}(\bar{\omega}t) & \cos(\bar{\omega}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix},$$

em que $\bar{\alpha} = \alpha - \partial_{I_1} R(I_1, I_2)$ e $\bar{\omega} = \omega + \partial_{I_2} R(I_1, I_2)$ são constantes ao longo das trajetórias.

Portanto, podemos concluir que o comportamento do fluxo no plano $q_1 p_1$ é equivalente ao comportamento de uma sela, enquanto que o comportamento do fluxo no plano $q_2 p_2$ é

equivalente ao comportamento de um centro. A Figura 4.3 ilustra o comportamento do fluxo projetado em q_1p_1 e q_2p_2 , respectivamente.

Figura 4.3: Projeções do fluxo Hamiltoniano próximo de um equilíbrio sela-centro.

Os nível de energia $K^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^4$ contém o sela-centro $0 \in \mathcal{V}$. Além disso, tal nível de energia contém as variedades estável e instável, dadas respectivamente por

$$W^s(0) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathcal{V}; p_1 = q_2 = p_2 = 0\},$$

$$W^u(0) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathcal{V}; q_1 = q_2 = p_2 = 0\}.$$

Por meio da equação (4.1), pode-se mostrar que $K^{-1}(E)$, para alguma energia pequena E , é invariante pela ação de S^1 sobre o plano q_2p_2 e pela involução $(q_1, p_1) \mapsto (-q_1, -p_1)$ no plano q_1p_1 . A Figura 4.4 ilustra a projeção de níveis de energias pequenas $|E|$. Vemos que, para $E < 0$, $K^{-1}(E)$ contém duas componentes que se projetam respectivamente no primeiro e terceiro quadrantes de q_1p_1 e quando $E = 0$, estas componentes se encontram no sela-centro. Para $E > 0$, $K^{-1}(E)$ contém apenas uma componente.

Figura 4.4: Projeções dos níveis de energia $K^{-1}(E)$ no plano q_1p_1 .

A variedade central do sela-centro $0 \in \mathcal{V}$, dada por

$$W^c(0) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathcal{V}; q_1 = p_1 = 0\},$$

é folheada por uma família a um parâmetro de órbitas periódicas P_E do fluxo Hamiltoniano, cada uma delas está contida num nível de energia $K^{-1}(E) > 0$, com $E > 0$ suficientemente pequeno. Em [17], de Paulo e Salomão provam o seguinte lema:

Lema 4.7. *Para quaisquer $E, |\delta| \geq 0$ suficientemente pequenos satisfazendo $E^2 + \delta^2 \neq 0$, temos que*

$$N_E^\delta := \{q_1 + p_1 = \delta\} \cap K^{-1}(E) \quad (4.3)$$

é uma 2-esfera mergulhada em $K^{-1}(E)$.

Para cada $E > 0$ pequeno, a órbita periódica P_E é dada exatamente pelo equador da 2-esfera definida por $N_E^0 := \{q_1 + p_1 = 0\} \cap K^{-1}(E)$. A 2-esfera N_E^0 é dada pela união disjunta dos hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ dados por

$$U_{1,E} := \{q_1 + p_1 = 0, q_1 < 0\} \cap K^{-1}(E) \text{ e } U_{2,E} := \{q_1 + p_1 = 0, q_1 > 0\} \cap K^{-1}(E) \quad (4.4)$$

com a órbita periódica de Lyapunov P_E . A Figura 4.5 apresenta a projeção da 2-esfera no plano $p_1 q_1$ bem como sua ilustração em $K^{-1}(E)$.

Figura 4.5: Na figura a esquerda temos a projeção da 2-esfera N_E^0 no plano $q_1 p_1$, para $E > 0$ pequeno. A figura a direita representa a 2-esfera N_E^0 em $K^{-1}(E)$, os hemisférios $U_{1,E}$, $U_{2,E}$ e a órbita periódica de Lyapunov P_E .

Proposição 4.8. *Seja P_E a órbita periódica de Lyapunov contida em $K^{-1}(E)$, então $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 2$.*

Uma prova da Proposição 4.8 pode ser encontrada em [17].

Assuma agora que o nível crítico $S_0 \subset H^{-1}(0)$ possui curvatura estritamente positiva em seus pontos regulares. Neste caso, dizemos que S_0 é um *conjunto singular estritamente convexo*. Tais conjuntos foram introduzidos e estudados inicialmente por Salomão em [13].

Corolário 4.9 (Ragazzo e Salomão, [18]). *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana. Se S é um conjunto singular estritamente convexo de $H^{-1}(0)$, então S contém uma órbita periódica P do fluxo Hamiltoniano associado a H que é não-nó, possui número de auto-enlaçamento -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$.*

Considere uma pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$ de um conjunto singular estritamente convexo S_0 . Pela definição de S_0 , para cada $E > 0$ suficientemente pequeno, encontramos uma 3-bola fechada $S_E \subset \mathcal{U}$ mergulhada em $H^{-1}(E)$ tal que, em coordenadas locais, S_E se projeta no plano $q_1 p_1$ em $\{q_1 + p_1 \geq 0\}$. O bordo da 3-bola S_E dentro do nível de energia $H^{-1}(E)$ em coordenadas locais, coincide com a 2-esfera N_E^0 definida em (4.3), ou seja,

$$\partial S_E = \{q_1 + p_1 = 0\} \cap S_E.$$

A esfera ∂S_E possui como equador a órbita periódica de Lyapunov P_E .

Como $\mu_{CZ}(P_E, \beta_{\text{disk}}) = 2$, a órbita periódica de Lyapunov é comumente denotada por $P_{2,E}$. A Figura 4.6 ilustra a 3-bola fechada $S_E \subset H^{-1}(E)$, para $E > 0$ pequeno.

Figura 4.6: Representação da 3-bola fechada $S_E \subset H^{-1}(E)$, $E > 0$ pequeno.

Definição 4.10. *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$. Seja $S_0 \subset H^{-1}(0)$ o conjunto singular estritamente convexo que contém o sela-centro p_c e, dado $E > 0$ pequeno, considere $S_E \subset H^{-1}(E)$ a 3-bola fechada mergulhada próxima a S_0 , como explicamos anteriormente. Uma folheação 2–3 para o fluxo Hamiltoniano em S_E é uma folheação singular $\mathcal{F}_E$ de S_E com as seguintes propriedades:*

- O conjunto singular de $\mathcal{F}_E$ é formado pela órbita periódica hiperbólica $P_{2,E}$, equador da esfera ∂S_E , e por uma órbita periódica não-nó $P_{3,E} \subset \dot{S}_E := S_E \setminus \partial S_E$. Estas órbitas periódicas são chamadas de encadernações da folheação $\mathcal{F}_E$ e seus índices de Conley-Zehnder são $\mu_{CZ}(P_{2,E}, \beta_{\text{disk}}) = 2$ e $\mu_{CZ}(P_{3,E}, \beta_{\text{disk}}) = 3$.

- $\mathcal{F}_E$ contém os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ de ∂S_E definidos, em coordenadas locais por (4.4). Ambos os hemisférios são chamados planos rígidos.
- $\mathcal{F}_E$ contém um cilindro aberto mergulhado $V_E \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$, cujo bordo é dado por $\partial V_E = P_{2,E} \cup P_{3,E}$. Este cilindro é chamado cilindro rígido.
- $\mathcal{F}_E$ contém uma família suave a um parâmetro de discos abertos mergulhados $D_{\tau,E} \subset \dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$, com $\tau \in (0, 1)$, tal que o bordo de cada $D_{\tau,E}$ é dado por $\partial D_{\tau,E} = P_{3,E}$. Esta família folheia $\dot{S}_E \setminus (V_E \cup P_{3,E})$ e $D_{\tau,E} \rightarrow V_E \cup P_{2,E} \cup U_{1,E}$ quando $\tau \rightarrow 0^+$ e $D_{\tau,E} \rightarrow V_E \cup P_{2,E} \cup U_{2,E}$ quando $\tau \rightarrow 1^-$.
- O campo Hamiltoniano X_H é transversal a todas as folhas regulares $U_{1,E}$, $U_{2,E}$, V_E e $D_{\tau,E}$, $\tau \in (0, 1)$.

A Figura 4.7 apresenta uma ilustração da folheação 2 – 3 definida acima.

Figura 4.7: Corte de uma folheação 2 – 3 em S_E . Pontos azuis e vermelhos representam as encadernações da folheação com índice de Conley-Zehnder 3 e 2, respectivamente. Linhas contínuas em preto representam os hemisférios $U_{1,E}$ e $U_{2,E}$ da 2-esfera ∂S_E , o par de linhas contínuas em verde correspondem ao cilindro rígido V_E e as linhas tracejadas a família de discos $D_{\tau,E}$, com $\tau \in (0, 1)$. As setas pretas apontam na direção do campo X_H . Em cinza estão representadas as variedades estável $W_{E,loc}^s(P_{2,E})$ e instável $W_{E,loc}^u(P_{2,E})$ do equador $P_{2,E}$.

Em [17], de Paulo e Salomão estudaram a dinâmica em níveis de energia logo acima de um conjunto singular estritamente convexo. Tais autores garantem a existência de uma folheação 2 – 3 nestes níveis, mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 4.11. *Seja $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hamiltoniana que admite um ponto de equilíbrio do tipo sela-centro $p_c \in H^{-1}(0)$. Suponha que o ponto crítico p_c admite as coordenadas locais de Moser. Considere $S_E \subset H^{-1}(E)$, com $E > 0$ pequeno, a 3-bola fechada mergulhada próxima ao conjunto singular estritamente convexo S_0 que definimos anteriormente. Então, para todo $E > 0$ suficientemente pequeno, existe uma folheação $2 - 3 \mathcal{F}_E$ para o fluxo Hamiltoniano em S_E . Além disso, a órbita periódica $P_{2,E}$ admite pelo menos uma órbita homoclínica contida em $\dot{S}_E = S_E \setminus \partial S_E$.*

A existência de uma folheação $2 - 3$ para o fluxo traz consequências profundas a respeito da dinâmica. Diferentemente da dicotomia sobre duas ou infinitas órbitas periódicas, como no caso de uma seção global tipo-disco, em [55], de Paulo e Salomão provam que, se a função Hamiltoniana H é real-analítica, a folheação $2 - 3$ força a existência de infinitas órbitas periódicas e infinitas órbitas homoclínicas a órbitas periódicas de Lyapunov. Além disso, se os ramos das variedades estável e instável não coincidem, então existem subsistemas tipo-ferradura. Em particular, tais sistemas implicam uma entropia topológica positiva no nível de energia $H^{-1}(E)$.

4.3 Folheação $3 - 2^3$ e o Hamiltoniano de Hénon-Heiles

No capítulo 3, apresentamos o sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles e mencionamos no início deste capítulo que o nível de energia crítico $H^{-1}(\frac{1}{6})$ possui exatamente três equilíbrios do tipo sela-centro. Sabemos que próximo de um equilíbrio do tipo sela-centro existe uma órbita periódica de Lyapunov, para cada nível de energia logo acima do nível crítico. Devido a Proposição 4.8, cada órbita periódica possui índice de Conley-Zehnder 2, com relação a trivialização que se estende a um disco no nível de energia. Uma questão natural motivada pelo Teorema 4.11 é a seguinte:

- Níveis de energia logo acima do nível crítico no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles, admitem algum tipo de sistema global de seções transversais?

Sendo o sistema de Hénon-Heiles real-analítico, a existência de um sistema global de seções transversais iria garantir, por meio das mesmas técnicas presentes em [55], a presença de infinitas órbitas periódicas. Além disso, teríamos também infinitas órbitas homoclínicas a cada órbita periódica de Lyapunov.

Níveis de energia $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$ no sistema Hamiltoniano de Hénon-Heiles são não-compactos. Desta forma, estamos interessados apenas em estudar a dinâmica limitada pelas ‘regiões de pescoço’ presentes nos níveis de energia, ver Figura 4.9.

Seja H a função Hamiltoniano de Hénon-Heiles dada em (3.4). Tome $\tilde{\delta} > 0$ pequeno e o plano dado por

$$\alpha := \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 1 + \tilde{\delta}\},$$

segue que $D_E := H^{-1}(E) \cap \alpha$ é uma 2-esfera topológica contida no nível de energia $H^{-1}(E)$, para $E - \frac{1}{6} \geq 0$ pequeno. De fato, substituindo-se $x_2 = 1 + \tilde{\delta}$ em H , obtemos

$$H = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{(3+2\tilde{\delta})}{2}x_1^2 - \frac{(3+2\tilde{\delta})}{6}\tilde{\delta}^2 + \frac{1}{6},$$

e desta forma, para energia $E > \frac{1}{6}$ pequeno, obtemos a 2-esfera topológica dada por

$$\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{(3+2\tilde{\delta})}{2}x_1^2 = E - \frac{1}{6} + \frac{(3+2\tilde{\delta})}{6}\tilde{\delta}^2.$$

Considere $\tilde{S}_E := H^{-1}(E) \cap \{x_2 \leq 1 + \tilde{\delta}\}$, ver Figura 4.8.

Figura 4.8: Ilustração de $\tilde{S}_E$.

Devido à $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente no Hamiltoniano H , podemos efetuar rotações em $\tilde{S}_E$ e realizar o procedimento anterior de forma análoga próximo dos equilíbrios $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$. Desta forma, obtemos uma variedade suave denotada por S_E que preserva a $\mathbb{Z}_3$ -simetria, como ilustrado na Figura 4.9.

Figura 4.9: Ilustração da variedade S_E .

Definição 4.12. *Uma folheação $3 - 2^3$ para o fluxo Hamiltoniano em S_E é uma folheação singular $\mathcal{F}_E$ de S_E com as seguinte propriedades:*

- *O conjunto singular de $\mathcal{F}_E$ é formado por 3 órbitas periódicas de Lyapunov $P_{2,E}^1$, $P_{2,E}^2$ e $P_{2,E}^3$, que são os equadores das três esferas que formam ∂S_E , e por uma órbita periódica não-nó $P_{3,E} \subset \dot{S}_E := S_E \setminus \partial S_E$. Estas órbitas periódicas são chamadas de encadernações da folheação $\mathcal{F}_E$ e seus índices de Conley-Zehnder são $\mu_{CZ}(P_{2,E}^1, \beta_{\text{disk}}) = \mu_{CZ}(P_{2,E}^2, \beta_{\text{disk}}) = \mu_{CZ}(P_{2,E}^3, \beta_{\text{disk}}) = 2$ e $\mu_{CZ}(P_{3,E}, \beta_{\text{disk}}) = 3$.*
- *$\mathcal{F}_E$ contém os hemisférios $U_{1,E}^i$ e $U_{2,E}^i$, $i = 1, 2, 3$ de ∂S_E definidos, em coordenadas locais por (4.4). Tais hemisférios são chamados planos rígidos.*
- *$\mathcal{F}_E$ contém três cilindros abertos mergulhados $V_E^i \subset \dot{S}_E \setminus P_{3,E}$, cujo bordo é dado por $\partial V_E^i = P_{2,E}^i \cup P_{3,E}$, $i = 1, 2, 3$. Estes cilindros são chamados de cilindros rígidos.*
- *$\mathcal{F}_E$ contém três famílias suaves a um parâmetro de discos abertos mergulhados $D_{\tau_i,E} \subset \dot{S}_E \setminus (\cup_{i=1}^3 [V_E^i \cup P_{3,E}])$, com $\tau_i \in (0, 1)$ e $i = 1, 2, 3$, tal que o bordo de cada $D_{\tau_i,E}$ é dado por $\partial D_{\tau_i,E} = P_{3,E}$. As três famílias juntas folheiam $\dot{S}_E \setminus (\cup_{i=1}^3 [V_E^i \cup P_{3,E}])$. Além disso, $D_{\tau_i,E} \rightarrow V_E^i \cup P_{2,E}^i \cup U_{1,E}^i$, quando $\tau_i \rightarrow 0^+$ e $D_{\tau_i,E} \rightarrow V_E^{i+1} \cup P_{2,E}^{i+1} \cup U_{2,E}^{i+1}$, quando $\tau_i \rightarrow 1^-$, para $i = 1, 2$ e $D_{\tau_3,E} \rightarrow V_E^3 \cup P_{2,E}^3 \cup U_{1,E}^3$, quando $\tau_3 \rightarrow 0^+$ e $D_{\tau_3,E} \rightarrow V_E^1 \cup P_{2,E}^1 \cup U_{2,E}^1$, quando $\tau_3 \rightarrow 1^-$.*
- *O campo Hamiltoniano X_H é transversal a todas as folhas regulares $U_{1,E}^i$, $U_{2,E}^i$, V_E^i e $D_{\tau_i,E}$, $\tau_i \in (0, 1)$, para $i = 1, 2, 3$.*

A Figura 4.10 ilustra o corte de uma folheação do tipo $3 - 2^3$ em S_E .

Figura 4.10: Corte de uma folheação $3-2^3$ em S_E . Pontos azuis e vermelhos representam as encadernações da folheação com índice de Conley-Zehnder 3 e 2, respectivamente. Linhas contínuas em preto representam os hemisférios das três 2-esferas que compõem ∂S_E , os pares de linhas contínuas verdes correspondem aos cilindros rígidos V_E^1 , V_E^2 e V_E^3 e as linhas tracejadas as famílias de discos $D_{\tau_i,E}$, com $\tau_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$ e 3 .

O principal objetivo neste capítulo é investigar a possível existência de uma folheação $3 - 2^3$ em S_E , para $E > \frac{1}{6}$ pequeno. Note que, um dos ingredientes essenciais para a existência desta folheação é uma encadernação dada por uma órbita periódica P , tal que o número de auto-enlaçamento seja -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Além disso, P não deve estar lincada com nenhuma das órbitas periódicas de Lyapunov. Pretendemos utilizar técnicas envolvendo aplicações pseudo-holomorfas definidas na simplectização de S_E . Primeiramente, precisamos provar que S_E é uma hipersuperfície de contato, para $E > \frac{1}{6}$ próximo de $\frac{1}{6}$. Isto será provado na próxima seção.

4.3.1 S_E é hipersuperfície de contato, para $E > \frac{1}{6}$ próximo de $\frac{1}{6}$

Nesta seção demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 4.13. *S_E é uma hipersuperfície de contato, para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$.*

Demonstração. Lembre-se que precisamos verificar que existe um campo de Liouville definido em uma vizinhança de S_E positivamente transversal a S_E .

Sejam

$$X_0 = \frac{1}{2}(x_1, x_2, y_1, y_2) \text{ e } X_c = \frac{1}{2}(x_1, x_2 - 1, y_1, y_2)$$

campos radiais centrados na origem $w_0 = (0, 0, 0, 0)$ e no ponto crítico $p_c^1 = (0, 1, 0, 0)$, respectivamente. O objetivo inicial é interpolar os campos X_0 e X_c , para níveis de energia com $E - \frac{1}{6} > 0$ suficientemente pequeno.

Como X_0 e X_c são campos radiais, segue que são campos de Liouville. Tome o campo de vetores $R := X_0 - X_c$, temos que

$$\begin{aligned} d(\iota_R \omega_0) &= d(\iota_{X_0} \omega_0 - \iota_{X_c} \omega_0) \\ &= \mathcal{L}_{X_0} \omega_0 - \mathcal{L}_{X_c} \omega_0 \\ &= \omega_0 - \omega_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Devido ao fato de $\mathbb{R}^4$ ser simplesmente conexo, tem-se que a 1-forma $\iota_R \omega_0$ é exata, logo existe função $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\iota_R \omega_0 = -dg.$$

Além disso, incluindo-se o campo R na forma simplética ω_0 e efetuando-se alguns cálculos obtemos que

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_2}{2}. \quad (4.5)$$

Tome agora $\delta > 0$ pequeno e considere a função de corte $f : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$ com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} f(t) = 0, t \in (-\infty, \frac{\delta}{2}] \\ f(t) = 1, t \in [\delta, \infty) \\ f'(t) > 0, t \in (\frac{\delta}{2}, \delta), \end{cases} \quad (4.6)$$

como ilustrado na Figura 4.11.

Figura 4.11: Função de corte $f : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$.

Se $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave e X_h é o campo Hamiltoniano associado a h por meio da forma simplética ω_0 , ou seja, $\iota_{X_h}\omega_0 = -dh$, segue que

$$X_h = (h_{y_1}, h_{y_2}, -h_{x_1}, -h_{x_2}). \quad (4.7)$$

Desta forma, tomando-se $h(x_1, x_2, y_1, y_2) = f(1 - x_2)$, de (4.7), temos que o campo Hamiltoniano associado a h é dado por

$$X_h = (0, 0, 0, 1)f'. \quad (4.8)$$

Definimos o campo interpolado como

$$X := X_c + X_{gh} = X_c + gX_h + hR, \quad (4.9)$$

em que X_{gh} é o campo Hamiltoniano associado à função gh . Note que X é um campo de Liouville, pois é a soma de um campo de Liouville com um campo hamiltoniano. De fato,

$$\mathcal{L}_X\omega_0 = \mathcal{L}_{X_c}\omega_0 - \mathcal{L}_{X_{gh}}\omega_0 = \omega_0.$$

Para $x_2 \leq 1 - \delta$ segue que o campo X coincide com X_0 , enquanto que para $1 - \frac{\delta}{2} \leq x_2$ o campo X coincide com X_c , como ilustrado na Figura 4.12. ,

Figura 4.12: Domínio de interpolação do campo X no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos, respectivamente, as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$.

Lema 4.14. *Se $E > \frac{1}{6}$, então X é positivamente transversal a $S_E \cap \{0 < x_2 \leq 1\}$.*

Demonstração. Por meio de (4.9), deve-se mostrar que

$$\nabla H \cdot X_c + g\nabla H \cdot X_h + h\nabla H \cdot R > 0.$$

Desta forma, tem-se

$$\nabla H \cdot X_c = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} - \frac{x_2}{2} + x_2^2 - \frac{x_2^3}{2} + \frac{3x_1^2 x_2}{2}, \quad (4.10)$$

e utilizando a definição de H , segue

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} = H - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - x_1^2 x_2 + \frac{x_2^3}{3} \quad (4.11)$$

substituindo (4.11) em (4.10), tem-se

$$\nabla H \cdot X_c = H - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} - \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6}. \quad (4.12)$$

Para $x_2 = 1 - \varepsilon$, em que $0 \leq \varepsilon < 1$ em (4.12), segue

$$\nabla H \cdot X_c = H - \frac{1}{6} - \frac{\varepsilon x_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}.$$

Desta forma, tomando-se a energia $E > \frac{1}{6}$ próxima de $\frac{1}{6}$ obtém-se

$$\nabla H \cdot X_c = E - \frac{1}{6} - \frac{\varepsilon x_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}, \quad (4.13)$$

substituindo-se $E > \frac{1}{6}$ e $x_2 = 1 - \varepsilon$ em H e efetuando-se alguns cálculos conclui-se que se $(x_1, 1 - \varepsilon, y_1, y_2) \in H^{-1}(E)$, então $x_1^2 \leq \frac{2(E - \frac{1}{6})}{3 - 2\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{3}$. Portanto

$$\nabla H \cdot X_c \geq \frac{3(E - \frac{1}{6})(1 - \varepsilon)}{3 - 2\varepsilon} > 0.$$

Para garantir $g\nabla H \cdot X_h \geq 0$, basta observar que de (4.8) e (4.5) temos

$$g\nabla H \cdot X_h = gf'y_2 = f'\frac{y_2^2}{2} \geq 0.$$

O terceiro termo $h\nabla H \cdot R$ é sempre positivo para $E > \frac{1}{6}$ e $0 \leq x_2 \leq 1$, pois $f \geq 0$ e

$$\nabla H \cdot R = \frac{x_1^2}{2} + \frac{(1 - x_2)x_2}{2} \geq 0,$$

concluindo-se a prova do lema. ■

Agora será realizada uma nova interpolação entre os campos X e

$$X_2 = \frac{1}{2}(x_1, x_2 - 2, y_1, y_2),$$

em que X_2 é um campo radial centrado no ponto $w_2 = (0, 2, 0, 0)$ de maneira praticamente análoga a realizada anteriormente, porém neste caso o intervalo de interpolação do novo campo dependerá da energia E .

Para $1 - \frac{\delta}{2} \leq x_2$, tem-se que $X = X_c$. Como visto na equação (4.13), tomando energia $E > \frac{1}{6}$ e $x_2 = 1 - \varepsilon$, obtém-se

$$\nabla H \cdot X = \nabla H \cdot X_c = E - \frac{1}{6} - \frac{\varepsilon x_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}.$$

Portanto, para $\varepsilon \leq 0$ tal que $|\varepsilon| < \sqrt[3]{6(E - \frac{1}{6})}$, podemos concluir que

$$\nabla H \cdot X > 0, \quad (4.14)$$

tal informação é fundamental na definição da função de corte f_E . Considere agora a função de corte $f_E : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$ com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} f_E(t) = 0, t \in (-\infty, \frac{\delta_E}{2}] \\ f_E(t) = 1, t \in [\delta_E, \infty) \\ f'_E(t) > 0, t \in (\frac{\delta_E}{2}, \delta_E). \end{cases}$$

em que $\delta_E := \frac{\sqrt[3]{6(E - \frac{1}{6})}}{2} > 0$, ver Figura 4.13. Note que $\delta_E \rightarrow 0^+$, quando $E \rightarrow \frac{1}{6}^+$.

Figura 4.13: Função de corte $f_E : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$.

Tomando-se $h_E(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_E(x_2 - 1)$, devido à (4.7), tem-se que o campo Hamiltoniano associado a h_E é dado por

$$X_{h_E} = (0, 0, 0, -1)f'_E. \quad (4.15)$$

Para o campo $R = X_2 - X$, por meio de argumentos já utilizados, temos que $d(\iota_R \omega_0) = 0$, portanto existe função $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\iota_R \omega_0 = -dg$. Além disso, para $1 \leq x_2$, segue

que $R = X_2 - X_c$ e incluindo-se o campo R na forma simplética ω_0 podemos concluir que

$$g(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{y_2}{2}. \quad (4.16)$$

Podemos enfim definir o campo interpolado por

$$X_E := X + X_{gh_E} = X + gX_{h_E} + h_ER, \quad (4.17)$$

note que o campo X_E depende de E . Como X_E é soma de um campo de Liouville com um campo Hamiltoniano, segue que é um campo de Liouville. Além disso, para $x_2 \leq 1 + \frac{\delta_E}{2}$, temos que X_E coincide com o campo X , para $1 + \delta_E \leq x_2$, X_E coincide com o campo X_2 , como ilustrado na Figura 4.14.

Figura 4.14: Domínio de interpolação do campo X_E no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos, respectivamente, as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$.

Lema 4.15. *O campo X_E é transversal a $S_E \cap \{0 < x_2\}$, para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$.*

Demonstração. Para $S_E \cap \{0 < x_2 \leq 1\}$, temos que $X_E = X$ e, portanto, a hipótese segue do Lema 4.14.

Para $S_E \cap \{1 < x_2 \leq 1 + \delta_E\}$, a tese será verificada por meio das três parcelas que compõem o campo X_E em (4.17). De (4.14), temos $\nabla H \cdot X > 0$. Para as demais parcelas temos

$$\nabla H \cdot R = -\frac{x_2}{2} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}, \quad (4.18)$$

e substituindo-se $x_2 = 1 + \varepsilon$, para $0 < \varepsilon \leq \delta_E$ em (4.18), segue

$$\nabla H \cdot R = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Utilizando-se o fato de que se $(x_1, 1 + \varepsilon, y_1, y_2) \in H^{-1}(E)$, com $E > \frac{1}{6}$, então $x_1^2 \leq \frac{2(E - \frac{1}{6})}{3 + 2\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{3}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\nabla H \cdot R &\geq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3 + 2\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{6} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3 + 2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Note que precisamos garantir que

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3 + 2\varepsilon} > 0$$

apenas para $\frac{\delta_E}{2} \leq \varepsilon \leq \delta_E$, pois para $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta_E}{2}$, tem-se $h_E = 0$ e, consequentemente $h_E \nabla H \cdot R = 0$. Desta forma, por meio da definição de δ_E , temos

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3 + 2\varepsilon} &> \frac{\varepsilon}{2} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3} \\ &\geq \frac{\delta_E}{4} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3} \\ &= \frac{\sqrt[3]{6(E - \frac{1}{6})}}{8} - \frac{(E - \frac{1}{6})}{3} \\ &> 0,\end{aligned}$$

para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$.

Finalmente, para a terceira parcela, de (4.15) e (4.16), temos

$$g \nabla H \cdot X_{h_E} = -g f'_E y_2 = f'_E \frac{y_2^2}{2} \geq 0,$$

concluindo-se a prova do lema para o caso $\tilde{S}_E \cap \{1 < x_2 \leq 1 + \delta_E\}$.

Para $S_E \cap \{1 + \delta_E < x_2\}$, tem-se $X_E = X_2$. Substituindo-se $x_2 = 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ e efetuando-se alguns cálculos, para o nível de energia E , tem-se que

$$\begin{aligned}\nabla H \cdot X_2 &= E - \frac{1}{6} + \frac{\varepsilon x_1^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \\ &\geq (E - \frac{1}{6}) \frac{(3 + 2\varepsilon - 1)}{3 + 2\varepsilon} + \frac{\varepsilon x_1^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} \\ &\geq (E - \frac{1}{6}) \frac{(3 + 2\varepsilon - 1)}{3 + 2\varepsilon} + \frac{\varepsilon x_1^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6} \\ &> 0,\end{aligned}$$

para todo $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$, concluindo a prova do lema. A Figura 4.15 apresenta as regiões de interpolação do campo X_E no plano $x_1 x_2$. ■

Figura 4.15: Regiões de interpolação do campo X_E no plano x_1x_2 . Em vermelho e azul temos as projeções no plano x_1x_2 de $H^{-1}(\frac{1}{6})$ e $H^{-1}(E)$, para $E > \frac{1}{6}$, respectivamente.

Pelo Lema 4.15, segue que existe campo de Liouville X_E definido em uma vizinhança de S_E que é transversal a $S_E \cap \{0 < x_2\}$ para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. Novamente, devido a $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente em S_E podemos efetuar rotações como antes e realizar o procedimento anterior de maneira totalmente análoga próximo dos equilíbrios $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$. Desta forma, obtemos um campo de Liouville, ainda denotado por X_E , que é transversal a S_E , para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. Assim, S_E é uma hipersuperfície de contato. Em particular, $\lambda_E := \iota_{X_E}\omega_0$ define uma forma de contato restrita a S_E . ■

4.3.2 Existência de órbita periódica P , com simetria $\mathbb{Z}_3$, número de auto-enlaçamento -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$

Nesta seção, garantiremos a existência de uma órbita periódica contrátil P , com simetria $\mathbb{Z}_3$, número de auto-enlaçamento -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$ em S_E , para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. A órbita periódica P_E será uma possível encadernação para a folheação tipo $3 - 2^3$ que estamos interessados. Para isto, inicialmente será efetuada uma regularização próxima dos equilíbrios sela-centro, tornando tais níveis estrelados com relação a origem, mas de modo que ainda preservem à $\mathbb{Z}_3$ -simetria.

A primeira regularização será realizada próximo do equilíbrio $p_c^1 = (0, 1, 0, 0)$. Tome $\delta > 0$ pequeno, que será determinado posteriormente e $\delta_1 := \delta/3$. Seja $f : (-\infty, \infty) \rightarrow$

$[0, \delta_1]$, com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} f(t) = 0, t \in (-\infty, 0] \\ f(t) = \delta_1, t \in [\delta_1, \infty) \\ f'(t) > 0, t \in (0, \delta_1), \\ f''(t) \geq 0, \text{ se } f(t) \leq \frac{\delta_1}{4}, \end{cases}$$

como representada na Figura 4.16.

Figura 4.16: Função regularização $f : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \delta_1]$.

Tome agora a função Hamiltoniana regularizada $\tilde{H}^\delta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{H}^\delta(x_1, x_2, y_1, y_2) := H(x_1, x_2, y_1, y_2) + \tilde{f}(x_2), \quad (4.19)$$

em que $\tilde{f}(x_2) := f(x_2 - (1 - \delta_1))$. Note que, se $x_2 \leq 1 - \delta_1$, então $\tilde{H}^\delta = H$. A regularização realizada em H , faz com que o equilíbrio sela-centro contido no nível de energia $\frac{1}{6}$, passe a estar no nível de energia $E = \frac{1}{6} + \delta_1$ do Hamiltoniano regularizado $\tilde{H}^\delta$. A figura 4.17, ilustra a projeção de certos níveis energia do Hamiltoniano H , bem como de sua regularização $\tilde{H}^\delta$ no plano x_1x_2 .

Figura 4.17: Projeção no plano x_1x_2 dos níveis de energia da regularização $\tilde{H}^\delta$. Linhas tracejadas em vermelho representam a projeção dos níveis de energia de H , enquanto que linhas contínuas azuis representam a projeção dos níveis de energia de $\tilde{H}^\delta$.

Devido a $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente no Hamiltoniano, podemos realizar de maneira análoga tal regularização próxima dos equilíbrios $p_c^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ e $p_c^3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$, por meio de rotações em cada fator de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, com argumentos $\pi/3$ e $2\pi/3$, respectivamente. Se $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$, segue que $\tilde{S}_E^\delta := (\tilde{H}^\delta)^{-1}(E)$ é pré-imagem de valor regular de $\tilde{H}^\delta$. Para não sobrecarregar a notação, omitiremos δ tomado na regularização, sua relevância ficará clara posteriormente. Temos agora o seguinte resultado:

Proposição 4.16. *Seja λ_0 uma 1-forma como definida em (2.11). Se $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$, então $(\tilde{S}_E, \xi_0 = \ker \lambda_0)$ é uma variedade de contato.*

Demonstração. Será verificado que o campo de Liouville radial centrado na origem

$$X_0(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

é positivamente transversal à tais níveis de energia, e portanto, devido a Proposição 2.14, $\lambda_0|_{S_E}$ define uma forma de contato em $\tilde{S}_E$. Note que devido à $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente em $\tilde{S}_E$, basta mostrarmos que X_0 é transversal à $\tilde{S}_E \cap \{0 < x_2\}$. Sendo assim, temos

$$\nabla \tilde{H} \cdot X = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{3x_1^2}{2} - \frac{x_2^3}{2} + \frac{x_2}{2} \tilde{f}_{x_2}, \quad (4.20)$$

por meio da definição de $\tilde{H}$, segue

$$\frac{y_1^2 + y_2^2}{2} = \tilde{H} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} - \tilde{f}, \quad (4.21)$$

e substituindo (4.21) em (4.20), temos

$$\nabla \tilde{H} \cdot X = \tilde{H} - \tilde{f} + \frac{x_2}{2} \tilde{f}_{x_2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} - \frac{x_2^3}{6}, \quad (4.22)$$

tomando-se $x_2 = 1 - \varepsilon$ em (4.22), para $0 < \varepsilon < 1$ tem-se

$$\nabla \tilde{H} \cdot X = \tilde{H} - \frac{1}{6} - \tilde{f} + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \tilde{f}_{x_2} + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} x_1^2 + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6}. \quad (4.23)$$

Para $0 < x_2 \leq 1 - \delta_1$, temos $\tilde{f} = \tilde{f}_{x_2} = 0$. Por meio de (4.23) e $E - \frac{1}{6} \geq 0$, obtemos que X_0 é positivamente transversal à $\tilde{S}_E \cap \{0 < x_2 \leq 1 - \delta_1\}$. Portanto, resta apenas verificar que X_0 é positivamente transversal à $\tilde{S}_E \cap \{1 - \delta_1 < x_2\}$.

Ao substituirmos $y_1 = y_2 = 0$ e $x_2 = 1 - \varepsilon$ em (4.19), podemos entender de forma mais detalhada o comportamento de $\tilde{H}$ na projeção $x_1 x_2$, desta forma

$$\tilde{H} = \frac{1}{6} + (3 - 2\varepsilon) \frac{x_1^2}{2} - (3 - 2\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{6} + \tilde{f}(\delta_1 - \varepsilon), \quad (4.24)$$

e seja agora E , com $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$ em (4.24) segue

$$E - \frac{1}{6} = (3 - 2\varepsilon) \frac{x_1^2}{2} - (3 - 2\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{6} + \tilde{f}(\delta_1 - \varepsilon), \quad (4.25)$$

ao tomarmos $x_1 = 0$ em (4.25) encontramos o máximo que $\tilde{f}$ pode assumir restrita ao nível de energia E , donde segue que

$$\tilde{f}(\delta_1 - \varepsilon) \leq E - \frac{1}{6} + (3 - 2\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{6}, \quad (4.26)$$

e substituindo-se (4.26) em (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{H} \cdot X &\geq -(3 - 2\varepsilon) \frac{\varepsilon^2}{6} + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \tilde{f}_{x_2} + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} x_1^2 + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \tilde{f}_{x_2} + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} x_1^2 + \frac{(1 - 2\varepsilon)}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

donde segue que X_0 é positivamente transversal a $\tilde{S}_E$ e podemos concluir que os níveis de energia $\tilde{S}_E$ para energia $\frac{1}{6} \leq E < \frac{1}{6} + \delta_1$ são estrelados com relação à origem. Portanto, $\tilde{S}_E$ é uma hipersuperfície de contato e $\lambda_0 := \iota_{X_0} \omega_0$ define uma forma de contato quando restrita a $\tilde{S}_E$. ■

Neste momento, estamos interessados em provar que a forma de contato λ_0 definida em $\tilde{S}_E$ é dinamicamente convexa. Para isso, inicialmente verificaremos que $\tilde{S}_E$ possui curvatura

estritamente positiva em todos os pontos que se encontram no interior projeção de $\tilde{S}_{\frac{1}{6}}$ no plano x_1x_2 .

Seguindo os passos presentes em [13]. Se S é dada pela pré-imagem de um valor regular de uma função $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $C^{k \geq 2}$, sua convexidade depende do Hessiano de H . Uma condição necessária para S ser estritamente convexa é que $\text{Hess}H(p)$ seja definida em T_pS para todo $p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S$. Sem perda de generalidade pode-se assumir que $\text{Hess}H(p)$ é positiva-definida em T_pS , isto é, se $v \in T_pS$, $v \neq 0$, então $\langle \text{Hess}H(p)v, v \rangle > 0$. Seja $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear auto-adjunto e $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática definida por $Q(v) = \langle Lv, v \rangle$. Seja também A um subespaço de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4$ e $\{X_1, X_2, X_3\}$ uma base para A . Define-se a matriz simétrica W por

$$W = (\langle LX_i, X_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 3}.$$

Temos que Q é positiva-definida em A se, e somente se, $\det W > 0$, $\text{tr} W > 0$ e $D_W > 0$, onde $D_W = w_{11}w_{22} - w_{12}^2 + w_{11}w_{33} - w_{13}^2 + w_{22}w_{33} - w_{23}^2$.

Seja agora H uma função Hamiltoniana dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2),$$

onde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é $C^{k \geq 2}$. Seja também $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção canônica no plano x_1x_2 . Suponha que $S \subset H^{-1}(E)$ é uma hipersuperfície homeomorfa a S^3 e invariante pelo fluxo Hamiltoniano. O conjunto $B := \pi(S)$ é homeomorfo a $\mathbb{D}$ e seu interior é dado por $B_0 := \{x = \pi(p) \in B; p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S \text{ e } y_1^2 + y_2^2 \neq 0\}$. Note que se $(x_1, x_2) \in B_0$, então $V(x_1, x_2) < E$. Além disso, $\nabla H = (V_{x_1}, V_{x_2}, y_1, y_2)$ e

$$\text{Hess}H = \begin{pmatrix} V_{x_1x_1} & V_{x_1x_2} & 0 & 0 \\ V_{x_1x_2} & V_{x_2x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\pi(p) \in B_0$, uma base para T_pS é dada por $X_1 = (0, 0, -y_2, y_1)$, $X_2 = (y_1, y_2, -V_{x_1}, -V_{x_2})$ e $X_3 = (y_2, -y_1, V_{x_2}, -V_{x_1})$. Como $\text{Hess}H(p)$ possui dois autovalores iguais a 1, segue que $\text{Hess}H(p)$ é definida em T_pS se, e somente se, é positiva definida em T_pS . A matriz W para $L = \text{Hess}H(p)$ definida anteriormente, é dada por

$$W(p) = \begin{pmatrix} y_1^2 + y_2^2 & y_2V_{x_1} - y_1V_{x_2} & -y_2V_{x_2} - y_1V_{x_1} \\ y_2V_{x_1} - y_1V_{x_2} & f_1 & f_2 \\ -y_2V_{x_2} - y_1V_{x_1} & f_3 & f_3 \end{pmatrix},$$

em que f_1, f_2, f_3 e f_4 são dadas por

$$\begin{aligned} f_1 &= V_{x_1 x_1} y_1^2 + 2y_1 y_2 V_{x_1 x_2} + V_{x_2 x_2} y_2^2 + V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2 \\ f_2 &= y_1 y_2 (V_{x_1 x_1} - V_{x_2 x_2}) + (y_2^2 - y_1^2) V_{x_1 x_2} \\ f_3 &= y_1 y_2 (V_{x_1 x_1} - V_{x_2 x_2}) + (y_2^2 - y_1^2) V_{x_1 x_2} \\ f_4 &= V_{x_1 x_2} y_2^2 + 2y_1 y_2 V_{x_1 x_2} + V_{x_2 x_2} y_1^2 + V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2. \end{aligned}$$

Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} \det W(p) &= 4(E - V)^2 [2(E - V)(V_{x_1 x_1} V_{x_2 x_2} - V_{x_1 x_2}^2) \\ &\quad + V_{x_1 x_1} V_{x_2}^2 + V_{x_2 x_2} V_{x_1}^2 - 2V_{x_1} V_{x_2} V_{x_1 x_2}] \\ \operatorname{tr} W(p) &= 2(E - V)(1 + V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2}) + 2(V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2) \\ D_W(p) &= 4(E - V)^2 (V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2} + V_{x_1 x_1} V_{x_2 x_2}) \\ &\quad + 2(E - V)(1 + V_{x_1 x_1} + V_{x_2 x_2})(V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2) + (V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2)^2. \end{aligned}$$

Proposição 4.17. *Se $p \in \tilde{S}_{\frac{1}{6}}$ é tal que $\pi(p) \in B_0$, então $\tilde{S}_{\frac{1}{6}}$ possui curvatura estritamente positiva em p .*

Demonstração. Devido ao que foi exposto acima a prova será feita verificando-se que

$$\pi(p) \in B_0 \Rightarrow \det W(p) > 0, \operatorname{tr} W(p) > 0 \text{ e } D_W(p) > 0. \quad (4.27)$$

Novamente devido a $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente em $\tilde{S}_{\frac{1}{6}}$, precisamos verificar a condição (4.27) apenas para $p \in \tilde{S}_{\frac{1}{6}} \cap \{0 < x_2\}$. No nosso contexto, temos

$$\tilde{H}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \tilde{V}(x_1, x_2),$$

em que

$$\tilde{V}(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) + \tilde{f}(x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} + \tilde{f}(x_2). \quad (4.28)$$

Definindo-se $\tilde{G} : \pi(\tilde{S}_{\frac{1}{6}}) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{G}(x_1, x_2) := 2\left(\frac{1}{6} - \tilde{V}\right)(\tilde{V}_{x_1 x_1} \tilde{V}_{x_2 x_2} - \tilde{V}_{x_1 x_2}^2) + \tilde{V}_{x_1 x_1} \tilde{V}_{x_2}^2 + \tilde{V}_{x_2 x_2} \tilde{V}_{x_1}^2 - 2\tilde{V}_{x_1} \tilde{V}_{x_2} \tilde{V}_{x_1 x_2},$$

para provar que $\det W(p) > 0$, basta garantir que $\tilde{G}(p) > 0$. Por (4.28), temos que $\tilde{G}$ é dada por

$$\tilde{G}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) + I_1(x_1, x_2) + I_2(x_1, x_2) + I_3(x_1, x_2) + I_4(x_1, x_2) \quad (4.29)$$

em que

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= 2\left(\frac{1}{6} - V\right)(V_{x_1x_1}V_{x_2x_2} - V_{x_1x_2}^2) + V_{x_1x_1}V_{x_2}^2 + V_{x_2x_2}V_{x_1}^2 - 2V_{x_1}V_{x_2}V_{x_1x_2} \\ I_1(x_1, x_2) &= -2\tilde{f}(V_{x_1x_1}V_{x_2x_2} - V_{x_1x_2}^2) \\ I_2(x_1, x_2) &= 2\tilde{f}_{x_2}(V_{x_1x_1}V_{x_2} - V_{x_1}V_{x_1x_2}) \\ I_3(x_1, x_2) &= \tilde{f}_{x_2}^2 V_{x_1x_1} \end{aligned}$$

O primeiro passo para garantir a positividade de $\tilde{G}$, será verificar a positividade de G . Segue que

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}x_2^3 + x_2^4 - \frac{2}{3}x_2^5 + x_1^2\left(-\frac{4}{3} - 2x_2 + 2x_2^2 + \frac{4}{3}x_2^3\right) + x_1^4(1 + 2x_2).$$

Se $S_{\frac{1}{6}} \subset H^{-1}(\frac{1}{6})$ é dada pela componente compacta do nível de energia crítico da função Hamiltoniana de Hénon-Heiles e $B_0^H := \{x = \pi(S_{\frac{1}{6}}) \in B; p = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in S_{\frac{1}{6}} \text{ e } y_1^2 + y_2^2 \neq 0\}$, temos que $B_0 \subset B_0^H$, ver Figura 4.18.

Figura 4.18: Domínio $B_0 \subset B_0^H$.

Verifica-se que G possui um único ponto crítico $(x_1^c, x_2^c) = (0, 0)$ em B_0^H , que é um máximo global positivo. Além disso, se $(x_1, x_2) \in \partial\pi(S_{\frac{1}{6}})$, então $G(x_1, x_2) = 0$. Portanto, conclui-se que $G > 0$ em B_0^H . Como $B_0 \subset B_0^H$, segue que G é positiva em B_0 . Portanto, resta apenas verificar a positividade dos demais termos de (4.29). Note que, para $x_2 \leq 1 - \delta_1$, tais parcelas são identicamente nulas e, conseqüentemente, precisamos verificar a positividade apenas para $1 - \delta_1 < x_2$. Desta forma, temos

$$I_1(x_1, x_2) = 2\tilde{f}[4(x_1^2 + x_2^2) - 1] \geq 0,$$

pois $\tilde{f} \geq 0$ e $x_2 > \frac{1}{2}$. Para $I_2(x_1, x_2)$ segue

$$I_2(x_1, x_2) = 2\tilde{f}_{x_2}(x_2 - x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2x_2 - 2x_2^3), \quad (4.30)$$

em que tomando-se $x_2 = 1 - \varepsilon$ em (4.30), temos

$$I_2(x_1, x_2) = 2\tilde{f}_{x_2}[(2 - 4\varepsilon)\varepsilon + 2\varepsilon - (3 - 2\varepsilon)x_1^2] > 0,$$

pois $x_1^2 < \varepsilon^2$ para $0 < \varepsilon < 1$ e $\tilde{f}_{x_2} \geq 0$. Para a terceira parcela temos

$$I_3(x_1, x_2) = \tilde{f}_{x_2}^2 V_{x_1 x_1} = \tilde{f}_{x_2}^2 (1 + 2x_2) \geq 0.$$

Para a quarta e última parcela $I_4(x_1, x_2)$, segue que

$$I_4(x_1, x_2) = \tilde{f}_{x_2 x_2} \left[\frac{1}{3} - 2\tilde{f} + \frac{(2 - 12\tilde{f})}{3} x_2 - x_2^2 - \frac{4x_2^3}{3} + \frac{4x_2^4}{3} \right]. \quad (4.31)$$

Tomando-se $x_2 = 1 - \varepsilon$ em (4.31), temos

$$I_4(x_1, x_2) = \tilde{f}_{x_2 x_2} [-2(3 - 2\varepsilon)\tilde{f} + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \frac{4\varepsilon^4}{3}]. \quad (4.32)$$

Semelhante ao que foi feito na Proposição 4.16, se substituirmos $y_1 = y_2 = x_1 = 0$ em $\tilde{H}$, obtemos que

$$\tilde{f}(\varepsilon) \leq \frac{(3 - 2\varepsilon)}{6} \varepsilon^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} < \frac{\delta_1}{4}, \quad (4.33)$$

restrita a $\tilde{S}_{\frac{1}{6}} \cap \{0 < x_2\}$. Desta forma $\tilde{f}_{x_2 x_2} \geq 0$ em $\tilde{S}_{\frac{1}{6}} \cap \{0 < x_2\}$ pela forma com que $\tilde{f}$ foi definida e de (4.33). Sendo assim de (4.32) e (4.33) vem

$$\begin{aligned} I_4(x_1, x_2) &= \tilde{f}_{x_2 x_2} \left[-2(3 - 2\varepsilon)\tilde{f} + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \frac{4\varepsilon^4}{3} \right] \\ &\geq \tilde{f}_{x_2 x_2} \left[\frac{(3 - 2\varepsilon)^2}{3} \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \frac{4\varepsilon^4}{3} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que $\det W(p) > 0$ em B_0 . Para $\pi(p) \in B_0$ tem-se

$$\text{tr} W(p) = \left(\frac{1}{6} - \tilde{V} \right) (6 + 2\tilde{f}_{x_2 x_2}) + 2(\tilde{V}_{x_1}^2 + \tilde{V}_{x_2}^2) > 0.$$

Resta provar que $D_W(p) > 0$. Note que

$$D_W(p) = 2\left(\frac{1}{6} - \tilde{V}\right) \left[2\left(\frac{1}{6} - \tilde{V}\right)(3 - 4x_2^2 + \tilde{f}_{x_2 x_2}) + (3 + \tilde{f}_{x_2 x_2})(\tilde{V}_{x_1}^2 + \tilde{V}_{x_2}^2) \right] + (\tilde{V}_{x_1}^2 + \tilde{V}_{x_2}^2)^2.$$

Se $\pi(p) = (x_1, x_2) \in B_0$, então $-\frac{1}{2} < x_2 < 1$, portanto para $\{0 < x_2 \leq \frac{\sqrt{3 + \tilde{f}_{x_2 x_2}}}{2}\} \cap \tilde{S}_{\frac{1}{6}}$, tem-se $D_W(p) > 0$. Para $\{\frac{\sqrt{3 + \tilde{f}_{x_2 x_2}}}{2} < x_2\} \cap \tilde{S}_{\frac{1}{6}}$, basta garantir que

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = 2\left(\frac{1}{6} - \tilde{V}\right)(3 - 4x_2^2 + \tilde{f}_{x_2 x_2}) + (3 + \tilde{f}_{x_2 x_2})(\tilde{V}_{x_1}^2 + \tilde{V}_{x_2}^2) > 0,$$

e, desta forma, segue que

$$\tilde{K}(x_1, x_2) = K(x_1, x_2) + J(x_1, x_2),$$

em que

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2) &= 2\left(\frac{1}{6} - V\right)(3 - 4x_2^2) + 3(V_{x_1}^2 + V_{x_2}^2) \\ J(x_1, x_2) &= \tilde{f}_{x_2 x_2} \left[2\left(\frac{1}{6} - \tilde{V}\right)\right] - 2\tilde{f}(3 - 4x_2^2) + 6V_{x_2} \tilde{f}_{x_2} + 3\tilde{f}_{x_2}^2. \end{aligned}$$

Tem-se

$$K(x_1, x_2) = 1 - \frac{4}{3}x_2^2 - 4x_2^3 + 7x_2^4 + x_1^2(12x_2 + 10x_2^2 + 8x_2^3) + 3x_1^4 > 0,$$

além disso, por meio da definição de $\tilde{f}$ segue que cada parcela de J é não-negativa no domínio desejado. Portanto $D_W(p) > 0$ e conclui-se a prova da proposição. ■

Hofer, Wisocki e Zehnder provam em [3], que se $S \subset \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície compacta estritamente convexa contendo a origem em seu interior e λ é uma forma de contato induzida por λ_0 , então S é dinamicamente convexa. A demonstração do seguinte resultado segue diretamente da demonstração do Teorema 3.4 em [3].

Teorema 4.18. *Suponha agora que $S \in \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície compacta contendo a origem em seu interior e λ uma forma de contato induzida por λ_0 . Se S é pré-imagem de valor regular de uma função hamiltoniana H do tipo ‘energia cinética + potencial’ que possui curvatura positiva em $D_0 := \{z \in S; y_1^2 + y_2^2 \neq 0\}$, então S é dinamicamente convexa.*

Aplicando-se a Proposição 4.17 e o Teorema 4.18, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.19. *A forma de contato λ_0 definida em $\tilde{S}_{\frac{1}{6}}$ é dinamicamente convexa.*

Pela Proposição 4.16, temos que $(\tilde{S}_E, \xi_0 = \ker \lambda_0)$ é uma variedade de contato *tight* para energia $\frac{1}{6} \leq E < \frac{1}{6} + \delta_1$. Podemos agora tomar a forma de contato $\lambda_E = f_E \lambda_0$ definida em S^3 , em que $f_E : S^3 \rightarrow (0, +\infty)$ é a função associada a forma de contato λ_0 em $\tilde{S}_E$ e estudar a dinâmica em S^3 . Devido a $\mathbb{Z}_3$ -simetria presente em $\tilde{S}_E$, temos que λ_E define uma forma de contato, denotada por $\tilde{\lambda}_E = \tilde{f}_E \lambda_0$ em $L(3, 1)$, em que $\tilde{f}_E : L(3, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ é suave. Mais ainda, pelo Teorema 4.19, temos que $\lambda_{\frac{1}{6}}$ define uma forma de contato dinamicamente convexa em S^3 e, conseqüentemente, $\tilde{\lambda}_{\frac{1}{6}}$ define uma forma de contato dinamicamente convexa em $L(3, 1)$. Aplicando-se o Teorema 3.10, segue que existe uma órbita periódica $P_{\frac{1}{6}} = (x, T)$, 3-não-nó, $sl(P) = -\frac{1}{3}$ e $\mu_{CZ}(P_{\frac{1}{6}}, \beta_{\text{disk}}) = 3$ em

$(L(3, 1), \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_{\frac{1}{6}})$. Tal resultado não pode ser aplicado diretamente para $(L(3, 1), \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_E)$, $E > \frac{1}{6}$, pois $\tilde{S}_E$ pode não ser dinamicamente convexo. Estamos interessados neste momento em aplicar a Proposição 3.18.

Proposição 4.20. *Existe órbita periódica não-degenerada $P_E = (x, T_E)$, 3-não-nó, com $sl(P_E) = -1/3$ e $\mu_{CZ}(P_E^3, \beta_{\text{disk}}) = 3$ em $(L(3, 1), \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_E)$, para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_E)$ o conjunto das órbitas periódicas contráteis P , $\tilde{\lambda}_E$ -Reeb definidas em $L(3, 1)$, tal que $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) \leq 2$. Suponha por absurdo que se $P \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_E)$, então o período de P é limitado por $T^{max} > 0$, para todo $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$. Podemos tomar uma sequência $E_n \rightarrow \frac{1}{6}$, tal que para todo n , existe órbita periódica $Q_n \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_{E_n})$, tal que $T_{Q_n} \leq T^{max}$, em que T_{Q_n} é o período da órbita Q_n . Como o período de tais órbitas é uniformemente limitado, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, a menos de uma subsequência, temos que Q_n converge para uma órbita periódica $Q \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_{\frac{1}{6}})$, com período $\leq T^{max}$; utilizando a semi-continuidade inferior do índice de Conley-Zehnder generalizado, segue que $\mu_{CZ}(Q, \beta_{\text{disk}}) \leq 2$, o que é um absurdo. Desta forma, para todo $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$, segue que existe $T_E^{max} > 0$, tal que se $P \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_E)$, então $T_E^{max} \leq T_P$. Seja agora $\mathcal{P}(\tilde{\lambda}_E)$ o conjunto das órbitas periódicas contráteis $\tilde{\lambda}_E$ -Reeb com período $\leq T_E^{max}$, pelo que foi exposto,

$$P \in \mathcal{P}(\tilde{\lambda}_E) \Rightarrow \mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) \geq 3, \quad (4.34)$$

para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$.

Seja $\tilde{\lambda} = \tilde{f}\lambda_0$ a forma de contato definida em $L(3, 1)$ associada ao elipsoide, com $r_1/r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Devido à forma com que a regularização é realizada, segue que existe $R > 0$ e bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^4$, tal que $\tilde{S}_E^\delta \subset B_R(0)$, para todo $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$ e $\delta > 0$ pequeno. Portanto, podemos tomar $0 < r_1 < r_2$ suficientemente grandes tais que $\tilde{f}_E^\delta < \tilde{f}$, pontualmente, para todo $0 \leq E - \frac{1}{6} < \delta_1$ e $\delta > 0$ pequeno.

Fixe $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$, tal que a $T_E^{max} > \pi r_1^2$. Devido à Proposição 3.46, segue que existe sequência de funções $f_n : L(3, 1) \rightarrow (0, +\infty)$, com $f_n \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow \infty$ e tal que $\tilde{\lambda}_n^E := f_n \tilde{f}_E \lambda_0$ são formas de contato não-degeneradas, definidas em $L(3, 1)$. Desta forma, para n suficientemente grande temos, $T_n^{max} > \pi r_1^2$, pois caso contrário, podemos tomar uma sequência de órbitas periódicas $Q_n \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_n)$ com período $T_n^{max} \leq \pi r_1^2$ e novamente, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, a menos de uma subsequência, temos que a sequência de órbitas periódicas Q_n converge para uma órbita periódica

$Q \in \mathcal{P}_2(\tilde{\lambda}_E)$, com período $\leq \pi r_1^2$, o que é um absurdo. Sendo assim, para n suficientemente grande, podemos finalmente aplicar a Proposição 3.18 e garantir que existe órbita periódica não-degenerada $P_n^E = (x_n^E, T_n^E)$, com $T_n^E \leq \pi r_1^2$, 3-não-nó, $sl(P_n^E) = -1/3$ e $\mu_{CZ}((P_n^E)^3, \beta_{\text{disk}}) = 3$ em $(L(3, 1), \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_n^E)$. Note que seus períodos são uniformemente limitados por $\frac{\pi r_1^2}{3}$. Portanto, aplicando o Teorema de Arzelà-Ascoli, temos que $P_n^E \rightarrow P_E$, quando $n \rightarrow \infty$ em C^∞ , a menos de uma subsequência, em que P_E é uma órbita periódica não-degenerada de $\tilde{\lambda}_E$, com período $\leq \frac{\pi r_1^2}{3}$.

Como P_n^E é 3-não-nó, temos que $(P_n^E)^3$ é contrátil e portanto P_E^3 também é contrátil. Novamente utilizando a semi-continuidade inferior do índice de Conley-Zehnder generalizado, temos que $\mu_{CZ}(P_E^3, \beta_{\text{disk}}) \leq 3$. Por meio da condição (4.34), segue que $\mu_{CZ}(P_E^3, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Além disso, temos que P_E é simples, pois caso contrário $P_E = (P'_E)^k$, para $k \geq 2$. Sendo $\pi_1(L(3, 1)) \simeq \mathbb{Z}_3$, temos que $(P')^3$ é contrátil e portanto $\mu_{CZ}((P')^3, \beta_{\text{disk}}) \geq 3$. De $P^3 = ((P')^k)^3 = ((P')^3)^k$, $k \geq 2$, temos que $\mu_{CZ}(P^3, \beta_{\text{disk}}) \geq 5$, o que é um absurdo. Desta forma, P_E é simples e como $P_n^E \rightarrow P_E$, quando $n \rightarrow \infty$, segue que P_E é transversalmente isotópica a cada P_n^E , para todo n suficientemente grande. Portanto P_E é 3-não-nó e possui $sl(P_E) = -\frac{1}{3}$. Desta forma, podemos concluir que existe órbita periódica $\mathbb{Z}_3$ -simétrica, também denotada por P_E em $\tilde{S}_E$, não-nó, $sl(P_E) = -1$ e $\mu_{CZ}(P_E, \beta_{\text{disk}}) = 3$ para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. Note que para o elipsoide tomado é tal que o resultado vale para todo $\delta > 0$ pequeno. ■

Queremos garantir agora que tais órbitas presentes nos níveis de energia regularizados estão também contidos nos níveis de energia originais do sistema hamiltoniano de Hénon-Heiles. Para isso apresentaremos, de forma resumida, resultados desenvolvidos em [18]. Seja φ_t o fluxo Hamiltoniano associado a $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ e considere o referencial ortonormal $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ em $\dot{\mathbb{R}}^4 := \mathbb{R}^4 \setminus \cup_i \{p_c^i\}$, dado por

$$X_i = A_i \frac{\nabla H}{|\nabla H|}, i = 0, \dots, 3.$$

Para todo ponto regular $z \in \dot{\mathbb{R}}^4$, em que

$$A_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O vetor $X_0(z)$ é ortogonal ao espaço tangente $T_z S_z = \text{span}\{X_1(z), X_2(z), X_3(z)\}$, em que $S_z := H^{-1}(H(z))$ denota o nível de energia de H que contém z . Seja agora $z(t) = \varphi_t(z_0)$ uma trajetória não-constante do fluxo Hamiltoniano de H . Considere uma solução do fluxo linearizado ao longo de $z(t)$, dada por $v(t) = d\varphi_t(z_0) \cdot v_0$, para $v_0 \in T_{z_0} S_{z_0}$, escrita no referencial $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ em TS_{z_0} como

$$v(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) X_i(z(t)) T_{z(t)} S_{z_0}.$$

Se $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ denota a projeção de $v(t)$ em $\{X_1(z(t)), X_2(z(t))\}$ ao longo de $X_3(z(t))$, analisando a equação diferencial $v'(t) = A_3 \text{Hess}H(z(t))v(t)$ que é satisfeita por $v(t)$, podemos concluir que os coeficientes $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ devem satisfazer

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1(t) \\ \alpha'_2(t) \end{pmatrix} = -J_0 M(z(t)) \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

em que M é uma matriz simétrica dada por

$$M = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} + k_{33}I \text{ e } k_{ij}(x) = \langle \text{Hess}H(x) X_i(x), X_j(x) \rangle, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Refere-se à $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ satisfazendo (4.35), como a solução do fluxo linearizado transversal, pois $\alpha(t)$ representa a projeção do fluxo linearizado sobre a distribuição de planos $\text{span}\{X_1, X_2\}$ que é transversal à direção do campo Hamiltoniano $X_H|_{X_3}$. Se considerarmos uma solução não-nula $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ do fluxo linearizado transversal ao longo de $z(t)$, temos que

$$\alpha_1(t) \dot{\alpha}_2(t) - \alpha_2(t) \dot{\alpha}_1(t) = \alpha(t)^t M(z(t)) \alpha(t). \quad (4.36)$$

Para toda solução $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ do fluxo linearizado transversal que satisfaz $\alpha(0) \neq 0$, podemos escrever $\alpha_1(t) + i\alpha_2(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, para algum argumento contínuo $\theta(t)$ e $\rho(t) > 0$, para todo t . Derivando em relação a t obtemos

$$\dot{\alpha}_1 + i\dot{\alpha}_2 = \frac{\dot{\rho}}{\rho}(\alpha_1 + i\alpha_2) + \dot{\theta}(-\alpha_2 + i\alpha_1), \quad (4.37)$$

donde segue de (4.36) e (4.37) que

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\alpha_1 \dot{\alpha}_2(t) - \alpha_2(t) \dot{\alpha}_1(t)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{\alpha(t)^t M(z(t)) \alpha(t)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Por meio da Proposição 4.17, temos que o nível de energia crítico $\tilde{S}_{\frac{1}{6}}$ possui curvatura não-negativa, desta forma segue que existe $\varepsilon_E > 0$, tal que se $E \rightarrow \frac{1}{6}$, então $\varepsilon_E \rightarrow 0$ e

$$\alpha(t)^t M(z(t)) \alpha(t) \geq -\varepsilon_E,$$

donde podemos concluir que

$$\dot{\theta}(t) \geq \frac{-\varepsilon_E}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \quad (4.38)$$

Seja agora $z(t)$ uma solução que converge para um ponto crítico do tipo sela-centro p_c , quando $t \rightarrow \infty$. Em [18], os autores provam que uma solução do fluxo linearizado $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ sobre $z(t)$ ‘gira’ no sentido anti-horário no referencial tomado anteriormente. Além disso, o número de vezes que gira tende ao infinito, se $t \rightarrow \infty$. Desta forma, pode-se escolher $T_0 > 0$, tal que $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ gira $k + 1$ vezes em torno da origem entre $t = 0$ e $t = T_0$. Pode-se também, encontrar uma vizinhança $\mathcal{W}_{k+1}$ de $z(0)$, tal que qualquer órbita periódica que intersecte $\mathcal{W}_{k+1}$ deve possuir período maior do que T_0 . Devido à dependência contínua de soluções de X_H com respeito às condições iniciais, segue que existe uma vizinhança $W_k \subset \mathcal{W}_{k+1}$ de $z(0)$, tal que a solução $\alpha(t)$, sobre qualquer solução $z(t)$ que comece em W_k , gira em torno da origem pelo menos k vezes no intervalo $[0, T_0]$.

Tome a vizinhança W_4^1 em torno do ponto crítico sela-centro p_1^c . Afirmamos que existe $\delta > 0$ tomado na regularização, tal que para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$, temos $P_E \cap W_4^1 = \emptyset$. De fato, devido à forma com que W_4^1 é definida, segue que podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que se $z(t)$ é uma órbita periódica contida em $\tilde{S}_E$ e $P_E \cap W_4^1 \neq \emptyset$, então a solução do fluxo linearizado gira em torno da origem no sentido anti-horário pelo menos 4 vezes. Suponha por absurdo que $P_E \cap W_4^1 \neq \emptyset$, para todo $E > \frac{1}{6}$. Como $\mu_{CZ}(P_E, \beta_{\text{disk}}) = 3$, segue que a solução do fluxo linearizado sobre P_E gira 1 vez no sentido horário em $\tilde{S}_E \setminus W_4^1$, para todo $E > \frac{1}{6}$. Porém, devido à (4.38), temos que $\varepsilon_E \rightarrow 0$, se $E \rightarrow \frac{1}{6}$. Portanto, para que a solução do fluxo linearizado gire uma vez no sentido horário é necessário que $A(P_E) \rightarrow \infty$, quando $E \rightarrow \frac{1}{6}$, o que é um absurdo, pois $A(P_E) \leq \pi r_1^2$, para todo $E > \frac{1}{6}$. Devido a $\mathbb{Z}_3$ -simetria, podemos concluir que $P_E \cap \bigcup_{i=1}^3 W_4^i = \emptyset$. Na regularização $\tilde{H}$, se $p \in \tilde{S}_E$ e $p \notin \bigcup_{i=1}^3 W_4^i$, então $p \in S_E$. Portanto, podemos concluir que P_E é também uma órbita periódica do campo X_H , contida em S_E . A Figura 4.19 ilustra a órbita periódica P_E contida em S_E .

Figura 4.19: Ilustração da órbita periódica P_E contida em S_E .

Toda a construção realizada acima nos garante o seguinte resultado:

Teorema 4.21. *Para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$, existe órbita periódica contrátil $\mathbb{Z}_3$ -simétrica $P_E \subset S_E$, com índice de Conley-Zehnder 3 e número de auto-enlaçamento -1 . Além disso, P_E não está lincada com nenhuma das órbitas periódicas de Lyapunov.*

4.3.3 Continuidade do trabalho e perspectivas futuras

Como vimos na seção 4.2, a região de interesse nos níveis de energia logo acima de um conjunto singular estritamente convexo, possuem como bordo a 2-esfera topológica ∂S_E . Em [17], de Paulo e Salomão obtém uma hipersuperfície de contato $\tilde{S}_E$ difeomorfa a S^3 , como uma soma topológica de duas cópias de S_E , por meio de uma identificação adequada dos pontos em ∂S_E . Os autores garantem a existência de uma folheação $2 - 3 - 2$ nesta hipersuperfície de contato. Desta forma, a folheação $2 - 3$ em S_E é obtida como uma parte de uma folheação $2 - 3 - 2$ em $\tilde{S}_E$.

Nas seções anteriores, provamos que S_E , definida nos níveis de energia do Hamiltoniano de Hénon-Heiles é uma hipersuperfície de contato, para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. Provamos também a existência de uma órbita periódica contrátil $\mathbb{Z}_3$ -simétrica P , com número de auto-enlaçamento -1 e $\mu_{CZ}(P, \beta_{\text{disk}}) = 3$. Além disso, tal órbita não está lincada com as órbitas periódicas de Lyapunov. Pretendemos compactificar o nível de energia S_E , por meio de componentes com curvatura estritamente positivas, obtendo uma hipersuperfície de contato $\tilde{S}_E$ difeomorfa a S^3 .

Como λ_E é uma forma de contato fracamente convexa, temos que a forma de contato $\tilde{\lambda}_E$ induzida por λ_E em $\tilde{S}_E$, será também fracamente convexa, devido a forma com que será

realizada a compactificação. Feito isso, tomaremos uma sequência de formas de contato não-degeneradas $\tilde{\lambda}_E^n$ em $\tilde{S}_E$, tal que $\tilde{\lambda}_E^n \rightarrow \tilde{\lambda}_E$. O Teorema de Hofer, Wysocki e Zehnder presente em [16], garante a existência de um sistema global de seções transversais em $(\tilde{S}_E, \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_E^n)$, para cada n suficientemente grande. Por fim, resta provar que esta sequência de sistemas globais de seções transversais converge para um sistema global de seções transversais em $(\tilde{S}_E, \xi_0 = \ker \tilde{\lambda}_E)$, para certas encadernações fixadas. Uma técnica semelhante a esta foi utilizada por de Paulo e Salomão em [17]. O sistema global de seções transversais obtido garantirá a existência de uma folheação $3 - 2^3$ em S_E , para $E > \frac{1}{6}$ suficientemente próximo de $\frac{1}{6}$. Esta folheação terá como encadernações a órbita periódica contrátil $\mathbb{Z}_3$ -simétrica P e as órbitas periódicas de Lyapunov.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Albers, U. Frauenfelder, O. Van Koert, and G. P. Paternain. Contact geometry of the restricted three-body problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 65(2):229–263, 2012.
- [2] P. Albers, J. W. Fish, U. Frauenfelder, H. Hofer, and O. van Koert. Global surfaces of section in the planar restricted 3-body problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 204(1):273–284, 2012.
- [3] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces. *Annals of Mathematics*, pages 197–289, 1998.
- [4] J. Franks. Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms. *Inventiones mathematicae*, 108(1):403–418, 1992.
- [5] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. A characterisation of the tight three-sphere. *Duke J. Math*, 81(1):159–226, 1995.
- [6] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. A characterization of the tight three sphere II. *Commun. Pure Appl. Anal*, 55:1139–1177, 1999.
- [7] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. *Properties of Pseudoholomorphic Curves in Symplectizations III: Fredholm Theory*, pages 381–475. Birkhäuser Basel, Basel, 1999.
- [8] U. L. Hryniewicz. Fast finite-energy planes in symplectizations and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(4):1859–1931, 2012.
- [9] U. L. Hryniewicz, J. E. Licata, and P. A. S. Salomão. A dynamical characterization of universally tight lens spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 110(1):213–269, 2015.

- [10] U. L. Hryniewicz and P. A. S. Salomão. On the existence of disk-like global sections for Reeb flows on the tight 3-sphere. *Duke J. Math.*, 160(3):415–465, 2011.
- [11] U. L. Hryniewicz, A. Momin, and P. A. S. Salomão. A Poincaré–Birkhoff theorem for tight Reeb flows on S^3 . *Inventiones mathematicae*, 199(2):333–422, 2015.
- [12] U. L. Hryniewicz and P. A. S. Salomão. Elliptic bindings for dynamically convex Reeb flows on the real projective three-space. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 55(2):1–57, 2016.
- [13] P. A. S. Salomão. Convex energy levels of Hamiltonian systems. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 4(2):439–454, 2004.
- [14] R. C. Churchill, M. Kummer, and D. L. Rod. On averaging, reduction, and symmetry in Hamiltonian systems. *Journal of differential equations*, 49(3):359–414, 1983.
- [15] R. C. Churchill, G. Pecelli, and D. L. Rod. A survey of the Hénon-Heiles Hamiltonian with applications to related examples. *Stochastic behavior in classical and quantum Hamiltonian systems*, pages 76–136, 1979.
- [16] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics. *Annals of Mathematics*, pages 125–255, 2003.
- [17] N de Paulo and P. A. S. Salomão. Systems of transversal sections near critical energy levels of Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^4$. *Memoirs of the AMS - to appear*, 2018.
- [18] C. G. Ragazzo and P. A. S. Salomão. The Conley–Zehnder index and the saddle-center equilibrium. *Journal of Differential Equations*, (220):259–278, 2006.
- [19] U. L. Hryniewicz and P. A. S. Salomão. *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica Hamiltoniana*. Publicações Matemáticas do IMPA, 2009.
- [20] U. L. Hryniewicz and P. A. S. Salomão. *Introdução à Geometria Finsler*. Publicações Matemáticas do IMPA, 1 edition, 2013.
- [21] N. V. de Paulo. *Sistemas de seções transversais próximos a níveis críticos de sistemas Hamiltonianos em $\mathbb{R}^4$* . PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2014.
- [22] H. Bursztyn and L. Macarini. *Introdução à geometria simplética*, 2011.
- [23] A. C. Da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 3575. Springer, 2001.

-
- [24] H. Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109. Cambridge University Press, 2008.
- [25] C. G. Ragazzo. Plane fields related to vector fields on 3-manifolds. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 4:353–382, 2004.
- [26] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. In *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II*, pages 142–163. Springer, 1971.
- [27] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Inventiones mathematicae*, 98(3):623–637, 1989.
- [28] D. Bennequin. Entrelacements et équations de Pfaff. *Astérisque*, 107(108):87–161, 1983.
- [29] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudo-holomorphic curves in symplectisations II: Embedding controls and algebraic invariants. In *Geometries in Interaction*, pages 270–328. Springer, 1995.
- [30] H. Hofer and M. Kreiner. Holomorphic curves in contact geometry. In *Proceedings of Symposia in Pure Math.*, Differential Equations, La Pietra, Conference on Differential Equations, marking the 70th birthday of Peter Lax and Louis Nirenberg, pages 77–136, 1996.
- [31] K. Baker and J. Etnyre. Rational linking and contact geometry. In *Perspectives in analysis, geometry, and topology*, pages 19–37. Springer, 2012.
- [32] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Inventiones mathematicae*, 82:307–347, 1985.
- [33] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(1):515–563, 1993.
- [34] H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations I : asymptotics. *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire*, 13(3):337–379, 1996.
- [35] R. Siefring. Relative asymptotic behavior of pseudoholomorphic half-cylinders. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 61(12):1631–1684, 2008.

-
- [36] H. Tietze. Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19(1):1–118, 1908.
- [37] J. Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [38] K. Honda. On the classification of tight contact structures I. *Geometry & Topology*, 4(2000):309–368, 2000.
- [39] M. Henon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *The Astronomical Journal*, 69:73, 1964.
- [40] G. H. Lunsford and J. Ford. On the stability of periodic orbits for nonlinear oscillator systems in regions exhibiting stochastic behavior. *Journal of Mathematical Physics*, 13(5):700–705, 1972.
- [41] J. C. B. de Figueiredo, C. G. Ragazzo, and C. P. Malta. Two important numbers in the Hénon-Heiles dynamics. *Physics Letters A*, 241(1):35–40, 1998.
- [42] R. C. Churchill and D. L. Rod. Pathology in dynamical systems. III. Analytic Hamiltonians. *Journal of Differential Equations*, 37(1):23–38, 1980.
- [43] C. G. Ragazzo. Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation. *Communications in Mathematical Physics*, 166(2):255–277, 1994.
- [44] G. Arioli and P. Zgliczyński. Symbolic dynamics for the Hénon–Heiles Hamiltonian on the critical level. *Journal of Differential Equations*, 171(1):173–202, 2001.
- [45] G. W. Hill. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1(1):5–26, 1878.
- [46] K. R. Meyer, G. R. Hall, and D. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N –Body Problem*, volume 90. Springer, 2 edition, 2009.
- [47] J. Lee. Fiberwise convexity of Hill’s lunar problem. *Journal of Topology and Analysis*, pages 1–60, 2014.
- [48] C. Simó and T. de J. Stuchi. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 140(1):1–32, 2000.

- [49] J. Llibre and L. A. Roberto. On the periodic orbits and the integrability of the regularized Hill lunar problem. *Journal of Mathematical Physics*, 52, 2011.
- [50] Y. Eliashberg. Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet’s work. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 42, pages 165–192, 1992.
- [51] R. Siefring. Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves. *Geometry & Topology*, 15(4):2351–2457, 2011.
- [52] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geometry & Topology*, 7(2):799–888, 2003.
- [53] J. Moser. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, (11):257–271, 1958.
- [54] H. Rüssmann. Über das Verhalten Analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. *Math. Ann.*, pages 285–300, 1964.
- [55] N. V. de Paulo and P. A. S. Salomão. On the multiplicity of periodic orbits and homoclinics near critical energy levels of Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^4$. *a ser publicado.*, 2017.