**Configurações das Linhas
de Curvatura Principal
sobre Superfícies
Seccionalmente Suaves**

Gláucia Aparecida Soares Miranda

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello

Projeto financiado pela CAPES

São Paulo, agosto de 2014

Configurações das Linhas de Curvatura Principal sobre Superfícies Seccionalmente Suaves

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/06/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello (IME - USP)
- Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia (UFG)
- Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello (UNIFEI)
- Prof. Dr. Fábio Scalco Dias (UNIFEI)
- Prof. Dra. Martha Patrícia Dussan Angulo (IME - USP)

Dedicatória

*Ao meu pai,
Geraldo Saraiva Soares.*

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Ao meu orientador, professor Jorge Manuel Sotomayor Tello pelos ensinamentos, paciência, disponibilidade (até nos finais de semana) e atenção dedicados à realização deste trabalho.

Ao professor Ronaldo Alves Garcia, pelas valiosas contribuições dadas desde a fase inicial do projeto e por receber-me, tantas vezes, para discutirmos pontos importantes desta tese.

Aos demais membros da banca, Luis Fernando de Osório Mello, Fábio Scalco Dias e Martha Patrícia Dussan Angulo, pelas sugestões.

À minha família e aos meus amigos pelo apoio.

Ao meu marido Marcelo, pelo apoio e paciência durante todos esses anos.

À CAPES pelo apoio financeiro indispensável.

Resumo

SOARES MIRANDA, G.A. **Configurações das Linhas de Curvatura Principal sobre Superfícies Seccionalmente Suaves**. 2014. 122 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Nesta tese apresentamos uma contribuição para o estudo da transição do retrato de fase de uma equação diferencial descontínua específica ao longo de uma linha de descontinuidade. A equação diferencial que tratamos neste trabalho é a das linhas de curvatura principal de uma superfície $\mathbf{S}$ contendo uma curva distinguida $\mathbf{B}$ e imersa em $\mathbb{R}^3$. A linha de descontinuidade é a curva $\mathbf{B}$, a qual é o bordo comum de duas superfícies suaves justapostas que formam $\mathbf{S}$.

Na primeira parte do trabalho consideramos a superfície seccionalmente suave, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo comum $\mathbf{B}$. O estudo da configuração principal de $\mathbf{S}$ nos casos em que as linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ tem contato quadrático ou cruzam transversalmente $\mathbf{B}$ foi feito por comparação com a configuração principal de uma superfície suave $\mathbf{S}_\varepsilon$, obtida de $\mathbf{S}$ pelo processo da ε -regularização ao longo da curva de descontinuidade $\mathbf{B}$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Na segunda parte do trabalho estudamos as linhas de curvatura principal de uma superfície $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$ com bordo $\mathbf{B}$ e da superfície suave obtida de $\mathbf{S}$ através dos processos de engrossamento e regularização definidos por Garcia e Sotomayor em [5], onde os autores consideraram o caso genérico, sem pontos umbílicos e contato quadrático de uma linha de curvatura principal com $\mathbf{B}$. Damos aqui continuidade ao estudo feito em [5] analisando o caso de contato cúbico com o bordo $\mathbf{B}$.

Obtivemos que dos pontos da curva bordo comum $\mathbf{B}$ de contato quadrático e de cruzamento transversal emergem, sobre a superfície regularizada, pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 , enquanto que, para o ponto sobre $\mathbf{B}$ de contato cúbico obtivemos pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 , D_2 e D_3 e também pontos umbílicos não Darbouxianos dos tipos D_{12} e D_{23} .

Palavras chave: singularidade quadrática; cruzamento transversal; singularidade cúbica; pontos umbílicos; configuração principal.

Abstract

SOARES MIRANDA, G.A. **Configurations of Principal Curvature Lines on Piecewise Smooth Surfaces**. 2014. 122 p. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work we present a contribution to the study of the transition of the phase portrait of a specific discontinuous differential equation along a line of discontinuity. The differential equations under consideration will be that of the principal curvature lines of a surface $\mathbf{S}$ with a distinguished curve $\mathbf{B}$ immersed in $\mathbb{R}^3$, where the line of discontinuity is the curve $\mathbf{B}$ which is the common border of two smooth surfaces attached to make up $\mathbf{S}$.

In the first part of the work we consider a piecewise smooth surface $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, obtained by the juxtaposition of two smooth surfaces $\mathbf{S}^+$ and $\mathbf{S}^-$ along their common border $\mathbf{B}$. The analysis of the principal configuration of $\mathbf{S}$ in the cases where the principal curvature lines of the surfaces $\mathbf{S}^+$ and $\mathbf{S}^-$ have quadratic contact or cross transversally $\mathbf{B}$ was carried out by comparison with a smooth surface $\mathbf{S}_\varepsilon$, obtained from $\mathbf{S}$ by the ε -regularization along the discontinuity curve $\mathbf{B}$, with small $\varepsilon > 0$.

In the second part of the work we study the principal curvature lines of a surface $\mathbf{S}$ in $\mathbb{R}^3$ with boundary $\mathbf{B}$ and of the smooth surface obtained from $\mathbf{S}$ by thickening and smoothing introduced by Garcia and Sotomayor in [5], where they considered the generic case of no umbilic points and at most quadratic contact of principal lines with $\mathbf{B}$. Here we pursue the study in [5] and analyze the case of cubic contact with the border $\mathbf{B}$.

We established that while from quadratic contact points with $\mathbf{B}$ emerge on the smoothed surface Darbouxian umbilics of D_1 and D_3 types, from the cubic contact points appear Darbouxian umbilics of types D_1 , D_2 and D_3 as well as non Darbouxian points of types D_{12} and D_{23} .

Keywords: quadratic singularity; cross transversally; cubic singularity; umbilic points; principal configuration.

Sumário

Lista de Símbolos	vii
Lista de Figuras	vii
Introdução	xi
1 Levantamento de Lie-Cartan, Pontos Umbílicos e suas Bifurcações	1
1.1 Equações Diferenciais das Linhas de Curvatura Principal	1
1.2 O Campo de Lie-Cartan e os Pontos Umbílicos Darbouxianos	3
1.3 Pontos Umbílicos de Codimensão 1	7
1.3.1 O Padrão de Bifurcação do Ponto Umbílico D_{12}	7
1.3.2 O Padrão de Bifurcação do Ponto Umbílico D_{23}	10
2 Configuração Principal sobre Superfícies Suaves por Partes e Curva de Descontinuidade Plana	13
2.1 Configuração das Linhas de Curvatura Principal de uma Superfície Suave por Partes	13
2.1.1 1º Caso: Singularidade Quadrática	14
2.1.2 2º Caso: Ponto de Cruzamento Transversal	23
2.1.3 3º Caso: Ponto de Dobra	32
2.2 Regularização da Superfície $\mathbf{S}$ em uma Carta Local	32
2.2.1 1º Caso: Regularização na Vizinhança de uma Singularidade Quadrática $(k_3^+ = k_3^- = 0)$	38
2.2.2 2º Caso: Regularização na Vizinhança de um Ponto de Cruzamento Transversal $(k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0)$	47
2.2.3 3º Caso: Regularização na Vizinhança de um Ponto de Dobra $(k_3^+ = 0 \text{ e } k_3^- \neq 0)$	52
3 Configuração Principal sobre Superfícies Suaves por Partes e Curva de Descontinuidade com Torção	55
3.1 Configuração Principal da Superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$: Singularidades Quadráticas e Pontos Umbílicos	56

3.2	Regularização da Superfície $\mathbf{S}$	62
3.3	Pontos de Dobras e Cruzamentos Transversais	68
3.3.1	Ponto de Dobra	68
3.3.2	Cruzamentos Transversais	68
4	Configuração Principal sobre Superfícies com Bordo em $\mathbb{R}^3$: Contato Cúbico e Pontos Umbílicos	73
4.1	Introdução	73
4.1.1	Envelopes de Superfícies Regulares	74
4.2	Configuração Principal de $\mathbf{S}_\epsilon = \mathbf{S}_{\epsilon,+} \cup \mathbf{T}_\epsilon \cup \mathbf{S}_{\epsilon,-}$	75
4.3	Regularização de $\mathbf{S}_\epsilon$ em uma Carta Local	83
4.4	Apêndice	104
	Conclusão	107
	Referências Bibliográficas	109
	Índice Remissivo	111

Lista de Figuras

1.1	Linhas de curvaturas principais próximas aos pontos umbílicos D_i e suas separatrizes umbílicas, no bordo dos setores.	7
1.2	Ponto umbílico D_{12} e sua bifurcação.	10
1.3	Bifurcação do ponto umbílico D_{23} . Os pontos umbílicos D_2 e D_3 colidem formando o ponto D_{23} , e depois não há pontos umbílicos. Fixada uma orientação, as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal da folheação principal mínima, $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respectivamente máxima, $\mathcal{F}_{2,\alpha}$).	11
2.1	Configuração principal de $\mathbf{S}^+$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $c > 0$ e externa para $c < 0$. Supondo-se $k_2^+ < k_1$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	18
2.2	Configuração principal de $\mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $\gamma > 0$ e externa para $\gamma < 0$. Supondo-se $k_1 < k_2^-$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	20
2.3	Configurações principais suaves por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \boldsymbol{\delta} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $k_2^+ < k_1 < k_2^-$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	22
2.4	Configurações principais suaves por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \boldsymbol{\delta} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $k_1 < k_2^+$ e $k_1 < k_2^-$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	23
2.5	$\delta(u_0)$ é um ponto de deslizamento para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$	24
2.6	$\delta(u_0)$ é um ponto de costura para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$	24

2.7	$\delta(u_0)$ é um ponto de transição para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) e máximas (linhas contínuas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$	24
2.8	$\delta(u_0)$ é um ponto de costura para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$	25
2.9	Exemplos de ângulos formados entre as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) e as linhas principais máximas (linhas contínuas) de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$ com o eixo- u	26
2.10	A origem $\delta(0)$ é um ponto de transição e, para as linhas de curvatura principal mínima, $\delta(u)$ é ponto de costura se $u > 0$ e ponto de deslizamento se $u < 0$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	30
2.11	Configuração principal suave por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança de um ponto de δ -dobra, considerando $k_2^+ < k_1$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	32
2.12	Gráfico de uma função de transição ϕ	33
2.13	Gráficos da função de transição ϕ_ε , para $\varepsilon \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$	34
2.14	À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência quadrática tal que $k_1 < k_2^+$, $k_1 < k_2^-$, $c < 0$ e $\gamma > 0$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.	39
2.15	À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência quadrática tal que $k_1 < k_2^+$, $k_1 < k_2^-$, $c > 0$ e $\gamma < 0$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.	40
2.16	Regiões do plano $c\gamma$ onde temos uma única raiz real ($\Delta > 0$) ou três raízes reais distintas ($\Delta < 0$).	43
2.17	À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência tal que $k_2^+ < k_1 < k_2^-$, $c > 0$, $\gamma > 0$ e $\gamma > c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.	46
2.18	À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência tal que $k_2^+ < k_1 < k_2^-$, $c > 0$, $\gamma > 0$ e $\gamma < c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais máximas (linhas contínuas) são deslizantes e as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) costuram.	46

2.19	À esquerda, temos que a origem é um ponto de cruzamento transversal (observe que devemos ter $\omega = 90^\circ$) e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes se $u < 0$ e costuram se $u > 0$. As linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram se $u < 0$ e deslizam se $u > 0$	51
2.20	À esquerda, temos que a origem é um ponto de δ -dobra ($k_3^+ = 0$, $k_3^- \neq 0$ e $c > 0$) e, à direita, sua ε -regularização.	53
2.21	À esquerda, temos que a origem é um ponto de δ -dobra ($k_3^+ = 0$, $k_3^- \neq 0$ e $c < 0$) e, à direita, sua ε -regularização.	53
3.1	Configuração principal de $\mathbf{S}^+$ em uma vizinhança de $\delta(u_0)$: tangência interna para $\tau'_g(u_0) > 0$ e externa para $\tau'_g(u_0) < 0$, considerando $u_0 = 0$. Supondo $(k_n - k^+)(u_0) > 0$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).	58
3.2	Configuração principal de $\mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $\tau'_g(u_0) > 0$ e externa para $\tau'_g(u_0) < 0$, considerando $u_0 = 0$. Supondo $(k_n - k^-)(u_0) < 0$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas).	60
3.3	Configuração principal suave por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $u_0 = 0$ e $k^+(u_0) < k_n(u_0) < k^-(u_0)$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas). Dois casos: $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita.	62
3.4	Configuração principal suave por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $u_0 = 0$ e $k_n(u_0) < k^+(u_0)$ e $k_n(u_0) < k^-(u_0)$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas). Dois casos: $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita.	62
3.5	Exemplos de ângulos formados entre as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) e as linhas principais máximas (linhas contínuas) de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$ com o eixo- u positivo.	69
3.6	À esquerda, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo comum $\mathbf{B}$ e, à direita, a ε -regularização de $\mathbf{S}$	72
4.1	Um aberto do ε -engrossamento da superfície $\mathbf{S}$	75

4.2	Configurações suaves por partes da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de tangência quadrática, sendo $k_n(u_0) < k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: tangência interna se $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda, e tangência interna se $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita. Para mais detalhes sobre o caso quadrático ver [5].	82
4.3	Configurações suaves por partes da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de contato cúbico, sendo $k_n(u_0) < k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: $\tau''_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau''_g(u_0) < 0$, à direita.	83
4.4	Configurações suaves por partes da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de contato cúbico, sendo $k_n(u_0) > k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: $\tau''_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau''_g(u_0) < 0$, à direita.	83
4.5	$\mathbf{B}$ é o deslocamento paralelo do bordo $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ na direção de $-\mathcal{N}$, sendo $\mathcal{N}$ campo normal da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$.	85
4.6	Solução do sistema (4.14): para cada u_0 fixado temos um círculo de raio $f(u_0, v)$ obtido da interseção entre a esfera de centro $Q = \delta_+(u_0) - \varepsilon\mathcal{N}(u_0)$ e raio ε e o plano Π de equação $(1 + \varepsilon k_n(u_0))x + \varepsilon\tau_g(u_0)y = 0$.	86
4.7	Família a 1 parâmetro de superfícies $\mathbf{S}_{\tau_0}$ com bordo variável $\mathbf{B}_{\tau_0}$. Se $\tau_0 = 0$ temos um ponto de contato cúbico entre as linhas de curvatura principal mínima de $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}$ com o bordo $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$. Com relação à superfície $\mathbf{S}_{\tau_0}$ ($\tau_0 < 0$), o contato das linhas de curvatura de $\mathbf{S}_{\tau_0}$ com $\mathbf{B}_{\tau_0}$ é quadrático externo (curva azul) e quadrático interno (curva vermelha). Destes pontos de tangências quadráticas externa e interna emergem pontos umbílicos Darbouxianos, respectivamente, dos tipos D_1 e D_3 ; isto foi demonstrado por Garcia e Sotomayor em [5], em um contexto local específico e para valores pequenos do parâmetro $\varepsilon > 0$.	92
4.8	Diagrama de bifurcação em uma vizinhança de um ponto de contato cúbico.	93
4.9	Gráfico da função de transição ϕ , para $a > 0$ e $\mu > 0$ suficientemente pequenos.	105

Introdução

A estrutura formada pelos pontos umbílicos e pelas linhas de curvatura principal de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ definem o que chamamos de *configuração principal* da superfície. As *linhas de curvatura principal* são as curvas integrais dos campos de direções, segundo as quais a curvatura normal tem valores extremais: máximo ou mínimo. As curvaturas normais correspondentes são chamadas *curvaturas principais* e os pontos onde as curvaturas principais coincidem são os *pontos umbílicos*. As linhas de curvatura principal estão definidas em toda a superfície e interceptam-se ortogonalmente fora dos pontos umbílicos. Ver [6, 13].

O estudo da configuração principal de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ mereceu a atenção inicial de matemáticos como Monge e Dupin. Em 1796, Monge em [10] apresentou a descrição, por integração direta das equações diferenciais das linhas de curvatura principal, do primeiro exemplo de configuração principal não trivial que ocorre no elipsóide de três eixos distintos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

O elipsóide, com sua configuração principal, é conhecido como o Elipsóide de Monge. Este é o primeiro exemplo encontrado na literatura de folheações com singularidades. Posteriormente, várias contribuições foram dadas por Dupin, Darboux e outros.

Em 1896, Darboux [2], descreveu o comportamento das linhas de curvatura principal próximas de um ponto umbílico genérico, na classe de superfícies analíticas. Sob certas condições nas terceiras derivadas da superfície, ele encontrou três tipos D_1 , D_2 e D_3 , conhecidos como *pontos umbílicos Darbouxianos*. Em [8] pode-se encontrar dados históricos sobre este assunto.

Em 1982, Gutierrez e Sotomayor [7, 8], abordaram o estudo da configuração principal de uma superfície sem bordo $\mathbf{S}$, do ponto de vista da estabilidade estrutural sob pequenas deformações da superfície $\mathbf{S}$. Eles estabeleceram que, com topologias adequadas, toda superfície compacta pode ser C^2 -aproximada por uma cuja configuração principal é estruturalmente estável. As condições suficientes para a estabilidade estrutural da configuração principal de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, sem bordo e compacta são as seguintes:

- (i) Todos os pontos umbílicos são Darbouxianos;

- (ii) Todos os ciclos principais são hiperbólicos;
- (iii) Não existem conexões ou autoconexões de separatrizes umbílicas;
- (iv) O conjunto limite de cada linha de curvatura principal está contido no conjunto dos pontos umbílicos ou ciclos principais.

Em 2002, Garcia e Sotomayor [5], deram um primeiro passo no sentido de estender, para superfícies $\mathbf{S}$ com bordo $\mathbf{B}$, as propriedades de estabilidade das configurações principais obtidas em [7, 8] para superfícies sem bordo. Outro tipo de deformação de $(\mathbf{S}, \mathbf{B})$ foi introduzida por estes autores em [5], onde o estudo da configuração principal de $(\mathbf{S}, \mathbf{B})$ foi feito por comparação com a configuração principal de uma deformação apropriada $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$, a qual foi obtida através dos processos de ε -engrossamento e μ -regularização (ou μ -suavização) aplicados à superfície com bordo.

Em linguagem geométrica, o ε -engrossamento de $\mathbf{S}$ é a fronteira de uma vizinhança tubular de $\mathbf{S}$ de raio ε , a qual consiste em duas cópias de $\mathbf{S}$, denotadas por $\mathbf{S}_{\varepsilon, +}$ e $\mathbf{S}_{\varepsilon, -}$, obtidas deslocando-se $\mathbf{S}$ de $\pm\varepsilon$ ao longo da sua normal e sendo $\mathbf{S}_{\varepsilon, \pm}$ unidas por um semitubo $\mathbf{T}_{\varepsilon}$, de raio ε e com centro variando sobre o bordo $\mathbf{B}$ de $\mathbf{S}$. Veja definição 4.1.2. Estas três superfícies C^{∞} , quando justapostas, formam uma superfície (dita *suave por partes ou seccionalmente suave*) que é só de classe C^1 , ao longo dos bordos $\mathbf{B}_{\varepsilon, \pm}$ de $\mathbf{S}_{\varepsilon, \pm}$. A μ -regularização consiste em considerar uma aproximação adicional para esta superfície por outra, de classe C^{∞} , suportada numa faixa de largura μ ao longo dos bordos $\mathbf{B}_{\varepsilon, \pm}$.

Garcia e Sotomayor provaram que, com restrições específicas e das propriedades das funções suaves que caracterizam o processo, dos pontos de tangências supostas quadráticas das linhas de curvatura principal com o bordo $\mathbf{B}$ emergem pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 sobre $\mathbf{S}_{\varepsilon, \mu}$, para ε e μ positivos e suficientemente pequenos. O tipo D_2 não aparece no processo de engrossamento e suavização da variedade com bordo definido pelos autores.

No presente trabalho propomos abordar uma situação mais geral de superfícies suaves por partes, acima discutidas, a partir do trabalho [5]. Na primeira parte da tese (capítulos 2 e 3) consideramos a superfície suave por partes $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, obtida pela justaposição de duas superfícies suaves $(\mathbf{S}^+, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{S}^-, \mathbf{B})$ ao longo do bordo comum $\mathbf{B}$ e estudamos os efeitos da regularização sobre os pontos de $\mathbf{B}$ de contato quadrático ou de cruzamento transversal. Na segunda parte do trabalho (capítulo 4) damos continuidade ao estudo iniciado em [5] por Garcia e Sotomayor, analisando um caso complementar, no qual o contato de uma linha de curvatura principal com o bordo $\mathbf{B}$ é cúbico, dito *tangencialmente crítico*. Apresentamos as condições para que destes pontos de contato quadrático, cruzamento transversal e de contato cúbico emergjam, sobre a superfície regularizada, pontos umbílicos.

A tese está dividida da seguinte forma:

No capítulo 1 fazemos uma revisão dos principais conceitos e resultados necessários para o bom desenvolvimento deste trabalho. A equação diferencial das linhas de curvatura de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ será apresentada. Também apresentamos as condições que definem os pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 , D_2 e D_3 e suas bifurcações de codimensão 1: os pontos D_{12} e D_{23} .

No capítulo 2 consideramos a superfície seccionalmente suave $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \boldsymbol{\delta} \cup \mathbf{S}^-$, obtida pela justaposição, ao longo de $\boldsymbol{\delta}$, de duas superfícies suaves $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ com bordo comum $\boldsymbol{\delta}$. Supomos que $\boldsymbol{\delta}$ é uma curva plana em $\mathbb{R}^3$ (ou seja, tem torção geodésica nula) e que $\mathbf{S}^\pm$ estão parametrizadas, sem perda de generalidade, por gráficos em uma vizinhança da origem. Definimos três tipos de pontos sobre o bordo comum $\boldsymbol{\delta}$: pontos de contato quadrático, de dobra e de cruzamento transversal e estudamos os efeitos da regularização para estes três casos. Os principais resultados estão contidos nos teoremas 2.2.6, 2.2.10 e 2.2.11.

No capítulo 3 fizemos um estudo análogo ao do capítulo 2, considerando, no entanto, que a curva bordo comum tem torção genérica (possivelmente não nula). Nesse contexto, temos dois tipos de pontos a serem analisados: pontos de contato quadrático e de cruzamento transversal. Os principais resultados deste capítulo estão contidos nos teoremas 3.2.4 e 3.3.1.

No capítulo 4 estudamos as linhas de curvatura principal de uma superfície $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$ com bordo $\mathbf{B}$ e da superfície suave $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$, obtida de $\mathbf{S}$, através do ε -engrossamento e μ -regularização. Consideramos que o contato de uma linha de curvatura principal com o bordo $\mathbf{B}$ é cúbico. Vimos que de tais pontos de contato cúbico emergem, sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$, pontos umbílicos não Darbouxianos dos tipos D_{12} e D_{23} , além dos pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 , D_2 e D_3 . Veja teorema 4.3.4.

Capítulo 1

Levantamento de Lie-Cartan, Pontos Umbílicos e suas Bifurcações

Este capítulo é introdutório ao estudo da configuração principal de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Revisaremos alguns conceitos e resultados necessários para o bom desenvolvimento deste trabalho. Na seção 1.1 determinaremos a equação diferencial das linhas de curvatura principal para uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ (equação (1.4)). Na seção 1.2 utilizaremos o levantamento de Lie-Cartan (definição 1.2.1) para reduzir o estudo das linhas de curvatura principal, em uma vizinhança dos pontos umbílicos, ao estudo de curvas integrais de campos de linhas, em uma vizinhança dos seus equilíbrios. Este estudo foi feito por Bruce e Fidal em [1]. Veja também [9]. Na seção 1.3 apresentaremos dois padrões genéricos de bifurcações de pontos umbílicos, também conhecidos como pontos umbílicos de codimensão 1: o ponto umbílico do tipo D_{12} (definição 1.3.1) e o ponto umbílico do tipo D_{23} (definição 1.3.4).

1.1 Equações Diferenciais das Linhas de Curvatura Principal

Seja $\mathbf{S}$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$, regular de classe C^r ($r \geq 5$), compacta, conexa e orientada. Uma imersão $\alpha : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação tal que $D\alpha(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, para cada $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$.

O espaço $\mathbb{R}^3$ está orientado e munido do produto interno Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

A métrica induzida sobre $T_{\mathbf{p}}\mathbf{S}$ é definida por

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{p}} := \langle D\alpha(\mathbf{p})u, D\alpha(\mathbf{p})v \rangle, \quad \text{onde } u, v \in T_{\mathbf{p}}\mathbf{S}.$$

Denotemos por $\mathcal{N}_{\alpha}$ a aplicação normal unitária a α que define a orientação positiva da superfície $\mathbf{S}$. Isto significa que se $(u, v) : (\mathbf{S}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ é uma carta positiva em torno

de $\mathbf{p}$, então $\{\alpha_u, \alpha_v, \mathcal{N}_\alpha\}$ é um referencial positivo em $\mathbb{R}^3$. Assim, a aplicação normal $\mathcal{N}_\alpha$ se exprime por $\mathcal{N}_\alpha = (\alpha_u \wedge \alpha_v) / |\alpha_u \wedge \alpha_v|$, onde $\wedge$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ e $|\cdot| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ a norma Euclideana em $\mathbb{R}^3$.

A carta (u, v) induz a base $\{du, dv\}$ no espaço das formas lineares, sendo $\{du, dv\}$ a base dual da base $\{\alpha_u, \alpha_v\}$ de $T_{\mathbf{p}}\mathbf{S}$.

As *formas fundamentais de $\mathbf{S}$* , denotadas por $I_\alpha, II_\alpha : T_{\mathbf{p}}\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$, na carta (u, v) são dadas por

$$\begin{aligned} I_\alpha(w) &= E(\mathbf{p}) du^2 + 2F(\mathbf{p}) dudv + G(\mathbf{p}) dv^2 = wPw^T, \\ II_\alpha(w) &= e(\mathbf{p}) du^2 + 2f(\mathbf{p}) dudv + g(\mathbf{p}) dv^2 = wQw^T, \end{aligned}$$

onde $E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle$, $F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle$, $G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$, $e = \langle \alpha_{uu}, \mathcal{N}_\alpha \rangle$, $f = \langle \alpha_{uv}, \mathcal{N}_\alpha \rangle$,

$$g = \langle \alpha_{vv}, \mathcal{N}_\alpha \rangle, w = (du, dv), P = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}.$$

A *curvatura normal* $k_n : T_{\mathbf{p}}\mathbf{S} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\mathbf{p}$ e na direção $w = (du, dv)$ é definida por $k_n(\mathbf{p}, w) = \frac{II_\alpha(w)}{I_\alpha(w)}$. As direções onde $k_n(\mathbf{p}, \cdot)$ assume valores críticos são chamadas *direções principais*. Os valores de k_n nestas direções são chamados *curvaturas principais*, as quais denotaremos por $k_1(\mathbf{p}) \leq k_2(\mathbf{p})$. Quando $k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})$, dizemos que $\mathbf{p}$ é um *ponto umbílico*. O conjunto $\mathcal{U}_\alpha = \{\mathbf{p} \in \mathbf{S}; k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})\}$ será chamado *conjunto umbílico* da superfície $\mathbf{S}$.

Fora dos pontos umbílicos, as direções principais determinam dois campos de direções tangentes à superfície, mutuamente ortogonais, denominados *campos de direções principais*. Os pontos umbílicos são considerados singularidades destes campos.

Restringindo k_n à condição $I_\alpha = 1$, observamos que as direções principais onde $k_n(\mathbf{p}, \cdot)$ assume valores críticos são dadas pelo método dos multiplicadores de Lagrange (com multiplicador k) resolvendo a equação

$$\nabla II_\alpha = k \nabla I_\alpha. \quad (1.1)$$

Neste caso, k é uma das curvaturas principais. Portanto, tais curvaturas são definidas por

$$\det(Q - kP) = 0. \quad (1.2)$$

Da equação (1.1) temos que as direções principais são as soluções do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (e - k_1 E) du + (f - k_1 F) dv = 0 \\ (f - k_1 F) du + (g - k_1 G) dv = 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais. O sistema (1.3) descreve os campos de direções

principais. As curvas integrais destes campos de direções são chamadas *linhas de curvatura principal* da superfície $\mathbf{S}$. As *folheações principais* definidas pelo conjunto das linhas de curvatura principal (mínimas e máximas) serão denotadas por $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ e $\mathcal{F}_{2,\alpha}$. A terna $(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}_{1,\alpha}, \mathcal{F}_{2,\alpha})$ é chamada *configuração principal* da superfície $\mathbf{S}$.

A curvatura normal $k_n(\mathbf{p}, w)$ na direção $[du : dv]$, também denotada por $\lambda = \frac{dv}{du}$, pode ser reescrita como:

$$k_n(\mathbf{p}, \lambda) = \frac{e(\mathbf{p})du^2 + 2f(\mathbf{p})dudv + g(\mathbf{p})dv^2}{E(\mathbf{p})du^2 + 2F(\mathbf{p})dudv + G(\mathbf{p})dv^2} = \frac{e(\mathbf{p}) + 2f(\mathbf{p})\lambda + g(\mathbf{p})\lambda^2}{E(\mathbf{p}) + 2F(\mathbf{p})\lambda + G(\mathbf{p})\lambda^2}.$$

Os valores extremos de k_n são caracterizados por $\frac{dk_n}{d\lambda} = 0$. Logo, efetuando-se este cálculo obtemos, a seguir, a *equação diferencial das linhas de curvatura* da superfície $\mathbf{S}$:

$$(Fg - Gf)\lambda^2 + (Eg - Ge)\lambda + (Ef - Fe) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(Fg - Gf)dv^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)du^2 = 0. \quad (1.4)$$

Sendo $L = (Fg - Gf)$, $M = (Eg - Ge)$ e $N = (Ef - Fe)$, podemos concluir que os pontos umbílicos da superfície $\mathbf{S}$ ocorrem em $L = M = N = 0$.

1.2 O Campo de Lie-Cartan e os Pontos Umbílicos Darbouxianos

Uma ferramenta importante que utilizaremos se insere no estudo das equações diferenciais implícitas. Trata-se do campo de linhas de Lie-Cartan, que é um levantamento da equação diferencial das linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}$ a uma superfície no fibrado projetivo $\mathbf{PS}$ sobre $\mathbf{S}$.

Denotemos por $\mathcal{I}^{r,s} = \mathcal{I}^{r,s}(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$, $s \leq r$, o conjunto das imersões de $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$ de classe C^r munido com a topologia C^s .

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r = \mathcal{I}^{r,r}(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3)$, considere a seguinte equação diferencial implícita

$$\mathbf{LS}(u, v; [du : dv]) = Ldv^2 + Mdudv + Ndu^2 = 0, \quad (1.5)$$

a qual define uma superfície $\mathbb{L}_\alpha := \mathbf{LS}^{-1}\{0\}$ no fibrado projetivo $\mathbf{PS}$ sobre $\mathbf{S}$,¹ com projeção $\pi : \mathbf{PS} \rightarrow \mathbf{S}$. Esta superfície será chamada *superfície de Lie-Cartan* associada

¹ $\mathbf{PS}$ é definido pela seguinte relação de equivalência: para $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$ e $v_1, v_2 \in \mathbf{TS}$ (fibrado tangente de $\mathbf{S}$), $(\mathbf{p}_1, v_1)$ é equivalente a $(\mathbf{p}_2, v_2)$, se $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ e v_1 e v_2 são colineares, isto é $v_1 \wedge v_2 = 0$.

à imersão α .

A superfície de Lie-Cartan que acabamos de definir é de classe C^{r-2} e, apesar de ser regular em $\mathbf{S} \setminus \mathcal{U}_\alpha$, pode apresentar singularidades sobre $\mathcal{U}_\alpha$.

Em termos da carta (u, v) com domínio $V \subset \mathbf{S}$, são definidas duas cartas $(u, v; p = dv/du)$ e $(u, v; q = du/dv)$ cujos domínios cobrem o conjunto aberto $\pi^{-1}(V)$. Na carta $(u, v; p = dv/du)$, $\mathbb{L}_\alpha$ é dada por:

$$\mathcal{L}(u, v; p) = L(u, v)p^2 + M(u, v)p + N(u, v) = 0, \quad (1.6)$$

e na carta $(u, v; q = du/dv)$, por:

$$\mathcal{G}(u, v; q) = L(u, v) + M(u, v)q + N(u, v)q^2 = 0. \quad (1.7)$$

Definição 1.2.1. Na carta $(u, v; p)$, $p = \frac{dv}{du}$, o campo de linhas de **Lie-Cartan** (ou **levantamento da equação diferencial das linhas de curvatura principal**), de classe C^{r-3} , é definido por:

$$X_\alpha := \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial u} + p \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial v} - (\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_v) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (1.8)$$

Na carta $(u, v; q)$, $q = \frac{du}{dv}$, o campo de linhas tem a seguinte expressão:

$$Y_\alpha := q \mathcal{G}_q \frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{G}_q \frac{\partial}{\partial v} - (\mathcal{G}_v + q \mathcal{G}_u) \frac{\partial}{\partial q}. \quad (1.9)$$

As projeções das curvas integrais de X_α por $\pi(u, v; p) = (u, v)$ são as linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}$ e satisfazem $p = dv/du$. Além disso, o campo X_α é tangente à superfície de Lie-Cartan, pois

$$X_\alpha \mathcal{L} = \mathcal{L}_u \mathcal{L}_p + p \mathcal{L}_v \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_p \mathcal{L}_u - p \mathcal{L}_p \mathcal{L}_v = 0.$$

Definição 1.2.2. Um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$ é **Darbouxiano** se satisfaz às condições *T*) e *D*) abaixo:

T): (Condição de Transversalidade) A superfície de Lie-Cartan, $\mathbb{L}_\alpha$, é regular também sobre $\pi^{-1}(\mathbf{p})$.

D): (Condição do Discriminante) As singularidades do campo de Lie-Cartan sobre $\pi^{-1}(\mathbf{p})$ são hiperbólicas e dadas por um dos seguintes casos:

D_1 : uma única sela, ou

D_2 : uma único nó entre duas selas, ou

D_3 : *três selas*.

Para efeito de cálculos, será útil expressar as condições Darbouxianas em uma carta local apropriada: seja $\mathfrak{p} \in \mathcal{U}_\alpha$ e suponha α expressa na *carta de Monge* $(u, v) : (\mathbf{S}, \mathfrak{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ por $\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, sendo

$$h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + \frac{A}{24}u^4 + \frac{B}{6}u^3v + \frac{C}{4}u^2v^2 + \frac{D}{6}uv^3 + \frac{E}{24}v^4 + O(5).$$

Nesta expressão o coeficiente de u^2v pode ser feito nulo por meio de uma rotação no plano (u, v) . A equação diferencial das linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}$ próxima do ponto umbílico $\mathfrak{p}$ é dada por:

$$-[bv + P_1]dv^2 + [(b - a)u + cv + P_2]dudv + [bv + P_3]du^2 = 0,$$

onde P_i ($i = 1, 2, 3$) representam funções de ordem $O(u^2 + v^2)$.

Observe que, na carta $(u, v; p)$, as singularidades do campo de Lie-Cartan X_α (equação (1.8)) são dadas por $(0, 0; p_i)$, sendo p_i ($i = 0, 1, 2$) raízes do polinômio

$$p(bp^2 - cp + a - 2b) = 0.$$

Segue da condição de transversalidade T que $b \neq 0$ (veja demonstração do teorema 1.2.3 em [7, 8]), logo as singularidades de X_α sobre a superfície $\mathbb{L}_\alpha$ estão localizadas ao longo do eixo p , cujas coordenadas p_0, p_1 e p_2 são dadas por

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2},$$

$$p_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}.$$

A superfície implícita $\mathcal{L}(u, v; p) = L(u, v)p^2 + M(u, v)p + N(u, v) = 0$ é regular em uma vizinhança da linha projetiva se, e somente se, $b(b - a) \neq 0$. Próximo do ponto singular $p_0 = (0, 0, 0)$ de X_α segue que $\mathcal{L}_v(p_0) = b \neq 0$ e, portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $v = v(u, p)$ tal que $\mathcal{L}(u, v(u, p); p) = 0$. Assim, temos a seguinte expansão de Taylor para a função v :

$$v(u, p) = -\frac{B}{2b}u^2 + \frac{a - b}{b}up + O(3).$$

A expressão do campo de Lie-Cartan X_α na carta (u, p) é dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{u} = \mathcal{L}_p(u, v(u, p); p) &= (b - a)u + \frac{1}{2} \frac{[b(C - A + 2k^3) - cB]}{b} u^2 + \frac{c(a - b)}{b} up + O(3), \\
\dot{p} = -(\mathcal{L}_u + p\mathcal{L}_v)(u, v(u, p); p) &= -Bu + (a - 2b)p - cp^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{[B(C - k^3) - a_{41}b]}{b} u^2 + \frac{[b(A - C - 2k^3) + a(k^3 - C)]}{b} up + O(3),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

onde $a_{41} = \left. \frac{\partial^5 h}{\partial u^4 \partial v} \right|_{u=v=0}$. Entretanto, a_{41} não terá influência na análise qualitativa que segue.

O teorema 1.2.3, abaixo, relaciona as condições de Darboux T) e D) da definição 1.2.2 com os coeficientes da parametrização de $\mathbf{S}$ na carta de Monge.

Teorema 1.2.3 (Gutierrez e Sotomayor, [7, 8]). *Seja $\mathbf{p}$ um ponto umbílico de uma imersão α de classe C^r , $r \geq 4$, expressa na carta de Monge $(u, v) : (\mathbf{S}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ por $\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, sendo*

$$h(u, v) = \frac{k}{2} (u^2 + v^2) + \frac{a}{6} u^3 + \frac{b}{2} uv^2 + \frac{c}{6} v^3 + O(4).$$

Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:

$$T) \quad b(b - a) \neq 0;$$

$$D_1) \quad \left(\frac{c}{2b} \right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0;$$

$$D_2) \quad \left(\frac{c}{2b} \right)^2 + 2 > \frac{a}{b} > 1, \quad a \neq 2b;$$

$$D_3) \quad \frac{a}{b} < 1.$$

*Então, cada folheação principal tem, em uma vizinhança da origem, um setor hiperbólico no caso D_1 , um setor parabólico e um hiperbólico no caso D_2 e três setores hiperbólicos no caso D_3 . Os umbílicos são chamados **Darbouxianos** dos tipos D_1 , D_2 e D_3 . Veja figura 1.1.*

O subscrito ($i = 1, 2, 3$) de D_i denota o número de *separatrizes umbílicas* de $\mathbf{p}$, que são linhas de curvatura principal tendendo a $\mathbf{p}$ e que separam regiões de diferentes padrões de aproximação a $\mathbf{p}$.

Outras propriedades gerais das linhas de curvatura e dos pontos umbílicos podem ser encontradas em [6, 13].

Figura 1.1: Linhas de curvaturas principais próximas aos pontos umbílicos D_i e suas separatrizes umbílicas, no bordo dos setores.

1.3 Pontos Umbílicos de Codimensão 1

Dois padrões genéricos de bifurcações de pontos umbílicos surgem em codimensão 1. O primeiro deles, chamado D_{12} , ocorre quando a condição do discriminante D é desrespeitada, enquanto a condição de transversalidade T é preservada. O segundo padrão, chamado de D_{23} , ocorre quando a condição T é desrespeitada e a condição D é preservada. A expressão *codimensão 1* significa que as mudanças qualitativas na configuração principal das linhas de curvatura próximas dos pontos umbílicos estão bem descritas por uma família a 1 parâmetro α_λ de imersões de uma superfície $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. O espaço destas famílias está munido com a topologia de Whitney.

1.3.1 O Padrão de Bifurcação do Ponto Umbílico D_{12}

Vamos estudar as mudanças qualitativas da configuração principal na vizinhança de um ponto umbílico não Darbouxiano que ocorrem quando a condição de transversalidade T , $b(b-a) \neq 0$, é preservada e somente a condição D é desrespeitada da maneira mais simples possível.

Definição 1.3.1. O ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$ é chamado **ponto umbílico do tipo D_{12}** se satisfaz às condições T) e D_{12}) abaixo:

T) A superfície de Lie-Cartan, $\mathbb{L}_\alpha$, é regular também sobre $\pi^{-1}(\mathbf{p})$.

D_{12}) As singularidades do campo de Lie-Cartan são uma sela hiperbólica e uma sela-nó cuja variedade central está situada ao longo da linha projetiva sobre $\mathbf{p}$.

Considerando a mesma notação da seção 1.2, seja $\mathbf{p}$ um ponto umbílico da imersão α expressa na carta de Monge $(u, v) : (\mathbf{S}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ por $\alpha(u, v) = (u, v, h(u, v))$, sendo

$$h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{b'}{2}u^2v + \frac{c}{6}v^3 + \frac{A}{24}u^4 + \frac{B}{6}u^3v + \frac{C}{4}u^2v^2 + \frac{D}{6}uv^3 + \frac{E}{24}v^4 + O(5), \quad (1.11)$$

onde assumimos, como antes, que o coeficiente b' pode ser considerado nulo.

A caracterização do ponto umbílico D_{12} , da definição 1.3.1, é dada em termos da carta de Monge como segue:

$T)$ $b(b-a) > 0$ e, ou

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2, \text{ ou}$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = 2.$$

O ponto umbílico D_{12} possui duas separatrizes umbílicas: a *separatriz isolada* e a *separatriz não-isolada*. A *separatriz isolada* caracteriza-se pelo fato de não possuir tangência com qualquer outra linha de curvatura que também se aproxima do ponto umbílico. A *separatriz não-isolada* possui tangência com as linhas de curvatura principal que se aproximam do ponto umbílico, exceto com a separatriz isolada. Veja figura 1.2, na qual as separatrizes umbílicas estão hachuradas.

Os coeficientes $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$ da equação diferencial das linhas de curvatura principal $L(u, v)dv^2 + M(u, v)dudv + N(u, v)du^2 = 0$ são dados por:

$$\begin{aligned} L(u, v) &= -bv - \frac{B}{2}u^2 - (C - k^3)uv - \frac{D}{2}v^2 + O(3), \\ M(u, v) &= (b-a)u + cv + \left[\frac{C-A}{2} + k^3\right]u^2 + (D-B)uv + \\ &\quad + \left[\frac{E-C}{2} - k^3\right]v^2 + O(3), \\ N(u, v) &= bv + \frac{B}{2}u^2 + (C - k^3)uv + \frac{D}{2}v^2 + O(3). \end{aligned} \tag{1.12}$$

A condição D_{12} é equivalente à existência de uma raiz dupla e não nula do polinômio $bp^2 - cp + a - 2b = 0$ (sendo $p = dv/du$), que corresponde a $b \neq 0$ e $p_1 = p_2 \neq p_0$. Portanto, assumindo que $b(b-a) \neq 0$, as curvas $L(u, v) = 0$ e $M(u, v) = 0$ interceptam-se transversalmente em $(0, 0)$ se, e somente se, $b \neq a$.

Foi demonstrado em [7] por Gutierrez e Sotomayor que a condição D_1 é satisfeita se, se somente se, as raízes do polinômio $bp^2 - cp + a - 2b = 0$ são não nulas e puramente imaginárias. Também que a condição D_2 é satisfeita se, e somente se, as raízes p_1 e p_2 de $bp^2 - cp + a - 2b = 0$ são distintas, não nulas e satisfazem $p_1 \cdot p_2 > -1$.

Proposição 1.3.2 ([6], proposição 4.2.1). *Suponha que $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$, satisfaz a condição D_{12} em um ponto umbílico $\mathbf{p}$. Então, a configuração principal local de α em torno de $\mathbf{p}$ é como na figura 1.2, centro.*

Demonstração. Considere o campo de Lie-Cartan na carta $p = dv/du$ como na expressão (1.8). Se $a = 2b \neq 0$ e $c \neq 0$, temos que $p_0 = (0, 0, 0)$ é um ponto singular isolado tipo sela-nó com sua separatriz central contida na linha projetiva, que neste caso é o eixo p . De fato, os autovalores de $DX_\alpha(0)$ são $\lambda_1 = -b \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ e o eixo p é invariante, sendo X_α dado por $\dot{p} = -cp^2 + O(2)$, segundo a equação (1.10).

O outro ponto singular de X_α é dado por $p_1 = (0, 0, c/b)$. Assim,

$$DX_\alpha(0, 0; p_1) = \begin{bmatrix} -b & -c & 0 \\ -c & -\frac{c^2}{b} & 0 \\ B_1 & B_2 & \frac{c^2}{b} \end{bmatrix},$$

onde

$$B_1 = \frac{b^2c(A - k^3 - 2C) + bc^2(2B - D) + c^3(C - k^3) - b^3D}{b^3},$$

$$B_2 = \frac{b^2c(B - 2D) + bc^2(2C + k^3 - E) + b^3(k^3 - C) + Dc^3}{b^3}.$$

Os autovalores não nulos de $DX_\alpha(0, 0, p_1)$ são

$$\lambda_1 = \frac{c^2}{b} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{c^2 + b^2}{b}.$$

Portanto, p_1 é um ponto de sela hiperbólica de X_α com autovalores λ_1 e λ_2 .

Uma análise similar pode ser feita quando $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 = 0$.

Isto completa a demonstração. $\square$

Proposição 1.3.3 ([6], proposição 4.2.2). *Suponha que $\alpha \in \mathcal{I}^r, r \geq 5$, satisfaz a condição D_{12} em um ponto umbílico $\mathbf{p}$. Então, existe uma vizinhança V de $\mathbf{p}$, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de α e uma função $\mathcal{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} tal que cada $\beta \in \mathcal{V}$ tem um único ponto umbílico $\mathbf{p}_\beta$ em V , sendo:*

- (i) $d\mathcal{B}(\alpha) \neq 0$,
- (ii) $\mathcal{B}(\beta) > 0$ se, e somente se, $\mathbf{p}_\beta$ é Darbouxiano do tipo D_1 ,
- (iii) $\mathcal{B}(\beta) < 0$ se, e somente se, $\mathbf{p}_\beta$ é Darbouxiano do tipo D_2 ,
- (iv) $\mathcal{B}(\beta) = 0$ se, e somente se, $\mathbf{p}_\beta$ é do tipo D_{12} .

A configuração principal de β em torno de $\mathbf{p}$ é como na figura 1.2, direita, esquerda e centro, respectivamente.

Figura 1.2: Ponto umbílico D_{12} e sua bifurcação.

1.3.2 O Padrão de Bifurcação do Ponto Umbílico D_{23}

Iremos estudar as mudanças qualitativas da configuração principal na vizinhança de um ponto umbílico não Darbouxiano, chamado D_{23} , que ocorrem quando a condição de transversalidade T é desrespeitada.

Definição 1.3.4. O ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$ é um **ponto umbílico do tipo D_{23}** se a regularidade da superfície $\mathbb{L}_\alpha$ falha em dois pontos sobre o ponto umbílico, onde a superfície $\mathbb{L}_\alpha$ é não degenerada do tipo Morse.

Proposição 1.3.5 ([6], proposição 4.2.3). Suponha que $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$, $\mathbf{p} \in \mathcal{U}_\alpha$ e considere a carta de Monge dada pela expressão (1.11) com $b' = 0$, $b = a \neq 0$ e $\chi = b(C - A + 2k^3) - cB \neq 0$. Então $\mathbf{p}$ é do tipo D_{23} e a configuração principal local de α em torno de $\mathbf{p}$ é como na figura 1.3, centro.

Demonstração. Pode ser encontrada em [6], p. 94 e também em [9], p. 333. $\square$

Observe que o contato das curvas $M = 0$ e $N = 0$ no ponto umbílico é quadrático. De fato, da equação (1.12) segue, pelo Teorema da Função Implícita, que $M(u, v(u)) = 0$ para $v = \frac{\chi + cB}{2b}u^2 + O(2)$ de classe C^{r-2} . Portanto, $n(u) = N(u, v(u))$ é de classe C^{r-2} e $n(u) = \frac{\chi + cB}{2}u^2 + O(2)$.

Observação 1.3.6. As seguintes três condições são equivalentes:

- (i) a existência de exatamente dois pontos críticos de $\mathbb{L}_\alpha$ não degenerados do tipo Morse ao longo do eixo projetivo;
- (ii) a existência de um ponto regular de $\mathbb{L}_\alpha$ sobre o eixo projetivo, o qual é um equilíbrio do tipo sela-nó do campo de Lie-Cartan com variedade central transversal ao eixo projetivo;
- (iii) o contato quadrático das curvas $M = 0$ e $N = 0$ no ponto umbílico.

Note que as folheações principais em torno do ponto umbílico D_{23} são topologicamente distintas, o que difere dos outros pontos umbílicos discutidos até o momento. Uma delas, localizada na *folha de paralelos* possui duas separatrizes umbílicas e dois setores hiperbólicos. A outra, localizada na *folha de sela-nó* possui três separatrizes umbílicas, um setor parabólico e dois setores hiperbólicos.

A bifurcação D_{23} é, portanto, uma transição entre a situação em que temos dois pontos umbílicos Darbouxianos, um do tipo D_2 e outro do tipo D_3 para a situação em que não há pontos umbílicos. Veja figura 1.3 na qual as folheações máxima e mínima foram desenhadas separadamente.

Proposição 1.3.7 ([6], proposição 4.2.4). *Suponha que $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$, satisfaz a condição D_{23} em um ponto umbílico $\mathbf{p}$. Então, existe uma vizinhança V de $\mathbf{p}$, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de α e uma função $\mathcal{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} tal que:*

- (i) $d\mathcal{B}(\alpha) \neq 0$,
- (ii) $\mathcal{B}(\beta) > 0$ se, e somente se, β não possui pontos umbílicos em V ,
- (iii) $\mathcal{B}(\beta) < 0$ se, e somente se, β possui dois pontos umbílicos Darbouxianos de tipos D_2 e D_3 ,
- (iv) $\mathcal{B}(\beta) = 0$ se, e somente se, β possui um único ponto umbílico em V , o qual é do tipo D_{23} .

A configuração principal de β em torno de $\mathbf{p}$ é como na figura 1.3, direita, esquerda e centro, respectivamente.

Figura 1.3: Bifurcação do ponto umbílico D_{23} . Os pontos umbílicos D_2 e D_3 colidem formando o ponto D_{23} , e depois não há pontos umbílicos. Fixada uma orientação, as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal da folheação principal mínima, $\mathcal{F}_{1,\alpha}$ (respectivamente máxima, $\mathcal{F}_{2,\alpha}$).

Capítulo 2

Configuração Principal sobre Superfícies Suaves por Partes e Curva de Descontinuidade Plana

Sejam $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ duas superfícies em $\mathbb{R}^3$, ambas de classe C^∞ tendo como bordo comum uma curva plana δ . Considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ a superfície obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo comum δ . Neste capítulo serão estudadas as linhas de curvatura principal da superfície seccionalmente suave (ou suave por partes), $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^- \subset \mathbb{R}^3$, e da superfície suave, $\mathbf{S}_\varepsilon$, obtida através da ε -regularização de $\mathbf{S}$ ao longo da curva de descontinuidade δ , $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (veja definição 2.2.2). Suporemos inicialmente que δ é uma curva plana (contida no plano $v = 0$) e que $\mathbf{S}^\pm$ estão parametrizadas, sem perda de generalidade, por gráficos em uma vizinhança da origem.

Analisaremos três casos relativos à configuração principal da superfície suave por partes $\mathbf{S}$: quando a origem é um ponto de tangência quadrática, um ponto de cruzamento transversal (proposições 2.1.1 e 2.1.3) ou um ponto de dobra (definição 2.1.10). Na seção 2.1 apresentaremos e definiremos com precisão cada um desses casos antes de aplicarmos a regularização. Na seção 2.2 definiremos a ε -regularização e estudaremos seus efeitos nos três casos citados acima. Veremos que, sob certas condições (estabelecidas nos teoremas 2.2.6, 2.2.10 e 2.2.11), de tais pontos do bordo comum emergem, sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$, pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

2.1 Configuração das Linhas de Curvatura Principal de uma Superfície Suave por Partes

Nesta seção será apresentada a formulação do primeiro problema abordado neste trabalho. Trata-se do caso em que o bordo δ , comum às superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, é uma curva plana em $\mathbb{R}^3$. As proposições 2.1.1 e 2.1.3 estabelecem as condições para que a origem seja

um ponto de tangência quadrática ou um ponto de cruzamento transversal tanto para a superfície $\mathbf{S}^+$ quanto para a superfície $\mathbf{S}^-$.

2.1.1 1º Caso: Singularidade Quadrática

Sejam $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ duas superfícies em $\mathbb{R}^3$, ambas de classe C^∞ tendo como bordo uma curva plana que definiremos a seguir. Sem perda de generalidade, vamos tomar parametrizações de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ como gráficos em uma vizinhança da origem. Mais precisamente, na carta (u, v) definida em uma vizinhança da origem, consideremos as parametrizações $X^+(u, v) = (u, v, h^+(u, v))$ e $X^-(u, v) = (u, v, h^-(u, v))$ das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, respectivamente, onde $h^+, h^- \in C^\infty$ são dadas por

$$\begin{aligned} h^+(u, v) &= \frac{1}{2}k_1^+u^2 + k_3^+uv + \frac{1}{2}k_2^+v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}buv^2 + \frac{1}{2}cu^2v + \frac{1}{6}dv^3 + \\ &+ \frac{1}{24}Au^4 + \frac{1}{6}Bu^3v + \frac{1}{4}Cu^2v^2 + \frac{1}{6}Duv^3 + \frac{1}{24}Ev^4 + O(5), \end{aligned} \quad (2.1)$$

definida para $v > 0$, e

$$\begin{aligned} h^-(u, v) &= \frac{1}{2}k_1^-u^2 + k_3^-uv + \frac{1}{2}k_2^-v^2 + \frac{1}{6}\alpha u^3 + \frac{1}{2}\beta uv^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2v + \frac{1}{6}\rho v^3 + \\ &+ \frac{1}{24}A_1u^4 + \frac{1}{6}B_1u^3v + \frac{1}{4}C_1u^2v^2 + \frac{1}{6}D_1uv^3 + \frac{1}{24}E_1v^4 + O(5), \end{aligned} \quad (2.2)$$

definida para $v < 0$.¹

Vamos supor que $h^+(u, 0) = h^-(u, 0)$ para $v = 0$. Portanto, comparando os coeficientes de (2.1) e (2.2), para que $h^+(u, 0) = h^-(u, 0)$, devemos ter $k_1^+ = k_1^-$, $a = \alpha$ e $A = A_1$. Assim, considerando $k_1 = k_1^+ = k_1^-$, podemos reescrever (2.1) e (2.2), respectivamente, como

$$\begin{aligned} h^+(u, v) &= \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^+uv + \frac{1}{2}k_2^+v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}buv^2 + \frac{1}{2}cu^2v + \frac{1}{6}dv^3 + \\ &+ \frac{1}{24}Au^4 + \frac{1}{6}Bu^3v + \frac{1}{4}Cu^2v^2 + \frac{1}{6}Duv^3 + \frac{1}{24}Ev^4 + O(5), \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹Os sobrescritos “+” e “-” das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, bem como para suas respectivas parametrizações $X^+ = (u, v, h^+)$ e $X^- = (u, v, h^-)$, referem-se à parte superior (quando $v > 0$) e à parte inferior (quando $v < 0$) do plano uv .

definida para $v \geq 0$, e

$$\begin{aligned} h^-(u, v) &= \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^-uv + \frac{1}{2}k_2^-v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}\beta uv^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2v + \frac{1}{6}\rho v^3 + \\ &+ \frac{1}{24}Au^4 + \frac{1}{6}B_1u^3v + \frac{1}{4}C_1u^2v^2 + \frac{1}{6}D_1uv^3 + \frac{1}{24}E_1v^4 + O(5), \end{aligned} \quad (2.4)$$

definida para $v \leq 0$.

A curva parametrizada por $\delta(u) = (u, 0, h^+(u, 0)) = (u, 0, h^-(u, 0))$, contida no plano $v = 0$, é o *bordo comum* das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, onde $\boldsymbol{\delta} = \{\delta(u), u \in \mathbb{R}\}$.

A seguir calcularemos os coeficientes das formas fundamentais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ na carta (u, v) , os quais serão úteis, posteriormente, na descrição da equação diferencial das linhas de curvatura destas superfícies.

Para a superfície $\mathbf{S}^+$, considerando a parametrização $X^+(u, v) = (u, v, h^+(u, v))$ e sendo h^+ como em (2.3) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^+}{\partial u} &= k_1u + k_3^+v + \frac{1}{2}au^2 + cuv + \frac{1}{2}bv^2 + \frac{1}{6}Au^3 + \frac{1}{2}Bu^2v + \frac{1}{2}Cuv^2 + \frac{1}{6}Dv^3 + O(4), \\ \frac{\partial h^+}{\partial v} &= k_3^+u + k_2^+v + \frac{1}{2}cu^2 + buv + \frac{1}{2}dv^2 + \frac{1}{6}Bu^3 + \frac{1}{2}Cu^2v + \frac{1}{2}Duv^2 + \frac{1}{6}Ev^3 + O(4), \\ \frac{\partial^2 h^+}{\partial u^2} &= k_1 + au + cv + \frac{1}{2}Au^2 + Buv + \frac{1}{2}Cv^2 + O(3), \\ \frac{\partial^2 h^+}{\partial u \partial v} &= k_3^+ + cu + bv + \frac{1}{2}Bu^2 + Cuv + \frac{1}{2}Dv^2 + O(3), \\ \frac{\partial^2 h^+}{\partial v^2} &= k_2^+ + bu + dv + \frac{1}{2}Cu^2 + Duv + \frac{1}{2}Ev^2 + O(3). \end{aligned}$$

O vetor normal (não unitário) a $\mathbf{S}^+$ é dado por:

$$\mathcal{N}^+(u, v) = \left(\frac{\partial X^+}{\partial u} \wedge \frac{\partial X^+}{\partial v} \right) (u, v) = \left(-\frac{\partial h^+}{\partial u}, -\frac{\partial h^+}{\partial v}, 1 \right). \quad (2.5)$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X^+ expressos na carta (u, v) são:

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial X^+}{\partial u}, \frac{\partial X^+}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h^+}{\partial u} \right), \left(1, 0, \frac{\partial h^+}{\partial u} \right) \right\rangle = 1 + k_1^2u^2 + 2k_1k_3^+uv + \\ &+ (k_3^+)^2v^2 + k_1au^3 + (2k_3^+c + k_1b)uv^2 + (2k_1c + k_3^+a)u^2v + k_3^+bv^3 + O(4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \left\langle \frac{\partial X^+}{\partial u}, \frac{\partial X^+}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h^+}{\partial u}\right), \left(0, 1, \frac{\partial h^+}{\partial v}\right) \right\rangle = k_1 k_3^+ u^2 + \left((k_3^+)^2 + k_1 k_2 \right) uv + \\
&+ k_2 k_3^+ v^2 + \left(\frac{1}{2} k_1 c + \frac{1}{2} k_3^+ a \right) u^3 + \left(\frac{3}{2} k_3^+ c + k_1 b + \frac{1}{2} k_2 a \right) u^2 v + \\
&+ \left(\frac{3}{2} k_3^+ b + \frac{1}{2} k_1 d + k_2 c \right) uv^2 + \left(\frac{1}{2} k_3^+ d + \frac{1}{2} k_2 b \right) v^3 + O(4),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
G &= \left\langle \frac{\partial X^+}{\partial v}, \frac{\partial X^+}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \left(0, 1, \frac{\partial h^+}{\partial v}\right), \left(0, 1, \frac{\partial h^+}{\partial v}\right) \right\rangle = 1 + k_3^2 u^2 + 2k_2 k_3 uv + \\
&+ k_2^2 v^2 + k_3^+ cu^3 + (k_3^+ d + 2k_2 b) uv^2 + (2k_3^+ b + k_2 c) u^2 v + k_2 dv^3 + O(4).
\end{aligned}$$

Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de X^+ expressos na carta (u, v) são dados por $\frac{e}{|\mathcal{N}^+|}$, $\frac{f}{|\mathcal{N}^+|}$ e $\frac{g}{|\mathcal{N}^+|}$, onde $\mathcal{N}^+$ é o vetor normal definido em (2.5) e

$$\begin{aligned}
e &= \left\langle \frac{\partial^2 X^+}{\partial u^2}, \mathcal{N}^+ \right\rangle = k_1 + au + cv + \frac{1}{2} Au^2 + Buv + \frac{1}{2} Cv^2 + O(3), \\
f &= \left\langle \frac{\partial^2 X^+}{\partial u \partial v}, \mathcal{N}^+ \right\rangle = k_3^+ + cu + bv + \frac{1}{2} Bu^2 + Cuv + \frac{1}{2} Dv^2 + O(3), \\
g &= \left\langle \frac{\partial^2 X^+}{\partial v^2}, \mathcal{N}^+ \right\rangle = k_2^+ + bu + dv + \frac{1}{2} Cu^2 + Duv + \frac{1}{2} Ev^2 + O(3).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Para a superfície $\mathbf{S}^-$, considerando a parametrização $X^-(u, v) = (u, v, h^-(u, v))$ e sendo h^- como em (2.4) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^-}{\partial u} &= k_1 u + k_3^- v + \frac{1}{2} au^2 + \gamma uv + \frac{1}{2} \beta v^2 + \frac{1}{6} Au^3 + \frac{1}{2} B_1 u^2 v + \frac{1}{2} C_1 uv^2 + \frac{1}{6} D_1 v^3 + O(4), \\
\frac{\partial h^-}{\partial v} &= k_3^- u + k_2^- v + \frac{1}{2} \gamma u^2 + \beta uv + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{6} B_1 u^3 + \frac{1}{2} C_1 u^2 v + \frac{1}{2} D_1 uv^2 + \frac{1}{6} E_1 v^3 + O(4), \\
\frac{\partial^2 h^-}{\partial u^2} &= K_1 + au + \gamma v + \frac{1}{2} Au^2 + B_1 uv + \frac{1}{2} C_1 v^2 + O(3), \\
\frac{\partial^2 h^-}{\partial u \partial v} &= k_3^- + \gamma u + \beta v + \frac{1}{2} B_1 u^2 + C_1 uv + \frac{1}{2} D_1 v^2 + O(3), \\
\frac{\partial^2 h^-}{\partial v^2} &= k_2^- + \beta u + \rho v + \frac{1}{2} C_1 u^2 + D_1 uv + \frac{1}{2} E_1 v^2 + O(3).
\end{aligned}$$

O vetor normal (não unitário) a $\mathbf{S}^-$ é dado por:

$$\mathcal{N}^-(u, v) = \left(\frac{\partial X^-}{\partial u} \wedge \frac{\partial X^-}{\partial v} \right) (u, v) = \left(-\frac{\partial h^-}{\partial u}, -\frac{\partial h^-}{\partial v}, 1 \right). \quad (2.8)$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X^- expressos na carta (u, v) são:

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial X^-}{\partial u}, \frac{\partial X^-}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h^-}{\partial u} \right), \left(1, 0, \frac{\partial h^-}{\partial u} \right) \right\rangle = 1 + \lambda^2 u^2 + 2\lambda k_3^+ uv + \\ &\quad + \left(k_3^+ \right)^2 v^2 + k_1 a u^3 + \left(2k_3^- \gamma + k_1 \beta \right) uv^2 + \left(2k_1 \gamma + k_3^- \alpha \right) u^2 v + k_3^- \beta v^3 + O(4), \\ F &= \left\langle \frac{\partial X^-}{\partial u}, \frac{\partial X^-}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h^-}{\partial u} \right), \left(0, 1, \frac{\partial h^-}{\partial v} \right) \right\rangle = \lambda k_3^- u^2 + \left(\left(k_3^- \right)^2 + k_1 k_2^- \right) uv + \\ &\quad + k_2^- k_3^- v^2 + \left(\frac{1}{2} k_1 \gamma + \frac{1}{2} k_3^- a \right) u^3 + \left(\frac{3}{2} k_3^- \gamma + k_1 \beta + \frac{1}{2} k_2^- a \right) u^2 v + \\ &\quad + \left(\frac{3}{2} k_3^- \beta + \frac{1}{2} k_1 \rho + k_2^- \gamma \right) uv^2 + \left(\frac{1}{2} k_3^- \rho + \frac{1}{2} k_2^- \beta \right) v^3 + O(4), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} G &= \left\langle \frac{\partial X^-}{\partial v}, \frac{\partial X^-}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \left(0, 1, \frac{\partial h^-}{\partial v} \right), \left(0, 1, \frac{\partial h^-}{\partial v} \right) \right\rangle = 1 + \left(k_3^- \right)^2 u^2 + 2k_2^- k_3^- uv + \\ &\quad + \left(k_2^- \right)^2 v^2 + k_3^- \gamma u^3 + \left(k_3^- \rho + 2k_2^- \beta \right) uv^2 + \left(2k_3^- \beta + k_2^- \gamma \right) u^2 v + k_2^- \rho v^3 + O(4). \end{aligned}$$

Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de X^- expressos na carta (u, v) são dados por $\frac{e}{|\mathcal{N}^-|}$, $\frac{f}{|\mathcal{N}^-|}$ e $\frac{g}{|\mathcal{N}^-|}$, onde $\mathcal{N}^-$ é o vetor normal definido em (2.8) e

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{\partial^2 X^-}{\partial u^2}, \mathcal{N}^- \right\rangle = k_1 + au + \gamma v + \frac{1}{2} A u^2 + B_1 uv + \frac{1}{2} C_1 v^2 + O(3), \\ f &= \left\langle \frac{\partial^2 X^-}{\partial u \partial v}, \mathcal{N}^- \right\rangle = k_3^- + \gamma u + \beta v + \frac{1}{2} B_1 u^2 + C_1 uv + \frac{1}{2} D_1 v^2 + O(3), \\ g &= \left\langle \frac{\partial^2 X^-}{\partial v^2}, \mathcal{N}^- \right\rangle = k_2^- + \beta u + \rho v + \frac{1}{2} C_1 u^2 + D_1 uv + \frac{1}{2} E_1 v^2 + O(3). \end{aligned} \quad (2.10)$$

A proposição 2.1.1, abaixo, estabelece as condições para que as linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}^+$ sejam tangentes quadraticamente ou cruzem transversalmente o bordo δ na vizinhança da origem.

Proposição 2.1.1. *Considere a superfície $\mathbf{S}^+$ parametrizada, em uma vizinhança da origem, por $X^+(u, v) = (u, v, h^+(u, v))$, sendo $h^+(u, v) = \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^+uv + \frac{1}{2}k_2^+v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}buv^2 + \frac{1}{2}cu^2v + \frac{1}{6}dv^3 + O(4)$, e a curva bordo parametrizada por δ . Então, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^+$ são transversais a δ na origem $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^+ \neq 0$. Supondo que $k_2^+ < k_1$, uma linha de curvatura principal máxima tem contato quadrático com δ em $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^+ = 0$ e $c \neq 0$. Este contato é interno (respectivamente externo) se $c > 0$ (respectivamente $c < 0$). Veja figura 2.1.*

Figura 2.1: Configuração principal de $\mathbf{S}^+$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $c > 0$ e externa para $c < 0$. Supondo-se $k_2^+ < k_1$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

Demonstração. Seja $X^+(u, v) = (u, v, h^+(u, v))$ a parametrização da superfície $\mathbf{S}^+$, onde

$$\begin{aligned} h^+(u, v) = & \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^+uv + \frac{1}{2}k_2^+v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}buv^2 + \frac{1}{2}cu^2v + \frac{1}{6}dv^3 + \\ & + \frac{1}{24}Au^4 + \frac{1}{6}Bu^3v + \frac{1}{4}Cu^2v^2 + \frac{1}{6}Duv^3 + \frac{1}{24}Ev^4 + O(5). \end{aligned}$$

Lembremos que a equação diferencial das linhas de curvatura é dada por:

$$(Fg - Gf)dv^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)du^2 = 0. \quad (2.11)$$

Das expressões (2.6) e (2.7) obtemos que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais na origem $(0, 0)$ são:

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1, & F(0, 0) &= 0, & G(0, 0) &= 1, \\ e(0, 0) &= k_1, & f(0, 0) &= k_3^+, & g(0, 0) &= k_2^+. \end{aligned}$$

Assim, as direções principais de $\mathbf{S}^+$ em $(0, 0)$ satisfazem

$$(-k_3^+)dv^2 + (k_2^+ - k_1)dudv + (k_3^+)du^2 = 0. \quad (2.12)$$

e o vetor $T(0)$ é uma direção principal de (2.12) se, e somente se, $k_3^+ = 0$ ($T(u)$ é o vetor tangente unitário da curva $u \mapsto \delta(u)$).

Próximo da origem, a equação (2.11) torna-se:

$$\begin{aligned} & \left[-cu - bv - \frac{1}{2}Bu^2 + \left(-C + (k_2^+)^2 k_1 \right) uv - \frac{1}{2}Dv^2 + O(3) \right] dv^2 + \left[k_2^+ - k_1 + \right. \\ & + (b - a)u + (d - c)v + \left(\frac{1}{2}C + k_1^2 k_2^+ - \frac{1}{2}A \right) u^2 + (D - B)uv + \\ & + \left(\frac{1}{2}E - (k_2^+)^2 k_1 - \frac{1}{2}C \right) v^2 + O(3) \left. \right] dudv + \left[cu + bv + \frac{1}{2}Bu^2 + \right. \\ & + \left(C - k_1^2 k_2^+ \right) uv + \frac{1}{2}Dv^2 + O(3) \left. \right] du^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando o “Método dos Coeficientes a Determinar”, temos que na vizinhança da origem, as linhas de curvatura principal máxima são soluções de (2.13) e descritas por:

$$v(u) = \frac{c}{2(k_1 - k_2^+)}u^2 + \frac{c(3b - 2a) + B(k_1 - k_2^+)}{6(k_1 - k_2^+)^2}u^3 + O(4), \quad v \geq 0.$$

Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 2.1.2. Na proposição 2.1.1 mudamos a orientação de $\mathbf{S}^+$ se considerarmos $k_2^+ > k_1$. Logo, supondo que $k_3^+ = 0$, uma linha de curvatura principal mínima terá contato quadrático com δ em $\delta(0)$ interno (respectivamente externo) se $c < 0$ (respectivamente $c > 0$).

A proposição seguinte é a análoga da proposição 2.1.1 para a superfície $\mathbf{S}^-$.

Proposição 2.1.3. Considere a superfície $\mathbf{S}^-$ parametrizada, em uma vizinhança da origem, por $X^-(u, v) = (u, v, h^-(u, v))$, sendo $h^-(u, v) = \frac{1}{2}k_1 u^2 + k_3^- uv + \frac{1}{2}k_2^- v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}\beta uv^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2 v + \frac{1}{6}\rho v^3 + O(4)$, e a curva bordo parametrizada por δ . Então, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^-$ são transversais a δ na origem $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^- \neq 0$. Supondo que $k_1 < k_2^-$, uma linha de curvatura principal mínima tem contato quadrático com δ em $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^- = 0$ e $\gamma \neq 0$. Este contato é interno (respectivamente externo) se $\gamma > 0$ (respectivamente $\gamma < 0$). Veja figura 2.2.

Demonstração. Seja $X^-(u, v) = (u, v, h^-(u, v))$ a parametrização da superfície $\mathbf{S}^-$, onde

$$\begin{aligned} h^-(u, v) = & \frac{1}{2}k_1 u^2 + k_3^- uv + \frac{1}{2}k_2^- v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}\beta uv^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2 v + \frac{1}{6}\rho v^3 + \\ & + \frac{1}{24}Au^4 + \frac{1}{6}B_1 u^3 v + \frac{1}{4}C_1 u^2 v^2 + \frac{1}{6}D_1 uv^3 + \frac{1}{24}E_1 v^4 + O(5). \end{aligned}$$

Figura 2.2: Configuração principal de $\mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $\gamma > 0$ e externa para $\gamma < 0$. Supondo-se $k_1 < k_2^-$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

Das expressões (2.9) e (2.10) obtemos que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais na origem $(0, 0)$ são dados por:

$$\begin{aligned} E(0, 0) &= 1, & F(0, 0) &= 0, & G(0, 0) &= 1, \\ e(0, 0) &= k_1, & f(0, 0) &= k_3^-, & g(0, 0) &= k_2^-. \end{aligned}$$

Assim, as direções principais de $\mathbf{S}^-$ em $(0, 0)$ satisfazem

$$(-k_3^-) dv^2 + (k_2^- - k_1) dudv + (k_3^-) du^2 = 0. \quad (2.14)$$

e o vetor $T(0)$ é uma direção principal de (2.14) se, e somente se, $k_3^- = 0$ ($T(u)$ é o vetor tangente unitário da curva $u \mapsto \delta(u)$).

Próximo da origem, a equação (2.11) torna-se:

$$\begin{aligned} &\left[-\gamma u - \beta v - \frac{1}{2} B_1 u^2 + \left(-C_1 + (k_2^-)^2 k_1 \right) uv - \frac{1}{2} D_1 v^2 + O(3) \right] dv^2 + \left[k_2^- - k_1 + \right. \\ &+ (\beta - a) u + (\rho - \gamma) v + \left(\frac{1}{2} C_1 + k_1^2 k_2^- - \frac{1}{2} A \right) u^2 + (D_1 - B_1) uv + \\ &+ \left(\frac{1}{2} E - (k_2^-)^2 k_1 - \frac{1}{2} C \right) v^2 + O(3) \left. \right] dudv + \left[\gamma u + \beta v + \frac{1}{2} B_1 u^2 + \right. \\ &+ \left(C_1 - k_1^2 k_2^- \right) uv + \frac{1}{2} D_1 v^2 + O(3) \left. \right] du^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pelo “Método dos Coeficientes a Determinar” temos que na vizinhança da origem as linhas de curvatura principal mínima são soluções de (2.15) e descritas por:

$$v(u) = \frac{\gamma}{2(k_1 - k_2^-)} u^2 + \frac{\gamma(3\beta - 2a) + B_1(k_1 - k_2^-)}{6(k_1 - k_2^-)^2} u^3 + O(4), \quad v \leq 0.$$

Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 2.1.4. *Na proposição 2.1.3 mudamos a orientação de $\mathbf{S}^-$ se considerarmos $k_1 > k_2^-$. Logo, supondo que $k_3^- = 0$, uma linha de curvatura principal máxima terá contato quadrático com δ em $\delta(0)$ interno (respectivamente externo) se $\gamma < 0$ (respectivamente $\gamma > 0$).*

Considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ como sendo a superfície sem bordo obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo δ . Observe que $\mathbf{S}$ é suave no complementar da curva bordo comum δ , de classe C^0 ao longo de δ e diferenciável, isto é, tem plano tangente, apenas na origem $\delta(0)$, onde $\delta = \{\delta(u), u \in \mathbb{R}\}$. A curva δ será também chamada *curva de descontinuidade* da superfície $\mathbf{S}$.

Supondo que $k_3^+ = k_3^- = 0$, as folheações principais de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, em uma vizinhança da origem, são descritas pelas proposições 2.1.1 e 2.1.3, respectivamente (veja figuras 2.1 e 2.2). As figuras 2.3 e 2.4 ilustram as possíveis configurações topológicas de $\mathbf{S}$.

Veremos que, para uma função de regularização específica, a configuração principal suave por partes é deformada em uma suave na qual surgem pontos umbílicos. As tangências quadráticas das folhas suaves por partes da folheação principal da superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ darão lugar a configurações principais locais equivalentes àquelas das vizinhanças dos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 .

Sob certas condições, estabelecidas no teorema 2.2.6, após a regularização da superfície $\mathbf{S}$, na figura 2.3 a configuração principal de (i) será equivalente à do umbílico D_3 , as configurações principais de (ii) e de (iii) serão equivalentes às dos umbílicos D_1 e D_3 e a configuração principal de (iv) será equivalente à do umbílico D_1 . Por outro lado, as configurações principais da figura 2.4 não originarão umbílicos após a regularização (veja observação 2.2.5).

As figuras 2.3 e 2.4 abaixo ilustram as possíveis configurações topológicas de $\mathbf{S}$:²

(i) $c > 0$ e $\gamma > 0$

(ii) $c > 0$ e $\gamma < 0$

(iii) $c < 0$ e $\gamma > 0$

(iv) $c < 0$ e $\gamma < 0$

Figura 2.3: Configurações principais suaves por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $k_2^+ < k_1 < k_2^-$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

²Para esboçar as linhas de curvatura de $\mathbf{S}$ basta analisar o sinal de c na proposição 2.1.1 e de γ na proposição 2.1.3, observando as possibilidades $(k_1 < k_2^+ \text{ e } k_1 < k_2^-)$ e $k_2^+ < k_1 < k_2^-$.

Figura 2.4: Configurações principais suaves por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $k_1 < k_2^+$ e $k_1 < k_2^-$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

2.1.2 2º Caso: Ponto de Cruzamento Transversal

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos sobre δ de singularidades tangenciais. Se $\delta(u_0) \in \delta \setminus \mathcal{C}$, temos que as linhas de curvaturas principais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo comum δ em $\delta(u_0)$. Portanto, fica bem definido o ângulo $w(u_0) \in (0, \pi)$ entre a linha de curvatura principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ e a linha de curvatura principal mínima da superfície $\mathbf{S}^-$. Considere também $\theta^+(u_0)$ (respectivamente $\theta^-(u_0)$) como sendo o ângulo entre o eixo- u e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) transversal à curva δ em $\delta(u_0)$ (veja figuras 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8). Neste contexto, podemos introduzir as seguintes definições 2.1.5 e 2.1.6, abaixo:

Definição 2.1.5. Seja $\delta(u_0) \in \delta \setminus \mathcal{C}$ e suponha $\theta^+(u_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\theta^-(u_0) \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right)$. O ponto $\delta(u_0)$ será chamado:

- (i) um **ponto de deslizamento** se $\omega(u_0) = (\theta^+ - \theta^-)(u_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ou equivalentemente, se $\tan(\theta^+(u_0)) \cdot \tan(\theta^-(u_0)) > -1$ (figura 2.5);

Figura 2.5: $\delta(u_0)$ é um ponto de deslizamento para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.

- (ii) um **ponto de costura** se $\omega(u_0) = (\theta^+ - \theta^-)(u_0) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, ou equivalentemente, se $\tan(\theta^+(u_0)) \cdot \tan(\theta^-(u_0)) < -1$ (figura 2.6);

Figura 2.6: $\delta(u_0)$ é um ponto de costura para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.

- (iii) um **ponto de transição** se $\omega(u_0) = (\theta^+ - \theta^-)(u_0) = \frac{\pi}{2}$, ou equivalentemente, se $\tan(\theta^+(u_0)) \cdot \tan(\theta^-(u_0)) = -1$ (figura 2.7).

Figura 2.7: $\delta(u_0)$ é um ponto de transição para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) e máximas (linhas contínuas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.

Definição 2.1.6. *Seja $\delta(u_0) \in \delta \setminus \mathcal{C}$. O ponto $\delta(u_0)$ será também chamado um **ponto de costura** se $\omega(u_0) = (\theta^+ - \theta^-)(u_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\theta^+(u_0) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (figura 2.8, esquerda) ou se $\omega(u_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\theta^-(u_0) \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right]$ (figura 2.8, direita).*

Figura 2.8: $\delta(u_0)$ é um ponto de costura para as linhas de curvatura principais mínimas (linhas tracejadas) das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.

A nomenclatura das definições 2.1.5 e 2.1.6, acima, é a mesma adotada por Filippov em [3] e nos trabalhos de Sotomayor e Teixeira [12] e Sotomayor e Machado [11].

Observação 2.1.7. *Como as linhas de curvatura principal de uma superfície encontram-se ortogonalmente segue, pela definição 2.1.5, que se $\delta(u_0)$ é um ponto de costura (respectivamente deslizamento) para as linhas principais mínimas de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$, então $\delta(u_0)$ será um ponto de deslizamento (respectivamente costura) para as linhas principais máximas de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$. Já o ponto de costura da definição 2.1.6 é ponto de costura tanto para as linhas de curvatura principais mínimas quanto para as linhas de curvatura principais máximas das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.*

Vimos na proposição 2.1.1 (respectivamente 2.1.3) que as linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) são transversais ao bordo comum δ em uma vizinhança da origem $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^+ \neq 0$ (respectivamente $k_3^- \neq 0$).

Suponhamos que $k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0$. Usando a mesma notação das definições 2.1.5 e 2.1.6, vamos supor $u_0 = 0$ e $\theta_0^+ := \theta^+(0)$ (respectivamente $\theta_0^- := \theta^-(0)$) o ângulo entre o eixo- u e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) transversal à curva δ na origem (veja figura 2.9).

Uma condição necessária para a existência de pontos umbílicos sobre a regularização da superfície $\mathbf{S}$ é que tenhamos sobre δ um ponto de transição. Neste ponto, por definição, as linhas de curvatura principais mínimas (e máximas) de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são ortogonais.

A proposição 2.1.8, abaixo, estabelece as condições para que a origem $\delta(0)$ seja um ponto de transição.

Proposição 2.1.8. *Sob as mesmas condições acima, considere a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ e suponha que $k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0$. Então,*

$$\delta(0) \text{ é ponto de transição} \iff \frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-} \quad e \quad k_3^+ \cdot k_3^- < 0. \quad (2.16)$$

Veja figura 2.9.

Figura 2.9: Exemplos de ângulos formados entre as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) e as linhas principais máximas (linhas contínuas) de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$ com o eixo- u .

Demonstração. Para o caso em que $k_3^+ \neq 0$ e $k_3^- \neq 0$ as linhas de curvatura principal de ambas as superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo δ em uma vizinhança da origem. O primeiro passo é determinar as curvaturas principais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ em $(u, v) = (0, 0)$ e, posteriormente, usando o sistema (1.3) do capítulo 1, encontrar as condições para que $\omega_0 = \pi$.

No que segue, $k_{(1,+)} \leq k_{(2,+)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^+$ em $(0, 0)$ e $k_{(1,-)} \leq k_{(2,-)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^-$ em $(0, 0)$ ³. Das expressões de

³ Lembremos que, em termos dos coeficientes das formas fundamentais, as curvaturas Gaussiana ($\mathcal{K}$) e Média ($\mathcal{H}$) são dadas respectivamente por:

$$\mathcal{K} = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{|\mathcal{N}|^2} \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad \mathcal{H} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

onde $k_1 \leq k_2$ são as curvaturas principais e $\mathcal{N}$ o vetor normal à superfície.

Portanto, k_1 e k_2 podem ser expressas por:

$$k_1 = \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}, \quad k_2 = \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}.$$

E, F, G, e, f e g encontradas em (2.6), (2.7), (2.9) e (2.10) temos:

$$\begin{aligned} k_{(1,+)}(0,0) &= \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2^+ - \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right), \\ k_{(2,+)}(0,0) &= \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right), \\ k_{(1,-)}(0,0) &= \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2^- - \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right), \\ k_{(2,-)}(0,0) &= \frac{1}{2} \left(k_1 + k_2^- + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Do sistema (1.3) do capítulo 1 temos que as direções principais, relativas à superfície $\mathbf{S}^+$ ($v \geq 0$), são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{e}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(i,+)}E \right) du + \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(i,+)}F \right) dv = 0 \\ \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(i,+)}F \right) du + \left(\frac{g}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(i,+)}G \right) dv = 0 \end{cases}, \quad (2.18)$$

onde $k_{(i,+)} (i = 1, 2)$ são as curvaturas principais determinadas em (2.17) e $\mathcal{N}^+$ o vetor normal à superfície $\mathbf{S}^+$ definido em (2.5). Agora, substituindo em (2.18) as expressões de $E(0,0), F(0,0), G(0,0), e(0,0), f(0,0)$ e $g(0,0)$ dadas por (2.6) e (2.7) e observando que $|\mathcal{N}^+(0,0)| = 1$ encontramos dois sistemas:

Sistema que determina a direção principal mínima em $\mathbf{S}^+$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right) du + k_3^+ dv = 0 \\ k_3^+ du + \frac{1}{2} \left(k_2^+ - k_1 + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (2.19)$$

Sistema que determina a direção principal máxima em $\mathbf{S}^+$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_1 - k_2^+ - \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right) du + k_3^+ dv = 0 \\ k_3^+ du + \frac{1}{2} \left(k_2^+ - k_1 - \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (2.20)$$

Analogamente ao que foi feito para a superfície $\mathbf{S}^+$ temos que as direções principais,

relativas à superfície $\mathbf{S}^-$ ($v \leq 0$), são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{e}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(i,-)} E \right) du + \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(i,-)} F \right) dv = 0 \\ \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(i,-)} F \right) du + \left(\frac{g}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(i,-)} G \right) dv = 0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

onde $k_{(i,-)}$ ($i = 1, 2$) são as curvaturas principais determinadas em (2.17) e $\mathcal{N}^-$ o vetor normal à superfície $\mathbf{S}^-$ definido em (2.8). Agora, substituindo em (2.21) as expressões de $E(0,0)$, $F(0,0)$, $G(0,0)$, $e(0,0)$, $f(0,0)$ e $g(0,0)$ dadas por (2.9) e (2.10) e observando que $|\mathcal{N}^-(0,0)| = 1$ temos dois sistemas:

Sistema que determina a direção principal mínima em $\mathbf{S}^-$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_1 - k_2^- + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right) du + k_3^- dv = 0 \\ k_3^- du + \frac{1}{2} \left(k_2^- - k_1 + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (2.22)$$

Sistema que determina a direção principal máxima em $\mathbf{S}^-$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_1 - k_2^- - \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right) du + k_3^- dv = 0 \\ k_3^- du + \frac{1}{2} \left(k_2^- - k_1 - \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que θ_0^+ (respectivamente θ_0^-) é o ângulo entre o eixo- u positivo e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$), temos que $\tan(\theta_0^+) = dv/du$ (respectivamente $\tan(\theta_0^-) = dv/du$) é dada por qualquer uma das equações do sistema (2.19) (respectivamente (2.22)) acima.

Observe que $\omega_0 = \pi$ se, e somente se, $\tan(\theta_0^+) \cdot \tan(\theta_0^-) = -1$.

Da primeira equação do sistema (2.19) e do sistema (2.22) (também poderíamos ter escolhido a segunda equação destes sistemas) obtemos que

$$\begin{aligned} \tan(\theta_0^+) &= \left(\frac{dv}{du} \right)^+ = -\frac{k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}}{2k_3^+}, \\ \tan(\theta_0^-) &= \left(\frac{dv}{du} \right)^- = -\frac{k_1 - k_2^- + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2}}{2k_3^-}. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a condição (2.16) encontrada é a mesma para ambas equações dos sistemas (2.19) e (2.22) escolhidas.

Portanto, $\tan(\theta_0^+) \cdot \tan(\theta_0^-) = -1$ se, e somente se,

$$\left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \cdot \left(k_1 - k_2^- + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4(k_3^-)^2}\right) = -4k_3^+k_3^-. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) é satisfeita se $\frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-}$ e $k_3^+ \cdot k_3^- < 0$.

De fato, observe que

$$\frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-} \iff k_3^- = \frac{k_3^+ (k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_1}$$

logo, substituindo $k_3^- = \frac{k_3^+ (k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_1}$ no lado esquerdo da equação (2.24) e considerando que $k_3^+ \cdot k_3^- < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \left(k_1 - k_2^- + \sqrt{(k_2^- - k_1)^2 + 4\left(\frac{k_3^+ (k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_1}\right)^2}\right) \\ &= \left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \left(k_1 - k_2^- + \sqrt{\frac{(k_2^- - k_1)^2 \left[(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2\right]}{(k_2^+ - k_1)^2}}\right) \\ &= \left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \left(k_1 - k_2^- + \left|\frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1}\right| \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \left(k_1 - k_2^- - \frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \\ &= \frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \left[\left(k_1 - k_2^+ + \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \left[\left(k_1 - k_2^+ - \sqrt{(k_2^+ - k_1)^2 + 4(k_3^+)^2}\right) \right] \right] \\ &= \frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \left[(k_1 - k_2^+)^2 - (k_2^+ - k_1)^2 - 4(k_3^+)^2 \right] = -4k_3^+ \left[k_3^+ \left(\frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \right) \right] = -4k_3^+k_3^-. \\ &\stackrel{(*)}{=} \left| \frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \right| = -\frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \text{ pois, por hipótese, } k_3^+ \cdot k_3^- < 0 \text{ e } k_3^- = k_3^+ \left(\frac{k_2^- - k_1}{k_2^+ - k_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto a equação (2.24) é verificada e isto completa a demonstração da proposição. $\square$

Estabelecemos na proposição 2.1.8 as condições para que $\delta(0)$ seja um ponto de tran-

sição, no caso em que $k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0$. Vamos agora determinar as hipóteses para que $\delta(u)$ seja um ponto de costura quando $u > 0$ e um ponto de deslizamento quando $u < 0$ para as linhas de curvatura principal mínima (veja figura 2.10). Como acima, considere $\theta^+(u) \in [0, \pi/2)$ (respectivamente $\theta^-(u) \in [0, -\pi/2)$) o ângulo entre a linha principal mínima de $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) com o bordo δ no ponto $\delta(u)$ e $\omega(u) = (\theta^+ - \theta^-)(u)$.

Figura 2.10: A origem $\delta(0)$ é um ponto de transição e, para as linhas de curvatura principal mínima, $\delta(u)$ é ponto de costura se $u > 0$ e ponto de deslizamento se $u < 0$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

Proposição 2.1.9. Suponha que $k_3^+ < 0 < k_3^-$, $k_2^+ < k_1 < k_2^-$,

$$\frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-} \quad e \quad k_3^- > \frac{(k_1 - k_2^-) [\gamma (k_1 - k_2^-) + c (k_1 - k_2^-)]}{(a - b) (k_1 - k_2^-) + (a - \beta) (k_1 - k_2^+)}.$$

Então, para as linhas de curvatura principal mínima, $\delta(u)$ é um ponto de costura se $u > 0$ e de deslizamento se $u < 0$.

Demonstração. O primeiro passo é determinar as curvaturas principais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ em $(u, v) = (u, 0)$ e, posteriormente, usando o sistema (1.3) do capítulo 1, encontrar as condições para que $\delta(u)$ seja ponto de deslizamento para $u < 0$ e de costura para $u > 0$.

No que segue, $k_{(1,+)} \leq k_{(2,+)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^+$ em $(u, 0)$ e $k_{(1,-)} \leq k_{(2,-)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^-$ em $(u, 0)$. Usando as expressões de $E, F, G, e, f, g, \mathcal{N}^+$ e $\mathcal{N}^-$, respectivamente em (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), (2.5) e (2.8) determinamos $k_{(i,+)}(u, 0)$ e $k_{(i,-)}(u, 0)$, $i = 1, 2$.

Do sistema (1.3) do capítulo 1 temos que as direções principais mínimas, relativas à superfície $\mathbf{S}^+$ ($v \geq 0$), são soluções de:

$$\begin{cases} \left(\frac{e}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(1,+)} E \right) du + \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(1,+)} F \right) dv = 0 \\ \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(1,+)} F \right) du + \left(\frac{g}{|\mathcal{N}^+|} - k_{(1,+)} G \right) dv = 0 \end{cases}, \quad (2.25)$$

onde $k_{(1,+)}(u, 0)$ é curvatura principal mínima e $\mathcal{N}^+(u, 0)$ o vetor normal de $\mathbf{S}^+$ dado pela equação (2.5).

Analogamente para a superfície $\mathbf{S}^-$ ($v \leq 0$), temos que as direções principais mínimas são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{e}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(1,-)}E \right) du + \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(1,-)}F \right) dv = 0 \\ \left(\frac{f}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(1,-)}F \right) du + \left(\frac{g}{|\mathcal{N}^-|} - k_{(1,-)}G \right) dv = 0 \end{cases}, \quad (2.26)$$

onde $k_{(1,-)}(u, 0)$ é curvatura principal mínima e $\mathcal{N}^-(u, 0)$ o vetor normal de $\mathbf{S}^-$ dado pela equação (2.8).

Vamos definir a seguinte função:

$$\chi(u) := [\tan \theta^+(u)] [\tan \theta^-(u)] = \left(\frac{dv}{du} \right)^+ \left(\frac{dv}{du} \right)^-(u), \quad (2.27)$$

onde $\left(\frac{dv}{du} \right)^\pm$ foram obtidos dos sistemas (2.25) e (2.26).

Substituindo $k_3^+ = \frac{k_3^-(k_2^+ - k_1)}{k_2^- - k_1}$ (condição para que em $u = 0$ tenhamos um ponto

de transição) na expressão para χ em (2.27) obtemos $\chi(u) = -1 + \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u^2 + \dots$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = & - \left\{ \frac{k_3^- [(k_1 - k_2^-)(b - a) + (k_1 - k_2^+)(\beta - a)]}{2 (k_3^-)^3 (k_1 - k_2^+) [4 (k_3^-)^2 + (k_1 - k_2^-)^2]} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma (k_1 - k_2^+) (k_1 - k_2^-) + c (k_1 - k_2^-)^2}{2 (k_3^-)^3 (k_1 - k_2^+) [4 (k_3^-)^2 + (k_1 - k_2^-)^2]} \right\} \\ & \left\{ (k_1 - k_2^-) [4 (k_3^-)^2 + (k_1 - k_2^-)^2] + \sqrt{4 (k_3^-)^2 + (k_1 - k_2^-)^2} [(k_1 - k_2^-)^2 + 2 (k_3^-)^2] \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, se considerarmos $\mathcal{M}_1 < 0$, teremos:

- 1) $u > 0 \implies \chi(u) = -1 + \mathcal{M}_1 u + \dots < -1 \implies \delta(u)$ é ponto de costura;
- 2) $u < 0 \implies \chi(u) = -1 + \mathcal{M}_1 u + \dots > -1 \implies \delta(u)$ é ponto de deslizamento.

Como $k_3^- > 0$ e $k_2^+ < k_1 < k_2^-$, o denominador de $\mathcal{M}_1$ torna-se positivo. Fazendo um

estudo do sinal do numerador da função $\mathcal{M}_1$ na variável k_3^- concluímos o seguinte:

$$\mathcal{M}_1 < 0 \iff k_3^- > \frac{(k_1 - k_2^+) [\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_1 - k_2^-)]}{(a - b) (k_1 - k_2^-) + (a - \beta) (k_1 - k_2^+)}.$$

Isto completa a demonstração. $\square$

2.1.3 3º Caso: Ponto de Dobra

A última possibilidade a ser analisada é o caso em que $k_3^+ = 0$ e $k_3^- \neq 0$ (ou equivalentemente, $k_3^+ \neq 0$ e $k_3^- = 0$). Definimos esta situação a seguir.

Definição 2.1.10. [Ponto de Dobra] Um ponto sobre a curva bordo δ é um ponto de δ -dobra se é um ponto de tangência quadrática das linhas de curvatura da superfície S^+ (respectivamente da superfície S^-) com δ e um ponto de cruzamento transversal das linhas de curvatura da superfície S^- (respectivamente da superfície S^+) com δ .

As figuras 2.11, abaixo, são exemplos de pontos de δ -dobras.

Figura 2.11: Configuração principal suave por partes de $S = S^+ \cup \delta \cup S^-$ em uma vizinhança de um ponto de δ -dobra, considerando $k_2^+ < k_1$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

Observação 2.1.11. Para o caso em que $k_2^+ > k_1$, $k_3^+ = 0$ e $k_3^- \neq 0$, a configuração principal suave por partes da superfície S é topologicamente equivalente à da figura 2.11.

2.2 Regularização da Superfície S em uma Carta Local

Nesta seção definiremos a regularização da superfície suave por partes S ao longo da curva δ e especificaremos o tipo de função de transição usada. O resultado da regularização é uma superfície de classe C^∞ para a qual podemos aplicar a teoria clássica.

Definição 2.2.1. [Função de transição] Uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty$, é uma **função de transição** se $\phi'(t) > 0$, para $t \in (-1, 1)$ e $\phi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$. Veja figura 2.12.

Em [5], Garcia e Sotomayor definiram a regularização de superfícies em $\mathbb{R}^3$ usando uma função de transição específica. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a ε -regularização de uma superfície $\mathbf{S}$ é um mergulho de $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$ que coincide com a identidade exceto em uma ε -vizinhança tubular da curva δ e cuja imagem, $\mathbf{S}_\varepsilon$, é uma superfície suave (observando que $\mathbf{S}$ é suave somente no complementar da curva δ). Para nossos propósitos, vamos considerar a seguinte definição usando cartas locais.

Figura 2.12: Gráfico de uma função de transição ϕ .

Definição 2.2.2. [Regularização] Considere ϕ uma função de transição e $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ uma superfície sem bordo em $\mathbb{R}^3$ contendo uma curva de descontinuidade δ , sendo $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{S}^-$ e δ definidas anteriormente. Para $\varepsilon > 0$, a ϕ_ε -**regularização** de $\mathbf{S}$, denotada por $\mathbf{S}_\varepsilon$, é (não unicamente) definida por uma “soma” com peso ϕ_ε das parametrizações de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$. Mais precisamente, considerando $X^+(u, v) = (u, v, h^+(u, v))$ e $X^-(u, v) = (u, v, h^-(u, v))$ as parametrizações locais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, temos que $\mathbf{S}_\varepsilon$ é definida por $X(u, v, \varepsilon) = (u, v, h(u, v, \varepsilon))$ sendo

$$h(u, v, \varepsilon) = \phi_\varepsilon(v)h^+(u, v) + [1 - \phi_\varepsilon(v)]h^-(u, v),$$

onde $\phi_\varepsilon(v) = \phi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)$ e h^+ , h^- são, respectivamente, dadas pelas equações (2.3) e (2.4) da seção 2.1, as quais serão reescritas abaixo:

$$h^+(u, v) = \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^+uv + \frac{1}{2}k_2^+v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}buv^2 + \frac{1}{2}cu^2v + \frac{1}{6}dv^3 + \dots, \quad v \geq 0,$$

$$h^-(u, v) = \frac{1}{2}k_1u^2 + k_3^-uv + \frac{1}{2}k_2^-v^2 + \frac{1}{6}au^3 + \frac{1}{2}\beta uv^2 + \frac{1}{2}\gamma u^2v + \frac{1}{6}\rho v^3 + \dots, \quad v \leq 0.$$

Dizemos que ε é o *parâmetro de regularização* e para cada valor fixo de $\varepsilon > 0$, a superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ é chamada de *superfície regularizada*.

Denomina-se *região de regularização* a faixa em torno da curva δ dada por:

$$\delta_\varepsilon = \left\{ (u, v, h^+(u, v)) \in \mathbb{R}^3; v \in [0, \varepsilon) \right\} \cup \left\{ (u, v, h^-(u, v)) \in \mathbb{R}^3; v \in (-\varepsilon, 0] \right\}.$$

É nesta região que ocorre a pró-mediação entre as superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$.

Observe que a função ϕ é estritamente crescente no intervalo $(-1, 1)$ e a função ϕ_ε no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. A figura 2.13, abaixo, é um esboço do gráfico de $\phi_\varepsilon(v)$ para dois valores distintos de ε . Para o gráfico tracejado fizemos $\varepsilon = \varepsilon_1$ e para o gráfico contínuo $\varepsilon = \varepsilon_0$, sendo $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$.

Figura 2.13: Gráficos da função de transição ϕ_ε , para $\varepsilon \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$.

A seguir calcularemos os coeficientes das formas fundamentais da superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, os quais serão úteis posteriormente. Na carta (u, v) temos a seguinte parametrização para $\mathbf{S}_\varepsilon$:

$$X_\varepsilon(u, v) = (u, v, h(u, v, \varepsilon)) = \left(u, v, \phi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) h^+(u, v) + \left[1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)\right] h^-(u, v) \right). \quad (2.28)$$

Vamos considerar o reescalonamento $v = \varepsilon w$ na expressão (2.28). Assim, na carta (u, w) a parametrização de $\mathbf{S}_\varepsilon$ é dada por:

$$Y_\varepsilon(u, w) = (u, \varepsilon w, h(u, \varepsilon w)) = \left(u, \varepsilon w, \phi(w) h^+(u, \varepsilon w) + [1 - \phi(w)] h^-(u, \varepsilon w) \right). \quad (2.29)$$

Substituindo as expressões de $h^+(u, \varepsilon w)$ e $h^-(u, \varepsilon w)$ na equação (2.29) obtemos:

$$\begin{aligned} h(u, \varepsilon w) = & \frac{1}{2} k_1 u^2 + \varepsilon [k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-)] u w + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [k_2^- + \phi(w) (k_2^+ - k_2^-)] w^2 + \\ & + \frac{1}{6} a u^3 + \frac{1}{2} \varepsilon [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] u^2 w + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\beta + \phi(w) (b - \beta)] u w^2 + \\ & + \frac{1}{6} \varepsilon^3 [\rho + \phi(w) (d - \rho)] w^3 + \frac{1}{24} A u^4 + \frac{1}{6} \varepsilon [B_1 + \phi(w) (B - B_1)] u^3 w + \\ & + \frac{1}{4} \varepsilon^2 [C_1 + \phi(w) (C - C_1)] w^2 v^2 + \frac{1}{4} \varepsilon^3 [C_1 + \phi(w) (C - C_1)] u^2 w^2 + \\ & + \frac{1}{6} \varepsilon^3 [D_1 + \phi(w) (D - D_1)] u w^3 + \frac{1}{24} \varepsilon^4 [E_1 - \phi(w) (E - E_1)] w^4 + O(5). \end{aligned}$$

Logo, na carta (u, w) temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u} &= k_1 u + \varepsilon \left[k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right] w + \frac{1}{2} a u^2 + \varepsilon [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] u w + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\beta + \phi(w) (b - \beta)] w^2 + \frac{1}{6} A u^3 + \frac{1}{2} \varepsilon [B_1 + \phi(w) (B - B_1)] u^2 w + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 [C_1 + \phi(w) (C - C_1)] u w^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 [D_1 + \phi(w) (D - D_1)] w^3 + O(4), \\
\\
\frac{\partial h}{\partial w} &= \varepsilon \left[k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right] u + \varepsilon^2 \left[k_2^- + \phi(w) (k_2^+ - k_2^-) \right] w + \frac{1}{2} \varepsilon [\gamma + \\
&+ \phi(w) (c - \gamma)] u^2 + \varepsilon [\phi'(w) (k_3^+ - k_3^-) + \varepsilon (\beta + \phi(w) (b - \beta))] u w + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\phi'(w) (k_2^+ - k_2^-) + \varepsilon (\rho + \phi(w) (d - \rho))] w^2 + \frac{1}{6} \varepsilon [B_1 + \phi(w) (B - B_1)] u^3 + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon [\phi'(w) (c - \gamma) + \varepsilon (C_1 + \phi(w) (C - C_1))] u^2 w + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\phi'(w) (b - \beta) + \\
&+ \varepsilon (D_1 + \phi(w) (D - D_1))] u w^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 [\phi'(w) (d - \rho) + \varepsilon (E_1 + \phi(w) (E - E_1))] w^3 + \\
&+ \frac{1}{6} \varepsilon \phi'(w) (B - B_1) u^3 w + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \phi'(w) (C - C_1) u^2 w^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^3 \phi'(w) (D - D_1) u w^3 + \\
&+ \frac{1}{24} \varepsilon^4 \phi'(w) (E - E_1) w^4 + O(5).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

O vetor normal (não unitário) a $\mathbf{S}_\varepsilon$ é dado por:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(u, w) = ((Y_\varepsilon)_u \wedge (Y_\varepsilon)_w)(u, w) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right) \wedge \left(0, \varepsilon, \frac{\partial h}{\partial w}\right) = \left(-\varepsilon \frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{\partial h}{\partial w}, \varepsilon\right), \tag{2.31}$$

sendo $\frac{\partial h}{\partial u}$ e $\frac{\partial h}{\partial w}$ obtidos em (2.30).

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de Y_ε , expressos na carta (u, w) , são:

$$\begin{aligned}
E(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right), \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right) \right\rangle = 1 + k_1^2 u^2 + 2\varepsilon k_1 \left[k_3^- + \right. \\
&+ \left. \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right] u w + \varepsilon^2 \left[k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right]^2 w^2 + O(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u}\right), \left(0, \varepsilon, \frac{\partial h}{\partial w}\right) \right\rangle = k_1 \varepsilon \left[\phi(w) (k_3^+ - k_3^-) + \right. \\
&\quad \left. + k_3^- \right] u^2 + \varepsilon^2 \left\{ (k_3^-)^2 + k_1 k_2^- + \phi(w) \left[k_1 (k_2^+ - k_2^-) + 2k_3^- (k_3^+ - k_3^-) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[\phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right]^2 \right\} uw + \varepsilon^3 \left\{ k_3^- k_2^- + \phi(w) \left[k_3^- (k_2^+ - k_2^-) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k_2^- (k_3^+ - k_3^-) \right] + \phi(w)^2 (k_3^+ - k_3^-) (k_2^+ - k_2^-) \right\} w^2 + O(3), \tag{2.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial w}, \frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \left\langle \left(0, \varepsilon, \frac{\partial h}{\partial w}\right), \left(0, \varepsilon, \frac{\partial h}{\partial w}\right) \right\rangle = \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left[\phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right. \\
&\quad \left. + k_3^- \right]^2 u^2 + 2\varepsilon^3 \left\{ k_3^- k_2^- + \phi(w) \left[k_3^- (k_2^+ - 2k_2^-) + k_2^- k_3^+ \right] + \right. \\
&\quad \left. + \phi(w)^2 (k_3^+ - k_3^-) (k_2^+ - k_2^-) \right\} uw + \varepsilon^4 \left[(k_2^-)^2 + 2\phi(w) k_2^- (k_2^+ - k_2^-) + \right. \\
&\quad \left. + \phi(w)^2 (k_2^+ - k_2^-)^2 \right] w^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de Y_ε , expressos na carta (u, w) , são dados

por $\frac{e}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, $\frac{f}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$ e $\frac{g}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, onde $\mathcal{N}_\varepsilon$ é o vetor normal definido em (2.31) e

$$\begin{aligned}
e(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 Y_\varepsilon}{\partial u^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle(u, w, \varepsilon) = \varepsilon k_1 + \varepsilon a u + \varepsilon^2 [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] w + \frac{1}{2} \varepsilon A u^2 + \\
&\quad + \varepsilon^2 [B_1 + \phi(w) (B - B_1)] uw + \frac{1}{2} \varepsilon^3 [C_1 + \phi(w) (C - C_1)] w^2 + O(3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 Y_\varepsilon}{\partial u \partial w}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle(u, w, \varepsilon) = \varepsilon^2 \left[k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) \right] + \varepsilon^2 [\phi(w) (c - \gamma) + \\
&\quad + \gamma] u + \varepsilon^2 \left\{ \phi'(w) (k_3^+ - k_3^-) + \varepsilon [\beta + \phi(w) (b - \beta)] \right\} w + \\
&\quad + \frac{1}{2} \varepsilon^2 [B_1 + \phi(w) (B - B_1)] u^2 + \varepsilon^2 \left\{ \phi'(w) (c - \gamma) + \varepsilon [\phi(w) (C - C_1) + \right. \\
&\quad \left. + C_1] \right\} uw + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \left\{ \phi'(w) (b - \beta) + \varepsilon [D_1 + \phi(w) (D - D_1)] \right\} w^2 + O(3), \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(u, w, \varepsilon) = \left\langle \frac{\partial^2 Y_\varepsilon}{\partial w^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = & \varepsilon^3 [k_2^- + \phi(w) (k_2^+ - k_2^-)] + \varepsilon^2 \{2\phi'(w) (k_3^+ - k_3^-) + \\
& + \varepsilon [\beta + \phi(w) (b - \beta)]\} u + \varepsilon^3 \{2\phi'(w) (k_2^+ - k_2^-) + \varepsilon [\rho + \phi(w) (d - \rho)]\} w + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{2\phi'(w) (c - \gamma) + \varepsilon [C_1 + \phi(w) (C - C_1)]\} u^2 + \varepsilon^2 \{\phi''(w) (k_3^+ - k_3^-) + \\
& + 2\varepsilon\phi'(w) (b - \beta) + \varepsilon^2 [D_1 + \phi(w) (D - D_1)]\} uw + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \{\phi''(w) (k_2^+ - k_2^-) + \\
& + 2\varepsilon\phi'(w) (d - \rho) + \varepsilon^2 [E_1 + \phi(w) (E - E_1)]\} w^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Lembremos que, na carta (u, w) , a equação diferencial das linhas de curvatura é dada por:

$$L(u, w, \varepsilon) dw^2 + M(u, w, \varepsilon) dudw + N(u, w, \varepsilon) du^2 = 0,$$

sendo $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$.

Substituindo as expressões de E , F e G obtidas em (2.32) e de e , f e g obtidas em (2.33) temos:

$$\begin{aligned}
L(u, w, \varepsilon) = & -\varepsilon^4 \{k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) + [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] u + \\
& + [\varepsilon (\beta + \phi(w) (b - \beta)) + \phi'(w) (k_3^+ - k_3^-)] w\} + O(2), \\
M(u, w, \varepsilon) = & \varepsilon^2 \{ \varepsilon [k_2^- - k_1 + \phi(w) (k_2^+ - k_2^-)] + [\varepsilon (\beta - a + \phi(w) (b - \beta)) + \\
& + 2\phi'(w) (k_3^+ - k_3^-)] u + \varepsilon [\varepsilon \rho - \varepsilon \gamma + \varepsilon \phi(w) (\gamma - c + d - \rho) + \\
& + 2\phi'(w) (k_2^+ - k_2^-)] w \} + O(2), \tag{2.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(u, w, \varepsilon) = & \varepsilon^2 \{k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) + [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] u + \\
& + [\varepsilon (\beta + \phi(w) (b - \beta)) + \phi'(w) (k_3^+ - k_3^-)] w\} + O(2).
\end{aligned}$$

O objetivo é analisar os efeitos da regularização sobre os pontos da curva bordo comum δ de tangência quadrática, de dobra e/ou de cruzamento transversal das linhas de curvatura de S^+ e S^- com δ . Vamos estudar os efeitos dessa ε -regularização para esses três casos que foram apresentados respectivamente nas seções 2.1.1, 2.1.3 e 2.1.2. Veremos que, sob certas condições (estabelecidas nos lemas 2.2.3 e 2.2.8 e teoremas 2.2.6, 2.2.10 e 2.2.11) de tais pontos de δ emergem pontos umbílicos Darbouxianos sobre S_ε dos tipos D_1 e D_3 , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Nas próximas três seções apresentaremos os principais resultados obtidos para os casos citados.

2.2.1 1º Caso: Regularização na Vizinhança de uma Singularidade Quadrática ($k_3^+ = k_3^- = 0$)

Nesta seção estabeleceremos as hipóteses para que da origem, $\delta(0)$, de contato quadrático das linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ com o bordo comum δ emergjam pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. O principal resultado está contido no teorema 2.2.6.

Sabemos das proposições 2.1.1 e 2.1.3 da seção 2.1.1 que as linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ têm contato quadrático com a curva bordo δ na origem $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^+ = k_3^- = 0$ e $\gamma \cdot c \neq 0$.

O lema 2.2.3, seguinte, apresenta condições relativas à função de transição ϕ para que a origem seja um ponto umbílico da superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 2.2.3. *Suponha que a origem seja um ponto de tangência quadrática tal que $k_3^+ = k_3^- = 0$, $\gamma \cdot c \neq 0$, ϕ uma função de transição e $\mathbf{S}_\varepsilon$ a superfície regularizada parametrizada (como na definição 2.2.2) por $X(u, v, \varepsilon) = (u, v, h(u, v, \varepsilon))$, sendo*

$$h(u, v, \varepsilon) = \phi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) h^+(u, v) + \left[1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon}\right)\right] h^-(u, v).$$

$$\text{Se } k_2^+ < k_1 < k_2^- \text{ e } \phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+} \text{ então o conjunto}$$

$$U_\varepsilon = \{(u, v, \varepsilon) : L(u, v, \varepsilon) = M(u, v, \varepsilon) = 0\}$$

é uma curva regular tal que $X(U_\varepsilon) = \{(0, 0, 0)\}$ é ponto umbílico de $\mathbf{S}_\varepsilon$.

Demonstração. Considerando $(u, w) = (0, 0)$, $k_3^+ = k_3^- = 0$ e $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$ nas expressões de $L(u, w)$ e $M(u, w)$ obtidas em (2.34), na carta (u, w) , obtemos:

$$L(0, 0, \varepsilon) = M(0, 0, \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Portanto, em $(u, w) = (0, 0)$ temos um ponto umbílico. Retornando às coordenadas originais (u, v, ε) , lembrando que $v = \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que $w = \varepsilon^{-1}v$ e a curva de pontos umbílicos é dada por $U(\varepsilon) = \{(0, 0, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$.

Isto completa a demonstração. □

Observação 2.2.4. *A hipótese $k_2^+ < k_1 < k_2^-$ no lema 2.2.3 implica*

$$0 < \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+} < 1,$$

logo $\phi(0) \in (0, 1)$ (veja definição de ϕ em 2.2.1).

Observação 2.2.5. Para o caso em que $k_1 < k_2^+$ e $k_1 < k_2^-$ a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ não possui pontos umbílicos em uma vizinhança da origem (veja figuras 2.4, 2.14 e 2.15). De fato, vimos no lema 2.2.3 que:

$$M(0,0,\varepsilon) = 0 \implies \phi(0) = \phi_\varepsilon(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}, \quad \varepsilon > 0.$$

Logo, supondo $k_1 < k_2^+$ e $k_1 < k_2^-$, segue que $\phi(0) \notin (0,1)$, a função M não se anula em $(0,0)$ e, por continuidade de M , concluímos que a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ não possui pontos umbílicos em uma vizinhança da origem, para todo $\varepsilon > 0$.

As figuras 2.14 e 2.15, abaixo, representam os pontos de tangências quadráticas da figura 2.4 (à esquerda), e suas ε -regularizações (à direita). A região de regularização foi feita em grande escala para facilitar a visualização das linhas de curvatura principal da superfície regularizada, $\mathbf{S}_\varepsilon$, na vizinhança da origem.

Figura 2.14: À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência quadrática tal que $k_1 < k_2^+$, $k_1 < k_2^-$, $c < 0$ e $\gamma > 0$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.

Figura 2.15: À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência quadrática tal que $k_1 < k_2^+$, $k_1 < k_2^-$, $c > 0$ e $\gamma < 0$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.

O principal resultado obtido nesta seção é o próximo teorema que classifica o ponto umbílico do lema 2.2.3.

Teorema 2.2.6. *Considere a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ e sua ε -regularização $\mathbf{S}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Suponha que a origem $\delta(0)$ seja um ponto de tangência quadrática tal que $k_3^+ = k_3^- = 0$, $\gamma c \neq 0$, $k_2^+ < k_1 < k_2^-$ e $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$. Então, sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$ a origem será um ponto umbílico Darbouxiano dos tipos D_1 ou D_3 , sendo do tipo D_1 se $\gamma < c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ e do tipo D_3 se $\gamma > c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$.*

Demonstração. Os pontos umbílicos da superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ são dados pelas equações $L(u, w, \varepsilon) = M(u, w, \varepsilon) = N(u, w, \varepsilon) = 0$.

Pelo lema 2.2.3, considerando $k_3^+ = k_3^- = 0$ e $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$, na vizinhança do ponto umbílico $(0, 0)$, as expressões (2.34) de L , M e N tornam-se:

$$L(u, w, \varepsilon) = \varepsilon^4 \left[\frac{c(k_2^- - k_1) - \gamma(k_2^+ - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] u + \\ + \varepsilon^5 \left[\frac{b(k_2^- - k_1) - \beta(k_2^+ - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] w + O(2),$$

$$\begin{aligned}
M(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^3 \left[\frac{\beta(k_2^+ - k_1) - a(k_2^+ - k_2^-) - b(k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] u + \\
&+ \varepsilon^3 \left\{ \varepsilon \left[\frac{(c - d)(k_2^- - k_1) + (\rho - \gamma)(k_2^+ - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] + \right. \\
&+ \left. 3\phi'(0)(k_2^+ - k_2^-) \right\} w + O(2), \\
N(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^2 \left[\frac{\gamma(k_2^+ - k_1) - c(k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] u + \\
&+ \varepsilon^3 \left[\frac{\beta(k_2^+ - k_1) - b(k_2^- - k_1)}{k_2^+ - k_2^-} \right] w + O(2).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

A Condição de Transversalidade T: Vamos calcular o determinante Jacobiano das funções $L(u, w, \varepsilon)$ e $M(u, w, \varepsilon)$ em $(u, w) = (0, 0)$, usando as expressões de L e M definidas em (2.35).

$$\det \left(\frac{\partial(L, M)}{\partial(u, w)} \Big|_{u=w=0} \right) = 3\phi'(0)(k_2^+ - k_2^-)^2 [\gamma(k_1 - k_2^+) - c(k_1 - k_2^-)] \varepsilon^7 + O(\varepsilon, 8).$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, como $\phi'(0) > 0$ pela definição da função ϕ , temos

$$\det \left(\frac{\partial(L, M)}{\partial(u, w)} \Big|_{u=w=0} \right) \neq 0 \iff \gamma(k_1 - k_2^+) - c(k_1 - k_2^-) \neq 0 \iff \gamma \neq c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right). \tag{2.36}$$

A Condição do Discriminante D: Para (u, w) próximo ao ponto umbílico $(0, 0)$, a equação diferencial das linhas de curvatura da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ é dada por:

$$L(u, w, \varepsilon) dw^2 + M(u, w, \varepsilon) dudw + N(u, w, \varepsilon) du^2 = 0, \tag{2.37}$$

sendo as expressões de L , M e N dadas em (2.35).

Vamos escrever a equação (2.37) nas coordenadas originais (u, v, ε) , lembrando que $v = \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, ao substituirmos as expressões $w = v/\varepsilon$ e $dw = dv/\varepsilon$ na equação (2.37) obtemos, na carta (u, v) , a seguinte equação diferencial para as linhas de curvatura de $\mathbf{S}_\varepsilon$:

$$L(u, v, \varepsilon) dv^2 + M(u, v, \varepsilon) dudv + N(u, v, \varepsilon) du^2 = 0, \tag{2.38}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 L(u, v, \varepsilon) &= \varepsilon \left[\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1) \right] u + \\
 &\quad + \varepsilon \left[\beta (k_1 - k_2^+) + b (k_2^- - k_1) \right] v + O(2), \\
 M(u, v, \varepsilon) &= \varepsilon \left[a (k_2^- - k_2^+) + b (k_1 - k_2^-) + \beta (k_2^+ - k_1) \right] u + \\
 &\quad + \{ \varepsilon \left[(d - c) (k_1 - k_2^-) + (\gamma - \rho) (k_1 - k_2^+) \right] + \\
 &\quad + 3\phi'(0) (k_2^+ - k_2^-)^2 \} v + O(2),
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 N(u, v, \varepsilon) &= -\varepsilon \left[\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1) \right] u - \\
 &\quad - \varepsilon \left[\beta (k_1 - k_2^+) + b (k_2^- - k_1) \right] v + O(2).
 \end{aligned}$$

Na carta $(u, v; q)$, sendo $q = du/dv$, vamos considerar a superfície de Lie-Cartan $\mathcal{G}^{-1}\{0\}$ sobre a qual temos definido o campo de Lie-Cartan Y , onde:

$$\mathcal{G}(u, v, \varepsilon; q) = L(u, v, \varepsilon) + M(u, v, \varepsilon)q + N(u, v, \varepsilon)q^2 = 0,$$

L, M, N dadas pelas expressões da equação (2.39) e

$$Y = q\mathcal{G}_q \frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{G}_q \frac{\partial}{\partial v} - (\mathcal{G}_v + q\mathcal{G}_u) \frac{\partial}{\partial q}.$$

Lembremos que as singularidades do campo Y são $(0, 0; q)$, sendo q as raízes do polinômio cúbico $\Psi(q) = -(\mathcal{G}_v + q\mathcal{G}_u)$.

Logo,

$$\Psi(q) = -(\mathcal{G}_v + q\mathcal{G}_u) = 0 \iff q^3 + A_2q^2 + A_1q + A_0 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{2 \left[a (k_2^+ - k_2^-) + b (k_2^- - k_1) - \beta (k_2^+ - k_1) \right]}{\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1)}, \\
 A_1 &= \frac{(d - 2c) (k_2^- - k_1) + (\rho - 2\gamma) (k_1 - k_2^+)}{\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1)} - \frac{3\phi'(0) (k_2^+ - k_2^-)^2}{\varepsilon \left[\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1) \right]}, \\
 A_0 &= \frac{\beta (k_2^+ - k_1) + b (k_1 - k_2^-)}{\gamma (k_1 - k_2^+) + c (k_2^- - k_1)}.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Observe que os denominadores dos coeficientes A_2 , A_1 e A_0 dados em (2.40) são não nulos, pela condição de transversalidade em (2.36).

O discriminante Δ da equação cúbica $q^3 + A_2q^2 + A_1q + A_0 = 0$ é dado por:

$$\Delta = \frac{1}{4} \left(A_0 + \frac{2A_2^3}{27} - \frac{A_2A_1}{3} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(A_1 - \frac{A_2^2}{3} \right)^3.$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sinal de Δ é determinado pelo sinal de $\gamma(k_1 - k_2^+) + c(k_2^- - k_1)$, pois a segunda parcela do coeficiente A_1 na equação (2.40) é a única que contém ε no denominador e, como já observamos, $\phi'(0) > 0$. Assim,

$$\Delta > 0 \iff \gamma(k_1 - k_2^+) + c(k_2^- - k_1) < 0 \iff \gamma < c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right),$$

$$\Delta < 0 \iff \gamma(k_1 - k_2^+) + c(k_2^- - k_1) > 0 \iff \gamma > c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right).$$

Logo, se $\Delta > 0$, $\Psi(q)$ possui uma única raiz real denotada por $q = q_1$ e se $\Delta < 0$, $\Psi(q)$ possui três raízes reais distintas q , sendo $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$. Veja figura 2.16, na qual podemos observar que a reta pontilhada de equação $\gamma = c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ tem coeficiente angular negativo pois, por hipótese, $k_2^+ < k_1 < k_2^-$.

Figura 2.16: Regiões do plano $c\gamma$ onde temos uma única raiz real ($\Delta > 0$) ou três raízes reais distintas ($\Delta < 0$).

Passemos agora a estudar a natureza dos equilíbrios $(0, 0; q)$, $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ nos casos em que $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$.

A linearização do campo $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (q\mathcal{G}_q, \mathcal{G}_q, -(\mathcal{G}_v + q\mathcal{G}_u))$ em $(0, 0; q)$,

$q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ é:

$$DY(0, 0; q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial u}(0, 0; q) & \frac{\partial Y_1}{\partial v}(0, 0; q) & 0 \\ \frac{\partial Y_2}{\partial u}(0, 0; q) & \frac{\partial Y_2}{\partial v}(0, 0; q) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi'(q) \end{bmatrix},$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial u}(0, 0; q) &= 2\varepsilon \left[c(k_1 - k_2^-) - \gamma(k_1 - k_2^+) \right] q^2 + \\ &\quad + \varepsilon \left[a(k_2^- - k_2^+) + \beta(k_2^+ - k_1) + b(k_1 - k_2^-) \right] q, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v}(0, 0; q) &= 2\varepsilon \left[b(k_1 - k_2^-) - \beta(k_1 - k_2^+) \right] q^2 + \\ &\quad + \left\{ \varepsilon \left[(d - c)(k_1 - k_2^-) + (\gamma - \rho)(k_1 - k_2^+) \right] + 3\phi'(0)(k_2^+ - k_2^-)^2 \right\} q, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial u}(0, 0; q) &= 2\varepsilon \left[c(k_1 - k_2^-) - \gamma(k_1 - k_2^+) \right] q + \\ &\quad + \varepsilon \left[a(k_2^- - k_2^+) + \beta(k_2^+ - k_1) + b(k_1 - k_2^-) \right], \\ \frac{\partial Y_2}{\partial v}(0, 0; q) &= 2\varepsilon \left[b(k_1 - k_2^-) - \beta(k_1 - k_2^+) \right] q + \\ &\quad + \varepsilon \left[(d - c)(k_1 - k_2^-) + (\gamma - \rho)(k_1 - k_2^+) \right] + 3\phi'(0)(k_2^+ - k_2^-)^2, \\ \Psi'(q) &= 3\varepsilon \left[\gamma(k_1 - k_2^+) - c(k_1 - k_2^-) \right] q^2 + \\ &\quad + 2\varepsilon \left[a(k_2^+ - k_2^-) + 2\beta(k_1 - k_2^+) - 2b(k_1 - k_2^-) \right] q + \\ &\quad + \varepsilon \left[(d - 2c)(k_2^- - k_1) + (\rho - 2\gamma)(k_1 - k_2^+) \right] - 3\phi'(0)(k_2^+ - k_2^-)^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Os autovalores de $DY(0, 0; q)$ são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 := \Psi'(q)$ e $\lambda_3 := \lambda_3(q)$, $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$,

onde

$$\begin{aligned} \lambda_3 = & 2\varepsilon \left[c \left(k_1 - k_2^- \right) - \gamma \left(k_1 - k_2^+ \right) \right] q^2 + \\ & + \varepsilon \left[a \left(k_2^- - k_2^+ \right) + 3\beta \left(k_2^+ - k_1 \right) + 3b \left(k_1 - k_2^- \right) \right] q + \\ & + \varepsilon \left[(d - c) \left(k_1 - k_2^- \right) + (\gamma - \rho) \left(k_1 - k_2^+ \right) \right] + 3\phi'(0) \left(k_2^+ - k_2^- \right)^2, \quad q \in \{q_1, q_2, q_3\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ não é raiz repetida do polinômio $\Psi(q)$, segue que $\Psi'(q) \neq 0$, para todo $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ e, portanto, $\lambda_2 \neq 0$.

Para o caso em que $\Delta > 0$, o equilíbrio $(0, 0; q_1)$ do campo de Lie-Cartan Y é uma sela. De fato, pelas expressões de $\lambda_2 = \lambda_2(q_1)$ em (2.41) e $\lambda_3 = \lambda_3(q_1)$ em (2.42) temos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, que $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} < 0$, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2(q_1)}{\lambda_3(q_1)} = -1 < 0.$$

Portanto, para $\Delta > 0$, que corresponde ao caso em que $\gamma < c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ (veja figura 2.16), o ponto umbílico $(0, 0)$ é Darbouxiano do tipo D_1 .

Analogamente, para o caso em que $\Delta < 0$, os equilíbrios $(0, 0; q_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, do campo de Lie-Cartan Y são selas. De fato, pelas expressões de $\lambda_2 = \lambda_2(q_i)$ em (2.41) e $\lambda_3 = \lambda_3(q_i)$ em (2.42) temos, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, que $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} < 0$, pois

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda_2(q_i)}{\lambda_3(q_i)} = -1 < 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Assim, para $\Delta < 0$, que corresponde ao caso em que $\gamma > c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ (veja figura 2.16), o ponto umbílico $(0, 0)$ é Darbouxiano do tipo D_3 .

Isto completa a demonstração do teorema 2.2.6. □

As figuras 2.17 e 2.18, abaixo, representam os pontos de tangências quadráticas da figura 2.3 (à esquerda), e suas ε -regularizações (à direita). A região de regularização foi feita em grande escala para facilitar a visualização das linhas de curvatura principal da superfície regularizada, $\mathbf{S}_\varepsilon$, na vizinhança da origem.

Figura 2.17: À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência tal que $k_2^+ < k_1 < k_2^-$, $c > 0$, $\gamma > 0$ e $\gamma > c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes e as linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram.

Figura 2.18: À esquerda, temos que a origem é um ponto de tangência tal que $k_2^+ < k_1 < k_2^-$, $c > 0$, $\gamma > 0$ e $\gamma < c \left(\frac{k_1 - k_2^-}{k_1 - k_2^+} \right)$ e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais máximas (linhas contínuas) são deslizantes e as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) costuram.

Observação 2.2.7. Vimos na demonstração do teorema 2.2.6 que na carta $q = dv/du$, se $\Delta < 0$ então q_1 , q_2 e q_3 denotam as três raízes distintas do polinômio

$$q^3 + A_2 q^2 + A_1 q + A_0 = 0$$

(A_i definidos em (2.40)). Observemos que, para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, o coeficiente

A_1 torna-se cada vez maior. Portanto, podemos dizer que uma das raízes, digamos q_1 , pode ser considerada nula, $q_1 = 0$, e as outras duas raízes q_2 e q_3 dadas por $q_2 = \infty$ e $q_3 = -\infty$. Na figura 2.17 (à direita), fizemos uma das separatrizes do ponto umbílico D_3 sobre o eixo- v (que corresponde a $q_1 = 0$) e as outras duas “quase” paralelas ao eixo- u (correspondentes a $q_2 = \infty$ e $q_3 = -\infty$). Uma observação análoga vale para a única separatriz ($q = 0$) do ponto umbílico Darbouxiano D_1 esboçada na figura 2.18 (à direita) sobre o eixo- v .

2.2.2 2º Caso: Regularização na Vizinhança de um Ponto de Cruzamento Transversal ($k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0$)

Nesta seção estabeleceremos as hipóteses para que do ponto $\delta(0)$, de cruzamento transversal das linhas de curvatura das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ com o bordo δ , emergjam pontos umbílicos sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. O principal resultado obtido foi o teorema 2.2.10.

Das proposições 2.1.1 e 2.1.3 da seção 2.1.1 sabemos que as linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ cruzam transversalmente o bordo δ em uma vizinhança da origem $\delta(0)$ se, e somente se, $k_3^+ \cdot k_3^- \neq 0$.

Duas condições foram estabelecidas na seção 2.1.2 pela proposições 2.1.8 e 2.1.9 para que $\delta(0)$ seja um ponto de transição e, para as linhas de curvatura principal mínima, $\delta(u)$ seja um ponto de costura se $u > 0$ e de deslizamento se $u < 0$.

O próximo lema 2.2.8 apresenta condições relativas à função de transição ϕ para que a origem seja um ponto umbílico da superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 2.2.8. *Suponha que $\frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-}$ e $k_3^+ < 0 < k_3^-$, ou seja, as linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ cruzam o bordo δ transversalmente em uma vizinhança da origem $\delta(0)$. Sejam ϕ uma função de transição e $\mathbf{S}_\varepsilon$ a superfície regularizada, $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente.*

Se $k_2^+ < k_1 < k_2^-$ e $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$ então o conjunto

$$U_\varepsilon = \{(u, v, \varepsilon) : L(u, v, \varepsilon) = M(u, v, \varepsilon) = 0\}$$

é uma curva regular tal que $X(U_\varepsilon) = \{(0, 0, 0)\}$ é ponto umbílico de $\mathbf{S}_\varepsilon$.

Demonstração. Da hipótese $\frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-}$ e $k_3^+ < 0 < k_3^-$ podemos concluir que

$$k_1 = \frac{k_3^+ k_2^- - k_2^+ k_3^-}{k_3^+ - k_3^-}. \text{ Agora, substituindo em } \phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+} \text{ essa expressão obtida para}$$

k_1 , obtemos que $\phi(0) = \frac{k_3^-}{k_3^- - k_3^+}$.

As expressões para L e M foram obtidas em (2.34) e são dadas por:

$$L(u, w, \varepsilon) = -\varepsilon^4 \{ k_3^- + \phi(w) (k_3^+ - k_3^-) + [\gamma + \phi(w) (c - \gamma)] u + \\ + [\varepsilon (\beta + \phi(w) (b - \beta)) + \phi'(w) (k_3^+ - k_3^-)] w \} + O(2),$$

$$M(u, w, \varepsilon) = \varepsilon^2 \{ \varepsilon [k_2^- - k_1 + \phi(w) (k_2^+ - k_2^-)] + [\varepsilon (\beta - a + \phi(w) (b - \beta)) + \\ + 2\phi'(w) (k_3^+ - k_3^-)] u + \varepsilon [\varepsilon \rho - \varepsilon \gamma + \varepsilon \phi(w) (\gamma - c + d - \rho) + \\ + 2\phi'(w) (k_2^+ - k_2^-)] w \} + O(2).$$

Portanto, considerando $(u, w) = (0, 0)$ e $\phi(0) = \frac{k_3^-}{k_3^- - k_3^+}$ em L obtemos $L(0, 0, \varepsilon) = 0$,

$\varepsilon > 0$ pequeno. E, analogamente, se $(u, w) = (0, 0)$ e $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$ em M , então

$M(0, 0, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon > 0$. Donde concluímos que em $(u, w) = (0, 0)$ temos um ponto umbílico.

Retornando às coordenadas originais (u, v, ε) , lembrando que $v = \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que $w = \varepsilon^{-1}v$ e a curva de umbílicos é dada por

$$U(\varepsilon) = \{(0, 0, \varepsilon), \varepsilon > 0\}.$$

Isto completa a demonstração. □

Observação 2.2.9. *Vimos na observação 2.2.4 que:*

$$k_2^+ < k_1 < k_2^- \implies \phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+} \in (0, 1).$$

Além disso,

$$k_3^+ < 0 < k_3^- \implies \phi(0) = \frac{k_3^-}{k_3^- - k_3^+} \in (0, 1).$$

O principal resultado obtido nessa seção é o próximo teorema que classifica o ponto umbílico do lema 2.2.8.

Teorema 2.2.10. *Considere a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \boldsymbol{\delta} \cup \mathbf{S}^-$ e sua ε -regularização $\mathbf{S}_\varepsilon$. Suponha que a origem $\delta(0)$ seja um ponto de cruzamento transversal tal que $k_3^+ < 0 < k_3^-$,*

$$k_2^+ < k_1 < k_2^-, \quad \frac{k_2^+ - k_1}{k_3^+} = \frac{k_2^- - k_1}{k_3^-} \quad e \quad k_3^- > \frac{(k_1 - k_2^-) [\gamma (k_1 - k_2^-) + c (k_1 - k_2^-)]}{(a - b) (k_1 - k_2^-) + (a - \beta) (k_1 - k_2^+)}.$$

Se $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+}$ então sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$ a origem será um ponto umbílico

Darbouxiano do tipo D_3 , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Os pontos umbílicos da superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ são dados pelas equações $L(u, w, \varepsilon) = M(u, w, \varepsilon) = N(u, w, \varepsilon) = 0$.

Pelo lema 2.2.8, considerando $\phi(0) = \frac{k_2^- - k_1}{k_2^- - k_2^+} = \frac{k_3^-}{k_3^- - k_3^+}$, na vizinhança do ponto umbílico $(0, 0)$, as expressões (2.34) de L , M e N tornam-se:

$$L(u, w, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^4 (ck_3^- - \gamma k_3^+)}{k_3^+ - k_3^-} u + \frac{\varepsilon^4}{k_3^+ - k_3^-} \left[\varepsilon (bk_3^- - \beta k_3^+) - 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right] w + O(2), \quad (2.43)$$

$$M(u, w, \varepsilon) = \left\{ \frac{\varepsilon^3 [k_3^+ (\beta - a) + k_3^- (a - b)]}{k_3^+ - k_3^-} + 2\varepsilon^2 \phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right\} u + \left\{ \frac{\varepsilon^4 [k_3^+ (\rho - \gamma) + k_3^- (c - d)]}{k_3^+ - k_3^-} + 3\varepsilon^3 \phi'(0) (k_2^+ - k_2^-) (k_3^+ - k_3^-) \right\} w + O(2),$$

$$N(u, w, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 (\gamma k_3^+ - ck_3^-)}{k_3^+ - k_3^-} u + \frac{\varepsilon^2}{k_3^+ - k_3^-} \left[\varepsilon (\beta k_3^+ - bk_3^-) + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right] w + O(2).$$

A Condição de Transversalidade T: Vamos calcular o determinante Jacobiano das funções $L(u, w, \varepsilon)$ e $M(u, w, \varepsilon)$ em $(u, w) = (0, 0)$, usando as expressões de L e M obtidas em (2.43).

$$\det \left(\frac{\partial (L, M)}{\partial (u, w)} \right) \Big|_{u=w=0} = \varepsilon^6 \left[4\phi'(0)^2 (k_3^+ - k_3^-)^2 \right] + O(\varepsilon, 7).$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\det \left(\frac{\partial (L, M)}{\partial (u, w)} \right) \Big|_{u=w=0} \neq 0$, pois $\phi'(0) > 0$ e, por hipótese, $k_3^+ \neq k_3^-$.

A Condição do Discriminante D: Para (u, w) próximo ao ponto umbílico $(0, 0)$, a

equação diferencial das linhas de curvatura é dada por:

$$L(u, w, \varepsilon) dw^2 + M(u, w, \varepsilon) dudw + N(u, w, \varepsilon) du^2 = 0, \quad (2.44)$$

sendo as expressões de L , M e N obtidas em (2.43).

Vamos escrever a equação (2.44) nas coordenadas originais (u, v, ε) , lembrando que $v = \varepsilon w$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo, ao substituírmos as expressões $w = v/\varepsilon$ e $dw = dv/\varepsilon$ na equação (2.44) obtemos, na carta (u, v) a seguinte equação diferencial para as linhas de curvatura:

$$L(u, v, \varepsilon) dv^2 + M(u, v, \varepsilon) dudv + N(u, v, \varepsilon) du^2 = 0, \quad (2.45)$$

onde

$$\begin{aligned} L(u, v, \varepsilon) &= \varepsilon (ck_3^- - \gamma k_3^+) u + \left[\varepsilon (bk_3^- - \beta k_3^+) - 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right] v + O(2), \\ M(u, v, \varepsilon) &= \left\{ \varepsilon [k_3^+ (\beta - a) + k_3^- (a - b)] + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right\} u + \\ &\quad + \left\{ \varepsilon [k_3^- (c - d) + k_3^+ (\rho - \gamma)] + 3\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-) (k_2^+ - k_2^-) \right\} v + O(2), \\ N(u, v, \varepsilon) &= \varepsilon (\gamma k_3^+ - ck_3^-) u + \left[\varepsilon (\beta k_3^+ - bk_3^-) + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2 \right] v + O(2). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Na carta $(u, v; p)$, sendo $p = dv/du$, vamos considerar a superfície de Lie-Cartan $\mathcal{L}^{-1}\{0\}$ sobre a qual temos definido o campo de Lie-Cartan X , sendo:

$$\mathcal{L}(u, v, \varepsilon; p) = L(u, v, \varepsilon) p^2 + M(u, v, \varepsilon) p + N(u, v, \varepsilon) = 0,$$

L , M , N dadas pelas expressões da equação (2.46) e

$$X = \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial u} + p \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial v} - (\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_v) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Lembremos que as singularidades de X são $(0, 0; p)$, sendo p as raízes do polinômio cúbico $\Psi(p) = -(\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_v)$.

Logo,

$$\Psi(p) = -(\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_v) = 0 \iff p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = 0.$$

Os coeficientes A_2 , A_1 e A_0 do polinômio $\Psi(p)$ são dados por:

$$A_2 = \frac{\varepsilon [k_3^- (d - 2c) + k_3^+ (2\gamma - \rho)] - 3\phi'(0) (k_2^+ - k_2^-) (k_3^+ - k_3^-)}{\varepsilon (\beta k_3^+ - bk_3^-) + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2},$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon \left[k_3^+ (a - 2\beta) + k_3^- (2b - a) \right] - 4\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2}{\varepsilon (\beta k_3^+ - b k_3^-) + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2}, \quad (2.47)$$

$$A_0 = \frac{\varepsilon (c k_3^- - \gamma k_3^+)}{\varepsilon (\beta k_3^+ - b k_3^-) + 2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2}.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, observamos das expressões (2.47) que o polinômio $p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = 0$ possui três raízes reais distintas que serão representadas por p_0 , p_1 e p_2 . Além disso, p_0 pode ser considerada tão próxima de zero e $p_1 \cdot p_2$ tão próximo de $\frac{-4\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2}{2\phi'(0) (k_3^+ - k_3^-)^2} = -2$ quanto quisermos, bastando escolher $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente. Portanto, $p_1 \cdot p_2 < -1$ e o ponto umbílico $(0, 0)$ é Darbouxiano do tipo D_3 .

Isto completa a demonstração. □

A figura 2.19 (à esquerda) representa um ponto de cruzamento transversal e sua ε -regularização (à direita), na qual a origem é um ponto umbílico Darbouxiano do tipo D_3 . A região de regularização foi feita em grande escala para facilitar a visualização das linhas de curvatura principal da superfície regularizada, S_ε , na vizinhança da origem.

Figura 2.19: À esquerda, temos que a origem é um ponto de cruzamento transversal (observe que devemos ter $\omega = 90^\circ$) e, à direita, sua ε -regularização. Linhas principais mínimas (linhas tracejadas) são deslizantes se $u < 0$ e costuram se $u > 0$. As linhas principais máximas (linhas contínuas) costuram se $u < 0$ e deslizam se $u > 0$.

2.2.3 3º Caso: Regularização na Vizinhança de um Ponto de Dobra

$$(k_3^+ = 0 \text{ e } k_3^- \neq 0)$$

O último caso a ser considerado é a regularização de um ponto de δ -dobra (definição 2.1.10). Nesta seção veremos que sendo $\delta(0)$ um ponto de δ -dobra, sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ não teremos pontos umbílicos em uma vizinhança da origem, para todo ε positivo. O principal resultado desta seção é o teorema 2.2.11 seguinte.

Das proposições 2.1.3 e 2.1.1 da seção 2.1.1 sabemos que $\delta(0)$ é um ponto de cruzamento transversal para $\mathbf{S}^-$ se, e somente se, $k_3^- \neq 0$ e um ponto de tangência quadrática para $\mathbf{S}^+$ se, e somente se, $k_3^+ = 0$.

Teorema 2.2.11. *Considere a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \delta \cup \mathbf{S}^-$ e sua ε -regularização $\mathbf{S}_\varepsilon$. Suponha que a origem $\delta(0)$ seja um ponto de δ -dobra tal que $k_3^+ = 0$, $k_3^- \neq 0$ e seja ϕ uma função de transição. Então sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$ não teremos pontos umbílicos em uma vizinhança da origem, para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Considerando $k_3^+ = 0$ e $k_3^- \neq 0$ na parametrização para $\mathbf{S}_\varepsilon$ na carta (u, v) dada em (2.28), obtemos as seguintes expressões para as funções L , M e N :

$$\begin{aligned} L(u, v, \varepsilon) &= k_3^- (\phi_\varepsilon(v) - 1) - [\gamma + \phi_\varepsilon(v)(c - \gamma)]u - \\ &\quad - [\beta + \phi_\varepsilon(v)(b - \beta) - k_3^- \phi'_\varepsilon(v)]v + O(2), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} M(u, v, \varepsilon) &= k_2^+ - k_2^- + \phi_\varepsilon(v)(k_2^+ - k_2^-) + \left[\beta - a + \phi_\varepsilon(v)(b - \beta) - \frac{2k_3^- \phi'_\varepsilon(v)}{\varepsilon} \right]u + \\ &\quad + \left[\rho - \gamma + \phi_\varepsilon(v)(\gamma - c + d - \rho) + \frac{2\phi'_\varepsilon(v)(k_2^+ - k_2^-)}{\varepsilon} \right]v + O(2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(u, v, \varepsilon) &= k_3^- (1 - \phi_\varepsilon(v)) + [\gamma + \phi_\varepsilon(v)(c - \gamma)]u + \\ &\quad + [\beta + \phi_\varepsilon(v)(b - \beta) - k_3^- \phi'_\varepsilon(v)]v + O(2). \end{aligned}$$

Fazendo $(u, v) = (0, 0)$ na expressão de L dada pela equação (2.48) obtemos:

$$L(0, 0, \varepsilon) = 0 \iff k_3^- (\phi_\varepsilon(0) - 1) = 0 \iff \phi(0) = \phi_\varepsilon(0) = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Logo, para $k_3^+ = 0$, $k_3^- \neq 0$ e $(u, v) = (0, 0)$ temos que $\phi(0) \notin (0, 1)$ e, por continuidade das funções L e N , concluímos que elas não se anulam em uma vizinhança da origem. Portanto, para todo ε positivo, a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ não possui pontos umbílicos em uma vizinhança da origem.

Isto completa a demonstração. □

As figuras 2.20 e 2.20 representam pontos de δ -dobras e suas ε -regularizações. A região de regularização foi feita em grande escala para facilitar a visualização das linhas de curvatura principal da superfície regularizada, S_ε , na vizinhança da origem.

Figura 2.20: À esquerda, temos que a origem é um ponto de δ -dobra ($k_3^+ = 0, k_3^- \neq 0$ e $c > 0$) e, à direita, sua ε -regularização.

Figura 2.21: À esquerda, temos que a origem é um ponto de δ -dobra ($k_3^+ = 0, k_3^- \neq 0$ e $c < 0$) e, à direita, sua ε -regularização.

Capítulo 3

Configuração Principal sobre Superfícies Suaves por Partes e Curva de Descontinuidade com Torção

Sejam $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ duas superfícies regulares de classe C^∞ , compactas, conexas e orientadas com bordo comum $\mathbf{B}$. Considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^- \subset \mathbb{R}^3$ a superfície obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo comum $\mathbf{B}$ de tal forma que $\mathbf{S}$ seja de classe C^1 sobre $\mathbf{B}$. Neste capítulo serão estudadas as linhas de curvatura principal da superfície suave por partes, $\mathbf{S}$, e da superfície suave, $\mathbf{S}_\varepsilon$, obtida através da ε -regularização de $\mathbf{S}$ ao longo de $\mathbf{B}$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. No capítulo 2 fizemos um estudo análogo para o caso em que a curva bordo comum $\boldsymbol{\delta}$ é uma curva plana (contida no plano $v = 0$), agora consideraremos o bordo comum $\mathbf{B}$ de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ como sendo uma curva arbitrária com torção genérica.

Em relação à configuração principal da superfície suave por partes $\mathbf{S}$, o único caso interessante a ser analisado aqui será quando $\delta(u_0)$ for um ponto de tangência quadrática das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ com o bordo comum $\mathbf{B}$. Veremos na seção 3.3 que dos cruzamentos transversais não emergirão pontos umbílicos e as dobras não são possíveis nesse contexto. Na seção 3.1 faremos algumas considerações e apresentaremos resultados úteis ao longo do texto. Na seção 3.2 analisaremos os efeitos da regularização dos pontos sobre $\mathbf{B}$ de tangência quadrática. Veremos que, sob certas condições (estabelecidas no teorema 3.2.4), de tais pontos do bordo emergem, sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$, umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

3.1 Configuração Principal da Superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$: Singularidades Quadráticas e Pontos Umbílicos

Nesta seção será apresentada a formulação do nosso problema para o caso em que o bordo comum $\mathbf{B}$ é uma curva qualquer em $\mathbb{R}^3$. As proposições 3.1.2 e 3.1.4 estabelecem as condições para que $\delta(u_0)$ seja um ponto de tangência quadrática tanto para a superfície $\mathbf{S}^+$ quanto para a superfície $\mathbf{S}^-$.

Vamos considerar os pares $(\mathbf{S}^+, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{S}^-, \mathbf{B})$, sendo $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ duas superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, regulares de classe C^∞ , compactas, conexas e orientadas com bordo comum $\mathbf{B}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathbf{S}^+$ está contida em $\hat{\mathbf{S}}^+$ e $\mathbf{S}^-$ em $\hat{\mathbf{S}}^-$, sendo $\hat{\mathbf{S}}^\pm$ duas superfícies sem bordo definidas implicitamente pelas funções suaves $f^+ : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^- : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\hat{\mathbf{S}}^+ = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f^+(\mathbf{p}) = 0\},$$

$$\hat{\mathbf{S}}^- = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f^-(\mathbf{p}) = 0\},$$

e sendo $\mathbf{S}^\pm$ e $\mathbf{B}$ dados, em termos de uma função suave $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente por:

$$\mathbf{S}^+ = \{\mathbf{p} \in \hat{\mathbf{S}}^+ : b(\mathbf{p}) \geq 0\},$$

$$\mathbf{S}^- = \{\mathbf{p} \in \hat{\mathbf{S}}^- : b(\mathbf{p}) \leq 0\},$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{p} \in \hat{\mathbf{S}}^+ \cap \hat{\mathbf{S}}^- : b(\mathbf{p}) = 0\},$$

com $\nabla f^\pm \neq 0$ sobre $\hat{\mathbf{S}}^\pm$ e $\hat{T}^\pm = \nabla f^\pm \wedge \nabla b \neq 0$ sobre $\mathbf{B}$.

As funções $f^\pm$ são definidas de tais formas que as aplicações normais unitárias positivas das superfícies $\mathbf{S}^\pm$ são dadas por:

$$\mathcal{N}^+ = \frac{\nabla f^+}{|\nabla f^+|} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}^- = \frac{\nabla f^-}{|\nabla f^-|}.$$

Vamos supor que a orientação positiva sobre $\mathbf{B}$ é definida pelo campo de vetores unitários tangente $T = \frac{\hat{T}^+}{|\hat{T}^+|}$. Veja em [5] exemplos de tais superfícies.

Suporemos, ainda, que a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo comum $\mathbf{B}$, está positivamente orientada pela aplicação normal unitária $\mathcal{N}$ de tal forma que $\mathbf{S}$ seja de classe C^1 sobre $\mathbf{B}$.

A proposição 3.1.1 seguinte, baseada em [6], apresenta uma parametrização para uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$.

Proposição 3.1.1. *Considere $\delta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização regular pelo comprimento de arco de uma componente conexa de $\mathbf{B}$ tal que $\{T, \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel ao longo de δ , sendo $T(u)$ o vetor tangente unitário à curva $u \mapsto \delta(u)$. Então as expressões*

$$X^+(u, v) = \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k^+(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu \quad (3.1)$$

$$X^-(u, v) = \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k^-(u)v^2 + \frac{1}{6}D(u)v^3 + E(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu \quad (3.2)$$

definem, respectivamente sobre as superfícies $\hat{\mathbf{S}}^+$ e $\hat{\mathbf{S}}^-$, uma carta local (u, v) de classe C^∞ em uma vizinhança de δ , onde $C(u, 0) = E(u, 0) = 0$, k^+ e k^- são as curvaturas normais de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ na direção de $B = \mathcal{N} \wedge T$.

Demonstração. Vamos provar que (3.1) define uma carta local (u, v) em uma vizinhança de δ considerando o par $(\mathbf{S}^+, \mathbf{B})$. Para o par $(\mathbf{S}^-, \mathbf{B})$ a demonstração é análoga.

A aplicação

$$X^+(u, v, w) = \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + w\mathcal{N}(u)$$

é um difeomorfismo local em uma vizinhança do eixo u , pois $\langle X_u^+ \wedge X_v^+, X_{uu}^+ \rangle(u, 0, 0) = 1^1$. Portanto, existe uma função $W(u, v)$, de classe C^∞ , tal que $X^+(u, v, W(u, v))$ é uma parametrização de uma vizinhança tubular de δ . Para cada u , $W(u, v)$ é justamente a parametrização da curva

$$v \mapsto v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + W(u, v)\mathcal{N}(u),$$

de interseção entre a superfície $\hat{\mathbf{S}}^+$ com o plano normal gerado por $\{(\mathcal{N} \wedge T)(u), \mathcal{N}(u)\}$. Esta curva de interseção é tangente à $(\mathcal{N} \wedge T)(u)$ em $v = 0$ e $k^+(u)$ é a curvatura (plana) da curva no plano gerado por $\{\mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$. Logo,

$$X^+(u, v, W(u, v)) = \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k^+(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u),$$

onde A é de classe C^∞ e $B(u, 0) = 0$.

Isto completa a demonstração. $\square$

Uma carta similar foi usada em [7] por Gutierrez e Sotomayor para o estudo das linhas de curvatura principal periódicas, em [4] por Garcia e Sotomayor, no estudo das linhas assintóticas na vizinhança de curvas parabólicas e em [5], também por Garcia e Sotomayor,

¹ $X_u^+ = \frac{\partial X^+}{\partial u}$, $X_v^+ = \frac{\partial X^+}{\partial v}$ e $X_{uu}^+ = \frac{\partial^2 X^+}{\partial u^2}$.

no estudo de curvas que são bordos de superfícies em $\mathbb{R}^3$, como no caso apresentado pela proposição 3.1.1.

O referencial de Darboux $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ ao longo de $\mathbf{B}$ satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} T'(u) &= k_g(u)B(u) + k_n(u)\mathcal{N}(u), \\ B'(u) &= -k_g(u)T(u) + \tau_g(u)\mathcal{N}(u), \\ \mathcal{N}'(u) &= -k_n(u)T(u) - \tau_g(u)B(u), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $k_n(u)$ é a *curvatura normal*, $k_g(u)$ é a *curvatura geodésica* e $\tau_g(u)$ é a *torção geodésica* da curva bordo $\mathbf{B}$.

A proposição 3.1.2, abaixo, estabelece as condições para que as linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}^+$ sejam tangentes quadraticamente ou cruzem transversalmente o bordo $\mathbf{B}$ na vizinhança do ponto $\delta(u_0)$.

Proposição 3.1.2. *Considere a superfície $\mathbf{S}^+$ parametrizada, em uma vizinhança do ponto $(u_0, 0)$, por $X^+(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k^+(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3\right]\mathcal{N}(u)$, $-\mu < v < \mu$, sendo δ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$. Então, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^+$ são transversais ao bordo δ no ponto $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) \neq 0$.*

Supondo que $(k_n - k^+)(u_0) > 0$, uma linha de curvatura principal máxima tem contato quadrático com δ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = 0$ e $\tau'_g(u_0) \neq 0$. Este contato é interno (respectivamente externo) se $\tau'_g(u_0) > 0$ (respectivamente $\tau'_g(u_0) < 0$). Veja figura 3.1.

Figura 3.1: Configuração principal de $\mathbf{S}^+$ em uma vizinhança de $\delta(u_0)$: tangência interna para $\tau'_g(u_0) > 0$ e externa para $\tau'_g(u_0) < 0$, considerando $u_0 = 0$. Supondo $(k_n - k^+)(u_0) > 0$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínima (respectivamente máxima).

Demonstração. Usando a parametrização da superfície $\mathbf{S}^+$ da proposição 3.1, a qual é dada por:

$$X^+(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k^+(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu$$

e o referencial de Darboux ao longo de $\mathbf{B}$ dado pelas equações (3.3), temos que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais em $(u, 0)$ são:

$$\begin{aligned} E(u, 0) &= 1, & F(u, 0) &= 0, & G(u, 0) &= 1, \\ e(u, 0) &= k_n(u), & f(u, 0) &= \tau_g(u), & g(u, 0) &= k^+(u). \end{aligned} \quad (3.4)$$

As direções principais de $\mathbf{S}^+$ em $(u, 0)$ satisfazem:

$$-\tau_g(u)dv^2 + (k^+ - k_n)(u)dudv + \tau_g(u)du^2 = 0. \quad (3.5)$$

Portanto, o vetor $T(u)$ é uma direção principal de (3.5) se, e somente se, $\tau_g(u) = 0$.

Próximo do ponto $(u_0, 0)$ a equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{S}^+$ é dada por

$$L(u, v)dv^2 + M(u, v)dudv + N(u, v)du^2 = 0, \quad (3.6)$$

sendo

$$\begin{aligned} L(u, v) &= (Fg - Gf)(u, v) = -\tau_g(u) - (k^+)'(u)v + O(v^2), \\ M(u, v) &= (Eg - Ge)(u, v) = k^+(u) - k^-(u) + \\ &\quad + [2k_g(u)k_n(u) - \tau_g'(u) - 2k_g(u)k^+(u)]v + O(v^2), \\ N(u, v) &= (Ef - Fe)(u, v) = \tau_g(u) + [(k^+)'(u) - 2k_g(u)\tau_g(u)]v + O(v^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando o “Método dos Coeficientes a Determinar” temos que na vizinhança do ponto de tangência $(u_0, 0)$, as linhas de curvatura principal máxima são soluções de (3.6) e descritas por

$$v(u) = \frac{1}{2} \frac{\tau_g'(u_0)}{(k_n - k^+)(u_0)} (u - u_0)^2 + \dots$$

Isto completa a demonstração. □

Observação 3.1.3. Na proposição 3.1.2 mudamos a orientação de $\mathbf{S}^+$ se considerarmos $(k^+ - k_n)(u_0) > 0$ logo, supondo que $\tau_g(u_0) = 0$, uma linha de curvatura principal mínima terá contato quadrático com δ em $\delta(u_0)$ interno (respectivamente externo) se $\tau_g'(u_0) < 0$ (respectivamente $\tau_g'(u_0) > 0$).

A proposição seguinte é a análoga da proposição 3.1.2 para a superfície $\mathbf{S}^-$.

Proposição 3.1.4. *Considere a superfície $\mathbf{S}^-$ parametrizada, em uma vizinhança do ponto $(u_0, 0)$, por $X^-(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k^-(u)v^2 + \frac{1}{6}D(u)v^3 + E(u, v)v^3\right]\mathcal{N}(u)$, $-\mu < v < \mu$, sendo δ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$. Então, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo δ no ponto $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) \neq 0$.*

Supondo que $(k_n - k^-)(u_0) < 0$, uma linha de curvatura principal mínima tem contato quadrático com δ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = 0$ e $\tau'_g(u_0) \neq 0$. Este contato é interno (respectivamente externo) se $\tau'_g(u_0) > 0$ (respectivamente $\tau'_g(u_0) < 0$). Veja figura 3.2.

Figura 3.2: Configuração principal de $\mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem: tangência interna para $\tau'_g(u_0) > 0$ e externa para $\tau'_g(u_0) < 0$, considerando $u_0 = 0$. Supondo $(k_n - k^-)(u_0) < 0$, temos que as linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas).

Demonstração. Usando a parametrização da superfície $\mathbf{S}^-$ da proposição 3.1, a qual é dada por:

$$X^-(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k^-(u)v^2 + \frac{1}{6}D(u)v^3 + E(u, v)v^3\right]\mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu$$

e o referencial de Darboux ao longo de $\mathbf{B}$ dado pelas equações (3.3) temos que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais em $(u, 0)$ são:

$$\begin{aligned} E(u, 0) &= 1, & F(u, 0) &= 0, & G(u, 0) &= 1, \\ e(u, 0) &= k_n(u), & f(u, 0) &= \tau_g(u), & g(u, 0) &= k^-(u). \end{aligned} \quad (3.8)$$

A demonstração segue análoga à da proposição 3.1.2 sendo que próximo da tangência, as linhas de curvatura principal mínima são descritas por

$$v(u) = \frac{1}{2} \frac{\tau'_g(u_0)}{(k_n - k^-)(u_0)} (u - u_0)^2 + \dots$$

Isto completa a demonstração. □

Observação 3.1.5. Na proposição 3.1.4 mudamos a orientação se considerarmos $(k_n - k^-)(u_0) > 0$. Logo, supondo que $\tau_g(u_0) = 0$, uma linha de curvatura principal máxima terá contato quadrático com δ em $\delta(u_0)$ interno (respectivamente externo) se $\tau'_g(u_0) < 0$ (respectivamente $\tau'_g(u_0) > 0$).

A curva parametrizada por $\delta(u) = X^+(u, 0) = X^-(u, 0)$ é o *bordo comum* das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ (faça $v = 0$ em X^+ da proposição 3.1.2 e em X^- da proposição 3.1.4). Considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ como sendo a superfície sem bordo de classe C^1 que foi obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo de $\mathbf{B}$. Observe que $\mathbf{S}$ é suave no complementar da curva bordo comum $\mathbf{B}$ e de classe C^1 ao longo desta curva.

Supondo que $\tau_g(u_0) = 0$, as folheações principais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, em uma vizinhança do ponto de tangência $\delta(u_0)$, foram descritas nas proposições 3.1.2 e 3.1.4, respectivamente. Estas considerações permitem-nos adotar a seguinte definição.

Definição 3.1.6. Seja $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ a superfície obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo de $\mathbf{B}$. A **configuração principal** de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, isto é, suas singularidades e linhas das folheações principais são como segue:

- (I) As linhas principais mínimas de $\mathbf{S}$, fora das tangências, são as linhas principais mínimas da superfície $\mathbf{S}^+$ justapostas com as linhas principais mínimas da superfície $\mathbf{S}^-$.
- (II) As linhas principais máximas de $\mathbf{S}$, fora das tangências, são as linhas principais máximas da superfície $\mathbf{S}^+$ justapostas com as linhas principais máximas da superfície $\mathbf{S}^-$.
- (III) As singularidades de $\mathbf{S}$ são os pontos umbílicos de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ e os pontos de $\mathbf{B}$ de tangência com alguma das linhas de curvatura principal destas superfícies.

As figuras 3.3 e 3.4 abaixo ilustram as possíveis configurações topológicas de $\mathbf{S}$:²

²Para esboçar as linhas de curvatura de $\mathbf{S}$ basta analisar o sinal de $\tau'_g(u_0)$ nas proposições 3.1.2 e 3.1.4, observando a definição 3.1.6 acima e as possibilidades $k^+(u_0) < k_n(u_0) < k^-(u_0)$ e $(k_n(u_0) < k^+(u_0) \text{ e } k_n(u_0) < k^-(u_0))$.

Figura 3.3: Configuração principal suave por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $u_0 = 0$ e $k^+(u_0) < k_n(u_0) < k^-(u_0)$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas). Dois casos: $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita.

Figura 3.4: Configuração principal suave por partes de $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ em uma vizinhança da origem considerando $u_0 = 0$ e $k_n(u_0) < k^+(u_0)$ e $k_n(u_0) < k^-(u_0)$. Linhas tracejadas (respectivamente contínuas) ilustram as linhas de curvatura principal mínimas (respectivamente máximas). Dois casos: $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita.

3.2 Regularização da Superfície S

Nesta seção analisaremos os efeitos da regularização sobre os pontos da curva bordo comum $\mathbf{B}$ de tangência quadrática das linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ com $\mathbf{B}$. Veremos que, sob certas condições (estabelecidas no teorema 3.2), após o processo de regularização, a configuração principal de $\mathbf{S}$ será equivalente à configuração principal na vizinhança dos pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 ou D_3 .

Vamos adotar as seguintes definições:

Definição 3.2.1. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma **função de transição** tal que $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(\mu) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi'(t) < 0$, para $t \in (0, \mu)$, $\phi(t) = 0$, se $t \geq \mu$ e $\phi(t) = 1$, se $t \leq 0$ (no apêndice 4.4 apresentamos um exemplo de uma tal função ϕ).

Definição 3.2.2. *Sejam ϕ uma função de transição e $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ uma superfície sem bordo em $\mathbb{R}^3$, sendo $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{S}^-$ e $\mathbf{B}$ definidas anteriormente. Para $\varepsilon > 0$, a ϕ_ε -**regularização** de $\mathbf{S}$, denotada por $\mathbf{S}_\varepsilon$, é (não unicamente) definida por:*

$$X(u, v, \varepsilon) = \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right) X^-(u, v) + \left[1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right] X^+(u, v), \quad -\varepsilon^2\mu < v < \varepsilon^2\mu, \quad (3.9)$$

onde X^+ , X^- são as parametrizações das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ dadas, respectivamente, pelas expressões (3.1) e (3.2) da proposição 3.1.1, as quais serão reescritas abaixo:

$$\begin{aligned} X^+(u, v) &= \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k^+(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3\right]\mathcal{N}(u), \quad 0 \leq v < \mu \\ X^-(u, v) &= \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k^-(u)v^2 + \frac{1}{6}D(u)v^3 + E(u, v)v^3\right]\mathcal{N}(u), \quad -\mu < v \leq 0 \end{aligned}$$

lembrando que $\{T, \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial positivo de $\mathbb{R}^3$.

Assim, a equação (3.9) torna-se:

$$\begin{aligned} X(u, v, \varepsilon) &= \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left\{\left[\frac{1}{2}\left(1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right)k^+(u) + \frac{1}{2}\phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)k^-(u)\right]v^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right)\left(\frac{A(u)}{2} + C(u, v)\right) + \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{D(u)}{2} + E(u, v)\right)\right]v^3\right\}\mathcal{N}(u), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$-\varepsilon^2\mu < v < \varepsilon^2\mu, \quad \text{com } C(u, 0) = E(u, 0) = 0.$$

Façamos o reescalonamento $v = \varepsilon^2 w$ na expressão (3.10). Logo, na carta (u, w) , a parametrização de $\mathbf{S}_\varepsilon$ é dada por:

$$\begin{aligned} X(u, w, \varepsilon) &= \delta(u) + \varepsilon^2 w(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left\{\varepsilon^4 \left[\frac{1}{2}(1 - \phi(w))k^+(u) + \frac{1}{2}\phi(w)k^-(u)\right]w^2 + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^6 \left[\left(1 - \phi(w)\right)\left(\frac{A(u)}{2} + \varepsilon^2 C(u, w)\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi(w)\left(\frac{D(u)}{2} + \varepsilon^2 E(u, w)\right)\right]w^3\right\}\mathcal{N}(u), \quad -\mu < w < \mu \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\text{com } C(u, 0) = E(u, 0) = 0.$$

O nosso objetivo é estudar os pontos umbílicos Darbouxianos sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Para isso vamos determinar os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais de $X_\varepsilon(u, w) = X(u, w, \varepsilon)$ e obter a equação diferencial das linhas de curvatura na carta (u, w) , a qual é dada por:

$$L(u, w, \varepsilon)dw^2 + M(u, w, \varepsilon)dudw + N(u, w, \varepsilon)du^2 = 0,$$

sendo $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$.

Abaixo, omitiremos a variável u das funções $k^+(u)$, $k^-(u)$, $k_n(u)$, $k_g(u)$ e $\tau_g(u)$ e a variável w da função $\phi(w)$ a fim de simplificar a notação.

Da equação (3.11) temos, na carta (u, w) , que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial u} = & \left\{ 1 - \varepsilon^2 k_g w - \frac{1}{2} \varepsilon^4 k_n w^2 \left[(1 - \phi) k^+ + \phi k^- + \varepsilon w (\dots) \right] \right\} T(u) + \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon^4 \tau_g w^2 \left[(1 - \phi) k^+ + \phi k^- + \varepsilon^2 w (\dots) \right] \right\} B(u) + \\ & + \left\{ \varepsilon^2 \tau_g w + \frac{1}{2} \varepsilon^4 w^2 \left[(1 - \phi) (k^+)' + \phi (k^-)' + \varepsilon w (\dots) \right] \right\} \mathcal{N}(u), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial w} = \varepsilon^2 B(u) + \left\{ \varepsilon^4 w \left[(1 - \phi) k^+ + \phi k^- - \frac{1}{2} w \phi' (k^+ - k^-) + \varepsilon^2 w (\dots) \right] \right\} \mathcal{N}(u).$$

O vetor normal (não unitário) a $\mathbf{S}_\varepsilon$ é dado por:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(u, w) = ((X_\varepsilon)_u \wedge (X_\varepsilon)_w)(u, w) = n_1 T(u) + n_2 B(u) + n_3 \mathcal{N}(u), \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned} n_1 = & -\varepsilon^4 \tau_g w - \frac{1}{2} \varepsilon^6 w^2 \left[(1 - \phi) (k^+)' + \phi (k^-)' + \varepsilon^2 w (\dots) \right], \\ n_2 = & -\varepsilon^4 w \left[k^+ \left(1 - \phi - \frac{1}{2} w \phi' \right) + k^- \left(\phi + \frac{1}{2} w \phi' \right) \right] + \varepsilon^6 w^2 (\dots), \\ n_3 = & \varepsilon^2 - \varepsilon^4 k_g w - \frac{1}{2} \varepsilon^6 k_n w^2 \left[(1 - \phi) k^+ + \phi k^- + \varepsilon^2 w (\dots) \right]. \end{aligned}$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de X_ε , expressos na carta (u, w) , são:

$$\begin{aligned} E(u, w, \varepsilon) = & \left\langle \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial u} \right\rangle = 1 - 2\varepsilon^2 k_g w + \\ & + \varepsilon^4 w^2 \left[-k_n k^+ (1 - \phi) - k_n k^- \phi + \tau_g^2 + k_g^2 \right] + \varepsilon^6 w^3 (\dots), \\ F(u, w, \varepsilon) = & \left\langle \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^6 w^2 \left[\tau_g k^- (\phi + w \phi') + \right. \\ & \left. + \tau_g k^+ (1 - \phi - w \phi') \right] + \varepsilon^8 w^2 (\dots), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$G(u, w, \varepsilon) = \left\langle \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial w}, \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \varepsilon^4 + \frac{1}{4} \varepsilon^8 w^2 [k^-(2\phi + w\phi') + \\ + k^+(2 - 2\phi - w\phi')]^2 + \varepsilon^8 w^3 (\dots).$$

Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de X_ε , expressos na carta (u, w) , são dados por $\frac{e}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, $\frac{f}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$ e $\frac{g}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, onde $\mathcal{N}_\varepsilon$ é o vetor normal definido em (3.12) e

$$\begin{aligned} e(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 X_\varepsilon}{\partial u^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^2 k_n + \varepsilon^4 w [\tau'_g - 2k_g k_n + \\ &\quad + k_g k^+ (-1 + \phi + \frac{1}{2} w \phi') + k_g k^+ (-\phi - \frac{1}{2} w \phi')] + \varepsilon^6 w^2 (\dots), \\ f(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 X_\varepsilon}{\partial u \partial w}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_g + \varepsilon^6 w [(k^+)' (1 - \phi - \frac{1}{2} w \phi') + \\ &\quad + (k^-)' (\phi + \frac{1}{2} w \phi')] + \varepsilon^8 w^2 (\dots), \\ g(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 X_\varepsilon}{\partial w^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^6 [k^+ (1 - \phi - 2w\phi' - \frac{1}{2} w^2 \phi'') + \\ &\quad + k^- (\phi + 2w\phi' + \frac{1}{2} w^2 \phi'')] + \varepsilon^8 w (\dots). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sendo $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$, dos cálculos acima podemos concluir que:

$$\begin{aligned} L(u, w, \varepsilon) &= -\varepsilon^8 \tau_g(u) + \varepsilon^{10} w \left\{ (k^-(u))' \left[-\phi(w) - \frac{1}{2} w \phi'(w) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (k^+(u))' \left[-1 + \phi(w) + \frac{1}{2} w \phi'(w) \right] \right\} + \varepsilon^{12} w^2 (\dots), \\ M(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^6 \left\{ -k_n(u) + k^-(u) \left[\phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2} w^2 \phi''(w) \right] + \right. \\ &\quad \left. + k^+(u) \left[1 - \phi(w) - 2w\phi'(w) - \frac{1}{2} w^2 \phi''(w) \right] \right\} + \varepsilon^8 w (\dots), \\ N(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^4 \tau_g(u) + \varepsilon^6 w \left\{ (k^+(u))' \left[1 - \phi(w) - \frac{1}{2} w \phi'(w) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (k^-(u))' \left[\phi(w) + \frac{1}{2} w \phi'(w) \right] - 2k_g(u) \tau_g(u) \right\} + \varepsilon^8 w^2 (\dots). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sabemos das proposições 3.1.2 e 3.1.4 da seção 3.1 que as linhas de curvatura principal

das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ tem contato quadrático com a curva bordo comum $\mathbf{B}$ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = 0$ e $\tau'_g(u_0) \neq 0$.

O lema 3.2.3, seguinte, apresenta as condições para tenhamos pontos umbílicos sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Lema 3.2.3. *Seja $\delta(u_0)$ um ponto de tangência quadrática das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ tal que $\tau_g(u_0) = 0$ e $\tau'_g(u_0) \neq 0$. Se $k^+(u_0) < k_n(u_0) < k^-(u_0)$, então o conjunto*

$$U_\varepsilon = \{(u, v, \varepsilon) : M(u, v, \varepsilon) = N(u, v, \varepsilon) = 0\}$$

é uma curva contínua. A curva de pontos umbílicos $X(U_\varepsilon)$ é tangente ao vetor normal $N(\delta(u_0))$ e é transversal à superfície regularizada $\mathbf{S}_\varepsilon$ em uma vizinhança deste ponto de tangência.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $u_0 = 0$.

Nas coordenadas (u, w, ε) (sendo $v = \varepsilon^2 w$) temos que a expressão de $N(u, w, \varepsilon)$ está definida em (3.15).

Vamos resolver $N(u, w, \varepsilon) = 0$ na vizinhança de $(u, w, \varepsilon) = (0, 0, \varepsilon)$.

Como $\varepsilon > 0$, segue que $N(u, w, \varepsilon) = 0$ se, e somente se, $\tilde{N} = \frac{N}{\varepsilon^4} = 0$.

Observe que $\tilde{N}(0, 0, \varepsilon) = \tau_g(0) = 0$ e $\tilde{N}_u(0, 0, \varepsilon) = \tau'_g(0) \neq 0$, por hipótese. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave $u = u(w, \varepsilon)$ em uma vizinhança de $(0, 0, \varepsilon)$, tal que $\tilde{N}(u(w, \varepsilon), w, \varepsilon) = 0$, $u(w, \varepsilon) = \varepsilon^2 \xi(w, \varepsilon)$ e $\xi(0, \varepsilon) = 0$.

Vamos resolver agora $\tilde{M}(w, \varepsilon) = \tilde{M}(u(w, \varepsilon), w, \varepsilon)$, sendo M definido na expressão (3.15) e $\tilde{M} = \frac{M}{\varepsilon^6}$.

Como $\phi(0) = 1$ e $\phi(\mu) = 0$, pelas propriedades da função de transição ϕ (veja um exemplo de uma ϕ com estas propriedades no apêndice 4.4 do capítulo 4), podemos concluir que

$$\tilde{M}(0, 0) = (k^- - k_n)(0) > 0, \quad \tilde{M}(\mu, 0) = (k^+ - k_n)(0) < 0$$

por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $w_0 \in (0, \mu)$ tal que $\tilde{M}(w_0, 0) = 0$. Defina a seguinte função

$$H(w) = \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w).$$

Assim, devemos resolver a seguinte equação

$$\tilde{M}(w, \varepsilon) = -k_n(0) + k^+(0) + [k^-(0) - k^+(0)] H(w) + \varepsilon^2 w(\dots) = 0. \quad (3.16)$$

Podemos considerar a função de transição ϕ tal que H seja uma função decrescente

para w próximo de zero, e portanto, inversível. Logo, da equação (3.16) concluímos que $w = \varphi(\varepsilon)$.

Retornando às coordenadas originais (u, v, ε) , temos que $u = \varepsilon^2 \xi(w, \varepsilon) = \varepsilon^2 \xi(\varphi(\varepsilon), \varepsilon)$, $v = \varepsilon^2 w = \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)$ e a curva de pontos umbílicos (no parâmetro $\varepsilon > 0$) é dada por

$$U_\varepsilon = \left(\varepsilon^2 \xi(\varphi(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon), \varepsilon \right).$$

Cálculos diretos mostram que $U'_\varepsilon(0) = (0, 0, 1) = \mathcal{N}(\delta(0))$.

Isto completa a demonstração do lema. $\square$

O teorema 3.2.4, abaixo, classifica o ponto umbílico dado pelo lema 3.2.3.

Teorema 3.2.4. *Seja $\delta(u_0)$ um ponto de tangência quadrática das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ tal que $\tau_g(u_0) = 0$, $\tau'_g(u_0) \neq 0$ e suponha que $k^+(u_0) < k_n(u_0) < k^-(u_0)$. Vimos (no lema 3.2.3) que a curva de pontos umbílicos $X(U_\varepsilon)$ é tangente ao vetor normal $\mathcal{N}(\delta(u_0))$ e transversal à superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ em uma vizinhança de $\delta(u_0)$. Então, este ponto de interseção é um ponto umbílico Darbouxiano do tipo D_1 se $\tau'_g(u_0) < 0$ ou do tipo D_3 se $\tau'_g(u_0) > 0$.*

Demonstração. Assim como na demonstração do lema 3.2.3 defina a seguinte função:

$$H(w) = \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w).$$

Os pontos umbílicos da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ são dados pelas equações em (3.15), $L(u, w, \varepsilon) = M(u, w, \varepsilon) = N(u, w, \varepsilon) = 0$.

Pelo lema 3.2.3, próximo do ponto umbílico $(0, w_1)$ segue que

$$\begin{aligned} L(u, w, \varepsilon) &= -\varepsilon^8 \tau'_g(0)u + O(2); \\ M(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^6 (k^+ - k_n)'(0)u + \varepsilon^6 (k^- - k^+)(0)H'(w_1)(w - w_1) + O(2); \\ N(u, w, \varepsilon) &= \varepsilon^4 \tau'_g(0)u + O(2). \end{aligned} \tag{3.17}$$

A equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{S}_\varepsilon$ na vizinhança do ponto umbílico $(0, w_1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \left[-\varepsilon^8 \tau'_g(0)u + O(2) \right] dw^2 + \left[\varepsilon^6 (k^+ - k_n)'(0)u + \varepsilon^6 b_0(w - w_1) + O(2) \right] dudw + \\ + \left[\varepsilon^4 \tau'_g(0)u + O(2) \right] du^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde $b_0 = (k^- - k^+)(0)H'(w_1) < 0$.

Retornando às coordenadas originais (u, v, ε) , lembrando que $v = \varepsilon^2 w$, $\varepsilon > 0$ sufici-

entamente pequeno, segue que $w = \varepsilon^{-2}v$, $dw = \varepsilon^{-2}dv$ e a equação (3.18) torna-se

$$\left[-\varepsilon^2\tau'_g(0)u + O(2)\right]dv^2 + \left[\varepsilon^2k_0u + b_0(v - v_1) + O(2)\right]dudv + \left[\varepsilon^2\tau'_g(0)u + O(2)\right]du^2 = 0,$$

sendo $k_0 = (k^+ - k_n)'(0)$ e $w_1 = \varepsilon^{-2}v_1$.

Pela classificação dos pontos umbílicos Darbouxianos, teorema 1.2.3 do capítulo 1, segue que a reta tangente às separatrizes umbílicas são definidas por $u = \lambda v$, onde

$$\lambda \left[\varepsilon^2\tau'_g(0)\lambda^2 + \varepsilon^2k_0\lambda - \varepsilon^2\tau'_g(0) + b_0 \right] = 0.$$

Portanto o discriminante desta equação é dado por

$$\Delta = \varepsilon^2 \left[\varepsilon^2k_0^2 + 4\varepsilon \left(\tau'_g(0) \right)^2 - 4b_0\tau'_g(0) \right].$$

Como $b_0 < 0$, o sinal do discriminante Δ é determinado pelo sinal de $\tau'_g(0)$. Assim, se $\tau'_g(0) > 0$, segue que $\Delta > 0$ e o ponto umbílico é Darbouxiano do tipo D_3 . Por outro lado, se $\tau'_g(0) < 0$, temos que $\Delta < 0$ e o ponto umbílico é Darbouxiano do tipo D_1 . Veja figura 3.3.

Isto completa a demonstração. □

3.3 Pontos de Dobras e Cruzamentos Transversais

3.3.1 Ponto de Dobra

Vimos na definição 2.1.10 do capítulo 2 que um ponto sobre a curva bordo comum $\mathbf{B}$ é um ponto de $\mathbf{B}$ -dobra se é um ponto de tangência quadrática das linhas de curvatura da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) com $\mathbf{B}$ e um ponto de cruzamento transversal das linhas de curvatura da superfície $\mathbf{S}^-$ (respectivamente $\mathbf{S}^+$) com $\mathbf{B}$.

Das proposições 3.1.2 e 3.1.4 sabemos que $\delta(u_0)$ será um ponto de cruzamento transversal das linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}^+$ com $\mathbf{B}$ se $\tau_g(u_0) \neq 0$ e será um ponto de tangência quadrática das linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}^-$ com $\mathbf{B}$ se $\tau_g(u_0) = 0$. Portanto, não é possível termos um ponto de $\mathbf{B}$ -dobra neste contexto.

3.3.2 Cruzamentos Transversais

Supondo $\tau_g(u_0) \neq 0$ teremos que as linhas de curvatura principal das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo $\mathbf{B}$ em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$.

Definamos θ^+ (respectivamente θ^-) como sendo o ângulo entre o eixo- u positivo e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$) transversal à curva $\mathbf{B}$ em $\delta(u_0)$. Considere ainda o ângulo $\omega \in (0, \pi)$, entre a linha principal mínima da superfície

$\mathbf{S}^+$ e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^-$ (veja figura 3.5). Como já discutimos no capítulo 2, proposição 2.1.8, uma condição necessária para a existência de pontos umbílicos sobre a regularização da superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ é que tenhamos sobre $\mathbf{S}$ um ponto de transição (definição 2.1.5) Neste ponto, por definição, as linhas de curvatura principais mínimas (e máximas) de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são ortogonais

Figura 3.5: Exemplos de ângulos formados entre as linhas principais mínimas (linhas tracejadas) e as linhas principais máximas (linhas contínuas) de $\mathbf{S}^+$ e de $\mathbf{S}^-$ com o eixo- u positivo.

Vamos determinar as curvaturas principais das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ em $(u, v) = (u_0, 0)$ e, posteriormente, usando o sistema (1.3) do capítulo 1, encontraremos as condições para que $\delta(u_0)$ seja um ponto de transição.

No que segue, $k_{(1,+)} \leq k_{(2,+)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^+$ em $(u_0, 0)$ e $k_{(1,-)} \leq k_{(2,-)}$ são as curvaturas principais da superfície $\mathbf{S}^-$ em $(u_0, 0)$ ³. Das expressões de E, F, G, e, f e g encontradas em (3.4) e (3.8) temos:

$$\begin{aligned} k_{(1,+)}(u_0, 0) &= \frac{1}{2} \left(k_n(u_0) + k^+(u_0) - \sqrt{[k^+(u_0) - k_n(u_0)]^2 + 4(\tau_g(u_0))^2} \right), \\ k_{(2,+)}(u_0, 0) &= \frac{1}{2} \left(k_n(u_0) + k^+(u_0) + \sqrt{[k^+(u_0) - k_n(u_0)]^2 + 4(\tau_g(u_0))^2} \right), \\ k_{(1,-)}(u_0, 0) &= \frac{1}{2} \left(k_n(u_0) + k^-(u_0) - \sqrt{[k^-(u_0) - k_n(u_0)]^2 + 4(\tau_g(u_0))^2} \right), \\ k_{(2,-)}(u_0, 0) &= \frac{1}{2} \left(k_n(u_0) + k^-(u_0) + \sqrt{[k^-(u_0) - k_n(u_0)]^2 + 4(\tau_g(u_0))^2} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

³ Lembremos que, em termos dos coeficientes das formas fundamentais, as curvaturas Gaussiana ($\mathcal{K}$) e Média ($\mathcal{H}$) são dadas respectivamente por:

$$\mathcal{K} = k_1 \cdot k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad \mathcal{H} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

onde $k_1 \leq k_2$ são as curvaturas principais. Portanto, k_1 e k_2 podem ser expressas por:

$$k_1 = \mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}, \quad k_2 = \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}.$$

Abaixo, omitiremos o ponto u_0 das funções $k^+(u_0)$, $k^-(u_0)$, $k_n(u_0)$ e $\tau_g(u_0)$ a fim de simplificar a notação.

Do sistema (1.3) do capítulo 1 temos que as direções principais, relativas à superfície $\mathbf{S}^+$, são soluções do sistema:

$$\begin{cases} (e - k_{(i,+)}E) du + (f - k_{(i,+)}F) dv = 0 \\ (f - k_{(i,+)}F) du + (g - k_{(i,+)}G) dv = 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

onde $k_{(i,+)} (i = 1, 2)$ são as curvaturas principais determinadas em (3.19). Agora, substituindo em (3.20) as expressões de $E(u_0, 0)$, $F(u_0, 0)$, $G(u_0, 0)$, $e(u_0, 0)$, $f(u_0, 0)$ e $g(u_0, 0)$ dadas por (3.4) e (3.8) encontramos dois sistemas:

Sistema que determina a direção principal mínima em $\mathbf{S}^+$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_n - k^+ + \sqrt{(k^+ - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) du + \tau_g dv = 0 \\ \tau_g du + \frac{1}{2} \left(k^+ - k_n + \sqrt{(k^+ - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (3.21)$$

Sistema que determina a direção principal máxima em $\mathbf{S}^+$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_n - k^+ - \sqrt{(k^+ - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) du + \tau_g dv = 0 \\ \tau_g du + \frac{1}{2} \left(k^+ - k_n - \sqrt{(k^+ - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (3.22)$$

Analogamente ao que foi feito para a superfície $\mathbf{S}^+$ temos que as direções principais, relativas à superfície $\mathbf{S}^-$, são soluções do sistema:

$$\begin{cases} (e - k_{(i,-)}E) du + (f - k_{(i,-)}F) dv = 0 \\ (f - k_{(i,-)}F) du + (g - k_{(i,-)}G) dv = 0 \end{cases}, \quad (3.23)$$

onde $k_{(i,-)} (i = 1, 2)$ são as curvaturas principais determinadas em (3.19). Agora, substituindo em (3.23) as expressões de $E(u_0, 0)$, $F(u_0, 0)$, $G(u_0, 0)$, $e(u_0, 0)$, $f(u_0, 0)$ e $g(u_0, 0)$ dadas por (3.4) e (3.8) temos dois sistemas:

Sistema que determina a direção principal mínima em $\mathbf{S}^-$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_n - k^- + \sqrt{(k^- - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) du + \tau_g dv = 0 \\ \tau_g du + \frac{1}{2} \left(k^- - k_n + \sqrt{(k^- - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (3.24)$$

Sistema que determina a direção principal máxima em $\mathbf{S}^-$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(k_n - k^- - \sqrt{(k^- - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) du + \tau_g dv = 0 \\ \tau_g du + \frac{1}{2} \left(k^- - k_n - \sqrt{(k^- - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2} \right) dv = 0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Como θ^+ (respectivamente θ^-) é o ângulo entre o eixo- u positivo e a linha principal mínima da superfície $\mathbf{S}^+$ (respectivamente $\mathbf{S}^-$), temos que $tg(\theta^+) = dv/du$ (respectivamente $tg(\theta^-) = dv/du$) é dada por qualquer uma das equações do sistema (3.21) (respectivamente (3.24)) acima.

Observe que $\omega = \pi$ se, e somente se, $\tan(\theta^+) \cdot \tan(\theta^-) = -1$.

Da primeira equação do sistema (3.21) e do sistema (3.24) (também poderíamos ter escolhido a segunda equação destes sistemas) obtemos que

$$\begin{aligned} \tan(\theta^+) &= \frac{dv}{du} = -\frac{k_n - k^+ + \sqrt{(k^+ - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2}}{2\tau_g}, \\ \tan(\theta^-) &= \frac{dv}{du} = -\frac{k_n - k^- + \sqrt{(k^- - k_n)^2 + 4(\tau_g)^2}}{2\tau_g}. \end{aligned}$$

Portanto, $\tan(\theta^+) \cdot \tan(\theta^-) = -1$ se, e somente se,

$$\frac{k_n - k^+ + \sqrt{(k_n - k^+)^2 + 4(\tau_g)^2}}{\tau_g} \cdot \frac{k_n - k^- + \sqrt{(k_n - k^-)^2 + 4(\tau_g)^2}}{\tau_g} = -4. \quad (3.26)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\tau_g > 0$, a equação (3.26) se escreve como:

$$\left[\frac{k_n - k^+}{\tau_g} + \sqrt{\left(\frac{k_n - k^+}{\tau_g} \right)^2 + 4} \right] \left[\frac{k_n - k^-}{\tau_g} + \sqrt{\left(\frac{k_n - k^-}{\tau_g} \right)^2 + 4} \right] = -4. \quad (3.27)$$

Observe que não existem valores para k^+ , k^- , k_n e τ_g que resolvem a equação (3.27). Portanto, as linhas principais mínimas das superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ nunca serão ortogonais. Baseados nestas conclusões podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1. *Considere a superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$ e sua ε -regularização $\mathbf{S}_\varepsilon$. Suponha que $\delta(u_0)$ seja um ponto de cruzamento transversal tal que $\tau_g(u_0) \neq 0$ e seja ϕ uma função de transição. Então sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$ não teremos pontos umbílicos em uma vizinhança de $(u_0, 0)$, para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Das expressões para $L(u, v)$, $M(u, v)$ e $N(u, v)$ em (3.15) concluímos que $L(u, v)$ e $N(u, v)$ nunca se anulam para (u, v) próximo de (u_0, v) considerando $\tau_g(u_0) \neq 0$ e $\varepsilon > 0$ pequeno. Portanto, sobre $\mathbf{S}_\varepsilon$ não teremos pontos umbílicos.

Isto completa a demonstração. $\square$

A figura 3.6 representa um ponto de cruzamento transversal e sua ε -regularização. A região de regularização foi feita em grande escala para facilitar a visualização das linhas de curvatura principal da superfície regularizada, $\mathbf{S}_\varepsilon$, na vizinhança da origem.

Figura 3.6: À esquerda, as linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ são transversais ao bordo comum $\mathbf{B}$ e, à direita, a ε -regularização de $\mathbf{S}$.

Capítulo 4

Configuração Principal sobre Superfícies com Bordo em $\mathbb{R}^3$: Contato Cúbico e Pontos Umbílicos

Neste capítulo serão estudadas as linhas de curvatura principal de uma superfície $\mathbf{S}$ em $\mathbb{R}^3$ com bordo $\mathbf{B}$ e da superfície suave, obtida de $\mathbf{S}$, através do *engrossamento* e *regularização* definidos por Garcia e Sotomayor em [5].

Em [5], os autores consideraram o *caso genérico*, no qual a configuração principal da superfície com bordo é regular, ou seja, sem pontos umbílicos e sendo o contato de uma linha de curvatura principal com o bordo do tipo *quadrático*.

Analisaremos um caso complementar, chamado aqui de *crítico*, no qual o contato de uma linha de curvatura principal com o bordo é cúbico, dito *tangencialmente crítico*.

4.1 Introdução

Nesta seção, baseada em [5, 6], apresentaremos a operação de *engrossamento* de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com bordo, a qual será aplicada para o estudo do caso tangencialmente crítico proposto acima.

Seja $\mathbf{S}$ uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ com bordo $\mathbf{B}$, sendo $\mathbf{S}$ de classe C^∞ , compacta, conexa e orientada. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathbf{S}$ está contida em $\hat{\mathbf{S}}$, sendo $\hat{\mathbf{S}}$ uma superfície sem bordo definida implicitamente pela função suave $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\hat{\mathbf{S}} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{p}) = 0\},$$

e sendo $\mathbf{S}$ e $\mathbf{B}$ dados, em termos de uma função suave $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente por:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{p} \in \hat{\mathbf{S}} : b(\mathbf{p}) \geq 0\},$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{p} \in \hat{\mathbf{S}} : b(\mathbf{p}) = 0\},$$

com $\nabla f \neq 0$ sobre $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{T} = \nabla f \wedge \nabla b \neq 0$ sobre $\mathbf{B}$.

A função f é definida de tal forma que a aplicação normal unitária positiva da superfície $\mathbf{S}$ é dada por:

$$\mathcal{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

A orientação positiva sobre $\mathbf{B}$ é definida pelo campo de vetores tangente unitário $T = \frac{\hat{T}}{|\hat{T}|}$. Diremos, neste caso, que $\mathbf{B}$ está munido da *orientação externa*.

A *configuração principal* do par $(\mathbf{S}, \mathbf{B})$, consistindo da superfície orientada $\mathbf{S}$ e do bordo orientado $\mathbf{B}$, é definida pela quádrupla

$$\mathcal{P}_{(\mathbf{S}, \mathbf{B})} = (\mathcal{U}_{\mathbf{S}}, \mathcal{C}_{\mathbf{S}}, \mathcal{F}_{1, \mathbf{S}}, \mathcal{F}_{2, \mathbf{S}}),$$

onde $\mathcal{U}_{\mathbf{S}}$ é o conjunto dos pontos umbílicos de $\mathbf{S}$, $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}$ é o conjunto das singularidades tangenciais sobre $\mathbf{B}$ (T é uma direção principal), $\mathcal{F}_{1, \mathbf{S}}$ e $\mathcal{F}_{2, \mathbf{S}}$ são, respectivamente, as *folheações principais mínima e máxima* sobre $\mathbf{S} \setminus \mathcal{U}_{\mathbf{S}} \cup \mathcal{C}_{\mathbf{S}}$.

4.1.1 Envelopes de Superfícies Regulares

Uma família a 1 parâmetro de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ pode ser definida por $F(\mathbf{p}, \lambda) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que, para cada λ , $\nabla F_{\lambda} \neq 0$, sendo $F_{\lambda}(\cdot) = F(\cdot, \lambda)$.

A variação desta família em relação ao parâmetro λ pode ser definida como $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\mathbf{p}, \lambda)$. O conjunto

$$\mathcal{C} := \left\{ (\mathbf{p}, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; F(\mathbf{p}, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\mathbf{p}, \lambda) = 0 \right\}$$

é chamado *conjunto característico* desta família.

A projeção $\pi_1(\mathcal{C}) = \mathbb{E}$ é o *envelope* da família, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\pi_1(\mathbf{p}, \lambda) = \mathbf{p}$.

Exemplo 4.1.1. Considere uma família a 1 parâmetro de esferas de raios constantes $r > 0$ com centro variando ao longo de uma curva $c(s)$. Esta família pode ser representada por

$$F(\mathbf{p}, s) = |\mathbf{p} - c(s)|^2 - r^2 = 0.$$

Portanto, segue que $\frac{\partial F}{\partial s}(\mathbf{p}, s) = -2 \langle \mathbf{p} - c(s), c'(s) \rangle$.

O envelope $\mathbb{E}$ desta família é chamado de superfície canal.

Definição 4.1.2. Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com bordo B . O ε -engrossamento de S é a vizinhança tubular TS_ε de S , onde

$$TS_\varepsilon = \{q \in \mathbb{R}^3 : |q - p| \leq \varepsilon, p \in S\}.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $S_\varepsilon = \partial(TS_\varepsilon)$ é o envelope da família de esferas de raio ε e centro variando sobre S .

A superfície S_ε é compacta, de classe C^1 e orientada pelo normal exterior à S_ε .

Observe que, para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, S_ε é uma superfície obtida pela justaposição da superfície $S_{\varepsilon,+} = S + \varepsilon\mathcal{N}$, do semitubo T_ε e da superfície $S_{\varepsilon,-} = S - \varepsilon\mathcal{N}$, sendo T_ε um tubo de raio $\varepsilon > 0$ com centro variando sobre o bordo B e definido parametricamente por:

$$T_\varepsilon = B + \varepsilon \sin \theta (\mathcal{N} \wedge T) + \varepsilon \cos \theta \mathcal{N}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Vamos denotar por $B_{\varepsilon,+}$ (respectivamente $B_{\varepsilon,-}$) o bordo comum à superfície $S_{\varepsilon,+}$ (respectivamente $S_{\varepsilon,-}$) e ao semitubo T_ε . Destas considerações podemos concluir que a superfície S_ε é de classe C^∞ sobre o complementar das curvas $B_{\varepsilon,\pm}$. Veja na figura 4.1 uma ilustração local da superfície S_ε .

Figura 4.1: Um aberto do ε -engrossamento da superfície S .

4.2 Configuração Principal de $S_\varepsilon = S_{\varepsilon,+} \cup T_\varepsilon \cup S_{\varepsilon,-}$

Usando a mesma notação da seção 4.1, seja (S, B) o par consistindo da superfície orientada S e do bordo orientado externamente B e seja S_ε a superfície definida por $S_\varepsilon = S_{\varepsilon,+} \cup T_\varepsilon \cup S_{\varepsilon,-}$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A proposição 4.2.1, seguinte, apresenta uma parametrização para uma vizinhança de uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$.

Proposição 4.2.1. *Considere $\delta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização pelo comprimento de arco de uma componente conexa de $\mathbf{B}$ tal que $\{T, \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel ao longo de δ , sendo $T(u)$ o vetor tangente unitário à curva $u \mapsto \delta(u)$. Então, a expressão*

$$X(u, v) = \delta(u) + v(\mathcal{N} \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k_n^\perp(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu \quad (4.1)$$

define uma carta local (u, v) sobre a superfície $\hat{\mathbf{S}}$, de classe C^∞ em uma vizinhança de δ , onde $C(u, 0) = 0$ e $k_n^\perp$ é a curvatura normal de $\mathbf{S}$ na direção de $B = \mathcal{N} \wedge T$.

Demonstração. Análoga à da proposição 3.1.1 do capítulo 3. $\square$

O referencial de Darboux $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ ao longo de $\mathbf{B}$ satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} T'(u) &= k_g(u)B(u) + k_n(u)\mathcal{N}(u), \\ B'(u) &= -k_g(u)T(u) + \tau_g(u)\mathcal{N}(u), \\ \mathcal{N}'(u) &= -k_n(u)T(u) - \tau_g(u)B(u), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $k_n(u)$ é a curvatura normal, $k_g(u)$ é a curvatura geodésica e $\tau_g(u)$ é a torção geodésica da curva bordo $\mathbf{B}$ contida em $\mathbf{S}$.

A proposição 4.2.2, abaixo, estabelece as condições para que as linhas de curvatura principal da superfície $\mathbf{S}$ tenham contato cúbico com o bordo $\mathbf{B}$ na vizinhança do ponto $\delta(u_0)$.

Proposição 4.2.2. *Considere a superfície $\mathbf{S}$ parametrizada, em uma vizinhança do ponto $(u_0, 0)$, por $X(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k_n^\perp(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u)$, $-\mu < v < \mu$, sendo δ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$.*

Supondo que $(k_n^\perp - k_n)(u_0) > 0$, uma linha de curvatura principal mínima tem contato cúbico com δ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = \tau_g'(u_0) = 0$ e $\tau_g''(u_0) \neq 0$.

Demonstração. Usando a parametrização da superfície $\mathbf{S}$ dada por (4.1) e o referencial de Darboux ao longo de $\mathbf{B}$ satisfazendo as equações (4.2) temos que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais em $(u, 0)$ são:

$$\begin{aligned} E(u, 0) &= 1, & F(u, 0) &= 0, & G(u, 0) &= 1, \\ e(u, 0) &= k_n(u), & f(u, 0) &= \tau_g(u), & g(u, 0) &= k_n^\perp(u). \end{aligned}$$

As direções principais de $\mathbf{S}$ em $(u, 0)$ satisfazem a equação:

$$-\tau_g(u) dv^2 + (k_n^\perp - k_n)(u) dudv + \tau_g(u) du^2 = 0. \quad (4.3)$$

Portanto, o vetor $T(u)$ é uma direção principal de (4.3) se, e somente se, $\tau_g(u) = 0$.

Próximo ao ponto $(u_0, 0)$, a equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{S}$ é dada por

$$L(u, v)dv^2 + M(u, v)dudv + N(u, v)du^2 = 0, \quad (4.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} L(u, v) &= (Fg - Gf)(u, v) = -\tau_g(u) - (k_n^\perp(u))'v + \left[\frac{1}{2}k_g(u)(k_n^\perp(u))' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}k_n(u)k_n^\perp(u)\tau_g(u) - \frac{1}{2}A'(u) - 3C_u(u, v) - \frac{3}{2}\tau_g(u)(k_n^\perp(u))' \right] v^2 + v^3(\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(u, v) &= (Eg - Ge)(u, v) = k_n^\perp(u) - k_n(u) + [-\tau_g'(u) + 6C(u, v) + A(u) + \\ &\quad + 2k_g(u)k_n(u) - 2k_g(u)k_n^\perp(u)]v + \left\{ -\frac{5}{2}k_n(u)(k_n^\perp(u))^2 + \right. \\ &\quad + \left[k_n^2(u) + \frac{1}{2}\tau_g^2(u) + k_g^2(u) \right] k_n^\perp(u) - k_g^2(u)k_n(u) - \frac{1}{2}(k_n^\perp(u))'' + \\ &\quad + \left[\tau_g'(u) - \frac{5}{2}A(u) - 15C(u, v) \right] k_g(u) + 6C_v(u, v) - \\ &\quad \left. - \tau_g^2(u)k_n(u) - \tau_g(u)k_g'(u) \right\} v^2 + v^3(\dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(u, v) &= (Ef - Fe)(u, v) = \tau_g(u) + [-2k_g(u)\tau_g(u) + (k_n^\perp(u))']v + \\ &\quad + \left[3C_u(u, v) - k_n^\perp(u)k_n(u)\tau_g(u) + \tau_g(u)(k_n^\perp(u))^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2}k_g(u)(k_n^\perp(u))' + \tau_g^3(u) + \frac{1}{2}A'(u) + k_g^2(u)\tau_g(u) \right] v^2 + v^3(\dots). \end{aligned}$$

Usando o “Método dos Coeficientes a Determinar” temos que, na vizinhança do ponto $(u_0, 0)$, as linhas de curvatura principal são soluções de (4.4) e descritas por

$$v(u) = \frac{1}{6} \frac{\tau_g''(u_0)}{(k_n - k_n^\perp)(u_0)} (u - u_0)^3 + \dots, \quad -\mu < v < \mu.$$

De fato, no “Método dos Coeficientes a Determinar” supomos que

$$v = a_0 + a_1(u - u_0) + \frac{a_2}{2}(u - u_0)^2 + \frac{a_3}{6}(u - u_0)^3 + \dots$$

é uma solução de (4.4). Para determinarmos os coeficientes a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ basta substituir

$$v = a_0 + a_1(u - u_0) + \frac{a_2}{2}(u - u_0)^2 + \frac{a_3}{6}(u - u_0)^3 + \dots$$

e

$$dv = a_1 du + a_2(u - u_0) du + \frac{1}{2}a_3(u - u_0)^2 du + \dots$$

na equação (4.4). Conhecida a expressão do coeficiente a_{i-1} , podemos determinar os próximos coeficientes a_i , $i = 1, 2, \dots$.

Observe que da equação (4.3) já concluímos que se $\tau_g(u_0) = 0$ então $a_0 = a_1 = 0$. Após alguns cálculos, obtemos

$$a_2 = \frac{\tau'_g(u_0)}{(k_n - k_n^\perp)(u_0)},$$

$$a_3 = \frac{\tau'_g(u_0) \left[3(k_n^\perp)' - 2k'_n \right](u_0) + \tau''_g(u_0) [k_n - k_n^\perp](u_0)}{(k_n - k_n^\perp)^2(u_0)},$$

e assim por diante.

Portanto, em $(u_0, 0)$ uma linha principal mínima de $\mathbf{S}$ tem contato cúbico com $\mathbf{B}$ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$ e $\tau''_g(u_0) \neq 0$.

Isto completa a demonstração. $\square$

Observação 4.2.3. Na proposição 4.2.2 mudamos a orientação de $\mathbf{S}$ se considerarmos $(k_n^\perp - k_n)(u_0) < 0$. Logo, supondo que $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$, uma linha de curvatura principal máxima terá contato cúbico com δ em $\delta(u_0)$ se, e somente se, $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$ e $\tau''_g(u_0) \neq 0$.

Veremos na proposição 4.2.4, a seguir, que as superfícies $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ possuem as mesmas configurações principais.

Proposição 4.2.4 ([5], Proposição 3). *Considere a superfície $\mathbf{S}$ parametrizada, em uma vizinhança de uma componente conexa do bordo $\mathbf{B}$, por*

$$X(u, v) = \delta(u) + vB(u) + \left[\frac{1}{2}k_n^\perp(u)v^2 + \frac{1}{6}A(u)v^3 + C(u, v)v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v < \mu.$$

Sejam $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ superfícies paralelas definidas por

$$X_{\varepsilon,+}(u, v) = X(u, v) + \varepsilon \mathcal{N}(u, v),$$

onde $\mathcal{N}$ é a aplicação normal unitária que orienta positivamente a superfície $\mathbf{S}$.

Então, as configurações principais de $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ são equivalentes. Isto é, as linhas de

curvatura principal, os pontos umbílicos e as tangências são preservadas por deslocamentos paralelos.

Demonstração. Sejam (u, v) uma carta positiva arbitrária,

$$(Fg - Gf)(u, v)dv^2 + (Eg - Ge)(u, v)dudv + (Ef - Fe)(u, v)du^2 = 0$$

a equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{S}$ e

$$(F_\varepsilon g_\varepsilon - G_\varepsilon f_\varepsilon)(u, v)dv^2 + (E_\varepsilon g_\varepsilon - G_\varepsilon e_\varepsilon)(u, v)dudv + (E_\varepsilon f_\varepsilon - F_\varepsilon e_\varepsilon)(u, v)du^2 = 0$$

a equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{S}_\varepsilon$.

Cálculos diretos (veja [13], p.185) mostram que os coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais de $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}_\varepsilon$ são expressos por:

$$E_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{K})E + (\varepsilon^2\mathcal{H} - 2\varepsilon)e,$$

$$F_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{K})F + (\varepsilon^2\mathcal{H} - 2\varepsilon)f,$$

$$G_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{K})G + (\varepsilon^2\mathcal{H} - 2\varepsilon)g,$$

$$e_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{H})e + \varepsilon\mathcal{K}E,$$

$$f_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{H})f + \varepsilon\mathcal{K}F,$$

$$g_\varepsilon = (1 - \varepsilon\mathcal{H})g + \varepsilon\mathcal{K}G.$$

Aqui $\mathcal{K} = k_1 k_2$ e $\mathcal{H} = \frac{k_1 + k_2}{2}$ são, respectivamente, as curvaturas Gaussiana e Média da superfície $\mathbf{S}$.

Portanto,

$$(F_\varepsilon g_\varepsilon - G_\varepsilon f_\varepsilon)(u, v) = (1 + \varepsilon^2\mathcal{K} - \varepsilon\mathcal{H})(Fg - Gf),$$

$$(E_\varepsilon g_\varepsilon - G_\varepsilon e_\varepsilon)(u, v) = (1 + \varepsilon^2\mathcal{K} - \varepsilon\mathcal{H})(Eg - Ge),$$

$$(E_\varepsilon f_\varepsilon - F_\varepsilon e_\varepsilon)(u, v) = (1 + \varepsilon^2\mathcal{K} - \varepsilon\mathcal{H})(Ef - Fe).$$

Concluimos assim, que as equações diferenciais das linhas de curvatura das superfícies $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}_\varepsilon$ na carta (u, v) são as mesmas, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno.

Isto completa a demonstração. □

A proposição 4.2.5, abaixo, estabelece as hipóteses para que as linhas de curvatura principal do tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$, de raio $\varepsilon > 0$ e centro variando sobre a curva $\mathbf{B}$, tenham contato cúbico com as curvas definidas por $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Proposição 4.2.5. *Seja $\delta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa da curva bordo $\mathbf{B}$ tal que $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel ao longo de δ . Então, a expressão*

$$\alpha(u, \theta) = \delta(u) + \varepsilon \sin \theta B(u) + \varepsilon \cos \theta \mathcal{N}(u) \quad (4.5)$$

é uma parametrização regular do tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ de raio $\varepsilon > 0$ e centro sobre a curva $\delta(u)$. A equação diferencial das linhas de curvatura principal de $\mathbf{T}_\varepsilon$ é dada por:

$$du [d\theta - \tau_g(u)du] = 0.$$

Em todos os pontos onde $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$ e $\tau''_g(u_0) \neq 0$, o contato entre as linhas de curvatura principal máxima e as curvas definidas por $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ é do tipo cúbico.

Demonstração. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ é, claramente, uma superfície regular.

Usando a parametrização (4.5) e o referencial de Darboux (4.2), obtemos:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v) = [1 - \varepsilon k_n(u) \cos \theta - \varepsilon k_g(u) \sin \theta] T(u) - \varepsilon \tau_g(u) \cos \theta B(u) + \varepsilon \tau_g(u) \sin \theta \mathcal{N}(u),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(u, v) = \varepsilon \cos \theta B(u) - \varepsilon \sin \theta \mathcal{N}(u),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \varepsilon (1 - \varepsilon k_n(u) \cos \theta - \varepsilon k_g(u) \sin \theta) [\sin \theta B(u) + \cos \theta \mathcal{N}(u)].$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de $\mathbf{T}_\varepsilon$, expressos na carta (u, θ) , são:

$$E(u, \theta) = [1 - \varepsilon k_n(u) \cos \theta - \varepsilon k_g(u) \sin \theta]^2 + (\varepsilon k_g(u))^2 + (\varepsilon \tau_g(u))^2,$$

$$F(u, \theta) = -\varepsilon^2 \tau_g(u),$$

$$G(u, \theta) = \varepsilon^2.$$

O tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ é o envelope de uma família a 1 parâmetro de esferas de raio ε e centro variando ao longo de δ , veja exemplo 4.1.1. Os círculos parametrizados por $u = cte$ são as linhas de curvatura principal mínima de $\mathbf{T}_\varepsilon$ (veja [8, 13]). Considerando que a orientação positiva do tubo é definida pelo seu normal exterior, temos que os círculos parametrizados por $u = cte$ têm curvatura principal mínima $k_1 = -\frac{1}{\varepsilon}$.

Portanto, as linhas de curvatura principal máxima (família de curvas ortogonais aos círculos $u = cte$) são soluções da seguinte equação diferencial

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{F}{G} = \tau_g(u). \quad (4.6)$$

Logo, a equação diferencial das linhas de curvatura de $\mathbf{T}_\varepsilon$ é dada por $du[d\theta - \tau_g(u)du] = 0$ e, nos pontos u_0 onde $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$ e $\tau''_g(u_0) \neq 0$, a solução da equação (4.6) tem a seguinte expansão de Taylor em torno do ponto u_0

$$\theta(u) = \theta_0 + \frac{1}{6}\tau''_g(u_0)(u - u_0)^3 + \dots$$

Isto completa a demonstração. $\square$

Definição 4.2.6. *Sejam $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ e $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ superfícies paralelas definidas, respectivamente, por $X_{\varepsilon,+} = X + \varepsilon\mathcal{N}$ e $X_{\varepsilon,-} = X - \varepsilon\mathcal{N} = X + \varepsilon(-\mathcal{N})$, $\varepsilon > 0$. Considere $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ a superfície sem bordo obtida justapondo-se a superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$, o semitubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ de raio $\varepsilon > 0$ e centro variando ao longo do bordo $\mathbf{B}$ de $\mathbf{S}$ e a superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ é suave no complementar das curvas $\mathbf{B}_\varepsilon = \mathbf{B} \pm \varepsilon\mathcal{N}$ e regular de classe C^1 ao longo destas curvas.*

Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as **linhas de curvatura das folheações principais de $\mathbf{S}_\varepsilon$** são definidas como segue:

- (I) *As linhas principais mínimas de $\mathbf{S}_\varepsilon$, fora das tangências, são as linhas principais mínimas da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ justapostas com as linhas principais mínimas do tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ (semicírculos) e as linhas principais mínimas da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$. Observe que as linhas principais mínimas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ são translações paralelas das linhas principais máximas de $\mathbf{S}$.*
- (II) *As linhas principais máximas de $\mathbf{S}_\varepsilon$, fora das tangências, são as linhas principais máximas da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ justapostas com as linhas principais máximas do tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ (curvas definidas pela equação diferencial $d\theta - \tau_g(u)du = 0$, veja proposição 4.2.5) e as linhas principais máximas da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$. As linhas principais máximas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ são translações paralelas das linhas principais mínimas de $\mathbf{S}$.*

Veja figuras 4.3 e 4.4, onde temos contato cúbico e figura 4.2 onde o contato é quadrático.

O tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ justapõe-se à superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ em $\theta = 0$ e à superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ em $\theta = \pi$. O tubo está orientado positivamente por sua normal exterior e a superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ tem orientação oposta à da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$. As linhas principais mínimas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ são obtidas por deslocamentos paralelos das linhas principais máximas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ e as linhas principais máximas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ são obtidas por deslocamentos paralelos das linhas principais mínimas de $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$.

A definição 4.2.6 permite-nos considerar a configuração principal da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ como segue:

Figura 4.2: Configurações suaves por partes da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de tangência quadrática, sendo $k_n(u_0) < k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: tangência interna se $\tau'_g(u_0) > 0$, à esquerda, e tangência interna se $\tau'_g(u_0) < 0$, à direita. Para mais detalhes sobre o caso quadrático ver [5].

Definição 4.2.7. A **configuração principal** da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ consiste de um par de folheações seccionalmente suaves, sendo suas singularidades os pontos umbílicos de $\mathbf{S}_\varepsilon \setminus \mathbf{B}_\varepsilon$ e as tangências mínimas (respectivamente máximas) destas folhas com $\mathbf{B}_\varepsilon$ quando $\varepsilon > 0$ (respectivamente $\varepsilon < 0$). As folhas suaves por partes são definidas pela justaposição das linhas de curvatura principal de $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$, $\mathbf{T}_\varepsilon$ e $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ como na definição 4.2.6.

Na figura 4.3, abaixo, em $u = u_0$ considerando $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$, $\tau''_g(u_0) \neq 0$ e $k_n(u_0) < k_n^\perp(u_0)$, o contato entre a linha de curvatura principal mínima da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ (linha tracejada) e o bordo comum $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ é cúbico (veja proposição 4.2.2). No semitubo de raio ε e centro variando sobre $\mathbf{B}$ temos que a linha principal máxima (linha contínua) tem contato cúbico com $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ em $\theta = 0$ e com $\mathbf{B}_{\varepsilon,-}$ em $\theta = \pi$ (veja proposição 4.2.5). Para a superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,-}$, o contato cúbico é entre a linha de curvatura principal máxima (linha contínua) e o bordo comum $\mathbf{B}_{\varepsilon,-}$.

Na figura 4.4, abaixo, em $u = u_0$ temos que $\tau_g(u_0) = \tau'_g(u_0) = 0$, $\tau''_g(u_0) \neq 0$, $k_n(u_0) > k_n^\perp(u_0)$ e as considerações são análogas às feitas para a figura 4.3.

Figura 4.3: Configurações suaves por partes da superfície $S_\varepsilon = S_{\varepsilon,+} \cup T_\varepsilon \cup S_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de contato cúbico, sendo $k_n(u_0) < k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: $\tau_g''(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau_g''(u_0) < 0$, à direita.

Figura 4.4: Configurações suaves por partes da superfície $S_\varepsilon = S_{\varepsilon,+} \cup T_\varepsilon \cup S_{\varepsilon,-}$ em uma vizinhança do ponto de contato cúbico, sendo $k_n(u_0) > k_n^\perp(u_0)$. Dois casos: $\tau_g''(u_0) > 0$, à esquerda e $\tau_g''(u_0) < 0$, à direita.

4.3 Regularização de S_ε em uma Carta Local

Nesta seção vamos estudar as configurações principais das μ -regularizações das superfícies S_ε , para $\varepsilon, \mu > 0$ suficientemente pequenos.

Vamos supor que δ é uma parametrização regular de uma componente conexa de $\mathbf{B}$ e que δ_+ é uma parametrização pelo comprimento de arco u da curva $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ tal que $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel de $\mathbb{R}^3$ ao longo de δ_+ . Portanto, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\varepsilon,+} - \varepsilon \mathcal{N}$ e $\delta = \delta_+ - \varepsilon \mathcal{N}$.

Na proposição 4.3.1, abaixo, apresentamos uma parametrização para o tubo de raio constante $\varepsilon > 0$ e centro sobre a curva $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$. Este tubo é o envelope da família de esferas de raio $\varepsilon > 0$ e centro variando sobre $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$, veja exemplo 4.1.1.

Proposição 4.3.1. *Seja $\delta_+ : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa de $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ tal que $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel de $\mathbb{R}^3$ ao longo de δ_+ . Então a expressão*

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon(u, v) = & \delta_+(u) - \left\{ \frac{\varepsilon^2 [1 + \varepsilon k_n(u)] \tau_g(u) \sin(2v)}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) [1 + \sin v]} \right\} T(u) + \\ & + \left\{ \frac{\varepsilon [1 + \varepsilon k_n(u)]^2 \sin(2v)}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) [1 + \sin v]} \right\} B(u) - \\ & - \left\{ \frac{2\varepsilon [1 + \varepsilon k_n(u)]^2 \sin^2 v}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) [1 + \sin v]} \right\} \mathcal{N}(u), \quad v \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (4.7)$$

cuja expansão em série de Taylor nas variáveis v e ε , até a ordem 5, na vizinhança de $v = \varepsilon = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon(u, v) = & \delta_+(u) + \\ & + \left\{ \tau_g(u) [2\varepsilon^2 \tau_g^2(u) + 2\varepsilon k_n(u) - 2\varepsilon^2 k_n^2(u) - 2] \varepsilon^2 v + \frac{4}{3} \tau_g(u) \varepsilon^2 v^3 + O(6) \right\} T(u) + \\ & + \left\{ 2 [1 - \varepsilon^2 \tau_g^2(u) (1 - 2\varepsilon k_n(u))] \varepsilon v - \frac{4}{3} \varepsilon v^3 + O(6) \right\} B(u) + \\ & + \left\{ 2 [\varepsilon^2 \tau_g^2(u) - 1] \varepsilon v^2 + \frac{2}{3} \varepsilon v^4 + O(6) \right\} \mathcal{N}(u) \end{aligned} \quad (4.8)$$

define uma parametrização regular do tubo de raio ε e centro variando ao longo de $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$, onde $k_n(u)$ é a curvatura normal e $\tau_g(u)$ é a torção geodésica da curva bordo, $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$, da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$. Veja figura 4.5.

Demonstração. Denotemos por $\mathbf{T}_\varepsilon$ o tubo de raio ε e centro variando sobre $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$. Como $\mathbf{T}_\varepsilon$ é o envelope da família de esferas de raio ε e centro sobre $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$ temos que $P \in \mathbf{T}_\varepsilon$ satisfaz:

$$\|P - (\delta_+(u) - \varepsilon\mathcal{N}(u))\|^2 = \varepsilon^2. \quad (4.9)$$

Derivando a equação (4.9) em relação à variável u obtemos

$$\langle P - \delta_+(u) + \varepsilon\mathcal{N}(u), -\delta'_+(u) + \varepsilon\mathcal{N}'(u) \rangle = 0 \quad (4.10)$$

Figura 4.5: B é o deslocamento paralelo do bordo $B_{\varepsilon,+}$ na direção de $-\mathcal{N}$, sendo $\mathcal{N}$ campo normal da superfície $S_{\varepsilon,+}$.

Observe que o sistema de equações

$$\begin{cases} \|P - (\delta_+(u) - \varepsilon\mathcal{N}(u))\|^2 &= \varepsilon^2 \\ \langle P - (\delta_+(u) - \varepsilon\mathcal{N}(u)), -\delta'_+(u) + \varepsilon\mathcal{N}'(u) \rangle &= 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

representa um círculo na esfera de raio ε e centro sobre a curva $\delta_+ - \varepsilon\mathcal{N}$ pois, para cada u fixado, tal sistema define a interseção da esfera e do cone de vértice $\delta_+(u) - \varepsilon\mathcal{N}(u)$.

Lembremos que o referencial de Darboux $\{T, B = \mathcal{N} \wedge T, \mathcal{N}\}$ ao longo de δ_+ satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} T'(u) &= k_g(u)B(u) + k_n(u)\mathcal{N}(u), \\ B'(u) &= -k_g(u)T(u) + \tau_g(u)\mathcal{N}(u), \\ \mathcal{N}'(u) &= -k_n(u)T(u) - \tau_g(u)B(u), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $k_n(u)$ é a *curvatura normal*, $k_g(u)$ é a *curvatura geodésica* e $\tau_g(u)$ é a *torção geodésica* da curva bordo deslocada $B_{\varepsilon,+}$.

Assim, supondo que $P = \delta_+(u) + xT(u) + yB(u) + z\mathcal{N}(u)$ nas equações (4.11), obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + \varepsilon)^2 &= \varepsilon^2 \\ \langle xT(u) + yB(u) + (z + \varepsilon)\mathcal{N}(u), -\delta'_+(u) + \varepsilon\mathcal{N}'(u) \rangle &= 0 \end{cases},$$

o qual pode ser reescrito, usando o referencial de Darboux ao longo de $B_{\varepsilon,+}$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + \varepsilon)^2 &= \varepsilon^2 \\ \langle xT(u) + yB(u) + (z + \varepsilon)\mathcal{N}(u), -T(u) + \varepsilon[-k_n(u)T(u) - \tau_g(u)B(u)] \rangle &= 0 \end{cases}. \quad (4.13)$$

O sistema (4.13) reduz-se a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + \varepsilon)^2 = \varepsilon^2 \\ (1 + \varepsilon k_n(u))x + \varepsilon \tau_g(u)y = 0 \end{cases}. \quad (4.14)$$

Como já foi discutido acima, para cada u fixado, o sistema (4.14) representa um círculo de raio $f(u, v)$ na esfera de raio ε e centro sobre a curva $\delta_+(u) - \varepsilon \mathcal{N}(u)$, considerando $v > 0$ como sendo o ângulo indicado na figura 4.6, abaixo.

Figura 4.6: Solução do sistema (4.14): para cada u_0 fixado temos um círculo de raio $f(u_0, v)$ obtido da interseção entre a esfera de centro $Q = \delta_+(u_0) - \varepsilon \mathcal{N}(u_0)$ e raio ε e o plano Π de equação $(1 + \varepsilon k_n(u_0))x + \varepsilon \tau_g(u_0)y = 0$.

Portanto, sendo $y = f(u, v) \cos v$ e $z = -f(u, v) \sin v$ ¹ no sistema (4.14), obtemos:

$$\begin{cases} x^2 + f^2(u, v) - 2\varepsilon f(u, v) \sin v = 0 \\ (1 + \varepsilon k_n(u))x + \varepsilon \tau_g(u)f(u, v) \cos v = 0 \end{cases}. \quad (4.15)$$

A solução não nula de (4.15) é dada por:

$$x = -\frac{2\varepsilon^2 [1 + \varepsilon k_n(u)] \tau_g(u) \sin v \cos v}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) (1 + \sin v)},$$

$$f(u, v) = \frac{2\varepsilon [1 + \varepsilon k_n(u)]^2 \sin v}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) (1 + \sin v)}.$$

Substituindo os valores obtidos acima para x , $y = f(u, v) \cos v$ e $z = -f(u, v) \sin v$,

¹Consideramos $z = -f(u, v) \sin v$, pois como $v \in [0, -2\pi]$, $-v \in [0, 2\pi]$ e $\sin(-v) = -\sin v$.

obtemos

$$\begin{aligned}
 P &= \delta_+(u) + xT(u) + yB(u) + z\mathcal{N}(u) \\
 &= \delta_+(u) - \left\{ \frac{\varepsilon^2 [1 + \varepsilon k_n(u)] \tau_g(u) \sin(2v)}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) (1 + \sin v)} \right\} T(u) + \\
 &\quad + \left\{ \frac{\varepsilon [1 + \varepsilon k_n(u)]^2 \sin(2v)}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) (1 + \sin v)} \right\} B(u) - \left\{ \frac{2\varepsilon [1 + \varepsilon k_n(u)]^2 \sin^2 v}{[1 + \varepsilon k_n(u)]^2 - \varepsilon^2 \tau_g(u) (1 + \sin v)} \right\} \mathcal{N}(u),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

cuja expansão em série de Taylor nas variáveis v e ε , até a ordem 5, na vizinhança de $v = \varepsilon = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 Y_\varepsilon(u, v) &= \delta_+(u) + \\
 &\quad + \left\{ \tau_g(u) [2\varepsilon^2 \tau_g^2(u) + 2\varepsilon k_n(u) - 2\varepsilon^2 k_n^2(u) - 2] \varepsilon^2 v + \frac{4}{3} \tau_g(u) \varepsilon^2 v^3 + O(6) \right\} T(u) + \\
 &\quad + \left\{ 2 [1 - \varepsilon^2 \tau_g^2(u) (1 - 2\varepsilon k_n(u))] \varepsilon v - \frac{4}{3} \varepsilon v^3 + O(6) \right\} B(u) + \\
 &\quad + \left\{ 2 [\varepsilon^2 \tau_g^2(u) - 1] \varepsilon v^2 + \frac{2}{3} \varepsilon v^4 + O(6) \right\} \mathcal{N}(u)
 \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. □

Proposição 4.3.2. *Seja $\delta_+ : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização pelo comprimento de arco u de uma componente conexa de $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$ tal que $\{T, B, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel de $\mathbb{R}^3$ ao longo de δ_+ . Então as expressões*

$$X_{\varepsilon,+}(u, v) = \delta_+(u) + vB(u) + \left[k_n^\perp(u) \frac{v^2}{2} + A(u, \varepsilon) \frac{v^3}{6} + C(u, v, \varepsilon) v^3 \right] \mathcal{N}(u), \quad -\mu < v \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 Y_\varepsilon(u, v) &= \delta_+(u) + \left\{ \tau_g(u) [\varepsilon^2 \tau_g^2(u) + \varepsilon k_n(u) - \varepsilon^2 k_n^2(u) - 1] \varepsilon v + \frac{\tau_g(u)}{6\varepsilon} v^3 + O(6) \right\} T(u) + \\
 &\quad + \left\{ [1 - \varepsilon^2 \tau_g^2(u) (1 - 2\varepsilon k_n(u))] v - \frac{v^3}{6\varepsilon^2} + O(6) \right\} B(u) + \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{2} [-1 + \varepsilon^2 \tau_g^2(u)] \frac{v^2}{\varepsilon} + \frac{v^4}{24\varepsilon^3} + O(6) \right\} \mathcal{N}(u), \quad 0 < v < \mu
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

definem uma parametrização regular de classe C^1 para a superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$, onde $C(u, 0, \varepsilon) = 0$, $k_n^\perp$ é a curvatura normal da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ na direção de $B = \mathcal{N} \wedge T$, k_n e τ_g são,

respectivamente, a curvatura normal e a torção geodésica da curva bordo deslocada $\mathbf{B}_{\varepsilon,+}$.

Demonstração. Observe que a parte linear de Y_ε em (4.8), proposição 4.3.1, é dada por $Y_\varepsilon(u, v) = \delta_+(u) + 2\varepsilon v B(u)$ e a parte linear de $X_{\varepsilon,+}$ em (4.17) dada por $X_{\varepsilon,+} = \delta_+(u) + v B(u)$. Portanto, considerando o reescalonamento

$$v = \frac{\tilde{v}}{2\varepsilon}$$

em (4.8) e reescrevendo $\tilde{v} = v$ ($\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno), obtemos a expressão de Y_ε em (4.17) e garantimos que as parametrizações em (4.17) da superfície, $X_{\varepsilon,+}$, e do tubo, Y_ε , ao longo da curva δ_+ são C^1 - próximas.

A demonstração segue análoga à da proposição 3.1.1 do capítulo 3. □

Uma parametrização da μ -regularização da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon$ será apresentada na próxima definição 4.3.3, na qual a função de transição $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é (como na definição 3.2.1 do capítulo 3) decrescente em $[0, \mu]$, $\phi(t) = 0$, para $t \geq \mu$, $\phi(t) = 1$, para $t \leq 0$ e $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(\mu) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Veja no apêndice 4.4 um exemplo de uma tal ϕ .

Definição 4.3.3. [Regularização] *Sejam ϕ uma função de transição e a superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$ como definida na seção 4.2. Para $\mu > 0$, a μ -regularização de $\mathbf{S}_\varepsilon$, denotada por $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$ é (não unicamente) definida por*

$$Z(u, v, \varepsilon) = \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right) X_{\varepsilon,+}(u, v) + \left[1 - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right] Y_\varepsilon(u, v), \quad -\varepsilon^2\mu < v < \varepsilon^2\mu, \quad (4.18)$$

onde $X_{\varepsilon,+}$ e Y_ε são, respectivamente, as parametrizações da superfície $\mathbf{S}_{\varepsilon,+}$ e do tubo $\mathbf{T}_\varepsilon$ dadas pelas expressões (4.17) da proposição 4.3.2.

Assim, a equação (4.18) torna-se:

$$\begin{aligned} Z(u, v, \varepsilon) = & \delta_+(u) - \left\{ \tau_g(u)\varepsilon v - \tau_g(u)k_n(u)\varepsilon^2 v - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right) [1 - \varepsilon k_n(u)] \tau_g(u)\varepsilon v \right\} T(u) + \\ & + \left\{ v - \tau_g^2(u)v\varepsilon^2 - \frac{1}{6}\frac{v^3}{\varepsilon^2} + \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right) \left[\frac{v^2}{6\varepsilon^2} + \varepsilon^2\tau_g^2(u) \right] v \right\} B(u) - \\ & - \left\{ \frac{v^2}{2\varepsilon} - \phi\left(\frac{v}{\varepsilon^2}\right) \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{k_n^\perp(u)}{2}v + \frac{1}{6}A(u, \varepsilon)v + C(u, v, \varepsilon)v \right] v^2 \right\} \mathcal{N}(u), \\ & -\varepsilon^2\mu < v < \varepsilon^2\mu, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $C(u, 0, \varepsilon) = 0$ e $\{T, B, \mathcal{N}\}$ é um referencial móvel de $\mathbb{R}^3$ ao longo de $\delta_+(u)$.

Façamos o reescalonamento $v = \varepsilon^2 w$ na expressão (4.19). Logo, na carta (u, w) a

parametrização de $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$ é dada por:

$$\begin{aligned} Z(u, w, \varepsilon) = & \delta_+(u) - \left\{ \tau_g(u) \varepsilon^3 w - \tau_g(u) k_n(u) \varepsilon^4 w^2 - \phi(w) [1 - \varepsilon k_n(u)] \tau_g(u) \varepsilon^3 w \right\} T(u) + \\ & + \left\{ \varepsilon^2 w - \tau_g^2(u) \varepsilon^4 w - \frac{\varepsilon^4 w^3}{6} + \phi(w) \left[\frac{\varepsilon^2 w^2}{6} + \varepsilon^2 \tau_g^2(u) \right] \varepsilon^2 w \right\} B(u) - \\ & - \left\{ \frac{\varepsilon^3 w^2}{2} - \phi(w) \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{k_n^\perp(u)}{2} \varepsilon^2 w + \frac{1}{6} A(u, \varepsilon) \varepsilon^2 w + C(u, w, \varepsilon) \varepsilon^4 w \right] \varepsilon^4 w^2 \right\} \mathcal{N}(u), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$-\mu < w < \mu$, onde $C(u, 0, \varepsilon) = 0$.

O nosso objetivo é estudar os pontos umbílicos Darbouxianos e suas transições sobre a superfície regularizada $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$, $\varepsilon, \mu > 0$ suficientemente pequenos. Para isso, usando a parametrização dada em (4.20), vamos determinar a equação diferencial das linhas de curvatura na carta (u, w) , a qual é dada por:

$$L(u, w, \varepsilon) dw^2 + M(u, w, \varepsilon) dudw + N(u, w, \varepsilon) du^2 = 0,$$

sendo $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$.

Abaixo, omitiremos a variável u das funções $k_n^\perp(u)$, $k_n(u)$ e $\tau_g(u)$ e a variável w da função $\phi(w)$ a fim de simplificar a notação.

Considerando $Z_\varepsilon(u, w) = Z(u, w, \varepsilon)$, da equação (4.20) temos na carta (u, w) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial u} = & \left\{ 1 - \varepsilon^2 w k_g + \varepsilon^3 \left[w(1 - \phi) \left(\frac{1}{2} w k_n - \tau_g' \right) \right] + \varepsilon^4 w(\dots) \right\} T(u) + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^3 w \tau_g (w - 2k_g) (1 - \phi) + \frac{1}{2} \varepsilon^4 w \tau_g(\dots) \right\} B(u) + \\ & + \left\{ \varepsilon^2 w \tau_g - \varepsilon^3 w \tau_g k_n (1 - \phi) + \varepsilon^4 w(\dots) \right\} \mathcal{N}(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial w} = & \left\{ \varepsilon^3 \tau_g (w \phi' - \phi) + \varepsilon^4 k_n \tau_g (1 - \phi - w \phi') + \varepsilon^5(\dots) \right\} T(u) + \\ & + \left\{ \varepsilon^2 - \varepsilon^4 \left[\tau_g^2 (1 - \phi - w \phi') + \frac{1}{2} w^2 \left(1 - \phi - \frac{1}{3} w \phi' \right) \right] + \varepsilon^5 \tau_g^2 k_n(\dots) \right\} B(u) + \\ & + \left\{ \varepsilon^3 w \left(-1 + \phi + \frac{1}{2} w \phi' \right) + \varepsilon^4 w k_n^\perp \left(\phi + \frac{1}{2} w \phi' \right) + \varepsilon^5 w(\dots) \right\} \mathcal{N}(u). \end{aligned}$$

O vetor normal (não unitário) a $\mathbf{S}_{\varepsilon,\mu}$ é dado por:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(u, w) = ((Z_\varepsilon)_u \wedge (Z_\varepsilon)_w)(u, w) = n_1 T(u) + n_2 B(u) + n_3 \mathcal{N}(u), \quad (4.21)$$

onde

$$n_1 = -\varepsilon^4 w \tau_g + \varepsilon^5 w \tau_g k_n (1 - \phi) + \varepsilon^6 \left\{ w \tau_g (2\tau_g^2 + k_n^2) (1 - \phi) + w^2(\dots) \right\} + \varepsilon^7(\dots),$$

$$n_2 = \varepsilon^3 w \left(1 - \phi - \frac{1}{2} w \phi' \right) + \varepsilon^4 w k_n^\perp \left(-\phi - \frac{1}{2} w \phi' \right) + \varepsilon^5 \left\{ 2\tau_g^2 w (\phi - 1) + \right. \\ \left. + w^2 \left[k_g (\phi - 1) + \frac{3}{2} \tau_g^2 \phi' \right] + w^3(\dots) \right\} + \varepsilon^6 w(\dots),$$

$$n_3 = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 \left\{ \tau_g^2 (\phi - 1) + w [\tau_g^2 \phi' - k_g] + \frac{1}{2} w^2 \left(-1 + \phi + \frac{1}{3} \phi' \right) + w^3(\dots) \right\} + \varepsilon^5(\dots).$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de Z_ε , expressos na carta (u, w) , são:

$$\begin{aligned} E(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial u} \right\rangle = 1 - 2\varepsilon^2 w k_g + \varepsilon^3 w \left[(1 - \phi) (w k_n - 2\tau_g') \right] + \varepsilon^4(\dots), \\ F(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial u}, \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \varepsilon^3 [\tau_g (-1 + \phi + w \phi')] + \\ &\quad + \varepsilon \tau_g k_n (1 - \phi - w \phi') + \varepsilon^2(\dots), \\ G(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial w}, \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial w} \right\rangle = \varepsilon^4 \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[-\tau_g^2 (1 - \phi^2) + 2\tau_g^2 w \phi \phi' + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w^2 (-1 + \tau_g^2 (\phi')^2 + \phi^2) + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental de Z_ε , expressos na carta (u, w) , são dados por $\frac{e}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, $\frac{f}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$ e $\frac{g}{|\mathcal{N}_\varepsilon|}$, onde $\mathcal{N}_\varepsilon$ é o vetor normal definido em (4.21) e

$$\begin{aligned} e(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 Z_\varepsilon}{\partial u^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^2 k_n + \varepsilon^3 k_g w \left(1 - \phi - \frac{1}{2} w \phi' \right) + \varepsilon^4 w(\dots), \\ f(u, w, \varepsilon) &= \left\langle \frac{\partial^2 Z_\varepsilon}{\partial u \partial w}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_g + \varepsilon^5 \tau_g k_n (-1 + \phi + w \phi') + \\ &\quad + \varepsilon^6 \left\{ (k_n^\perp)' w \left(\phi + \frac{1}{2} w \phi' \right) - 2\tau_g^3 (1 - \phi - w \phi') + \right. \\ &\quad \left. + \tau_g \left[\frac{1}{2} k_g w (1 - \phi - w \phi') (-2 + 2\phi + w \phi') + k_n^2 (1 - \phi - w \phi') + w^2(\dots) \right] \right\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$g(u, w, \varepsilon) = \left\langle \frac{\partial^2 Z_\varepsilon}{\partial w^2}, \mathcal{N}_\varepsilon \right\rangle (u, w, \varepsilon) = \varepsilon^5 \left[-1 + \phi + 2w\phi' + \frac{1}{2}w^2\phi'' \right] + \\ + \varepsilon^6 k_n^\perp \left[\phi + 2w\phi' + \frac{1}{2}w^2\phi'' \right] + \varepsilon^7(\dots).$$

Sendo $L = Fg - Gf$, $M = Eg - Ge$ e $N = Ef - Fe$, dos cálculos acima obtemos:

$$L(u, w, \varepsilon) = -\varepsilon^8 \tau_g(u) \left\{ 2\phi(w) - \phi(w)^2 + 3w\phi'(w)(1 - \phi(w)) + \frac{1}{2}w^2[\phi''(w)(1 - \phi(w)) - 4(\phi'(w))^2] - \frac{1}{2}w^3\phi'(w)\phi''(w) \right\} + \varepsilon^9 \tau_g(u) (k_n^\perp - k_n)(u) \{ \phi(w)(\phi(w) - 1) + \\ + w\phi'(w)(3\phi(w) - 2) - \frac{1}{2}w^2[\phi''(w)(\phi(w) - 1) - 4(\phi'(w))^2] + \frac{w^3}{2}\phi'\phi'' \} + \\ + \varepsilon^{10}(\dots),$$

$$M(u, w, \varepsilon) = \varepsilon^5 \left\{ -1 + \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w) \right\} + \tag{4.24} \\ + \varepsilon^6 \left\{ k_n^\perp(u) - k_n(u) + k_n^\perp(u) \left[-1 + \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w) \right] \right\} + \varepsilon^7(\dots),$$

$$N(u, w, \varepsilon) = \varepsilon^4 \tau_g(u) + \varepsilon^6 \left\{ w(k_n^\perp(u))' \left[\phi(w) + \frac{1}{2}w\phi'(w) \right] + \right. \\ + \tau_g(u) \left[\frac{1}{4}w^4(\phi'(w))^2 - \frac{2}{3}w^3\phi'(w) + w^3\phi(w)\phi'(w) - w^2\phi(w) + \right. \\ \left. \left. + w^2\phi^2 - 2wk_g(u) + 2w\tau_g^2\phi' - 2\tau_g^2(\phi(w) - 1) \right] \right\} + \varepsilon^7 \tau_g(\dots).$$

O teorema 4.3.4, abaixo, é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.3.4. *Seja $\delta(u_0)$ um ponto de contato cúbico para a superfície S tal que $\tau_g(u_0) = 0$, $\tau_g'(u_0) = 0$, $\tau_g''(u_0) > 0$ e $(k_n^\perp - k_n)(u_0) < 0$. Suponha que $k_n(u_0)$, $k_n'(u_0)$, $k_n^\perp(u_0)$, $(k_n^\perp)'(u_0)$, $(k_n^\perp)''(u_0)$ são todos não nulos e que $k_n'(u_0) \neq (k_n^\perp)'(u_0)$.*

Considere a família a 1 parâmetro de superfícies S_{τ_0} com bordo variável B_{τ_0} , sendo τ_0 definido pela expressão

$$\tau_g(u) = \tau_0 + \frac{\tau_g''(0)}{2}u^2 + \frac{\tau_g'''(0)}{6}u^3 + O(4), \tag{4.25}$$

(ilustração na figura 4.7). Denotemos por $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$ o ε -engrossamento e μ -regularização da superfície S_{τ_0} , ε , μ positivos e suficientemente pequenos (definição 4.3.3). No espaço de

parâmetros ε, τ_0 (ε, τ_0 suficientemente pequenos), existem duas curvas, D_{23} e D_{12} passando pela origem tais que:

- (i) acima da curva D_{23} , $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$ não possui pontos umbílicos em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$ em $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$;
- (ii) entre as curvas D_{23} e D_{12} , $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$ possui dois pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_2 e D_3 em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$ em $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$;
- (iii) abaixo da curva D_{12} , $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$ possui dois pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$ em $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$.
- (iv) para cada ponto da curva D_{23} existe um único ponto umbílico não Darbouxiano do tipo D_{23} em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$ em $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$;
- (v) para cada ponto da curva D_{12} existe um único ponto umbílico não Darbouxiano do tipo D_{12} em uma vizinhança do ponto $\delta(u_0)$ em $S_{\tau_0, \varepsilon, \mu}$.

Estas situações estão ilustradas no plano Π da figura 4.8.

Figura 4.7: Família a 1 parâmetro de superfícies S_{τ_0} com bordo variável B_{τ_0} . Se $\tau_0 = 0$ temos um ponto de contato cúbico entre as linhas de curvatura principal mínima de $S_0 = S$ com o bordo $B_0 = B$. Com relação à superfície S_{τ_0} ($\tau_0 < 0$), o contato das linhas de curvatura de S_{τ_0} com B_{τ_0} é quadrático externo (curva azul) e quadrático interno (curva vermelha). Destes pontos de tangências quadráticas externa e interna emergem pontos umbílicos Darbouxianos, respectivamente, dos tipos D_1 e D_3 ; isto foi demonstrado por Garcia e Sotomayor em [5], em um contexto local específico e para valores pequenos do parâmetro $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em duas partes: na primeira delas determinaremos os pontos umbílicos não Darbouxianos do tipo D_{23} e, na segunda, os pontos umbílicos não Darbouxianos do tipo D_{12} .

Figura 4.8: Diagrama de bifurcação em uma vizinhança de um ponto de contato cúbico.

Pontos umbílicos não Darbouxianos do tipo D_{23}

Vimos na seção 1.3.2 do capítulo 1 que o ponto umbílico não Darbouxiano D_{23} ocorre quando a condição de regularidade, T , da definição 1.2.2 é desrespeitada e a condição do discriminante, D , é preservada. Veja definição do ponto D_{23} em 1.3.4.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $u_0 = 0$.

Considere na expressão de $N(u, w, \varepsilon)$ em (4.24) que a torção geodésica $\tau_g(u)$ tem a seguinte expansão de Taylor na variável u , até ordem 3, na vizinhança de $u = 0$.

$$\tau_g(u) = \tau_0 + \frac{\tau_g''(0)}{2}u^2 + \frac{\tau_g'''(0)}{6}u^3 + O(4), \quad (4.26)$$

onde $\tau_g'(0) = 0$, $\tau_g''(0) \neq 0$, por hipótese do teorema e $\tau_0 := \tau_g(0)$.

Iremos seguir os seguinte passos:

(1) Nosso primeiro objetivo é determinar os pontos umbílicos não Darbouxianos D_{23} . Três condições necessárias para termos pontos umbílicos D_{23} são dadas pelas equações do seguinte sistema:

$$\begin{cases} M(u, w, \varepsilon) = 0 \\ N(\tau_0, u, w, \varepsilon) = 0 \\ \det\left(\frac{\partial(M, N)}{\partial(u, w)}\right) = 0 \end{cases}, \quad (4.27)$$

sendo as expressões de M e N obtidas em (4.24).

Vamos resolver $M(u, w, \varepsilon) = 0$. Como $\varepsilon > 0$, observe que $M(u, w, \varepsilon) = 0$ se, e somente

se,

$$\begin{aligned}\tilde{M}(u, w, \varepsilon) &= \left[-1 + \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w) \right] + \\ &+ \varepsilon \left[k_n^\perp(u) - k_n(u) + k_n^\perp(u) \left(-1 + \phi(w) + 2w\phi'(w) + \frac{1}{2}w^2\phi''(w) \right) \right] + \\ &+ \varepsilon^2(\dots) = 0,\end{aligned}$$

onde $\tilde{M}(u, w, \varepsilon) = \frac{M(u, w, \varepsilon)}{\varepsilon^5}$.

Logo, das propriedades da função de transição ϕ , temos:

$$\tilde{M}(0, 0, 0) = -1 + \phi(0) = 0 \quad \text{e}$$

$$\tilde{M}_\varepsilon(0, 0, 0) = \phi(0)k_n^\perp(0) - k_n(0) = k_n^\perp(0) - k_n(0) \neq 0,$$

por hipótese do teorema. Resolvendo $\tilde{M}(u, w, \varepsilon) = 0$, em uma vizinhança da origem, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave $\varepsilon(u, w)$ tal que $\tilde{M}(u, w, \varepsilon(u, w)) = 0$ e $\varepsilon(0, 0) = 0$.

Após algumas diferenciações, obtemos a seguinte expansão de Taylor nas variáveis u e w , até a ordem 2, para a função $\varepsilon(u, w)$ em uma vizinhança de $u = w = 0$.

$$\begin{aligned}\varepsilon(u, w) &= \frac{1 - \phi(0)}{(\phi k_n^\perp - k_n)(0)} + \frac{(-1 + \phi(0)) \left[\phi(k_n^\perp)' - k_n' \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} u + \frac{2\phi'(0) (k_n - k_n^\perp)(0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} w - \\ &- (1 - \phi(0)) \left\{ \frac{\left[\phi(k_n^\perp)'' - k_n'' \right](0)}{2[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} - \frac{\left[k_n'(0) - \phi(0) (k_n^\perp)'(0) \right]^2}{6[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} \right\} u^2 + \\ &+ 2 \left\{ \frac{(1 - \phi(0)) \phi'(0) (k_n^\perp)'(0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} - \frac{[\phi'(k_n - k_n^\perp)] [\phi(k_n^\perp)' - k_n'](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} - \right. \\ &- \left. \frac{(\phi' k_n)(0) \left[(1 - \phi) (k_n' - \phi(k_n^\perp)') \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} \right\} uw + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_n - k_n^\perp)(0) [\phi''(\phi k_n^\perp - k_n) - 8(\phi')^2 k_n^\perp](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} \right\} w^2 + O(3).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Agora, vamos resolver $N(\tau_0, u, w, \varepsilon) = 0$. Como $\varepsilon > 0$, observe da expressão de N em

(4.24) que $N(\tau_0, u, w, \varepsilon) = 0$ se, e somente se, $\tilde{N}(\tau_0, u, w, \varepsilon) = 0$, sendo $\tilde{N} = \frac{N}{\varepsilon^4}$.

Substituindo $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ da equação (4.28) em $\tilde{N}(\tau_0, u, w, \varepsilon)$, obtemos

$$\tilde{N}(\tau_0, u, w) = \tilde{N}(\tau_0, u, w, \varepsilon(u, w)).$$

A equação $\tilde{N}(\tau_0, u, w) = 0$ é a equação a ser resolvida, em uma vizinhança do ponto $(\tau_0, u, w) = (0, 0, 0)$.

Das propriedades da função de transição ϕ , temos que $\tilde{N}(0, 0, 0) = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tau_0}(0, 0, 0) &= 864 \left[(\phi k_n^\perp - k_n)(0) \right]^4 \left\{ 6 [\phi(0) - 1]^3 \tau_g^2(0) + \left[(\phi k_n^\perp - k_n)(0) \right]^2 \right\} = \\ &= 864 \left[(k_n^\perp - k_n)(0) \right]^6 \neq 0, \end{aligned}$$

por hipótese do teorema. Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função suave $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ tal que $\tilde{N}(\tau_0(u, w), u, w) = 0$ e $\tau_0(0, 0) = 0$.

Assim, obtemos a seguinte expansão de Taylor nas variáveis u e w , até a ordem 2, da função $\tau_0(u, w)$ em uma vizinhança de $(u, w) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \tau_0(u, w) &= - \frac{\left[\phi(\phi - 1)^2 (k_n^\perp)' \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} w - \frac{\tau_g''(0)}{2} u^2 - \\ &\quad - \phi(0) [(\phi - 1)(0)]^2 \left\{ \frac{(k_n^\perp)''(0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^2} + \frac{2 (k_n^\perp)'(0) \left[k_n' - \phi(k_n^\perp)' \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} \right\} uw + \\ &\quad + \frac{\left[(\phi - 1) (k_n^\perp)' \right](0)}{2} \left\{ \frac{\phi'(0) \left[\phi(9k_n - 7k_n^\perp - \phi k_n^\perp) - k_n \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \left[\phi(\phi - 1)^3 k_g \right](0)}{[(\phi k_n^\perp - k_n)(0)]^4} \right\} w^2 + O(3). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Por fim resolveremos a terceira equação do sistema (4.27), dada por:

$$d := \det \left(\frac{\partial(M, N)}{\partial(u, w)} \right) = 0.$$

Usando as expressões de M e N da equação (4.24) e considerando, como antes, que

$$\tau_g(u) = \tau_0 + \frac{\tau_g''(0)}{2} u^2 + \frac{\tau_g'''(0)}{6} u^3 + O(4),$$

onde $\tau'_g(0) = 0$, $\tau''_g(0) \neq 0$, por hipótese do teorema e $\tau_0 := \tau_g(0)$, obtemos, após alguns cálculos, o seguinte:

$$\begin{aligned} d = d(\tau_0, u, w, \varepsilon) &= -3\tau''_g(0) [w\phi''(w) + \phi'(w)] u - 3\tau'''_g(0) [w\phi''(w) + \phi'(w)] u^2 - \\ &\quad - \frac{3}{2}w [w\phi''(w) + \phi'(w)] \left\{ \left(k_n^\perp\right)''(0) [2\phi(w) + w\phi'(w)] - 4\tau_0 k'_g(0) \right\} \varepsilon^2 - \\ &\quad - 3\tau''_g(0) k_n^\perp(0) [w\phi''(w) + \phi'(w)] u\varepsilon + O(3). \end{aligned}$$

O próximo passo será substituir neste determinante jacobiano, $d(\tau_0, u, w, \varepsilon)$, as expressões obtidas para $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ em (4.28) e $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ em (4.29). Fazendo isso, teremos a seguinte equação a ser resolvida em uma vizinhança de $(u, w) = (0, 0)$.

$$d(u, w) = d(\tau_0(u, w), u, w, \varepsilon(u, w)) = 0. \quad (4.30)$$

A solução de (4.30) tem a seguinte expressão: ²

$$\begin{aligned} u_{23} &= \left\{ \frac{-[\phi(0) - 1]^2 \left(k_n^\perp\right)''(0) [\phi(0)k_n(0) - k_n^\perp(0)]}{\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \right\} w + \\ &\quad + \left\{ \frac{6\phi'(0) \left(k_n^\perp\right)''(0) [1 - \phi(0)]}{\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^2} \right\} w^2 + O(3). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo $u_{23} = u_{23}(w)$ da equação (4.31) nas expressões para $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ em (4.28) e para $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ em (4.29), obtemos a seguinte equação paramétrica, com parâmetro w , para os pontos umbílicos do tipo D_{23} :

$$\begin{cases} \varepsilon_{23}(w) &= \varepsilon_{23}(u_{23}(w), w) \\ (\tau_0)_{23}(w) &= (\tau_0)_{23}(u_{23}(w), w) \end{cases}, \quad (4.32)$$

²A notação u_{23} na equação (4.31) faz referência ao caso que estamos demonstrando: determinar os pontos umbílicos do tipo D_{23} .

sendo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{23}(w) = & \frac{[\phi - 1] [k_n^\perp(0) (\phi - 2) + k_n(0)]}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^2} + \\
& + \frac{3\phi'}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \left\{ \left(k_n^\perp(0)\right)^2 [3\phi^2 - 8\phi + 6] + 2k_n(0)k_n^\perp(0) (\phi - 2) + k_n^2(0) \right\} w + \\
& + \left\{ \frac{9\phi' (k_n^\perp)''(0)(\phi - 1)^2}{\tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} + \frac{1}{2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} [39k_g(0)\phi' (2\phi - \phi^2 - 1) + \right. \\
& + 6k_n^\perp(0) (3\phi k_n^\perp(0) + 2k_n(0) - 8k_n^\perp(0)) \phi \phi'' + 6 (k_n^2 - 4k_n^\perp k_n + 6 (k_n^\perp)^2) (0) \phi'' \Big] + \\
& + \frac{18 (\phi')^2}{2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^4} \left[6 (k_n^\perp(0))^3 \phi^2 + 3 (k_n^\perp(0))^2 (k_n(0) - 5k_n^\perp(0)) \phi + \right. \\
& + \left. k_n^\perp(0) (k_n^2 - 5k_n k_n^\perp + 10 (k_n^\perp)^2) (0) \right] \Big\} w^2 + \dots, \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tau_0)_{23}(w) = & \left\{ \frac{(k_n^\perp)'(0) (\phi - 1)^2 [2k_n^\perp(0) - \phi k_n^\perp(0) - \phi k_n(0)]}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \right\} w - \\
& - \frac{(k_n^\perp)'(0) \phi' (\phi - 1)}{2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^4} \left\{ (k_n^\perp(0))^2 [34\phi^2 - 91\phi + 69] + \right. \\
& + 2k_n(0)k_n^\perp(0) [19\phi^2 - 33\phi + 2] + k_n^2(0) (13\phi - 1) \Big\} w^2 + \\
& + \left\{ \frac{12 (\phi - 1)^3 (k_n^\perp)'(0) (k_n^\perp)''(0) [(k_n^\perp)'(0) - k_n'(0)] \phi'}{\tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^5} \right\} w^3 + \dots. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

(2) Para que os pontos descritos pelas equações em (4.32) sejam, de fato, do tipo D_{23} , falta verificar que, ao longo destes pontos, o contato entre $M(u, w, \varepsilon) = 0$ e $N(u, w, \varepsilon) = 0$ é quadrático. A seguir, vamos verificar esta condição no espaço de parâmetros ε e τ_0 .

Seja J a seguinte matriz jacobiana:

$$J := \frac{\partial (\varepsilon, \tau_0)}{\partial (u, w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}(u, w) & \frac{\partial \varepsilon}{\partial w}(u, w) \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial u}(u, w) & \frac{\partial \tau_0}{\partial w}(u, w) \end{bmatrix},$$

onde as expressões de $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ e $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ são as dadas, respectivamente, pelas

equações (4.28) e (4.29).

Considere $\text{adj}(J)$, a matriz adjunta de J , logo

$$\text{adj}(J) = \begin{bmatrix} a_{11}(u, w) & a_{12}(u, w) \\ a_{21}(u, w) & a_{22}(u, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_0}{\partial w}(u, w) & -\frac{\partial \tau_0}{\partial u}(u, w) \\ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial w}(u, w) & \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}(u, w) \end{bmatrix}.$$

Denote por $b_{11} = b_{11}(w)$, $b_{21} = b_{21}(w)$ as respectivas restrições de $a_{11}(u, w)$ e $a_{21}(u, w)$ (poderíamos, também, ter escolhido a segunda coluna da matriz $\text{adj}(J)$) à curva $u_{23} = u_{23}(w)$ dada pela equação (4.31).

Afirmamos que o determinante da matriz W é não nulo, sendo

$$W := \begin{bmatrix} b_{11}(w) & \frac{d}{dw}u_{23}(w) \\ b_{21}(w) & \frac{d}{dw}u_{23}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(w) & 1 \\ b_{21}(w) & \frac{d}{dw}u_{23}(w) \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \det(W) &= b_{11}(w) \cdot \frac{d}{dw}u_{23}(w) - b_{21}(w) = \frac{(\phi(w) - 1)}{(\tau_g''(0))^2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^6} \{w(\dots) + \\ &+ \phi(w) [k_n^\perp (k_n^\perp)' (k_n^\perp)'' \tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3 (k_n(0))^2 - \\ &- \phi^2(w) [(k_n^\perp)' (k_n^\perp)'' k_n \tau_g''(0) (0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3 [k_n(0) + k_n^\perp(0)] \cdot \\ &\cdot [k_n(0) + 2k_n^\perp(0)] + \phi^3(w)(\dots)\}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde observamos que o denominador $\tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]$ é não nulo, por hipótese.

Segue das propriedades da função de transição ϕ que, para w próximo de 0, $\phi(w)$ está próximo de 1, porém é sempre menor que 1, uma vez que ϕ é uma função decrescente. Portanto, para w próximo de 0, $\det(W)$ em (4.35) é não nulo se, e somente se, o coeficiente de $\phi(w)$ dado por

$$[k_n^\perp (k_n^\perp)' (k_n^\perp)'' \tau_g''(0) (0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3 (k_n(0))^2 \quad (4.36)$$

é não nulo.

Como, por hipótese do teorema, $k_n^\perp(0)$, $(k_n^\perp)'(0)$, $(k_n^\perp)''(0)$ e $k_n(0)$ são todos não nulos, temos $\det(W) \neq 0$ para w próximo de 0.

Portanto, (4.32) é a imagem de uma dobra de Whitney e, para cada w , $(u_{23}(w), w)$

são as coordenadas do ponto umbílico não Darbouxiano D_{23} . Ver [14] para mais detalhes sobre a Teoria de Whitney.

Pontos umbílicos não Darbouxianos do tipo D_{12}

Na segunda parte da demonstração vamos determinar os pontos umbílicos do tipo D_{12} .

Como antes suponha, sem perda de generalidade, que $u_0 = 0$.

Vimos na seção 1.3.1 do capítulo 1 que o ponto umbílico não Darbouxiano D_{12} ocorre quando a condição do discriminante, D , da definição 1.2.2 é desrespeitada e a condição de transversalidade, T , é preservada. Veja definição do ponto D_{12} em 1.3.1.

Também vimos no capítulo 1, definição 1.2.1, que na carta $(u, w; p)$, sendo $p = dw/du$, consideramos a superfície de Lie-Cartan $\mathcal{L}^{-1}\{0\}$ sobre a qual temos definido o campo de Lie-Cartan X , sendo:

$$\mathcal{L}(u, w, \varepsilon; p) = L(u, w, \varepsilon)p^2 + M(u, w, \varepsilon)p + N(u, w, \varepsilon) = 0,$$

L, M, N dadas pelas expressões da equação (4.24) e

$$X = \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial u} + p \mathcal{L}_p \frac{\partial}{\partial w} - (\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_w) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Lembremos que as singularidades de X são $(0, 0; p)$, sendo p as raízes do polinômio cúbico $\Psi(p) = -(\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_w)$.

A condição D_{12} é equivalente à existência de uma raiz dupla e não nula do polinômio cúbico $\Psi(p) = -(\mathcal{L}_u + p \mathcal{L}_w)$.

Vamos denotar por $result(\Psi(p), \Psi'(p), p)$ o resultante dos polinômios $\Psi(p)$ e $\Psi'(p)$. Portanto, $\Psi(p)$ possui uma raiz dupla se, e somente se, $result(\Psi(p), \Psi'(p), p) = 0$.³

(3) Nosso objetivo é determinar os pontos umbílicos não Darbouxianos D_{12} . Três condições necessárias para termos pontos umbílicos do tipo D_{12} são dadas pelas equações do seguinte sistema:

$$\begin{cases} M(u, w, \varepsilon) &= 0 \\ N(\tau_0, u, w, \varepsilon) &= 0, \\ result(\Psi(p), \Psi'(p), p) &= 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

sendo as expressões de $M(u, w, \varepsilon)$ e $N(u, w, \varepsilon)$ dadas na equação (4.24) e lembrando que na expressão para $N(u, w, \varepsilon)$ a torção geodésica $\tau_g(u)$ tem a seguinte expansão de Taylor na variável u , até ordem 3, na vizinhança de $u = 0$:

$$\tau_g(u) = \tau_0 + \frac{\tau_g''(0)}{2}u^2 + \frac{\tau_g'''(0)}{6}u^3 + O(4),$$

³O resultante de dois polinômios é o determinante da matriz de Sylvester associada a estes polinômios.

onde $\tau'_g(0) = 0$, $\tau''_g(0) \neq 0$, por hipótese do teorema e $\tau_0 := \tau_g(0)$.

Após alguns cálculos obtemos:

$$\begin{aligned} result(\Psi(p), \Psi'(p), p) = & L_w \left\{ -2M_w N_w^2 L_u - 18L_w M_w N_w N_u - 2M_w^2 N_w M_u - \right. \\ & - 18L_w L_u N_w N_u - 2L_u^2 N_w M_u - 18L_w N_u M_u L_u - 18L_w N_u M_u M_w - \\ & - 2L_u M_u^2 M_w + 12L_u M_w^2 N_u + 12M_w L_u^2 N_u + 27L_w^2 N_u^2 + 4L_w N_w^3 + \\ & + 4L_w M_u^3 + 12L_w N_w M_u^2 - M_w^2 N_w^2 - L_u^2 N_w^2 - L_u^2 M_u^2 - M_w^2 M_u^2 - \\ & \left. + 4M_w^3 N_u + 4L_u^3 N_u + 12L_w N_w^2 M_u - 4M_w N_w M_u L_u \right\}, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial L}{\partial u} = L_u$, $\frac{\partial L}{\partial w} = L_w$, $\frac{\partial M}{\partial u} = M_u$, $\frac{\partial M}{\partial w} = M_w$, $\frac{\partial N}{\partial u} = N_u$ e $\frac{\partial N}{\partial w} = N_w$.

Seja

$$R(\tau_0, u, w, \varepsilon) := \frac{result(\Psi(p), \Psi'(p), p)}{L_w}. \quad (4.38)$$

Substituindo neste resultante $R(\tau_0, u, w, \varepsilon)$, as expressões obtidas para $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ em (4.28) e $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ em (4.29), teremos a seguinte equação a ser resolvida em uma vizinhança de $(u, w) = (0, 0)$:

$$R(u, w) = R(\tau_0(u, w), u, w, \varepsilon(u, w)) = 0. \quad (4.39)$$

A curva solução de (4.39) tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} u = & \frac{[\phi(w) - 1]^3 \left[k'_n(0) - 2(k_n^\perp)'(0) \right]^2}{12\phi'(w)\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} - \left\{ \frac{[\phi(w) - 1]^2 (k_n^\perp)''(0)}{\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^2} - \right. \\ & \left. - \frac{3[\phi(w) - 1]^2 \left[k'_n(0) - 2(k_n^\perp)'(0) \right]^2}{2\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \right\} w + \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Vale observar que a primeira parcela da equação (4.40) dada por:

$$\frac{[\phi(w) - 1]^3 \left[k'_n(0) - 2(k_n^\perp)'(0) \right]^2}{12\phi'(w)\tau''_g(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3}$$

é uma indeterminação pois para w próximo de 0, $\phi(w)$ está próximo de 1 e $\phi'(w)$ próximo de 0, das propriedades da função de transição ϕ . No entanto, pelo Teorema do

Valor Médio, podemos considerar $\phi(w) = 1 + w\phi'(w^*)$, $w^* \in (0, w)$. Como w está suficientemente próximo de 0, continuaremos usando w ao invés de w^* . Portanto, sendo $\phi(w) = 1 + w\phi'(w)$, para w próximo de 0, concluímos que $\frac{[\phi(w) - 1]^3}{\phi'(w)}$ está próximo de $w^3 [\phi'(w)]^2$. Por fim, considerando $\phi(w) = 1 + w\phi'(w)$ na equação (4.40) obtemos:⁴

$$u_{12} = \left\{ \frac{19 [\phi'(w)]^2 \left[k_n'(0) - 2 \left(k_n^\perp \right)'(0) \right]^2}{12 \tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} - \frac{\left(k_n^\perp \right)''(0) [\phi'(w)]^2}{\tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^2} \right\} w^3 + \dots \quad (4.41)$$

Substituindo $u_{12} = u_{12}(w)$ da equação (4.41) nas expressões para $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ em (4.28) e para $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ em (4.29), obtemos a seguinte equação paramétrica, com parâmetro w , para a curva D_{12} :

$$\begin{cases} \varepsilon_{12}(w) &= \varepsilon_{12}(u_{12}(w), w) \\ (\tau_0)_{12}(w) &= (\tau_0)_{12}(u_{12}(w), w) \end{cases}, \quad (4.42)$$

sendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(w) &= \frac{[\phi - 1] \left[k_n^\perp(0) (\phi - 2) + k_n(0) \right]}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^2} + \\ &+ \frac{3\phi'}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \left\{ \left(k_n^\perp(0) \right)^2 [3\phi^2 - 8\phi + 6] + 2k_n(0)k_n^\perp(0) (\phi - 2) + k_n^2(0) \right\} w + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \left[39k_g(0)\phi' (2\phi - \phi^2 - 1) + \right. \right. \\ &+ 6k_n^\perp(0) \left(3\phi k_n^\perp(0) + 2k_n(0) - 8k_n^\perp(0) \right) \phi\phi'' + 6 \left(k_n^2 - 4k_n^\perp k_n + 6 \left(k_n^\perp \right)^2 \right) (0)\phi'' \Big] + \\ &+ \frac{18 (\phi')^2}{2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^4} \left[6 \left(k_n^\perp(0) \right)^3 \phi^2 + 3 \left(k_n^\perp(0) \right)^2 \left(k_n(0) - 5k_n^\perp(0) \right) \phi + \right. \\ &+ \left. k_n^\perp(0) \left(k_n^2 - 5k_n k_n^\perp + 10 \left(k_n^\perp \right)^2 \right) (0) \right] \Big\} w^2 + \dots, \end{aligned} \quad (4.43)$$

⁴A notação u_{12} na equação (4.41) faz referência ao caso que estamos demonstrando: determinar os pontos umbílicos do tipo D_{12} .

$$\begin{aligned}
(\tau_0)_{12}(w) = & \left\{ \frac{\left(k_n^\perp\right)'(0)(\phi-1)^2 \left[2k_n^\perp(0) - \phi k_n^\perp(0) - \phi k_n(0)\right]}{[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^3} \right\} w - \\
& - \frac{\left(k_n^\perp\right)'(0)\phi'(\phi-1)}{2[k_n(0) - k_n^\perp(0)]^4} \left\{ \left(k_n^\perp(0)\right)^2 [34\phi^2 - 91\phi + 69] + \right. \\
& \left. + 2k_n(0)k_n^\perp(0) [19\phi^2 - 33\phi + 2] + k_n^2(0)(13\phi - 1) \right\} w^2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Falta verificar a condição de transversalidade, T , ao longo destes pontos. Faremos isso no espaço de parâmetros ε e τ_0 .

Seja J_1 a matriz jacobiana

$$J_1 := \frac{\partial(\varepsilon, \tau_0)}{\partial(u, w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u}(u, w) & \frac{\partial \varepsilon}{\partial w}(u, w) \\ \frac{\partial \tau_0}{\partial u}(u, w) & \frac{\partial \tau_0}{\partial w}(u, w) \end{bmatrix},$$

onde as expressões de $\varepsilon = \varepsilon(u, w)$ e $\tau_0 = \tau_0(u, w)$ são dadas, respectivamente, por (4.28) e (4.29).

Para w próximo de 0, concluímos que $\det(J)$ é não nulo. De fato,

$$\begin{aligned}
\det(J_1) = & \frac{1}{\left(\tau_g''(0)\right)^2 [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^6 [\phi k_n^\perp(0) - k_n(0)]} \{w(\dots) + \\
& + (\phi - 1)^3 \left[\tau_g''(0) \left(k_n^\perp\right)'(0) (k_n - k_n^\perp)'(0) \right] + (\phi - 1)^4 (\dots) \}.
\end{aligned}$$

Pelas hipóteses do teorema, concluímos que $\det(J_1) \neq 0$.

(4) As expressões paramétricas de pontos umbílicos do tipo D_{23} e do tipo D_{12} dadas, respectivamente, pelas equações (4.32) e (4.42) coincidem somente quando $w = 0$. De fato, observemos, por exemplo, que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}(w) = \varepsilon_{23}(w) & \iff \varepsilon_{12}(w) - \varepsilon_{23}(w) = 0 \iff \\
& \iff \frac{9w^2\phi'(w) \left(k_n^\perp\right)''(0) [\phi(w) - 1]^2 \left[k_n'(0) - \left(k_n^\perp\right)'(0)\right]}{\tau_g''(0) [k_n(0) - k_n^\perp(0)]^4} = 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Pela hipótese do teorema, sabemos que $k_n(0) \neq k_n^\perp(0)$, $k_n'(0) \neq \left(k_n^\perp\right)'(0)$ e que $\left(k_n^\perp\right)''(0)$ e $\tau_g''(0)$ são não nulos. Além disso, pelas propriedades da função de transição ϕ temos $\phi'(w) < 0$ e $[\phi(w) - 1]^2 > 0$, pois ϕ é decrescente.

Consequentemente, a equação (4.45) só é satisfeita se $w = 0$. Observe, também, que

$$(\tau_0)_{12}(w) = (\tau_0)_{23}(w) \text{ para } w = 0.$$

Portanto, supondo as hipóteses do teorema, usando a parametrização apresentada em (4.20) da superfície regularizada $S_{\varepsilon,\mu}$, $\varepsilon, \mu > 0$ suficientemente pequenos e as expressões de L , M e N definidas em (4.24) na carta (u, w) (sendo $w = v/\varepsilon^2$) determinamos, no item (1) da demonstração deste teorema, pontos umbílicos sobre os quais a condição de transversalidade foi desrespeitada. Para decidir se os pontos umbílicos em (1) são do tipo D_{23} verificamos, no item (2), que ao longo destes pontos, o contato entre $M(u, w, \varepsilon) = 0$ e $N(u, w, \varepsilon) = 0$ é quadrático (condição de Whitney). No item (3) encontramos pontos umbílicos sobre os quais a condição do discriminante foi vulnerada e vimos que nesses pontos o contato entre $M(u, w, \varepsilon) = 0$ e $N(u, w, \varepsilon) = 0$ é transversal, isto é, os pontos umbílicos são não-Darbouxianos do tipo D_{12} . No item (4) observamos que, no espaço de parâmetros ε e τ_0 , as curvas D_{23} e D_{12} passam pela origem e não se interceptam em uma vizinhança dela, completando a demonstração do teorema.

□

4.4 Apêndice

Neste apêndice vamos apresentar um exemplo de uma função de transição. Esta função foi utilizada por Garcia e Sotomayor em [5].

A função de transição $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida abaixo, é decrescente no intervalo $[0, \mu]$, $\phi^{(n)}(0) = \phi^{(n)}(\mu) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi(v) = 1$, para $v \leq 0$ e $\phi(v) = 0$, para $v \geq \mu$ (onde $\phi^{(n)} = \frac{d^n \phi}{dv^n}$). Veja figura 4.9.

Seja

$$h(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \leq 0 \\ e^{-a/v}, & \text{se } 0 < v \leq \mu \end{cases},$$

onde $a > 0$ é uma constante.

Considere a função ϕ como sendo definida por

$$\phi(v) = \frac{h(\mu - v)}{h(v) + h(\mu - v)}. \quad (4.46)$$

Observe que ϕ definida em (4.46) satisfaz:

* $\phi(v) = 1$, para todo $v \leq 0$.

De fato, $\phi(v) = \frac{h(\mu - v)}{h(v) + h(\mu - v)} = 1$, pois $h(v) = 0$, para $v \leq 0$;

* $\phi(v) = 0$, para todo $v \geq \mu$.

De fato, $\phi(v) = \frac{h(\mu - v)}{h(v) + h(\mu - v)} = 0$, pois $h(\mu - v) = 0$, para $v \geq \mu$;

* $\phi(v)$ é decrescente em $(0, \mu)$.

$$\text{De fato, } \phi'(v) = -\frac{\frac{a\mu}{(v-\mu)v} [v^2 + (\mu-v)^2]}{v^2(\mu-v)^2 \left[e^{-\frac{a}{v}} + e^{\frac{a}{v-\mu}} \right]^2} < 0, \text{ para } a > 0 \text{ e } 0 < v < \mu.$$

Além disso, das propriedades da função exponencial na base e podemos concluir que ϕ tem todas as derivadas iguais a zero em $v = 0$ e $v = \mu$ e $\phi_{vv}(v) < 0$, para v próximo de zero e $a > 0$ suficientemente pequeno.

Portanto, ϕ definida em (4.46) é uma função de transição.

Veja na figura 4.9, abaixo, um esboço do gráfico de ϕ para valores de μ e $a > 0$ suficientemente pequenos.

Figura 4.9: Gráfico da função de transição ϕ , para $a > 0$ e $\mu > 0$ suficientemente pequenos.

Conclusões

Neste trabalho retomamos a sequência de contribuições encontradas nas publicações de Gutierrez e Sotomayor [7] e [8], Gutierrez, Garcia e Sotomayor [9] e Garcia e Sotomayor [5], particularmente esta última na qual são abordadas questões sobre os efeitos da descontinuidade das superfícies, representada pela quebra da regularidade ou suavidade ao longo de uma curva, na configuração principal das mesmas. Desta forma, este estudo se insere na linha do trabalho clássico de Filippov [3] para o retrato de fase das equações diferenciais descontínuas em geral, aspectos que foram reformulados e estendidos por Sotomayor e Teixeira [12] e Sotomayor e Machado [11], usando o *método da regularização* e comparando as equações diferenciais resultantes com os sistemas estruturalmente estáveis.

Assim nosso trabalho se conecta com as contribuições pioneiras de Andronov - Pontrjagin e Peixoto sobre a estabilidade estrutural das equações diferenciais e sistemas dinâmicos e com as bifurcações.

Resumimos a seguir em forma circunstanciada os resultados de nosso estudo.

Sendo $(\mathbf{S}^+, \mathbf{B})$ e $(\mathbf{S}^-, \mathbf{B})$ duas superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbf{B}$ a linha de descontinuidade separando $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$, considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, a superfície seccionalmente suave obtida pela justaposição de $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ ao longo do bordo comum $\mathbf{B}$. Estudamos os pontos nos quais as linhas de curvatura principal de ambas as superfícies $\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^-$ têm contato quadrático ou cruzam transversalmente a curva de descontinuidade, representada pela curva bordo $\mathbf{B}$. Concluímos com os teoremas 2.2.6, 2.2.10, 2.2.11, 3.2.4 e 3.3.1 que, de tais pontos sobre $\mathbf{B}$ emergem pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 e D_3 . O ponto umbílico Darbouxiano do tipo D_2 não surgiu neste processo de regularização. Por outro lado, sendo $\mathbf{S}$ uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ com bordo $\mathbf{B}$ para a qual o contato da linha de curvatura principal com $\mathbf{B}$ é cúbico, concluímos com o teorema 4.3.4 que os pontos umbílicos Darbouxianos dos tipos D_1 , D_2 e D_3 e também os tipos não Darbouxianos D_{23} e D_{12} surgem sobre a superfície engrossada e regularizada.

Acreditamos que as questões locais abordadas nesta tese possam servir de ponto de apoio para estudos geométricos e analíticos mais profundos e globais focalizando a relação entre a regularização das superfícies seccionalmente suaves e suas configurações principais.

Referências Bibliográficas

- [1] BRUCE, J., AND FIDAL, D. On binary differential equations and umbilics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 111A (1989), 147–168.
- [2] DARBOUX, G. Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d’un ombilic. *Gauthier Villars IV*, Note 07, Leçons sur la théorie de surfaces (1896).
- [3] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Press, 1988.
- [4] GARCIA, R., AND SOTOMAYOR, J. Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines. *Matemática Contemporânea, Soc. Bras. Matemática* 12 (1997), 83–102.
- [5] GARCIA, R., AND SOTOMAYOR, J. Umbilic and tangential singularities on configurations of principal curvature lines. *Anais da Academia Brasileira de Ciências* 74, 1 (2002), 1–17.
- [6] GARCIA, R., AND SOTOMAYOR, J. *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*. 27th Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [7] GUTIERREZ, C., AND SOTOMAYOR, J. Structural stable configurations of lines of principal curvature. *Asterisque*, 98-99 (1982), 185–215.
- [8] GUTIERREZ, C., AND SOTOMAYOR, J. *Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces*. 18th Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [9] GUTIERREZ, C., SOTOMAYOR, J., AND GARCIA, R. Bifurcations of umbilic points and related principal cycles. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 16, 2 (2004), 321–346.
- [10] MONGE, G. Sur les lignes de courbure de la surface de l’ellipsoïde. *Journ. de l’Ecole Polytech. II cah.* (1796), 145–165.
- [11] SOTOMAYOR, J., AND MACHADO, A. L. F. Structurally stable discontinuous vector fields in the plane. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 3 (2002), 227–250.

- [12] SOTOMAYOR, J., AND TEIXEIRA, M. A. Regularization of discontinuous vector fields. *World Scientific Publishing River Edge* (1998), 207–223.
- [13] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III. Berkeley: Publish or Perish, Houston, Texas, 1999.
- [14] WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics* 62, 3 (1955), 374–410.

Índice Remissivo

- Bordo
 - orientação externa do, 74
 - superfícies com, 56, 74
- Bordo comum $\mathbf{B}_{\varepsilon, \pm}$, 75
- Bordo comum δ , 15, 61
- Campo de Lie-Cartan, 4
- Carta de Monge, 5
- Coeficientes Forma Fundamental
 - Primeira, 35, 63, 79, 80, 90
 - Segunda, 36, 63, 79, 90
- Configuração principal, 3
 - da superfície $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{S}^-$, 61
 - da superfície $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{S}_{\varepsilon,+} \cup \mathbf{T}_\varepsilon \cup \mathbf{S}_{\varepsilon,-}$, 81
 - do par $(\mathbf{S}, \mathbf{B})$, 74
- Conjunto característico, 74
- Curvatura
 - geodésica, 58
 - normal, 2, 58
- Curvaturas principais, 2
- Direções principais, 2
- Engrossamento de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com
 - bordo, 75
- Equação diferencial das linhas de curvatura,
 - 3, 63, 91
- Formas fundamentais, 2
- Função de transição, 33, 62, 88
- Linhas de curvatura principal, 3
- Parâmetro de regularização, 33
- Ponto de
 - costura, 24, 25
 - deslizamento, 23
 - dobra, 32
 - transição, 24
- Ponto umbílico, 2
- Ponto umbílico D_{12} , 7
- Ponto umbílico D_{23} , 10
- Ponto umbílico Darbouxiano, 4, 6
- Referencial de Darboux associado a uma curva,
 - 58, 76, 85
- Região de regularização, 34
- Regularização, 33, 62, 88
- Separatrizes umbílicas, 6, 8
- Superfície
 - canal, 75
 - de Lie-Cartan, 4
 - envelope de, 74
 - regularizada, 33
- Torção geodésica, 58
- Vetor normal, 35