**Representações Irredutíveis
De Grau Dois
Da Primeira Álgebra De Weyl**

César Augusto Rodríguez Duque

DISSERTAÇÃO/TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Grishkov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, novembro de 2015

Representações Irredutíveis De Grau Dois Da Primeira Álgebra De Weyl

Esta é a versão original da dissertação/tese elaborada pelo
candidato, César Augusto Rodríguez Duque, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Representações Irredutíveis De Grau Dois Da Primeira Álgebra De Weyl

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Alexandre Grishkov (orientador)- IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Ananin - ICMC
- Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko - IME-USP
- Prof. Dr. Artem Lopatin - UNICAMP
- Prof. Dr. Alexandr Kornev - UFABC

Agradecimentos

Ao professor Doutor Alexandre Grishkov pela sua orientação, compreensão e acompanhamento no desenvolvimento do doutorado. A minha esposa Sandra pelo apoio e a minha família.

Resumo

Duque César A. R. **Representações irreduzíveis de grau dois da primeira álgebra de Weyl**. Tese Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, novembro 27 de 2015.

Sejam K um corpo comutativo de característica zero. Definimos a álgebra associativa sobre K com dois geradores p, q onde $pq - qp = 1$, como a primeira álgebra de Weyl, denotaremos esta por A_1 . As representações irreduzíveis de grau um de dimensão infinita de A_1 , foram descritos por R. Block em (Block, 1981). Baseados nesta ideia, são descritas as representações irreduzíveis de grau dois de dimensão infinita de A_1 . No capítulo 1 são estudadas as representações da localização $S^{-1}A_1 = \mathfrak{B}$ onde $S = K[q] - \{0\}$, ver (Block, 1981). Também apresentamos algumas definições e resultados relevantes para A_1 , os quais estabelecem uma relação entre as representações de álgebras de Lie nilpotente e as representações da n -ésima álgebra de Weyl A_n , ver (Dixmier, 1959). No segundo capítulo é abordado o estudo da estrutura para A_1 -módulos de grau dois de dimensão infinita, obtendo uma descrição completa destes módulos. Usando esta estrutura é dada uma relação entre uma classe de Sl_2 -módulos de dimensão infinita e os A_1 -módulos de grau dois. Finalmente, no capítulo 3 são dados alguns fatos importantes sobre a estrutura do $Ext^1(M, N)$, onde M e N são A_1 -módulos irreduzíveis de dimensão infinita com graus n_1 e n_2 respectivamente.

Palavras-chave: álgebras de Weyl, módulos irreduzíveis de grau n , Ext^1 , localização de anéis, polinômios irreduzíveis, domínios de ideais principais.

Abstract

Duque César A. R. **Irreducible Representations the two deg of the first Weyl algebra.** Tese Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 27 de novembro de 2015.

Let K be a commutative field such of zero characteristic. The associative algebras from K whit two geradors p, q shuch that $pq - qp = 1$ is the first Weyl algebra and it algebra going to denoted for A_1 . The structure of irreducible representations of degree one of infinite dimensional of A_1 , studied by R.Block ([Block , 1981](#)) on 1981. Based in this paper, we characterize the structure of degree two of irreducible representations of infinite dimensional of A_1 .

In the first chapter, we speak of localization rings and defined $\mathfrak{B}$, we also give tools and definitions needed over Weyl algebras and nilpotent Lie algebras. In the second chapter we give the review for to the problem of A_1 -modules of degree two of infinite dimensional. At the end of the thesis we calculate the $Ext^1(M, N)$, by M e N irreducibles A_1 -modules of degree n .

Keywords: Weyl algebras, irreducibles modules of the degree n , Ext^1 , localization rings and principal ideal domain.

Introdução

As álgebras de Lie foram introduzidas por Sophus Lie e um dos grandes problemas destas estruturas é a classificação destas álgebras, assim como o estudo das representações das mesmas. Ao longo da história, o estudo das classificações das álgebras de Lie divide-se em três tipos, as álgebras de Lie semisimples, as solúveis e as que não são semisimples e não são solúveis. O teorema de Levi-Malcev que foi demonstrado em 1945 (Maltsev , 1962), (Levi , 1905), nós diz que, toda álgebra de Lie de dimensão finita pode-se escrever como a soma direta entre de uma subálgebra semisimples e seu radical solúvel. Portanto, no estudo das álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de caraterística zero os dois grupos; as álgebras de Lie semisimples e as solúveis, são de grande importância. As primeiras foram classificadas pelo teorema de Cartan: toda álgebra de Lie semisimples de dimensão finita sobre um corpo de caraterística zero, pode-se escrever como soma de ideais simples, assim o problema de classificação de álgebras de Lie semisimples se reduz a classificação das álgebras de Lie simples, as quais foram classificadas na década dos 90 por Killin, Cartan e outros grupos de matemáticos da época (Cartan , 1894). Nas segundas, estão contidas as álgebras de Lie nilpotente.

Neste sentido, temos a álgebra de Lie nilpotente de dimensão três $\mathfrak{h}$, gerada por x, y, z , chamada álgebra de Heisenberg, com produto de Lie dada por $[x, z] = [y, z] = 0$ e $[x, y] = z$. Em 1963, J. Dixmier nos trabalhos (Dixmier , 1963), (Dixmier , 1959), introduz os ideais primitivos das álgebras de Lie nilpotentes, estes ideais estão definidos como o núcleo de uma representação irredutível da álgebra envelopante. No caso da álgebra de Heisenberg, os ideais primitivos são da forma $I_\lambda = U\mathfrak{h}(z - \lambda)$ com quociente da forma $U\mathfrak{h}/U\mathfrak{h}(z - \lambda)$, que é gerado por dois elementos $\bar{x}, \bar{y}$ tais que $[\bar{x}, \bar{y}] = \lambda$. Para $\lambda \neq 0$ gera-se a primeira álgebra de Weyl A_1 , que tem este nome devido ao matemático Hermann Weyl. A álgebra A_1 é gerada por dois elementos p e q tais que $[p, q] = 1$, assim é possível estabelecer um isomorfismo entre A_1 e os quocientes primitivos da álgebra envelopante da álgebra de Heisenberg $U\mathfrak{h}/I_\lambda$.

Em (Dixmier , 1963), J. Dixmier mostrou que existe uma correspondência entre o quociente da álgebra envelopante Ug , de uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita g , por um ideal primitivo, chamado de quociente primitivo, e A_n , para algum n . A álgebra A_n , é a n -ésima álgebra de Weyl com $2n$ geradores; $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ onde $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$,

$[x_i, x_j] = 0$ e $[y_i, y_j] = 0$. Isto faz que o estudo das representações da álgebra de Weyl seja importante, dentro da teoria das representações das álgebras de Lie nilpotentes.

Anos depois, em 1968 o mesmo matemático J. Dixmier (Dixmier, 1968), estuda a profundidade a estrutura e as propriedades da primeira álgebra de Weyl A_1 sobre um corpo de característica zero. No final deste trabalho Dixmier deixou uma lista de 6 problemas em aberto. Em 1975, Joseph and Stein dão solução aos problemas 3 e 6, usando ferramentas de McConnell and Robson (McConnell e Robson, 1987), ver (Joseph, 1975), em 2005, V. V. Bavula da solução ao problema 5, ver (Bavula, 2005). Restam ainda três problemas em aberto, a saber os problemas 1, 2 e 4. O problema 1 conhece-se como a conjectura de Dixmier: O conjunto de $End(A_1)$ coincide com o conjunto de $Aut(A_1)$.

A classificação das representações da primeira álgebra de Weyl A_1 foi dada por R. Block no ano 1981 em (Block, 1981), usando a localização de A_1 pelo conjunto $S = K[q] - \{0\}$, e as propriedades do domínio de ideais principais $\mathfrak{B} = S^{-1}A_1$, ver (Amitsur, 1954), (Ore, 1933). Da localização anterior obtemos $\mathfrak{B} = K(q)[p]$ onde o comutador $[f(q), p] = f'(q)$, para $f \in K(q)$. Neste mesmo artigo R. Block classifica as representações irredutíveis de dimensão infinita da álgebra das matrizes de 2×2 com traço zero. Está é uma álgebra de Lie simples gerada por três elementos $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

No caso da álgebra envelopante U_s de $Sl_2(K)$ os ideais primitivos estão dados por $I_\lambda = U_s(Q - \lambda)$, onde Q é o elemento de Casimir. Assim $U_s/I_\lambda \simeq A_1$, além disso o ideal $U_s(Q - \lambda)$ é um ideal maximal para $\lambda \in K$, K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Neste trabalho Block define o grau de um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível, e dá uma caracterização explícita para os módulos de grau um, esta caracterização encontra-se na parte final do artigo (Block, 1981). Neste ordem, fazemos uma caracterização para os módulos de grau dois.

O estudo das representações irredutíveis da primeira álgebra de Weyl é dividida em os A_1 -módulos de S -torção e os A_1 -módulos livres de S -torção. Os primeiros são da forma $M(\lambda) = (K[p], \lambda)$ onde p age como a multiplicação por p e q age como $\lambda - d/dp$, estes módulos foram classificados por Block em (Block, 1979). Para A_1 -módulos livres de S -torção Block em (Block, 1981) mostrou que existe uma bijeção entre $A_1^\Delta(irr)$ e $\mathfrak{B}^\Delta(irr)$, a saber:

$$[N] \in A_1^\Delta(irr) \longrightarrow [S^{-1}N] \in \mathfrak{B}^\Delta(irr). \quad (1)$$

$$[M] \in \mathfrak{B}^\Delta(irr) \longrightarrow [Soc_{A_1}(M)] \in A_1^\Delta(irr). \quad (2)$$

Onde $A_1^\Delta(irr) = \{[F] \mid F \text{ é um } A_1 - \text{módulo irredutível e livres de } S - \text{torção}\}$, e $[F]$; é formada por todos os A_1 -módulos livres de S -torção isomorfos a F . Da mesma forma é definido

o conjunto $\mathfrak{B}^\Delta(irr) = \{[F] \mid F \text{ é um } \mathfrak{B} - \text{módulo irredutível}\}$.

No capítulo 2, caracterizamos o $Soc_R(M)$ para M um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois como foi feito em (Block, 1981), para módulos de grau um, onde $R = A_1$ ou $R = \rho_\lambda(U_s)$. Denotamos por $\rho_\lambda U_s$ a imagem de ρ_λ , onde $\rho_\lambda : U_s \rightarrow A_1$ é dado por $\rho_\lambda(e) = q$, $\rho_\lambda(f) = -(qp + \lambda + 1)p$ e $\rho_\lambda(h) = 2qp + \lambda + 1$.

O teorema para módulos de grau um enuncia-se como segue:

Teorema 1. *Suponha N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau um e $\lambda \in K$. Podemos identificar N com $K(q)$ onde $p.f = tf + f'$ e $q.f = qf$. Então*

$$Soc_{A_1}(N) = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}]$$

onde α_i são os polo de t . Além disso $Soc_{\rho_\lambda U_s}(N) = Soc_{A_1}(N)$ salvo que:

$$v_q(t) \geq 0 \quad \lambda \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$v_q(t) = -1 \quad Res_0(t) = -\lambda \quad (4)$$

Se temos (3), então $Soc_{\rho_\lambda U_s} N = q^{-\lambda} Soc_{A_1} N$. De (4) e supondo $\alpha_l = 0$ temos

$$Soc_{\rho_\lambda U_s} N = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_{l-1})^{-1}]. \quad (5)$$

Se M é um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois e $m \in M - \{0\}$, então existe $F_1 = p^2 + ap + b \in \mathfrak{B}$ irredutível, preservado e com uma propriedade descrita no capítulo 2 tal que $F_1 m = 0$. Pode-se identificar a classe de M ($[M]$) com a classe de F_1 ($[F_1]$), a classe dos polinômios irredutíveis em $\mathfrak{B}$ similares a $F_1 = p^2 + ap + b$, onde $a, b \in K(q)$.

Usando o polinômio F_1 damos a $K(q) \times K(q)$ estrutura de $\mathfrak{B}$ -módulos, onde as ações de p e q estão dadas como segue

$$q(f, g) = (qf, qg),$$

$$p(f, g) = (f' - bg, f + g' - ag) = \left(\begin{pmatrix} \frac{d}{dq} & -b \\ 1 & \frac{d}{dq} - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right)^t.$$

Identificando $m \in M - \{0\}$ como $(1, 0)$ ($u = (1, 0)$), da ação acima temos o isomorfismo $M \simeq K(q) \times K(q)$. Assim F_1 é anulador do elemento $(1, 0) \in K(q) \times K(q)$, e portanto $K(q) \times K(q)$ é um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível, isomorfo a M .

Sejam N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois, $F_1 = p^2 + ap + b \in \mathfrak{B}$, $Pol(F_1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ e $\lambda \in K$. Definimos $D = D^+ \cup D^-$ onde $D^{+(-)} = \{-\theta_1, -\theta_2\} + \mathbb{Z}^{+(-)}$ e

θ_1, θ_2 são as raízes do polinômio $Q_{0,F_1}(\xi)$.

Do anterior, o principal resultado de tese enuncia-se como segue:

Teorema 2. *Usando as notações anteriores temos o isomorfismo $N \simeq K(q) \times K(q)$, onde p e q agem como a multiplicação á esquerda pelas matrizes $\begin{pmatrix} \frac{d}{dq} & -b \\ 1 & \frac{d}{dq} - a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ respectivamente. Então*

$$\text{Soc}_{\rho(\lambda)Us}N = \text{Soc}_{A_1}N$$

salvo que:

$$0 \notin \text{Pol}(F_1) \quad e \quad \lambda \notin \mathbb{Z}^-, \quad (6)$$

$$0 \in \text{Pol}(F_1) \quad e \quad -\lambda \in D, \quad (7)$$

Se temos (6), então $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q^{-\lambda}A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se temos (7) existe $t \in \mathbb{N}$ tal que o módulo quociente

$$q^t A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

é isomorfo com um dos seguintes módulos de Verma de $Sl_2(K)$,

1. $M(-\lambda - 1)$.
2. $M(-\lambda - t)$, se $Q_{0,\gamma}(-\lambda - t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$.
3. $M(-\lambda + t)$ e $W = q^t A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se $Q_{0,\gamma}(-\lambda + t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$.

Sejam $\Delta(F_1) = \{\alpha \in \text{Pol}(F_1) \mid Q_{\alpha,F_1}(0) = 0\}$, $\Delta'(F_1) = \{\alpha \in \text{Pol}(\alpha) \mid Q_{\alpha,F_1}(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ e $K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] = K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$.

Logo $\text{Pol}(F_1) = \Delta'(F_1) \cup \Delta(F_1)$. Para o módulo $W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Soc}_{A_1}(N)$ temos os seguintes resultados:

1. Se $\Delta(F_1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$, do lema 23, segue-se

$$W \subset W_1 \subset \dots \subset W_{1 \dots j+t} = K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)},$$

sendo $W_{1 \dots i} = A_1 \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^i (q - \alpha)^{-\theta_{\alpha_k}(F_1)-3} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\theta_{\alpha_k}(F_1)$ a menor raiz inteira positiva de $Q_{\alpha_k,F_1}(\xi)$.

2. $K[q, (q - \beta)^{-1} \mid \beta \in \Delta'(F_1)] \times K[q, (q - \beta)^{-1} \mid \beta \in \Delta'(F_1)] \subset W$.
3. Se $\Delta_0(F_1) = \emptyset$, do lema 20, segue-se que W_α/W é irredutível e de S -torção isomorfo a $M(\alpha)$.
4. Se $\Delta_0(F_1) \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Delta_0(F_1)$ temos $\dim_K(T(\alpha)) < \infty$ e $\nu_\alpha(a) = -1$, $\nu_\alpha(b) \geq -1$. Do lema 23, W_α/W pertence ao $Ext_1(M(\alpha), M(\alpha))$.
5. $Ext_1(M(\alpha), M(\alpha)) = M(\alpha) \oplus M(\alpha)$.

Afirmção 1. *O A_1 -módulo W é irredutível.*

Teorema 3. $\Delta(F_1) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ não gera $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$. Ver (26).

Corolário 1. $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$ é irredutível se, e somente se, $\Delta(F_1) = \emptyset$. Além disso $W = K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$.

Afirmção 2. Se $\alpha \in \Delta(F_1)$, temos $W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-\theta_\alpha(F_1)-3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Portanto, W_α/W é irredutível de S -torção e isomorfo a $M(\alpha)$. Se $\nu_\alpha(a) = -1$, $\dim_K(T(\alpha)) = -Res_\alpha(a)$ e $\nu_\alpha(b) \geq -1$, então $V_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ é um A_1 -submódulo de W_α e temos a cadeia de comprimento 2, $0 \subset W \subset V_\alpha \subset W_\alpha$. O conjunto $T(\alpha) = \left\{ p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Corolário 2. $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$ é cíclico gerado por $A_1 \begin{pmatrix} \prod_{\alpha \in \Delta(F_1)} (q - \alpha)^{-\theta_\alpha(F_1)-3} \\ 0 \end{pmatrix}$ e de comprimento finito.

Sumário

Resumo	iii
Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 Álgebra envelopante	1
1.2 Álgebra de operadores diferenciáveis	2
1.3 Álgebras de Lie nilpotentes e suas representações	3
1.4 Polinômios irredutíveis sobre $\mathfrak{B}$	8
1.5 Módulos de Verma	9
1.6 Sl_2 -módulos	10
1.6.1 Álgebra envelopante de Sl_2	10
1.6.2 Ideais primitivos de $Sl_2(K)$	11
1.7 Representações irredutíveis	14
2 Módulos de grau dois sobre a primeira álgebra de Weyl	19
2.1 Propriedades do polinômio G_1	20
2.2 Estrutura de W	22
2.2.1 W é irredutível	23
2.2.2 Se $\Delta(G_1) = \emptyset$	25
2.2.3 Se $\Delta(G_1) \neq \emptyset$	27
2.3 Relação entre os módulos W e $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$	31
3 Módulos irredutíveis de grau dois	
sobre $Sl_2(K)$	37
3.0.1 Se $0 \notin Pol(F_1)$	38
3.0.2 Se $0 \in Pol(F_1)$	41
3.0.3 Estrutura do $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$	42
4 Extensões De Módulos irredutíveis	47
4.1 Análise do caso $F \in A_1$ com F redutível em $\mathfrak{B}$	49
Referências Bibliográficas	51

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Álgebra envelopante

As definições e conceitos apresentados a continuação, podem ser consultadas com mais detalhe nos livros de (Jacobson , 1979) e (Humphreys , 1972). Tudo o apresentado neste capítulo referente as álgebras de Lie nilpotentes pode ser consultado nos trabalhos de Dixmier (Dixmier , 1963) e (Dixmier , 1977b).

Definição 1. *Seja L uma álgebra de Lie. Dizemos que (U, π) é a álgebra envelopante de L , se são satisfeitas as seguintes condições:*

1. U é associativa.
2. $\pi : L \longrightarrow U$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, e para cada álgebra associativa V tal que existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \longrightarrow V^{(-)}$, então existe um único homomorfismo ψ de álgebras associativas que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\pi} & U \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \\ V^{(-)} & & \end{array}$$

Da definição de álgebra envelopante, segue que (U, π) é única. Denotaremos o par (U, π) como $U(L)$.

Seja L uma álgebra de Lie, definimos o seguinte produto tensorial

$$T^0(L) = K, T^1(L) = L, \dots, T^m(L) = \bigotimes_{i=1}^m L.$$

Então a álgebra tensorial de L é dada por

$$T(L) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(L).$$

O produto em $T(L)$, é definido como

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)(y_1 \otimes \dots \otimes y_t) = x_1 \otimes \dots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_t \in T^{k+t}(L).$$

De $T(L)$, podemos construir duas álgebras clássicas, a álgebra simétrica $\mathfrak{S}(L)$ e a álgebra envelopante universal $U(L)$. A álgebra $\mathfrak{S}(L)$ é definida como o quociente entre a álgebra tensorial e o ideal I de $T(L)$, gerado pelos elementos $x \otimes y - y \otimes x$. Se fizemos $I_m = I \cap T^m(L)$, então $I = \bigoplus I_m$, obteremos os quocientes $S^i(L) = T^i / I_i$, assim $\mathfrak{S}(L) = \bigoplus S^i(L)$.

A álgebra $U(L)$ é definida como o quociente entre $T(L)$ e o ideal J de $T(L)$, gerada pelos elementos $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$, assim temos

$$U(L) = T(L) / J.$$

Teorema 4. (teorema de PBW)

Seja L uma álgebra de Lie, com base $X = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$, então o conjunto

$$\{x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_t}^{n_t} | x_{i_j} \in X \text{ e } n_i \in \mathbb{N}\},$$

é uma base da álgebra envelopante de L , para $i_1 < \cdots < i_t$.

Sempre podemos substituir $\mathbb{N}$ por um conjunto totalmente ordenado I .

Demonstração. ver Jacobson, álgebras de Lie. □

Teorema 5. Suponha $L = L_1 \oplus L_2$, então $U(L) = U(L_1) \otimes U(L_2)$.

Teorema 6. A álgebra $U(L)$ é Noetheriana.

1.2 Álgebra de operadores diferenciáveis

Definição 2. Seja R um anel e $D : R \longrightarrow R$ uma derivação, $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, para todo par $a, b \in R$. Então o par (R, D) é um anel diferenciável.

Definição 3. i. Um módulo diferenciável, é um módulo sobre um anel diferenciável R , munido com uma aplicação $\delta : M \longrightarrow M$ tal que $\delta(am) = D(a)m + a\delta(m)$ para todo $a \in R$ e $m \in M$.

ii. A aplicação δ , é chamado operador diferenciável sobre M .

iii. Um ideal diferenciável de R , é um ideal de R que tem estrutura de R -módulo diferenciável.

Exemplo 1. Sejam K um corpo de característica zero e $R = K[x][\partial_x]$, onde ∂_x a derivação usual de polinômios na variável x . Então R é um anel diferenciável.

Definição 4. Um homomorfismo φ , entre dois R -módulos diferenciáveis é uma aplicação

$$\varphi : (M_1, D_1) \longrightarrow (M_2, D_2),$$

tal que φ é um homomorfismo de R -módulos e $\varphi D_1 = D_2 \varphi$.

Para $A_n = K[x_1, \dots, x_n]$ junto com os operadores diferenciáveis $\partial_1, \dots, \partial_n$, onde $\partial_i x_j - x_i \partial_j = 1$, temos a ação sobre o anel de polinômios $K[x_1, \dots, x_n]$, dada pela ação de x_i como a multiplicação por x_i e ∂_j como a derivação com respeito a x_j .

Seja $P = \sum_{i=1}^t f_i \partial_i$ um operador linear em A_n , definimos $P(f) = \sum_i f_i \partial_i f$ para $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Se consideramos o núcleo do operador P obtemos o conjunto

$$\ker(P) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \sum f_\alpha \partial_\alpha(f) = 0\}.$$

O anel $K[x_1, \dots, x_n]$ tem estrutura de A_n -módulo, e portanto definimos o módulo associado ao núcleo de P , como o módulo $A_n / A_n P$.

De forma geral, para $P_1, \dots, P_n$ operadores em A_n , o módulo associado ao sistema

$$P_1(f) = \dots = P_n(f),$$

está dado por o módulo cíclico $A_n / (\sum A_n P_i)$. Reciprocamente, para todo A_n -módulo irredutível M , temos um operador S em A_n tal que o quociente $A_n / A_n S$ é isomorfo a M , definindo $A_n S$ como o A_n -submódulo de M gerado por S .

1.3 Álgebras de Lie nilpotentes e suas representações

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados técnicos das álgebras de Weyl, que usaremos nos próximos capítulos. Sempre suporemos que as álgebras sobre K são associativas, onde K um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Definição 5. *Seja K um corpo de característica zero, e g uma álgebra de Lie. Dizemos que g é nilpotente se $g^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $g^2 = [g, g]$ e $g^k = [g^{k-1}, g]$.*

Definição 6. *Seja K um corpo de característica zero, a enésima álgebra de Weyl A_n , é definida como o anel de polinômios $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ munido com a relação $x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij}$. No caso $n = 1$, temos $A_1 = K[q][p]$, onde $pq - qp = 1$.*

Seja A uma álgebra sobre K . Uma filtração de A é um conjunto $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de sub-espacos de A tal que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ e $A = \bigcup A_i$. Para a primeira álgebra de Weyl temos a filtração

$$A_1^n = \sum_{i+j \leq n} k q^i p^j.$$

Seja A uma álgebra sobre K . Uma graduação de A é um conjunto $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j} \text{ e } A = \bigoplus A_i.$$

Do trabalho de Dixmier (Dixmier, 1963) temos o seguinte lema.

Lema 1. *Sejam i, j, s, t inteiros não negativos. Então*

$$(q^i p^s)(q^j p^t) = \sum \alpha_k q^{i+j-k} p^{s+t-k}$$

Em virtude do lema anterior, para a primeira álgebra de Weyl obtemos a graduação

$$A_1^n = \sum_{i-j=n} k q^i p^j.$$

Outra forma de definir as álgebras de Weyl, é dada em (McConnell e Robson , 1987). Seja $R = K[x_1, \dots, x_n]$, definimos por indução o anel de polinômios torcidos

$$R_0 = R, R_i = R_{i-1} \left[y_i, \frac{\partial}{\partial x_i} \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Pelo teorema das bases Hilbert R_n é Noetheriano, além disso temos em R_n a relação

$$x_i y_j = y_j x_i + \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = y_j x_i + \delta_{ij},$$

então existe um conjunto gerador de R_n , que satisfaz a definição da álgebra de Weyl. Da mesma forma existe um conjunto de geradores da álgebra de Weyl A_n , que satisfaz a definição do anel de polinômios torcidos nas variáveis x_i, y_i .

Teorema 7. A_n é simples (i.e. não tem ideais bilaterais) e Noetheriano.

Demonstração. Pela parte anterior A_n é Noetheriano. Seja I um ideal não nulo de A_n . Para $0 \neq a \in I$, $a = \sum \lambda_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Suponhamos que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\bar{\alpha}_i = \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$, então

$$\begin{aligned} x_i a - a x_i &= \sum \lambda_{\alpha\beta} x^{\alpha_i+1} x^{\bar{\alpha}_i} y^\beta + \sum \lambda_{\alpha\beta} x^\alpha \left(x_i y^\beta + \frac{\partial y^\beta}{\partial y_i} \right) \\ &= \sum \lambda_{\alpha\beta} x^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial y_i} = \frac{\partial a}{\partial y_i}. \end{aligned}$$

Dado que $y_i a - a y_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}$, então existe $0 \neq b \in k$ tal que $b \in I$, então A_n é simples. $\square$

Seja g uma álgebra de Lie nilpotente e $U(g)$ sua álgebra envelopante. O estudo das representações de g é equivalente ao estudo das representações de $U(g)$. Este fato é válido em geral para qualquer álgebra de Lie. Definimos o centro de $U(g)$ como Z , e $C(g)$ como o comutador de g em $U(g)$, isto é, $C(g)$ é o conjunto dos elementos $x \in U(g)$ tais que $[g, x] = 0$. J. Dixmier em (Dixmier , 1963), dá uma relação entre as álgebras de Lie nilpotentes e as álgebras de Weyl.

Definição 7. Seja g uma álgebra de Lie nilpotente. Dizemos que um K -espaço vetorial V é um g -módulo, se existe uma aplicação bilinear $\tau : g \times V \rightarrow V$ tal que $\tau([x, y], v) = \tau(xy, v) - \tau(yx, v)$, para cada $x, y \in g$ e $v \in V$.

Definição 8. Seja g uma álgebra de Lie e V um K -espaço vetorial. Dizemos que $\rho : g \rightarrow gl(V)$ é uma representação de g , se ρ é uma transformação linear e $\rho([x, y])v = [\rho(x), \rho(y)]v$, para cada $x, y \in g$ e $v \in V$, sendo $gl(V)$ a álgebra das transformações lineares de V em V . Se V é um g -módulo irreductível a representação ρ diz-se irreductível.

Definição 9. Seja g uma álgebra de Lie nilpotente. Dizemos que um ideal bilateral I não trivial de $U(g)$ é primitivo, se existir um módulo irreductível M tal que $IM = 0$.

Teorema 8. (Dixmier , 1963) Sejam V um espaço vetorial de dimensão menor ou igual que $\aleph_0$ sobre $\mathbb{C}$, $A \subset End(V)$ uma subálgebra irreductível e A' os elementos que comutam com A em $End(V)$, então $A' = \mathbb{C}$.

Demonstração. Pelo lema de Schur, A' é um corpo contendo $\mathbb{C}$ (ver (Dixmier, 1977b), pág. 133). Se $x \in A'$ e $x \notin \mathbb{C}$, então x é transcendente sobre $\mathbb{C}$, portanto A' contém um corpo isomorfo a $\mathbb{C}(x)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, os elementos $(x - \lambda)^{-1}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ e consequentemente $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x) > \aleph_0$. Por outra parte, segue que $(x - \lambda)^{-1}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo $\dim_{A'} V \geq \dim_{\mathbb{C}} A' \geq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x) > \aleph_0$. $\square$

Lema 2. (Dixmier, 1963) *Seja B uma álgebra sobre K , I um ideal bilateral de $A_1 \otimes B$ e $J = I \cap B$, então $I = A_1 \otimes J$.*

Demonstração. Para cada $c = \sum p^i q^j \otimes b_{ij} \in I$, definimos

$$v(c) = \max_{(i,j)} \{i + j \mid b_{ij} \neq 0\}.$$

Se $v(c) = 0$, então $c = 1 \otimes b \in A_1 \otimes J$. Suponha que $v(c) < n$, então $b_{ij} \in J$. Por outra parte $[p, c] \in I$ e

$$[p, c] = \sum p^{i+1} q^j \otimes b_{ij} + \sum p^i q^j p \otimes b_{ij} = \sum j p^i q^{j-1} \otimes b_{ij},$$

logo $b_{ij} \in J$, para $j \neq 0$. Substituindo p por q obtemos analogamente que $b_{ij} \in J$ para $i \neq 0$. Dado que $1 \otimes b_{00} = c - \sum_{i+j>1} p^i q^j \otimes b_{ij}$ e $\sum_{i+j>1} p^i q^j \otimes b_{ij} \in A_1 \otimes J$, portanto $1 \otimes b_{00} \in I$ e $1 \otimes b_{00} \in J$. $\square$

Lema 3. (Dixmier, 1963) *Sejam A uma K -álgebra, B e C duas subálgebras de A , que geram A e comutam. Se B é isomorfo a A_1 , então o morfismo canônico ϕ de $B \otimes C$ em A é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja ϕ a aplicação canônica de $B \otimes C$ em A determinada por $\phi(b \otimes c) = bc$, como $\ker(\phi)$ é um ideal de $B \otimes C$, segue-se que $\ker(\phi) = B \otimes J$, onde J é um ideal de C . Note que $\phi(1 \otimes c) = c$ para cada $c \in C$, temos $J = 0$. Portanto, ϕ é um isomorfismo. $\square$

Usando o lema anterior e indução mostra-se que A_n é isomorfo a $\otimes_K A_1$ n -vezes, já que o homomorfismo canônico é de fato um isomorfismo de K -álgebras.

Lema 4. (Dixmier, 1963) *Seja g uma álgebra de Lie nilpotente, de dimensão maior que 2. Então existe um ideal $I \subset g$ com $\dim I = \dim g - 1$ tal que $\dim Z(I) > 1$, onde $Z(I)$ denota o centro de I .*

Demonstração. Seja $g_0 = g$. Como g_0 é nilpotente, $g' \subset g_0$. Seja $\bar{g}_1 \triangleleft g/g'$ ideal de g tal que $\dim g/g_1 = 1$ e $[g, g_1] \subset g_1$. No seguinte passo, tomamos um ideal $\bar{g}_2$ do cociente $g_1/[g, g_1]$ tal que $\dim g_1/g_2 = 1$, já que $g_1/[g, g_1]$ resulta abeliano não nulo. Se $g_1 = [g, g_1]$, então $g_1 = g'$, por um argumento indutivo $g^n = g_1$, em consequência g não é nilpotente de dimensão finita, assim temos

$$0 = g_n \subset g_{n-1} \subset \cdots \subset g_1 \subset g_0 = g,$$

tal que $\dim g_i/g_{i+1} = 1$ e cada g_i é ideal de g . Seja $\{a, b\}$ uma base de g_{n-2} tal que $b \in g_{n-1}$, então para cada $x \in g$ a representação adjunta $ad_g x|_{g_{n-2}}$ é dada por, $ad_g x|_{g_{n-2}}(a) = \lambda(x)a$ e $ad_g x|_{g_{n-2}}(b) = 0$, assim temos a representação matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que $\lambda|_{g_{n-1}} = 0$, e se $[a, b] \neq 0$ então $[a, b] = tb$. Logo $(g_{n-2})^n = g_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lambda = 0$, então $g_{n-2} \subset Z(g)$. Se $\lambda \neq 0$, então para a representação $\rho : g \rightarrow gl(g_{n-2})$ dada por $\rho(x) = ad_g x|_{g_{n-2}}$, temos $\dim \rho(g) = 1$. Assim $\ker(\rho) = \mathfrak{h}$ é um ideal de g com $g_2 \subset Z(\mathfrak{h})$. $\square$

Se $\dim g > 2$ e $\dim Z(g) = 1$ então existem dois ideais $\mathfrak{h}$, I de g com as seguintes propriedades

1. $\dim(g/\mathfrak{h}) = 1$, $\dim I = 2$.
2. $Z(g) \subset I \subset \mathfrak{h} \subset g$.
3. $Z(\mathfrak{h}) = I$.

Introduziremos algumas notações que precisamos no decorrer do trabalho. Seja $x \in g - \mathfrak{h}$ e $y \in I - Z(g)$, então $[x, y] \in Z(g)$, de outra forma g não é nilpotente. Então a álgebra N gerada por $x, y, z = [x, y]$ é nilpotente de dimensão 3.

Lema 5. (*Dixmier*, 1963) *Sejam $U = U(g)$, $U' = U(\mathfrak{h})$, $V = U(N)$, $Y = U(y)$, J o ideal gerado por $z + 1$ e $W = N_{U'}(J)$ (o normalizador de J em U'). Seja φ o homomorfismo canônico de U em U/J . Então*

1. $\varphi(V) \cong A_1$.
2. $\varphi(U) = \varphi(V) \otimes \varphi(W)$.
3. $\varphi(U') = \varphi(Y) \otimes \varphi(W)$.
4. $\varphi(Y) \cong K[y]$.
5. $\varphi(W)$ é isomorfo a uma álgebra quociente de $\varphi(U')$.

Demonstração. 1. Como $[\varphi(x), \varphi(y)] = 1$ e $\varphi(V)$ é gerado por $\varphi(x), \varphi(y)$, e em consequência $\varphi(V)$ é isomorfo a A_1 .

2. Para a demonstração de (2), (3), mostraremos que V, W (Y, W) geram U (U') respectivamente. Fixando $a \in U'$, a nilpotência de g permite definir $v(a)$ como o inteiro t tal que $ad^{t+1}(x)a = 0$ e $ad^t(x)a \neq 0$, usaremos indução em t .

Se $t = 0$ então $a \in W$. Suponhamos que a afirmação é válida para $v(a) < t$. Definimos $a_i = ad^i(x)a$, como $ad(x)$ é uma derivação e z está no centro de g , temos

$$\begin{aligned}
 & ad(x)[a + a_1y + \cdots + \frac{a_t}{t!}y^t] \\
 &= ad(x)a + ad(x)a_1y + a_1ad(x)y + \cdots + \frac{ad(x)a_{t-1}}{(t-1)!}y^{t-1} + \frac{a_t}{t!}ty^{t-1}z \\
 &= a_1 + a_2y + a_1z + \cdots + \frac{a_t}{(t-1)!}y^{t-1} + \frac{a_t}{(t-1)!}y^{t-1}z \\
 &= (z+1) \left(a_1 + a_2y + \cdots + \frac{a_t}{(t-1)!}y^{t-1} \right).
 \end{aligned}$$

Pela hipótese, a_i está na álgebra gerada por Y e W , pois $v(a_i) < t$ para $i > 0$. Por outra parte $a + a_1y + \cdots + \frac{a_t}{t!}y^t \in W$. Logo, a está na álgebra gerada por Y, W , e esta

álgebra coincide com U , além disso V, W geram U pois $x \in V$.

Do anterior e de (1, 3) temos (2).

3. Por (1), a imagem de $\varphi(Y) \otimes \varphi(W)$ é $\varphi(U')$. A sobrejectividade segue-se da definição do homomorfismo.
4. Segue-se definição de álgebra envelopante.
5. Considere a aplicação $\phi : \varphi(y) \times \varphi(W) \longrightarrow \varphi(W)$, dada por $\phi(y^i, b) = z^i b$.

□

Lema 6. (*Dixmier*, 1963) *Com as hipóteses e notações anteriores, seja I um ideal bilateral de U tal que $z + 1 \in I$.*

1. *Existe um ideal bilateral J de $\varphi(W)$ tal que $\varphi(I) = \varphi(V) \otimes J$. A álgebra U/I é isomorfa a álgebra $A_1 \otimes (\varphi(W)/J)$.*
2. *Seja Y^+ a coleção dos elementos de $Y = K[y]$ que não têm parte constante, e $L = \varphi(Y^+) \otimes \varphi(W) + \varphi(Y) \otimes J$, então L é um ideal bilateral de $\varphi(U')$. Se I' é a imagem recíproca de L contida em U' então $U'/I' \cong \varphi(W)/J$.*

Demonstração. 1. Pelas considerações feitas anteriormente existe um ideal bilateral I de $\varphi(W)$ tal que $I = \varphi(V) \otimes I$. Como $z + 1 \in I$ temos $J \subset I$, além disso I/J é um ideal bilateral de U/J . Via o homomorfismo canônico $\tau : U \longrightarrow \varphi(U)/\varphi(I)$, definido como $\tau(a) = \varphi(a) + \varphi(I)$, temos o isomorfismo $U/I \cong \varphi(U)/\varphi(I)$.

$$\begin{aligned} U/I &\cong \varphi(U)/\varphi(I) \cong (\varphi(V) \otimes \varphi(W))/(\varphi(V) \otimes \varphi(K)) \\ &\cong \varphi(V) \otimes \varphi(W/K) \cong A_1 \otimes \varphi(W/K). \end{aligned}$$

2. $U'/I' \simeq \varphi(U')/L \simeq (\varphi(Y)/\varphi(Y^+)) \otimes (\varphi(W)/K) \simeq \varphi(W)/K$.

□

Teorema 9. (*Dixmier*, 1963) *Sejam K um corpo comutativo de característica zero, g uma álgebra de Lie nilpotente, com álgebra envelopante $U(g)$ e I um ideal bilateral de $U(g)$. Para K algebricamente fechado, as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $Z(U(g)/I) = K$.
2. $U(g)/I$ é isomorfa a uma das álgebras A_p .
3. I é um ideal bilateral maximal de $U(g)$.
4. I é um ideal bilateral primitivo de $U(g)$.

Demonstração. Usamos indução na $\dim(g)$, no seguinte ordem

$$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2).$$

Em qualquer álgebra, independente da dimensão temos (3) $\Rightarrow$ (4), e (2) $\Rightarrow$ (3) se segue do fato que, A_p é simples.

Seja ρ a representação que induz I , $\rho(U(g)) \simeq U(g)/I$. Substituindo V por $\rho(U(g))$ no Teorema 8 concluímos que (4) $\Rightarrow$ (1).

Só resta mostrar (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\dim(g) = 1$ e $Z(U/I) = K$ então $U/I = K$, logo (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha a afirmação válida para $\dim(g) < n$. Seja $Z_0 = I \cap Z(g)$.

Suponhamos que $Z_0 \neq 0$. Sejam $L = g/Z_0$, J o ideal bilateral gerado por Z_0 em $U(g)$ e $U(L) = U(g/K)$, do homomorfismo que induz $\tau : g \rightarrow U(L)$ definido por $\tau(x) = \overline{(x)}$, o ideal $I_{Z_0} = I/Z_0$ é um ideal bilateral de $U(L)$.

$$U/I \simeq (U(L)/U(Z_0))/(I/U(Z_0)) \simeq U(L)/I_{Z_0}$$

Então o centro de $U(L)/I_{Z_0}$ é K , da hipótese de indução temos o isomorfismo

$$U(L)/I_{Z_0} \simeq A_p.$$

Suponhamos que $Z_0 = 0$. Como g é nilpotente, $\dim(Z(g)) \geq 1$. De $Z(U/I) = K$, segue-se que $I \cap K = I \cap Z(g) = 0$ e $I \cap (K + Z) \neq 0$. Do lema 6, existe um ideal bilateral I' de U' tal que $U/I \simeq A_1 \otimes (U'/I')$. Como $Z(U/I) = K$, então $Z(U'/I') = K$. Pela hipótese de indução existe A_p tal que $U/I \simeq A_1 \otimes A_p \simeq A_{p+1}$. $\square$

1.4 Polinômios irredutíveis sobre $\mathfrak{B}$

Seja $S = K[q] - \{0\}$. O domínio $\mathfrak{B} = S^{-1}A_1 = K(q)[p]$, é um domínio de ideais principais, e portanto existe uma correspondência bijetora entre os elementos irredutíveis e os ideais maximais de $\mathfrak{B}$. Todo $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível N é isomorfo a $\mathfrak{B}/\ker(\varphi)$, onde $\ker(\varphi)$ é um ideal máximo de $\mathfrak{B}$, portanto existe $H \in \mathfrak{B}$ tal que $\ker(\varphi) = Hn$, para algum $0 \neq n \in N$. Todos os resultados desta seção são do trabalho feito por Block em (Block, 1981).

Dado um par de polinômios $f, g \in \mathfrak{B}$ não nulos, definimos o mínimo múltiplo comum à direita como o polinômio mônico não nulo $h(x)$ de menor grau tal que

$$h = f_1 f = g_1 g.$$

Definição 10. *Dois polinômios $f, g \in \mathfrak{B}$ não nulos, são relativamente primos à direita, se para todos os polinômios $f_1, g_1, d \in \mathfrak{B}$ tal que $f = f_1 d$ e $g = g_1 d$ implica que d é unidade. De forma análoga definimos polinômios relativamente primos à esquerda.*

Definição 11. *Dois polinômios $f, g \neq 0$, são similares se existem polinômios u, v não nulos tais que $fu = vg$, onde f, v são relativamente primos à esquerda, e g, u são relativamente primos à direita.*

Teorema 10. *Dois polinômios de grau um $p + x_0, p + x_1 \in \mathfrak{B}$ são similares, se e somente se, a diferença dos termos constantes $x_0 - x_1$, é uma derivação logarítmica.*

Demonstração. Suponhamos que $x - a$ similar com $x - b$. Então existe $c, d \in K[x]$ tais que $c(x - a) = (x - b)d$, logo $c = d$ é $a - b = \frac{c'}{c}$. $\square$

1.5 Módulos de Verma

Seja L uma álgebra de Lie semisimples de dimensão finita e H uma sub-álgebra de Cartan, então

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha} L_{\alpha}. \quad (1.1)$$

Onde L_{α} é o espaço de peso α de L relativos a subálgebra de Cartan de H . Definimos $\pi = \{\alpha \in H^* \mid L_{\alpha} \neq 0\}$, então π é um sistema de raízes, com decomposição $\phi = \phi^- \cup \phi^+$, onde π^+ é o conjunto das raízes positivas e π^- é o conjunto das raízes negativas. Escrevendo $N^-(+) = \bigoplus_{\alpha \in \phi^-(+)} L_{\alpha}$, temos a subálgebra de Borel $\mathcal{B} = H \oplus N^+$. Além disso $L = N^+ \oplus \mathcal{B}$ e $U(L) = U(N^+)U(\mathcal{B})$.

De (1.1), L tem uma base dada por $h_{\alpha} \in H$, $e_{\alpha} \in N^+$ e $f_{\alpha} \in N^-$, para cada $\alpha \in \pi$. Para $\lambda \in H^*$, definimos o ideal I_{λ} de $U(L)$ como $I_{\lambda} = \sum U(L)e_{\alpha} + \sum U(L)(h_{\alpha} - \lambda(h_{\alpha}))$. Usando o ideal I_{λ} obtemos o módulo de Verma

$$M(\lambda) = U(L)/I_{\lambda}.$$

Uma construção equivalente para o módulo de Verma é dada por

$$M(\lambda) = U(L) \bigotimes_{U(\mathcal{B})} \mathbb{C}_{\lambda}.$$

O $U(\mathcal{B})$ -módulo, $\mathbb{C}_{\lambda}$ está determinado pelas ações; $h.1 = \lambda(h)$ e $e_{\alpha}.1 = 0$, assim $M(\lambda)$ tem estrutura de H -módulo. Para cada $\mu \in H^*$ definimos o subespaço

$$M(\lambda)_{\mu} = \{x \in M(\lambda) \mid h(x) = \mu(h)x, \forall h \in H\}.$$

Dizemos que $M(\lambda)_{\mu}$ é um espaço peso com peso μ , se $M(\lambda)_{\mu} \neq 0$.

Teorema 11. $M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in H^*} M(\lambda)_{\mu}$

Demonstração. Sejam $\phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ e $m_{\lambda} = 1 + I_{\lambda}$, então o conjunto $f_{\beta_1}^{r_1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda}$ é uma base para $M(\lambda)$. Para $h \in H$ temos

$$hf_{\beta_1}^{r_1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda} = -\beta_1(h)f_{\beta_1}f_{\beta_1}^{r_1-1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda} + f_{\beta_1}hf_{\beta_1}^{r_1-1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda} \quad (1.2)$$

$$= (\lambda - r_1\beta_1 - \dots - r_n\beta_n)(h)f_{\beta_1}^{r_1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda}. \quad (1.3)$$

Isto implica que $f_{\beta_1}^{r_1} \dots f_{\beta_n}^{r_n} m_{\lambda} \in M_{\mu}$, para $\mu = \lambda - r_1\beta_1 - \dots - r_n\beta_n$ e

$$M(\lambda) = \sum M(\lambda)_{\mu}.$$

Considere os funcionais $\mu_i - \mu$. Como H não pode ser escrito como a união finita de subespaços de menor dimensão ($\ker(\mu_i - \mu)$), então existe $h_0 \in H$ tal que $\mu(h_0) \neq \mu_i(h_0)$ para todo i , além disso existem polinômios $p(x)$, $q(x)$, com a propriedade

$$p(x)(x - \mu(h_0)) + q(x) \prod_{i=1}^t (x - \mu_i(h_0)) = 1. \quad (1.4)$$

Se $m \in M(\lambda)_\mu \cap (\sum_{i=1}^t M(\lambda)_{\mu_i})$ e os μ_i são todos distintos, então $m = \sum m_i$ onde $(h - \mu_i(h))m_i = 0$, para cada i e para cada $h \in H$, portanto $\prod_{i=1}^t (h - \mu_i(h))m = 0$ e

$$0 = p(h_0)(h_0 - \mu(h_0))m + q(h_0) \prod_{i=1}^t (h_0 - \mu_i(h_0))m = m.$$

□

Teorema 12. $M(\lambda)$ tem um único submódulo maximal.

Demonstração. Seja V um submódulo não nulo de $M(\lambda)$ tal que $V \neq M(\lambda)$, então para $v \in V$ não nulo, temos $v = \sum v_{\mu_i}$, onde $v_{\mu_i} \in M(\lambda)_{\mu_i}$. Se $h \in H$ temos

$$\prod_{j, j \neq i} (h - \mu_j(h))v = \prod_{j, j \neq i} (h - \mu_j(h))v_{\mu_i} = \prod_{j, j \neq i} (\mu_i(h) - \mu_j(h))v_{\mu_i},$$

então $v_{\mu_i} \in V$ e $V = \bigoplus_{\mu} V_{\mu}$, assim todo submódulo é soma de submódulos de peso.

Como $V_{\lambda} \subset M(\lambda)_{\lambda}$ e $\dim M(\lambda)_{\lambda} = 1$, então $V_{\lambda} = M(\lambda)_{\lambda}$, o que é absurdo pela hipóteses. Portanto, todo submódulo de $M(\lambda)$ está contido em $W = \sum_{\mu, \mu \neq \lambda} M(\lambda)_{\mu}$, assim W é o único submódulo maximal de $M(\lambda)$. □

1.6 Sl_2 -módulos

Nesta seção introduzimos os ideais primitivos das álgebras de Lie nilpotentes e de $Sl_2(K)$. Além disso damos uma breve descrição dos quocientes de tipo $U(g)/I$, onde $g = Sl_2(K)$.

1.6.1 Álgebra envelopante de Sl_2

Seja K um corpo de característica zero. Definimos a álgebra de Lie $Sl_2(K)$ como a álgebra gerada pelos elementos e, f, h , onde o produto de Lie é dado por

$$[e, h] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

Denotamos por $Z(g)$, o centro da álgebra envelopante $U(g)$ de $g = Sl_2(K)$. Definimos $U(g)_{2s}$, como o subespaço de $U(g)$ gerado pelos elemento $f^k h^j e^i$ tal que $k - i = s$, logo

$$U(g) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} U(g)_s$$

Observação 1. $U(g)_0$ é gerado pelos elementos h, Q , onde $Q = (h+1)^2 + 4fe$, é o elemento de Casimir.

Teorema 13. $Z(g) = K[Q]$. Em particular $Z(g)$ é isomorfa ao anel de polinômios na variável x , $K[x]$.

Demonstração. Como $Q \in Z(g)$ temos $K[Q] \subset Z(g)$. Por outro lado $Z(g) \subset U(g)_0$ e portanto todo elemento $a \in Z(g)$ pode-se escrever da forma

$$a = \sum a_i(h)Q^i,$$

onde $[e, a] = 0$ e $he = eh + 2e = e(h + 2)$. De $h^{n-1}e = e(h + 2)^{n-1}$ temos

$$\begin{aligned} h^n e &= h^{n-1}(eh + 2e) = h^{n-1}eh + 2h^{n-1}e \\ &= e(h + 2)^{n-1}h + 2e(h + 2)^{n-1} \\ &= e(h + 2)^n, \end{aligned}$$

logo $[e, \sum a_i(h)Q^i] = \sum Q^i(ea_i(h) - a_i(h)e) = e \sum Q^i(a_i(h) - a_i(h + 2))$ e

$$\sum Q^i(a_i(h) - a_i(h + 2)) = 0.$$

Portanto, $a_i(h) - a_i(h + 2) = 0$, assim $a_i(h)$ é constante e $Z(g) = K[Q]$. □

No caso $g = Sl_2(K)$, o módulo de Verma de peso $\lambda \in \mathbb{C}$ é definido por um vetor v , de peso máximo λ tal que

$$\begin{aligned} fv &= v_1, & fv_i &= v_{i+1}, \\ ev &= 0, & ev_i &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}, & i &\geq 1, \\ & & hv_i &= (\lambda - 2i)v_i \end{aligned}$$

Proposição 1. *O elemento de Casimir Q age sobre $M(\lambda)$ de forma constante, a saber $c = (\lambda + 1)^2$.*

Teorema 14. 1. *O módulo $M(\lambda)$ é irredutível, se e somente se, $\lambda \notin \mathbb{N} - \{0\}$.*

2. *Para $\lambda = n \in \mathbb{N} - \{0\}$ o módulo $M(\lambda)$ é indecomponível. O módulo $M(-n - 2)$ é o único submódulo irredutível de $M(n)$ e temos $M(n)/M(-n - 2) \cong V^{n+1}$, onde V^{n+1} é o módulo de dimensão $n + 1$ irredutível.*

Demonstração. 1. Pela teoria dos módulos de Verma temos $\lambda - i + 1 = 0$, se e somente se, $\lambda = i - 1$ para $i \in \mathbb{N}_0$, $i \geq 1$. Portanto, $M(\lambda)$ é irredutível se e somente se, $\lambda \notin \mathbb{N}_0$.

2. Se $\lambda = n \geq 1$ então $ev_{n+1} = 0$ e $hv_{n+1} = (n - 2n - 2)v_n$. Assim o módulo gerado por v_n , $M(-n - 2)$ é o único submódulo irredutível de $M(n)$ e além disso $M(n)/M(-n - 2) \simeq V^{n+1}$. □

Para um g -módulo M , definimos o anulador de um g -módulo M como

$$Ann_g(M) = \{a \in g \mid am = 0 \ \forall m \in M\}.$$

1.6.2 Ideais primitivos de $Sl_2(K)$

Definição 12. *Seja I um ideal de g . Dizemos que I é um ideal primitivo de g , se $I = Ann_g(M)$, para algum g -módulo irredutível M .*

Teorema 15. *Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. O anulador $Ann_{U(g)}(M(\lambda))$ do módulo de Verma $M(\lambda)$ em $U(g)$ é um ideal bilateral de $U(g)$, gerado pelo elemento $c - (\lambda + 1)^2$.*

Demonstração. Ver (Mazorchuk , 2009). □

Teorema 16. *Seja M um $U(g)$ -módulo irredutível.*

1. *O elemento de Casimir Q , age como escalar no módulo M .*
2. *Existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $I_\lambda \subset \text{Ann}_{U(g)}(M)$, onde I_λ é o ideal primitivo associado a λ .*

Demonstração. 1. Lema de Schur.

2. Se μ é a ação do elemento de Casimir sobre M , e λ é raiz do polinômio $(x+1)^2 - \mu$, então $Q - (\lambda+1)^2$ gera o módulo $I_\lambda \subset \text{Ann}_{U(g)}(M)$. □

Para a álgebra nilpotente $\mathfrak{h}$ de dimensão 3, gerada por x, y, z com $[x, z] = [y, z] = 0$ e $[x, y] = z$, temos o ideal primitivo $I = U(\mathfrak{h})(z - \lambda)$, de $U(\mathfrak{h})$. Da seção anterior, U/I é isomorfo a A_1 .

Seja K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Definimos os quocientes primitivos da álgebra envelopante $U_s = U(Sl_2)$ de $Sl_2(K)$, por $B_\lambda = U_s / U_s(Q - \lambda)$ como em (Jacques , 1973), onde $I_\lambda = U_s(Q - \lambda)$ é um ideal primitivo. É claro que $I_\lambda = U_s(Q - \lambda)$ é um ideal bilateral de U_s . Definimos também $\text{Prim}f(U_s)$ como o conjunto dos ideais primitivos de U_s , assim temos a aplicação bijetora

$$K \longrightarrow \text{Prim}f(U_s),$$

dada por $\lambda \longrightarrow I_\lambda$. Dixmier prova em (Jacques , 1973), que I_λ é maximal se λ não é da forma $n^2 + 2n$. Nos outros casos $I_\lambda \subset I'_\lambda$ onde $I_\lambda \neq I'_\lambda$ e I'_λ é de codimensão $(n+1)^2$. Os ideais I'_λ são os ideais primitivos de U_s de codimensão finita. Note que B_λ é Noetheriano à direita, à esquerda e seu centro é K . Para cada $\alpha \in K$ temos B_λ^α , onde $B_\lambda^\alpha = \{b \in B_\lambda | hb = \alpha b\}$. A álgebra $\bigoplus B_\lambda^\alpha$ é uma graduação de B_λ isomorfa a $K[X, Y, Z] / (4XY + Y^2)$.

Lema 7. $B_\lambda \cong B_\mu$, se e somente se, $\lambda = \mu$.

Em (Block , 1981), é feita a classificação para uma parte das representações irredutíveis de $Sl_2(K)$. Estas representações são divididas em representações de S -torção e representações livres de S -torção. Ilustraremos o mostrado por R. Block em (Block , 1981).

A ação do elemento do Casimir $Q = 4fe + h^2 + 2h$ sobre o módulo $M(\lambda - 1)$ é dada por $\gamma = \lambda^2 - 1$, assim temos o isomorfismo $M(\lambda - 1) \cong U_s / (U_s(Q - \gamma))$.

Por outra parte $K[\xi]$, pode ser visto como um U_s -módulo com a ação determinada por $p = \frac{d}{d\xi}$ e q como a multiplicação por ξ . Definimos a aplicação bijetora entre os módulos $K[\xi]$ e $M(\lambda - 1)$ como segue

$$\sum a_i \xi^i \longrightarrow \sum f^i \otimes a_i.$$

Como $h(f^i \otimes 1) = (\lambda - 2i - 1)f^i \otimes 1$ existe uma representação φ de U_s que faz possível identificar h com o elemento

$$h \equiv -2qp + \lambda - 1.$$

De forma análoga, identificamos $f \equiv q$ e $e \equiv -(qp - \lambda + 1)p$. Tomando $\tau \in \text{Aut}(U_s)$ como o automorfismo de álgebras que troca e com f e $\tau(h) = -h$ podemos definir o homomorfismo $\rho_{-\lambda} = \rho_\lambda \tau$.

A álgebra U_s pode-se ver como uma subálgebra da primeira álgebra de Weyl A_1 através do homomorfismo ρ_λ , dado por

$$\rho_\lambda(e) = q, \quad \rho_\lambda(f) = -(qp + \lambda + 1)p, \quad \rho_\lambda(h) = 2qp + \lambda + 1.$$

Da definição de ρ_λ temos

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(4fe + h^2 + 2h) &= -4(qp + \lambda + 1)pq + (2qp + \lambda + 1)^2 + 2(2qp + \lambda + 1), \\ &= -4(qp + \lambda + 1)qp - 4(qp + \lambda + 1) + (2qp + \lambda + 1)^2 + 2(2qp + \lambda + 1), \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

Assim vemos que ρ_λ tem por núcleo o ideal $U_s(Q - \lambda^2 + 1)$ denotado por $\mathcal{B}_\gamma$, onde $\gamma = \lambda^2 - 1$.

Considere a família de homomorfismos, denotada por σ_γ e definida como

$$\sigma_\gamma(e) = q, \quad \sigma_\gamma(h) = 2qp, \quad \sigma_\gamma(f) = \left(\frac{1}{4}\gamma q^{-1} - qp^2\right).$$

Cada um dos homomorfismos anteriores pode ser estendido a álgebra envelopante U_s . Esta extensão é denotada da mesma forma. Para o caso $\gamma = \lambda^2 - 1$ temos o isomorfismo entre as álgebras $\sigma_\gamma U_s = U_{s_\gamma}$ e $\rho_\lambda U_s$. Pela definição de ρ_λ temos o homomorfismo induzido de $\rho_\lambda U_s$ em $\mathfrak{B}$, além disso $K[q, p] \subset \rho_\lambda U_s$. Portanto, $S = K[q] - \{0\} \subset \rho_\lambda U_s$ e $\mathfrak{B}$ é a localização de $\rho_\lambda U_s$ por S .

Lema 8. *Suponha $\lambda \in K$ e $\gamma = \lambda^2 - 1$. Então a aplicação $\rho_\lambda \rho_{-\lambda}^{-1} : \rho_\lambda U_s \longrightarrow \rho_{-\lambda} U_s$ pode-se estender para um único homomorfismo de $\mathfrak{B}$ que fixa q e envia p para $p - \lambda q^{-1}$.*

Para um conjunto de representações irredutíveis de $Sl_2(K)$, existe uma relação entre os elemento irredutíveis de $\mathfrak{B}$ e os U_s -módulos irredutíveis, descrita no seguinte lema, demonstrado em (Block, 1981). Além disso estabelece quando um elemento pertence ao $\text{Soc}_{\rho_\lambda U_s}(N)$, para N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível.

Lema 9. *Suponhamos que $u \in U_s$, $\gamma \in K$, $\lambda \in \bar{K}$ e $\lambda^2 = \gamma + 1$. Seja G o conjunto dos polinômios irredutíveis em $K[q]$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

$$\rho_\lambda u, \rho_{-\lambda} u \text{ são preservados em } q, \text{ e } \sigma_\gamma u \text{ preservado para cada } g \in G - q. \quad (1.5)$$

$$\rho_\lambda u \text{ é preservados, e } \rho_\lambda u \text{ é preservados em } q. \quad (1.6)$$

$$\rho_\lambda u, \rho_{-\lambda} u \text{ são preservados.} \quad (1.7)$$

Para $a \in \mathfrak{B}$ as seguintes afirmações são equivalentes

$$\bar{\rho}_\lambda \bar{\sigma}_\gamma^{-1} a, \rho_{-\lambda} \bar{\sigma}_\gamma^{-1} a, \text{ são preservados em } q, \text{ e } \sigma_\gamma u \text{ preservado para cada } g \in G - q. \quad (1.8)$$

$$a \text{ é preservados, e } \bar{\rho}_\lambda - \bar{\rho}_\lambda^{-1} a \text{ é preservados em } q. \quad (1.9)$$

$$a, \bar{\rho}_\lambda - \bar{\rho}_\lambda^{-1} a \text{ são preservados.} \quad (1.10)$$

1.7 Representações irredutíveis da primeira álgebras de Weyl

Lema 10. $\mathfrak{B}$ é um domínio de ideais principais.

Demonstração. Sejam $J \triangleleft \mathfrak{B}$ um ideal à esquerda e $b \in J$ de grau mínimo em p . Usando o algoritmo da divisão para $a \in J$ existem $x < y \in \mathfrak{B}$ tais que $a = xb + y$ onde $\text{grau}(b) > \text{grau}(y)$. Como $y \in J$ então $y = 0$. Ver (Ore, 1933). $\square$

Suponhamos que N é um $\mathfrak{B}$ módulo irredutível com representação irredutível ρ tal que $\mathfrak{B}/(\ker(\rho)) \simeq N$, assim $N \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}F$, onde $\ker(\rho) = \mathfrak{B}F$. O fato que $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}F$ é irredutível, implica que F é um elemento de grau mínimo e irredutível em $\mathfrak{B}$.

Lema 11. Sejam $N_1 \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}F$, $N_2 \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}G$ dois $\mathfrak{B}$ -módulo irredutíveis, com $F, G \in \mathfrak{B}$. $N_1 \simeq N_2$, se e somente se, G e F são similares.

Demonstração. Sejam $F, G \in \mathfrak{B}$ tais que $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}F \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}G$ e φ o isomorfismo que existe entre os $\mathfrak{B}$ -módulos $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}G$, $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}F$. É claro que o isomorfismo φ está definido pela imagem de $1 + \mathfrak{B}F$, assim $\varphi(1 + \mathfrak{B}F) = u + \mathfrak{B}G$ e $0 = G\varphi(1 + \mathfrak{B}F)$ em consequência $Fu = vG$. De forma análoga existem $x, y \in \mathfrak{B}$ tais que $xF = Gy$. Mais ainda se F é irredutível, F e v são relativamente primos a esquerda e G, y são relativamente primos a direita.

Se $F, G \in \mathfrak{B}$ são irredutíveis e similares, existem $v, u \in \mathfrak{B}$ tais que $Fu = vG$. Seja $\phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{B}G$ o homomorfismo definido por $\phi(f) = fu + \mathfrak{B}G$. É claro que $\mathfrak{B}F \subset \ker(\phi)$, como $\mathfrak{B}F$ é um ideal maximal e ϕ não é trivial, temos $\mathfrak{B}F = \ker(\phi)$. $\square$

Definição 13. Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível, definimos

$$MnnAnn(N) = \{F \in \mathfrak{B} \mid F \text{ é irredutível e } \exists x \in N - \{0\} : Fx = 0\}.$$

A classe dos $\mathfrak{B}$ -módulos irredutíveis isomorfos está em correspondência bijetora com a classe dos polinômios $b \in \mathfrak{B}$ irredutíveis que são similares.

Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível e $F \in MnnAnn(N)$ com $F = \sum_{i=1}^k f_i(q)p^i$, $f_i(q) \in K(q)$ e $x \in N - \{0\}$ tal que $Fx = 0$. Então $\{x, px, \dots, p^{k-1}x\}$ é um conjunto l.i. sobre $K(q)$ gerador de N como $K(q)$ -espaço vetorial. Se $F_1, F_2 \in MnnAnn(N)$, então existem $n_1, n_2 \in N - \{0\}$ tais que $F_i n_i = 0$, como N é um $K(q)$ -espaço vetorial temos $\text{grau}_p(F_1) = \text{grau}_p(F_2)$.

Definição 14. Dizemos que um $\mathfrak{B}$ módulo irredutível N é de grau k , se existe $F \in MnnAnn(N)$ tal que $k = \text{grau}_p F$. Do anterior k é independente da escolha de F .

Sejam M um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível não nulo e $F \in A_1 \cap Ann_{\mathfrak{B}}(M)$ irredutível e preservado, de (Block, 1981), $A_1 \cap \mathfrak{B}F$ é um ideal maximal de A_1 , logo $N = (A_1 + \mathfrak{B}F)/\mathfrak{B}F$ é um A_1 -módulo irredutível, livre de S -torção e $S^{-1}N = M$. Além disso o $Soc_{A_1}(M)$ resulta irredutível e $Soc_{A_1}(M) \simeq N$. Se Fs^{-1} é preservado para $s \in S$, e $Fm = 0$ para algum $m \in M$,

então $sm \in Soc_{A_1}(M)$.

No conjunto dos A_1 -módulos irredutíveis, definimos a relação de equivalência $\sim$, onde $N_1 \sim N_2$, se e somente se, N_1 e N_2 são isomorfos. Denotamos por $A_1^\Delta(irr)$ ao conjunto das classes de equivalência geradas pela relação de equivalência $\sim$. Definimos a mesma relação de equivalência no conjunto dos $\mathfrak{B}$ -módulos irredutíveis, e denotamos por $\mathfrak{B}^\Delta(irr)$ ao conjunto das classes de equivalência geradas por esta relação de equivalência. Por outro lado, no conjunto dos polinômios irredutíveis de $\mathfrak{B}$ definimos a relação de equivalência $\sim$, onde $F_1 \sim F_2$ para $F_1, F_2 \in \mathfrak{B}$, se e somente se, F_1, F_2 são similares, denotamos $\mathfrak{B}^\Delta(Irr(\mathfrak{B}))$ o conjunto das classes de equivalência gerado por $\sim$. Assim temos uma bijeção entre os conjuntos $\mathfrak{B}^\Delta(irr)$ e $\mathfrak{B}^\Delta(Irr(\mathfrak{B}))$.

Para cada A_1 -módulo irredutível livre de S -torção M , temos o $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível $S^{-1}M$, onde $S = K[q] - \{0\}$.

Sejam N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível e $irr_{A_1}(N)$ o conjunto dos A_1 -submódulo irredutíveis de N livres de S -torção, assim $Soc_{A_1}(N) = \sum_{M \in Irr_{A_1}(N)} M$. Como $S^{-1}M_1 = S^{-1}M_2$ para $M_1, M_2 \in Irr_{A_1}(N)$, então $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, portanto $Soc_{A_1}(N)$ é um A_1 -módulo irredutível.

Teorema 17. *Existe uma bijeção entre a classe dos A_1 -módulos irredutíveis e os $\mathfrak{B}$ -módulos irredutíveis.*

Demonstração. Suponhamos que $S^{-1}M_1 \cong S^{-1}M_2$, onde M_1, M_2 são A_1 -submódulos irredutíveis. Então $M_1 \simeq M_2$ como A_1 -módulos e consequentemente S^{-1} é injetor. Por outro lado temos o isomorfismo entre $S^{-1}Soc_{A_1}(N)$ e N , para N um $\mathfrak{B}$ -módulo simples, obtido pela extensão do homomorfismo inclusão de $Soc_{A_1}(N) \rightarrow N$ e pela propriedade universal. $\square$

Seja I um ideal primo de $K[q]$. Para $f \in K[q]$ definimos $v_I(f) = r$, onde r é o inteiro tal que $f \in I^r - I^{r-1}$. A extensão da avaliação v_I ao corpo $T = S^{-1}K[q]$, onde $S = K[q] - \{0\}$ é denotada por ν_I . Onde $\nu_I(\frac{f}{g}) = v_I(f) - v_I(g)$ para $f, g \in K[q]$. A avaliação ν_I pode-se estender para uma avaliação de $\mathfrak{B}$, denotada também por ν_I e definida para cada $F = \sum_{i=0}^n b_i p^i \in \mathfrak{B}$ por

$$v_I(F) = \min\{v_I(b_i) - i \mid i \geq 0\}. \quad (1.11)$$

Definição 15. *Seja $F = \sum_{i=0}^k b_i p^i \in \mathfrak{B}$ onde $b_i \in K(q)$. Dizemos que α é um polo de F , se α é polo de algum quociente b_j/b_k . Denotamos o conjunto dos polos de F por $Pol(F)$.*

Lema 12. *Para cada ideal primo I de $K[q]$, ν_I é uma avaliação sobre $\mathfrak{B}$.*

Demonstração. Ver demonstração em (Block, 1981). $\square$

Para o ideal primo $P = K[q](q - \alpha)$ de $K[q]$ e $F \in \mathfrak{B}$, definimos o polinômios $Q_{\alpha,F}(\xi)$, que chamamos de polinômios principal de F , para $F = \sum b_i p^i \in B$, como

$$Q_{\alpha,F}(\xi) = \sum \eta_P \{g^{-v_P(b)} - j b_j (\partial g)^j\} \xi(\xi - 1) \cdots (\xi - (j - 1)).$$

Onde η_P é o homomorfismo canônico de $K[q]_P$ em $K_P = K[q]_P / PK[q]_P \cong K[q] / P$. Para $g = q - \alpha$ temos $v_P(b_j(\partial g)^j) = v_P(b_j) + jv_P(\partial g)$. Como $\partial g \notin P$ então $v_P(\partial g) = 0$, segue-se $v_P(b_j(\partial g)^j) = v_P(b_j) \geq v_P(b) + j$. Portanto, $\eta_P\{g^{-v_P(F)-j}b_j(\partial g)^j\}$ está bem definida.

Definição 16. Dizemos que $F \in \mathfrak{B}$ não nulo é preservado respeito a α , se o polinômio $Q_{\alpha,F}(\xi)$ não possui raízes inteiras negativas.

O polinômio $F \in \mathfrak{B}$ é preservado se ele é preservado respeito a cada um de seus polos. Para o polinômio principal temos as seguintes propriedades, ver (Block , 1981).

Lema 13. Suponhamos que $G, F \in \mathfrak{B}$ e $\alpha \in K$ então $Q_{\alpha,GF}(\xi) = Q_{\alpha,G}(\xi + \nu_\alpha(F))Q_{\alpha,F}(\xi)$.

Seja $F = \sum b_i p^i \in \mathfrak{B}$ de grau $k > 0$. Definimos o especial primo de $\mathfrak{B}$, como o ideal primo P de $K[q]$, tal que $v_P(F) = v_P(b_i) - i$ para algum $i < k$. Notemos que os primos especiais de F são $K[q](q - \alpha)$ onde α é um polo de F . Se α não é polo de F , então $v_P(b_k) < v_P(b_i)$ para todo $i < k$. Assim $v_P(F) = v_P(b_k) - k$ e portanto os primos especiais de F são finitos e estão caracterizados pelos α tais que $v_P(b_k) > v_P(b_i)$ para algum $i < k$, isto é pelos polos de F . Doravante denotaremos a avaliação v_P por ν_α .

Definição 17. Sejam $F \in \mathfrak{B}$ e $\alpha \in \text{Pol}(F)$, então as raízes do polinômio $Q_{\alpha,F}(\xi)$ são chamadas raízes principais de F relativas a α .

Lema 14. Sejam $0 \neq G_1, \dots, G_j \in \mathfrak{B}$, então existe $s \in K[q]$ tal que $G_i s^{-1}$ é preservado para todo $i = 1, \dots, j$. Ver (Block , 1981).

Teorema 18. Seja $F = \sum b_i p^i \in \mathfrak{B}$ irredutível e preservado. Então o A_1 -módulo $A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}F)$ é simples.

Teorema 19. Todo A_1 -módulo irredutível de S -torção M é isomorfo a $K[p]$, onde p age pela multiplicação e q como $\frac{d}{dp} - \alpha$, para algum $\alpha \in K$. Este módulo será denotado por $M(\alpha)$.

Demonstração. Seja M um A_1 -módulo irredutível de S -torção não nulo. Então existe $m \in M$ não nulo tal que $(q - \alpha)m = 0$, para algum $\alpha \in K$. Se $p^k m = p^t m$ para $k < t$, então $(q - \alpha)^t p^k m = (q - \alpha)^t p^t m = 0$. Logo $m = 0$ e $M = 0$. Portanto, $p^k m \neq p^t m$ para $k \neq t$ e em consequência M é isomorfo a $M(\alpha)$. □

Lema 15. Seja L é um ideal maximal de $\mathfrak{B}$. Então $A_1 \cap L$ é um ideal maximal de A_1 , se e somente se, para todo A_1 -módulo não nulo de S -torção irredutível M , existe um elemento em $A_1 \cap L$ que age de forma injetiva sobre o módulo M .

Demonstração. Ver (Block , 1981), Teorema 4.3.

Suponhamos que L' age injetivamente sobre M . Suponha $L' \subset J$ um ideal máximo de A_1 . Se A_1/J é livre de s -torção, então $S^{-1}J$ é um ideal máximo a esquerda de $\mathfrak{B}$, $J = S^{-1}A_1 \cap J \supset L'$, dado que L é maximal deve-se ter $L = J$. Se A_1/J é de S -torção, então existe $a \in L'$ tal que $a\bar{f} \neq 0$ para todo $\bar{f} \in A_1/J$, isto é absurdo pois $L' \subset J$. □

Lema 16. *Se $(q - \alpha)^{-v_\alpha(F)}F$ age de forma injeta sobre $M(\alpha)$, então $F \in \mathfrak{B}$ é preservado em α .*

Lema 17. *Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível. Então $\text{Soc}_{A_1}(N) \neq 0$. Para todo A_1 -módulo irredutível e livre de S -torção M , existe $F \in B$ irredutível e preservado tal que $M \simeq A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}F)$.*

Sejam N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível e $F \in \mathfrak{B}$ irredutível e preservado tal que $F^n = 0$, para algum $0 \neq n \in N$. Do isomorfismo $N \cong \mathfrak{B} / \mathfrak{B}F$ o módulo $N' = (A_1s + \mathfrak{B}F) / \mathfrak{B}F$ é um A_1 -submódulo de N , onde $N' \cong A_1s / (A_1s \cap \mathfrak{B}F) \cong A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}Fs^{-1})$, assim N' é irredutível, se e somente se, Fs^{-1} é preservado. Do anterior e usando o fato que $\text{Soc}_{A_1}(N)$ é irredutível segue-se que $sn \in \text{Soc}_{A_1}(N) = Asn$. Do anterior, para cada polo α de F tal que $Q_{\alpha,F}(\xi)$ possui uma raiz inteira, existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $(q - \alpha)^{-t}n \notin \text{Soc}_{A_1}(N)$.

O seguinte teorema demonstrado por Block em (Block , 1981), estabelece condições necessárias e suficientes para decidir quando um elemento estão no $\text{Soc}_{A_1}(N)$.

Teorema 20. *Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível, então $\text{Soc}_{A_1}N \neq 0$.*

Exemplo 2. Para $p - t \in \mathfrak{B}$ irredutível, de (Block , 1981) temos

$$\text{Soc}_{A_1}(N) = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}],$$

onde $N \simeq \mathfrak{B} / (\mathfrak{B}(p - t_1))$, l é o número de polos de t_1 e $p - t_1$ é similar a $p - t$.

De (Ore , 1933), dois polinômios $p - t_1$ e $p - t_2$ são similares, se e somente se, $t_1 - t_2 = \frac{c'}{c}$ para $c \in K(q)$. Logo $p - t$ e $p - t - \frac{j}{q - \alpha}$ são similares, assim $p - t$ e $p - t - \sum_{\alpha} \text{Res}_{\alpha}(t)(q - \alpha)^{-1}$ sempre que $\text{Res}_{\alpha}(t) \in \mathbb{Z}$. Portanto existe $d = p - t_1$ similar a $p - t$, onde $\text{Res}_{\alpha}(t_1) \notin \mathbb{Z}$, para cada polo α de d . Damos estrutura a $K(q)$ de $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível baixo a ação de p definida como; $p.f = f' + t_1f$.

Seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ o conjunto dos polos de d e $W = \text{Soc}_{A_1}(N)$. Se m_j é o maior inteiro tal que $(q - \alpha_j)^{-m_j} \in W$ temos

$$p(q - \alpha_j)^{-m_j} = t_1(q - \alpha_j)^{-m_j} + m_j(q - \alpha_j)^{-m_j-1},$$

então $(\text{Res}_{\alpha_j}(t_1) + m_j)(q - \alpha_j)^{-m_j-1} \in W$. Como $\text{Res}_{\alpha_i}(t_1) + m_i \neq 0$ temos $(q - \alpha_i)^{-m_i-1} \in W$. Note que $(q - \alpha_j)^{-n} \in W$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sempre que $v_{\alpha_j}(t) < -1$.

Capítulo 2

Módulos de grau dois sobre a primeira álgebra de Weyl

Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois. Para $x \in N - \{0\}$ existe um polinômio $F = p^2 + c_1p + c_0 \in \mathfrak{B}$ irredutível tal que $Fx = 0$, e portanto $N \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}F$. Para o polinômio F , definimos $\Delta(F) = \{\alpha \in \text{Pol}(F) \mid \exists n \in \mathbb{Z} : Q_{\alpha,F}(n) = 0\}$ e $-n_\alpha$ como a menor raiz inteira negativa. Pelo trabalho de R. Block (Block, 1981), existe um polinômio $G_1 = p^2 + a_1p + a_0 \in \mathfrak{B}$ irredutível, preservado e similar a F tal que $N \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{B}G_1$ e $\Delta(G_1) = \{\alpha \in \text{Pol}(G_1) \mid Q_{\alpha,F}(0) = 0\}$. Damos uma relação entre o módulo $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o polinômio $F_1 = p^2 + ap + b$. O polinômio F_1 é um polinômio similar a F preservado e com umas características que nós permitem dar uma melhor descrição de $W = \text{Soc}_{A_1}(N)$. Além disso Determinaremos a relação que existe entre os A_1 -módulos W e $K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$, onde $K_{\text{Pol}(F_1)} = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_m)^{-1}]$ e $\text{Pol}(F) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, usando o polinômio F_1 e o módulo quociente destes módulos. Os principais resultados destas seções são:

Teorema 21. *Seja $F \in \text{MnnAnn}(N)$, então o módulo $W = \text{Soc}_{A_1}(N)$ é irredutível e da seguinte forma*

1. $W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se, e somente se, F é preservado.
2. $W = A_1 \begin{pmatrix} \prod_{\alpha \in \Delta(F)} (q - \alpha)^{n_\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ se, e somente se, $Q_{\alpha,F}(-n_\alpha) = 0$ para $0 < n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \Delta(F)$.

Teorema 22. $W = K_{\text{Pol}(F)} \times K_{\text{Pol}(F)}$ se, e somente se, $\Delta(F_1) = \emptyset$.

Para cada $\alpha \in \text{Pol}(F_1)$ existe $h_\alpha \in K[q]$ de grau mínimo tal que os polinômios $h_\alpha a, h_\alpha b \in K(q)$ só tem polo em α . O conjunto $T(\alpha) = \left\{ h_\alpha^{n-1} p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid 2 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ gera um sub-espço de W . Usando $T(\alpha)$ temos $\Delta_0(F) = \left\{ \alpha \in \Delta(F) \mid \dim_K \left(T(\alpha) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) < \infty \right\}$.

Teorema 23. *Suponhamos que $\Delta(F_1) \neq \emptyset$, então*

1. $K_{\text{Pol}(F)} \times K_{\text{Pol}(F)} / W$ é um A_1 -módulo de S -torção isomorfo a $\bigoplus_{\alpha \in \Delta(F_1)} M(\alpha)$, onde $M(\alpha)$ é o A_1 -módulo irredutível de S -torção descrito no capítulo anterior.
2. O A_1 -módulo $K_{\text{Pol}(F)} \times K_{\text{Pol}(F)}$ é de comprimento finito $|\Delta(F_1)| + |\Delta_0(F_1)|$ e cíclico.

Onde o módulo W é módulo $Soc_{A_1}(N) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.1 Propriedades do polinômio G_1

A continuação daremos uma construção do polinômio G_1 . Seja $F = p^2 + a_1p + a_2 \in MnnAnn(N)$ e $\alpha \in Pol(F)$, então do capítulo anterior temos

$$v_\alpha(F) = \min \{-2, \nu_\alpha(a_1) - 1, \nu_\alpha(a_2)\}.$$

Como o polinômio principal associado a F em $\alpha \in Pol(F_1)$ é dado por

$$Q_{\alpha,F}(\xi) = \eta_\alpha((q - \alpha)^{-v_\alpha(F)-j})\xi(\xi - 1) + \eta_\alpha((q - \alpha)^{-v_\alpha(F)-j}a_1)\xi + \eta_\alpha((q - \alpha)^{-v_\alpha(F)-j}a_2),$$

então o polinômio $Q_{\alpha,F}(\xi)$ tem uma das seguintes formas:

$$Q_{\alpha,F}(\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\xi & \nu_\alpha(a_1) \geq 0, \nu_\alpha(a_2) = -1. \\ (\xi - 1)\xi + Res_\alpha(a_2) & \nu_\alpha(a_1) \geq 0, \nu_\alpha(a_2) = -2. \\ \xi(\xi - 1 + Res_\alpha(a_1)) & \nu_\alpha(a_1) = -1, \nu_\alpha(a_2) \geq -1. \\ (\xi - 1)\xi + Res_\alpha(a_1)\xi + Res_\alpha(a_2) & \nu_\alpha(a_1) = -1, \nu_\alpha(a_2) = -2. \\ Res_\alpha(a_1)\xi & \nu_\alpha(a_1) \leq -2, \nu_\alpha(a_2) \geq \nu_\alpha(a_1). \\ Res_\alpha(a_1)\xi + Res_\alpha(a_2) & \nu_\alpha(a_1) \leq -2, \nu_\alpha(a_2) = -1 + \nu_\alpha(a_1). \\ Res_\alpha(a_2) & \nu_\alpha(a_2) \leq -3, \nu_\alpha(a_2) < \nu_\alpha(a_1) - 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para cada $\alpha \in Pol(F)$, os polinômios $H = (q - \alpha)^{-n}F(q - \alpha)^n$ e F são similares. Assim para $n \in \mathbb{N}$ segue-se

$$Q_{\alpha,H}(0) = 0 \Leftrightarrow Q_{\alpha,F}(n) = 0.$$

Definimos o conjunto, $\Delta(F) = \{\alpha \in Pol(F) \mid Q_{\alpha,F}(n) = 0, \text{ para algum, } n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada $\alpha \in \Delta(F)$, definimos $\varrho_\alpha(F)$ como a menor raiz inteira de $Q_{\alpha,F}(\xi)$. Então o polinômio

$$G_1 = F \prod_{\alpha \in \Delta(F)} (q - \alpha)^{\varrho_\alpha(F)}, \quad (2.2)$$

é preservada, e $\Delta(G_1) = \{\alpha \in Pol(G_1) \mid Q_{\alpha,G_1}(0) = 0\}$. Para $y = \prod_{\alpha \in \Delta(F)} (q - \alpha)^{-\varrho_\alpha(F)}x$ temos $G_1y = 0$. Logo, a classe dos $\mathfrak{B}$ -módulos irredutíveis isomorfos a N , está em correspondência com a classe dos polinômios irredutíveis de grau dois similares a G_1 .

Definimos $\Delta'(G_1)$ como o conjunto dos polos de G_1 tal que $Q_{\alpha,G_1}(0) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \Delta'(G_1) &= \{\alpha \in Pol(G_1) \mid Q_{\alpha,G_1}(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}\}. \\ \Delta(G_1) &= \{\alpha \in Pol(G_1) \mid Q_{\alpha,G_1}(0) = 0\}, \end{aligned}$$

e $Pol(G_1) = \Delta(G_1) \cup \Delta'(G_1)$.

Para $\alpha \in \Delta'(G_1)$ temos

$$Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\xi + Res_{\alpha}(a_2) & \nu_{\alpha}(a_1) \geq 0, \nu_{\alpha}(a_2) = -2. \\ (\xi - 1)\xi + Res_{\alpha}(a_1)\xi + Res_{\alpha}(a_2) & \nu_{\alpha}(a_1) = -1, \nu_{\alpha}(a_2) = -2. \\ Res_{\alpha}(a_1)\xi + Res_{\alpha}(a_2) & \nu_{\alpha}(a_1) \leq -2, \nu_{\alpha}(a_2) = -1 + \nu_{\alpha}(a_1). \\ Res_{\alpha}(a_2) & \nu_{\alpha}(a_2) \leq -3, \nu_{\alpha}(a_2) < \nu_{\alpha}(a_1) - 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Para $\alpha \in \Delta(G_1)$ temos

$$Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\xi & \nu_{\alpha}(a_1) \geq 0, \nu_{\alpha}(a_2) = -1. \\ \xi(\xi - 1 + Res_{\alpha}(a_1)) & \nu_{\alpha}(a_1) = -1, \nu_{\alpha}(a_2) \geq -1. \\ Res_{\alpha}(a_1)\xi & \nu_{\alpha}(a_1) \leq -2, \nu_{\alpha}(a_2) \geq \nu_{\alpha}(a_1). \end{cases} \quad (2.4)$$

Doravante vamos supor que $G_1 = p^2 + ap + b$ é o polinômio anulador para algum $n \in N - \{0\}$, onde $a, b \in K(q)$ são como segue

$$a = \frac{a_1}{\prod (q - \alpha_i)^{r_i}}, b = \frac{b_1}{\prod (q - \alpha_i)^{s_i}}. \quad (2.5)$$

A maior raiz inteira do polinômio $Q_{\alpha, G_1}(\xi)$ é denotadas por $\theta_{\alpha}(G_1)$.

No desenvolvimento do trabalho é relevante determinar um subconjunto dos polos de $Pol(G_1)$ que seja mínimo. No seguinte exemplo mostramos dois polinômios que ilustram o anterior.

Exemplo 3. Suponhamos que $\nu_{\alpha}(a) = -1, \nu_{\alpha}(b) \geq 0$ com $Res_0(a) \in \mathbb{Z}^-$. Nosso interesse é saber quando podemos ter $a - g = Res_0(a)(q - \alpha)^{-1}$. Suponhamos que $\nu_{\alpha}(g) \geq 0$, fazendo $b = \lambda(q - \alpha)^{-Res_{\alpha}(a)}$ e $f = g' + b$ temos que o polinômio $F_1 = p^2 + (g + Res_{\alpha}(a)(q - \alpha)^{-1})p + \lambda(q - \alpha)^{-Res_{\alpha}(a)}$ é similar ao polinômio $F_2 = p^2 + gp + g' + \lambda(q - \alpha)^{-Res_{\alpha}(a)}$.

Definição 18. Dizemos que um polo α de um polinômio $F \in \mathfrak{B}$ é essencial, se α é polo de todo polinômio similar a F .

Suponhamos que existem $F_2 = p^2 + gp + f \in \mathfrak{B}$ similar ao polinômio G_1 e $\alpha \in Pol(G_1)$, tais que $\alpha \notin Pol(F_2)$ e $Pol(F_2) \subset Pol(G_1)$. Como G_1 e F_2 são similares, existem polinômios $z = xp + x_0, y = xp + x_1 \in \mathfrak{B}$ tais que

$$(xp + x_0)(p^2 + ap + b) = (p^2 + gp + f)(xp + x_1), \quad (2.6)$$

$$\xi(\xi - 1 + Res_{\alpha}(a))Q_{\alpha, z}(\xi - 2) = (\xi + \nu_{\alpha}(y))(\xi + \nu_{\alpha}(y) - 1)Q_{\alpha, y}(\xi). \quad (2.7)$$

Se $x \notin K$, da equação (2.6) temos

$$x_0 + x(a - g) = 2x' + x_1. \quad (2.8)$$

$$x'' + gx' + fx + gx_1 + 2x'_1 = xb + x_0a + xa'. \quad (2.9)$$

$$x''_1 + gx'_1 + fx_1 = x_0b + xb'. \quad (2.10)$$

De (2.6), $\nu_\alpha(y) \leq 1$. Dado que $xp + x_0$ é similar a $xp + x_1$, existe $c \in K(q)$ tal que

$$\frac{x_0}{x} - \frac{x_1}{x} = \frac{c'}{c}.$$

Lema 18. *Seja $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$. Se $\text{Res}_\alpha(a) \notin \mathbb{Z}^-$, então α é um polo essencial.*

Demonstração. Dado que z e y são similares, existe $c \in K(q)$ tal que

$$\frac{x_0}{x} - \frac{x_1}{x} = c'c^{-1},$$

portanto $\text{Res}_\alpha(a) = 2\nu_\alpha(x) + \nu_\alpha(c)$.

□

Das equações a acima, seguem-se as seguintes observações.

Observação 2. 1. Os polos do conjunto $\Delta'(G_1)$ são essenciais.

2. Suponhamos que $\nu_\alpha(a) \leq -2$, $\nu_\alpha(b) \geq \nu_\alpha(a)$. Então $Q_{\alpha,y}(\xi)$ é constante e $\nu_\alpha(y) = 0$ ou $\nu_\alpha(y) = 1$. Se $\nu_\alpha(y) = 0$ de (2.6) e (2.6), temos $\nu_\alpha(x) > 1$, $\nu_\alpha(x_1) = 0$ e $\nu_\alpha(x_0) = \nu_\alpha(x) - 1$, logo $\nu_\alpha(a) = 0$. Se $\nu_\alpha(x_1) = 1$, temos $\nu_\alpha(a) = -1$. Portanto o polo α é essencial.

3. Se $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$ não é essencial, então $\nu_\alpha(a) = -1$, $\nu_\alpha(b) = -1$, 0 e $\text{Res}_\alpha(a) \in \mathbb{Z}$.

Afirmção 3. *Seja $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$ tal que $\nu_\alpha(a) = -1$ e $\nu_\alpha(b) \geq -\text{Res}_\alpha(a)$, então α não é essencial.*

Demonstração. O homomorfismo $\varphi : W \longrightarrow K_{\text{Pol}(G_1)-\{\alpha\}} \times K_{\text{Pol}(G_1)-\{\alpha\}}$ definido por

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ (q - \alpha)^{\text{Res}_\alpha(a)} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

é um homomorfismo injetor de A_1 -módulos. Portanto, o polo α não é essencial.

□

Afirmção 4. *Se $G_1 = p^2 + ap + ab$ e similar a $F_2 = p^2 + gp + f$, e $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$ não é polo de F_2 , então $a - g$ é uma derivação logarítmica.*

Demonstração. De (2.8) e usando o fato que $x_1 - x_0 = \frac{c'}{c}$ temos $a - g = \frac{2x'}{x} + \frac{c'}{c}$.

□

Resta responder; que polos do polinômio G_1 são essenciais. Responderemos esta pergunta com ajuda da estrutura de W .

2.2 Estrutura de W

Estudar a estrutura do módulo N , equivale a estudar a estrutura de $K(q) \times K(q)$. O nosso objetivo é mostrar mediante a ação de A_1 em $K(q) \times K(q)$ que

$$\text{Soc}_{A_1}(N) \simeq \text{Soc}_{A_1}(K(q) \times K(q)) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

usando um método diferente ao método usado por R. Block em (Block, 1981). Adicionalmente daremos uma relação entre a estrutura dos módulos $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$$(K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}) / A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A ação da álgebra de Weyl A_1 , sobre o módulo $K(q) \times K(q)$ está definida como segue

$$p \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dq} & -b \\ 1 & \frac{d}{dq} - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad q \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Portanto, o módulo W é um submódulo de $K_{Pol(G_1)} \times K_{Pol(G_1)}$.

2.2.1 W é irredutível

A demonstração da irredutibilidade de $W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é dividida em três partes. Primeiro mostraremos que todo submódulo de W contém um elemento da forma $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, para $f \in K[q]$. Em seguida mostraremos que todo submódulo de W , contém elementos da forma $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix}$, para $m_j \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ os polos de G_1 . Finalmente mostramos que W é irredutível.

Afirmção 5. *Seja M um A_1 -submódulo de W não nulo, então existe $f \in K[q]$ tal que*

$$\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in M.$$

Demonstração. Sejam $g_0, g \in K[q]$ tal que $\begin{pmatrix} g_0 \\ g \end{pmatrix} \in M \leq A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $h = \prod (q - \alpha_i)^{l_i}$, onde $l_i = \max \{r_i, s_i\}$, e $h_{\alpha_i} = h(q - \alpha_i)^{-l_i}$. Assim para $\alpha \in Pol(G_1)$, h_α é o polinômio de grau mínimo relativamente primo com $q - \alpha$ tal que o único polo de $h_\alpha a$, $h_\alpha b$ é α . Então

$$\begin{aligned} (g_0 h p + (b g h - h g'_0)) \begin{pmatrix} g_0 \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \\ (g h p + (a h g - g' h - g_0 h)) \begin{pmatrix} g_0 \\ g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Onde $f = g_0^2 h + g_0 g' h - g'_0 g h - g_0 g a h + g^2 b h \neq 0$, dado que N é um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois.

□

Lembremos que $G_1 = p^2 + ap + b$ é preservado e irredutível, onde a e b são como segue

$$a = \frac{a_1}{\prod (q - \alpha_i)^{r_i}}, \quad b = \frac{b_1}{\prod (q - \alpha_i)^{s_i}}. \quad (2.11)$$

Afirmção 6. *Suponhamos que o conjunto dos polos de G_1 está dado por $Pol(G_1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Então existem $m_j \in \mathbb{N}$ tais que $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix} \in M$.*

Demonstração. Da afirmação anterior $\begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix} \in M$, então

$$\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{l_j} f' \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{l_j} f' \end{pmatrix} \in M.$$

Usando indução, existem $y_1, \dots, y_l$ tais que $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{y_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{y_j} \end{pmatrix} \in M$. □

Observação 3. Se $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix} \in M$, então

$$\prod_{j \neq i} (q - \alpha_j) p \begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_k)^{m_k} \\ 0 \end{pmatrix} \in M,$$

para $i = 1, \dots, l$, logo $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_i)^{m_i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in M$.

Teorema 24. *Seja $F \in MnnAnn(N)$, então o módulo $W = Soc_{A_1}(N)$ é irredutível e da seguinte forma*

1. $W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se, e somente se, F é preservado.
2. $W = A_1 \begin{pmatrix} \prod_{\alpha \in \Delta(F)} (q - \alpha)^{n_\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ se, e somente se, $Q_{\alpha, F}(-n_\alpha) = 0$ para $0 < n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \Delta(F)$.

Demonstração. Sejam $m_1, \dots, m_l$ inteiros positivos com $\sum m_j$ mínima tais que $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix} \in M$. Da observação anterior $\begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_i)^{m_i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in M$.

Basta mostrar que $\begin{pmatrix} 0 \\ \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{pmatrix} \in M$.

De $p \begin{pmatrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix}$ e $p \begin{pmatrix} \prod (q - \alpha_j)^{m_j-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ temos os seguintes elementos de M

$$\begin{pmatrix} -Res_\alpha(b) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-s_i} \\ (m_j - Res_\alpha(a) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)(q - \alpha_i)^{1-r_i}) \prod (q - \alpha_j)^{m_j-1} \end{pmatrix} \in M, \quad (2.12)$$

$$\begin{pmatrix} (m_i - 1) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j-1} (q - \alpha_i)^{m_i-2} \\ \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{pmatrix} \in M. \quad (2.13)$$

Usando os elementos acima, mostraremos que

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ Q_{\alpha, G_1}(-m_i) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{matrix} \right) \in M. \quad (2.14)$$

em consequência, $\left(\begin{matrix} 0 \\ \prod (q - \alpha_j)^{m_j-1} \end{matrix} \right) \in M$. Portanto W é irredutível e tem a estrutura do enunciado.

A demonstração de (2.14) depende da forma do polinômio $Q_{\alpha, G_1}(a)$, ver (2.1).

1. Se $s_i = 1$ e $r_i = 0$, então $Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \xi(\xi - 1)$. De (2.12) temos

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ m_i(m_i + 1 - \text{Res}_\alpha(a)) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{matrix} \right) \in M.$$

2. Suponhamos que $s_i = 2$ e $r_i = 0$, então $Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \xi(\xi - 1) + \text{Res}_\alpha(b)$. De (2.12) temos

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ (m_i(m_i - 1) + \text{Res}_\alpha(b)) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{matrix} \right) \in M.$$

3. Se $s_i \leq 1$ e $r_i = 1$. Então $Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \xi(\xi - 1 + \text{Res}_\alpha(a))$. De (2.12) temos

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ m_i(m_i + 1 - \text{Res}_\alpha(a)) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{matrix} \right) \in M.$$

4. Se $s_i = 2$ e $r_i = 1$, então $Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \xi(\xi - 1) + \text{Res}_\alpha(a)\xi + \text{Res}_\alpha(b)$. De (2.12) temos

$$\left(\begin{matrix} 0 \\ (m_i(m_i - 1) + m_i \text{Res}_\alpha(a) + \text{Res}_\alpha(b)) \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} (q - \alpha_i)^{m_i-1} \end{matrix} \right) \in M.$$

5. Nos casos restantes a demonstração é similar.

□

2.2.2 Se $\Delta(G_1) = \emptyset$

Neste caso todos os polos de G_1 são essenciais, então $G_1 = F_1$. Lembremos que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. As seguintes afirmações são usadas para construir exemplos de polinômios irredutíveis em $\mathfrak{B}$.

Afirmção 7. *O polinômio $F_1 = a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \in A_1$ é irredutível se, e somente se, a equação diferencial $a_2 z'' + a_1 z' + a_0 z = 0$ não tem soluções em $K(q)$. (Método de Frobenious).*

Teorema 25. *Seja $F = \sum_{i=0}^m f_i p^i \in A_1$. Se existe $\alpha \in K$ tal que $q - \alpha$ divide a f_i para $i \geq 1$, $q - \alpha$ não divide a f_0 e $(q - \alpha)^2$ não divide a f_m , então F é irredutível em $\mathfrak{B}$.*

Demonstração. Ver (Kovacic, 1972).

□

Exemplo 4. Seja $F_1 = p^2 + p + \frac{1}{(q-\alpha)}$, onde $\alpha \in K$. Pelo teorema anterior o polinômio F_1 é irreduzível, e que $Q_{\alpha, F_1}(\xi) = \xi(\xi - 1)$.

Veremos que $W \subsetneq K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}]$. Dado que W é irreduzível $w \in W$ se, e somente se, existem $f_i(q) \in K[q]$ tal que $w = \sum f_i(q)p^i u$. Por outra parte os seguinte elementos pertencem W

$$\begin{aligned} p^2 u &\Rightarrow w_0 = (q - \alpha)^{-1} u \in W, \quad p^2 u \in \langle u, pu, w_0 \rangle_K. \\ p^3 u &\Rightarrow w_1 = (q - \alpha)^{-1} u - (q - \alpha)^{-2} pu \in W, \quad p^3 u \in \langle u, pu, w_0, w_1 \rangle_K. \\ p^4 u &\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 2(q - \alpha)^{-3} - (q - \alpha)^{-2} \\ -2(q - \alpha)^{-2} - (q - \alpha)^{-1} \end{pmatrix} \in W, \quad p^4 u \in \langle u, pu, w_0, w_1, w_2 \rangle_K. \end{aligned}$$

Provaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $p^n u \in \langle u, pu, w_0, \dots, w_n \rangle_K$, e $(q - \alpha)w_j \in \langle u, pu, w_0, \dots, w_{j-1} \rangle_K$, para $j \leq n$. Então W é gerado por

$$\{u, pu, w_0, \dots, w_n, \dots\}_{K[q]},$$

deste conjunto gerador temos $\begin{pmatrix} 0 \\ (q - \alpha)^{-1} \end{pmatrix} \notin W$. Suponhamos que a hipótese é verdadeira para n . Definimos $w_{n+1} = pw_n$, usando a identidade $(q - \alpha)p = p(q - \alpha) + 1$ e a hipóteses de indução temos o conjunto $\{u, pu, w_0, \dots, w_{n+1}\}_{K[q]}$, que satisfaz as hipóteses do enunciado. Assim, provamos que $W \subsetneq K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}]$.

Lema 19. Se $\Delta(F_1) = \emptyset$, então $W = K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$.

Demonstração. Sabemos que W é um A_1 -módulo irreduzível. Se o polinômio principal não tem raízes inteiras, então ele está identificado com um dos polinômios da seguinte lista;

$$Q_{\alpha, F_1}(\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\xi + Res_\alpha(b) & \nu_\alpha(a) = 0, \nu_\alpha(b) = -2. \\ (\xi - 1)\xi + Res_\alpha(a)\xi + Res_\alpha(b) & \nu_\alpha(a) = -1, \nu_\alpha(b) = -2. \\ Res_\alpha(a)\xi + Res_\alpha(b) & \nu_\alpha(a) \leq -2, \nu_\alpha(b) - 1 = \nu_\alpha(a). \\ Res_\alpha(b) & \nu_\alpha(b) \leq -3, \nu_\alpha(a) < \nu_\alpha(b) - 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Seja k o menor inteiro positivo tal que $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-k} \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 0 \\ (q - \alpha)^{-k+1} \end{pmatrix} \in W$, então

$$\begin{pmatrix} -k(q - \alpha)^{-k-1} \\ (q - \alpha)^{-k} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -b_1(q - \alpha)^{-s_\alpha - k+1} \prod_{\alpha_i \neq \alpha} (q - \alpha_i)^{-s_i + l_i} \\ -(k - 1)(q - \alpha)^{-k} - a_1(q - \alpha)^{-r_\alpha - k+1} \prod_{\alpha_i \neq \alpha} (q - \alpha_i)^{-s_i} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

são elementos de W . Na demonstração usamos a identificação $r_\alpha = -\nu_\alpha(b)$ e $-\nu_\alpha(a) = s_\alpha$.

1. Suponhamos que $r_\alpha = 0$, $s_\alpha = 2$. De (2.16), temos $\begin{pmatrix} -Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{-1-k} \\ -(k - 1)(q - \alpha)^{-k} \end{pmatrix} \in W$, portanto $\begin{pmatrix} Q_{\alpha, F_1}(k + 1)(q - \alpha)^{-k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Dado que $Q_{\alpha, F_1}(n) \neq 0$ se $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-n} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ e $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W$.

2. Suponhamos que $r_\alpha = 1$, $s_\alpha = 2$. Multiplicando (2.16) por h_α tem-se

$$\begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha_1)^{-k-1} \\ -(k-1 - Res_\alpha(a))(q - \alpha)^{-k} \end{pmatrix} \in W,$$

portanto $\begin{pmatrix} Q_{\alpha, F_1}(k+1)(q - \alpha_1)^{-k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Dado que $Q_{\alpha, F_1}(n) \neq 0$, para $n \in \mathbb{N}$, obtemos que $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-n} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ e portanto $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W$.

3. Suponhamos que $r_\alpha \geq 2$, $s_\alpha = r_\alpha + 1$. Multiplicando (2.16) por h_α temos

$$\begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{-k-r_\alpha} \\ -(k-1)(q - \alpha)^{-k} - Res_\alpha(a))(q - \alpha)^{-k-r_\alpha+1} \end{pmatrix} \in W,$$

multiplicando por $(q - \alpha)^{r_\alpha-1}$ o elemento anterior, obtemos $\begin{pmatrix} Q_{\alpha, F_1}(k+1)(q - \alpha)^{-k-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Dado que $Q_{\alpha, F_1}(n) \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, temos $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-n} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. Portanto

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W.$$

4. Suponhamos que $s_\alpha \geq 3$, então $s_\alpha > r_\alpha + 1$. Multiplicando (2.16) por h_α obtemos

$$\begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{-k-s_\alpha+1} \\ -(k-1)(q - \alpha)^{-k} - Res_\alpha(a))(q - \alpha)^{-k-r_\alpha+1} \end{pmatrix} \in W,$$

multiplicando por $(q - \alpha)^{s_\alpha-1}$ o elemento anterior, obtemos $\begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{-k-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, e dado que $Q_{\alpha, F_1}(n) \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, segue-se

$$\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-n} \\ 0 \end{pmatrix} \in W \text{ e } K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W. \quad (2.17)$$

Portanto, para cada $\alpha \in Pol(F_1)$ temos $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W$, então

$$W = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}].$$

□

2.2.3 Se $\Delta(G_1) \neq \emptyset$

Determinaremos que polos de G_1 são essenciais. Denotaremos o polinômio reduzido, ver definição 19, obtido de G_1 tirando os polos não essenciais por F_1 . Da seção anterior, se um polos α de G_1 não é essencial, então $\alpha \in \Delta(G_1)$.

Na forma do polinômio principal $Q_{\alpha, G_1}(\xi)$ que foi dada em (2.3), para $\alpha \in \Delta(G_1)$, substituímos $r_\alpha = -\nu_\alpha(b)$ e $-\nu_\alpha(a) = s_\alpha$. O polinômio principal $Q_{\alpha, G_1}(\xi)$ associado a G_1 no polo

α é da seguinte forma

$$Q_{\alpha, G_1}(\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)\xi & r_\alpha = 0, s_\alpha = 1. \\ (\xi - 1)\xi + \text{Res}_\alpha(a)\xi & r_\alpha = 1, s_\alpha \leq 1. \\ \text{Res}_\alpha(a)\xi & r_\alpha \geq 2, r_\alpha \geq s_\alpha. \end{cases} \quad (2.18)$$

Para determinar a unicidade de W salvo isomorfismos e a sua estrutura, precisamos saber quando um polo $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$ é essencial.

Observação 4. Seja $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $pu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $l_\alpha = \max\{r_\alpha, s_\alpha\}$.

Se $(q - \alpha)^{-t}u \in W$ então $(q - \alpha)^{-t+1}pu \in W$, assim

$$p(q - \alpha)^{-t+1}u = (q - \alpha)^{-t+1}pu + (-t + 1)(q - \alpha)^{-t}u \in W,$$

logo $(q - \alpha)^{-t+1}pu \in W$. Além disso, se $(q - \alpha)^{-t}u \in W$ para cada $t \in \mathbb{N}$ então

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W.$$

Seja $\alpha \in \Delta(G_1)$. Da equação $p^2u + apu + bu = 0$, temos os seguintes elementos de W

$$\begin{aligned} w_1 &= p(q - \alpha)^{-t}u = (q - \alpha)^{-t}pu - t(q - \alpha)^{-t-1}u, \\ w_2 &= p^2(q - \alpha)^{-t}u = -(a + 2t)(q - \alpha)^{-t-1}pu + (t(t + 1) - b(q - \alpha)^2)(q - \alpha)^{-t-2}u. \end{aligned}$$

De $t(q - \alpha)w_2 + (t(t + 1) - b(q - \alpha)^2)w_1$ obtemos o elemento

$$w_3 = (t(t - 1) + at(q - \alpha) + b(q - \alpha^2))(q - \alpha)^{-t}pu. \quad (2.19)$$

De w_1, w_3 segue-se $(q - \alpha)^{-1-t}u \in W$. Mostraremos que para $t \in \mathbb{N}$ tal que $Q_{\alpha, G_1}(t) \neq 0$ temos $(q - \alpha)^{-t}u, (q - \alpha)^{-t+1}pu \in W$.

Da observação (2), Para $\alpha \in \text{Pol}(G_1)$ tal que α não é essencial temos

1. $\nu_\alpha(a) = -1$, $\nu_\alpha(b) \geq -1$ e $\text{Res}_\alpha(a) = -n \in \mathbb{Z}$.
2. $\nu_\alpha(b) = -1$ e $\nu_\alpha(a) \geq 0$

Os polos que satisfazem as condições acima, são os polos que ainda não sabemos quando são essenciais. De $h_\alpha p^{k+2}u = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+2} \end{pmatrix}$ definimos $w_k = \begin{pmatrix} x_{k+1}^- \\ y_{k+2}^- \end{pmatrix}$, onde x_{k+1}^- é a soma dos monômios de x_{k+1} tal que ν_α é negativo. Da mesma forma definimos y_{k+1}^- . Usando indução construímos os elementos w_k , desta construção $W \cap K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}]$ é gerado por $T(\alpha) \cup \{u, pu\}$ sobre $K[q]$ onde

$$T(\alpha) = \{w_k \mid k \in \mathbb{N}\}. \quad (2.20)$$

Observação 5. 1. Suponhamos que $\nu_\alpha(a) = -1$ e $\nu_\alpha(b) \geq 0$. Construímos por indução os elementos w_k a partir de $p^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como segue

$$w_k = \begin{pmatrix} -(k - 1)(q - \alpha)^{-n-k+\delta} + (q - \alpha)^{-n+1+\delta}l'_k((q - \alpha)^{-1}) \\ (q - \alpha)^{-n-k} + (q - \alpha)^{-n}l'_k((q - \alpha)^{-1}) \end{pmatrix},$$

onde $\text{grau}(l_k) \leq k$ e $\text{grau}(l'_k) \leq k$ e $\delta = |\nu_\alpha(b) + \nu_\alpha(\delta)|$. Portanto, $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ e

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim W_α/W é irredutível de S -torção isomorfo a $M(\alpha)$.

Usando a ação de p em $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ temos

- (a) Se $\nu_\alpha(b) = t$ para $n - 3 \leq t \leq n - 1$ então $\dim_K(T(\alpha))$ é infinito enumerável.
- (b) Se $\nu_\alpha(b) \geq n$, então $\dim_K(T(\alpha)) = n$.

2. Suponhamos que $\nu_\alpha(a) = -1$ e $\nu_\alpha(b) = -1$. Se $p^{n+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertence ao gerado por $p^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = 0, 1, \dots, n+1$ sobre $K[q]$ então $p^{n+2+i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ também pertence. Portanto, $T(\alpha) = \{w_k \mid k = 1, \dots, n\}$. Os w_k são construídos por indução a partir de $p^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$w_1 = \begin{pmatrix} \text{Res}_\alpha(b)(q - \alpha)^{-1} \\ \text{Res}_\alpha(a)(q - \alpha)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \text{Res}_\alpha(b)(1 + \text{Res}_\alpha(a))(q - \alpha)^{-2} + \beta_1 \text{Res}_\alpha(a)(q - \alpha)^{-1} \\ \text{Res}_\alpha(a)(1 + \text{Res}_\alpha(a))(q - \alpha)^{-2} + (\mu_1 \text{Res}_\alpha(a) - \text{Res}_\alpha(b))(q - \alpha)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$w_{k+1} = \begin{pmatrix} t_{k,0}(q - \alpha)^{-k-1} + t_{k,1}(q - \alpha)^{-k} + f_{k+1}((q - \alpha)^{-1}) \\ t'_{k,0}(q - \alpha)^{-k-1} + t'_{k,1}(q - \alpha)^{-k} + g_{k+1}((q - \alpha)^{-1}) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Onde $\text{grau}(f_{k+1})$, $\text{grau}(g_{k+1}) \leq k$ e $t_{k,0}$, $t_{k,1}$, $t'_{k,0}$, $t'_{k,1}$ estão dados por

$$\begin{aligned} t_{k,0} &= \text{Res}_\alpha(b) \prod_{i=1}^k (i + \text{Res}_\alpha(a)), \\ t_{k,1} &= (b_{\alpha,1} \text{Res}_\alpha(a)(k + \text{Res}_\alpha(a)) \prod_{i=2}^{k-1} (i + \text{Res}_\alpha(a)) \\ &\quad + (k - 1) \text{Res}_\alpha(b)(\mu_1 \text{Res}_\alpha(a) - \text{Res}_\alpha(b))) \prod_{i=2}^{k-1} (i + \text{Res}_\alpha(a)). \end{aligned}$$

$$t'_{k,0} = \text{Res}_\alpha(a) \prod_{i=1}^k (i + \text{Res}_\alpha(a)),$$

$$t'_{k,1} = k(\mu_1 \text{Res}_\alpha(a) - \text{Res}_\alpha(b)) \prod_{i=1}^{k-1} (i + \text{Res}_\alpha(a)).$$

Se $n = -\text{Res}_\alpha(a) \in \mathbb{N}$ então o conjunto $W \cap K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}]$ é gerado por $T(\alpha) = \{w_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{u, pu\}$ sobre $K[q]$. Se $\dim_k(T(\alpha)) = n$ temos a cadeia de A_1 -módulos

$$W \subset V_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pela estrutura de W e a ação de p os quocientes V_α/W e W_α/V_α são irredutíveis, de S -torção e portanto isomorfos a $M(\alpha)$. Se $\dim_K(T(\alpha))$ é infinito enumerável, temos $W = V_\alpha$.

Se $\text{Res}_\alpha(a) \notin \mathbb{Z}^-$, então $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ e $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-t-2} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$, logo

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-t-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, W_α/W é irredutível de S -torção isomorfa a $M(\alpha)$.

Denotaremos por $T(\alpha)$ o conjunto conformado pelos elemento w_j .

3. Suponhamos que $\nu_\alpha(b) = -1$ e $\nu_\alpha(a) \geq 0$. Os elementos w_k estão dados por

$$w_k = \begin{pmatrix} -(k-1)(q - \alpha)^{-k} + l_k((q - \alpha)^{-1}) \\ (q - \alpha)^{-k+1} + l'_k((q - \alpha)^{-1}) \end{pmatrix}.$$

onde $l_k, l'_k \in K[q]$ com $\text{grau}(l_k) = k - 1$, $\text{grau}(l'_k) = k - 2$. Denotaremos por $T(\alpha)$ o conjunto conformado pelos elemento w_j , assim $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ e

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, W_α/W é irredutível de S -torção isomorfa a $M(\alpha)$.

4. Suponhamos que $\nu_\alpha(b) \geq \nu_\alpha(a)$ e $\nu_\alpha(a) \leq -2$. Seja $\delta = \nu_\alpha(b) - \nu_\alpha(a)$ então os elementos w_k estão dados por

$$w_k = \begin{pmatrix} \text{Res}_\alpha((q - \alpha)^{-\nu_\alpha(b)-1}b)(q - \alpha)^{-k} + l_k((q - \alpha)^{-1}) \\ \text{Res}_\alpha((q - \alpha)^{-\nu_\alpha(a)-1}a)(q - \alpha)^{-k-t} + l'_k((q - \alpha)^{-1}) \end{pmatrix}.$$

onde $l_k, l'_k \in K[q]$ com $\text{grau}(l_k) = k - 1$ e $\text{grau}(l'_k) = -k - \delta + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Se $\nu_\alpha(b) > \nu_\alpha(a)$ substituímos $b_{\alpha,i}$ por $(q - \alpha)^{\nu_\alpha(b)-\nu_\alpha(a)}b_{\alpha,i}$. Denotaremos por $T(\alpha)$ o conjunto conformado pelos elemento w_j . Assim $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ e

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, W_α/W é irredutível de S -torção isomorfa a $M(\alpha)$.

Lema 20. *Seja $\alpha \in \Delta(G_1)$ com polinômio principal $Q_{\alpha, G_1}(\xi)$, como em (2.3). Se $Res_\alpha(a) \in \mathbb{Z}^-$, então $(q - \alpha)^{Res_\alpha(a)-2}u \notin W$. Se $Res_\alpha(a) \notin \mathbb{Z}^-$, então $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$.*

Demonstração. 1. Suponhamos que $r_\alpha = 1$, $s_\alpha = 0$, 1, ver (2.5). De (2.19) temos

$$t(Res_0(a) - 1 + t)(q - \alpha)^{-1-t}u = Q_{\alpha, G_1}(t)(q - \alpha)^{-1-t}u \in W.$$

Dado que $(q - \alpha)^{-1}u$ ou $(q - \alpha)^{Res_\alpha(a)-2}u$ não pertencem ao gerado por $T(\alpha) \cup \{u, pu\}$ sobre $K[q]$, então $W \subseteq A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{Res_\alpha(a)-2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Além disso

$$K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{Res_\alpha(a)-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Suponhamos que $r_\alpha = 0$, $s_\alpha = 1$, ver (2.5). Como $(q - \alpha)^{-2}u$ não está no gerado por $T(\alpha) \cup \{u, pu\}$ sobre $K[q]$, então

$$W \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, do Lema (20), $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha$.

3. Suponhamos que $r_\alpha \geq 2$, $r_\alpha \geq s_\alpha - 1$. Seja $k_\alpha = r_\alpha - s_\alpha$ então $v = (q - \alpha)^{-k_\alpha}pu \in W$. Seja t o maior inteiro tal que $(q - \alpha)^{-t}u \in W$. De $(a(q - \alpha) + 2t)p(q - \alpha)^{-t}u + (q - \alpha)w_2$, temos $(q - \alpha)^{-t-1}u \in W$. Como $(q - \alpha)^{-1}u$ não está no gerado por $T(\alpha) \cup \{u, pu\}$ sobre $K[q]$, então

$$W \subset W_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, do Lema (20), $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha$.

□

2.3 Relação entre os módulos W e $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$

Do anterior, se $\dim_K(T(\alpha))$ é finita então $\dim_K(T(\alpha)) = -Res_\alpha(a)$ e

$$W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq V_\alpha = A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \subset A_1 \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-2+Res_\alpha(a)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No seguinte lema demonstramos formalmente que $(q - \alpha)^{Res_\alpha(a)-2}u \notin W$, como se mostrou na observação anterior. Lembremos que $-\nu_\alpha(a) = r_\alpha$ e $-\nu_\alpha(b) = s_\alpha$.

Em todos os casos anteriores foi mostrado que $\begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-\theta_\alpha(G_1)-3} \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$, onde $-\theta_\alpha(G_1)$ é menor raiz inteira de $Q_{\alpha, G_1}(\xi)$.

As seguintes observações estão nós encaminhando para o nosso objetivo. O qual consiste em mostrar que para todo $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível N e o polinômio $F \in MnnAnn(N)$ podemos construir F_1 similar a F tal que todos os polos de F_1 são essenciais, e assim finalmente determinar uma estrutura para $W = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, única salvo isomorfismos.

Observação 6. 1. Seja $\varphi : W \longrightarrow K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}} \times K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}}$ um homomorfismo injetor de A_1 -módulos. Então existe $f \in K[q]$ não nulo relativamente primo com $q - \alpha$ tal que

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) \in K[q] \times K[q].$$

Portanto, para $w_1 \in T(\alpha)$ temos $\varphi(w_1) \in K[q] \times K[q]$, usando indução obtemos $\varphi(w_n) \in K[q] \times K[q]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Suponhamos que existe $\varphi : W \longrightarrow K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}} \times K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}}$ um homomorfismo injetor de A_1 -módulos. do item anterior temos $\varphi(K[q]T(\alpha)) = L$, onde L é um $K[q]$ -submódulo de $K[q] \times K[q]$.

Seja $\varphi((q - \alpha)w_1) = (c_{0,0}, c_{0,1})$ então $q - \alpha$ divide a $c_{0,i}$ e $\varphi(w_1) = (c_{1,0}, c_{1,1})$ onde $(q - \alpha)c_{1,i} = c_{0,i}$. Por outra lado, temos $\varphi((q - \alpha)w_2) = (1 + Res_\alpha(a))(c_{1,0}, c_{1,1}) + (c_{2,0}, c_{2,1})$, e portanto existem $\beta_2, \mu_2 \in K$ tal que $\beta_2 c_{0,0} = Res_\alpha(b)c_{2,0}$ e $\mu_2 c_{0,1} = Res_\alpha(a)c_{2,1}$. Então $(q - \alpha)^2$ divide a $c_{0,i}$, por indução existem $f_0, g_0 \in K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}}$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi((q - \alpha)w_1) &= \begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^n f_0 \\ Res_\alpha(a)(q - \alpha)^n g_0 \end{pmatrix}, \\ \varphi(w_1) &= \begin{pmatrix} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{n-1} f_0 \\ Res_\alpha(a)(q - \alpha)^{n-1} g_0 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \\ \varphi(w_i) &= \begin{pmatrix} d_{i,1} Res_\alpha(b)(q - \alpha)^{n-i} f_0 \\ d_{i,0} Res_\alpha(a)(q - \alpha)^{n-i} g_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{i-1} \begin{pmatrix} \beta_{i,j}(q - \alpha)^{n-j} f_0 \\ \mu_{i,j}(q - \alpha)^{n-j} g_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $d_{i,0} = (i + Res_\alpha(a))d_{i-1,0}$, $d_{i,1} = (i + Res_\alpha(a))d_{i-1,1}$ e $d_{0,0} = d_{0,1} = 1$.

Do anterior $\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix}$ ou $(q - \alpha)^j w_n = w_{n-j}$.

No primeiro caso do homomorfismo φ temos a ação de A_1 sobre $K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}} \times K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}}$ dada por; $p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0^{-1} f'_0 \\ f_0^{-1} g_0 \end{pmatrix}$, $p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bg_0^{-1} f_0 \\ -a - g_0^{-1} g'_0 \end{pmatrix}$. Então

$$p \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' + (f_0^{-1} f'_0)f - gb g_0^{-1} f_0 \\ g' + (f_0^{-1} g'_0)f - (a + g_0^{-1} g'_0)g \end{pmatrix}.$$

Portanto, L é gerado por $\begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix}$ sobre $K[q]$ ou é gerado por $\begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix}$ sobre $K[q]$.

Baseados na observação anterior temos os seguintes lemas, os quais dão condições necessárias para determinar, quando um polo $\alpha \in Pol(G_1)$ é essencial.

Lema 21. *Seja $\alpha \in \Delta(G_1)$. Se $\dim_K(T(\alpha))$ é infinito enumerável então α é um polo essencial.*

Demonstração. Se α não é polo essencial de $G_1 = p^2 + ap + b$, existe $F_2 = p^2 + gp + f \in \mathfrak{B}$ similar a G_1 , tal que $\alpha \notin Pol(F_2)$ e $G_1(xp+x_1) = (xp+x_0)F_2$, onde $\nu_\alpha(x_1)$, $\nu_\alpha(x)$, $\nu_\alpha(x_0)$ são não negativos, e x_1 , x não são nulos simultaneamente. Definimos o homomorfismo ϕ entre os A_1 -módulos W e $K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}} \times K_{Pol(G_1)-\{\alpha\}}$ como segue:

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \end{pmatrix},$$

é claro que ϕ está bem definido. Do homomorfismo ϕ segue

$$\phi(K[q](T(\alpha))) = L \subset K[q] \times K[q].$$

Por outra lado φ induz um isomorfismo de $Soc_{A_1}(\mathfrak{B}/\mathfrak{B}G_1)$ em $Soc_{A_1}(\mathfrak{B}/\mathfrak{B}F_2)$, assim existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi \left(\sum_{i=0}^m f_i p^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ onde f_i e $q - \alpha$ são relativamente primos. Multiplicando a última igualdade por h_α^{n+1} temos

$$\varphi \left(\sum_{i=0}^m h_\alpha^{i-1} p^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = h_\alpha^{n+1} u.$$

Usando $(h_\alpha^{n+3} F_2 h_\alpha^{-n-1})(h_\alpha^{n+1} u) = 0$ temos que $\sum_{i=0}^{m+2} h_\alpha^{i-1} p^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Portanto, $\dim_K(T(\alpha)) = n$, isto é absurdo. Logo α é um polo essencial. □

Lema 22. *Suponhamos que $\nu_\alpha(a) = -1$ e $\nu_\alpha(b) \geq -1$. Se $\alpha \in \Delta(G_1)$ e $\dim_K(T(\alpha)) = n = -Res_\alpha(a)$, então α é essencial.*

Demonstração. Da observação anterior, se $T(\alpha)$ não é gerado por w_n então α é essencial. No outro caso $T(\alpha)$ é gerado por w_n sobre $K[q]$, ver observação 5. Assim $\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (q - \alpha)^n \\ 0 \end{pmatrix}$, dado que $a \neq b$. No caso $a = b$, $|T(\alpha)|$ é infinito enumerável. Logo α é um polo essencial. □

Seja $\bar{\Delta}(G_1) = \{\alpha \in \Delta(G_1) \mid \nu_\alpha(a) = -1, \nu_\alpha(b) \geq -Res_\alpha(a) \in \mathbb{Z}\}$. Decorre dos lemas anteriores o seguinte corolário

Corolario 3. $\alpha \in \bar{\Delta}(G_1)$ se, e somente se, α não é essencial.

Definição 19. *Dizemos que um polinômio $F \in \mathfrak{B}$ irredutível é reduzido, se todos seus polos são essenciais.*

Do corolário anterior, existe F_1 similar a G_1 tal que $\bar{\Delta}(F_1) = \emptyset$, isto é, para $\alpha \in \text{Pol}(F_1)$ e $\text{Res}_\alpha(a_1) \in \mathbb{Z}$ temos $\nu_\alpha(a_2) \leq -\text{Res}_\alpha(a) - 1$. Dos lemas anterior o polinômio F_1 construído em (2.2) é reduzido, além disso a estrutura do A_1 -módulo W está determinada salvo isomorfismos pelo polinômio F_1 .

Teorema 26. $\Delta(F_1) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ não gera $K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Consequência da Lema (20).

$(\Leftarrow)$ Consequência do Lema (19). □

Corolário 4. $K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}]$ é irreduzível, se é somente se, $\Delta(F_1) = \emptyset$.

Corolário 5. $K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}]$ é cíclico gerado por $\begin{pmatrix} \prod_{\alpha \in \Delta(F_1)} (q - \alpha)^{\text{Res}_\alpha(a)-2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Considere o A_1 -módulo

$$W' = A_1 \begin{pmatrix} \prod_{\alpha \in \Delta(F_1)} (q - \alpha)^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 23. Para $\alpha \in \Delta(F_1)$, os módulos W_α contem propriamente ao módulo W , além disso temos o isomorfismo

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta(F_1)} M(\alpha) \simeq (K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}) / W'.$$

Demonstração. Denotaremos por $\bar{V}$ o módulo quociente

$$(K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}) / W'.$$

Como $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha$, então para cada $w \in K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$, existe $m_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $h_\alpha^{m_\alpha} w \in W_\alpha$, portanto $w = \sum x_\alpha h_\alpha^{m_\alpha} w$, para $x_\alpha \in K[q]$ e $K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)} = \sum W_i$.

Veamos que $\bigcap_{\alpha \in \Delta(F_1)} W_\alpha = W'$. Para $w \in \bigcap_{\beta \in \Delta(F_1)} W_\beta - W'$, existe $f_\beta \in A_1$ tal que $f_\beta w = \begin{pmatrix} (q - \beta)^{-\theta_\beta(F_1)-3} \\ 0 \end{pmatrix} \in W_\alpha$, então $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha$ para todo $\alpha \in \text{Pol}(F_1)$, e portanto $W_\alpha = K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$, para cada $\alpha, \beta \in \Delta(F_1)$. Logo $W' = K_{\text{Pol}(F_1)} \times K_{\text{Pol}(F_1)}$, o que é absurdo. Ver (20).

Por outra parte, cada $\bar{W}_\alpha = W_\alpha / W'$ é um A_1 -módulo de S -torção irreduzível. Fixando $\bar{w} \in \bar{W}_\alpha$ temos $h_\alpha^{d_\alpha} w \in K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}]$ para algum $d_\alpha \in \mathbb{N}$. Como $w \notin W'$, existe $f \in A_1$ tal que $fw = \begin{pmatrix} (q - \alpha)^{-\theta_\alpha(F_1)-2} \\ 0 \end{pmatrix}$, assim $K[q, (q - \alpha)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha)^{-1}] \subset W_\alpha$ e

$$\bar{V} = \sum \bigoplus_{\alpha \in \Delta(F_1)} \bar{W}_\alpha. \quad (2.22)$$

Como $\overline{W}_{alpha}$ é irredutíveis de S -torção, então $\overline{W}_\alpha \simeq M(\alpha)$ e

$$\overline{V} = \sum_{\alpha \in \Delta(F_1)} \bigoplus M(\alpha).$$

□

Seja $\Delta_0(F_1) \subset \Delta(F_1)$ o conjunto definido por $\Delta_0(F_1) = \{\alpha \in \Delta(F_1) \mid \dim_K(T(\alpha)) < \infty\}$.

Afirmção 8. *Temos o isomorfismo $\bigoplus_{\alpha \in \Delta_0(F_1)} M(\alpha) \simeq W'/W$.*

Demonstração. Segue-se da afirmação anterior.

□

Afirmção 9. *Se $\alpha \in \Delta_0(F_1)$, então $W_\alpha/W \in Ext^1(M(\alpha), M(\alpha))$.*

Demonstração. Segue-se da afirmação anterior.

□

Para cada $\alpha \in \Delta(F_1)$ é definido o seguinte A_1 -módulo

$$V_\alpha = \{v \in \overline{V} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ tq } (q - \alpha)^m v = 0\}.$$

É evidente que $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$. portanto $(K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)})/W$ é suma dos módulos de peso V_α .

Afirmção 10. *Para os módulos W e W_α temos*

$$Ext_{A_1}^1(M(\alpha), W') = \{W' \oplus M(\alpha), W_\alpha\}.$$

Demonstração. Seja V um A_1 módulo tal que a sequencia

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} M(\alpha) \longrightarrow 0, \quad (2.23)$$

é exata. Se V é livre de S -torção, então $V = Av$ onde $v \notin Im(\varphi)$ e $(q - \alpha)v \in Im(\varphi)$. Dado que $F_1 n = 0$, então $F_1 f(q - \alpha)v = 0$ para algum $f \in A_1$. Como $\mathfrak{B}$ é um D.I.P. temos $F_1 f = g\gamma_v$ onde γ_v é o polinômio irredutível anulador de $(q - \alpha)v$. Portanto, F_1 e γ_v são similares, assim a única classe salvo isomorfismos no $Ext_{A_1}^1(M(\alpha), W')$, é W_α . □

Afirmção 11. *Para os módulos W , W' temos $Ext_{A_1}^1(W, M(\alpha)) = \{W \oplus M(\alpha), W'\}$.*

Demonstração. Segue-se da afirmação anterior.

□

Lema 24. $K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_l)^{-1}]$ é de comprimento $|\Delta(F_1)| + |\Delta_0(F_1)|$, como A_1 -módulo.

Demonstração. Usando os isomorfismos

$$\begin{aligned} W_{1\dots j} &\simeq W_{\alpha_j} + W_{1\dots(j-1)}, \\ W_{\alpha_j} \cap W_{1\dots(j-1)} &= W, \end{aligned}$$

temos $W_{1\dots j}/W_{1\dots(j-1)} \simeq W_{\alpha_j}/W$. Do anterior W_{α_j}/W é irredutível o existe $W \subset V_{\alpha_j} \subset W_{\alpha_j}$ tal que $W_{\alpha_j}/V_{\alpha_j}$ e V_{α_j}/W são irredutíveis. Portanto, $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$ é de comprimento finito com longitude $|\Delta(F_1)| + |\Delta_0(F_1)|$.

□

Afirmção 12. Para os módulos W' , $K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}$ temos

$$Ext_{A_1}^1(W', \bigoplus M(\alpha_i)) = \{W' \bigoplus_{\alpha \in \Delta(F_1)} M(\alpha), K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)}\}.$$

Demonstração. $Ext_{A_1}^1(W', \bigoplus M(\alpha_i)) \simeq \bigoplus Ext_{A_1}^1(W', M(\alpha_i)).$ □

Para $\alpha \in \Delta(F_1)$, do anterior temos a seguinte sequência exata de A_1 -módulos.

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\varphi} K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)} \xrightarrow{\psi} (K_{Pol(F_1)} \times K_{Pol(F_1)})/W \simeq W \bigoplus M(\alpha_i) \longrightarrow 0. \quad (2.24)$$

Capítulo 3

Módulos irredutíveis de grau dois sobre $Sl_2(K)$

Nesta seção damos uma caracterização do $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$, para N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível isomorfo a $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}F_1$. Além disso, descrevemos a relação que existe entre os Us -módulos W e $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$. Fixando $\lambda \in K$, temos a relação $Q_{0,F_1}(\xi - \lambda) = Q_{0,F_1,\lambda}(\xi)$, onde $F_{1,\lambda} = F_1(p - \lambda q^{-1}, q)$ ou equivalentemente $F_{1,\lambda} = q^\lambda F_1 q^{-\lambda}$. Seja $Q_{0,F_1,\lambda}(\xi)$ o polinômio principal associado a $F_{1,\lambda}$.

$F_{1,\lambda}$ não é preservado se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-\lambda - n = \theta_i$, onde θ_1, θ_2 são as raízes do polinômio $Q_{0,F_1}(\xi)$. Definimos $D^+(D^-) = \{-\theta_1, -\theta_2\} + \mathbb{Z}^+(\mathbb{Z}^-)$ e $D = D^+ \cup D^-$. Nesta seção temos os seguintes resultados

Lema 25. *Suponhamos que $0 \notin Pol(F_1)$ então $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$ salvo quando $\lambda \in \mathbb{Z}^-$. Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$ temos $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = q^{-\lambda}W$.*

Lema 26. *Sejam $\alpha_1 = 0 \in Pol(F_1)$ e θ_1, θ_2 as raízes do polinômio principal $Q_{0,F_1}(\xi)$ associado a F_1 . Se $\lambda \notin D$ o polinômio $\rho_\lambda \rho_\lambda^{-1}(F_1)$ resulta preservado e $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$.*

Afirmção 13. *Sejam $\lambda \in K$ e $V_\sigma = q^t W / Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) (W / Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N))$. Então V_σ é um módulo de Verma com peso σ , onde σ toma um dos seguintes valores*

1. $-\lambda - 1$.
2. $-\lambda - t$ se $-\lambda - t$ é raiz de $Q_{0,F_1}(\xi)$ para $r_1 = s_1 - 1$.
3. $-\lambda + t$ se $-\lambda + t$ é raiz de $Q_{0,F_1}(\xi)$ para $r_1 = s_1 - 1$.

O resultado principal do trabalho, é enunciado no final desta seção.

Doravante todos os módulos considerados são módulo sobre $\rho(\lambda)Us$. Lembremos que $F_1 = p^2 + ap + b$ onde

$$a = \frac{a_1}{\prod (q - \alpha_i)^{r_i}}, b = \frac{b_1}{\prod (q - \alpha_i)^{s_i}}. \quad (3.1)$$

3.0.1 Se $0 \notin \text{Pol}(F_1)$

Sejam $g = \prod (q - \alpha_i)^{l_i}$, $g_i = g(q - \alpha_i)^{-l_i}$, onde $l_j = \max\{r_j, s_j\}$. Lembremos que $e = q$, $f = -(qp + \lambda + 1)p$, $h = 2qp + \lambda + 1$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $pu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Seja M um U_s -submódulo de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como $K[q] \subset \rho(\lambda)Us$ existem $f_1, f_2 \in K[q]$ tal que $v = f_1u + f_2pu \in M - \{0\}$. Da ação de h sobre o elemento v temos $gqp \in M$, onde

$$gqp v = \begin{pmatrix} gqf'_1 - qgbf_2 \\ qgf_1 + qgf'_2 - gaqf_2 \end{pmatrix} \in M,$$

então $(f_1gqp - (gqf'_1 - qgbf_2))v = xu$ e $(f_2gqp - (qgf_1 + qgf'_2 - gaqf_2))v = -xpu$, para $0 \neq x = qgf'_1f_2 - qgbf_2^2 - qgf_1^2 - qgf'_2f_1 + qga f_2f_1$.

Do anterior, existe $y \in K[q]$ tal que $u_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in M$. Usando indução e a ação de h nos elementos anteriores, existem $n, m_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, n$ tais que

$$d_0 = \begin{pmatrix} q^n \prod (q - \alpha_i)^{m_i} \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ q^n \prod (q - \alpha_i)^{m_i} \end{pmatrix} \in M.$$

No que segue daremos uma lista de elementos de M obtidos da ação de h , os quais denotaremos por d_2, d_3, d_4 e d_5 . Os elementos d_2 e d_3 e d_4 são obtidos da ação de h sobre os elementos d_0, d_1 e d_2 respectivamente. Finalmente d_5 é obtido de $g_k d_3$.

$$d_2 = q^n \prod_i (q - \alpha_i)^{m_i-1} u,$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} -bq^{n+1}(q - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} \\ \sum_i m_i q^{n+1}(q - \alpha_i)^{m_i-1} \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} - aq^{n+1} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix}.$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} (m_i - 1)q^{n+1}(q - \alpha_i)^{m_i-2} \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} \\ q^{n+1}(q - \alpha_i)^{m_i-1} \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix}.$$

$$d_5 = \begin{pmatrix} -bg_k q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j} \\ m_k g_k q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k-1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j} - ag_k q^{n+1} \prod (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5. Suponhamos que $\text{Pol}(F_1) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $r_1 = 0$ e $s_1 = 1$. Seja $l_2 = \max\{\nu_{\alpha_2}(a), \nu_{\alpha_2}(b)\}$, então de $(q - \alpha_2)^{l_2} qpd_1$ temos

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ q^n (q - \alpha_1)^{m_1-1} (q - \alpha_2)^{m_2+l_2} \end{pmatrix} \in M.$$

Usando o elemento d_1 e c_0 obtemos $(q - \alpha_1)d_1 \in M$. Usando indução sobre $m_1 - 1$ obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q^n (q - \alpha_2)^{m_2} \end{pmatrix} \in M.$$

Trocando α_1 por α_2 no argumento anterior, mostramos que $\begin{pmatrix} 0 \\ q^n(q - \alpha_1)^{m_1} \end{pmatrix} \in M$. Portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^n \\ 0 \end{pmatrix} \in M.$$

O exemplo acima dá uma motivação para mostrar que em todo submódulo M de $\rho(\lambda)Us$ existem elementos $\begin{pmatrix} 0 \\ q^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q^n \\ 0 \end{pmatrix}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Analogamente ao exemplo, considere os seguintes elementos de M , gerados por qpd_2 e d_1 . De qpd_2 temos o elemento

$$v_0 = q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} pu + (m_i - 1)q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - 2\delta_{ij}} u \in M.$$

De $f \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j) d_1$ temos o elemento

$$(qp + \lambda + 1) \left[q^{n-1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} [(n + (m_i - 1)q(q - \alpha_i)^{-1})u + qpu] \right] \in M.$$

Então $(qp + \lambda + 1)(q^{n-1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}})u = (n + \lambda)(q^{n-1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}})u + v_0$, dado que $v_0 \in M$ tem-se

$$q^{n-1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} u \in M. \quad (3.2)$$

Se $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$, $\text{Soc}_{\rho_\lambda(Us)}(N)$ é irredutível. Para nosso caso $F_{1,\lambda} = \rho_{-\lambda}\rho_\lambda^{-1}(F_1)$ é preservado se, e somente se, $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$, já que $Q_{0,F_{1,\lambda}}(\xi) = (\xi - \lambda)(\xi - 1 - \lambda)$.

Afirmção 14. Para todo $\rho(\lambda)Us$ -submódulo M de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\begin{pmatrix} q^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ q^n \end{pmatrix} \in M$.

Demonstração. Sejam M um submódulo de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $m = (m_1, \dots, m_l)$ com $|m| = \sum m_i$ mínima tal que $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j} pu, d_1 = q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - 1} u \in M$.

1. Suponhamos que $r_i = 0$ e $s_i = 1$, então $Q_{\alpha_i, F_1}(\xi) = \xi(\xi - 1)$. De d_5 e usando (3.1) temos

$$\begin{pmatrix} -Res_{\alpha_k}(b)q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j} \\ m_k q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix} \in M,$$

então $q^{n+1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} pu \in M$, para $i = 1, \dots, l$. Do fato $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j} pu \in M$ implica $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - 1} pu \in M$.

2. Suponhamos que $r_i = 1$ e $s_i \leq 1$, então $Q_{\alpha_i, F_1}(\xi) = \xi(\xi - 1 + Res_{\alpha_i}(a))$, onde F_1 não é preservado, se somente se, $Res_{\alpha_i}(a) \geq 1$. De d_5 e usando (3.1) segue

$$\begin{pmatrix} 0 \\ (m_k - Res_{\alpha_k}(a))q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j} \end{pmatrix} \in M.$$

Portanto, $q^{n+1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} (m_i - Res_{\alpha_i}(a))pu \in M$, para $i = 1, \dots, l$. Dado que $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j} pu \in M$ temos $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - 1} pu \in M$.

3. Suponhamos que $r_i \geq 0$ e $s_i = 2$, então $Q_{\alpha_i, F_1}(\xi) = \xi(\xi - 1) + Res_{\alpha}(b)$. De d_5 e usando (3.1) obtemos

$$\left(\frac{Res_{\alpha_k}(b)q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k-2} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j}}{m_k q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k-1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j}} \right) \in M.$$

Do elemento anterior e de d_4 segue-se $(m_i(m_i + 1) - Res_{\alpha_i}(b)) q^{n+1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} pu \in M$, para $i = 1, \dots, l$. Como F_1 é preservado temos $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j-1} pu \in M$.

4. Suponhamos que $r_i = 1$ e $s_i = 2$, então $Q_{\alpha_i, F_1}(\xi) = \xi(\xi - 1) + Res_{\alpha}(a)\xi + Res_{\alpha}(b)$. De d_5 e usando (3.1) temos

$$\left(\frac{Res_{\alpha_k}(b)q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k-2} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j}}{(m_k - Res_{\alpha_k}(a))q^{n+1}(q - \alpha_k)^{m_k-1} \prod_{j \neq k} (q - \alpha_j)^{m_j}} \right) \in M.$$

Do elemento anterior e de d_4 segue-se $(m_i(m_i + 1 - Res_{\alpha}(a)) - Res_{\alpha_i}(b)) q^{n+1} \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} pu \in M$, para $i = 1, \dots, l$. Como F_1 é preservado temos $q^n \prod_j (q - \alpha_j)^{m_j-1} pu \in M$.

5. A demonstração nos casos restantes, é similar.

Assim para $i = 1, \dots, n$,

$$Q_{\alpha_i, F_1}(-m_i)q^n \prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j - \delta_{ij}} \in M.$$

Portanto, $\prod_{j \neq i} (q - \alpha_j)^{m_j-1} \in M$. Segue-se da hipótese que $q^n u, q^n pu \in M$ para algum $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Note que na demonstração da afirmação 14, não foi usado o fato que $\alpha_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Lema 27. *Suponhamos que $0 \notin Pol(F_1)$ então $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$ salvo quando $\lambda \in \mathbb{Z}^-$. Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$ temos $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = q^{-\lambda}W$.*

Demonstração. Sejam M um $\rho(\lambda)Us$ -submódulo de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e m o menor inteiro positivo tal que $q^m u, q^m pu \in M$. Note que $hq^n u, hq^n pu$ são múltiplos de $q^n u, q^n pu$ sobre $K[q]$. De *fup* se segue

$$(qp + \lambda + 1)p(q^m pu) = (qp + \lambda + 1)(q^m p^2 u + m q^{m-1} pu), \quad (3.3)$$

$$= q^{m+1} p^3 u + (2m + \lambda + 1)q^m p^2 u + m(\lambda + m)q^{m-1} pu. \quad (3.4)$$

$$(qp + \lambda + 1)p(q^m u) = m q^m p^u + m(m + \lambda)q^{m-1} u. \quad (3.5)$$

Multiplicando a equação (3.3) por g^4 , segue-se que $q^{m-1} u, q^{m-1} pu \in M$, para $-\lambda \neq m$. Dado que m foi tomado como o menor inteiro positivo, então $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um $\rho_\lambda U_s$ -módulo irredutível de W .

Para provar que $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = W$ basta mostrar que $p^t u \in \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para tudo $t \in \mathbb{N}$. Para $t = 0$ a afirmação é válida. Suponhamos que a afirmação é válida para $t \leq k$. Defina $z_t = p^t u \in \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, lembremos que $g \in K[q]$, é o polinômio de menor grau tal que $ga, gb \in K[q]$. Considerando o elemento $qp^{k+1}u = qz_{k+1}$, multiplicando por g^{k+1} à esquerda o seguinte elemento

$$fz_k = qp^{k+2}u + (\lambda + 1)p^{k+1}u = qp^k(-bu - apu) + (\lambda + 1)p^{k+1}u \in \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e usando a equação $q^m p^j = \sum_{i=0}^j \lambda_{ij} p^{j-i} D^{(i)}(q^m)$, obtemos $z_{k+1} \in \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Portanto $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, da afirmação anterior temos $q^{-\lambda}u, q^{-\lambda}pu \in M$, para todo $\rho(\lambda)Us$ -submódulo irreduzível M de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, portanto $M = \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} q^{-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}$, é irreduzível. Seja k o maior inteiro positivo tal que $q^{-\lambda}p^k u \in M$. Substituindo m por $-\lambda$ e p por p^k em (3.3), se segue que $q^{-\lambda}p^{k+1}u \in M$, além disso $q^{-\lambda}W$ é fechado sobre a ação de f . $\square$

3.0.2 Se $0 \in Pol(F_1)$

Daremos uma motivação para nosso estudo, e ilustraremos o que acontece com o quociente $W/Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$ para o caso $0 \in Pol(F_1)$.

Exemplo 6. Suponhamos que $r_1 = 0$, $s_1 = 1$ e $Pol(F_1) = \{0, \alpha\}$, então $F_1 = p^2 + ap + bq^{-1}$ onde $a, b \in K[q, (q - \alpha)^{-1}]$.

Para cada $\rho(\lambda)Us$ -submódulo M de W , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q^n u, q^n pu \in M$. Da ação de f sobre os elementos $q^n u, q^n pu$, obtemos os seguintes elementos de M ,

$$(qp + \lambda + 1)(q^{n-1}pu), (qp + \lambda + 1)(q^{n-1}u),$$

portanto $(\lambda + n)q^{n-1}pu, (\lambda + n)q^{n-1}u \in M$.

Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, então $q^{-\lambda}u, q^{-\lambda}pu \in M$, além disso $q^{-\lambda}W$ obtém estrutura de $\rho(\lambda)Us$ -módulo. Portanto, $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} q^{-\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} = M = Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$, assim M é um submódulo irreduzível de $q^{-\lambda}W$.

O quociente $q^{-\lambda}W/Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$ dá informação da relação que existe entre os módulos $q^{-\lambda}W$ e $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$. Para estudar a estrutura do quociente $q^{-\lambda}W/Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$, escolhamos k o maior inteiro tal que $q^{-\lambda}p^k u \in Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$. De $f(q^{-\lambda}p^k u)$ temos

$$(\lambda + k - 1)q^{-\lambda}p^{k+1}u \in Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N),$$

e portanto o maior inteiro que satisfaz $q^{-\lambda}p^k u \in Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$ é $k = -\lambda + 1$. Como $q^{-\lambda}p^{-\lambda+2}u \notin Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$.

Definimos

$$\begin{aligned} v_0 &= q^{-\lambda} p^{-\lambda+2} u \quad (\text{mod } Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)), \\ v_i &= f v_{i-1}, \quad i \geq 1 \quad (\text{mod } Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)). \end{aligned}$$

O conjunto $\{v_i | i \in \mathbb{N}\}$ gera o módulo quociente $W / Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$, neste módulo quociente temos $q v_0 = 0$.

$$\begin{aligned} h v_0 &= (2qp + \lambda + 1) v_0 = 2q^{-\lambda+1} p^{-\lambda+3} u + (-\lambda + 1) q^{-\lambda} p^{-\lambda+2} u, \\ &= 2q^{-\lambda} p^{-\lambda+1} (qp^2 u) - (-\lambda + 1) q^{-\lambda} p^{-\lambda+2} u, \\ &\equiv (\lambda - 1) q^{-\lambda} p^{-\lambda+2} u \quad (\text{mod } Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)). \end{aligned}$$

Logo, $W / Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) \simeq V(\lambda - 1)$ é um módulo de Verma de peso $\lambda - 1$.

Se $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$ então $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = \rho(\lambda) U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por outro lado o módulo quociente

$$W / Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W / \rho(\lambda) U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

então $u, pu \in Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = \rho(\lambda) U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Seja k o maior inteiro tal que $p^k u \in \rho(\lambda) U_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de $f p^k u$ temos $qp^{k+2} u + (\lambda + 1) p^{k+1} u \in M$. Dos seguintes elementos

$$\begin{aligned} qp^{k+2} u &= p^k (qp^2) - k p^{k+1} u, \\ &\equiv -k p^{k+1} u \quad (\text{mod } M), \end{aligned}$$

obtemos $(\lambda - k + 1) p^{k+1} u \in M$, então $M = Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$ para $\lambda \notin \mathbb{N}$. Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{N}$, definindo

$$\begin{aligned} v_0 &= p^\lambda u \quad (\text{mod } M), \\ v_i &= f v_{i-1}, \quad i \geq 1 \quad (\text{mod } M), \end{aligned}$$

o conjunto $\{v_i | i \in \mathbb{N}\}$ gera o módulo quociente W / M . De $f p^{\lambda-1}$ temos $qp^{\lambda+1} \equiv -(\lambda + 1) p^\lambda \quad (\text{mod } M)$ e

$$\begin{aligned} h v_0 &= (2qp + \lambda + 1) v_0 = 2qp^{\lambda+1} u + (\lambda + 1) p^\lambda u, \\ &\equiv -(\lambda + 1) p^{\lambda+1} u \quad (\text{mod } M). \end{aligned}$$

Como $q v_0 = 0$ temos $W / M \simeq V(-\lambda - 1)$, onde $V(-\lambda - 1)$ é o módulo de Verma de peso $-\lambda - 1$. No exemplo anterior, é muito importante o fato que 0 é um polo de ordem um.

3.0.3 Estrutura do $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N)$

Nesta seção generalizamos o exemplo anterior. A demonstração depende da forma do polinômio principal $Q_{\alpha_i, F_1}(\xi)$ associado a F_1 . Portanto, a demonstração é dividida em 7 casos, como em (2.1).

Das propriedades obtidas na seção anterior, para todo $\rho(\lambda) U_s$ -módulo M existe $n \in \mathbb{N}$ tal

que $q^n u, q^n p u \in M$. Mostraremos que

$$Q_{0,F_1}(-\lambda - n)q^{n-1}u, \quad Q_{0,F_1}(-\lambda - n)q^{n-1}pu \in M, \quad (3.6)$$

implicando $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sempre que $\lambda \notin D^-$. Por outra parte mostraremos que

$$Q_{0,F_1}(-\lambda + n)p^{n+1}u \in M. \quad (3.7)$$

Portanto, $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$ para $\lambda \in K - D$.

Os elementos dados a continuação serão usados na demonstração da seguinte afirmação, e como consequência desta afirmação obtemos (3.6) e (3.7).

$$f(q^m p^k u) = q^{m+1}p^{k+2}u + (2m + \lambda + 1)q^m p^{k+1}u + m(m + \lambda)q^{m-1}p^k u, \quad (3.8)$$

$$qp(q^m p^k u) = q^{m+1}p^{k+1}u + mq^m p^k u. \quad (3.9)$$

Lema 28. *Sejam $\alpha_1 = 0$ e θ_1, θ_2 as raízes do polinômio principal $Q_{0,F_1}(\xi)$ associado a F_1 . Se $\lambda \notin D$ o polinômio $\rho_\lambda \rho_\lambda^{-1}(F_1)$ resulta preservado e $Soc_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = W$.*

Demonstração. Se $\lambda \in D$, existem inteiros k_0, k_1 tal que $Q_{0,F_1}(-\lambda + k_i) = 0$, dado que F_1 é preservado $k_i - \lambda \notin \mathbb{Z}^-$.

Suponhamos que M um $\rho(\lambda)Us$ -submódulo de $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $n \in \mathbb{N}$ o menor natural tal que

$$q^n u = \begin{pmatrix} q^n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q^n p u = \begin{pmatrix} 0 \\ q^n \end{pmatrix} \in M.$$

Substituindo $k = 0$ e $m = n$ em (3.8), segue-se $-q^{n+1}apu + (n(n + \lambda) - bq^2)q^{n-1}u \in M$. Substituindo $k = 1$ em (3.8), temos $q^{n+1}p(-apu - bu) + (2m + \lambda + 1)q^n p^2 u + n(n + \lambda)q^{n-1}pu \in M$. Dos elementos anteriores segue-se

$$\begin{aligned} -f(q^n p u) &= (qp + \lambda + 1)(-bq^n u + (-aq + n)q^{n-1}pu), \\ -f(q^n p^2 u) &= (qp + \lambda + 1) [(qb - qa^2 + qa' + (n + 1)a)q^n pu + (qb' + (n + 1)b - qab)q^n u]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se $\lambda \in K$ e k é o maior inteiro tal que $q^t p^k u \in M$ temos os seguintes elementos de M

$$\begin{aligned} q^{t+1}p^{k+2}u &= q^{t-1}p^k(q^2 p^2)u - 2kq^t p^{k+1}u - k(k - 1)q^{t-1}p^k u, \\ &\equiv (ret_0(b) + k(k - 1))q^{t-1}p^k u + (Res_0(a) + 2k)q^t p^{k+1}u \pmod{M}, \\ -f(q^t p^k u) &= (qp + \lambda + 1)(q^t p^{k+1}u + tq^{t-1}p^k u), \\ -f(q^{t+1}p^{k+1}u) &= (qp + \lambda + 1)(q^{t+1}p^{k+2}u + (t + 1)q^t p^{k+1}u). \end{aligned} \quad (3.11)$$

1. Suponhamos que $s_1 = 2, r_1 \leq 1$. Das equações (3.11) e (3.8) segue $(qp + \lambda + 1)(Q_{0,F_1}(k - n)q^n p^{k+1}u) \in M$. Como $Q_{0,F_1}(k - n) \neq 0$ então $(qp + \lambda + 1)(q^n p^{k+1}u), (qp + \lambda + 1)(q^{n-1}p^k u) \in M$. De

$$\begin{aligned} (qp + \lambda + 1)(q^n p^{k+1}u) &= q^{n+1}p^{k+2}u + (\lambda + n + 1)q^n p^{k+1}u, \\ (qp + \lambda + 1)(q^{n-1}p^k u) &= q^n p^{k+1}u + (\lambda + n)q^{n-1}p^k u \end{aligned}$$

segue-se $Q_{0,F_1}(-\lambda + k - n)q^n p^{k+1} \in M$. Portanto, $q^n p^{k+1} \in M$, se e só se, $Q_{0,F_1}(-\lambda + k - n) \neq 0$.

2. Suponhamos que $s_1 \leq 1$, $r_1 = 1$. Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$ então $q^{-\lambda}u$ e $q^{-\lambda}pu$ são elementos de M . Seja k o maior inteiro positivo tal que $q^{-\lambda}p^k u \in M$. De (3.11) temos $(\lambda + k + Res_0(a) - 1)q^{-\lambda}p^{k+1}u \in M$. Se $\lambda + k + Res_0(a) - 1 = 0$ então $Res_0(a)$ é um inteiro menor ou igual a 1 e $k = 1 - Res_0(a) - \lambda$, logo $q^{-\lambda}p^{1-Res_0(a)-\lambda}u \in M$. Suponhamos que $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$ e sejam t o menor inteiro tal que $Q_{0,F_1}(-\lambda - t) = 0$ então $q^t u$, $q^{t+1}pu \in M$. Para k o maior inteiro tal que $q^{1+t}p^k u \in M$, de (3.8), segue-se $(qp + \lambda + 1)(t + 1 - k - Res_0(a))q^t p^{k+1} \in M$. Como $-\lambda - t$ é raiz de $Q_{0,F_1}(\xi)$ e $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$ temos $(qp + \lambda + 1)(q^{t+1}p^{k+1}u) \in M$. Portanto, $(-t - \lambda + k + Res_0(a))q^{t+1}p^{k+1}u \in M$ e $k = 1$.

3. Suponhamos que $s_1 \leq r_1 + 1$ e $r_1 \geq 2$. Se $\lambda \in D^+$, então $Q_{0,F_1}(-\lambda + k) = 0$ e $p^k u \in M$. Se $\lambda \in D^-$, então $Q_{0,F_1}(-\lambda - t) = 0$ e $q^t u$, $q^{t+1}pu \in M$.

4. Suponhamos que $s_1 \leq r_1$, $r_1 \geq 2$. Se $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, então $q^{-\lambda}u$, $q^{-\lambda}pu \in M$. De

$$p^{n+1}(q^{r_1+1}p^2u) = \sum c_j q^{(r_1-j+1)} p^{(n-r_1+2)+(r_1-j+1)} \in M,$$

temos $(Res_0(b) + (-\lambda + n)Res_0(a))p^{n+1}u \in M$. Portanto, $Q_{0,F_1}(-\lambda + n)p^{n+1}u \in M$.

Mostramos que M é um U_S -submódulo irredutível e maximal de $q^t W$, portanto

$$M = Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N).$$

Além disso $Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N) = W$ se, e somente se, $\lambda \notin D$.

□

Observação 7. Se $\lambda \in D^-$ existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $Q_{0,F_1}(-\lambda - t) = 0$. Se $\lambda \in D^+$ existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q_{0,F_1}(-\lambda + t_0) = 0$.

1. Se $\lambda \in D^- \cap D^+$ então $q^t W$ é um submódulo de W e $Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N)$ é um submódulo irredutível de $q^t W$.
2. Se $\lambda \in D - D^+$ então $q^t W$ é um submódulo irredutível de W e $q^t W = Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N)$.
3. Se $\lambda \in D - D^-$, então $q^t W = W$, com submódulo irredutível $Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N)$.

O quociente $q^t W / Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N)$ é irredutível.

Afirmção 15. Se $\lambda \in D^+$, então $V_\lambda = q^t W / Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N) (W / Soc_{\rho_\lambda(U_S)}(N))$ é o módulo de Sl_2 -módulo de Verma $V(\sigma)$, onde σ toma um dos seguintes valores

1. $-\lambda - 1$.
2. $-\lambda - t$ se $-\lambda - t$ é raiz de $Q_{0,F_1}(\xi)$ para $r_1 = s_1 - 1$.

3. $-\lambda + t$ se $-\lambda + t$ é raiz de $Q_{0,F_1}(\xi)$ para $r_1 = s_1 - 1$.

Demonstração. Para a demonstração, usamos a forma do polinômio inicial e a afirmação anterior. Existem inteiros não negativos t mínimo e k máximo tal que $q^t p^k u \in M$ e $q^t p^{k+1} u \notin M$. Definimos

$$v_0 = q^t p^{k+1} u, \quad (3.12)$$

$$v_i = f^i(q^t p^{k+1} u). \quad (3.13)$$

Então $qv_0 = 0$, a ação de h sobre v_0 é dada como segue, em cada caso.

1. Suponhamos que $r_1 \leq 1$ e $s_1 \leq 2$. Usando (3.11) nos elementos $q^t p^k, q^{t+1} p^{k+1}$ temos

$$\begin{aligned} (qp + \lambda + 1)(q^t p^{k+1} u) &\equiv q^{t+1} p^{k+2} u + (\lambda + 1 + t) q^t p^{k+1} u \pmod{M}, \\ q^{t+1} p^{k+2} u &\equiv -(\lambda + 1 + t) q^t p^{k+1} u \pmod{M}. \end{aligned}$$

Da equação anterior e de $hv_0 = 2q^{t+1} p^{k+2} u + (\lambda + 1 + 2t) q^t p^{k+1} u$ obtemos

$$hv_0 \equiv -(\lambda + 1) q^t p^{k+1} u.$$

2. Suponhamos que $r_1 \geq 2$ e $s_1 = r_1 + 1$. Se $Q_{0,F_1}(-\lambda - t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$, da Lema anterior $q^t u, q^{t+1} pu \in M$. Definimos os seguinte elementos

$$\begin{aligned} v_0 &= q^{t-1} u, \\ v_i &= f^i v_0. \end{aligned}$$

Então $qv_0 \equiv 0 \pmod{M}$. De $qp(q^{t+1} pu)$ temos $w_0 = rst_0(b)q^{t-2} u + Res_0(a)q^{t-1} pu \in M$. De w_0 e $f(q^{t+1} pu)$ geramos o elemento $(qp + \lambda + 1)(q^{t-1} u) \in M$ então $-(\lambda + t)q^{t-1} u \equiv q^t pu \pmod{M}$. Portanto,

$$\begin{aligned} (2qp + \lambda + 1)(q^{t-1} u) &= 2q^t pu + (\lambda + t)q^{t-1} u, \\ &\equiv -(\lambda + t)q^{t-1} u \pmod{M}. \end{aligned}$$

Se $Q_{0,F_1}(-\lambda + t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$ a demonstração é similar, basta substituir $q^t u$ por $p^t u$. No caso $s_1 < r_1$ a demonstração é similar.

□

Finalmente temos o teorema principal do trabalho, a demonstração do teorema é uma consequência de todo o trabalho feito até agora.

Teorema 27. *Seja N um $\mathfrak{B}$ -módulo irredutível de grau dois e $\lambda \in K$. Da identificação $N \equiv K(q) \times K(q)$, onde p e q agem como a multiplicação por esquerda pelas matrizes $\begin{pmatrix} \frac{d}{dq} & -b \\ 1 & \frac{d}{dq} - a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, respectivamente. Então*

$$Soc_{\rho(\lambda)Us} N = Soc_{A_1} N,$$

salvo que,

$$0 \notin \text{Pol}(F_1) \quad e \quad \lambda \notin \mathbb{Z}^-, \quad (3.14)$$

$$0 \in \text{Pol}(F_1) \quad e \quad -\lambda \in D. \quad (3.15)$$

Além disso, se $\Delta(F_1) = \emptyset$ temos

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_n)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_n)^{-1}].$$

No outro caso, $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um submódulo irredutível de

$$K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_n)^{-1}] \times K[q, (q - \alpha_1)^{-1}, \dots, (q - \alpha_n)^{-1}].$$

Se temos (3.14), então $\rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = q^{-\lambda} A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se temos (3.15), então $\text{Soc}_{\rho_\lambda(U_s)}(N) = \rho(\lambda)Us \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e existe $t \in \mathbb{N}$ tal que o módulo quociente

$$q^t A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \text{Soc}_{\rho_\lambda(U_s)}(N) \quad \left(A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \text{Soc}_{\rho_\lambda(U_s)}(N) \right)$$

é isomorfo a um dos seguintes módulos de Verma,

1. $M(-\lambda - 1)$.
2. $M(-\lambda - t)$, se $Q_{0, F_1}(-\lambda - t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$.
3. $M(-\lambda + t)$, se $Q_{0, F_1}(-\lambda + t) = 0$ para $t \in \mathbb{N}$.

No caso $\lambda \in D^+ \cap D^-$ o módulo $W \Big/ \text{Soc}_{\rho_\lambda(U_s)}(N) \simeq V(k)$, onde $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\lambda = k + \theta_i$.

Capítulo 4

Extensões De Módulos irreduzíveis

Nesta sessão, estudaremos as extensões de A_1 -módulos irreduzíveis. Sejam M, N dois A_1 -módulos irreduzíveis. Para $V \in \text{Ext}_{A_1}^1(N, M)$ temos a seguinte sequência exata de A_1 -módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0. \quad (4.1)$$

Tomando a localização por $S = K[q] - \{0\}$ obtemos a sequência exata de $\mathfrak{B}$ -módulos

$$0 \longrightarrow S^{-1}M = \mathfrak{B}/(\mathfrak{B}G_1) \xrightarrow{\hat{\varphi}} S^{-1}V \xrightarrow{\hat{\psi}} S^{-1}N = \mathfrak{B}/(\mathfrak{B}G_2) \longrightarrow 0, \quad (4.2)$$

então $S^{-1}V \simeq \mathfrak{B}/(\mathfrak{B}G_1G_2)$.

Observação 8. Seja $F \in \mathfrak{B}$ irreduzível e não preservado, então $A_1 \cap \mathfrak{B}F$, não é um A_1 -módulo maximal de A_1 , mais ainda F não é livre de S -torção.

Suponha $F \in \text{irr}(\mathfrak{B})$ não é preservado, então o A_1 -módulo $W = A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F)$, não é irreduzível. Seja $f \in K[q]$, de grau mínimo tal que Ff^{-1} é preservado, temos os seguintes isomorfismos de A_1 -módulos

$$(A_1f + A_1 \cap \mathfrak{B}F)/(A_1 \cap \mathfrak{B}F) \simeq A_1f/(A_1f \cap \mathfrak{B}F) \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}Ff^{-1}).$$

Logo, o módulo $V_f = A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}Ff^{-1}) \leq W$ é um A_1 -submódulo irreduzível, e o módulo quociente W/V_f é de torção. Por outro lado o módulo W é livre de S -torção. Suponha que existem $w \in W$ e $s \in S$ tais que $sw \in A_1 \cap \mathfrak{B}b$, então $w \in A_1 \cap \mathfrak{B}b$ e $w = 0$.

Para todos os elementos $g \in K[q]$ tal que Fg^{-1} é preservado, temos $g = df$, onde $f \in K[q]$ é o polinômio de menor grau satisfazendo esta condição. Suponha $g \in K[q]$ tal que Fg^{-1} é preservado. Dado que f é de grau minimal, existem g_1, g_2 tais que $g = g_1f + g_2$, onde $\text{grau}(g_2) < \text{grau}(f)$. Notemos que $Q_{\alpha, bg_2^{-1}}(\xi) = \lambda Q_{\alpha, b}(\xi - v_{\alpha}(g_2))$, e $Q_{\alpha, b}(\xi - v_{\alpha}(f))$, não tem raízes inteiras negativas, então $Q_{\alpha, bg_2^{-1}}(\xi)$ não tem raízes inteira negativas, portanto $g_2 = 0$.

Exemplo 7. Suponhamos que N é irreduzível de S -torção, e M é irreduzível de grau n em (4.1). Seja $v \in V$ tal que $\psi(v) = n \in N - \{0\}$ e $(q - \alpha)n = 0$ então $(q - \alpha)v \in \text{Im}(\varphi)$. Para todo $w \in V$ existe $f \in A_1$ tal que $w = fv + \psi(m)$. Se $w \in \text{Im}(\varphi) \cap A_1v$ e $(q - \alpha)v = 0$, então $w = 0$. Portanto, $V \simeq M \oplus N$. Se $(q - \alpha)v \neq 0$ existe $m \in M$ tal que $\varphi(m) = (q - \alpha)v$, assim $V = A_1v$. Como M é irreduzível e livre de S -torção, existe $F \in \mathfrak{B}$ de grau minimal irreduzível,

preservado e anulador de m que satisfaz $F(q - \alpha)v = 0$ e $V \simeq A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}F(q - \alpha))$ com sub-módulo irredutível isomorfo a $A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}F) \simeq M$.

Do exemplo anterior é natural se perguntar pela relação que existe entre os módulos A_1F e $A_1 \cap \mathfrak{B}F$. Daremos a relação que existe entre os ideais A_1F e $A_1 \cap \mathfrak{B}F$ na seguinte proposição.

Proposição 2. *Suponhamos que N irredutível de grau n tal que $N \simeq A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B}F)$, onde $F = \sum b_i p^i \in A_1$ é irredutível e preservado de grau mínimo na variável p , e os b_i são relativamente primos. Então $(A_1 \cap \mathfrak{B}F) / A_1F$ é de S -torção. Basta provar que se $G \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$, então $b_n^{gr_p(G)} G \in A_1F$.*

Demonstração. Seja $G \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$, a demonstração é feita por indução no grau de G em p . Se $deg_p(G) = gr_p(F)$, então $G \in A_1F$. Suponha que para todo polinômio de grau em p menor o igual que $k + n$, a afirmação é válida. Seja $G \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$ tal que $gr_p(G) = k + n + 1$ e $f_{k+n+1} \neq 0$, o coeficiente principal de G . Então o grau em p de $G_1 = b_n G - f_{k+n+1} p^{1+k} F$ é $k + n$, e $b_n^{k+n} G_1 \in A_1F$. Logo,

$$b_n^{k+n+1} G \in A_1F.$$

□

Das afirmações anteriores temos

$$(A_1 \cap \mathfrak{B}F) / A_1F \simeq \sum_{\alpha \in \Delta(F)} \bigoplus M(\alpha).$$

Onde $M(\alpha)$ é um A_1 -módulo irredutível de S -torção de peso α .

Afirmção 16. *Usando a notação anterior, suponhamos que M é um A_1 -módulo irredutível de S -torção e N irredutível de grau n , então $V \simeq M \oplus N$ ou $V \simeq A_1 / A_1F$. Além disso $M \simeq A_1F / (A_1(q - \lambda)^t f)$ para $f \in (A_1 \cap \mathfrak{B}F) - J$ e $t \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $v \in V$ tal que $\psi(v) = \bar{1}$, então $Fv = \varphi(m)$. Além disso, para cada $x \in V$ existem $f \in A_1$ e $m \in M$ tais que $x = fv_\varphi(m)$. Definimos J como o ideal a esquerda de A_1 que contém todos os elementos $f \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$ com a propriedade; $fv = 0$.

1. Suponhamos que $\alpha \notin Pol(F_1)$. Para cada $f \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$ e $l, t \in \mathbb{N}$ temos $(q - \alpha)^t fv + b_n^l fv = fv$. Se $Fv = 0$ obtemos $J = A_1 \cap \mathfrak{B}b$ e $V = M \oplus N$.
Se $Fv \neq 0$ então $A_1F + J = A_1 \cap \mathfrak{B}F$ e $V = A_1 / J$, e ainda $M = A_1F / (A_1(q - \alpha)^t F)$ onde t é o menor inteiro tal que $(q - \alpha)^t Fv = 0$.
2. Suponhamos que $\alpha \in Pol(F_1)$. Para $J = A_1 \cap \mathfrak{B}F$ temos $V = M \oplus N$. Se $J \neq A_1 \cap \mathfrak{B}F$ escolhemos $f \in A_1 \cap \mathfrak{B}F$ de grau mínimo tal que $fv \neq 0$. Portanto, $J + Af = A_1 \cap \mathfrak{B}F$, $V = A_1 / J$ e $M = A_1f / (A_1(q - \alpha)^t f)$, onde t é o menor inteiro tal que $(q - \alpha)^t fv = 0$.

□

Suponhamos que $F_1, F_2 \in \mathfrak{B}$ são irredutíveis, se $V \in Ext^1(\mathfrak{B} / \mathfrak{B}F_1, \mathfrak{B} / \mathfrak{B}F_2)$ e $V \neq \mathfrak{B} / \mathfrak{B}F_1 \oplus \mathfrak{B} / \mathfrak{B}F_2$ então V é um A_1 -módulo cíclico.

Seja V um A_1 -módulo cíclico como acima. Suponhamos que $W = \mathfrak{B} / (\mathfrak{B}F_1 F_2) \simeq \mathfrak{B} / (\mathfrak{B}G)$, então $F_1 F_2 \simeq G$. Assim temos $G = G_1 \cdots G_r$ com $G_j \in irr(\mathfrak{B})$ e $gr(G) = gr(G_1 \cdots G_r)$. Por

outro lado o $\mathfrak{B}$ -módulo $W = \mathfrak{B}/(\mathfrak{B}F_1F_2)$ tem um único sub-módulo $W_2 = \mathfrak{B}F_2/(\mathfrak{B}F_1F_2)$, então $r = 2$, e consequentemente temos o isomorfismo entre os quocientes

$$W/W_2 \simeq \mathfrak{B}b_2/(\mathfrak{B}G_1G_2),$$

concluimos que $F_2 \simeq G_2$ e pelo argumento no artigo de Oystein Ore ([Ore , 1933](#)) pag.494 *Teorema1*, se segue que $F_1 \simeq G_1$.

Sejam M_1, M_2 A_1 -módulos cíclicos. Suponhamos que $S^{-1}M_1 \simeq S^{-1}M_2$ então $S^{-1}M_i \simeq \mathfrak{B}/(\mathfrak{B}F_{i1}F_{i2})$. Deduzimos do anterior; $A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_{11}F_{12}) \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_{21}F_{22})$. Isto mostra que a aplicação S^{-1} é injetiva. Ver que S^{-1} é sobrejetora, é imediato.

Afirmção 17. *Suponha M e N A_1 -módulos irredutíveis de grau t_1, t_2 respectivamente, então o $Ext_{A_1}^1(M, N)$ contem duas classes de módulos com representantes $M \oplus N$ e $V \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_1F_2)$, onde F_1 é o anulador de $m \in M - \{0\}$ e F_2 é o anulador de algum $n \in N - \{0\}$.*

Demonstração. Da (4.1) temos $V = A_1v$ para algum $\psi(v) \in N - \{0\}$ ou $V \simeq M \oplus N$. Além disso $F_2v \in Im(\varphi)$ e $F_1F_2v = 0$ com $F_1, F_2 \in A_1$. Se $F_2v \neq 0$ então $V \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_1F_2)$. Se $F_2v = 0$, então $V \simeq M \oplus N$. $\square$

4.1 Análise do caso $F \in A_1$ com F redutível em $\mathfrak{B}$

Suponhamos que $F \in A_1$ onde $F = F_1F_2$ com $F_i \in irr(\mathfrak{B})$ e $deg_p(b_i) > 1$. Vamos construir a cadeia de comprimento de A_1 -módulos,

$$(A_1f_{F_1}F_2 + A_1F_1F_2)/A_1F_1F_2 \leq A_1F_2/A_1F_1F_2 \leq (A_1f_{F_2} + A_1F_2)/A_1F_1F_2 \leq A_1/A_1F_1F_2. \quad (4.3)$$

Sejam $f_{F_i} \in K[q]$ de grau mínimo tal que $F_i f_{F_i}^{-1}$ é preservado. Temos os seguintes isomorfismos

1. $(A_1/A_1F_1F_2)/[(A_1f_{F_2} + A_1F_2)/A_1F_1F_2] \simeq A_1/(A_1f_{F_2} + A_1F_2)$.
2. $A_1f_{F_2}/(A_1f_{F_2} \cap A_1F_2) \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_2f_{F_2}^{-1})$.
3. $A_1F_2/A_1F_1F_2 \simeq A_1/A_1F_1$.
4. $(A_1F_2/A_1F_1F_2)/[(A_1f_{F_1}F_2 + A_1F_1F_2)/A_1F_1F_2] \simeq A_1/(A_1f_{F_1} + A_1F_1)$.

Considere o A_1 -módulo $V_{12} = A_1/A_1F_1F_2$. Como $A_1F_1F_2 \subseteq A_1F_2$, podemos definir o A_1 -submódulo $V_2 = A_1F_2/A_1F_1F_2 \subset V_{12}$, por outro lado temos isomorfismo $V_2 \simeq A_1/A_1F_1$ induzido pelo homomorfismo

$$\varphi : A_1 \longrightarrow V_2$$

que é dado por $\varphi(a) = aF_2$ com $\ker(\varphi) = A_1F_1$. Ver ([Ore , 1933](#)).

Temos a sequência de sub-módulos $V_{12} \geq V_{b_2} = (A_1f_{F_2} + A_1F_2)/A_1F_1F_2 \geq V_2$, com a seguintes propriedades:

1. $V_{F_2}/V_2 \simeq A_1/(A_1 \cap \mathfrak{B}F_2f_{F_2}^{-1})$. Seguem os seguinte isomorfismos de A_1 -módulos

$$V_{F_2}/V_2 \simeq (A_1f_{F_2} + A_1F_2)/A_1F_2 \simeq A_1f_{F_2}/(A_1f_{F_2} \cap A_1F_2).$$

Considere o homomorfismo $\varphi_2 : A_1 \longrightarrow A_1 f_{F_2} / (A_1 f_{F_2} \cap A_1 F_2)$ dado por $\varphi_2(a) = a f_{F_2} + (A_1 f_{F_2} \cap A_1 F_2)$ com $\ker(\varphi_2) = A_1 \cap \mathfrak{B} F f_{F_2}^{-1}$. Logo, V_{F_2} / F_2 é irredutível.

2. Do item anterior obtemos $\text{Soc}_{A_1}(V_2) \leq V_2 \leq V_{F_2} \leq V_{12}$. Do homomorfismo φ temos $\varphi((A_1 f_{F_1} + A_1 F_1) / A_1 F_1) \simeq (A_1 f_{F_1} F_2 + A_1 F_1 F_2) / A_1 F_1 F_2$. Pelo item anterior

$$(A_1 f_{F_1} F_2 + A_1 F_1 F_2) / A_1 F_1 F_2,$$

é irredutível, assim $\text{Soc}_{A_1}(V_2) = (A_1 f_{F_1} F_2 + A_1 F_1 F_2) / A_1 F_1 F_2$.

Agora estudaremos os quocientes V_{12} / V_{F_2} e $V_2 / \text{Soc}_{A_1}(V_2)$, sabendo que estes são módulos de S -torção.

Seja $F \in \text{irr}(\mathfrak{B})$ tal que $F = \sum a_j p^j$ e f_F , como foi definido anteriormente. Então

$$A_1 / A_1 F \geq (A_1 f_F + A_1 F) / A_1 F \simeq A_1 f_F / (A_1 f_F \cap A_1 F) \simeq A_1 / (A_1 \cap \mathfrak{B} F f_F^{-1}),$$

com $A_1 / (A_1 f_F + A_1 F)$ de S -torção. Como $f_F = \prod (q - \alpha_i)^{\theta_{\alpha_i}(F)}$, temos

$$\begin{aligned} A_1 / (A_1 f_F + A_1 F) &= A_1 / A_1 F \bigotimes_{K[q]} K[q] / (K[q] f_F) \\ &\simeq \bigoplus_{K[q]} A_1 F \bigotimes_{K[q]} K[q] / (K[q] (q - \alpha_i)^{\theta_{\alpha_i}(F)}). \end{aligned}$$

Para o primeiro isomorfismo, definimos

$$\phi : A_1 / A_1 F \times K[q] / (K[q] f_F) \longrightarrow A_1 / (A_1 f_F + A_1 F),$$

dado por $\phi(a + A_1 F, c + K[q] f) = ac + (A_1 f_F + A_1 F)$, note que ϕ está bem definido e $K[q]$ -bilinear. Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo de A_1 -módulos

$$\hat{\phi} : A_1 / A_1 F \bigotimes_{K[q]} K[q] / (K[q] f_F) \longrightarrow A_1 / (A_1 f_F + A_1 F),$$

portanto $\hat{\phi}$ é um isomorfismo.

Referências Bibliográficas

- Amitsur (1954)** A. S. Amitsur. Differential polynomials and division algebras. *Ann. of Math.* (2), 59:245–278. ISSN 0003-486X. Citado na pág. [viii](#)
- Bavula (2005)** V.V. Bavula. Dixmier’s problem 5 for the weyl algebra. *Journal of Algebra*, 283(2):604 – 621. Citado na pág. [viii](#)
- Block (1981)** R. E. Block. The irreducible representations of the lie algebras $sl(2)$ and the weyl algebras. *Adv. Math.*, 39:69–110. Citado na pág. [iii](#), [v](#), [viii](#), [ix](#), [8](#), [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [19](#), [23](#)
- Block (1979)** Richard E. Block. The irreducible representations of the Weyl algebra A_1 . Em *Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil 31ème année (Paris, 1977–1978)*, volume 740 of *Lecture Notes in Math.*, páginas 69–79. Springer, Berlin. Citado na pág. [viii](#)
- Cartan (1894)** E. Cartan. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. *thesis, Nony, Paris, and Oeuvres Completes*, Tome 1:137–287. Citado na pág. [vii](#)
- Coutinho (1995)** S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*. London Mathematical Society student texts 33. Cambridge University Press. ISBN 0521551196,9780521551199,0521559081. Citado na pág.
- Dixmier (1963)** J. Dixmier. Représentations irréductibles des algèbres de lie nilpotentes. *An. Acad. Brasil. Ci.*, 35:491–519. ISSN 0001-3765. Citado na pág. [vii](#), [1](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#), [7](#)
- Dixmier (1977a)** J. Dixmier. Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes. *J. Algebra*, 48(1):96–112. ISSN 0021-8693. Citado na pág.
- Dixmier (1959)** Jacques Dixmier. Sur l’algèbre enveloppante d’une algèbre de lie nilpotente. *Arch. Math.*, 10:321–326. ISSN 0003-9268. Citado na pág. [iii](#), [vii](#)
- Dixmier (1968)** Jacques Dixmier. Sur les algèbres de Weyl. *Bull. Soc. Math. France*, 96: 209–242. ISSN 0037-9484. Citado na pág. [viii](#)
- Dixmier (1977b)** Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford. ISBN 0-7204-0430-4. North-Holland Mathematical Library, Vol. 14, Translated from the French. Citado na pág. [1](#), [5](#)
- Humphreys (1972)** James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New York-Berlin. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Citado na pág. [1](#)
- Jacobson (1943)** Nathan Jacobson. *The Theory of Rings*. American Mathematical Society Mathematical Surveys, vol. II. American Mathematical Society, New York. Citado na pág.

- Jacobson (1979)** Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York. ISBN 0-486-63832-4. Republication of the 1962 original. Citado na pág. [1](#)
- Jacques (1973)** Dixmier Jacques. Quotients simples de l'algèbre enveloppante de $sl_2(k)$. *J. Algebra*, 24:551–564. ISSN 0021-8693. Citado na pág. [12](#)
- Joseph (1975)** A. Joseph. The weyl algebras-semisimples and nipotent elements, no. 3. *Amer. J. Math.*, 97:597–615. Citado na pág. [viii](#)
- Joseph (1984)** A. Joseph. Primitive ideals in enveloping algebras. Em *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, páginas 403–414. PWN, Warsaw. Citado na pág.
- Kovacic (1972)** J. Kovacic. An eisenstein criterion for noncommutative polynomials. *Proceedings, Amm. Math. Soc.*, 34, No. 1:25–29. Citado na pág. [25](#)
- Levi (1905)** E.E. Levi. Sulla struttura dei gruppi finite e continui. *Atti. Accad. Sci. Toronto*, 40:551–565. Citado na pág. [vii](#)
- Maltsev (1962)** A. I. Maltsev. On solvable lie algebras. *Amer. math. Soc. trlations 1950*, 9:228–262. Citado na pág. [vii](#)
- Mazorchuk (2009)** Volodymyr Mazorchuk. *Lectures on $Sl_2(\mathbb{C})$ -modules*. World Scientific Book. Citado na pág. [12](#)
- McConnell e Robson (1987)** J. C. McConnell e J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Ltd., Chichester. ISBN 0-471-91550-5. With the cooperation of L. W. Small, A Wiley-Interscience Publication. Citado na pág. [viii](#), [4](#)
- Nouazé (1967)** Yvon Nouazé. Remarques sur: “Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente”. *Bull. Sci. Math. (2)*, 91:117–124. ISSN 0007-4497. Citado na pág.
- Ore (1933)** Oystein Ore. Theory of non-commutative polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 34 (3):480–508. ISSN 0003-486X. Citado na pág. [viii](#), [14](#), [17](#), [49](#)