Half-Isomorfismos de Loops Automórficos

Giliard Souza dos Anjos

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE
SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Doutorado em Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a. Maria de Lourdes Merlini Giuliani

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Maio de 2018

Half-Isomorfismos de Loops Automórficos

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 09/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^ª. Dr^ª. Maria de Lourdes Merlini Giuliani (orientadora) - UFABC
- Prof. Dr. Alexandre Grichkov - IME-USP
- Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP
- Prof^ª. Dr^ª. Dylene Agda Souza de Barros - UFU

Resumo

ANJOS, G. S. **Half-isomorfismos de Loops Automórficos**. 2018. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Loops automórficos, ou A -loops, são loops nos quais todas as aplicações internas são automorfismos. Esta variedade de loops inclui grupos e loops de Moufang comutativos. *Loops automórficos diedrais* formam uma classe de A -loops construída a partir da duplicação de grupos abelianos finitos, generalizando a construção do grupo diedral. Outra classe de A -loops é a dos *loops automórficos de Lie*, construída a partir de anéis de Lie, definindo-se uma nova operação entre seus elementos. Um *half-isomorfismo* é uma bijeção f entre loops L e L' onde, para quaisquer x e y pertencentes a L , temos que $f(xy)$ pertence ao conjunto $\{f(x)f(y), f(y)f(x)\}$. Dizemos que o half-isomorfismo f é *não trivial* quando f não é um isomorfismo e nem um anti-isomorfismo. Nesta tese descrevemos propriedades de half-isomorfismos de loops, classificamos os half-isomorfismos entre loops automórficos diedrais e obtivemos o grupo de half-automorfismos nesta classe. Para os loops automórficos de Lie de ordem ímpar, mostramos que todo half-automorfismo é trivial.

Palavras-chave: Loop, loop automórfico, half-isomorfismo, half-automorfismo, grupo de half-automorfismos, loop automórfico diedral, loop automórfico de Lie, anel de Lie.

Abstract

ANJOS, G. S. **Half-isomorphisms of Automorphic Loops**. 2018. Tese - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Automorphic loops, or A -loops, are loops in which every inner mapping is an automorphism. This variety of loops includes groups and commutative Moufang loops. *Dihedral automorphic loops* form a class of A -loops, constructed from the duplication of finite abelian groups, that generalizes the construction of the dihedral group. Another class of A -loops is the Lie automorphic loops, constructed from Lie rings, where a new operation between its elements is defined. A half-isomorphism is a bijection f between loops L and L' where, for any x and y belong to L , we have that $f(xy)$ belongs to the set $\{f(x)fy, f(y)f(x)\}$. We say that half-isomorphism f is *non trivial* when f is neither an isomorphism nor an anti-isomorphism. In this thesis, we describe properties of half-isomorphisms of loops, we classify the half-isomorphisms between dihedral automorphic loops and we obtain the group of half-automorphisms in this class. For the Lie automorphic loops of odd order, we show that every half-automorphism is trivial.

Keywords: Loop, automorphic loop, half-isomorphism, half-automorphism, group of half-automorphisms, dihedral automorphic loop, Lie automorphic loop, Lie ring.

Sumário

Lista de Símbolos	vii
1 Introdução	1
2 Conceitos básicos	3
2.1 Loop	3
2.2 Subloop	4
2.3 Loop potencialmente associativo	9
2.4 Loops de Moufang	11
2.5 Loops automórficos	12
3 Half-isomorfismos de loops	15
3.1 Definição e exemplo	15
3.2 Propriedades	16
3.3 O grupo de half-automorfismos	22
4 Half-isomorfismos de loops automórficos diedrais	23
4.1 Loop automórfico diedral	23
4.2 Half-isomorfismos entre L_α e L_β	24
4.3 O grupo de half-automorfismos de L_α	36
5 Half-automorfismos de loops automórficos de Lie	43
5.1 Loop automórfico de Lie	43
5.2 Half-Automorfismos de $(Q, *)$	51
Referências Bibliográficas	63

Lista de Símbolos

$Aut(L)$	Grupo de automorfismos de L
$Mlt(L)$	Grupo das multiplicações de L
$Inn(L)$	Grupo das aplicações internas de L
$N_\lambda(L)$	Núcleo esquerdo de L
$N_\mu(L)$	Núcleo central de L
$N_\rho(L)$	Núcleo direito de L
$N(L)$	Núcleo de L
$C(L)$	Comutante de L
$\mathcal{Z}(L)$	Centro de L
$Half(L)$	Conjunto dos half-automorfismos de L
$Half_T(L)$	Conjunto dos half-automorfismos triviais de L
$Half_N(L)$	Conjunto dos half-automorfismos não triviais de L
$Half(L, L')$	Conjunto dos half-isomorfismos entre L e L'
$Half_T(L, L')$	Conjunto dos half-isomorfismos triviais entre L e L'
$Half_N(L, L')$	Conjunto dos half-isomorfismos não triviais entre L e L'
$C_L(x)$	Centralizador do elemento x de um loop L
$C_L(S)$	Centralizador do subconjunto S de um loop L
$Cl(x)$	Classe de conjugação do elemento x de um grupo G
$Hol(G)$	Holomorfo de um grupo G
x^λ	inverso à esquerda do elemento x de um loop
x^ρ	inverso à direita do elemento x de um loop
$Fix(\Omega)$	Conjunto dos elementos do loop fixados pelos automorfismos do conjunto Ω
$GL(m, \mathbb{Z}_n)$	Grupo linear geral das matrizes quadradas de tamanho m com entradas em $\mathbb{Z}_n$
$SL(m, \mathbb{Z}_n)$	Anel de Lie das matrizes quadradas de tamanho m com entradas em $\mathbb{Z}_n$ de traço zero

Capítulo 1

Introdução

Um conjunto não vazio L com uma operação binária $*$ é chamado um *loop* se em L existe um elemento identidade 1 tal que $1*x = x = x*1$ para todo x pertencente a L ; e para todo a e b pertencentes a L , existem únicos x e y pertencentes a L tais que $a*x = b$ e $y*a = b$. Grupos são loops associativos. Alguns resultados não são verificados para loops em geral, como por exemplo, os teoremas de Lagrange, teorema de Cauchy e teoremas de Sylow, enquanto que o teorema do homomorfismo é válido para a categoria de loops. Loops de Moufang são loops onde vale a identidade de Moufang $x*((y*z)*x) = (x*y)*(z*x)$. Tais loops foram introduzidos por R. Moufang em 1934 [Mou35] e é a classe de loops não associativos mais estudada. Os loops de Moufang são diassociativos (isto é, quaisquer dois elementos geram um subloop associativo), sendo essa sua propriedade mais relevante.

Para a pertencente a L , definimos a *translação à direita* por a como sendo a bijeção $R_a : L \rightarrow L$; $x \rightarrow x*a$; e, de forma análoga, definimos a *translação à esquerda* por a como sendo a bijeção $L_a : L \rightarrow L$; $x \rightarrow a*x$. Estas translações geram o grupo das multiplicações $Mlt(L) = \langle R_a, L_a; a \in L \rangle$. O subgrupo $Inn(L) = \{f \in Mlt(L); f(1) = 1\}$ de $Mlt(L)$ é conhecido como grupo das aplicações internas. Um loop *automórfico*, ou um A -loop, é um loop onde toda aplicação interna é um automorfismo, isto é, $Inn(L)$ é subgrupo de $Aut(L)$. Loops automórficos foram definidos por R.H. Bruck e L.J. Paige [BP56] que os denominaram A -loops (Aqui usaremos A -loops para simplificar). Bruck e Paige mostraram que todo A -loop é potencialmente associativo, ou seja, cada elemento gera um grupo cíclico. Neste mesmo artigo eles conjecturaram que “todo A -loop diassociativo é um loop de Moufang”, fato que só foi provado em 2002 por M.K. Kinyon, K. Kunen e J.D. Phillips [KKP02] usando ferramentas computacionais. Mais recentemente, a estrutura dos A -loops mereceu a investigação de vários matemáticos, destacando-se o artigo de M.K. Kinyon, K. Kunen, J.D. Phillips e P. Vojtěchovský [KKPV16]. Neste artigo foram construídas duas classes de A -loops. A primeira foi construída a partir da duplicação de grupos abelianos, onde obtém-se um tipo de A -loop que generaliza a construção do grupo diedral. Chamamos os loops desta classe de *loops automórficos diedrais*. A segunda classe de A -loops foi construída a partir de anéis de Lie seguindo a construção de C.R.B. Wright [Wri69]. Chamamos os loops desta classe de *loops automórficos de Lie*.

Um *half-isomorfismo* é uma bijeção f entre loops $(L, *)$ e $(L', \cdot)$ onde, para quaisquer x e y pertencentes a L , temos que $f(x*y)$ pertence ao conjunto $\{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$, e se $L = L'$ o mesmo é chamado de *half-automorfismo*. No caso em que um half-isomorfismo é ou um isomorfismo ou um anti-isomorfismo, dizemos que ele é *trivial*. Half-isomorfismos começaram a ser estudados por W.R. Scott [Sco57] sobre grupos, onde foi mostrado que todo half-isomorfismo entre grupos é trivial. O mesmo resultado foi obtido para Loops de Moufang de ordem ímpar por S. Gagola e M.L. Merlini Giuliani [IG12], e para loops de Moufang automórficos por A. Grishkov, M.L. Merlini Giuliani, M. Rasskazova e L. Sabinina [GGRS16] no caso de half-automorfismos, sendo estes resultados generalizados por M.K. Kinyon, I. Stuhl e P. Vojtěchovský [KSV16]. Em [IG13] os autores S. Gagola e M.L. Merlini Giuliani descreveram condições para a existência de half-automorfismos não triviais entre certos tipos de loops de Moufang de ordem par.

O objetivo deste trabalho é estender o estudo da existência de half-isomorfismos não triviais à classe dos loops automórficos, sendo o foco aqui os loops automórficos diedrais e de Lie.

No capítulo dois definimos os conceitos básicos que serão utilizados nos outros capítulos. Definimos loop potencialmente associativo, loops de Moufang, loops automórficos, e enunciamos alguns resultados sobre estes. Acrescentamos aqui a demonstração de alguns resultados que, embora consolidados, não é frequente encontrar as suas provas, como por exemplo o teorema do homomorfismo.

No capítulo três introduzimos o conceito de half-isomorfismo entre loops, ressaltando as propriedades dos loops do conjunto domínio e do conjunto contra-domínio que são preservadas por half-isomorfismos. Definimos o conceito de half-isomorfismo especial e estabelecemos condições necessárias e suficientes para que um half-isomorfismo seja deste tipo. Construimos contra-exemplos para mostrar que nem sempre a recíproca dos resultados obtidos é válida. Por fim introduzimos o conceito de grupo de half-automorfismos de um loop.

No capítulo quatro mostramos que é possível existir half-isomorfismos não triviais entre dois loops automórficos diedrais, identificando uma condição necessária e suficiente para isso. Além disso, caracterizamos tanto os half-isomorfismos triviais quanto os não triviais entre esses A -loops, obtendo suas quantidades. Por fim caracterizamos o grupo de half-automorfismos nesta classe de A -loops.

No capítulo cinco estudamos half-automorfismos para a classe de loops automórficos de Lie. Para o caso onde essa classe de A -loops é de ordem ímpar e não-associativa obtemos vários resultados, destacando-se que os half-automorfismos fixam o núcleo central e preservam a propriedade flexível. O resultado principal do capítulo é o de que, em loops automórficos de Lie de ordem ímpar, todo half-automorfismo é trivial.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos de loops e suas propriedades que serão abordados nos capítulos seguintes. As seções de 1 a 3 destinam-se às definições principais de loops e suas estruturas algébricas fundamentais. Na quarta seção introduzimos os loops de Moufang, uma classe de loops que é uma generalização de grupos e que surgem quando a propriedade associativa é substituída pela *identidade de Moufang*. Por fim, na quinta seção introduzimos a classe dos loops automórficos e enunciamos resultados importantes sobre esta classe de loops.

2.1 Loop

Definição 2.1.1. Um *loop* é um par ordenado $(L, *)$, onde L é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária que satisfaz:

- (i) Existe 1 pertencente a L tal que $1 * a = a * 1 = a$ para todo a pertencente a L .
- (ii) Fixados elementos a e b pertencentes a L , existem únicos x e y pertencentes a L tais que $a * x = b$ e $y * a = b$.

No caso em que $(L, *)$ também satisfaz a propriedade associativa, temos que $(L, *)$ é um grupo.

Geralmente deixaremos de indicar a operação do loop, caso ela não seja relevante, escrevendo apenas L para denotar o loop $(L, *)$.

Definimos a *ordem* do loop L como sendo a quantidade de elementos que o conjunto L possui, e a denotamos por $|L|$.

Exemplo 2.1.2. Seja $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e defina em L a operação $*$ dada pela seguinte tabela de multiplicação:

$*$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	4	5	3
3	3	5	2	1	4
4	4	3	5	2	1
5	5	4	1	3	2

É uma tarefa simples verificar que a tabela acima representa um loop de ordem 5. Como $2 * (3 * 5) = 2 * 4 = 5$ e $(2 * 3) * 5 = 4 * 5 = 1$, temos que L é não associativo. Como $2 * 3 = 4$ e $3 * 2 = 5$, temos que L é não comutativo.

Agora seja L um loop e x um elemento de L . Podemos observar que, da definição de loop, segue que existem únicos elementos y e z pertencentes a L tais que $y * x = 1$ e $x * z = 1$. Tais elementos são chamados respectivamente de inverso à esquerda e inverso à direita de x , e são denotados

respectivamente por x^λ e x^ρ . No caso em que $x^\lambda = x^\rho$, denotamos este elemento por x^{-1} , que será chamado o inverso bilateral de x .

No exemplo 2.1.2, vemos que o elemento 2 de L tem inverso bilateral $2^{-1} = 2$, e o elemento 3 tem inversos $3^\lambda = 5$ e $3^\rho = 4$.

Observação 2.1.3. Segue da definição de loop que vale a *lei do cancelamento*, ou seja, para elementos x, y e z pertencentes a um loop L , se $x * y = x * z$ ou se $y * x = z * x$, então $y = z$.

Agora seja L loop e x pertencente a L . Defina as funções $L_x, R_x : L \longrightarrow L$ por:

$$L_x(y) = x * y \quad R_x(y) = y * x \quad (y \in L) \quad (2.1)$$

As funções L_x e R_x são chamadas respectivamente de *translações à esquerda e à direita* de x em L , e são bijeções. Com isso, definimos o *grupo multiplicativo de L* , denotado por $Mlt(L)$, como sendo o grupo gerado pelas bijeções L_x e R_x , e o *grupo das aplicações internas de L* , denotado por $Inn(L)$, como sendo o subgrupo de $Mlt(L)$ formado pelos elementos deste que fixam a identidade. Para estes dois grupos, temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} Mlt(L) &= \langle R_x, L_x \mid x \in L \rangle \\ Inn(L) &= \{ \varphi \in Mlt(L) \mid \varphi(1) = 1 \} \end{aligned}$$

A partir das translações dos elementos de L , podemos definir também as seguintes bijeções:

$$\begin{aligned} L_{(x,y)} &= L_{(yx)}^{-1} \circ L_y \circ L_x \\ R_{(x,y)} &= R_{(xy)}^{-1} \circ R_y \circ R_x \\ T_x &= L_x^{-1} \circ R_x \end{aligned} \quad (2.2)$$

Com elas podemos obter uma outra expressão para o grupo das aplicações internas, como é mostrado no resultado a seguir.

Proposição 2.1.4. (*[Pfl90] Teo. I.5.3*) *Seja L um loop. Então:*

$$Inn(L) = \langle L_{(x,y)}, R_{(x,y)}, T_x \mid x, y \in L \rangle$$

O conceito de grupo das aplicações internas será importante para a definição de loop automórfico na seção 2.5.

2.2 Subloop

Definição 2.2.1. Um subconjunto não vazio H de um loop $(L, *)$ é dito ser *subloop* de L se $(H, *)$ é loop.

No exemplo 2.1.2, $H = \{1, 2\}$ é subloop de L . Podemos observar aqui que o teorema de Lagrange, um resultado clássico na teoria de grupos, não é verificado para este loop L , pois $|L| = 5$ e $|H| = 2$.

O resultado a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para um subconjunto de um loop ser um subloop.

Proposição 2.2.2. ([GJM96] Prop. 1.2) *Seja H um subconjunto não vazio de um loop L . Então H é subloop se, e somente se, as três condições abaixo são verificadas.*

- a) *Se x e y pertencem a H , então $x * y$ também pertence a H .*
- b) *Se x e z pertencem a H e $x * y = z$, onde y pertence a L , então y pertence a H .*
- c) *Se y e z pertencem a H e $x * y = z$, onde x pertence a L , então x pertence a H .*

No caso de loops finitos, apenas a condição a) é necessária, como podemos ver no resultado abaixo.

Proposição 2.2.3. *Seja H um subconjunto não vazio de um loop finito $(L, *)$. Então H é subloop se, e somente se, H é fechado para a operação $*$.*

Demonstração. É fácil ver que se H é subloop de L , então H é fechado para $*$. Agora suponha que H é fechado para $*$, ou seja, se $x, y \in H$, então $x * y \in H$.

Fixado $x \in H$, considere as translações L_x e R_x . Como H é fechado, segue que $L_x(H) \subseteq H$ e $R_x(H) \subseteq H$. Como L_x e R_x são bijeções e L é finito, segue que $L_x(H) = R_x(H) = H$. Logo $L_x^{-1}(H) = R_x^{-1}(H) = H$.

Agora, sejam $x, z \in H$ e $a, b \in L$ tais que $a * x = z$ e $x * b = z$. Assim $a = R_x^{-1}(z)$ e $b = L_x^{-1}(z)$, e então $a, b \in H$. Portanto, da proposição 2.2.2 segue que H é subloop de L . ■

A seguir serão definidos subloops importantes de um loop L .

i) Os núcleos esquerdo, central e direito de L , denotados respectivamente por $N_\lambda(L)$, $N_\mu(L)$ e $N_\rho(L)$, são definidos por:

$$\begin{aligned} N_\lambda(L) &= \{a \in L \mid a * (x * y) = (a * x) * y \quad \forall x, y \in L\} \\ N_\mu(L) &= \{a \in L \mid x * (a * y) = (x * a) * y \quad \forall x, y \in L\} \\ N_\rho(L) &= \{a \in L \mid x * (y * a) = (x * y) * a \quad \forall x, y \in L\} \end{aligned}$$

ii) O núcleo e o centro de L , denotados respectivamente por $N(L)$ e $\mathcal{Z}(L)$, são definidos por:

$$\begin{aligned} N(L) &= N_\lambda(L) \cap N_\mu(L) \cap N_\rho(L) \\ \mathcal{Z}(L) &= \{x \in N(L) \mid x * y = y * x \quad \forall y \in L\} \end{aligned}$$

Proposição 2.2.4. ([GJM96] Prop. 1.5) *Seja L um loop. Então $N_\lambda(L)$, $N_\mu(L)$, $N_\rho(L)$ e $N(L)$ são subloops associativos de L e $\mathcal{Z}(L)$ é um subloop associativo e comutativo de L .*

Definição 2.2.5. Um subloop H de L é dito ser um *subloop normal* de L se satisfaz, para todo x e y pertencentes a L :

- (i) $Hx = xH$
- (ii) $H(x * y) = (Hx)y$
- (iii) $(xH)y = x(Hy)$
- (iv) $(x * y)H = x(yH)$

Se H é subloop normal de L , denotamos $H \triangleleft L$.

Observação 2.2.6. Na definição acima, verifica-se facilmente que se H satisfizer a condição (i), e quaisquer duas de (ii), (iii) e (iv), satisfará também a terceira.

Dado um subloop normal H de um loop L , definimos o conjunto L/H por:

$$L/H = \{Hx \mid x \in L\}$$

e definimos a operação $\cdot$ neste conjunto por:

$$Hx \cdot Hy = H(x * y)$$

Analogamente com a teoria de grupos, a condição $H \triangleleft L$ garante que L/H e $\cdot$ estão bem definidos e que formam um loop, chamado *loop quociente de H em L* .

O centro $\mathcal{Z}(L)$ é um exemplo de subloop normal de um loop L . Assim $L/\mathcal{Z}(L)$ é um loop quociente.

Definição 2.2.7. Sejam $(L, *)$ e $(L', \cdot)$ loops e $\varphi : L \rightarrow L'$ uma função. Dizemos que:

- a) φ é um homomorfismo se $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, para todo x e y pertencentes a L .
- b) φ é um anti-homomorfismo se $\varphi(x * y) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$, para todo x e y pertencentes a L .
- c) φ é um isomorfismo se φ é um homomorfismo e é bijetora.
- d) φ é um anti-isomorfismo se φ é um anti-homomorfismo e é bijetora.

No caso em que φ é um homomorfismo, definimos o núcleo e a imagem de φ , denotados respectivamente por $Ker(\varphi)$ e $Im(\varphi)$, como segue:

$$Ker(\varphi) = \{x \in L \mid \varphi(x) = 1_{L'}\}$$

$$Im(\varphi) = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$$

onde $1_{L'}$ é o elemento identidade do loop L' .

Com estas definições, temos o teorema seguinte.

Teorema 2.2.8. (*Teorema do Homomorfismo*) Sejam L e L' loops e $\varphi : L \rightarrow L'$ um homomorfismo. Então:

$$L/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$$

Demonstração. Vamos provar os itens de (i) a (iv) a seguir.

(i) $Ker(\varphi)$ é subloop de L

Sejam $x, y \in Ker(\varphi)$. Como $\varphi(x) = \varphi(y) = 1_{L'}$, temos:

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1_{L'}$$

Logo, $x * y \in Ker(\varphi)$.

Agora, sejam $x, z \in Ker(\varphi)$ e $a, b \in L$ tais que $z = a * x = x * b$. Como $\varphi(x) = \varphi(z) = 1_{L'}$, temos:

$$1_{L'} = \varphi(z) = \varphi(a * x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = \varphi(a)$$

$$1_{L'} = \varphi(z) = \varphi(x * b) = \varphi(x) \cdot \varphi(b) = \varphi(b)$$

Desta forma, $a, b \in \text{Ker}(\varphi)$. Logo, da proposição 2.2.2, temos que $\text{Ker}(\varphi)$ é subloop de L .

(ii) $\text{Ker}(\varphi)$ é normal em L

Fixados $x, y \in L$, mostraremos que as três identidades a seguir são válidas.

(ii.1) $\text{Ker}(\varphi)x = x\text{Ker}(\varphi)$

Fixado $h \in \text{Ker}(\varphi)$, existe $w \in L$ tal que $h * x = x * w$. Assim:

$$\varphi(x) = \varphi(h) \cdot \varphi(x) = \varphi(h * x) = \varphi(x * w) = \varphi(x) \cdot \varphi(w)$$

Com isto, $\varphi(w) = 1_{L'}$, e temos que $\text{Ker}(\varphi)x \subseteq x\text{Ker}(\varphi)$.

Agora para $h \in \text{Ker}(\varphi)$ fixo, existe $z \in L$ tal que $x * h = z * x$. Assim:

$$\varphi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(h) = \varphi(x * h) = \varphi(z * x) = \varphi(z) \cdot \varphi(x)$$

Desta forma, $\varphi(z) = 1_{L'}$, e temos que $x\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi)x$. Portanto $\text{Ker}(\varphi)x = x\text{Ker}(\varphi)$.

(ii.2) $x(\text{Ker}(\varphi)y) = (x\text{Ker}(\varphi))y$

Fixado $h \in \text{Ker}(\varphi)$, existe $w \in L$ tal que $x * (h * y) = (x * w) * y$. Assim:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x) \cdot (\varphi(h) \cdot \varphi(y)) = \varphi(x * (h * y)) = \varphi((x * w) * y) = (\varphi(x) \cdot \varphi(w)) \cdot \varphi(y)$$

Pela lei do cancelamento, segue que $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(w)$, e usando novamente a lei do cancelamento, temos $\varphi(w) = 1_{L'}$, logo $x(\text{Ker}(\varphi)y) \subseteq (x\text{Ker}(\varphi))y$.

Agora, fixado $h \in \text{Ker}(\varphi)$, existe $z \in L$ tal que $(x * h) * y = x * (z * y)$. Assim:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = (\varphi(x) \cdot \varphi(h)) \cdot \varphi(y) = \varphi((x * h) * y) = \varphi(x * (z * y)) = \varphi(x) \cdot (\varphi(z) \cdot \varphi(y))$$

Pela lei do cancelamento, segue que $\varphi(y) = \varphi(z) \cdot \varphi(y)$, e usando novamente a lei do cancelamento, temos $\varphi(z) = 1_{L'}$, logo $(x\text{Ker}(\varphi))y \subseteq x(\text{Ker}(\varphi)y)$. Portanto $x(\text{Ker}(\varphi)y) = (x\text{Ker}(\varphi))y$.

(ii.3) $(\text{Ker}(\varphi)x)y = \text{Ker}(\varphi)(xy)$

Fixado $h \in \text{Ker}(\varphi)$, existe $w \in L$ tal que $(h * x) * y = w * (x * y)$. Assim:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = (\varphi(h) \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(y) = \varphi((h * x) * y) = \varphi(w * (x * y)) = \varphi(w) \cdot (\varphi(x) \cdot \varphi(y))$$

Pela lei do cancelamento, segue que $\varphi(w) = 1_{L'}$, logo $(\text{Ker}(\varphi)x)y \subseteq \text{Ker}(\varphi)(xy)$.

Agora, fixado $h \in \text{Ker}(\varphi)$, existe $z \in L$ tal que $h * (x * y) = (z * x) * y$. Assim:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(h) \cdot (\varphi(x) \cdot \varphi(y)) = \varphi(h * (x * y)) = \varphi((z * x) * y) = (\varphi(z) \cdot \varphi(x)) \cdot \varphi(y)$$

Pela lei do cancelamento, segue que $\varphi(x) = \varphi(z) \cdot \varphi(x)$, e usando novamente a lei do cancelamento, temos $\varphi(z) = 1_{L'}$, logo $\text{Ker}(\varphi)(xy) \subseteq (\text{Ker}(\varphi)x)y$. Portanto $(\text{Ker}(\varphi)x)y = \text{Ker}(\varphi)(xy)$.

Assim, de (ii.1), (ii.2) e (ii.3), segue que $\text{Ker}(\varphi)$ é normal em L .

(iii) $\text{Im}(\varphi)$ é subloop de L'

Fixados $\varphi(x), \varphi(y) \in Im(\varphi)$, temos:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x * y) \in Im(\varphi)$$

Agora, sejam $\varphi(x), \varphi(z) \in Im(\varphi)$ e $a, b \in L'$ tais que $\varphi(z) = a * \varphi(x) = \varphi(x) * b$.

Como $x, z \in L$, existem $c, d \in L$ tais que $z = c * x = x * d$. Logo:

$$\varphi(z) = \varphi(c * x) = \varphi(c) \cdot \varphi(x) \quad \text{e} \quad \varphi(z) = \varphi(x * d) = \varphi(x) \cdot \varphi(d)$$

Pela lei do cancelamento, segue que $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$, logo $a, b \in Im(\varphi)$. Portanto, da proposição 2.2.2, temos que $Im(\varphi)$ é subloop de L' .

(iv) $L/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$

Defina $\psi : L/Ker(\varphi) \rightarrow Im(\varphi)$ por $\psi(Ker(\varphi)x) = \varphi(x)$. Vamos mostrar que ψ é isomorfismo e faremos isso em quatro etapas:

(iv.1) ψ está bem definida

Sejam $x, y \in L$ tais que $Ker(\varphi)x = Ker(\varphi)y$. Assim, $y = h * x$, onde $h \in Ker(\varphi)$. Logo:

$$\varphi(y) = \varphi(h * x) = \varphi(h) \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$$

Com isto, $\psi(Ker(\varphi)x) = \psi(Ker(\varphi)y)$, e assim ψ está bem definida.

(iv.2) ψ é sobrejetora

Fixado $\varphi(x) \in Im(\varphi)$, temos que $\psi(Ker(\varphi)x) = \varphi(x)$. Logo ψ é sobrejetora.

(iv.3) ψ é injetora

Sejam $Ker(\varphi)x, Ker(\varphi)y \in L/Ker(\varphi)$ tais que $\psi(Ker(\varphi)x) = \psi(Ker(\varphi)y)$. Assim $\varphi(x) = \varphi(y)$. Como $x, y \in L$, existe $z \in L$ tal que $y = z * x$. Logo:

$$\varphi(y) = \varphi(z * x) = \varphi(z) \cdot \varphi(x) = \varphi(z) \cdot \varphi(y)$$

Pela lei do cancelamento, segue que $\varphi(z) = 1_{L'}$, e assim $z \in Ker(\varphi)$. Logo $Ker(\varphi)x = Ker(\varphi)y$, e segue que ψ é injetora.

(iv.4) ψ é homomorfismo.

Sejam $Ker(\varphi)x, Ker(\varphi)y \in L/Ker(\varphi)$. Assim:

$$\psi(Ker(\varphi)x * Ker(\varphi)y) = \psi(Ker(\varphi)(x * y)) = \varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \psi(Ker(\varphi)x) \cdot \psi(Ker(\varphi)y)$$

Logo ψ é homomorfismo.

Portanto, pelos itens (iv.1) a (iv.4), temos que $L/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$. ■

2.3 Loop potencialmente associativo

Seja S um subconjunto não vazio de um loop L . Denotamos por $\langle S \rangle$ o menor subloop de L que contém o conjunto S , ou seja, ele tem a propriedade de que todo subloop de L que contém S também o contém. Com isso, temos a seguinte expressão para $\langle S \rangle$:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \leq L, S \subseteq H} H \quad (2.3)$$

Chamamos $\langle S \rangle$ o *subloop gerado por S* . No caso onde S possui um único elemento x pertencente a L , denotamos $\langle S \rangle$ por $\langle x \rangle$, e o chamamos de *subloop gerado por x* .

Definição 2.3.1. Um loop L é dito ser *potencialmente associativo* se, para todo x pertencente a L , temos que $\langle x \rangle$ é associativo.

A partir desta definição, devido a propriedade de que $\langle x \rangle$ é grupo, temos o seguinte resultado para loops potencialmente associativos:

Proposição 2.3.2. *Seja L um loop potencialmente associativo. Então todo elemento de L possui inverso bilateral.*

Agora, para x pertencente a um loop $(L, *)$, defina as potências de x como segue:

$$x^0 = 1$$

$$x^{n+1} = x^n * x \text{ para } n \text{ pertencente a } \mathbb{N}$$

Observe que $\langle x \rangle$ contém todas as potências de x .

No caso onde L possui a propriedade de que todo elemento possui inverso bilateral, podemos também definir as potências negativas de cada elemento x como sendo $x^{-n} = (x^n)^{-1}$. Note que, neste caso, $\langle x \rangle$ contém também todas as potências negativas de x . Com estas definições, temos o resultado seguinte.

Proposição 2.3.3. *Seja L um loop onde todo elemento possui inverso bilateral. Então L é potencialmente associativo se, e somente se, para todo x pertencente a L e para todo n, r e s pertencentes a $\mathbb{Z}$ temos*

$$(x^n * x^r) * x^s = x^n * (x^r * x^s) \quad (2.4)$$

Demonstração. Nesta demonstração denotaremos hipótese de indução por HI.

($\Rightarrow$) Decorre do fato de $\langle x \rangle$ ser associativo e conter todas as potências de x .

($\Leftarrow$) Fixado $x \in L$, primeiro vamos provar os itens de (i) a (vi) a seguir. Omitiremos os parênteses quando a equação estiver na forma 2.4.

(i) $x^{n+m} = x^n * x^m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$

Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja a nossa hipótese de indução sobre m que $x^{n+m} = x^n * x^m$. Para $m = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora, suponha que ela é válida para m . Assim:

$$x^{n+(m+1)} = x^{n+m} * x \stackrel{\text{HI}}{=} x^n * x^m * x = x^n * x^{m+1}$$

(ii) $(x^n * x^m)^{-1} = x^{-m} * x^{-n}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$

Fixados $n, m \in \mathbb{N}$ temos:

$$(x^n * x^m) * (x^{-m} * x^{-n}) \stackrel{(i)}{=} x^{n+m} * x^{-m} * x^{-n} \stackrel{(i)}{=} (x^n * x^m * x^{-m}) * x^{-n} = x^n * x^{-n} = 1$$

(iii) $x * x^r = x^r * x$ para todo $r \in \mathbb{Z}$

Primeiramente, vamos mostrar que $x * x^n = x^n * x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja a nossa hipótese de indução que $x * x^n = x^n * x$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora suponha que ela é válida para n . Assim:

$$x * x^{n+1} = x * x^n * x \stackrel{\text{HI}}{=} x^n * x * x = x^{n+1} * x$$

Agora, vamos mostrar que $x * x^{-n} = x^{-n} * x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja a nossa hipótese de indução que $x * x^{-n} = x^{-n} * x$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Suponha que ela é válida para n . Assim:

$$\begin{aligned} x * x^{-(n+1)} &= x * (x^{n+1})^{-1} = x * (x^n * x)^{-1} \stackrel{(ii)}{=} x * x^{-1} * x^{-n} = x^{-1} * x * x^{-n} \stackrel{\text{HI}}{=} x^{-1} * x^{-n} * x = \\ &\stackrel{(ii)}{=} (x^{n+1})^{-1} * x = x^{-(n+1)} * x \end{aligned}$$

(iv) $x^{-n} = (x^{-1})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Seja a nossa hipótese de indução que $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora suponha que ela é válida para n . Assim:

$$x^{n+1} * (x^{-1})^{n+1} = x^{n+1} * (x^{-1})^n * x^{-1} \stackrel{(iii)}{=} (x * x^n * (x^{-1})^n) * x^{-1} \stackrel{\text{HI}}{=} (x * x^n * x^{-n}) * x^{-1} = x * x^{-1} = 1$$

(v) $x^{r+1} = x^r * x$ para todo $r \in \mathbb{Z}$

Para $r > 0$ a afirmação é válida por definição. Assim basta provarmos que $x^{-n+1} = x^{-n} * x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja a nossa hipótese de indução que $x^{-n+1} = x^{-n} * x$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Também é fácil ver que ela é válida para $n = 1$. Agora suponha que ela é válida para n , com $n > 0$. Assim:

$$\begin{aligned} x^{-(n+1)+1} &= x^{-n} = (x^n)^{-1} \stackrel{n \geq 0}{=} (x^{n-1} * x)^{-1} \stackrel{(ii), n > 0}{=} x^{-1} * x^{-n+1} \stackrel{\text{HI}}{=} x^{-1} * x^{-n} * x \stackrel{(iii)}{=} x^{-1} * x * x^{-n} = \\ &= x * x^{-1} * x^{-n} \stackrel{(ii)}{=} x * (x^n * x)^{-1} = x * (x^{n+1})^{-1} = x * x^{-n-1} \stackrel{(iii)}{=} x^{-(n+1)} * x \end{aligned}$$

(vi) $x^{r+s} = x^r * x^s$ para todo $r, s \in \mathbb{Z}$

Fixado $r \in \mathbb{Z}$, primeiramente vamos mostrar que $x^{r+n} = x^r * x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja a nossa hipótese de indução que $x^{r+n} = x^r * x^n$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora suponha que ela é válida para n . Assim:

$$x^{r+(n+1)} \stackrel{(v)}{=} x^{r+n} * x \stackrel{\text{HI}}{=} x^r * x^n * x = x^r * x^{n+1}$$

Agora, vamos mostrar que $x^{r-n} = x^r * x^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja a nossa hipótese de indução que $x^{r-n} = x^r * x^{-n}$. Para $n = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora suponha que ela é válida para n . Assim:

$$x^r * x^{-(n+1)} \stackrel{(iv)}{=} x^r * (x^{-1})^{(n+1)} = x^r * x^{-n} * x^{-1} \stackrel{HI}{=} x^{r-n} * x^{-1} \stackrel{v}{=} x^{r-n-1} * x * x^{-1} = x^{r-(n+1)}$$

(vii) Agora, seja $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Da equação 2.4 segue que H é associativo. Se H for subloop, da definição de $\langle x \rangle$ segue que ele está contido em H , sendo assim associativo. Assim basta mostrarmos que H é subloop de L .

Fixados $x^r, x^s \in H$, com $r, s \in \mathbb{Z}$, de (vi) segue que $x^r * x^s = x^{r+s}$, $x^{r-s} * x^s = x^r$ e $x^s * x^{r-s} = x^r$. Como x^{r+s} e x^{r-s} pertencem a H , da proposição 2.2.2 segue que H é subloop de L . ■

Para o caso onde L é finito, podemos retirar algumas condições da proposição anterior, obtendo o resultado seguinte.

Proposição 2.3.4. *Seja L um loop finito. Então L é potencialmente associativo se, e somente se, para todo x pertencente a L e para todo n, r e s pertencentes a $\mathbb{N}$ temos*

$$(x^n * x^r) * x^s = x^n * (x^r * x^s) \quad (2.5)$$

Demonstração. Nesta demonstração denotaremos hipótese de indução por HI.

($\Rightarrow$) Decorre do fato de $\langle x \rangle$ ser associativo e conter todas as potências positivas de x .

($\Leftarrow$) Fixado $x \in L$, primeiramente vamos mostrar que $x^{n+m} = x^n * x^m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja a nossa hipótese de indução sobre m que $x^{n+m} = x^n * x^m$. Para $m = 0$, temos que a hipótese é válida. Agora suponha que ela é válida para m . Assim:

$$x^{n+(m+1)} = x^{n+m} * x \stackrel{HI}{=} (x^n * x^m) * x \stackrel{\text{eq. 2.5}}{=} x^n * (x^m * x) = x^n * x^{m+1}$$

Portanto, $x^{n+m} = x^n * x^m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Agora, defina $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da equação 2.5 segue que H é associativo. Fixados $x^r, x^s \in H$, temos que $x^r * x^s = x^{r+s} \in H$. Logo, da proposição 2.2.3 segue que H é subloop de L . Portanto, da definição de $\langle x \rangle$ segue que ele está contido em H e assim é associativo. ■

Para x pertencente a um loop L , definimos a *ordem* de x como sendo a ordem do subloop $\langle x \rangle$, e a denotamos por $o(x)$. Da teoria de grupos segue o seguinte resultado:

Proposição 2.3.5. *Seja L um loop potencialmente associativo e x pertencente a L tal que $o(x)$ é finita. Então $o(x)$ é o menor número natural n tal que $x^n = 1$. Além disso, se para m pertencente a $\mathbb{N}$ temos $x^m = 1$, então $o(x)$ divide m .*

2.4 Loops de Moufang

Definição 2.4.1. Dizemos que um loop é de *Moufang* se satisfaz qualquer uma das três identidades a seguir.

- (1) $((x * y) * x) * z = x * (y * (x * z)),$ (identidade à esquerda de Moufang)
- (2) $((x * y) * z) * y = x * (y * (z * y)),$ (identidade à direita de Moufang)
- (3) $(x * y) * (z * x) = (x * (y * z)) * x,$ (identidade do meio de Moufang)

Proposição 2.4.2. ([GJM96] Teorema 3.1) *Em qualquer loop, as três identidades acima são equivalentes.*

Convém observar que, mesmo com a falta da associatividade, muitas propriedades de grupo ainda são válidas para loops de Moufang.

Um loop é *diassociativo* se para quaisquer dois de seus elementos, o subloop gerado por eles é um grupo. Este é o caso para loops de Moufang, que além disso possuem uma propriedade mais forte, como pode ser observado no teorema de Moufang, enunciado a seguir.

Teorema 2.4.3. (Teorema de Moufang) *Se a, b e c são elementos de um loop de Moufang L que se associam em alguma ordem, então o subloop gerado por a, b e c é um subgrupo de L .*

A demonstração do teorema de Moufang pode ser encontrada no livro de H.O. Pflugfelder [Pf90] ou em [Drá10] onde A. Drápal apresenta uma demonstração mais moderna.

2.5 Loops automórficos

Definição 2.5.1. Dizemos que um loop L é um loop automórfico, ou simplesmente *A-loop*, se todos os elementos de $\text{Inn}(L)$ são automorfismos de L .

Observe que da proposição 2.1.4 segue que um loop L é *A-loop* se, e somente se, as bijeções $T_x, L_{(x,y)}$ e $R_{(x,y)}$ são automorfismos de L , para todo x e y pertencentes a L .

Exemplo 2.5.2. Seja $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e defina em L a operação $*$ dada pela seguinte tabela de multiplicação:

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	3	2
5	5	6	4	2	1	3
6	6	4	5	3	2	1

Usando o software GAP [Gro], é simples verificar que $(L, *)$ é um *A-loop*. Além disso, este é o menor *A-loop* não associativo.

Um subloop H de um loop L é dito ser *característico* se $\varphi(H) = H$, para todo automorfismo φ de L . Na teoria de grupos temos que todo subgrupo característico é também subgrupo normal e, embora esta condição não é válida para loops em geral, ela é válida para *A-loops*. Este e outros resultados básicos para *A-loops* foram provados por R.H. Bruck e L.J. Paige [BP56] e são apresentados na proposição abaixo:

Proposição 2.5.3. ([BP56]) *Seja L um *A-loop*. Então:*

- a) *Se H é subloop de L , então H é *A-loop**
- b) *Se $H \triangleleft L$, então L/H é *A-loop**
- c) *L é potencialmente associativo*
- d) *L tem a propriedade flexível, ou seja, $x(yx) = (xy)x$, para todo x e y pertencentes a L*
- e) *Se H é subloop característico de L , então $H \triangleleft L$*
- f) *$N_\mu(L)$ está contido em $N_\lambda(L)$ e em $N_\rho(L)$*

A proposição a seguir complementa os resultados anteriores e podem ser encontrada no artigo [KKPV16].

Proposição 2.5.4. ([KKPV16]) *Seja L um A -loop. Então:*

- a) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, para todo x e y pertencentes a L
- b) $(a * x) * b = a * (x * b)$, para todo a e b pertencentes a $N_\mu(L)$ e para todo x pertencente a L
- c) $N(L) = N_\lambda(L) = N_\rho(L)$
- d) $\text{Inn}(L) = \langle L_{(x,y)}, T_x \mid x, y \in L \rangle$
- e) (Teorema de Lagrange) Se a ordem de L é ímpar e H é subloop de L , então $|H|$ divide $|L|$
- f) (Teorema de Cauchy) Se a ordem de L é ímpar e p é um primo que divide a ordem de L , então existe x pertencente a L tal que $o(x) = p$.

Seja L um loop e S um subconjunto não vazio de L . Definimos o centralizador do subconjunto S em L , o centralizador do elemento x em L e o comutante de L , denotados respectivamente por $C_L(x)$ e $C(L)$, como segue:

$$\begin{aligned} C_L(S) &= \{y \in L \mid ys = sy \ \forall s \in S\} \\ C_L(x) &= \{y \in L \mid xy = yx\} \\ C(L) &= \{y \in L \mid yz = zy \ \forall z \in L\} \end{aligned}$$

Note que os conjuntos $C_L(x)$ e $C(L)$ são respectivamente os centralizadores dos subconjuntos $\{x\}$ e L .

Os conjuntos $C_L(S)$, $C_L(x)$ e $C(L)$ não são necessariamente subloops para loops em geral, mas o são para A -loops. Este resultado segue imediatamente do seguinte lema:

Lema 2.5.5. ([BP56] Lema 2.3) *Sejam L um loop, Ω um conjunto não vazio de automorfismos de L e $\text{Fix}(\Omega)$ definido como segue:*

$$\text{Fix}(\Omega) = \{x \in L \mid \phi(x) = x \ \forall \phi \in \Omega\}$$

Então $\text{Fix}(\Omega)$ é subloop de L .

Desde que $C_L(S) = \text{Fix}(\{T_s \mid s \in S\})$ podemos então estabelecer o resultado abaixo.

Proposição 2.5.6. *Sejam L um A -loop, S um subconjunto não vazio de L e x pertencente a L . Então $C_L(S)$, $C_L(x)$ e $C(L)$ são subloops de L .*

Capítulo 3

Half-isomorfismos de loops

Neste capítulo, introduzimos o conceito de half-isomorfismo entre loops e suas propriedades. Muitos conceitos e também algumas propriedades presentes aqui são inéditos e foram desenvolvidos durante esse trabalho.

3.1 Definição e exemplo

Definição 3.1.1. Sejam $(L, *)$ e $(L', \cdot)$ loops. A função $f : L \rightarrow L'$ é um *half-isomorfismo* se f é bijetora e para todo x e y pertencentes a L :

$$f(x * y) \in \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} \quad (3.1)$$

No caso em que $L' = L$ e f satisfaz as condições anteriores, dizemos que f é um half-automorfismo.

Uma função bijetora $f : L \rightarrow L'$ é dita ser um *isomorfismo* se $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo x e y pertencentes a L , e é dita ser um *anti-isomorfismo* se $f(x * y) = f(y) \cdot f(x)$, para todo x e y pertencentes a L . Observe que todo isomorfismo e todo anti-isomorfismo são também half-isomorfismos.

Dizemos que um half-isomorfismo $f : L \rightarrow L'$ é *trivial* quando f é um isomorfismo ou um anti-isomorfismo.

Observação 3.1.2. De 3.1, segue que um half-isomorfismo $f : L \rightarrow L'$ satisfaz, para todo x e y pertencentes a L :

$$\{f(x * y), f(y * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} \quad (3.2)$$

A seguir será dado um exemplo de half-isomorfismo não trivial entre loops. As tabelas de multiplicação e a função dadas nele foram obtidas através de programação feita no software GAP [Gro].

Exemplo 3.1.3. Considere o loop automórfico não associativo $L = \{1, 2, \dots, 8\}$ cuja a tabela de multiplicação é dada abaixo.

*	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	6	5	8	7
3	3	4	1	2	7	8	6	5
4	4	3	2	1	8	7	5	6
5	5	6	8	7	1	2	4	3
6	6	5	7	8	2	1	3	4
7	7	8	5	6	3	4	2	1
8	8	7	6	5	4	3	1	2

Seja f a permutação $(3\ 5)(4\ 6)$ de L . Usando o software GAP é simples verificar que f é um half-automorfismo. Além disso, f é um half-automorfismo não trivial, como podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned} f(3 * 7) &= f(6) = 4 & f(3) * f(7) &= 5 * 7 = 4 & f(7) * f(3) &= 7 * 5 = 3 \\ f(3 * 5) &= f(7) = 7 & f(3) * f(5) &= 5 * 3 = 8 & f(5) * f(3) &= 3 * 5 = 7 \end{aligned}$$

3.2 Propriedades

Proposição 3.2.1. *Sejam $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo e H um subloop de L' . Então:*

- a) $f^{-1}(H)$ é subloop de L .
- b) Se H é comutativo, então $f^{-1}(H)$ é comutativo e $f^{-1}(H)$ é isomorfo a H .
- c) Se H é grupo abeliano, então $f^{-1}(H)$ é grupo abeliano.
- d) Se L' é comutativo, então L é isomorfo a L' .

Demonstração. a) Sejam $x, y \in f^{-1}(H)$. Então $f(x), f(y) \in H$, e assim $\{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} \subseteq H$. Logo, da equação 3.2, segue que $f(x * y), f(y * x) \in H$, e assim $x * y \in f^{-1}(H)$.

Agora sejam $w, z \in L$ tais que $x * w = y$ e $z * x = y$. Da equação 3.1, segue que:

$$\begin{aligned} f(y) &\in \{f(x) \cdot f(w), f(w) \cdot f(x)\} \\ f(y) &\in \{f(x) \cdot f(z), f(z) \cdot f(x)\} \end{aligned}$$

Assim, como $f(x), f(y) \in H$, segue que $f(w), f(z) \in H$. Logo temos que $w, z \in f^{-1}(H)$, e portanto $f^{-1}(H)$ é subloop de L .

b) Sejam $x, y \in f^{-1}(H)$. Usando a equação 3.2:

$$\{f(x * y), f(y * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} \stackrel{H \text{ comut.}}{=} \{f(x) \cdot f(y)\}$$

Assim, $f(x * y) = f(y * x) = f(x) \cdot f(y)$. Como f é bijetora, segue que $x * y = y * x$, logo $f^{-1}(H)$ é comutativo. Além disso, temos que $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in f^{-1}(H)$, e assim $f^{-1}(H) \cong H$.

Os itens c) e d) decorrem de b). ■

Lema 3.2.2. *Seja $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo, e L e L' com identidades 1_L e $1_{L'}$. Então $f(1_L) = 1_{L'}$.*

Demonstração. Aplicando f em 1_L , temos que $f(1_L) = f(1_L * 1_L) = f(1_L) \cdot f(1_L)$. Portanto, $f(1_L) = 1_{L'}$. ■

Proposição 3.2.3. *Sejam $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo e L' com a propriedade de que todo elemento possui inverso bilateral. Então todo elemento x de L possui inverso bilateral $x^{-1} = f^{-1}((f(x))^{-1})$.*

Demonstração. Fixado $x \in L$, como $f(x) \in L'$, temos que existe $(f(x))^{-1} \in L'$. Logo, da equação 3.2:

$$\{f(x * f^{-1}((f(x))^{-1})), f(f^{-1}((f(x))^{-1}) * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot (f(x))^{-1}, (f(x))^{-1} \cdot f(x)\} = \{1_{L'}\}$$

Logo $f(x * f^{-1}((f(x))^{-1})) = f(f^{-1}((f(x))^{-1}) * x) = 1_{L'}$. Assim do lema 3.2.2 e do fato de f ser bijetora, segue que $x * f^{-1}((f(x))^{-1}) = f^{-1}((f(x))^{-1}) * x = 1_L$. Portanto, $x^{-1} = f^{-1}((f(x))^{-1})$. ■

Proposição 3.2.4. *Sejam $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo e L' potencialmente associativo. Então:*

- a) $f(x^n) = (f(x))^n$, para todo x pertencente a L e para todo n pertencente a $\mathbb{Z}$.
- b) L é potencialmente associativo.
- c) Se x pertencente a L é tal que $o(f(x))$ é finita, então $o(x) = o(f(x))$.

Demonstração. a) Seja $x \in L$. Pelo lema 3.2.2 temos que $f(x^0) = (f(x))^0$.

Suponha que $f(x^n) = (f(x))^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$f(x^{n+1}) = f(x^n * x) \in \{(f(x))^n \cdot f(x), f(x) \cdot (f(x))^n\} \stackrel{L' \text{ pot. ass.}}{=} \{(f(x))^{n+1}\}$$

Portanto $f(x^n) = (f(x))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, como L' é potencialmente associativo, da proposição 2.3.2 temos que todo elemento de L' possui inverso bilateral, assim da proposição 3.2.3 segue que todo elemento de L possui inverso bilateral. Desta forma, para $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} \stackrel{\text{prop 3.2.3}}{=} f^{-1}(f(x^n)^{-1})$$

$$\text{Logo } f(x^{-n}) = f(x^n)^{-1} = ((f(x))^n)^{-1} = (f(x))^{-n}.$$

b) Sejam $x \in L$ e $n, r, s \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\begin{aligned} &\{f((x^n * x^r) * x^s), f(x^n * (x^r * x^s))\} \subseteq \{(f(x))^n \cdot f(x)^r \cdot f(x)^s, f(x)^n \cdot (f(x)^r \cdot f(x)^s), \dots \\ &\dots, (f(x)^s \cdot f(x)^r) \cdot f(x)^n\} \stackrel{L' \text{ pot. ass.}}{=} \{(f(x))^{n+r+s}\} \end{aligned}$$

Com isto, temos que $f((x^n * x^r) * x^s) = f(x^n * (x^r * x^s))$, e como f é bijetora, segue que $(x^n * x^r) * x^s = x^n * (x^r * x^s)$. Portanto da proposição 2.3.3, temos que L é potencialmente associativo.

c) Seja $x \in L$ tal que $o(f(x)) < \infty$. De a) temos $f(x^{o(f(x))}) = (f(x))^{o(f(x))} = 1_{L'}$. Como f é bijetora, segue que $x^{o(f(x))} = 1_L$, logo $o(x) \leq o(f(x)) < \infty$. Assim, usando a) novamente temos $(f(x))^{o(x)} = f(x^{o(x)}) = f(1_L) = 1_{L'}$, logo $o(f(x)) \leq o(x)$. ■

Defina o seguinte conjunto:

$$K(L) = \{(x, y) \in L \times L \mid x * y = y * x\}$$

Proposição 3.2.5. *Sejam $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo e $K(L)$ finito. Então $|K(L')|$ é menor ou igual à $|K(L)|$.*

Demonstração. Como f é bijeção, o conjunto $K(L')$ pode ser reescrito na seguinte forma:

$$K(L') = \{(f(x), f(y)) \in L' \times L' \mid f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x), x, y \in L\}$$

Assim, seja $(f(x), f(y)) \in K(L')$, com $x, y \in L$. Logo, $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$. De 3.2 temos:

$$\{f(x * y), f(y * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} = \{f(x) \cdot f(y)\}$$

Com isto, $f(x * y) = f(y * x)$, e como f é bijetora, segue que $x * y = y * x$. Assim $(x, y) \in K(L)$. Logo a função:

$$\begin{aligned} \psi : K(L') &\rightarrow K(L) \\ (f(x), f(y)) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

está bem definida. Além disso, como f é bijetora, segue que ψ é injetora. Portanto $|K(L')| \leq |K(L)|$. ■

Definição 3.2.6. Um half-isomorfismo $f : L \rightarrow L'$ é dito ser *especial* se a função $f^{-1} : L' \rightarrow L$ também for um half-isomorfismo.

Teorema 3.2.7. *Seja $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo. São equivalentes:*

- a) f é especial.
- b) $\{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$, para todo x e y pertencentes a L .
- c) Para todo x e y pertencentes a L tais que $x * y = y * x$, temos $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$.

Além disso, no caso em que $K(L)$ é finito, estas condições são equivalentes à:

$$d) |K(L)| = |K(L')|$$

Demonstração. a) $\Rightarrow$ b) Sejam $x, y \in L$. Como f é half-isomorfismo, da equação 3.2 temos:

$$\{f(x * y), f(y * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$$

Como f^{-1} é half-isomorfismo, da equação 3.2 temos:

$$\{f^{-1}(f(x) \cdot f(y)), f^{-1}(f(y) \cdot f(x))\} \subseteq \{x * y, y * x\}$$

Logo, $\{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} \subseteq \{f(x * y), f(y * x)\}$.

b) $\Rightarrow$ a) Sejam $f(x), f(y) \in L'$. Como $\{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$, aplicando f^{-1} nesta igualdade, temos:

$$\{x * y, y * x\} = \{f^{-1}(f(x) \cdot f(y)), f^{-1}(f(y) \cdot f(x))\}$$

Logo $f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \in \{f^{-1}(f(x)) * f^{-1}(f(y)), f^{-1}(f(y)) * f^{-1}(f(x))\}$.

b) $\Rightarrow$ c) Sejam $x, y \in L$ tais que $x * y = y * x$. Como f é bijetora, segue que $f(x * y) = f(y * x)$. Assim, da hipótese segue que:

$$\{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\} = \{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x * y)\}$$

Logo $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$.

c) $\Rightarrow$ b) Sejam $x, y \in L$. Temos dois casos:

(i) Suponha que $x * y = y * x$. Como f é bijetora, segue que $f(x * y) = f(y * x)$, e da hipótese temos que $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$. Logo da definição de half-isomorfismo, segue que $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, e desta forma:

$$\{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x * y)\} = \{f(x) \cdot f(y)\} = \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$$

(ii) Suponha que $x * y \neq y * x$. Como f é bijetora, segue que $f(x * y) \neq f(y * x)$. De 3.2, temos

$$\{f(x * y), f(y * x)\} \subseteq \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$$

Assim, do fato do conjunto da esquerda ter dois elementos e o da direita ter no máximo dois, segue a igualdade.

a) $\Rightarrow$ d) Como $|K(L)| < \infty$, da proposição 3.2.5 segue que $|K(L')| \leq |K(L)| < \infty$. Logo, como $f^{-1} : L' \rightarrow L$ é um half-isomorfismo, da proposição 3.2.5 segue que $|K(L)| \leq |K(L')|$.

d) $\Rightarrow$ c) Pela demonstração da proposição 3.2.5, segue que a função $\psi : K(L') \rightarrow K(L)$, com $\psi((f(x), f(y))) = (x, y)$, é injetora. Como $|K(L)| = |K(L')|$, segue que ψ é bijetora. Assim, sejam $x, y \in L$ tais que $x * y = y * x$. Logo $(x, y) \in K(L)$, e como ψ é bijetora, segue que $(f(x), f(y)) \in K(L')$, e portanto $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$. ■

Do item d) do teorema 3.2.7, seguem os corolários a seguir, onde identificamos condições para que todo half-automorfismo do loop seja especial.

Corolário 3.2.8. *Seja L um loop tal que $K(L)$ é finito. Então todo half-automorfismo de L é especial.*

Corolário 3.2.9. *Seja L loop finito. Então todo half-automorfismo de L é especial.*

No caso onde temos um half-isomorfismo especial, podemos usar a função inversa do half-isomorfismo nas proposições 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4, obtendo assim recíprocas das mesmas. Com isso, na proposição a seguir estão reunidos os resultados válidos para half-isomorfismos especiais.

Proposição 3.2.10. *Sejam $f : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo especial e H subloop de L . Então:*

- a) $f(H)$ é subloop de L' .
- b) Se H é comutativo, então $f(H)$ é comutativo e $f(H)$ é isomorfo a H .
- c) Se H é grupo abeliano, então $f(H)$ é grupo abeliano.
- d) Se L é comutativo, então L é isomorfo a L' .
- e) Se L tem a propriedade de que todo elemento possui inverso bilateral, então todo elemento x de L' possui inverso bilateral $x^{-1} = f((f^{-1}(x))^{-1})$.
- f) Se L é potencialmente associativo, então $f(x^n) = (f(x))^n$, para todo x pertencente a L e para todo n pertencente a $\mathbb{Z}$.
- g) Se L é potencialmente associativo, então L' é potencialmente associativo.
- h) Se L é potencialmente associativo e x pertencente a L é tal que $o(x)$ é finita, então $o(x) = o(f(x))$.

- i) $\{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$, para todo x e y pertencentes a L .
j) Para todo x e y pertencentes a L tais que $x * y = y * x$, temos $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x)$.
k) Se $K(L)$ é finito, então $|K(L)| = |K(L')|$

Quando o half-isomorfismo f não for especial, temos que as recíproca das proposições 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4 nem sempre são válidas. Nos exemplos a seguir analisaremos este caso.

Exemplo 3.2.11. Sejam $L = C_6$, o grupo cíclico de ordem 6, e f a função identidade. Considere as seguintes tabelas de multiplicação para os loops L e L' :

L	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	5	6	1	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	1	2	3	4	5

L'	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	1	5	6	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	4	2	3	1	5

Podemos ver que $f : L \rightarrow L'$ é um half-isomorfismo não trivial. Note que o loop L é um grupo abeliano e, portanto, comutativo, associativo, potencialmente associativo e todos os seus elementos possuem inverso bilateral. Enquanto que o loop L' é não comutativo, não associativo, não potencialmente associativo ($2^2 \cdot 2 = 1$ e $2 \cdot 2^2 = 4$) e existem elementos que não possuem inversos bilaterais ($6^\lambda = 2$, $6^\rho = 5$). Também vemos que $H = \{1, 3, 5\}$ é subloop de L , enquanto $f(H) = \{1, 3, 5\}$ não é subloop de L' . Além disso $|K(L)| = |L|^2$ e $|K(L')|$ é menor do que $|K(L)|$, logo do teorema 3.2.7 segue que f não é um half-isomorfismo especial.

Exemplo 3.2.12. Agora veremos um exemplo de um half-isomorfismo não trivial entre loops de ordem ímpar. Sejam $L = C_7$, o grupo cíclico de ordem 7, e f a função identidade. Considere as seguintes tabelas de multiplicação para os loops L e L' :

L	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	1
3	3	4	5	6	7	1	2
4	4	5	6	7	1	2	3
5	5	6	7	1	2	3	4
6	6	7	1	2	3	4	5
7	7	1	2	3	4	5	6

L'	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	7	5	6	1	4
3	3	4	5	6	7	2	1
4	4	5	6	7	1	3	2
5	5	6	4	1	2	7	3
6	6	7	1	2	3	4	5
7	7	1	2	3	4	5	6

Novamente $f : L \rightarrow L'$ é um half-isomorfismo não trivial que não preserva as propriedades de L ser comutativo, associativo, potencialmente associativo e de todos os seus elementos terem inverso bilateral. Além disso, como no caso anterior, f não é um half-isomorfismo especial.

Na próxima seção analisaremos o grupo de half-automorfismos de um loop. Antes disso, analisaremos a composição de half-isomorfismos.

Proposição 3.2.13. Sejam $(L, *)$, $(L', \cdot)$ e $(L'', \bullet)$ loops e $f : L \rightarrow L'$ e $g : L' \rightarrow L''$ half-isomorfismos. Então $g \circ f : L \rightarrow L''$ é um half-isomorfismo.

Demonstração. Para $x, y \in L$, temos:

$$f(x * y) \in \{f(x) \cdot f(y), f(y) \cdot f(x)\}$$

Aplicando g nos dois lados da equação acima, e usando o fato de que g é half-isomorfismo temos:

$$\begin{aligned} g(f(x * y)) &\in \{g(f(x) \cdot f(y)), g(f(y) \cdot f(x))\} \subseteq \\ &\subseteq \{g(f(x)) \bullet g(f(y)), g(f(y)) \bullet g(f(x)), g(f(y)) \bullet g(f(x)), g(f(x)) \bullet g(f(y))\} = \\ &= \{g(f(x)) \bullet g(f(y)), g(f(y)) \bullet g(f(x))\} \end{aligned}$$

Portanto $g \circ f$ é um half-isomorfismo. ■

Proposição 3.2.14. *Sejam $(L, *)$, $(L', \cdot)$ e $(L'', \bullet)$ loops e $f : L \rightarrow L'$ e $g : L' \rightarrow L''$ half-isomorfismos. Então*

- a) *Se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.*
- b) *Se f e g são anti-isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.*
- c) *Se f é um isomorfismo e g é um anti-isomorfismo, então $g \circ f$ é um anti-isomorfismo.*
- d) *Se f é um anti-isomorfismo e g é um isomorfismo, então $g \circ f$ é um anti-isomorfismo.*
- e) *Se f é um half-isomorfismo não trivial e g é um half-isomorfismo trivial, então $g \circ f$ é um half-isomorfismo não trivial.*
- f) *Se f é um half-isomorfismo trivial e g é um half-isomorfismo não trivial, então $g \circ f$ é um half-isomorfismo não trivial.*

Demonstração. a) Fixados $x, y \in L$, temos:

$$g \circ f(x * y) = g(f(x) \cdot f(y)) = g(f(x)) \bullet g(f(y))$$

Logo $g \circ f$ é um isomorfismo.

As demonstrações dos itens b), c) e d) são análogas à do item a).

e) Como f é não trivial, existem $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ tais que:

$$\begin{aligned} f(x_1 * y_1) &= f(x_1) \cdot f(y_1) \neq f(y_1) \cdot f(x_1) \\ f(x_2 * y_2) &= f(y_2) \cdot f(x_2) \neq f(x_2) \cdot f(y_2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como g é um half-isomorfismo trivial, temos dois casos:

(i) Suponha que g é um isomorfismo.

Assim, aplicando g nas equações 3.3, temos:

$$\begin{aligned} g(f(x_1 * y_1)) &= g(f(x_1)) \bullet g(f(y_1)) \neq g(f(y_1)) \bullet g(f(x_1)) \\ g(f(x_2 * y_2)) &= g(f(y_2)) \bullet g(f(x_2)) \neq g(f(x_2)) \bullet g(f(y_2)) \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é um half-isomorfismo não trivial.

(ii) Suponha que g é um anti-isomorfismo.

Assim, aplicando g nas equações 3.3, temos:

$$\begin{aligned} g(f(x_1 * y_1)) &= g(f(y_1)) \bullet g(f(x_1)) \neq g(f(x_1)) \bullet g(f(y_1)) \\ g(f(x_2 * y_2)) &= g(f(x_2)) \bullet g(f(y_2)) \neq g(f(y_2)) \bullet g(f(x_2)) \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é um half-isomorfismo não trivial.

f) A demonstração é análoga à do item e). ■

3.3 O grupo de half-automorfismos

Para um loop L , defina o *conjunto dos half-automorfismos de L* , o *conjunto dos half-automorfismos triviais de L* e o *conjunto dos half-automorfismos não triviais de L* respectivamente por:

$$\begin{aligned} \text{Half}(L) &= \{f : L \rightarrow L; f \text{ é half-automorfismo}\} \\ \text{Half}_T(L) &= \{f : L \rightarrow L; f \text{ é half-automorfismo trivial}\} \\ \text{Half}_N(L) &= \{f : L \rightarrow L; f \text{ é half-automorfismo não trivial}\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note que $\text{Half}(L) = \text{Half}_T(L) \cup \text{Half}_N(L)$, sendo esta união disjunta.

Das proposições 3.2.13 e 3.2.14, observamos que os conjuntos $\text{Half}(L)$ e $\text{Half}_T(L)$ são fechados para a operação de composição de funções. Além disso, é fácil ver que a função inversa de um automorfismo é também um automorfismo, e que a função inversa de um anti-automorfismo é também um anti-automorfismo. Com isso, temos que $\text{Half}_T(L)$ é fechado para inversos, e portanto ele é um grupo, e será chamado *grupo dos half-automorfismos triviais de L* . Além disso, sendo f um automorfismo e g um anti-automorfismo, da proposição 3.2.14 temos que $g^{-1}fg$ é um automorfismo, e assim $\varphi^{-1}\text{Aut}(L)\varphi$ está contido em $\text{Aut}(L)$, para todo φ pertencente a $\text{Half}_T(L)$ e, portanto, $\text{Aut}(L) \triangleleft \text{Half}_T(L)$. Desta forma, estabelecemos o resultado a seguir.

Proposição 3.3.1. *Seja L loop. Então $\text{Half}_T(L)$ é um grupo. Além disso, $\text{Aut}(L) \triangleleft \text{Half}_T(L)$.*

Agora para o conjunto $\text{Half}(L)$ ser um grupo, precisamos de informações adicionais. Como $\text{Half}(L)$ é fechado para a operação de composição de funções, se ele for fechado para inversos, ele será um grupo. Reciprocamente, se $\text{Half}(L)$ é grupo, então ele é fechado para inversos. Com isso, estabelecemos o resultado a seguir.

Proposição 3.3.2. *Seja L loop. Então $\text{Half}(L)$ é um grupo se, e somente se, todos os half-automorfismos de L forem especiais.*

Observação 3.3.3. Dos corolários 3.2.8 e 3.2.9, segue que se um loop L é finito ou se $K(L)$ é finito, então $\text{Half}(L)$ é grupo.

Capítulo 4

Half-isomorfismos de loops automórficos diedrais

Neste capítulo introduzimos uma classe de A -loops que foi apresentada primeiramente por M.K. Kinyon, K. Kunen, J.D. Phillips e P. Vojtěchovský em [KKPV16]. Os autores construíram uma classe de A -loops a partir da duplicação de um grupo abeliano G e de um de seus automorfismos. Aqui chamamos um loop resultante desta construção de *loop automórfico diedral*. Neste mesmo artigo, os autores provaram que todo A -loop não associativo de ordem $2p$, com p primo ímpar, é um loop automórfico diedral construído a partir de $\mathbb{Z}_p$. Provaram ainda que existem $p - 2$ destes loops. Essa caracterização torna o estudo desta classe de A -loops ainda mais importante. Na dissertação [dA14] e no artigo de M. Aboras e P. Vojtěchovský [AV16] foram estudadas esta classe de A -loops e o seu grupo de automorfismos, sendo que alguns dos resultados obtidos são utilizados neste capítulo. Aqui analisamos os half-isomorfismos triviais e não triviais nesta classe de A -loops.

Na primeira seção definimos o loop automórfico diedral. Na segunda seção estudamos os half-isomorfismos entre dois loops automórficos diedrais construídos a partir do mesmo grupo. Primeiramente mostramos que todo half-isomorfismo entre estes loops é especial. Em seguida, para o caso não comutativo, mostramos a forma tanto dos half-isomorfismos triviais como dos não triviais, obtendo condições para suas existências e suas quantidades. Na terceira seção obtemos expressões para os grupos dos half-automorfismos e dos half-automorfismos triviais de loops automórficos diedrais.

4.1 Loop automórfico diedral

Sejam G grupo abeliano finito e α pertencente a $\text{Aut}(G)$. Defina o seguinte conjunto:

$$\text{Dih}(\alpha, G) := \mathbb{Z}_2 \times G$$

Definimos a operação $*$ em $\text{Dih}(\alpha, G)$ da seguinte maneira:

$$(i, u) * (j, v) := (i + j, \alpha^{ij}(u^{(-1)^j}v)) \quad i, j \in \mathbb{Z}_2, u, v \in G$$

ou, equivalentemente, para u e v pertencentes a G :

$$\begin{aligned} (0, u) * (0, v) &= (0, uv) \\ (0, u) * (1, v) &= (1, u^{-1}v) \\ (1, u) * (0, v) &= (1, uv) \\ (1, u) * (1, v) &= (0, \alpha(u^{-1}v)) \end{aligned}$$

A partir desta definição, podemos observar que:

- (i) O elemento $(0, e)$ é a identidade de $Dih(\alpha, G)$, onde e é a identidade de G .
- (ii) $(0, G) = \{(0, x) \mid x \in G\}$ é subgrupo abeliano de $Dih(\alpha, G)$ isomorfo a G .
- (iii) $o((0, u)) = o(u)$, para todo u pertencente a G .
- (iv) Os elementos da forma $(1, u)$ possuem ordem 2.

Além disto, sendo I_d a função identidade em $Aut(G)$, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.1. ([KKPV16] Prop. 9.1) *Sejam G grupo abeliano e α pertencente a $Aut(G)$. Então $Dih(\alpha, G)$ é A -loop. Se α é diferente de I_d , então $N_\mu(Dih(\alpha, G)) = (0, G)$.*

Os A -loops do tipo $Dih(\alpha, G)$ são chamados *loops automórficos diedrais*. A seguir, dois resultados que caracterizam quando este tipo de A -loop é associativo ou comutativo.

Teorema 4.1.2. ([dA14] Teorema 3.1.2) *Sejam G grupo abeliano e α pertencente a $Aut(G)$. Então $Dih(\alpha, G)$ é grupo se, e somente se, $\alpha = I_d$. Além disso, se α é diferente de I_d , temos:*

$$N_\lambda(Dih(\alpha, G)) = \{(0, u) \in Dih(\alpha, G) \mid \alpha(u) = u\}$$

Teorema 4.1.3. ([dA14] Teorema 3.1.3) *Sejam G grupo abeliano e α pertencente a $Aut(G)$. Então $Dih(\alpha, G)$ é comutativo se, e somente se, G tem período 2. Além disso, se o período de G é diferente de 2, temos:*

$$\begin{aligned} C(Dih(\alpha, G)) &= \{(0, u) \in Dih(\alpha, G) \mid u = u^{-1}\} \\ \mathcal{Z}(Dih(\alpha, G)) &= \{(0, u) \in Dih(\alpha, G) \mid \alpha(u) = u \text{ e } u = u^{-1}\} \end{aligned}$$

onde $C(Dih(\alpha, G))$ e $\mathcal{Z}(Dih(\alpha, G))$ são respectivamente o comutante e o centro de $Dih(\alpha, G)$.

4.2 Half-isomorfismos entre L_α e L_β

Nesta seção, denotaremos por L_α o loop automórfico diedral $Dih(\alpha, G)$. Além disso para α e β pertencentes a $Aut(G)$, denotaremos por $*$ e $\cdot$ respectivamente as operações de L_α e L_β . Nosso objetivo será caracterizar os half-isomorfismos entre L_α e L_β .

No capítulo 3, para um loop L , definimos o conjunto $K(L) = \{(x, y) \in L \times L \mid xy = yx\}$. A partir da definição da operação em L_α , para u e v pertencentes a G temos:

$$\begin{aligned} (0, u) * (0, v) &= (0, v) * (0, u) \\ (0, u) * (1, v) &= (1, v) * (0, u) \text{ se, e somente se, } u = u^{-1} \\ (1, u) * (1, v) &= (1, v) * (1, u) \text{ se, e somente se, } u^2 = v^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$K(L_\alpha) = \{((0, u_1), (0, v_1)), ((0, u_2), (1, v_2)), ((1, u_3), (1, v_3)) \mid u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in G, u_2 = u_2^{-1}, u_3^2 = v_3^2\}$$

Logo, é fácil ver que $K(L_\alpha) = K(L_\beta)$. Desta forma, segue do teorema 3.2.7 o resultado a seguir.

Proposição 4.2.1. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Então f é especial.*

Desta forma, os loops automórficos diedrais constituem uma classe de loop onde todo half-isomorfismo é especial.

A partir do resultado anterior e das proposições 3.2.1 e 3.2.10 podemos estabelecer o seguinte resultado:

Proposição 4.2.2. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Se L_α ou L_β é comutativo, então f é isomorfismo.*

Com este resultado, vemos que, se L_α ou L_β é comutativo, então o estudo de half-isomorfismos se reduz ao estudo de automorfismos de loops automórficos diedrais, o que foi feito em [AV16].

De agora em diante, L_α e L_β serão não comutativos e, do teorema 4.1.3, G será tal que o seu período é diferente de 2.

Proposição 4.2.3. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Então $f((0, G)) = (0, G)$.*

Demonstração. Como o período de G é diferente de 2, existe $u \in G$ tal que $o(u) > 2$.

Pela proposição 3.2.4, segue que f preserva a ordem dos elementos de L_α . Desta forma, como $o((1, v)) = 2$, para todo $v \in G$, segue que $f((0, u)) = (0, u')$, com $u' \in G$.

Suponha, por absurdo, que existe $v \in G$ tal que $f((0, v)) = (1, v')$, com $v' \in G$. Como f preserva a ordem, temos que $o(v) = 2$. Desta forma:

$$(uv)^2 = u^2v^2 = u^2 \neq e$$

Logo $o(uv) > 2$ e assim temos $f((0, uv)) = (0, w)$, para algum $w \in G$. Com isto:

$$\begin{aligned} (0, w) = f((0, uv)) &= f((0, u) * (0, v)) \in \{f((0, u)) \cdot f((0, v)), f((0, v)) \cdot f((0, u))\} = \\ &= \{(0, u') \cdot (1, v'), (1, v') \cdot (0, u')\} = \{(1, u'^{-1}v'), (1, v'u')\} \end{aligned}$$

Assim, temos um absurdo. Logo $f((0, G)) \subseteq (0, G)$, e como f é bijetora e G finito, segue que $f((0, G)) = (0, G)$. ■

Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Defina $f' : G \rightarrow G$ por:

$$(0, f'(u)) = f((0, u))$$

Pela proposição 4.2.3 temos que f' está bem definida. Além disso, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.4. *A função f' definida anteriormente é um automorfismo de G .*

Demonstração. Para $u, v \in G$, temos:

$$\begin{aligned} (0, f'(uv)) &= f((0, uv)) = f((0, u) * (0, v)) \in \{f((0, u)) \cdot f((0, v)), f((0, v)) \cdot f((0, u))\} = \\ &= \{(0, f'(u)) \cdot (0, f'(v)), (0, f'(v)) \cdot (0, f'(u))\} = \{(0, f'(u)f'(v))\} \end{aligned}$$

Logo, $f'(uv) = f'(u)f'(v)$. ■

Proposição 4.2.5. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Então existe a pertencente a G tal que para todo u pertencente a G , temos:*

$$f((i, u)) = \begin{cases} (0, f'(u)), & i = 0 \\ (1, af'(u^{\epsilon_u})), & i = 1 \end{cases} \quad (\epsilon_u \in \{-1, 1\})$$

Demonstração. Seja $a \in G$ tal que $f((1, e)) = (1, a)$. Como $f((0, u)) = (0, f'(u))$, temos:

$$\begin{aligned} f((1, u)) &= f((1, e) * (0, u)) \in \{f((1, e)) \cdot f((0, u)), f((0, u)) \cdot f((1, e))\} = \\ &= \{(1, a) \cdot (0, f'(u)), (0, f'(u)) \cdot (1, a)\} = \{(1, af'(u)), (1, af'(u^{-1}))\} \end{aligned}$$

■

Seja $f' : G \rightarrow G$ um automorfismo e a pertencente a G . Defina $f_{-a}, f_{+a} : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ por

$$f_{-a}((i, u)) = \begin{cases} (0, f'(u)), & i = 0 \\ (1, af'(u^{-1})), & i = 1 \end{cases} \quad f_{+a}((i, u)) = \begin{cases} (0, f'(u)) & i = 0 \\ (1, af'(u)) & i = 1 \end{cases}$$

Podemos observar que como G não tem período 2, então f_{-a} é diferente de f_{+a} , para todo a pertencente a G .

Defina a função $J : G \rightarrow G$ por $J(x) = x^{-1}$. Como G é comutativo, então J é um automorfismo de G . Além disso, J pertence a $\mathcal{Z}(\text{Aut}(G))$, onde $\mathcal{Z}(\text{Aut}(G))$ denota o centro do grupo de automorfismos de G .

Proposição 4.2.6. *Seja $f' : G \rightarrow G$ um automorfismo e a pertencente a G . Então:*

- a) *Se $f'\alpha = \beta f'$, então f_{+a} é isomorfismo e f_{-a} é anti-isomorfismo.*
- b) *Se $f'\alpha = \beta f'J$, então f_{+a} e f_{-a} são half-isomorfismos não triviais.*

Demonstração. Provaremos os resultados para cada função separadamente.

(i) Considere a função f_{+a} . Temos quatro casos:

(i.1) Sejam $(0, u), (0, v) \in L_\alpha$. Então:

$$f_{+a}((0, u) * (0, v)) = f_{+a}((0, uv)) = (0, f'(uv)) = (0, f'(u)) \cdot (0, f'(v)) = f_{+a}((0, u)) \cdot f_{+a}((0, v))$$

(i.2) Sejam $(0, u), (1, v) \in L_\alpha$. Então:

$$\begin{aligned} f_{+a}((0, u) * (1, v)) &= f_{+a}((1, u^{-1}v)) = (1, af'(u^{-1}v)) = (0, f'(u)) \cdot (1, af'(v)) = \\ &= f_{+a}((0, u)) \cdot f_{+a}((1, v)) \end{aligned}$$

(i.3) Sejam $(1, u), (0, v) \in L_\alpha$. Então:

$$f_{+a}((1, u) * (0, v)) = f_{+a}((1, uv)) = (1, af'(uv)) = (1, af'(u)) \cdot (0, f'(v)) = f_{+a}((1, u)) \cdot f_{+a}((0, v))$$

(i.4) Sejam $(1, u), (1, v) \in L_\alpha$. Então:

$$\begin{aligned} f_{+a}((1, u) * (1, v)) &= f_{+a}((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \\ f_{+a}((1, u)) \cdot f_{+a}((1, v)) &= (1, af'(u)) \cdot (1, af'(v)) = (0, \beta f'(u^{-1}v)) \\ f_{+a}((1, v)) \cdot f_{+a}((1, u)) &= (1, af'(v)) \cdot (1, af'(u)) = (0, \beta f'J(u^{-1}v)) \end{aligned}$$

Agora temos dois casos, dependendo do comportamento de $f'\alpha$.

(i.4.1) Suponha que $f'\alpha = \beta f'$

Assim $f_{+a}((1, u) * (1, v)) = f_{+a}((1, u)) \cdot f_{+a}((1, v))$. Logo, disto juntamente com os casos (i.1), (i.2) e (i.3) segue que f_{+a} é um isomorfismo.

(i.4.2) Suponha que $f'\alpha = \beta f'J$

Assim $f_{+a}((1, u) * (1, v)) = f_{+a}((1, v)) \cdot f_{+a}((1, u))$. Logo, disto juntamente com os casos (i.1), (i.2) e (i.3) segue que f_{+a} é um half-isomorfismo. Agora veremos que ele é não trivial. Como G não tem período 2, seja $w \in G$ tal que $w \neq w^{-1}$.

De (i.3) temos que $f_{+a}((1, e) * (0, w)) = f_{+a}((1, e)) \cdot f_{+a}((0, w)) = (1, af'(w))$. Por outro lado, temos:

$$f_{+a}((0, w)) \cdot f_{+a}((1, e)) = (0, f'(w)) \cdot (1, a) = (1, af'(w^{-1})) \stackrel{w \neq w^{-1}}{\neq} (1, af'(w))$$

Assim temos que $f_{+a}((1, e) * (0, w)) \neq f_{+a}((0, w)) \cdot f_{+a}((1, e))$, o que implica que f_{+a} não é um anti-isomorfismo.

Além disso, vimos que $f_{+a}((1, w) * (1, e)) = f_{+a}((1, e)) \cdot f_{+a}((1, w)) = (0, f'\alpha(w^{-1}))$. Por outro lado:

$$f_{+a}((1, w)) \cdot f_{+a}((1, e)) = (0, \beta f'(w^{-1})) = (0, \beta f'J(w)) = (0, f'\alpha(w)) \stackrel{w \neq w^{-1}}{\neq} (0, f'\alpha(w^{-1}))$$

Desta forma $f_{+a}((1, w) * (1, e)) \neq f_{+a}((1, w)) \cdot f_{+a}((1, e))$, logo f_{+a} não é um isomorfismo. Portanto f_{+a} é um half-isomorfismo não trivial.

(ii) Considere a função f_{-a} .

(ii.1) Sejam $(0, u), (0, v) \in L_\alpha$. Então:

$$f_{-a}((0, u) * (0, v)) = f_{-a}((0, uv)) = (0, f'(uv)) = (0, f'(v)) \cdot (0, f'(u)) = f_{-a}((0, v)) \cdot f_{-a}((0, u))$$

(ii.2) Sejam $(0, u), (1, v) \in L_\alpha$. Então:

$$\begin{aligned} f_{-a}((0, u) * (1, v)) &= f_{-a}((1, u^{-1}v)) = (1, af'(uv^{-1})) = (1, af'(v^{-1})) \cdot (0, f'(u)) = \\ &= f_{-a}((1, v)) \cdot f_{-a}((0, u)) \end{aligned}$$

(ii.3) Sejam $(1, u), (0, v) \in L_\alpha$. Então:

$$\begin{aligned} f_{-a}((1, u) * (0, v)) &= f_{-a}((1, uv)) = (1, af'(u^{-1}v^{-1})) = (0, f'(v)) \cdot (1, af'(u^{-1})) = \\ &= f_{-a}((0, v)) \cdot f_{-a}((1, u)) \end{aligned}$$

(ii.4) Sejam $(1, u), (1, v) \in L_\alpha$. Então:

$$\begin{aligned} f_{-a}((1, u) * (1, v)) &= f_{-a}((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \\ f_{-a}((1, u)) \cdot f_{-a}((1, v)) &= (1, af'(u^{-1})) \cdot (1, af'(v^{-1})) = (0, \beta f'J(u^{-1}v)) \\ f_{-a}((1, v)) \cdot f_{-a}((1, u)) &= (1, af'(v^{-1})) \cdot (1, af'(u^{-1})) = (0, \beta f'J(u^{-1}v)) \end{aligned}$$

Agora temos dois casos, dependendo do comportamento de $f'\alpha$.

(ii.4.1) Suponha que $f'\alpha = \beta f'$

Assim $f_{-a}((1, u) * (1, v)) = f_{-a}((1, v)) \cdot f_{-a}((1, u))$. Logo, disto juntamente com os casos (ii.1), (ii.2) e (ii.3) segue que f_{-a} é um anti-isomorfismo.

(ii.4.2) Suponha que $f'\alpha = \beta f'J$

Assim $f_{-a}((1, u) * (1, v)) = f_{-a}((1, u)) \cdot f_{-a}((1, v))$. Logo, disto juntamente com os casos (ii.1), (ii.2) e (ii.3) segue que f_{-a} é um half-isomorfismo. Agora veremos que ele é não trivial. Como G não tem período 2, seja $w \in G$ tal que $w \neq w^{-1}$.

De (ii.3) temos que $f_{-a}((1, e) * (0, w)) = f_{-a}((0, w)) \cdot f_{-a}((1, e)) = (1, af'(w^{-1}))$. Por outro lado temos:

$$f_{-a}((1, e)) \cdot f_{-a}((0, w)) = (1, a) \cdot (0, f'(w)) = (1, af'(w)) \stackrel{w \neq w^{-1}}{\neq} (1, af'(w^{-1}))$$

Assim temos que $f_{-a}((1, e) * (0, w)) \neq f_{-a}((1, e)) \cdot f_{-a}((0, w))$, o que implica que f_{-a} não é um isomorfismo.

Além disso, vimos que $f_{-a}((1, w) * (1, e)) = f_{-a}((1, w)) \cdot f_{-a}((1, e)) = (0, f'\alpha(w^{-1}))$. Por outro lado:

$$f_{-a}((1, e)) \cdot f_{-a}((1, w)) = (0, \beta f'(w^{-1})) = (0, \beta f'J(w)) = (0, f'\alpha(w)) \stackrel{w \neq w^{-1}}{\neq} (0, f'\alpha(w^{-1}))$$

Desta forma $f_{-a}((1, w) * (1, e)) \neq f_{-a}((1, e)) \cdot f_{-a}((1, w))$, logo f_{-a} não é um anti-isomorfismo. Portanto f_{-a} é um half-isomorfismo não trivial. ■

Lema 4.2.7. *Sejam L um loop e H, K subloops de L tais que $L = H \cup K$. Então L pertence a $\{H, K\}$.*

Demonstração. Se H é subloop de K ou se K é subloop de H , temos que $L = H \cup K \in \{H, K\}$. Suponha que H não é subloop de K e que K não é subloop de H . Assim, existem $x, y \in L$ tais que $x \in H - K$ e $y \in K - H$.

Como $xy \in L = H \cup K$, ou $xy \in H$, ou $xy \in K$. Se $xy \in H$, como $x \in H$, segue que $y \in H$. Mas $y \in K - H$, e assim temos um absurdo. Analogamente, se $xy \in K$ teremos um absurdo. ■

Proposição 4.2.8. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Então $f'\alpha$ pertence a $\{\beta f', \beta f'J\}$.*

Demonstração. Das proposições 4.2.4 e 4.2.5 segue que $f' : G \rightarrow G$ é automorfismo e existe $a \in G$ tal que para todo $u \in G$:

$$f((i, u)) = \begin{cases} (0, f'(u)), & i = 0 \\ (1, af'(u^{\epsilon_u})), & i = 1 \end{cases} \quad (\epsilon_u \in \{-1, 1\})$$

Assim, como $f((1, e)) = (1, a)$, temos que para todo $v \in G$:

$$\begin{aligned} f((1, e) * (1, v)) &= f((0, \alpha(v))) = (0, f'\alpha(v)) \\ f((1, e)) \cdot f((1, v)) &= (1, a) \cdot (1, af'(v^{\epsilon_v})) = (0, \beta f'(v^{\epsilon_v})) \end{aligned}$$

$$f((1, v)) \cdot f((1, e)) = (1, af'(v^{\epsilon_v})) \cdot (1, a) = (0, \beta f'(v^{-\epsilon_v}))$$

Como f é half-isomorfismo, segue que para todo $v \in G$:

$$f'\alpha(v) \in \{\beta f'(v^{\epsilon_v}), \beta f'(v^{-\epsilon_v})\} = \{\beta f'(v), \beta f'(v^{-1})\} \quad (*)$$

Defina:

$$H = \{v \in G \mid f'\alpha(v) = \beta f'(v)\}$$

$$K = \{v \in G \mid f'\alpha(v) = \beta f'J(v)\}$$

De (*) segue que $G = H \cup K$. Como $\beta f'(e) = \beta f'J(e) = e = f'\alpha(e)$, segue que $e \in H \cap K$.

(i) Vamos mostrar que H é subgrupo de G

Para $x, y \in H$, temos que $f'\alpha(x) = \beta f'(x)$ e $f'\alpha(y) = \beta f'(y)$. Logo:

$$f'\alpha(xy) = f'\alpha(x)f'\alpha(y) = \beta f'(x)\beta f'(y) = \beta f'(xy)$$

Assim, $xy \in H$. Além disso:

$$e = f'\alpha(e) = f'\alpha(xx^{-1}) = f'\alpha(x)f'\alpha(x^{-1}) = \beta f'(x)f'\alpha(x^{-1})$$

Desta forma, $f'\alpha(x^{-1}) = \beta f'(x^{-1})$, e temos que $x^{-1} \in H$. Portanto H é subgrupo de G .

(ii) Vamos mostrar que K é subgrupo de G

Para $x, y \in H$, temos que $f'\alpha(x) = \beta f'J(x)$ e $f'\alpha(y) = \beta f'J(y)$. Logo:

$$f'\alpha(xy) = f'\alpha(x)f'\alpha(y) = \beta f'J(x)\beta f'J(y) = \beta f'J(xy)$$

Assim, $xy \in K$. Além disso:

$$e = f'\alpha(e) = f'\alpha(xx^{-1}) = f'\alpha(x)f'\alpha(x^{-1}) = \beta f'J(x)f'\alpha(x^{-1})$$

Desta forma, $f'\alpha(x^{-1}) = \beta f'J(x^{-1})$, e temos que $x^{-1} \in K$. Portanto K é subgrupo de G .

Logo, como G é a união de dois subgrupos, do lema 4.2.7 segue que $G \in \{H, K\}$. Assim $f'\alpha \in \{\beta f', \beta f'J\}$. ■

Proposição 4.2.9. *Seja $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ um half-isomorfismo. Se $f'\alpha$ pertence a $\{\beta f', \beta f'J\}$, então f pertence a $\{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$.*

Demonstração. Segue da proposição 4.2.5 que existe $a \in G$ tal que para todo $x \in G$:

$$f((i, x)) = \begin{cases} (0, f'(x)), & i = 0 \\ (1, af'(x^{\epsilon_x})), & i = 1 \end{cases} \quad (\epsilon_x \in \{-1, 1\})$$

(i) Caso 1: $f'\alpha = \beta f'$.

Seja $u \in G$ tal que $u \neq u^{-1}$. Como $f((1, u)) = (1, af'(u^{\pm 1}))$, temos dois casos:

(i.1) Suponha que $f((1, u)) = (1, af'(u))$.

Queremos mostrar que $f = f_{+a}$. Sabemos que $f((0, x)) = (0, f'(x)) = f_{+a}((0, x))$, para todo $x \in G$. Assim basta mostrarmos que:

$$f((1, v)) = (1, af'(v)), \text{ para todo } v \in G \setminus \{u\}$$

Temos mais dois casos:

(i.1.1) Suponha que $v = v^{-1}$.

$$\text{Logo } f((1, v)) = (1, af'(v^{\pm 1})) = (1, af'(v)).$$

(i.1.2) Suponha que $v \neq v^{-1}$.

Como u e v são diferentes dos seus inversos, segue que:

$$u^{-1}v \notin \{uv, u^{-1}v^{-1}\} \quad (4.1)$$

Temos que $f((1, v)) = (1, af'(v^{\epsilon_v}))$, com $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$. Queremos mostrar que $\epsilon_v = 1$.

$$\begin{aligned} f((1, u) * (1, v)) &= f((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \stackrel{f'\alpha = \beta f'}{=} (0, \beta f'(u^{-1}v)) \\ f((1, u)) \cdot f((1, v)) &= (1, af'(u)) \cdot (1, af'(v^{\epsilon_v})) = (0, \beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v})) \\ f((1, v)) \cdot f((1, u)) &= (1, af'(v^{\epsilon_v})) \cdot (1, af'(u)) = (0, \beta f'(uv^{-\epsilon_v})) \end{aligned}$$

Como f é half-isomorfismo, temos:

$$\begin{aligned} f((1, u) * (1, v)) &\in \{f((1, u)) \cdot f((1, v)), f((1, v)) \cdot f((1, u))\} \\ \Rightarrow (0, \beta f'(u^{-1}v)) &\in \{(0, \beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v})), (0, \beta f'(uv^{-\epsilon_v}))\} \\ \Rightarrow \beta f'(u^{-1}v) &\in \{\beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v}), \beta f'(uv^{-\epsilon_v})\} \\ \beta f' \text{ é bijeção} &\Rightarrow u^{-1}v \in \{u^{-1}v^{\epsilon_v}, uv^{-\epsilon_v}\} \end{aligned}$$

Note que se $\epsilon_v = -1$, então $u^{-1}v \in \{uv, u^{-1}v^{-1}\}$, o que contraria a equação 4.1. Logo $\epsilon_v = 1$, e assim $f((1, v)) = (1, af'(v))$.

Portanto $f = f_{+a}$.

(i.2) Suponha que $f((1, u)) = (1, af'(u^{-1}))$.

Queremos mostrar que $f = f_{-a}$. Sabemos que $f((0, x)) = (0, f'(x)) = f_{-a}((0, x))$, para todo $x \in G$. Assim basta mostrarmos que:

$$f((1, v)) = (1, af'(v^{-1})), \text{ para todo } v \in G \setminus \{u\}$$

Temos mais dois casos:

(i.2.1) Suponha que $v = v^{-1}$.

$$\text{Logo } f((1, v)) = (1, af'(v^{\pm 1})) = (1, af'(v^{-1})).$$

(i.2.2) Suponha que $v \neq v^{-1}$.

Como u e v são diferentes dos seus inversos, repare que a equação 4.1 continua válida.

Temos que $f((1, v)) = (1, af'(v^{\epsilon_v}))$, com $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$. Queremos mostrar que $\epsilon_v = -1$.

$$\begin{aligned} f((1, u) * (1, v)) &= f((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \stackrel{f'\alpha = \beta f'}{=} (0, \beta f'(u^{-1}v)) \\ f((1, u)) \cdot f((1, v)) &= (1, af'(u^{-1})) \cdot (1, af'(v^{\epsilon_v})) = (0, \beta f'(uv^{\epsilon_v})) \\ f((1, v)) \cdot f((1, u)) &= (1, af'(v^{\epsilon_v})) \cdot (1, af'(u^{-1})) = (0, \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v})) \end{aligned}$$

Como f é half-isomorfismo, temos:

$$\begin{aligned} f((1, u) * (1, v)) &\in \{f((1, u)) \cdot f((1, v)), f((1, v)) \cdot f((1, u))\} \\ \Rightarrow (0, \beta f'(u^{-1}v)) &\in \{(0, \beta f'(uv^{\epsilon_v})), (0, \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v}))\} \\ \Rightarrow \beta f'(u^{-1}v) &\in \{\beta f'(uv^{\epsilon_v}), \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v})\} \\ \beta f' \text{ é bijeção} &\Rightarrow u^{-1}v \in \{uv^{\epsilon_v}, u^{-1}v^{-\epsilon_v}\} \end{aligned}$$

Note que se $\epsilon_v = 1$, então $u^{-1}v \in \{uv, u^{-1}v^{-1}\}$, o que contraria a equação 4.1. Logo $\epsilon_v = -1$, e assim $f((1, v)) = (1, af'(v^{-1}))$.

Portanto $f = f_{-a}$.

(ii) Caso 2: $f'\alpha = \beta f'J$.

Seja $u \in G$ tal que $u \neq u^{-1}$. Como $f((1, u)) = (1, af'(u^{\pm 1}))$, temos dois casos:

(ii.1) Suponha que $f((1, u)) = (1, af'(u))$.

Queremos mostrar que $f = f_{+a}$. Sabemos que $f((0, x)) = (0, f'(x)) = f_{+a}((0, x))$, para todo $x \in G$. Assim basta mostrarmos que:

$$f((1, v)) = (1, af'(v)), \text{ para todo } v \in G \setminus \{u\}$$

Temos mais dois casos:

(ii.1.1) Suponha que $v = v^{-1}$.

$$\text{Logo } f((1, v)) = (1, af'(v^{\pm 1})) = (1, af'(v)).$$

(ii.1.2) Suponha que $v \neq v^{-1}$.

Como u e v são diferentes dos seus inversos, segue que:

$$uv^{-1} \notin \{uv, u^{-1}v^{-1}\} \quad (4.2)$$

Temos que $f((1, v)) = (1, af'(v^{\epsilon_v}))$, com $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$. Queremos mostrar que $\epsilon_v = 1$.

$$\begin{aligned} f((1, u) * (1, v)) &= f((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \stackrel{f'\alpha = \beta f'J}{=} (0, \beta f'(uv^{-1})) \\ f((1, u)) \cdot f((1, v)) &= (1, af'(u)) \cdot (1, af'(v^{\epsilon_v})) = (0, \beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v})) \\ f((1, v)) \cdot f((1, u)) &= (1, af'(v^{\epsilon_v})) \cdot (1, af'(u)) = (0, \beta f'(uv^{-\epsilon_v})) \end{aligned}$$

Como f é half-isomorfismo, temos:

$$\begin{aligned}
f((1, u) * (1, v)) &\in \{f((1, u)) \cdot f((1, v)), f((1, v)) \cdot f((1, u))\} \\
\Rightarrow (0, \beta f'(uv^{-1})) &\in \{(0, \beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v})), (0, \beta f'(uv^{-\epsilon_v}))\} \\
\Rightarrow \beta f'(uv^{-1}) &\in \{\beta f'(u^{-1}v^{\epsilon_v}), \beta f'(uv^{-\epsilon_v})\} \\
\beta f' \text{ é bijeção} \Rightarrow uv^{-1} &\in \{u^{-1}v^{\epsilon_v}, uv^{-\epsilon_v}\}
\end{aligned}$$

Note que se $\epsilon_v = -1$, então $uv^{-1} \in \{uv, u^{-1}v^{-1}\}$, o que contraria a equação 4.2. Logo $\epsilon_v = 1$, e assim $f((1, v)) = (1, af'(v))$.

Portanto $f = f_{+a}$.

(ii.2) Suponha que $f((1, u)) = (1, af'(u^{-1}))$.

Queremos mostrar que $f = f_{-a}$. Sabemos que $f((0, x)) = (0, f'(x)) = f_{-a}((0, x))$, para todo $x \in G$. Assim basta mostrarmos que:

$$f((1, v)) = (1, af'(v^{-1})), \text{ para todo } v \in G \setminus \{u\}$$

Temos mais dois casos:

(ii.2.1) Suponha que $v = v^{-1}$.

$$\text{Logo } f((1, v)) = (1, af'(v^{\pm 1})) = (1, af'(v^{-1})).$$

(ii.2.2) Suponha que $v \neq v^{-1}$.

Como u e v são diferentes dos seus inversos, repare que a equação 4.2 continua válida.

Temos que $f((1, v)) = (1, af'(v^{\epsilon_v}))$, com $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$. Queremos mostrar que $\epsilon_v = -1$.

$$\begin{aligned}
f((1, u) * (1, v)) &= f((0, \alpha(u^{-1}v))) = (0, f'\alpha(u^{-1}v)) \stackrel{f'\alpha = \beta f'J}{=} (0, \beta f'(uv^{-1})) \\
f((1, u)) \cdot f((1, v)) &= (1, af'(u^{-1})) \cdot (1, af'(v^{\epsilon_v})) = (0, \beta f'(uv^{\epsilon_v})) \\
f((1, v)) \cdot f((1, u)) &= (1, af'(v^{\epsilon_v})) \cdot (1, af'(u^{-1})) = (0, \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v}))
\end{aligned}$$

Como f é half-isomorfismo, temos:

$$\begin{aligned}
f((1, u) * (1, v)) &\in \{f((1, u)) \cdot f((1, v)), f((1, v)) \cdot f((1, u))\} \\
\Rightarrow (0, \beta f'(uv^{-1})) &\in \{(0, \beta f'(uv^{\epsilon_v})), (0, \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v}))\} \\
\Rightarrow \beta f'(uv^{-1}) &\in \{\beta f'(uv^{\epsilon_v}), \beta f'(u^{-1}v^{-\epsilon_v})\} \\
\beta f' \text{ é bijeção} \Rightarrow uv^{-1} &\in \{uv^{\epsilon_v}, u^{-1}v^{-\epsilon_v}\}
\end{aligned}$$

Note que se $\epsilon_v = 1$, então $uv^{-1} \in \{uv, u^{-1}v^{-1}\}$, o que contraria a equação 4.2. Logo $\epsilon_v = -1$, e assim $f((1, v)) = (1, af'(v^{-1}))$.

Portanto $f = f_{-a}$. ■

O próximo teorema nos dá uma caracterização dos half-isomorfismos não triviais entre L_α e L_β .

Teorema 4.2.10. *São equivalentes:*

- a) $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ é um half-isomorfismo não trivial.
b) f pertence a $\{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$, com $f' : G \rightarrow G$ automorfismo e $f'\alpha = \beta f'J$.

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a) Segue da proposição 4.2.6.

(a) $\Rightarrow$ (b) Pela proposição 4.2.8 temos que $f'\alpha \in \{\beta f', \beta f'J\}$. Logo, da proposição 4.2.9 segue que $f \in \{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$. Desta forma, por f ser um half-isomorfismo não trivial, da proposição 4.2.6 temos que $f'\alpha = \beta f'J$. ■

Para ϕ pertencente a $Aut(G)$, o centralizador e a classe de conjugação de ϕ em $Aut(G)$ são definidos respectivamente por:

$$C_{Aut(G)}(\phi) = \{\psi \in Aut(G) \mid \phi\psi = \psi\phi\}$$

$$Cl(\phi) = \{\psi\phi\psi^{-1} \mid \psi \in Aut(G)\}$$

Corolário 4.2.11. *Existe um half-isomorfismo não trivial entre L_α e L_β se, e somente se, βJ pertence a $Cl(\alpha)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Do Teorema 4.2.10 b), existe $f' : G \rightarrow G$ automorfismo tal que $f'\alpha = \beta f'J = \beta Jf'$. Logo $\beta J = f'\alpha f'^{-1} \in Cl(\alpha)$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, existe $f' \in Aut(G)$ tal que $\beta J = f'\alpha f'^{-1}$, logo $f'\alpha = \beta f'J$. Assim pelo Teorema 4.2.10, segue que para todo $f \in \{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$, $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ é um half-isomorfismo não trivial. ■

Sejam L e L' loops. Seguindo as definições da seção 3.3, vamos definir os conjuntos abaixo:

$$\begin{aligned} Half(L, L') &:= \{f : L \rightarrow L' \mid f \text{ é half-isomorfismo}\} \\ Half_T(L, L') &:= \{f : L \rightarrow L' \mid f \text{ é half-isomorfismo trivial}\} \\ Half_N(L, L') &:= \{f : L \rightarrow L' \mid f \text{ é half-isomorfismo não trivial}\} \end{aligned}$$

Note que $Half(L, L') = Half_T(L, L') \cup Half_N(L, L')$, onde a união é disjunta.

Corolário 4.2.12. *Se $Half_N(L_\alpha, L_\beta)$ é não vazio, então:*

$$|Half_N(L_\alpha, L_\beta)| = 2|G||C_{Aut(G)}(\alpha)|$$

Demonstração. Do Teorema 4.2.10 segue que:

$$\begin{aligned} |Half_N(L_\alpha, L_\beta)| &= 2|G| \cdot \#\{f' : G \rightarrow G \mid f'\alpha = \beta f'J\} = \\ &= 2|G| \cdot \#\{f' \in Aut(G) \mid \beta J = f'\alpha f'^{-1}\} \stackrel{\beta J \in Cl(\alpha)}{=} 2|G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)| \end{aligned}$$

Observação 4.2.13. Na demonstração do corolário 4.2.12 podemos proceder de maneira análoga com a função βJ no lugar de αJ . Com isso, obtemos facilmente que $|Half_N(L_\alpha, L_\beta)| = 2|G||C_{Aut(G)}(\beta)|$ e também que $|C_{Aut(G)}(\alpha)| = |C_{Aut(G)}(\beta)|$.

Sabemos que se $\alpha = I_d$, onde I_d é a função identidade de $Aut(G)$, então L_{I_d} é o grupo diedral generalizado ($D_{2|G|}(G)$). E se $\beta = J$, então L_J é um loop automórfico não associativo. Como $J^2 = I_d$, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.2.14. *Existem half-isomorfismos não triviais entre L_{I_d} e L_J . Além disso:*

$$|Half_N(L_{I_d}, L_J)| = 2|G||Aut(G)|$$

A partir deste corolário, podemos construir infinitos exemplos de half-isomorfismos não triviais entre grupos e loops automórficos não associativos.

Exemplo 4.2.15. Considere $G = C_3 = \{1, 2, 3\}$, o grupo cíclico de ordem 3. Assim L_{I_d} é o grupo diedral de ordem 6 e L_J é o menor loop automórfico não associativo. Abaixo nós temos respectivamente as tabelas de Cayley de L_{I_d} e L_J :

*	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(0, 1)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(0, 2)	(0,2)	(0,3)	(0,1)	(1,3)	(1,1)	(1,2)
(0, 3)	(0,3)	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(1,1)
(1, 1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(0,1)	(0,2)	(0,3)
(1, 2)	(1,2)	(1,3)	(1,1)	(0,3)	(0,1)	(0,2)
(1, 3)	(1,3)	(1,1)	(1,2)	(0,2)	(0,3)	(0,1)

.	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(0, 1)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(1,1)	(1,2)	(1,3)
(0, 2)	(0,2)	(0,3)	(0,1)	(1,3)	(1,1)	(1,2)
(0, 3)	(0,3)	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(1,1)
(1, 1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(0,1)	(0,3)	(0,2)
(1, 2)	(1,2)	(1,3)	(1,1)	(0,2)	(0,1)	(0,3)
(1, 3)	(1,3)	(1,1)	(1,2)	(0,3)	(0,2)	(0,1)

O grupo G só tem dois automorfismos, as funções I_d e J . Assim, as expressões para os half-isomorfismos não triviais entre L_{I_d} e L_J escritos em forma de permutação são:

$$\begin{aligned}
I_{d-1} &= ((1, 2) (1, 3)) & I_{d+1} &= I \\
I_{d-2} &= ((1, 1) (1, 2)) & I_{d+2} &= ((1, 1) (1, 2) (1, 3)) \\
I_{d-3} &= ((1, 1) (1, 3)) & I_{d+3} &= ((1, 1) (1, 3) (1, 2)) \\
J_{-1} &= ((0, 2) (0, 3)) & J_{+1} &= ((0, 2) (0, 3))((1, 2) (1, 3)) \\
J_{-2} &= ((0, 2) (0, 3))((1, 1) (1, 2) (1, 3)) & J_{+2} &= ((0, 2) (0, 3))((1, 1) (1, 2)) \\
J_{-3} &= ((0, 2) (0, 3))((1, 1) (1, 3) (1, 2)) & J_{+3} &= ((0, 2) (0, 3))((1, 1) (1, 3))
\end{aligned}$$

onde $I : L_{I_d} \longrightarrow L_J$ é dada por $I(x) = x$.

Agora analisaremos os half-isomorfismos triviais entre L_α e L_β (lembrando que um half-isomorfismo é trivial se é um isomorfismo ou um anti-isomorfismo). O próximo teorema nos dá uma caracterização destes.

Teorema 4.2.16. *São equivalentes:*

- a) $f : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ é um half-isomorfismo trivial.
- b) f pertence a $\{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$, com $f' : G \rightarrow G$ automorfismo e $f'\alpha = \beta f'$.

Demonstração. (b) $\Rightarrow$ (a) Segue da proposição 4.2.6.

(a) $\Rightarrow$ (b) Pela proposição 4.2.8 temos que $f'\alpha \in \{\beta f', \beta f'J\}$. Logo, da proposição 4.2.9 segue que $f \in \{f_{-a}, f_{+a} \mid a \in G\}$. Desta forma, por f ser um half-isomorfismo trivial, da proposição 4.2.6 temos que $f'\alpha = \beta f'$. ■

Corolário 4.2.17. *São equivalentes:*

- a) Existe um half-isomorfismo trivial entre L_α e L_β .
- b) β pertence a $Cl(\alpha)$.
- c) L_α é isomorfo a L_β .

Demonstração. c) $\Rightarrow$ a) Direto.

a) $\Rightarrow$ b) Do Teorema 4.2.16 b), existe $f' : G \rightarrow G$ automorfismo tal que $f'\alpha = \beta f'$. Logo $\beta = f'\alpha f'^{-1} \in Cl(\alpha)$.

b) $\Rightarrow$ c) Por hipótese, existe $f' \in Aut(G)$ tal que $\beta = f'\alpha f'^{-1}$, logo $f'\alpha = \beta f'$. Assim pela proposição 4.2.6 segue que $f_{+a} : L_\alpha \rightarrow L_\beta$ é um isomorfismo para todo $a \in G$. ■

Corolário 4.2.18. *Se $Half_T(L_\alpha, L_\beta)$ é não vazio, então:*

$$|Half_T(L_\alpha, L_\beta)| = 2|G||C_{Aut(G)}(\alpha)|$$

Demonstração. Do Teorema 4.2.16 segue que:

$$\begin{aligned} |Half_T(L_\alpha, L_\beta)| &= 2 \cdot |G| \cdot \#\{f' : G \rightarrow G \mid f'\alpha = \beta f'\} = \\ &= 2 \cdot |G| \cdot \#\{f' \in Aut(G) \mid \beta = f'\alpha f'^{-1}\} \stackrel{\beta \in Cl(\alpha)}{=} 2 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)| \end{aligned}$$

Observação 4.2.19. Analogamente à observação 4.2.13, é fácil ver que nas condições do corolário 4.2.18 também podemos obter que $|Half_N(L_\alpha, L_\beta)| = 2|G||C_{Aut(G)}(\beta)|$ e que $|C_{Aut(G)}(\alpha)| = |C_{Aut(G)}(\beta)|$.

Como consequência dos corolários 4.2.11, 4.2.12, 4.2.17 e 4.2.18, obtemos a ordem de $Half(L_\alpha, L_\beta)$.

Corolário 4.2.20. *Com as mesmas notações anteriores, temos que:*

- a) Se β e βJ não pertencem a $Cl(\alpha)$, então $Half(L_\alpha, L_\beta) = \emptyset$
- b) Se β não pertence a $Cl(\alpha)$ e βJ pertence a $Cl(\alpha)$, então $|Half(L_\alpha, L_\beta)| = 2 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)|$
- c) Se β pertence a $Cl(\alpha)$ e βJ não pertence a $Cl(\alpha)$, então $|Half(L_\alpha, L_\beta)| = 2 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)|$
- d) Se β e βJ pertencem a $Cl(\alpha)$, então $|Half(L_\alpha, L_\beta)| = 4 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)|$

4.3 O grupo de half-automorfismos de L_α

Nesta seção vamos identificar e caracterizar o grupo de half-automorfismos dos loops automórficos diedrais. Lembrando que este grupo é formado por half-automorfismos triviais e não triviais, e que L_α denota o loop automórfico diedral $Dih(\alpha, G)$. Além disso, denotaremos a identidade de $Aut(G)$ por I' .

Primeiramente vamos definir os conceitos de produto semidireto entre grupos e o de grupo holomorfo para fixar a notação.

Sejam G e H grupos e $\varphi : G \rightarrow Aut(H)$ um homomorfismo, onde para a pertencente a G , denotamos por φ_a o automorfismo $\varphi(a)$ de H . O produto semidireto entre G e H é o grupo denotado por $G \ltimes^\varphi H$, formado pelo conjunto $G \times H$ com a operação $*$ dada por:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b\varphi_a(d))$$

O grupo holomorfo de um grupo G , denotado por $Hol(G)$, é o produto semidireto $Aut(G) \ltimes^\pi G$, onde π é a função identidade:

$$\begin{array}{ccc} \pi : & Aut(G) & \rightarrow & Aut(G) \\ & \phi & \mapsto & \phi \end{array}$$

Agora, como L_α é finito, do corolário 3.2.9 e da proposição 3.3.2 segue que $Half(L_\alpha)$ é grupo. Este grupo contém o grupo dos automorfismos de L_α , que foi caracterizado em quase todos os casos no artigo [AV16] através do resultado seguinte.

Proposição 4.3.1. ([AV16] Corollary 5.4) *Se α é diferente de I' ou se $\alpha = I'$ e G não tem período 2, então:*

$$Aut(L_\alpha) \cong C_{Aut(G)}(\alpha) \ltimes^\pi G$$

onde $C_{Aut(G)}(\alpha) \ltimes^\pi G$ é subgrupo de $Hol(G)$.

Considere agora o caso onde $\alpha = I'$ e G é grupo abeliano de período 2. Assim $G \cong \prod_{i=1}^m C_2$, onde $m \geq 1$. É fácil ver que L_α é um grupo abeliano de período 2, e desta forma $L_\alpha \cong \prod_{i=1}^{m+1} C_2$. Logo, não é difícil ver que neste caso:

$$Aut(L_\alpha) \cong GL(m+1, \mathbb{Z}_2)$$

onde $GL(m+1, \mathbb{Z}_2)$ é o grupo linear geral das matrizes quadradas invertíveis de tamanho $m+1$ com entradas em $\mathbb{Z}_2$.

No caso onde L_α é comutativo, todo half-automorfismo é um automorfismo, e assim $Half(L_\alpha) = Half_T(L_\alpha) = Aut(L_\alpha)$, sendo este último descrito pela proposição 4.3.1 e pela discussão acima. Assim, de agora em diante, L_α será não comutativo, ou equivalentemente, G não terá período 2.

Seguindo a notação da seção anterior, onde f' representa um automorfismo de G , vamos definir os seguintes conjuntos:

$$A = \{f' \in \text{Aut}(G) \mid \alpha = f'\alpha f'^{-1}\}$$

$$B = \{f' \in \text{Aut}(G) \mid \alpha J = f'\alpha f'^{-1}\}$$

Note que o conjunto A é igual à $C_{\text{Aut}(G)}(\alpha)$, o centralizador de α em $\text{Aut}(G)$, que é não vazio, pois contém a identidade I' de $\text{Aut}(G)$. Já o conjunto B é não vazio quando αJ pertence a $\text{Cl}(\alpha)$ (corolário 4.2.11). Além disso, estes conjuntos são disjuntos.

Para os conjuntos A e B temos também o resultado seguinte.

Lema 4.3.2. *Temos que:*

- a) Se f' pertence a A , então f'^{-1} pertence a A .
- b) Se f' pertence a B , então f'^{-1} pertence a B .
- c) Se f' pertence a A e g' pertence a A , então $f'g'$ pertence a A .
- d) Se f' pertence a A e g' pertence a B , então $f'g'$ pertence a B .
- e) Se f' pertence a B e g' pertence a A , então $f'g'$ pertence a B .
- f) Se f' pertence a B e g' pertence a B , então $f'g'$ pertence a A .

Demonstração. Os itens a) e c) seguem do fato de A ser subgrupo de $\text{Aut}(G)$. Desta forma, serão demonstrados apenas os item b) e d), pois as demonstrações de e) e f) são análogos à de d).

b) Seja $f' \in B$. Assim $f'\alpha f'^{-1} = \alpha J$, o que implica que $\alpha = f'^{-1}\alpha J f'$. Como $J \in \mathcal{Z}(\text{Aut}(G))$ e tem ordem 2, temos que $\alpha J = f'^{-1}\alpha f'$. Logo $f'^{-1} \in B$.

d) Sejam $f' \in A$ e $g' \in B$. Assim:

$$(f'g')\alpha(f'g')^{-1} = f'g'\alpha g'^{-1}f'^{-1} \stackrel{g' \in B}{=} f'\alpha J f'^{-1} \stackrel{J \in \mathcal{Z}(\text{Aut}(G))}{=} f'\alpha f'^{-1} J \stackrel{f' \in A}{=} \alpha J$$

■

Na seção anterior, para f' pertencente a $\text{Aut}(G)$, foram construídas extensões f_{+a} e f_{-a} (a pertencente a G) sobre o conjunto L_α . Agora denote por f_{+a}^* e f_{-a}^* estas extensões para o caso onde f' pertence a A , e denote por $f_{+a}^\bullet$ e $f_{-a}^\bullet$ estas extensões para o caso onde f' pertence a B . Com isto, dos teoremas 4.2.10 e 4.2.16 e da proposição 4.2.6 temos:

$$\text{Aut}(L_\alpha) = \{f_{+a}^* \mid f' \in A, a \in G\}$$

$$\text{Half}_T(L_\alpha) = \{f_{+a}^*, f_{-a}^* \mid f' \in A, a \in G\}$$

$$\text{Half}_N(L_\alpha) = \{f_{+a}^\bullet, f_{-a}^\bullet \mid f' \in B, a \in G\}$$

$$\text{Half}(L_\alpha) = \{f_{+a}^*, f_{-a}^*, g_{+a}^\bullet, g_{-a}^\bullet \mid f' \in A, g' \in B, a \in G\}$$

Denotando por $(fg)_{+a}^*$ e $(fg)_{-a}^*$ as extensões da função composta $f'g'$ pertencente a A , e $(fg)_{+a}^\bullet$ e $(fg)_{-a}^\bullet$ as extensões da função composta $f'g'$ pertencente a B , calcularemos a seguir os produtos dos elementos de $\text{Half}(L_\alpha)$.

Sejam f' e g' pertencentes a A e h' e k' pertencentes a B . Assim, para a, b e u pertencentes a G , e usando o lema 4.3.2, temos:

$$f_{+a}^* \circ g_{+b}^*((0, u)) = f_{+a}^*(g_{+b}^*((0, u))) = f_{+a}^*((0, u)) = (0, u)$$

$$f_{+a}^* \circ g_{+b}^*((1, u)) = f_{+a}^*(g_{+b}^*((1, u))) = f_{+a}^*((1, bg'(u))) = (1, af'(b)f'g'(u))$$

$$\Rightarrow f_{+a}^* \circ g_{+b}^* = (fg)_{+af'(b)}^*$$

$$f_{+a}^* \circ g_{-b}^*((0, u)) = f_{+a}^*(g_{-b}^*((0, u))) = f_{+a}^*((0, u)) = (0, u)$$

$$f_{+a}^* \circ g_{-b}^*((1, u)) = f_{+a}^*(g_{-b}^*((1, u))) = f_{+a}^*((1, bg'(u^{-1}))) = (1, af'(b)f'g'(u^{-1}))$$

$$\Rightarrow f_{+a}^* \circ g_{+b}^* = (fg)_{-af'(b)}^*$$

$$f_{+a}^* \circ k_{+b}^\bullet((0, u)) = f_{+a}^*(k_{+b}^\bullet((0, u))) = f_{+a}^*((0, u)) = (0, u)$$

$$f_{+a}^* \circ k_{+b}^\bullet((1, u)) = f_{+a}^*(k_{+b}^\bullet((1, u))) = f_{+a}^*((1, bk'(u))) = (1, af'(b)f'k'(u))$$

$$\Rightarrow f_{+a}^* \circ k_{+b}^\bullet = (fk)_{+af'(b)}^\bullet$$

$$f_{+a}^* \circ k_{-b}^\bullet((0, u)) = f_{+a}^*(k_{-b}^\bullet((0, u))) = f_{+a}^*((0, u)) = (0, u)$$

$$f_{+a}^* \circ k_{-b}^\bullet((1, u)) = f_{+a}^*(k_{-b}^\bullet((1, u))) = f_{+a}^*((1, bk'(u^{-1}))) = (1, af'(b)f'k'(u^{-1}))$$

$$\Rightarrow f_{+a}^* \circ k_{+b}^\bullet = (fk)_{-af'(b)}^\bullet$$

Fazendo as demais composições, obtemos a tabela a seguir, que representa os produtos em $Half(L_\alpha)$.

$\circ$	g_{+b}^*	g_{-b}^*	$k_{+b}^\bullet$	$k_{-b}^\bullet$
f_{+a}^*	$(fg)_{+af'(b)}^*$	$(fg)_{-af'(b)}^*$	$(fk)_{+af'(b)}^\bullet$	$(fk)_{-af'(b)}^\bullet$
f_{-a}^*	$(fg)_{-af'(b^{-1})}^*$	$(fg)_{+af'(b^{-1})}^*$	$(fk)_{-af'(b^{-1})}^\bullet$	$(fk)_{+af'(b^{-1})}^\bullet$
$h_{+a}^\bullet$	$(hg)_{+ah'(b)}^\bullet$	$(hg)_{-ah'(b)}^\bullet$	$(hk)_{+ah'(b)}^*$	$(hk)_{-ah'(b)}^*$
$h_{-a}^\bullet$	$(hg)_{-ah'(b^{-1})}^\bullet$	$(hg)_{+ah'(b^{-1})}^\bullet$	$(hk)_{-ah'(b^{-1})}^*$	$(hk)_{+ah'(b^{-1})}^*$

A partir desta tabela, vemos que I_{+e}^* é a identidade de $Half(L_\alpha)$, onde I' é a identidade de $Aut(G)$ e e é a identidade de G . Além disso, sendo f_{+x}^{-1*} e f_{-x}^{-1*} as extensões de f'^{-1} pertencente a A e $f_{+x}^{-1\bullet}$ e $f_{-x}^{-1\bullet}$ as extensões de f'^{-1} pertencente a B , podemos obter os inversos dos elementos de $Half(L_\alpha)$:

$$(f_{+a}^*)^{-1} = f_{+f'^{-1}(a^{-1})}^{-1*}, (f_{-a}^*)^{-1} = f_{-f'^{-1}(a)}^{-1*}, (f_{+a}^\bullet)^{-1} = f_{+f'^{-1}(a^{-1})}^{-1\bullet}, (f_{-a}^\bullet)^{-1} = f_{-f'^{-1}(a)}^{-1\bullet}$$

Agora defina a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : Aut(L_\alpha) &\rightarrow Aut(L_\alpha) \\ f_{+a}^* &\mapsto f_{+a^{-1}}^* \end{aligned}$$

É fácil ver que φ é uma bijeção. Além disso, para f_{+a}^* e g_{+b}^* pertencentes a $Aut(L_\alpha)$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(f_{+a}^* \circ g_{+b}^*) &= \varphi((fg)_{+af'(b)}^*) = (fg)_{+f'(b^{-1})a^{-1}}^* \stackrel{G \text{ comut.}}{=} (fg)_{+a^{-1}f'(b^{-1})}^* = f_{+a^{-1}}^* \circ g_{+b^{-1}}^* = \\ &= \varphi(f_{+a}^*) \circ \varphi(g_{+b}^*) \end{aligned}$$

Assim φ é um automorfismo.

Além disso, temos que φ tem ordem 2. Logo podemos definir o produto semidireto

$$C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} Aut(L_\alpha)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma : C_2 &\rightarrow Aut(Aut(L_\alpha)) \\ 1 &\mapsto I \\ 2 &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

sendo I a identidade de $\text{Aut}(\text{Aut}(L_\alpha))$. Com isso, a tabela de multiplicação desse produto semidireto é representada pela tabela seguinte.

$\begin{smallmatrix} \sigma \\ * \end{smallmatrix}$	$(0, g_{+b}^*)$	$(1, g_{+b}^*)$
$(0, f_{+a}^*)$	$(0, f_{+a}^* \circ g_{+b}^*)$	$(1, f_{+a}^* \circ g_{+b}^*)$
$(1, f_{+a}^*)$	$(1, f_{+a}^* \circ g_{+b-1}^*)$	$(0, f_{+a}^* \circ g_{+b-1}^*)$

Teorema 4.3.3. $\text{Half}_T(L_\alpha) \cong C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} \text{Aut}(L_\alpha) \cong C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} (C_{\text{Aut}(G)}(\alpha) \overset{\pi}{\ltimes} G)$

Demonstração. Defina a função:

$$\begin{aligned} \psi : \text{Half}_T(L_\alpha) &\rightarrow C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} \text{Aut}(L_\alpha) \\ f_{+a}^* &\mapsto (0, f_{+a}^*) \\ f_{-a}^* &\mapsto (1, f_{+a}^*) \end{aligned}$$

Claramente ψ é bijetora. Agora vamos mostrar que ψ é um homomorfismo. Para isso, analisaremos os quatro casos seguintes.

(i) Sejam $f_{+a}^*, g_{+b}^* \in \text{Half}_T(L_\alpha)$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi(f_{+a}^* \circ g_{+b}^*) &= \psi((fg)_{+af'(b)}^*) = (0, (fg)_{+af'(b)}^*) = (0, f_{+a}^* \circ g_{+b}^*) = (0, f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} (0, g_{+b}^*) = \\ &= \psi(f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} \psi(g_{+b}^*) \end{aligned}$$

(ii) Sejam $f_{+a}^*, g_{-b}^* \in \text{Half}_T(L_\alpha)$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi(f_{+a}^* \circ g_{-b}^*) &= \psi((fg)_{-af'(b)}^*) = (1, (fg)_{+af'(b)}^*) = (1, f_{+a}^* \circ g_{+b}^*) = (0, f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} (0, g_{+b}^*) = \\ &= \psi(f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} \psi(g_{+b}^*) \end{aligned}$$

(iii) Sejam $f_{-a}^*, g_{+b}^* \in \text{Half}_T(L_\alpha)$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi(f_{-a}^* \circ g_{+b}^*) &= \psi((fg)_{-af'(b-1)}^*) = (1, (fg)_{+af'(b-1)}^*) = (1, f_{+a}^* \circ g_{+b-1}^*) = (1, f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} (0, g_{+b}^*) = \\ &= \psi(f_{-a}^*) \overset{\sigma}{*} \psi(g_{+b}^*) \end{aligned}$$

(iv) Sejam $f_{-a}^*, g_{-b}^* \in \text{Half}_T(L_\alpha)$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi(f_{-a}^* \circ g_{-b}^*) &= \psi((fg)_{+af'(b-1)}^*) = (0, (fg)_{+af'(b-1)}^*) = (0, f_{+a}^* \circ g_{+b-1}^*) = (1, f_{+a}^*) \overset{\sigma}{*} (1, g_{+b}^*) = \\ &= \psi(f_{-a}^*) \overset{\sigma}{*} \psi(g_{-b}^*) \end{aligned}$$

Portanto ψ é isomorfismo. O restante do teorema segue da proposição 4.3.1. ■

Teorema 4.3.4. *Com as mesmas notações anteriores, valem:*

- a) Se αJ não pertence a $Cl(\alpha)$, então $\text{Half}(L_\alpha) = \text{Half}_T(L_\alpha) \cong C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} (C_{\text{Aut}(G)}(\alpha) \overset{\pi}{\ltimes} G)$
- b) Se αJ pertence a $Cl(\alpha)$, então $\text{Half}(L_\alpha) \cong C_2 \times \text{Half}_T(L_\alpha) \cong C_2 \times (C_2 \overset{\sigma}{\ltimes} (C_{\text{Aut}(G)}(\alpha) \overset{\pi}{\ltimes} G))$

Demonstração. a) Se $\alpha J \notin Cl(\alpha)$, do corolário 4.2.11 segue que $Half_N(L_\alpha)$ é um conjunto vazio, assim $Half(L_\alpha) = Half_T(L_\alpha)$, e o restante segue do teorema 4.3.3.

b) Defina a função:

$$\begin{aligned} \psi : Half(L_\alpha) &\rightarrow C_2 \times Half_T(L_\alpha) \\ f_{+a}^* &\mapsto (0, f_{+a}^*) \\ f_{-a}^* &\mapsto (0, f_{-a}^*) \\ f_{+a}^\bullet &\mapsto (1, f_{+a}^*) \\ f_{-a}^\bullet &\mapsto (1, f_{-a}^*) \end{aligned}$$

Claramente ψ é bijetora. Agora vamos mostrar que ψ é um homomorfismo. Para isso, analisaremos os dezesseis casos de produtos de $C_2 \times Half_T(L_\alpha)$.

Primeiro, a partir da tabela que representa os produtos em $Half(L_\alpha)$, obtemos a seguinte tabela para $Half_T(L_\alpha)$:

$\circ$	g_{+b}^*	g_{-b}^*
f_{+a}^*	$(fg)_{+af'(b)}^*$	$(fg)_{-af'(b)}^*$
f_{-a}^*	$(fg)_{-af'(b^{-1})}^*$	$(fg)_{+af'(b^{-1})}^*$

Agora, sejam $f_{+a}^*, f_{-a}^*, g_{+b}^*, g_{-b}^*, h_{+a}^*, h_{-a}^*, k_{+b}^*, k_{-b}^* \in Half_T(L_\alpha)$. Assim a tabela que representa o produto em $C_2 \times Half_T(L_\alpha)$ é dada por:

$\cdot$	$(0, g_{+b}^*)$	$(0, g_{-b}^*)$	$(1, k_{+b}^*)$	$(1, k_{-b}^*)$
$(0, f_{+a}^*)$	$(0, (fg)_{+af'(b)}^*)$	$(0, (fg)_{-af'(b)}^*)$	$(1, (fk)_{+af'(b)}^*)$	$(1, (fk)_{-af'(b)}^*)$
$(0, f_{-a}^*)$	$(0, (fg)_{-af'(b^{-1})}^*)$	$(0, (fg)_{+af'(b^{-1})}^*)$	$(1, (fk)_{-af'(b^{-1})}^*)$	$(1, (fk)_{+af'(b^{-1})}^*)$
$(1, h_{+a}^*)$	$(1, (hg)_{+ah'(b)}^*)$	$(1, (hg)_{-ah'(b)}^*)$	$(0, (hk)_{+ah'(b)}^*)$	$(0, (hk)_{-ah'(b)}^*)$
$(1, h_{-a}^*)$	$(1, (hg)_{-ah'(b^{-1})}^*)$	$(1, (hg)_{+ah'(b^{-1})}^*)$	$(0, (hk)_{-ah'(b^{-1})}^*)$	$(0, (hk)_{+ah'(b^{-1})}^*)$

Comparando-se a tabela acima com a tabela que representa os produtos em $Half(L_\alpha)$, vemos que ψ é um isomorfismo. O restante segue do teorema 4.3.3. ■

Terminaremos essa seção com um exemplo. Construiremos um loop L_α onde $Half(L_\alpha)$ é diferente de $Half_T(L_\alpha)$, ou seja, o grupo abeliano G é tal que seu período é diferente de 2 e existe α pertencente a $Aut(G)$ tal que αJ pertence a $Cl(\alpha)$. Caso o grupo $Aut(G)$ seja abeliano, então não existe α pertencente a $Aut(G)$ tal que αJ pertence a $Cl(\alpha)$. Como o grupo de automorfismos de um grupo cíclico sempre é abeliano, então o grupo de menor ordem candidato a este exemplo é o grupo $G = C_4 \times C_2$.

Exemplo 4.3.5. Seja $G = C_4 \times C_2$, e considere sua tabela de multiplicação:

*	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	5	6	7	1	8	3
3	3	5	1	7	2	8	4	6
4	4	6	7	1	8	2	3	5
5	5	7	2	8	4	3	6	1
6	6	1	8	2	3	4	5	7
7	7	8	4	3	6	5	1	2
8	8	3	6	5	1	7	2	4

É um fato bem conhecido que seu grupo de automorfismos tem ordem 8 e tem a seguinte apresentação em termos de permutações:

$$Aut(G) = \{I', (3\ 7)(5\ 8), (2\ 5)(6\ 8), (2\ 5\ 6\ 8)(3\ 7), (2\ 6)(5\ 8), (2\ 6)(3\ 7), (2\ 8)(5\ 6), (2\ 8\ 6\ 5)(3\ 7)\}$$

Note que $Aut(G)$ é isomorfo ao grupo diedral de ordem 8 e que a função J é a permutação $(2\ 6)(5\ 8)$.

Seja $\alpha = (3\ 7)(5\ 8)$. Assim, sendo $f' = (2\ 5)(6\ 8)$, temos que $\alpha J = f' \alpha f'^{-1}$. Além disso, os conjuntos A e B são dados por:

$$\begin{aligned} A &= \{I', (3\ 7)(5\ 8), (2\ 6)(5\ 8), (2\ 6)(3\ 7)\} \\ B &= \{(2\ 5)(6\ 8), (2\ 5\ 6\ 8)(3\ 7), (2\ 8)(5\ 6), (2\ 8\ 6\ 5)(3\ 7)\} \end{aligned}$$

Com isso, $|C_{Aut(G)}(\alpha)| = |A| = 4$ e, para o A -loop $L_\alpha = Dih(C_4 \times C_2, (3\ 7)(5\ 8))$, temos:

$$\begin{aligned} |Half(L_\alpha)| &= 4 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)| = 128 \\ |Half_T(L_\alpha)| &= 2 \cdot |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)| = 64 \\ |Aut(L_\alpha)| &= |G| \cdot |C_{Aut(G)}(\alpha)| = 32 \end{aligned}$$

Agora vamos exibir exemplos de half-automorfismos. Sejam os elementos $f' = (2\ 6)(3\ 7)$ pertencente a A e $g' = (2\ 8)(5\ 6)$ pertencente a B . Assim a extensão f_{+1}^* é um automorfismo, a extensão f_{-1}^* é um anti-automorfismo e a extensão $g_{+1}^\bullet$ é um half-automorfismo não trivial de L_α . Suas expressões em termos de permutações são:

$$\begin{aligned} f_{+1}^* &= ((0, 2) (0, 6))((0, 3) (0, 7))((1, 2) (1, 6))((1, 3) (1, 7)) \\ f_{-1}^* &= ((0, 2) (0, 6))((0, 3) (0, 7))((1, 3) (1, 7))((1, 5) (1, 8)) \\ g_{+1}^\bullet &= ((0, 2) (0, 8))((0, 5) (0, 6))((1, 2) (1, 8))((1, 5) (1, 6)) \end{aligned}$$

Capítulo 5

Half-automorfismos de loops automórficos de Lie

Em [Wri69] C.R.B. Wright obteve um loop a partir de uma álgebra definindo uma nova operação entre seus elementos. Ele considerou $(A, +, \cdot)$ uma álgebra, e definiu uma operação $*$ da seguinte forma: $a * b = a + b - a \cdot b$. Seguindo a construção de Wright, M.K. Kinyon, K. Kunen, J.D. Phillips e P. Vojtěchovský [KKPV16] construíram uma classe de A -loops a partir de anéis de Lie. Aqui denominamos esta classe de *loop automórfico de Lie*. Em [GA17] os autores M.L. Merlini Giuliani e G.S. Anjos obtiveram o grupo de automorfismos de uma classe destes loops de ordem ímpar da forma n^3 . Neste capítulo estudamos a existência de half-automorfismos não triviais em loops automórficos de Lie. Introduzimos os conceitos necessários para provar o resultado principal: em loops automórficos de Lie de ordem ímpar, todo half-automorfismo é trivial.

5.1 Loop automórfico de Lie

Definição 5.1.1. Uma tripla ordenada $(Q, +, [\cdot, \cdot])$, onde Q é um conjunto não vazio e $+$ e $[\cdot, \cdot]$ são operações binárias definidas em Q , é um anel de Lie se para todo x, y, z e w pertencentes a Q temos:

- a) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- b) $x + y = y + x$,
- c) Existe 0 pertencente a Q tal que $0 + a = a$, para todo a pertencente a Q ,
- d) Para todo a pertencente a Q , existe $-a$ pertencente a Q tal que $a + (-a) = 0$,
- e) $[x + y, z + w] = [x, z] + [x, w] + [y, z] + [y, w]$,
- f) $[x, x] = 0$,
- g) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Identidade de Jacobi).

Observe que num anel de Lie $(Q, +, [\cdot, \cdot])$, o par ordenado $(Q, +)$ é um grupo abeliano com elemento identidade 0 . Além disso, para x e y pertencentes a Q , usando e) e f) temos:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

Assim em anéis de Lie é válida a seguinte relação, chamada de propriedade anti-simétrica:

$$[x, y] = -[y, x], \text{ para todo } x, y \in Q \quad (5.1)$$

Outras propriedades básicas válidas para anéis de Lie são:

- (i) O elemento 0 é único;
- (ii) $[0, x] = [x, 0] = 0$, para todo x pertencente a Q .

Definição 5.1.2. Dizemos que um subconjunto não vazio H de um anel de Lie $(Q, +, [., .])$ é um subanel de Lie se, para todo x e y pertencentes a H , temos que $x - y$ e $[x, y]$ pertencem a H .

Agora, seja $(Q, +, [., .])$ um anel de Lie. Defina $*$ em Q por:

$$x * y = x + y - [x, y]$$

Sejam as seguintes condições sobre $(Q, +, [., .])$:

$$\text{As aplicações } y \mapsto y + [y, x] \text{ são invertíveis para todo } x \text{ pertencente a } Q; \quad (5.2)$$

$$[[Q, x], [Q, x]] = 0 \text{ para todo } x \text{ pertencente a } Q; \quad (5.3)$$

$$[[x, y], [z, w]] = 0 \text{ para todo } x, y, z \text{ e } w \text{ pertencentes a } Q; \quad (5.4)$$

Note que a condição 5.4 implica a condição 5.3. O contrário não necessariamente é válido.

As três proposições seguintes podem ser encontradas em [KKPV16]:

Proposição 5.1.3. (Lema 5.1) $(Q, *)$ é loop com elemento identidade 0 se, e somente se, o anel de Lie $(Q, +, [., .])$ satisfaz 5.2.

Proposição 5.1.4. (Prop. 5.2) Seja $(Q, +, [., .])$ um anel de Lie satisfazendo 5.2 e 5.3. Então $(Q, *)$ é A-loop e:

$$C(Q) = \{a \in Q \mid 2[a, x] = 0 \ \forall x \in Q\} \quad (5.5)$$

$$N_\lambda(Q) = \{a \in Q \mid [x, [y, a]] = 0 \ \forall x, y \in Q\} \quad (5.6)$$

$$N_\mu(Q) = \{a \in Q \mid [a, [x, y]] = 0 \ \forall x, y \in Q\} \quad (5.7)$$

Em particular, $(Q, *)$ é grupo se, e somente se, $[[x, y], z] = 0$ para todo x, y e z pertencentes a Q .

Chamaremos os A-loops do tipo $(Q, *)$ de loops automórficos de Lie.

Proposição 5.1.5. (Lema 5.8) Seja $(Q, +, [., .])$ um anel de Lie de ordem de ímpar. Então Q satisfaz 5.3 se, e somente se, satisfaz 5.4.

Pela proposição 5.1.4 temos que se um anel de Lie Q satisfaz 5.2 e 5.3 e é de característica 2, então $C(Q) = Q$, implicando que $(Q, *)$ é A-loop comutativo.

Se um anel de Lie $(Q, +, [., .])$ é de ordem ímpar, por $(Q, +)$ ser grupo abeliano segue que ele não contém nenhum elemento de ordem par. Logo, a seguinte relação é válida:

$$2x = 0 \iff x = 0 \quad (5.8)$$

Esta relação será útil para provar alguns itens da proposição a seguir e no decorrer do capítulo.

Proposição 5.1.6. *Sejam $(Q, +, [\cdot, \cdot])$ um anel de Lie de ordem ímpar satisfazendo 5.2 e 5.3. Então em $(Q, *)$ as seguintes relações são válidas, para todo x, y e z pertencentes a Q e para todo n pertencente a $N_\mu(Q)$:*

- a) $x * y = y * x$ se, e somente se, $[x, y] = 0$.
- b) $x * (x * y) = (y * x) * x$ se, e somente se, $x * y = y * x$.
- c) $x * (y * n) = y * (x * n)$ se, e somente se, $x * y = y * x$.
- d) $(n * y) * x = y * (x * n)$ se, e somente se, $[n, x + y] = 0$.
- e) $(n * x) * (n * y) = (n * y) * (n * x)$ se, e somente se, $(x * n) * (y * n) = (y * n) * (x * n)$, e estas duas equações são válidas se, e somente se, $x * (n * y) = y * (n * x)$.
- f) $x * (y * z) = (x * y) * z$ se, e somente se, $[y, [z, x]] = 0$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in Q$ e $n \in N_\mu(Q)$.

- a) Calculando $x * y$ e $y * x$, obtemos:

$$x * y = x + y - [x, y]$$

$$y * x = y + x - [y, x] = x + y + [x, y]$$

Assim:

$$x * y = y * x \iff 2[x, y] = 0$$

Logo, da expressão 5.8 segue que $x * y = y * x$ se, e somente se, $[x, y] = 0$.

- b) Calculando $x * (x * y)$ e $(y * x) * x$, obtemos:

$$\begin{aligned} x * (x * y) &= x * (x + y - [x, y]) \\ &= 2x + y - [x, y] - [x, x + y - [x, y]] \\ &= 2x + y - 2[x, y] + [x, [x, y]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y * x) * x &= (y + x - [y, x]) * x \\ &= 2x + y - [y, x] - [y + x - [y, x], x] \\ &= 2x + y + 2[x, y] + [x, [x, y]] \end{aligned}$$

Desta forma:

$$x * (x * y) = (y * x) * x \iff 4[x, y] = 0$$

Com isso, usando o item a) e a expressão 5.8 temos que $x * (x * y) = (y * x) * x$ se, e somente se $x * y = y * x$.

- c) Da identidade de Jacobi, temos que:

$$[x, [y, n]] + [y, [n, x]] + [n, [x, y]] = 0$$

Como n está no núcleo central, da expressão 5.7 temos que $[n, [x, y]] = 0$. Assim:

$$[x, [y, n]] + [y, [n, x]] = 0 \tag{5.9}$$

Agora, calculando $x * (y * n)$ e $y * (x * n)$, obtemos:

$$\begin{aligned} x * (y * n) &= x * (y + n - [y, n]) \\ &= x + y + n - [y, n] - [x, y + n - [y, n]] \\ &= x + y + n - [y, n] - [x, y] - [x, n] + [x, [y, n]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y * (x * n) &= y * (x + n - [x, n]) \\
&= x + y + n - [x, n] - [y, x + n - [x, n]] \\
&= x + y + n - [x, n] - [y, x] - [y, n] + [y, [x, n]]
\end{aligned}$$

Da equação 5.9 segue que $[x, [y, n]] = [y, [x, n]]$. Assim:

$$x * (y * n) = y * (x * n) \iff 2[x, y] = 0$$

Logo, usando o item a) e a expressão 5.8 temos que $x * (y * n) = y * (x * n)$ se, e somente se $x * y = y * x$.

d) Calculando $(n * y) * x$ e $y * (x * n)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(n * y) * x &= (n + y - [n, y]) * x \\
&= n + x + y - [n, y] - [n + y - [n, y], x] \\
&= n + x + y - [n, y] - [n, x] - [y, x] + [[n, y], x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y * (x * n) &= y * (x + n - [x, n]) \\
&= n + x + y - [x, n] - [y, x + n - [x, n]] \\
&= n + x + y - [x, n] - [y, x] - [y, n] + [y, [x, n]]
\end{aligned}$$

Desta forma:

$$(n * y) * x = y * (x * n) \iff -[n, x + y] + [[n, y], x] = [n, x + y] + [y, [x, n]]$$

Rearranjando os termos da equação da direita, temos:

$$(n * y) * x = y * (x * n) \iff 2[n, x + y] = [y, [n, x]] + [x, [y, n]]$$

Da equação 5.9 segue que $2[n, x + y] = 0$. Assim, usando a expressão 5.8 obtemos que $(n * y) * x = y * (x * n)$ se, e somente se, $[n, x + y] = 0$.

e) Calculando $x * (n * y)$ e $y * (n * x)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
x * (n * y) &= x * (n + y - [n, y]) \\
&= x + n + y - [n, y] - [x, n + y - [n, y]] \\
&= x + n + y - [n, y] - [x, n] - [x, y] + [x, [n, y]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y * (n * x) &= y * (n + x - [n, x]) \\
&= x + n + y - [n, x] - [y, n + x - [n, x]] \\
&= x + n + y - [n, x] - [y, n] - [y, x] + [y, [n, x]]
\end{aligned}$$

Assim:

$$x * (n * y) = y * (n * x) \iff [n, x - y] - [x, y] + [x, [n, y]] = -[n, x - y] - [y, x] + [y, [n, x]]$$

Rearranjando os termos da equação da direita, temos:

$$x * (n * y) = y * (n * x) \iff 2[n, x - y] - 2[x, y] = [x, [y, n]] + [y, [n, x]]$$

Da equação 5.9 segue que $2[n, x - y] - 2[x, y] = 0$. Assim, usando a expressão 5.8 obtemos:

$$x * (n * y) = y * (n * x) \iff [n, x - y] = [x, y] \quad (5.10)$$

Agora, de a) temos:

$$\begin{aligned}
(n * x) * (n * y) &= (n * y) * (n * x) <=> [n * x, n * y] = 0 \\
(x * n) * (y * n) &= (y * n) * (x * n) <=> [x * n, y * n] = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Calculando $[n * x, n * y]$ e $[x * n, y * n]$ obtemos:

$$\begin{aligned}
[n * x, n * y] &= [n + x - [n, x], n + y - [n, y]] \\
&= [n, y] + [x, n] + [x, y] - [x, [n, y]] - [[n, x], y] + [[n, x], [n, y]] \\
&= [x, y] - [n, x - y] + ([x, [y, n]] + [y, [n, x]]) + [[n, x], [n, y]] \\
[x * n, y * n] &= [x + n - [x, n], y + n - [y, n]] \\
&= [x, y] + [x, n] + [n, y] - [x, [y, n]] - [[x, n], y] + [[x, n], [y, n]] \\
&= [x, y] - [n, x - y] - ([x, [y, n]] + [y, [n, x]]) + [[x, n], [y, n]]
\end{aligned}$$

Como Q satisfaz 5.3, temos que $[[n, x], [n, y]]$ e $[[x, n], [y, n]]$ são nulos. Além disso, da equação 5.9 segue que $[x, [y, n]] + [y, [n, x]] = 0$. Logo:

$$[n * x, n * y] = [x, y] - [n, x - y]$$

$$[x * n, y * n] = [x, y] - [n, x - y]$$

Assim, das equações 5.11 temos:

$$\begin{aligned}
(n * x) * (n * y) &= (n * y) * (n * x) <=> [n, x - y] = [x, y] \\
(x * n) * (y * n) &= (y * n) * (x * n) <=> [n, x - y] = [x, y]
\end{aligned}$$

Logo, $(n * x) * (n * y) = (n * y) * (n * x)$ se, e somente se, $(x * n) * (y * n) = (y * n) * (x * n)$, e da equação 5.10 segue que estas equações são equivalentes à $x * (n * y) = y * (n * x)$.

f) Calculando $x * (y * z)$ e $(x * y) * z$, obtemos:

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * (y + z - [y, z]) \\
&= x + y + z - [x, y] - [x, z] - [y, z] + [x, [y, z]] \\
(x * y) * z &= (x + y - [x, y]) * z \\
&= x + y + z - [x, y] - [x, z] - [y, z] + [[x, y], z]
\end{aligned}$$

Assim:

$$x * (y * z) = (x * y) * z <=> [x, [y, z]] = [[x, y], z]$$

Rearranjando os termos da equação da direita, temos:

$$x * (y * z) = (x * y) * z <=> [x, [y, z]] + [z, [x, y]] = 0$$

Logo, utilizando a identidade de Jacobi, obtemos que $x * (y * z) = (x * y) * z$ se, e somente se, $[y, [z, x]] = 0$. ■

Os resultados da proposição 5.1.6 serão importantes nas demonstrações no decorrer do capítulo. Além disso sabemos que se $(Q, *)$ é um loop associativo, então todo half-automorfismo é trivial, portanto excluiremos este caso da nossa análise. Assim, de agora em diante considere o anel de Lie $(Q, +, [, .])$ finito de ordem ímpar, que satisfaça as condições 5.2 e 5.3 (e por consequência 5.4) e que seja tal que $(Q, *)$ é não associativo.

Primeiramente daremos um exemplo de um anel de Lie nestas condições. Tal exemplo foi estudado com mais detalhes em [GA17].

Exemplo 5.1.7. Seja $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$. Defina o conjunto $P(\mathbb{Z}_n)$ por:

$$P(\mathbb{Z}_n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_n \right\}$$

É fácil ver que $P(\mathbb{Z}_n)$ é fechado para somas e subtrações usuais em matrizes. O colchete usual de matrizes, $[x, y] = xy - yx$, é dado por:

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 \\ -b' & c' & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & bc' - b'c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ba' + b'a & 0 \end{bmatrix}$$

Assim $P(\mathbb{Z}_n)$ é subanel de Lie do anel de Lie das matrizes de traço zero, cuja expressão é a seguinte:

$$SL(3, \mathbb{Z}_n) = \{A \in M(3, \mathbb{Z}_n) \mid \text{tr}(A) = 0\}$$

Da expressão para o colchete dada anteriormente segue também que $P(\mathbb{Z}_n)$ satisfaz a condição 5.4.

Pela definição da operação $*$, temos que o produto em $P(\mathbb{Z}_n)$ é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & c & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 \\ -b' & c' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a + a' - bc' + b'c & b + b' \\ 0 & 0 & 0 \\ -b - b' & c + c' + ba' - b'a & 0 \end{bmatrix}$$

No caso onde $n = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$ com p_i primo satisfazendo $p_i \equiv 3 \pmod{4}$ para $i = 1, \dots, m$ e $m > 0$, foi provado em [GA17] que $P(\mathbb{Z}_n)$ satisfaz a condição 5.2. Assim temos que $P(\mathbb{Z}_n)$ é um A -loop de ordem ímpar n^3 . Além disso, para os mesmos valores de n , foi mostrado em [GA17] que o núcleo $N(P(\mathbb{Z}_n))$ contém apenas o elemento identidade, implicando que $P(\mathbb{Z}_n)$ é não associativo.

Agora voltemos à análise de $(Q, *)$.

Proposição 5.1.8. $(Q, *)$ é não comutativo.

Demonstração. Como $(Q, *)$ é não associativo, então da proposição 5.1.6 f), existem $x, y, z \in Q$, tais que $[x, [y, z]] \neq 0$. Assim, da proposição 5.1.6 a) segue que x e $[y, z]$ não comutam. ■

Para x e y pertencentes a Q , defina os comutadores à esquerda e à direita de x e y em Q , denotados respectivamente por $(x, y)_L$ e $(x, y)_R$, pelas seguintes expressões:

$$x * y = (y * x) * (x, y)_R \quad x * y = (x, y)_L * (y * x) \quad (5.12)$$

Defina os seguintes conjuntos:

$$(Q, Q)_R = \{(x, y)_R \mid x, y \in Q\} \quad (Q, Q)_L = \{(x, y)_L \mid x, y \in Q\}$$

Cabe observar aqui que como $(Q, *)$ é não comutativo, então os conjuntos $(Q, Q)_L$ e $(Q, Q)_R$ não são iguais à $\{0\}$.

Proposição 5.1.9. *Seja $H = \langle (Q, Q)_R \rangle$. Então:*

- a) H é subloop característico de Q .
- b) H é subloop normal de Q .
- c) H contém $(Q, Q)_L$.

Demonstração. a) Fixado $\varphi \in \text{Aut}(Q)$, sejam $x, y \in Q$. Assim $x * y = (y * x) * (x, y)_R$ e temos:

$$\varphi(x) * \varphi(y) = (\varphi(y) * \varphi(x)) * \varphi((x, y)_R)$$

Logo $\varphi((x, y)_R) = (\varphi(x), \varphi(y))_R$. Desta forma, $\varphi((Q, Q)_R) \subseteq (Q, Q)_R$. Como Q é finito e φ é bijetora, temos que $(Q, Q)_R = \varphi((Q, Q)_R)$. Assim $(Q, Q)_R \subseteq \varphi(H)$. Como $\varphi(H)$ é subloop, segue que $H = \langle (Q, Q)_R \rangle \subseteq \varphi(H)$. Novamente do fato de Q ser finito e φ ser bijetora, temos que $\varphi(H) = H$. Portanto H é característico em Q .

b) Como H é característico, da proposição 2.5.3 segue que H é subloop normal de Q .

c) Fixados $x, y \in Q$, considere a classe lateral $H((x, y)_L * (y * x))$. Pela definição em 5.12 temos que:

$$H((x, y)_L * (y * x)) = H((y * x) * (x, y)_R)$$

Como H é subloop normal de Q , usando a propriedade de que $Hx = xH$ na equação da direita temos:

$$H((x, y)_L * (y * x)) = ((y * x) * (x, y)_R)H$$

Como H contém $(Q, Q)_R$, segue que $((y * x) * (x, y)_R)H = (y * x)H$. Assim usando novamente a propriedade de que $Hx = xH$ obtemos:

$$H((x, y)_L * (y * x)) = H(y * x)$$

Assim existe $h \in H$ tal que $(x, y)_L * (y * x) = h * (y * x)$. Logo $(x, y)_L \in H$. ■

Defina o seguinte conjunto:

$$[Q, Q] = \{[x, y] \mid x, y \in Q\}$$

Proposição 5.1.10. $N_\mu(Q)$ é subanel de Lie de Q . Além disso, $[Q, Q]$ está contido em $N_\mu(Q)$.

Demonstração. Relembramos que:

$$N_\mu(Q) = \{a \in Q \mid [a, [z, w]] = 0 \quad \forall z, w \in Q\}$$

Da equação 5.4 segue que $[[x, y], [z, w]] = 0$, para todo $x, y, z, w \in Q$. Assim, $[x, y] \in N_\mu(Q)$, para todo $x, y \in Q$. Logo $[Q, Q] \subseteq N_\mu(Q)$.

Agora fixados $x, y \in N_\mu(Q)$, para $z, w \in Q$, temos:

$$[x - y, [z, w]] = [x, [z, w]] - [y, [z, w]] = 0 - 0 = 0$$

Logo $x - y \in N_\mu(Q)$, e temos que $N_\mu(Q)$ é subanel de Lie de Q . ■

Seja S um subconjunto não vazio de Q e x pertencente a Q . Definimos o centralizador de S em Q , o centralizador de x em Q e o comutante de Q respectivamente por:

$$\begin{aligned} C_Q(S) &= \{y \in Q \mid y * s = s * y, \quad \forall s \in S\} \\ C_Q(x) &= \{y \in Q \mid x * y = y * x\} \\ C(Q) &= \{y \in Q \mid y * z = z * y \quad \forall z \in Q\} \end{aligned}$$

Em A -loops, os três conjuntos acima são sempre subloops (proposição 2.5.6). Para estes conjuntos, temos os resultados seguintes.

Proposição 5.1.11. *Com as mesmas notações anteriores, temos que:*

- a) H é subloop de $N_\mu(Q)$
- b) $N_\mu(Q) = C_Q(H) = C_Q((Q, Q)_R)$

Além disso, para todo x e y pertencentes a Q temos:

$$(x, y)_R = -2[x, y] + [x + y, (x, y)_R] \quad (5.13)$$

Demonstração. a) Fixados $x, y \in Q$, temos que $x * y = (y * x) * (x, y)_R$. Assim:

$$\begin{aligned} x + y - [x, y] &= x * y \\ &= (y * x) * (x, y)_R \\ &= (y + x - [y, x]) * (x, y)_R \\ &= x + y + [x, y] + (x, y)_R - [x + y, (x, y)_R] + [[y, x], (x, y)_R] \end{aligned}$$

Logo, $(x, y)_R = -2[x, y] + [x + y, (x, y)_R] - [[y, x], (x, y)_R]$.

Desta forma, da proposição 5.1.10, segue que $(x, y)_R \in N_\mu(Q)$. Como $H = \langle (Q, Q)_R \rangle$, segue que H é subloop de $N_\mu(Q)$ e assim fica provado a). Além disso, da expressão para $N_\mu(Q)$ dada em 5.7 segue que $[[y, x], (x, y)_R] = 0$. Com isso temos:

$$(x, y)_R = -2[x, y] + [x + y, (x, y)_R]$$

b) Vamos mostrar que $C_Q(H) = C_Q((Q, Q)_R) = N_\mu(Q)$. Como $(Q, Q)_R \subseteq H$, já temos que $C_Q(H) \subseteq C_Q((Q, Q)_R)$. Logo, temos dois casos:

(i) Vamos mostrar que $C_Q((Q, Q)_R) \subseteq N_\mu(Q)$.

Fixado $a \in C_Q((Q, Q)_R)$, sejam $x, y \in Q$. Como $a * (x, y)_R = (x, y)_R * a$, da proposição 5.1.6 a) temos que $[a, (x, y)_R] = 0$. Assim, usando a equação 5.13 temos:

$$[a, -2[x, y] + [x + y, (x, y)_R]] = 0$$

Logo $-2[a, [x, y]] + [a, [x + y, (x, y)_R]] = 0$. Com isso temos que:

$$2[a, [x, y]] = [a, [x + y, (x, y)_R]] \quad (5.14)$$

Usando a identidade de Jacobi temos:

$$[a, [x + y, (x, y)_R]] + [x + y, [(x, y)_R, a]] + [(x, y)_R, [a, x + y]] = 0$$

Usando a equação 5.14 segue que:

$$2[a, [x, y]] + [x + y, [(x, y)_R, a]] + [(x, y)_R, [a, x + y]] = 0$$

Como $[a, (x, y)_R] = 0$, temos que $[x + y, [(x, y)_R, a]] = 0$. Além disso, do fato de $(x, y)_R \in N_\mu(Q)$ temos que $[(x, y)_R, [a, x + y]] = 0$. Logo $2[a, [x, y]] = 0$. Como a ordem de Q é ímpar, da expressão 5.8 segue que $[a, [x, y]] = 0$.

Portanto $[a, [x, y]] = 0$ para todo $x, y \in Q$, e assim da expressão para $N_\mu(Q)$ dada em 5.7 segue que $C_Q((Q, Q)_R) \subseteq N_\mu(Q)$.

(ii) Vamos mostrar que $N_\mu(Q) \subseteq C_Q(H)$.

Como $N_\mu(Q)$ é grupo finito e H é subgrupo de $N_\mu(Q)$, basta mostrarmos que os elementos de $N_\mu(Q)$ comutam com os geradores de H . Fixado $a \in N_\mu(Q)$, para $(x, y)_R \in H$ usando a equação 5.13 temos:

$$\begin{aligned} [a, (x, y)_R] &= [a, -2[x, y] + [x + y, (x, y)_R]] \\ &= -2[a, [x, y]] + [a, [x + y, (x, y)_R]] \end{aligned}$$

Como $a \in N_\mu(Q)$, de 5.7 temos que $[a, [x, y]]$ e $[a, [x + y, (x, y)_R]]$ são nulos, logo $[a, (x, y)_R] = 0$. Assim da proposição 5.1.6 a) segue que $a \in C_Q(H)$. Desta forma, $N_\mu(Q) \subseteq C_Q(H)$.

Portanto $C_Q(H) = C_Q((Q, Q)_R) = N_\mu(Q)$. ■

Proposição 5.1.12. *Se x pertence a H , então $C_Q(x)$ é um subanel de Lie de Q que contém $[Q, Q]$.*

Demonstração. Fixado $x \in H$, como $N_\mu(Q) = C_Q(H)$, temos que $N_\mu(Q) \subseteq C_Q(x)$. Assim da proposição 5.1.10 segue que $[Q, Q] \subseteq C_Q(x)$.

Agora note que da proposição 5.1.6 a) temos:

$$C_Q(x) = \{y \in Q \mid [x, y] = 0\}$$

Assim, para $y, z \in C_Q(x)$ temos:

$$[y - z, x] = [y, x] - [z, x] = 0 - 0 = 0$$

Logo $y - z \in C_Q(x)$, e temos que $C_Q(x)$ é subanel de Lie de Q . ■

5.2 Half-Automorfismos de $(Q, *)$

Como Q é finito, do corolário 3.2.9 segue que todos os seus half-automorfismos são especiais. Assim, do teorema 3.2.7 e da proposição 3.2.10 a) segue o seguinte resultado:

Proposição 5.2.1. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Então*

- a) $\{f(x * y), f(y * x)\} = \{f(x) * f(y), f(y) * f(x)\}$, para todo x e y pertencentes a Q .
- b) Para todos x e y pertencentes a Q tais que $x * y = y * x$, temos $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$.
- c) Se M é subloop de Q , então $f(M)$ também é subloop de Q .

Dos itens a) e b) da proposição 5.2.1 decorre o resultado a seguir.

Corolário 5.2.2. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Então $x * y = y * x$ se, e somente se, $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$.*

Proposição 5.2.3. *Sejam $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo e $H = \langle (Q, Q)_R \rangle$. Então $f(H) = H$.*

Demonstração. Fixados $x, y \in Q$, vamos mostrar que $(f(x), f(y))_R \in f(H)$. Temos dois casos.

(i) Suponha que $f(x * y) = f(x) * f(y)$. Assim, da proposição 5.2.1, temos $f(y * x) = f(y) * f(x)$.

Como $x * y = (y * x) * (x, y)_R$, temos que $f(x * y) = f((y * x) * (x, y)_R)$. Logo:

$$f(x) * f(y) \in \{(f(y) * f(x)) * f((x, y)_R), f((x, y)_R) * (f(y) * f(x))\} \quad (5.15)$$

Como $f(x) * f(y) = (f(x), f(y))_L * (f(y) * f(x))$ e $f(x) * f(y) = (f(y) * f(x)) * (f(x), f(y))_R$, temos que $f((x, y)_R) \in \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Agora, como $x * y = (x, y)_L * (y * x)$, temos que $f(x * y) = f((x, y)_L * (y * x))$. Logo:

$$f(x) * f(y) \in \{f((x, y)_L) * (f(y) * f(x)), (f(y) * f(x)) * f((x, y)_L)\}$$

Desta forma, $f((x, y)_L) \in \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$. Logo:

$$\{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\} \subseteq \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$$

(i.1) Vamos mostrar que $\{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\} = \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Se $f((x, y)_L) \neq f((x, y)_R)$, obtemos que o conjunto $\{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\}$ possui dois elementos, o que implica que ele é igual ao conjunto $\{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Agora suponha que $f((x, y)_L) = f((x, y)_R)$. Como f é bijetora, temos que $(x, y)_L = (x, y)_R$. Desta forma, $(x, y)_L * (y * x) = (x, y)_R * (y * x)$, e temos que:

$$(y * x) * (x, y)_R = x * y = (x, y)_L * (y * x) = (x, y)_R * (y * x)$$

Assim do item b) da proposição 5.2.1 temos que $f((y * x)) * f((x, y)_R) = f((x, y)_R) * f((y * x))$. Logo:

$$(f(y) * f(x)) * f((x, y)_R) = f((x, y)_R) * (f(y) * f(x))$$

Com isso, da equação 5.15 segue que:

$$(f(y) * f(x)) * f((x, y)_R) = f((x, y)_R) * (f(y) * f(x)) = f(x) * f(y)$$

Desta forma, $(f(x), f(y))_L = (f(x), f(y))_R = f((x, y)_R)$, e temos que $\{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\} = \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Logo, $(f(x), f(y))_R \in \{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\}$. Como H contém $(x, y)_R$ e $(x, y)_L$ (proposição 5.1.9 c)), temos que $f(H)$ contém $\{f((x, y)_L), f((x, y)_R)\}$. Assim, $(f(x), f(y))_R \in f(H)$.

(ii) Suponha que $f(x * y) = f(y) * f(x)$. Assim, da proposição 5.2.1, temos $f(y * x) = f(x) * f(y)$.

Como $y * x = (x * y) * (y, x)_R$, temos que $f(y * x) = f((x * y) * (y, x)_R)$. Logo:

$$f(x) * f(y) \in \{(f(y) * f(x)) * f((y, x)_R), f((y, x)_R) * (f(y) * f(x))\} \quad (5.16)$$

Assim, $f((y, x)_R) \in \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Agora, como $y * x = (y, x)_L * (x * y)$, temos que $f(y * x) = f((y, x)_L * (x * y))$. Logo:

$$f(x) * f(y) \in \{f((y, x)_L) * (f(y) * f(x)), (f(y) * f(x)) * f((y, x)_L)\}$$

Desta forma, $f((y, x)_L) \in \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$. Logo:

$$\{f((y, x)_L), f((y, x)_R)\} \subseteq \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$$

(ii.1) Vamos mostrar que $\{f((y, x)_L), f((y, x)_R)\} = \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Se $f((y, x)_L) \neq f((y, x)_R)$, obtemos que o conjunto $\{f((y, x)_L), f((y, x)_R)\}$ possui dois elementos, o que implica que ele é igual ao conjunto $\{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Agora suponha que $f((y, x)_L) = f((y, x)_R)$. Como f é bijetora, segue que $(y, x)_L = (y, x)_R$. Logo:

$$(x * y) * (y, x)_R = y * x = (y, x)_L * (x * y) = (y, x)_R * (x * y)$$

Assim do item b) proposição 5.2.1 temos que $f((x * y)) * f((y, x)_R) = f((y, x)_R) * f((x * y))$. Logo:

$$(f(y) * f(x)) * f((y, x)_R) = f((y, x)_R) * (f(y) * f(x))$$

Com isso, da equação 5.16 segue que:

$$(f(y) * f(x)) * f((y, x)_R) = f((y, x)_R) * (f(y) * f(x)) = f(x) * f(y)$$

Desta forma, $(f(x), f(y))_L = (f(x), f(y))_R = f((y, x)_R)$, e temos que $\{f((y, x)_L), f((y, x)_R)\} = \{(f(x), f(y))_L, (f(x), f(y))_R\}$.

Logo, $(f(x), f(y))_R \in \{f((y, x)_L), f((y, x)_R)\} \subseteq f(H)$.

(iii) Portanto, temos que $(f(x), f(y))_R \in f(H)$, para todo $x, y \in Q$. Como f é bijetora, segue que $(Q, Q)_R \subseteq f(H)$. Pelo item c) da proposição 5.2.1 temos que $f(H)$ é subloop de Q , logo $H = \langle (Q, Q)_R \rangle$ está contido em $f(H)$. Assim, como Q é finito e f bijetora, segue que $f(H) = H$. ■

Proposição 5.2.4. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Então $f(N_\mu(Q)) = N_\mu(Q)$.*

Demonstração. Fixado $x \in N_\mu(Q)$, como $N_\mu(Q) = C_Q(H)$, então $x * h = h * x$ para todo h pertencente a H . Assim, do item b) da proposição 5.2.1 temos:

$$f(x) * f(h) = f(h) * f(x) \quad \forall h \in H$$

Como da proposição 5.2.3 temos que $f(H) = H$, segue que:

$$f(x) * h = h * f(x) \quad \forall h \in H$$

Logo $f(x) \in C_Q(H) = N_\mu(Q)$. Portanto $f(N_\mu(Q))$ está contido em $N_\mu(Q)$, e do fato de f ser bijetora e Q finito, temos a igualdade. ■

Em A -loops é válida a propriedade flexível, ou seja, $x * (y * x) = (x * y) * x$, para todo x e y pertencentes a Q . Para esta identidade, temos o resultado seguinte.

Proposição 5.2.5. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Então para todo x e y pertencentes a Q :*

$$f(x * y * x) = f(x) * f(y) * f(x)$$

Demonstração. Fixados $x, y \in Q$, temos dois casos:

(i) Suponha que $x*y = y*x$. Assim da proposição 5.2.1 segue que $f(x*y) = f(x)*f(y) = f(y)*f(x)$. Logo:

$$f((x*y)*x) \in \{f(x*y)*f(x), f(x)*f(x*y)\} = \{f(x)*f(y)*f(x)\}$$

(ii) Suponha que $x*y \neq y*x$. Assim, deste fato e do item b) da proposição 5.1.6 temos:

$$x * (x * y) \neq (y * x) * x \quad (5.17)$$

Do item b) da proposição 5.2.1, temos:

$$\begin{aligned} \{f(x * (x * y)), f((x * y) * x)\} &= \{f(x) * f(x * y), f(x * y) * f(x)\} \\ \{f((y * x) * x), f(x * (y * x))\} &= \{f(y * x) * f(x), f(x) * f(y * x)\} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Com isso, temos mais dois casos:

(ii.1) Suponha que $f(x*y) = f(x)*f(y)$. Assim de 5.18 temos:

$$\begin{aligned} \{f(x * (x * y)), f((x * y) * x)\} &= \{f(x) * (f(x) * f(y)), (f(x) * f(y)) * f(x)\} \\ \{f((y * x) * x), f(x * (y * x))\} &= \{(f(y) * f(x)) * f(x), f(x) * (f(y) * f(x))\} \end{aligned}$$

Logo, ou $f(x*y*x) = f(x)*f(y)*f(x)$ ou $f(x*(x*y)) = f(x)*f(y)*f(x) = f((y*x)*x)$. Se $f(x*(x*y)) = f(x)*f(y)*f(x) = f((y*x)*x)$, por f ser bijetora segue que $x*(x*y) = (y*x)*x$, o que contraria a expressão 5.17. Portanto $f(x*y*x) = f(x)*f(y)*f(x)$.

(ii.2) Suponha que $f(x*y) = f(y)*f(x)$. Assim de 5.18 temos:

$$\begin{aligned} \{f(x * (x * y)), f((x * y) * x)\} &= \{f(x) * (f(y) * f(x)), (f(y) * f(x)) * f(x)\} \\ \{f((y * x) * x), f(x * (y * x))\} &= \{(f(x) * f(y)) * f(x), f(x) * (f(x) * f(y))\} \end{aligned}$$

Desta forma, novamente obtemos que ou $f(x*y*x) = f(x)*f(y)*f(x)$ ou $f(x*(x*y)) = f(x)*f(y)*f(x) = f((y*x)*x)$. Logo, analogamente ao caso (ii.1), da expressão 5.17 segue que $f(x*y*x) = f(x)*f(y)*f(x)$. ■

Definição 5.2.6. ([GGRS16]) Sejam $(L, *)$ e $(L', \cdot)$ loops e $\varphi : L \rightarrow L'$ um half-isomorfismo. Para x, y e z pertencentes a L , a tripla (x, y, z) é chamada *tripla GG* de φ se:

- (i) $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \neq \varphi(y) \cdot \varphi(x)$
- (ii) $\varphi(x * z) = \varphi(z) \cdot \varphi(x) \neq \varphi(x) \cdot \varphi(z)$

Observação 5.2.7. No caso em que existe uma tripla GG de φ , o half-isomorfismo φ é não trivial.

Observação 5.2.8. No caso em que $L = L' = Q$ e existe (x, y, z) tripla GG de φ , da proposição 5.2.1 a) temos:

- (i) $\varphi(y * x) = \varphi(y) \cdot \varphi(x)$ e $x * y$ é diferente de $y * x$.
- (ii) $\varphi(z * x) = \varphi(x) \cdot \varphi(z)$ e $x * z$ é diferente de $z * x$.

Agora, seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Defina os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in Q \mid f(x * z) = f(x) * f(z) \quad \forall z \in Q\}$$

$$B = \{x \in Q \mid f(x * z) = f(z) * f(x) \quad \forall z \in Q\}$$

Observe que 0 pertence tanto a A quanto a B , assim esses conjuntos são não vazios. Observe também que $A = Q$ se, e somente se, f é um automorfismo; e que $B = Q$ se, e somente se, f é um anti-automorfismo. Assim f é half-automorfismo trivial se, e somente se, Q pertence a $\{A, B\}$.

Sejam x pertencente a A e y pertencente a B . Assim $f(x * z) = f(x) * f(z)$ e $f(y * z) = f(z) * f(y)$, para todo z pertencente a Q . Logo, da proposição 5.2.1 a) temos:

$$f(z * x) = f(z) * f(x) \quad \text{e} \quad f(z * y) = f(y) * f(z) \quad \forall z \in Q \quad (5.19)$$

Com isto:

$$f(x * y) \stackrel{x \in A}{=} f(x) * f(y) \stackrel{y \in B}{=} f(y * x)$$

Logo, do fato de f ser bijetora, segue que $x * y = y * x$. Assim, sendo $C_Q(x) = \{z \in Q \mid x * z = z * x\}$ o centralizador de x em Q , temos:

$$A \subseteq C_Q(y) \quad \text{e} \quad B \subseteq C_Q(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B \quad (5.20)$$

Proposição 5.2.9. $C(Q) = A \cap B$.

Demonstração. Fixado $x \in C(Q)$, para $y \in Q$ temos que $x * y = y * x$. Assim do item b) da proposição 5.2.1 temos que:

$$f(x * y) = f(x) * f(y) = f(y) * f(x) \quad \forall y \in Q$$

Logo, $x \in A \cap B$.

Agora fixado $x \in A \cap B$, seja $y \in Q$. Como $x \in A$, temos que $f(x * y) = f(x) * f(y)$. E como $x \in B$, temos que $f(x * y) = f(y) * f(x)$. Assim $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$ e do corolário 5.2.2 segue que $x * y = y * x$. Logo, $x \in C(Q)$. ■

A seguir serão enunciados e demonstrados seis lemas. Estes resultados serão fundamentais para a demonstração da proposição 5.2.16, enunciada após os mesmos.

Lema 5.2.10. *Existem x e y pertencentes a Q tais que $(x, y)_R$ e $[x, y]$ não pertencem a $C(Q)$.*

Demonstração. Pela demonstração da proposição 5.1.8 temos que existem $x, y, z \in Q$ tais que $[x, y]$ não comuta com z . Logo $[x, y]$ não pertence a $C(Q)$.

Agora suponha, por absurdo, que $(x, y)_R \in C(Q)$. Assim, $(x, y)_R$ comuta com z e temos que $[(x, y)_R, z] = 0$. Logo, usando a equação 5.13 para $(x, y)_R$ temos:

$$[-2[x, y] + [x + y, (x, y)_R], z] = 0$$

Como $(x, y)_R \in C(Q)$, segue que $[x + y, (x, y)_R] = 0$. Assim, $[-2[x, y], z] = 0$, e temos que o seu oposto $2[[x, y], z]$ também é nulo. Como a ordem de Q é ímpar, da expressão 5.8 segue que $[[x, y], z] = 0$. Assim $[x, y]$ comuta com z , o que é um absurdo. Portanto $(x, y)_R$ não pertence a $C(Q)$. ■

Lema 5.2.11. *Suponha que $N_\mu(Q)$ esteja contido em A e que exista x pertencente a $Q - A$. Então existe y pertencente a H tal que:*

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \neq f(y) * f(x) \text{ e } x * y \neq y * x \quad (5.21)$$

Demonstração. Como $x \notin A$, então $x \notin N_\mu(Q)$. Pela proposição 5.1.11 temos que $N_\mu(Q) = C_Q(H)$, então existe $y \in H$ tal que $x * y \neq y * x$. Assim do corolário 5.2.2 segue que $f(x) * f(y) \neq f(y) * f(x)$. Além disso, da proposição 5.1.11 também segue que H é subloop de $N_\mu(Q)$, então $y \in A$. Logo, das equações em 5.19 temos que $f(x * y) = f(x) * f(y) \neq f(y) * f(x)$. ■

Para x pertencente a $Q - A$ e y pertencente a H satisfazendo 5.21, defina o conjunto $K_{x,y}$ como sendo:

$$K_{x,y} = \{v \in Q \mid f(x * v) = f(v) * f(x) \neq f(x) * f(v)\}$$

Como x não pertence a A , então existe w pertencente a Q tal que

$$f(x * w) = f(w) * f(x) \neq f(x) * f(w)$$

Logo w pertence a $K_{x,y}$, e assim este conjunto é não vazio.

Lema 5.2.12. *Nas condições do lema anterior, sejam y pertencente a H satisfazendo 5.21 e z pertencente a $K_{x,y}$. Então $x + z$ e $x * z$ pertencem a $C_Q(y)$.*

Demonstração. Como $z \in K_{x,y}$, então $f(x * z) = f(z) * f(x) \neq f(x) * f(z)$.

Seja $v \in Q$ tal que $z = y * v$. Como vimos no lema anterior, $H \subseteq N_\mu(Q) \subseteq A$, então $y \in A$. Assim temos que $f(z) = f(y) * f(v)$. Desta forma:

$$f(z) * f(x) = f(x * z) = f(x * (y * v))$$

Como $y \in N_\mu(Q)$, temos:

$$f(z) * f(x) = f((x * y) * v) \in \{(f(x) * f(y)) * f(v), f(v) * (f(x) * f(y))\} \quad (5.22)$$

Pela proposição 5.2.4 temos que $f(y) \in N_\mu(Q)$. Assim:

$$(f(x) * f(y)) * f(v) = f(x) * (f(y) * f(v)) = f(x) * f(z)$$

Desta forma, $(f(x) * f(y)) * f(v) \neq f(z) * f(x)$. Logo, da equação 5.22 segue que $f((x * y) * v) = f(v) * (f(x) * f(y))$. Como $f(x) * f(y) = f(x * y)$, então $f((x * y) * v) = f(v) * f(x * y)$. Assim da proposição 5.2.1 a) e do fato de $f(y)$ pertencer a $N_\mu(Q)$ temos que:

$$f(v * (x * y)) = f(x * y) * f(v) = f(x) * f(y) * f(v)$$

Como $f(z) = f(y) * f(v)$, então $f(v * (x * y)) = f(x) * f(z)$. Como $f(x * z) = f(z) * f(x)$, da proposição 5.2.1 a) segue que $f(z * x) = f(x) * f(z)$, assim:

$$f(v * (x * y)) = f(z * x) = f((y * v) * x)$$

Do fato de f ser bijetora, segue que $v*(x*y) = (y*v)*x$. Assim, como $y \in N_\mu(Q)$, da proposição 5.1.6 d) temos que $[y, x+v] = 0$. Portanto, $x+v \in C_Q(y)$. Com isso, temos que $y*(x+v)$ pertence a $C_Q(y)$. Além disso, para este elemento temos:

$$\begin{aligned} y*(x+v) &= y+x+v-[y, x+v] \\ &= y+x+v \\ &= y+v-[y, v]+x+[y, v] \\ &= y*v+x+[y, v] \\ &= z+x+[y, v] \end{aligned}$$

Logo $x+z = y*(x+v) - [y, v]$, e da proposição 5.1.12 segue que $x+z \in C_Q(y)$. Assim, como $x*z = x+z - [x, z]$, da mesma proposição segue que $x*z \in C_Q(y)$. ■

Lema 5.2.13. *Suponha que $N_\mu(Q)$ esteja contido em B e que exista x pertencente a $Q-B$. Então existe z pertencente a H tal que:*

$$f(x*z) = f(z)*f(x) \neq f(x)*f(z) \text{ e } x*z \neq z*x \quad (5.23)$$

Demonstração. Como $x \notin B$, então $x \notin N_\mu(Q)$. Pela proposição 5.1.11 temos que $N_\mu(Q) = C_Q(H)$, então existe $z \in H$ tal que $x*z \neq z*x$. Assim do corolário 5.2.2 segue que $f(x)*f(z) \neq f(z)*f(x)$. Além disso, da proposição 5.1.11 também segue que H é subloop de $N_\mu(Q)$, então $z \in B$. Logo, das equações em 5.19 segue que $f(x*z) = f(z)*f(x) \neq f(x)*f(z)$. ■

Para x pertencente a $Q-B$ e z pertencente a H satisfazendo 5.23, defina o conjunto $K'_{x,z}$ como sendo:

$$K'_{x,z} = \{v \in Q \mid f(x*v) = f(x)*f(v) \neq f(v)*f(x)\}$$

Como x não pertence a B , então existe w pertencente a Q tal que

$$f(x*w) = f(x)*f(w) \neq f(w)*f(x)$$

Logo w pertence a $K'_{x,z}$, e assim este conjunto é não vazio.

Lema 5.2.14. *Nas condições do lema anterior, sejam z pertencente a H satisfazendo 5.23 e y pertencente a $K'_{x,z}$. Então $x+y$ e $x*y$ pertencem a $C_Q(z)$.*

Demonstração. Como $y \in K'_{x,z}$, então $f(x*y) = f(x)*f(y) \neq f(y)*f(x)$.

Seja $v \in Q$ tal que $y = z*v$. Como vimos no lema anterior, $H \subseteq N_\mu(Q) \subseteq B$, então $z \in B$. Assim temos que $f(y) = f(v)*f(z)$. Desta forma:

$$f(x)*f(y) = f(x*y) = f(x*(z*v))$$

Como $z \in N_\mu(Q)$, temos:

$$f(x)*f(y) = f((x*z)*v) \in \{(f(z)*f(x))*f(v), f(v)*(f(z)*f(x))\} \quad (5.24)$$

Pela proposição 5.2.4 temos que $f(y) \in N_\mu(Q)$, assim:

$$f(v)*(f(z)*f(x)) = (f(v)*f(z))*f(x) = f(y)*f(x)$$

Desta forma, $f(v) * (f(z) * f(x)) \neq f(x) * f(y)$. Logo, da equação 5.24 segue que $f((x * z) * v) = (f(z) * f(x)) * f(v)$. Como $f(z) * f(x) = f(x * z)$, então $f((x * z) * v) = f(x * z) * f(v)$. Assim da proposição 5.2.1 a) e do fato de $f(y)$ pertencer a $N_\mu(Q)$ temos que:

$$f(v * (x * z)) = f(v) * f(x * z) = f(v) * f(z) * f(x)$$

Como $f(y) = f(v) * f(z)$, então $f(v * (x * z)) = f(y) * f(x)$. Como $f(x * y) = f(x) * f(y)$, da proposição 5.2.1 a) segue que $f(y * x) = f(y) * f(x)$, assim:

$$f(v * (x * z)) = f(y * x) = f((z * v) * x)$$

Do fato de f ser bijetora, segue que $v * (x * z) = (z * v) * x$. Assim, como $z \in N_\mu(Q)$, da proposição 5.1.6 d) temos que $[z, x + v] = 0$. Portanto, $x + v \in C_Q(z)$. Com isso, temos que $z * (x + v)$ pertence a $C_Q(z)$. Além disso, para este elemento temos:

$$\begin{aligned} z * (x + v) &= z + x + v - [z, x + v] \\ &= z + x + v \\ &= z + v - [z, v] + x + [z, v] \\ &= z * v + x + [z, v] \\ &= y + x + [z, v] \end{aligned}$$

Logo $x + y = z * (x + v) - [z, v]$, e da proposição 5.1.12 segue que $x + y \in C_Q(z)$. Assim, como $x * y = x + y - [x, y]$, da mesma proposição segue que $x * y \in C_Q(z)$. ■

Lema 5.2.15. *Sejam a pertencente a $N_\mu(Q) \cap A$ e b pertencente a $N_\mu(Q) \cap B$. Então ou a pertence a $C(Q)$ ou b pertence a $C(Q)$.*

Demonstração. Da equação 5.20 temos que $a * b = b * a$, assim para $w \in Q$ temos que $f(w * (b * a)) = f(w * (a * b))$. Como $a \in N_\mu(Q)$ e $b \in B$, obtemos:

$$f(w * (b * a)) = f((w * a) * b) = f(b) * f(w * a)$$

Usando o fato de que $a \in A$ e a expressão 5.19, temos:

$$f(w * (b * a)) = f(b) * (f(w) * f(a))$$

Por fim, usando o item b) da proposição 2.5.4, obtemos:

$$f(w * (b * a)) = f(b) * f(w) * f(a) \tag{5.25}$$

Agora, da expressão 5.19 segue que $f(b * a) = f(b) * f(a)$. Assim, por f ser um half-automorfismo, temos:

$$f(w * (b * a)) \in \{f(w) * (f(b) * f(a)), (f(b) * f(a)) * f(w)\}$$

Como $a, b \in N_\mu(Q)$, da proposição 5.2.4 segue que $f(a), f(b) \in N_\mu(Q)$. Então:

$$f(w * (b * a)) \in \{f(w) * f(b) * f(a), f(b) * f(a) * f(w)\}$$

Logo, da equação 5.25 temos:

$$f(b) * f(w) * f(a) \in \{f(w) * f(b) * f(a), f(b) * f(a) * f(w)\}$$

Vamos mostrar que $w \in C_Q(a) \cup C_Q(b)$. Temos dois casos:

i) Suponha que $f(b) * f(w) * f(a) = f(w) * f(b) * f(a)$.

Usando a lei do cancelamento, temos que $f(b) * f(w) = f(w) * f(b)$. Desta forma, do corolário 5.2.2 segue que $b * w = w * b$. Logo, $w \in C_Q(b) \subseteq C_Q(a) \cup C_Q(b)$.

ii) Suponha que $f(b) * f(w) * f(a) = f(b) * f(a) * f(w)$.

Usando a lei do cancelamento, temos que $f(w) * f(a) = f(a) * f(w)$. Desta forma, do corolário 5.2.2 segue que $a * w = w * a$. Logo, $w \in C_Q(a) \subseteq C_Q(a) \cup C_Q(b)$.

Portanto, $w \in C_Q(a) \cup C_Q(b)$, para todo w pertencente a Q . Logo, $Q = C_Q(a) \cup C_Q(b)$, e do lema 4.2.7 segue que $Q \in \{C_Q(a), C_Q(b)\}$.

É fácil ver que $Q = C_Q(t)$ se, e somente se, $t \in C(Q)$. Assim, temos que ou $a \in C(Q)$ ou $b \in C(Q)$. ■

Proposição 5.2.16. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Se $N_\mu(Q)$ está contido em $A \cup B$, então f é half-automorfismo trivial.*

Demonstração. Segue do lema 5.2.10 que existem $u, v \in Q$ tais que $(u, v)_R \notin C(Q)$. Como $H = \langle (Q, Q)_R \rangle$, então $(u, v)_R \in H$. Além disso, como da proposição 5.1.11 temos que H é subloop de $N_\mu(Q)$, então $(u, v)_R$ também pertence a $N_\mu(Q)$. Desta forma, como $N_\mu(Q) \subseteq A \cup B$, temos dois casos:

(i) Suponha que $a = (u, v)_R \in A$. Assim $a \in N_\mu(Q) \cap A$.

Fixado $b \in N_\mu(Q) \cap B$, do lema 5.2.15 segue que ou $a \in C(Q)$ ou $b \in C(Q)$. Como $a \notin C(Q)$, segue que $b \in C(Q)$.

Logo, $N_\mu(Q) \cap B \subseteq C(Q)$. Assim, da proposição 5.2.9 temos que $N_\mu(Q) \cap B \subseteq A$. Desta forma, como $N_\mu(Q) \subseteq A \cup B$, temos:

$$N_\mu(Q) = (N_\mu(Q) \cap A) \cup (N_\mu(Q) \cap B) \subseteq A$$

Agora suponha, por absurdo, que existe $x \in Q - A$. Pelo lema 5.2.11 temos que existe $y \in H$ tal que $x * y \neq y * x$ e assim o conjunto $K_{x,y} = \{w \in Q \mid f(x * w) = f(w) * f(x) \neq f(x) * f(w)\}$ é não vazio. Desta forma, existe $z \in K_{x,y}$. Logo, do lema 5.2.12 segue que $x * z \in C_Q(y)$.

Como $f(x * (x * z)) \in \{f(x) * f(x * z), f(x * z) * f(x)\}$, temos dois casos:

(i.1) Suponha que $f(x * (x * z)) = f(x) * f(x * z)$.

Como $z \in K_{x,y}$, então $f(x * z) = f(z) * f(x)$, assim temos que $f(x * (x * z)) = f(x) * f(z) * f(x)$. Com isso, da proposição 5.2.4 temos que $f(x * (x * z)) = f(x * z * x)$. Como f é bijetora, segue que $x * (x * z) = x * z * x$, e com isso obtemos que $x * z = z * x$. Logo, do item b) da proposição 5.2.1 temos que $f(x) * f(z) = f(z) * f(x)$, o que é um absurdo pois $z \in K_{x,y}$.

(i.2) Suponha que $f(x * (x * z)) = f(x * z) * f(x) \neq f(x) * f(x * z)$.

Assim, $x * z \in K_{x,y}$. Logo, do lema 5.2.12 segue que $x + (x * z) \in C_Q(y)$. Como $x * z \in C_Q(y)$, da proposição 5.1.12 segue que $x \in C_Q(y)$. Assim $x * y = y * x$, o que é um absurdo.

Logo, não existe x pertencente a $Q - A$ e assim temos que f é um automorfismo.

(ii) Suponha que $b = (u, v)_R \in B$. Assim $b \in N_\mu(Q) \cap B$.

Fixado $a \in N_\mu(Q) \cap A$, do lema 5.2.15 segue que ou $a \in C(Q)$ ou $b \in C(Q)$. Como $b \notin C(Q)$, segue que $a \in C(Q)$.

Logo, $N_\mu(Q) \cap A \subseteq C(Q)$. Assim, da proposição 5.2.9 temos que $N_\mu(Q) \cap A \subseteq B$. Desta forma, como $N_\mu(Q) \subseteq A \cup B$, temos:

$$N_\mu(Q) = (N_\mu(Q) \cap A) \cup (N_\mu(Q) \cap B) \subseteq B$$

Agora suponha, por absurdo, que existe $x \in Q - B$. Pelo lema 5.2.13 temos que existe $z \in H$ tal que $x * z \neq z * x$ e assim o conjunto $K'_{x,z} = \{w \in Q \mid f(x * w) = f(x) * f(w) \neq f(w) * f(x)\}$ é não vazio. Desta forma, existe $y \in K'_{x,z}$. Logo, do lema 5.2.14 segue que $x * y \in C_Q(z)$.

Como $f(x * (x * y)) \in \{f(x) * f(x * y), f(x * y) * f(x)\}$, temos dois casos:

(ii.1) Suponha que $f(x * (x * y)) = f(x * y) * f(x)$.

Como $y \in K'_{x,z}$, então $f(x * y) = f(x) * f(y)$, assim temos que $f(x * (x * y)) = f(x) * f(y) * f(x)$. Com isso, da proposição 5.2.4 temos que $f(x * (x * y)) = f(x * y * x)$. Como f é bijetora, segue que $x * (x * y) = x * y * x$, e com isso obtemos que $x * y = y * x$. Logo, do item b) da proposição 5.2.1 temos que $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$, o que é um absurdo pois $y \in K'_{x,z}$.

(ii.2) Suponha que $f(x * (x * y)) = f(x) * f(x * y) \neq f(x * y) * f(x)$.

Assim, $x * y \in K'_{x,z}$. Logo, do lema 5.2.14 segue que $x + (x * y) \in C_Q(z)$. Como $x * y \in C_Q(z)$, da proposição 5.1.12 segue que $x \in C_Q(z)$. Assim $x * z = z * x$, o que é um absurdo.

Logo, não existe x pertencente a $Q - B$ e assim temos que f é um anti-automorfismo. ■

Lema 5.2.17. *Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo e suponha que exista x pertencente a Q tal que x não pertence a $A \cup B$. Então existem y e z pertencentes a Q tais que $y * z$ é diferente de $z * y$ e que (x, y, z) é tripla GG de f .*

Demonstração. Como $x \notin A$, então existe $z_0 \in Q$ tal que $f(x * z_0) = f(z_0) * f(x) \neq f(x) * f(z_0)$, e do corolário 5.2.2 segue que $x * z_0 \neq z_0 * x$.

Como $x \notin B$, então existe $y \in Q$ tal que $f(x * y) = f(x) * f(y) \neq f(y) * f(x)$, e com isso $x * y \neq y * x$. Desta forma, $C_Q(y) \neq Q$.

Suponha, por absurdo, que:

$$f(x * v) = f(x) * f(v) \quad \forall v \in Q - C_Q(y) \quad (5.26)$$

Como $f(x * z_0) \neq f(x) * f(z_0)$, então $z_0 \in C_Q(y)$. Como x não comuta com y , então $x \notin C_Q(y)$. Assim, como $C_Q(y)$ é subloop de Q , segue que $x * z_0 \in Q - C_Q(y)$. Logo, da equação 5.26 temos:

$$f(x * (x * z_0)) = f(x) * f(x * z_0)$$

Como $f(x * z_0) = f(z_0) * f(x)$, temos que $f(x * (x * z_0)) = f(x) * f(z_0) * f(x)$. Logo, da proposição 5.2.5 segue que $f(x * (x * z_0)) = f(x * z_0 * x)$. Do fato de f ser bijetora, segue que $x * (x * z_0) = x * z_0 * x$, e com isso temos que $x * z_0 = z_0 * x$, o que é um absurdo.

Portanto, existe $z \in Q - C_Q(y)$ tal que $f(x * z) \neq f(x) * f(z)$. Logo, (x, y, z) é tripla GG de f e $y * z \neq z * y$. ■

Teorema 5.2.18. *Todo half-automorfismo de Q é trivial.*

Demonstração. Seja $f : Q \rightarrow Q$ um half-automorfismo. Note que pela proposição 5.2.16 basta mostrarmos que $N_\mu(Q) \subseteq A \cup B$.

Suponha, por absurdo, que existe $x \in N_\mu(Q)$ tal que $x \notin A \cup B$. Assim, do lema 5.2.17 segue que existem $y, z \in Q$ tais que $y * z \neq z * y$ e (x, y, z) é tripla GG de f .

(i) Vamos mostrar que $f(z) * f(x) * f(y) = f(y) * f(x) * f(z)$.

Usando a definição de half-automorfismo e que (x, y, z) é tripla GG, temos:

$$\begin{aligned} f(y * (x * z)) &\in \{f(y) * (f(z) * f(x)), (f(z) * f(x)) * f(y)\} \\ f((y * x) * z) &\in \{(f(y) * f(x)) * f(z), f(z) * (f(y) * f(x))\} \end{aligned}$$

Como $x \in N_\mu(Q)$, da proposição 5.2.4 temos que $f(x) \in N_\mu(Q)$. Além disso, do fato de x pertencer a $N_\mu(Q)$ também segue que $f(y * (x * z)) = f((y * x) * z)$. Logo, temos quatro casos:

(i.1) Suponha que $f(y * x * z) = f(y) * (f(z) * f(x)) = (f(y) * f(x)) * f(z)$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então $f(y) * (f(z) * f(x)) = f(y) * f(x) * f(z)$, e usando a lei do cancelamento obtemos que $f(z) * f(x) = f(x) * f(z)$, o que é um absurdo, pois (x, y, z) é tripla GG.

(i.2) Suponha que $f(y * x * z) = f(y) * (f(z) * f(x)) = f(z) * (f(y) * f(x))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, da proposição 5.1.6 c) temos que $f(y) * f(z) = f(z) * f(y)$, logo do corolário 5.2.2 segue que $y * z = z * y$, o que é um absurdo.

(i.3) Suponha que $f(y * x * z) = (f(z) * f(x)) * f(y) = f(z) * (f(y) * f(x))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então $f(z) * f(x) * f(y) = f(z) * (f(y) * f(x))$, e usando a lei do cancelamento obtemos que $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$, o que é um absurdo, pois (x, y, z) é tripla GG.

Portanto, do único caso restante e do fato de que $f(x) \in N_\mu(Q)$ segue que $f(y * x * z) = f(z) * f(x) * f(y) = f(y) * f(x) * f(z)$. Assim, da proposição 5.1.6 e) temos:

$$(f(x) * f(y)) * (f(x) * f(z)) = (f(x) * f(z)) * (f(x) * f(y)) \quad (5.27)$$

$$(f(y) * f(x)) * (f(z) * f(x)) = (f(z) * f(x)) * (f(y) * f(x)) \quad (5.28)$$

(ii) Usando a proposição 5.2.5, a definição de half-automorfismo e que (x, y, z) é tripla GG, temos:

$$\begin{aligned} f((x * y * x) * z) &\in \{(f(x) * f(y) * f(x)) * f(z), f(z) * (f(x) * f(y) * f(x))\} \\ f((x * y) * (x * z)) &\in \{(f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x)), (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))\} \end{aligned}$$

Como $x \in N_\mu(Q)$, então $(x * y * x) * z = (x * y) * (x * z)$. Logo, $f((x * y * x) * z) = f((x * y) * (x * z))$, e assim temos quatro casos:

(ii.1) Suponha que $f((x * y * x) * z) = (f(x) * f(y) * f(x)) * f(z) = (f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então:

$$(f(x) * f(y)) * (f(x) * f(z)) = (f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x))$$

Logo $f(x) * f(z) = f(z) * f(x)$ e temos um absurdo, pois (x, y, z) é tripla GG.

(ii.2) Suponha que $f((x * y * x) * z) = (f(x) * f(y) * f(x)) * f(z) = (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então $(f(x) * f(y)) * (f(x) * f(z)) = (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))$. Assim, usando a equação 5.27 temos:

$$(f(x) * f(z)) * (f(x) * f(y)) = (f(x) * f(y)) * (f(x) * f(z)) = (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))$$

Logo, $f(x) * f(z) = f(z) * f(x)$ e temos um absurdo.

(ii.3) Suponha que $f((x * y * x) * z) = f(z) * (f(x) * f(y) * f(x)) = (f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então $(f(z) * f(x)) * (f(y) * f(x)) = (f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x))$. Assim, usando a equação 5.28 temos:

$$(f(y) * f(x)) * (f(z) * f(x)) = (f(z) * f(x)) * (f(y) * f(x)) = (f(x) * f(y)) * (f(z) * f(x))$$

Logo, $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$ e temos um absurdo, pois (x, y, z) é tripla GG.

(ii.4) Suponha que $f((x * y * x) * z) = f(z) * (f(x) * f(y) * f(x)) = (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))$.

Como $f(x) \in N_\mu(Q)$, então:

$$(f(z) * f(x)) * (f(y) * f(x)) = (f(z) * f(x)) * (f(x) * f(y))$$

Logo, $f(x) * f(y) = f(y) * f(x)$ e temos um absurdo.

Portanto, $N_\mu(Q) \subseteq A \cup B$ e da proposição 5.2.16 segue o resultado. ■

Referências Bibliográficas

- [AV16] M. Aboras e P. Vojtěchovský. Automorphisms of Dihedral-Like Automorphic Loops. *Communications in Algebra*, 44:613–627, 2016. [23](#), [25](#), [36](#)
- [BP56] R.H. Bruck e L.J. Paige. Loops whose inner mappings are automorphisms. *Annals of Mathematics*, 63:308–323, 1956. [1](#), [12](#), [13](#)
- [dA14] Giliard Souza dos Anjos. Grupo de automorfismos de a-loops. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do ABC, Brasil, Fevereiro 2014. [23](#), [24](#)
- [Drá10] A. Drápal. A Simplified Proof of Moufang’s Theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139:93–98, 2010. [12](#)
- [GA17] M.L. Merlini Giuliani e G.S. Anjos. On the structure of the automorphism group of certain automorphic loop. *Communications in Algebra*, 45(5):2245–2255, 2017. [43](#), [48](#)
- [GGRS16] A. Grishkov, M.L. Merlini Giuliani, M. Rasskazova e L. Sabinina. Half-isomorphisms of finite Automorphic Moufang loops. *Communications in Algebra*, 44:4252–4261, 2016. [1](#), [54](#)
- [GJM96] E.G. Goodaire, E. Jespers e C. Polcino Milies. *Alternative Loop Rings*. Amsterdam, 1996. [5](#), [12](#)
- [Gro] The GAP Group. GAP – group, algorithms and programming, version 4.8.7, 2017. [12](#), [15](#)
- [IG12] S. Gagola III e M.L. Merlini Giuliani. Half-isomorphisms of Moufang loops of odd order. *Journal of Algebra and Its Applications*, 11:194–199, 2012. [1](#)
- [IG13] S. Gagola III e M.L. Merlini Giuliani. On half-automorphisms of certain Moufang loops with even order. *Journal of Algebra*, 386:131–141, 2013. [1](#)
- [KKP02] M.K. Kinyon, K. Kunen e J.D. Phillips. Every diassociative A-loop is Moufang. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130:619–624, 2002. [1](#)
- [KKPV16] M.K. Kinyon, K. Kunen, J.D. Phillips e P. Vojtěchovský. The Structure of Automorphic Loops. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368:8901–8927, 2016. [1](#), [13](#), [23](#), [24](#), [43](#), [44](#)
- [KSV16] M.K. Kinyon, I. Stuhl e P. Vojtěchovský. Half-Isomorphisms of Moufang Loops. *Journal of Algebra*, 450:152–161, 2016. [1](#)
- [Mou35] R. Moufang. Zur Struktur von Alternativ Korpern. *Mathematische Annalen*, 110:416–430, 1935. [1](#)
- [Pf90] H.O. Pflugfelder. *Quasigroups and Loops: Introduction*, volume 7 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag Berlin, 1990. [4](#), [12](#)
- [Sco57] W.R. Scott. Half-homomorphisms of groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8:1141–1144, 1957. [1](#)

- [Wri69] C.R.B. Wright. On the multiplication group of a loop. *Illinois Journal of Mathematics*, 13:660–673, 1969. [1](#), [43](#)