Geometria dos Exemplos de Katok

Ana Kelly de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão

São Paulo, Dezembro de 2016

Geometria dos Exemplos de Katok

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 02/12/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Pedro Antonio Santoro Salomão (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva - IME-USP
- Prof. Dr. Joachim Weber - UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por sua graça, misericórdia e por cuidar de mim. Segundo, a minha família por todo o apoio e força que tem me dado nessa etapa dos meus estudos. Não posso deixar de fazer menção a todos que me incentivaram e tornaram a minha vinda a São Paulo mais fácil, Sandra Maria, Janyeid, Arlane e Samir, a todos vocês, muito obrigada.

Também agradeço aos meus colegas que direta ou indiretamente me ajudaram a entender assuntos relacionados a esse trabalho. E por último, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador, Prof. Pedro Salomão, pela disponibilidade que teve em esclarecer minhas dúvidas.

Resumo

OLIVEIRA, A. K. **Geometria dos Exemplos de Katok**. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Estudamos exemplos de métricas Finsler simétricas e não-simétricas em $S^n, \mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$ com uma quantidade finita de geodésicas fechadas ou com uma quantidade pequena de geodésicas fechadas "curtas". São os chamados exemplos de Katok. Usamos como referência o artigo *Geometry of the Katok examples* [Zil83] de Wolfgang Ziller. Verificamos que existem métricas Finsler cujo número de geodésicas fechadas é $2n$ (no caso de S^{2n} e S^{2n-1}), $n(n+1)$ (no caso de $\mathbb{C}P^n$) e $2n(n+1)$ (no caso de $\mathbb{H}P^n$). Tais exemplos são construídos numa vizinhança qualquer da métrica Riemanniana canônica dessas variedades.

Palavras-chave: métrica Finsler, geodésicas fechadas, exemplo de Katok.

Abstract

OLIVEIRA, A. K. **Geometry of the Katok Examples**. 2016. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

We study examples of symmetric and non-symmetric Finsler metrics on $S^n, \mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{H}P^n$ with a finite number of closed geodesics or with a small number of "short"closed geodesics. These are the well known Katok's examples. We use Ziller's article *Geometry of the Katok examples* [Zil83]. We exhibit Finsler metrics whose number of closed geodesics is $2n$ (in the case of S^{2n} and S^{2n-1}), $n(n+1)$ (in the case of $\mathbb{C}P^n$) and $2n(n+1)$ (in the case of $\mathbb{H}P^n$). Such examples are found in any neighborhood of the canonical Riemannian metric on these manifolds.

Keywords: Finsler metric, closed geodesic, Katok's example.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

Introdução **1**

1 Métrica Finsler **3**

1.1 Espaços de Minkowski . . . 3
1.2 Métrica Finsler . . . 9
1.2.1 Métricas Riemannianas . . . 12
1.2.2 Métrica dual . . . 13
1.2.3 Métricas do tipo Randers . . . 14
1.3 Geodésicas . . . 15
1.4 Derivada Covariante . . . 17
1.5 Campos de Jacobi . . . 18

2 Espaços Projetivos e Grupos de Isometrias **21**

2.1 Quatérnions . . . 21
2.2 Espaços Projetivos . . . 22
2.2.1 $\mathbb{K}P^n$ como uma variedade . . . 22
2.2.2 Espaço tangente de $\mathbb{K}P^n$ . . . 23
2.2.3 Métrica Riemanniana Canônica em $\mathbb{K}P^n$ . . . 23
2.2.4 Grupo de Isometrias em $\mathbb{K}P^n$ . . . 24
2.2.5 Geodésicas em $\mathbb{K}P^n$ . . . 24

3 Cohomologia de De Rham **25**

3.1 Cadeias e Cocadeias . . . 25
3.2 Complexos de De Rham . . . 26
3.3 Lema de Poincaré . . . 28
3.4 Cohomologia de De Rham com suporte compacto e Cohomologia compacta vertical . . . 30
3.5 Classe de Euler . . . 31
3.6 Sequência de Gysin . . . 33
3.7 Aplicações . . . 34

4 Variedades Simpléticas e Sistemas Hamiltonianos **45**

4.1 Álgebra Linear Simplética . . . 45
4.2 Variedades Simpléticas . . . 47
4.3 Equações de Hamilton . . . 48

4.4 O colchete de Poisson 50
4.5 Fluxo Hamiltoniano no Fibrado Cotangente 51
4.6 Bifurcações e o Princípio de Hamilton 54
4.6.1 Princípio de Hamilton 54
4.6.2 Bifurcação de variedades críticas 60

5 Exemplos de Katok com quantidade finita de geodésicas fechadas **65**
5.1 Construção de Métricas Finsler e caracterização de geodésicas fechadas 65
5.2 Contando geodésicas fechadas 69

6 Propriedades Geométricas dos Exemplos de Katok **77**
6.1 Comprimento das Geodésicas 77
6.2 Aplicação de Poincaré dos Exemplos de Katok 80
6.3 Índice de Morse dos Exemplos de Katok 87

7 Exemplos de Katok Com Poucas Geodésicas Fechadas Curtas **93**
7.1 Geodésica como ponto crítico de uma função 93
7.2 Métricas Finsler Simétricas 99
7.3 Aplicação de Poincaré das geodésicas fechadas curtas 106

Referências Bibliográficas **109**

Lista de Figuras

5.1 Exemplo de Katok em S^2 70

6.1 Aplicação de Poincaré 80

7.1 Pontos críticos de $f_2|_{S^2}$ 104

Introdução

Um problema clássico em cálculo de variações é estimar o número de pontos críticos de um funcional definido em um espaço de curvas fechadas numa variedade compacta. Em alguns casos, este problema pode ser traduzido para um problema de estimar o número de geodésicas fechadas de uma métrica Finsler apropriada na mesma variedade.

Em 1973 Katok encontrou algumas métricas Finsler não-simétricas em S^n com uma quantidade finita de geodésicas. Em 1983 Ziller publicou o artigo [Zil83] estendendo tais exemplos para as variedades compactas $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ e $\mathbb{C}aP^2$. Nesse artigo, Ziller constrói métricas Finsler com uma quantidade finita de geodésicas fechadas e calcula vários invariantes dessas geodésicas.

Nesse trabalho iremos expor com mais detalhes os resultados do artigo de Ziller [Zil83] focando no caso particular das variedades S^n, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$. Os primeiros capítulos 1,2,3 e 4 são introdutórios com definições e resultados preliminares usados nos capítulos subsequentes 5, 6 e 7.

No capítulo 1 definimos métricas Finsler e apresentamos alguns exemplos. Mostramos que se H é uma co-norma Finsler numa variedade M, então $F := H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$ é uma métrica Finsler em M, onde $\mathscr{L}_H : T^*M \to TM$ é a transformada de Legendre associada a H (veja Teorema 1.25). A bibliografia usada nesse capítulo é [She01, Dah06, SH13, BCS00].

No capítulo 2 definimos o espaço projetivo complexo e o espaço projetivo quaterniônico. Falamos brevemente da estrutura de variedade, do espaço tangente, da métrica Riemanniana, do grupo de isometria e das geodésicas desses espaços projetivos.

No capítulo 3 calculamos as cohomologias dos espaços T_1M e $C = T_1M/S^1$ para as variedades $M = S^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$, necessárias para a demonstração do Teorema 5.25. A bibliografia usada nesse capítulo foi [BT24].

No capítulo 4 mostramos resultados sobre sistemas Hamiltonianos em variedades simpléticas que serão a base para as construções feitas nos capítulos 6,7 e 8.

No capítulo 5 explicamos os exemplos de Katok e estimamos o menor número de geodésicas fechadas que existem para perturbações particulares da métrica Riemanniana canônica. Verificamos que os exemplos de Katok existem em qualquer vizinhança da métrica canônica em S^n, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ e que o menor número de geodésicas que obtemos nesses exemplos é $2n$ (no caso de S^{2n} e S^{2n+1}), $n(n+1)$ (no caso de $\mathbb{C}P^n$) e $2n(n+1)$ (no caso de $\mathbb{H}P^n$). Mostramos também que qualquer métrica Finsler, suficientemente próxima da métrica Riemanniana canônica e com todas as geodésicas fechadas não-degeneradas, possui pelo menos este número de geodésicas fechadas.

No capítulo 6 calculamos o comprimento das geodésicas das métricas Finsler construídas no capítulo 5 e verificamos que todas as geodésicas fechadas são não-degeneradas e elíticas. Também calculamos a aplicação de Poincaré e o índice de Morse de todas estas finitas geodésicas fechadas.

Finalmente, no capítulo 8 generalizamos a construção de Katok para encontrar outros exemplos de métricas Finsler simétricas e não-simétricas com uma quantidade finita de geodésicas fechadas "curtas".

Capítulo 1

Métrica Finsler

1.1 Espaços de Minkowski

Seja V um espaço linear real de dimensão finita.

Definição 1.1. Dizemos que a função contínua $F : V \to [0,+\infty)$ é uma norma de Minkowski em V se

(i) F é C^∞ em $V\backslash\{0\}$,

(ii) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, para todo $y \in V$ e $\lambda > 0$,

(iii) Para todo $y \in V\backslash\{0\}$ a forma bilinear simétrica

$$g_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}F^2(y+su+tv)|_{s=t=0}$$

é positiva definida.

Se F satisfaz a condição (ii), diz-se que F é positivamente homogênea de grau 1 e se F^2 satisfaz a condição (iii) diz-se que F^2 é fortemente convexa. O par (V,F) é chamado de espaço de Minkowski.

Notação 1.2. Fixe uma base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ para V. Se $u = u^i e_i$ e $v = v^i e_i$ então

$$g_y(u,v) = g_{ij}(y)u^i v^j, \qquad y = y^i e_i$$

onde

$$g_{ij}(y) := g_y(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y).$$

Teorema 1.3 (Euler)**.** *Seja $h : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ uma função suave e positivamente homogênea de grau $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $h(\lambda y) = \lambda^\alpha h(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ e $\lambda > 0$. Então,*

$$h_{y^i}(y)y^i = \alpha h(y),$$

para todo $y \neq 0$.

Demonstração. Como $y = (y^1,...,y^n)$, derivando

$$h(\lambda y^1,\ldots,\lambda y^n) = \lambda^\alpha h(y^1,\ldots,y^n)$$

em relação a λ temos

$$\sum_{i=1}^n h_{y^i}(\lambda y)y^i = \alpha\lambda^{\alpha-1}h(y) \tag{1.1}$$

Para $\lambda = 1$, a equação (1.1) pode ser escrita na notação de Einstein como

$$h_{y^i}(y)y^i = \alpha h(y)$$

□

Observação 1.4. Se $h:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ é uma função suave e positivamente homogênea de grau $\alpha\in\mathbb{R}$, isto é,

$$h(\lambda y^1,...,\lambda y^n)=\lambda^\alpha h(y^1,...,y^n)$$

então derivando em relação a y^i temos

$$\begin{aligned}\lambda\frac{\partial h}{\partial y^i}(\lambda y^1,...,\lambda y^n) &= \lambda^\alpha\frac{\partial h}{\partial y^i}(y^1,...,y^n)\\ \frac{\partial h}{\partial y^i}(\lambda y^1,...,\lambda y^n) &= \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial h}{\partial y^i}(y^1,...,y^n)\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial h}{\partial y^i}(\lambda y)=\lambda^{\alpha-1}\frac{\partial h}{\partial y^i}(y).$$

Portanto, $\dfrac{\partial h}{\partial y^i}$ é positivamente homogênea de grau $\alpha-1$.

Observação 1.5. Seja h uma função positivamente homogênea de grau 1. Então, pela Observação 1.4 temos

$$\frac{\partial h}{\partial y^i}(\lambda y)=\frac{\partial h}{\partial y^i}(y) \tag{1.2}$$

para todo $\lambda>0$. Logo, pelo Teorema de Euler temos

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^j\partial y^i}(y)y^j=0.$$

Observação 1.6. Dada uma norma de Minkowisk F então F^2 é positivamente homogênea de grau 2 e $\dfrac{\partial F^2}{\partial y^i}$ é positivamente homogênea de grau 1. Usando o Teorema de Euler, obtemos

$$\begin{aligned}g_{ij}(y)y^j &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}(y)y^j\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial y^j\partial y^i}(y)y^j\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial F^2}{\partial y^i}\right)(y)y^j\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y).\end{aligned}$$

Portanto,

$$g_y(y,v)=\frac{1}{2}dF^2(y)\cdot v.$$

Observação 1.7. Seja $h:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ uma função suave e positivamente homogênea de grau 2. Usando o Teorema de Euler e a Observação 1.4 temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial y^i\partial y^j}(y)y^iy^j &= \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial h}{\partial y^j}\right)(y)y^iy^j\\ &= \frac{\partial h}{\partial y^j}(y)y^j\\ &= 2h(y)\end{aligned}$$

Portanto, para a norma de Minkowski F segue que

$$g(y)(y,y) = g_{ij}(y)y^iy^j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y)y^iy^j = F^2(y).$$

Lema 1.8. *Seja $(V,\ F)$ um espaço de Minkowski. Então,*

(i) $F(y) > 0$ *se* $y \in V \backslash \{0\}$,

(ii) $F(0) = 0$.

Demonstração. Seja $y \in V$ não nulo. Pela Observação 1.7 e por g_y ser uma forma bilinear positiva definida segue que

$$F^2(y) = g_y(y,y) > 0 \Longrightarrow F(y) \neq 0.$$

Logo, como F é uma função não negativa obtemos $F(y) > 0$. Agora, tome uma sequência (λ_n) de números reais positivos tal que $\lambda_n \to 0$. Como F é contínua temos

$$F(0) = \lim_{n\to 0} F(\lambda_n y) = \lim_{n\to 0} \lambda_n F(y) = 0.$$

□

Lema 1.9 ([She01], pág 9)**.** *Seja $(V,\ F)$ um espaço de Minkowski. Para $v,w \in V$ temos*

$$F(v+w) \leq F(v) + F(w).$$

A igualdade vale se, e somente se, $w = \lambda v$ para algum $\lambda \geq 0$.

Lema 1.10 ([She01], pág 10)**.** *Seja $(V,\ F)$ um espaço de Minkowski. Para qualquer $y \neq 0$,*

$$g_y(y,v) \leq F(y)F(v),$$

para todo $v \in V$. A igualdade vale se, e somente se, $v = \lambda y$ para algum $\lambda \geq 0$.

Lema 1.11. *Seja $(V,\ F)$ um espaço de Minkowski. Suponha que $y,v \in V\backslash\{0\}$ satisfaz*

$$g_y(y,w) = g_v(v,w), \quad w \in V.$$

Então, $y = v$.

Demonstração. Fazendo $w = y$ e $w = v$ temos

$$F^2(y) = g_v(v,y) \leq F(v)F(y)$$

$$F^2(v) = g_y(y,v) \leq F(y)F(v)$$

então,

$$F(y) \leq F(v) \leq F(y) \Rightarrow F(y) = F(v). \tag{1.3}$$

Assim,

$$g_v(v,y) = F^2(y) = F(y)F(v) \tag{1.4}$$

e pelo Lema 1.10 existe $\lambda \geq 0$ tal que $y = \lambda v$. Logo,

$$g_v(v,y) = g_v(v,\lambda v) = \lambda g_v(v,v) = \lambda F^2(v) \tag{1.5}$$

De (1.3), (1.4) e (1.5) segue que

$$\lambda F^2(v) = g_v(v,y) = F(y)F(v) = F^2(v) \Rightarrow \lambda = 1.$$

Portanto, $y = v$. □

Definição 1.12. A dual da norma de Minkowski é a função $F^*: V^* \to [0,+\infty)$ definida por

$$F^*(\xi) = \max\{\xi(y); y \in V, F(y) = 1\}, \ \xi \in V^*.$$

Como $F^{-1}(1) = \{y \in V; F(y) = 1\}$ é compacto então a dual da norma de Minkowski está bem definida e é finita.

Definição 1.13. Seja $H: V \to [0,+\infty)$ uma função C^∞. Defina $L_H: V \to V^*$ por $L_H(y) = dH(y)$.

Observação 1.14. Note que se F é uma norma de Minkowski, pela Observação 1.6 segue que

$$L_{\frac{1}{2}F^2}(y) = \frac{1}{2}dF^2(y) = g_y(y,\cdot).$$

Proposição 1.15. *A aplicação $L_{\frac{1}{2}F^2}: V \to V^*$ é uma bijeção.*

Demonstração. Observe que

$$0 = L_{\frac{1}{2}F^2}(y) = g_y(y,\cdot) \Leftrightarrow y = 0,$$

pois g_y é uma forma bilinear positiva-definida e isso implica que g_y é uma forma bilinear não degenerada. Assim, é suficiente mostrar que $L_{\frac{1}{2}F^2}: V\backslash\{0\} \to V^*\backslash\{0\}$ é uma bijeção. O Lema 1.11 implica a injetividade. Para provar a sobrejetividade suponha que $\xi \in V^*\backslash\{0\}$. Seja $\lambda = F^*(\xi)$ e seja $y \in V$ tal que $F(y) = 1$ e $\xi(y) = \lambda$. Defina $W_y := \{w \in V; g_y(y,w) = 0\}$. Quero mostrar que se $w \in W_y$ então $\xi(w) = 0$. Seja $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to F^{-1}(1)$ uma curva tal que

$$\gamma(t) = \frac{y+tw}{F(y+tw)}, \ w \in W_y$$

então, $\gamma(0) = y$. Como y é um ponto crítico (de máximo) da aplicação $v \mapsto \xi(v)$ segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\xi(\gamma(t))\Big|_{t=0} \\ &= \xi\left(\frac{wF(y)}{F(y)^2} - \frac{y}{F(y)^2}\sum_i \frac{\partial F}{\partial y^i}(y)w^i\right) \\ &= \xi\left(w - y\sum_i \frac{\partial F}{\partial y^i}(y)w^i\right) \end{aligned}$$

Como $w \in W_y$ temos

$$0 = g_y(y,w) = \frac{1}{2}dF^2(y)w = F(y)\sum_i \frac{\partial F}{\partial y^i}(y)w^i = \sum_i \frac{\partial F}{\partial y^i}(y)w^i.$$

Logo, $\xi(w) = 0$. Observe que para qualquer $v \in V$ temos

$$w = v - g_y(y,v)y \in W_y \tag{1.6}$$

pois como $F(y) = 1$ temos

$$g_y(y,w) = g_y(y,v) - g_y(y,v)g_y(y,y) = g_y(y,v) - g_y(y,v)F^2(y) = 0$$

Então, para todo $v \in V$ temos

$$v = w + g_y(y,v)y$$

onde $w \in W_y$ é como em (1.6). Assim, para todo $v \in V$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(w) \\ &= \xi(v - g_y(y,v)y) \\ &= \xi(v) - g_y(y,v)\xi(y) \\ &= \xi(v) - g_y(y,v)\lambda \\ &= \xi(v) - g_y(\lambda y, v) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi(v) = g_y(\lambda y, v) = L_{\frac{1}{2}F^2}(\lambda y)(v) \quad \text{para todo } v \in V$$

Logo, $\xi = L_{\frac{1}{2}F^2}(\lambda y)$. Portanto, $L_{\frac{1}{2}F^2}$ é uma bijeção. □

Proposição 1.16. *Sejam F uma norma de Minkowski e F^* sua norma dual. Então,*

$$F = F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}.$$

Demonstração. Se $y = 0$, então,

$$F(y) = 0 \text{ e } F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2} = F^*(0) = 0$$

e a propriedade vale. Suponha que $y \neq 0$. Como $F^2 = g_y(y,y)$ segue que

$$F(y) = \frac{g_y(y,y)}{F(y)} = g_y\left(y, \frac{y}{F(y)}\right) = L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\left(\frac{y}{F(y)}\right) \leq F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.10 temos

$$F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}(y) = \sup_{v \neq 0} L_{\frac{1}{2}F^2}\left(\frac{v}{F(v)}\right) = \sup_{v \neq 0} \frac{g_y(y,v)}{F(v)} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{F(v)F(y)}{F(v)} = F(y).$$

Portanto,

$$F = F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}.$$

□

Proposição 1.17. *Sejam $g^{ij}(y)$ a inversa de $g_{ij}(y)$ e*

$$g^{*ij}(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial \xi^i \partial \xi^j}(\xi), \quad \xi \in V^* \backslash \{0\}.$$

Então,

$$g^{ij} = g^{*ij} \circ L_{\frac{1}{2}F^2}.$$

Demonstração. Diferenciando $\frac{1}{2}F^2 = \frac{1}{2}F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}$ com respeito a y^i para $y \in V \backslash \{0\}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}\left[F^* \circ L_{\frac{1}{2}F^2}\right](y) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right). \end{aligned}$$

Lembre que $L_{\frac{1}{2}F^2}(y) = g_y(y,\cdot) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y)$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial y^k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^k \partial y^i}(y) = g_{ki}(y).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{ki}(y) \tag{1.7}$$

Diferenciando (1.7) em relação a y^j temos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k \xi_l}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{lj}(y)\cdot g_{ki}(y) + \frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot \frac{\partial g_{ki}(y)}{\partial y^j}(y) \tag{1.8}$$

Seja $l_i(y)$ a i-ésima componente de $L_{\frac{1}{2}F^2}(y)$, então,

$$l_i(y) = L_{\frac{1}{2}F^2}(y)(e_i) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) = g_{ij}(y)y^j$$

onde $\{e_1,\dots e_n\}$ é uma base de V. Veja que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) = g_{ij}(y)y^j \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{ki}(y) &= g^{*kj}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot l_j(y)g_{ki}(y)\\ &= g^{*kj}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{ij}(y)y^i\cdot g_{ki}(y)\end{aligned} \tag{1.10}$$

De (1.7), (1.9) e (1.10) segue que

$$g_{ij}(y)y^j = g^{*kj}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{ij}(y)y^i\cdot g_{ki}(y)$$

Multiplicando por $g^{ij}(y)$ de ambos os lados obtemos

$$y^j = g^{*kj}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)g_{ki}(y)y^i = g^{*kj}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)l_k(y)$$

Então, como g_{ij} é homogênea de grau zero temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F^{*2}}{\partial \xi_k}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot\frac{\partial g_{ki}(y)}{\partial y^j}(y) &= g^{*km}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)l_m(y)\cdot\frac{\partial g_{ki}(y)}{\partial y^j}(y)\\ &= y^k\cdot\frac{\partial g_{ki}(y)}{\partial y^j}(y)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, a equação (1.8) fica

$$g_{ij}(y) = g^{*kl}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right)\cdot g_{lj}(y)\cdot g_{ki}(y)$$

Aplicando $\left(g^{ij}(y)\right)^2$ em ambos os lados da equação acima segue que

$$g^{ij}(y) = g^{*ij}\left(L_{\frac{1}{2}F^2}(y)\right).$$

□

1.2 Métrica Finsler

Definição 1.18. Seja M uma variedade diferenciável. Chamamos uma função contínua $F : TM \to [0,+\infty)$ de métrica Finsler em M se F satisfaz

i. F é suave em $TM \backslash \{0\}$.

ii. $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para todo $v = (x,y) \in TM$, $\lambda > 0$, onde estamos denotando $\lambda v = (x,\lambda y)$.

iii. A forma bilinear simétrica $g_v : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_v(u,w) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, v+su+tw)\Big|_{s=t=0}, \quad \text{para todo } u,w \in T_xM$$

é positiva definida.

O par (M,F) é chamado Variedade Finsler.

Note que se F é uma métrica Finsler em M então $F|_{T_xM}$ é uma norma de Minkowski em T_xM para todo $x \in M$.

Definição 1.19. Seja $(M,\ F)$ uma variedade Finsler. A reversibilidade de F é definida por

$$r := \sup\left\{F(-v); v \in F^{-1}(1)\right\}.$$

Dizemos que uma métrica Finsler é reversível ou simétrica se $r = 1$, ou seja, se $F(v) = F(-v)$ para todo $v \in V$.

Lema 1.20. *Seja $(M,\ F)$ uma variedade Finsler. Então, $r \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que para algum $v \in F^{-1}(1)$ temos $F(-v) < 1$. Então, existe $\lambda > 1$ tal que

$$1 = \lambda F(-v) = F(-\lambda v).$$

Assim, para $u = -\lambda v \in F^{-1}(1)$ temos

$$F(-u) = F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda > 1.$$

Portanto, $r \geq 1$. □

Observação 1.21. Podemos ver pelo Lema 1.8, Lema 1.9 e pela Definição 1.19 que uma norma de Minkowski F é uma norma no sentido usual apenas quando F é reversível.

Definição 1.22. Uma co-métrica (ou co-norma) Finsler em uma variedade M é uma função $H : T^*M \to [0,+\infty)$ tal que

i. H é suave em $T^*M \backslash \{0\}$.

ii. $H|_{T_x^*M} : T_x^*M \to [0,+\infty)$ é uma norma de Minkowski para todo $x \in M$.

Seja H uma co-norma Finsler em uma variedade M. Então, para cada $x \in M$ temos:

$$\begin{array}{rcl} L_x : T_x^*M & \to & T_x^{**}M \\ v & \mapsto & D_2H(v) \end{array}$$

onde $D_2H(v)w = \dfrac{d}{dt}H(x,v+tw)|_{t=0}$ é a derivada na fibra. O isomorfismo canônico

$$i : T_xM \to T_x^{**}M$$

definido da seguinte maneira: Seja $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ uma base de T_xM induzida por algum sistema de coordenadas e $\{dx^i\}$ a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, isto é, $\{dx^i\}$ é a base de T_x^*M satisfazendo $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}$. Defina

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j) := dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_{ij} \tag{1.11}$$

Então, i é a transformação linear que aplica

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(\cdot) \in T^{**}M$$

e se estende à T_xM por linearidade e tem a propriedade (1.11).

Definição 1.23. Definimos a transformada de Legendre associada à função $H : T^*M \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}_H : T^*M & \to & TM \\ \xi & \mapsto & i^{-1} \circ L_{\pi(\xi)}(\xi) \end{array}$$

onde $\pi : T^*M \to M$ é a projeção canônica.

Analogamente,

Definição 1.24. Definimos a transformada de Legendre associada à função $F : TM \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}_F : TM & \to & T^*M \\ y & \mapsto & D_2F(y) \end{array}$$

onde D_2F é a derivada na direção da fibra.

Teorema 1.25. *Sejam H uma co-norma Finsler e $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ a transformada de Legendre associada à função $\frac{1}{2}H^2$. Então:*

i. $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2} : (T^*M, 0) \to (TM, 0)$ é um homeomorfismo e se restringe a um difeomorfismo em $T^*M\backslash\{0\}$.

ii. $F = H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$ é uma métrica Finsler em M.

Demonstração. Para $x \in M$ fixado seja $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ a base de M induzida por algum sistema de coordenadas e sejam $\{dx^i\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}(\cdot)$ as bases duais de T_x^*M e $T_x{}^{**}M$, respectivamente. Denote por

$$h^{ij}(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi), \;\; \xi \in T^*M\backslash\{0\}. \tag{1.12}$$

Observe que

$$L_x(\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial \xi_i}(\xi)\frac{\partial}{\partial x^j}(\cdot) = h^{ij}(\xi)\xi_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\cdot)$$

e isto implica que

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}(\xi) = i^{-1}\left(h^{ij}(\xi)\xi_i\frac{\partial}{\partial x^j}(\cdot)\right) = h^{ij}(\xi)\xi_i\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Logo, $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ é suave em $T^*M\backslash\{0\}$. Pela Proposição 1.15, $L_{\frac{1}{2}H^2} : T_x^*M \to T_x^{**}M$ é uma bijeção. Logo, $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ é uma bijeção e

$$\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y) = L^{-1}_{\frac{1}{2}H^2} \circ i(y).$$

Além disso, como o Jacobiano de $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ é da forma

$$D\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & h^{ij} \end{pmatrix}$$

então

$$\det\left(D\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}\right) = \det\left(h^{ij}\right) \neq 0.$$

E pelo Teorema da Função Inversa, $\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y)$ é diferenciável para todo $y \in TM\backslash\{0\}$, ou seja, $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}(y)$ é um difeomorfismo em $T^*M\backslash\{0\} \to TM\backslash\{0\}$.

Para mostrar (ii) veja que

1. Como H e $\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$ são C^∞ em $TM\backslash\{0\}$ segue que $F = H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$ é C^∞ em $TM\backslash\{0\}$.

2. Seja $y \in TM$. Como $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ é uma bijeção existe $\xi \in T^*M$ tal que $y = \mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}(\xi)$. Além disso, como $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ é homogênea de grau 1 temos

$$\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(\lambda y) = \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}\left(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}(\lambda\xi)\right) = \lambda\xi = \lambda\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y).$$

Logo,

$$F(\lambda y) = H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(\lambda y) = H\left(\lambda\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y)\right) = \lambda H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y) = \lambda F(y),$$

isto é, F é homogênea de grau 1.

3. Sejam w^i as coordendas para T_x^{**}, então,

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2\left(\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y)\right)}{\partial y^i \partial y^j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(H^2 \circ L_x^{-1} \circ i\right)}{\partial y^i \partial y^j}(y) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2 \circ L_x^{-1}}{\partial w^i \partial w^j}(i(y)) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Pela Proposição 1.15, dado $\eta \in T^{**}M$, então, $L_x(\lambda\xi) = \eta$ onde $H(\xi) = 1$ e

$$\lambda = H^*(\eta) = \max\left\{\eta(\xi);\ \xi \in T_x^*M \text{ e } H(\xi) = 1\right\}.$$

Assim,

$$H \circ L_x^{-1}(\eta) = H(\lambda\xi) = \lambda H(\xi) = \lambda = H^*(\eta). \tag{1.14}$$

Logo, denotando por h_{ij} a inversa de h^{ij}, pela Proposição 1.17 segue que

$$\begin{aligned} h_{ij}(\xi) &= h^{*ij} \circ L_x(\xi) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2 \circ L_x^{-1}}{\partial w^i \partial w^j} \circ L_x(\xi) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2 \circ L_x^{-1}}{\partial w^i \partial w^j}\left(i(i^{-1}L_x(\xi))\right) \\ &= g_{ij}\left(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}(\xi)\right) \end{aligned}$$

isto é,

$$g_{ij}(y) = h_{ij} \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}(y),\ y \in TM\backslash\{0\}. \tag{1.15}$$

Como uma matriz é positiva definida se, e somente se, seus autovalores são todos positivos e se $\mu \neq 0$ é um autovalor de uma matriz, então, $\frac{1}{\mu}$ é um autovalor de sua inversa segue que

$$h^{ij} \text{ positiva definida } \Leftrightarrow h_{ij} \text{ é positiva definida .}$$

Logo, $g_{ij}(y)$ é positiva definida.

Portanto, F é uma métrica Finsler. □

Teorema 1.26. *Sejam F uma métrica Finsler e $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2}$ a transformada de Legendre associada à função $\frac{1}{2}F^2$. Então:*

i. $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2} : (TM,0) \to (T^*M,0)$ *é um homeomorfismo e se restringe a um difeomorfismo em $TM\backslash\{0\}$.*

ii. $H = F \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}F^2}$ *é uma co-norma Finsler em M.*

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema (1.25). □

Teorema 1.27. *Sejam H uma co-norma Finsler, $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H^2}$ a transformada de Legendre associada à função $\dfrac{1}{2}H^2$ e $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2}$ a transformada de Legendre associada à função $\dfrac{1}{2}F^2$, onde $F = H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$. Então,*

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2} = \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}.$$

Demonstração. Observe que

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(y) = g_{ij}y^i.$$

Seja (h^{ij}) como em (1.12) e (h_{ij}) a sua inversa. Então,

$$L_x^{-1}(\eta) = h_{ij}(\xi)\eta_i = h^{*ij}(\eta)\eta_i, \quad \eta = h^{ij}(\xi)\xi_i = L_x(\xi) \tag{1.16}$$

onde na última igualdade usamos a Proposição (1.17). Assim, por (1.16), (1.14) e (1.13) segue que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2} &= L_x^{-1} \circ i(x) \\ &= h^{*ij}\left(i(y)\right)(i \circ y)^i \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2 \circ L_x^{-1}}{\partial w^i \partial w^j}\left(i(y)\right)(i \circ y)^i \\ &= g_{ij}(y)y^i \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2} = \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}.$$

□

A seguir são apresentados mais alguns exemplos de métricas Finsler e co-norma Finsler.

1.2.1 Métricas Riemannianas

Seja M uma variedade diferenciável. Uma *métrica Riemanniana* g em M é uma família $g = \{g_x\}_{x \in M}$, onde para todo $x \in M$, g_x é uma forma bilinear simétrica e positiva definida em T_xM tal que em coordenadas locais (x^i)

$$g_{ij(x)} = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x\right)$$

são funções C^∞. Também podemos escrever

$$g_x = g_{ij(x)}\, dx^i \otimes dx^j.$$

Seja

$$F_x(y) = \sqrt{g_x(y,y)}, \quad y \in T_xM. \tag{1.17}$$

A família de normas $F = \{F_x\}_{x\in M}$ é uma métrica Finsler em M. Uma métrica Finsler é chamada de *Riemanniana* se pode ser expressa por (1.17) para alguma métrica Riemanniana g. Observe que nesse caso a forma bilinear simétrica associada à F como na Definição 1.18 não depende de y pois

$$\begin{aligned}
g_{ij}(y) &:= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_x{}^2}{\partial y^i \partial y^j}(y)\\
&= \frac{\partial F_x}{\partial y^i}(y)\frac{\partial F_x}{\partial y^j}(y) + F_x(y)\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^i \partial y^j}(y)\\
&= \left(\frac{g_{ij(x)}y^j}{F_x(y)}\right)\left(\frac{g_{ij(x)}y^i}{F_x(y)}\right) + F_x(y)\left(\frac{g_{ij(x)}}{F_x(y)} - \frac{g_{ij(x)}y^j}{F_x(y)^2}\frac{g_{ij(x)}y^i}{F_x(y)}\right)\\
&= \left(\frac{g_{ij(x)}y^j}{F_x(y)}\right)\left(\frac{g_{ij(x)}y^i}{F_x(y)}\right) + g_{ij(x)} - \left(\frac{g_{ij(x)}y^j}{F_x(y)}\right)\left(\frac{g_{ij(x)}y^i}{F_x(y)}\right)\\
&= g_{ij(x)}
\end{aligned}$$

Este é o exemplo mais simples de uma métrica Finsler reversível.

1.2.2 Métrica dual

Sejam (M,F) uma variedade Finsler e F^* a norma dual de F. Como anteriormente, denote

$$g_{ij}(y) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y) \qquad \text{e} \qquad g^{*ij}(\xi) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x,\xi)$$

onde $y \in T_xM\backslash\{0\}$ e $\xi \in T_x^*M\backslash\{0\}$. Se $A^{ij}(y)$ é a inversa de $g_{ij}(y)$ e $\xi_i = g_{ij}(y)y^j$ então pela Observação 1.14 e Proposição 1.17 temos

$$A^{ij}(y^i) = g^{*ij}\left(g_{ij}(y)y^j\right) = g^{*ij}(\xi^i).$$

Assim, $g_{ij}(y)\cdot g^{*jk}(\xi) = \delta_{ik}$ e por esse motivo, em alguns momentos, iremos usar a notação

$$g^{*ij}(\xi) := g^{ij}(\xi) \tag{1.18}$$

para nos referirmos a matriz inversa de $g_{ij}(y)$, onde $\xi_i = g_{ij}(y)y^j$. Pela Proposição 1.16 segue que

$$F^* = F \circ \mathscr{L}_{\frac{1}{2}F^2}$$

e, portanto, pelo Teorema 1.26 concluímos que F^* é uma co-norma Finsler. Assim, $g^{ij}(\xi)$ é positivamente homogêneo de grau 0 e pelo Teorema 1.3 obtemos as identidades

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi_k}(\xi)\xi^i = \frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi_k}(\xi)\xi^j = \frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi_k}(\xi)\xi^k = 0. \tag{1.19}$$

Observe que pela Proposição 1.15 para todo $\xi \in T^*M$ existe $v \in T_xM$ com $F(x,v) = 1$ tal que $\xi = g_v(\lambda v, \cdot)$, onde $\lambda = F^*(x,\xi)$. Assim, se $N : T^*M \to [0,+\infty)$ é uma função definida por

$$N^2(x,\xi) = g^{ij}(\xi)\xi_i\xi_j \tag{1.20}$$

segue que

$$\begin{aligned} N^2(x,\xi) &= g^{ij}(\xi)\xi_i\xi_j \\ &= g^{ij}(\xi)\cdot\lambda g_{ij}(v)v_j\cdot\lambda g_{ij}(v)v_i \\ &= \lambda^2 g_{ij}(v)v_iv_j \\ &= \lambda^2F^2(x,v) \\ &= \lambda^2 \\ &= {F^*}^2(x,\xi) \end{aligned}$$

Logo, $N = F^*$.

1.2.3 Métricas do tipo Randers

Sejam g uma métrica Riemannina e β uma 1-forma em M. Denote por

$$\|\beta\|_g = \sup\{\beta(v); g(v,v) = 1, v \in TM\}$$

e $\alpha_x(u) := \sqrt{g_x(u,u)}$, onde $u \in T_xM$. Seja $\left(a_{ij}\right)$ a matriz simétrica e positiva definida associada a métrica Riemanniana g.

Observação 1.28. Como vimos na seção 1.2.2

$$||\beta||_g = \sqrt{a^{ij}b_ib_j}$$

onde $\left(a^{ij}\right) = \left(a_{ij}\right)^{-1}$ pois $||\cdot||_g$ é a métrica dual da métrica Riemanniana g. Essa expressão para $||\beta||_g$, em geral, é mais útil.

Proposição 1.29. *Seja $F : TM \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = \alpha_x(y) + \beta_x(y)$. Fixado $x \in M$ então $F(x,y) > 0$ para todo $y \in T_xM\backslash\{0\}$ se, e somente se, $||\beta||_g < 1$.*

Demonstração. Em coordenadas locais, temos

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^iy^j} + b_iy^i.$$

Observe que $F(x,y) > 0$ significa que

$$\sqrt{a_{ij}y^iy^j} > -b_iy^i. \tag{1.21}$$

Suponha que $F(x,y) > 0$, isto é, vale (1.21) para todo $y \in T_xM\backslash\{0\}$. Queremos mostrar que $||\beta||_g < 1$. Veja que se $\beta = 0$ obtemos o desejado trivialmente. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\beta \neq 0$. Tomando $y_i = -a^{ij}b_j$ segue-se que

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{ij}(-a^{ij}b_j)(-a^{ij}b_i)} &> -b_i(-a^{ij}b_j) \\ b_ia^{ij}b_j &< \sqrt{b_ja^{ij}b_i} \\ \frac{b_ia^{ij}b_j}{\sqrt{b_ja^{ij}b_i}} &< 1 \end{aligned}$$

Logo, $||\beta||_g = \sqrt{b_ja^{ij}b_i} < 1$. Agora suponha que $||\beta||_g = \sqrt{b_ja^{ij}b_i} < 1$. Então, pela desigualdade de

Cauchy-Schwarz temos para todo $y \neq 0$

$$\begin{aligned}(b_i y^i)^2 &= \left[a_{ij}(a^{ij}b_i)y^i\right]^2 \\ &\leq \left[a_{ij}(a^{ij}b_i)(a^{ij}b_j)\right] \cdot \left[a_{ij}y^i y^j\right] \\ &= \left[b_i a^{ij} b_j\right] \cdot \left[a_{ij}y^i y^j\right] \\ &< a_{ij}y^i y^j\end{aligned}$$

Logo, $|b_i y^i| < \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ para todo $y \neq 0$ e, portanto, vale (1.21). □

Teorema 1.30. *A função $F(x,y) = \alpha_x(y) + \beta_x(y)$ é uma métrica Finsler em M se, e somente se, $\|\beta\|_g < 1$.*

Demonstração. Claramente F é suave em $TM\backslash\{0\}$ e positivamente homogênea de grau 1. Então, falta apenas verificar que F satisfaz a condição (iii) da Definição 1.18 se, e somente se, $\|\beta\|_g < 1$. Em coordenadas locais, temos

$$F(x,y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j} + b_i y^i.$$

Então,

$$\begin{aligned}g_{ij}(y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y) \\ &= F_{y^i}(x,y)F_{y^j}(x,y) + F(x,y)F_{y^i y^j}(x,y) \\ &= \left(\frac{a_{ij}y^j}{\alpha_x} + b_i\right)\left(\frac{a_{ij}y^i}{\alpha_x} + b_j\right) + \frac{F}{\alpha_x}\left(a_{ij} - \frac{a_{ij}y^i}{\alpha_x}\frac{a_{ij}y^j}{\alpha_x}\right)\end{aligned}$$

Por ([BCS00], §11.2) obtemos seguinte igualdade:

$$\det(g_{ij}) = \left(\frac{F}{\alpha_x}\right)^{n+1} \det(a_{ij}). \tag{1.22}$$

Seja

$$F_\varepsilon := \sqrt{a_{ij}y^i y^j} + \varepsilon b_i y^i$$

onde $||\beta||_g < 1$ e $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Pela Proposição 1.29 segue que F_ε é positiva em $TM\backslash\{0\}$. Seja g_ε a abreviação da forma bilinear associada a função F_ε. Por (1.22) temos

$$\det(g_\varepsilon) = \left(\frac{F_\varepsilon}{\alpha_x}\right)^{n+1} \det(a_{ij}).$$

Assim, $\det(g_\varepsilon)$ é sempre positivo. Em particular, nenhum dos auto-valores de g_ε é zero.

Os auto-valores de g_ε dependem continuamente de ε. Em $\varepsilon = 0$, eles são simplesmente os de (a_{ij}) e, portanto, são todos positivos. Como ε varia entre 0 e 1, nenhum dos auto-valores λ_ε de g_ε pode se tornar negativo, pois se $\lambda_\varepsilon < 0$ então existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que $\lambda_{\varepsilon'} = 0$, mas isso não ocorre. Logo, todos os auto-valores de g_ε permanecem positivos. Fazendo $\varepsilon = 1$ segue que os auto-valores de (g_{ij}) são todos positivos se $||\beta||_g < 1$. Portanto, (g_{ij}) é positiva definida se, e somente se, $||\beta||_g < 1$. □

Definição 1.31. Uma métrica Finsler como no Teorema 1.30 é chamada de métrica Finsler do tipo Randers. Usamos também a notação (M,g,β) para a variedade Finsler (M,F).

1.3 Geodésicas

Seja (M,F) uma variedade Finsler e $\gamma : [a,b] \to M$ uma curva C^∞ por partes com velocidade constante, isto é, $F(\dot\gamma(t)) = \lambda =$ constante para todo $t \in [a,b]$.

Definição 1.32. A curva $\gamma : [a,b] \to M$ é uma geodésica se, e somente se, satisfaz

$$\ddot{\gamma}(t) + 2G^i(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \qquad \text{para todo } i = 1, \dots, n \tag{1.23}$$

onde

$$G^i(x,y) = \frac{1}{4} g^{il} \left(2\partial_{x^k} g_{rl} - \partial_{x^l} g_{rk}\right) y^r y^k \tag{1.24}$$

e $(g^{jl}) = (g_{jl})^{-1}$.

Para mais detalhes ver Seção 1.4 de [SH13] e Capítulo 5 de [She01].

Queremos transformar o sistema de segunda ordem (1.23) em um sistema de primeira ordem no fibrado cotangente T^*M. Seja $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ as coordenadas locais de T^*M e denote por

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2} g^{ij}(x,\xi) \xi_i \xi_j. \tag{1.25}$$

onde $g^{ij}(x,\xi)$ é como na equação (1.18), isto é, $g_{ij}(x,\dot{x}) \cdot g^{jk}(x,\xi) = \delta_{ik}$ e $\xi_j = g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i$.

Teorema 1.33. *A equação $\ddot{x}(t) + 2G^i(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ é equivalente ao seguinte sistema em T^*M:*

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = g^{ij}(x,\xi)\xi_j \\ \dot{\xi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \partial_{x^i}(g^{jk}(x,\xi))\xi_j \xi_k \end{aligned} \tag{1.26}$$

Demonstração. Da primeira equação em (1.26) e de (1.19) temos

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i &= g^{ij}(x,\xi)\dot{\xi}_j + \partial_{x^k}(g^{ij}(x,\xi))\dot{x}^k \xi_j + \partial_{\xi^k}(g^{ij}(x,\xi))\xi_j \dot{\xi}^k \\ &= g^{ij}(x,\xi)\dot{\xi}_j + \partial_{x^k}(g^{ij}(x,\xi))\dot{x}^k g_{jl}(x,\dot{x})\dot{x}^l \end{aligned}$$

E usando a segunda equação temos

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i &= -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_{x^j}(g^{lk})\xi_l \xi_k + \partial_{x^k}(g^{ij}) g_{jl} \dot{x}^k \dot{x}^l \\ &= \frac{1}{2} g^{ij} g^{lm} \partial_{x^j}(g_{mn}) g^{nk} g_{lr} \dot{x}^r g_{ks} \dot{x}^s - g^{im} \partial_{x^k}(g^{mn}) g^{nj} g_{jl} \dot{x}^k \dot{x}^l \end{aligned}$$

onde usamos que $\partial_{x^l}(g^{ij}) = -g^{im}\partial_{x^l}(g_{mn})g^{nj}$ pois $g^{ij}g_{jk} = \delta_{ik}$. Então,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{2} g^{ij} \partial_{x^j}(g_{mn}) \dot{x}^m \dot{x}^n - g^{im} \partial_{x^k}(g^{mn}) \dot{x}^k \dot{x}^n \\ &= -\frac{1}{2} g^{ij} \left(-\partial_{x^j}(g_{mn}) - 2\partial_{x^k}(g^{mn})\right) \dot{x}^m \dot{x}^n \\ &= -2G^i(x,\dot{x}) \end{aligned}$$

Portanto, os sistemas são equivalentes. □

Definição 1.34. O fluxo determinado por (1.26) é chamado de **fluxo cogeodésico**. O **fluxo geodésico** em TM é obtido do fluxo cogeodésico pela primeira equação de (1.26).

Definição 1.35. Seja (M,F) uma variedade Finsler. Uma curva γ é uma *geodésica periódica* com período r (onde r é um número real não nulo) se, e somente se:

(i) γ é uma geodésica

(ii) γ é periódica como uma aplicação de $\mathbb{R}^+$ em M (parametrizada de forma que $F(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) = 1$) com período r. O número r é o *comprimento* da geodésica periódica.

Notação 1.36. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Chamaremos o conjunto dos vetores unitários de TM de fibrado tangente unitário e o denotaremos por T_1M, isto é,

$$T_1M = \{(x,v) \in TM\,;\, g_x(v,v) = 1\}. \tag{1.27}$$

Definição 1.37. Uma variedade M é uma C_r-variedade se existe uma métrica Riemanniana g em M tal que todas as geodésicas são periódicas com mesmo comprimento r. Diz-se também que g é uma C_r-métrica.

Observação 1.38. Se M é uma C_r-variedade então para cada η no fibrado tangente unitário de M a curva integral $s \mapsto \phi_s(\eta)$ do fluxo geodésico no fibrado tangente unitário T_1M é periódica com período r e $\phi_s(\eta) = \eta$ se, e somente se, s é um múltiplo de r.

Definição 1.39. Uma ação de grupo $G \times X \to X$ é chamada de livre se para todo $x \in X$, $gx = x$ implica que $g = I$, isto é, somente o elemento identidade fixa qualquer x.

Seja M uma C_r-variedade. O campo de vetores geodésico gera uma ação livre de $S^1 = \mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ no fibrado tangente unitário como descreveremos a seguir: Dado $(x,v) \in T_1M$, seja $\gamma_x^v(t)$ a geodésica em M tal que

$$\gamma_x^v(0) = x \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}_x^v(0) = v. \tag{1.28}$$

Então, defina a ação de S^1 em T_1M por

$$s \cdot (x,v) := (\gamma_x^v(s), \dot{\gamma}_x^v(s)) \qquad \text{para todo } s \in S^1 = \mathbb{R}/r\mathbb{Z}. \tag{1.29}$$

Isso induz uma relação de equivalência onde

$$(x_1,v_1) \sim (x_2,v_2)$$

se, e somente se, existe $s \in S^1$ tal que

$$(x_2,v_2) = (\gamma_{x_1}^{v_1}(s), \dot{\gamma}_{x_1}^{v_1}(s)).$$

Fazendo o quociente de T_1M pela ação de S^1 (ou melhor, pela relação de equivalência) obtemos

$$C := \frac{T_1M}{S^1} = \left\{ \left[(x,v)\right] \,;\, (x,v) \in T_1M \right\}. \tag{1.30}$$

Observação 1.40. O espaço quociente $C = T_1M/S^1$ é uma variedade de dimensão $2n-2$ (a *variedade das geodésicas orientadas*). Podemos considerar também a ação livre de $\mathbb{Z}_2 \times S^1$ em T_1M para obtermos outra variedade, a *variedade de geodésicas não orientadas*, da qual C é uma dupla cobertura.

Observação 1.41. Se pedirmos somente que o fluxo geodésico seja periódico, com período r, isto é, as geodésicas periódicas não tiverem necessariamente o mesmo comprimento então a ação de S^1 não será livre e não podemos definir a variedade de geodésicas.

1.4 Derivada Covariante

Para um campo de vetores $X = (X^1,\ldots,X^n)$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, a derivada direcional D_vX na direção $v \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ é definida por

$$D_vX := \left(dX^1(v),\ldots,dX^n(v)\right) = v^i \frac{\partial X}{\partial x^i}.$$

Podemos estender a noção de derivada direcional para campos de vetores em um espaço Finsler.

Definição 1.42. Seja (M,F) uma variedade Finsler. Em cada $x \in M$ defina

$$D : T_xM \times C^\infty(TM) \to T_xM$$

por

$$D_yU := \left\{dU^i(y) + U^j(x)N^i_j(y)\right\} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$$

onde $y \in T_xM$, $U \in C^\infty(TM)$ e $N^i_j(y)$ são funções locais em TM tais que

$$N^i_j(y) := \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(y) = \frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{1}{4}g^{il}(y)\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(y)\right\}y^jy^k\right].$$

Chamamos $D_yU(x)$ a **derivada covariante** de U em x na direção de y.

A derivada covariante D tem as seguintes propriedades:

(a) $D_y(U+V) = D_yU + D_yV$;

(b) $D_y(fU) = df_x(y) + f(x)D_yU$;

(c) $D_{\lambda y}U = \lambda D_yU$, $\lambda > 0$.

A família $D := \{D_y\}_{y\in TM}$ é chamada a **conexão** de F. Se em adição, D é linear, isto é,

(d) $D_{y+v}U = D_yU + D_vU$

então D é chamada uma conexão afim em TM (ou M). Chamamos essa conexão de Levi-Civita.

1.5 Campos de Jacobi

Definição 1.43. Seja (M,F) uma variedade Finsler. Considere uma geodésica $c(t)$, $a \le t \le b$. Uma aplicação C^∞, $H : (-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b] \to M$ é chamada uma *variação da geodésica c* se

$$H(0,t) = c(t)$$

e para cada $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, a curva

$$c_s(t) := H(s,t)$$

é uma geodésica.

Lema 1.44. *Seja (M,F) uma variedade Finsler. Existe uma família de transformações $R_y : T_xM \to T_xM$, $y \in T_xM\backslash\{0\}$, tais que para qualquer variação de geodésicas H da geodésica c, o campo de vetores*

$$J(t) := \frac{\partial H}{\partial s}(0,t)$$

ao longo de c satisfaz a seguinte equação:

$$D_{\dot c}D_{\dot c}J + R_{\dot c}(J) = 0.$$

Demonstração. Assuma que cada $c_s(t) = H(s,t)$ é uma geodésica. Assim,

$$\frac{\partial^2 H^i}{\partial t^2} + 2G^i\left(H, \frac{\partial H}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.31}$$

Seja

$$T = T^i\frac{\partial}{\partial x^i} := \frac{\partial H}{\partial t}, \quad U = U^i\frac{\partial}{\partial x^i} := \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Então, a equação (1.31) com a notação acima se torna

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} + 2G^i(H,T) = 0. \tag{1.32}$$

Note que

$$\frac{\partial T^i}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H^i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H^i}{\partial s}\right) = \frac{\partial U^i}{\partial t}$$

Diferenciando (1.32) com respeito a s temos

$$\frac{\partial^2 T^i}{\partial s \partial t} = -2U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(H,T) - 2\frac{\partial T^j}{\partial s}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 U^i}{\partial t^2} = -2U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(H,T) - 2\frac{\partial U^j}{\partial t}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T).$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left[G^i(H,T)\right] &= U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(H,T) + \frac{\partial T^j}{\partial s}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T) \\
&= U^k \frac{\partial G^i}{\partial x^k}(H,T) + \frac{\partial U^j}{\partial t}\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T)\right] &= T^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(H,T) + \frac{\partial T^k}{\partial t}\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(H,T) \\
&= T^k \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(H,T) - 2G^k(H,T)\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^k \partial y^j}(H,T)
\end{aligned}$$

onde usamos (1.32) na última igualdade. Pelas igualdades acima obtemos

$$\begin{aligned}
D_T D_T U &= D_T\left[\left(\frac{\partial U^i}{\partial t} + U^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(H,T)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right] \\
&= -U^k\left\{2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}\right\}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= -U^k R^i_k(T)\frac{\partial}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

onde

$$R^i_k(y) := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

Para cada $y \in T_xM\backslash\{0\}$, defina uma transformação linear

$$R_y = R^i_k(y)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k|_x : T_xM \to T_xM.$$

Assim,

$$D_T D_T U + R_T(U) = 0.$$

Restringindo a equação acima para c e fazendo $J(t) := U(0,t)$ obtemos

$$D_{\dot{c}} D_{\dot{c}} J + R_{\dot{c}}(J) = 0.$$

$\square$

A variação de geodésicas dá origem a uma família de transformações

$$R = \{R_y : T_xM \to T_xM \; ; \; y \in T_x \backslash \{0\}, \, x \in M\}.$$

Chamamos R de **curvatura de Riemann**.

Definição 1.45. Seja $c(t)$ uma geodésica não-constante de F. Um **campo de Jacobi** ao longo de c é um campo de vetores $J(t)$ ao longo de c que satisfaz a EDO linear

$$D_{\dot{c}} D_{\dot{c}} J + R_{\dot{c}}(J) = 0,$$

chamada de equação de Jacobi.

Sejam $p = c(a)$ e $q = c(b)$ dois pontos na geodésica c, com $a \neq b$.

Definição 1.46. Os pontos p e q são *conjugados* ao longo de c se existe um campo de Jacobi não-nulo ao longo de c tal que $J(a) = J(b) = 0$. A *multiplicidade* de p e q como pontos conjugados é igual a dimensão do espaço vetorial de todos os campos de Jacobi que se anulam em $t = a$ e $t = b$.

Capítulo 2

Espaços Projetivos e Grupos de Isometrias

2.1 Quatérnions

Os quatérnions foram descobertos pelo matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton. Eles são denotados pelo símbolo $\mathbb{H}$ em homenagem a Hamilton e são definidos da seguinte forma:

Definição 2.1. Os quatérnions são uma álgebra real $\mathbb{H}$ gerada pelos elementos $1, i, j, k$, isto é,

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk; a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

onde a soma é definida por:

$$\sum_{k=0}^{3} a_k i_k + \sum_{k=0}^{3} b_k i_k = \sum_{k=0}^{3} (a_k + b_k) i_k$$

onde $i_0 = 1, i_1 = i, i_2 = j$ e $i_3 = k$, e o produto satisfaz a lei distributiva e as relações: $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ e $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Definição 2.2. Definimos o conjugado $\overline{q}$ de $q = a + bi + cj + kd$ por $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ e definimos as parte real e imaginária de q por $Re(q) = a \in \mathbb{R}$ e $Im(q) = bi + cj + dk$, respectivamente.

Podemos escrever cada quatérnion como um par de números complexos usando a equação

$$a + ib + jc + kd = (a + bi) + (c + di)j$$

e dessa forma obtemos a expressão $q = \alpha + \beta j \in \mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$. Também podemos identificar os quatérnions com matrizes complexas 2×2, $M_2(\mathbb{C})$ por meio do isomorfismo $\iota : \mathbb{H} \to H \subset M_2(\mathbb{C})$ definido por

$$\alpha + \beta j \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

A álgebra dos quatérnions pode assim ser realizada como uma subálgebra real de $M_2(\mathbb{C})$, usando as identificações

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Através do isomorfismo ι podemos deduzir que $\mathbb{H}$ é uma álgebra associativa, não comutativa e com divisão, a inversa de qualquer matriz $A \in H$ está também em H e a única matriz em H cujo determinante é zero é a matriz nula.

Um importante grupo de matrizes de quatérnions que iremos precisar no decorrer do trabalho será definida a seguir:

Definição 2.3. O grupo simplético $Sp(n)$ é o subgrupo de $GL(n, \mathbb{H})$ das matrizes com coeficientes em $\mathbb{H}$, inversíveis e que preservam o produto Hermitiano em $\mathbb{H}^n$:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=i}^{n} \overline{x}_k y_k.$$

Isto significa que se $A \in Sp(n)$ então $A^*A = AA^* = \mathrm{Id}$, ou seja, $Sp(n)$ é o grupo das matrizes unitárias de $\mathbb{H}$, $U(n,\mathbb{H})$.

Dessa forma, o grupo simplético $Sp(n)$ é o grupo de isometrias do espaço $\mathbb{H}^n$.

2.2 Espaços Projetivos

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ e $a = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K}$. Podemos dar a $\mathbb{K}^{n+1}$ uma estrutura de espaço vetorial à direita com produto por escalar definido por

$$x\cdot\lambda = (x_1,\ldots,x_{n+1})\cdot\lambda = (x_1\cdot\lambda,\ldots,x_{n+1}\cdot\lambda),$$

produto Hermitiano

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot y_i$$

e produto escalar real

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = Re\,\langle x,y\rangle\,.$$

Definição 2.4. O espaço projetivo $\mathbb{K}P^n$ é o espaço de órbitas para a ação à direita do grupo $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ em $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$, isto é, $x \sim y$ se, e somente se, existe um $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $x = y\cdot\lambda$. Denotaremos por $\pi(x)$ a órbita de x.

2.2.1 $\mathbb{K}P^n$ como uma variedade

O espaço projetivo $\mathbb{K}P^n$ é uma variedade diferenciável C^∞ de dimensão na, onde suas cartas são definidas da seguinte forma:

Seja

$$U_i = \left\{x = (x^1,\ldots,x^{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}; x^i \neq 0\right\}, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Como U_i é aberto para todo $1 \leq i \leq n+1$, então os conjuntos $\pi(U_i) = V_i$ são abertos da topologia quociente em $\mathbb{K}P^n$. As funções $f_i : V_i \to \mathbb{K}^n \cong \mathbb{R}^{na}$ definidas por

$$f_i(\pi(x)) = \left(\frac{x^1}{x^i},\ldots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\ldots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

são cartas para $\mathbb{K}P^n$ e suas inversas são

$$f_i^{-1}(x^1,\ldots,\widehat{x^i},\ldots,x^{n+1}) = (x^1,\ldots,1,\ldots,x^{n+1})$$

onde $\widehat{x^i}$ significa que a i-ésima entrada está faltando.

Definição 2.5. Um *fibrado principal* sobre M com grupo estrutural G é uma variedade P tal que:

(1) G age livremente (à direita) em P: se para todo $x \in P$ tivermos $x\cdot g = x$ então $g = I$, isto é, somente o elemento identidade de G fixa qualquer x.

(2) Existe uma projeção suave $\pi : P \to M$ e $M \cong P/G$

(3) P é localmente trivial: se $m \in M$, existe U vizinhança de m tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$.

O conjunto $(\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}, \mathbb{K}P^n, \pi, \mathbb{K}^*)$ tem uma estrutura de um fibrado principal. As trivializações locais são dadas por

$$\begin{array}{rcl} g_i : U_i = \pi^{-1}(V_i) & \to & V_i \times \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & (\pi(x), x) \end{array}$$

e as funções de transição por

$$\begin{array}{rcl} V_i \cap V_j & \to & \mathbb{K}^* \\ \pi(x) & \mapsto & \dfrac{x^i}{x^j}. \end{array}$$

Notação 2.6. Denotaremos por $S\mathbb{K}^{n+1}$ (em vez de S^{na+a-1}) a esfera unitária em $\mathbb{K}^{n+1}$ definida pela equação $\langle x, x \rangle = 1$. A dimensão desse espaço é $na + a - 1$.

Assim, a esfera $S\mathbb{K} = S^{a-1}$ é um subgrupo de $\mathbb{K}^*$ tal que

$$S\mathbb{K} \to S\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}P^n$$

é um subfibrado principal do anterior.

2.2.2 Espaço tangente de $\mathbb{K}P^n$

O fibrado tangente de $S\mathbb{K}^{n+1}$ é identificado classicamente da seguinte forma:

$$TS\mathbb{K}^{n+1} = \left\{(x, u)\,; x \in S\mathbb{K}^{n+1}, u \in \mathbb{K}^{n+1} \, e \, \langle x, u \rangle_{\mathbb{R}} = 0\right\}$$

e o espaço tangente de $\mathbb{K}P^n$ em $\pi(x)$ é isomorfo ao conjunto de classes

$$\{(x\lambda, u\lambda)\,; \langle x, u \rangle = 0,\, \lambda \in S\mathbb{K}\} \cong T_{\pi(x)}\mathbb{K}P^n.$$

Para mais detalhes veja ([Bes12], pág 73). Denotaremos por $\pi(x, u)$ o vetor tangente à $\mathbb{K}P^n$ em $\pi(x)$.

2.2.3 Métrica Riemanniana Canônica em $\mathbb{K}P^n$

Veja que para $u, v \in \mathbb{K}^{n+1}$ e $\lambda \in S\mathbb{K}$ temos

$$\begin{array}{rcl} 2\langle u\lambda, v\lambda \rangle_{\mathbb{R}} & = & \langle u\lambda, v\lambda \rangle + \overline{\langle u\lambda, v\lambda \rangle} \\ & = & \langle u\lambda, v\lambda \rangle + \langle v\lambda, u\lambda \rangle \\ & = & \overline{\lambda}\,\langle u, v \rangle\,\lambda + \overline{\lambda}\,\langle v, u \rangle\,\lambda \\ & = & \overline{\lambda}\left(\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}\right)\lambda \\ & = & \overline{\lambda} 2\,\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}\,\lambda \\ & = & 2\,\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Logo,

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle u\lambda, v\lambda \rangle_{\mathbb{R}} \tag{2.2}$$

para todo $u, v \in \mathbb{K}^{n+1}$ e $\lambda \in S\mathbb{K}$. Assim, podemos dotar o espaço projetivo $\mathbb{K}P^n$ com uma métrica Riemanniana g definida por

$$g\left(\pi(x, u), \pi(x, v)\right) := \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}}\,. \tag{2.3}$$

Logo, temos g como uma métrica natural em $\mathbb{K}P^n$.

Note ainda que para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle u, v \rangle$ é invariante pela ação de S^1 mas para $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, $\langle u, v \rangle$ não é invariante sob S^3 porque $\mathbb{H}$ não é comutativo.

2.2.4 Grupo de Isometrias em $\mathbb{K}P^n$

Seja $U(n+1,\mathbb{K})$ o subgrupo do grupo linear sobre $\mathbb{K}, GL(n+1,\mathbb{K})$, que deixa o produto Hermitiano $\langle\ ,\ \rangle$ invariante, isto é,

$$\forall A \in U(n+1,\mathbb{K}) \Longrightarrow \langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

Então,

$$\begin{aligned} U(n+1,\mathbb{C}) &= U(n+1), \text{ o grupo unitário} \\ U(n+1,\mathbb{H}) &= Sp(n+1), \text{ o grupo simplético} \end{aligned}$$

Definição 2.7. O grupo projetivo $PU(n+1,\mathbb{K})$ é a ação do grupo $U(n+1,\mathbb{K})$ no espaço projetivo $\mathbb{K}P^n$, ou seja, $PU(n+1,\mathbb{K})$ é o grupo quociente

$$PU(n+1,\mathbb{K}) = U(n+1,\mathbb{K})/Z(U(n+1,\mathbb{K}))$$

onde $Z(U(n+1,\mathbb{K}))$ é o subgrupo das matrizes unitárias escalares $\{\mathrm{Id}\cdot\lambda; \langle\lambda,\lambda\rangle = 1\}$.

O grupo $Z(U(n+1,\mathbb{K}))$ age trivialmente em $\mathbb{K}P^n$ e a notação Z deve-se ao fato de que o subgrupo das matrizes escalares é o centro de $U(n+1,\mathbb{K})$.

Dados $\pi(x), \pi(y) \in \mathbb{K}P^n$ temos para todo $A\cdot I\lambda \in U(n+1,\mathbb{K})/Z(U(n+1,\mathbb{K}))$

$$\begin{aligned} \langle A\cdot \mathrm{Id}\cdot\lambda(\pi(x)), A\cdot\mathrm{Id}\cdot\lambda(\pi(y))\rangle &= \langle A(\pi(x))\cdot\lambda, A(\pi(y))\cdot\lambda\rangle \\ &= \langle A(\pi(x)\cdot\lambda), A(\pi(y)\cdot\lambda)\rangle \\ &= \langle A(\pi(x)), A(\pi(y))\rangle \\ &= \langle \pi(x), \pi(y)\rangle \end{aligned}$$

Logo, $PU(n+1,\mathbb{K})$ define as isometrias de $\mathbb{K}P^n$ onde

$$PU(n+1,\mathbb{C}) = U(n+1)/Z(U(n+1)), \text{ o grupo projetivo unitário} \tag{2.4}$$

$$PU(n+1,\mathbb{H}) = Sp(n+1)/Z(U(n+1)), \text{ o grupo projetivo simplético.} \tag{2.5}$$

2.2.5 Geodésicas em $\mathbb{K}P^n$

Proposição 2.8 ([Bes12], pág 81)**.** *Todas as geodésicas dos espaços projetivos $\mathbb{K}P^n$ são fechadas, simples e tem comprimento π.*

Seja γ uma geodésica em $\mathbb{K}P^n$ com condições iniciais $\gamma(0) = p = \pi(x)$, $\dot\gamma(0) = X = \pi(x,u)$ e $\langle X, X\rangle$=1, então:

Proposição 2.9 ([Bes12], pág 81-82)**.** *A geodésica γ em $\mathbb{K}P^n$ tem equação*

$$\gamma(s) = \pi(x\cos s + u\sin s) = \exp_p sX.$$

Capítulo 3

Cohomologia de De Rham

3.1 Cadeias e Cocadeias

Nessa seção trataremos de módulos sob um anel geral R (ou $\mathbb{Z}$) e não especificamente sob variedades.

Definição 3.1. Sejam M e N módulos sob R. Uma função $f : M \to N$ diz-se um homomorfismo se para todos $m, m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$ tem-se

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

(ii) $f(rm) = rf(m)$

Definição 3.2. Uma sequência $C_\bullet = (C_n, \partial_n \,|\, n \in \mathbb{Z})$ de módulos C_n e homomorfismos $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ é chamado de um **complexo de cadeia** se para todo $n \in \mathbb{Z}$ tivermos $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Um complexo de cadeia é usualmente visualizada em um diagrama tal como

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \tag{3.1}$$

E podemos observar que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ se, e somente se, $\operatorname{Im}(\partial_n) \subset \ker(\partial_{n-1})$.

Definição 3.3. Chamamos a sequência (3.1) de exata se, e somente se, $\operatorname{Im}(\partial_n) = \ker(\partial_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.4. Uma sequência $C^\bullet = (C^n, d_n \,|\, n \in \mathbb{Z})$ de módulos C^n e homomorfismos $d_n : C^n \to C^{n+1}$ é chamada de um **complexo de cocadeia** se para todo $n \in \mathbb{Z}$ tivermos $d_{n+1} \circ d_n = 0$.

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

Sejam M, M' e N módulos sob um anel R (ou $\mathbb{Z}$), então:

Observação 3.5. A sequência $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata se, e somente se, f é injetora.

Observação 3.6. A sequência $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é sobrejetora.

Observação 3.7. Uma sequência $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um isomorfismo.

Definição 3.8. Uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

chama-se uma sequência exata curta.

Definição 3.9. Diz-se que uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

cinde se $N = \operatorname{Im}(f) = \ker(g)$ é um somando direto de M.

Lema 3.10 (Lema de Splitting)**.** *Dada uma sequência exata curta de R-módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A sequência (3.2) *cinde.*

(ii) Existe um homomorfismo $\psi : M \to M'$ *tal que* $\psi \circ f = Id_{M'}$.

(iii) Existe um homomorfismo $\varphi : M'' \to M$ *tal que* $g \circ \varphi = Id_{M''}$.

Nessas condições $M \cong M' \oplus M''$.

3.2 Complexos de De Rham

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $x^1, \ldots, x^n$ suas coordenadas locais.

Definição 3.11. Definimos Ω^* como a álgebra sobre $\mathbb{R}$ gerada por $dx^1, \ldots, dx^n$ com as relações

$$\begin{cases} dx^i \wedge dx^i = 0 \\ dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx_i, \; i \neq j \end{cases}$$

Também podemos ver Ω^* como o espaço vetorial real cuja base é

$$1, dx^i, dx^i \wedge dx^j, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \ldots, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

onde $i < j < k$. As formas diferenciais C^∞ em M são elementos de

$$\Omega^*(M) = \{\text{funções } C^\infty \text{ em M}\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*.$$

Assim, podemos definir uma k-forma α em $\Omega^*(M)$ como

$$\alpha = \sum f_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

onde os coeficientes $f_{i_1 \ldots i_k}$ são funções C^∞, ou de outra forma

$$\alpha = \sum_I f_I dx_I.$$

Se $\Omega^k(M)$ denota o conjunto das k-formas em M temos

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Omega^k(M).$$

Observação 3.12. $\Omega^k(M) = 0$ para $k > dim(M)$ e $k < 0$.

Definição 3.13. Definimos o operador diferencial $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ pelas seguintes regras:

(i) se $f \in \Omega^0(M)$ então $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

(ii) se $\alpha = \sum f_I dx_I$ então $d\alpha = \sum df_I \wedge dx_I$

Chamamos d de derivada exterior.

Proposição 3.14. *Se* α *é uma k-forma e* β *uma r-forma temos*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Demonstração. Como d é linear, basta verificar o caso que $\alpha = f_I dx_I$ e $\beta = g_J dx_j$.

$$\begin{aligned} d(\alpha\wedge\beta) &= d(f_I g_J) dx_I \wedge dx_J \\ &= [(df_I)g_J + f_I(dg_J)] \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + f_I dg_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= g_J df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^k f_I dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J \\ &= (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.15. $d^2 = 0$.

Demonstração. Para $f \in \Omega^0(M)$, isto é, f uma função em M temos

$$d^2 f = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$

Como os fatores $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ são simétricos e $dx^j \wedge dx^i$ são antissimétricos temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} dx_i \wedge dx^i = 0$$

Logo,

$$d^2 f = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = 0.$$

Para formas, como d é um operador linear, é suficiente mostrar o caso quando $\alpha = f_I dx_I$ é uma k-forma. Pela Proposição 3.14 e a primeira parte da demonstração segue que

$$d^2\alpha = d^2(f_I dx_I) = d(df_I \wedge dx_I) = d^2 f_I \wedge dx_I + (-1)^k df_I \wedge d^2 x_I = 0.$$

□

Definição 3.16. Uma k-forma α é dita **fechada** se $d\alpha = 0$ e é dita **exata** se existe uma $(k-1)$-forma β tal que $d\beta = \alpha$.

Definição 3.17. O complexo $\Omega^*(M)$ com o operador diferencial d é chamado de complexo de De Rham em M.

Observação 3.18. O núcleo de $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ são formas fechadas e a imagem de d são formas exatas. Pela Proposição 3.15 segue que toda forma exata é fechada.

Considere o seguinte diagrama

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

onde d_i, $i \geq 1$ é a derivada exterior. Pela Proposição 3.15 segue que $d_k \circ d_{k-1} = 0$. Logo, $Im(d_{k-1}) \subseteq ker(d_k)$. Assim, podemos definir

Definição 3.19. A k-ésima cohomologia de De Rham de M é o espaço vetorial

$$H^k_{DR}(M) = \frac{ker(d_k)}{Im(d_{k-1})} = \frac{\{\text{k-formas fechadas}\}}{\{\text{k-formas exatas}\}}.$$

As vezes escreveremos $H^k(M)$ em vez de $H^k_{DR}(M)$ e denotaremos a classe de cohomologia de uma forma α por $[\alpha]$.

Definição 3.20. A dimensão do k-ésimo grupo de cohomologia de uma variedade M é chamado de **número de Betti** e o denotamos por

$$b_k(M) = dim\, H^k(M).$$

3.3 Lema de Poincaré

Sejam $x^1,\dots,x^m$ e $y^1,\dots,y^n$ coordenadas locais de M e N, respectivamente. Uma aplicação suave $f : M \to N$ induz um pullback de funções C^∞, $f^* : \Omega^0(N) \to \Omega^0(M)$ definido por:

$$f^*(g) = g \circ f.$$

Podemos estender esse pullback para todas as formas, $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ de tal forma que f^* comute com d da seguinte maneira:

$$f^*\left(\sum g_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum (g_I \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}$$

onde $f_i = y^i \circ f$ é a i-ésima componente da função f.

Proposição 3.21. *f^* como definido acima comuta com d.*

Demonstração. Como

$$\begin{aligned} df^*(g_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) &= d\left[(g_I \circ f) df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}\right] \\ &= d(g_I \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f^*d(g_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) &= f^*\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_I}{\partial y^i} dy^i \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial g_I}{\partial y^i} \circ f\right) df_i\right] dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \\ &= d(g_I \circ f) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \end{aligned}$$

temos $df^* = f^*d$. □

Lema 3.22. *Sejam M e N variedades e $f : M \to N$ uma função suave então o pullback manda formas fechadas em N em formas fechadas em M e formas exatas em N em formas exatas em M. Assim, $f^* : H^k_{DR}(N) \to H^k_{DR}(M)$.*

Demonstração. Seja α uma forma fechada em N então $d\alpha = 0$. Pela Proposição 3.21 temos

$$0 = f^*d\alpha = df^*\alpha.$$

Logo, $f^*\alpha$ é fechada. Agora seja β uma forma exata em N, então, existe η tal que $\beta = d\eta$. Pela Proposição 3.21 temos

$$f^*\beta = f^*d\eta = df^*\eta$$

ou seja, $f^*\beta$ é exata. □

Sejam $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a projeção no primeiro fator e $s : R^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a seção nula, isto é, a função que aplica $x \mapsto (x,0)$.

Proposição 3.23. *As aplicações $\pi^* : H^*(\mathbb{R}^n) \to H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ e $s^* : H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to H^*(\mathbb{R}^n)$ são isomorfismos.*

Demonstração. Como $\pi \circ s = Id$ então:

- Se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ temos
$$(s^* \circ \pi^*)f = s^*(f \circ \pi) = f \circ \pi \circ s = f$$

- Se $\alpha = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, temos
$$\begin{aligned}(s^* \circ \pi^*)(\alpha) &= s^*(f \circ \pi\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k)\\ &= (f \circ \pi \circ s)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k\\ &= f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k\\ &= \alpha\end{aligned}$$

Logo, $s^* \circ \pi^* = Id$. No entanto, como $s \circ \pi \neq Id$ temos $\pi^* \circ s^* \neq Id$ no nível de formas pois, por exemplo, se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ temos
$$\pi^* \circ s^*\big(f(x,t)\big) = f \circ s \circ \pi(x,t) = f \circ s(x) = f(x,0).$$

Para mostrar que $\pi^* \circ s^*$ é a identidade na cohomologia é suficiente encontrar uma aplicação K definida em $\Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ tal que
$$Id - \pi^* \circ s^* = \pm(dK - Kd) \tag{3.3}$$
onde $dK \pm Kd$ aplica formas fechadas em formas exatas, dessa forma, aplicando $[\alpha] \in H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ na classe nula.

Observe que toda forma em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é uma combinação linear de dois tipos de formas:

(I) $(\pi^*\alpha) f(x,t)$

(II) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)\, dt$

onde α é uma forma em $\mathbb{R}^n$. Definimos $K : \Omega^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ por:

(I) $(\pi^*\alpha) f(x,t) \longmapsto 0$

(II) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)\, dt \longmapsto (\pi^*\alpha) \int_0^t f(x,t)\, dt$

Agora vamos verificar se a aplicação K como definida acima satisfaz a equação (3.3). Para formas do tipo I, $\beta = (\pi^*\alpha) f(x,t)$, onde $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ temos
$$\begin{aligned}(Id - \pi^* \circ s^*)\beta &= (\pi^*\alpha) f(x,t) - \pi^* \circ s^*((\pi^*\alpha) f(x,t))\\ &= (\pi^*\alpha) f(x,t) - \pi^*\alpha\, f(x,0)\end{aligned}$$

e,
$$\begin{aligned}(dK - Kd)\beta &= dK(\beta) - Kd\beta = -Kd\beta\\ &= -K\left[(\pi^* d\alpha) f(x,t) + (-1)^k (\pi^*\alpha) \wedge \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial t} dt\right)\right]\\ &= -K\big((\pi^* d\alpha) f(x,t)\big) + (-1)^{k+1} K\left((\pi^*\alpha) \wedge \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) + (-1)^{k+1} K\left((\pi^*\alpha) \wedge \frac{\partial f}{\partial t} dt\right)\\ &= (-1)^{k+1} (\pi^*\alpha) \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} dt\\ &= (-1)^{k+1} (\pi^*\alpha)[f(x,t) - f(x,0)]\end{aligned}$$

Logo, $(Id - \pi^* \circ s^*)\beta = (-1)^{k+1}(dK - Kd)\beta$.

Para formas do tipo II, $\beta = (\pi^*\alpha)\wedge f(x,t)dt \in \Omega^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ temos

$$(Id-\pi^*\circ s^*)\beta = \beta - \pi^*\circ s^*\big((\pi^*\alpha)\wedge f(x,t)dt\big) = \beta$$

pois $s^*(dt) = d(s^*t) = d(0) = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
Kd\beta &= K\left[\pi^*(d\alpha)\wedge f(x,t)dt + (-1)^{k-1}\pi^*\alpha\wedge\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt\wedge dt\right)\right]\\
&= K\left[\pi^*(d\alpha)\wedge f(x,t)dt + (-1)^{k-1}\pi^*\alpha\wedge\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dt\right)\right]\\
&= K\left[\pi^*(d\alpha)\wedge f(x,t)dt + (-1)^{k-1}\sum_i \pi^*\alpha\wedge dx^i\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}dt\right)\right]\\
&= \pi^*(d\alpha)\int_0^t f(x,t)dt + (-1)^{k-1}\sum_i \pi^*\alpha\wedge dx^i\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}dt
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
dK\beta &= d\left[\pi^*(\alpha)\int_0^t f(x,t)dt\right]\\
&= \pi^*(d\alpha)\int_0^t f(x,t)dt + (-1)^{k-1}(\pi^*\alpha)\left[\sum_i\left(\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x^i}dt\right)dx^i + f(x,t)dt\right]\\
&= \pi^*(d\alpha)\int_0^t f(x,t)dt + (-1)^{k-1}\sum_i(\pi^*\alpha)\wedge dx^i\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x^i}dt + (-1)^{k-1}(\pi^*\alpha)f(x,t)dt
\end{aligned}$$

Logo,

$$(dK-Kd)\beta = (-1)^{k-1}(\pi^*\alpha)\wedge f(x,t)dt = (-1)^{k-1}\beta = (-1)^{k-1}(Id-\pi^*\circ s^*).$$

Portanto, $H^*(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ e isomorfo a $H^*(\mathbb{R}^n)$. □

Corolário 3.24 (Lema de Poincaré)**.**

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(ponto) = \begin{cases}\mathbb{R}, & se\ k=0\\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio.\end{cases} \tag{3.4}$$

Demonstração. Faça indução em n na Proposição 3.23. □

O Corolário acima nos diz que toda forma fechada no $\mathbb{R}^n$ é exata. Como toda variedade diferenciável M é localmente homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^n$ seque que toda forma fechada em M é localmente exata.

3.4 Cohomologia de De Rham com suporte compacto e Cohomologia compacta vertical

Definição 3.25. O **suporte** de uma função contínua em um espaço topológico é o fecho do conjunto onde f é diferente de zero, isto é,

$$\operatorname{Supp} f := \overline{\{p\in X\,;\, f(p)\neq 0\}}.$$

Se na definição do complexo de De Rham usarmos somente funções C^∞ com suporte compacto, então, o complexo resultante é chamado de **complexo de De Rham com suporte compacto**.

$$\Omega_c^*(M) = \{\text{funções } C^\infty \text{ em M com suporte compacto}\}\otimes_{\mathbb{R}}\Omega^*.$$

A cohomologia desse complexo é denotada por $H_c^*(M)$.

Definição 3.26. Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação sobrejetora entre variedades tal que $\pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial para todo $x \in M$. A aplicação π é chamada de um fibrado vetorial real de posto n quando existe uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M e difeomorfismos que preservam as fibras

$$\phi_i : E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$$

que são isomorfismos lineares em cada fibra.

Definição 3.27. Os complexos de formas com suporte compacto na direção vertical, $\Omega^k_{cv}(E)$, são definidos da seguinte forma: uma k-forma α em E está em $\Omega^k_{cv}(E)$ se, e somente se, para cada conjunto compacto $K \subset M$, $\pi^{-1}(K) \cap \operatorname{Supp} \alpha$ é compacto.

Definição 3.28. A cohomologia dos complexos $\Omega^k_{cv}(E)$ denotados por $H^*_{cv}(E)$, é chamada a cohomologia de E com suporte compacto na direção vertical, ou cohomologia compacta vertical.

Seja E um fibrado vetorial. Sejam $x^1, \ldots, x^m$ as coordenadas locais de M e $t_1, \ldots, t_n$ as coordenadas locais de E. Então, as formas de E são de dois tipos:

(I) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x, t_1, \ldots, t_n) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}, \quad r < n$

(II) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x, t_1, \ldots, t_n) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$

Definição 3.29. Definimos a integração ao longo das fibras $\pi_* : \Omega^*_{cv}(E) \to \Omega^{*-n}(M)$ por

(I) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x, t_1, \ldots, t_n) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r} \longmapsto 0, \quad r < n$

(II) $(\pi^*\alpha) \wedge f(x, t_1, \ldots, t_n) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \longmapsto \alpha \int_E f(x, t_1, \ldots, t_n) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n.$

Proposição 3.30. *A integração ao longo da fibra π_* comuta com a derivada exterior d.*

3.5 Classe de Euler

Nessa seção mostraremos a definição da classe de Euler de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ quando o posto de E é 2. O caso geral é similar porém mais complexo. A construção no caso geral pode ser encontrada em ([BT24], §11)

Definição 3.31. Seja M uma variedade com atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$. Dizemos que o atlas é orientado se todas as funções de transição $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ são difeomorfismos que preservam a orientação, isto é, o determinante do Jacobiano de $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ é positivo. A variedade é dita orientável se possui um atlas orientado.

Proposição 3.32. *Uma variedade M de dimensão n é orientável se, e somente se, tem uma n-forma global que nunca se anula ([BT24], pág 29).*

Seja E um fibrado vetorial orientado de posto n sobre M e seja $E^0 = E \setminus \{0\}$, onde $\{0\}$ é a seção nula. Podemos dotar E com uma estrutura Riemanniana como segue. Seja $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de M que trivializa E. Em cada U_i escolha um frame ortogonal para $E|_{U_i}$. Denote por $\langle , \rangle_i$ o produto interno em $E|_{U_i}$ induzido pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Agora use a partição da unidade $\{\rho_i\}$ para juntá-los, isto é, formar

$$\langle , \rangle = \sum \rho_i \langle , \rangle_i.$$

Assim, podemos definir uma função raio em E. Suponha que E tem posto 2 e $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta coordenada de M que trivializa E. Como E tem uma estrutura Riemanniana sobre cada U_i podemos escolher um frame ortonormal. Isso define em $E^0|_{U_i}$ coordenadas polares r_i e θ_i. Se $x_1, \ldots, x_n$ são coordenadas de U_i então $\pi^*x_1, \ldots, \pi^*x_n$, r_i, θ_i são coordenadas em $E^0|U_i$.

Na interseção $U_i \cap U_j$ os raios r_i e r_j são iguais, mas as coordenadas angulares θ_i e θ_j diferem por uma rotação. Isso nos permite definir de forma não ambígua φ_{ij} (a menos de múltiplos de 2π) como o ângulo de rotação na direção anti horária do sistema de coordenadas i para o sistema de coordenadas j:

$$\theta_j = \theta_i + \pi^*\varphi_{ij}, \quad \varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Apesar da rotação de i para j e depois de j para k ser o mesmo que rotacionar de i para k, no entanto, não é verdade que $\varphi_{ij} + \varphi_{jk} - \varphi_{ik} = 0$. Apenas podemos dizer que

$$\varphi_{ij} + \varphi_{jk} - \varphi_{ik} \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{3.6}$$

Lema 3.33. *Existem* 1*-formas* ξ_i *em* U_i *tais que*

$$\frac{1}{2\pi}\, d\varphi_{ij} = \xi_j - \xi_i. \tag{3.7}$$

Demonstração. Defina $\xi_i = \frac{1}{2\pi}\sum_k \rho_k d\varphi_{ki}$ onde $\{\rho_k\}$ é a partição da unidade subordinada a cobertura aberta $\{U_k\}$. Então,

$$\xi_j - \xi_i = \frac{1}{2\pi}\sum_k \rho_k\, d(\varphi_{kj} - \varphi_{ki}).$$

Por (3.6) seque que

$$\varphi_{ij} + \varphi_{jk} + \varphi_{ki} = 2\pi m$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\varphi_{ij} - 2\pi m = -\varphi_{jk} - \varphi_{ki} = \varphi_{kj} - \varphi_{ki}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \xi_j - \xi_i &= \frac{1}{2\pi}\sum_k \rho_k\, d(\varphi_{ij} - 2\pi m) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_k \rho_k\, d\varphi_{ij} \\ &= \frac{1}{2\pi}\, d\varphi_{ij}. \end{aligned}$$

□

Do Lema 3.33 segue-se que $d\xi_i = d\xi_j$ em $U_i \cap U_j$. Assim, podemos definir uma 2-forma global e tal que restrita a cada U_i é $d\xi_i$. Esta forma e é fechada, mas não necessariamente exata, pois ξ_i geralmente não pode ser definida globalmente. A classe de cohomologia de e em $H^2(M)$ é chamada **classe de Euler** do fibrado orientado E. As vezes escrevemos $\mathrm{e}(E)$ em vez de e.

Proposição 3.34. *A classe de cohomologia de* e *é independente da escolha de* ξ *na construção acima.*

Demonstração. Se $\{\overline{\xi}_i\}$ é uma escolha diferente de 1-formas tais que

$$\frac{1}{2\pi}\, d\varphi_{ij} = \overline{\xi}_j - \overline{\xi}_i = \xi_j - \xi_i$$

então,

$$\overline{\xi}_j - \xi_j = \overline{\xi}_i - \xi_i = \xi$$

e ξ é uma 1-forma global. Logo,

$$d\overline{\xi}_i - d\xi_i = d\xi \implies [\overline{\mathrm{e}}] = [\mathrm{e}].$$

□

Por (3.5) e (3.7) temos

$$d\theta_j = d\theta_i + \pi^* d\varphi_{ij} \Longrightarrow d\theta_j = d\theta_i + 2\pi\,(\pi^*(\xi_j - \xi_i)) \Longrightarrow \frac{d\theta_j}{2\pi} - \pi^*\xi_j = \frac{d\theta_i}{2\pi} - \pi^*\xi_i$$

em $E^0|_{U_i \cap U_j}$. Assim, obtemos uma 1-forma global ψ em E^0, a **forma angular global**, cuja restrição a cada fibra é a forma angular $(1/2\pi)d\theta$, isto é, se $i_p : \mathbb{R}^2 \to E$ é a inclusão ortogonal da fibra sob p, então, $i_p^* \psi = (1/2\pi)d\theta$. A forma angular global não é fechada

$$d\psi = d\left(\frac{d\theta_i}{2\pi} - \pi^* \xi_i\right) = -\pi^* d\xi_i = -\pi^* d\xi_j$$

no entanto, pela equação acima segue que

$$d\psi = -\pi^* \mathrm{e}. \tag{3.8}$$

No caso quando $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial onde cada fibra é uma esfera, também é possível definir uma função ângulo ψ tal que a igualdade (3.8) se verifica.

Observação 3.35. Quando E é um produto, isto é, $E = M \times \mathbb{R}^2$, ψ pode ser tomada como o pullback de $(1/2\pi)d\theta$ sob a projeção $E^0 = M \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Nesse caso ψ é fechada, logo, $\mathrm{e} = 0$.

Proposição 3.36. *Seja E um fibrado orientado, onde cada fibra é uma esfera S^n, $n \geq 1$. Se E tem uma seção que nunca se anula, então, a classe de Euler é identicamente nula.*

Proposição 3.37. *O número de Euler de uma variedade compacta orientável, definido por $\int_M \mathrm{e}(TM)$, é igual a característica de Euler $\chi(M) = \sum(-1)^q dim H^q$.*

Exemplo 3.38. A característica de Euler de uma n-esfera S^n é:

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, pela Proposição 3.37 se n é par temos

$$\int_{S^n} \mathrm{e}(TS^n) = 2 \Longrightarrow \mathrm{e}(TS^n) \neq 0.$$

Seja $n = 2k - 1$. Então existe uma seção do fibrado unitário de $S^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n}$ dado por

$$Y(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1}) \in T_1 S^{2n-1},\ x \in S^{2n-1}$$

que nunca se anula. Logo, pela Proposição 3.36 segue-seque $\mathrm{e}(T_1 S^{2n-1}) = 0$.

3.6 Sequência de Gysin

Um tipo especial de sequência, a sequência espectral, de um fibrado é essencialmente um modo de descrever as relações algébricas entre a cohomologia do espaço base, das fibras e do espaço do fibrado total. Em certas situações especiais a sequência espectral se reduz a uma sequência exata longa. Um desses casos especiais é a cohomologia de um fibrado cujas fibras são esferas. O resultado é uma sequência chamada **sequência de Gysin**.

Teorema 3.39. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial orientado com fibra S^k. Então, existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \longrightarrow H^n(E) \xrightarrow{\pi_*} H^{n-k}(M) \xrightarrow{\wedge \mathrm{e}} H^{n+1}(M) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+1}(E) \longrightarrow \cdots$$

em que as aplicações π_*, $\wedge\mathrm{e}$ e π^* são integração ao longo da fibra, multiplicação pela classe de Euler e o pullback natural, respectivamente.

3.7 Aplicações

Sejam $M = S^n$, $M = \mathbb{C}P^n$ ou $M = \mathbb{H}P^n$. Então M com a métrica canônica forma uma variedade Riemanniana onde todas as geodésicas são fechadas de mesmo período 2π (a menos de reparametrização), isto é, M é uma $C_{2\pi}$-variedade.

Observação 3.40. Seja (M,g) uma variedade Riemannina e $C = T_1M/S^1$ como definido em (1.30), onde $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Suponha que $(x_1,v_1) \sim (x_2,v_2)$, então

$$(x_2,v_2) = (\gamma_{x_1}^{v_1}(s), \dot{\gamma}_{x_1}^{v_1}(s))$$

para algum $s \in S^1$, ou seja,

$$(\gamma_{x_2}^{v_2}(0), \dot{\gamma}_{x_2}^{v_2}(0)) = (\gamma_{x_1}^{v_1}(s), \dot{\gamma}_{x_1}^{v_1}(s)).$$

Logo, pela unicidade das geodésicas obtemos

$$\gamma_{x_1}^{v_1} = \gamma_{x_2}^{v_2}.$$

Como (x_1,v_1) e (x_2,v_2) são elementos arbitrários de uma classe de equivalência, então podemos identificar $[(x,v)]$ com a geodésica $\Gamma(s) := (\gamma(2\pi s), \dot{\gamma}(2\pi s)) \in T_1M$ onde para todo $s \in S^1$ tem-se $\Gamma(s) \sim (x,v)$, ou seja,

$$[(x,v)] = \{(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\ ;\ s \in S^1\}.$$

Dessa forma, podemos definir uma aplicação $j : C \to T_1M$ por $j([(x,v)]) = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$. Assim, pelo Lema 3.22 obtemos uma aplicação $j^* : H^k(T_1M) \to H^k(C)$. Como $\pi \circ j = Id$ segue por um argumento análogo ao da demonstração da Proposição 3.23 que $j^* \circ \pi^* = Id$.

Lema 3.41. *Sejam $M = S^{2n}$ e $C = T_1S^{2n}/S^1$. Então, os números de Betti de C são:*

$$b_i(C) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par e } 0 \leq i \leq 4n-2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Tome a fibração $S^{2n-1} \to T_1S^{2n} \to S^{2n}$. Então, a sequência de Gysin associada a esta fibração é:

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1S^{2n}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-(2n-1)}(S^{2n}) \xrightarrow{\wedge \mathrm{e}} H^{p+1}(S^{2n}) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1S^{2n}) \longrightarrow \cdots$$

Observe que como T_1S^{2n} é conexo temos $H^0(T_1S^{2n}) \cong \mathbb{R}$. Além disso, sabemos que

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0 \text{ ou } k = n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, como a sequência de Gysin é uma sequência exata longa e sabemos as cohomologias de S^{2n}, podemos calcular as cohomologias de T_1S^{2n}.

- Para $0 < p \leq 2n-2$ temos $p-(2n-1) < 0$. Logo, $H^{p-(2n-1)}(S^{2n}) = 0$. Usando,

$$\underbrace{H^p(S^{2n})}_{=0} \to H^p(T_1S^{2n}) \to \underbrace{H^{p-(2n-1)}(S^{2n})}_{=0} \to H^{p+1}(S^{2n})$$

  concluímos que $H^p(T_1S^{2n}) = 0$ para todo $0 < p \leq 2n-2$.

- Se $p = 2n-1$ temos

$$0 \longrightarrow H^{2n-1}(T_1S^{2n}) \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^0(S^{2n})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge \mathrm{e}} \underbrace{H^{2n}(S^{2n})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi^*} H^{2n}(T_1S^{2n}) \longrightarrow \underbrace{H^1(S^{2n})}_{=0}$$

Como a classe de Euler de uma esfera de dimensão par é diferente de zero, como vimos no exemplo 3.38, e a $\dim H_0(S^{2n}) = 1$ segue-se que a aplicação $\wedge e : H^0(S^{2n}) \to H^{2n}(S^{2n})$ é injetora. Logo,

$$H^{2n-1}(T_1S^{2n}) \cong \mathrm{Im}(\pi_*) = \ker(\wedge e) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \cong \mathrm{Im}(\wedge e) = \ker(\pi^*).$$

Além disso, como

$$\dim \mathrm{Im}(\pi^*) + \dim \ker(\pi^*) = \dim H^{2n}(S^{2n}) = 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\pi^*) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(\pi^*) = 0$$

temos $H^{2n}(T_1S^{2n}) = \mathrm{Im}(\pi^*) = 0$.

- Se $2n+1 \leq p \leq 4n-2$ segue que $H^{p-(2n-1)}(S^{2n}) = 0$ pois $2 \leq p-(2n-1) \leq 2n-1$. Então, como

$$\underbrace{H^p(S^{2n})}_{=0} \to H^p(T_1S^{2n}) \to \underbrace{H^{p-(2n-1)}(S^{2n})}_{=0} \to H^{p+1}(S^{2n})$$

concluímos que $H^p(T_1S^{2n}) = 0$.

- Se $p = 4n-1$ temos

$$0 \to H^{4n-1}(T_1S^{2n}) \to \underbrace{H^{2n}(S^{2n})}_{\cong\mathbb{R}} \to \underbrace{H^{4n}(S^{2n})}_{=0}$$

Assim, $H^{4n-1}(T_1S^{2n}) \cong H^{2n}(S^{2n}) \cong \mathbb{R}$.

Resumindo, temos

$$H^p(T_1S^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = 4n-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando agora a fibração $S^1 \to T_1S^{2n} \to C$ podemos calcular as cohomologias de C a partir das cohomologias de T_1S^{2n}. A sequência de Gysin associada a esta fibração é:

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1S^{2n}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-1}(C) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1S^{2n}) \longrightarrow \cdots$$

onde $e \in H^2(C)$ é a classe de Euler do S^1-fibrado sobre C induzido pela fibração $S^1 \to T_1S^{2n} \to C$. Observe novamente que como C é conexo temos $H^0(C) \cong \mathbb{R}$.

- $p = 0$ temos

$$H^0(T_1S^{2n}) \to \underbrace{H^{-1}(C)}_{=0} \to H^1(C) \to \underbrace{H^1(T_1S^{2n})}_{=0} \to \cdots$$

Logo, $H^1(C) = 0$.

- Se $p = 1$ temos

$$0 \to \underbrace{H^1(T_1S^{2n})}_{=0} \to H^0(C) \to H^2(C) \to \underbrace{H^2(T_1S^{2n})}_{=0} \to H^1(C) \to H^3(C) \to \underbrace{H^3(T_3S^{2n})}_{=0}$$

Logo, $H^2(C) \cong H^0 \cong \mathbb{R}$ e $H^3(C) \cong H^1(C) = 0$.

- De forma indutiva, para $0 \leq k \leq 2n-3$ temos

$$\underbrace{H^{2k+1}(T_1S^{2n})}_{=0} \to H^{2k}(C) \to H^{2k+2}(C) \to \underbrace{H^{2k+2}(T_1S^{2n})}_{=0} \to H^{2k+1}(C) \to H^{2k+3}(C) \to \underbrace{H^{2k+3}(T_3S^{2n})}_{=0}$$

Logo, $H^{2k+2}(C) \cong H^{2k} \cong \mathbb{R}$ e $H^{2k+3}(C) \cong H^{2k+1}(C) = 0$, ou seja,

$$H^p(C) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se p é par e } 0 \leq p \leq 4n-3 \\ 0, & \text{se p é ímpar e } 0 \leq p \leq 4n-3 \end{cases}$$

- Se $p = 4n-3$ temos
$$\underbrace{H^{4n-3}(T_1S^{2n})}_{=0} \to H^{4n-4}(C) \to H^{4n-2}(C) \to \underbrace{H^{4n-2}(T_1S^{2n})}_{=0}$$
Logo, $H^{4n-2}(C) \cong H^{4n-4}(C) \cong \mathbb{R}$.
- Seja $p = 4n-2$. Como dim $C = 4n-2$ temos $\Omega^{4n}(C) = 0$ e isto implica que $H^{4n}(C) = 0$. Assim, temos
$$\underbrace{H^{4n-3}(C)}_{=0} \longrightarrow H^{4n-1}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{4n-1}(T_1S^{2n})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{4n-2}(C)}_{\cong\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H^{4n}(C)}_{=0}$$
Logo, $H^{4n-1}(C) \cong \mathrm{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0$.

Portanto, $b_p(C) = 1$ se p é um número par tal que $0 \leq p \leq 4n-2$ e zero nos outros casos. □

Lema 3.42. *Sejam $M = S^{2n+1}$ e $C = T_1S^{2n+1}/S^1$. Então, os números de Betti de C são:*
$$b_i(C) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ é par e } 0 \leq i \leq 2n-2 \\ 2, & \text{se } i = 2n \\ 1, & \text{se } i \text{ é par e } 2n+2 \leq i \leq 4n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Tome a fibração $S^{2n} \to T_1S^{2n+1} \to S^{2n+1}$. A sequência de Gysin associada a esta fibração é:
$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-(2n)}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1S^{2n+1}) \longrightarrow \cdots$$
Como no Lema 3.41, temos $H^0(T_1S^{2n+1}) \cong \mathbb{R}$, $H^0(S^{2n+1}) \cong H^{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{R}$ e $H^k(S^{2n+1}) = 0$ quando $k \neq 0$ e $k \neq 2n+1$.

- Se $0 < p \leq 2n-1$ temos $H^{p-2n}(S^{2n+1}) = 0$ pois $p-2n < 0$. Logo, nesses casos $H^p(S^{2n+1}) = 0 = H^{p-2n}(S^{2n+1})$ e pela parte da sequência
$$\underbrace{H^p(S^{2n+1})}_{=0} \to H^p(T_1S^{2n+1}) \to \underbrace{H^{p-2n}(S^{2n+1})}_{=0} \to H^{p+1}(S^{2n+1})$$
obtemos $H^p(T_1S^{2n+1}) = 0$.
- Se $p = 2n$ temos
$$0 \longrightarrow H^{2n}(T_1S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^0(S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} \underbrace{H^{2n+1}(S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi^*} H^{2n+1}(T_1S^{2n+1}) \longrightarrow \underbrace{H^1(S^{2n+1})}_{=0}$$
Como no Exemplo 3.38 vimos que a classe de Euler de uma esfera de dimensão ímpar é zero, então
$$0 = \mathrm{Im}(\wedge e) = \ker(\pi^*)$$
Assim,
$$\mathbb{R} \cong \mathrm{Im}(\pi^*) \cong H^{2n+1}(T_1S^{2n+1}) \tag{3.9}$$
e
$$\mathbb{R} \cong \ker(\wedge e) = \mathrm{Im}(\pi_*) \cong H^{2n}(T_1S^{2n+1}).$$
- Se $2n+2 \leq p \leq 4n$ temos $H^{p-2n}(S^{2n+1})$ pois $2 \leq p-2n \leq 2n$. Logo,
$$\underbrace{H^p(S^{2n+1})}_{=0} \to H^p(T_1S^{2n+1}) \to \underbrace{H^{p-2n}(S^{2n+1})}_{=0} \to H^{p+1}(S^{2n+1})$$
e isto implica que $H^p(T_1S^{2n+1}) = 0$.
- Se $p = 4n+1$ temos
$$0 \to H^{4n+1}(T_1S^{2n+1}) \to \underbrace{H^{2n+1}(S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \to \underbrace{H^{4n+2}(S^{2n+1})}_{=0} \to H^{4n+2}(T_1S^{2n+1})$$

Logo, $H^{4n+1}(T_1S^{2n+1}) \cong H^{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{R}$.

Resumindo:

$$H^p(T_1S^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = 0, 2n, 2n+1, 4n+1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando a fibração $S^1 \to T_1S^{2n+1} \to C$, obtemos a sequência de Gysin

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1S^{2n+1}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-1}(C) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1S^{2n+1}) \longrightarrow \cdots$$

- Se $p = 0$ temos

$$H^0(T_1S^{2n+1}) \to \underbrace{H^{-1}(C)}_{=0} \to H^1(C) \to \underbrace{H^1(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$

  ou seja, $H^1(C) = 0$.

- Se $p = 1$ temos

$$\underbrace{H^1(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^0(C) \to H^2(C) \to \underbrace{H^2(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^1(C) \to H^3(C) \to \underbrace{H^3(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$

  Logo, $H^2(C) \cong H^0(C) \cong \mathbb{R}$ e $H^3(C) \cong H^1(C) = 0$.

- Indutivamente, se $0 \leq k \leq n-2$ temos $1 \leq 2k+1 < 2k+2 < 2k+3 \leq 2n-1$ e disso segue que

$$\underbrace{H^{2k+1}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^{2k}(C) \to H^{2k+2}(C) \to \underbrace{H^{2k+2}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^{2k+1}(C) \to H^{2k+3}(C) \to \underbrace{H^{2k+3}(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$

  Logo, $H^{2k+2}(C) \cong H^{2k}(C) \cong \mathbb{R}$ e $H^{2k+3}(C) \cong H^{2k+1}(C) = 0$.

- Se $p = 2n-1$ temos

$$\underbrace{H^{2n-1}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to \underbrace{H^{2n-2}(C)}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} H^{2n}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{2n}(T_1S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \to \underbrace{H^{2n-1}(C)}_{=0} \to H^{2n+1}(C) \to \underbrace{H^{2n+1}(T_1S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}}$$

  Pela observação 3.40 obtemos uma aplicação $j^* : H^k(T_1S^{2n+1}) \to H^k(C)$ tal que $j^* \circ \pi^* = Id$. Assim, pelo Lema de Splitting segue-se que

$$H^{2n}(C) \cong H^{2n-2}(C) \oplus H^{2n}(T_1S^{2n+1}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

  Tome agora a seguinte parte da sequência de Gysin:

$$0 \to H^{2n+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{2n+1}(T_1S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{2n}(C)}_{\cong\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} H^{2n+2}(C) \to \underbrace{H^{2n+2}(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$

  Como vimos na equação (3.9)

$$H^{2n+1}(T_1S^{2n+1}) \overset{\widetilde{\pi}^*}{\cong} H^{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{R}$$

  onde $\widetilde{\pi}^* := \pi^* : H^{2n+1}(T_1S^{2n+1}) \to H^{2n+1}(S^{2n+1})$. Então, $H^{2n+1}(T_1S^{2n+1})$ é gerado por um elemento $\widetilde{\pi}^*\phi$ que é o pullback da forma volume ϕ em $\Omega^{2n+1}(S^{2n+1})$. Assim, se $t^1, \ldots, t^{2n+1}$ são coordenadas em S^{2n+1} segue-se que $\widetilde{\pi}^*\phi = dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{2n+1}$ e

$$\begin{aligned} \pi_*\big(\widetilde{\pi}^*\phi\big) &= dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^{2n+1} \int_{S^1} dx^i \\ &= 2\pi\, dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^{2n+1} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

  Logo, $\ker(\pi_*) = 0$, ou seja, π_* é injetora. Disso segue-se que $H^{2n+1}(C) \cong \mathrm{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0$ e $1 = \dim \mathrm{Im}(\pi_*) = \dim \ker(\wedge e)$. Assim,

$$2 = \dim H^{2n}(C) = \dim \mathrm{Im}(\wedge e) + 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\wedge e) = 1.$$

  Logo, $b_{2n+2}(C) = \dim H^{2n+2}(C) = \dim \mathrm{Im}(\wedge e) = 1$.

- Se $n+1 \leq k \leq 2n-1$ temos
$$2n+2 \leq 2k < 2k+1 < 2k+2 \leq 4n-2.$$
Logo,
$$\underbrace{H^{2k}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^{2k-1}(C) \to H^{2k+1}(C) \to \underbrace{H^{2k+1}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to H^{2k}(C) \to H^{2k+2}(C) \to \underbrace{H^{2k+2}(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$
e de forma indutiva obtemos: $H^{2k+1}(C) \cong H^{2k-1}(C) = 0$ e $H^{2k+2}(C) \cong H^{2k}(C) \cong \mathbb{R}$.
- Se $p = 4n$ temos
$$\underbrace{H^{4n}(T_1S^{2n+1})}_{=0} \to \underbrace{H^{4n-1}(C)}_{=0} \to H^{4n+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{4n+1}(T_1S^{2n+1})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{4n}(C)}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} H^{4n+2}(C) \to \underbrace{H^{4n+2}(T_1S^{2n+1})}_{=0}$$
Como $H^{4n+1}(T_1S^{2n+1})$ é gerado pela forma volume de T_1S^{2n+1} temos $\pi_* \neq 0$. Logo, como $\mathrm{Im}(\pi_*) \subset H^{4n}(C)$ temos
$$1 \leq \dim \mathrm{Im}(\pi_*) \leq H^{4n}(C) = 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\pi_*) = 1$$
e $\dim\ker(\pi_*) = \dim H^{4n+1}(T_1S^{2n+1}) - \dim \mathrm{Im}(\pi_*) = 0$. Assim,
$$H^{4n+1}(C) \cong \mathrm{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0.$$
Além disso, como $1 = \dim \mathrm{Im}(\pi_*) = \dim\ker(\wedge e)$ e $\dim H^{4n}(C) = 1$ temos
$$0 = \mathrm{Im}(\wedge e) \cong H^{4n+2}(C).$$

Portanto, $b_k(C) = 1$ se k é um inteiro par tal que $0 \leq k \leq 4n$ e $k \neq 2n$, $b_{2n}(C) = 2$ e $b_k(C) = 0$ nos outros casos. $\square$

Lema 3.43. *Sejam $M = \mathbb{C}P^n$ e $C = T_1\mathbb{C}P^n/S^1$. Então, os números de Betti de C são:*
$$b_0(C) = 1, b_2(C) = 2, b_4(C) = 3, \ldots, b_{2n-2}(C) = n = b_{2n}, b_{2n+1}(C) = n-1, \ldots, b_{4n-2}(C) = 1$$
e $b_p = 0$ se p é ímpar.

Demonstração. Demonstraremos o caso $n = 2m$, o caso n ímpar é análogo. Sabemos que
$$H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se k é par e } 0 \leq k \leq 2n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tome a fibração $S^{4m-1} \to T_1\mathbb{C}P^{2m} \to \mathbb{C}P^{2m}$. A sequência de Gysin associada a esta fibração é:
$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(\mathbb{C}P^{2m}) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \longrightarrow \cdots$$
Como $T_1\mathbb{C}P^{2m}$ é conexo temos $H^0(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong \mathbb{R}$.

- Para $1 \leq p \leq 4m-2$ temos $p-(4m-1) < 0$. Logo $H^{p-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) = 0$ e de
$$\underbrace{H^{(p-1)-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m})}_{=0} \to H^p(\mathbb{C}P^{2m}) \to H^p(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to \underbrace{H^{p-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$
segue que $H^p(\mathbb{C}P^{2m}) \cong H^p(T_1\mathbb{C}P^{2m})$. Assim,
$$H^p(T_1\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se p é par e } 1 \leq p \leq 4m-2 \\ 0, & \text{se p é ímpar e } 1 \leq p \leq 4m-2. \end{cases}$$
- Se $p = 4m-1$ temos
$$0 \to H^{4m-1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^0(\mathbb{C}P^{2m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} \underbrace{H^{4m}(\mathbb{C}P^{2m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi^*} H^{4m}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to \underbrace{H^1(\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Como a característica de Euler de $\mathbb{C}P^n$ é $n+1$ então pela Proposição 3.37 temos

$$\int_{\mathbb{C}P^{2m}} \mathrm{e} = 2m+1 \Longrightarrow \mathrm{e} \neq 0.$$

Assim, como $\dim \mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) \geq 1$ e $\mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) \subset H^{4m}(\mathbb{C}P^{2m})$ temos

$$1 \leq \dim \mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) \leq \dim H^{4m}(\mathbb{C}P^{2m}) = 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) = 1$$

e disso segue que

- $\dim \ker(\wedge \mathrm{e}) = \dim H^0(\mathbb{C}P^{2m}) - \dim \mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) = 1 - 1 = 0$
- $1 = \dim \mathrm{Im}(\wedge \mathrm{e}) = \dim \ker(\pi^*)$
- $\dim \mathrm{Im}(\pi^*) = \dim H^{4m}(\mathbb{C}P^{2m}) - \dim \ker(\pi^*) = 1 - 1 = 0$

Assim,

$$H^{4m-1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong \mathrm{Im}(\pi_*) = \ker(\wedge \mathrm{e}) = 0$$

e

$$H^{4m}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong \mathrm{Im}(\pi^*) = 0$$

- Se $2m \leq k \leq 4m-1$ temos $2 \leq 2k+1-(4m-1) \leq 4m$. Assim, de

$$0 \to H^{2k+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \stackrel{\pi_*}{\to} H^{2k+1-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) \stackrel{\wedge \mathrm{e}}{\to} 0 \stackrel{\pi^*}{\to} H^{2k+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to H^{2k+2-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) \to 0$$

segue que

$$H^{2k+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong H^{2k+1-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) = H^{2(k+1-2m)}(\mathbb{C}P^{2m}) \cong \mathbb{R} \tag{3.10}$$

e

$$H^{2k+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong H^{2k+2-(4m-1)}(\mathbb{C}P^{2m}) = H^{2(k+1-2m)+1}(\mathbb{C}P^{2m}) = 0$$

Logo,

$$H^p(T_1\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} 0, & \text{se p é par e } 4m+1 \leq p \leq 8m-1 \\ \mathbb{R}, & \text{se p é ímpar e } 4m+1 \leq p \leq 8m-1. \end{cases}$$

Tomando a fibração $S^1 \to T_1\mathbb{C}P^{2m} \to \mathbb{C}$ obtemos a sequência de Gysin

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-1}(C) \xrightarrow{\wedge \mathrm{e}} H^{p+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \longrightarrow \cdots$$

- Se $p = 0$ temos

$$H^0(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to \underbrace{H^{-1}(C)}_{=0} \to H^1(C) \to \underbrace{H^1(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Logo, $H^1(C) = 0$

- Se $p = 1$ temos

$$\underbrace{H^1(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0} \to H^0(C) \stackrel{\wedge \mathrm{e}}{\to} H^2(C) \stackrel{\pi^*}{\to} H^2(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to \underbrace{H^1(C)}_{=0} \to H^3(C) \to \underbrace{H^3(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Pela Observação 3.40 obtemos $j^* : H^2(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to H^2(C)$ tal que $j^* \circ \pi^* = Id$. Logo, pelo Lema de Splitting segue-se que

$$H^2(C) \cong H^0(C) \oplus H^2(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad \text{e} \quad H^3(C) = 0.$$

.

- Para $0 \leq k \leq 2m-2$ temos

$$\underbrace{H^{2k+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0} \to H^{2k}(C) \stackrel{\wedge \mathrm{e}}{\to} H^{2k+2}(C) \stackrel{\pi^*}{\to} H^{2k+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to \underbrace{H^{2k+1}(C)}_{=0} \to H^{2k+3}(C) \to \underbrace{H^{2k+3}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Assim, $H^{2k+3}(C) = 0$ e por indução obtemos

$$H^{2k+2}(C) \cong H^{2k}(C) \oplus H^{2k+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{k+2 \text{ vezes}}.$$

- Se $p = 4m-1$ temos

$$\underbrace{H^{4m-1}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0} \to H^{4m-2}(C) \to H^{4m}(C) \to \underbrace{H^{4m}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Logo,

$$H^{4m}(C) \cong H^{4m-2}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{2m \textit{ vezes}}.$$

- Se $p = 4m+1$ temos

$$0 \to H^{4m+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{4m+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{4m}(C)}_{\substack{\cong\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}\\ 2m \textit{ vezes}}} \xrightarrow{\wedge e} H^{4m+2}(C) \to \underbrace{H^{4m+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

Como π_* é injetora temos

$$H^{4m+1}(C) \cong \operatorname{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0.$$

Como

$$\dim\ker(\wedge e) = \dim\operatorname{Im}(\pi_*) = \dim H^{4m+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m}) - \dim\ker(\pi_*) = 1$$

temos

$$\dim\operatorname{Im}(\wedge e) = \dim H^{4m}(C) - \dim\ker(\wedge e) = 2m-1.$$

Logo,

$$H^{4m+2}(C) \cong \operatorname{Im}(\wedge e) \cong \mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}.$$

- Por indução, para $2m+1 \le k \le 4m-1$ temos

$$\underbrace{H^{4m+2}(C)}_{=0} \to H^{2k+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{2k+1}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{2k}(C)}_{\substack{\cong\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}\\ x_{2k} \textit{ vezes}}} \xrightarrow{\wedge e} H^{2k+2}(C) \to \underbrace{H^{2k+2}(T_1\mathbb{C}P^{2m})}_{=0}$$

onde $x_{2k} = \frac{(8m-2)-2k}{2} + 1 = 4m-k$. E pela mesma argumentação do caso anterior obtemos

$$H^{2k+1}(C) \cong \operatorname{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0$$

e

$$H^{2k+2}(C) \cong \operatorname{Im}(\wedge e) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{x_{2k+2}-1 \textit{ vezes}}$$

Portanto, $b_0(C) = 1$, $b_2(C) = 2$, $b_4(C) = 3, \ldots, b_{4m-2}(C) = 2m$, $b_{4m}(C) = 2m$, $b_{2m+2}(C) = 2m-2$, $\ldots$, $b_{8m-2}(C) = 1$ e $b_p(C) = 0$ se p é ímpar. □

Lema 3.44. *Sejam $M = \mathbb{H}P^n$ e $C = T_1\mathbb{H}P^n/S^1$. Então, os números de Betti de C são:*

$$b_0(C) = b_2(C) = 1, b_4(C) = b_6(C) = 2, \ldots, b_{4n-4}(C) = b_{4n-2}(C) = n = b_{4n} = b_{4n+2}(C), \ldots, b_{8n-2}(C) = 1$$

e $b_p = 0$ se p é ímpar.

Demonstração. Verificaremos o caso quando $n = 4m$. Os casos quando $n = 4m+1$, $n = 4m+2$, $n = 4m+3$ são análogos. Tome a fibração $S^{16m-1} \to T_1\mathbb{H}P^{4m} \to \mathbb{H}P^{4m}$. A sequência de Gysin associada a esta fibração é:

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-(16m-1)}(\mathbb{H}P^{4m}) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(\mathbb{H}P^{4m}) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \longrightarrow \cdots$$

Como $T_1\mathbb{H}P^{4m}$ é conexo temos $H^0(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong \mathbb{R}$. Além disso, sabe-se que

$$H^k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0,4,8,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Disso segue que:

- Para $1 \leq p \leq 16m-2$ temos $p-(16m-1) < 0$. Logo, nesses casos $H^{p-(16m-1)}(\mathbb{H}P^{4m}) = 0$, e como

$$\underbrace{H^{(p-1)-(16m-1)}(\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^p(\mathbb{H}P^{4m}) \to H^p(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \to \underbrace{H^{p-(16m-1)}(\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

segue-se que $H^p(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong H^p(\mathbb{H}P^{4m})$. Então, se $1 \leq p \leq 16m-2$ temos

$$H^p(T_1\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = 0,4,8,\ldots,16m-4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Se $p = 16m-1$ temos

$$0 \to H^{16m-1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^0(\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\wedge e} \underbrace{H^{16m}(\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi^*} H^{16m}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \to \underbrace{H^1(\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

Como a característica de Euler de $\mathbb{H}P^n$ é $n+1$ então pela Proposição 3.37 temos

$$\int_{\mathbb{H}P^{4m}} e = 4m+1 \Longrightarrow e \neq 0.$$

Assim, $\dim \mathrm{Im}(\wedge e) \geq 1$ e como $\mathrm{Im}(\wedge e) \subset H^{16m}(\mathbb{H}P^{4m})$ temos

$$1 \leq \dim \mathrm{Im}(\wedge e) \leq \dim H^{16m}(\mathbb{H}P^{4m}) = 1 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\wedge e) = 1$$

e disso segue que

  - $\dim \ker(\wedge e) = \dim H^0(\mathbb{H}P^{4m}) - \dim \mathrm{Im}(\wedge e) = 1-1 = 0$
  - $\mathbb{R} \cong \mathrm{Im}(\wedge e) = ker(\pi^*)$
  - $\dim \mathrm{Im}(\pi^*) = \dim H^{16m}(\mathbb{H}P^{4m}) - \dim \ker(\pi^*) = 0$

Logo,

$$H^{16m-1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong \mathrm{Im}(\pi_*) = \ker(\wedge e) = 0$$

e

$$H^{16m}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong \mathrm{Im}(\pi^*) = 0.$$

- Se $8m \leq k \leq 16m-1$ temos $2 \leq p_k := 2k+1-(16m-1) \leq 16m$. Além disso,

$$H^{2k+1}(\mathbb{H}P^{4m}) = H^{2k+2}(\mathbb{H}P^{4m}) = H^{2k+3}(\mathbb{H}P^{4m}) = 0$$

pois $2k+3 > 2k+2 > 2k+1 > 16m$. Disso segue que

$$0 \to H^{2k+1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \to H^{p_k}(\mathbb{H}P^{4m}) \to \underbrace{H^{2k+2}(\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{2k+2}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \to H^{p_k+1}(\mathbb{H}P^{4m}) \to 0$$

Assim,

$$H^{2k+2}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong H^{p_k+1}(\mathbb{H}P^{4m}) = H^{2(k+1-8m)+1}(\mathbb{H}P^{4m}) = 0$$

e

$$H^{2k+1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong H^{p_k}(\mathbb{H}P^{4m}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se k é ímpar} \\ 0, & \text{se k é par} \end{cases} \tag{3.11}$$

pois:

  - Se k é ímpar, isto é, $k = 2x+1$, então

$$p_k = 2(k+1) - 16m = 2(2x+2) - 16m = 4(x+1-4m).$$

– Se k é par, isto é, $k = 2x$ temos

$$p_k = 2(k+1) - 16m = 2(2x+1) - 16m = 4(x-4m) + 2.$$

Logo, para $16m+1 \leq p \leq 32m$ temos

$$H^p(T_1\mathbb{H}P^{4m}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } p = 4s+3, \ s \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Tomando a fibração $S^1 \to T_1\mathbb{H}P^{4m} \to C$ obtemos a sequência de Gysin

$$\cdots \longrightarrow H^p(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \xrightarrow{\pi_*} H^{p-1}(C) \xrightarrow{\wedge e} H^{p+1}(C) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \longrightarrow \cdots$$

- Se $p = 0$ temos

$$H^0(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \to \underbrace{H^{-1}(C)}_{=0} \to H^1(C) \to \underbrace{H^1(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

Logo, $H^1(C) = 0$.

- Se $p = 1$ temos

$$\underbrace{H^1(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^0(C) \to H^2(C) \to \underbrace{H^2(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^1(C) \to H^3(C) \to \underbrace{H^3(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

Logo, $H^2(C) \cong H^0(C) \cong \mathbb{R}$ e $H^3(C) \cong H^1(C) = 0$.

- Se $p = 3$ temos

$$\underbrace{H^3(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^2(C) \to H^4(C) \to \underbrace{H^4(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \to \underbrace{H^3(C)}_{=0} \to H^5(C) \to \underbrace{H^5(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

Pela Observação 3.40 obtemos $j^* : H^4(T_1\mathbb{C}P^{2m}) \to H^4(C)$ tal que $j^* \circ \pi^* = Id$. Logo, pelo Lema de Splitting segue-se que

$$H^4(C) \cong H^2(C) \oplus H^4(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad \text{e} \quad H^5(C) = 0.$$

- Para $0 \leq k \leq 4m-2$ temos

$$0 \to H^{4k}(C) \to H^{4k+2}(C) \to \underbrace{H^{4k+2}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{4k+1}(C) \to H^{4k+3}(C) \to 0$$

e

$$0 \to H^{4k+2}(C) \to H^{4k+4}(C) \to \underbrace{H^{4k+4}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \to \underbrace{H^{4k+3}(C)}_{=0} \to H^{4k+5}(C) \to 0$$

pois $2 \leq 4k+2 < 4k+4 \leq 16m-4$. Logo, indutivamente obtemos

$$H^{4k+2}(C) \cong H^{4k}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{(k+1)-vezes}, \qquad H^{4k+3}(C) \cong H^{4k+1}(C) = 0$$

e

$$H^{4k+4}(C) \cong H^{4k+2}(C) \oplus H^{4k+4}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{(k+2)-vezes}, \qquad H^{4k+5}(C) = 0.$$

- Se $p = 16m-3$ temos

$$0 \to H^{16m-4}(C) \to H^{16m-2}(C) \to \underbrace{H^{16m-2}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{16m-3}(C) \to H^{16m-1}(C) \to 0.$$

Logo,

$$H^{16m-2}(C) \cong H^{16m-4}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{4m-vezes} \quad \text{e} \quad H^{16m-1}(C) \cong H^{16m-3}(C) = 0.$$

- Se $p = 16m-1$ temos

$$0 \to H^{16m-2}(C) \to H^{16m}(C) \to \underbrace{H^{16m}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{16m-1}(C) \to H^{16m+1}(C) \to 0$$

Logo,

$$H^{16m}(C) \cong H^{16m-2}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{4m-vezes} \quad \text{e} \quad H^{16m+1}(C) \cong H^{16m-1}(C) = 0.$$

- Se $p = 16m+1$ temos

$$\underbrace{H^{16m+1}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{16m}(C) \to H^{16m+2}(C) \to \underbrace{H^{16m+2}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0}$$

Logo,

$$H^{16m}(C) \cong H^{16m-2}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{4m-vezes}$$

Continuando a sequência acima temos

$$0 \to 0 \to H^{16m+3}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{16m+3}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{16m+2}(C)}_{\substack{\cong\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R} \\ 4m-vezes}} \xrightarrow{\wedge e} H^{16m+4}(C) \to 0$$

Como π_* é injetora e $\dim H^{16m+2}(T_1\mathbb{H}P^{4m}) = 1$ então $\dim \operatorname{Im}(\pi_*) = 1$ e $\mathbb{R} \cong \operatorname{Im}(\pi_*) = \ker(\wedge e)$. Assim, $\dim \operatorname{Im}(\wedge e) = \dim H^{16m+2}(C) - \dim\ker(\wedge e) = 4m-1$ e, portanto,

$$H^{16m+3}(C) \cong \operatorname{Im}(\pi^*) = \ker(\pi_*) = 0$$

e

$$H^{16m+4}(C) \cong \operatorname{Im}(\wedge e) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{(4m-1)-vezes}.$$

- Por indução, para $4m \le k \le 8m-2$ temos

$$0 \to H^{4k+3}(C) \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{H^{4k+3}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{\cong\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi_*} \underbrace{H^{4k+2}(C)}_{\substack{\cong\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R} \\ x_{4k+2}-vezes}} \xrightarrow{\wedge e} H^{4k+4}(C) \to 0$$

onde

$$x_{4k+2} := \frac{(32-4) - \{\text{múltiplo de 4 menor ou igual a } 4k+2\}}{4} + 1 = \frac{32m-4-4k}{4} + 1 = 8m-k.$$

Pelo mesmo processo do caso anterior obtemos

$$H^{4k+3}(C) = 0 \quad \text{e} \quad H^{4k+4}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{(x_{4k+2}-1)-vezes}$$

Seguindo a sequência acima temos

$$0 \to H^{4k+3}(C) \to H^{4k+5}(C) \to \underbrace{H^{4k+5}(T_1\mathbb{H}P^{4m})}_{=0} \to H^{4k+4}(C) \to H^{4k+6}(C) \to 0$$

Logo,

$$H^{4k+5}(C) \cong H^{4k+3}(C) = 0 \quad \text{e} \quad H^{4k+6}(C) \cong H^{4k+4}(C) \cong \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{(x_{4k+2}-1)-vezes}$$

Portanto, temos

$$b_0(C) = b_2(C) = 1, b_4(C) = b_6(C) = 2, \ldots, b_{16m-4}(C) = b_{16m-2}(C) = 4m,$$

$$b_{16m}(C) = b_{16m+2}(C) = 4m, \ldots, b_{32m-4}(C) = b_{32m-2}(C) = 1.$$

$\square$

Capítulo 4

Variedades Simpléticas e Sistemas Hamiltonianos

4.1 Álgebra Linear Simplética

Definição 4.1. Um **espaço vetorial simplético** (V,ω) é um espaço vetorial real V munido de uma forma bilinear $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ que é

- anti-simétrica: $\omega(u,v) = -\omega(v,u)$ para todo $u,v \in V$.
- não-degenerada: $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in V \Longrightarrow u = 0$.

A forma ω é dita uma forma bilinear simplética em V.

Observação 4.2. A forma bilinear ω é as vezes chamada de uma **estrutura simplética linear** em V.

Exemplo 4.3. O exemplo mais simples de espaço vetorial simplético é $\mathbb{R}^{2n}$ equipado com a forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \tag{4.1}$$

onde $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ são coordenadas em $\mathbb{R}^{2n}$. Se $\langle\, ,\, \rangle$ é o produto Euclideano canônico de $\mathbb{R}^{2n}$ então a forma simplética ω_0 se escreve como

$$\omega_0(X,Y) = \langle J_0X, Y\rangle$$

para todo $X,Y \in \mathbb{R}^{2n}$, onde J_0 é a matriz em blocos

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4.4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e V^* o seu dual. Então, $V \oplus V^*$ com a forma bilinear

$$\omega(X+f, Y+g) = f(Y) - g(X)$$

é um espaço vetorial simplético.

Definição 4.5. Seja (V,ω) um espaço vetorial simplético de $L \subset V$ um subespaço vetorial. O **ortogonal simplético** de L é o conjunto

$$L^\omega = \{u \in V\ ;\ \omega(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in L\}.$$

Teorema 4.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e ω uma forma bilinear anti-simétrica em V. Então, existe uma base $u_1,\ldots,u_k,e_1,\ldots,e_n,\ f_1,\ldots,f_n$ de V tal que*

- $\omega(u_i,v) = 0$*, para todo* $1 \le i \le k$ *e para todo* $v \in V$*,*

- $\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j)$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$ *e*
- $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, *para todo* $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração. Seja $U = \{u \in V \ ; \ \omega(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$. Escolha uma base $u_1, \ldots, u_k$ de U e um espaço complementar W de U em V tal que

$$V = U \oplus W.$$

Como $U \cap W = \{0\}$ segue que para qualquer $e_1 \in W$ não nulo existe $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. Então, fixando e_1 e f_1 com essa propriedade podemos assumir que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Seja

$$W_1 = span\{e_1, f_1\}.$$

Veja que se $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\omega}$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v, e_1) = -b \\ 0 &= \omega(v, f_1) = a \end{aligned}$$

Logo, $v = 0$, ou seja, $W_1 \cap W_1^{\omega} = \{0\}$. Além disso, se $v \in W$ é tal que $\omega(v, e_1) = c$ e $\omega(v, f_1) = d$ segue que

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1)$$

onde $(-cf_1 + de_1) \in W_1$ e $(v + cf_1 - de_1) \in W_1^{\omega}$. Portanto, $W = W_1 \oplus W_1^{\omega}$.

Tome agora $e_2 \in W_1^{\omega}$ não nulo. Então, existe $f_2 \in W_1^{\omega}$ tal que $\omega(e_2, f_2) \neq 0$. Assuma que $\omega(e_2, f_2) = 1$ e tome $W_2 = span\{e_2, f_2\}$. Pelo mesmo argumento anterior podemos mostrar que $W_1^{\omega} = W_2 \oplus W_2^{\omega}$. Como $\dim V < \infty$ esse processo eventualmente acaba e, assim, obtemos para algum $n \in \mathbb{N}$

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

onde todos os somandos são ortogonais com respeito a ω e onde W_i tem base e_i, f_i com $\omega(e_i, f_i) = 1$. □

Corolário 4.7. *Seja* (V, ω) *um espaço vetorial simplético. Então,* $\dim V$ *é par e existe uma base* $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$ *de* V *tal que*

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad e \qquad \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0.$$

Demonstração. Como ω é não-degenerado segue que

$$U = \{u \in V \ ; \ \omega(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in V\} = \{0\}.$$

Então, pelo Teorema 4.6 segue o desejado. □

Definição 4.8. Sejam (V_1, ω_1) e (v_2, ω_2) espaços vetoriais simpléticos. Dizemos que uma transformação linear $T : V_1 \to V_2$ é **simplética** se $T^*\omega_2 = \omega_1$, ou seja, se $\omega_2(T(u), T(v)) = \omega_1(u, v)$ para quaisquer $u, v \in V_1$. Se V_1 e V_2 tem a mesma dimensão então dizemos que T é um **simplectomorfismo** e que (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) são **simplectomorfos**.

Proposição 4.9. *Seja* (V, ω) *um espaço vetorial simplético. Então para qualquer subespaço* $W \subset V$ *vale*

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\omega}.$$

Demonstração. Seja $W^0 = \{f \in V^* \ ; \ W \subset \ker f\}$ o anulador de W. Defina a aplicação $T : V \to V^*$ por

$$T(v) = \omega(v, \cdot\,).$$

Como ω é não-degenerada segue que $\ker T = \{0\}$. Logo, T é um isomorfismo. Assim, como

$$\begin{aligned} T^{-1}(W^0) &= \{v \in V \,;\, T(v) \in W^0\} \\ &= \{v \in V \,;\, \omega(v,u) = 0, \ \forall\, u \in W\} \\ &= W^{\omega}. \end{aligned}$$

e para qualquer subespaço W de qualquer espaço vetorial V temos $\dim W + \dim W^0 = \dim V$ concluímos que

$$\dim V = \dim W + \dim T^{-1}(W^0) = \dim W + \dim W^{\omega}.$$

□

4.2 Variedades Simpléticas

Definição 4.10. Uma **forma simplética** em uma variedade M é uma 2-forma ω satisfazendo:

- ω é fechada, ou seja, $d\omega = 0$
- ω é não-degenerada, ou seja, se para todo $x \in M$ temos $\omega_x(u,v) = 0$ para todo $v \in T_xM$ então $u = 0$.

Definição 4.11. Uma **variedade simplética** é um par (M,ω) formado por uma variedade M e uma forma simplética ω em M.

Exemplo 4.12. O exemplo mais simples e mais importante de variedade simplética é o $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n$ e sua forma simplética canônica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i.$$

De modo geral, qualquer espaço vetorial simplético é uma variedade simplética.

Exemplo 4.13. Outro exemplo importante e que será muito utilizado no decorrer desse trabalho é o fibrado cotangente $\pi : T^*M \to M$ de uma variedade M dotado da 2-forma ω_{can} que definiremos a seguir. Antes disso, defina a 1-forma tautológica $\alpha_{\text{taut}} \in \Omega^1(T^*M)$ por

$$\alpha_p(X) = \xi(d\pi_p X) \tag{4.2}$$

para todo $p := (x,\xi) \in T^*M$ e para todo $X \in T_p(T^*M)$. Então, defina a 2-forma canônica em T^*M por

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha_{\text{taut}}. \tag{4.3}$$

Seja $U \subset M$ um aberto com coordenadas $x^1,\ldots,x^n$. Então, as 1-formas $dx^i \in \Omega^1(U)$ associadas são tais que para cada $x \in U$, $dx^1|_x,\ldots,dx^n|_x$ formam uma base de T_x^*M. Se $\xi \in T_x^*M$ então $\xi = \sum \xi_i dx^i$, onde $\xi_i \in \mathbb{R}$ são unicamente determinadas por ξ. Logo,

$$x^1,\ldots,x^n,\xi_1,\ldots,\xi_n$$

são coordenadas naturais de T^*U. Estas coordenadas, por sua vez, induzem coordenadas em $T(T^*U)$ dadas por

$$\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n,\dot{\xi}_1,\ldots,\dot{\xi}_n$$

isto é, se $p = (x,\xi)$ e $X_p \in T_p(T^*U)$ então

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Logo, a 1-forma α_{taut} se escreve localmente como

$$\begin{aligned}
\alpha_p(X_p) &= \xi(d\pi_p X_p) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \dot{x}^j dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{x}^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i
\end{aligned}$$

Portanto, localmente temos

$$\omega_{\text{can}} = -d\alpha_{\text{taut}} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\xi_i. \tag{4.4}$$

Definição 4.14. Uma **aplicação simplética** $\varphi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ entre variedades simpléticas é uma aplicação diferenciável satisfazendo $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Se φ for um difeomorfismo, então, dizemos que φ é um **simplectomorfismo**.

Teorema 4.15 (Darboux)**.** *Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e seja $p \in M$. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ munido da forma simplética canônica ω_0. Então, existem vizinhanças $U \subset M$ de p, $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e um simplectomorfismo $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi(p) = 0$ e $\varphi^*\omega_0 = \omega$.*

Esse teorema nos diz que todas as variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente iguais.

4.3 Equações de Hamilton

Definição 4.16. Um sistema Hamiltoniano é uma tripla (M, ω, H) onde (M, H) é uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, chamada de função Hamiltoniana.

Associada a (M, ω, H) está o campo Hamiltoniano X_H, definido implicitamente por

$$i_{X_H}\omega = dH, \quad \text{i.e,} \quad dH(y) = \omega(X_H, y) \text{ para todo } y \in TM.$$

Teorema 4.17. *Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ e $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$. A curva $\rho_t = (p(t), q(t))$ é uma curva integral de X_H se, e somente se,*

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i}(p(t), q(t)) \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i}(p(t), q(t)) \end{cases} \qquad \textit{(Equações de Hamilton)}$$

Demonstração. Seja $X_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \right)$. Então,

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega &= \sum_{j=1}^{n} i_{X_H}(dp_j \wedge dq_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} [(i_{X_H}dp_j)\wedge dq_j - dp_j \wedge (i_{X_H}dq_j)] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j \right] \\ &= dH \end{aligned}$$

Agora sejam

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial}{\partial p_i} + b_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \quad \text{e} \quad dH = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j \right).$$

Então,

$$dH = i_{X_H}\omega = \sum_{i=1}^{n} i_{X_H}(dp_i \wedge dq_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i dq_i - b_i dp_i).$$

Logo,

$$a_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad b_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

e como ρ_t é uma curva integral de X_H segue que $\rho'(t) = X_H(\rho(t))$, ou seja,

$$\left(\frac{dp_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dp_n}{dt}(t), \frac{dq_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dq_n}{dt}(t) \right) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n).$$

Logo,

$$\frac{dp_i}{dt}(t) = a_i \quad \text{e} \quad \frac{dq_i}{dt}(t) = b_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

□

Proposição 4.18 (Conservação de Energia)**.** *Seja (M,ω) uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$. Então, $H(\varphi^t(x)) = H(x)$ para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, onde φ^t é o fluxo de X_H, ou seja, a função hamiltoniana é constante ao longo das órbitas do seu campo de vetores Hamiltoniano.*

Demonstração. Se φ^t é o fluxo de X_H temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H\left(\varphi^t(x)\right) &= dH\left(\varphi^t(x)\right)\frac{d}{dt}\varphi^t(x) \\ &= dH\left(\varphi^t(x)\right)X_H\left(\varphi^t(x)\right) \\ &= \omega\left(X_H\left(\varphi^t(x)\right), X_H\left(\varphi^t(x)\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$H\left(\varphi^t(x)\right) = H\left(\varphi^0(x)\right) = H(x) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

□

4.4 O colchete de Poisson

Definição 4.19. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial L sobre um corpo F juntamente com uma operação binária $[,] : L \times L \to L$ que satisfaz:

(i) Bilinearidade
$$[ax+by,z] = a[x,y]+b[y,z] \text{ e } [z,ax+by] = a[z,x]+b[z,y]$$
para todos $a,b \in F$ e $x,y,z \in L$.

(ii) Anticomutatividade
$$[x,y] = -[y,x] \text{ para todos } x,y \in L$$

(iii) A identidade de Jacobi
$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = 0$$
para todos $x,y,z \in L$.

O operador $[\,,\,]$ é chamado de comutador.

Seja M uma varidade suave e $X : M \to TM$ um campo de vetores em M. Com cada campo de vetores associamos:

1. O grupo a um parâmetro de difeomorfismos ou fluxo $\phi_t : M \to M$ onde
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t(p) = X(p).$$

2. A derivada de Lie. Para qualquer função $f : M \to \mathbb{R}$ a derivada na direção de X é uma nova função
$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\phi_t(p))$$
.

Definição 4.20. O **colchete de Poisson** ou **comutador** de dois campos de vetores X e Y em uma variedade M é o campo de vetor Z para o qual
$$\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y.$$
O colchete de Poisson de dois campos de vetores será denotado por
$$Z = \{X,Y\}.$$

Observação 4.21. Para ver que os operadores da definição acima estão bem definidos veja [Arn13], páginas 209-211.

Suponha que nos são dados dois campos de vetores X e Y em uma variedade M. Os fluxos correspondentes ϕ_t e ψ_t não comutam em geral: $\phi_t\psi_t \neq \psi_t\phi_t$. Mas o teorema a seguir nos dá uma condição para que isso ocorra.

Teorema 4.22 ([Arn13], pág 211-212)**.** *Os fluxos ϕ_t e ψ_t comutam se, e somente se, o colchete de Poisson dos campos de vetores correspondentes é igual a zero, isto é,*
$$\{X,Y\} = 0.$$

Seja (M,ω) uma variedade simplética. Para cada função $H : M \to \mathbb{R}$ corresponde um grupo a um parâmetro $\psi_t^H : M \to M$, onde
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t^H(p) = X_H(p).$$
Seja $F : M \to \mathbb{R}$ outra função em M.

Definição 4.23. O colchete de Poisson (F,H) das funções F e H dadas em uma variedade simplética (M,ω) é a derivada da função F na direção do fluxo com função hamiltoniana H, isto é,

$$(F,H)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F\left(\psi_t^H(p)\right).$$

Teorema 4.24. *Sejam X_B e X_C campos hamiltonianos com funções hamiltonianas B e C. Considere o colchete de Poisson $\{X_B,X_C\}$ desses campos de vetores. Então, o campo de vetor $\{X_B,X_C\}$ é hamiltoniano e sua função hamiltoniana é igual ao colchete de Poisson das funções hamiltonianas (B,C).*

Demonstração. Seja $(B,C) = D$. A identidade de Jacobi pode ser reescrita na forma

$$(A,D) = ((A,B),C) - ((A,C),B).$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_D} &= \mathcal{L}_{X_C}\mathcal{L}_{X_B} - \mathcal{L}_{X_B}\mathcal{L}_{X_C} \\ &= \mathcal{L}_{\{X_B,X_C\}} \end{aligned}$$

Logo,

$$X_D = \{X_B,X_C\}.$$

□

Teorema 4.25. *Os fluxos das funções hamiltonianas H_1 e H_2 comutam se, e somente se, o colchete de Poisson das funções H_1 e H_2 é (localmente) constante.*

Demonstração. Pelo Teorema (4.22) uma condição necessário e suficiente para que os fluxos de H_1 e H_2 comutem é $\{X_{H_1},X_{H_2}\} \equiv 0$. Pelo Teorema (4.24) temos $X_{(H_1,H_2)} = \{X_{H_1},X_{H_2}\}$. Se os fluxos de H_1 e H_2 comutam temos

$$d(H_1,H_2) = \omega\left(X_{(H_1,H_2)},\cdot\right) = \omega\left(\{X_{H_1},X_{H_2}\},\cdot\right) = \omega(0,\cdot) \equiv 0.$$

Portanto, (H_1,H_2) é (localmente) constante. Agora, se (H_1,H_2) é (localmente) constante, temos

$$0 = d(H_1,H_2) = \omega\left(X_{(H_1,H_2)},\cdot\right) = \omega\left(\{X_{H_1},X_{H_2}\},\cdot\right)$$

Como ω é não degenerada temos $\{X_{H_1},X_{H_2}\} \equiv 0$ e, portanto, os fluxos de H_1 e H_2 comutam. □

4.5 Fluxo Hamiltoniano no Fibrado Cotangente

Seja $\{\phi_t\}$ um grupo a um paramêtro de difeomorfismos, onde $\phi_t : M \to M$. Defina $H_1 : T^*M \to \mathbb{R}$ por

$$H_1(p,\xi) = \xi\left(V(p)\right). \tag{4.5}$$

onde $V : M \to TM$ um campo de vetores gerado por ϕ_t.

Teorema 4.26. *Seja $\omega = dp \wedge d\xi$ a forma canônica simplética de T^*M. Então, o fluxo $\psi_t^{H_1}$ associada a função Hamiltoniana H_1 é tal que*

$$\psi_t^{H_1}(p,\xi) = \left(\phi_t(p), \left((D\phi_t(p))^{-1}\right)^*\xi\right).$$

Demonstração. Como V é um campo de vetores gerado por ϕ_t temos

$$V(p) = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t(p)-p}{t} \quad \text{para todo } p \in M. \tag{4.6}$$

Por outro lado, podemos escrever $V(p) = v^1(p)\partial p^1 + \ldots + v^n(p)\partial p^n$ e $\xi = \xi_1 dp^1 + \ldots + \xi_n dp^n$, $\xi \in T_p^*M$. Então,

$$H_1(p,\xi) = \xi(V(p)) = \xi_1 v^1(p) + \ldots + \xi_n v^n(p)$$

implicando que

$$\frac{\partial H_1}{\partial \xi_i} = v^i(p) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial v^j}{\partial p_i}(p). \tag{4.7}$$

Como $\phi_{t+s} = \phi(t+s,p) = \phi(t,\phi(s,p))$ temos

$$\frac{\partial}{\partial s}\phi(t+s,p) = D\phi(t,\phi(s,p)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial s}(s,p),$$

onde $D\phi(t,p)$ denota a derivada de ϕ em relação a p. Defina $\psi_t : TM \to TM$ por

$$\psi_t(p,u) = \big(\phi_t(p), D\phi_t(p)u\big) \tag{4.8}$$

então, o campo de vetores gerado por esse fluxo é:

$$\begin{aligned} Y(p,u) &= \lim_{t\to 0} \frac{\psi_t(p,u) - \psi_0(p,u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\big(\phi_t(p), D\phi_t(p)u\big) - (p,u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\phi_t(p) - p}{t}, \frac{D\phi_t(p)u - u}{t}\right) \\ &= \left(V(p), \lim_{t\to 0} \frac{D\phi_t(p)u - u}{t}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{D\phi_t(p)u - u}{t} &= \lim_{t\to 0} D\left(\frac{\phi_t(p) - I}{t}\right) u \\ &= D\left(\lim_{t\to 0} \frac{\phi_t(p) - \phi_0(p)}{t}\right) u \\ &= DV(p)u. \end{aligned}$$

temos,

$$Y(p,u) = (V(p), DV(p)u) \in TTM.$$

Agora queremos definir um fluxo no fibrado cotangente a partir do fluxo que definimos em (4.8). Seja $\widetilde{\psi}_t : T^*M \to T^*M$ definido por

$$\widetilde{\psi}_t(p,\xi) = \big(\phi_t(p), \xi \circ (D\phi_t(p))^{-1}\big),$$

onde $(D\phi_t(p))^{-1} : T_{\phi_t(p)}M \to T_pM$. Como $(D\phi_t(p))^{-1} \cdot D\phi_t(p) = \mathrm{Id}$ segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(p))^{-1} \cdot D\phi_t(p) + (D\phi_t(p))^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(p)) = 0$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(p))^{-1}\Big|_{t=0} &= -(D\phi_0(p))^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t)\Big|_{t=0} \cdot (D\phi_0(p))^{-1} \\ &= -\mathrm{Id} \cdot DV(p) \cdot \mathrm{Id} \\ &= -DV(p) \end{aligned}$$

Assim, o campo gerado pelo fluxo $\widetilde{\psi}$ em T^*M é:

$$\begin{aligned}
X(p,\xi) &:= \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{\psi}_t(p,\xi)-\widetilde{\psi}_0(p,\xi)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\phi_t(p),\xi\circ(D\phi_t(p))^{-1}\right)-\left(\phi_0(p),\xi\circ(D\phi_0(p))^{-1}\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\phi_t(p)-p}{t},\frac{\xi\circ(D\phi_t(p))^{-1}-\xi\circ(D\phi_0(p))^{-1}}{t}\right)\\
&= \left(V(p),\xi\left(\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t(p))^{-1}\big|_{t=0}\right)\right)\\
&= \left(V(p),\xi\left(-DV(p)(\cdot)\right)\right)\\
&= \left(V(p),-\xi\left(DV(p)(\cdot)\right)\right)
\end{aligned}$$

Como,

$$-\xi\circ DV_p(\partial p^i)=-\sum_{j=1}^{n}\xi^j\frac{\partial v^j}{\partial p^i}(p)=-\frac{\partial H_1}{\partial p^i}(p,\xi)\quad \text{e}\quad v^i(p)=\frac{\partial H_1}{\partial \xi^i}(p,\xi)$$

então, pelo Teorema 4.17 segue que

$$X=X_{H_1}\quad \text{e}\quad \psi_t^{H_1}(p,\xi)=\widetilde{\psi}_t(p,\xi)=\left(\phi_t(p),\left((D\phi_t(p))^{-1}\right)^*\xi\right).$$

□

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana e $H_0:T^*M\to\mathbb{R}$ uma função hamiltoniana definida por

$$H_0(p,\xi)=\sup\{\xi(v);v\in T_pM \text{ e } g(v,v)=1\},\tag{4.9}$$

isto é, H_0 é a norma dual de g. Tome H_1 como definido na equação (4.5), então:

Teorema 4.27. *Se ϕ_t é um grupo a um parâmetro de isometrias, então, os fluxos $\psi_t^{H_0}$ e $\psi_t^{H_1}$ associados, respectivamente, as funções hamiltonianas H_0 e H_1 comutam.*

Demonstração. Como ϕ_t são isometrias em M temos

$$\phi_t^*g=g\Longrightarrow g(u,v)=g(D\phi_t(p)(u),D\phi_t(p)(v)),\ \text{para tado } u,v\in T_pM.$$

Quero verificar que $\psi_t^{H_1}$ são isometrias em T^*M. De fato, pelo Teorema (4.26) temos

$$\begin{aligned}
{\psi_t^{H_1}}^*H_0(p,\xi) &= H_0\left(\psi_t^{H_1}(p,\xi)\right)\\
&= H_0\left(D\phi_t(p)^{-1*}\xi\right)\\
&= H_0\left(\xi\circ D\phi_t(p)^{-1}\right)\\
&= \sup\left\{\xi\circ D\phi_t(p)^{-1}(v);v\in T_pM \text{ e } g(v,v)=1\right\}\\
&= \sup\left\{\xi\left(D\phi_t(p)^{-1}(v)\right);v\in T_pM \text{ e } g\left(D\phi_t(p)^{-1}(v),D\phi_t(p)^{-1}(v)\right)=1\right\}\\
&= H_0(p,\xi)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de $D\phi_t(p)^{-1}$ ser sobrejetora. Então,

$$\begin{aligned}
(H_0,H_1) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}H_0\left(\psi_t^{H_1}(p,\xi)\right)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}H_0(p,\xi)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.25 os fluxos $\psi_t^{H_0}$ e $\psi_t^{H_1}$ comutam. □

Teorema 4.28. *Sejam (M,F) uma variedade Finsler e $H : T^*M \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano tal que $F = H \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H^2}$. Se $X_{\frac{1}{2}H^2}$ é o campo de vetores hamiltoniano associado a função $\frac{1}{2}H^2$ então $X_{\frac{1}{2}H^2}$ descreve as geodésicas da métrica Finsler F, isto é, a projeção da curva integral de $X_{\frac{1}{2}H^2}$ sobre $\pi : T^*M \to M$ são as geodésicas de F.*

Demonstração. Seja

$$\widetilde{H}(x,\xi) = \frac{1}{2}g^{ij}(\xi)\xi_i\xi_j,$$

onde $g^{ij}(\xi)$ é a inversa de g_{ij} e $g_{ij}(y)y^j = \xi_i$ (ver seção 1.2.2). Pelas Proposição 1.16 e Proposição 1.17 obtemos

$$\begin{aligned} h^{ij}(\xi) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^2(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2\left(\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}F^2}(\xi)\right)}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^{*2}(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \\ &= (g^*)^{ij}(\xi). \end{aligned}$$

Logo, pelas observações feitas na seção 1.2.2 obtemos

$$\widetilde{H}(x,\xi) = \frac{1}{2}h^{ij}(\xi)\xi_i\xi_j = \frac{1}{2}H^2(x,\xi).$$

Pelo Teorema 1.33 o fluxo cogeodésico de F é o fluxo $\psi_t^{\tilde{H}}$ associado ao campo Hamiltoniano $X_{\tilde{H}} = X_{\frac{1}{2}H^2}$ concluímos que

$$\pi\left(\psi_t^{\tilde{H}}(x,\xi)\right) = \gamma(t), \qquad \xi \in T_x^*M$$

é uma geodésicas de F. □

Teorema 4.29. *Sejam (M,F) uma variedade Finsler e F^* a norma dual de F. Se $X_{\frac{1}{2}F^{*2}}$ é o campo de vetores hamiltoniano associado a função $\frac{1}{2}F^{*2}$ então $X_{\frac{1}{2}F^{*2}}$ descreve as geodésicas da métrica Finsler F, isto é, a projeção da curva integral de $X_{\frac{1}{2}F^{*2}}$ sobre $\pi : T^*M \to M$ são as geodésicas de F.*

Demonstração. Como a função hamiltoniana H definida em (1.24) é, pela igualdade (1.20), tal que

$$H(x,\xi) = \frac{1}{2}F^{*2}(x,\xi).$$

Então pelo Teorema 1.33 segue o desejado. □

4.6 Bifurcações e o Princípio de Hamilton

Os resultados dessa seção foram retirados quase exclusivamente de [Wei78] e serão de fundamental importância para as discussões feitas no Capítulo 5.

4.6.1 Princípio de Hamilton

Definição 4.30. O **espaço de free loop** ΛM de qualquer variedade M de dimensão finita é o espaço de todas as aplicações C^∞ de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ em M, isto é,

$$\Lambda M = \{c : S^1 \to M; c \text{ é } C^\infty\}.$$

Definição 4.31. Um **caminho suave** de $[0,1]$ em ΛM é uma família $\{c_s; s \in [0,1]\}$ de loops para os quais o cilindro $S^1 \times [0,1] \to M$ definido por $C(t,s) = c_s(t)$ é C^∞.

O espaço tangente $T_c(\Lambda M)$ em um ponto $c : S^1 \to M$ consiste de todos os campos de vetores suaves ao longo de c, isto é,

$$T_c(\Lambda M) = \{v : S^1 \to TM \ ; \ \pi \circ v = c\}.$$

onde $\pi : TM \to M$ é a projeção canônica. De forma equivalente, podemos considerar $T_c(\Lambda M)$ como as seções C^∞ de c^*TM sobre S^1, onde

$$c^*TM = \{(t,x) \in S^1 \times TM \ ; \ c(t) = \pi(x)\}.$$

Notação 4.32. Também denotaremos o espaço tangente por $\Gamma^\infty(c^*TM)$.

Notação 4.33. Nessa seção, sendo $\mu : X \to Y$ uma aplicação, definimos

$$\langle \mu, x\rangle = \mu(x), \ \forall x \in X.$$

Cada 1-forma $\theta \in \Gamma^\infty(T_c^*\Lambda M)$ ao longo de c define um funcional linear em $T_c(\Lambda M)$ pela regra

$$\langle \theta, v\rangle = \int_0^1 \langle \theta(t), v(t)\rangle \, dt. \tag{4.10}$$

O espaço cotangente $T_c^*(\Lambda M)$ consiste de todas as distribuições em S^1 com valores em $c^*(T^*M)$. E denotaremos esse espaço por $\Gamma^{-\infty}(c^*TM)$. Se α é uma 1-forma em M então podemos definir uma 1-forma $\Lambda\alpha$ em ΛM da seguinte forma:

$$(\Lambda\alpha)(c) = \alpha \circ c \tag{4.11}$$

onde $\alpha(c(t)) = \alpha_{c(t)} : T_{c(t)}M \to \mathbb{R}$. Esta 1-forma em ΛM opera em vetores $v \in T_c(\Lambda M)$ de acordo com a fórmula

$$\langle \Lambda\alpha, v\rangle = \int_0^1 \langle \alpha(c(t)), v(t)\rangle \, dt. \tag{4.12}$$

Analogamente podemos levantar qualquer k-forma β em M em uma k-forma $\Lambda\beta$ em ΛM definindo

$$\Big\langle \Lambda\beta, (v_1, \cdots, v_k)\Big\rangle = \int_0^1 \Big\langle \beta(c(t)), \big(v_1(t), \cdots, v_k(t)\big)\Big\rangle \, dt. \tag{4.13}$$

para todas k-uplas $(v_1, \cdots, v_k)$ de campos de vetores suaves ao longo de c, isto é, $v_i \in T_c(\Lambda M)$ para todo $1 \le i \le k$.

Lema 4.34. *$\Lambda d\alpha = d\Lambda\alpha$ para toda k-forma α em M.*

Demonstração.

$$\langle \Lambda d\alpha, \cdot\rangle = \int_0^1 \big\langle d\alpha(t), \cdot\big\rangle dt = d\int_0^1 \alpha(t)dt = d(\Lambda\alpha)(\cdot)$$

$\square$

Se Ω é uma 2-forma simplética em M então $\widetilde{\Omega} : TM \to T^*M$ definida por $\widetilde{\Omega}(x)(y) = \Omega(x,y)$ é um isomorfismo. Assim, também podemos associar a $\Lambda\Omega$ em ΛM a aplicação $\widetilde{\Lambda\Omega} : T(\Lambda M) \to T^*(\Lambda M)$ definida por

$$\widetilde{\Lambda\Omega}(v) = \widetilde{\Omega} \circ v. \tag{4.14}$$

Lema 4.35. *A função $\widetilde{\Lambda\Omega} : T(\Lambda M) \to T^*(\Lambda M)$ é um isomorfismo de cada espaço tangente $T_c(\Lambda M) = \Gamma^\infty(c^*TM)$ no subespaço $\Gamma^\infty(c^*T^*M) \subset T_c^*(\Lambda M)$.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2 \in T_c(\Lambda M)$ e suponha que $\widetilde{\Lambda\Omega}(v_1) = \widetilde{\Lambda\Omega}(v_2)$. Então,

$$\widetilde{\Omega} \circ v_1 = \widetilde{\Omega} \circ v_2 \implies \widetilde{\Omega}(v_1(t)) = \widetilde{\Omega}(v_2(t)) \quad \forall t \in S^1.$$

Como $\widetilde{\Omega}$ é um isomorfismo temos

$$v_1(t) = v_2(t) \ \forall t \in S^1 \implies v_1 = v_2.$$

Logo, $\widetilde{\Lambda\Omega}$ é injetora.

Seja agora $X \in \Gamma^\infty(c^*T^*M)$ então $X : S^1 \to T^*M$ é tal que $\pi(X(t)) = c(t)$ para todo $t \in S^1$, onde $\pi : T^*M \to M$ é a projeção canônica. Como $X(t) \in T^*M$ para todo $t \in S^1$ e $\widetilde{\Omega}$ é sobrejetora então existe $u(t) \in TM$ tal que

$$X(t) = \widetilde{\Omega}(u(t)) \implies X = \widetilde{\Omega} \circ u = \widetilde{\Lambda\Omega}(u).$$

Logo, $\widetilde{\Lambda\Omega} : T(\Lambda M) \to \Gamma^\infty(c^*T^*M)$ é sobrejetora. □

Notação 4.36. Dizemos nesse caso que $\Lambda\Omega$ é uma estrutura simplética fraca em ΛM.

Existe um campo de vetores natural $\mathfrak{D}$ em ΛM, independente do fato de M ser simplética, definido por:

$$\mathfrak{D}(c) = \frac{dc}{dt} \tag{4.15}$$

onde $\frac{dc}{dt} : S^1 \to TM$ e $\pi\left(\frac{dc}{dt}(t)\right) = c(t)$ para todo $t \in S^1$, ou seja, $\frac{dc}{dt} \in T_c(\Lambda M)$. Esse campo de vetores é o gerador infinitesimal da ação

$$\begin{array}{rcl} \lambda : S^1 \times \Lambda M & \to & \Lambda M \\ (g,c) & \mapsto & g \cdot c \end{array}$$

onde $(g \cdot c)(t) = c(g+t)$ para todo $t \in S^1$.

Lema 4.37. *Se Ω é uma estrutura simplética em M então a ação de S^1 em ΛM preserva a estrutura simplética fraca $\Lambda\Omega$.*

Demonstração. A ação de S^1 em ΛM induz uma ação de S^1 em $T(\Lambda M)$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \overline{\lambda} : S^1 \times T(\Lambda M) & \to & T(\Lambda M) \\ (g,v) & \mapsto & g \cdot v \end{array}$$

onde $(g \cdot v)(t) = v(g+t)$ para todo $t \in S^1$. Observe que se $v \in T_c(\Lambda M)$ então

$$(g \cdot v)(t) = v(g+t) \Longrightarrow \pi \circ (g \cdot v)(t) = \pi(v(g+t)) = c(g+t) = (g \cdot c)(t) \Longrightarrow g \cdot v \in T_{g \cdot c}(\Lambda M).$$

Fixado $g \in S^1$ queremos mostrar que $\lambda_g : \Lambda M \to \Lambda M$ definido por $\lambda_g(c) = \lambda(g,c) = g \cdot c$ é um simplectomorfismo. De fato, se $g \cdot v_1, g \cdot v_2 \in T_{\lambda_g(c)}(\Lambda M)$ temos

$$\begin{aligned} \big\langle \Lambda\Omega, (g \cdot v_1, g \cdot v_2) \big\rangle &= \int_0^1 \Big\langle \Omega\big((g \cdot c)(t)\big), (g \cdot v_1(t), g \cdot v_2(t)) \Big\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \Big\langle \Omega(c(g+t)), (v_1(g+t), v_2(g+t)) \Big\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \Big\langle \Omega(c(s)), (v_1(s), v_2(s)) \Big\rangle \, ds \\ &= \big\langle \Lambda\Omega, (v_1, v_2) \big\rangle \end{aligned}$$

onde $s = g + t$ e $v_1, v_2 \in T_c(\Lambda M)$. □

Corolário 4.38. *$\mathfrak{D}$ é localmente um campo de vetores Hamiltoniano.*

Demonstração. Sejam

$$i_{\mathfrak{D}}\Lambda\Omega := \Lambda\Omega\big(\mathfrak{D}, \cdot\big)$$

e ϕ_t o fluxo em ΛM tal que $\frac{d}{dt}\varphi_t\Big|_{t=0} = \mathfrak{D}$. Como ϕ_t preserva $\Lambda\Omega$ (Lema 4.37) e $\Lambda\Omega$ é fechada (Lema 4.34) segue-se que $d\left(i_{\mathfrak{D}}\Lambda\Omega\right) = 0$. Portanto $i_{\mathfrak{D}}\Lambda\Omega$ é fechada e pelo Lema de Poincaré essa 1-forma é localmente exata, isto é, existe $\mathfrak{F}$ tal que

$$\Lambda\Omega\big(\mathfrak{D}, \cdot\big) = i_{\mathfrak{D}}\Lambda\Omega = d\mathfrak{F}.$$

Portanto, $\mathfrak{D}$ é um campo localmente hamiltoniano. □

Podemos encontrar uma função polivalente geradora para $\mathfrak{D}$ integrando a 1-forma fechada $\widetilde{\Lambda\Omega}\circ\mathfrak{D}$ ao longo de um caminho suave. Se $\{c_s\}$ é um caminho suave temos

$$\begin{aligned}
\int_{\{c_s\}} \widetilde{\Lambda\Omega}\circ\mathfrak{D} &= \int_0^1 \left\langle \Lambda\Omega\circ\mathfrak{D}, \frac{dc_s}{ds} \right\rangle ds \\
&= \int_0^1 \left\langle \Lambda\Omega(c_s), \left(\mathfrak{D}(c_s), \frac{dc_s}{ds}\right) \right\rangle ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \Omega(c_s(t)), \left(\mathfrak{D}(c_s)(t), \frac{dc_s}{ds}(t)\right) \right\rangle dt\, ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \Omega(c_s(t)), \left(\frac{dc_s}{dt}(t), \frac{dc_s}{ds}(t)\right) \right\rangle dt\, ds
\end{aligned}$$

Se $C(t,s) = c_s(t)$ então $\frac{dc_s}{dt}(t) = \frac{\partial C}{\partial t}(t,s)$ e $\frac{dc_s}{ds}(t) = \frac{\partial C}{\partial s}(t,s)$ assim,

$$\int_{\{c_s\}} \widetilde{\Lambda\Omega}\circ\mathfrak{D} = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \Omega(C(t,s)), \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t,s), \frac{\partial C}{\partial s}(t,s)\right) \right\rangle dt\, ds = \int_C \Omega. \tag{4.16}$$

Se Ω é exata, sua integral sob o cilindro C depende apenas dos loops da fronteira e, nesse caso, a função hamiltoniana de $\mathfrak{D}$ será monovalente. Explicitamente, se $\Omega = -d\omega$ para alguma 1-forma ω, segue do Teorema de Stokes que

$$\int_{\{c_s\}} \widetilde{\Lambda\Omega}\circ\mathfrak{D} = \int_C \Omega = -\int_C d\omega = -\int_{\partial C} \omega$$

Como $\partial C = C_0 - C_1$ então

$$\int_{\{c_s\}} \widetilde{\Lambda\Omega}\circ\mathfrak{D} = \int_{\partial c_1} \omega - \int_{\partial c_0} \omega.$$

Assim, se definirmos $\mathfrak{F} : \Lambda M \to \mathbb{R}$ por $\mathfrak{F}(c) = \int_c \omega$ então $d\mathfrak{F} = \widetilde{\Lambda\Omega}(\mathfrak{D})$ e $\mathfrak{F}$ é a função hamiltoniana global de $\mathfrak{D}$. Observe que $\mathfrak{F}$ depende da escolha de ω, mas é determinada a menos de constante por cada componente de ΛM.

Em geral, Ω não é exata, assim $\mathfrak{F}$ não pode ser definida (como uma função monovalente) exceto em subconjuntos simplesmente conexos de ΛM (ou no recobrimento universal de ΛM). Com essa ressalva continuaremos usando $d\mathfrak{F} = \widetilde{\Lambda\Omega}(\mathfrak{D})$.

Teorema 4.39. *Seja M uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função hamiltoniana. Então, existe uma função $Q : \Lambda M \to \mathbb{R}$ tal que os pontos críticos de Q são órbitas periódicas, com período $\tau > 0$, do campo hamiltoniano X_H.*

Demonstração. Se H é uma função real em M, o campo de vetores X_H pode ser levantado em um campo de vetores ΛX_H em ΛM definido por

$$\Lambda X_H(c) = X_H \circ c.$$

Como

$$\begin{aligned}
\Lambda\Omega\left(\Lambda X_H(c),\cdot\right) &= \Lambda\Omega\big(X_H\circ c,\ \cdot\ \big)\\
&= \int_0^1 \Omega(c(t))\big(X_H(c(t)),\ \cdot\ \big)dt\\
&= \int_0^1 dH(c(t))dt\\
&= d\left(\int_0^1 H(c(t))dt\right)\\
&= d(\Lambda H(c))
\end{aligned}$$

então ΛH pode ser vista como a função hamiltoniana para ΛX_H, isto é, $X_{\Lambda H} = \Lambda X_H$.

Um loop $c \in \Lambda M$ é a uma órbita de X_H quando $\frac{dc}{dt} = X_H \circ c$, isto é, quando $\mathfrak{D}(c) = \Lambda X_H$. Assim, as órbitas periódicas em M com período 1 para X_H são os zeros em ΛM do campo de vetores $\mathfrak{D} - \Lambda X_H$ ou da 1-forma $\widetilde{\Lambda\Omega}\circ(\mathfrak{D} - \Lambda X_H) = d\mathfrak{F} - d\Lambda H$. Quando $\mathfrak{F}$ é monovalente podemos escrever a 1-forma $d\mathfrak{F} - d\Lambda H$ como $d(\mathfrak{F} - \Lambda H)$. Assim, nesse caso as órbitas periódicas são os pontos críticos da função $\mathfrak{F} - \Lambda H : \Lambda M \to \mathbb{R}$.

Para identificar as órbitas periódicas de X_H com período $\tau > 0$ podemos ver que elas correspondem, após mudança de coordenadas (no tempo), aos loops $c \in \Lambda M$ para os quais $\frac{dc}{dt} = \tau X_H \circ c$. Estes são zeros do campo de vetores

$$\mathfrak{D} - \tau\Lambda X_H \tag{4.17}$$

ou zeros da 1-forma

$$d\mathfrak{F} - \tau d\Lambda H \tag{4.18}$$

ou pontos críticos da função

$$\mathfrak{F} - \tau\Lambda H. \tag{4.19}$$

□

Observação 4.40. Quando $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ e $\Omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, podemos tomar $\omega = \sum q_i dp_i$ e as soluções das equações de Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

são os extremos do funcional

$$\int \left(\sum q_i dp_i - Hdt\right).$$

Esse é precisamente o **princípio de Hamilton**.

Ainda com a notação do Teorema 4.39, podemos fazer com que todas as órbitas periódicas de X_H tenham períodos positivos e sejam os zeros de uma única 1-forma fechada (ou pontos críticos de uma única função) se nos restringirmos um nível de energia particular $H^{-1}(E)$, $E \in \mathbb{R}$. Dado $E \in \mathbb{R}$, defina a função $\psi_E^H : \Lambda M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\psi_E^H(c,\tau) = \left[\mathfrak{F} - \tau\Lambda(H-E)\right](c). \tag{4.20}$$

Essa função pode ser polivalente, mas a diferencial $d\psi_E^H$ dada por

$$\left\langle d\psi_E^H(c,\tau),(v,a)\right\rangle = \langle d\mathfrak{F}(c),v\rangle - \langle \tau d\Lambda H(c),v\rangle - a\Lambda(H-E)(c) \tag{4.21}$$

é uma 1-forma fechada bem-definida em $\Lambda M \times \mathbb{R}^+$. A forma é zero quando:

(i) $(d\mathfrak{F} - \tau d\Lambda H)(c) = 0$ e

(ii) $\Lambda(H-E)(c) = 0$.

Quando vale a condição (i), c é uma órbita reparametrizada de X_H (de período τ), assim $H\circ c$ é constante, e a condição (ii) diz que o valor dessa constante é E.

Teorema 4.41. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana (ou Finsler) tal que todas as geodésicas de M são fechadas de mesmo período $\tau > 0$. Então, existe uma função $\mathfrak{B} : \Lambda M \to \mathbb{R}$ tal que os pontos críticos de $\mathfrak{B}$ são geodésicas fechadas de período τ em M.*

Demonstração. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana (ou Finsler) tal que todas as geodésicas de M são fechadas de mesmo período τ. Tome o fibrado cotangente T^*M, que é sempre uma variedade simplética, e o Hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ definido por $H(x,\xi) = \frac{1}{2}g^{ij}\xi_i\xi_j$. Pelo Teorema 4.39 segue-se que pontos críticos de uma função $Q : \Lambda(T^*M) \to \mathbb{R}$ são órbitas periódicas de período τ em T^*M do campo X_H.

Como vimos na Definição 1.34, o fluxo cogeodésico é o fluxo determinado por

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \\ \dot{\xi}^i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Assim, se $(x(t),\xi(t))$ é uma curva integral do campo hamiltoniano X_H segue que $x(t)$ é uma geodésica em M. Logo, como toda geodésica em M tem período τ segue-se que todas as órbitas de X_H tem período τ.

Seja

$$\Lambda X = \left\{c : S^1 \to T^*M \; ; \; c(t) = (x(t),\xi(x)) \text{ satisfaz } (4.22)\right\}.$$

Então, como todo elemento $c \in \Lambda X$ é uma órbita periódica de período τ do campo X_H temos

$$dQ(c) = 0 \text{ para todo } c \in \Lambda X. \tag{4.23}$$

Portanto, ΛX é o subconjunto de $\Lambda(T^*M)$ em que as órbitas periódicas de X_H pertencem.

Seja $\mathscr{L}_H : T^*M \to TM$ a transformada de Legendre como na Definição 1.23. Como visto na Seção 1.2.2

$$\sqrt{2H(x,\xi)} = \sqrt{g^{ij}\xi_i\xi_j}$$

é uma norma Riemanniana (ou co-norma Finsler), então, pelo Teorema 1.25 segue-se que a transformada de Legendre associada a função

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{2H(x,\xi)}\right]^2 = H(x,\xi)$$

é uma bijeção, isto é, $\mathscr{L}_H : T^*M \to TM$ é uma bijeção.

Seja $c = (x,\xi) \in \Lambda X$, então, por definição de fluxo geodésico segue-se que $x(t)$ é uma geodésica de M. E como

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_H \circ c(t) &= \mathscr{L}_H(x(t),\xi(t)) \\ &= \left(x(t), \frac{\partial H}{\partial \xi_i}(x(t),\xi(t))\right) \\ &= (x(t),\dot{x}(t)) \end{aligned}$$

segue-se que a transformada de Legendre identifica curvas em ΛX com curvas do fluxo geodésico em TM. Defina $\Lambda\mathscr{L}_H : \Lambda(TM) \to \Lambda(T^*M)$ por $\Lambda\mathscr{L}_H(c) = \mathscr{L}_H{}^{-1} \circ c$ e $G : \Lambda M \to \Lambda(TM)$ por $G(\gamma) = (\gamma,\dot{\gamma})$. Assim, se γ é uma geodésica fechada de período τ em M temos

$$\begin{aligned} (\Lambda\mathscr{L}_H \circ G)(\lambda(t)) &= \Lambda\mathscr{L}_H(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \\ &= \mathscr{L}_H{}^{-1}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \\ &= (\gamma(t),\xi(t)) \end{aligned}$$

onde $(\gamma(t),\xi(t))$ é uma solução das equações em (4.22), ou seja, $(\Lambda\mathscr{L}_H \circ G)(\gamma) \in \Lambda X$. Logo, se γ é uma geodésica fechada de período τ em M segue-se pela equação (4.23) que

$$d\left[Q \circ \Lambda\mathscr{L}_H \circ G\right](\gamma) = dQ\big(\Lambda\mathscr{L}_H \circ G(\gamma)\big) \cdot d\left[\Lambda\mathscr{L}_H \circ G(\gamma)\right] = 0.$$

Portanto, pontos críticos da função $\mathfrak{B} := Q \circ \Lambda\mathscr{L}_H \circ G : \Lambda M \to \mathbb{R}$ são geodésicas fechadas de período τ em M. $\square$

4.6.2 Bifurcação de variedades críticas

De agora em diante, estudaremos sistemas hamiltonianos que estão próximos de um que tem uma variedade de órbitas periódicas. Isso nos permitirá encontrar uma subvariedade de *dimensão finita* em $\Lambda M \times \mathbb{R}^+$ na qual os pontos críticos de ψ_E^H estão contidos. O processo de encontrar essa subvariedade de dimensão finita é as vezes chamado *método de bifurcação de Liapunov-Schmidt*.

Também substituiremos a variedade C^∞ de loops por uma variedade Banach de loops tendo um grau finito de diferenciabilidade. Por simplicidade escolhemos a variedade de aplicações C^1 de S^1 em M. Nesse caso, ΛM denotará essa variedade Banach. Assim:

- O espaço tangente $T_c\Lambda M$ é agora o espaço $\Gamma^1(c^*TM)$ dos campos de vetores C^1 ao longo de c.
- O espaço cotangente $T_c^*\Lambda M$ é o espaço $\Gamma^{-1}(c^*TM)$ de distribuições de ordem 1 em S^1 com valores em c^*TM.
- A aplicação fibrado $\widetilde{\Lambda\Omega}$ aplica $T_c\Lambda M$ injetivamente no subespaço denso $\Gamma^1(c^*T^*M)$ de $\Gamma^{-1}(c^*TM) = T_c^*\Lambda M$. Assim, $\Lambda\Omega$ é uma estrutura simplética fraca em ΛM.
- O grupo S^1 ainda age de forma contínua em ΛM por difeomorfismos, mas como estamos supondo que o grau de diferenciabilidade das curvas é finito, então essa ação não é mais suave. Como a derivada de um loop C^1 é, em geral, somente um campo de vetores C^0, o gerador infinitesimal $\mathfrak{D}$ toma valores no "super fibrado" $\widehat{T}\Lambda M \subset T\Lambda M$ onde para cada $c \in \Lambda M$, $\widehat{T}_c\Lambda M$ é o espaço $\Gamma^0(c^*TM)$ de campos de vetores contínuos ao longo de c.
- O covetor $\widetilde{\Lambda\Omega} \circ \mathfrak{D}$ ainda pertence ao espaço cotangente $T_c^*\Lambda M$. Na verdade, $\Lambda\Omega(c) : \Gamma^1(c^*TM) \to \Gamma^1(c^*T^*M)$ se estende a uma aplicação $\Gamma^0(c^*TM) \to \Gamma^0(c^*T^*M)$ que ainda é um subespaço de $\Gamma^{-1}(c^*TM) = T_c^*\Lambda M$. Assim, $\widetilde{\Lambda\Omega} \circ \mathfrak{D}$ é uma seção suave do subfibrado $\check{T}^*\Lambda M \subset T^*\Lambda M$, onde para cada $c \in \Lambda M$, $\check{T}_c^*\Lambda M = \Gamma^0(c^*T^*M)$.
- $d\mathfrak{F} = \widetilde{\Lambda\Omega} \circ \mathfrak{D}$ continua o mesmo e $\mathfrak{F}$ é definida exatamente como antes quando Ω é exata ou em subconjuntos simplesmente conexos de ΛM.

De modo geral, se B é uma variedade modelada em um espaço de Banach reflexivo, $\check{T}^*B$ é um fibrado vetorial sobre B e $i : \check{T}^*B \to T^*B$ é uma aplicação injetiva de fibrados com imagem densa temos

Definição 4.42. Uma 1-forma $\alpha : B \to T^*B$ é *hiperregular* se existe uma seção suave $\check{\alpha} : B \to \check{T}^*B$ tal que $i \circ \check{\alpha} = \alpha$.

Definição 4.43. Uma subvariedade $\Sigma \subseteq B$ é chamada uma *variedade zero* para uma 1-forma fechada α, se $\alpha(b) = 0$ para todo $b \in \Sigma$. Uma variedade zero para df é chamada uma *variedade crítica* para a função f.

Definição 4.44. Uma variedade zero Σ para uma 1-forma fechada hiperregular α em B é chamada de *fracamente não degenerada* se, para cada $b \in B$, $D_b\check{\alpha}$ tem imagem fechada e

$$\ker(D_b\check{\alpha})^* = i_b^*(T_b\Sigma).$$

Teorema 4.45. *Seja $\Sigma \subseteq B$ uma variedade zero compacta, fracamente não degenerada para a 1-forma fechada, hiperregular α e seja phi outra 1-forma hiperregular. Então, existe uma vizinhança $\mathscr{U}$ de Σ em B e um número $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, existe um mergulho $e_\varepsilon : \Sigma \to \mathscr{U}$ tal que o conjunto zero de $\alpha + \varepsilon\phi$ em $\mathscr{U}$ é o conjunto zero do pullback de $\alpha + \varepsilon\phi$ para $e_\varepsilon(\Sigma)$.*

Se ϕ é exata, então $\alpha + \varepsilon\phi$ é exata em $e_\varepsilon(\Sigma)$. Assim, o conjunto zero de $\alpha + \varepsilon\phi$ em $\mathscr{U}$ é o conjunto crítico de uma função em $e_\varepsilon(\Sigma)$.

Seja M uma variedade de dimensão finita, Ω uma estrutura simplética em M, H uma função real em M, B a variedade de Banach $\Lambda M \times \mathbb{R}^+$, $\check{T}^*B$ o subfibrado $\check{T}^*\Lambda M \times T^*\mathbb{R}^+$ de T^*B, $i : \check{T}^*(\Lambda M \times \mathbb{R}^+) \to T^*(\Lambda M \times \mathbb{R}^+)$ a inclusão e $d\psi_E^H$ a diferencial do funcional hamiltoniano como definida em (4.21).

Definição 4.46. Uma variedade zero fracamente não degenerada $\Sigma \subseteq \Lambda M \times \mathbb{R}^+$ para $d\psi_E^H$ é chamada uma *variedade periódica não degenerada* com energia E para o sistema hamiltoniano (M,Ω,H) se nenhuma das curvas em Σ são curvas ponto, isto é, se nenhuma das curvas em Σ passam pelos pontos críticos de H.

Observação 4.47. Se H é uma função suave em M, então ΛH é uma função suave em ΛM, assim $d\Lambda H$ é uma seção suave de $T^*\Lambda M$. Os valores de $d\Lambda H$ em $c \in \Lambda M$ são $\Lambda dH(c) = dH \circ c$ e pertencem ao subespaço $\Gamma^1(c^*T^*M)$ de $\Gamma^0(c^*T^*M)$, assim, $d\Lambda H$ é uma seção suave de $\check{T}^*\Lambda M$. Podemos concluir disso que a 1-forma fechada $d\psi_E^H$, onde

$$d\psi_E^H(c,\tau) = d\mathfrak{F}(c) - \tau d\Lambda H(c) - \Lambda(H_E)(c),$$

é uma seção suave do subfibrado denso $\check{T}^*\Lambda M \times T^*\mathbb{R}^+$ de $T^*M \times T^*\mathbb{R}^+ = T^*(\Lambda M \times \mathbb{R}^+)$. Portanto, $d\psi_E^H$ é uma 1-forma hiperregular.

Teorema 4.48. *Seja $\Sigma \subseteq \Lambda M \times \mathbb{R}^+$ uma variedade periódica compacta, não degenerada para o sistema Hamiltoniano (M,Ω,H) e seja H_1 qualquer função em M. Então, existe uma vizinhança $\mathscr{U}$ de Σ em $\Lambda M \times \mathbb{R}^+$ e um número $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, o número de órbitas periódicas em $\mathscr{U}$ para o sistema Hamiltoniano $(M,\Omega,H+\varepsilon H_1)$ é igual ao número de pontos críticos de alguma função definida em Σ.*

Demonstração. Pela definição de variedade periódica não degenerada segue que Σ é uma variedade zero fracamente não degenerada da 1-forma $d\psi_E^H$ em $\Lambda M \times \mathbb{R}^+$ e pela Observação 4.47 segue que $d\psi_E^H$ é hiperregular. Como pela equação (4.21) temos

$$\begin{aligned}
\left\langle d\psi_E^{H+\varepsilon H_1}(c,\tau),(v,a)\right\rangle &= \langle d\mathfrak{F}(c),v\rangle - \tau\big\langle d\Lambda(H+\varepsilon H_1)(c),v\big\rangle - a\Lambda(H+\varepsilon H_1 - E)(c)\\
&= \langle d\mathfrak{F}(c),v\rangle - \tau\big\langle d(\Lambda H+\varepsilon\Lambda H_1)(c),v\big\rangle - a[\Lambda(H-E)(c)+\varepsilon\Lambda H_1(c)]\\
&= \langle d\mathfrak{F}(c),v\rangle - \tau\big\langle d\Lambda H(c),v\big\rangle - a\Lambda(H-E)(c) - \tau\varepsilon\big\langle d\Lambda H_1(c),v\big\rangle - a\varepsilon\Lambda H_1(c)\\
&= \big\langle d\psi_E^H(c,\tau),(v,a)\big\rangle + \varepsilon\left(-\tau\big\langle d\Lambda H_1(c),v\big\rangle - a\Lambda H_1(c)\right)\\
&= \big\langle d\psi_E^H(c,\tau),(v,a)\big\rangle + \varepsilon\left\langle d\Lambda H^1(c,\tau),(v,a)\right\rangle
\end{aligned}$$

onde $\Lambda H^1 : \Lambda M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$\Lambda H^1(c,\tau) = -\tau\Lambda H_1(c)$$

segue que $d\psi_E^{H+\varepsilon H_1} = d\psi_E^H + \varepsilon d\Lambda H^1$, onde $d\Lambda H^1$ é exata. Assim, pelo o Teorema 4.45 concluímos que para ε suficientemente pequeno existe um mergulho $e_\varepsilon : \Sigma \to \mathscr{U}$ tal que o conjunto zero de $d\psi_E^{H+\varepsilon H_1}$ em $\mathscr{U}$ é o conjunto de pontos críticos de uma função f em $e_\varepsilon(\Sigma)$. Além disso, como e_ε é um mergulho, se $p = e_\varepsilon(q)$ e q é um ponto crítico de $f \circ e_\varepsilon$ temos

$$0 = d(f\circ e_\varepsilon)(q) = df(e_\varepsilon(q))\cdot de_\varepsilon(q) = df(p)\cdot de_\varepsilon(q) \Longrightarrow df(p) = 0.$$

Por outro lado, se $p = e_\varepsilon(q)$ é um ponto crítico de f temos

$$d(f\circ e_\varepsilon)(q) = df(p)\cdot de_\varepsilon(q) = 0.$$

Logo, os pontos críticos de $f\circ e_\varepsilon$ correspondem aos pontos críticos de f. Portanto, o conjunto zero de $d\psi_E^{H+\varepsilon H_1}$ em $\mathscr{U}$ corresponde ao conjunto de pontos críticos de uma função em Σ. □

Observação 4.49. É possível mostrar que ε_0 depende somente do C^1 tamanho de H_1.

Definição 4.50. Denote por T_1^*M o subconjunto de T^*M tal que

$$T_1^*M = \{(x,\xi) \in T^*M\,;\, ||\xi||_g = 1\}. \tag{4.24}$$

Definição 4.51. A ação de S^1 em T_1M, como definida na equação (1.29), induz uma ação de S^1 em T_1^*M como descreveremos a seguir. Se $s \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $(x,\xi) \in T_1^*M$ então existe $v \in T_xM$ tal que $\xi = g(v,\cdot)$. Assim, definimos

$$s \cdot (x,\xi) = s \cdot \big(x, g(v,\cdot)\big) = (\gamma_x^v(2\pi s), \dot{\gamma}_x^v(2\pi s)) \tag{4.25}$$

onde γ_x^v é a geodésica em M tal que $\gamma_x^v(0) = x$ e $\dot{\gamma}_x^v(0) = v$. Assim, $C^* := T_1^*M/S^1$ é o quociente de T_1^*M pela ação desse grupo.

Corolário 4.52. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta onde todas as geodésicas são fechadas e tem mesmo período 2π. Qualquer métrica Finsler F suficientemente próxima da métrica Riemanniana g em M tem tantas geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π quanto uma função em $C^* = T_1^*M/S^1$ tem pontos críticos.*

Demonstração. Como C^* é o espaço das geodésicas de M, vistas em T_1^*M, segue que $C^* \subset \Lambda(T^*M)$. Além disso, como $C^* \times \{2\pi\} \subset \Lambda(T^*M) \times \mathbb{R}^+$ é uma subvariedade compacta e periódica não degenerada para o sistema Hamiltoniano $(T^*M, \omega_{\text{can}}, H_0)$ pelo Teorema 4.48 segue que para qualquer H_1 definido em T^*M existem uma vizinhança $\mathscr{U}$ de $C^* \times \{2\pi\}$ e um número $\varepsilon_0 > 0$ tais que para todo $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ o número de órbitas periódicas em $\mathscr{U}$ para o sistema Hamiltoniano $(T^*M, \omega_{\text{can}}, H_0 + \varepsilon H_1)$ é igual ao número de pontos críticos de alguma função definida em $C^* \times \{2\pi\}$.

Como $H_\varepsilon := H_0 + \varepsilon H_1$ é uma co-norma Finsler se ε é suficientemente pequeno, então, assumindo que ε_0 é pequeno o suficiente para que isso ocorra segue que $F_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H_\varepsilon^2}$ é uma métrica Finsler para todo $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Como todo Hamiltoniano na ε_0-vizinhança de H_0 pode ser escrito na forma $H_0 + \varepsilon H_1$ para alguma função H_1 segue que, para todo $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, o número de geodésicas periódicas de período próximo de 2π na métrica Finsler F_ε é igual ao número de pontos críticos de uma função definida em $C^* \times \{2\pi\}$, ou melhor, em C^*. □

Corolário 4.53. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta onde todas as geodésicas são fechadas e tem mesmo período 2π. Qualquer métrica Finsler F suficientemente próxima da métrica Riemanniana g em M tem tantas geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π quanto uma função em $C = T_1M/S^1$ tem pontos críticos.*

Antes de demonstrar esse resultado, observe que:

Afirmação 4.54. *As variedades $C = T_1M/S^1$ e $C^* = T_1^*M/S^1$ são difeomorfas.*

Demonstração. Como sabemos, $f : T_1M \to T_1^*M$ definida por

$$f(x,v) = \big(x, g(v,\cdot)\big)$$

é um difeomorfismo. Se $\pi : T_1M \to C$ e $p : T_1^*M \to C^*$ são projeções canônicas defina $A : C \to C^*$ de modo que

$$\pi(\eta) \mapsto p(f(\eta)).$$

Veja que esta aplicação está bem-definida pois se $u_1(x_1,v_1)$ e $u_2(x_2,v_2)$ são elementos de T_1M tais que $\pi(u_1) = \pi(u_2)$ então para todo $s_1 \in \mathbb{R}$ existe $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\big(\gamma_{x_1}^{v_1}(2\pi s_1), \dot{\gamma}_{x_1}^{v_1}(2\pi s_1)\big) = \big(\gamma_{x_2}^{v_2}(2\pi s_2), \dot{\gamma}_{x_2}^{v_2}(2\pi s_2)\big).$$

E pela unicidade de geodésicas temos $\gamma_{x_1}^{v_1} = \gamma_{x_2}^{v_2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
p(f(u_1)) &= p\big(x_1, g(v_1,\cdot)\big) \\
&= \left(\gamma_{x_1}^{v_1}, g\left(\dot{\gamma}_{x_1}^{v_1}, \cdot\right)\right) \\
&= \left(\gamma_{x_2}^{v_2}, g\left(\dot{\gamma}_{x_2}^{v_2}, \cdot\right)\right) \\
&= p\big(x_2, g(v_2,\cdot)\big) \\
&= p(f(u_2))
\end{aligned}$$

Além disso, A é uma função suave já que p e f são suaves. Da mesma forma, se $B : C^* \to C$ definida de modo que

$$p(u) \mapsto \pi\left(f^{-1}(u)\right)$$

segue que B esta bem-definida e é suave. Portanto, como $A \circ B = \mathrm{Id}$ e $B \circ A = \mathrm{Id}$ segue que C e C^* são difeomorfos. $\square$

Demonstração do Corolário 4.53. Veja que pela Afirmação 4.54 existe um difeomorfismo h entre C e C^* e pelo Corolário 4.52 existe uma função f definida em C^* tal que os pontos críticos de f correspondem as geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π numa métrica Finsler F suficientemente próxima de g.

Observe também que se $p = h(q)$ é um ponto crítico de f temos

$$d(f \circ h)(q) = df(h(q)) \cdot dh(q) = df(p) \cdot dh(q) = 0$$

e se x é um ponto crítico de $f \circ h$ temos

$$0 = d(f \circ h)(x) = df(h(x)) \cdot dh(x)$$

e como $dh(x)$ é um isomorfismo segue que $df(h(x)) = 0$, isto é, $h(x)$ é um ponto crítico de f. Logo,

$$\{\text{pontos críticos de } f\} \simeq \{\text{pontos críticos de } f \circ h\}.$$

Portanto, $f \circ h$ é a função em C tal que os seus pontos críticos correspondem as geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π numa métrica Finsler F suficientemente próxima de g. $\square$

Capítulo 5

Exemplos de Katok com quantidade finita de geodésicas fechadas

5.1 Construção de Métricas Finsler e caracterização de geodésicas fechadas

Seja M uma variedade diferenciável. Para obter os exemplos de Katok comecemos com uma métrica Riemanniana g em M com todas as geodésicas fechadas e que admite um grupo a um parâmetro de isometrias ϕ_t.

Teorema 5.1 (Wadsley, [Bes12], pág 183)**.** *Se as órbitas de um fluxo em uma variedade Riemanniana são geodésicas parametrizadas por comprimento de arco, então, o fluxo é periódico, de modo que as órbitas tem um período comum.*

Pelo teorema acima as geodésicas de g tem um período comum r e podemos normalizar a métrica para que $r = 2\pi$. Após mudar o subgrupo a um parâmetro ϕ_t se necessário, podemos assumir também que $\phi_{2\pi} = Id$.

Lema 5.2. *Seja $H_\alpha : T^*M \to \mathbb{R}$ uma função hamiltoniana definida por*

$$H_\alpha = H_0 + \alpha H_1 \tag{5.1}$$

onde H_0 e H_1 são como em (4.9) e (4.5), respectivamente. Se α é suficientemente pequeno então H_α é uma co-norma Finsler não-simétrica.

Demonstração. Claramente vemos que H_α é C^∞ em $T^*M \backslash \{0\}$ e positivamente homogênea de grau 1, então, precisamos mostrar apenas que a forma bilinear associada a H_α é positiva definida para todo $\eta \in T^*M$. Note que como H_α é positivamente homogênea de grau 1, pela Observação 1.4 segue que

$$g_{ij}^\alpha := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_\alpha^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

é positivamente homogênea de grau 0, isto é,

$$g_{ij}^\alpha|_{(x,\lambda\xi)} = g_{ij}^\alpha|_{(x,\xi)} \tag{5.2}$$

para todo $(x,\xi) \in T^*M \backslash \{0\}$ e $\lambda > 0$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\mathscr{H} : T_1^*M \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ uma função dada por $\mathscr{H}(\eta,\alpha) = H_\alpha(\eta)$. Como H_α é C^∞ em $T^*M \backslash \{0\}$ então $\mathscr{H}$ também é C^∞. Assim,

$$h(\eta,\alpha) := g_{ij}^\alpha(\eta)$$

varia suavemente em $T_1^*M \times (-\varepsilon,\varepsilon)$. Além disso, como

$$\det\left(g_{ij}^0(\eta)\right) > 0$$

sempre que $\eta \neq 0$ temos

$$\det\left(h(\eta,0)\right) > 0$$

para todo $\eta \in T_1^*M$. Como $\det \circ h$ é uma função contínua, para todo $\eta \in T_1^*M$ existe uma vizinhança aberta $U \times (-\lambda_U, \lambda_U)$ de $(\eta, 0)$ onde $0 < \lambda_U \leq \varepsilon$ tal que

$$\det \circ h(\rho, \alpha) > 0, \text{ para todo } (\rho, \alpha) \in U \times (-\lambda_U, \lambda_U).$$

Como os abertos $\{U\}$ formam uma cobertura para o compacto T_1^*M, então existe uma subcobertura finita $\{U_1, \cdots, U_k\}$ que também cobre T_1^*M. Logo, tomando $\lambda := \min\{\lambda_{U_i} \, ; \, 1 \leq i \leq k\}$ segue que $\lambda > 0$ e

$$\det \circ h(\eta, \alpha) > 0, \text{ para todo } (\eta, \alpha) \in T_1^*M \times (-\lambda, \lambda).$$

Logo, por (5.2) obtemos

$$\det\left(g_{ij}^{\alpha}(\eta)\right) > 0, \text{ para todo } \eta \in T^*M \backslash \{0\}$$

se $\alpha \in (-\lambda, \lambda)$, isto é, $g_{ij}^{\alpha}(\eta)$ é uma forma positiva definida para todo $\eta \in T^*M \backslash \{0\}$ e $\alpha \in (-\lambda, \lambda)$. Portanto, H_α é uma co-norma Finsler se $\alpha \in (-\lambda, \lambda)$. Além disso, como $H_1(p, \xi) \neq H_1(p, -\xi)$ segue que H_α é não simétrica. □

Observação 5.3. Note que a função H_1 não foi fundamental para a demonstração do Lema 5.2. Logo, por essa mesma demonstração segue que para qualquer $H_1 : T^*M \to \mathbb{R}$ positivamente homogêneo de grau 1 e C^∞ em $T^*M \backslash \{0\}$ a função $H_\alpha = H_0 + \alpha H_1$ é uma co-norma Finsler, se α é suficientemente pequeno.

Corolário 5.4. *Seja $F_\alpha : TM \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F_\alpha = H_\alpha \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}. \tag{5.3}$$

Se α é suficientemente pequeno, então, F_α é uma métrica Finsler não simétrica.

Demonstração. Como H_α é uma co-norma Finsler se α é suficientemente pequeno (Lema 5.2) então pelo Teorema 1.25 segue que F_α é uma métrica Finsler se α é suficientemente pequeno. Além disso, F_α é não simétrica pois H_α é não simétrica. □

Lema 5.5. *As curvas integrais dos campos $X_{\frac{1}{2}H_0^2}$ e X_{H_0} são reparametrizações uma da outra.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.29, X_{H_0} não corresponde ao fluxo co-geodésico de g mas X_{H_0} e $X_{\frac{1}{2}H_0^2}$ são proporcionais uma vez que

$$\omega\left(X_{\frac{1}{2}H_0^2}, \cdot\right) = d\left(\frac{1}{2}H_0^2\right) = H_0 dH_0 = H_0 \omega\left(X_{H_0}, \cdot\right) = \omega\left(H_0 X_{H_0}, \cdot\right)$$

o que implica que

$$X_{\frac{1}{2}H_0^2} = H_0 \cdot X_{H_0}. \tag{5.4}$$

Logo, as curvas integrais dos campos $X_{\frac{1}{2}H_0^2}$ e X_{H_0} são reparametrizações uma da outra. □

Ainda sobre esses campos podemos afirmar que:

Lema 5.6. *Se $\gamma(t)$ é uma geodésica de g, $(\gamma(t), Y(\gamma(t)))$ uma curva integral de $X_{\frac{1}{2}H_0^2}$ em T^*M, onde $Y(\gamma(t)) = g(\dot{\gamma}(t), \cdot)$, e γ_0 a geodésica γ parametrizada por comprimento de arco, então, $(\gamma_0(t), Y(\gamma_0(t)))$ é uma curva integral de X_{H_0}.*

Demonstração. Se $c(t) = (\gamma(t), Y(\gamma(t)))$ segue pela definição de curva integral que $\dot{c}(t) = X_{\frac{1}{2}H_0^2}(c(t))$. Como

$$\gamma_0(t) = \gamma\left(\frac{t}{\mu}\right), \text{ onde } \mu^2 = g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$$

temos

$$c_0(s) := (\gamma_0(s), Y(\gamma_0(s))) = \left(\gamma\left(\frac{s}{\mu}\right), Y\left(\gamma\left(\frac{s}{\mu}\right)\right)\right) = c\left(\frac{s}{\mu}\right). \tag{5.5}$$

Observe que
$$H_0(\gamma(t),Y(\gamma(t))) = H_0\big(\gamma(t), g(\dot\gamma(t),\cdot)\big) = \sqrt{g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))} = \mu.$$
Assim, pelas equações (5.5) e (5.4) temos
$$\begin{aligned} \dot c_0(s) &= \frac{1}{\mu}\dot c\left(\frac{s}{\mu}\right) = \frac{1}{H_0}X_{\frac{1}{2}H_0^2}\left(c\left(\frac{s}{\mu}\right)\right) \\ &= \frac{1}{H_0}X_{\frac{1}{2}H_0^2}\left(c_0(s)\right) = \frac{1}{H_0}H_0\cdot X_{H_0}\left(c_0(s)\right) \\ &= X_{H_0}\left(c_0(s)\right). \end{aligned}$$
Portanto, $(\gamma_0(t),Y(\gamma_0(t)))$ é uma curva integral de X_{H_0}. □

Como estamos assumindo que todas as geodésicas de g tem período comum $r=2\pi$, se $\psi_t^{H_0}$ é o fluxo de X_{H_0} então
$$\psi_{2\pi}^{H_0} = Id$$
em todo T^*M. Pelo Teorema 4.27 os fluxos dos campos X_{H_0} e X_{H_1} comutam, assim, o fluxo de X_{H_α} é:
$$\psi_t^{H_\alpha} = \psi_t^{H_0}\circ\psi_{\alpha t}^{H_1}. \tag{5.6}$$
Pelo Teorema 4.28, X_{H_α} também não corresponde ao fluxo co-geodésico de F_α mas X_{H_α} e $X_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}$ são proporcionais
$$X_{\frac{1}{2}H_\alpha^2} = H_\alpha\cdot X_{H_\alpha}. \tag{5.7}$$
Assim, as curvas integrais desses campos são reparametrizações uma da outra. Análogo ao Lema 5.6, se $(\gamma(t),Y(\gamma(t)))$ é uma curva integral de $X_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}$, então, $(\gamma_0(t),Y(\gamma_0(t)))$ é uma curva integral de X_{H_α} onde γ_0 é uma reparametrização de γ tal que $F_\alpha\big(\dot\gamma_0(s)\big)=1$. Para examinarmos as geodésicas fechadas de F_α tome $x\in T^*M$ tal que
$$\psi_T^{H_\alpha}x = x \tag{5.8}$$
onde T é o comprimento da geodésica na métrica F_α.

Lema 5.7. *A aplicação $\psi_{\alpha nT}^{H_1}: M\to M$ deixa a órbita $c(t)=\psi_{-t}^{H_0}x$ invariante para todo $n\in\mathbb{N}$, isto é, existe uma aplicação contínua $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que*
$$\psi_{\alpha nT}^{H_1}c(t) = c(h_n(t))$$
para todo $n\in\mathbb{N}$.

Demonstração. Das equações (5.6) e (5.8) temos
$$\psi_T^{H_0}\circ\psi_{\alpha T}^{H_1}x = x \implies \psi_{-T}^{H_0} = \psi_{\alpha T}^{H_1}. \tag{5.9}$$
Como o fluxo de H_0 e H_1 comutam e por (5.9) segue que $\psi_{\alpha T}^{H_1}$ deixa a órbita
$$c(t) = \psi_{-t}^{H_0}x$$
invariante, uma vez que
$$\begin{aligned} \psi_{\alpha T}^{H_1}c(t) &= \psi_{\alpha T}^{H_1}\circ\psi_{-t}^{H_0}x \\ &= \psi_{-t}^{H_0}\circ\psi_{\alpha T}^{H_1}x \\ &= \psi_{-t}^{H_0}\circ\psi_{-T}^{H_0}x \\ &= \psi_{-(t+T)}^{H_0}x \\ &= c(t+T) \end{aligned}$$

Então, $\psi^{H_1}_{\alpha nT}$ deixa c invariante para $n = 1,2,\ldots$, isto é,

$$\psi^{H_1}_{\alpha nT}c(t) = c(t+nT) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Lema 5.8. *Se $\alpha T/2\pi$ é irracional então $c(t)$ é invariante sob $\psi^{H_1}_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $\alpha T/2\pi$ é racional então α é racional.*

Demonstração. Se $\alpha T/2\pi$ é irracional, então, $\alpha nT/2\pi$ é denso em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0,1)$ e isto implica que αnT é denso em $[0,2\pi)$. Como para todo $(p,\xi) \in T^*M$ temos

$$\psi^{H_1}_{2\pi}(p,\xi) = \left(\phi_{2\pi}(p), (D\phi_{2\pi}(p))^{-1^*}\xi\right) = \left(p, \xi \circ (D\phi_{2\pi}(p))^{-1}\right) = (p, \xi \circ Id) = (p,\xi)$$

segue que $\psi^{H_1}_{2\pi} = Id$. Então, se $t \in [0,2\pi)$ e $(\alpha n_m T)$ é uma subsequência que converge para t, como $\psi^{H_1}_t$ é contínuo em todo T^*M segue que

$$\psi^{H_1}_t c(s) = \lim_{n_m \to \infty} \psi^{H_1}_{\alpha n_m T} c(s) = \lim_{n_m \to \infty} c(s + n_m T) = c\left(s + \frac{t}{\alpha}\right). \tag{5.10}$$

Portanto, como $\psi^{H_1}_t$ é periódico de período 2π segue que c é invariante sob todo grupo a um parâmetro $\psi^{H_1}_t$, $t \in \mathbb{R}$. Agora, se $\alpha T/2\pi = m/n$, onde $m,n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ então

$$x = \psi^{H_1}_{2\pi m}x = \psi^{H_1}_{\alpha nT}x = \psi^{H_0}_{-nT}x.$$

Como $\psi^{H_0}_t$ tem período 2π segue que $nT = 2\pi q$ para algum $q \in \mathbb{Z}^*$ e isto implica que $\alpha = m/q \in \mathbb{Q}$. □

Como as projeções de $\psi^{H_0}_t$ e $\psi^{H_\alpha}_t$ sobre M são, a menos de reparametrização, as geodésicas de g e F_α, respectivamente, temos:

Teorema 5.9. *Suponha que α é suficientemente pequeno e irracional. Então, γ é uma geodésica fechada de F_α (a menos de reparametrização) se e somente se γ é uma geodésica fechada de g (a menos de reparametrização) invariante sob o grupo a um parâmetro ϕ_t.*

Demonstração. Assumindo que α é irracional e tomando uma órbita periódica de $\psi^{H_\alpha}_t$, isto é,

$$\psi^{H_\alpha}_T(p,\xi) = (p,\xi)$$

para algum $T \in \mathbb{R}$ e $(p,\xi) \in T^*M$ segue que $\frac{\alpha T}{2\pi}$ é irracional pois se $\frac{\alpha T}{2\pi}$ for racional obtemos, pelo Lema 5.8, que α é racional e chegamos em uma contradição.

Assim, se $c(t) = \psi^{H_0}_{-t}(p,\xi) = (\gamma(t), g(\dot\gamma(t),\cdot))$, onde γ é uma geodésica de g, $\gamma(0) = p$ e $\xi = g(\dot\gamma(0),\cdot)$, então, c é invariante sob o grupo a um parâmetro $\psi^{H_1}_t$, ou seja, c é uma órbita periódica de $\psi^{H_\alpha}_t$ e γ é, a menos de reparametrização, uma geodésica fechada de F_α. Além disso, pela equação (5.10) temos

$$\begin{aligned}
\left(\gamma\left(\frac{t}{\alpha}+s\right), g\left(\dot\gamma\left(\frac{t}{\alpha}+s\right),\cdot\right)\right) &= c\left(\frac{t}{\alpha}+s\right) \\
&= \psi^{H_1}_t c(s) \\
&= \psi^{H_1}_t\,(\gamma(s), g(\dot\gamma(s),\cdot)) \\
&= \left(\phi_t(\gamma(s)), g(\dot\gamma(s),\cdot)\circ(D\phi_t(p))^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Logo, $\phi_t(\gamma(s)) = \gamma\left(\frac{t}{\alpha}+s\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, γ é invariante sob o grupo a um parâmetro ϕ_t. Portanto, as geodésicas fechadas de F_α são, a menos de reparametrização, as geodésicas fechadas de g que são invariantes sob ϕ_t.

Por outro lado, se α é irracional e $\gamma(s)$ é uma geodésica de g que é invariante sob o grupo a 1-parâmetro ϕ_t temos $\phi_t(\gamma(s)) = \gamma(h(t,s))$, para alguma função real contínua h. Assim,

$$D\phi_t(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\gamma\big(h(t,s)\big) \Longrightarrow \dot{\gamma}(s) = (D\phi_t(\gamma(s)))^{-1} \cdot \frac{d}{ds}\left(\gamma\big(h(t,s)\big)\right).$$

Como ϕ_t é um grupo a 1-parâmetro de isometrias então para todo $v \in T_{\gamma(h(t,s))}M$ temos

$$\begin{aligned} g\left(\dot{\gamma}(s),\cdot\right) \circ \left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1}(v) &= g\left(\dot{\gamma}(s), \left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1}(v)\right) \\ &= g\left(\left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1} \cdot \frac{d}{ds}\left(\gamma\big(h(t,s)\big)\right), \left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1}(v)\right) \\ &= g\left(\frac{d}{ds}\left(\gamma\big(h(t,s)\big)\right), v\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$g\left(\dot{\gamma}(s),\cdot\right) \circ \left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1} = g\left(\frac{d}{ds}\left(\gamma\big(h(t,s)\big)\right), \cdot\right).$$

Assim, se $c(s) = (\gamma(s), g(\dot{\gamma}(s),\cdot)) = \psi_s^{H_0}x$ então para todos $t,s \in \mathbb{R}$ segue que

$$\begin{aligned} \psi_t^{H_1}c(s) &= \psi_t^{H_1}\left(\gamma(s), g(\dot{\gamma}(s),\cdot)\right) \\ &= \left(\phi_t(\gamma(s)), g(\dot{\gamma}(s),\cdot) \circ \left(D\phi_t(\gamma(s))\right)^{-1}\right) \\ &= \left(\gamma(h(t,s)), g\left(\frac{d}{ds}\left(\gamma\big(h(t,s)\big)\right), \cdot\right)\right) \\ &= c(h(t,s)) \end{aligned}$$

Logo, $\psi_t^{H_1}$ deixa a órbita c invariante para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como h é contínua, existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $h(\alpha T, T) = 2\pi$ implicando que

$$\psi_T^{H_\alpha}c(0) = \psi_T^{H_0} \circ \psi_{\alpha T}^{H_1}c(0) = \psi_{\alpha T}^{H_1} \circ \psi_T^{H_0}c(0) = \psi_{\alpha T}^{H_1}c(T) = c(h(\alpha T, T)) = c(2\pi) = c(0).$$

Portanto, como a projeção de $\psi_t^{H_\alpha}$ sobre M são, a menos de reparametrização, as geodésicas de F_α concluímos que as geodésicas fechadas de g que são invariantes sob ϕ_t são, a menos de reparametrização, as geodésicas fechadas de F_α. $\square$

Corolário 5.10. *Sejam $M = S^2$ com a métrica canônica de curvatura constante 1 e ϕ_t o grupo a um parâmetro de rotações deixando os polos norte e sul fixos. Então, o equador é o único grande círculo invariante sob ϕ_t e consequentemente, F_α é uma métrica Finsler em S^2, que para α pequeno e irracional, tem somente duas geodésicas fechadas (ver figura 5.1).*

Observação 5.11. Para uma prova alternativa de que geodésicas invariantes sob ϕ_t são fechadas e outras observações sobre os exemplos de Katok em esferas e métricas Finsler Randers vide [Rob07].

5.2 Contando geodésicas fechadas

Com a métrica de curvatura constante 1 em S^n e as métricas canônicas em $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$ todas as geodésicas são fechadas de comprimento 2π (a menos de reparametrização). Então, para essas variedades podemos aplicar todos os resultados obtidos na Seção 5.1. Com isso em mente, nessa seção, estimaremos no Teorema 5.15 e no Teorema 5.25 a quantidade de geodésicas fechadas de período (próximo de) 2π em métricas Finsler definidas em S^n, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$. Mas antes disso precisamos de alguns resultados prévios.

Definição 5.12. Um plano de rotação para uma rotação particular é o plano, passando pela origem, que é mapeado nele mesmo pela rotação.

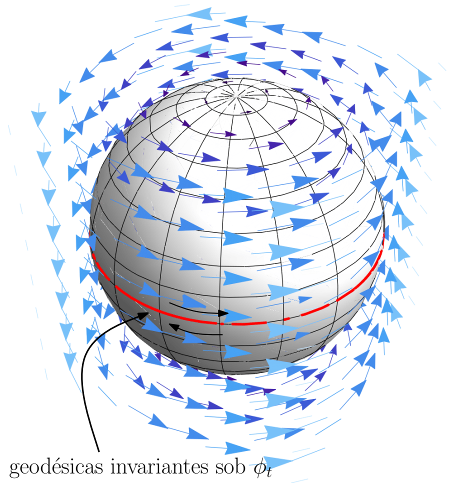

Figura 5.1: *Exemplo de Katok em* S^2

Lema 5.13. *Seja*

$$\phi_t = diag\,(R(\alpha_1 t), \cdots, R(\alpha_n t))$$

onde α_i *é um inteiro positivo e* $R(\theta)$ *é a rotação em* $\mathbb{R}^2$ *com ângulo* θ*. Se os* α_i*'s são dois a dois distintos, então, somente os planos de rotação são invariantes sob* ϕ_t*.*

Demonstração. Seja $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}, v_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Como $\phi_t v$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} \cos(t\alpha_1) & -\sin(t\alpha_1) & & & \\ \sin(t\alpha_1) & \cos(t\alpha_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos(t\alpha_n) & -\sin(t\alpha_n) \\ & & & \sin(t\alpha_n) & \cos(t\alpha_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{2n-1} \\ v_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cos(t\alpha_1) - v_2\sin(t\alpha_1) \\ v_1\sin(t\alpha_1) + v_2\cos(t\alpha_1) \\ \vdots \\ v_{2n-1}\cos(t\alpha_n) - v_{2n}\sin(t\alpha_n) \\ v_{2n-1}\sin(t\alpha_n) + v_{2n}\cos(t\alpha_n) \end{bmatrix}$$

vemos que os planos $p_1 = span\{(1,0,\ldots,0,0),(0,1,\ldots,0,0)\}, \cdots, p_n = span\{(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$ são invariantes sob ϕ_t pois qualquer vetor $v \in p_i$ temos

$$\phi_t v = \big(0,0,\ldots,v_{2i-1}\cos(t\alpha_i) - v_{2i}\sin(t\alpha_i), v_{2i-1}\sin(t\alpha_i) + v_{2i}\cos(t\alpha_i),\ldots,0,0\big).$$

Logo, $\phi_t v \in p_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha agora que existe outro plano $p \subset \mathbb{R}^{2n}$, além dos planos p_i's, que é invariante sob ϕ_t. Então, existe $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}, u_{2n}) \in p$ e índices $1 \leq i < j \leq n$ tais que

$$u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad u_{2j-1}^2 + u_{2j}^2 \neq 0.$$

Além disso, existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{t}\alpha_i = \pi$. Como os α_i's são dois a dois distintos e podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_i > \alpha_j > 0$ temos $0 < \bar{t}\alpha_j = \frac{\pi}{\alpha_i}\alpha_j < \pi$. Logo,

$$\phi_{\bar{t}} u = \big(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, -u_{2i-1}, -u_{2i}, \ldots, \bar{u}_{2j-1}, \bar{u}_{2j}, \ldots, \bar{u}_{2n-1}, \bar{u}_{2n}\big)$$

onde para $1 \leq h \leq n$ temos

$$\begin{aligned} \bar{u}_{2h-1} &= u_{2h-1}\cos(\bar{t}\alpha_h) - u_{2h}\sin(\bar{t}\alpha_h) \\ \bar{u}_{2h} &= u_{2h-1}\sin(\bar{t}\alpha_h) + u_{2h}\cos(\bar{t}\alpha_h) \end{aligned}$$

e em particular $(\bar{u}_{2j-1}, \bar{u}_{2j}) \neq -(u_{2j-1}, u_{2j})$. Como p é invariante sob ϕ_t segue que $\phi_{\bar{t}} u \in p$ e $w = u + \phi_{\bar{t}} u \in p$, ou seja,

$$w = \big(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, 0, 0, \ldots, \tilde{u}_{2j-1}, \tilde{u}_{2j}, \ldots, \tilde{u}_{2n-1}, \tilde{u}_{2n}\big) \in p,$$

onde $\widetilde{u}_h = u_h + \overline{u}_h$ e $(\widetilde{u}_{2j-1}, \widetilde{u}_{2j}) \neq (0,0)$. Além disso, o vetor

$$\phi_t w = (w_1, w_2, \ldots, 0, 0, \ldots, w_{2j-1}, w_{2j}, \ldots, w_{2n-1}, w_{2n}) \in p$$

onde se $h \neq i$ e $1 \leq h \leq n$ temos

$$\begin{aligned} w_{2h-1} &= \widetilde{u}_{2h-1}\cos(t\alpha_h) - \widetilde{u}_{2h}\sin(t\alpha_h) \\ w_{2h} &= \widetilde{u}_{2h-1}\sin(t\alpha_h) + \widetilde{u}_{2h}\cos(t\alpha_h). \end{aligned}$$

Como $(\widetilde{u}_{2j-1}, \widetilde{u}_{2j}) \neq (0,0)$, para $t > 0$ pequeno $(w_{2j-1}, w_{2j}) \neq (0,0)$ e nesse caso os vetores w e $\phi_t w$ são linearmente independentes. Logo, $span\{w, \phi_t w\} = p$ e qualquer vetor desse plano tem as coordenadas $2i-1$ e $2i$ nulas, ou seja, $u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2 = 0$. Contradição.

Portanto, somente os planos de rotação são invariantes sob ϕ_t. □

Lema 5.14. *Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ e*

$$\phi_t = diag\left(e^{it\alpha_1}, \cdots, e^{it\alpha_{n+1}}\right),$$

onde α_i é um inteiro positivo e $e^{it\alpha_j} = \cos(t\alpha_j) + i\sin(t\alpha_j) \in \mathbb{C}$. Se os α_j's são dois a dois distintos, então, os planos de $\mathbb{K}^{n+1}$ que são invariantes sob ϕ_t são aqueles gerados por dois vetores coordenados quaisquer.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que os planos gerados por dois vetores coordenados são invariantes sob ϕ_t. De fato, se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{K}^n$, p_{jk} o plano gerado por v_j,v_k e $w = v_j\lambda_j + v_k\lambda_k$, para escalares $\lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $1 \leq j < k \leq n$, temos

$$\phi_t w = \begin{bmatrix} e^{it\alpha_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & e^{it\alpha_j} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & e^{it\alpha_k} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{it\alpha_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e^{it\alpha_j}\lambda_j \\ \vdots \\ e^{it\alpha_k}\lambda_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\phi_t w = v_j e^{it\alpha_j}\lambda_j + v_k e^{it\alpha_k}\lambda_k \in p_{jk}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $1 \leq j < k \leq n+1$.

Por um argumento análogo ao usado no Lema 5.13 segue que qualquer outro plano diferente dos planos p_{jk}'s não são invariantes sob ϕ_t. Portanto, segue o desejado. □

Teorema 5.15. *Existem métricas Finsler em S^{2n} e S^{2n-1} com somente $2n$ geodésicas fechadas e em $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$ com somente $n(n+1)$ e $2n(n+1)$ geodésicas fechadas, respectivamente.*

Demonstração. PARTE I: Como consequência de ([Aud03], pág 56) segue que qualquer grupo a um parâmetro fechado de isometrias em S^{2n-1} e S^{2n} é conjugado, respectivamente, a uma matriz diagonal

$$\phi_t = diag(R(\alpha_1 t), \cdots, R(\alpha_n t)) \text{ e } \phi_t = diag(R(\alpha_1 t), \cdots, R(\alpha_n t), 1) \tag{5.11}$$

onde α_i é um inteiro positivo e $R(\theta)$ é a rotação em $\mathbb{R}^2$ com ângulo θ.

Como as geodésicas fechadas de S^n, com a métrica Riemanniana g de curvatura constante 1, são dadas pela interseção de planos (bidimensionais) com S^n segue que as geodésicas fechadas em S^n invariantes sob ϕ_t são dadas pela interseção de planos invariantes sob ϕ_t em $\mathbb{R}^{n+1}$ com S^n.

Se os α_i's são dois a dois distintos, pelo Lema 5.13 somente os planos de rotação são invariantes sob ϕ_t e cada uma das geodésicas de g invariantes sob ϕ_t dá origem, pelo Teorema 5.9, a duas geodésicas de F_α se α é irracional. Portanto, como existem n planos de rotação em $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{R}^{2n+1}$ segue que S^{2n-1} e S^{2n} tem $2n$ geodésicas fechadas na métrica F_α se α é irracional.

PARTE II: Para o espaço projetivo $\mathbb{C}P^n$ vimos em (2.4) que o grupo de isometrias desse espaço é $PU(n+1,\mathbb{C})$. Se tomarmos a fibração de Hopf

$$S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

então $U(n+1)$ age em $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de forma que somente o centro de $U(n+1)$ induz uma aplicação trivial em $\mathbb{C}P^n$. Como toda matriz em $U(n+1)$ é diagonalizável, então todo grupo a 1-parâmetro fechado de $U(n+1)$ é conjugado a

$$\phi_t = diag(e^{it\alpha_1}, \cdots, e^{it\alpha_{n+1}}).$$

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ como definida na Seção 2.2. Pela Proposição 2.9 segue que uma geodésica fechada γ em $\mathbb{C}P^n$ é a projeção de uma geodésica fechada $\beta(s) = x\cos s + u\sin s$ de $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (onde $x \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\gamma(0) = \pi(x)$ e $\dot{\gamma}(0) = \pi(x,u)$), isto é, $\gamma(s) = \pi(\beta(s))$. Suponha que $\gamma(s)$ é invariante sob ϕ_t então

$$\phi_t\gamma(s) = \gamma(h_t(s)) \tag{5.12}$$

para alguma função $h_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Como

$$\lambda\phi_t(\beta(s)) = \phi_t(\lambda\beta(s)) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ e } s \in \mathbb{R} \tag{5.13}$$

temos pelas equações (5.13) e (5.12)

$$\pi\left(\phi_t(\beta(s))\right) = \phi_t\left(\pi(\beta(s))\right) = \pi\left(\beta\left(h_t(s)\right)\right) \Longrightarrow \phi_t\left(\beta(s)\right) = \mu_s\beta\left(h_t(s)\right) \tag{5.14}$$

para algum $\mu_s \in \mathbb{C}^*$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Note que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\beta(s)$ pertence a um plano P gerado por x e u. Além disso, como $\beta(0) = x$, $\beta(\pi/2) = u$ então, pela equação (5.14) segue que

$$\phi_t x = \phi_t\beta(0) = \mu_0\beta(h_t(0)) = x\mu_0\cos(h_t(0)) + u\mu_0\sin(h_t(0)) \in P$$

e da mesma forma

$$\phi_t u = x\mu_{\frac{\pi}{2}}\cos(h_t(\pi/2)) + u\mu_{\frac{\pi}{2}}\sin(h_t(\pi/2)) \in P.$$

Como ϕ_t é linear então para todo $w = \lambda_1 x + \lambda_2 u \in P$ temos

$$\begin{aligned}
\phi_t w &= \phi_t(\lambda_1 x + \lambda_2 u) \\
&= \lambda_1\phi_t x + \lambda_2\phi_t u \\
&= \lambda_1\Big(x\mu_0\cos(h_t(0)) + u\mu_0\sin(h_t(0))\Big) + \lambda_2\Big(x\mu_{\frac{\pi}{2}}\cos(h_t(\pi/2)) + u\mu_{\frac{\pi}{2}}\sin(h_t(\pi/2))\Big) \\
&= \Big(\lambda_1\mu_0\cos(h_t(0)) + \lambda_2\mu_{\frac{\pi}{2}}\cos(h_t(\pi/2))\Big)x + \Big(\lambda_1\mu_0\sin(h_t(0)) + \lambda_2\mu_{\frac{\pi}{2}}\sin(h_t(\pi/2))\Big)u
\end{aligned}$$

ou seja, $\phi_t w \in P$. Logo, o plano P é invariante sob ϕ_t.

Assim, toda geodésica fechada γ em $\mathbb{C}P^n$ invariante sob ϕ_t é levantada em um plano de $\mathbb{C}^{n+1}$ invariante sob ϕ_t e pelo Lema 5.14 os planos invariantes sob ϕ_t são gerados por dois vetores coordenados quaisquer. Isso reduz a situação para a ação de $U(2)$ em $S^1 \to S^3 \to \mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Como vimos na primeira parte da demonstração, S^2 possui somente 2 geodésicas invariantes sob o grupo a 1-parâmetro de rotações. Então, como geodésicas vindas de planos distintos são distintas e existem

$$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.15}$$

planos gerados por dois vetores coordenados segue que

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 = n(n+1)$$

é a quantidade de geodésicas fechadas em $\mathbb{C}P^n$ na métrica F_α se α é irracional.

PARTE III: Como vimos em (2.5), o grupo de isometrias para o espaço projetivo $\mathbb{H}P^n$ é $PU(n+1,\mathbb{H})$.

Tomando a fibração de Hopf

$$S^3 \to S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$$

então, $Sp(n+1)$ age em $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}P^n$ e somente as matrizes I e $-I$ induzem uma aplicação trivial em $\mathbb{H}P^n$. Como toda matriz $A \in Sp(n+1)$ é unitária segue de ([Lee48], pág 259) que A pode ser transformada por uma matriz unitária em uma matriz na forma diagonal, onde os elementos da diagonal são números complexos de norma 1, ou seja, tem a forma $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Logo, todo grupo a 1-parâmetro fechado de $Sp(n+1)$ é conjugado a

$$\phi_t = diag(e^{it\alpha_1}, \cdots, e^{it\alpha_{n+1}}).$$

Pela Proposição 2.9, assim como para $\mathbb{C}P^n$, segue que as geodésicas fechadas invariantes sob ϕ_t estão contidas em planos invariantes sob ϕ_t. Pelo Lema 5.14 esses planos invariantes são gerados por dois vetores coordenados quaisquer e da equação (5.15) obtemos $n(n+1)/2$ desses planos.

Precisamos agora observar a ação de $Sp(2)$ em cada um dos planos invariantes sob ϕ_t, ou melhor, a ação de $Sp(2) \cong SU(4)$ em $S^3 \to S^7 \to \mathbb{H}P^1 \cong S^4$. Como S^4 possui 4 geodésicas invariantes sob o grupo a 1-parâmetro de rotações (ou seja, existem 4 geodésicas fechadas invariantes sob ϕ_t em cada um dos planos citados) e existem $n(n+1)/2$ desses planos segue-se que existem

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot 4 = 2n(n+1)$$

geodésicas fechadas em $\mathbb{H}P^n$ na métrica F_α se α é irracional. □

Além da métrica canônica existe outra métrica Riemanniana definida em S^n ([Bes12], pág 120) satisfazendo as hipóteses para a construção da métrica Finsler como na equação (5.3), isto é, uma métrica em que todas as geodésicas são fechadas de período 2π e que admite um grupo a um parâmetro de isometrias. Também existem métricas Riemannianas em S^2 em que todas as geodésicas são fechadas e que não admitem grupos de isometrias ([Bes12], pág 126). No entanto, não existem qualquer exemplo de métricas com uma quantidade de geodésicas menor do que as que encontramos no Teorema 5.15.

Por um teorema de Bott e Samelson ([Bes12], pág 186) segue que as únicas variedades que admitem métricas Riemannianas com todas as geodésicas fechadas de mesmo período são ou difeomorfas a $\mathbb{R}P^n$ ou tem a mesma cohomologial integral de anéis que S^n, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ e CaP^n (plano projetivo de Cayley que não abordaremos nesse trabalho). Portanto, esferas e espaços projetivos são as únicas variedades em que obtemos exemplos, como os mostrados anteriormente, de métricas Finsler com uma quantidade finita de geodésicas fechadas.

Mostraremos a seguir que o número de geodésicas fechadas nos exemplos de esferas e espaços projetivos tem algum significado topológico e são "ótimos"em algum sentido. Mas antes disso, enunciaremos sem a demonstração alguns resultados da teoria de Lusternik-Schnirelmann e da teoria de Morse necessários para a demonstração do Teorema 5.24 e do Teorema 5.25.

Definição 5.16. Seja M uma variedade de dimensão n e $f: M \to \mathbb{R}$. Um ponto $p \in M$ é dito crítico de f se $df(p) = 0$. Um número $c \in \mathbb{R}$ é dito valor crítico de f se existe algum ponto crítico p de f tal que $f(p) = c$. Se $c \in \mathbb{R}$ não é valor crítico então c é chamado de valor regular. O ponto crítico p é dito não degenerado se a Hessiana

$$d^2 f(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

de f em p dada por

$$d^2 f(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) dx^i \otimes dx^j$$

tiver núcleo trivial. Aqui as derivadas parciais são tomadas em relação a um sistema de coordenadas $(x^i, \ldots, x^n)$ em torno de p. O índice de Morse de p é a dimensão do subespaço maximal de T_pM onde $d^2 f(p)$ é negativa-definida.

Definição 5.17. Seja $f: M \to \mathbb{R}$ então f é dita uma função de Morse se todos os seus pontos críticos são não-degenerados.

Teorema 5.18 ([DFBN90], pág 195). *Seja M uma variedade diferenciável fechada de dimensão n e denote por $b_k(M)$ a dimensão do k-ésimo grupo de homologia de M sob qualquer corpo (i.e, dimensão como espaço vetorial). Então, para qualquer função de Morse f em M a seguinte "desigualdade de Morse"vale:*

$$\mu_k(f) \geq b_k(M), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{5.16}$$

onde $\mu_k(f)$ é o número de pontos críticos de f de índice k.

Observação 5.19. Os elementos $b_k(M)$ são conhecidos como números de Betti.

Definição 5.20. Seja X um espaço topológico Hausdorff e $A \subset X$ um conjunto fechado de X. O conjunto A diz-se de *categoria* $k = \mathrm{cat}_X(A)$ com respeito ao espaço topológico X se k é o menor número para o qual A pode ser escrito como a união

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$$

de k conjuntos fechados $A_1, \cdots, A_k$, onde cada um deles é contrátil em X (a um ponto). Denotamos

$$\mathrm{cat}_X X = \mathrm{cat} X.$$

Definição 5.21. O **comprimento da cohomologia** ou **comprimento cup** é o maior número de (não necessariamente distintas) classes de cohomologia cujo produto cup é não nulo.

Teorema 5.22 ([DFBN90], pág 226). *Seja M uma variedade suave de dimensão n, fechada e conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O número k (que pode ser infinito) de pontos críticos distintos de f é limitado inferiormente por*

$$k \geq \mathrm{cat}(M).$$

Teorema 5.23 ([DFBN90], pág 234). *Se M é uma variedade suave de dimensão n e compacta cujo comprimento da cohomologia é λ então*

$$\mathrm{cat}(M) \geq \lambda + 1.$$

Teorema 5.24. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana tal que todas as geodésicas de M são fechadas de mesmo período 2π. Então, qualquer métrica Finsler em M suficientemente próxima de g tem pelo menos* $\dim M$ *geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π.*

Demonstração. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão n tal que todas as geodésicas são fechadas de período 2π e seja $C = T_1M/S^1$ como definido em (1.30).

Como vimos na seção 4.6 o problema de encontrar geodésicas em uma variedade pode ser transportado para o problema de encontrar pontos críticos de uma função. Pelo Corolário 4.53 vemos que qualquer métrica Finsler F suficientemente próxima da métrica Riemanniana g em M tem tantas geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π quanto uma função em $C = T_1M/S^1$ tem pontos críticos.

Por [Wei74] segue que a classe de Euler $e \in H^2(C)$ da fibração $T_1M \to C$ satisfaz $e^{n-1} = [C] \neq 0$, ou seja, o comprimento da cohomologia é pelo menos $n-1$. Logo, pelos Teoremas 5.22 e 5.23 segue que o número k de pontos críticos de qualquer função real e suave em C é tal que

$$k \geq \mathrm{cat}(C) \geq (n-1) + 1 = n = \dim M.$$

Portanto, qualquer métrica Finsler em M suficientemente próxima de g tem pelo menos $\dim M$ geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π. □

Teorema 5.25. *Seja $M = S^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$. Se todas as geodésicas de comprimento próximo de 2π na métrica Riemanniana canônica g definida nessas variedades são não-degeneradas então qualquer métrica Finsler suficientemente próxima de g tem pelo menos $2n$ geodésicas em S^{2n} e S^{2n-1}, $n(n+1)$ em $\mathbb{C}P^n$ e $2n(n+1)$ em $\mathbb{H}P^n$ de comprimento próximo de 2π.*

Demonstração. Sejam M como no enunciado e g a métrica Riemanniana canônica definida em M. Como vimos no Corolário 4.53, qualquer métrica Finsler F em M suficientemente próxima de g tem pelo menos tantas geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π quanto uma função φ em C tem pontos críticos. Se todas as geodésicas de F com comprimento próximo de 2π são não degeneradas então pelo Teorema 5.18 segue que o número k de pontos críticos de φ é tal que

$$k = \sum_i \mu_i(\varphi) \geq \sum_{i=0}^{\dim C} b_i(C). \tag{5.17}$$

Como vimos na seção 3.7, usando a sequência de Gysin na fibração $S^{n-1} \to T_1M \to M$ encontramos a cohomologia de T_1M e usando a sequência de Gysin em $S^1 \to T_1M \to C$ podemos encontrar os números de Betti de C. Assim:

(i) Pelo Lema 3.41, se $M = S^{2n}$ temos $b_i(C) = 1$ se i é par e $0 \leq i \leq 4n-2$. Logo,

$$\sum_{i=0}^{4n-2} b_i(C) = \frac{4n-2}{2} + 1 = 2n.$$

(ii) Pelo Lema 3.42, se $M = S^{2n-1}$ temos $b_i(C) = 1$ se i é par e $0 \leq i \leq 4n-4$ exceto $b_{2n-2}(C) = 2$. Logo,

$$\sum_{i=0}^{4n-4} b_i(C) = \frac{2n-4}{2} + 1 + 2 + \frac{(4n-4)-2n}{2} + 1 = 2n.$$

(iii) Pelo Lema 3.43, se $M = \mathbb{C}P^n$ temos

$$b_0(C) = 1, b_2(C) = 2, b_4(C) = 3, \ldots, b_{2n-2}(C) = n = b_{2n}(C), b_{2n+1}(C) = n-1, \ldots, b_{4n-2}(C) = 1.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{4n-2} b_i(C) = \frac{(1+n)n}{2} \cdot 2 = n(n+1).$$

(iv) Pelo Lema 3.44, se $M = \mathbb{H}P^n$ temos

$$b_0(C) = b_2(C) = 1, b_4(C) = b_6(C) = 2, \ldots, b_{4n-4}(C) = b_{4n-2}(C) = n = b_{4n}(C) = b_{4n+2}(C), \ldots, b_{8n-2}(C) = 1.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{8n-2} b_i(C) = \frac{(1+n)n}{2} \cdot 4 = 2n(n+1).$$

Portanto, toda métrica Finsler suficientemente próxima de g tem pelo menos $2n$ geodésicas em S^{2n} e S^{2n-1}, $n(n+1)$ em $\mathbb{C}P^n$ e $2n(n+1)$ em $\mathbb{H}P^n$ de comprimento próximo de 2π. □

Assim, comparando o Teorema 5.15 e o Teorema 5.25 vemos que entre todas as métricas Finsler suficientemente próximas da métrica Riemanniana canônica, somente os exemplos de F_α (construídas na demonstração do Teorema 5.15) em S^{2n} são ótimos, no sentido de que F_α possui a menor quantidade de geodésicas fechadas estimada no Teorema 5.25. Mas todos os exemplos são ótimos se considerarmos somente métricas Finsler com geodésicas fechadas não degeneradas.

Capítulo 6

Propriedades Geométricas dos Exemplos de Katok

Nesse capítulo vamos examinar algumas propriedade da co-métrica Finsler

$$H_\alpha = H_0 + \alpha H_1$$

em $M = S^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ onde H_0 e H_1 são como em (4.9) e (4.5), respectivamente. Na maioria dos casos faremos os cálculos somente para $M = S^2$, os outros são similares.

6.1 Comprimento das Geodésicas

Teorema 6.1. *O comprimento das geodésicas fechadas de F_α em S^2 são iguais a $2\pi/(1+\alpha)$ e $2\pi/(1-\alpha)$ dependendo se a geodésica fechada está a favor ou na direção oposta à direção da rotação.*

Demonstração. Vimos anteriormente no capítulo 5 que se $(\gamma(t), Y(\gamma(t))$ é uma curva integral de $X_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}$, então, $(\gamma_0(t), Y(\gamma_0(t))$ é uma curva integral de X_{H_α}, onde γ_0 é uma reparametrização de γ tal que $F_\alpha(\dot{\gamma}_0(s)) = 1$. Assim, o comprimento de uma geodésica na métrica Finsler F_α concorda com o período das órbitas de X_{H_α}. Seja

$$c(t) = \psi_t^{H_0} x \tag{6.1}$$

uma geodésica fechada de H_0, em T^*M, invariante sob ϕ_t. Pelo Corolário 5.10, para $M = S^2$, as únicas geodésicas invariantes sob o grupo a 1-parâmetro de rotações

$$\phi_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$, isto é, o equador percorrido na direção anti-horária e horária, respectivamente. Veja que

$$\begin{aligned} \phi_s(\gamma_1(t)) &= \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin s \cos t + \cos s \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t+s) \\ \sin(t+s) \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_1(t+s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_s(\gamma_2(t)) &= \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos s \cos t + \sin s \sin t \\ \sin s \cos t - \cos s \sin t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma_2(t-s)\end{aligned}$$

Como vimos na demonstração do Teorema 5.9, se $\gamma(t)$ é uma geodésica de g invariante sob ϕ_s e tal que $\phi_s(\gamma(t)) = \gamma(h(t,s))$ para alguma função real contínua h então se $c(t) = \psi_t^{H_0} x$ temos

$$\psi_s^{H_1} c(t) = c(h(t,s)).$$

Logo, como no nosso caso $h(t,s) = t+s$ e $h(t,s) = t-s$ temos

$$\psi_s^{H_1} c(t) = c(t \pm s).$$

Assim,

$$\psi_t^{H_\alpha} x = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\alpha t}^{H_1} x = \psi_{\alpha t}^{H_1} \circ \psi_t^{H_0} x = \psi_{\alpha t}^{H_1} c(t) = c(t \pm \alpha t).$$

Como c tem período 2π então se T é o período de $\psi_t^{H_\alpha} x$ temos

$$T(1 \pm \alpha) = 2\pi \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{1 \pm \alpha}.$$

Portanto, os comprimentos das geodésicas γ_1 e γ_2 na métrica F_α são $2\pi/(1+\alpha)$ e $2\pi/(1-\alpha)$, respectivamente. □

Analogamente para a métrica F_α em S^n com ϕ_t como definido na PARTE I do Teorema 5.15 segue que o comprimento das geodésicas são $2\pi/(1+\alpha\alpha_i)$ e $2\pi/(1-\alpha\alpha_i)$, respectivamente.

Teorema 6.2. *Se $|\alpha| < 1$ então F_α como definido em (5.3) é uma métrica Finsler.*

Demonstração. Denote por $N(p,y) = \sqrt{g_p(y,y)}$ e (g_{ij}) a matriz simétrica positiva-definida associada a métrica Riemanniana g. Como a aplicação $y \longmapsto g(y,\cdot)$ é uma bijeção e $H_0(p,\xi) = \sqrt{g^{ij}(p)\xi_i\xi_j}$, onde $(g^{ij}(p)) = (g_{ij}(p))^{-1}$ temos

$$H_0\big(p, g_p(y,\cdot)\big) = \sqrt{g^{ij}(p) g_{ij}(p) y^i g_{ij}(p) y^j} = \sqrt{g_{ij}(p) y^i y^j} = N(p,y)$$

e

$$H_1\big(p, g_p(y,\cdot)\big) = g_p(y, V_p).$$

Logo, $H_0\big(p, g_p(y,\cdot)\big)$ é uma norma Riemanniana associada a g e $\beta := H_1\big(p, g_p(y,\cdot)\big)$ é uma 1-forma em TM que para cada $p \in M$ associa o funcional linear $g_p(V_p,\cdot)$. Pelo Teorema 1.30 segue que

$$F(p,y) := H_\alpha\big(p, g_p(y,\cdot)\big) = \sqrt{g_{ij}(p) y^i y^j} + \alpha\beta(y)$$

é uma métrica Finsler se, e somente se, $||\alpha\beta||_g < 1$. Observe que

$$\begin{aligned} ||\alpha\beta||_g &= |\alpha| \sup\{\beta(y), N(p,y) = 1, y \in T_pM \, e \, p \in M\} \\ &= |\alpha| \sup\{g_p(y,V_p), N(p,y) = 1, y \in T_pM \, e \, p \in M\} \end{aligned}$$

e para $y \in T_pM$ tal que $N(p,y) = 1$ temos

$$g_p(y,V_p) = N(p,y) N(p,V_p) \cos(\theta) = N(p,V_p)\cos(\theta)$$

onde θ é ângulo entre y e V_p. Assim, como $N(p,V_p) \leq 1$ para todo p em M então F é uma métrica Finsler se, e somente se,

$$1 > ||\alpha\beta||_g = |\alpha| \sup_{p\in M} N(p,V_p) = |\alpha|.$$

Observe que derivando F em relação a y temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}(p,y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}\left[H_\alpha^2(p^i, g_{ij}y^i)\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial H_\alpha^2}{\partial \xi_i}(p^i, g_{ij}y^i)\cdot g_{ij}\end{aligned}$$

e derivando novamente em relação a y temos

$$\begin{aligned}f_{ij}(p,y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(p,y)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\frac{\partial H_\alpha^2}{\partial \xi_i}(p^i, g_{ij}y^i)\cdot g_{ij}\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_\alpha^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\big(p, g_p(y,\cdot)\big)\cdot g_{ij}\cdot g_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial H_\alpha^2}{\partial \xi_i}\big(p, g_p(y,\cdot)\big)\cdot \frac{\partial}{\partial y_i}(g_{ij})\\ &= h_{ij}\big(p, g_p(y,\cdot)\big)(g_{ij})^2\end{aligned}$$

Logo,

$$h_{ij} = f_{ij}(g^{ij})^2 = f_{ij}\circ H_0^2.$$

Então, se $|\alpha| < 1$ segue-se que a forma bilinear h_{ij} é positiva definida pois f_{ij} nesse caso é positiva definida. Portanto, como H_α é diferenciável em $T^*M\backslash\{0\}$ e homogênea de grau 1 segue que H_α é uma co-norma Finsler se $|\alpha| < 1$ e pelo Teorema 1.25 concluímos que F_α é uma métrica Finsler. □

Observação 6.3. Veja que quando $\alpha \to 1$ o comprimento das geodésicas fechadas em S^2 (na métrica F_α) tendem a π e ∞, respectivamente.

Os exemplos de F_α também são interessantes quando α é racional. Seja $\alpha = k/m$ onde k e m são relativamente primos. As geodésicas fechadas invariantes sob ϕ_t então tem período

$$\frac{2\pi}{1+\alpha} = \frac{2\pi m}{k+m}$$

e

$$\frac{2\pi}{1-\alpha} = \frac{2\pi m}{k-m}$$

respectivamente. Mas, afirmo que todas as outras geodésicas tem período $2\pi m$. De fato, se $c(t) = \psi_t^{H_0}x$ é uma órbita fechada de X_{H_0} temos

$$\psi_t^{H_\alpha}x = \psi_t^{H_0}\circ\psi_{\alpha t}^{H_1}x = \psi_{\alpha t}^{H_1}\circ\psi_t^{H_0}x = \psi_{\alpha t}^{H_1}c(t) = \psi_{\frac{kt}{m}}^{H_1}c(t).$$

Como nesse caso $c(t)$ não é invariante sob $\psi_t^{H_1}$ então se T é o período de $\psi_t^{H_\alpha}$ segue que $T/m = 2\pi$. Assim:

Teorema 6.4. *Existem métricas Finsler em S^n, $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{H}P^n$ com todas as geodésicas fechadas mas que não tem o mesmo período.*

Por exemplo, para S^2 com $\alpha = k/(k+1)$ então os períodos das geodésicas fechadas são:

$$\frac{2\pi}{1+\alpha} = \frac{2\pi(k+1)}{2k+1},\quad \frac{2\pi}{1-\alpha} = 2\pi(k+1) \quad \text{e} \quad 2\pi(k+1).$$

Após uma reparametrização, todas as geodésicas tem comprimento 2π, exceto por uma que tem comprimento $2\pi/(2k+1)$.

6.2 Aplicação de Poincaré dos Exemplos de Katok

Seja (M,ω) uma variedade simplética e H um hamiltoniano com campo Hamiltoniano X_H e fluxo ψ_t, onde $c(t)$ é uma órbita fechada de período T, isto é, $c(0) = c(T) = x$.

Definição 6.5. Seja $\Sigma' \subset M$ uma subvariedade de codimensão 1 transversal a X_H, ou seja,

$$T_yM = T_y\Sigma' \oplus span\{X_H(y)\}$$

para todo $y \in \Sigma'$ numa vizinhança de x. Então, Σ' é chamada uma seção transversal local de $c(t)$ no ponto x.

Em uma vizinhança $U \subset \Sigma'$ de x o fluxo ψ_t define uma aplicação suave

$$\mathscr{P} : U \subset \Sigma' \to \Sigma'$$

definido da seguinte forma. Dado $y \in U \subset \Sigma'$, próximo de $x = c(0)$, seguimos a órbita de y até $\psi_t y$ intersectar Σ' pela primeira vez, no tempo $\tau(y) > 0$, e definimos

$$\mathscr{P}(y) = \psi_{\tau(y)}(y) \in \Sigma', \quad y \in U \subset \Sigma'.$$

Como o campo de vetores X_H é transversal à seção Σ', a aplicação $y \longmapsto \tau(y) \in \mathbb{R}$ é suave, definida em uma vizinhança de x e unicamente determinado pelas condições

$$\begin{cases} \tau(x) = T \\ \psi_{\tau(y)} \in \Sigma', \quad y \in \Sigma' \cap U \end{cases}$$

Definição 6.6. A aplicação $\mathscr{P}$ é chamada **aplicação de Poincaré** de c e $P = d\mathscr{P}(x)$ é chamada de **aplicação linearizada de Poincaré** de c.

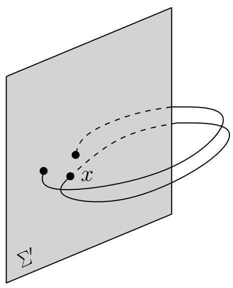

Figura 6.1: *Aplicação de Poincaré*

Definição 6.7. Se todos os autovalores da aplicação linearizada de Poincaré de c tem norma 1 dizemos que c é **elíptica**.

Agora suponha que $c(t)$ tenha energia μ, isto é, $H(c(t)) = \mu$ e que a superfície de energia

$$S = \{x \in M \,;\, H(x) = \mu\}$$

é regular e, portanto, uma subvariedade de dimensão $2n-1$. Se $\Sigma' \subset M$ é uma seção transversal da órbita periódica $c(t)$ então como H é constante ao longo das órbitas de X_H segue que a aplicação $\mathscr{P} : U \cap \Sigma' \to \Sigma'$ deixa a superfície de energia invariante

$$\mathscr{P} : U \cap \Sigma' \cap S \to \Sigma' \cap S.$$

Logo, podemos definir a seção transversal Σ na superfície de energia S e a restrição da aplicação de Poincaré por

$$\Sigma := \Sigma' \cap S \quad \text{e} \quad \mathscr{P} : U \cap \Sigma \to \Sigma.$$

Teorema 6.8. *A seção transversal $\Sigma = \Sigma' \cap S$ da órbita periódica $c(t)$ na superfície de energia S é uma subvariedade simplética de (M,ω) de dimensão $2n-2$ equipada com a forma simplética $\omega' = i^*\omega$, onde $i : \Sigma \to M$ é a inclusão. A aplicação de Poincaré $\mathscr{P} : U \cap \Sigma \to \Sigma$ preserva a forma simplética, ou seja, $\mathscr{P}^*\omega' = \omega'$.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que ω' é uma forma simplética. Como a 2-forma ω' é fechada pois $di^*\omega = i^*d\omega = 0$, precisamos mostrar apenas que ω' é não degenerada. Observe que o espaço tangente de S pode ser representado por

$$T_yS = ker\, dH(y) = ker\, \omega(X_H, \cdot\,) = \{v \in T_yM\ ;\ \omega(X_H, v) = 0\} \tag{6.2}$$

Como Σ em S é transversal à X_H temos

$$T_yS = T_y\Sigma \oplus span\{X_H\}. \tag{6.3}$$

Assuma que $v \in T_y\Sigma$ satisfaz

$$\omega(v,u) = 0 \quad \text{para todo } \ u \in T_y\Sigma.$$

Por (6.3) segue que todo vetor $\rho \in T_yS$ pode ser representado por $\rho = u + \lambda X_H$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in T_y\Sigma$. Como $\Sigma \subset S$, usamos a definição de um campo de vetores Hamiltoniano e concluímos que

$$\omega(v,\rho) = \omega(v,u) + \lambda\,\omega(v, X_H(y)) = \lambda dH(y)v = 0$$

para todo $\rho \in T_yS$. Assim, v pertence ao subespaço 1-dimensional $ker(\omega|_S) = span\{X_H\}$. Mas, como $v \in T_y\Sigma$ e $X_H \notin T_y\Sigma$ concluímos que $v = 0$. Logo, $\omega' = i^*\omega$ é não degenerada. Agora queremos mostrar que $\mathscr{P}^*\omega' = \omega'$, isto é,

$$\omega(u,v) = \omega(d\mathscr{P}(y)u, d\mathscr{P}(y)v)$$

para todo $u, v \in T_y\Sigma$. Diferenciando $\mathscr{P}$ temos

$$d\mathscr{P}(y) = \frac{d}{dy}\psi_{\tau(y)}(y) = X_H(\psi_\tau(y))d\tau(y) + d\psi_\tau(y)$$

para $\tau = \tau(y)$. Como $d\psi_\tau(y)$ é simplética, abreviando $l := d\tau(y)$ e $\rho = \psi_\tau(y)$, segue que para todo $u, v \in T_y\Sigma$

$$\begin{aligned} \omega(u,v) &= \omega(d\psi_\tau(y)u, d\psi_\tau(y)v) \\ &= \omega(d\mathscr{P}(y)u - l(u)X_H(\rho), d\mathscr{P}(y)v - l(v)X_H(\rho)) \\ &= \omega(d\mathscr{P}(y)u, d\mathscr{P}(y)v) \end{aligned}$$

onde usamos que $\omega(X_H(\rho), d\mathscr{P}(y)u) = \omega(X_H(\rho), d\mathscr{P}(y)v) = 0$ pois $\mathscr{P}(y)u, \mathscr{P}(y)v \in T_y\Sigma \subset T_yS$. □

Escolha uma seção $\Sigma = \Sigma' \cap H^{-1}(1)$ transversal a c em x. Então, existem vizinhanças menores Σ_0 e Σ_1 de x em Σ, pelo Teorema da função Inversa, e uma função $\tau : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathscr{P}(y) = \psi_{\tau(y)}(y) : \Sigma_0 \to \Sigma_1$$

é um difeormorfismo que é simplético com respeito à $i^*\omega$ (Teorema 6.8).

Em geral, $P = d\mathscr{P}$ difere de $d\psi_T(x)$ uma vez que $T_x\Sigma$ não é necessariamente invariante sob $d\psi_T(x)$. Mas, se H é homogêneo de grau 1 então podemos encontrar um Σ tal que $T_x\Sigma$ é invariante sob $d\psi_T(x)$, como veremos a seguir.

Lema 6.9. *Seja (M,ω) uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano com campo X_H e fluxo ψ_t. Se H é homogêneo de grau 1 então*

$$\psi_t(\lambda y) = \lambda\,\psi_{\frac{t}{\lambda}}(y). \tag{6.4}$$

Demonstração. Como H é homogêneo de grau 1 então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in M$ temos

$$H(\lambda y) = \lambda H(y). \tag{6.5}$$

Diferenciando a equação (6.5) obtemos

$$dH(\lambda y)(\lambda v) = \lambda dH(y) \cdot v$$

para todo $v \in T_y M$ e pela definição do campo de vetores X_H segue-se que

$$\omega(X_H(\lambda y), \lambda v) = \lambda \omega(X_H(y), v) = \omega(X_H(y), \lambda v) \implies \omega(X_H(\lambda y) - X_H(y), \lambda v) = 0$$

Então, como ω é não-degenerada segue que

$$X_H(\lambda y) = X_H(y) \tag{6.6}$$

para todo $y \in M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso,

$$\psi_0(\lambda y) = \lambda y = \lambda \psi_{\frac{0}{\lambda}}(y)$$

e pela equação (6.6) temos

$$\frac{d}{dt}\psi_t(\lambda y)\Big|_{t=0} = X_H(\lambda y) = X_H(y) = \frac{d}{dt}\left[\lambda \psi_{\frac{t}{\lambda}}(y)\right]\Big|_{t=0}.$$

Assim, como $\psi_t(\lambda y)$ e $\lambda \psi_{\frac{t}{\lambda}}(y)$ tem as mesmas condições iniciais segue pela unicidade das soluções das equações diferenciais do campo X_H que

$$\psi_t(\lambda y) = \lambda \psi_{\frac{t}{\lambda}}(y).$$

□

Lema 6.10. *Seja (M, ω) uma variedade simplética e H um hamiltoniano homogêneo de grau 1 com campo X_H e fluxo ψ_t. Então, existe uma seção transversal Σ na superfície de energia $H^{-1}(1)$ tal que $T_x\Sigma$ é invariante sob $d\psi_T(x)$.*

Demonstração. Diferenciando (6.4) com respeito a λ e fazendo $y = x$, $t = T$ e $\lambda = 1$ temos

$$d\psi_T(x) \cdot \widetilde{x} = \psi_T(x) - T \cdot X_H(\psi_T(x)) = \widetilde{x} - T \cdot \dot{c}(0) \tag{6.7}$$

onde $\widetilde{x}$ é igual a x olhado como um vetor tangente em x. Mas também como $\psi_t \circ \psi_s x = \psi_s \circ \psi_t x$ temos

$$\frac{d}{ds}[\psi_t \circ \psi_s x]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}[\psi_s \circ \psi_t x]\Big|_{s=0} \implies d\psi_t(x) \cdot X_H(x) = X_H(\psi_t(x))$$

e fazendo $t = T$ obtemos

$$d\psi_T(x) \cdot \dot{c}(0) = X_H(\psi_T(x)) = X_H(x) = \dot{c}(0). \tag{6.8}$$

Assim, pelas equações (6.7) e (6.8) segue que $\widetilde{x}$ e $\dot{c}(0)$ formam um subespaço invariante sob $d\psi_T(x)$. Além disso, esse subespaço é não-degenerado com respeito a ω pois diferenciando $H(\lambda x) = \lambda H(x)$ com respeito a λ e fazendo $\lambda = 1$ temos

$$dH(x) \cdot \widetilde{x} = H(x) = 1$$

Logo,

$$\omega(\dot{c}(0), \widetilde{x}) = dH(x) \cdot \widetilde{x} = 1. \tag{6.9}$$

Sejam A o subespaço gerado por $\widetilde{x}$ e $\dot{c}(0)$ e E o complemento ortogonal de A com respeito a ω, isto é,

$$E := A^{\omega} = \{v \in T_x M \,;\, \omega(v, \widetilde{x}) = \omega(v, \dot{c}(0)) = 0\}$$

Então:

Afirmação 6.11. *$d\psi_T(x)$ é invariante sob E.*

Demonstração. Como $d\psi_T(x)$ preserva a forma simplética (Teorema 6.8) e pelas equações (6.7) e (6.8) temos $\widetilde{x} = d\psi_T(x)\cdot\widetilde{x} + T\cdot\dot{c}(0)$ e $d\psi_T(x)\cdot\dot{c}(0) = \dot{c}(0)$ então para todo $v\in E$ segue que

$$\begin{aligned}
\omega(d\psi_T(x)\cdot v,\widetilde{x}) &= \omega(d\psi_T(x)\cdot v, d\psi_T(x)\cdot\widetilde{x} + T\cdot\dot{c}(0)) \\
&= \omega(d\psi_T(x)\cdot v, d\psi_T(x)\cdot\widetilde{x} + T d\psi_T(x)\cdot\dot{c}(0)) \\
&= \omega\big(d\psi_T(x)\cdot v, d\psi_T(x)(\widetilde{x} + T\cdot\dot{c}(0))\big) \\
&= \omega(v,\widetilde{x} + T\cdot\dot{c}(0)) \\
&= \omega(v,\widetilde{x}) + T\cdot\omega(v,\dot{c}(0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\omega(d\psi_T(x)\cdot v,\dot{c}(0)) = \omega(d\psi_T(x)\cdot v, d\psi_T(x)\cdot\dot{c}(0)) = \omega(v,\cdot\dot{c}(0)) = 0$$

Logo, $d\psi_T(x)\cdot v\in E$ para todo $v\in E$ e, portanto, $d\psi_T(x)\cdot v$ é invariante sob E. □

Afirmação 6.12. *O subespaço E é não-degenerado.*

Demonstração. Suponha que exista $v\in E$ não nulo tal que $\omega(v,u) = 0$ para todo $u\in E$ então $v\in E^{\omega} = A$. Assim, v é um elemento não nulo do subespaço gerado por $\widetilde{x}$ e $\dot{c}(0)$ tal que

$$\omega(v,\widetilde{x}) = \omega(v,\dot{c}(0)) = 0.$$

Mas isso é uma contradição ao fato de A ser um subespaço não degenerado. Logo, se $\omega(v,u) = 0$ para todo $u\in E$ então $v = 0$, isto é, E é um subespaço não-degenerado. □

Assim, como E é não-degenerada e $\omega(v,X_H(x)) = \omega(v,\dot{c}(0)) = 0$ para todo $v\in E$ temos

$$E\cap span\{X_H(x)\} = 0.$$

Além disso, como:

(1) $T_xM = A + A^{\omega} = A + E$,

(2) $T_xH^{-1}(1) = \{v\in T_xM\ ;\ \omega(X_H(x),v) = 0\}$ por (6.2) e

(3) $E\subset T_xH^{-1}(1)$, $X_H(x)\in T_xH^{-1}(1)$ e $\widetilde{x}\notin T_xH^{-1}(1)$ pois $\omega(\widetilde{x},X_H(x)) = 1$ pela equação (6.9)

concluímos que

$$T_xH^{-1}(1) = E\oplus span\{X_H(x)\}. \tag{6.10}$$

Portanto, como E é invariante sob $d\psi_T(x)$ e vale (6.10), escolhendo Σ tal que $T_x\Sigma$=E, então

$$P = d\psi_T(x)\big|_E.$$

□

O fluxo linearizado $d\psi_T(x)$ pode ser entendido da seguinte forma: Escolhendo uma variação de curvas solução $c_s(t) := c(s,t)$, $c_0(t) = c(t)$, e definindo o vetor variação

$$Y(t) = \frac{\partial c_s}{\partial s}\bigg|_{s=0}$$

tem-se que $Y(t)$ é uma solução do fluxo linearizado

$$d\psi_t(Y(0)) = Y(t)$$

e, assim, $P(Y(0)) = Y(T)$. Para computar $Y(t)$ escolhemos um sistema de coordenadas $p_1,\dots,p_n$ em M tal que $p_2 = \cdots = p_n = 0$ ao longo de $c(t)$, $t = p_1$ e p_1 periódico, $p_1(t+T) = p_1(t)$ (é sempre possível encontrar tal sistema de coordenadas no caso hamiltoniano).

Seja (p_i,q_i) o sistema de coordenadas induzido em T^*M. Uma vez que c_s é uma solução das equações de Hamilton $\dot{p}_i = H_{q_i}$, $\dot{q}_i = -H_{p_i}$, então se

$$Y(t) = \frac{\partial c_s}{\partial s}\Big|_{s=0} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial s}(0,t), \frac{\partial q_i}{\partial s}(0,t)\right) = (\xi_i(t), \eta_i(t)) \tag{6.11}$$

temos

$$\begin{aligned}
(\dot{\xi}_i(t), \dot{\eta}_i(t)) &= \frac{\partial^2 c_s}{\partial t \partial s}(t)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left[(\dot{p}_i(s,t), \dot{q}_i(s,t))\right]_{s=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big[(H_{q_i}(p_i(s,t), q_i(s,t)), -H_{p_i}(p_i(s,t), q_i(s,t)))\Big]_{s=0} \\
&= \left(H_{q_ip_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial s}(0,t) + H_{q_iq_j}\cdot\frac{\partial q_j}{\partial s}(0,t), -H_{p_ip_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial s}(0,t) - H_{p_iq_j}\cdot\frac{\partial q_j}{\partial s}(0,t)\right) \\
&= \left(H_{q_ip_j}\cdot\xi_j(t) + H_{q_iq_j}\cdot\eta_j(t), -H_{p_ip_j}\cdot\xi_j(t) - H_{p_iq_j}\cdot\eta_j(t)\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = H_{q_ip_j}\cdot\xi_j(t) + H_{q_iq_j}\cdot\eta_j(t) \\ \dot{\eta}_i = -H_{p_ip_j}\cdot\xi_j(t) - H_{p_iq_j}\cdot\eta_j(t) \end{cases} \tag{6.12}$$

onde as derivadas parciais de H são calculadas ao longo de $c(t)$.

Teorema 6.13. *A aplicação linearizada de Poincaré das geodésicas fechadas em S^2 são rotações com ângulos $2\pi/(1+\alpha)$ e $2\pi/(1-\alpha)$ respectivamente. Em particular, para α irracional todas as geodésicas fechadas são elípticas com expoente irracional.*

Demonstração. Seja $H = \frac{1}{2}H_\alpha^2$ onde $\alpha < 1$ é irracional. Pelo teorema 4.28 segue que o fluxo associado à X_H é o fluxo co-geodésico de F_α. Tome a parametrização de S^2

$$\begin{aligned} x &= \cos p_1 \cos p_2 \\ y &= \sin p_1 \cos p_2 \\ z &= \sin p_2 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Seja $c_1(t)$ o "equador"de S^2, isto é, $c_1(t) = (p_1(t), 0)$. Lembre que na métrica F_α, com α irracional, as únicas geodésicas periódicas que existem são aquelas obtidas percorrendo o "equador"nas direções horária e anti-horária. Sobre essa curva temos $\frac{\partial}{\partial p_1} = V$ e $\frac{\partial}{\partial p_2}$ ortogonal a V , além disso, V e $\frac{\partial}{\partial p_2}$ tem comprimento unitário com respeito a métrica g. Seja H_1 como definido em (4.5). Com a parametrização (6.14) temos

$$H_1(p_i,q_i) = q_1 dp_1(V) + q_2 dp_2(V) = q_1 dp_1\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right) + q_2 dp_2\left(\frac{\partial}{\partial p_1}\right) = q_1$$

e a matriz g_{ij} associada a métrica g é:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \cos^2 p_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow g^{ij} = \begin{pmatrix} \sec^2 p_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} H(p_i,q_i) &= \frac{1}{2}H_\alpha^2(p_i,q_i) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{g^{ij}q_iq_j}+\alpha q_i\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(\sec^2 p_2)q_1^2+q_2^2}+\alpha q_1\right]^2 \end{aligned}$$

As órbitas periódicas $c(t)$ de X_H com curva base $c_1(t)$ e $H_\alpha(c(t))=1$ são tais que:

$$c(t)=(p_1(t),p_2(t),q_1(t),q_2(t))$$

onde $p_2(t)\equiv 0$. Queremos descobrir quem são $p_1(t),q_1(t)$ e $q_2(t)$. Como $c(t)$ é solução das equações de Hamilton associadas a H temos:

$$\dot{p}_1(t)=\frac{\partial H}{\partial q_1}=H_\alpha(c(t))\cdot\left[\frac{(\sec^2 p_2)q_1}{\sqrt{(\sec^2 p_2)q_1^2+q_2^2}}+\alpha\right]=\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}+\alpha \tag{6.14a}$$

$$\dot{p}_2(t)=\frac{\partial H}{\partial q_2}=H_\alpha(c(t))\cdot\left[\frac{q_2}{\sqrt{(\sec^2 p_2)q_1^2+q_2^2}}\right]=\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \tag{6.14b}$$

$$\dot{q}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial p_1}=0 \tag{6.14c}$$

$$\dot{q}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial p_2}=H_\alpha(c(t))\cdot\left[\frac{(\sec^2 p_2)(\tan p_2)q_1^2}{\sqrt{(\sec^2 p_2)q_1^2+q_2^2}}\right]=0 \tag{6.14d}$$

Como $p_2(t)\equiv 0$ temos $\dot{p}_2(t)\equiv 0$. Assim, da equação (6.14d) segue que $q_2(t)$ é constante e de (6.14b) temos

$$0=\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}\Longrightarrow q_2(t)\equiv 0 \tag{6.15}$$

A equação (6.14c) nos diz que $q_1(t)$ é constante. Substituindo (6.15) na equação (6.14a) obtemos

$$\dot{p}_1(t)=\frac{q_1}{|q_1|}+\alpha$$

Se c_1 é a geodésica de comprimento $T=2\pi/(1+\alpha)$ então $q_1>0$. Assim, temos

$$\dot{p}_1(t)=1+\alpha\Longrightarrow p_1(t)=(1+\alpha)t.$$

Como $H_\alpha(c(t))=1$ e $q_2=0$ então

$$1=\sqrt{(\sec^2 p_2)q_1^2+q_2^2}+\alpha q_1=|q_1|+\alpha q_1 \implies (1+\alpha)q_1=1 \implies q_1=\frac{1}{1+\alpha}.$$

Logo,

$$c(t)=\left((1+\alpha)t,\, 0,\, \frac{1}{1+\alpha},\, 0\right).$$

Calculando as derivadas de segunda ordem de H ao longo de $c(t)$ temos

$$\begin{aligned} H_{q_1q_1} &= (1+\alpha)^2 \\ H_{q_2q_2} &= 1+\alpha \\ H_{q_1q_2} &= H_{p_1p_1} = H_{p_1p_2} = 0 \\ H_{p_2p_2} &= \frac{1}{1+\alpha} \end{aligned}$$

Logo, as equações diferenciais para $Y(t)$ são:

$$\begin{array}{ll} \dot{\xi}_1 = (1+\alpha)^2\eta_1 & \dot{\eta}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 = (1+\alpha)\eta_2 & \dot{\eta}_2 = -\frac{1}{1+\alpha}\cdot\xi_2 \end{array}$$

Como E é o ω-complemento ortogonal gerado por $\dot{c}(0) = (1+\alpha)\frac{\partial}{\partial p_1}$ e $\widetilde{x} = \widetilde{c(0)} = \frac{1}{1+\alpha}\frac{\partial}{\partial q_1}$ então se

$$v = v_1\frac{\partial}{\partial p_1} + v_2\frac{\partial}{\partial p_2} + v_3\frac{\partial}{\partial q_1} + v_4\frac{\partial}{\partial q_2} \in E$$

temos

$$\omega\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial p_1}\right) = \omega\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial q_1}\right) = 0$$

onde $\omega = dp_1\wedge dq_1 + dp_2\wedge dq_2$. Assim,

$$0 = \omega\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial p_1}\right) = dp_1\wedge dq_1\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial p_1}\right) + dp_2\wedge dq_2\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial p_1}\right) = -v_3$$

e

$$0 = \omega\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial q_1}\right) = dp_1\wedge dq_1\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + dp_2\wedge dq_2\left(v\,,\,\frac{\partial}{\partial q_1}\right) = v_1$$

Logo, $v = v_2\frac{\partial}{\partial p_2} + v_4\frac{\partial}{\partial q_2}$ e isto implica que E é gerado por $\frac{\partial}{\partial p_2}$ e $\frac{\partial}{\partial q_2}$. Observe que

$$\begin{aligned} \omega\left(\sqrt{1+\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}\right) &= (dp_1\wedge dq_1 + dp_2\wedge dq_2)\left(\sqrt{1+\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $\mathscr{B} = \left\{\sqrt{1+\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}\right\}$ é uma base simplética para o subespaço E. Além disso, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = (1+\alpha)\cdot\eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = -\frac{1}{1+\alpha}\cdot\xi_2 \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \xi_2(t) &= a\sqrt{1+\alpha}\cdot\cos t + b\sqrt{1+\alpha}\cdot\sin t \\ \eta_2(t) &= b\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\cos t - a\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\cdot\sin t \end{aligned}$$

onde $a,b \in \mathbb{R}$. Escrevendo os vetores $Y(0)$ e $Y(T)$ na base simplética $\mathscr{B}$ obtemos

$$Y(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \cdot \xi_2(0), \sqrt{1+\alpha} \cdot \eta_2(0)\right) = (a\cos 0 + b\sin 0, b\cos 0 - a\sin 0) = (a,b)$$
$$Y(T) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \cdot \xi_2(T), \sqrt{1+\alpha} \cdot \eta_2(T)\right) = (a\cos T + b\sin T, b\cos T - a\sin T)$$

Como P é tal que $P(Y(0)) = Y(T)$ temos

$$P(a,b) = (a\cos T + b\sin T, b\cos T - a\sin T)$$

isto é,

$$P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Logo,

$$P = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

e, portanto, P é uma rotação com ângulo $T = 2\pi/(1+\alpha)$. Para a geodésica de comprimento $T = 2\pi/(1-\alpha)$, concluímos de forma análoga que P é uma rotação com ângulo $T = 2\pi/(1-\alpha)$. Por fim, precisamos calcular os autovalores de P. Se λ é tal que $\det(P - \lambda Id) = 0$ temos

$$\det\begin{bmatrix} \cos T - \lambda & \sin T \\ -\sin T & \cos T - \lambda \end{bmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 2\cos T \cdot \lambda + 1 = 0$$

Resolvendo a equação acima em relação a λ obtemos

$$\lambda = \frac{2\cos T \pm \sqrt{4\cos^2 T - 4}}{2} = \cos T \pm i\sin T = e^{\pm iT}.$$

Portanto, as geodésicas de comprimentos $T = 2\pi/(1+\alpha)$ e $T = 2\pi/(1-\alpha)$ são elípticas com expoente irracional, se α for irracional. □

6.3 Índice de Morse dos Exemplos de Katok

Agora vamos mostrar que se pode dar uma descrição da Teoria de Morse do funcional energia

$$E(c) = \frac{1}{2}\int F^2\big(c(t), \dot{c}(t)\big)dt$$

no espaço de curvas suaves por partes $\Lambda = C^\infty(S^1, M)$ (i.e $c : [0,1] \to M$ tal que $c(0) = c(1)$). Faremos os cálculos, novamente, só para $M = S^2$, as outras variedades são similares. Denote por c_1 a geodésica fechada curta de comprimento $2\pi/(1+\alpha)$ e por c_2 a geodésica fechada longa de comprimento $2\pi/(1-\alpha)$. Mas antes de analisarmos os índices de Morse dos exemplos de Katok em S^2 veremos alguns resultados importantes sobre a Teoria de Morse, onde parte dos resultados foram retirados ou adaptados de [Mil63] e [BTZ82].

Notação 6.14. Seja $V_\Lambda(c)$ o espaço de campos de vetores suaves por partes ao longo de c tal que

$$g_{\dot{c}(t)}(X(t), \dot{c}(t)) = 0$$

para todo t e tal que $X(1) = X(0)$.

Definição 6.15. O *índice* de um funcionamento bilinear H em um espaço vetorial V, é definido como a dimensão do subespaço maximal de V em que H é negativa-definida. A *nulidade* é a dimensão do núcleo de H, isto é, o subespaço de todos os elementos de $v \in V$ tais que $H(v,w) = 0$ para todo $w \in V$.

Definição 6.16. Definimos $I_c : V_\Lambda(c) \times V_\Lambda(c) \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} I_c(X,Y) = & - \int_0^1 g_{\dot c}\Big(D_{\dot c}D_{\dot c}X + R_{\dot c}(X), Y\Big)dt - \sum_{i=1}^{k-1} g_{\dot c(t_i)}\Big(D_{\dot c}X(t_i^+) - D_{\dot c}X(t_i^-), Y(t)\Big) \\ & + g_{\dot c(1)}\Big(D_{\dot c}X(1^-), Y(1)\Big) - g_{\dot c(0)}\Big(D_{\dot c}(0^+), Y(0)\Big) \end{aligned} \tag{6.19}$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ são pontos de descontinuidade de $D_{\dot c}X$.

Definição 6.17. O índice de c como uma geodésica fechada é definido como o índice de I_c. Denotaremos o índice de c por $\operatorname{ind}(c)$. A nulidade de c é definida como $\dim\ker\Big(I_c|_{V_{\Lambda(c)}}\Big)$ e o denotaremos por $\operatorname{nul}(c)$.

Observação 6.18. Pela mesma demostração do Lema 3.8.2 em [SH13] obtemos a igualdade $I_c = d_c^2E|_{V_{\Lambda(c)}}$.

Observação 6.19. Note que a nulidade de c como um ponto crítico de E é $\operatorname{nul}(c)+1$ pois $\dot c$ pertence ao núcleo da hessiana de E.

Definição 6.20. O índice da geodésica não-periódica $c : [0,1] \to M$ denotada por $\operatorname{ind}_\Omega(c)$, é definida como o índice da forma I_c definida no espaço $V_\Omega(c)$ dos campos de vetores suaves por partes X ao longo de c tal que

$$g_{\dot c(t)}(X(t), \dot c(t)) = 0$$

para todo t e tal que $X(1) = X(0) = 0$.

Definição 6.21. Definimos a nulidade da geodésica não periódica $c : [0,1] \to M$ como a dimensão do núcleo de $I_c|_{V_\Omega(c)}$ e a denotamos por $\operatorname{nul}_\Omega$, isto é, $\operatorname{nul}_\Omega := \dim\ker\big(I_c|_{V_\Omega(c)}\big)$.

Observação 6.22. Seja $\mu(t)$ o número de campos de Jacobi linearmente independentes Y ao longo c com $Y(0) = Y(t) = 0$. Então, pelo Teorema 14.1 e pelo Teorema 15.1 em [Mil63] obtemos

$$\operatorname{nul}_\Omega(c) = \mu(1) \text{ e } \operatorname{ind}_\Omega(c) = \sum_{0<t<1} \mu(t).$$

Teorema 6.23. *A nulidade de $c \in \Lambda$ é igual ao número máximo de campos de Jacobi linearmente independentes Y ortogonal a $\dot c$ com respeito a $g_{\dot c}$, isto é, campos de Jacobi com $Y(0) = Y(1)$, $D_{\dot c}Y(0) = D_{\dot c}Y(1)$ e $g_{\dot c}(Y(t), \dot c) = 0$ para todo t.*

Demonstração. Seja J um campo de Jacobi tal que $J(0) = J(1)$, $D_{\dot c}J(0) = D_{\dot c}J(1)$ e $g_{\dot c}(J(t), \dot c) = 0$. Então, $J \in V_{\Lambda(c)}$ e

$$I_c(X,Y) = - \int_0^1 g_{\dot c}(0, Y)\,dt - \sum_{i=1}^{k-1} g_{\dot c(t_i)}(0, Y(t)) + g_{\dot c(1)}(0, Y(1) - Y(0)) = 0.$$

Logo, $J \in \ker I_c$. Por outro lado, seja J um campo de vetores no núcleo de I_c. Escolha uma partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ de $[0,1]$ tal que $J|[t_{i-1}, t_i]$ é suave para cada $i = 1, \ldots, k-1$. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função suave que se anula em $t_0, t_1, \ldots, t_k$ e é positiva nos outros pontos. Seja

$$J_2(t) = f(t)\left(D_{\dot c}D_{\dot c}J + R_{\dot c}(J)\right).$$

Então, como

$$0 = I_c(J, J_2) = -\int_0^1 f(t) g_{\dot c}\Big(D_{\dot c}D_{\dot c}J + R_{\dot c}(J), D_{\dot c}D_{\dot c}J + R_{\dot c}(J)\Big)dt + 0$$

obtemos que $J|[t_{i-1}, t_i]$ é um campo de Jacobi para cada $i = 1, \ldots, k-1$. Agora, seja $J_2' \in V_{\Lambda(c)}$ um campo tal que $J_2'(t_i) = D_{\dot c}J(t_i^+) - D_{\dot c}J(t_i^-)$ para $i = 1, \ldots, k$. Então,

$$0 = I_c(J, J_2') = 0 - \sum_{i=1}^{k} g_{\dot c(t_i)}\Big(D_{\dot c}J(t_i^+) - D_{\dot c}J(t_i^-), D_{\dot c}J(t_i^+) - D_{\dot c}J(t_i^-)\Big)$$

e isto implica que $D_{\dot{c}}J$ é contínuo. Portanto, J é um campo de Jacobi suave. □

Observação 6.24. O espaço $V_\Lambda(c)$ é a soma direta de $V^1_\Lambda(c)$ e $V^2_\Lambda(c)$, onde

$$\begin{aligned} V^1_\Lambda(c) &= \{X \in V_\Lambda(c)\,;\, X|[t_i,t_{i+1}] \text{ é um campo de Jacobi}\} \\ V^2_\Lambda(c) &= \{X \in V_\Lambda(c)\,;\, X(t_i)=0,\ 0\le i\le k\} \end{aligned}$$

Além disso, $V^1_\Lambda(c)$ e $V^2_\Lambda(c)$ são ortogonais com respeito a H e H é positivo-definido em $V^2_\Lambda(c)$ (ver Lema 15.3 em [Mil63]). Observe que $\operatorname{ind}(c)$ é o índice de I_c em $V^1_\Lambda(c)$ e portanto é finito.

Teorema 6.25. *Seja H uma forma simétrica definida em um espaço vetorial de dimensão finita V (ou forma Hermitiana em um espaço vetorial complexo). Para qualquer subespaço $W \subset V$ temos*

(a) $\operatorname{ind} H = \operatorname{ind} H|_W + \operatorname{ind} H|_{W^\perp} + \dim(W\cap W^\perp) - \dim(W\cap \ker H)$

(b) $\dim\ker H = \dim\ker H|_{W^\perp} - \dim(W\cap W^\perp) + \dim(W\cap\ker H)$

onde $W^\perp = \{X\in V\,;\, H(X,Y)=0,\ \forall\, Y\in W\}$.

Para uma prova do resultado acima veja [BTZ82], página 218. Usando a Observação 6.22 e o Teorema 6.25 obtemos um importante teorema que caracteriza o índice de uma geodésicas fechadas.

Teorema 6.26. *O índice e a nulidade das geodésicas fechadas satisfazem a equação*

$$\operatorname{ind}(c) = \operatorname{ind}_\Omega(c) + (\operatorname{ind}+\dim\ker) I_c|_{W^\perp} - \operatorname{nul}(c)$$

onde $W^\perp$ é o subespaço ortogonal, com respeito a I_c, do subespaço $V^1_\Lambda(c)\cap V_\Omega(c)$.

Demonstração. Escolha pontos $0=t_0<t_1<\ldots<t_k=1$ tais que não existam pontos conjugados no interior de $c|[t_i,t_{i+1}]$. Aplicaremos o item (a) do Teorema 6.25 para $V=V^1_\Lambda(c)$, $W=V^1_\Lambda(c)\cap V_\Omega(c)$ e $H=I_c$. Como $\operatorname{ind} I_c|_W = \operatorname{ind}_\Omega(c)$ e da equação (6.20) segue que $W^\perp$ consiste de campos de Jacobi suaves Y ao longo de c com $Y(0)=Y(1)$, mas possivelmente $D_{\dot{c}}Y(0)\neq D_{\dot{c}}Y(1)$ segue que $\dim(W\cap W^\perp)=\mu(1)$ e $W\cap\ker I_c$ são os campos de Jacobi periódicos que se anulam em 0. Para $X,Y\in W^\perp$ temos

$$I_c(X,Y) = g_{\dot{c}}\Big(D_{\dot{c}}Y(1^-) - D_{\dot{c}}Y(0^+), Y(0)\Big) \tag{6.20}$$

Então, pelo Teorema 6.25 temos

(i) $\operatorname{ind}(c) = \operatorname{ind}_\Omega(c) + \operatorname{ind} I_c|_{W^\perp} + \mu(1) - \dim(W\cap\ker I_c)$,

(ii) $\dim\ker I_c = \dim\ker I_c|_{W^\perp} - \mu(1) + \dim(W\cap\ker I_c)$.

Logo,

$$\operatorname{ind}(c) = \operatorname{ind}_\Omega(c) + (\operatorname{ind}+\dim\ker) I_c|_{W^\perp} - \operatorname{nul}(c).$$

□

Definição 6.27. O termo $\operatorname{ind}(c)-\operatorname{ind}_\Omega(c)$ é chamado a concavidade de c e o denotaremos por $\operatorname{conc}(c)$.

Definição 6.28. A iterada c^k de uma geodésica c é definida por

$$c^k(t) = c(kt).$$

Se c é uma geodésica fechada então todas as suas iteradas c^k também são geodésicas fechadas e representam círculos críticos diferentes em Λ.

Teorema 6.29. *As geodésicas c_1, c_2 e todas as suas iteradas foram uma subvariedade crítica não-degenerada de Λ.*

Demonstração. Como vimos no Teorema 6.23, a nulidade de uma geodésica fechada, considerada como um círculo crítico em Λ, é a dimensão do espaço de campos de Jacobi periódicos (módulo $\dot{c}$). Se α é irracional, apenas c_1 e c_2 são geodésicas fechadas na métrica F_α. Logo, os campos de Jacobi periódicos de F_α são todos tangentes as geodésicas c_1 e c_2, ou seja, c_1 e c_2 tem nulidade zero. Pelo mesmo argumento, se α é irracional, todas as iteradas de c_1 e c_2 tem nulidade zero. □

Se c_s é uma família a 1-parâmetro de geodésicas em M, então

$$Y(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{s=0} c_s(t) \in T_{c(t)}M$$

é um campo de Jacobi ao longo de c (ver Lema 14.4 em [Mil63]). Segue da computação do fluxo linearizado $D\phi_t$ que os campos de Jacobi no nosso exemplo são os campos de vetores com componentes ξ_i (ver equação (6.11)) com respeito ao sistema de coordenadas p_i. Assim, se $F_\alpha\big(c(t),\dot{c}(t)\big) = 1$ os campos de Jacobi que não são tangentes a geodésica são da forma:

$$Y(t) = f(t)\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Como p_1, p_2 são coordenadas de S^2 tais que $c(t) = (p_1(t), 0)$ (onde $c = c_1$ ou $c = c_2$) e o campo de Jacobi $Y(t)$ satisfaz a equação

$$D_{\dot{c}}D_{\dot{c}}Y(t) + R_{\dot{c}}(Y) = 0$$

temos

$$f''(t)\frac{\partial}{\partial p_2} + f(t)\frac{\partial}{\partial p_2} = 0 \Longrightarrow f''(t) + f(t) = 0.$$

Logo, o campo Y é da forma:

$$Y(t) = \big(A\cos t + B\sin t\big)\frac{\partial}{\partial p_2} \qquad A, B \in \mathbb{R} \tag{6.21}$$

Pelo Teorema 6.26 obtemos $\mathrm{ind}(c) = \mathrm{ind}_\Omega(c) + \mathrm{conc}(c)$, onde $\mathrm{conc}(c) = (\mathrm{ind} + \dim\ker) I_c|_{W^\perp} - \mathrm{nul}(c)$. Para superfícies a concavidade tem a seguinte interpretação geométrica: Se os pontos extremos $t = 0$ e $t = T$ não são conjugados, existe um campo de Jacobi Y com

$$Y(t) = f(t)\frac{\partial}{\partial p_2} \qquad \text{e} \qquad f(0) = f(T) = 1$$

se escolhermos um sistema de coordenadas tal que $c(t) = (p_1(t), 0)$.

Observação 6.30. Veja que:

- Se $f'(T) < f'(0)$

  $$I_c(Y,Y) = g_{\dot{c}}\Big(D_{\dot{c}}Y(T) - D_{\dot{c}}Y(0), Y(0)\Big) < g_{\dot{c}}\Big(D_{\dot{c}}Y(0) - D_{\dot{c}}Y(0), Y(0)\Big) = 0.$$

  Logo,

  $$\mathrm{conc}(c) = (\mathrm{ind} + \dim\ker) I_c|_{W^\perp} - \mathrm{nul}(c) = 1.$$

- Se $f'(T) \geq f'(0)$

  $$I_c(Y,Y) = g_{\dot{c}}\Big(D_{\dot{c}}Y(T) - D_{\dot{c}}Y(0), Y(0)\Big) \geq g_{\dot{c}}\Big(D_{\dot{c}}Y(0) - D_{\dot{c}}Y(0), Y(0)\Big) = 0.$$

  Logo,

  $$\mathrm{conc}(c) = (\mathrm{ind} + \dim\ker) I_c|_{W^\perp} - \mathrm{nul}(c) = 0.$$

No nosso exemplo, os pontos conjugados ocorrem nos tempos $t = k\cdot\pi$, $k = 1, 2, \cdots$. Logo, os pontos extremos de c_1^k e c_2^k nunca são conjugados. O campo de Jacobi

$$Y(t) = f(t)\frac{\partial}{\partial p_2}$$

com $f(0) = f(T) = 1$ é da forma

$$f(t) = \cos t + \frac{1-\cos T}{\sin T}\sin t.$$

Logo,

$$f'(0) = \frac{1-\cos T}{\sin T} \qquad \text{e} \qquad f'(T) = -\frac{1-\cos T}{\sin T}.$$

Assim,

- Se $0 < T$ módulo $2\pi < \pi$ temos $f'(T) < f'(0)$ então $\operatorname{conc}(c) = 1$.
- Se $\pi < T$ módulo $2\pi < 2\pi$ temos $f'(T) > f'(0)$ então $\operatorname{conc}(c) = 0$.

Logo, para a geodésica curta c_1 temos:

$$\pi < T = \frac{2\pi}{1+\alpha} < 2\pi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{ind}_\Omega(c_1) = 1$$

e isto implica que $\operatorname{ind}(c_1) = 1$ para todo α com $0 < \alpha < 1$. Mas para c_2 o $\operatorname{ind}(c_2)$ depende de α, pois a medida que α se aproxima de 1, $\operatorname{ind}_\Omega(c_2) \to \infty$. Se $0 < \alpha < 1/2$ temos

$$2\pi < T = \frac{2\pi}{1-\alpha} < 4\pi.$$

Assim,

- Se $2\pi < \frac{2\pi}{1-\alpha} < 3\pi$ então $\operatorname{conc}(c_2) = 1$ e $\operatorname{ind}_\Omega(c_2) = 2$. Logo, $\operatorname{ind}(c_2) = 3$.
- Se $3\pi < \frac{2\pi}{1-\alpha} < 4\pi$ então $\operatorname{conc}(c_2) = 0$ e $\operatorname{ind}_\Omega(c_2) = 3$. Logo, $\operatorname{ind}(c_2) = 3$.

Ou seja, quando $0 < \alpha < 1/2$ temos $\operatorname{ind}(c_2) = 3$.

Capítulo 7

Exemplos de Katok Com Poucas Geodésicas Fechadas Curtas

Nesse capítulo iremos generalizar a construção do Capítulo 5 para obter outros exemplos de métricas Finsler.

7.1 Geodésica como ponto crítico de uma função

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana tal que todas as geodésicas de g são fechadas de período 2π e seja $C^* = T_1^*M/S^1$ como na Definição 4.51. Então temos a S^1 fibração $S^1 \to T_1^*M \xrightarrow{\pi} C^*$ induzida pelo fluxo co-geodésico em T^*M. Em C^* temos a involução $\theta : C^* \to C^*$ que aplica cada geodésica fechada na mesma com direção oposta, isto é, se $c \in C^*$

$$\theta(c)(t) = c(2\pi - t). \tag{7.1}$$

Se ω é a 2-forma simplética canônica em T^*M então existe uma 2-forma simplética $\widetilde{\omega}$ em C tal que

$$\pi^*\widetilde{\omega} = \omega|_{T_1^*M}. \tag{7.2}$$

A involução θ induz uma involução $\overline{\theta} : T_1^*M \to T_1^*M$ tal que vale as igualdades:

$$\overline{\theta}(x,\xi) := (x,-\xi) \qquad \text{e} \qquad \pi \circ \overline{\theta} = \theta \circ \pi. \tag{7.3}$$

Afirmação 7.1. $\overline{\theta}^*\omega = -\omega$.

Demonstração. Se (p,q) são coordenadas de T^*M então $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{\theta}^*\omega &= \omega(d\overline{\theta}, d\overline{\theta}) \\ &= \sum dp_i(d\overline{\theta}) \wedge dq_i(d\overline{\theta}) \\ &= \sum dp_i \wedge (-dq_i) \\ &= -\omega. \end{aligned}$$

□

Afirmação 7.2. $\theta^*\widetilde{\omega} = -\widetilde{\omega}$.

Demonstração. Pelas equações (7.3) e (7.2) temos $\overline{\theta}^*\pi^* = \pi^*\theta^*$ e

$$\pi^*\theta^*\widetilde{\omega} = \overline{\theta}^*\pi^*\widetilde{\omega} = \overline{\theta}^*\omega = -\omega = -\pi^*\widetilde{\omega}.$$

Assim,

$$\theta^*\widetilde{\omega} = -\widetilde{\omega}.$$

□

Definição 7.3. Seja $\widetilde{f} : C^* \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Defina $f : T_1^*M \to \mathbb{R}$ por $f = \widetilde{f} \circ \pi$. Além disso, como para cada $(x,\eta) \in T^*M$ existe $\lambda > 0$ e $\xi \in T_1^*M$ tal que $\eta = \lambda\xi$, então, defina $H_1 : T^*M \to \mathbb{R}$ por

$$H_1(x,\eta) = \lambda f(x,\xi).$$

Observação 7.4. Note que

$$H_1(x,\mu\eta) = \mu H_1(x,\eta)$$

para todo $(x,\eta) \in T^*M$ e $\mu > 0$, isto é, H_1 é positivamente homogêneo de grau 1.

Seja H_0 como definido em (4.9). Daqui em diante iremos estudar hamiltonianos da forma

$$H_\alpha = H_0 + \alpha H_1.$$

Como vimos na Observação 5.3 a função H_α, como definida acima, é uma co-norma Finsler se α é suficientemente pequeno. Logo, pelo Teorema 1.25 segue que

$$F_\alpha = H_\alpha \circ \mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}, \tag{7.4}$$

onde $\mathscr{L}_{\frac{1}{2}H_\alpha^2} : T^*M \to TM$ é a transformada de Legendre associada a função $\frac{1}{2}H_\alpha^2$, é uma métrica Finsler se α é suficientemente pequeno.

Proposição 7.5. *A métrica Finsler F_α como definida em (7.4) é simétrica se, e somente se, $\widetilde{f}$ é invariante sob θ.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que H_1 é simétrica se, e somente se, $\widetilde{f}$ é invariante sob θ. Se $\widetilde{f}$ é invariante sob θ temos

$$\widetilde{f} \circ \theta = \widetilde{f}. \tag{7.5}$$

Logo, se $(x,\xi) \in T_1^*M$, usando a Definição 7.3 e as equações (7.3) e (7.5) segue-se que

$$\begin{aligned} H_1(x,-\xi) &= H_1(\overline{\theta}(x,\xi)) \\ &= f \circ \overline{\theta}(x,\xi) \\ &= \widetilde{f} \circ \pi \circ \overline{\theta}(x,\xi) \\ &= \widetilde{f} \circ \theta \circ \pi(x,\xi) \\ &= \widetilde{f} \circ \pi(x,\xi) \\ &= H_1(x,\xi) \end{aligned}$$

Pela homogeneidade, concluímos que

$$H_1(x,-\xi) = H_1(x,\xi), \text{ para todo } (x,\xi) \in T^*M.$$

Agora, se $H_1(x,-\eta) = H_1(x,\eta)$ para todo $(x,\eta) \in T^*M$ segue pela equação (7.3) que para todo $(x,\xi) \in T_1^*M$

$$\begin{aligned} & \widetilde{f} \circ \pi(x,-\xi) = \widetilde{f} \circ \pi(x,\xi) \\ \Rightarrow\ & \widetilde{f} \circ \pi \circ \overline{\theta}(x,\xi) = \widetilde{f} \circ \pi(x,\xi) \\ \Rightarrow\ & \widetilde{f} \circ \theta\big(\pi(x,\xi)\big) = \widetilde{f}\big(\pi(x,\xi)\big) \end{aligned}$$

Logo, como π é sobrejetora temos

$$\widetilde{f} \circ \theta = \widetilde{f}.$$

Como $\mathscr{L}^{-1}_{\frac{1}{2}H_\alpha^2}$ é linear na direção da fibra, para que F_α seja simétrica é necessário apenas que H_α seja simétrica. Assim, como

$$\begin{aligned} H_\alpha(x,-\xi) &= H_0(x,-\xi)+\alpha H_1(x,-\xi) \\ &= H_0(x,\xi)+\alpha H_1(x,-\xi) \end{aligned}$$

segue-se que H_α é simétrica se, e somente se, H_1 é simétrica. Portanto, F_α é simétrica se, e somente se, $\widetilde{f}$ é invariante sob θ. □

A função $\widetilde{f}$ definida em C^* induz um campo Hamiltoniano $X_{\widetilde{f}}$ com respeito a forma simplética $\widetilde{\omega}$ e denotaremos seu fluxo por $\psi_t^{\widetilde{f}}$. Como

$$\pi^*\widetilde{\omega} = \omega \quad \text{ e } \quad H_1|_{T_1^*M} = \widetilde{f}\circ\pi$$

temos

$$\begin{aligned} \omega\big(X_{H_1}(x,\xi),\,\cdot\,\big) &= dH_1(x,\xi) \\ &= d(\widetilde{f}\circ\pi(x,\xi)) \\ &= d\widetilde{f}(\pi(x,\xi))\cdot d\pi(x,\xi) \\ &= \widetilde{\omega}\Big(X_{\widetilde{f}}(\pi(x,\xi)), d\pi(x,\xi)(\cdot)\Big) \end{aligned}$$

Além disso, como

$$\omega(X_{H_1}(x,\xi),\,\cdot\,) = \pi^*\widetilde{\omega}(X_{H_1}(x,\xi),\,\cdot\,) = \widetilde{\omega}\Big(d\pi(x,\xi)(X_{H_1}(x,\xi)), d\pi(x,\xi)(\cdot)\Big)$$

obtemos

$$\widetilde{\omega}\Big(X_{\widetilde{f}}(\pi(x,\xi)),\,\cdot\,\Big) = \widetilde{\omega}\Big(d\pi(x,\xi)(X_{H_1}(x,\xi)),\,\cdot\,\Big)$$

ou seja, $X_{\widetilde{f}}(\pi(x,\xi)) = d\pi(x,\xi)\big(X_{H_1}(x,\xi)\big)$ para todo $(x,\xi)\in T_1^*M$. Disso segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_t^{\widetilde{f}}\big(\pi(x,\xi)\big)\Big|_{t=0} &= X_{\widetilde{f}}\big(\pi(x,\xi)\big) \\ &= d\pi(x,\xi)X_{H_1}(x,\xi) \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\pi\circ\psi_t^{H_1}(x,\xi)\Big)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

para todo $(x,\xi)\in T_1^*M$. Logo, pela unicidade de curvas integrais temos

$$\psi_t^{\widetilde{f}}\big(\pi(x,\xi)\big) = \pi\circ\psi_t^{H_1}(x,\xi). \tag{7.6}$$

Lema 7.6. *A função $H_1 : T^*M \to \mathbb{R}$ é constante ao longo das órbitas da S^1-ação em T^*M.*

Demonstração. Lembre que uma órbita de $(x,\xi)\in T_1^*M$ pela S^1-ação é da forma

$$s\cdot(x,\xi) = \Big(\gamma_x^v(2\pi s), g(\dot{\gamma}_x^v(2\pi s),\,\cdot\,)\Big), \qquad s\in S^1$$

onde $(x,\xi)\in TM$ é tal que $\xi = g(v,\,\cdot\,)$ e γ_x^v é a geodésica em M tal que $\gamma_x^v(0) = x$ e $\dot{\gamma}_x^v(0) = v$. Assim, se para $(x,\xi)\in T_1^*M$ temos

$$H_1(x,\xi) = \widetilde{f}\circ\pi(x,\xi) = \widetilde{f}\big(\gamma_x^v, g(\dot{\gamma}_x^v,\,\cdot\,)\big) = \mu$$

então

$$H_1\big(s\cdot(x,\xi)\big) = \widetilde{f}\circ\pi\Big(\gamma_x^v(2\pi s), g(\dot{\gamma}_x^v(2\pi s),\,\cdot\,)\Big) = \widetilde{f}\big(\Gamma, g(\dot{\Gamma},\,\cdot\,)\big)$$

onde Γ é a geodésica em M tal que $\Gamma(0) = \gamma_x^v(2\pi s)$ e $\dot{\Gamma}(0) = \dot{\gamma}_x^v(2\pi s)$. Logo, pela unicidade das geodésicas temos

$$\Gamma = \gamma_x^v.$$

Portanto, $H_1\big(s\cdot(x,\xi)\big) = \mu$ para todo $s \in S^1$. □

Lema 7.7. *Os fluxos $\psi_t^{H_1}$ e $\psi_t^{H_0}$ comutam.*

Demonstração. Pelo Lema 5.6 segue que as curvas integrais de X_{H_0} são da forma $\Big(\gamma(t), g(\dot\gamma(t),\,\cdot\,)\Big)$ onde $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = 1$, ou seja, são as órbitas da S^1-ação em T_1^*M. Assim, do Lema 7.6 segue-se que

$$(H_1,H_0)(x,\xi) = \frac{d}{dt}H_1(\psi_t^{H_0})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\text{constante})\Big|_{t=0} = 0.$$

e pelo Teorema 4.25 concluímos que $\psi_t^{H_1}$ e $\psi_t^{H_0}$ comutam. □

O Teorema a seguir será necessário quando estivermos estudando as órbitas não triviais de $X_{\widetilde{f}}$. Ele é atribuído a D. Epstein apesar de não o ter publicado.

Teorema 7.8. *Se X é um campo de vetores C^1 em $\mathbb{R}^n$ com $X(0) = 0$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que todas as órbitas periódicas não triviais de X em uma vizinhança de 0 tem período maior que ε.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança convexa de 0 e seja r o máximo de $||DX||$ em U, isto é,

$$r = \max_{x\in U}||DX(x)||.$$

Se $c(t)$ é uma órbita periódica não trivial de X em U, seja d o diâmetro de c e sejam t_1, t_2 tais que

$$||c(t_2) - c(t_1)|| = d.$$

Então, t_1 e t_2 dividem c em duas partes c_1 e c_2. Se v é definido por

$$v = \frac{c(t_2) - c(t_1)}{d},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{c_1}\big\langle v, X(c(t))\big\rangle dt &= \langle v, c(t)\rangle\Big|_{t_1}^{t_2}\\
&= \langle v, c(t_2) - c(t_1)\rangle\\
&= \frac{1}{d}||c(t_2) - c(t_1)||^2\\
&= d
\end{aligned}$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais existe $t^* \in (t_1,t_2)$ tal que

$$d = \int_{t_1}^{t_2}\big\langle v, X(c(t))\big\rangle dt = (t_2 - t_1)\cdot\big\langle v, X(c(t^*))\big\rangle \leq T\cdot \max_{t_1\leq t\leq t_2}\big\langle v, X(c(t))\big\rangle$$

onde T é o período de c. Logo, existe t' tal que

$$\big\langle v, X(c(t'))\big\rangle \geq \frac{d}{T}.$$

De forma análoga temos

$$\int_{c_2}\big\langle v, X(c(t))\big\rangle dt = -d$$

e existe t'' tal que

$$\big\langle v, X(c(t''))\big\rangle \leq -\frac{d}{T}.$$

Isso implica que

$$\left\langle v, X(c(t')) - X(c(t''))\right\rangle \geq \frac{2d}{T}. \tag{7.7}$$

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio para funções vetoriais temos

$$||X(c(t')) - X(c(t''))|| \leq rd. \tag{7.8}$$

Assim, das equações (7.7), (7.8) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2d}{T} &\leq \left\langle v, X(c(t')) - X(c(t''))\right\rangle \\ &\leq ||v|| \cdot ||X(c(t')) - X(c(t''))|| \\ &\leq rd \end{aligned}$$

Portanto,

$$T \geq \frac{2}{r}$$

e fazendo $\varepsilon = 2/r$ obtemos o desejado. □

Teorema 7.9. *Seja F_α uma métrica Finsler como em (7.4). Cada ponto crítico de $\widetilde{f}$ da origem a uma geodésica fechada cujo comprimento vai para 2π quando $\alpha \to 0$. O comprimento de todas as outras geodésicas fechadas vão para ∞ quando $\alpha \to 0$.*

Demonstração. Como $\psi_t^{H_0}$ e $\psi_t^{H_1}$ comutam (Lema 7.7) temos

$$\psi_t^{H_\alpha} = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\alpha t}^{H_1}.$$

Assim, se $\eta \in T_1^*M$ é um ponto periódico de $\psi_t^{H_\alpha}$ de período T, então,

$$\psi_{\alpha T}^{H_1}\eta = \psi_{-T}^{H_1}\eta$$

e $\widetilde{\eta} = \pi(\eta)$ é um ponto periódico de $\psi_t^{\widetilde{f}}$ de período αT pois por (7.6) e da definição de π temos

$$\psi_{\alpha T}^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta} = \pi \circ \psi_{\alpha T}^{H_1}\eta = \pi \circ \psi_{-T}^{H_0}\eta = \pi(\eta) = \widetilde{\eta}.$$

Logo, existem duas possibilidades:

1. $\psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta}$ é uma órbita periódica trivial, isto é, $\psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, como

$$X_{\widetilde{f}}(\widetilde{\eta}) = \frac{d}{dt}\psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta}\Big|_{t=0} = \frac{d\widetilde{\eta}}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

segue que

$$d\widetilde{f}(\widetilde{\eta}) = \widetilde{\omega}\big(X_{\widetilde{f}}(\widetilde{\eta}),\ \cdot\ \big) \equiv 0,$$

ou seja, $\widetilde{\eta}$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}$.

2. $\psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta}$ é uma órbita periódica não trivial de $X_{\widetilde{f}}$ e αT é um múltiplo do seu período.

Primeiro examinaremos o caso em que $\widetilde{\eta}$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}$. Nesse caso, pela equação (7.6) obtemos

$$\pi\left(\psi_t^{H_1}\eta\right) = \psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta} = \pi(\eta).$$

Logo, $\psi_t^{H_1}\eta$ é um ponto na S^1-órbita de η. Disso segue que

$$\psi_t^{H_\alpha}\eta = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\alpha t}^{H_1}\eta \in S^1 \cdot \eta$$

para todo $t \in S^1$. Então, η é um ponto periódico de X_{H_α}. Para determinar o seu período, introduziremos um sistema de coordenadas simplético (p_i, q_i) em T^*M tal que $p_1 = t$ é o parâmetro do tempo ao longo de $\psi_t^{H_0}\eta$ e tal que $q_1(\eta) = H_0(\eta)$. Assim, como para todo $\eta \in T^*M$ existem $\lambda > 0$ e $\rho \in T_1^*M$ tais que $\eta = \lambda\rho$ e como

$$H_0(\eta) = H_0(\lambda\rho) = \lambda H_0(\rho) = \lambda$$

obtemos

$$H_1(\eta) = \lambda H_1(\rho) = H_0(\eta) \cdot \widetilde{f} \circ \pi(\rho) = q_1(\eta) \cdot \widetilde{f} \circ \pi(\rho). \tag{7.9}$$

Como $p_1 = t$ é o parâmetro de tempo ao longo de $\psi_t^{H_0}\eta$ segue que $\pi(\rho)$ não depende de p_1, além disso, como H_0 é constante ao longo da órbita de qualquer ponto em T^*M segue que $\pi(\rho)$ também não depende de q_1. Logo,

$$H_1(\eta) = q_1(\eta) \cdot \widetilde{f}(p_2, \ldots, p_n, q_2, \ldots, q_n)$$

isto é, $\widetilde{f}$ não depende das coordenadas p_1, q_1, e assim,

$$H_\alpha(\eta) = q_1(\eta) + \alpha q_1(\eta) \cdot \widetilde{f}(p_2, \ldots, p_n, q_2, \ldots, q_n). \tag{7.10}$$

As equações de Hamilton para H_α são então:

$$\dot{p}_1 = \dot{t} = \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_1} = 1 + \alpha \widetilde{f}, \quad \dot{q}_1 = -\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_1} = 0$$

e

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i} = \alpha q_1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = -\alpha q_1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_i}$$

para $i > 1$. Como $q_1(\eta) = 1$ se $\eta \in T_1^*M$ e $\dot{t} = 1 + \alpha \widetilde{f}$ é a variação do parâmetro $p_1 = t$ ao longo de $\psi_t^{H_0}\eta$ temos

$$t = (1 + \alpha \widetilde{f}(\widetilde{\eta}))s$$

onde s é o parâmetro de tempo ao longo de $\psi_t^{H_\alpha}\eta$. Assim, se o período de $\psi_t^{H_\alpha}\eta$ é T, então, como o período de $\psi_t^{H_0}\eta$ é 2π temos

$$2\pi = (1 + \alpha \widetilde{f}(\widetilde{\eta}))T.$$

Portanto, $2\pi/(1 + \alpha \widetilde{f}(\widetilde{\eta}))$ é o período de $\psi_t^{H_\alpha}\eta$.

Para examinar as órbitas periódicas de H_α vindo de órbitas periódicas não triviais de $X_{\widetilde{f}}$ podemos aplicar o Teorema 7.8 ao campo de vetores $X_{\widetilde{f}}$ em C^*. Como C^* é compacto existe uma cota inferior para o período de qualquer órbita periódica não trivial de $X_{\widetilde{f}}$. Além disso, como $X_{\widetilde{f}}$ é um campo de vetores C^∞ tal que $c_0 \equiv$ constante $\in C^*$ e $X_{\widetilde{f}}(c_0) = 0$, então, existe $\varepsilon > 0$ tal que toda órbita periódica não trivial na vizinhança de c_0 tem período maior que ε. Como αT é um múltiplo do período L de $X_{\widetilde{f}}$, isto é, $\alpha T = mL$ para algum $m \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$\frac{\alpha T}{m} = L > \varepsilon \Longrightarrow T > \frac{\varepsilon m}{\alpha}.$$

Portanto, quando $\alpha \to 0$ o comprimento das órbitas de X_{H_α} tendem a ∞. $\square$

Teorema 7.10. *Se $M = S^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$ e g é a métrica Riemanniana canônica dessas variedades então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma métrica Finsler em M que está ε próxima de g com $\dim M$ geodésicas fechadas com comprimento em $(2\pi - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$ e tal que o comprimento de todas as outras geodésicas fechadas é maior que $1/\varepsilon$.*

Demonstração. Como M é uma variedade Riemanniana tal que todas as geodésicas são fechadas de mesmo comprimento 2π então C^* é simplesmente conexa. Assim, pelo Teorema 5.1 em [Tak68] segue que existe uma função em C^* com somente $\dim M$ pontos críticos se $\dim C^* \geq 6$. Mas se $\dim C^* < 6$ temos $M = S^2, S^3$ ou $M = \mathbb{C}P^1 = S^2$ e então $C^* = S^2$ ou $C^* = S^2 \times S^2$ (ver Proposição 2.9 em [Bes12]). E também nesses casos existe uma função em C^* com $\dim M$ pontos críticos. Portanto, pelo Teorema 7.9 concluímos o desejado. $\square$

7.2 Métricas Finsler Simétricas

Iremos examinar, nessa seção, a quantidade mínima de geodésicas em $M = S^n$ no caso em que as métricas Finsler são simétricas. Os métodos de perturbação em [Wei78] e na Seção 4.6 ou a teoria de Lusternik-Schnirelmann implicam que qualquer métrica Finsler suficientemente próxima da métrica Riemanniana canônica definida em M tem pelo menos tantas geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π quanto uma função em C^*/θ tem pontos críticos. Aqui, θ é a aplicação $c \mapsto -c$ definida em (7.1).

Por outro lado, se temos uma função em C^*/θ com k pontos críticos, então ela pode ser levantada para uma função em C^* com $2k$ pontos críticos e pelo Teorema 7.9 segue que a correspondente métrica Finsler simétrica F_α tem k geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π, uma vez que contamos $c(t)$ e $c(-t)$ como uma única geodésica fechada agora, e o comprimento de todas as outras geodésicas fechadas se tornam arbitrariamente grandes quando α se aproxima de zero. Mas o problema de encontrar um número mínimo de pontos críticos para uma função em C^*/θ ainda está em aberto.

Definição 7.11. As variedades Grassmanianas reais $G^0_{n,k}$ e $G_{n,k}$ são definidas, respectivamente, como a variedade de n-planos orientáveis e não orientáveis em $\mathbb{R}^{n+k}$ passando pela origem.

Observação 7.12. A dimensão de $G_{n,k}$ é nk.

Como $C^* = T_1^*S^n/S^1$ é o espaço das geodésicas de S^n na métrica riemanniana canônica de curvatura constante (vistas em $T_1^*S^n$) e podemos identificar cada geodésica em S^n com o plano de $\mathbb{R}^{n+1}$, que passa pela origem, que a contém, então, C^* pode ser identificado com $G^0_{2,n-1}$ e C^*/θ com $G_{2,n-1}$.

Teorema 7.13. *Existem métricas Finsler Simétricas em S^n em qualquer vizinhança da métrica de curvatura constante, com somente $2n-1$ geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π e tal que o comprimento de todas as outras geodésicas fechadas é maior que qualquer número prescrito.*

Demonstração. Pela Proposição 2.9 e uma observação abaixo dessa proposição em [Tak68] vemos que toda variedade compacta e conexa M admite uma função com $\dim M + 1$ pontos críticos. Então, como $\dim G_{2,n-1} = 2(n-1)$ segue que existe uma função em $G_{2,n-1}$ com $2n-1$ pontos críticos. Pela identificação de $G_{2,n-1}$ com C^*/θ segue que também existe uma função em C^*/θ com $2n-1$ pontos críticos.

Portanto, pelo Teorema 7.9 e a discussão que fizemos no início dessa seção segue que a correspondente métrica Finsler F_α possui $2n-1$ geodésicas de comprimento próximo de 2π se α é suficientemente pequeno e o comprimento de todas as outras geodésicas vão para ∞ quando $\alpha \to 0$. □

A Proposição 2.9 em [Tak68] nos dá um limitante inferior para o número mínimo de pontos críticos que uma função suave definida em $G_{2,n-1}$ pode ter. No entanto, para $n = 3$, J. Milnor deu um exemplo de uma função em $G_{2,2}$ com somente 4 pontos críticos, que é uma quantidade menor do que a obtida através dessa proposição. O próprio Milnor não publicou esse exemplo, mas ele é descrito no artigo [Zil83], no qual se baseia esse trabalho. Esse exemplo, é uma peça fundamental na demonstração de que em S^3 existem métricas Finsler com somente 4 geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π. Mas antes da demonstração desse resultado devemos ter em mente o seguinte:

Definição 7.14. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Dado $x \in \wedge^n V$, dizemos que x é decomponível se existem $v_1, \dots, v_n \in V$ tais que $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$.

Proposição 7.15. *O produto exterior $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ de p vetores $u_i \in V$ se anula se, e somente se, os vetores são linearmente dependentes.*

Demonstração. Se existe uma relação linear

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0$$

com $\lambda_i \neq 0$ então u_i é uma combinação linear dos outros vetores

$$u_i = \sum_{j \neq i} \mu_j u_j$$

onde $\mu_j = \lambda_j/\lambda_i$. Assim,

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = u_1 \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{j\neq i} \mu_j u_j\right) \wedge u_{i+1} \wedge \cdots \wedge u_p$$

e expandindo a expressão acima segue que cada termo da soma tem uma variável repetida u_j e, portanto, se anula.

Para a recíproca, sejam $u_1,\ldots,u_p$ vetores em V tais que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$. Se $u_1,\ldots,u_p$ são vetores linearmente independentes podemos estendê-los a uma base de V e isso implica que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ é um vetor da base de $\wedge^p V$ e assim é não nulo, o que gera uma contradição. Portanto, se $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p = 0$ então $u_1,\ldots,u_p$ são vetores linearmente dependentes. □

Lema 7.16. *Seja $x \in \wedge^2 V$ um elemento não nulo. Então x é decomponível se, e somente se, $x \wedge x = 0 \in \wedge^4 V$.*

Demonstração. Se x é decomponível, então existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $x = v_1 \wedge v_2$, então

$$x \wedge x = v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 = -v_1 \wedge v_2 \wedge v_2 \wedge v_1 = 0.$$

Provaremos a recíproca por indução na dimensão de V. Se $\dim V = 0,1$ então $\wedge^2 V = 0$, assim o primeiro caso é $\dim V = 2$. Nesse caso $\dim \wedge^2 V = 1$ e $v_1 \wedge v_2$ é um elemento não nulo se v_1, v_2 é uma base de V, então todo elemento não nulo de $\wedge^2 V$ é decomponível.

Consideraremos o caso $\dim V = 3$ separadamente. Dado $x \in \wedge^2 V$ não nulo, defina $f_x : V \to \wedge^3 V$ por

$$f_x(v) = x \wedge v.$$

Como $\dim \wedge^3 V = 1$ segue que $\dim \ker f_x \geq 2$. Assim, sejam u_1, u_2 vetores linearmente independentes em $\ker f_x$ e estenda para uma base u_1, u_2, u_3 de V. Dessa forma, existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$ tais que

$$x = \lambda_1 u_2 \wedge u_3 + \lambda_2 u_1 \wedge u_3 + \lambda_3 u_1 \wedge u_2.$$

Como $u_1 \in \ker f_x$ temos

$$0 = x \wedge u_1 = \lambda_1 u_2 \wedge u_3 \wedge u_1$$

e isto implica que $\lambda_1 = 0$. Similarmente temos

$$0 = x \wedge u_2 \Longrightarrow \lambda_2 = 0.$$

Logo, $x = \lambda_3 u_1 \wedge u_2$, isto é, x é decomponível.

Agora assuma que o lema é verdadeiro se $\dim V \leq n-1$ e considere o caso $\dim V = n$. Seja $v_1,\ldots,v_n$ uma base ordenada de V e escreva

$$\begin{aligned} x &= \sum_{1\leq i<j}^{n} a_{ij} v_i \wedge v_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} v_i\right) \wedge v_n + \sum_{1\leq i<j}^{n-1} a_{ij} v_i \wedge v_j \\ &= u \wedge v_n + x' \end{aligned}$$

onde $u \in U$, $x' \in \wedge^2 U$ e U é o espaço gerado por $v_1,\ldots,v_{n-1}$. Como estamos assumindo que $x \wedge x = 0$ temos

$$0 = x \wedge x = (u \wedge v_n + x') \wedge (u \wedge v_n + x') = 2x' \wedge u \wedge v_n + x' \wedge x'.$$

Observe que v_3 não aparece na expressão de $u \wedge x'$ ou $x' \wedge x'$ então obtemos

$$u \wedge x' = 0 \qquad \text{e} \qquad x' \wedge x' = 0. \tag{7.11}$$

Por hipótese de indução $x' \wedge x' = 0$ implica que existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $x' = u_1 \wedge u_2$. Assim, da primeira equação em (7.11) temos

$$u \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$$

e pela Proposição 7.15 segue que

$$\lambda u + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 = 0$$

onde os coeficientes λ, μ_1, μ_2 não são todos nulos. Então, considere os seguintes casos:

1. Se $\lambda = 0$, então, u_1 e u_2 são linearmente dependentes e, assim, $x' = u_1 \wedge u_2 = 0$. Disso, obtemos

$$x = u \wedge v_n.$$

2. Se $\lambda \neq 0$, obtemos

$$u = -\frac{\mu_1}{\lambda} u_1 - \frac{\mu_2}{\lambda} u_2$$

e se $\lambda_1 = -\mu_1/\lambda$ e $\lambda_2 = -\mu_2/\lambda$ segue que

$$x = \lambda_1 u_1 \wedge v_n + \lambda_2 u_2 \wedge v_n + u_1 \wedge u_2. \tag{7.12}$$

Como a equação (7.12) é um caso tri-dimensional que já mostramos ser decomponível, segue o desejado.

Portanto, em ambos os casos vemos que x é decomponível. □

Definição 7.17. Sejam V um espaço vetorial real e $\mathscr{C} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para V. Se $v = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in V$, definimos a norma de v em relação a base $\mathscr{C}$, $||v||_{\mathscr{C}}$ por:

$$||v||_{\mathscr{C}} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Teorema 7.18. *Em S^3 existem métricas Finsler (simétricas) com somente 4 geodésicas fechadas de comprimento próximo de 2π.*

Demonstração. Primeiro observe que se $P \subset \mathbb{R}^4$ é um plano gerado pelos vetores v_1, v_2, podemos associar a P o vetor

$$\lambda = v_1 \wedge v_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^4.$$

O vetor λ está unicamente determinado (a menos de multiplicação por escalar) por P pois se escolhermos uma base diferente para P que respeite a orientação, isto é, outra base positiva segue que o vetor $\widetilde{\lambda}$ correspondente será simplesmente λ multiplicado pelo determinante da matriz de mudança de base. Podemos supor ainda, sem perda de geralidade, que $v_1 \wedge v_2$ é unitário (em relação a uma base $\mathscr{C}$ de $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ que será construída abaixo). Disso segue que $G^0_{2,2}$ se identifica com o conjunto dos vetores unitários e decomponíveis de $\wedge^2 \mathbb{R}^4$.

Tome agora o operador estrela de Hodge $\star : \wedge^2 \mathbb{R}^4 \to \wedge^2 \mathbb{R}^4$ onde dada uma base ortonormal ordenada e_1, e_2, e_3, e_4 de $\mathbb{R}^4$ (dotado com o produto interno canônico) e uma permutação par (i_1, i_2, i_3, i_4) de $\{1, 2, 3, 4\}$ definimos

$$\star(e_{i_1} \wedge e_{i_2}) = e_{i_3} \wedge e_{i_4}.$$

Aplicando $\star$ na base canônica $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$ de $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ obtemos

$$\begin{aligned} &\star(e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4, \qquad &&\star(e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4 \\ &\star(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4, \qquad &&\star(e_2 \wedge e_4) = -e_1 \wedge e_3 \\ &\star(e_1 \wedge e_4) = e_2 \wedge e_3, \qquad &&\star(e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

e concluímos que $\star^2 = \mathrm{Id}$. Logo, o polinômio característico de $\star$ é $x^2 - 1$ e ± 1 são os seus autovalores. Assim, $\star$ induz uma decomposição do espaço $\wedge^2 \mathbb{R}^4$ dada por

$$\wedge^2 \mathbb{R}^4 = \wedge^+ \oplus \wedge^-$$

onde $\wedge^+$ e $\wedge^-$ são os autoespaços associados aos autovalores 1 e -1, respectivamente. Como $\mathscr{B} = \{e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4,\, e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3,\, e_2\wedge e_4 - e_1\wedge e_3\}$ gera $\wedge^+$ e $\mathscr{B}' = \{e_1\wedge e_3 + e_2\wedge e_4,\, e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4,\, e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3\}$ gera $\wedge^-$ segue que $\mathscr{C} = \mathscr{B}\cup\mathscr{B}'$ gera $\wedge^2\mathbb{R}^4$.

Assim, se $\omega \in \wedge^2\mathbb{R}^4$ é um vetor decomponível e unitário em relação a base $\mathscr{C}$, existem vetores $\omega^+ \in \wedge^+$, $\omega^- \in \wedge^-$ e escalares $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ tais que $\omega = \omega^+ + \omega^-$,

$$\begin{aligned}
\omega^+ &= a_1(e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4) + a_2(e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3) + a_3(e_2\wedge e_4 - e_1\wedge e_3)\\
\omega^- &= b_1(e_1\wedge e_3 + e_2\wedge e_4) + b_2(e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4) + b_3(e_1\wedge e_4 - e_2\wedge e_3)
\end{aligned}$$

e

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1.$$

Além disso, como um vetor $u \in \wedge^2\mathbb{R}^4$ é decomponível se, somente se, $u\wedge u = 0$ segue que

$$0 = \omega\wedge\omega = (\omega^+ + \omega^-)\wedge(\omega^+ + \omega^-) = \left(2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 - 2b_1^2 - 2b_2^2 - 2b_3^2\right) e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4.$$

Então,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

e portanto, ω é um vetor decomponível e unitário (em relação a base $\mathscr{C}$) se, e somente se,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow ||\omega^+||_{\mathscr{C}} = ||\omega^-||_{\mathscr{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Disso segue que o conjunto dos vetores unitários e decomponíveis de $\wedge^2\mathbb{R}^4$ se identifica com o espaço $S^2\times S^2$. Portanto,

$$C^* \simeq G^0_{2,2} \simeq S^2\times S^2 \tag{7.13}$$

e

$$C^*/\theta \simeq G_{2,2} \simeq S^2\times S^2/(x,y)\sim(-x,-y). \tag{7.14}$$

Se escolhermos um sistema de coordenadas (x_i, y_i), $i = 1,2,3$ em $S^2\times S^2$ onde $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 1$ então

$$f(x_i,y_i) = f_1(x_i,y_i) + f_2(x_i,y_i)$$

onde

$$f_1(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{y_i - x_i}{2}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad f_2(x_i,y_i) = x_1^2 - x_2^2$$

define uma função em $S^2\times S^2$ invariante sob $(x,y)\mapsto(-x,-y)$. Afirmo que a função induzida $\widetilde{f}$ em $S^2\times S^2/(x,y)\sim(-x,-y)$ dada por

$$\widetilde{f}([(x_i,y_i)]) = f(x_i,y_i)$$

tem 6 pontos críticos com 4 níveis críticos. De fato, tomando a parametrização de $S^2\times S^2$ da forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 & y_1 &= v_1\\
x_2 &= u_2 & y_2 &= v_2\\
x_3 &= \sqrt{1-u_1^2-u_2^2} & y_3 &= \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

obtemos

$$f_1(u_i,v_i) = \left(\frac{v_1-u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_2-u_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-v_1^2-v_2^2} - \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}{2}\right)^2.$$

Logo,

$$\nabla f_1(u_i,v_i) = \left(\ \frac{u_1}{2}\sqrt{\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}} - \frac{v_1}{2},\ \ \frac{u_2}{2}\sqrt{\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}} - \frac{v_2}{2},\ \ \frac{v_1}{2}\sqrt{\frac{1-u_1^2-u_2^2}{1-v_1^2-v_2^2}} - \frac{u_1}{2},\ \ \frac{v_2}{2}\sqrt{\frac{1-u_1^2-u_2^2}{1-v_1^2-v_2^2}} - \frac{u_2}{2}\ \right) \tag{7.16}$$

e

$$\nabla f_2(u_i,v_i) = \begin{pmatrix} 2u_1, & -2u_2, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que não existe nenhum ponto nessa parametrização (assim como nas outras parametrizações de $S^2 \times S^2$) onde $\nabla f_1(u_i,v_i) = -\nabla f_2(u_i,v_i) \neq 0$. Então, os pontos críticos de $\widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$ são pontos críticos, simultaneamente, de $\widetilde{f}_1$ e $\widetilde{f}_2$.

Afirmo que $\nabla f_1(u_i,v_i) = 0$ nos pontos de $(u_i,v_i) \mapsto (x_j,y_j)$ tais que $x_j = y_j$. De fato, pela equação (7.16) segue que $\nabla f_1(u_i,v_i) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} v_1 = u_1\sqrt{\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}} & \text{(I)} \\ \\ v_2 = u_2\sqrt{\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}} & \text{(II)} \end{cases}$$

- Se $u_1 = 0$ então de (I) segue que $v_1 = 0$ e de (II) temos

$$v_2 = u_2\sqrt{\frac{1-v_2^2}{1-u_2^2}} \Rightarrow v_2^2(1-u_2^2) = u_2^2(1-v_2^2) \Rightarrow v_2^2 - v_2^2u_2^2 = u_2^2 - u_2^2v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = u_2^2 \tag{7.17}$$

Como $\sqrt{\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}} > 0$ vemos na equação (II) que v_2 e u_2 tem mesmo sinal. Então de (7.17) concluímos que $u_2 = v_2$. E assim, pelas equações em (7.15) segue que

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_2 = y_2 \text{ e } x_3 = y_3.$$

- Seja $u_1 \neq 0$. Então da equação (I) temos $v_1 \neq 0$ e

$$v_1^2 = u_1^2\frac{1-v_1^2-v_2^2}{1-u_1^2-u_2^2} \Rightarrow v_1^2 - v_1^2u_1^2 - v_1^2u_2^2 = u_1^2 - u_1^2v_1^2 - u_1^2v_2^2$$

ou seja,

$$v_1^2(1-u_2^2) = u_1^2(1-v_2^2). \tag{7.18}$$

Da equação (II) segue, de forma semelhante, que

$$v_2^2(1-u_1^2) = u_2^2(1-v_1^2). \tag{7.19}$$

Assim,

$$(1-u_1^2) - v_2^2(1-u_1^2) = (1-u_1^2) - u_2^2(1-v_1^2) \Rightarrow (1-v_2^2)(1-u_1^2) = (1-u_1^2) - u_2^2(1-v_1^2)$$

isto é,

$$\frac{1-v_2^2}{1-u_2^2}(1-u_1^2) = \frac{1-u_1^2}{1-u_2^2} - u_2^2\frac{1-v_1^2}{1-u_2^2}.$$

Aplicando (7.18) na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{v_1^2}{u_1^2}(1-u_1^2) = \frac{1-u_1^2}{1-u_2^2} - u_2^2\frac{1-v_1^2}{1-u_2^2} \\ \Rightarrow\ & v_1^2(1-u_1^2)(1-u_2^2) = u_1^2\left[(1-u_1^2) - u_2^2(1-v_1^2)\right] \\ \Rightarrow\ & v_1^2 - v_1^2u_1^2 - v_1^2u_2^2 + v_1^2u_1^2u_2^2 = u_1^2 - u_1^4 - u_1^2u_2^2 + u_1^2u_2^2v_1^2 \\ \Rightarrow\ & v_1^2(1-u_1^2-u_2^2) = u_1^2(1-u_1^2-u_2^2) \\ \Rightarrow\ & v_1^2 = u_1^2 \end{aligned}$$

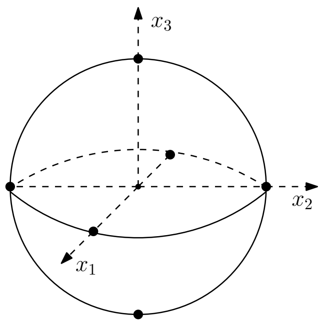

Figura 7.1: *Pontos críticos de* $f_2|_{S^2}$

Como pela equação (I) u_1 e v_1 tem mesmo sinal segue que $u_1 = v_1$. Além disso, de (7.19) e do fato de que u_2 e v_2 tem mesmo sinal segue que $u_2 = v_2$. Portanto, pelas equações em (7.15) segue que $x_j = y_j$, como queríamos.

Tomando a parametrização onde $x_3 = \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}$ e $y_3 = -\sqrt{1-v_1^2-v_2^2}$, de forma análoga ao caso anterior obtemos

$$\nabla f_1(u_i, v_i) = 0 \Longleftrightarrow x_i = -y_i.$$

Dessa forma, os pontos críticos de $\widetilde{f_1}$ (assim como os de f_1) são da forma $x_i = y_i$, $y_i = -x_i$ e pertencem aos níveis críticos 0 e 1, respectivamente, pois $\widetilde{f_1}[(x_i, x_i)] = 0$ e $\widetilde{f_1}[(x_i, -x_i)] = 1$. Então, os pontos críticos de $\widetilde{f_1} + \widetilde{f_2}$ estão contidos nos planos $x_i = y_i$ e $x_i = -y_i$ e consistem dos pontos críticos de $\widetilde{f_2}$ restrito a eles.

Se restringirmos o domínio de f_2 a S^2, isto é, se desconsiderarmos as coordenadas y_i, podemos ver que cada uma das 6 parametrizações, análogas àquela em (7.15), que cobrem S^2 contém um ponto crítico de $f_2|_{S^2}$. Por exemplo, tomando a parametrização como na primeira coluna em (7.15) segue que

$$\nabla f_2|_{S^2}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2u_1, & -2u_2 \end{pmatrix}.$$

Logo, $(0,0,1)$ é o único ponto crítico de $f_2|_{S^2}$ para essa parametrização. Calculando o gradiente de $f_2|_{S^2}$ nas outras parametrizações obtemos os pontos críticos:

$$(\pm 1, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0),\ (0, 0, \pm 1).$$

Assim, os pontos críticos de $\widetilde{f_2}$ restrito aos planos $x_i = y_i$ e $y_i = -x_i$ são:

$$\begin{array}{lll} p = [(1,0,0,1,0,0)], & q = [(0,1,0,0,1,0)], & r = [(0,0,1,0,0,1)] \\ p' = [(1,0,0,-1,0,0)], & q' = [(0,1,0,0,-1,0)], & r' = [(0,0,1,0,0,-1)] \end{array}$$

Portanto, $\widetilde{f}$ tem 6 pontos críticos p, p', q, q', r, r' e como

$$\widetilde{f}(r) = \widetilde{f}(q') = 0,\ \widetilde{f}(p) = \widetilde{f}(r') = 1,\ \widetilde{f}(q) = -1,\ \widetilde{f}(p') = 2$$

segue que os níveis críticos de $\widetilde{f}$ são $-1, 0, 1, 2$ onde existem 2 pontos críticos nos níveis 0 e 1.

Pela Proposição 2.9 em [Tak68] existe uma função $\widetilde{f}'$ definida em $S^2 \times S^2/(x,y) \sim (-x,-y)$ que colapsa os pontos críticos de $\widetilde{f}$ que estão em um mesmo nível crítico em um único ponto crítico. Assim, $\widetilde{f}'$ tem 4 pontos críticos. E pelas identificações em (7.14) existe uma função g definida em C^*/θ com 4 pontos críticos.

Portanto, pelo Teorema 7.9 e a discussão feita no início dessa seção segue que a métrica Finsler F_α correspondente tem apenas 4 geodésicas de comprimento próximo de 2π se α é suficientemente pequeno. □

Retornando agora para a situação geral de uma variedade M na qual todas geodésicas são fechadas e possuem mesmo período 2π, faremos algumas observações sobre as discussões feitas no Capítulo 5.

Teorema 7.19. *Se tomarmos uma função $\widetilde{f}$ em C^* tal que o fluxo de X_{H_1} induz uma ação de S^1 em T^*M (como foi o caso para os exemplos no Capítulo 5), então as geodésicas fechadas de H_α para α irracional são as geodésicas fechadas de H_0 que são invariantes sob o fluxo de H_1. Além disso, as geodésicas invariantes sob o fluxo de H_1 correspondem, exatamente, aos pontos críticos de $\widetilde{f}$.*

Demonstração. Observe que como $\psi_t^{H_0}$ e $\psi_t^{H_1}$ comutam (Lema 7.7) e $\psi_t^{H_1}$ é uma S^1-órbita, então pela mesma demonstração do Lema 5.7, se $\eta \in T^*M$ é um ponto periódico de $\psi_t^{H_\alpha}$ tal que

$$\psi_T^{H_\alpha}\eta = \eta$$

segue que $\psi_{\alpha nT}^{H_1}$ deixa a órbita $c(t) = \psi_{-t}^{H_0}$ invariante para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consequência disso, pela mesma demonstração do Lema 5.8 segue que se $\alpha T/2\pi$ é irracional, então $c(t)$ é invariante sob $\psi_t^{H_1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e se $\alpha T/2\pi$ é racional então α é racional.

Assim, se α é irracional, então $\alpha T/2\pi$ é irracional e nesse caso $c(t) = \psi_t^{H_0}\eta$ é invariante sob $\psi_t^{H_1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então,

$$\psi_t^{H_\alpha}\eta = \psi_t^{H_0} \circ \psi_{\alpha t}^{H_1}\eta = \psi_{\alpha t}^{H_1}(c(t)) = c(h(\alpha t)) \tag{7.20}$$

para alguma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Portanto, uma geodésica na co-norma Finsler H_α é uma geodésica na co-norma H_0 que é invariante sob $\psi_t^{H_1}$.

Agora se $c(t) = \psi_t^{H_0}\eta$ é uma geodésica de H_0 que é invariante sob $\psi_t^{H_1}$, então precisamos mostrar que c é um ponto crítico de $\widetilde{f}$. De fato, por hipótese temos

$$\psi_t^{H_1}\eta = \psi_t^{H_1}c(0) = c(h(t)) \tag{7.21}$$

para alguma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então, se $\pi : T_1^*M \to C^*$, pela equação (7.21) segue que

$$\pi\left(\psi_t^{H_1}\eta\right) = \pi(c(h(t))) = \pi(\eta), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\widetilde{\eta} := \pi(\eta) = \{c(t)\,; t \in \mathbb{R}\}$. Logo, pela equação (7.6) segue

$$\widetilde{\eta} = \pi(\eta) = \pi\left(\psi_t^{H_1}\eta\right) = \psi_t^{\widetilde{f}}\pi(\eta) = \psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta}$$

e como já vimos na Seção 7.1, se $\psi_t^{\widetilde{f}}\widetilde{\eta}$ é uma órbita trivial, então $\widetilde{\eta}$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}$. □

Antes de prosseguirmos com a discussão sobre as geodésicas na co-norma Finsler H_α vamos definir o *grau* de uma função suave e o *índice de Poincaré-Hopf* de um campo de vetores.

Sejam X e Y variedades de mesma dimensão. Se $h : X \to Y$ é uma aplicação suave onde X é uma variedade compacta e p é um valor regular de h, então $h^{-1}(p)$ é um conjunto finito de pontos, digamos $h^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Como p é um valor regular, pelo Teorema da Função Inversa segue que em uma vizinhança de cada x_i a aplicação h é um difeomorfismo local. Difeomorfismos podem ser divididos em dois grupos: os que preservam a orientação e os que não preservam. Seja r o número de pontos x_i no qual h preserva a orientação e s o número no qual h não preserva a orientação. Quando X é conexa, o número $r-s$ é independente da escolha de p e definimos o *grau* de h por:

$$grau(h) = r - s.$$

Definição 7.20. Seja p um zero isolado de um campo de vetores V em uma variedade M de dimensão n. Em coordenadas locais, podemos ver V como uma aplicação de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ em um aberto $U' \subset \mathbb{R}^n$ onde $0 \in U$, $0 \in U'$ e tal que 0 é o único zero de V em U. Definimos o índice de Poincaré-Hopf de V em p por:

$$Ind(V,p) = grau\ de\ \frac{V}{|V|} : S_\varepsilon^{n-1} \to S^{n-1},$$

onde S_ε^{n-1} é uma esfera de raio $\varepsilon > 0$ contida em U.

Voltando ao assunto, se $\widetilde{f}$ tem somente uma quantidade finita de pontos críticos, então qualquer zero de $X_{\widetilde{f}}$ tem índice 1 pois o fluxo de X_{H_1} e, portanto, também o fluxo de $X_{\widetilde{f}}$ induz uma S^1-ação. Assim, pelo Teorema do índice de Hopf, a característica de Euler de C^* é igual ao número de pontos críticos de $\widetilde{f}$ em C^*. Mas pela contagem dos números de Betti, $b_i(C)$, no Capítulo 5 segue que a característica de Euler de C é $2n$ para $M = S^{2n-1}$ ou $M = S^{2n}$, $n(n+1)$ e $2n(n+1)$ para $M = \mathbb{C}P^n$ e $M = \mathbb{H}P^n$, respectivamente. Então, não podemos obter qualquer métrica Finsler com menos geodésicas fechadas por esse método, embora as geodésicas podem ser degeneradas nessa situação mais geral.

Teorema 7.21. *Se $M = S^n$, $M = \mathbb{C}P^2$ ou $M = \mathbb{H}P^2$, então, não existe uma função $\widetilde{f}$ definida em C^* invariante sob θ e tal que o fluxo de X_{H_1} induz uma ação de S^1 em T_1^*M.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista uma função como descrita no enunciado do lema. Então, $\widetilde{f}$ também está bem definida no espaço quociente C^*/θ e pelo mesmo argumento anterior em C^*/θ obtemos

$$\frac{1}{2}\chi(C^*) = \chi(C^*/\theta) = \#\{\text{pontos críticos de } \widetilde{f} \text{ em } C^*/\theta\}.$$

Como para $M = S^n$, $M = \mathbb{C}P^2$ ou $M = \mathbb{H}P^2$ temos

$$\frac{1}{2}\chi(C^*) < \dim M$$

onde M é vista como uma variedade real, então segue que toda função $\widetilde{f}$ definida em C^*/θ e tal que X_{H_1} induz uma ação de S^1 em T_1^*M tem uma quantidade de pontos críticos menor que a dimensão de M.

Por outro lado, pela Proposição 2.9 e a observação abaixo dela em [Tak68] vemos que toda variedade compacta e conexa N admite uma função com $\dim N + 1$ pontos críticos. Logo, existe uma função $\widetilde{f}_1$ definida em C^*/θ com $2n-1$ pontos críticos. Observe que se $\widetilde{\eta} = \pi(\eta)$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}_1$ temos

$$\psi_t^{\widetilde{f}_1}\widetilde{\eta} = \widetilde{\eta}$$

e pela equação (7.6) temos

$$\pi(\eta) = \pi\left(\psi_t^{H_1}\eta\right),$$

e isto implica que existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_T^{H_1}\eta = \eta$, isto é, $\psi_t^{H_1}\eta$ é periódica. Logo, $\widetilde{f}_1$ é uma função tal que X_{H_1} induz uma S^1 ação em T_1^*M (nos pontos η tais que $\pi(\eta)$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}_1$) e tal que

$$\#\{\text{pontos críticos de } \widetilde{f}_1 \text{ em } C^*/\theta\} = 2n-1 > \dim M$$

o que gera uma contradição. □

Vimos na Proposição 7.5 que se $\widetilde{f}$ em C^* é invariante sob θ então a métrica Finsler F_α e a co-norma Finsler H_α correspondentes são simétricas. Logo, o Lema 7.21 nos diz que, pelo menos para $M = S^n$, $M = \mathbb{C}P^2$ e $M = \mathbb{H}P^2$, o método usado no Lema 7.19 não pode ser usado para produzir métricas Finsler simétricas com somente uma quantidade finita de geodésicas fechadas.

7.3 Aplicação de Poincaré das geodésicas fechadas curtas

Por fim, iremos calcular a aplicação de Poincaré linearizada das geodésicas fechadas curtas de H_α. Se $\widetilde{\eta}$ é um ponto crítico de $\widetilde{f}$ e $c(t) = \psi_t^{H_\alpha}\eta$ é a correspondente órbita periódica de H_α de comprimento $2\pi/\big(1+\alpha\widetilde{f}(\widetilde{\eta})\big)$, então podemos introduzir coordenadas como na Seção 7.1 e computar as equações diferenciais para o fluxo linearizado $d\psi_t^{H_\alpha}(\eta)$ como na Seção 6.2.

Dessa forma, seja (p_i, q_i) um sistema de coordenadas simplético em T^*M tal que $p_1 = t$ é o parâmetro do tempo ao longo de $\psi_t^{H_0}\eta$ e tal que $q_1(\eta) = H_0(\eta)$. Aqui vamos tomar $\eta \in T_1^*M$ e então $q_1 \equiv 1$ ao longo de $c(t)$. Se $Y(t) = (\xi_i(t), \rho_i(t))$ é uma solução do fluxo linearizado

$$P(Y(0)) = d\psi_t^{H_\alpha}(Y(0)) = Y(t),$$

então, pelas equações em (6.12) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t) &= \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial q_i \partial q_j}\cdot \rho_j(t) + \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial q_i \partial p_j}\cdot \xi_j(t)\\ \dot{\rho}_i(t) &= -\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial p_i \partial q_j}\cdot \rho_j(t) - \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial p_i \partial p_j}\cdot \xi_j(t)\end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de H_α são calculadas ao longo de $c(t)$. Como $q_1 \equiv 1$ ao longo de $c(t)$, pela equação (7.10) temos

$$H_\alpha(\eta) = 1 + \alpha \widetilde{f}(\widetilde{\eta})$$

ao longo de $c(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i(t) &= \alpha \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial q_i \partial q_j}(\widetilde{\eta})\cdot \rho_j(t) + \alpha \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial q_i \partial p_j}(\widetilde{\eta})\cdot \xi_j(t)\\ \dot{\rho}_i(t) &= -\alpha \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial p_i \partial q_j}(\widetilde{\eta})\cdot \rho_j(t) - \alpha \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial p_i \partial p_j}(\widetilde{\eta})\cdot \xi_j(t)\end{aligned}$$

Escrevendo de outra forma obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\rho}_i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \widetilde{f}_{q_i p_j} & \widetilde{f}_{q_i q_j} \\ -\widetilde{f}_{p_i p_j} & -\widetilde{f}_{p_i q_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j \\ \rho_j \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_{p_i p_j} & \widetilde{f}_{p_i q_j} \\ \widetilde{f}_{q_i p_j} & \widetilde{f}_{q_i q_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j \\ \rho_j \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Logo,

$$(\dot{\xi}_i, \dot{\rho}_i) = \alpha \cdot J \cdot A(\xi_j, \rho_j)$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = Hess\, \widetilde{f}$$

isto é, as equações diferenciais em (7.22) tem uma matriz coeficiente constante $\alpha \cdot J \cdot A$. Assim,

$$\frac{d}{dt} Y(t) = \alpha \cdot J \cdot A \cdot Y(t). \tag{7.23}$$

Observação 7.22. Uma das razões da importância da matriz exponencial é que ela pode ser usada para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares. A solução de

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t), \;\; y(0) = y_0$$

onde A é uma matriz constante, é dada por

$$y(t) = \exp(At) y_0.$$

Assim, pela Observação 7.22 segue que a solução de (7.23) é da forma:

$$Y(t) = \exp(\alpha t \cdot J \cdot A) Y(0).$$

E como P é tal que $P(Y(0)) = Y(T)$, segue que

$$P = \exp(\alpha T \cdot J \cdot A)$$

onde T é o período de c.

Referências Bibliográficas

[Arn13] Vladimir Igorevich Arnol'd. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013. 50

[Aud03] Michèle Audin. Geometry (universitext). 2003. 71

[BCS00] David Bao, S-S Chern e Zhongmin Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200. Springer Science & Business Media, 2000. 1, 15

[Bes12] Arthur L Besse. *Manifolds all of whose geodesics are closed*, volume 93. Springer Science & Business Media, 2012. 23, 24, 65, 73, 98

[BT24] Raoul Bott e Loring W Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82. Springer Science & Business Media, 1924. 1, 31

[BTZ82] Werner Ballmann, Gudlaugur Thorbergsson e Wolfgang Ziller. Closed geodesics on positively curved manifolds. *Annals of Mathematics*, páginas 213–247, 1982. 87, 89

[Dah06] Matias Dahl. An brief introduction to finsler geometry. https://math.aalto.fi/~fdahl/finsler/finsler.pdf, 2006. Último acesso em 25/08/2016. 1

[DFBN90] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, R.G. Burns e S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications: Part 3: Introduction to Homology Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1990. 74

[Lee48] HC Lee. Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients. Em *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, volume 52, páginas 253–260. JSTOR, 1948. 73

[Mil63] J Milnor. *Morse Theory (Annals of Mathematics Studies 51)*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963. 87, 88, 89, 90

[Rob07] Colleen Robles. Geodesics in randers spaces of constant curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, páginas 1633–1651, 2007. 69

[SH13] Pedro A. S. Salomão e U. L Hryniewicz. *Introdução à Geometria Finsler.* Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 1, 16, 88

[She01] Zhongmin Shen. *Lectures on Finsler geometry*. World Scientific, 2001. 1, 5, 16

[Tak68] Floris. Takens. The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the lusternik-schnirelman category. *Inventiones mathematicae*, 6:197–244, 1968. 98, 99, 104, 106

[Wei74] Alan Weinstein. On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed. *Journal of Differential Geometry*, 9(4):513–517, 1974. 74

[Wei78] Alan Weinstein. Bifurcations and hamilton's principle. *Mathematische Zeitschrift*, 159(3):235–248, 1978. 54, 99

[Zil83] Wolfgang Ziller. Geometry of the katok examples. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3(01):135–157, 1983. iii, v, 1, 99