Álgebras de Jordan de Tipo Hermitiano e de Weyl e Derivações Localmente Nilpotentes de Álgebra Livre Associativa

Sidney Henrique Dale Crode

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ivan Shestakov

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, Maio de 2021

Álgebras de Jordan de Tipo Hermitiano e de Weyl e Derivações Localmente Nilpotentes de Álgebra Livre Associativa

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 28/05/2021. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ivan Shestakov (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Victor Petrogradsky - UnB
- Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello - UNIFESP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, por sempre me propiciar a chance de estudar e estarem ao meu lado dando total apoio.

Agradeço a minha namorada pelo apoio e por sempre ser minha parceira.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação. Especialmente, ao Prof. Dr. Ivan Shestakov, que me orientou e foi fundamental para o meu crescimento acadêmico e para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a CNPq, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível me dedicar integralmente à jornada de estudos.

Resumo

DALE CRODE, S. H. **Álgebras de Jordan de Tipo Hermitiano e de Weyl e Derivações Localmente Nilpotentes de Álgebra Livre Associativa**. 2021. 64 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

Na primeira parte deste trabalho, estudamos a dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras simétricas $H(A, *)$ e de álgebras associativas com involução $(A, *)$. Além disso, damos uma contribuição relacionando as dimensões de Gelfand-Kirillov de $H(A, *)$ e $(A, *)$. Na segunda parte, provamos que o conjunto dos elementos simétricos de uma álgebra alternativa com involução é finitamente gerado, que é análogo ao teorema de Osborn para álgebras associativas. Além disso, consideramos duas álgebras de Jordan relacionadas a primeira álgebra de Weyl A_1 e encontramos suas representações em termos de geradores e relações. Por fim, estudamos derivações localmente nilpotentes da álgebra livre associativa $K\langle x, y \rangle$ (K corpo de característica zero) e mostramos que elas são triangularizáveis. Como aplicação, damos uma nova prova de que os automorfismos de $K\langle x, y \rangle$ são mansos.

Palavras-chave: dimensão de Gelfand-Kirillov, derivações localmente nilpotentes, automorfismos mansos, primeira álgebra de Weyl.

Abstract

DALE CRODE, S. H. **Jordan Algebra of Hermitian Type, Jordan Weyl Algebras and Locally Nilpotent Derivations Free Associative Algebra.** 2021. 64 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

In the first part of this work, we study the Gelfand-Kirillov dimension of symmetric algebras $H(A, *)$ and associative algebras with involution $(A, *)$. In addition, we make a contribution by relating the Gelfand-Kirillov dimensions of $H(A, *)$ and $(A, *)$. In the second part, we prove that the set of symmetric elements of an alternative algebra with involution is finitely generated, which is analogous to Osborn's theorem for associative algebras. In addition, we consider two Jordan algebras related with the first Weyl algebra A_1 and find their representations in terms of generators and relations. Finally, we study locally nilpotent derivations of free associative algebra $K\langle x, y \rangle$ (K field of characteristic zero) and show that they are triangularizable. As an application, we give new proof that the automorphisms of $K\langle x, y \rangle$ are tame.

Keywords: Gelfand-Kirillov dimension, locally nilpotent derivations, tame automorphisms, first Weyl algebra.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contribuições	2
1.2	Organização do Trabalho	3
2	Dimensão Gelfand-Kirillov	5
2.1	Crescimento de Álgebras	5
2.1.1	Dimensão Gelfand-Kirillov de Álgebras	7
2.2	Dimensão Gelfand-Kirillov de Algumas Álgebras	9
2.3	Dimensão Gelfand-Kirillov de $(A, *)$ e $H(A, *)$	12
3	Geradores de Álgebras de Jordan Hermitianas	15
3.1	Teorema de Osborn	15
3.2	Teorema de Osborn para Álgebras Alternativas	18
3.2.1	Problemas	21
4	Álgebras de Weyl e Álgebras de Jordan	23
4.1	Álgebra de Weyl	23
4.1.1	Forma Canônica	26
4.1.2	Geradores e relações	29
4.1.3	O Grau dos Operadores em A_n	30
4.2	Álgebras de Jordan $A_1^{(+)}$ e $H(A_1, *)$	33
4.2.1	A Álgebra $A_1^{(+)}$	34
4.2.2	A Álgebra $H(A_1, *)$	37
5	Derivações de $K\langle x, y \rangle$	41
5.1	Definições Básicas	41
5.2	O Análogo do Teorema de Rentschler para $K\langle x, y \rangle$	46
5.3	Aplicação para $Aut(K\langle x, y \rangle)$	52
	Referências Bibliográficas	53

Capítulo 1

Introdução

A dimensão de Gelfand-Kirillov foi introduzida originalmente por Gelfand e Kirillov (1996) para estudar o crescimento de álgebras de Lie de dimensão finita, posteriormente tornou-se um importante invariante para álgebras afins, pois a mesma, ao contrário das séries de Hilbert, independe da escolha de seu conjunto de geradores. Uma referência sobre GK-dimensão é o livro de Krause e Lenagan [KL91], que contém os principais resultados dessa teoria.

Sejam A uma K -álgebra finitamente gerada (não necessariamente associativa), V um K -espaço vetorial de dimensão finita que gera A como álgebra e V^n o espaço vetorial gerado por todos os produtos de comprimentos menores ou iguais a n de elementos de V . A dimensão de Gelfand-Kirillov de A (notação: $GK \dim A$) é definida por:

$$GK \dim A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln(\dim V^n)}{\ln n}.$$

É conhecido que a definição acima não depende da escolha do espaço vetorial de dimensão finita que gera A (ver [KL91]). Desta forma, a definição pode ser estendida para álgebras B , não necessariamente finitamente geradas, da seguinte maneira:

$$GK \dim B = \sup_A \{GK \dim A \mid A \subset B, A \text{ finitamente gerada}\}.$$

Dada uma álgebra associativa A , construímos uma álgebra de Jordan denotada por $A^{(+)}$ associada a A , esta nova álgebra possui o mesmo espaço vetorial subjacente de A com o novo produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ (em que o produto em A é denotado pela justaposição). Quando uma álgebra de Jordan J é uma subálgebra de $A^{(+)}$ para alguma álgebra associativa, dizemos que J é especial e a subálgebra de A gerada por J , digamos A_0 , é chamada álgebra envolvente associativa da álgebra de Jordan especial J .

Em 1996, Martinez [Mar96] provou que a dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra de Jordan especial finitamente gerada é igual a da sua álgebra envolvente associativa. Seguindo o trabalho de Martinez, relacionaremos $GK \dim A$, em que A é uma álgebra associativa com involução $\star$, com $GK \dim H(\star, A)$, em que $H(\star, A)$ é o conjunto dos elementos simétricos de A que é uma álgebra de Jordan especial.

Um outro trabalho fundamental para o desenvolvimento da tese é o trabalho de Rentschler [Ren68], onde foi provado que toda derivação D localmente nilpotente no anel de polinômios $K[x, y]$ é triangularizável (K é um corpo de característica zero), isto é, existe um sistemas de geradores x', y' de $K[x, y]$ tal que $D(x') \in K[y']$ e $D(x') = 0$. Como consequência desse resultado, Rentschler obteve uma outra demonstração do resultado de Jung [Jun42],

que afirma que um conjunto gerador de $\text{Aut}K[x, y]$ é dado por:

$$\{(y, x), (\lambda x, y), (x + f(y), y) | \lambda \in K^*, f(y) \in K[y]\}$$

em que representamos um automorfismo ϕ de $K[x, y]$ pelo par $(\phi(x), \phi(y))$.

Seguindo essa linha, investigaremos esses resultados para a álgebra livre associativa em duas variáveis $K\langle x, y \rangle$.

Ainda, estudaremos as álgebras de Weyl, em particular, a primeira A_1 . Iremos considerar duas álgebras de Jordan relacionadas com a primeira álgebra de Weyl $A_1 = \text{alg}\langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$, sendo uma a álgebra $A_1^{(+)}$ e a outra $H = H(A_1, *)$ em que $*$ é uma involução específica, e encontraremos suas representações em termos de geradores e relações.

Observe que uma álgebra associativa A finitamente apresentável, em geral, não implica a mesma propriedade para a álgebra de Jordan $A^{(+)}$. Em [SZ18] foi provado que a álgebra $F\langle x, y \rangle^{(+)}$ não é finitamente apresentada, onde $F\langle x, y \rangle$ é a álgebra livre associativa. Ao mesmo tempo, foi provado no mesmo artigo que se A é finitamente apresentada, então a álgebra de matriz de Jordan $M_3(A)^{(+)}$ é finitamente apresentada.

Além disso, Osborn [Her76] provou que dada uma álgebra associativa finitamente gerada com involução, então a álgebra de Jordan dos elementos simétricos é finitamente gerada. Dessa forma, investigaremos esse resultado para as álgebras de Jordan e alternativas.

1.1 Contribuições

Seja K um corpo de característica zero. As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

1. Teorema 2.24. Se $(A, *)$ é uma álgebra associativa finitamente gerada com involução, então $GK \dim A = GK \dim(H)$, em que $H = H(A, *)$.
2. Corolário 2.25. Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa finitamente gerada com involução. Se uma envolvente A_0 de H tem dimensão finita, então A tem dimensão finita.
3. Corolário 2.26. Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa finitamente gerada com involução. Se H tem dimensão finita, então A tem dimensão finita.
4. Teorema 2.27. Se $(A, *)$ é uma álgebra associativa com involução, então $GK \dim A = GK \dim(H)$, em que $H = H(A, *)$.
5. No processo da resolução dos problemas acima, ainda obtemos que A é um A_0 -módulo à direita finitamente gerado, onde A_0 é a envolvente associativa (página 13).
6. Teorema 3.6. Sejam $(A, *)$ uma álgebra alternativa finitamente gerada com involução $*$ e $H = (H, *)$ a álgebra de Jordan dos elementos simétricos de A . Então H é finitamente gerada.
7. Teorema 4.27. A álgebra de Jordan $J = A_1^{(+)}$ tem a seguinte representação na variedade de álgebras de Jordan:

$$J = \text{alg}\langle x, y \mid (x, y, y) = (y, x, x) = 0, (x^2, y, y) = (y^2, x, x) = 1/2 \rangle.$$

8. Teorema 4.31. As relações

$$(a, a, b) = \frac{1}{2}, (b, b, a) = (a, b, b^2) = 0, (b, a, a^2) = -a, (a, a, b^2) = 3b, (b, b, a^2) = 2b,$$

forneem a representação da álgebra de Jordan $J = H(A_1, *)$ em termos dos geradores $a = x, b = y^2$. Aqui a involução $*$ é dada por $x^* = x$ e $y^* = -y$.

9. Teorema 5.19. Toda derivação localmente nilpotente D , não nula, em $K\langle x, y \rangle$ é triangularizável.
10. Mostramos que a hipótese do corpo K ter característica zero não pode ser relaxada, no teorema anterior (página 51).
11. Teorema 5.22. O homomorfismo natural de grupos $\eta : \text{Aut} K\langle x, y \rangle \rightarrow \text{Aut}[x, y]$ é injetor e, portanto, todo automorfismo da álgebra $K\langle x, y \rangle$ é manso.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos introdutórios de crescimento de álgebras e de dimensão Gelfand-Kirillov, na sequência demonstramos os nossos primeiros cinco resultados listados acima.

No Capítulo 3, provamos o teorema do item 6 apresentado acima que é o análogo ao teorema de Osborn para álgebras associativas. Logo depois, apresentamos alguns problemas para pesquisas futuras.

No Capítulo 4, apresentamos várias propriedades sobre a álgebra de Weyl e provamos os resultados 7 e 8.

Finalmente, no Capítulo 5, encontram-se os últimos resultados listados acima, nos quais junto com alguns lemas técnicos necessários, foram publicados em [CS20] pelo autor junto com seu orientador.

Capítulo 2

Dimensão Gelfand-Kirillov

Neste capítulo iremos introduzir brevemente, nas seções 2.1 e 2.2, o conceito de crescimento de álgebras e dimensão Gelfand-Kirillov tendo como base o livro [KL91]. Na seção 2.3 iremos relacionar as dimensões Gelfand-Kirillov de uma álgebra associativa A , que possui uma involução $*$, com seu conjunto dos elementos simétricos $H(A, *)$ que é uma álgebra de Jordan.

2.1 Crescimento de Álgebras

Seja K um corpo. Uma K -álgebra finitamente gerada A (assuma que A possui unidade 1) com conjunto gerador $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, possui um *subespaço gerador* V de dimensão finita (exemplo, o K -espaço gerado por $a_1, \dots, a_m$) no sentido de que cada elemento de A é uma combinação K -linear dos monômios formados pelos elementos $a_1, \dots, a_m$. Assim, se $V^0 = K$, e para $n \geq 1$, V^n denota o subespaço gerado por todos os monômios em $a_1, \dots, a_m$ de comprimento n , então

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad \text{onde} \quad A_n \doteq K + V + V^2 + \dots + V^n.$$

Se A tem dimensão finita, então $A = A_n$ para algum n , e a função $d_V(n) = \dim_K(A_n)$ estaciona. Em geral, esta função é monótona crescente, e suas propriedades, podem ser usadas para distinguir várias K -álgebras. Entretanto, a função d_V é muito específica, dependendo da escolha do subespaço gerador V . A dependência pode ser removida introduzindo uma relação de equivalência, e isto será feito na definição seguinte.

Definição 2.1. Denote por Φ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que são eventualmente monótonas crescentes com valores positivos, ou seja, $n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N}$, tal que

$$f(n) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad f(n+1) \geq f(n) \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Para $f, g \in \Phi$, defina $f \leq^* g$ se, e somente se, existem $c, m \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) \leq cg(mn) \quad \text{para quase todo } n \in \mathbb{N},$$

e $f \sim g$ se, e somente se, $f \leq^* g$ e $g \leq^* f$.

Para $f \in \Phi$ a classe de equivalência $\mathcal{G}(f) \in \Phi / \sim$ é chamada *crescimento* de f . A ordem parcial no conjunto $\Phi / \sim$ induzida por $\leq^*$ é denotada por $\leq$.

Observações.

- Se f e g são funções polinomiais, então f e g têm o mesmo crescimento se, e somente se, $gr(f) = gr(g)$. Para um número real $\gamma \geq 0$ o crescimento da função $p_\gamma : n \mapsto n^\gamma$ é denotado por $\mathcal{P}_\gamma$.
- Para um número positivo ε , o crescimento de $q_\varepsilon : n \mapsto e^{n^\varepsilon}$ é denotado por $\mathcal{E}_\varepsilon$. Note que $\varepsilon < \eta$ se, e somente se, $\mathcal{E}_\varepsilon < \mathcal{E}_\eta$.
- Seja $f(n) = \ln(n)$. Temos que $f \in \Phi$ e $\mathcal{G}(f) > \mathcal{P}_0$. É possível verificar que $\mathcal{G}(f) < \mathcal{P}_\varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$. Note também que $\mathcal{G}(f)$ e $\mathcal{G}(g)$ não precisam ser comparáveis para duas funções arbitrárias f e g em Φ .

Lema 2.2. Seja A uma K -álgebra finitamente gerada com subespaços geradores V e W de dimensões finitas. Se $d_V(n)$ e $d_W(n)$ denotam as dimensões de $\sum_{i=1}^n V^i$ e $\sum_{i=1}^n W^i$, respectivamente, então $\mathcal{G}(d_V) = \mathcal{G}(d_W)$.

Demonstração. Uma vez que

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (V^0 + \cdots + V^n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (W^0 + \cdots + W^n),$$

existem inteiros positivos s e t tais que

$$W \subseteq \sum_{i=0}^s V^i \quad \text{e} \quad V \subseteq \sum_{j=0}^t W^j.$$

Assim $d_W(n) \leq d_V(sn)$ e $d_V(n) \leq d_W(tn)$, consequentemente $d_V \sim d_W$. $\square$

O "crescimento" de uma K -álgebra finitamente gerada é, portanto, independente da escolha do subespaço gerador particular V de dimensão finita. É conveniente assumir que $1 \in V$, pois neste caso, temos que $\sum_{i=0}^n V^i = V^n$.

Definição 2.3. Seja A uma K -álgebra finitamente gerada, e seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A . Então $\mathcal{G}(A) := \mathcal{G}(d_V)$ é chamado *crescimento* de A , e dizemos que A tem *crescimento polinomial* se $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, *crescimento exponencial* se $\mathcal{G}(A) = \mathcal{E}_1$, *crescimento subexponencial* se $\mathcal{G}(A) < \mathcal{E}_1$, e $\mathcal{G}(A) \not\leq \mathcal{P}_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. Seja $A = K\langle x, y \rangle$ a álgebra livre em duas variáveis. Então $V = Kx + Ky$ é um subespaço gerador para A , e

$$d_V(n) = \dim_K \left(\sum_{i=0}^n V^i \right) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Logo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{E}_1$.

O próximo resultado, devido a Borho e Kraft, [KL91] página 7, mostra que o crescimento exponencial $\mathcal{E}_1$ é o maior crescimento que pode ser esperado para uma álgebra finitamente gerada.

Proposição 2.4. Se A é finitamente gerada e não tem dimensão finita, então $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{G}(A) \leq \mathcal{E}_1$.

Demonstração. Seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A , e assuma que $1 \in V$. Então

$$d_V(n) = \dim(V^n) \leq \dim(V \otimes \cdots \otimes V) = (\dim V)^n,$$

consequentemente $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(d_V) \leq \mathcal{E}_1$.

As inclusões na sequência $V^0 \subseteq V^1 \subseteq V^2 \subseteq \cdots$ são todas próprias, pois se $V^n = V^{n+1}$ para algum n , então $V^n = A$, e A teria dimensão finita. Assim, $d_V(n) \geq n$ para todo n , donde $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(d_V) \geq \mathcal{P}_1$. □

Lema 2.5. Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais.

1. Se $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ é um polinômio de grau d , então existem números racionais $a_0, a_1, \dots, a_d$ tais que

$$f(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{n}{1} + a_0,$$

para todo número natural n .

2. As seguintes propriedades de uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ são equivalentes.

- (a) Existem $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$ e um inteiro $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{n}{1} + a_0.$$

- (b) Existem $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$ e um inteiro $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n+1) - f(n) = a_d \binom{n}{d-1} + \cdots + a_2 \binom{n}{1} + a_1.$$

3. Se $f(n)$ está no formato descrito em 1. e se $f(n) \in \mathbb{Z}$ para todo n suficientemente grande, então $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, \dots, d$.
4. Se $f(n)$ está no formato descrito em 1. e se $f(n) \in \mathbb{N}$ e $f(n+1) - f(n) \geq 0$ para todo n suficientemente grande, então a_d é um inteiro positivo.

Exemplo 2. Considere $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$, a álgebra polinomial comutativa. O espaço vetorial $V = \mathbb{K}x_1 + \cdots + \mathbb{K}x_d$ é um subespaço gerador de A , e

$$\dim(V^{n+1}) = \binom{n+1+d-1}{d-1} = \binom{n+d}{d-1},$$

que é um polinômio de grau $d-1$. Como $\dim(V^{n+1}) = d_V(n+1) - d_V(n)$, segue da parte 2. do lema anterior que $d_V(n)$ é um polinômio em n de grau d ; logo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_d$. De fato, as partes 3. e 4. do lema anterior mostram que os coeficientes de d_V são inteiros, e que seu coeficiente dominante é um inteiro positivo.

2.1.1 Dimensão Gelfand-Kirillov de Álgebras

O crescimento de uma álgebra é muitas vezes bastante difícil de determinar explicitamente. Portanto, torna-se desejável usar o comportamento assintótico de funções monótonas crescentes para fazer identificações adicionais que vão além do crescimento. Teoricamente,

existem várias possibilidades para fazer isso, mas na prática, um dos conceitos mais úteis acaba sendo o limite superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(n))}{\ln n}.$$

Lema 2.6. Sejam $f, g \in \Phi$. Então

(a)

$$\begin{aligned} \limsup \frac{\ln(f(n))}{\ln n} &= \inf\{\rho \in \mathbb{R} : f(n) \leq n^\rho \text{ para } n \text{ suficientemente grande}\} \\ &= \inf\{\rho \in \mathbb{R} : \mathcal{G}(f) \leq \mathcal{P}_\rho\}. \end{aligned}$$

(b) Se $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, então $\limsup \frac{\ln(f(n))}{\ln n} = \limsup \frac{\ln(g(n))}{\ln n}$.

Demonstração. (a) Sejam r, s e t denotando os três "números" das igualdades, listados na mesma ordem. Claramente, se um destes números é infinito, os outros também são. Se $f(n) \leq n^\rho$ para quase todo n , então $\mathcal{G}(f) \leq \mathcal{P}_\rho$, consequentemente

$$\{\rho \in \mathbb{R} | f(n) \leq n^\rho \text{ para quase todo } n\} \subseteq \{\rho \in \mathbb{R} | \mathcal{G}(f) \leq \mathcal{P}_\rho\},$$

donde $t \leq s$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{\ln(f(n))}{\ln n} \leq r + \varepsilon$ para quase todo n , ou seja, $f(n) \leq n^{r+\varepsilon}$ e $s \leq \inf\{r + \varepsilon | \varepsilon > 0\} = r$.

Assuma agora que $r > t$, e defina $\varepsilon = \frac{r-t}{3}$. Então $\mathcal{G}(f) \leq \mathcal{P}_{t+\varepsilon}$ e $f(n) \leq (mn)^{t+\varepsilon}$ para algum número natural m e quase todo n . Se n é escolhido suficientemente grande satisfazendo $m^{t+\varepsilon} \leq n^\varepsilon$, então $f(n) \leq n^{t+2\varepsilon}$ para quase todo n , contradizendo o fato de que infinitos números $\frac{\ln(f(n))}{\ln n}$ são maiores do que $\limsup \frac{\ln(f(n))}{\ln n} - \varepsilon = r - \varepsilon = t + 2\varepsilon$.

(b) consequência de (a). □

Definição 2.7. A *dimensão Gelfand-Kirillov* de uma álgebra A é

$$GK \dim(A) = \sup_V \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(d_V(n))}{\ln n},$$

em que o supremo é tomado sobre todos os subespaços de dimensão finita V de A .

Observações.

- Foi mostrado no Lema 2.2 que para uma K -álgebra B finitamente gerada seu crescimento independe do subespaço gerador V de B . Assim

$$GK \dim(B) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(d_V(n))}{\ln n},$$

neste caso. Como todo subespaço de dimensão finita de uma K -álgebra A (não necessariamente finitamente gerada) pode ser visto como subespaço gerador para uma subálgebra finitamente gerada B de A , a definição de dimensão Gelfand-Kirillov de A , pode ser reescrita como

$$GK \dim(A) = \sup_B \{GK \dim(B) | B \subseteq A, B \text{ finitamente gerada}\}.$$

- Até este momento utilizamos o livro [KL91] como base do nosso texto. Vale ressaltar que as álgebras consideradas por ele são associativas, mas as definições acima são as mesmas para álgebras não associativas.

A dimensão Gelfand-Kirillov de uma álgebra pode ser infinita, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3. Seja A a álgebra do Exemplo 1 a qual é finitamente gerada. Como $d_V(n) = 2^{n+1} - 1$, temos que

$$GK \dim(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(d_V(n))}{\ln n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{n+1} - 1)}{\ln n} = \infty.$$

A seguinte questão surge naturalmente: quais números reais podem ser assumidos pela dimensão de Gelfand-Kirillov de uma $\mathbb{K}$ -álgebra? É fácil ver que $GK \dim A = 0$ se, e somente se, A é localmente de dimensão finita, ou seja, se toda subálgebra finitamente gerada possui dimensão finita. Segue da Proposição 2.4 que $GK \dim A \geq 1$ para qualquer álgebra A que não é localmente de dimensão finita. Além disso, ao analisarmos o exposto no Exemplo 2 juntamente com o Lema 2.6, podemos concluir que todo número natural ocorre como dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra polinomial comutativa. Há dois resultados que respondem a essa pergunta para os outros números positivos e ambos podem ser encontrados em [KL91].

Teorema 2.8. (Bergman) Não existem álgebras associativas A tais que $1 < GK \dim A < 2$.

Teorema 2.9. Para qualquer número real $r \geq 2$ existe uma álgebra A com dois geradores tal que $GK \dim A = r$.

Para o caso geral, isto é, considerando as álgebras não-associativas, ainda não sabemos se o teorema de Bergman é verdadeiro. Porém, C. Martinez e E. Zelmanov [MZ96] provaram que não existem álgebras de Jordan de dimensão Gelfand-Kirillov s tal que $1 < s < 2$.

2.2 Dimensão Gelfand-Kirillov de Algumas Álgebras

Para que a dimensão Gelfand-Kirillov seja um método útil para o estudo de álgebras, é necessário conhecer seu comportamento quando passamos de uma álgebra A para anéis relacionados como subálgebras, álgebras quocientes, somas diretas e extensões de Ore. Nesta seção estas álgebras serão estudadas. Como uma aplicação apresentaremos a dimensão Gelfand-Kirillov das álgebras de Weyl.

Lema 2.10. Se B é uma subálgebra ou imagem homomorfa de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A , então $GK \dim(B) \leq GK \dim(A)$.

Demonstração. Para subálgebras a afirmação decorre como consequência imediata da definição da dimensão de Gelfand-Kirillov. Para uma álgebra quociente $\bar{A}$ de A , observe que qualquer conjunto de representantes das classes laterais para os elementos da base de um subespaço $\bar{V}$ de $\bar{A}$ com dimensão finita forma uma base de um subespaço de dimensão finita V de A que satisfaz $\dim(\bar{V}^n) \leq \dim(V^n)$, para todo n natural. Então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim \bar{V}^n)}{\ln n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim V^n)}{\ln n},$$

e portanto,

$$\sup_{\bar{V}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim \bar{V}^n)}{\ln n} \leq \sup_V \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim V^n)}{\ln n}.$$

□

Proposição 2.11. Se A_1 e A_2 são $\mathbb{K}$ -álgebras, então

$$GK \dim(A_1 \oplus A_2) = \max\{GK \dim(A_1), GK \dim(A_2)\}.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.10, temos

$$\gamma := \max\{GK \dim(A_1), GK \dim(A_2)\} \leq GK \dim(A_1 \oplus A_2),$$

e a igualdade vale se $\gamma = \infty$. Vamos assumir que γ é finito, e seja W um subespaço de dimensão finita de $A_1 \oplus A_2$. Sejam U e V as projeções canônicas de W sobre A_1 e A_2 respectivamente. Então

$$W \subseteq U \oplus V \quad \text{e} \quad W^n \subseteq (U \oplus V)^n = U^n \oplus V^n.$$

Dado $\epsilon > 0$, segue do Lema 2.6 que

$$d_U(n) < n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} \quad \text{e} \quad d_V(n) < n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}}$$

para quase todo n , pois $\limsup \frac{\ln(d_U(n))}{\ln n} \leq GK \dim(A_1) \leq \gamma$ e o mesmo vale para $d_V(n)$. Como $n^{\frac{\epsilon}{2}} > 2$ para n suficientemente grande,

$$d_W(n) \leq d_U(n) + d_V(n) \leq 2n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} < n^{\frac{\epsilon}{2}} n^{\gamma + \frac{\epsilon}{2}} = n^{\gamma + \epsilon}$$

para quase todo n . Logo $\limsup \frac{\ln(d_W(n))}{\ln n} \leq \gamma$, pelo Lema 2.6. Portanto,

$$GK \dim(A_1 \oplus A_2) = \sup_W \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(d_W(n))}{\ln n} \leq \gamma.$$

□

Muitas álgebras são extensões de Ore de outras álgebras, sendo as álgebras de Weyl talvez o exemplo mais conhecido.

Definição 2.12. Uma $\mathbb{K}$ -derivação δ de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A é um $\mathbb{K}$ -endomorfismo de A que satisfaz

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

para todos $a, b \in A$.

Definição 2.13. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com uma $\mathbb{K}$ -derivação δ . A $\mathbb{K}$ -álgebra $B = A[x; \delta]$ dos polinômios $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, a_i \in A$, sujeita à relação $xa - ax = \delta(a)$, $a \in A$, é chamada *extensão de Ore* de A com respeito à δ .

Lema 2.14. Sejam A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com $\mathbb{K}$ -derivação δ e $B = A[x; \delta]$. Então $GK \dim(B) \geq GK \dim(A) + 1$.

Demonstração. Seja A_f uma subálgebra finitamente gerada de A e seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A_f , com unidade. O subespaço de dimensão finita $W = V + \mathbb{K}x$ de B satisfaz

$$V^n \oplus V^n x \oplus \cdots \oplus V^n x^n \subseteq (V + \mathbb{K}x)^{2n} = W^{2n},$$

logo $(n+1)d_V(n) \leq d_W(2n)$. Então

$$\begin{aligned}
 GK \dim(B) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln d_W(n)}{\ln n} \\
 &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n+1)d_V(n)]}{\ln n} \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln d_V(n)}{\ln n} \\
 &= 1 + GK \dim(A_f),
 \end{aligned}$$

e portanto,

$$GK \dim(B) \geq \sup_{A_f} \{1 + GK \dim(A_f)\} = 1 + \sup_{A_f} \{GK \dim(A_f)\} = 1 + GK \dim(A).$$

□

É natural querer saber quando a desigualdade no lema anterior se torna uma igualdade. O resultado seguinte, [KL91] página 25, mostra que a igualdade vale para uma grande classe de álgebras, em particular, para o caso $\delta = 0$, isto é, para a álgebra polinomial $B = A[x]$, e para o caso quando A é uma álgebra finitamente gerada.

Proposição 2.15. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com $\mathbb{K}$ -derivação δ tal que todo subespaço de dimensão finita está contido em uma subálgebra δ -estável finitamente gerada de A . Então $GK \dim(A[x; \delta]) = GK \dim(A) + 1$.

Exemplo 4. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra e seja $B = A[x_1, \dots, x_n]$. Então aplicando repetidamente a Proposição 2.15 no caso em que a derivação é nula, temos que $GK \dim(B) = GK \dim(A) + n$.

A desigualdade do Lema 2.14 pode, de fato, ocorrer, como mostra o resultado abaixo.

Proposição 2.16. Seja p um inteiro positivo.

1. Existe uma $\mathbb{K}$ -álgebra localmente de dimensão finita A_p com uma K -derivação δ_p , tal que $GK \dim(A_p[t; \delta_p]) = p$.
2. Existe uma K -álgebra localmente de dimensão finita A com $\mathbb{K}$ -derivação δ , tal que $GK \dim(A[t; \delta]) = \infty$.

Agora, iremos calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra de Weyl A_n .

Definição 2.17. A álgebra de Weyl $A_n = A_n(\mathbb{K})$ é o anel de polinômios em $2n$ variáveis $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, sujeitas às relações

$$x_i x_j = x_j x_i, \quad y_i y_j = y_j y_i, \quad \text{e} \quad x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Proposição 2.18. Vale o isomorfismo abaixo:

$$A_{n+1} \cong A_n[y_{n+1}][x_{n+1}; \delta] \quad \text{onde} \quad \delta = \frac{\partial}{\partial y_{n+1}}.$$

Demonstração. Como y_{n+1} comuta com os demais elementos de A_n , resta mostrar que x_{n+1} satisfaz as relações que definem a álgebra de Weyl. De fato, para $i = 1, \dots, n$, temos

$$x_i x_{n+1} - x_{n+1} x_i = \delta(x_i) = 0$$

e

$$y_i x_{n+1} - x_{n+1} y_i = \delta(y_i) = 0.$$

Para $i = n + 1$, temos

$$y_{n+1} x_{n+1} - x_{n+1} y_{n+1} = \delta(y_{n+1}) = 1,$$

provando o resultado. $\square$

Teorema 2.19. A dimensão de Gelfand-Kirillov da n -ésima álgebra de Weyl A_n é $2n$.

Demonstração. O resultado é provado por indução. Para $n = 0$, o resultado é válido pois $A_0(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$. Suponha que a dimensão $GK \dim A_n = 2n$. Pelo Exemplo 4

$$GK \dim(A_n[y_{n+1}]) = GK \dim(A_n) + 1 = 2n + 1.$$

Da Proposição 2.15, decorre que $GK \dim(A_{n+1}) = GK \dim(A_n[y_{n+1}]) + 1 = 2(n + 1)$. $\square$

2.3 Dimensão Gelfand-Kirillov de $(A, *)$ e $H(A, *)$

Nesta seção, K será um corpo de característica diferente de 2.

Uma *álgebra de Jordan* é uma K -álgebra não associativa cuja multiplicação satisfaz as seguintes identidades:

$$xy = yx \quad \text{e} \quad (xy)x^2 = x(yx^2).$$

Seja A uma K -álgebra associativa, denotamos por $A^{(+)}$ a *álgebra de Jordan associada* a A , ou seja, a álgebra com o mesmo espaço vetorial de A e com o novo produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ (o produto em A é denotado pela justaposição). Uma álgebra de Jordan J é dita ser *especial* se é uma subálgebra de $A^{(+)}$ para alguma álgebra associativa. A subálgebra associativa A_0 de A gerada por J é uma *envolvente da álgebra de Jordan* J .

Exemplo 5. Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa com involução $*$. O conjunto dos elementos simétricos $H(A, *) := \{a \in A \mid a^* = a\}$ é uma álgebra de Jordan especial com o produto $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Nosso objetivo agora será provar nosso primeiro resultado o qual diz que dada uma álgebra associativa A com involução $*$, então $GK \dim(A) = GK \dim(H(A, *))$. Para tanto, precisaremos de dois resultados:

Teorema 2.20. (Martinez [Mar96]) Se J é uma álgebra de Jordan especial finitamente gerada e A for sua álgebra envolvente associativa, então $GK \dim(J) = GK \dim(A)$.

Teorema 2.21. (Osborn [Her76]) Seja A uma álgebra associativa com involução sobre um anel comutativo R que contém $\frac{1}{2}$. Se A é finitamente gerada sobre R , então $H = H(*, A)$ é finitamente gerada como álgebra de Jordan.

Seja então $(A, *)$ uma álgebra associativa finitamente gerada com involução. Sem perda de generalidade, suponha que A é gerada por $B = \{a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_r\}$, em que $a_i^* = a_i$, $b_j^* = -b_j$. Seja V o espaço vetorial gerado por $B \cup \{1\}$. Pelo Teorema de Osborn, sabemos

que $H := H(A, *)$ é finitamente gerada como álgebra de Jordan. Sendo assim, seja $\tilde{C}$ um subconjunto finito que gera H e denote por A_0 a subálgebra associativa em A gerada por H , temos o seguinte resultado:

Lema 2.22. Para todo $n \geq 1$, $V^n \subseteq V^r(A_0 \cap V^{ln})$, em que $l = r + 1$.

Demonstração. Seja $x_1 x_2 \cdots x_n$, $x_i \in B \cup \{1\}$. Se $n \leq r$, a inclusão segue. Suponha que vale para $n - 1 \geq r$, vamos mostrar que $x_1 x_2 \cdots x_n \in V^n \subseteq V^r(A_0 \cap V^{ln})$.

Utilizando a hipótese de indução escreva $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} = \sum v_j w_j$ tal que $v_j \in V^r$ e $w_j \in A_0 \cap V^{l(n-1)}$. Se $x_n = a$ é simétrico, então

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \sum v_j w_j a = \sum v_j (w_j a) \in V^r(A_0 \cap V^{l(n-1)})(A_0 \cap V^l) \subseteq V^r(A_0 \cap V^{ln}).$$

Se $x_n = b$ é antissimétrico, temos que

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_n &= \sum v_j w_j b \\ &= \sum [v_j (w_j b - b w_j^*) + v_j b w_j^*], \end{aligned}$$

como $(w_j b - b w_j^*) \in H \cap V^{ln} \subseteq A_0 \cap V^{ln}$, então só nos resta mostrar que $v_j b w_j^* \in V^r(A_0 \cap V^{ln})$.

Suponha que $v_j = z_1 z_2 \cdots z_r$, $z_i \in B$ e escreva $z_{r+1} = b$.

Se $z_k = a$ é um elemento simétrico, então escrevendo $m_1 = z_1 \cdots z_{k-1}$ e $m_2 = z_{k+1} \cdots z_{r+1}$, temos que

$$\begin{aligned} v_j b &= m_1 a m_2 \\ &= m_1 (a m_2 + m_2^* a) - m_1 m_2^* a, \end{aligned}$$

implicando que $v_j b w_j^* = m_1 [(a m_2 + m_2^* a) w_j^*] - m_1 m_2^* (a w_j^*) \in V^r(A_0 \cap V^l)(A_0 \cap V^{l(n-1)}) \subseteq V^r(A_0 \cap V^{ln})$.

Suponha que todos os z_k são antissimétricos. Como $z_1 z_2 \cdots z_{r+1}$ é um monômio com $r + 1$ elementos antissimétricos, segue que existem dois elementos antissimétricos iguais. Digamos que $z_k = z_h$ com $k < h$ e escreva $m_1 = z_1 \cdots z_{k-1}$, $m_2 = z_{k+1} \cdots z_{h-1}$, $m_3 = z_{h+1} \cdots z_{r+1}$ e $m = m_2 m_3^*$ assim

$$\begin{aligned} v_j b &= m_1 z m_2 z m_3 \\ &= m_1 z m_2 (z m_3 - m_3^* z) + m_1 z (m z - z m^*) + m_1 (z^2 m^* + m z^2) - m_1 m z^2, \end{aligned}$$

donde $v_j b \in V^r(A_0 \cap V^l)$, pois $A_0 \cap V^l$ contém todos os simétricos de comprimento $\leq r + 1$. Logo, $v_j b w_j^* \in V^r(A_0 \cap V^l)(A_0 \cap V^{l(n-1)}) \subseteq V^r(A_0 \cap V^{ln})$. $\square$

Lema 2.23. Para todo $n \geq 1$, $A_0 \cap V^{ln} \subseteq C^{ln}$, em que C é o espaço vetorial gerado por $\tilde{C}$.

Demonstração. Seja $x \in A_0 \cap V^{ln}$, então $x = \sum s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ onde $s_{i_j} \in \tilde{C}$ e $p \leq ln$, portanto $x \in C^{ln}$. $\square$

Em particular, mostramos que A é um A_0 -módulo à direita finitamente gerado.

Teorema 2.24. Se $(A, *)$ é uma álgebra associativa finitamente gerada com involução, então $Gk \dim(A) = GK \dim(H)$, em que $H = H(A, *)$.

Demonstração. Mantenha as notações feitas até agora. Pelo resultado de Martinez, temos que $Gk \dim(H) = GK \dim(A_0)$. Vamos mostrar que $Gk \dim(A) = GK \dim(A_0)$.

Pelos Lemas anteriores, $V^n \subseteq V^r C^{ln}$ para todo n . Assim

$$\begin{aligned}
 GK \dim(A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim(V^n))}{\ln n} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim(V^r C^{ln}))}{\ln n} \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim(V^r) \dim(C^{ln}))}{\ln n} \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim(V^r))}{\ln n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\dim(C^{ln}))}{\ln n} \\
 &= GK \dim(A_0).
 \end{aligned}$$

Como a outra desigualdade sempre é válida, segue o resultado. $\square$

Corolário 2.25. Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa finitamente gerada com involução. Se A_0 tem dimensão finita, então A tem dimensão finita.

Demonstração. A_0 tem dimensão finita se, e somente se, $GK \dim(A_0) = 0$, daí pelo Teorema anterior $GK \dim(A) = 0$ implicando que A tem dimensão finita. $\square$

Corolário 2.26. Seja $(A, *)$ uma álgebra associativa finitamente gerada com involução. Se H tem dimensão finita, então A tem dimensão finita.

No próximo resultado, provamos o Teorema 2.24 sem a hipótese de A ser finitamente gerada.

Teorema 2.27. Se $(A, *)$ é uma álgebra associativa com involução, então $GK \dim(A) = GK \dim(H)$, em que $H = H(A, *)$.

Demonstração. Usando o teorema de Martinez e o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
 GK \dim(A) &= \sup_B \{GK \dim(B) | B \subseteq A, B \text{ finitamente gerada}\} \\
 &= \sup_B \{GK \dim(H(B, *)) | B \subseteq A, B \text{ finitamente gerada}\} \\
 &\leq \sup_D \{GK \dim(D) | D \subseteq H(A, *), D \text{ finitamente gerada}\} \\
 &= GK \dim(H(A, *)).
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 GK \dim(H(A, *)) &= \sup_D \{GK \dim(D) | D \subseteq H(A, *), D \text{ finitamente gerada}\} \\
 &= \sup_D \{GK \dim(D_0) | D \subseteq H(A, *), D \text{ finitamente gerada}\} \\
 &\leq \sup_B \{GK \dim(B) | B \subseteq A, B \text{ finitamente gerada}\} \\
 &= GK \dim(A).
 \end{aligned}$$

Na segunda igualdade, D_0 é a envolvente de D . $\square$

Quando tiramos a hipótese de $(A, *)$ ser finitamente gerada não conseguimos resultados análogos aos Corolários 2.25 e 2.26. Como exemplo, basta considerar $(A, *)$ de dimensão infinita com multiplicação nula e involução definida por $a^* = -a$ para todo $a \in A$. Teremos $H(A, *) = \{0\}$ e $\dim A = \infty$.

Capítulo 3

Geradores de Álgebras de Jordan Hermitianas

Neste capítulo, provaremos um teorema análogo ao de Osborn para álgebras alternativas, e verificaremos que o mesmo teorema não pode ser obtido para álgebras de Jordan. Além disso, apresentaremos alguns problemas em aberto.

3.1 Teorema de Osborn

Nessa seção iremos enunciar o teorema de Cohn, sua generalização que é o teorema de Osborn e fazer algumas considerações sobre o conjunto finito que ele garante. Além disso, iremos calcular um conjunto finito em um caso particular que será retomado no capítulo 4.

Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $A = \text{Ass}\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre.

Em 1954, Cohn provou o teorema:

Teorema 3.1. (Cohn [Coh54]) Seja $*$ a involução em A tal que $x_i^* = x_i$, $x_i \in X$. Então a álgebra de Jordan $H = H(A, *) = \{x \in A : x^* = x\}$ é gerada pelo conjunto X e os "tetrads" $\{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\} := x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} + x_{i_4}x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}$ em que $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$, $x_{i_j} \in X$.

Ou seja, se $*$ for a involução reversa ($x_i^* = x_i$ para $i = 1, \dots, n$), então o conjunto H dos elementos simétricos de $\text{Ass}\langle X \rangle$ é uma álgebra de Jordan finitamente gerada.

Seguindo essa linha, Osborn provou que H é finitamente gerada para qualquer involução em $\text{Ass}\langle X \rangle$:

Teorema 3.2. (Osborn [Her76]) Seja A uma álgebra associativa com involução sobre um anel comutativo com unidade R que contém $\frac{1}{2}$. Se A é finitamente gerada sobre R , então $H = H(A, *)$ é finitamente gerada como álgebra de Jordan.

Note que o enunciado do teorema de Osborn não traz o conjunto finito, porém ele é apresentado em sua demonstração. Para apresentar tal conjunto, suponha que a álgebra associativa seja $A = \text{Ass}[s_1, \dots, s_q, k_1, \dots, k_r]$ munida com a involução $*$ em que $s_i^* = s_i$ e $k_j^* = -k_j$.

O conjunto gerador de H é formado pelos elementos:

$$\{x_1x_2x_3x_4\} \quad \text{e} \quad \{k_{i_1}k_{i_2} \cdots k_{i_m}x_{m+1} \cdots x_n\}$$

onde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq r$, $x_i \in C_r \cap H$ e $n - m < 4$. E ainda, pela demonstração, concluímos que podemos considerar os x_i 's ordenados.

Notação: $\{k_{i_1} \cdots k_{i_m}x_{m+1} \cdots x_n\} = k_{i_1} \cdots k_{i_m}x_{m+1} \cdots x_n + (-1)^m x_n \cdots x_{m+1}k_{i_m} \cdots k_{i_1}$.

E o conjunto C_r é definido indutivamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{s_1, \dots, s_q, k_1, \dots, k_r\} \cup \{k_i k_j + k_j k_i | 1 \leq i, j \leq r\}, \\ C_1 &= C_0 \cup \{sk_1 - k_1 s, k_1 s k_1, k_1 s k_1^2 - k_1^2 s k_1 | s \in C_0 \cap H\}, \\ &\vdots \\ C_r &= C_{r-1} \cup \{sk_r - k_r s, k_r s k_r, k_r s k_r^2 - k_r^2 s k_r | s \in C_{r-1} \cap H\}. \end{aligned}$$

Agora, conhecendo os elementos do conjunto finito dado pelo teorema de Osborn, vamos calcular tais elementos da álgebra $A = Ass\langle s_1, k_1 \rangle$.

Lema 3.3. Seja $F\langle x, y \rangle$ a álgebra associativa livre em dois geradores com uma involução $*$ tal que $x^* = x$ e $y^* = -y$. Então o conjunto

$$\{x, xy - yx, y^2, yxy, yxy^2 - y^2 xy\}.$$

gera a álgebra de Jordan $H = (F\langle x, y \rangle, *)$

Demonstração. Temos que $C_0 = \{x, y, y^2\}$ e $C_1 \cap H = \{x, [x, y], yxy, yxy^2 - y^2 xy, y^2\}$.

Se $m = 0$ e $n = 1$, temos todos os elementos de $C_1 \cap H$.

Se $m = 1$ e $n = 1$,

$$\begin{aligned} \{yx\} &= -[x, y]; \\ \{y[x, y]\} &= 2yxy - y^2x - xy^2 = 2yxy - x \circ y^2; \\ \{y(yxy)\} &= y^2xy - yxy^2; \\ \{y(yxy^2 - y^2xy)\} &= 2y^2xy^2 - y^2 \circ yxy; \\ \{yy^2\} &= 0. \end{aligned}$$

Se $m = 1$ e $n = 2$

$$\begin{aligned} \{yx[x, y]\} &= 2yx^2y - \{yxyx\} = 2yx^2y - x \circ yxy; \\ \{yx(yxy)\} &= 0; \\ \{yx(yxy^2 - y^2xy)\} &= \{yxyxy^2\} - \{yxy^2xy\} = y^2x(yxy) + (yxy)xy^2 + \frac{1}{2}yxy \circ yxy; \\ \{yxy^2\} &= yxy^2 - y^2xy; \\ \{y[x, y](yxy)\} &= \{yxy^2xy\} - \{y^2xyxy\}; \\ \{y[x, y](yxy^2 - y^2xy)\} &= 0; \\ \{y[x, y]y^2\} &= \{yxy^3\} - \{y^2xy^2\} = y^2 \circ yxy - 2y^2xy^2; \\ \{y(yxy)(yxy^2 - y^2xy)\} &= 2y^2(xy^2x)y^2 - y^2xy^2 \circ yxy; \\ \{y(yxy)y^2\} &= yxy^4 - y^4xy - y^2 \circ (yxy^2 - y^2xy); \\ \{y(yxy^2 - y^2xy)y^2\} &= y^2xy^4 + y^4xy^2 - 2y^2(yxy)y^2. \end{aligned}$$

Se $m = 1$ e $n = 3$

$$\begin{aligned} \{yx[x, y](yxy)\} &= yx^2y \circ yxy + (yxy \circ x) \circ yxy - x \circ (\frac{1}{2}yxy \circ yxy); \\ \{yx[x, y](yxy^2 - y^2xy)\} &= -yx^2y \circ \{y^2xy\} + (x \circ yxy) \circ \{y^2xy\} - \{xyxy^3\} \circ [x, y] - \{xyxy^4x\} + \\ &\quad \{y^3x\} \circ yx^2y + xy^4x \circ [x, y] + \{xy^4xyx\} - \{y^3xyxyx\} + \{xyxy^2xy^2\}; \\ \{yx[x, y]y^2\} &= yx^2y \circ y^2 + x(yxy)y^2 + y^2(yxy)x - (yxy \circ x) \circ y^2; \\ \{yx(yxy)(yxy^2 - y^2xy)\} &= \{(yxy)x(y^2xy^2)\} - \{(yxy)xy^2\} \circ yxy + \{y^2x(yxy^2xy)\}; \\ \{yx(yxy)y^2\} &= -x \circ \{yxy^4\} + y^4xyx - xyxy^4 - \{yxy^2\} \circ yxy - ([x, y] \circ y^2) \circ yxy; \\ \{yx(yxy^2 - y^2xy)y^2\} &= yxy \circ (x \circ y^4) - \{(yxy)y^4x\} - \{(yxy)(yxy)y^2\}; \\ \{y[x, y]yxy(yxy^2 - y^2xy)\} &= -(\frac{1}{2}yxy \circ yxy) \circ \{y^2xy\} - y^2 \circ \{xyxy^2xy^2\} + \{xyxy^2xy^4\} + \end{aligned}$$

$$\{y^3xy^3xyx\} + y^2 \circ [\{xyxy^3\} \circ \{xy\} + \{xyxy^4x\} + \{y^3xyxyx\} - \{y^3x\} \circ yx^2y - xy^4x \circ \{xy\} - \{xy^4xyx\}];$$

$$\{y[x, y]yxyy^2\} = \{(yxy)(yxy)y^2\} - \frac{1}{2}[y^2 \circ ((x \circ yxy) \circ y^2) - (x \circ yxy) \circ y^4];$$

$$\{y[x, y](yxy^2 - y^2xy)y^2\} = 2\{yxy^4\} \circ yxy + \{xy\} \circ y^3xy^3 - \{xy^4\} \circ \{xy^3\} + \{y^7x\} \circ x + y^4 \circ (x \circ \{xy^3\}) - \{y^4xy^3x\} - 2[y^2 \circ \{xyxy^4\} + \{y^6xyx\}] + y^2xy^2 \circ \{xy^3\} + \{y^2xy\} \circ \{y^4x\} + \{yxy^6\} \circ x + \{y^6xyx\};$$

$$\{y(yxy)(yxy^2 - y^2xy)y^2\} = \{y^2(xy^2x)y^4\} - \{y^2x(y^3xy^3)\}.$$

Agora, só nos resta listar os tetraedros.

$$\{x[x, y]yxy(yxy^2 - y^2xy)\} = \{x(xy^2xy^2x)y^2\} - x(yxy)x \circ (y^2 \circ yxy) + \{(xyxyx)(yxy)y^2\};$$

$$\{x[x, y]yxyy^2\} = \{x^2y^2xy^3\} - \{xyxyxy^3\};$$

$$\{x[x, y](yxy^2 - y^2xy)y^2\} = \{x^2(y^2xy^2)y^2\} - \frac{1}{2}x^2 \circ \{y^2(yxy)y^2\} - \{(xyxyx)y^2y^2\} + \{x(yxy^2xy)y^2\};$$

$$\{xyxy(yxy^2 - y^2xy)y^2\} = \{xyxy^2xy^4\} - \{xyxy^3xy^3\};$$

$$\{[x, y]yxy(yxy^2 - y^2xy)y^2\} = \{(xy^2x)(y^2xy^2)y^2\} - xy^2x \circ y^3xy^3 - \{(yxy)(xy^2x)y^2\} + \{(yxy)x(y^3xy^3)\}.$$

Note que todos os elementos de grau 4 e 6 na variável y foram gerados. Logo, temos que os seguintes elementos geram a álgebra H (separamos pelo grau em y):

grau 0	grau 1	grau 2	grau 3	grau 5	grau 7
x	$xy - yx$	y^2	$yxy^2 - y^2xy$	$yxy^4 - y^4xy$	$xyxy^6 - y^6xyx$
		yxy	$xyxy^2x - xy^2xyx$	$xyxy^4 - y^4xyx$	$yxy^6 - y^6xy$
		yx^2y		$xyxyxy^3 - y^3xyxyx$	$xy^7 - y^7x$
				$xyxy^4x - xy^4xyx$	$xy^3xy^4 - y^4xy^3x$
				$xyxy^2xy^2 - y^2xy^2xyx$	$xyxy^2xy^4 - y^4xy^2xyx$
				$x^2y^2xy^3 - y^3xy^2x^2$	$xyxy^3xy^3 - y^3xy^3xyx$

Vamos diminuir a quantidade de geradores. Note que $[a, b^3] = [a, b] \circ b^2 + b[a, b]b$ e que

$$[k, s^2] = s \circ [k, s] \text{ se } s \text{ é simétrico e } k \text{ antissimétrico.}$$

$$yx^2y = -\{xy\}^2 + x \circ yxy - xy^2x;$$

$$\{xyxy^2x\} = x(yxy^2 - y^2xy)x;$$

$$\{xyxy^4\} = y^2 \circ [xyx, y^2]; \text{ observando que } [xyx, y^2] = x \circ \{yxy^2\} + [x, y] \circ yxy.$$

$$\{xyxy^6\} = [xyx, y^2] \circ y^4 + y^2[xyx, y^2]y^2;$$

$$\{xy^3xy^4\} = y^2 \circ [xy^3x, y^2]; \text{ observando que } [xy^3x, y^2] = [x, y] \circ y^2xy^2 + yxy \circ (yxy^2 - y^2xy).$$

$$\{xyxy^4x\} = x(yxy^4 - y^4xy)x;$$

$$\{x^2y^2xy^3\} = x \circ \{xy^2xy^3\} - x\{y^2xy^3\}x; \text{ onde } \{xy^2xy^3\} = [x, y] \circ \{yxy^3\} + yxy \circ \{xy^3\} - 2\{xyxy^4\} - 2x \circ \{y^4xy\} \text{ e } \{y^2xy^3\} = \{xy^3\} \circ y^2 - \{xy^5\};$$

$$\{xy^7\} = y^2 \circ \{y^5x\} - \frac{1}{2}[(\{y^3x\} \circ y^2) \circ y^2 - \{y^3x\} \circ y^4].$$

Desta forma, temos a seguinte tabela:

grau 0	grau 1	grau 2	grau 3	grau 5	grau 7
x	$xy - yx$	y^2 xyx	$xyx^2 - y^2xy$	$xyx^4 - y^4xy$ $xyxyxy^3 - y^3xyxyx$ $xyxy^2xy^2 - y^2xy^2xyx$	$xyx^6 - y^6xy$ $xyxy^2xy^4 - y^4xy^2xyx$ $xyxy^3xy^3 - y^3xy^3xyx$

$$\begin{aligned}
\{xyx^4\} &= y^2 \circ \{yxy^2\} + y^2[x, y]y^2; \\
\{xyxy^2xy^2\} &= \{[xyx, y^2]xy^2\} + y^2(x[x, y]x)y^2; \\
\{xyxy^3xy^3\} &= \{[xyx, y^2](yxy)y^2\} + \{y^2[xyx, yxy]y^2\} \text{ observando que } [xyx, yxy] = \frac{1}{2}(\{xyxy\} \circ [x, y] + 2\{xyxy^2x\} + yx^2y \circ [x, y] - xy^2x \circ [x, y]); \\
\{xyx^6\} &= \frac{1}{2}[(\{y^3x\} \circ y^2) \circ y^2 - \{y^3x\} \circ y^4] - y^4 \circ \{yxy^2\}; \\
\{xyxyxy^3\} &= y^2 \circ [(x \circ yxy) \circ [x, y] + x \circ (x \circ \{yxy^2\} + yxy \circ [x, y]) - x^2 \circ \{yxy^2\} - yxy \circ (x \circ [x, y])] + (yxy \circ x) \circ \{yxy^2\} + yxy \circ (yxy \circ [x, y] + x \circ \{yxy^2\}) - yxy^2xy \circ [x, y] - x \circ [yxy^2xy, y]; \\
\{xyxy^2xy^4\} &= y^2x\{yxy^2\}xy^2 - y^2 \circ \{xyxy^2xy^2\}.
\end{aligned}$$

Assim

grau 0	grau 1	grau 2	grau 3
x	$xy - yx$	y^2 xyx	$xyx^2 - y^2xy$

□

3.2 Teorema de Osborn para Álgebras Alternativas

Sejam $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $Alt\langle X \rangle$ a álgebra alternativa livre com involução $*$. Lembramos que uma *álgebra alternativa* satisfaz as seguintes identidades:

$$(x, x, y) = 0 \quad \text{e} \quad (x, y, y) = 0.$$

E linearizando essas identidades, chega-se que $(x, y, z) = -(y, x, z)$ e $(x, y, z) = -(x, z, y)$. Tais propriedades iremos utilizar de forma recorrente durante a prova dos resultados.

Em 1990, Smirnov [Smi90] provou um teorema análogo ao de Cohn (Teorema 3.1) para álgebra alternativas, ou seja, a álgebra de Jordan H dos elementos simétricos de $Alt\langle X \rangle$ com involução reversa é finitamente gerada.

Agora a questão que surge é:

- Existe o análogo do Teorema de Osborn para álgebras alternativas livres? ou para álgebras de Jordan livres?

Para o caso das álgebras de Jordan a resposta é negativa. Denote por $SJ\langle X \rangle$ a álgebra de Jordan livre sobre o conjunto X . Considere $SJ\langle x, y \rangle$, com involução $*$ tal que $x^* = x$ e $y^* = -y$. Suponha que o conjunto dos elementos simétricos H seja finitamente gerado e seja C um conjunto gerador finito. Então tome r tal que $yx^ry \notin C$, logo $yx^ry = \sum s_{i_1} \circ s_{i_2}$, onde $s_{i_1}, s_{i_2} \in H$ e $\deg(s_{i_1}) > 0$, $\deg(s_{i_2}) > 0$. Como não existem elementos simétricos que possuem apenas um y , segue que $\deg_y(s_{i_1}) = 2$ ou $\deg_y(s_{i_2}) = 2$, assim $yx^ry = \sum x^{t_i} \circ s_i$,

onde $\deg_y s_i = 2$ e $t_i \geq 1$, o que é um absurdo. Portanto não existe um resultado análogo do Teorema de Osborn para álgebras de Jordan livres.

Vejamos agora para o caso das álgebras alternativas.

Proposição 3.4. Seja $\mathcal{F} = (F\{X\}, *)$ uma álgebra livre sobre um conjunto finito de geradores livres X em uma variedade homogênea, com uma involução $*$ tal que $x^* = x$ ou $x^* = -x$ para todo $x \in X$. Além disso, seja $H = H(\mathcal{F}, *) = \{h \in \mathcal{F} | h^* = h\}$ o subespaço dos elementos simétricos em $\mathcal{F}$, equipado com a multiplicação simétrica $a \circ b = 1/2(ab + ba)$. Então a álgebra H é finitamente gerada se, e somente se, existe um inteiro N tal que $\mathcal{F}^N \cap H \subseteq H \circ H$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F}^N \cap H \subseteq H \circ H$. Denote por H_0 o subespaço de H gerado pelos elementos de graus menores que N . É claro que H_0 tem dimensão finita e afirmamos que H_0 gera H . De fato, seja h um elemento homogêneo de H de grau n . Nós usaremos indução em n . Se $n < N$ então $h \in H_0$. Caso contrário, $h \in H \circ H$, e existem $h_i, h'_i \in H$ tais que $h = \sum_i h_i \circ h'_i$. Claramente, $\deg h'_i, \deg'_i < n$. Consequentemente, pela hipótese de indução h_i, h'_i pertencem à subálgebra gerada por H_0 . Portanto, h pertence a esta subálgebra que coincide com H .

Por outro lado, seja H finitamente gerada, e seja N o maior grau dos geradores de H que podemos assumir sendo homogêneos. Afirmamos que $\mathcal{F}^N \cap H \subseteq H \circ H$. De fato, seja h um elemento homogêneo em H com $\deg h > N$. Então h é combinação linear do produto dos geradores de H (com respeito a multiplicação $\circ$), e uma vez que $\deg h > N$, todo produto tem pelo menos dois fatores, ou seja, $h \in H \circ H$. $\square$

Lema 3.5. Sejam $(A, *)$ uma álgebra alternativa com involução $*$, $H = H(A, *)$ a álgebra de Jordan dos elementos simétricos de A , e seja $I = \text{idl}_A \langle H \circ H \rangle$ o ideal de A gerado por $H \circ H$. Então $I \cap H \subseteq H \circ H$.

Demonstração. É suficiente provar que para qualquer $h \in H$ e quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$ nós temos $(h^2)W + ((h^2)W)^* \in H \circ H$, em que $W = T_{a_1} \cdots T_{a_n}$ e $T_{a_i} \in \{R_{a_i}, L_{a_i}\}$ onde R_{a_i} e L_{a_i} são os operadores de multiplicação à direita e à esquerda, respectivamente. Provaremos isto por indução em n . Claramente, podemos assumir que $a_i \in H \cup K$ em que $K = \{k \in A | k^* = -k\}$. Para $n = 1$, se $a = h_1 \in H$:

$$h^2 h_1 + (h^2 h_1)^* = h^2 \circ h_1 \in H \circ H, \quad h_1 h^2 + (h_1 h^2)^* = h_1 \circ h^2 \in H \circ H,$$

e se $a = k \in K$

$$h^2 k + (h^2 k)^* = [h^2, k] = h \circ [h, k] \in H \circ H, \quad k h^2 + (k h^2)^* = [k, h^2] = h \circ [k, h] \in H \circ H.$$

Suponha que o lema seja válido para $n - 1$ e considere $(h^2)W + ((h^2)W)^*$ tal que W contenha $n > 1$ operadores.

Suponha que $W = UR_a R_b$, então temos $h^2 W = (h^2 U a) b = h^2 U(ab) + (h^2 U, a, b)$. Por indução temos que $h^2 U(ab) + (h^2 U(ab))^* \in H \circ H$, assim, basta considerarmos $(h^2 U, a, b) + (h^2 U, a, b)^*$. Temos três casos:

1. $a, b \in H$. Então $(h^2 U, a, b)^* = ((h^2 U)^*, a, b)$ e, assim, $(h^2 U, a, b) + (h^2 U, a, b)^* = (h^2 U + (h^2 U)^*, a, b)$. Pela hipótese de indução, $h^2 U + (h^2 U)^* \in H \circ H$, logo

$$(h^2 U + (h^2 U)^*, a, b) \in (H \circ H, a, b) \subseteq H \circ (H, a, b) \subseteq H \circ H.$$

2. $a, b \in K$. Então $(h^2 U, a, b)^* = ((h^2 U)^*, -a, -b) = ((h^2 U)^*, a, b)$ e $(h^2 U, a, b) + (h^2 U, a, b)^* =$

$(h^2U + (h^2U)^*, a, b)$. Pela hipótese de indução, $h^2U + (h^2U)^* \in H \circ H$, logo

$$(h^2U + (h^2U)^*, a, b) \in (H \circ H, a, b) \subseteq H \circ (H, a, b) \subseteq H \circ H.$$

3. $a = s \in H$, $b = k \in K$. Então $(h^2U, a, b)^* = ((h^2U)^*, s, -k)$ e $(h^2U, s, k) + (h^2U, s, k)^* = (h^2U - (h^2U)^*, s, k)$. Se $U = 1$, temos que $0 \in H \circ H$. Suponha que $U \neq 1$, $U = VT_c$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $T_c = R_c$, assim $h^2U - (h^2U)^* = (h^2V)c - c^*(h^2V)^*$. Primeiramente, assumamos que $c \in H$, então pelas identidades de Moufang linearizadas (ver [eAS82])

$$\begin{aligned} (h^2U - (h^2U)^*, s, k) &= ((h^2V)c - c(h^2V)^*, s, k) \\ &= -((h^2V)k - k(h^2V)^*, s, c) + (h^2V, sc, k) - ((h^2V)^*, cs, k) + (h^2V, sk, c) - ((h^2V)^*, ks, c). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $(h^2V)k - k(h^2V)^* = (h^2V)k + ((h^2V)k)^* \in H \circ H$, assim $((h^2V)k - k(h^2V)^*, s, c) \in (H \circ H, H, H) \subseteq H \circ H$. Além disso,

$$\begin{aligned} (h^2V, sc, k) - ((h^2V)^*, cs, k) &= (h^2V, sc, k) + (h^2V, sc, k)^* \\ &= (h^2V, d, k) + (h^2V, d, k)^* \in H \circ H \text{ por indução.} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$(h^2V, sk, c) - ((h^2V)^*, ks, c) = (h^2V, sk, c) + (h^2V, sk, c)^* \in H \circ H.$$

Agora, seja $c = k' \in K$, então novamente pelas identidades de Moufang

$$\begin{aligned} (h^2U - (h^2U)^*, s, k) &= ((h^2V)k' + k'(h^2V)^*, s, k) \\ &= -((h^2V)s - s(h^2V)^*, k', k) + (h^2V, s, kk') + ((h^2V)^*, s, k'k) + (h^2V, k', ks) + ((h^2V)^*, k', sk). \end{aligned}$$

Temos que $(h^2V)s + s(h^2V)^* = h^2Vs + (h^2Vs)^* \in H \circ H$ pela hipótese de indução, logo

$$((h^2V)s + s(h^2V)^*, k', k) \in (H \circ H, K, K) \subseteq H \circ (H, K, K) \subseteq H \circ H.$$

Ademais

$$(h^2V, s, kk') + ((h^2V)^*, s, k'k) = (h^2V, s, kk') + (h^2V, s, kk')^* \in H \circ H \text{ por indução,}$$

e, analogamente, $(h^2V, k', ks) + ((h^2V)^*, k', sk) = (h^2V, k', ks) + (h^2V, k', ks)^* \in H \circ H$. Suponha que $W = UR_aL_b$. Então temos

$$\begin{aligned} h^2W &= b(h^2Ua) + (h^2Ua)^*b^* \\ &= b(h^2Ua + (h^2Ua)^*) + ((h^2Ua)^*) + ((h^2Ua)^* + h^2Ua)b^* - b(h^2Ua)^* - (h^2Ua)b^*. \end{aligned}$$

Por indução, $h^2Ua + (h^2Ua)^* = h' \in H \circ H$, logo

$$b(h^2Ua + (h^2Ua)^*) + ((h^2Ua)^* + h^2Ua)b^* = h'b + b'h' \in H \circ H.$$

Além disso,

$$b(h^2Ua)^* + (h^2Ua)b^* = h^2UR_aR_{b^*} + (h^2UR_aR_{b^*})^* \in H \circ H \text{ pelo caso anterior.}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} h^2 U L_a L_b + (h^2 U L_a L_b)^* &= (h^2 U)^* R_{a^*} R_{b^*} + ((h^2 U)^* R_{a^*} R_{b^*})^* \in H \circ H, \\ h^2 U L_a R_b + (h^2 U L_a R_b)^* &= (h^2 U)^* R_{a^*} L_{b^*} + ((h^2 U)^* R_{a^*} L_{b^*})^* \in H \circ H, \end{aligned}$$

pelos casos anteriores. $\square$

Teorema 3.6. Sejam $(A, *)$ uma álgebra alternativa finitamente gerada com involução $*$ e $H = (H, *)$ a álgebra de Jordan dos elementos simétricos de A . Então H é finitamente gerada.

Demonstração. Pela Proposição 3.4, é suficiente provar que $A^N \cap H \subseteq H \circ H$ para algum N . Pelo lema anterior, podemos assumir que $H \circ H = 0$. Observe que a soma direta dos espaços vetoriais $A = H \oplus K$ em que $K = \{a \in A : a^* = -a\}$, define uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação da álgebra $A^{(+)}$ em que $A_0^{(+)} = H$ e $A_1^{(+)} = K$. Se $H \circ H = 0$ então por [Zhe95] a álgebra $A^{(+)}$ é solúvel. Por [I.P71], a álgebra $A^{(+)}$ é finitamente gerada, logo pelo teorema de Zhevrlakov ([eAS82], Teorema 4.2), é nilpotente. Seja $(A^{(+)})^n = 0$, então por ([eAS82], p.134), $A^{3n+1} = 0$. Portanto, $A^{3n+1} \subseteq H \circ H$, provando o teorema. $\square$

3.2.1 Problemas

No segundo capítulo, provamos que dada uma álgebra associativa A com uma involução $*$, temos que $GK \dim A = GK \dim H$. Além disso, no processo da prova, utilizamos o resultado de Osborn e de Martinez. Dessa forma, tendo em vista que o resultado de Osborn para álgebras alternativas também é válido (seção anterior), temos os seguintes problemas:

- Existe o análogo do teorema de Martinez para álgebras alternativas livres?
- Dada uma álgebra alternativa A com involução $*$, então $GK \dim A = GK \dim H$?

Outra questão bastante interessante seria encontrar um conjunto gerador minimal para a álgebra dos elementos simétricos H de $Ass[s_1, \dots, s_q, k_1, \dots, k_r]$, em que $s_i^* = s_i$ e $k_j^* = -k_j$. No Lema 3.3 encontramos tal conjunto para um caso específico.

Capítulo 4

Álgebras de Weyl e Álgebras de Jordan

Na primeira parte deste capítulo, iremos definir a n -ésima álgebra de Weyl e explorar algumas de suas propriedades. Já na segunda parte, iremos considerar duas álgebras de Jordan relacionadas com a primeira álgebra de Weyl $A_1 = \text{alg}\langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$, sendo uma a álgebra $A_1^{(+)}$ e a outra $H = H(A_1, *)$ em que $*$ é uma involução específica, e encontraremos suas representações em termos de geradores e relações.

4.1 Álgebra de Weyl

Vamos introduzir a álgebra de Weyl como um anel de operadores de um espaço vetorial de dimensão infinita. Ao longo do capítulo $\mathbb{K}[X]$ será o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ em n variáveis sobre o corpo $\mathbb{K}$ de característica zero.

A álgebra de Weyl pode ser definida como uma subálgebra da $\mathbb{K}$ -álgebra dos operadores lineares $\text{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[X]$.

Definição 4.1. Sejam $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ os operadores lineares de $\mathbb{K}[X]$ que são definidos em um polinômio $f \in \mathbb{K}[X]$ pela fórmula $\hat{x}_i(f) = x_i \cdot f$, $1 \leq i \leq n$. Similarmente, sejam $\partial_1, \dots, \partial_n$ os operadores lineares definidos por $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$. A n -ésima álgebra de Weyl A_n é a $\mathbb{K}$ -subálgebra de $\text{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[X]$ de posto finito gerada pelos operadores $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ e $\partial_1, \dots, \partial_n$.

Para $m \leq n$, a ação dos operadores de A_m em $\mathbb{K}[X]$ está bem definida. Então A_m é uma subálgebra de A_n de modo natural.

Temos que A_n é uma $\mathbb{K}$ -álgebra associativa com unidade. De acordo com a definição, os elementos de A_n são combinações lineares sobre $\mathbb{K}$ de monômios nos geradores $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \partial_1, \dots, \partial_n$. Contudo, devemos ser cuidadosos quando representarmos os elementos de A_n , pois esta álgebra não é comutativa. Podemos verificar isso facilmente. Considere o operador $\partial_i \circ \hat{x}_i$ e aplique em um polinômio $f \in \mathbb{K}[X]$, ou seja, $(\partial_i \circ \hat{x}_i)(f) = \partial_i(x_i \cdot f)$. Utilizando a regra de derivação do produto, temos que $\partial_i(x_i \cdot f) = (\partial_i(x_i)) \cdot f + x_i \cdot (\partial_i(f)) = (1)(f) + (\hat{x}_i \circ \partial_i)(f)$. Logo, como f é arbitrário, $\partial_i \circ \hat{x}_i = 1 + \hat{x}_i \circ \partial_i$, em que 1 é o operador identidade. Podemos escrever essa relação usando comutadores. Sejam $P, Q \in A_n$, o comutador entre esses operadores é o operador $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$. Portanto $[\partial_i, \hat{x}_i] = 1$.

Agora vamos considerar $[\partial_i, \hat{x}_j]$, com $i \neq j$, $[\partial_i, \partial_j]$, com $1 \leq i, j \leq n$, e $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$, com $1 \leq i, j \leq n$. Seja $f \in \mathbb{K}[X]$, um polinômio arbitrário:

- $(\partial_i \circ \hat{x}_j)(f) = \partial_i(x_j \cdot f) = (\partial_i(x_j)) \cdot f + x_j \cdot (\partial_i(f)) = (0)(f) + (\hat{x}_j \circ \partial_i)(f)$. Portanto $\partial_i \circ \hat{x}_j = \hat{x}_j \circ \partial_i$, ou seja, $[\partial_i, \hat{x}_j] = 0$, quando $i \neq j$.
- Sabemos que vale a seguinte igualdade: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Então $(\partial_i \circ \partial_j)(f) = (\partial_j \circ \partial_i)(f)$. Portanto $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

- Sabemos que as variáveis x_i e x_j comutam para todo $1 \leq i, j \leq n$. Assim $x_i \cdot (x_j \cdot f) = x_j \cdot (x_i \cdot f)$. Então $(\hat{x}_i \circ \hat{x}_j)(f) = (\hat{x}_j \circ \hat{x}_i)(f)$. Portanto $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

As relações entre os geradores da n -ésima álgebra de Weyl A_n são resumidas abaixo:

$$[\partial_i, \hat{x}_j] = \delta_{ij}$$

$$[\partial_i, \partial_j] = [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$$

em que $1 \leq i, j \leq n$ e δ_{ij} é o símbolo do delta de Kronecker (é igual a 1 se $i = j$ e 0 caso contrário).

A partir daqui denotaremos $\hat{x}_i$ pelo símbolo x_i . Logo, escreveremos x_i tanto para a variável como para o operador correspondente. Isto torna a notação menos carregada. Vamos também dispensar o sinal $\circ$ para a multiplicação em A_n .

Proposição 4.2. Para $1 \leq i \leq n$, valem as seguintes propriedades:

1. $[\partial_i, f] = \partial_i(f) = \partial f / \partial x_i$, para cada $f \in \mathbb{K}[X]$.
2. $[\partial_i, x_i^u] = u x_i^{u-1}$, para todo $u \in \mathbb{N}^*$.
3. $[\partial_i^u, x_i] = u \partial_i^{u-1}$, para todo $u \in \mathbb{N}^*$.
4. (Fórmula de Leibniz) Para cada $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\partial_i^k x_i^l = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_i^j (x_i^l) \partial_i^{k-j}$$

em que $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$. Em particular:

$$[\partial_i^k, x_i^l] = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \partial_i^j (x_i^l) \partial_i^{k-j}.$$

Demonstração. 1. Sejam $g \in \mathbb{K}[X]$, um polinômio arbitrário, e f o $\mathbb{K}$ -endomorfismo de $\mathbb{K}[X]$ tal que $f(g) = f \cdot g$. Temos que:

$$(\partial_i f)(g) = \partial_i(f \cdot g) = f \cdot (\partial_i(g)) + (\partial_i(f)) \cdot g = (f \partial_i)(g) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(g).$$

Portanto $\partial_i f - f \partial_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, ou melhor, $[\partial_i, f] = \partial_i(f) = \partial f / \partial x_i$.

2. Podemos considerar $f = x_i^u$, com $u \in \mathbb{N}^*$. Então pelo item 1, temos $[\partial_i, x_i^u] = \partial_i(x_i^u) = u x_i^{u-1}$.

3. Seja $u \in \mathbb{N}^*$. Vamos usar indução sobre u . Se $u = 1$, sabemos que $[\partial_i, x_i] = 1$, logo o resultado é válido. Suponhamos então que $u > 1$ e que o resultado seja válido para $u - 1$. Temos que:

$$[\partial_i^u, x_i] = \partial_i^u x_i - x_i \partial_i^u = \partial_i \partial_i^{u-1} x_i - x_i \partial_i \partial_i^{u-1} = \partial_i \partial_i^{u-1} x_i - x_i \partial_i \partial_i^{u-1} + \partial_i x_i \partial_i^{u-1} - \partial_i x_i \partial_i^{u-1}.$$

Assim:

$$[\partial_i^u, x_i] = \partial_i[\partial_i^{u-1}, x_i] + [\partial_i, x_i] \partial_i^{u-1} = \partial_i[\partial_i^{u-1}, x_i] + \partial_i^{u-1}.$$

Agora, usando a hipótese de indução, temos o resultado desejado

$$[\partial_i^u, x_i] = (u-1)\partial_i\partial_i^{u-2} + \partial_i^{u-1} = u\partial_i^{u-1}.$$

4. Vamos considerar $l \in \mathbb{N}^*$, pois se $l = 0$, não temos o que fazer. Vamos usar indução em k . O caso $k = 0$ é trivial. Seja $k = 1$.

$$\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{1-j} = x_i^l \partial_i + \partial_i(x_i^l) = x_i^l \partial_i + \frac{\partial x_i^l}{\partial x_i} = x_i^l \partial_i + l x_i^{l-1}.$$

Utilizando a relação descrita no item 2 temos que

$$\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{1-j} = \partial_i x_i^l,$$

assim o caso $k = 1$ está verificado. Seja $k > 1$. Suponhamos que o resultado é válido para $k-1$. Vamos verificar que também é válido para k . Temos que $\partial_i^k x_i^l = \partial_i \partial_i^{k-1} x_i^l$. Usando a hipótese de indução temos que

$$\partial_i \partial_i^{k-1} x_i^l = \partial_i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i(\partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-1-j}).$$

Agora usando a regra de derivação do produto temos

$$\partial_i^k x_i^l = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i(\partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-1-j}) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\partial_i^{j+1}(x_i^l) \partial_i^{k-1-j} + \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j}).$$

Logo

$$\begin{aligned} \partial_i^k x_i^l &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i^{j+1}(x_i^l) \partial_i^{k-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \sum_{j=0}^k \binom{k-1}{j-1} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\partial_i^k x_i^l = x_i^l \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j-1} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \partial_i^k(x_i^l).$$

Pela Fórmula de Stieffel $\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}$, temos

$$\begin{aligned}\partial_i^k x_i^l &= x_i^l \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} \right] \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \partial_i^k(x_i^l) \\ &= \binom{k}{0} x_i^l \partial_i^k + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j} + \binom{k}{k} \partial_i^k(x_i^l) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j}.\end{aligned}$$

Assim temos o resultado desejado

$$\partial_i^k x_i^l = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j},$$

em particular,

$$\partial_i^k x_i^l = x_i^l \partial_i^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j},$$

isto é,

$$[\partial_i^k, x_i^l] = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \partial_i^j(x_i^l) \partial_i^{k-j}.$$

□

4.1.1 Forma Canônica

Agora vamos construir uma base para a n -ésima álgebra de Weyl A_n como um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Esta base é conhecida como *base canônica*. Se um elemento de A_n está escrito como uma combinação linear dos elementos desta base então dizemos que ele está na forma canônica.

É mais fácil descrever a base canônica se usarmos uma notação de multi-índice. Um multi-índice α é um elemento de $\mathbb{N}^n$, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sendo assim, x^α é o monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. O *grau deste monômio* é o comprimento $|\alpha|$ do multi-índice α , ou seja, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. De maneira análoga ∂^β , com $\beta \in \mathbb{N}^n$, é o monômio $\partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}$. Observamos que o par (α, β) , em que $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, é um multi-índice de $\mathbb{N}^{2n}$, então faz sentido falar de seu comprimento, isto é, $|\alpha| + |\beta| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n$. O fatorial de um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ é definido por $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Denotaremos por e_i o multi-índice em que todas as entradas são nulas, com exceção da i -ésima entrada, que é igual a 1.

Definição 4.3. Uma *boa ordem* $\prec$ em $\mathbb{N}^n$ é dita ordem monomial se é compatível com a soma: $\alpha \prec \beta$ implica $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$, onde a soma em $\mathbb{N}^n$ é definida componente por componente.

Para qualquer ordem monomial $\prec$ em $\mathbb{N}^n$ temos que $0 = (0, \dots, 0) \prec \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ são tais que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo i , então $\alpha \prec \beta$. Podemos relacionar qualquer ordem $\prec$ em $\mathbb{N}^n$ com uma ordem (também denotada por $\prec$) no conjunto dos monômios $\{x^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, ou seja, $x^\alpha \prec x^\beta$ se, e somente se, $\alpha \prec \beta$.

Definição 4.4. A *ordem lexicográfica* (denotada por $<_{lex}$) em $\mathbb{N}^n$ é definida como segue

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) <_{lex} (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

se, e somente se, a primeira componente não nula de $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ é negativa.

A ordem lexicográfica $<_{lex}$ é uma ordem monomial. Seja $\alpha <_{lex} \beta$, ou seja, a primeira componente não nula de $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ é negativa. Assim, para $\gamma \in \mathbb{N}^n$, a primeira componente não nula de $(\alpha_1 + \gamma_1 - \beta_1 - \gamma_1, \dots, \alpha_n + \gamma_n - \beta_n - \gamma_n)$ é negativa, ou seja, $\alpha + \gamma <_{lex} \beta + \gamma$.

Lema 4.5. Sejam $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$ tais que $|\sigma| \leq |\beta|$. Então $\partial^\beta(x^\sigma) = \beta!$ se $\sigma = \beta$ e 0 caso contrário.

Demonstração. Sejam $\sigma, \beta \in \mathbb{N}^n$ tais que $|\sigma| \leq |\beta|$. Temos que

$$\partial^\beta(x^\sigma) = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}(x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}) = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}(x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}) = \frac{\partial^{\beta_1} x_1^{\sigma_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n} x_n^{\sigma_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}.$$

Observamos que se $\sigma_1 = 0$, para algum i , então $\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\sigma_i}) = \partial_i^{\beta_i}(1) = 0$ e se $\beta_i = 0$, para algum i , então $\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\sigma_i}) = 1(x_i^{\sigma_i}) = x_i^{\sigma_i}$. Logo se $\sigma_i = \beta_i$, então $\partial_i^{\beta_i}(x_i^{\sigma_i}) = 1$.

Para $1 \leq i \leq n$, o monômio $x_i^{\sigma_i}$ só depende da variável x_i . Assim cada derivada parcial $\partial/\partial x_i$ corresponde à derivada ordinária d/dx_i .

Se $\sigma = \beta$, então $\sigma_i = \beta_i$, $1 \leq i \leq n$. Assim, para todo i :

$$\frac{\partial^{\beta_i} x_i^{\sigma_i}}{\partial x_i^{\beta_i}} = \beta_i \cdot (\beta_i - 1) \dots 2 \cdot 1 = \beta_i!.$$

Então $\partial^\beta(x^\sigma) = \beta_1! \dots \beta_n! = \beta!$.

Se $\sigma \neq \beta$, então $\sigma_i \neq \beta_i$, para algum i . Como $\sigma_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, temos que $\sigma_i > \beta_i$ ou $\sigma_i < \beta_i$. Se $\sigma_i > \beta_i$ afirmamos que existe $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, tal que $\sigma_j < \beta_j$. De fato, suponha que para todo $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, $\sigma_j \geq \beta_j$ e $\sigma_i > \beta_i$. Então $\sigma_1 + \dots + \sigma_i + \dots + \sigma_n \geq \beta_1 + \dots + \beta_i + \dots + \beta_n$. Assim $\sigma_1 + \dots + \sigma_i + \dots + \sigma_n > \beta_1 + \dots + \beta_i + \dots + \beta_n$, ou seja, $|\sigma| > |\beta|$. Isso contradiz a escolha de σ, β tais que $|\sigma| \leq |\beta|$.

Portanto $\sigma_j < \beta_j$ para algum j , donde $\frac{\partial^{\beta_j} x_j^{\sigma_j}}{\partial x_j^{\beta_j}} = 0$, resultando que $\partial^\beta(x^\sigma) = 0$. $\square$

Proposição 4.6. O conjunto $C = \{x^\alpha \partial^\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ é uma base de A_n como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Demonstração. Vamos verificar que o conjunto C gera a álgebra A_n como $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

Considere $\lambda_1 \dots \lambda_r$, em que $\lambda_j \in \{x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n\}$, $1 \leq j \leq r$, um monômio nos geradores de A_n . Usando a relação $[\partial_i, x_j] = \delta_{ij}$ podemos escrevê-lo como uma soma de monômios, com coeficientes em $\mathbb{K}$, em que todas as potências dos x 's estão agrupadas à esquerda de todos os ∂ 's. Dessa forma o monômio $\lambda_1 \dots \lambda_r$ é escrito como uma combinação linear de elementos pertencentes à C . Portanto C é um conjunto gerador de A_n , como $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

Agora vamos verificar que C é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$. Seja D uma combinação linear finita de elementos de C , isto é, $D = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta$, em que $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{K}$. Temos que mostrar que se algum $c_{\alpha, \beta}$ é não nulo, então $D \neq 0$. Como D é um operador linear de $\mathbb{K}[X]$, $D \neq 0$ se, e somente se, existe um polinômio f para o qual $D(f) \neq 0$. Nós construiremos tal polinômio.

Seja $\sigma \in \mathbb{N}^n$ o menor elemento, com respeito a ordem lexicográfica, que aparece como expoente de ∂ em D . Vamos calcular $D(x^\sigma) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta(x^\sigma)$. Usando o Lema 4.5, temos que $D(x^\sigma) = \sigma! \sum_{\alpha} c_{\alpha, \beta} x^\alpha$, pois σ é estritamente menor que β , na ordem lexicográfica, então $\partial^\beta(x^\sigma) = 0$. Pela escolha de σ , existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $c_{\alpha, \sigma} \neq 0$. Logo $D(x^\sigma)$ é não nulo, pois no mínimo um dos coeficientes $c_{\alpha\sigma}$ é não nulo. Portanto $f = x^\sigma$ é o polinômio procurado, ou seja, $D \neq 0$. $\square$

Dessa forma um operador $P \in A_n$, se escreve de forma única como uma combinação linear finita dos elementos da base C , ou seja, $P = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta$, em que $c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{K}$. Logo, podemos escrever $P = \sum_{\beta} p_{\beta} \partial^\beta$, em que $p_{\beta} = \sum_{\alpha} c_{\alpha, \beta} x^\alpha \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[X]$.

Observação. Seja A uma álgebra associativa. Para quaisquer $u, v, w \in A$, temos:

1. $[vw, u] = vwu - uvw = vwu - uvw + vuw - vuw = v[w, u] + [v, u]w$.
2. $[u, vw] = uvw - vwu = uvw - vwu + vuw - vuw = v[u, w] + [u, v]w$

Proposição 4.7. Sejam $\alpha, \beta, \sigma, \eta \in \mathbb{N}^n$. Então:

$$[x^\alpha \partial^\beta, x^\sigma \partial^\eta] = x^\alpha [\partial^\beta, x^\sigma] \partial^\eta + x^\sigma [x^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta.$$

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, vamos utilizar a observação anterior:

$$\begin{aligned} [x^\alpha \partial^\beta, x^\sigma \partial^\eta] &= x^\alpha [\partial^\beta, x^\sigma \partial^\eta] + [x^\alpha, x^\sigma \partial^\eta] \partial^\beta \\ &= x^\alpha (x^\sigma [\partial^\beta, \partial^\eta] + [\partial^\beta, x^\sigma] \partial^\eta) + (x^\sigma [x^\alpha, \partial^\eta] + [x^\alpha, x^\sigma] \partial^\eta) \partial^\beta. \end{aligned}$$

Como $[\partial^\beta, \partial^\eta] = [x^\alpha, x^\sigma] = 0$, temos que

$$[x^\alpha \partial^\beta, x^\sigma \partial^\eta] = x^\alpha [\partial^\beta, x^\sigma] \partial^\eta + x^\sigma [x^\alpha, \partial^\eta] \partial^\beta.$$

$\square$

Proposição 4.8. Seja $\beta \in \mathbb{N}^n$, com $\beta_i \neq 0$. Então $[\partial^\beta, x_i] = \beta_i \partial^{\beta - e_i}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} [\partial^\beta, x_i] &= [\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}, x_i] \\ &= \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n} x_i - x_i \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n} \\ &= \partial_1^{\beta_1} \dots \widehat{\partial_i^{\beta_i}} \dots \partial_n^{\beta_n} \partial_i^{\beta_i} x_i - \partial_1^{\beta_1} \dots \widehat{\partial_i^{\beta_i}} \dots \partial_n^{\beta_n} x_i \partial_i^{\beta_i} \\ &= \partial_1^{\beta_1} \dots \widehat{\partial_i^{\beta_i}} \dots \partial_n^{\beta_n} [\partial_i^{\beta_i}, x_i] \\ &\stackrel{\text{Prop. 4.2}}{=} \partial_1^{\beta_1} \dots \widehat{\partial_i^{\beta_i}} \dots \partial_n^{\beta_n} \beta_i \partial_i^{\beta_i - 1} \\ &= \beta_i \partial^{\beta - e_i}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 4.9. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $p \in \mathbb{K}[X]$ e $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{K}$. Então para $1 \leq i \leq n$:

1. $[c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta, x_i] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \beta_i = 0 \\ \beta_i c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^{\beta - e_i} & , \text{ se } \beta_i \neq 0 \end{cases}$
2. $[\partial_i, c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \alpha_i = 0 \\ \alpha_i c_{\alpha\beta} x^{\alpha - e_i} \partial^\beta & , \text{ se } \alpha_i \neq 0 \end{cases}$

3. $[\partial^\beta, p] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, p] + [\partial_i, p]\partial^{\beta-e_i}$, desde que $\beta_i \neq 0$.

Demonstração. 1. $[c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta, x_i] = c_{\alpha\beta}[x^\alpha\partial^\beta, x_i \cdot 1]$. Pela Proposição 4.7, temos que

$$c_{\alpha\beta}[x^\alpha\partial^\beta, x_i \cdot 1] = c_{\alpha\beta}(x^\alpha[\partial^\beta, x_i]1 + x_i[x^\alpha, 1]\partial^\beta) = c_{\alpha\beta}x^\alpha[\partial^\beta, x_i].$$

Se $\beta_i = 0$, então $[\partial^\beta, x_i] = 0$, ou seja, $[c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta, x_i] = 0$. Se $\beta_i \neq 0$, pela Proposição 4.8, $[\partial^\beta, x_i] = \beta_i\partial^{\beta-e_i}$. Assim $[c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta, x_i] = \beta_i c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^{\beta-e_i}$.

2. $[\partial_i, c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta] = c_{\alpha\beta}[1 \cdot \partial_i, x^\alpha\partial^\beta]$. Pela Proposição 4.7, temos que

$$c_{\alpha\beta}[1 \cdot \partial_i, x^\alpha\partial^\beta] = c_{\alpha\beta}(1[\partial_i, x^\alpha]\partial^\beta + x^\alpha[1, \partial^\beta]\partial_i) = c_{\alpha\beta}[\partial_i, x^\alpha]\partial^\beta.$$

Se $\alpha_i = 0$, então $[\partial_i, x^\alpha] = 0$, ou seja, $[\partial_i, c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta] = 0$. Se $\alpha_i \neq 0$, pela Proposição 4.2, item 1, $[\partial_i, x^\alpha] = \alpha_i x^{\alpha-e_i}$. Assim $[\partial_i, c_{\alpha\beta}x^\alpha\partial^\beta] = \alpha_i c_{\alpha\beta}x^{\alpha-e_i}\partial^\beta$.

3. Um polinômio $p \in \mathbb{K}[X]$ tem a forma $p = \sum_{\alpha} c_{\alpha}x^{\alpha}$, com $c_{\alpha} \in \mathbb{K}$. Então $[\partial^\beta, p] = \sum_{\alpha} c_{\alpha}[\partial^\beta, x^{\alpha}]$. Considerando $\beta_i \neq 0$, temos que $\sum_{\alpha} c_{\alpha}[\partial^\beta, x^{\alpha}] = \sum_{\alpha} c_{\alpha}[\partial_i\partial^{\beta-e_i}, x^{\alpha}]$. Como $[\partial_i\partial^{\beta-e_i}, x^{\alpha}] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^{\alpha}] + [\partial_i, x^{\alpha}]\partial^{\beta-e_i}$, então

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}[\partial^\beta, x^{\alpha}] = \sum_{\alpha} c_{\alpha}[\partial_i\partial^{\beta-e_i}, x^{\alpha}] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, \sum_{\alpha} c_{\alpha}x^{\alpha}] + [\partial_i, \sum_{\alpha} c_{\alpha}x^{\alpha}]\partial^{\beta-e_i}.$$

Portanto

$$[\partial^\beta, p] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, p] + [\partial_i, p]\partial^{\beta-e_i}.$$

□

4.1.2 Geradores e relações

Outra forma de definir a álgebra de Weyl é por geradores e relações. Esta maneira é mais direta e explícita. Mais precisamente, nós podemos definir a álgebra de Weyl como um quociente de uma $\mathbb{K}$ -álgebra livre com $2n$ geradores por um ideal de relações.

Definição 4.10. ($\mathbb{K}$ -álgebra livre). Seja $\{x_i : i \in I\}$ um conjunto não vazio. O conjunto $\mathbb{K}\langle x_i : i \in I \rangle$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra, em que o produto de dois monômios é a justaposição simples e $\lambda x_i = x_i \lambda$, para todo $i \in I$ e para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Os elementos de $\mathbb{K}\langle x_i : i \in I \rangle$ são "polinômios" com coeficientes em $\mathbb{K}$ com variáveis não comutativas $\{x_i : i \in I\}$ e $\mathbb{K}\langle x_i : i \in I \rangle$ é uma $\mathbb{K}$ -álgebra associativa livre.

Teorema 4.11. (Propriedade universal). Sejam I um conjunto não vazio e A uma $\mathbb{K}$ -álgebra. Seja

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

uma função. Então existe um único homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras $\phi : \mathbb{K}\langle x_i : i \in I \rangle \rightarrow A$ tal que $\phi(x_i) = a_i$, para todo $i \in I$.

Definição 4.12. Seja $\mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \rangle$ a $\mathbb{K}$ -álgebra associativa livre nos geradores $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$. Seja J o ideal gerado pelos elementos $[y_i, y_j]$, $[z_i, z_j]$ e $[z_i, y_j] - \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Defina por $A_n^*(\mathbb{K})$ o quociente da $\mathbb{K}$ -álgebra associativa livre pelo ideal J .

A $\mathbb{K}$ -álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares finitas de palavras em $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ sobre $\mathbb{K}$. A multiplicação de dois

monômios é a justaposição simples, de acordo com a definição. Temos também que $A_n(\mathbb{K})$ (a n -ésima álgebra de Weyl) é uma $\mathbb{K}$ -álgebra associativa livre, gerada por $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$.

Podemos definir o homomorfismo sobrejetivo de $\mathbb{K}$ -álgebras associativas

$$\phi : \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \rangle \rightarrow A_n(\mathbb{K})$$

por $\phi(y_i) = x_i$ e $\phi(z_i) = \partial_i$, $1 \leq i \leq n$, de acordo com o Teorema 4.11.

O ideal J gerado pelos elementos $[y_i, y_j]$, $[z_i, z_j]$ e $[z_i, y_j] - \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, está contido no Kernel de ϕ , isto é, $J \subseteq \ker \phi$, por conta das relações satisfeitas pelos geradores da n -ésima álgebra de Weyl $A_n(\mathbb{K})$. Então ϕ induz um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras associativas $\hat{\phi} : A_n^*(\mathbb{K}) \rightarrow A_n(\mathbb{K})$, tal que $\hat{\phi}(w + J) = \phi(w)$ para todo $w \in \mathbb{K}\langle y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \rangle$.

Teorema 4.13. $\hat{\phi} : A_n^*(\mathbb{K}) \rightarrow A_n(\mathbb{K})$ é um isomorfismo.

Demonstração. Exatamente como na demonstração da Proposição 4.6, podemos usar as relações entre as classes $y_i + J$, $z_i + J$, $1 \leq i \leq n$, para verificar que todo elemento de $A_n^*(\mathbb{K})$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios da forma

$$y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n} + J$$

em que $m = (m_1, \dots, m_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$. Pela Proposição 4.6, as imagens destes monômios sob $\hat{\phi}$ formam uma base de $A_n(\mathbb{K})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Portanto, em particular, os monômios devem ser linearmente independentes em $A_n^*(\mathbb{K})$. Assim, esse homomorfismo é um isomorfismo de $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, e portanto, de $\mathbb{K}$ -álgebras. $\square$

Exemplo 6. A n -ésima álgebra de Heisenberg H_n é uma álgebra de Lie dada por geradores $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n, C$ que satisfazem as seguintes relações:

$$[P_i, P_j] = [Q_i, Q_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = \delta_{ij}C,$$

com $1 \leq i, j \leq n$, em que C está no centro. A álgebra $A_n(\mathbb{K})$ é a imagem homomórfica de $U(H_n)$ (álgebra envolvente universal da n -ésima álgebra de Heisenberg), pois podemos definir um epimorfismo $\phi : U(H_n) \rightarrow A_n$, tal que $\phi(P_i) = x_i$, $\phi(Q_i) = \partial_i$, $1 \leq i \leq n$. Portanto, $A_n(\mathbb{K})$ é o quociente de $U(H_n)$ pelo ideal gerado por $C - 1$.

4.1.3 O Grau dos Operadores em A_n

O grau de um operador em A_n comporta-se, em muitos aspectos, como o grau de um polinômio. As diferenças são contabilizadas pela não comutatividade de A_n .

Definição 4.14. Seja $D \in A_n$. O grau de D é o maior comprimento dos multi-índices $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, para qual $x^\alpha \partial^\beta$ aparece com coeficiente não nulo na forma canônica de D . É denotado por $\deg(D)$. Se D é o operador nulo, por convenção, $\deg(D) = -\infty$.

Exemplo 7. Se $P = 2x_1\partial_2 + x_1x_2^3\partial_1\partial_2 \in A_2$. Temos que $\deg(P) = 6$.

Teorema 4.15. Para $D, D' \in A_n$, o grau satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}$;
2. $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$;
3. $\deg[D, D'] \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$.

Demonstração. Se $D, D' \in A_n$, estão escritos na forma canônica, então $D + D'$ também está. Então concluímos que $\deg(D + D') \leq \max\{\deg(D), \deg(D')\}$. Notamos que se $\deg(D) \neq \deg(D')$ então temos a igualdade, ou seja, $\deg(D + D') = \max\{\deg(D), \deg(D')\}$.

Vamos usar indução sobre $\deg(D) + \deg(D')$ para provar os itens 2 e 3. Se $\deg(D)$ ou $\deg(D')$ é zero, então D ou D' é constante. Sem perda de generalidade vamos supor que D é uma constante. Temos que $\deg(DD') = \deg(D') = 0 + \deg(D') = \deg(D) + \deg(D')$. Da mesma forma $[D, D'] = 0$. Assim $\deg[D, D'] = -\infty \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$.

Suponhamos que $\deg(D), \deg(D') \geq 1$ e que o resultado é válido quando $\deg(D) + \deg(D') < k$. Escolhendo $D, D' \in A_n$, tal que $\deg(D) + \deg(D') = k$. Pelo item 1 é suficiente provar os itens 2 e 3 quando D, D' são monômios. Suponhamos primeiramente que $D = \partial^\beta$ e $D' = x^\alpha$ com $|\alpha| + |\beta| = k$. Se $\beta_i \neq 0$, então pela Proposição 4.9, item 3, temos que

$$[\partial^\beta, x^\alpha] = \partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha] + [\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i}.$$

Por indução, segue que

$$\deg[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha] \leq |\alpha| + |\beta| - 1 - 2 = |\alpha| + |\beta| - 3,$$

pois $|\beta - e_i| = |\beta| - 1$. Temos também

$$\deg[\partial_i, x^\alpha] \leq |\alpha| + 1 - 2 = |\alpha| - 1.$$

Então, usando a hipótese de indução novamente concluímos que

$$\deg(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha]) = \deg(\partial_i) + \deg[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha] \leq 1 + |\alpha| + |\beta| - 3 = |\alpha| + |\beta| - 2$$

e

$$\deg([\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i}) = \deg[\partial_i, x^\alpha] + \deg(\partial^{\beta-e_i}) \leq |\alpha| - 1 + |\beta| - 1 = |\alpha| + |\beta| - 2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \deg[\partial^\beta, x^\alpha] &= \deg(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha] + [\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i}) \\ &\leq \max\{\deg(\partial_i[\partial^{\beta-e_i}, x^\alpha]), \deg([\partial_i, x^\alpha]\partial^{\beta-e_i})\} \\ &= |\alpha| + |\beta| - 2. \end{aligned}$$

Assim $\deg[D, D'] \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$, portanto vale o item 3. Sabemos que $[\partial^\beta, x^\alpha] = \partial^\beta x^\alpha - x^\alpha \partial^\beta$. Temos que $\deg(x^\alpha \partial^\beta) \neq \deg[\partial^\beta, x^\alpha]$, pois $\deg(x^\alpha \partial^\beta) = |\alpha| + |\beta|$ e $\deg[\partial^\beta, x^\alpha] \leq |\alpha| + |\beta| - 2$. Então

$$\deg(\partial^\beta x^\alpha) = \deg([\partial^\beta, x^\alpha] + x^\alpha \partial^\beta) = \max\{\deg[\partial^\beta, x^\alpha], \deg(x^\alpha \partial^\beta)\} = |\alpha| + |\beta|.$$

Assim $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D')$, isto é, vale o item 2.

Agora sejam $D = x^\sigma \partial^\beta$ e $D' = x^\alpha \partial^\eta$ em que $|\sigma| + |\beta| + |\alpha| + |\eta| = k$. Se $|\alpha| = |\beta| = 0$, o resultado é óbvio. Então suponhamos que este não seja o caso. Temos que $\partial^\beta x^\alpha = x^\alpha \partial^\beta + P$, tal que $P = [\partial^\beta, x^\alpha]$ e sabemos pelo caso anterior que $\deg[\partial^\beta, x^\alpha] \leq |\alpha| + |\beta| - 2$. Assim

$$DD' = x^\sigma \partial^\beta x^\alpha \partial^\eta = x^\sigma (\partial^\beta x^\alpha) \partial^\eta = x^\sigma (x^\alpha \partial^\beta + P) \partial^\eta = x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta} + x^\sigma P \partial^\eta.$$

Como $\deg(x^\sigma) + \deg(P) + \deg(\partial^\eta) \leq |\sigma| + |\beta| + |\alpha| + |\eta| - 2 < k$, pela hipótese de indução

$$\deg(x^\sigma P \partial^\eta) = \deg(x^\sigma) + \deg(P) + \deg(\partial^\eta) \leq |\sigma| + |\beta| + |\alpha| + |\eta| - 2 = \deg(D) + \deg(D') - 2,$$

ou seja, $\deg(x^\sigma P \partial^\eta) = \deg(D) + \deg(D') - 2$. Observamos que $\deg(x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta}) = |\sigma| + |\beta| + |\alpha| + |\eta| = \deg(D) + \deg(D')$. Logo

$$\begin{aligned} \deg(DD') &= \deg(x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta} + x^\sigma P \partial^\eta) \\ &= \max\{\deg(x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta}), \deg(x^\sigma P \partial^\eta)\} \\ &= |\sigma| + |\beta| + |\alpha| + |\eta| \\ &= \deg(D) + \deg(D'). \end{aligned}$$

Portanto vale o item 2. Os cálculos acima nos mostram que $DD' = x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta} + Q_1$, em que $\deg(Q_1) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$. Similarmente, temos que $D'D = x^{\sigma+\alpha} \partial^{\beta+\eta} + Q_2$, em que $\deg(Q_2) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$. Então $[D, D'] = DD' - D'D = Q_1 - Q_2$. Portanto o $\deg[D, D'] = \deg(Q_1 - Q_2) \leq \deg(D) + \deg(D') - 2$, assim vale o item 3 e concluimos a demonstração. $\square$

Como no caso do anel de polinômios sobre um corpo, o Teorema 4.15 pode ser usado para provar o seguinte resultado:

Corolário 4.16. A álgebra A_n é um domínio.

Demonstração. Sejam $D, D' \in A_n$, dois operadores não nulos. Podemos supor sem perda de generalidade que D, D' estão escritos na forma canônica.

Temos que $\deg(D), \deg(D') \geq 0$. Pelo Teorema 4.15, item 2, $\deg(DD') = \deg(D) + \deg(D') \geq 0$. Então $DD' \neq 0$ e, portanto, A_n é um domínio. $\square$

Um anel comutativo simples é um corpo, mas isso não é verdade para anéis não comutativos. A álgebra de Weyl A_n é um anel simples, ver [Cou95] página 16, mas está muito longe de ser um anel de divisão.

Teorema 4.17. A álgebra A_n é simples.

Demonstração. Seja I um ideal bilateral não nulo de A_n . Seja $D \neq 0$, um elemento com menor grau em I . Se D tem grau 0, ele é uma constante. Assim $A_n D = D A_n = A_n \subseteq I$. Portanto $I = A_n$.

Agora vamos assumir que D tem grau $k > 0$ e chegaremos em uma contradição. Suponha que (α, β) é um multi-índice de comprimento k . Seja $x^\alpha \partial^\beta$ um somando de D com coeficiente não nulo, em que $\beta_i \neq 0$. Vamos analisar o elemento $[x_i, D]$. Temos que $D = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta + D'$, em que $\deg(D') < k$. Assim $[x_i, D] = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} [x_i, a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta] + [x_i, D']$. Como

$$[x_i, a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta] \stackrel{Prop.4.9}{=} -\beta_i a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^{\beta-e_i}.$$

Então $\deg([x_i, a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta]) = \deg(-\beta_i a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^{\beta-e_i}) = |\alpha| + |\beta| - 1 = k - 1$. Por outro lado, pelo Teorema 4.15, item 3, $\deg[x_i, D'] \leq 1 + \deg(D') - 2 = \deg(D') - 1 < k - 1$. Como $\deg([x_i, a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta]) \neq \deg[x_i, D']$, pelo Teorema 4.15, item 1, $\deg[x_i, D] = k - 1$. Como $k > 0$, $\deg[x_i, D] \geq 0$ e assim $[x_i, D]$ é não nulo.

Como I é um ideal bilateral de A_n e $D \neq 0$, $D \in I$, temos que $[x_i, D] = x_i D - D x_i \in I$. Mas isso contradiz a minimalidade de D . Então $\beta = (0, \dots, 0)$ e $|\alpha| = k$. Como $k > 0$, devemos ter $\alpha_i \neq 0$, para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Agora vamos analisar o elemento $[\partial_i, D]$.

Seja $D = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha + D'$, em que $\deg(D') < k$. Assim $[\partial_i, D] = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha [\partial_i, x^\alpha] + [\partial_i, D']$. Temos que

$$[\partial_i, x^\alpha] \stackrel{Prop.4.2}{=} \alpha_i x^{\alpha-e_i}.$$

Assim $\deg(a_\alpha[\partial_i, x^\alpha]) = \deg(a_\alpha \alpha_i x^{\alpha - e_i}) = |\alpha| - 1 = k - 1$. Pelo Teorema 4.15, item 3, $\deg[\partial_i, D'] \leq 1 + \deg(D') - 2 = \deg(D') - 1 < k - 1$. Logo pelo Teorema 4.15, item 1, concluímos que $\deg[\partial_i, D] = k - 1$ e como $k > 0$, $[\partial_i, D]$ é um elemento não nulo. Como $D \in I$ é não nulo e I é um ideal bilateral de A_n , $[\partial_i, D] \in I$. Isso novamente contradiz a minimalidade de D .

Portanto se I é um ideal bilateral de A_n não nulo, $I = A_n$, ou seja, A_n é simples. $\square$

O kernel de um endomorfismo de A_n é um ideal bilateral. Então temos o seguinte Corolário:

Corolário 4.18. Todo endomorfismo não nulo de A_n é injetivo.

Tendo esse corolário em mãos, temos a seguinte conjectura:

Conjectura do Dixmier. Todo $\mathbb{K}$ -endomorfismo de A_n é sobrejetor e consequentemente um isomorfismo.

Esta conjectura ainda está em aberto para todo $n \geq 1$. Na verdade a conjectura original, devido a Dixmier, foi formulada para $n = 1$ em 1968.

Um fato interessante da conjectura do Dixmier é que ela é equivalente a conjectura do Jacobiano (ver [BKK07]). Considerando $\mathbb{C}$ como sendo o corpo, temos:

Conjectura do Jacobiano. Seja f uma aplicação polinomial de $\mathbb{C}^n$. Se $\det J(f) \in \mathbb{C}^*$ ($J(f)$ é a matriz jacobiana de f) então f é injetora.

A conjectura de Jacobiano foi formulada por O.H.Keller em 1939. Desde então diversos casos particulares foram tratados. O livro [Ess00] é dedicado ao estudo dos automorfismos de polinômios com especial ênfase nessa conjectura.

Embora A_n não tenha nenhum ideal bilateral além dos triviais, A_n não é um anel de divisão. De fato, os únicos elementos de A_n que possuem inversos são as constantes.

Proposição 4.19. As unidades da álgebra de Weyl A_n são as constantes.

Demonstração. Vamos demonstrar esse fato usando o grau de um operador.

Seja $D \in A_n$ um operador não nulo. Se D possui um inverso, então existe $D' \in A_n$, não nulo, tal que $DD' = 1$, em que 1 é operador identidade. Calculando os graus, pelo Teorema 4.15, item 2, obtemos $\deg(D) + \deg(D') = 0$. Como o grau de um operador não nulo é sempre não negativo, temos que $\deg(D), \deg(D') \geq 0$. Então concluímos que $\deg(D) = \deg(D') = 0$. Portanto D é uma constante, isto é, $D \in \mathbb{K}$. $\square$

Então todo operador não constante de A_n gera um ideal à esquerda não trivial. Porém a álgebra de Weyl não é um anel de ideais principais à esquerda. Por exemplo, o ideal à esquerda gerado por ∂_1, ∂_2 em A_2 não é principal (veja [Cou95], Capítulo 2, Exercício 4.1). Entretanto, todo ideal à esquerda de A_n é gerado por dois elementos. Este é um importante resultado de J. T. Stafford. A prova é muito técnica e pode ser encontrada no artigo original de Stafford [Sta78] e também em [Bj9].

4.2 Álgebras de Jordan $A_1^{(+)}$ e $H(A_1, *)$

Nesta seção, iremos considerar duas álgebras de Jordan relacionadas com a primeira álgebra de Weyl $A_1 = \text{alg}\langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle$ e encontraremos suas representações em termos de geradores e relações.

4.2.1 A Álgebra $A_1^{(+)}$

Definição 4.20. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de F -álgebras (F um corpo). Seja $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra gerada por uma coleção finita de elementos $a_1, \dots, a_m$ e seja $F_{\mathcal{V}}\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ a álgebra livre em $\mathcal{V}$ nos geradores livres $x_1, \dots, x_m$. Considere o epimorfismo $\phi : F_{\mathcal{V}}\langle x_1, \dots, x_m \rangle \rightarrow A$, $\phi(x_i) = a_i$, $1 \leq i \leq m$. Dizemos que a álgebra A é *finitamente apresentada em $\mathcal{V}$* se o kernel $\ker \phi$ for finitamente gerado como um ideal de $F_{\mathcal{V}}\langle x_1, \dots, x_m \rangle$.

Proposição 4.21. Seja $\mathcal{F} = F\{X\}$ uma álgebra livre em um conjunto de geradores livres X em uma variedade homogênea $\mathcal{V}$ sobre um corpo F , e sejam $A = \mathcal{F}/I$ e $A' = \mathcal{F}/I'$ duas álgebras de $\mathcal{V}$, em que $I = \text{idl}\langle f_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ e $I' = \text{idl}\langle f_{\lambda} + g_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda \rangle$, f_{λ} são homogêneos e $\deg g_{\lambda} < \deg f_{\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Suponha que o conjunto $\{h_{\delta} + I \mid \delta \in \Delta\}$ gere o espaço vetorial A em que $h_{\delta} \in \mathcal{F}$ são homogêneos, então o conjunto $\{h_{\delta} + I' \mid \delta \in \Delta\}$ gera o espaço vetorial A' .

Demonstração. Basta provar que qualquer elemento homogêneo $f \in \mathcal{F}$ pode ser representado como $f = \sum \alpha_{\delta} h_{\delta} + i'$ para algum $i' \in I'$. Vamos provar isso por indução em $n = \deg f$. Se $n < m = \min\{\deg f_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ então evidentemente $f = \sum h_{\delta}$ para algum h_{δ} com $\deg h_{\delta} < m$, portanto $f = \sum h_{\delta} + I'$. Agora, suponha que $n = \deg f \geq m$ e que a afirmação seja verdadeira para todos os elementos de grau menores que n . Pela hipótese, $f = \sum \alpha_{\delta} h_{\delta} + i$ para algum $i \in I$, onde podemos assumir por homogeneidade que $\deg i = \deg f = n$. Escreva $i = \sum_{\lambda} f_{\lambda} W_{\lambda}$ onde W_{λ} são produtos dos operadores de multiplicação L_u, R_u em que u é um monômio. Como a variedade $\mathcal{V}$ é homogênea, podemos assumir que $\deg W_{\lambda} = n - \deg f_{\lambda}$. Assim

$$i = \sum_{\lambda} f_{\lambda} W_{\lambda} = \sum_{\lambda} (f_{\lambda} + g_{\lambda}) W_{\lambda} - \sum_{\lambda} g_{\lambda} W_{\lambda} = i' - \sum_{\lambda} g_{\lambda} W_{\lambda},$$

onde $i' \in I'$. Além disso, para qualquer λ temos $\deg g_{\lambda} W_{\lambda} = \deg g_{\lambda} + n - \deg f_{\lambda} < n$, portanto, pela hipótese de indução o elemento i tem a representação exigida modulo I' . $\square$

Proposição 4.22. Seja A uma álgebra associativa com um conjunto de geradores $X = \{x_i\}$. Então a álgebra de Jordan $A^{(+)}$ é gerada pelo conjunto $\{x, [x, y] : x, y \in X\}$.

Demonstração. De fato, note que

$$2xyz = (xy) \circ z + (yz) \circ x - (zx) \circ y$$

o que prova que qualquer palavra de grau três ou maior nos geradores, pertence a $(A^{(+)})^2$ e por indução é uma palavra de Jordan no conjunto $\{x, xy : x, y \in X\}$. Agora, como

$$2xy = x \circ y + [x, y]$$

segue o resultado. $\square$

Observação.

- Pela proposição anterior, temos que x, y e $[x, y] = 1$ geram $A_1^{(+)}$, mas como $1 = 2[(x^2 \circ y) \circ y - x^2 \circ (y \circ y)]$ concluímos que $A_1^{(+)}$ é gerada simplesmente por x e y .

Lema 4.23. $y^n x^m = x^m y^n + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{n!}{(n-m+i)!} x^i y^{n-m+i}$, para $n \geq m$ e $x, y \in A_1$.

Demonstração. Vamos demonstrar esse resultado utilizando indução em m .

Se $m = 1$ e $n \geq 1$, temos que $y^n x = xy^n - ny^{n-1}$ (indução em n).

Suponha que o resultado é válido para $m-1$ tal que $n > m-1$. Mostremos que é válido para m . Temos que

$$\begin{aligned}
y^n x^m &= (y^n x^{m-1})x \\
&= x^{m-1} y^n x + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^{m-1-i} \binom{m-1}{i} \frac{n!}{(n-m+1+i)!} x^i y^{n-m+1+i} x \\
&= x^{m-1} (xy^n - ny^{n-1}) + \sum_{i=0}^{m-2} (-1)^{m-1-i} \binom{m-1}{i} \frac{n!}{(n-m+1+i)!} x^i (xy^{n-m+1+i} - (n-m+1+i)y^{n-m+i}) \\
&= x^m y^n - nx^{m-1} y^{n-1} + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{0} \frac{n!}{(n-m+1)!} (xy^{n-m+1} - (n-m+1)y^{n-m}) \\
&\quad + (-1)^{m-2} \binom{m-1}{1} \frac{n!}{(n-m+2)!} (x^2 y^{n-m+2} - (n-m+2)xy^{n-m+1}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^2 \binom{m-1}{m-3} \frac{n!}{(n-2)!} (x^{m-2} y^{n-2} - (n-2)x^{m-3} y^{n-3}) \\
&\quad + (-1)^1 \binom{m-1}{m-2} \frac{n!}{(n-1)!} (x^{m-1} y^{n-1} - (n-1)x^{m-2} y^{n-2}) \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Usando a Fórmula de Stieffel $\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}$ segue que

$$\begin{aligned}
(*) &= x^m y^n - \binom{m}{m-1} \frac{n!}{(n-1)!} x^{m-1} y^{n-1} + (-1)^m \binom{m-1}{0} \frac{n!}{(n-m)!} y^{n-m} \\
&\quad + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} \frac{n!}{(n-m+1)!} xy^{n-m+1} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^2 \binom{m}{m-2} \frac{n!}{(n-2)!} x^{m-2} y^{n-2} \\
&= x^m y^n + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{n!}{(n-m+i)!} x^i y^{n-m+i}.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.24. $y^n x^m = x^m y^n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \frac{m!}{(m-n+j)!} x^{m-n+j} y^j$, para $n \leq m$ e $x, y \in A_1$.

Note que se $n \geq m$, então

$$x^m \circ y^n = 2x^m y^n + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{n!}{(n-m+i)!} x^i y^{n-m+i}, \quad (4.1)$$

$$[x^m, y^n] = - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \frac{n!}{(n-m+i)!} x^i y^{n-m+i}.$$

Lema 4.25. Seja $A_1 = \text{alg}\langle x, y \mid xy - yx = 1 \rangle$ a primeira álgebra de Weyl. Então o conjunto $\{x^i \circ y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

Demonstração. Considere $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{a_i} \circ y^{b_i} = 0$ de modo que $(a_{i-1}, b_{i-1}) < (a_i, b_i)$ na ordem lexicográfica e suponha, sem perda de generalidade, que $\alpha_n \neq 0$. Utilizando (4.1) para escrever todos os elementos da soma na forma canônica, chega-se que

$$2\alpha_n x^{a_n} y^{b_n} + \sum_j \beta_j x^{c_j} y^{d_j} = 0,$$

em que $(a_n, b_n) > (c_j, d_j)$ para todo j . Logo $\alpha_n = 0$ o que é uma contradição. Portanto, o conjunto $\{x^i \circ y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. □

Lema 4.26. Seja $J = J[X]$ uma álgebra de Jordan livre com conjunto de geradores $X = \{x_i\}$. Então o ideal associador $D(J) = \text{idl}_J \langle (a, b, c) = ab \cdot c - a \cdot bc : a, b, c \in J \rangle$ é gerado pelo conjunto $M = \{(x, y, zt), (x, y, z) : x, y, z, t \in X\}$.

Demonstração. Relembre duas identidades que são válidas nas álgebras de Jordan [eAS82]:

$$(xy, z, t) = (x, z, yt) + (y, z, xt), \quad (4.2)$$

$$(x, yz, t) = y(x, z, t) + z(x, y, t). \quad (4.3)$$

Aplicando essas identidades, podemos facilmente ver que o ideal $D(J)$ é gerado pelos associadores do tipo $d = (x, y, u)$, em que $x, y \in X$ e u é um monômio em X . Provaremos o resultado utilizando indução no grau de u . Se $\deg u \leq 2$, então $d \in M$. Assuma que $\deg u > 2$, $u = u_1 u_2$, em que $\deg u_1 \geq 2$. A identidade que segue é válida em qualquer anel ([eAS82])

$$(xy, z, t) + (x, y, zt) - (x, yz, t) - x(y, z, t) - (x, y, z)t = 0,$$

logo

$$d = (x, y, u_1 u_2) = -(xy, u_1, u_2) + (x, y u_1, u_2) + x(y, u_1, u_2) + (x, y, u_1) u_2.$$

Agora, pelas identidades (4.2), (4.3) e pela hipótese de indução d pertence ao ideal gerado por M . $\square$

Note que o conjunto M do lema anterior é gerado por $\{(x, y, y), (y, x, x), (x^2, y, y), (y^2, x, x)\}$, pois

$$(x, x, y) = -(y, x, x)$$

$$(x, y, x) = 0$$

$$(x, x, xy) = x^2(xy) - x(x(xy)) = x(x^2y) - x(x(xy)) = x(x^2y - x(xy)) = x(x, x, y)$$

$$(y, x, x^2) = (yx)x^2 - y(xx^2) = (x^2y)x - y(xx^2) = (y, x^2, x) = x(y, x, x) + x(y, x, x)$$

$$(x, y, x^2) = (xy)x^2 - x(yx^2) = (x^2y)x - x(yx^2) = 0$$

$$(y, x, xy) = -(xy, x, y) = -(x, x, y^2) - (y, x, xy)$$

$$(x, y, xy) = -(xy, y, x) = -(x, y, yx) + (x^2, y, y) = -\frac{1}{2}(x^2, y, y) + (x^2, y, y).$$

Teorema 4.27. A álgebra de Jordan $J = A_1^{(+)}$ tem a seguinte representação na variedade de álgebras de Jordan:

$$J = \text{alg}\langle x, y \mid (x, y, y) = (y, x, x) = 0, (x^2, y, y) = (y^2, x, x) = 1/2 \rangle.$$

Demonstração. Considere a álgebra de Jordan livre $\mathcal{F} = J[x, y]$, e seja I, I' os ideais de J gerados respectivamente pelos conjuntos $M = \{(x, y, y), (y, x, x), (x^2, y, y), (y^2, x, x)\}$ e $M' = \{(x, y, y), (y, x, x), (x^2, y, y) - \frac{1}{2}, (y^2, x, x) - \frac{1}{2}\}$. Temos que $\mathcal{F}/I \cong F[x, y]$, portanto, o conjunto $\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ gera tal espaço. Pela Proposição 4.21, a álgebra quociente $\mathcal{F}/I'$ é gerada como espaço vetorial pelos elementos $x^i \circ y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Note que os elementos de M' são zeros na álgebra J , logo J é uma imagem homomórfica da álgebra $\mathcal{F}/I'$. Portanto, J é gerado pelos elementos $x^i \circ y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.25 este conjunto é linearmente independente em J , donde $J \cong \mathcal{F}/I'$. $\square$

Observe que a representatividade finita de uma álgebra associativa A , em geral, não implica a mesma propriedade para a álgebra de Jordan $A^{(+)}$. Em [SZ18] foi provado que a álgebra $F\langle x, y \rangle^{(+)}$ não é finitamente apresentada, onde $F\langle x, y \rangle$ é a álgebra livre associativa. Ao mesmo tempo, foi provado no mesmo artigo que se A é finitamente apresentada, então a álgebra matricial de Jordan $M_3(A)^{(+)}$ é finitamente apresentada.

Teorema 4.28. $A_1^{(+)}$ é simples.

Demonstração. De fato, seja $0 \neq I$ ideal de $A_1^{(+)}$ e seja $p \in I$ um polinômio não nulo de menor grau escrito na forma canônica. Suponha que $\deg(p) = a > 0$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1. Algum monômio de p é do tipo $x^i y^j$ ou do tipo x^k , $i, j, k \geq 1$. Neste caso,

$$(x \circ y^2) \circ p - x \circ (y^2 \circ p) \in I,$$

e

$$\begin{aligned} (x \circ y^2) \circ p - y^2 \circ (x \circ p) &= xy^2 p + py^2 x - y^2 p x - x p y^2 \\ &= [x, [y^2, p]] \neq 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \deg((x \circ y^2) \circ p - y^2 \circ (x \circ p)) &= \deg([x, [y^2, p]]) \\ &\leq \deg(x) + \deg([y^2, p]) - 2 \\ &\leq 1 + \deg(y^2) + \deg(p) - 4 \\ &= a - 1, \end{aligned}$$

contradizendo a minimalidade de p .

Caso 2. Algum monômio de p é do tipo y^j , $j \geq 1$. Neste caso, considere

$$0 \neq [x, [x^2, p]] = (x \circ x^2) \circ p - x \circ (x^2 \circ p) \in I.$$

Assim

$$\deg([x, [x^2, p]]) \leq a - 1,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\deg(p) = 0$ e $A_1^{(+)}$ é simples. □

4.2.2 A Álgebra $H(A_1, *)$

Agora vamos considerar a segunda álgebra de Jordan associada à álgebra de Weyl A_1 .

Seja I o ideal de $F\langle x, y \rangle$ gerado pelo elemento $[x, y] - 1$. Considere a involução $x^* = x$ e $y^* = -y$ em $F\langle x, y \rangle$ e note que essa involução pode ser estendida para A_1 . De fato, defina o anti-homomorfismo sobrejetor $\phi : F\langle x, y \rangle \rightarrow \frac{F\langle x, y \rangle}{I}$ tal que $\phi(x) = x + I$ e $\phi(y) = -y + I$. Temos que $\ker \phi = I$, logo pelo teorema do isomorfismo segue que $\hat{\phi} : \frac{F\langle x, y \rangle}{I} \rightarrow \frac{F\langle x, y \rangle}{I}$ é um isomorfismo em que $\hat{\phi}(x + I) = x + I$ e $\hat{\phi}(y + I) = -y + I$, ou seja, $\hat{\phi}$ é uma involução de A_1 . Iremos considerar a involução $\hat{\phi}$ pelo simbolo $*$ e os elementos $x + I$ e $y + I$ de A_1 , simplesmente por x e y . Vamos encontrar a representação de $H(A_1, *)$ em termos de geradores e relações.

Lema 4.29. A álgebra $J = H(A_1, *)$ é gerada pelos elementos $a = x, b = y^2$.

Demonstração. Sabemos que os elementos $x, xy - yx, y^2, yxy^2 - y^2xy, yxy$ geram a álgebra $H(F\langle x, y \rangle, *)$ em que $F\langle x, y \rangle$ é a álgebra livre associativa com a involução $*$ (ver Capítulo 3). Logo, basta provarmos que os elementos $xy - yx, yxy^2 - y^2xy$ e yxy são gerados por x e y^2 . Como

$$\begin{aligned} -2(xy - yx) &= (y^2 \circ x) \circ x - y^2 \circ (x \circ x), \\ 2yxy &= x \circ y^2, \\ yxy^2 - y^2xy &= y^2, \end{aligned}$$

segue o resultado. $\square$

Lema 4.30. A álgebra $J = H(A_1, *)$ em termos dos geradores $a = x, b = y^2$ satisfaz as relações:

$$(a, a, b) = \frac{1}{2}, (b, b, a) = (a, b, b^2) = 0, (b, a, a^2) = -a, (a, a, b^2) = 3b, (b, b, a^2) = 2b. \quad (4.4)$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} (a, a, b) &= (x, x, y^2) \\ &= (x \circ x) \circ y^2 - x \circ (x \circ y^2) \\ &= \frac{1}{4}[x^2y^2 + y^2x^2 - 2xy^2x] \\ &= \frac{1}{4}[x^2y^2 + (xy^2 - 2y)x - 2xy^2x] \\ &= \frac{1}{4}[x^2y^2 - 2yx - xy^2x] \\ &= \frac{1}{4}[x(yx + 1)y - 2yx - xy(xy - 1)] \\ &= \frac{1}{4}[2xy - 2yx] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b, b, a) &= (y^2, y^2, x) \\ &= (y^2 \circ y^2) \circ x - y^2 \circ (y^2 \circ x) \\ &= \frac{1}{4}[y^4x + xy^4 - 2y^2xy^2] \\ &= \frac{1}{4}[(xy^4 - 4y^3) + xy^4 - 2(xy^2 - 2y)y^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b, b^2) &= (x, y^2, y^4) \\ &= (x \circ y^2) \circ y^4 - x \circ (y^2 \circ y^4) \\ &= \frac{1}{4}[y^2xy^4 + y^4xy^2 - xy^6 - y^6x] \\ &= \frac{1}{4}[(xy^2 - 2y)y^4 + (xy^4 - 4y^3)y^2 - xy^6 - (xy^6 - 6y^5)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b, a, a^2) &= (y^2, x, x^2) \\ &= (y^2 \circ x) \circ x^2 - y^2 \circ (x \circ x^2) \\ &= \frac{1}{4}[xy^2x^2 + x^2y^2x - y^2x^3 - x^3y^2] \\ &= \frac{1}{4}[xy^2x^2 + x^2(xy^2 - 2y) - (xy^2 - 2y)x^2 - x^3y^2] \\ &= \frac{1}{4}[-2x^2y + 2yx^2] \\ &= \frac{1}{4}[-2x(yx + 1) + 2(xy - 1)x] = -x = -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a, a, b^2) &= (x, x, y^4) \\
&= (x \circ x) \circ y^4 - x \circ (x \circ y^4) \\
&= \frac{1}{4}[x^2y^4 + y^4x^2 - 2xy^4x] \\
&= \frac{1}{4}[x^2y^4 + (xy^4 - 4y^3)x - 2xy^4x] \\
&= \frac{1}{4}[x^2y^4 - 4y^3x - xy^4x] \\
&= \frac{1}{4}[x^2y^4 - 4(xy^3 - 3y^2) - x(xy^4 - 4y^3)] \\
&= 3y^2 = 3b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b, b, a^2) &= (y^2, y^2, x^2) \\
&= (y^2 \circ y^2) \circ x^2 - y^2 \circ (y^2 \circ x^2) \\
&= \frac{1}{4}[y^4x^2 + x^2y^4 - 2y^2x^2y^2] \\
&= \frac{1}{4}[(xy^4 - 4y^3)x + x^2y^4 - 2(xy^2 - 2y)xy^2] \\
&= \frac{1}{4}[xy^4x - 4y^3x + x^2y^4 - 2xy^2xy^2 + 4yxy^2] \\
&= \frac{1}{4}[x(xy^4 - 4y^3) - 4(xy^3 - 3y^2) + x^2y^4 - 2x(xy^2 - 2y)y^2 + 4(xy - 1)y^2] \\
&= 2y^2 = 2b.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.31. As relações (4.4) fornecem a representação da álgebra de Jordan $J = H(A_1, *)$ em termos de geradores $a = x, b = y^2$.

Demonstração. Repetindo os argumentos da prova do Teorema 4.27, vemos que a álgebra J é gerada pelos elementos $a^i \circ b^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Mas na álgebra A_1 estes elementos tornam-se $x^i \circ y^{2j}$ que são linearmente independentes pelo Lema 4.25. Portanto, estes elementos formam uma base de J , $J \cong J[a, b]/I$, onde I é o ideal gerado pelas relações (4.4). □

Teorema 4.32. $H(A_1, *)$ é simples.

Demonstração. Segue a mesma linha de raciocínio do Teorema 4.28. □

Capítulo 5

Derivações de $K\langle x, y \rangle$

Neste capítulo provaremos que toda derivação localmente nilpotente D da álgebra associativa livre $A = K\langle x, y \rangle$ sobre um corpo de característica zero é triangularizável, ou seja, admite um sistema de geradores x', y' de A tal que $D(x') = f(y')$, $D(y') = 0$. Este resultado é análogo ao Teorema de Rentschler [Ren68] para a álgebra de polinômios $K[x, y]$. Como Corolário, nós obtemos uma nova prova do clássico Teorema de Czerniakiewicz-Markar Limanov [Cze72, ML70] sobre o isomorfismo de grupos de $\text{Aut}(K\langle x, y \rangle)$ e $\text{Aut}(K[x, y])$ para o caso de característica zero.

5.1 Definições Básicas

Nesta seção K denotará um corpo de característica zero.

Definição 5.1. Seja A uma K -álgebra. Uma *derivação* de A é uma aplicação linear $D : A \rightarrow A$ tal que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, para todos $a, b \in A$.

Escrevemos $\text{Der}(A)$ para o conjunto de todas as derivações de A , e este, com as operações $D + D'$ e aD definidas naturalmente por $(D + D')(b) = D(b) + D'(b)$ e $(aD)(b) = aD(b)$ (com $a, b \in A$) torna-se um A -módulo.

Definição 5.2. Uma derivação $D \in \text{Der}(A)$ é dita *localmente nilpotente* se para cada $f \in A$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ (dependendo de f) tal que $D^n(f) = 0$. Denotamos por $\text{LNDer}(A)$ o conjunto de todas as derivações $D \in \text{Der}(A)$ que são localmente nilpotentes.

Exemplo 8. As derivações parciais de um anel de polinômios constituem exemplos clássicos de derivações localmente nilpotentes. Outro exemplo é a derivação $y \frac{\partial}{\partial x}$ no anel $K[x, y]$.

Exemplo 9. Para $A = K[x, y]$ (ou $A = K\langle x, y \rangle$), temos que $\text{LNDer}(A)$ não é subespaço, pois $y \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial y} \in \text{LNDer}(A)$, porém $D = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ não é localmente nilpotente visto que $D^{2n}(x) = x$ para todo $n \geq 0$.

Definição 5.3. Seja A uma K -álgebra. Um *endomorfismo* de A é uma aplicação linear $\varphi : A \rightarrow A$ tal que

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g),$$

para todos $f, g \in A$. Se o endomorfismo φ for uma bijeção, dizemos que φ é um *automorfismo*.

Observação.

- O conjunto de todos os automorfismos de uma K -álgebra A , com a operação de composição, é um grupo, e tal conjunto denotamos por $\text{Aut}_K A$ ou simplesmente por $\text{Aut } A$.

Exemplo 10. Considere a álgebra de polinômios $K[x_1, \dots, x_n]$ em n variáveis. A aplicação $\varphi_{i,\alpha,f} : K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]$, definida por

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

em que $\alpha \in K^*$ e f é um polinômio que não contém a variável x_i , é um automorfismo. Aplicações desse tipo são denominadas *automorfismos elementares*. Um automorfismo de $K[x_1, \dots, x_n]$ é denominado *manso* (tame, em inglês) se for uma composição de automorfismos elementares, caso contrário chamamos *automorfismos selvagens* (wild).

Observação.

- Um exemplo de automorfismo selvagem é o automorfismo dado na conjectura de Nagata [Nag72]:

$\varphi \in \text{Aut } K[x, y, z]$ definido por

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + (x^2 - yz)z \\ \varphi(y) &= y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2z \\ \varphi(z) &= z\end{aligned}$$

é selvagem.

Essa conjectura permaneceu em aberto durante 30 anos e foi resolvida, de forma afirmativa, por Shestakov e Umirbaev em [SU04a, SU04b].

Definição 5.4. (*Função grau induzida por uma derivação*). Sejam $D \in \text{LNDer}(A)$ e $f \in A$. Logo $D^n(f) = 0$, $n \gg 0$. Se $f \neq 0$, defina

$$v_D(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid D^{n+1}(f) = 0\},$$

além disso, para $f = 0$ definimos $v_D(0) = -\infty$.

Proposição 5.5. Seja $D \in \text{LNDer}(A)$. Então:

1. $v_D(D(f)) = v_D(f) - 1$ sempre que $f \notin \text{Ker}(D)$;
2. v_D é uma função grau em A .

Demonstração. Seja $f \in A$ tal que $D(f) \neq 0$, e seja $m = v_D(f)$. Note que $D^{m+1}(f) = 0$, assim $D^m D(f) = 0$, implicando que $v_D(D(f)) = m - 1$.

Tomemos, além disso, $g \in A$ e seja $n = v_D(g)$. Definindo $k = \max\{m, n\}$, temos que $D^{k+1}(f+g) = D^{k+1}(f) + D^{k+1}(g) = 0$ implicando que para todos $f, g \in A$ tem-se $v_D(f+g) \leq \max\{v_D(f), v_D(g)\}$. Usando a regra de Leibniz de ordem superior, temos

$$D^{m+n+1}(fg) = \sum_{i+j=m+n+1} \binom{m+n+1}{i} D^i(f) D^j(g).$$

Se $i + j = m + n + 1$, com i e j inteiros não negativos, temos $i > m$ ou $j > n$ donde $D^i(f) D^j(g) = 0$ implicando que $D^{m+n+1}(fg) = 0$. Dessa forma, $v_D(fg) \leq m + n$ e além disso $D^{m+n}(fg) = \frac{(m+n)!}{m!n!} D^m(f) D^n(g) \neq 0$. Portanto $v_D(fg) = m + n$. $\square$

Corolário 5.6. Sejam $0 \neq f, g \in A$ e $D \in \text{LNDer}(A)$. Se $D(fg) = 0$, então $D(f) = D(g) = 0$.

Demonstração. Note que $0 = v_D(fg) = v_D(f) + v_D(g)$, e como $v_D(f)$, $v_D(g)$ são não negativos, segue que $v_D(f) = v_D(g) = 0$. $\square$

Proposição 5.7. Seja $D \in \text{LNDer}(A)$ e sejam $f_1, f_2, \dots, f_n \in A$, $n \geq 1$. Suponha que exista uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $D(f_i) \in Af_{\sigma(i)}$ para cada i . Então, para cada órbita de σ , existe i tal que $D(f_i) = 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma que σ possui apenas uma órbita. Se $D(f_i) \neq 0$ para cada i . Escolha $g_1, g_2, \dots, g_n \in K\langle x, y \rangle$ tais que $D(f_i) = g_i f_{\sigma(i)}$. Assim, temos $v_D(f_i) \geq 1$ e como $v_D(g_i) \geq 0$, segue que

$$v_D(f_i) - 1 = v_D(D(f_i)) = v_D(g_i) + v_D(f_{\sigma(i)}) \geq v_D(f_{\sigma(i)}).$$

Portanto, somando sobre i , obtemos

$$\sum_{1 \leq i \leq n} v_D(f_i) - n \geq \sum_{1 \leq i \leq n} v_D(f_{\sigma(i)}).$$

Mas isso é um absurdo, visto que os dois somatórios que aparecem são iguais. Logo, temos que $D(f_i) = 0$ para pelo menos um i . Agora, basta aplicar esse resultado para a decomposição de σ em ciclos disjuntos e concluir a proposição. $\square$

Analogamente, temos um resultado semelhante ao anterior quando trocamos os ideais à esquerda por ideais à direita. Em particular, temos que se $D(f) = gf$ ou $D(f) = fg$, então $D(f) = 0$.

Um fato muito importante envolvendo derivações localmente nilpotentes de um determinado anel é que elas definem automorfismos deste anel.

Definição 5.8. Dado $D \in \text{LNDer}(A)$, a função exponencial determinada por D é $\exp D : A \rightarrow A$, onde

$$\exp D(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(f).$$

Proposição 5.9. Suponha que $D \in \text{LNDer}(A)$.

1. $\exp D \in \text{Aut}_K(A)$.
2. Se $[D, E] = 0$ para $E \in \text{LNDer}(A)$, então $D + E \in \text{LNDer}(A)$ e $\exp(D + E) = (\exp D) \circ (\exp E)$.
3. O subgrupo de $\text{Aut}_K(A)$ gerado por $\{\exp D : D \in \text{LNDer}(A)\}$ é normal.

Demonstração. Note que $\exp D(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(f)$ é uma aplicação linear, visto que cada aplicação D^i é linear. Agora, vamos mostrar que $\exp D$ respeita a multiplicação. Suponha que $f, g \in A$ são elementos não nulos, onde $v_D(f) = m$ e $v_D(g) = n$. Então $D^i(f) = D^j(g) = 0$

para $i > m$ e $j > n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (\exp D)(f)(\exp D)(g) &= \left(\sum_{0 \leq i \leq m} \frac{1}{i!} D^i(f) \right) \left(\sum_{0 \leq j \leq n} \frac{1}{j!} D^j(g) \right) \\
 &= \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{i!j!} D^i(f) D^j(g) \\
 &= \sum_{0 \leq i+j \leq m+n} \frac{1}{(i+j)!} \binom{i+j}{j} D^i(f) D^j(g) \\
 &= \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} \left(\sum_{i+j=t} \binom{i+j}{j} D^i(f) D^j(g) \right).
 \end{aligned}$$

E da regra de Leibniz generalizada segue que

$$\begin{aligned}
 (\exp D)(f)(\exp D)(g) &= \sum_{0 \leq t \leq m+n} \frac{1}{t!} D^t(fg) \\
 &= (\exp D)(fg).
 \end{aligned}$$

Seguindo, seja $f \in A$ dado e escolha $m \geq 0$ tal que $D^m(f) = E^m(f) = 0$. Tome $n = 2m$. Como $[D, E] = 0$ temos que D e E comutam e portanto

$$(D + E)^n(f) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} D^i E^j(f).$$

Observe que cada termo desta soma, ou $i \geq m$ ou $j \geq m$, logo temos que $D^i E^j(f) = E^j D^i(f) = 0$ para cada par i, j . Assim, $D + E \in LNDer(A)$. Para mostrar que $\exp(D + E) = (\exp D) \circ (\exp E)$ usaremos a expansão acima. De fato, se considerarmos $m + m$ o menor natural tal que $(D + E)^{m+m} = 0$, onde $D^m(f) = E^m(f) = 0$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
 \exp(D + E)(f) &= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!} (D + E)^k(f) \\
 &= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} D^i E^j(f) \\
 &= \sum_{0 \leq k < m+m} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \binom{i+j}{i} D^i E^j(f) \right) \\
 &= \sum_{0 \leq i+j < m+m} \frac{1}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} D^i E^j(f) \\
 &= \sum_{0 \leq i+j < m+m} \frac{1}{i!j!} D^i E^j(f) \\
 &= \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{i!} \sum_{0 \leq j < m} \frac{1}{j!} D^i E^j(f) \\
 &= \sum_{0 \leq i < m} \frac{1}{i!} D^i \left(\sum_{0 \leq j < m} \frac{1}{j!} E^j(f) \right) \\
 &= \exp D \circ \exp E.
 \end{aligned}$$

E concluímos a igualdade, provando o item 2.

Além disso, temos que $-D \in \text{LNDer}(A)$. Pela afirmação do item 2, segue que $\exp D \circ \exp(-D) = \exp(-D) \circ \exp D = \exp(0) = I$ e isso prova que $\exp D \in \text{Aut}(A)$.

Para provarmos a afirmação 3 basta observar que, para qualquer $\alpha \in \text{Aut}(A)$, vale a seguinte igualdade:

$$\alpha(\exp D)\alpha^{-1} = \exp(\alpha D\alpha^{-1}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha(\exp D)\alpha^{-1}(f) &= \alpha(\exp D(\alpha^{-1}(f))) \\ &= \alpha\left(\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} D^i(\alpha^{-1}(f))\right) \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \alpha(D^i(\alpha^{-1}(f))) \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} (\alpha D^i \alpha^{-1})(f) \\ &= \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} (\alpha D \alpha^{-1})^i(f) \\ &= \exp(\alpha D \alpha^{-1})(f). \end{aligned}$$

Como $\alpha D \alpha^{-1} \in \text{LNDer}(A)$, visto que $(\alpha D \alpha^{-1})^n = \alpha D^n \alpha^{-1}$, nossa afirmação está provada. $\square$

Seja A um anel contendo o corpo $\mathbb{Q}$. No artigo [ML90] L. Makar-Limanov introduz um ML invariante de A , notação $ML(A)$. Este invariante demonstrou ter bastante importância no estudo de K -álgebras finitamente geradas, por exemplo, em [ML90], L. Makar-Limanov, consegue determinar os K -automorfismos de uma determinada K -álgebra.

Definição 5.10. Seja A um anel contendo o corpo $\mathbb{Q}$. O ML invariante de A , notação $ML(A)$, é a interseção de todos os conjuntos $\ker D$ tal que $D \in \text{LNDer}(A)$, isto é,

$$ML(A) = \bigcap_{D \in \text{LNDer}(A)} \ker D.$$

Claramente $ML(A)$ é um subanel de A e se A é uma K -álgebra, então $ML(A)$ é uma K -subálgebra de A . As seguintes observações são imediatas

1. $A^* \subset ML(A)$;
2. $ML(K) = K$, se K é um corpo.

Exemplo 11. Seja K um corpo. Então $ML(K[x_1, \dots, x_n]) = K$, veja que K é a interseção dos núcleos das derivadas parciais.

Exemplo 12. Seja $B = \mathbb{C}[x^2, x^3]$ subanel de $\mathbb{C}[x]$. Pode-se verificar que a única derivação localmente nilpotente de B é a derivação nula. Portanto $ML(B) = B$.

Cabe aqui observar que na literatura um anel, B , é chamado *rígido* quando $ML(B) = B$.

O próximo resultado tem como consequência que o ML invariante de um anel A é um subanel característico de uma K -álgebra A , ou seja, para todo K -automorfismo de A tem-se que sua restrição ao ML invariante de A é um K -automorfismo.

Proposição 5.11. Sejam A e B anéis. Se A é isomorfo a B , $A \cong B$, então $ML(A) \cong ML(B)$. Além disso todo isomorfismo de A em B restrito a $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$.

Demonstração. Seja $\theta : A \rightarrow B$ um isomorfismo. Seja $D \in LNDer(B)$ é fácil ver que $\theta^{-1}D\theta \in LNDer(A)$. Agora observe que se $a \in ML(A)$, nós temos que $\theta^{-1}D\theta(a) = 0$ para qualquer $D \in LNDer(B)$. Logo $D\theta(a) = 0$ para todo $D \in LND(B)$, ou seja, $\theta(a) \in ML(B)$. É imediato que a restrição θ ao anel $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$. $\square$

5.2 O Análogo do Teorema de Rentschler para $K\langle x, y \rangle$

Para provar o Teorema principal deste capítulo, precisaremos provar alguns lemas técnicos que virão a seguir. Portanto, a partir de agora iremos denotar por A a álgebra associativa livre com dois geradores, isto é, $A = K\langle x, y \rangle$.

Considere o epimorfismo natural $\pi : A \rightarrow K[x, y]$, $\pi(x) = x$, $\pi(y) = y$. Note que $\ker \pi$ coincide com o ideal gerado pelo comutador $[x, y]$, e é invariante sob os endomorfismos de A . Observe que se $0 \neq f \in \ker \pi$, então todo monômio em f contém necessariamente x e y .

O homomorfismo π induz um homomorfismo de álgebras $End(A) \rightarrow End(K[x, y])$ que nós também denotaremos por π . Se $T \in End(A)$, então definimos $(\pi(T))(\pi(f)) = \pi(T(f))$. O endomorfismo $\pi(T)$ está bem definido, pois se $\pi(f) = \pi(g)$ então $\pi(f - g) = 0$, $f - g \in \ker \pi$, e $T(f) - T(g) = T(f - g) \in \ker \pi$, logo $\pi(T(f)) = \pi(T(g))$. Claramente $\pi(Der(A)) \subset Der(K[x, y])$ e $\pi(Aut(A)) \subset Aut(K[x, y])$.

Em particular, se $D = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y} \in Der(A)$, então $\pi(D) = \pi(p)\frac{\partial}{\partial x} + \pi(q)\frac{\partial}{\partial y} \in Der(K[x, y])$.

O próximo resultado é um lema técnico que usaremos em breve.

Lema 5.12. Seja $D = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y} \in LNDer A$ tal que

$$\begin{aligned} p &= x^l y g_l + x^{l-1} y g_{l-1} + \cdots + x y g_1 + y g_0, \\ q &= x^{l-1} y h_{l-1} + x^{l-2} y h_{l-2} + \cdots + x y h_1 + y h_0, \end{aligned}$$

onde $g_i, h_j \in A$, $g_l \neq 0$, $l > 0$. Então

$$h_j = -g_l x^{l-j-1} y - g_{l-1} x^{l-j-2} y - \cdots - g_{j+1} y, \quad (5.1)$$

para todo $j = 0, \dots, l-1$.

Demonstração. Considere um elemento arbitrário $H \in \ker \pi$. Como foi observado anteriormente, qualquer monômio em H contém x e y , assim H pode ser unicamente escrito na forma

$$H = x^k y f_k + x^{k-1} y f_{k-1} + \cdots + x y f_1 + y f_0, \quad k \geq 0. \quad (5.2)$$

Além disso, como $D(\ker \pi) \subset \ker \pi$, o elemento $D(H)$ também pode ser escrito na forma (5.2).

Nós mostraremos primeiro que existe um elemento $H \in \ker \pi$ do tipo (5.2) com $k \geq l$ e $f_k \neq 0$ tal que $D(H) = x^r y t_r + x^{r-1} y t_{r-1} + \cdots + x y t_1 + y t_0$ com $r < k$.

Suponha que não seja verdade, então, para um dado $H = x^k y f_k + x^{k-1} y f_{k-1} + \cdots + x y f_1 + y f_0$ com $k \geq l$ e $f_k \neq 0$ nós temos $0 \neq D(H) = x^r y t_k + x^{r-1} y t_{r-1} + \cdots + y t_0$ com $r \geq k \geq l$ e $t_k \neq 0$. (Note que tal elemento existe, pois $\ker \pi \cap x^l A \neq 0$). Analogamente, começando com $D(H)$, obtemos $D^2(H) \neq 0$ com monômio não nulo $x^s y \cdots$ onde $s \geq r \geq l$. Repetindo o processo, teremos que $D^n(H) \neq 0$ para todo $n > 0$, que contradiz o fato de D ser localmente nilpotente.

Agora, considere um elemento H da forma (5.2). Vamos descrever os monômios de $D(H)$ que começam com $x^{k+j}y$, onde $0 < j \leq l-1$.

Observe que os termos $x^a D(x) x^b y f_i$, $i = a + b + 1$, onde $a < k + j - l$, não possuem monômios dos quais queremos, pois $a + l < k + j - l + l = k + j$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} D(H) &= x^{k-l+j} D(x) x^{l-j-1} y f_k + x^{k-l+j+1} D(x) x^{l-j-2} y f_k + \cdots + x^{k-1} D(x) y f_k \\ &+ x^{k-l+j} D(x) x^{l-j-2} y f_{k-1} + x^{k-l+j+1} D(x) x^{l-j-3} y f_{k-1} + \cdots + x^{k-2} D(x) y f_{k-1} \\ &\vdots \\ &+ x^{k-l+j} D(x) x y f_{k-l+j+2} + x^{k-l+j+1} D(x) y f_{k-l+j+2} \\ &+ x^{k-l+j} D(x) y f_{k-l+j+1} \\ &+ x^{k-l+j+1} D(y) f_{k-l+j+1} + x^{k-l+j+2} D(y) f_{k-l+j+2} + \cdots + x^k D(y) f_k \\ &+ R, \end{aligned}$$

onde R não possui monômios do tipo $x^{k+j}y \cdots$. Substituindo $D(x)$ e $D(y)$ por p e q , temos que

$$\begin{aligned} D(H) &= x^{k+j} y (g_l x^{l-j-1} y + g_{l-1} x^{l-j-2} y + \cdots + g_{j+1} y) f_k \\ &+ x^{k+j} y (g_l x^{l-j-2} y + g_{l-1} x^{l-j-3} y + \cdots + g_{j+2} y) f_{k-1} \\ &\vdots \\ &+ x^{k+j} y (g_l x y + g_{l-1} y) f_{k-l+j+2} \\ &+ x^{k+j} y g_l y f_{k-l+j+1} \\ &+ x^{k+j} y (h_{l-1} f_{k-l+j+1} + h_{l-2} f_{k-l+j+2} + \cdots + h_j f_k) \\ &+ \tilde{R}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{R}$ não possui monômios do tipo $x^{k+j}y \cdots$. Agrupando os termos com o mesmo fator f_k , podemos reescrever a igualdade como

$$\begin{aligned} D(H) &= x^{k+j} y (g_l x^{l-j-1} y + g_{l-1} x^{l-j-2} y + \cdots + g_{j+1} y + h_j) f_k \\ &+ x^{k+j} y (g_l x^{l-j-2} y + g_{l-1} x^{l-j-3} y + \cdots + g_{j+2} y + h_{j-1}) f_{k-1} \\ &\vdots \\ &+ x^{k+j} y (g_l x y + g_{l-1} y + h_{l-2}) f_{k-l+j+2} \\ &+ x^{k+j} y (g_l y + h_{l-1}) f_{k-l+j+1} \\ &+ \tilde{R}. \end{aligned}$$

Escolha agora um elemento H de modo que $D(H) = x^r y t_r + x^{r-1} y t_{r-1} + \cdots + x y t_1 + y t_0$ com $r < k$. Como $D(H)$ não tem monômios do tipo $x^{k+l-1}y \cdots$, segue da igualdade acima que para $j = l-1$:

$$0 = (g_l y + h_{l-1}) f_k,$$

que implica (5.1) para $j = l-1$:

$$h_{l-1} = -g_l y. \quad (5.3)$$

Analogamente, para $j = l-2$ temos que

$$0 = (g_l x y + g_{l-1} y + h_{l-2}) f_k + (g_l y + h_{l-1}) f_{k-1},$$

que, tendo em vista (5.3) dá (5.1) para $j = l - 2$:

$$h_{l-2} = -g_l xy - g_{l-1} y.$$

Agora, seja $0 < i < l - 2$ e suponha que a igualdade (5.1) é verdadeira para todo j , $i < j \leq l - 1$. Então temos que

$$\begin{aligned} 0 = x^{k+i} y \quad \{ & (g_l x^{l-i-1} y + g_{l-1} x^{l-i-2} y + \cdots + g_{i+1} y + h_i) f_k \\ & + (g_l x^{l-i-2} y + g_{l-1} x^{l-i-3} y + \cdots + g_{i+2} y + h_{i+1}) f_{k-1} \\ & + \cdots \\ & + (g_l xy + g_{l-1} y + h_{l-2}) f_{k-l+i+2} \\ & + (g_l y + h_{l-1}) f_{k-l+i+1} \}, \end{aligned}$$

que implica em (5.1) para $j = i$. Finalmente, para $j = 0$ temos que

$$\begin{aligned} 0 = x^k y \quad \{ & (g_l x^{l-1} y + g_{l-1} x^{l-2} y + \cdots + g_1 y + h_0) f_k \\ & + (g_l x^{l-2} y + g_{l-1} x^{l-3} y + \cdots + g_2 y + h_1) f_{k-1} \\ & + \cdots \\ & + (g_l xy + g_{l-1} y + h_{l-2}) f_{k-l+2} \\ & + (g_l y + h_{l-1}) f_{k-l+1} + D(f_k) \}, \end{aligned}$$

daí pelas igualdades em (5.1) para $j > 0$, segue que

$$0 = x^k y ((g_l x^{l-1} y + g_{l-1} x^{l-2} y + \cdots + g_1 y + h_0) f_k + D(f_k)).$$

Portanto, $D(f_k) \in Af_k$ e $D(f_k) = 0$, implicando em (5.1) para $j = 0$. $\square$

Corolário 5.13. Sob as premissas do Lema, $D(y) = q = 0$.

Demonstração. As igualdades em (5.1) mostram que $D(y) = q \in Ay$, assim $D(y) = 0$. $\square$

Lema 5.14. $\ker \pi \cap LNDer A = 0$.

Demonstração. Suponha que exista $0 \neq D = p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} \in LNDer A$ tal que $\pi(D) = \pi(p) \frac{\partial}{\partial x} + \pi(q) \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Então $\pi(p) = \pi(q) = 0$ e $p, q \in idl\langle [x, y] \rangle$. Assim todos os monômios não nulos em p, q contêm necessariamente x e y .

Escolha $0 \neq h \in idl\langle [x, y] \rangle \cap \ker D$ de menor grau. Tal elemento necessariamente existe, pois se $v_D([x, y]) = n$, então $0 \neq D^{n-1}([x, y]) \in idl\langle [x, y] \rangle \cap \ker D$. Escreva $h = xh' + yh''$, então ambos $h', h'' \neq 0$ pois se, por exemplo, $h'' = 0$, então $0 = D(xh')$ e pelo Corolário 5.6 teríamos $D(h') = 0$. Claramente, $h' \in idl\langle [x, y] \rangle$, que contradiz a minimalidade de h .

Seja $l = \min\{i \mid p, q \in \sum_{j=0}^i x^j y A\}$. Afirmamos que $l > 0$.

De fato, se $l = 0$ então $q = yq_1$, ou seja, $D(y) = yq_1$, implicando que $D(y) = 0 = q$. Seja $p = y^k x f + \sum_{i < k} y^i x f_i$, e seja $h = y^m x g + \sum_{i < m} y^i x g_i$, onde $f, g \neq 0$, $k > 0$, $m \geq 0$. Então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= D(h) = y^m D(x)g + y^m x D(g) + \sum_{i < m} y^i (D(x)g_i + x D(g_i)) \\ &= y^m p g + y^m x D(g) + \sum_{i < m} y^i (p g_i + x D(g_i)) \\ &= y^{m+k} x f g + \sum_{i < m+k} y^i x h_i, \end{aligned}$$

donde $fg = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $l > 0$.

Seja $h = x^t y f + \sum_{i < t} x^i y f_i$, $f \neq 0$. Suponha primeiro que $q \notin \sum_{j=0}^{l-1} x^j y A$, então $q = x^l y g + \sum_{i < l} x^i y g_i$ com $g \neq 0$, e

$$0 = D(h) = x^{t+l} y g f + \sum_{i < t+l} x^i y t_i,$$

implicando que $g f = 0$, contradição. Logo, $q \in \sum_{j=0}^{l-1} x^j y A$, e nós estamos nas condições do Lema 5.12. Assim, pelo Corolário 5.13 $D(y) = q = 0$ e $D = p \frac{\partial}{\partial x}$.

Seja $p = y^k x f + \sum_{i < k} y^i x f_i$, $h = y^m x g + \sum_{i < m} y^i x g_i$, $k, m \geq 0$, $f g \neq 0$. Se $k > 0$, temos que

$$0 = D(h) = y^{m+k} f g + \sum_{i < m+k} y^i x t_i,$$

implicando que $f g = 0$, contradição. Logo $k = 0$ e $p = D(x) \in x A$. Portanto, $D(x) = p = 0$ e como já vimos que $D(y) = q = 0$, segue que $D = 0$, que contradiz o fato de $D \neq 0$. Portanto $\ker \pi \cap LNDer A = 0$. $\square$

Escreva

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} A^{[m]},$$

onde $A^{[m]} = \{f \in A \mid \deg_x f = m\}$ é a *componente x - homogênea* de A de grau m . Se $f \in A$, denotamos por $\bar{f}$ o termo líder de f com relação ao x - grau.

Lema 5.15. Para $f, g \in A$ temos que

a) $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$;

b) Se $(\bar{f} \frac{\partial}{\partial x})(\bar{g}) = h \neq 0$, então $\overline{(f \frac{\partial}{\partial x})(g)} = h$.

Demonstração. A afirmação em a) é evidente. Para b) note que se $u \in A^{[m]}$, $v \in A^{[p]}$, então $(u \frac{\partial}{\partial x})(v) \in A^{[m+p-1]}$. Logo, if $u > u_1$, $v > v_1$ então

$$(u \frac{\partial}{\partial x})(v) > (u_1 \frac{\partial}{\partial x})(v), \quad (u \frac{\partial}{\partial x})(v) > (u \frac{\partial}{\partial x})(v_1),$$

que implica b). $\square$

Corolário 5.16. Seja $D = p \frac{\partial}{\partial x} \in LNDer A$, então $\bar{D} = \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \in LNDer A$.

Demonstração. Mostraremos primeiro, por indução em n , que $\overline{D^n(x)} = \bar{D}^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A base de indução para $n = 1$ é evidente. Suponha que $\overline{D^{n-1}(x)} = \bar{D}^{n-1}(x)$, então nós temos por b)

$$\overline{D^n(x)} = \overline{D(\overline{D^{n-1}(x)})} = \bar{D}(\overline{D^{n-1}(x)}) = \bar{D}(\bar{D}^{n-1}(x)) = \bar{D}^n(x).$$

Agora, suponha que $D^N(x) = 0$, então temos $\bar{D}^N(x) = 0$. Como $\bar{D}(y) = 0$, isto prova o corolário. $\square$

Lema 5.17. Seja $D = (p + g(y)) \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} \in LNDer A$, onde $g(y) \in K[y]$. Se $\pi(p) = \pi(q) = 0$, então $p = q = 0$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que é suficiente considerar o caso $D(y) = q = 0$.

Escolha $0 \neq h \in \text{idl}\langle [x, y] \rangle \cap \ker D$ de menor grau. Tal elemento existe, pois se $v_D([x, y]) = n$ então $0 \neq D^{n-1}([x, y]) \in \text{idl}\langle [x, y] \rangle \cap \ker D$. Escreva $h = xh' + yh''$, então ambos $h', h'' \neq 0$ pois se, por exemplo, $h'' = 0$, então $0 = D(xh')$ e pelo Corolário 5.6 $D(h') = 0$. Claramente, $h' \in \text{idl}\langle [x, y] \rangle$, que contradiz a minimalidade de h .

Seja $l = \min\{i \mid p, q \in \sum_{j=0}^i x^j y A\}$. Se $l = 0$, então $q = yq_1$, ou seja, $D(y) = yq_1$, implicando que $D(y) = 0$. Assim podemos supor que $l > 0$. Observe que $p, q \in \text{idl}\langle [x, y] \rangle$, logo todos os monômios de p e q necessariamente contém ambos x e y .

Seja $h = x^t y f + \sum_{i < t} x^i y f_i$, $f \neq 0$. Suponha primeiro que $q \notin \sum_{j=0}^{l-1} x^j y A$, então $q = x^l y g + \sum_{i < l} x^i y g_i$ com $g \neq 0$, e assim

$$0 = D(h) = x^{t+l} y g f + \sum_{i < t+l} x^i y t_i,$$

implicando que $g f = 0$, contradição. Portanto, $q \in \sum_{j=0}^{l-1} x^j y A$, e nós estamos nas condições do Lema 5.12. Daí pelo Corolário 5.13 $D(y) = q = 0$ e $D = (g(y) + p) \frac{\partial}{\partial x}$.

Pelo Corolário 5.16, a derivação $\bar{D} = \overline{(g(y) + p)} \frac{\partial}{\partial x} \in \text{LNDer } A$. Como $p \in \ker \pi$, todo monômio em p contém x , implicando que $\bar{g}(y) + \bar{p} = \bar{p}$. Portanto, $\bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \in \text{LNDer } A$. Claramente, o ideal $\ker \pi$ é homogêneo, logo $\bar{p} \in \ker \pi$. Agora pelo Lema 5.14 $\bar{p} = 0$ donde $p = 0$. $\square$

Agora, enuciaremos o teorema de Rentschler que será utilizado para provar o nosso resultado que virá na sequência.

Teorema 5.18. (Teorema de Rentschler) Seja K um corpo de característica zero. Se $D \in \text{LNDer}(K[x, y])$ é não nula, então existe $h \in K[y]$ e um automorfismo $\alpha \in \text{Aut} K[x, y]$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = h(y) \frac{d}{dx}$.

Observações.

- Dizer que existe um automorfismo $\alpha \in \text{Aut} K[x, y]$ tal que $\alpha D \alpha^{-1} = h(y) \frac{d}{dx}$ ou que existe um sistema de geradores $x', y' \in K[x, y]$ tal que $D(x') = h(y')$ e $D(y') = 0$ são equivalentes. Basta considerar $\alpha^{-1}(x) = x'$ e $\alpha^{-1}(y) = y'$.
- Dada uma derivação D localmente nilpotente que seja triangularizável com um sistema de geradores, segue que, com o mesmos conjunto de geradores, o automorfismo $\exp(D)$ é manso.

Teorema 5.19. Toda derivação localmente nilpotente D , não nula, em $K\langle x, y \rangle$ é triangularizável.

Demonstração. Seja $D \in \text{LNDer } K\langle x, y \rangle$ não nula e note que $\pi(D) \in \text{LNDer } K[x, y]$ é não nula pelo Lema 5.14. Logo, pelo Teorema de Rentschler, $\pi(D)$ é triangularizável, ou seja, existe $\bar{\varphi} \in \text{Aut} K[x, y]$ tal que os elementos $x' = \bar{\varphi}(x)$ e $y' = \bar{\varphi}(y)$ satisfazem as condições $\pi(D)(x') = g(y'), \pi(D)(y') = 0$. Seja $\varphi \in \text{Aut } K\langle x, y \rangle$ tal que $\pi(\varphi) = \bar{\varphi}$. Se $\tilde{x} = \varphi(x)$, $\tilde{y} = \varphi(y)$, então $K\langle x, y \rangle = K\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$, $\pi(\tilde{x}) = x'$, $\pi(\tilde{y}) = y'$, e existe uma derivação $D' \in \text{LNDer } K\langle x, y \rangle$ tal que $D'(\tilde{x}) = g(\tilde{y})$, $D'(\tilde{y}) = 0$.

Considere $\pi(D') \in \text{Der } K[x, y] = \text{Der } K[x', y']$ e note que

$$\begin{aligned} \pi(D')(x') &= \pi(D')(\pi(\tilde{x})) = \pi(D'(\tilde{x})) = \pi(g(\tilde{y})) = g(\pi(\tilde{y})) = g(y'), \\ \pi(D')(y') &= \pi(D')(\pi(\tilde{y})) = \pi(D'(\tilde{y})) = \pi(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\pi(D') = \pi(D)$ e $D'' = D' - D \in \ker \pi$. Assim $D'' = \tilde{p} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{q} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$ onde $\tilde{p}, \tilde{q} \in \ker \pi$ e nós temos $D = (-\tilde{p} + g(\tilde{y})) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} - \tilde{q} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \in \text{LNDer } A$. Agora pelo Lema 5.17 aplicando para $A = K\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$, temos $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$, donde $D'' = 0$ e $D = D'$ é triangularizável. $\square$

Exemplo 13. Seja $D = -(x+y)^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x+y)^2 \frac{\partial}{\partial y}$ em $K\langle x, y \rangle$. Temos que $D^2(x) = 0$ e $D^2(y) = 0$, logo D é localmente nilpotente e pelo Teorema 5.19, existe um sistema x', y' de geradores tais que $D(y') = 0$ e $D(x') \in K[y']$. Tal sistema é dado por $x' = x$ e $y' = y + x$. De fato, $D(y') = D(x+y) = 0$, $D(x') = D(x) = -(x+y)^2 = -(y')^2 \in K[y']$ e $K\langle x, y \rangle = K\langle x', y' \rangle$.

Exemplo 14. Em $K[x, y, z]$ podemos encontrar derivações localmente nilpotentes que não são triangularizáveis. Um exemplo dessa situação é a derivação $D = u(x \frac{d}{dy} - 2y \frac{d}{dz})$ em que $u = xz + y^2$. A prova consiste em mostrar que $\exp(D)$ não é manso. De fato, note que

$$\begin{aligned} D(x) &= 0 \\ D(y) &= ux \\ D(z) &= -2uy \\ D(u) &= D(xz + y^2) = x(-2uy) + ux2y = 0 \\ D^2(y) &= 0 \\ D^2(z) &= -2u^2x \\ D^3(z) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o automorfismo correspondente à derivação D é o de Nagata [Nag72]:

$$\begin{aligned} \exp D(x) &= x, \\ \exp D(y) &= y + ux, \\ \exp D(z) &= z - 2uy - u^2x, \end{aligned}$$

que é selvagem por [SU04a, SU04b].

Corolário 5.20. Se $D \in \text{LNDer } K\langle x, y \rangle$, então $\langle [x, y] \rangle \subseteq \ker D$.

Demonstração. Pelo Teorema 5.19, existem $x', y' \in K\langle x, y \rangle$ tais que $K\langle x', y' \rangle = K\langle x, y \rangle$, $D(x') \in K[y']$ e $D(y') = 0$. Pelo Teorema de Dicks [Dic82] (enunciaremos abaixo), temos que $[x', y'] = \lambda[x, y]$ para algum escalar λ não nulo. Logo

$$D([x, y]) = \frac{1}{\lambda} D([x', y']) = 0.$$

$\square$

Teorema 5.21. (Dicks) Sejam K um corpo qualquer, $K\langle x, y \rangle$ a álgebra livre associativa em duas variáveis, x', y' dois elementos de $K\langle x, y \rangle$ e $K\langle x', y' \rangle$ a subálgebra gerada por x', y' . Então $K\langle x', y' \rangle = K\langle x, y \rangle$ se, e somente se, $[x', y'] = \lambda[x, y]$ para algum escalar não nulo λ .

Como consequência do último Corolário, podemos concluir que a hipótese do Teorema 5.19, sobre o corpo K ter característica zero, não pode ser "relaxada".

De fato, seja K_p um corpo de característica prima p . Suponha que toda derivação localmente nilpotente de $K_p\langle x, y \rangle$ seja triangularizável. Logo o Corolário 5.20, pode ser generalizado para um corpo qualquer, em particular, se $D \in \text{LNDer } K_p\langle x, y \rangle$, então $\langle [x, y] \rangle \subseteq \ker D$.

Considere agora a seguinte derivação

$$D = x^p \frac{\partial}{\partial x} + y^p \frac{\partial}{\partial y},$$

em $K_p\langle x, y \rangle$. Temos que D é localmente nilpotente, pois $D^2(x) = 0 = D^2(y)$, porém

$$D([x, y]) = [x^p, y] + [x, y^p] \neq 0.$$

Portanto, não é verdade que toda derivação localmente nilpotente em $K_p\langle x, y \rangle$ é triangulável.

5.3 Aplicação para $Aut(K\langle x, y \rangle)$

Considere agora o homomorfismo natural $\eta : Aut K\langle x, y \rangle \rightarrow Aut K[x, y]$. Pelo Teorema de Jung-Van der Kulk [Jun42, vdK53], η é sobrejetora, e pelo Teorema de Czerniakiewicz-Makar Limanov [Cze72, ML70], η é injetora. Nós provaremos agora que a injetividade de η segue facilmente (para o caso de característica zero) do Teorema 5.19.

Teorema 5.22. O homomorfismo natural de grupos $\eta : Aut K\langle x, y \rangle \rightarrow Aut K[x, y]$ é injetor e, portanto, todo automorfismo da álgebra $K\langle x, y \rangle$ são mansos.

Demonstração. Seja $\theta \in \ker \eta$. Assim $\eta(\theta)$ é o automorfismo identidade de $K[x, y]$ implicando que

$$\theta(x) = x + a, \quad \theta(y) = y + b, \quad \text{onde } a, b \in I = \text{idl}\langle [x, y] \rangle, K\langle x, y \rangle = K\langle x + a, y + b \rangle.$$

Para um elemento $h \in K[x]$ denote por D_h a derivação de $K\langle x, y \rangle$ definida pelas condições $D_h(x + a) = h(y + b)$, $D_h(y + b) = 0$. Note que D_h é localmente nilpotente e que

$$D_h = (h(y) + (h(y + b) - h(y)) - D_h(a)) \frac{d}{dx} - D_h(b) \frac{d}{dy},$$

uma vez que $D_h(x) = h(y) + (h(y + b) - h(y)) - D_h(a)$ e $D_h(y) = -D_h(b)$. O ideal I é invariante sobre qualquer derivação, consequentemente $(h(y + b) - h(y)) - D_h(a), D_h(b) \in I$. E como D_h é localmente nilpotente, segue do Lema 5.17 que $D_h = h(y) \frac{d}{dx}$ e, portanto, $D_h(x) = h(y)$, $D_h(y) = 0$ e $D_h(a) = h(y + b) - h(y)$.

Considere $h = x$. Então $D_h(a) = b$ e $gr(D_h(a)) \leq gr(a)$, pois $D_h(x) = y$ e $D_h(y) = 0$. Consequentemente $gr(b) \leq gr(a)$. Se trocarmos x e y na definição de D_h , teremos que $gr(a) \leq gr(b)$, donde $gr(a) = gr(b)$.

Considere agora $h = x^2$. Então $D_h(a) = yb + by + b^2$. Neste caso $gr(D_h(a)) \leq gr(a) + 1$, pois $D_h(x) = y^2$ e $D_h(y) = 0$. Logo $gr(a) + 1 \geq 2gr(b) = 2gr(a)$, donde $gr(a) \leq 1$. Daí como $a, b \in I$ e $gr(a) = gr(b) \leq 1$, segue que $a = b = 0$, mostrando que $\text{Ker} \eta = \{Id\}$. $\square$

- Uma questão interessante agora é estudar triangularização de derivações localmente nilpotentes de álgebras de Jordan e de Lie livres.

Referências Bibliográficas

- [Bj9] J.E. Björk. Rings of differential operators. *North Holland Mathematical Library*, Amsterdam, 1979. [33](#)
- [BKK07] A. Belov-Kanel e M. Kontsevich. The jacobian conjecture is stably equivalent to the dixmier conjecture. *Mosc. Math. J.*, 209-218, 2007. [33](#)
- [Coh54] P.M Cohn. On homomorphic images of special Jordan algebras. *Canad. J. Math.*, (6):253–264, 1954. [15](#)
- [Cou95] S.C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-modules*, volume 22. London Math. Soc.-Student Texts 33. Cambridge University Press, 1 edição, 1995. [32](#), [33](#)
- [CS20] S.H.D. Crode e I. Shestakov. Locally nilpotent derivations and automorphisms of free associative algebra with two generators. *Comm. Algebra*, (48):1–8, 2020. [3](#)
- [Cze72] A.G. Czerniakiewicz. Automorphisms of a free associative algebra of rank two, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (160):393–401, 1971; (171):309-315, 1972. [41](#), [52](#)
- [Dic82] W. Dicks. A commutator test for two elements to generate the free algebra of rank two. *Bull. London Math. Soc.*, (14):48–51, 1982. [51](#)
- [eAS82] K.A. Zhevlakov; A.M. Slinko; I.P. Shestakov e A.I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*. Moscow, Nauka, 1978. English transl.: Academic Press, N.Y., 1982. [20](#), [21](#), [36](#)
- [Ess00] A. Van Den Essen. *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*. Base: Birkhäuser Verlag, 2000. [33](#)
- [Her76] I.N Herstein. *Rings with Involution*. University of Chicago Press, 1976. [2](#), [12](#), [15](#)
- [I.P71] I.P.Shestakov. On certain classes of noncommutative jordan rings. *Algebra Logic*, (10):407–448, 1971. [21](#)
- [Jun42] H.W.E. Jung. Über ganze birationale Transfomationen der Ebene. *J.reine angew. Math*, (184):161–174, 1942. [1](#), [52](#)
- [KL91] G. Krause e T.H. Lenagan. *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension*, volume 22. American Mathematical Society, 1991. [1](#), [5](#), [6](#), [8](#), [9](#), [11](#)
- [Mar96] C. Martinez. Gelfand-Kirillov dimension in Jordan algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (348):119–126, 1996. [1](#), [12](#)
- [ML70] L. Makar-Limanov. The automorphisms of the free algebra of two generators. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, (4):107–108, 1970. [41](#), [52](#)

- [ML90] L. Makar-Limanov. On groups of automorphisms of a class of surfaces. *Israel J. Math.*, (68):250–256, 1990. [45](#)
- [MZ96] C. Martinez e E. Zelmanov. Jordan algebras of gelfand-kirillov dimension one. *J. Algebra*, (180):211–238, 1996. [9](#)
- [Nag72] M. Nagata. *On automorphism group of $k[X, Y]$* , volume (5). Tokyo: Kinokuniya Book-Store, 1972. [42](#), [51](#)
- [Ren68] R. Rentschler. Operations du groupe additif sur le plan. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (267):384–387, 1968. [1](#), [41](#)
- [Smi90] O.N. Smirnov. Solvability and nilpotency of an Alternative algebra with involution. *Sib. Math. J.*, (31):319–326, 1990. [18](#)
- [Sta78] J.T. Stafford. Module structure of weyl algebras. *J. London Math. Soc.*, (18):429–442, 1978. [33](#)
- [SU04a] I. Shestakov e U. Umirbaev. Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials. *J. Amer. Math. Soc.*, (17):181–196, 2004. [42](#), [51](#)
- [SU04b] I. Shestakov e U. Umirbaev. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. *J. Amer. Math. Soc.*, (17):197–227, 2004. [42](#), [51](#)
- [SZ18] I. Shestakov e E. Zelmanov. A finite presentation of jordan algebras. *Internat. J. Algebra Comput.*, (28):1705–1716, 2018. [2](#), [36](#)
- [vdK53] W. van der Kulk. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (3):33–41, 1953. [52](#)
- [Zhe95] V. N. Zhelyabin. Jordan superalgebras with the solvable even part. *Algebra Logic*, (34):44–60, 1995. [21](#)